ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

67

Siebenundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1882.

Inhalts-Verzeichniss

des siebenundsechzigsten Teils.

Integral- und Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Berichtigungen

im 64. Teile:

Seite 171.	Zeile	1	von unt.	statt pour	setze	par
„ 173.	„	10	„ „	„ cet	„	est
„ 176.	„	10	„ „	„ Anreihung	„	Anreizung

im 65. Teile:

Seite 168.	Zeile	2	v. unt.	statt Asymptoten	setze	Asymptote D_1
„ 169.	„	7	v. ob.	„ Bildebene	„	Spur S
„ „	„	7	v. unt.	„ $(su_1')(ux')$	„	$(su_1' \parallel ux')$
„ „	„	„	„	„ $(sx_1)(vx')$	„	$(sx_1 \parallel vx')$
„ 170.	„	17	v. ob.	„ Geraden D_1, D_1'	„	Gerade D_1

im 67. Teile:

Seite 33. Zeile 3 v. ob. statt $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1}$ setze $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{n_1}$

„ 40. „ 11 u. 12 „ statt

Sie teilt das Netz in symmetrische Hälften;

setze:

In die 6 davon begrenzten hohlen Pyramiden setzen wir 6 Oktaeder; dann ist die Oberfläche nur die umgekehrte, die übrige Construction in umgekehrter Folge dieselbe;

Seite 40. Zeile 13 v. ob. lautet nun:

$$N(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}) = 1+8+6+8+1 = 24; \quad N = 288$$

Seite 42. Zeile 21 v. ob. muss lauten:

V. 6 Okt. | 24 | 96 | 96 | 24

Seite 43. Zeile 7. v. ob. muss lauten:

V. $8\sqrt{2} = 11{,}3137085$ | 2

Seite 43. Zeil 6 v. unt. muss lauten:

V. 6,72717 | 1,12838 | 1,33333 R

Seite 112.	Zeile	23	v. ob.	statt $A'B'$	setze	$A'C'$
„ 204.	„	4	„	„ x	„	α
„	„	13	„	„ $y=\frac{a}{2}$	„	$y=\frac{a}{\alpha}$
„	„	13	„	„ $\frac{\sin\alpha}{a}$	„	$\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$
„	„	14	„	„ $\frac{1}{a}\sqrt{a^4+a^2}$	„	$\frac{1}{\alpha}\sqrt{a^4+a^2}$

Seite 206.	Zeile	1	v. unt.	statt $\pm\frac{2a}{(2a\pm1)\pi}$		setze $\frac{2a}{(2n\pm1)\pi}$
„	„	6	v. ob.	vor liegen		„ Θ
„ 207.	„	8	„	statt $b\pi$		„ $2b\pi$
„ 208.	„	10	„	„	d	„ das
„	„	24	„	„	c^2	„ b^2
„ 209.	„	2	„	„	Cure	„ Curve
„	„	3	„	„	$\sin w$	„ $\cos w$, $y = \frac{a}{w}\sin w$
„	„	11	„	„	P	„ (P)
„	„	25	„	„	entsprechen	„ entsprächen
„	„	27	„	nach dieselbe		„ Gerade
„ 210.	„	8	v. unt.	vor viele		„ unendlich
„	„	4	„	statt $\pm w$		„ $\pm w_1$
„	„	3	„	„	w	„ w_1
„ 211.	„	13	v. ob.	„	$\eta - x$	„ $\eta - y$
„	„	7	v. unt.	„	φ	„ Θ
„ 212.	„	3	„	„	δ	„ zwar
„ 216.	„	15	v. ob.	„	$\pm\alpha$	„ $+\alpha$
„ 240.	„	5	v. unt.	„	$P(p_1 p_1 q)$	„ $P(p, p, q)$
„ 241.	„	14	„	„	$H_{4,2}\, H_{1,1}$	„ $H_{4,3}\, H_{2,3}$
„ 242.	„	10	„	„	8 33 18	„ 8 33 28
„ 245.	„	8	„	„	$a_{1,4m}$	„ $b_{1,4m}$
„ 247.	„	4	v. ob.	„	zweistelligen	„ gradstelligen
„	„	9	„	„	27	„ 37
„ 248.	„	9	„	„	$4nn$	„ $4n$
„	„	16	v. unt.	„	$d_{0n-1,4}$	„ $d_{4n-1,4}$
„ 249.	„	1	v. ob.	„	$c_{2,6}$	„ $c_{2,3}$
„ 251.	„	4	„	„	$b_{4n+1,1}$	„ $b_{4n+2,1}$
„ 253.	„	1	„	„	$H_{2m+2,1}$	„ $H_{2n+1,1}$
„ 281.	„	2	v. unt.	„	$\frac{1}{54}R^2$	„ $\frac{1}{72}R^2$
„ 282.	„	1	„	„	$\frac{7}{54}R^2$	„ $\frac{1}{8}R^2$
„ 283.	„	2	„	„	$\frac{1}{54}R^2$	„ $\frac{1}{72}R^2$
„	„	1	„	„	$\frac{37}{216}R^2$	„ $\frac{1}{6}R^2$.

I.

Das Petersburger Problem.

Von

Emanuel Czuber.

Unter den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nehmen insbesondere diejenigen weiteres Interesse in Anspruch, welche sich mit von ungewissen Ereignissen abhängigen Geldsummen beschäftigen, als da sind Wetten, Glücksspiele u. dgl.; manche dieser Anwendungen, wie die Versicherungs- und Rentenrechnungen, sind von hervorragender praktischer Bedeutung. Einige wenige einfache Grundsätze bilden die theoretische Basis dieser Anwendungen. Wenn sich nun ein Fall ergibt, wo die auf dieser Grundlage erzielten Rechnungsresultate mit anderen Erkenntnissen im Widerspruche erscheinen, so wird man es erklärlich finden, wenn die Grundlage geprüft und Anstrengungen gemacht werden, den Widerspruch zu lösen.

Auf einen solchen Fall führte das Petersburger Problem, und die eigentümlichen Schwierigkeiten, welche sich seiner Lösung entgegenstellten, haben die Mathematiker immer von Neuem angeregt, ihre Ansichten über das Problem zu äussern und Vorschläge zur Beseitigung des Widerspruches zu machen. Trotzdem ist die Frage bis zum gegenwärtigen Augenblick offen geblieben, wenn auch eine Lösung allen übrigen den Rang abgelaufen hat.

Dem Versuche einer Lösung des Petersburger Problems aus dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit und der mathematischen Erwartung, welchem die nachstehenden Blätter gewidmet sind, geht eine kritische

Zusammenstellung der wichtigsten Arbeiten über den Gegenstand voran. Die Abhandlung wird ferner Gelegenheit bieten, Betrachtungen über die moralische Erwartung anzustellen, ein Begriff, welcher dem in Rede stehenden Problem seine Entstehung verdankt.

1. Das Petersburger Problem ist eine von den Aufgaben, welche Nicolaus Bernoulli in einem Briefe vom 9. September 1713 dem französischen Mathematiker Montmort vorlegte und welche dieser in der zweiten Auflage seines „Essai d'analyse sur les jeux de hazard" (Paris 1713) *) veröffentlichte. Doch hat die Aufgabe ihre ursprüngliche Form nicht behalten und ist in die späteren Schriften im Wesentlichen in der Fassung aufgenommen worden, welche ihr Daniel Bernoulli in den Acten der Petersburger Akademie **) gegeben; daher rührt auch der Name des Problems. Es lautet an der erwähnten Stelle folgendermassen ***). „Peter wirft eine Münze in die Höhe so lange, bis bei dem Fallen das Bild auf derselben einmal oben zu stehen kommt. Wenn dieses bei dem ersten Wurf geschieht, so muss er Paul einen Ducaten geben; geschieht es bei dem zweiten, so gibt er ihm zwei Ducaten; bei dem dritten vier; bei dem vierten acht; und so bei jedem Wurfe immer doppelt so viel Ducaten. Nun wird gefragt, wie hoch Pauls Hoffnung zu schätzen sei?"

Die Anwendung der Grundsätze über die mathematische Erwartung auf diese Aufgabe bietet keine Schwierigkeit. Paul hat nämlich die Gewinnste von

$$1,\ 2,\ 4,\ 8, \ldots$$

Ducaten mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16}, \ldots$$

zu erwarten; seine mathematische Hoffnung oder die Summe, welche er an Peter vor dem Spiele auszuzahlen hätte, damit dasselbe mathematisch geordnet sei, ist durch die Summe

$$\tfrac{1}{2}.1+\tfrac{1}{4}.2+\tfrac{1}{8}.4+\tfrac{1}{16}.8+\ldots$$

*) Oettinger (Crelle's Journal, Bd. 36, pag. 300) führt diese Auflage mit der Jahreszahl 1704 an, was mit dem Datum des Briefes im Widerspruche steht.

**) Specimen theoriae novae de mensura sortis. Comment. acad. Petrop. T. V.

***) Dieser Wortlaut ist dem „Hamburgischen Magazin" I. Bd., 1747, 5. Stück, pag. 73 ff. entnommen, woselbst sich ein Auszug aus der oben angeführten Abhandlung D. Bernoullis in wörtlicher Uebersetzung vorfindet.

dargestellt, welche, weil a priori alle Combinationen zwischen Schrift und Bild gleich zulässig sind, aus unzählig vielen Summanden besteht und demgemäss auch einen unendlich grossen Wert repräsentirt. Der Widerspruch liegt nun darin, dass die Rechnung von Paul einen unendlich hohen Einsatz fordert, während er den Eingebungen seiner Vernunft folgend nur zu einer sehr mässigen Summe sich entschliessen könnte.

Die Versuche, das Paradoxon zu lösen, können füglich in zwei Gruppen geschieden werden; die einen suchen die Ursache des Widerspruches in den theoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wollen ihn von da aus beseitigen; die andern streben das gleiche Ziel durch Heranziehung von Umständen an, welche ausserhalb des Problems gelegen sind. Wir ziehen es vor, die einzelnen Arbeiten nach diesem Principe zu ordnen, statt sie in ihrer historischen Reihenfolge anzuführen.

2. Zu denjenigen, welche die Ursache des Widerspruches in der Mangelhaftigkeit der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gesucht haben, gehört vor allen d'Alembert*). Er wendet sich an die Prüfung der grundlegenden Annahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass alle Combinationen desselben zusammengesetzten Erfolges gleich wahrscheinlich sind, dass also beispielsweise bei hundertmaligem Aufwerfen einer Münze hundertmal Schrift mit derselben Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist als irgend eine andere bestimmte Combination, in welcher Schrift und Bild beliebig abwechseln. Er gibt zu, dass in mathematischem Sinne beide Combinationen gleich wahrscheinlich sind, leugnet aber, dass es im physikalischen Sinne auch der Fall sei; daher seine Unterscheidung zwischen „mathematisch möglich" und „physikalisch möglich".

Auf das Petersburger Problem übergehend, bekämpft d'Alembert zunächst die Annahme, welche bei der Lösung gemacht wird, dass sich Schrift in einer unendlichen Anzahl von Malen zutragen könne, oder, anders gesprochen, dass Bild niemals zu fallen brauche. Er bezeichnet dies als „physikalisch unmöglich" aus dem Grunde, weil uns die Erfahrung lehrt, dass es nicht in der Natur gelegen sei, denselben Erfolg beständig wiederkehren zu lassen, sowie es ihren

---

*) Doutes et questions sur le calcul des probabilités. (Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie. T. V, 1773). — Schon früher schrieb d'Alembert in seinen „Opuscules mathématiques" (T. II, Mém. X, pag. 1 seq.. 1761—1780) über denselben Gegenstand.

Grundsätzen nicht entspricht, dass alle Menschen und alle Bäume einander ähnlich sehen. „Physikalisch gesprochen“ kann also Schrift nur in einer beschränkten Anzahl von Malen eintreffen; auf die Ermittelung dieser Anzahl geht d'Alembert weiter nicht ein.

Doch mit dieser Betrachtung ist der Widerspruch nicht völlig behoben, es ist erst der unendlich grosse Wert des Einsatzes oder der Hoffnung Pauls ausgeschlossen. Um zu zeigen, dass diese nur einen sehr beschränkten Wert besitzt, versucht d'Alembert in seinen weiteren Betrachtungen nachzuweisen, dass auch solche Combinationen, in denen dasselbe Ereigniss sich einigermassen oftmals nach einander wiederholt, zu den „physikalisch unmöglichen“ gehören, auf welche daher ein vernünftiger Mensch nichts wagen wird. So, führt er an, sei es allerdings „mathematisch möglich“, dass 100 gleichzeitig Geborne ein durchschnittliches Alter von 60 Jahren erreichen, „physikalisch“ sei dies aber unmöglich, indem die Erfahrung gelehrt hat, dass die durchschnittliche Lebensdauer des Menschen 27 Jahre beträgt. Er weist ferner darauf hin, dass erfahrungsgemäss jeder Unternehmer des Pharaospiels durch dieses Gewerbe sich bereichert hat; dies liege darin, weil ihm mehr Fälle günstig als abträglich sind und diesem Verhältnisse entsprechend nach einiger Zeit die günstigen Fälle wirklich häufiger eingetreten sind als die ungünstigen. Diese Betrachtungen führen ihn zu dem Schlusse, man müsse alle Combinationen, in welchen dasselbe Ereigniss oft auf einander folgt, als „physikalisch unmöglich“ ausscheiden, und zu dem weiteren Schlusse, dass unter den noch übrig bleibenden Combinationen diejenigen, in welchen dasselbe Ereigniss öfter auf einander folgt, minder wahrscheinlich sind als andere von sonst gleicher Zusammensetzung; denn je öfter nach einander ein Ereigniss sich zugetragen, desto kleiner, meint d'Alembert, wird die Wahrscheinlichkeit, dass es das nächste mal wieder eintrifft. Das Gesetz, nach welchem diese Verminderung der Wahrscheinlichkeit vor sich geht, sucht d'Alembert nicht, glaubt auch, dass die Auffindung desselben niemals gelingen werde.

Er kommt weiter auf die regelmässigen Ereignisse zu sprechen, in welchen sich ein gewisser Plan, ein Gesetz zu erkennen gibt und die Laplace als aussergewöhnliche Ereignisse bezeichnet*). Diese erklärt er für „physikalisch“ minder wahrscheinlich als die mit ihnen mathematisch gleich möglichen Combinationen, zum mindesten sind sie mit weit grösserer Wahrscheinlichkeit das Werk eines denkenden Wesens oder einer regelmässigen Ursache als die unregelmässigen

*) Théorie analytique des probabilités, III. ed. (Introduction, pag. X.).

und unsymmetrischen Combinationen. So wird, meint d'Alembert, ein vernünftiger Mensch die Buchstabencombinationen

constantinopolitanensibus
aabceiiilnnnnnooopssstttu,

welche aus genau denselben Buchstaben zusammengesetzt sind wie die Combination

nbsaeptolnoiauostnisnictu,

wenn er alle drei auf einer Setzertafel erblickt, mit dieser letzteren nicht für physikalisch gleich wahrscheinlich halten, obwohl alle drei, mathematisch gesprochen, dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen, und zwar deshalb, weil die erste einen uns geläufigen Sinn hat und in der zweiten eine Ordnung sich äussert. Wer diese drei Combinationen ansieht, wird alles in der Welt darauf wetten, dass die zwei ersten nicht ein Werk des Zufalls sind.

Zur Bekräftigung dieser Anschauung beruft sich d'Alembert auf Daniel Bernoulli, welcher aus der überaus kleinen Wahrscheinlichkeit, die er dafür findet, dass die Planeten (Saturn, Jupiter, Mars, Venus und Mercur) innerhalb einer so schmalen Zone — von nur $\frac{1}{17}$ der ganzen Sphäre — um die Ekliptik angeordnet sind, schliesst, diese wirklich vorhandene Anordnung könne nicht ein Werk des Zufalls sein, müsste vielmehr einer besonderen Ursache entsprungen sein, die er dann zu erforschen sucht.

Dass der von d'Alembert gemachte Unterschied zwischen mathematischer und physikalischer Möglichkeit, zwischen mathematischer und physikalischer Wahrscheinlichkeit keine wissenschaftliche Berechtigung hat, braucht nicht besonders dargelegt zu werden; bestünde ein solcher, dann würde das ganze Gebäude der Wahrscheinlichkeitsrechnung zerfallen. d'Alemberts Zweifel und Reflexionen sind sämmtlich dem Umstande entsprungen, dass man gewohnt ist, der geringen Zahl regelmässiger Combinationen die ungleich grössere Zahl der unregelmässigen entgegengehalten, statt die Combinationen als einzelne Individuen zu erfassen; dass man daher dem Eintreffen einer regelmässigen Combination weit geringere Hoffnung entgegenbringt als dem einer bestimmten unregelmässigen Combination, weil man die Begriffe Combinationsgruppe und einzelne Combination verwechselt; dass man endlich, wenn ein Erfolg vorliegt, der ein Gesetz, einen Plan, eine gewisse Regelmässigkeit aufweist, aus demselben Grunde zu der Annahme gedrängt wird, dieser Erfolg könne nicht dem Zufalle, sondern müsse einer Absicht entsprungen sein. Dies alles aber hat seinen Grund in unserem stark ausgeprägten Sinn für Regelmässigkeit, Gesetzmässigkeit, Symmetrie.

Dass man, wenn ein regelmässiges Ereigniss vorliegt, über dessen Entstehungsweise nichts bekannt ist, unter den beiden Annahmen, es sei dem Zufalle entsprungen oder durch die Wirkung einer regelmässigen Ursache zu Stande gekommen, der letzteren eine weit grössere Wahrscheinlichkeit beimisst und nach der Ursache forscht, hat seine volle Berechtigung. Dass man bei einem unregelmässigen Ereigniss nicht dasselbe tut, liegt darin, weil man nicht seine Individualität, sondern nur seine Unregelmässigkeit in's Auge fasst. Hätte z. B., um an das Beispiel d'Alemberts anzuknüpfen, Jemand die die dritte, regellose Buchstabencombination vorher bezeichnet, so würde er, wenn er sie dann auf der Tafel erblickt, ebenso erstaunt und ebenso zu der Annahme geneigt sein, hier könne nicht der Zufall gewirkt haben, als wenn ihm eine der beiden ersten Zusammenstellungen entgegengetreten wäre.

3. Béguelin's Abhandlung*) steht mit der vorgenannten in engem Zusammenhange, sie ist durch dieselbe hervorgerufen worden. Doch geht Béguelin insofern weiter, als er manche der von d'Alembert offen gelassenen Fragen weiter verfolgt und Vorschläge macht, um die an den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichneten Mängel zu beseitigen; dabei lässt er sich mitunter zu Inconsequenzen verleiten.

In der Einleitung erklärt Béguelin einige Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Standpunkte der Metaphysik und grenzt die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab. Dann gelangt er zu der Frage, ob regelmässige und symmetrische Ereignisse die man dem Zufall zuschreibt, unter übrigens gleichen Umständen ebenso wahrscheinlich sind wie Ereignisse, die weder Ordnung noch Regelmässigkeit aufweisen, und woher es in dem Falle, als sie gleiche Wahrscheinlichkeit hätten, kommt, dass uns ihre Regelmässigkeit so frappirt und dass sie uns so seltsam erscheinen. — Béguelin erkennt die gleiche Wahrscheinlichkeit derartiger Combinationen an und sucht dann an einem Spiele mit sechs Würfeln die Gründe darzulegen, warum uns regelmässige Combinationen so seltsam und daher weniger wahrscheinlich vorkommen als die unregelmässigen. Die Betrachtungen bieten nichts neues; es ist wieder die Entgegenstellung der Regelmässigkeit und Regellosigkeit statt der Erfassung der Individualität jeder einzelnen Combination. Die gezogenen Schlüsse sind nicht immer ganz richtig. Béguelin rechnet beispielsweise

*) Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités. (Histoire de l'academie royale de sciences et belles-lettres de Berlin, année 1767, pag. 382—412).

aus, ein Wurf mit den 6 Würfeln, welcher eine unregelmässige Combination herbeiführt, sei 7775 mal wahrscheinlicher und weniger seltsam als der Wurf, welcher den Pasch von 6 bringt, statt zu sagen, welcher irgend einen Pasch herbeiführt. Hierauf stellt er folgende Betrachtung an. Angenommen, man hätte seine Aufmerksamkeit den bestimmten Zahlen 2, 5, 3, 4, 3, 1 zugewendet, so wird der Wurf, der sie herbeiführt, viel weniger und zwar 720 mal weniger seltsam erscheinen als der Wurf, wo sechsmal 6 fällt, weil es wohl kaum Jemandem einfallen dürfte, genau zu untersuchen, welcher Würfel gerade diese und welcher jene Zahl gebracht hat. Dagegen muss eingewendet werden, dass es, sobald man sich auf die erwähnte Untersuchung nicht einlassen will, auch keinen Sinn hat, die Ordnung der Zahlen festzustellen; aber abgesehen davon wäre die Zahl 720 unrichtig, weil die bezeichneten Zahlen nur 360 verschiedene Anordnungen zulassen.

Die zweite Frage, mit welcher Béguelin sich befasst, ist diese: Bewahrt ein Ereigniss, welches bereits ein- oder mehreremal eingetroffen ist, für sein künftiges Erscheinen dieselbe Wahrscheinlichkeit wie das entgegengesetzte Ereigniss von ursprünglich gleich grosser Wahrscheinlichkeit, das bisher nicht eingetroffen ist? Mit anderen Worten: Stehen die aufeinanderfolgenden Würfe mit einer Münze, oder die Ziehungen aus einer Urne, welche weisse und schwarze Kugeln enthält (vorausgesetzt, dass die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt wird) in einem Zusammenhange, welcher die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beeinflusst, oder ist jeder Wurf, jede Ziehung als ein selbstständiger Act, der weder von den vorangegangenen beeinflusst wird noch die folgenden beeinflussen kann, anzusehen?

Béguelin ist der ersterwähnten Ansicht und führt zu ihrer Bestätigung folgende Aufgabe vor. Eine Urne enthält zwei Blätter, ein weisses und ein schwarzes; eine Person zieht aus der Urne und legt das gezogene Blatt jedesmal zurück. War es weiss, so verliert sie den Einsatz; war es dagegen schwarz, so erhält sie das doppelte des Einsatzes. Nun richtet sich die Person das Spiel derart ein, dass sie vor der ersten Ziehung $\frac{1}{2}$ Thaler setzt, und wenn sie verliert, setzt sie vor der zweiten 1 Thaler, und wenn sie wieder verliert, vor der dritten 2 Thaler u. s. w., allgemein: wenn sie bis zur $\overline{n-1}$ ten Ziehung jedesmal verloren hat, setzt sie vor der $n$ten Ziehung 2^{n-2} Thaler. — Indem er nun stillschweigend voraussetzt, das Spiel werde unter allen Umständen so weit geführt, bis der Spieler einmal gewinnt, gelangt er zu dem Schlusse, dieses nach den gewöhnlichen Grundsätzen richtig geordnete Spiel sei für den Banquier entschieden von Nachteil, weil ihm die in den vorangegangenen Ziehungen erzielten Einnahmen den in der letzten Ziehung erlittenen Verlust nicht ersetzen, und dies beweise die Mangelhaftigkeit der Grundlagen. Denn tritt das schwarze Blatt erst im $n$ten Zuge ein, so hat der Spieler eingezahlt

$$\tfrac{1}{2}+1+2+4+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}-\tfrac{1}{2}$$

Thaler, dagegen empfangen

$$2.2^{n-2}=2^{n-1}$$

Thaler, also um einen halben Thaler mehr als er ausgegeben, und dieser halbe Thaler ist des Spielhalters Nachteil. Béguelin sagt, dieser Nachteil könne nur in dem — der Wahrscheinlichkeitsrechnung fremden — Falle ausbleiben, wenn der Spieler durch beständiges Verdoppeln seiner Einsätze an den Punkt gelangt, wo ihm zur Fortsetzung des Spieles Geld fehlt. — Weiter unten wird von dieser Aufgabe nochmals die Rede sein.

Nachdem Béguelin durch diese und ähnliche Betrachtungen seine Ansicht von der Abhängigkeit der Ziehungen begründet zu haben glaubt, schreitet er zur Darstellung des Gesetzes, nach welchem sich die Wahrscheinlichkeit ändert. Am natürlichsten erscheint ihm die Annahme, jede Gattung gleichartiger Fälle vereinige in sich die Rechte aller sie zusammensetzenden Individuen und die einzelnen Individuen seien gleich berechtigt zu erscheinen. Der Anspruch eines Individuums zu erscheinen bleibe so lange aufrecht, als es nicht zum Vorschein gekommen, und erlösche mit seinem Eintreffen. Enthält also eine Urne je eine weisse und schwarze Kugel, und will man z Ziehungen vornehmen, die gezogene Kugel selbstverständlich immer wieder zurücklegend, so vereinigt vor den Ziehungen die weisse wie die schwarze Kugel z Ansprüche in sich zu erscheinen. Hätten nun die $z-1$ ersten Ziehungen die weisse Kugel gebracht, so wären dieser $z-1$ Ansprüche erloschen und nur 1 Anspruch für das künftige Erscheinen geblieben, während die schwarze Kugel alle z Ansprüche bewahrt hätte. Vor der $z$ten Ziehung hätte man demnach z gegen 1 zu wetten, es werde die schwarze Kugel zum Vorschein kommen.

Ist also die weisse Kugel $z-1$mal nach einander erschienen, so hat nach Béguelin die schwarze Kugel die Wahrscheinlichkeit $\frac{z}{z+1}$, die weisse blos die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{z+1}$, in der nächsten Ziehung einzutreffen.

In dem Falle, wo die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird, combinirt Béguelin die nach den üblichen Regeln gerechnete Wahrscheinlichkeit mit der eben abgeleiteten wie folgt. Enthält eine Urne weisse und schwarze Kugeln, von jeder Gattung n, und sind in z (kleiner als n) aufeinander folgenden Ziehungen nur weisse Kugeln zum Vorschein gekommen, so hat man, um die vollständige Wahrscheinlichkeit des Erscheines einer weissen Kugel in der nächsten Ziehung zu erhalten, folgendermassen zu schliessen: nach den gewöhnlichen Regeln wäre auf das Erscheinen einer weissen Kugel $n-z$ gegen n, nach Obigem aber 1 gegen $z+1$, im Ganzen ist also $(n-z)\times 1$ gegen $n\times(z+1)$ zu wetten, so dass sich als Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses der Bruch

$$\frac{n-z}{2n+nz-z}$$

und für die schwarze Kugel der Bruch

$$\frac{nz+n}{2n+nz-z}$$

findet.

Es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise Béguelin seine eben mitgeteilte Theorie zur Auflösung des Petersburger Problems verwertet. Wenn im Wurfe von der Ordnungszahl n, den Paul zu tun sich eben anschickt, Bild fällt, so erhält er 2^{n-1} Thaler, und da die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{1}{2}$ ist, so ist Pauls Hoffnung $\frac{1}{2}\,.\,2^{n-1} = 2^{n-2}$. Dies setzt voraus, dass in den $n-1$ vorangegangenen Würfen Bild nicht erschienen ist; dann aber hat man auf sein Eintreffen im $n$ten Wurfe n gegen 1 zu wetten. Mit demselben Rechte, schliesst Béguelin, ist vor allen Ziehungen $n-1$ gegen 1 zu wetten, dass Bild vor dem $n$ten, $n-2$ gegen 1, das Bild vor dem $n-1$ten, $n-3$ gegen 1, dass Bild vor dem $n-2$ten Wurfe erscheinen werde u. s. w. Im Ganzen ist also $(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1$ gegen 1 zu wetten, dass Paul den erhofften Gewinn nicht realisirt, seine Hoffnung in Beziehung auf den betrachteten Wurf beträgt also nur

$$\frac{2^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-1)+1}$$

Bei im Vorhinein bedungener Anzahl der Würfe hat man die Werte, welche dieser Ausdruck für $n=1$ bis $n=$ der vereinbarten Zahl annimmt, zu summiren, um die gesammte Erwartung Pauls und somit seinen Einsatz zu finden. Für eine unbestimmte oder unbegrenzte Anzahl von Würfen ist der Einsatz durch die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2+1}+\frac{2.2}{2.3+1}+\frac{2.2.2}{2.3.4+1}+\cdots$$

gegeben. Ohne auf eine nähere Betrachtung derselben einzugehen, beschränkt sich Béguelin unter Hinweisung auf die rasche Abnahme der Glieder auf die 10 ersten und findet so für den Einsatz den Betrag von 2.454 Thalern *).

Im weiteren Verlaufe der Abhandlung gibt Béguelin, auf verschiedene willkürliche Annahmen und unklare Betrachtungen sich stützend, noch andere Lösungen des Problems. Dabei lässt er, um der vorgefassten Meinung, der Einsatz Pauls dürfe drei Thaler nicht überschreiten, Geltung zu verschaffen, die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuweilen ausser Acht. So stellt er in Art. XXIV. zur Ermittlung des Einsatzes e, den Paul bei n Würfen zu leisten hätte, die Gleichung auf

$$(e-1)\frac{1}{2}+e\cdot\frac{1}{2^n}=(2^{n-1}-e)\frac{1}{2^n},$$

indem er sagt: Peter gewinnt entweder die Summe $e-1$, wenn Bild auf den ersten Wurf fällt, oder den ganzen Einsatz Pauls, wenn Bild gar nicht fällt — die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2^n}$; dagegen verliert Peter den Betrag $2^{n-1}-e$, wenn Bild im letzten Wurfe eintrifft, wofür $\frac{1}{2^n}$ die Wahrscheinlichkeit ist; die auf Gewinn und Verlust bezüglichen Erwartungen müssen gleich sein. — Wo bleiben aber die andern möglichen Fälle?

Das Mitgeteilte wird hinreichen, um die Unhaltbarkeit der Aufstellungen Béguelin's darzutun. Indem er die Grenzen, welche d'Alembert in richtiger Würdigung der Schwierigkeit des Gegenstandes gesetzt, zu überschreiten sucht, gerät er auf Abwege.

---

*) Eine obere Grenze für die Summe der Reihe ergibt sich aus

$$e^2=1+\frac{2}{1}+\frac{2.2}{1.2}+\frac{2.2.2}{1.2.3}+\frac{2.2.2.2}{1.2.3.4}+\ldots,$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet; daraus folgt nämlich

$$\frac{2}{2}+\frac{2.2}{2.3}+\frac{2.2.2}{2.3.4}+\ldots=\frac{e^2-3}{2},$$

daher ist

$$\frac{2}{2+1}+\frac{2.2}{2.3+1}+\frac{2.2.2}{2.3.4+1}+\ldots<\frac{e^2-3}{2}$$

und schliesslich

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2+1}+\frac{2.2}{2.3+1}+\frac{2.2.2}{2.3.4+1}+\ldots<\frac{e^2-1}{2}=3\cdot194\ldots$$

Eine Kritik der besprochenen Arbeiten d'Alembert's und Béguelin's hat Lichtenberg*) gegeben; er tritt den Anschauungen der beiden Genannten in klarer Weise entgegen und verteidigt die Lösung D. Bernoullis, von welcher weiter unten die Rede sein wird. Seine Betrachtungen zielen dahin, die bezweifelte Gleichheit der verschiedenen Combinationen, die sich bei mehrmaligem Aufwerfen einer Münze ergeben können, in Beziehung auf deren Wahrscheinlichkeit klar zu stellen. Er vergleicht zu diesem Ende das 20-malige Werfen einer Münze, wobei 1,048.576 verschiedene Combinationen zwischen Schrift (0) und Bild (1) möglich sind, mit einer aus ebensoviel Zetteln bestehenden Lotterie, auf deren jedem eine der Combinationen (z. B. 1001110 ...) verzeichnet erscheint; hier fällt die Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle unmittelbar auf und erkennt man die Analogie beider Formen des Spieles an, so ist damit auch die Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten aller Combinationen beim Werfen mit der Münze erwiesen.

Wir gelangen nun zu jener Kategorie von Lösungen, welche ausserhalb der Aufgabe liegende Umstände heranziehen.

4. Cramer war wohl der erste, welcher seine Ansicht über das Problem aussprach; er tat dies 1728 in einem Briefe an Nicolaus Bernoulli, welchen letzterer seinem Neffen Daniel (1732) mitteilte**). Cramer erblickt den Grund der Ungereimtheit darin, dass „(in der Betrachtung) der Mathematiker das Geld blos nach der Grösse schätze, (in der Ausübung) dagegen vernünftige Leute seinen Wert nach dem Gebrauche achten, den sie davon machen können". Er meint nämlich, dass der Gebrauchswert einer Geldsumme, nachdem sie einen gewissen sehr hohen Betrag erlangt hat, nicht mehr mit ihrem physischen Betrage wachse; und um der Rechnung eine Grundlage zu geben, nimmt er an, eine Summe, welche 10 Millionen oder, „um die Rechnung zu erleichtern", $2^{24} = 16777216$ Thaler überschreitet, sei immer nur dieser selben Summe gleich zu achten. Dadurch findet er für Pauls Hoffnung den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{2^{25}}2^{24}\right)+\left(\frac{1}{2^{26}}2^{24}+\frac{1}{2^{27}}\cdot 2^{24}+\ldots\right)$$

oder

---

*) Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiel zu heben. (Lichtenberg's physikalische und mathem. Schriften, 4. Bd. 1806. — Die Abhandlung stammt aus dem Jahre 1770).

**) Specimen theoriae etc., l. c. und „Hamburgisches Magazin", l. c.

$$25 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots,$$

dessen Wert 13 Thalern gleich kommt.

Daniel Bernoulli bemerkt mit Unrecht, dass man, wenn Cramers Annahme richtig ist, die Summen, welche nach dem 25. Wurfe fallen könnten, gar nicht in Rechnung ziehen dürfe, weil man vor dem 26. Wurfe bereits $2^{24} - 1$ besitzt, was mit 2^{24} gleich zu achten ist. Es ist aber möglich, dass Paul erst in seinem späteren als dem 25. Wurfe gewinnt und daher vor dem 26. Wurfe noch keinen Gewinn erzielt hat. Nach Bernoulli's Meinung wäre also der zweite Teil obigen Ausdruckes fortzulassen, sein Wert ist dann $12\tfrac{1}{2}$ (und nicht 12, wie Bernoulli in Folge eines Irrtums in der Zählung der Würfe findet).

An der Willkür in der Wahl der Summe 2^{24} braucht man nicht Anstoss zu nehmen; Cramer hat sich für eine bestimmte Summe ohne Zweifel nur deshalb entschieden, um seine Idee an besonderen Zahlen besser zur Klarheit zu bringen. Es hätte genügt, zu sagen, dass Summen, welche über einen gewissen, endlichen, wenn auch noch so grossen Betrag hinausgehen, für den Gebrauch keinen grösseren Wert besitzen als eben dieser Betrag.

Dass Cramer selbst der Summe 13 keine besondere Bedeutung zuschreibt, geht aus seinem Briefe hervor. Er sagt dort, es lasse sich für die Hoffnung Pauls auch ein kleinerer Wert finden, man dürfe nur den Gebrauchswert einer Geldsumme anders, z. B. nach der Quadratwurzel aus ihrem physischen Betrage, schätzen; dadurch erhält man als Gebrauchswert der Hoffnung Pauls

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{2} + \tfrac{1}{8} \cdot \sqrt{4} + \ldots = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$$

und daraus ihren physischen Wert oder den Einsatz

$$\left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}}\right)^2 = 2{\cdot}918 \ldots$$

Der zweiten Darstellung wäre in formaler Richtung insofern der Vorzug einzuräumen, als sie den Unterschied zwischen physischem Wert und Gebrauchswert bei allen Geldsummen macht und nicht erst bei einer willkürlich angenommenen Summe eintreten lässt. In sachlicher Richtung kann man ihr nicht beipflichten, vor allem deshalb nicht, weil sie seiner unendlich grossen Summe auch einen unendlich grossen Gebrauchswert beimisst; auch wird niemand zugeben, dass 100 Thaler in Bezug auf den Gebrauch, den man davon machen kann, nur 10mal mehr wert sind als 1 Thaler. Den tatsächlichen

Verhällnissen kommt die erste Darstellung näher; wenn aber Summen über 2^{24} Thaler für den Gebrauch nicht mehr wert sind als 2^{24} Thaler, dann hat es auch keinen Sinn, solche Summen voll zur Auszahlung zu bringen, es genügt, an ihrer Stelle 2^{24} Thaler zu erlegen. Unter diesem Gesichtspunkte hat aber das Petersburger Problem in der ursprünglichen Form, wo die Gewinnste über jede beliebige Höhe hinausgehen können, seine Bedeutung verloren.

5. Poisson*) erblickt die Ursache des Widerspruchs in der Ausserachtlassung des Umstandes, dass Peters Vermögen begrenzt, er also nicht in der Lage ist, alle Summen, die sich den Bedingungen der Aufgabe zufolge herausstellen können, auszuzahlen. Bringt man die Zahl, welche Peters Vermögen ausdrückt, auf die Form $2^\beta(1+h)$, wobei β eine ganze Zahl und h einen echten Bruch bedeutet, so kann er alle Gewinnste bis 2^β inclusive den Spielbedingungen entsprechend auszahlen; sollte aber Bild später als im $\overline{\beta+1}$ten Wurfe eintreffen, dann müsste er an Stelle des rechtmässigen Betrages sein Vermögen hergeben. Pauls Hoffnung beträgt hienach

$$\left(\tfrac{1}{2}.1+\tfrac{1}{4}.2+\tfrac{1}{8}.4+\ldots+\frac{1}{2^{\beta+1}}2^\beta\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2^{\beta+2}}2^\beta(1+h)+\frac{1}{2^{\beta+3}}2^\beta(1+h)+\frac{1}{2^{\beta+4}}2^\beta(1+h)+\ldots\right)$$
$$=\frac{\beta+1}{2}+\frac{1+h}{2}=\frac{\beta+h}{2}+1,$$

ihr Wert ist endlich und durch Peters Vermögen bedingt.

Gegen Poissons Lösung muss der gewichtige Einwand erhoben werden, dass sie den Boden der Spielbedingungen verlässt und daher dem gestellten Problem nicht entspricht. Denn, ist Peter nicht im Stande, alle Gewinnste auszuzahlen, von welchen in der Aufgabe die Rede ist, zahlt er statt dessen andere Summen, so hat man es nicht mehr mit demselben Problem zu tun.

6. Daniel Bernoulli's**) Lösung, von Laplace***) wieder aufgenommen, hat sich die weiteste Anerkennung erworben. Sie stützt sich auf den Begriff des moralischen Wertes einer Geldsumme, für dessen Beurteilung Daniel Bernoulli die bekannte Hypothese aufgestellt hat.

*) Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. 1837. (Deutsch von Schnuse, 1841, pag. 44 ff.)

**) Specimen theoriae etc. l. c. und „Hamburg. Magazin", l. c.

***) Théorie analytique des probabilités, 3 éd., pag. 439 seq.

Die Lösung, wie Laplace sie durchführt, unterscheidet sich von der ursprünglichen Behandlung des Problems durch Daniel Bernoulli nur durch zweckmässigere Form und eingehendere Entwicklung des Resultates. Sie lässt sich in Kürze so wiedergeben. Bezeichnet a das Vermögen Pauls vor dem Spiele, x den Betrag, den er einzusetzen hat, so wird nach dem Spiele sein Vermögen einen der Werte

$$a-x+1, \quad a-x+2, \quad a-x+4, \quad a-x+8, \quad \ldots$$

angenommen haben; die Wahrscheinlichkeiten dieser Werte sind beziehungsweise

$$\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{8}, \quad \tfrac{1}{16}, \ldots$$

Das moralische Vermögen Pauls, in dessen Besitz er durch diese Erwartungen versetzt wird, ist ausgedrückt durch das Product

$$(a-x+1)^{\frac{1}{2}}(a-x+2)^{\frac{1}{4}}(a-x+4)^{\frac{1}{8}}(a-x+8)^{\frac{1}{16}} \ldots$$

Bernoulli und Laplace stellen nun die Forderung auf, dieser Betrag solle dem ursprünglichen Vermögen Pauls gleich sein, damit ihm aus der Annahme des Spieles kein Nachteil erwächst, und erhalten so zur Bestimmung von x die Gleichung

$$a = (a-x+1)^{\frac{1}{2}}(a-x+2)^{\frac{1}{4}}(a-x+4)^{\frac{1}{8}}(a-x+8)^{\frac{1}{16}} \ldots$$

Laplace transformirt dieselbe behufs Ermittlung von x durch Division mit $a-x=a'$, wodurch sie sich verwandelt in

$$\frac{a}{a'} = \left(1+\frac{1}{a'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{a'}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{4}{a'}\right)^{\frac{1}{8}}\left(1+\frac{8}{a'}\right)^{\frac{1}{16}} \ldots;$$

die Factoren der rechten Seite convergiren jetzt bei einigermassen grossem a' rasch gegen die Einheit; aus gegebenem a' wird der Wert von $\frac{a}{a'}$, daraus der Wert von a und aus diesem endlich der verlangte Wert von x ermittelt. Einen ähnlichen Weg schlägt Lacroix (Traité élémentaire des probabilités. 1816, deutsch von Unger, 1818, pag. 157 ff.) ein. Laplace findet mit $a'=100$ zunächst $a=107.89$ und daraus $x=7.89$; Lacroix berechnet näherungsweise aus $a'=100$ erst $a=104\cdot38$ und daraus $x=4\cdot38$.

Auf eine Besprechung dieser Lösung wird später eingegangen werden.

7. Im Folgenden soll versucht werden, den Widerspruch, auf welchen die mathematische Lösung des Petersburger Problems führt, ohne Zuziehung fremder Umstände, aus dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit und der mathematischen Erwartung, zu lösen.

Sowie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, erlangt auch die mathematische Erwartung erst in dem Gesetze der grossen Zahlen ihre eigentliche Bedeutung. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist für den einmaligen Versuch mehr weniger bedeutungslos; es kann ein Ereigniss eine der Einheit noch so nahe Wahrscheinlichkeit besitzen und der einmalige Versuch doch sein Gegenteil hervorbringen: das ist eben das Spiel des Zufalls, über welches für den einzelnen Versuch keine Rechnung Aufschluss geben kann. Aehnliches gilt für eine kleine Anzahl von Versuchen; erst mit dem beständigen Fortschreiten der Wiederholungen beginnt durch das unregelmässige Spiel des Zufalls ein Gesetz hervorzuleuchten.

Diesen Umständen muss bei dem Begriffe der mathematischen Erwartung auch Rechnung getragen werden.

Bedeutet a die Anzahl der Wiederholungen eines vom Zufall abhängigen Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, in m Versuchen, so lehrt das J. Bernoulli'sche Theorem, dass das Verhältniss $\frac{a}{m}$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi m p(1-p)}}$$

zwischen den Grenzen

$$p - \gamma\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}} < \frac{a}{m} < p + \gamma\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}}$$

enthalten ist. In dem Ausdrucke für P kann übrigens bei einigermassen grösserem γ das zweite Glied seiner Kleinheit wegen unterdrückt werden.

Dieser Darstellung zufolge ist die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die Grenze, welcher das Verhältniss aus der Anzahl der Wiederholungen dieses Ereignisses in einer sehr grossen Anzahl von Versuchen zur Anzahl der Versuche selbst mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit zustrebt, wenn letztere Anzahl beständig wächst.

Ist mit dem Eintreffen des Ereignisses der Gewinn einer Summe s verknüpft, so besteht mit derselben Wahrscheinlichkeit P die Ungleichheit

$$ps - \gamma s\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}} < \frac{as}{m} < ps + \gamma s\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}};$$

nun ist as die ganze im Verlauf der Versuche gewonnene Summe, $\frac{as}{m}$ der auf einen Versuch entfallende Anteil derselben; bezeichnet man diesen mit E, so hat man mit der Wahrscheinlichkeit P

$$ps - \gamma s\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}} < E < ps + \gamma s\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}}.$$

Das Schwanken des Wertes von E ist als eine Folge der Wirkungen des Zufalls anzusehen; mit beständig wachsendem m und bei einem der Einheit beliebig nahen Werte von P nähern sich die beiden Grenzen und mit ihnen E dem festen Werte ps.

Darnach erscheint die mathematische Erwartung als diejenige Grenze, welcher sich der durchschnittlich auf einen Versuch entfallende Gewinn mit beständig wachsender Zahl der Versuche nähert, oder als der vom Einflusse des Zufalls freie auf einen Versuch entfallende Gewinn.

In der Herleitung ist auch der Weg angedeutet, welcher zu dem Grenzwerte von E führt, er besteht in der unbegrenzten Wiederholung der Versuche; in aller Strenge ist dieser Grenzwert demnach im Allgemeinen unerreichbar, man kann sich ihm durch fortgesetzte Wiederholung nur nähern.

Um von dieser Annäherung eine Vorstellung zu erhalten, wählen wir die Geldeinheit derart, dass das Product ps der Einheit gleich werde; die Ungleichheit für E schreibt sich dann in der Form

$$1 - \gamma\sqrt{\frac{2(s-1)}{m}} < E < 1 + \gamma\sqrt{\frac{2(s-1)}{m}}$$

Je grösser nun p, desto kleiner wird s (wegen $ps = 1$), desto enger sind die Grenzen bei demselben Werte von m, oder desto früher ergeben sich für E gewisse gegebene Grenzen bei gegebener Wahrscheinlichkeit P, wie dies aus der folgenden kleinen Tabelle hervorgeht.

p	s	Grenzen von E für $P = 0{\cdot}9999779\ (\gamma = 3)$ $m = 1000$	$m = 10000$	$m = 1000000$
$\frac{1}{10}$	10	$1 \mp 0{\cdot}40249$	$1 \mp 0{\cdot}12726$	$1 \mp 0{\cdot}01273$
$\frac{1}{2}$	2	$1 \mp 0{\cdot}13416$	$1 \mp 0{\cdot}04243$	$1 \mp 0{\cdot}00424$
$\frac{9}{10}$	$1\frac{1}{9}$	$1 \mp 0{\cdot}04472$	$1 \mp 0{\cdot}01414$	$1 \mp 0{\cdot}00141$

Haben mehrere Personen ein Anrecht auf eine Summe s insoferne, als für jede die Realisirung dieser Summe von dem Eintreffen eines ungewissen Ereignisses abhängt, und einigen sie sich dahin, die Summe unter sich zu verteilen, bevor das Los gezogen wird, so haben sie es aufgegeben, den Zufall entscheiden zu lassen, folgerichtig gebührt jeder einzelnen Person der vom Einflusse des Zufalls befreite Anteil an der Summe, d. h. der durch die betreffende mathematische Erwartung ausgedrückte Betrag. Hier ist es gleichgiltig, ob der Weg von der Ungleichheit

$$ps - \gamma s\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}} < E < ps + \gamma s\sqrt{\frac{2p(1-p)}{m}}$$

zu der Gleichung

$$\lim E = ps$$

wirklich oder nur in der Idee zurückgelegt werden kann.

Ein anderer Fall. Will Jemand das Anrecht auf den von dem Eintreffen eines ungewissen Ereignisses abhängigen Gewinn einer Summe erwerben und die Entscheidung dem Zufall überlassen, dann muss der Preis dafür ebenfalls dem vom Einflusse des Zufalls freien auf einen Versuch entfallenden Gewinn, also der mathematischen Erwartung gleich sein; denn die (günstige oder ungünstige) Wirkung des Zufalls soll sich erst nach der Entscheidung äussern. Auch diesmal ist es ohne Belang, dass die strenge Eliminirung des Zufalls nur in der Idee durchführbar ist.

Will aber Derjenige, welcher ein Spiel unter obigen Bedingungen angenommen, den Einfluss des Zufalls einschränken, so hat er zu bedenken, dass er sich diesem Ziele nur durch eine in sehr grosser Anzahl ausgeführte Wiederholung des Versuchs nähern kann. Hier darf nicht mehr ausser Acht gelassen werden, dass diese Annäherung mit der Abnahme der Wahrscheinlichkeit des Gewinnens oder dem Wachsen des Gewinnes immer langsamer vor sich geht. Wählt man nämlich, wie schon früher geschehen, die mathematische Erwartung als Geldeinheit, so folgt aus der Gleichung

$$\gamma\sqrt{\frac{2(s_1-1)}{m_1}} = \gamma\sqrt{\frac{2(s_2-1)}{m_2}},$$

welche erfüllt sein muss, wenn in zwei Fällen dieselben Grenzen von E mit derselben Wahrscheinlichkeit P eingehalten werden sollen, die Proportion

$$m_1 : m_2 = (s_1-1) : (s_2-1)$$

oder

$$m_1 : m_2 = r_1 : r_2,$$

wobei r_1, r_2 den jeweiligen Reingewinn bedeutet. Mit dem Reingewinn wächst also die zur Erzielung gegebener relativer Grenzen nötige Zahl von Versuchen in geradem Verhältnisse und wird unendlich gross, wenn der Gewinn ins Unbegrenzte wächst.

Vom mathematischen Standpunkte erscheint ein nach dem Grundsatze: „Die mathematischen Erwartungen der Teilnehmer sollen gleich gross sein“ — geordnetes Spiel als gefahrlos für beide Teile, für den Spieler und den Spielhalter. In Wirklichkeit aber steht bei beiden der Aussicht auf eine Vermögensvermehrung die Gefahr einer Vermögensverminderung entgegen. Jenachdem nun einer Person das eine oder das andere grösser erscheint, hält sie das Spiel für vorteilhaft oder für nachteilig.

Doch die Abwägung der Hoffnung gegen die Gefahr ist eine rein subjective Angelegenheit, eine unanfechtbare, für alle Fälle giltige Regel zur ziffermässigen Durchführung derselben wird sich niemals angeben lassen. Die Umstände, welche dabei in die Wagschale fallen, können von mannigfachster Art sein; gewiss wird auch darauf Rücksicht zu nehmen sein, ob den Spielverhältnissen zufolge an eine Einschränkung der Wirkungen des Zufalls durch Wiederholung des Spieles zu denken ist. Ferner wird die Erfahrung mitsprechen, dass Ereignisse, für welche die Rechnung eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit ergibt, in Wirklichkeit äusserst selten vorkommen.

Es gibt Fälle, wo kein Zweifel übrig bleibt, ob die Hoffnung auf Gewinn oder die Gefahr des Verlustes das grössere ist, und zu den Fällen dieser Art gehört auch das Petersburger Problem. Hier ist die Gefahr, welcher sich Paul durch die Annahme des Spieles aussetzen würde, eine augenscheinliche. Vorausgesetzt nämlich, dass Paul den von der Rechnung geforderten Einsatz und Peter alle Gewinnste auszuzahlen im Stande wäre, welche nach den Bedingungen des Spieles eintreten können, werden die Erwägungen, welche Paul zur Ablehnung veranlassen, etwa folgende sein. Dem Einsatze, welcher der Rechnung zufolge unendlich gross sein soll, stehen allerdings nicht nur Gewinnste entgegen, welche ihn decken, sondern auch solche, welche ihn in einem über alle Grenzen hinausreichenden Verhältnisse übertreffen. Doch selbst den Gewinnsten der ersten Art kommt eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit zu, ihre Realisirung ist ebenso wie das Eintreffen jener Ereignisse, von denen sie abhängen, erfahrungsgemäss nicht zu erwarten. Demnach ist ein Verlust zu gewärtigen, und zwar mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit ein Verlust, dem gegenüber die gewonnene Summe verschwindend klein zu nennen ist.

In der eben betrachteten Form hat das Problem nur rein mathematisches Interesse, weil es sich sowohl in den Bedingungen als auch im Resultate ausserhalb des praktischen Bodens bewegt. Ein Spiel, in welchem die Gewinnste über alle Grenzen hinausgehen können, hat ebenso wenig Sinn wie etwa die Frage, zu welcher Höhe ein Capital anwächst, wenn man es für ewige Zeiten auf Zinseszins liegen lässt. Der unendlich grosse Wert, welchen die Rechnung für den Einsatz liefert, ist hier in ähnlicher Weise ein Symptom dafür, dass die Aufgabe ungereimt ist, wie es ein negatives oder imaginäres Resultat bei einer geometrischen Aufgabe sein kann. Diesen Umstand bringen auch die Lösungen von Cramer und Poisson zur Geltung; beide verwerfen die unendlich hohen Gewinnste, der eine mit der Motivirung, weil man davon keinen Gebrauch machen könnte, der andere, weil das Geld zu ihrer Anzahlung nicht vorhanden ist.

Um also dem Spiel praktische Bedeutung zu geben, muss die Zahl der Würfe im Vorhinein vereinbart werden und zwar innerhalb jener Grenzen, innerhalb welcher Peter wirklich im Stande ist, alle eventuellen Gewinnste auszuzahlen. Ist letztere Bedingung nicht erfüllt, so fehlt der Rechnung die Grundlage.

Ist die Zahl der Würfe einigermassen gross, so lassen ähnliche Betrachtungen, wie sie oben angestellt worden, das Spiel für Paul nachteilig erscheinen. Setzen wir beispielsweise, man hätte sich geeinigt, über 30 Würfe nicht hinauszugehen; der grösste Gewinn, der dann fallen kann, beträgt $2^{29} = 536,870.912$ Thaler, so viel muss Peter besitzen. Paul hätte vor dem Spiel 15 Thaler zu erlegen, aber selbst diese verhältnissmässig unbedeutende Summe wird er, wenn das Geld für ihn einen Wert hat, vernünftiger Weise nicht wagen. Denn um sie wieder hereinzubringen, dürfte Bild nicht vor dem fünften und müsste überhaupt einmal fallen, ein Ereigniss, dessen Eintreffen in Anschung der geringen Wahrscheinlichkeit, $\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^{30}}$ oder weniger als $\frac{1}{16}$, bei einem einmaligen Versuche ebenso wenig zu erwarten ist, wie etwa das Treffen eines roten Ass aus einem Spiel von 32 Blättern auf einen Zug. Aus der Wiederholung des Spiels unter gleichen Bedingungen ist eine Ausgleichung auch nicht zu hoffen; denn die Anzahl dieser Wiederholungen müsste eine ungeheure sein, um der Erwartung Raum zu geben, dass das Verhältniss der Wiederholungszahlen der dreissig möglichen Fälle des Gewinnens: Bild im ersten, erst im zweiten, ... erst im dreissigsten Wurfe — sich innerhalb enger Grenzen dem Verhältnisse ihrer Wahrscheinlichkeiten nähern werde. Auf diesen Umstand macht auch **Fries***) aufmerksam. Seine Betrachtungen auf das hier erörterte Beispiel angewendet lassen sich etwa in folgender Weise wiedergeben. Damit jeder der angeführten dreissig Fälle sich in der seiner Wahrscheinlichkeit entsprechenden geringsten Anzahl von Malen, der letzte Fall also einmal, zutragen könne, sind $2^{30} = 1073,741.824$ Wiederholungen des Spiels erforderlich; und solcher Gruppen von 2^{30} Spielen müsste eine sehr grosse Anzahl ausgeführt werden, um auch die Wiederholung des letzten Falles, dem die geringste Wahrscheinlichkeit zukommt, in einer dieser Wahrscheinlichkeit nahe proportionalen Anzahl von Malen erwarten zu dürfen. Setzt man beispielsweise das halbe Intervall $\gamma\sqrt{\frac{2(s-1)}{m}}$ zwischen den Grenzen von E gleich 0·01, d. i. gleich einem Procent, nimmt für γ wie früher den Wert $3 (P = 0{\cdot}9999779)$, so ergibt sich, weil s in halben Thalern ausgedrückt 2^{30} ist, aus der Gleichung

$$3\sqrt{\frac{2^{31}-2}{m}} = 0{\cdot}01$$

mit hinreichender Annäherung

$$m = 180000 \cdot 2^{30},$$

es müssten also 180000 Gruppen von je 2^{30} Spielen ausgeführt werden, um mit der angeführten Wahrscheinlichkeit erwarten zu dürfen, dass der aus dem letzten der dreissig Fälle stammende Gewinn nicht mehr als um 1% von dem rechtmässigen oder vom Einflusse des Zufalls freien Betrage abweichen wird.

Die weitere Ausführung dieses Beispiels hatte nur den Zweck, ziffermässig zu zeigen, wie sehr man fehlgehen würde, wollte man bei einem derartigen Spiele aus der Wiederholung eine Ausgleichung zwischen Einsatz und Gewinn erwarten; denn hier schon, wo die Anzahl der vereinbarten Würfe nur 30 beträgt, führt die Rechnung auf Wiederholungszahlen, die man kaum zu fassen vermag.

Hier nehmen wir Gelegenheit, auf das in Art. 3. angeführte Problem näher einzugehen, welches **Béguelin** erfunden hat, um daran die Unzulänglichkeit der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu demonstriren. Dieses Problem hat ebenso wie das Petersburger keinen praktischen Sinn, so lange man die Anzahl der Ziehungen unbestimmt lässt. Gesetzt aber, man hätte vereinbart, über n

---

*) Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1842, pag. 114 ff.

Ziehungen nicht hinauszugehen, so stellt sich die Rechnung folgendermassen. Peter — so möge der Spielhalter heissen — gewinnt nur, wenn das schwarze Blatt in den n Ziehungen gar nicht erscheint, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ ist, und zwar gewinnt er dann die ganze von Paul eingezahlte Summe von $\frac{1}{2}+1+2+\ldots+2^{n-2}$ Thalern; dagegen verliert Peter, ob das schwarze Blatt im 1, 2, ... n Zuge, wenn es also überhaupt erscheint, wofür die Wahrscheinlichkeit $1-\frac{1}{2^n}$ ist, und zwar verliert er in jedem dieser Fälle $\frac{1}{2}$ Thaler. Die auf den Gewinn bezügliche Erwartung Peters ist demnach

$$\left(\tfrac{1}{2}+1+2+\ldots+2^{n-2}\right).\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^{n+1}},$$

die auf den Verlust bezügliche Befürchtung

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{2^n-1}{2^{n+1}};$$

beide sind gleich gross, das Spiel ist also tatsächlich geordnet und bleibt es auch, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. — Die Ueberlegung, welche trotz dieser Gleichheit Peter veranlassen wird, schon bei einigermassen grösserem n das Spiel zurückzuweisen trotz der Möglichkeit sehr grossen Gewinnes, gipfelt darin, dass die Wahrscheinlichkeit, er werde in dieser Reihe von Ziehungen einmal an Paul zahlen müssen und daher $\frac{1}{2}$ Thaler verlieren, der Einheit sehr nahe kommt — sie beträgt bei $n=20$ schon $1-\frac{1}{1,048.576}$; die Wahrscheinlichkeit, den wenn auch beträchtlichen Gewinn von $\frac{1}{2}+1+2+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}$ Thalern zu erzielen, wird in demselben Masse sehr klein — bei $n=20$ beträgt sie $\frac{1}{1,048.576}$. Der Gewinn ist also erfahrungsgemäss nicht zu erwarten, wol aber der Verlust.

Die Resultate der Betrachtungen, auf welche wir im Obigen die Lösung des Petersburger und des mit ihm verwandten Béguelin'schen Problems gestützt haben, fassen wir in folgenden Sätzen zusammen.

1. Die mathematische Erwartung ist der Grenzwert, welchem der im Durchschnitt auf einen Versuch entfallende Gewinn mit wachsender Anzahl der Versuche zustrebt, sie hat daher für den einmaligen Versuch nur theoretische Bedeutung.

2. In jedem geordneten Spiele steht bei jedem Teilnehmer der Hoffnung auf Gewinn die Gefahr eines Verlustes entgegen; beide können nur durch eine in sehr grosser Zahl ausgeführte Wiederholung des Spieles einander genähert werden. Bei dem einzelnen Versuch nimmt mit dem Kleinerwerden der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder dem Wachsen des Gewinnes die Gefahr zu und die Hoffnung ab; gleichzeitig verringert sich die Möglichkeit, durch Wiederholung des Spiels einen Ausgleich zwischen Gewinn und Verlust herbeizuführen.

3. Die Annahme eines Spieles oder einer Wette ist umso unvernünftiger zu nennen, je geringer die Wahrscheinlichkeit, dass man den Einsatz wieder heimbringt.

Anknüpfend an diese Sätze wenden wir uns der von Bernoulli zur Lösung des Petersburger Problems erfundenen Theorie von dem moralischen Werte der Geldsummen und der Betrachtung dieser Lösung selbst zu.

Wie oben erörtert worden, unterscheiden sich die im üblichen Sinne geordneten Spiele, Wetten u. dgl., welche vom mathematischen Standpunkte für gleich erklärt werden, in dem Verhältnisse der mit ihnen verknüpften Gefahr und Hoffnung. Bei der Abwägung dieser beiden gegen einander können die mannigfachsten Umstände in Betracht kommen, eine allgemein giltige Regel lässt sich aber deshalb nicht angeben.

Bernoulli's Theorie gibt nun ein Verfahren an die Hand, diese Vergleichung nach einer festen Regel durchzuführen, und zwar unter Zugrundelegung eines Umstandes, dem allerdings in vielen Fällen eine hervorragende Rolle eingeräumt werden muss, nämlich das Vermögen der beteiligten Person.

Aus dieser Auffassung ergibt sich dann, in welchem Sinne diese Theorie anzuwenden ist. Sie kann dazu dienen,

α) zu entscheiden, welches von mehreren Spielen für dieselbe Person das relativ günstigere ist;

β) für welchen von den Beteiligten ein Spiel relativ günstiger ist, d. h. die geringere Gefahr in sich birgt, vorausgesetzt, dass ausser dem Vermögen kein anderer Umstand massgebend ist.

Soll eine Person, deren Vermögen v ist, zwischen zwei (geordneten) Spielen entscheiden, bei deren erstem dem Einsatze e und der Wahrscheinlichkeit q zu verlieren der Gewinn g mit der Wahrscheinlichkeit $p(= 1 - q)$ zu gewinnen, und bei deren zweitem die analogen Grössen e', q' und g', $p'(= 1 - q')$ einander gegenüberstehen, so wird sie das erste oder das zweite wählen, jenachdem der numerische Wert des Ausdruckes

$$(v - e)^q (v + g)^p - v$$

kleiner oder grösser ist als der Wert des Ausdruckes

$$(v - e')^{q'} (v + g')^{p'} - v;$$

diese Ausdrücke sind nach bekannten Entwicklungen negativ und stellen gleichsam den in Geldeinheiten ausgedrückten Ueberschuss der Gefahr zu verlieren über die Hoffnung zu gewinnen vor.

Wenn die Person A, deren Vermögen v ist, mit der Person B, deren Vermögen v' ist, zu einem geordneten Spiele sich vereinigt, wobei a, b die Summen sind, welche die Personen vor dem Spiele zusammenlegen, und p, $q(= 1 - p)$ die respectiven Wahrscheinlichkeiten des Gewinnens bedeuten, so ist A dem B gegenüber im Vorteil oder Nachteil, jenachdem der numerische Wert des Ausdruckes

$$(v - a)^q (v + b)^p - v$$

kleiner oder grösser ist als der Wert des Ausdruckes

$$(v' + a)^q (v' - b)^p - v'.$$

Die Theorie von der moralischen Hoffnung ist aber noch in einem andern Sinne verwendet worden, nämlich zur Berechnung des Einsatzes. Da dies auch bei der Bernoulli-Laplace'schen Lösung des Petersburger Problems der Fall ist, so muss auf diese Art der Anwendung näher eingegangen werden.

Zwei Personen A und B treten zu einem Spiele zusammen. Die Person B, welche die Wahrscheinlichkeit q besitzt, dass sich das Spiel zu ihren Gunsten entscheiden werde, setzt den Betrag g ein; wechen Einsatz hat die Person A zu leisten, wenn v ihr Vermögen und $p = 1 - q$ die Wahrscheinlichkeit, dass sie das Spiel gewinnen wird? — Zur Lösung dieser Aufgabe hat man den Grundsatz aufgestellt: Der Einsatz ist so zu bemessen, dass die moralische Hoffnung der Person A der Null gleich werde, mit andern Worten, dass das moralische Vermögen, in dessen Besitz sie durch die Annahme des Spiels gelangt, dem ursprünglichen Vermögen gleich werde. Auf solche Weise erhält man zur Berechnung des Einsatzes x die Gleichung

$$(v + g)^p (v - x)^q - v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieser Vorgang entbehrt jedoch der Berechtigung, weil er eine wesentliche Bedingung nicht erfüllt, die Vermögensumstände der beiden Teilnehmer am Spiele nicht gleichförmig beachtet. Dieser Bedingung würde man gerecht werden mit dem Grundsatze: Die Einsätze sind so zu regeln, dass die moralischen Hoffnungen (Vermögensänderungen) der Spieler gleich gross ausfallen.

Lässt man den Grössen p, q, v ihre frühere Bedeutung, bezeichnet mit x, y die Einsätze der Personen A, B und mit v' das Vermögen der letzteren, so ist obiger Grundsatz durch die Gleichung

$$(v+y)^p (v-x)^q - v = (v'-y)^p (v'+x)^q - v' \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

ausgedrückt.

Die Rechnungsweise nach Gleich. (1) kann als besonderer Fall der zweiten aufgefasst werden, welcher eintritt, wenn das Vermögen v' den übrigen Beträgen gegenüber unendlich gross angenommen wird; dann verschwindet die rechte Seite von Gleichung (2) und sie wird mit (1) gleichlautend, wenn man g für y schreibt.

Zur Vergleichung der beiden Rechnungsmethoden unter einander und mit der mathematischen Spielregel mögen einige Beispiele folgen, wobei der Einsatz x des Spielers A als Geldeinheit dienen soll; die Gleichungen (1), (2) lauten dann, wenn man

$$\frac{g}{x} \text{ und } \frac{y}{x} = \eta, \quad \frac{v}{x} = \nu, \frac{v'}{x} = \nu'$$

setzt, wie folgt:

$$(\nu+\eta)(\nu-1)^q - \nu = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1')$$

$$(\nu+\eta)^p (\nu-1)^q - \nu = (\nu'-\eta)^p (\nu'+1)^q - \nu' \quad . \; . \; . \; . \; (2')$$

Zunächst erhält man für $\nu = 100$, $p = \frac{1}{10}$, $q = \frac{9}{10}$ und

$$\nu' = 100, \quad 500, \quad 1000$$

für η die Werte

$$\eta = 8{\cdot}9769, \quad 9{\cdot}1760, \quad 9{\cdot}2112;$$

dagegen nach Gleichung (1′) ohne Rücksicht auf das Vermögen des B

$$\eta = 9{\cdot}4645.$$

Die mathematische Spielregel würde $\eta = 9$ ergeben. Die Rechnung nach Gleich. (2′) liefert also für η einen umso grösseren Wert, je grösser das Vermögen von B im Vergleich zu dem Vermögen von A; die Rechnung nach Gleich. (1′) führt zu dem grössten Werte von η.

Wagt A sein ganzes Vermögen auf das Spiel, so ist $v = x$ und daher $\nu = 1$; während Gleich. (1′) für diesen Fall

$$\eta = \infty$$

ergibt, findet man aus (2′) wenn beispielsweise $\nu' = 100$ gesetzt wird,

$$\eta = 17{\cdot}31;$$

hier ist der Unterschied ein besonders auffälliger. Das erste Resultat wird gewöhnlich dahin gedeutet, man dürfe niemals sein ganzes Vermögen auf ein Spiel wagen.

Eine gewisse Analogie mit der mathematischen Spielregel erlangt die zweite Rechnungsmethode, wenn man bei beiden Spielern gleiche Vermögensumstände voraussetzt. Die Gleichung (2′), welche jetzt die Form annimmt

$$(\nu + \eta)^p (\nu - 1)^q = (\nu - \eta)^p (\nu + 1)^q,$$

liefert

$$\eta = \nu \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1},$$

wenn zur Abkürzung $\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right)^{\frac{p}{q}} = \varkappa$ gesetzt wird. Aus der näheren Betrachtung dieser Formel ergibt sich, vorausgesetzt, dass ν grösser als 1 ist.

So lange $p > \frac{1}{2}$, ist η grösser als der nach der mathematischen Spielregel sich ergebende Betrag, der Unterschied zwischen beiden fällt umso geringer aus, je grösser ν ist.

Wird $p = \frac{1}{2} = q$, so erhält man für η denselben Wert, den die mathematische Spielregel ergibt; in diesem Falle kommt die Gleichheit der moralischen Hoffnungen mit jener der mathematischen überein.

Für $p < \frac{1}{2}$ wird η kleiner als der nach der mathematischen Spielregel gefundene Betrag, und zwar umso kleiner, je kleiner p wird, und nähert sich mit gegen 0 abnehmendem p der festen Grenze ν, während der nach der mathematischen Spielregel gerechnete Einsatz von B unter denselben Umständen ins Unbegrenzte wachsen würde.

Wir kehren nun zu unserem Gegenstande zurück. Die Bernoulli-Laplace'sche Lösung des Petersburger Problems beruht auf der Anwendung der Theorie von der moralischen Bedeutung des Geldes zur Berechnung des Einsatzes in dem ersten hier entwickelten Sinne. Dies machen wir der erwähnten Lösung zum Vorwurf, und zwar nicht allein, weil diese Art der Rechnung die beiden Spieler nicht gleichmässig behandelt, bei dem einen ein endliches, bei dem andern aber ein Vermögen voraussetzt, dass zur Begleichung aller Gewinnste ausreicht, die den Spielbedingungen zufolge eintreten können, kurz, ein unendliches Vermögen, sondern weil die Bernoulli'sche Theorie zur Regelung der Einsätze überhaupt nicht zulässig ist.

Wer sich in ein Spiel einlässt, tut es — wie in der Theorie angenommen werden muss — in der Absicht, sein Vermögen zu vermehren und will durch niemand anderen entscheiden lassen als durch den Zufall. Werden aber schon bei der Regelung der Einsätze fremde Umstände in Rechnung gezogen, soll der Spieler deshalb, weil er ein grösseres Vermögen besitzt oder mit grösserer Wahrscheinlichkeit den Gewinn zu erwarten hat als sein Gegner, mehr einsetzen als mit Ausserachtlassung der Wirkungen des Zufalls oder nach der Regel von der Gleichheit der mathematischen Erwartungen sich ergibt, so würde er durch Annahme eines solchen Spiels seiner Absicht entgegenarbeiten.

Die Sätze von der moralischen Hoffnung können, wie schon einmal hervorgehoben, nur dazu dienen, mehrere Spiele oder mit ungewissen Ereignissen im Zusammenhange stehende Geldunternehmungen in Bezug auf die Höhe der damit verbundenen Gefahr zu vergleichen. Von dieser Art sind die bekannten interessanten Beispiele, welche Bernoulli und Laplace behandeln, die Untersuchung nämlich, ob es vorteilhafter ist, eine ungewisse Summe einer einzigen Gefahr preiszugeben oder auf mehrere gleiche Gefahren gleichmässig zu verteilen; ferner die Untersuchung, was vorteilhafter ist, ein Gut, das einer Gefahr ausgesetzt ist, zu versichern oder unversichert zu lassen.

In ähnlichem Sinne hat Oettinger*) die Bernoulli'sche Theorie auf das Petersburger Problem angewendet. Er schreibt dem Problem auch nur dann einen Sinn zu, wenn die Zahl der Würfe endlich und bestimmt, also im Vorhinein ausbedungen ist, und untersucht, welcher von den Personen, ob Paul oder Peter aus der Annahme des Spieles grössere Gefahr droht. Dabei ist, wie sich durch Beobachtung der Gleichungen 9 und 10 der citirten Abhandlung erweist, ein Irrtum unterlaufen. Bei der Berechnung des moralischen Vermögens bei Paul beachtet Oettinger ganz richtig, dass dieser seinen Einsatz einbüsst, ob nun Bild im 1., 2. . . . $n$ten Wurfe oder gar nicht fällt; bei der analogen Rechnung für Peter geht er aber so vor, als ob dieser den Einsatz Pauls nur dann behalten würde, wenn Bild gar nicht fällt. Eine ähnliche Unklarheit in der Auffassung der Aufgabe findet man bei Liagre**); dieser übersieht nämlich, dass Peter den

*) Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Crelle's Journal, 36. Band, pag. 300 ff.

**) Calcul des probabilités et théorie des erreurs. IIme édit. revue par C. Peny. Bruxelles, 1879, pag. 139 seq.

Einsatz Pauls auch dann behält, wenn Bild gar nicht eintrifft, und erhält dadurch für diesen Einsatz einen von dem sonst berechneten abweichenden Wert.

Die Anwendung der Bernoulli'schen Theorie auf das Petersburger Problem im Sinne Oettingers wird sich folgendermassen darstellen lassen; wir führen sie weiter aus, weil sie ein bemerkenswertes Resultat ergibt. Ist v das Vermögen Pauls, v' das Vermögen Peters, n die Zahl der vereinbarten Würfe, so ist $\frac{n}{2}$ der rechtmässige Einsatz, den Paul zu leisten hat; durch die Annahme des Spiels erlangt er das moraliche Vermögen

$$V = \left(v - \frac{n}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(v - \frac{n}{2} + 2\right)^{\frac{1}{4}} \left(v - \frac{n}{2} + 4\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$
$$\cdots \left(v - \frac{n}{2} + 2^{n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}} \left(v - \frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}},$$

Peter dagegen das moralische Vermögen

$$V' = \left(v' + \frac{n}{2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(v' + \frac{n}{2} - 2\right)^{\frac{1}{4}} \left(v' + \frac{n}{2} - 4\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$
$$\cdots \left(v' + \frac{n}{2} - 2^{n-1}\right)^{\frac{1}{2^n}} \left(v' + \frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}};$$

jenachdem der Wert von V grösser oder kleiner ist als Wert von V', ist das Spiel für Peter, beziehungsweise Paul gefährlicher. Die Ausdrücke für V und V' werden imaginär, wenn einerseits

$$\frac{n}{2} > v \quad \text{oder} \quad n > 2v,$$

andererseits

$$2^{n-1} > v' + \frac{n}{2} \quad \text{oder} \quad 2^n - n > 2v'.$$

Die niedrigere dieser Grenzen von n ist massgebend; bis dahin sind V und V' vergleichbar, darüber hinaus entbehrt das Spiel ohnehin der Grundlage, weil der einen oder andern von den beiden Personen das zur Einhaltung der Spielbedingungen nötige Geld fehlt. Ist beispielsweise $v = v' = 100$, so ist 6 die Grenze von n, und man findet für

$n = 1$		$V = V' = 99 \cdot 995$
$n = 2$		$V = V' = 99 \cdot 990$
$n = 3$	$V = 99 \cdot 975$	$V' = 99 \cdot 974$
$n = 4$	$V = 99 \cdot 933$	$V' = 99 \cdot 926$
$n = 5$	$V = 99 \cdot 834$	$V' = 99 \cdot 786$
$n = 6$	$V = 99 \cdot 638$	$V' = 99 \cdot 340$;

ist $v = v' = 1000$, so ist 10 die Grenze von n, und es ergibt sich für

$n = 1$		$V = V' = 999 \cdot 9998$
$n = 2$		$V = V' = 999 \cdot 9995$
$n = 3$	$V = 999 \cdot 9991 \ldots$	$V' = 999 \cdot 9991 \ldots$
$n = 4$	$= \cdot 9979 \ldots$	$= \cdot 9979 \ldots$
$n = 5$	$= \cdot 9949 \ldots$	$= \cdot 9949 \ldots$
$n = 6$	$= \cdot 9884$	$= \cdot 9881$
$n = 7$	$= \cdot 9749$	$= \cdot 9733$
$n = 8$	$= \cdot 9472$	$= \cdot 9402$
$n = 9$	$= \cdot 8937$	$= \cdot 8660$
$n = 10$	$= \cdot 7986$	$= \cdot 6702$

Von $n = 3$ angefangen ist also $V' < V$, der Unterschied wird mit der Anzahl der Würfe immer grösser, Peter erscheint Paul gegenüber immer mehr im Nachteile*). Dieses Resultat steht mit den Ergebnissen anderer Betrachtungen im Widerspruche; denn ist die Anzahl der vereinbarten Würfe einigermassen gross, so erscheint uns Paul als derjenige, dem das Spiel mit grösserer Gefahr droht. Um ein recht augenfälliges Beispiel zu haben, denke man sich, Peters Vermögen v' betrage $2^{39} - \frac{40}{2}$ (= 549.755, 813.868) Thaler und es mögen 40 Würfe vereinbart werden; die Rechnung ergibt dann $V' = 0$, dagegen für V einen von Null verschiedenen Betrag, sobald Pauls Vermögen mehr als 20, z. B. auch nur 21 Thaler beträgt. Selbst in diesem Falle erscheint also Paul dem Peter gegenüber im Vorteile, würde aber trotz dieses Rechnungsergebnisses vernünftigerweise auf das Spiel nicht eingehen.

Damit ist der Nachweis geliefert, dass es Fälle gibt, wo die Rechnung nach Bernoulli's Theorie von der moralischen Hoffnung zu Resultaten führt, welche mit den Ergebnissen anderer Erwägungen im Widerspruche stehen. Bei Beurteilung der Gefahr, welcher man durch Annahme eines Spiels, einer Wette o. dgl. sich aussetzt, genügt also die alleinige Rücksichtsnahme auf das Vermögen nicht; namentlich erfordert die Grösse der Wahrscheinlichkeit, den Einsatz wieder heimzubringen, besondere Beachtung, wie dies bei dem oben unternommenen Versuche der Lösung des Petersburger Problems geschehen ist.

*) Oettinger, l. c. pag. 306, ist in Folge des oben hervorgehobenen Irrtums zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt.

II.

Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

Die regelmässigen linear begrenzten Figuren von 2 und 3 Dimensionen, d. i. Vielecke und Polyeder, bieten zwar analoge allgemeine Begriffe dar, welche Anwendung auf jede Dimensionenzahl gestatten, doch ist darin nirgends ein Fortschrittsgesetz zu erkennen. Von der unbegrenzten Zahl regelmässiger Vielecke kommen wir zur Zahl 5 der regelmässigen Polyeder. Es scheint also, dass, wenn überhaupt ein Gesetz gefunden werden soll, die Reihe mit 3 Dimensionen erst beginnen muss, so dass der erste Fortschritt bei 4 Dimensionen an den Tag treten würde. Es wird sich nun zeigen, dass auch diese erweiterte Betrachtung über die Frage den erwarteten Aufschluss nicht giebt. Es treten hier wesentliche Aenderungen hinzu. Gerade diese aber scheinen mir von Interesse zu sein.

§. 1. Der Euler'sche Satz von den Polyedern in seiner Erweiterung auf vier Dimensionen.

Wenn wir, wie bei allen hier betrachteten Figuren, einfachen Zusammenhang zur Vorausetzung machen, so kann man die Oberfläche eines Polyeders auf einer Ebene in 2 sich dem Umfange nach deckenden Netzen, mit Abstraction von allen Grössenbeziehungen abbilden. Die Betrachtung wird dadurch erleichtert, dass man mit dem untern Netz nur eine Seite, die Schlussseite, mit dem obern die ganze übrige Oberfläche darstellt.

Eine leichte Betrachtung ergiebt, dass in jedem Netze von Vielecken die Summe der Eckpunkt- und Vieleckszahlen um 1 grösser ist als die Zahl der Linien. Die Schlussseite vermehrt als Vieleck jene Summe um 1. Daher ist wie bekannt

$$e+f=k+2 \tag{1}$$

Ebenso kann man die Grenze eines Polytops (Vielraum, so will ich die linear begrenzte Figur von 4 Dimensionen nennen) auf dem Raume abbilden durch ein Netz von Polyedern und ein sie alle umfassendes Polyeder als Schlussseite. Fügt man zu einem Netze ein neues Polyeder hinzu, das durch einen Complex von Flächen damit in Verbindung steht, so vermehrt sich die Anzahl der Ecken e um $e'-e''$, die der Kanten k um $k'-k''$, die der Flächen um $f'-f''$, die der Polyeder p um 1, wo e', k', f' sich auf das neue Polyeder, e'', k'', f'' auf den Grenzflächencomplex beziehen; und man hat:

$$e'+f'=k'+2$$
$$e''+f''=k''+1$$

folglich wächst $e+f-k$ um 1, und $e+f-(k+p)$ bleibt unverändert. Da nun für 1 Polyeder

$$e+f-(k+p)=1$$

ist, so ist es auch für jeden Complex von Polyedern $=1$. Zur Vervollständigung der Grenze des Polytops ist nun bloss als Schlussseite ein Polyeder hinzuzufügen, dessen Ecken, Kanten, Flächen schon im Netze enthalten sind, so dass nur p um 1 wächst. Der dem Euler'schen analoge Satz von den Polytopen lautet also:

$$e+f=k+p \tag{2}$$

Dass hier die Relation eine homogene ist, was beim Polyeder nicht der Fall war, hat einen wesentlichen Unterschied in der Theorie zur Folge. Der Grund des verschiedenen Verhaltens ist leicht zu sehen: bei den ungeschlossenen Flächen- und Polyedernetzen stimmte die Relation der Zahlen noch überein; die Schlussseite aber kommt beim Polyeder additiv, beim Polytop subtractiv hinzu. Bei successiver Vermehrung der Dimensionen muss dies Verhalten stets abwechseln, weil die Schlussseite immer die zuletzt eingeführte Zahl vermehrt, diese aber abwechselnd zur Linken und Rechten der Gleichung steht. Das gleiche Gesetz bestätigen auch die regelmässigen Gebilde von weniger Dimensionen:

1. Dim. $e=2$ Gerade Linie
2. $e=k$ Vieleck

3. Dim. $e+f=k+2$ Polyeder
4. $e+f=k+p$ Polytop

nämlich für μ Dimensionen die Gleichung

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^{\mu-1}a_{\mu-1}=1-(-1)^{\mu}$$

wo a_ν die Anzahl der Grenzfiguren von ν Dimensionen bezeichnet. Die allgemeine Gültigkeit folgt analog durch den Schluss von μ auf $\mu+1$, worauf wir hier nicht eingehen.

§. 2. Bestimmung der regelmässigen linear begrenzten Figuren.

An eine regelmässige linear begrenzte Figur stellt man die Forderung, dass seine Grenze aus lauter congruenten regelmässigen linear begrenzten Figuren von 1 Dimension weniger besteht, und dass diese congruenten Teile, sowie deren Ecken, Kanten, Flächen, Räume u. s. w. von einem Mittelpunkte gleichen normalen Abstand haben. Ein regelmässiges Polytop ist also begrenzt von lauter congruenten regelmässigen Polyedern.

Aus diesen Bedingungen folgt, dass eine regelmässige linear begrenzte Figur durch die Beschaffenheit einer Ecke vollständig bestimmt ist. Lassen wir die durch die Kantenlänge repräsentirte Grösse ausser Acht, so giebt es von jeder Art solcher Figuren nur ein Individuum. Wir können daher, statt von verschiedenen Arten, direct von verschiedenen Figuren sprechen.

Ein Polyeder ist dann bestimmt durch die Anzahl der um eine Ecke liegenden Flächen m und durch die Anzahl von deren Ecken n, woraus:

$$e:f=n:m$$

Es folgt weiter: zu jeder Kante gehören 2 Ecken, zu jeder Ecke m Kanten, also ist

$$e:k=2:m$$

zu jeder Kante gehören 2 Flächen, zu jeder Fläche n Kanten, daher

$$f:k=2:n$$

woraus:

$$e=\frac{2}{m}k;\quad f=\frac{2}{n}k \tag{3}$$

und nach Einsetzung in Gl. (1):

$$k=\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

ein Ausdruck der, mit Beachtung dass m und n nicht < 3 sein können, nur für die bekannten 5 Wertpare von m, n ein positives, dann aber auch stets ein ganzes k nebst ganzen e und f ergiebt.

Hiernach reicht der Euler'sche Satz aus, alle möglichen regelmässigen Polyeder und die Anzahlen von deren Ecken, Kanten, Flächen zu bestimmen.

Zur Bestimmung eines regelmässigen Polytops werden nötig sein die Werte von m, n für die begrenzenden Polyeder, ferner die Zahl und Gruppirung der Polyeder um eine Ecke. Die Gruppirung erhält man auf folgende Weise. Man schneide das Polytop durch einen Raum, welcher normal zum Radius einer Ecke durch einen Punkt einer von der Ecke auslaufenden Kante geht. Der Schnitt ist dann ein regelmässiges Polyeder, dessen Ecken die Schnitte der Kanten, dessen Kanten die Schnitte der Flächen, und dessen Flächen die Schnitte der Polyeder sind. Die Polyeder um eine Ecke des Polytops sind dann ebensoviele und ebenso gruppirt wie die Flächen des Schnittpolyeders. Zur Bestimmung gehören also 2 Zahlen m_1, n_1, welche angeben, wie viel Flächen zu einer Ecke, und wie viel Ecken zu einer Fläche des Schnittpolyeders gehören:

Suchen wir nun die Verhältnisse der Zahlen e, k, f, p und bezeichnen vorläufig mit e_1, k_1, f_1 die Werte von e, k, f für das Schnittpolyeder durch e_2, k_2, f_2 für das Seitenpolyeder, so gehören zu einer Ecke des Polytops e_1 Kanten, k_1 Flächen, f_1 Polyeder; zu einer Kante 2 Ecken, m_1 Flächen, m_1 Polyeder; zu einer Fläche n Ecken, n Kanten, 2 Polyeder; zu einem Polyeder e_2 Ecken, k_2 Kanten, f_2 Flächen. Daher hat man:

$$\begin{aligned} e : k &= 2 : e_1 \qquad & k : f &= n : m_1 \\ e : f &= n : k_1 & k : p &= k_2 : m_1 \\ e : p &= e_2 : f_1 & f : p &= f_2 : 2 \end{aligned}$$

oder nach (3):

$$\begin{aligned} e : k &= m_1 : k_1 \qquad & k : f &= n : m_1 \\ e : f &= n : k_1 & k : p &= k_2 : m_1 \\ e : p &= \frac{k_2}{m} : \frac{k_1}{n_1} & f : p &= k_2 : n \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von e, k, f:

$$m = n_1 \tag{5}$$

so dass nur die Relationen bleiben:

$$ek_1 = km_1 = fn = pk_2 \tag{6}$$

Diese erfüllen bedingungslos die Gl. (2), so dass keine Bestimmung daraus hergeleitet werden kann. Dagegen hat sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{N}{k_1} = N\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1} - \frac{1}{2}\right) \\ k &= \frac{N}{m_1}; \quad f = \frac{N}{n} \\ p &= \frac{N}{k_2} = N\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

§. 3. Einschränkung der möglichen Fälle.

Die Combination der Werte 3, 4, 5 für m, n, m_1 ergiebt, mit Beachtung dass die Werte 4, 5 nur Combinationen mit 3 zulassen, im ganzen 11 verschiedene Wertsysteme, eine Zahl die sich jedoch wegen folgender Bedingung mindert. Die Summe aller vierdehnigen Winkel um einen Punkt herum ist = 16 R*). Legt man einen Raum durch den Punkt, so ist die Winkelsumme auf jeder Seite des Raumes = 8 R. Ein convexes Polytop muss sich nun mit einer Ecke so in jenen Punkt legen lassen, dass es ganz auf einer Seite jenes Raumes liegt. Dann ist der innere Polytopwinkel an jener Ecke $<$ 8 R. Dieser wächst mit den ihn einschliessenden Polyederseiten bis 8 R, also muss auch die Summe der innern Polyederwinkel $<$ 8 R sein. Nun ist ein Polyederwinkel

für Tetraeder	= 0,35096 R
für Hexaeder	= R
für Oktaeder	= 0,86539 R
für Dodekaeder	= 1,88550 R
für Ikosaeder	= 1,67720 R

Dividirt man mit diesen Zahlen in 8 R, so findet man in gleicher Reihe die Quotienten:

22,79465
8
9,24443
4,24290
4,76984

Sie bilden die obere Grenze der f_1.

*) Unter R wird hier der Winkel zwischen 4 normalen Räumen, resp. 3 normalen Ebenen verstanden.

Ist nun das Seitenpolyeder ein Tetraeder, so ist $n_1 = m = 3$, und m_1 hat die Werte 3, 4, 5, denen die Werte 4, 8, 20 von f_1 entsprechen, sämmtlich die Grenze nicht erreichend.

Ist die Seite ein Hexaeder, so ist $n_1 = m = 3$, die Werte von f_1 sind dieselben, doch schon der zweite erreicht die Grenze, und nur $m_1 = 3$ ist möglich.

Ist die Seite ein Oktaeder, so ist $n_1 = m = 4$, also $m_1 = 3$, $f_1 = 6$, unterhalb der Grenze.

Ist die Seite ein Dodekaeder, so ist $n_1 = m = 3$, nur $f_1 = 4$ ist möglich, also $m_1 = 3$.

Ist die Seite ein Ikosaeder, so ist $n_1 = m = 5$, $m_1 = 3$, $f_1 = 12$, was die Grenze übersteigt.

Es ist daher nur möglich 6 verschiedene regelmässige Polytope zu construiren, und zwar liegen um eine Ecke

		m	n	m_1	n_1	
I.	4 Tetraeder	3	3	3	3	
II.	8 Tetraeder	3	3	4	3	
III.	20 Tetraeder	3	3	5	3	
IV.	4 Hexaeder	3	4	3	3	(8)
V.	6 Oktaeder	4	3	3	4	
VI.	4 Dodekaeder	3	5	3	3	

Ikosaeder können kein regelmässiges Polytop einschliessen.

Aus den Werten von m, n, m_1, n_1 muss auch der Wert von N notwendig folgen, doch liefert das Vorhergehende kein Mittel ihn zu finden; nur soviel ist zu ersehen, dass N die Factoren k_1 und k_2 haben muss, damit e und p ganze Zahlen werden.

§. 4. Bestimmung des Mittelpunkts.

Von einer Ecke A eines regelmässigen Polytops gehen e_1 Kanten AB aus. Legt man durch die e_1 Endpunkte B einen Raum, so geht dieser durch den Mittelpunkt D des regelmässigen Schnittpolyeders. Ist C der Mittelpunkt des Polytops, so ist AC normal zum Schnittraum und geht durch D. Man hat also das gleichschenklige Dreieck ACB mit dem Höhenlot BD, worin wir AB und BD als bekannt annehmen dürfen. Dann ist

$$AC = \frac{(AB)^2}{2\sqrt{(AB)^2 - (BD)^2}} \tag{9}$$

Dieselbe Formel lässt sich auch zur Berechnung von BD auf das Schnittpolyeder anwenden. An die Stelle von AB tritt dann die Diagonale (oder Kante) BB, welche 2 benachbarte Kantenenden B verbindet, und an die Stelle von BD der Eckradius des analogen Vielecks BE, so dass

$$BD = \frac{(BB)^2}{2\sqrt{(BB)^2 - (BE)^2}} \tag{10}$$

und zwar ist BB die Diagonale eines $n$ecks, Fläche des Seitenpolyeders, also zur Kante AB; und BE der Eckradius eines $m_1$ecks, dessen Kante Diagonale eines $n_1$ecks, nämlich der Fläche des Schnittpolyeders zur Kante BB ist. Daher hat man:

$$BB = 2AB\cos\frac{2R}{n}; \quad BE = BB\frac{\cos\frac{2R}{n_1}}{\sin\frac{2R}{m_1}}$$

und nach Einsetzung in (10) und in (9):

$$BD = \frac{BB\sin\frac{2R}{m_1}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m_1} - \cos^2\frac{2R}{n_1}}} \tag{11}$$

$$r = AC = \frac{AB}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{2R}{m_1} - \cos^2\frac{2R}{n_1}}{\sin^2\frac{2R}{m_1}\sin^2\frac{2R}{n} - \cos^2\frac{2R}{n_1}}} \tag{12}$$

Der Abstand der Polytopkante von C ist dann

$$r_1 = \sqrt{(AC)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AB\sin\frac{2R}{m_1}\cos\frac{2R}{n}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m_1}\sin^2\frac{2R}{n} - \cos^2\frac{2R}{n_1}}} \tag{13}$$

und, wenn F der Mittelpunkt der Fläche eines Seitenpolyeders, der Abstand dieser Fläche von C

$$r_2 = CF = \sqrt{(AC)^2 - (AF)^2} = \sqrt{(AC)^2 - \left(\frac{AB}{2\sin\frac{2R}{n}}\right)^2}$$

$$= \frac{AB\cot\frac{2R}{n}\cos\frac{2R}{n_1}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m_1}\sin^2\frac{2R}{n} - \cos^2\frac{2R}{n_1}}} \tag{14}$$

Bezeichnet endlich G den Mittelpunkt des Seitenpolyeders, so ist der Abstand dieses Polyeders von C

$$r_3 = CG = \sqrt{(AC)^2 - (AG)^2}$$

Wendet man die Formel (10) auf das Seitenpolyeder, also mit der Kante AB und den Zahlen m, n an, so kommt:

$$AG = \frac{AB\sin\frac{2R}{m}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m} - \cos^2\frac{2R}{n}}}$$

woraus, mit Beachtung dass $n_1 = m$:

$$r_3 = \frac{AB\cos\frac{2R}{m_1}\cos\frac{2R}{m}\cos\frac{2R}{n}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m} - \cos^2\frac{2R}{n}}\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m_1}\sin^2\frac{2R}{n} - \cos^2\frac{2R}{m}}} \tag{15}$$

Eine Polyederfläche ist

$$= \frac{n}{4}(AB)^2\cot\frac{2R}{n}$$

ihr Abstand vom Mittelpunkt G

$$= \frac{AB\cos\frac{2R}{m}\cot\frac{2R}{n}}{2\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m} - \cos^2\frac{2R}{n}}}$$

folglich das Polyeder, dessen Flächenzahl

$$f_2 = \frac{2}{n}\frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}}$$

aus Gl. (3) (4) bekannt ist,

$$\frac{(AB)^3 \cos\frac{2R}{m}\cot^2\frac{2R}{n}}{12\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m}-\cos^2\frac{2R}{n}}}$$

Die Anzahl der Polyeder war nach (7)

$$p = N\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

folglich ist der Umfang (Grenze) des Polytops

$$U = \frac{N(AB)^3 \cos\frac{2R}{m}\cot^2\frac{2R}{n}}{12\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m}-\cos^2\frac{2R}{n}}} \tag{16}$$

Diese multiplicirt mit $\frac{1}{4}$ ihres Abstandes vom Mittelpunkt, ausgedrückt in (14), giebt den Inhalt des Polytops

$$V = \frac{N(AB)^4 \cos\frac{2R}{m_1}\cos^2\frac{2R}{m}\cos\frac{2R}{n}\cot^2\frac{2R}{n}}{96\left(\sin^2\frac{2R}{m}-\cos^2\frac{2R}{n}\right)\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m_1}\sin^2\frac{2R}{n}-\cos^2\frac{2R}{m}}} \tag{17}$$

Auch der Winkel zwischen 2 Grenzräumen ergiebt sich leicht planimetrisch. Die Mittelpunkte des Polytops, des Polyeders und des Vielecks bilden das Dreieck CGF rechtwinklig in G. Das Vieleck ist der Durchschnitt zweier Polyederräume, und der von letztern daselbst gebildete innere Winkel w wird von CF halbirt; daher hat man:

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{CG}{CF}$$

das ist nach Gl. (14) (15):

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{\cos\frac{2R}{m_1}\sin\frac{2R}{n}}{\sqrt{\sin^2\frac{2R}{m}-\cos^2\frac{2R}{n}}} \tag{18}$$

woraus:

$$\cos w = -\frac{\cos\frac{4R}{m_1}\sin^2\frac{2R}{n}+\cos^2\frac{2R}{m}}{\sin^2\frac{2R}{m}-\cos^2\frac{2R}{n}} \tag{19}$$

§. 5. Construction der Netze.

Zur Berechnung der allein noch unbekannten Zahl N bleibt uns kein anderes Mittel als das Netz jedes einzelnen der 6 Polytope zu construiren. Um durch successive Anfügung neuer Polyeder das ganze Netz mit Sicherheit und beständiger Uebersicht des jedesmaligen Erfolges zu gewinnen, ist es nur nötig auf die Anzahl der um jede Kante liegenden Polyeder zu achten, die m_1 betragen muss. Ist diese Zahl voll, so gehört die Kante nicht mehr der Oberfläche an; fehlt 1 daran, so tritt das Polyeder als Keil zwischen 2 Flächen, die dann zugleich ins Innere verschwinden.

Polytop I. Um jede Ecke 4, um jede Kante 3 Tetraeder.

Legt man 4 Tetraeder um eine Ecke, so haben die anstossenden Kanten die volle Zahl, für die Oberfläche bleiben nur 4 Dreiecke, die ein Tetraeder begrenzen. Dieses ist Schlussseite, folglich die Anzahl der Tetraeder

$$N(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}) = 5; \quad N = 30$$

Polytop II. Um jede Ecke 8, um jede Kante 4 Tetraeder.

Legt man 8 Tetraeder um eine Ecke, so ist die Oberfläche die eines Oktaeders. An jeder Kante der Oberfläche liegen 2 Tetraeder. Setzt man also auf jedes Dreieck ein Tetraeder, so vermehrt sich die Zahl um 2, folglich verschwinden alle vorherigen Kanten ins Innere, die neuen Dreiecke gleichfalls, und alle Spitzen fallen in einen Punkt. Die 8 neuen Tetraeder bilden also ein Oktaeder um jenen Punkt, symmetrisch zum ersten Oktaeder. Die Tetraederzahl ist

$$N(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}) = 16; \quad N = 96$$

Polytop III. Um jede Ecke 20, um jede Kante 5 Tetraeder.

Um eine Ecke a legen wir 20 Tetraeder $abbb$. Die Oberfläche ist die eines Ikosaeders bbb ... An der Kante ab liegen 2 Tetraeder.

Auf die 20 Dreiecke bbb setzen wir 20 Tetraeder $bbbc$. An der Kante bb liegen 4, an der Kante bc 1 Tetraeder. (Man hat nur immer die hinzutretenden zu den schon angegebenen hinzuzuzählen).

An die 30 Kanten bb setzen wir 30 Tetraeder $bbcc$. Die bb verschwinden von der Oberfläche, desgl. die Dreiecke bbc. An den bc liegen 3, an den cc 1 Tetraeder.

Die 12 fünfseitig pyramidalen Concavitäten $bccccc$ füllen wir mit 12mal 5 = 60 Tetraedern $bccd$ an, so dass die Pyramiden in convexe mit der neuen Spitze d übergehen. An der Oberfläche sind nur die Kanten ec mit 3 und die cd mit 2 Tetraedern.

Auf die 60 Dreiecke ccd setzen wir 60 Tetraeder $ccde$. Die cc verschwinden ins Innere, die Dreiecke cce fallen parweise zusammen. An der Oberfläche liegen die Kanten cd mit 4, die ce mit 2 und die de mit 1 Tetraeder.

An die 60 Kanten cd, wo nur je 1 Tetraeder fehlt, legen wir 60 Tetraeder $cdee$. Die ce haben jetzt 4, die de 2, die ee ein Tetraeder.

Die 20 tetraedralen Concavitäten $ceee$ füllen wir mit 20 Tetraedern. Die de haben dann 3, die ee 2 Tetraeder.

Die 12 fünfseitig pyramidalen Concavitäten $deeeee$ füllen wir mit 12 mal 5 = 60 Tetraedern $deef$. Die ee haben 3, die ef 2 Tetraeder.

Auf die 20 Dreiecke eee setzen wir 20 Tetraeder $eeeg$. Die ee haben 4, die ef 2, die eg 2 Tetraeder.

Zwischen die 60 Dreieckspare eef, eeg legen wir die 60 Tetraeder $eefg$. Die ef haben 4, die eg 4, die fg 1 Tetraeder.

Zwischen die 60 Dreieckspare efg legen wir 60 Tetraeder $efgg$. Die fg haben 3, die gg 2 Tetraeder.

Auf die 60 Dreiecke fgg setzen wir 60 Tetraeder $fggh$. Die gg haben 4, die gh 2 Tetraeder.

Wir verbinden die h und vollenden die 30 Tetraeder $gghh$. Die gh haben 4, die hh 1 Tetraeder.

Wir füllen die 20 Concavitäten $ghhh$ mit 20 Tetraedern $ghhh$ aus. Es giebt nur noch Kanten hh, jede mit 3 Tetraedern. Die 20 Dreiecke hhh schliessen ein Ikosaeder ein.

Wir setzen auf die 20 Dreiecke hhh 20 Tetraeder $hhhi$, dann fallen alle Spitzen in einen Punkt i zusammen, und das Netz ist geschlossen.

Die Anzahl der Tetraeder ist

$$\begin{aligned} N(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}) &= 20+20+30+60+60+60+20+60 \\ &\quad +20+60+60+60+30+20+20 \\ &= 600 \\ N &= 3600 \end{aligned}$$

Polytop IV. Um jede Ecke 4, um jede Kante 3 Hexaeder.

Auf die 6 Quadrate eines Hexaeders setzen wir 6 Hexaeder. Zu jeder Kante gehörte vorher 1 Hexaeder, also nachher 3. Daher verschwindet die Kante, alle seitlichen Flächen fallen zusammen, und die übrigen 6 Quadrate bilden in Form eines Hexaeders die Oberfläche. Kommt dieses als Schlusseite hinzu, so ist die Anzahl der Hexaeder

$$N(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}) = 8; \quad N = 96$$

Polytop V. Um jede Ecke 6, um jede Kante 3 Oktaeder.

Auf die 8 Dreiecke eines Oktaeders setzen wir 8 Oktaeder. Die Kanten und mit ihnen 4 Dreiecke jedes neuen Oktaeders verschwinden. Die neue Oberfläche bilden 24+8 Dreiecke. Sie teilt das Netz in symmetrische Hälften; daher ist die Anzahl der Oktaeder

$$N(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}) = 18; \quad N = 216$$

Polytop VI. Um jede Ecke 4, um jede Kante 3 Dodekaeder.

Auf die 12 Fünfecke eines Dodekaeders A mit den Ecken a setzen wir 12 Dodekaeder B mit den je 5 Ecken a, 5 Ecken b, 5 Ecken c, 5 Ecken d. Dann liegen um jede Kante ein A und zwei B, also verschwindet aa, mit ihm die Flächen $abcba$ und die Kanten ab. Die Oberfläche bilden 12 Dodekaederkuppen, jede bestehend aus 5 Fünfecken $bcddc$ und 1 Fünfeck $ddddd$. Zu ihr gehören 60 Kanten bc mit zwei B, 60 Kanten cd mit einem B und 60 Kanten dd mit einem B. Die bc laufen je 3 in einen Punkt b zusammen, wo eine concave dreiseitige Ecke bleibt.

In jede dieser 20 Ecken fügen wir eine Ecke eines Dodekaeders C mit 1 Ecke b, 3 Ecken c, 6 Ecken d, 6 Ecken e, 3 Ecken f und 1 Ecke g. An jeder Kante bc liegen zwei B und ein C; daher verschwinden die bc nebst den je 3 Fünfecken $bcddc$. Hieraus folgt, dass auf jedem dieser Fünfecke ein C steht, und dass, weil in jeder Kante cd zwei derselben zusammenstossen, jede cd zu zweien C gehört, dass sie also, weil sie auch an einem B liegt, ins Innere verschwinden muss. Auf der Oberfläche bleiben die 60 Kanten dd mit einem B und einem C, die 120 Kanten de, die 120 Kanten ef und die 60 Kanten fg, sämmtlich nur mit einem C. Die Oberfläche wird gebildet von den 12 Fünfecken $ddddd$ und von 20 auf der Ecke stehenden Dodekaederkuppen, jede bestehend aus 3 Fünfecken $defed$ und 3 in die Spitze g zusammenlaufenden Fünfecken $efgfe$.

Setzen wir jetzt auf jedes der $ddddd$ ein Dodekaeder D, so verschwinden zuerst die dd nebst den angrenzenden Flächen $defed$; auf jedem der letztern steht also ein D; die D stossen aber in den

Kanten *de* zu 2 zusammen; daher gehören zu *de* zwei D und ein C, so dass die *de* gleichfalls verschwinden. Die Oberfläche wird gebildet von 60 Fünfecken *efgfe* und 12 Dodekaederkuppen, jede bestehend aus 5 Fünfecken *efhhf* und 1 Fünfeck *hhhhh*. Die *ee* haben zwei C, die *ef* ein C und ein D, die *fg* ein C, die *fh* und die *hh* ein D.

An die 30 Kanten *ee* stossen je 2 Fünfecke *efgfe*. Zwischen diese setzen wir ein Dodekaeder E, so dass *ee* zwischen C, C, E verschwindet. Desgleichen verschwinden die *ef* zwischen C, D, E; daher fallen 2 Flächen von E in 2 verschiedene *efhhf*. In jedem *fg* stossen 2 verschiedene E zusammen; daher verschwindet *fg* zwischen C, E, E. Jedes E grenzt aber mit 4 Kanten *fg* an 4 verschiedene E. Folglich verschwinden ausser den 4 schon benannten Flächen 4 neue, *hfgik*, und jedes E erreicht nur mit 4 Flächen die Oberfläche. Diese wird gebildet von 12 Fünfecken *hhhhh*, 60 Fünfecken *hklkh* und 60 Fünfecken *lkikl*. Die *hh* haben ein D und ein E, die *ik* und die *hk* zwei E, die *kl* und die *ll* ein E.

Wir setzen auf die 12 Fünfecke *hhhhh* 12 Dodekaeder F. Dann verschwinden die *hh* zwischen D, E, F, die *hk* zwischen E, E, F. Die Oberfläche wird gebildet von 60 Fünfecken *lkikl* und 12 Dodekaederkuppen, jede bestehend aus 5 Fünfecken *klmml* und 1 Fünfeck *mmmmm*. Die *ik* haben zwei E, die *kl* und die *ll* ein E und ein F, die *lm* und die *mm* ein F.

Wir fügen in jede der 20 dreiseitigen Ecken i die Ecke eines Dodekaeders G. Dann verschwinden die *ik* zwischen E, E, G, damit zugleich die Flächen *lkikl*, also auch die *kl* und *ll* zwischen E, F, G, mit ihnen die Flächen *mlklm*. Auf jeder von diesen steht ein G, folglich verschwindet *lm*, das zwei dieser Flächen begrenzt, zwischen F, G, G. Die Oberfläche wird gebildet von 12 Fünfecken *mmmmm* und 60 zu je 3 in die Spitze p zusammenlaufenden Fünfecken *mnpnm*. Die *mm* haben ein F und ein G, die *mn* zwei G, die *np* ein G.

Setzen wir jetzt auf die 12 Fünfecke *mmmmm* 12 Dodekaeder H, so verschwinden die *mm* zwischen F, G, H, die *mnpnm* werden bedeckt, die *mn* verschwinden daher zwischen G, G, H, die *np* zwischen G, H, H. Demnach wird zunächst die ganze vorige Oberfläche bedeckt. Da aber die neuen aufsteigenden Kanten zwischen je drei H fallen, die Flächen zwischen ihnen sich decken, so bleibt auf der Oberfläche von jedem H nur die oberste Fläche übrig. Also ist die Oberfläche nur die eines Dodekaeders J, das als Schlussseite hinzukommt.

Zählt man die Dodekaeder zusammen, so sind es

$$1A + 12B + 20C + 12D + 30E + 12F + 20G + 12H + 1J$$
$= 120$ Dodekaeder, daher
$$N(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) = 120; \quad N = 3600$$

Will man sich von dem körperlichen Netze eine Vorstellung verschaffen, so kann man nach Anfügung der B, dann der C, dann der D das ebene Netz der jedesmaligen Oberfläche zeichnen. Diese 3 ebenen Netze sind dann auch in umgekehrter Folge die der Oberfläche nach Anfügung der E, der F, der G; nur sind die Eckbuchstaben

b, c, d, e, f, g, h zu vertauschen mit
p, n, m, l, k, i, h

§. 6. Resultate.

Aus den Werten von N folgen nun nach den Formeln (7) auch die Zahlen der Ecken, Kanten, Flächen. Stellen wir sie zusammen so ergiebt sich folgende Tabelle.

Um jede Ecke.	Ecken	Kanten	Flächen	Polyeder
I. 4 Tetr.	5	10	10	5
II. 8 Tetr.	8	24	32	16
III. 20 Tetr.	120	720	1200	600
IV. 4 Hex.	16	32	24	8
V. 6 Okt.	18	72	72	18
VI. 4 Dodek.	600	1200	720	120

Die Radien der Ecken, Kanten, Flächen, Grenzräume ergeben sich aus den Gl. (12) (13) (14) (15) nach Einführung der Werte (8). Die Kante sei $= a$; dann wird die Tabelle:

	$\frac{r}{a}$	$\frac{r_1}{a}$	$\frac{r_2}{a}$	$\frac{r_3}{a}$
I.	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}$
II.	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$
III.	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\sqrt{(5+1)^{\text{[illegible]}}}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{2}}$
IV.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
V.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
VI.	$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$	$\frac{2+\sqrt{5}}{2}\sqrt{3}$	$\frac{(\sqrt{5}+1)^{\text{[illegible]}}}{8\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}$	$\frac{7+3\sqrt{5}}{4}$

Für Umfang U und Inhalt V geben die Gl. (16) (17)

	$\frac{U}{a^3}$		$\frac{V}{a^4}$	
I.	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$= 0{,}5892557$	$\frac{\sqrt{5}}{96}$	$= 0{,}02329237$
II.	$\frac{4}{3}\sqrt{2}$	$= 1{,}8856181$	$\frac{1}{6}$	$= 0{,}1666667$
III.	$50\sqrt{2}$	$= 70{,}7106781$	$\frac{25}{4}(\sqrt{5}+2)$	$= 26{,}4754249$
IV.	8		1	
VI.	$6\sqrt{2}$	$= 8{,}4852814$	$\frac{3}{2}$	$= 1{,}5$
VI.	$30\sqrt{5}(7+3\sqrt{5})$	$= 919{,}5742752$	$\frac{15}{4}\sqrt{5}(47+21\sqrt{5})$	$= 787{,}8569810$

Setzt man $V = 1$, so ergeben sich nach Elimination von a für U die folgenden Werte, die wir mit dem der runden Vierdehnung entsprechenden Werte U_0, dem Minimum für alle Vierdehnungen, in Vergleich stellen. Der Tabelle fügen wir zum Schluss die Werte w des innern Winkels zwischen 2 benachbarten Grenzräumen nach der Formel (18) bei.

	U	$\frac{U}{U_0}$	w
I.	9,88310	1,65774	0,83914R
II.	7,22882	1,21252	1,33333R
III.	6,05850	1,01622	1,82753R
IV.	8	1,34188	R
V.	6,26034	1,05008	1,33333R
VI.	6,18374	1,03723	1,6R
$U_0 =$	5,96180		

Nur in I. und III. sind die w nicht rational zum Rechten; es ist hier

$$\cos w \quad \text{für} \quad \begin{cases} \text{I.} & = \frac{1}{4} \\ \text{III.} & = -\frac{3\sqrt{5}+1}{8} \end{cases}$$

III.

Grundzüge der Geometrie des Cirkels.

Von

Franz Bessell.

---

(1).

Unter der Geometrie des Cirkels verstehen wir den Inbegriff aller derjenigen elementaren Constructionen, welche sich in einer Ebene ohne Hülfe des Lineals, durch alleinige Anwendung des Cirkels als Constructions-Instrumentes ausführen lassen.

In derselben hat man es nur mit Kreisen und mit Punkten zu tun. Eine gerade Linie wird jedesmal nur durch 2 isolirte Punkte dargestellt, welcher man zwar mit Leichtigkeit noch beliebig viele andere in derselben Richtung liegende hinzufügen kann, denen jedoch der continuirliche Zusammenhang fehlt und principiell fehlen muss.

Von den drei fundamentalen Aufgaben, auf welche schliesslich alle elementaren Constructionen zurückzuführen sind, nämlich den Durchschnitt 1) zweier Geraden, 2) eines Kreises und einer Geraden, 3) zweier Kreise zu bestimmen, erledigt sich die letzte ohne Weiteres; die Grundlage der Geometrie des Cirkels wird daher gelegt sein, wenn man im Stande ist, mit dem Cirkel allein folgende beiden Aufgaben zu lösen:

I. Es liegt ein vollständig ausgezogener Kreis, des Mittelpunkts C und des Halbmessers r, und daneben ein Punktepaar AB vor; man soll die beiden Punkte finden, in welchen die Kreislinie von der durch dies Paar bestimmten Geraden geschnitten wird.

II. Gegeben sind zwei Punktepaare AB und CD; gesucht wird der Punkt, in welchem sich die durch diese Paare gegebene Geraden begegnen.

(2).

Wir geben vorerst die Lösung dieser beiden Aufgaben ohne alle nähere Begründung und bedienen uns dabei folgender Terminologie.

Wenn drei Punkte O, P, P' in einer und derselben Richtung so liegen, dass O der Mittelpunkt der Entfernung PP' ist, so sollen letztere, P und P', Gegenpunkte gegen den Centralpunkt O heissen.

Wenn zwei Punkte P und P' gegen ein anders Paar QR so liegen, dass die Gerade PP' senkrecht auf der Geraden QR ist und die Strecke QR halbirt, so sollen P und P' Spiegelpunkte in Bezug auf das axiale Paar QR genannt werden.

Endlich möge ein Punkt P, welcher von zwei axialen Punkten QR gleiche Entfernungen besitzt, ein Seitenpunkt dieses Paars heissen, und wo es nötig ist von andern seines Gleichen durch ausdrückliche Angabe der betreffenden Entfernung unterschieden werden.

Es ist dann klar, dass alle Seitenpunkte eines axialen Paars QR in einer und derselben Geraden liegen, und paarweise sowol Spiegelpunkte in Bezug auf QR als auch Gegenpunkte gegen den Mittelpunkt von QR sind.

(3).

Rücksichtlich der Aufgabe I. ist zu unterscheiden, ob die Gerade des Paars AB durch den Kreismittelpunkt C führt oder nicht. In letzterem Falle hat man nur zu C seinen Spiegelpunkt C' in Bezug auf AB zu suchen und um denselben einen Kreis des Halbmessers r zu legen. Die Durchschnittspunkte beider Kreise sind die verlangten.

Dieser Weg füht aber nicht mehr zum Ziele, wenn C in der Geraden AB liegt, weil dann nicht nur die beiden Spiegelpunkte, sondern auch in Folge hiervon beide Kreise zusammenfallen.

Ueberhaupt wird diese Construction praktisch um so weniger brauchbar, je näher die Gerade AB bei C vorbeiführt. Später werden sich Auskunftsmittel für solche Fälle darbieten, jetzt, wo es sich zunächst nur um theoretische Möglichkeit handelt, gehen wir suf dergleichen nicht weiter ein, sondern wenden uns nur noch zu dem Grenzfalle selbst, als in welchem die Hauptschwierigkeiten, welche sich in der Geometrie des Cirkels darbieten, concentrirt sind. Dabei begnügen wir uns, unter den möglichen verschiedenen Constructionsweisen, welche alle auf einem und demselben Grundgedanken (s. Nr. 8) beruhen, als wol die einfachste folgende anzudeuten.

Auf der gegebenen Kreislinie wählt man 2 Punkte DD', welche Spiegelpunkte in Bezug auf die gegebene Gerade CA sind; legt zu DD' die ihr parallelen und gleichen Strecken CE und CE' (indem man von D aus $DE = r$, $CE = DD'$, und ebenso von D' aus $D'E' = r$, $CE' = DD'$ nimmt; construirt nun zu EE' den Seitenpunkt F in der Entfernung $EF = ED'$ oder $E'F = E'D$; worauf dann schliesslich die beiden gesuchten Punkte XX sich als Seitenpunkte zu EE' in der Entfernung $EX = CF$ ergeben.

(4).

Um die Aufgabe II. lösen zu können, zeigen wir zuvor, wie man durch 3 gegebene Punkte ABC einen Kreis legt.

Zu einem derselben C bestimmt man seinen Spiegelpunkt C' mit Bezug auf die beiden andern AB, beschreibt um C' mit dem Halbmesser $C'C$ einen Kreis und trägt in denselben von C aus die beiden Längen CA und CB als Sehnen ein. Sind nun A' und B' die andern Endpunkte dieser Sehnen, so beschreibt man um A' mit $A'C$ und um B' mit $B'C$ als Halbmesser Kreise.

Diese schneiden sich zum zweiten Male in einem Punkte X. dessen Entfernung von C der Halbmesser des gesuchten Kreises ist.

Darnach ist es leicht den Mittelpunkt desselben zu finden, als den Durchschnitt der 3 um A, B, C mit dem Halbmesser CX beschriebenen Kreise.

Um nun den Durchschnittspunkt zweier durch die Punktepaare AB und CD gegebenen Geraden zu bestimmen, wähle man in der Ebene einen beliebigen Punkt S und suche an diesem sowohl in Bezug auf AB als auf CD seine Spiegelpunkte, welche bzhw. S' und S'' heissen mögen. Dann ist der Mittelpunkt des durch die drei Punkte $SS'S''$ geführten Kreises der gesuchte Punkt.

(5).

Bevor wir auf Grund dieser Andeutungen die Behauptung aufstellen dürfen, dass es möglich sein müsste, alle elementaren Constructionen lediglich mit Hülfe des Cirkels auszuführen, ist es erforderlich, noch einem Einwande zu begegnen. Wo nämlich Punkte als Durchschnitte von Kreisen bestimmt werden sollen, da hat man immer zu gewärtigen, dass dieselben unter Umständen imaginär, und in Folge davon weitere Operationen mit denselben praktisch unausführbar werden. Rücksichtlich der oben angegebenen Constructionen kann dies nur in dem einen Falle eintreten, wo es sich darum handelt durch 3 Punkte einen Kreis zu legen und tritt dort in der Tat unvermeidlich ein, sobald die 3 Punkte so nahezu in einer Geraden liegen, dass die Sinus aller dieser Winkel des betreffenden Dreiecks kleiner als $\frac{1}{4}$ werden. Man kann dann aber — and so auch in ähnlichen später sich darbietenden Fällen, Abhülfe dadurch erreichen, dass man den vorliegenden Punkten andre substituirt, für welche jener Uebelstand nicht mehr Statt findet. Hier wird man den 3 gegebenen Punkten leicht noch einen 4ten und nach Bedarf sogar noch mehrere hinzu fügen können, die ebenfalls in der gesuchten Kreislinie liegen, indem man über einer Seite des Dreiecks als Basis ein 2tes Dreieck construirt, welches sich von dem ersten nur dadurch unterscheidet, dass die Schenkelseiten in ihrer Lage vertauscht erscheinen.

Uebrigens ist es keineswegs ratsam in jedem einzelnen Falle denjenigen Weg Schritt für Schritt zu verfolgen, welcher bei uneingeschränktem Gebrauch beider Hülfs-Instrumente als der zweckmäsigste bekannt ist.

Darüber zwar, wie man jedesmal am kürzesten, bequemsten und sichersten zu dem gesteckten Ziele gelangt, lassen sich nicht wol allgemeine Regeln geben; doch werden die nachfolgenden Ausführungen einigen Anhalt in dieser Beziehung gewähren können. Dieselben sollen zunächst die Begründung oben genannter Constructionen abgeben und alsdann einige Anwendungen derselben zeigen.

(6).

Die Bestimmung des Gegenpunktes A' eines Punktes A gegen ein Centrum O geschieht wohl am einfachsten und auch häufig am angemessensten dadurch, dass man um O mit dem Halbmesser OA einen Kreis beschreibt und in denselben OA drei mal hinter einander als Sehne einträgt. Dies Verfahren ist jedoch nur als ein specieller Fall des folgenden allgemeineren anzusehen.

Man wählt in der Ebene einen beliebigen Punkt B, und wiederholt das dadurch bestimmte Dreieck ABO dreimal hinter einander, so dass

$$AO = BC = OA', \quad AB = OC, \quad OB = A'C.$$

Setzt man dies Verfahren zunächst so weit fort, bis man wiederum an A angelangt ist, so hat man die 3 Paare Gegenpunkte AA', BB', CC'; wir wollen dasselbe noch weiter und zwar unbegrenzt fortführen, indem wir an jedes der vorhandenen Dreiecke noch ein neues ihm congruentes so anschliessen, dass beide sich stets wieder zu einem Parallelogramm ergänzen. Auf diese Weise wird die Ebene mit einem System von Punkten übersäet, deren gegenseitige Lage und Entfernung einerseits von der Grösse und Lage des Original-Dreiecks OAB und andrerseits von der Anzahl und Anordnung der Dreiecke abhängt, welche den Uebergang von einem solchen Punkte zum andern vermitteln.

Bezeichnen wir die Längen der drei Strecken OA, OB, OC bzhw. durch a, b, c, so ist zunächst ersichtlich, dass die Entfernung des Centralpunktes O von je einem derjenigen Punkte, die sich in der Richtung einer der 3 Geraden OA, OB, OC befinden, ein (positives oder negatives) Vielfaches einer jener 3 Einheitsstrecken a, b, c ist.

Der allgemeine Ausdruck für die Entfernung des O von irgend einem beliebigen Systempunkte ist in der Form

$$\sqrt{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2}$$

enthalten, wo α, β, γ algebraische ganze Zahlen sind, von denen je zwei einander zu einer Quadratzahl ergänzen und welche überdies der Bedingung $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ genügen, so dass also eine derselben stets negativ sein muss, während die andern beiden positiv sind. Dies erkennt man leicht, wenn man irgend zwei der 3 Richtungen OA, OB, OC, etwa die ersten beiden, als Coordinatenaxen behandelt. Sind dann na und mb die Coordinaten eines Systempunktes P, so ist

$$OP^2 = n^2a^2 + m^2b^2 + 2mnab \,.\cos AOB$$

und da

$$\cos AOB = (a^2 + b^2 - c^2) : 2ab$$

so folgt

$$OP^2 = (n^2 + mn)a^2 + (m^2 + mn)b^2 - mn \,. c^2.$$

Und beachtet man, dass jeder Punkt des Systems als Centralpunkt angesehen werden kann, so erkennt man, dass die Entfernung je zweier beliebiger Systempunkte in der nämlichen Form ihren Ausdruck findet.

Vorzüglich bemerkenswert, weil gebrauchsfähig, sind diejenigen Systeme, in welchen 2 Einheitsstrecken gleich sind. Man erhält dann als Maass für die Entfernung zweier Systempunkte einen der beiden Ausdrücke:

$$\sqrt{(n+m)^2a^2 - mn\,c^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{n^2a^2 + m(m+n)b^2},$$

welche übrigens der Hauptsache nach gleichbdeutend sind, da sie in einander übergehen, wenn man b mit c und zugleich $(n+m)$ mit $-n$ vertauscht.

Das einfachste aller Systeme ist aber das aequidistante d. i. dasjenige, in welchem alle 3 Strecken ein ander gleich sind, und somit der allgemeine Entfernungsausdruck sich auf $a\sqrt{m^2+n^2+mn}$ reducirt.

(7).

Aus einem gegebenen Punktsysteme kann man neue Systeme, in unbegrenzter Menge, dadurch ableiten, dass man irgend drei in jenem ersten vorfindliche Entfernungen zu Seiten eines neuen Original-Dreiecks nimmt, vorausgesetzt, dass die Summe irgend zweier dieser Entfernungen grösser als die dritte sei.

Es ist für unsern Zweck nicht nötig, diesen Gedanken im allgemeinen weiter zu verfolgen, sondern es genügt, zunächst ein einziges neues Dreieck zu bilden, nämlich dasjenige, dessen Basis AA' ist, und dessen Spitze D so liegt, dass

$$AD = AC \quad \text{und} \quad A'D = A'B$$

ist. In Folge hiervon wird

$$2OD^2 = AD^2 + A'D^2 - 2AO^2;$$

und da

$$AC^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2, \quad A'B^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2,$$

so ist

$$2OD^2 = 2a^2 + b^2 + c^2.$$

Hat man nun von vorn herein $b = c$ genommen, so ist

$$OD = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Hierin liegt die Rechtfertigung der in Nr. 3. angegebenen Construction zur Bestimmung des Durchschnitts der Geraden CA und des Kreises vom Halbmesser $CD = r$. Denn sieht man dort ECD als Original-Dreieck an und setzt $EC = a$, $CD = ED = r$, so ergiebt sich CF und somit auch das ihm gleiche

$$EX = \sqrt{a^2+r^2}.$$

(8).

Alle elementaren Constructionen lassen sich zurückführen auf die Herstellung von Punkt-Entfernungen, deren algebraischer Ausdruck in einer der fünf Formen: $a+b$, $a-b$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $ab:c$ enthalten ist, wo a, b, c gegebene Entfernungen sind.

Die bisherigen Entwickelungen zeigen, wie man zur Construction der ersten drei Ausdrücke gelangt, und namentlich auch, dass die Darstellung von $a\pm b$ diejenige von $\sqrt{a^2+b^2}$ zur Voraussetzung hat.

Die principiell unvermeidliche Weitläufigkeit dieses Weges, den man überall da notgedrungen einschlagen muss, wo die Auflösung der 2ten und 3ten Aufgabe des ersten Buchs der Elemente des Euklides nicht zu umgehen ist, drängt dazu, in allen einzelnen Fällen tunlichst solche Wendungen einzuschlagen, welche auf die Construction eines der letzteren beiden Ausdrücke hinauslaufen, da diese auf verhältnissmässig bedeutend einfachere Weise zu erreichen sind.

(9).

Die Herstellung von $\sqrt{a^2-b^2}$ bedarf kaum der Erörterung, denn es genügt zwei Gegenpunkte in der Entfernung $2b$ und zu diesen den Seitenpunkt in der Entfernung a zu bestimmen; wir verweilen nur deshalb einen Augenblick länger dabei, um daran die Bemerkung zu knüpfen, wie man alle Entfernungen des Betrages $a\sqrt{m}$ construiren kann, wo m eine absolute ganze Zahl sein soll.

Ist nämlich P ein Seitenpunkt von AA' in der Entfernung na, so ist $OP=a\sqrt{n^2-1}$, und wenn man wiederum zu AA' den Seitenpunkt Q in der Entfernung OP nimmt, so ist $OQ=a\sqrt{n^2-2}$.

So fortfahrend gelangt man weiter zu $a\sqrt{n^2-3}$ etc. und da man n beliebig gross nehmen kann, so ist klar, dass auf diese Art jede Entfernung $a\sqrt{m}$ herstellbar ist.

Auf einem meistens erheblich kurzem Wege wird man jedoch zu diesem Ziele gelangen, indem man das im Eingange von Nr. 7. angedeutete Princip auf ein System aequidistanter Punkte anwendet. In einem solchen liegen zunächst, wie oben am Ende von Nr. 6. bereits bemerkt, die Entfernungen der Form $a\sqrt{m^2+mn+n^2}$ unmittelbar vor, und wie man mittelst zu anderweitigen derartigen hieher gehörigen Ausdrücken gelangt, werden folgende einfache Beispiele genugsam erkennen lassen.

In gedachter Figur ist $CE=a\sqrt{2}$ dadurch bestimmt, dass zu dem Paare BD, dessen Distanz $2a$ ist, der Seitenpunkt E in der Entfernung $BE=BA'=a\sqrt{3}$ genommen wurde. Alsdann ist zu OA'' der Seitenpunkt F in der Entfernung $a\sqrt{2}$ construirt. Dadurch wird $AF = a\sqrt{5}$. Die Strecke $a\sqrt{6}$ kann man erhalten, wenn man zu CE das Paar Seitenpunkte GG' sucht, welchem eben dieselbe Entfernung $CE = a\sqrt{2}$ zukömmt; man hat dann $GG' = a\sqrt{6}$. Die Länge $a\sqrt{7}$ findet man ohne Weiters in AD vor. Um $a\sqrt{8}$ zu bekommen, brauchte man nur zu $AA' = 2a$ das Paar Seitenpunkte der Entfernung $a\sqrt{3}$ zu nehmen, u. s. w.

(10).

Den Weg zur Construction der 4ten Proportionale $ab:c$ und damit denjenigen zur Auflösung der Aufgabe II. eröffnet uns der Satz, dass das Product zweier Seiten eines Dreiecks gleich isl dem Producte aus dem Halbmesser des umschriebenen Kreises und dem doppelten Perpendikel, welches von dem gemeinschaftlichen Eckpunkt jener beiden Seiten auf die dritte gefällt ist.

Beschreibt man daher mit dem Halbmesser $MC = c$ einen Kreis, trägt in denselben die Sehnen $CA = a$, $CB = b$ und legt um A einen Kreis des Halbmessers a, so wie um B einen solchen des Halbmessers b, so ist die Entfernung der dadurch erhaltenen beiden Spiegelpunkte $CC' = ab:c$.

Hieraus ergiebt sich dann durch Umkehrung die Richtigkeit des oben unter Nr. 4. beschriebenen Verfahrens, um durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, und damit auch in leichter Weiterfolgerung diejenige des dort angedeuteten zur Lösung der Aufgabe II.

Allerdings setzt die Ausführbarkeit der so eben erörterten Methode zur Construction des Ausdruckes $ab:c$ voraus, dass sowohl a wie b kleiner sei als $2c$. Die hieraus entspringende Schwierigkeit lässt sich im Allgemeinen stets dadurch überwinden, dass man statt c ein angemessenes Vielfaches nimmt, dessen Doppeltes grösser als a und b ist, und dann hinterher das gefundene $CC' = ab:nc$ ebenfalls ver- n-facht; speciell aber betreffs der Lösung der Aufgabe II. kann man dieselbe durch geeignete Wahl des willkürlichen Punktes S ganz umgehen. Eine dahin zielende Andeutung ist bereits unter Nr. 5. gemacht, woraus zu ersehen ist, dass man nur darauf Bedacht zu nehmen hat, dass das Dreieck $SS'S''$ mindestens einen Winkel erhalte, dessen Sinus grösser als $\frac{1}{4}$ ist. Eines näheren Eingehens auf diesen Umstand enthalten wir uns hier um so mehr, als, wie sich unter Nr. 12. zeigen wird, die praktische Behandlung der Aufgabe II. noch einer erheblichen Vereinfachung fähig ist.

(11).

Besonders beachtenswert ist die Construction der sogenannten dritten Proportionale. Wenn nämlich in der Figur der vorigen Nr. die beiden Sehnen AC und BC gleich sind, so liegen die drei Punkte M, C, C' in einer und derselben Richtung. Und in weiterer Folge daran schliesst sich die Beschreibung eines Kreises um ein gleichschenkliges Dreieck sehr bequem.

Bringen wir diese Aufgabe unter die etwas mehr drastische Form den verloren gegangenen Mittelpunkt eines Kreises wieder zu finden, so liefert die Geometrie des Cirkels die in folgender Figur ausgeführte nette Auflösung.

Um einen beliebigen Punkt C der gegebenen Peripherie ist ein Kreis beliebigen Halbmessers $CA = CB$ beschrieben, zu C sein Spiegelpunkt C' in Bezug auf AB genommen und um C' ein neuer Kreis des Halbmessers $C'C$ gelegt, welcher den erst gezogenen Hülfskreis in A' und B' schneidet. Dann ist der Spiegelpunkt X des C in Bezug auf $A'B'$ der verlangte Kreismittelpunkt.

Sowohl um ein mögliches Imaginärwerden der Punkte $A'B'$ zu vermeiden, als auch damit die betreffenden Kreise sich nicht unter allzu spitzen Winkeln schneiden, wählt män zweckmässig die Punkte AB so, dass einer der sie verbindenden Bogen zwischen die Grössen 120^0 und 240^0 fällt.

(12).

Nunmehr entdeckt sich leicht als die kürzeste und sicherste Special-Methode zur Auffindung des Durchschnitts gegebener Geraden AB und CD diejenige, welche sich darbietet, wenn man in der oben unter Nr. 4. beschriebenen allgemeineren als willkürlichen Punkt S einen solchen wählt, welcher in Bezug auf das eine gegebene Punktepaar, etwa auf AB, Spiegelpunkt ist eines in der an den Geraden CD befindlichen Punktes, also etwa des C oder D selbst; denn dadurch gestaltet sich das Dreieck $SS'S''$ gleichschenklig.

Die nötigen Constructions-Schritte sind mithin folgende.

Zu C ist in Bezug auf AB der Spiegelpunkt C', zu diesem in Bezug auf CD der Spiegelpunkt C'', ferner wieder zu C bezüglich auf CC'' der Spiegelpunkt C''' zu nehmen und um diesen mit dem Halbmesser $C'''C$ der Kreis zu beschreiben, welcher den mit $CC' = CC''$ beschriebenen in D' und D'' schneidet.

Alsdann ist der zu $D'D''$ in der nämlichen Entfernung $D'C = C'C$ oder $D''C = C''C$ genommene Seitenpunkt X der verlangte Durchschnitt von AB und CD.

Es ist bereits oben mehrfach (in Nr. 5 und Nr. 10) darauf hingewiesen, dass diese Methode ihren Dienst versagt, wenn die beiden Geraden sich unter einem so spitzen Winkel schneiden, dass sein Sinus kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Dem dort gleichfalls schon angedeuteten Auskunfts-Mittel geben wir nunmehr eine praktisch bequemere Form, indem wir den Begriff der Spiegel-Geraden zu Hülfe ziehen. Darunter ist eine Gerade $A'B'$ zu verstehen, deren beide bestimmende Punkte Spiegelpunkte zu A und B in Bezug auf CD sind. Offenbar gehen alle drei Gerade $A'B'$, $A'B'$, CD durch denselben Punkt X und die ersten beiden davon schneiden sich unter einem doppelt so grossen Winkel, als die letztern zwei; und nötigenfalls würde eine wiederholte Verdoppelung bald zu dem gewünschten Ziele führen.

(13).

Eben dies selbe Hülfsverfahren kann auch dann mit Nutzen angewendet werden, wenn der betreffende Winkel allzu nahe an 90° liegt. Zwar werden in solchem Falle die beiden Punkte D' und D'' keineswegs imaginär, aber C' und C'' rücken so nahe zusammen, dass der Durchschnitt C''' der beiden um dieselben beschriebenen Kreise undeutlich wird. Und vollends, wenn AB und CD genau rechtwinklig auf einander stehen, so kann C''' auf diese Weise gar nicht mehr gefunden werden. Indessen ist derselbe keineswegs wirklich unbestimmt; er geht vielmehr über in den Gegenpunkt des C gegen denjenigen Punkt als Centrum, in welchem nunmehr C' und C'' coincidiren. Da aber alsdann auch X genau in die Mitte zwischen diesen Doppelpunkt ($C'C''$) und C zu liegen kömmt, so ist damit zugleich die Lösung der Aufgabe geliefert, eine gegebene Strecke (CC') zu halbiren.

Dieselbe lässt sich jedoch noch auf mancherlei andre, am allgemeinsten wohl auf folgende Art behandeln. Man sieht die zu halbirende Entfernung AB als Diagonale eines Parallelogramms $ACBD$ an, dessen einer Eckpunkt (C) willkürlich gewählt werden kann, und bestimmt dann den Durchschnitt von AB und CD.

Man wird also etwa um die beiden gegebenen Punkte AB ein Paar gleiche sich in E und E' kreuzende Kreise legen und dieselben von E und E' aus mit beliebigen doch gleichen Halbmessern in C,

D', D, C' schneiden. Alsdann hat man nicht weniger als 4 Gerade (AB, EE', CD, $C'D'$) welche sämmtlich durch den gesuchten Punkt führen. Man braucht daher nur für irgend zwei derselben (etwa nicht senkrecht auf einander stehende) den Durchschnitt zu suchen. Die weitere Ausführung dieser Construction, welche wir hier unterlassen haben, um die principielle Einfachheit der Sache nicht durch eine überladene Zeichnung zu trüben, wird dann noch wesentlich gefördert durch den Umstand, dass die 4 Hülfspunkte C, D, C', D' bereits Spiegelpunkte-Paare in Bezug auf AB wie auf EE' abgeben. Da dieselben ausserdem als Eckpunkte eines Rechtecks anzusehen sind, so bleibt es auch unbenommen, nach Maassgabe von Nr. 4. durch irgend drei davon einen Kreis zu legen, dessen Mittelpunkt ja gleichfalls das hier Geforderte leistet.

(14).

Gehen wir über zu der allgemeinen Aufgabe, eine gegebene Entfernung in einem gegebenen rationalen Verhältnisse zu teilen, oder sagen wir lieber, eine solche AB mit einem rationalen Bruche $m:n$ zu multipliciren.

Es würde zwar, namentlich in den einfachsten Fällen, nicht schwierig sein, den gemeinüblichen Methoden, welche auf Construction von Parallelen beruhen, auch hier nachzugehen, aber dem Geiste der Geometrie des Cirkels angemessener ist es wohl, auf die in Nr. 10 und 11 beschriebenen Verfahrungs-Weisen zur Construction von Proportionalen zurück zu greifen.

Man mag dabei unterscheiden, ob es nur darauf ankommt, überhaupt eine Entfernung zu finden, welche gleich $m.AB:n$ ist, oder ob dieselbe auch sofort in der Richtung von AB liegen und ihren einen Endpunkt in A und B selbst haben soll.

Stellen wir zunächst in dem letztern strengeren Sinne, auch vorerst $m=1$ setzend, die Forderung, auf AB einen Punkt X so zu bestimmen, dass $AX = AB:n$ werde.

Zu diesem Ende vervielfache man AB über B hinaus n mal (in der Figur ist $n=3$ genommen, so dass $AC = n:AB$; und beschreibe um C einen Kreis des Halbmessers CA, welcher den um A mit AB beschriebenen in D und D' schneidet. Alsdann begegnen sich die beiden Kreise, welche um D und D' mit dem Halbmesser AB beschrieben sind, in dem gesuchten Punkte X; denn man hat

$$AX:AD = AD:AC \quad \text{und} \quad AD = AB.$$

Diese Bestimmung des X leidet jedoch noch an dem Uebelstande, dass sie sogar schon bei kleinem n unter einem allzu spitzen Winkel geschieht, und dadurch bei grösserem n geradezu unbrauchbar wird. Nimmt man indessen dieselbe Construction, welche bei A vorgenommen ist, auch bei C vor, d. h. beschreibt man auch um C einen Kreis des Halbmessers AB und schneidet denselben von A aus mit dem Halbmesser AC in E und E', so erhalten diese beiden Punkte bzhw. von D und D' die Entfernungen $(n-1)AB:n$. Man wird daher X zweckmässig als den Durchschnitt des um D oder D' mit AB und des um C mit ED beschriebenen Kreises bestimmen. Diese beiden Kreise schneiden sich um so mehr unter rechten Winkeln, je grösser n.

Ist $m > 1$, so kann man sowohl durch nachträgliche Vervielfachung von AX, als auch meist besser wol dadurch zum Ziele gelangen, dass man den Halbmesser des zuletzt um A beschriebenen Kreises gleich $m.AB$ nimmt.

Kömmt es aber nur darauf an $m.AB = n$ in irgend einer andern Richtung, als in der von AB selbst zu finden, so braucht man die Consruction nicht mit der Vervielfachung der AB zu beginnen, sondern kann letzterer irgend eine andere Entfernung a substituiren. Man bildet dann na und ma, und sucht die 4te Proportionale in der Proportion $na : ma = AB : X$. Doch setzt dies, wie bekannt, voraus, dass $a > AB : 2n$ genommen werde.

(15).

Ein anderes hier und zwar in dem Falle, wo mehrere gegebene Entfernungen in einem und demselben Verhältnisse geteilt werden sollen, mit Vorteil zu verwendendes Hülfs-Mittel beruht auf dem Satze, dass, wenn zwei Kreise sich berühren, auf jeder der durch den Berührungspunkt führenden Geraden Abschnitte entstehen, welche sich verhalten wie die beiden Kreis-Halbmesser.

Sei z. B. $OM : ON = m : n = 3 : 5$ und es solle eine Strecke AB, welche jedoch nicht grösser als $2ON$ sein darf, in diesem Verhältnisse geteilt werden. Da trage man AB von O aus in den grössern Kreis als Sehne ein ($OP = AB$) und bestimme nun ihren Durchschnitt mit dem Kreise des Mittelpunkts M. Zu dem Ende ist auch um O ein (ständiger) Kreis des Halbmessers OM gelegt, der nun von P aus mit PM in Q zu schneiden ist. Dann liefert der Seitenpunkt, welcher zu QM in der Entfernung OM genommen ist, eine Strecke

$$OR = m . AB : n.$$

Wollte man diese auf AB selbst haben, so brauchte man nur ein Dreieck wie etwa OPQ, dessen Basis nämlich OP sein muss, während M Spitze (hier Q) beliebig wo angenommen werden kann, an jenes AB als neue Basis zu transportiren, um dort sofort auch den dem R entsprechenden Punkt X zu finden, für welchen

$$AX = m . AB : n$$

(16).

Auch die Herstellung einer Entfernung, welche zu einer gegebenen AB in dem irrationalen Verhältnisse $\sqrt{m} : \sqrt{n}$ steht, lässt sich ganz auf die nämliche Art vornehmen, wie solches für rationale Verhältnisse am Schluss von Nr. 14. angedeutet ist; denn es ist aus Nr. 9. bekannt, wie man von einer Basis a ausgehend zu Strecken gelangen kann, welche sich zu a verhalten wie $\sqrt{m} : 1$. Und da Constructionen der letztern Gattung fast ausnahmslos bequemer ausführbar sind, als solche von $a.m$, so wird man sich jener recht wohl bedienen können, um vermittelst derselben hinwiederum zu rationalen Teilungen zu gelangen; denn hat man etwa $a\sqrt{m:n}$ gefunden, so ergiebt sich $a.m:n$ leicht als dritte Proportionale in

$$a : a\sqrt{m:n} = a\sqrt{m:n} : X.$$

Ein Beispiel möge das Nähere zeigen.

Es soll $3AB:7$ ermittelt werden. Wir suchen vorerst $AB.\sqrt{3:7}$, indem wir ein System aequidistanter Punkte bilden, dessen Basis AB ist. Demselben gehören die Punkte A, B, C, D, D', E an; und ist $DD' = AB\sqrt{3}$ so wie $CD = AB\sqrt{7}$. Der nun um C mit CD zu beschreibende Kreis führt durch die bereits vorhandenen System-Punkte E, D, D' und es finden sich auch dort in $ED = AB$ und $DD' = AB\sqrt{3}$ schon die erforderlichen Sehnen eingetragen, so dass man nur noch um E mit ED und um D mit DD' die sich in Y kreuzenden Kreise zu legen hat, woraus sich $DY = AB\sqrt{3:7}$ ergiebt. Schneidet man endlich von A aus den Kreis des Mittelpunkts B mit dieser Länge $DY = AZ = AZ'$, so wird der Spiegelpunkt von A in Bezug auf ZZ' der gesuchte X sein, welcher von A um die Entfernung $AB.3:7$ absteht.

(17).

Zum Schlusse wollen wir die Aufgabe, einen Kreis in n gleiche Teile zu teilen in derjenigen Allgemeinheit behandeln, welche hier überhaupt zulässig ist.

Bekanntlich lässt sich dieselbe auf elementar geometrischen Wege in allen denjenigen Fällen erledigen, wo n eine Primzahl und zugleich $n-1$ eine Potenz von 2 ist; und ihnen gesellen sich dann sofort noch diejenigen bei, welche aus jenen durch fortgesetzte Halbirung hervorgehen.

Was nun zunächst diese letztere Aufgabe, der einen gegebenen Kreisbogen zu hälften, anlangt, so ist das dazu Erforderliche ohne Weiteres aus Nr. 3. zu entnehmen, wenn man in der dortigen Figur, den Punkt A ausser Acht lassend, den Bogen DD' als das Gegebene ansieht.

Indessen ist es für den vorliegenden Zweck, namentlich vom praktischen Gesichtspunkte aus betrachtet, kaum nötig, von genannter Construction irgend welchen Gebrauch zu machen; denn jetzt, wo die zu halbirenden Bogen principiell schon aliquote Teile der Peripherie sind, stellen sich, wie wir unter Nr. 22. näher sehen werden, meist von selbst erhebliche Vereinfachungen jenes allgemeinen Verfahrens ein. Zum Ueberfluss machen wir nur noch darauf aufmerksam, dass sich die Halbirung eines Kreisbogens als ein specieller Fall einem Probleme unterordnen lässt, mit dem wir uns sofort eingehender werden zu beschäftigen haben.

Da nämlich in jenen Hauptfällen, wo n eine Primzahl der Form $1+2^m$ ist, die Theorie der Kreisteilung stets auf quadratische Gleichungen zurückführt, so ist es hier von so wesentlichem Belang, Methoden ausfindig zu machen, wodurch man die Wurzeln solcher Gleichungen mittels des Cirkels allein herstellen könne, selbstverständlich mit der Voraussetzung, dass dieselben reell sind.

Die zu lösende Gleichung nehmen wir in einer der beiden Formen

$$x^2+ax=b^2 \quad \text{oder} \quad x^2+b^2=ax$$

als gegeben an, wo dann im letztern Falle $a>2b$ sein muss.

Die beiden Zahlen a und b seien durch die Entfernungen zweier gegebener Punktepaare dargestellt, $AB=a$, $CD=b$.

Auch ist es gestattet, den Coefficienten a stets als positiv anzunehmen, denn eine Zeichen-Aenderung desselben hat nur zur Folge, dass die Wurzeln der Gleichung in ihr Entgegengesetztes übergehen, während die absoluten Längen der sie darstellenden Strecken, als worauf es hier vorzugsweise nur ankommen kann, unverändert bleiben.

(18).

Um die Wurzeln von $x^2+ax=b^2$ zu bestimmen, stelle man $b=CD$ als Kathete eines im Uebrigen beliebigen rechtwinkligen Dreiecks CDE dar, construire in Bezug auf $a=AB$ das Paar Spiegelpunkte MM' in der Entfernung der andern Kathete DE und weiter wieder ein Paar Spiegelpunkte XY in Bezug auf MM' in der Entfernung der Hypotenuse CE. Man hat dann in AX und AY oder auch in BX und BY die beiden verlangten Wurzeln.

Denn legt man etwa von X aus eine Tangente XN an einen der Bogen AB, so ist dieselbe $=CD$ und somit die mittlere Proportionale der beiden Strecken XB und BY. Folglich ist das Product

$$XB\,.\,BY=b^2,\quad \text{während}\quad XB+BY=a.$$

Nur die Vorsicht ist zu beachten, dass $2DE>AB$ werde.

Behufs Auflösung der andern Gleichung $x^2+b^2=ax$ hat man dieselbe Reihe von Operationen vorzunehmen, jedoch hier die Kathete DE und die Hypotenuse CE ihre Rollen vertauschen zu lassen.

(19).

Eine andere zu demselben Ziel führende Methode, welche namentlich für den Fall der zweiten Form, der vorigen vorzuziehen sein kann, besteht darin, dass man an den einen Endpunkt von a, etwa A, eine Richtung AE anbringt, welche gegen AB unter einem Winkel von 60^0 geneigt ist, und nun diese Gerade AE von B aus mit einem Kreise des Halbmessers $\sqrt{a^2-b^2}$, welcher in der Figur $=BX=BY$ sein möge, schneidet.

Alsdann repräsentiren AX und AY die gesuchten Wurzeln; denn es ist

$$AB^2+AX^2-2AB\,.\,AX.\cos 60^0=BX^2$$

oder

$$a^2+x^2-ax=a^2-b^2,$$

woraus folgt w. z. b. w.

Wollte man ein analoges Verfahren auf die Form $x^2+ax=b^2$ anwenden, so brauchte man nur $\sqrt{a^2-b^2}$ durch $\sqrt{a^2+b^2}$ zu ersetzen.

(20).

Beide Methoden setzen voraus, dass das von x freie Glied der Gleichung in Form eines Quadrates (bb) gegeben sei, während die im allgemeinen statthafte Form desselben doch nur die eines zweifactorigen Productes $(b\beta)$ ist. Wir müssen deshalb, ehe wir zu Anwendungen übergehen, noch mit ein Paar Worten derjenigen Construction gedenken, wodurch die hier nötige Umgestaltung zu vollziehen ist, m. a. W. der Herstellung der mittlern Proportionale zweier gegebener Längen.

Dabei dürfen wir uns gestatten, den ersten der zu diesem Ziele erfordarllchen Schritte bereits als geschehen anzusehen, indem wir annehmen, dass die beiden Strecken in einer und derselben Richtung unmittelbar neben oder auf einander vorliegen. Dann ist der kürzeste unter den verschiedenen zulässigen Wegen wohl der folgende.

Seien A, B, C drei in einer Richtung liegende Punkte und es soll das geometrische Mittel von AB und AB bestimmt werden.

Zu der kleineren der beiden Entfernungen (AB) bestimme man irgend 2 Spiegelpunkte M, M' und ferner noch den Spiegelpunkt C' des C in Bezug auf MM'. Wenn man dann um C und C' ein Paar Kreise mit den gleichen Halbmessern $CA = C'B$ construirt, welche sich in X schneiden, so ist AX oder BX die verlangte Strecke; denn die gleichschenkligen Dreiecke ABX und AXC sind ähnlich.

(21).

Um einem Kreise ein regelmässiges Fünfeck einzuschreiben, ist es nötig, den Halbmesser im Verhältniss des goldenen Schnitts zu zu teilen oder die Gleichung $x^2 + x = 1$ aufzulösen.

Will man die Methode in Nr. 19. anwenden, so genügt es, vorausgesetzt, dass $AB = 1$ sei, $BX = \sqrt{2}$ zu machen.

Auf Grund von Nr. 18. aber gelangt man zu folgender allgemeineren Verfahrungs-Weise.

Nimmt man den beliebigen Halbmesser

$$AM = \sqrt{m}, \quad \text{so ist} \quad MX = \sqrt{m+1}$$

zu machen. Für $m = 1$ erhält man wieder die so eben angedeutete Construction, nur in etwas anderer Anordnung. Es sei $m = 3$ gewählt, so dass

$$AM = CC' \quad \text{und} \quad MX = C'D.$$

Man hat in AX und BX die Längen $(\mp 1 + \sqrt{5}):2$.

(22).

Stellen wir nunmehr kurz diejenigen Regeln zusammen, mittels welcher die Teilung des Kreises in n gleiche Teile ausgeführt werden kann in allen denjenigen Fällen, wo n in 120 aufgeht.

Zuvörderst bestimme man von dem gegebenen Halbmesser AB ausgehend ein System aequidistanter Punkte A, B, C, C', D, D', E u. s. w., alsdann den Seitenpunkt F zu DE in der Entfernung $CC' = AB.\sqrt{3}$, und eben so den Seitenpunkt J zu DD' in der Entfernung $CF = AB.\sqrt{2}$.

Schneidet man nun von A und B aus die Kreise, worauf sie sich befinden, mit der Länge $AB.\sqrt{2}$ bzhw. in G und H, so hat man in AG und BF ein Paar Bogen von 90^0.

Den Bogen $AK = 36^0$ findet man, indem man $AK = JB$ und ebenso $AL = 72^0$, indem man $JL = AB$ oder auch $AL = JG$ macht.

Schneidet man ferner von H aus den Kreis um B mit der Länge $CC' = AB\sqrt{3}$ in M, so ist $GM = 45^0$; denn $HB^2 + BM^2 = C'C^2$.

Werden endlich noch zu K und L ihre Spiegelpunkte K' und L' in Bezug auf GG' bestimmt, so hat man in den aufeinander folgenden Bogen AK, KC, CL, LG, GL', $L'D$, DM, MK' bzhw. solche von 36^0, 24^0, 12^0, 18^0, 18^0, 12^0, 15^0, 9^0, welchen sich dann mittels Substraction etwa der beiden vorletzten auch derjenige von 3^0 noch leicht hinzufügen lässt.

(23).

Mehr des theoretischen Interesses halber, als um der praktischen Brauchbarkeit willen möge auch die Teilung des Kreises in 17 gleiche Teile hier Platz finden.

Dieselbe beruht auf der Auflösung von vier quadratischen Gleichungen, welche wir in folgender Form ansetzen:

erstens: $w^2 + w = 4$; ihre positive Wurzel heisse w_1, die negative w_2,

zweitens: $t^2 - tw_1 = 1$; ihre positive Wurzel heisse t_1, die negative t_2,

drittens: $t^2 - tw_2 = 1$; ihre positive Wurzel heisse t_4, die negative t_3.

Alsdann kann man als vierte eine der folgenden vier Gleichungen wählen:

$$s^2 - t_1 s + t_4 = 0 \quad s^2 - t_2 s + t_3 = 0 \quad s^2 - t_3 s + t_1 = 0$$
$$s^2 - t_4 s + t_2 = 0.$$

Die acht Wurzeln derselben geben die Längen von Sehnen ab, welche, im Kreise des Halbmessers 1 siebzehn mal wiederholt abgetragen, eine ungerade Anzahl von halben Peripherien durchlaufen. Deuten wir letztere Anzahlen durch dem s angehängte Indices an, so sind die Wurzeln der ersten jener vier Gleichungen s_1 und s_{13}, die der zweiten s_9 und $-s_{15}$, der dritten $-s_7$ und $-s_{11}$, der letzten s_5 und $-s_3$.

Man wird demnach die nötigen Constructionen etwa in folgender Weise anordnen. Zuvörderst bildet man ein System aequidistanter Punkte, dessen Basis der Halbmesser $AB = 1$ ist. Ihm gehören in der Figur die mit A, B, C, D, E bezeichneten Punkte an.

Die Lösung der Gleichung $w^2 + w = 4$ geschieht nun dadurch, dass zu AB das Paar Seitenpunkte MM' in der Entfernung $CC' = \sqrt{3}$ und weiter zu MM' das Paar Seitenpunkte $W_1 W_2$ in der Entfernung $ED' = \sqrt{7}$ bestimmt wird. Dann ist

$$A W_1 = w_1 \quad \text{und} \quad A W_2 = w_2.$$

Um die zweite und dritte Gleichung $t^2 - tw = 1$ zu lösen, stelle man die Länge als Kathete eines Dreiecks dar, dessen beide andre Seiten $\sqrt{3}$ und 2 sind. Alsdann bestimme man sowohl zu $A W_1$ als zu $A W_2$ ein Paar Seitenpunkte, bzhw. NN' und PP' in der Entfernung $\sqrt{3}$, und zu jedem dieser beiden Paare wiederum ein Paar Seitenpunkte, bzhw. $T_1 T_2$ und $T_3 T_4$ in der Entfernung 2. Demzufolge ist

$$AT_1 = t_1 \quad AT_2 = t_2 \quad AT_3 = t_3 \quad AT_4 = t_4$$

Von den vier Gleichungen, deren Wurzeln die verlangten Sehnen liefern, sei die dritte gewählt:

$$s^2 - st_3 + t_1 = 0.$$

Um dieselbe lösen zu können, ist zuvor nötig, dass t_1 in Form eines Quadrats gebracht werde; man hat also die mittlere Proportionale zu AT_1 und AB zu suchen. Zu dem Ende ist zu T_1 der Spiegelpunkt T_1' in Bezug auf DD' und alsdann zu $T_1 T_1'$ der Seitenpunkt Q in der Entfernung $AT_1 = B'T'$ genommen, in Folge dessen

$$AQ = B'Q = \sqrt{t_1}$$

wird.

Nun ist mit Hülfe des Gegenpunktes Q' des Q gegen B' die Strecke $B'Q$ als Kathete des bei B' rechtwinkligen Dreiecks $Q'BR$ dargestellt, mit dem Vorbedacht, dass die Hypotenuse QR grösser als die Hälfte von AT_3 werde. Weiter ist in Bezug auf AT_3 das Paar Seitenpunkte UU' in der Entfernung QP und schliesslich ein letztes Paar Seitenpunkte S_7 und S_{11} in Bezug auf UU' in der Entfernung $B'R$ construirt.

Dadurch erhält man in AS_7 und AS_{11} ein Paar Sehnen, welche 17mal wiederholt im Kreise des Halbmessers AB abgetragen, bzhw. einen Bogen von $7 \,.\, 180^0$ und $11 \,.\, 180^0$ durchlaufen. Die Abtragungspunkte sind daher Eckpunkte des dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen 34ecks und geben somit auch das verlangte 17eck ab.

IV.

Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen.

Von

Gustav Kohn,

Gymnasiallehrer in Minden.

---

§ 1.

Die gebräuchlichen Kriterien über die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihen mit positiven abnehmenden Gliedern von der Form

$$U = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$
$$(\lim u_n = 0 \text{ für } n = \infty)$$

zerfallen im wesentlichen:

1) in solche, die sich auf die Veränderung des Gliedes u_n selbst,

2) in solche, die sich auf die Veränderung des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ beziehen.

Die Kriterien der ersten Art, wie sie von Cauchy, dann auch für schwächere Grade der Convergenz und Divergenz von Morgau und nach des letzteren Vorgang in anderen Formen von Bertrand, Bonnet, Paucker [1]) aufgestellt wurden, finden ihren klarsten, dem

---

1) Cauchy, cours de analyse algébrique p. 135.

Morgau in seinem 1839 zu London erschienen Lehrbuch der Differenzial- und Integralrechnung.

ihnen zu Grunde liegenden Princip der Reihenvergleichung entsprechenden Ausdruck bei Bonnet:

Die Reihe mit dem Glied u_n ist convergent, wenn von einem bestimmten Werte des n an beständig bleibt

$$u_n < \frac{\delta}{n^{1+k}}, \quad u_n < \frac{\delta}{n(l_n)^{1+k}}, \quad \ldots \quad u_n < \frac{\delta}{nln\, l_2 n \ldots (l_r n)^{1+k}};$$

die Reihe ist divergent, wenn

$$u_n > \frac{\delta}{n}, \quad u_n > \frac{\delta}{nln}, \quad \ldots \quad u_n > \frac{\delta}{nlnl_2 n \ldots l_r n},$$

wo δ und k positive endliche Zahlen bedeuten.

Ueber die Convergenz oder Divergenz derjenigen Reihen, welche zur Aufstellung der erwähnten Kriterien benutzt worden sind, liess sich entscheiden durch zwei Sätze von Cauchy [1]):

Die Reihen

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

und

$$au_a + a^2 u_{a^2} + \ldots + a^n u_{a^n} + \ldots$$

convergiren oder divergiren gleichzeitig, wenn a eine ganze Zahl ist; und

Ist $f(x)$ eine stetige Function von x, welche von einem bestimmten Werte an, z. B. $f(1)$, dasselbe Vorzeichen behält und abnimmt ohne Aufhören mit $\frac{1}{x}$, so convergirt oder divergirt die Reihe

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

gleichzeitig mit der primitiven Function $F(x)$.

Bertrand, règles sur la convergence des séries. Liouville's Journal Ser. 1. Bd. 7. p. 35.

Bonnet, note sur la convergence et la divergence des séries. Liouv. Journ. Ser. 1. Bd. 8. p. 77.

Paucker, note relative à quelqnes règles sur la convergence des séries. Crelle's Journ. Bd. 42. p. 138.

1) Cauchy, cours d'analyse alg. p. 135. und sur la convergence des séries. Exercices de math. Bd. 2. p. 221.

Ein die Convergenz oder Divergenz aller Reihen entscheidendes Kriterium der ersten Art in specieller Form aufzustellen, wäre nur dann möglich, wenn eine Reihe V bekannt wäre der Art, dass, wenn man

$$u_n = \varrho_n v_n$$

setzte, die Reihe U jedesmal divergirte, sobald

$$\lim \varrho_n = \infty,$$

in allen andern Fällen aber convergirte; oder, dass U convergirte, sobald

$$\lim \varrho_n = 0,$$

in allen andern Fällen aber divergirte. Es würde dann das eine Mal V den denkbar geringsten Grad der Convergenz, das andre Mal den denkbar geringsten Grad der Divergenz besitzen. Dass eine derartige Reihe nicht existirt, ist schon von Abel[1]) nachgewiesen worden. Auch eine fortgesetzte Anwendung der logarithmischen Kriterien genügt nicht, um alle Fälle der Convergenz und Divergenz zu erschöpfen[2]). — Einen allgemeinen Ausdruck für den Gedanken, auf dessen Anwendung in speciellen Fällen die gebräuchlichen Kriterien der ersten Art beruhen, giebt du Bois-Reymond[3]):

Bringt man das Glied u_n irgend einer Reihe U auf die Form

$$\frac{1}{\lambda_n}\{V(n) - V(n+1)\},$$

so convergirt die Reihe U stets, wenn die Differenzen $V(n) - V(n+1)$ ihr Vorzeichen nicht wechseln, $\lim V(n)$ endlich und $\lim \lambda_n$ nicht gleich Null wird; sie divergirt stets, wenn die Differenzen $V(n) - V(n+1)$ ihr Vorzeichen nicht wechseln, $\lim V(n)$ unendlich gross und $\lim \lambda_n$ nicht unendlich ist. Ungewissheit herrscht in dem Fall, dass $\lim V(n)$ nicht unendlich und $\lim \lambda_n$ Null oder $\lim V(n)$ unendlich und $\lim \lambda_n$ unendlich wird.

---

1) Abel, note sur le mémoire de M. Olivier ayant pour titre „remarques sur les séries infinies etc.“. Crelle's Journ. Bd. 3. p. 79. — Olivier hatte, Bd. 2. desselben Journals, p. 35. geglaubt, die Convergenz von Reihen auf die einzige notwendige und hinreichende Bedingung zurückführen zu können, dass

$$\lim (nu_n) = 0.$$

2) du Bois-Reymond, eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern. Crelle's Journ. Bd. 76. p. 61.

3) du Bois-Reymond, l. c.

Man erhält Kriterien für immer schwächer werdende Grade der Convergenz oder Divergenz, wenn man für $V(n)$ eine Folge von immer schwächer abnehmenden oder zunehmenden Functionen setzt. Indem du Bois-Reymond als solche Folge von Functionen wählte

$$e^{\mp an}, \quad n^{\mp a}, \quad (ln)^{\mp a}, \quad \ldots \quad (l_r n)^{\mp a}$$

wo a eine positive endliche Zahl, ergeben sich die bekannten, von Cauchy, Morgau etc. gebildeten Kriterien.

Auch die gebräächlichen Kriterien der zweiten Art, welche den Ausdruck $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}}$ oder $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ zum Gegenstand haben, sind in den verschiedenen Formen, in denen sie aufgestellt wurden von Raabe, Duhamel, Bertrand, Bonnet, Paucker, Catalan [1]), gebildet auf Grund der Vergleichung mit den entsprechenden Ausdrücken derselben Reihen, welche die Kriterien der ersten Art lieferten.

Schon 1835 hatte übrigens Kummer [2]) ein allgemeines Kriterium der zweiten Art aufgestellt, welches sich allerdings nur auf den Fall der Convergenz bezieht, worin die sämmtlichen übrigen Kriterienf teilweise in den ihnen eigenen Formen enthalten sind. Dieses Kriterium stimmt überein mit dem einen Teil des von du Bois-Reymond aus seinem allgemeinen Kriterium erster Art dadurch abgeleiteten, dass er seine Function $V(n)$ setzt

$$V(n) = u_n \varphi(n).$$
$$[\lim \varphi(n) = \infty].$$

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, wie aus jeder Reihe neue Reihen abgeleitet werden können, welche, im Falle der Convergenz der ursprünglichen Reihe, je nach der Beschaffenheit einer einzuführenden Function, schwächer oder stärker convergiren, im

1) Raabe, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen-Zeitschr. für Math. und Physik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettingshausen. Bd. 20. p. 41.

Duhamel, nouvelle règles sur la convergence des séries. Liouv. Journ. Bd. 4. p. 214.

Bertrand l. c.

Bonnet l. c.

Paucker l. c.

Catalan, traité élémentaire des séries p. 23.

2) Kummer, Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. Crelle's Journ. Bd. 13. p. 171.

Falle der Divergenz schwächer oder stärker divergiren, und welche so ein neues allgemeines Kriterium der ersten Art ergeben, das insofern auch Verwandtschaft mit den Kriterien der zweiten Art hat, als man den charakteristischen Ausdruck derselben $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ ersetzt durch $\frac{u_n}{n f(n)}$, wo $f(n)$ eine Function ist, welche gleichtig mit n unendlich gross wird.

§ 2.

I) Lehrsatz: Wenn u eine Function von x ist, welche von einem bestimmten Wert der unabhängigen Veränderlichen an, z. B. $x = 1$, eindeutig, stetig und positiv ist, welche überdies derartig fällt, dass

$$\lim u_x = 0 \quad \text{für} \quad x = 0;$$

wenn ferner $f(x)$ eine eindeutige, positive, für endliche Werte von x endliche Function ist, welche gleichzeitig mit x unendlich wird; dann divergirt im Fall der Divergenz von

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

auch die Reihe

$$\{f(2) - f(1)\} u_{f(1)} + \{f(3) - f(2)\} u_{f(2)} + \ldots \\ + \{f(n+1) - f(c)\} u_{f(n)} + \ldots;$$

im Fall der Convergenz von U convergirt auch die Reihe

$$\{f(2) - f(1)\} u_{f(2)} + \{f(3) - f(2)\} u_{f(3)} + \ldots \\ + \{f(n+1) - f(c)\} u_{f_{n+1}} + \ldots$$

Beweis: Denkt man sich der Reihe nach die Werte der Function u_x von $x = 1$ an als Ordinaten aufgetragen, so bilden die Eckpunkte derselben eine Curve, welche sich immermehr der Abcissenaxe nähert. Bezeichnet man die Fläche, welche eingeschlossen ist von der Abscissenaxe, von den Ordinaten 1 und x und von der Curve durch w_x, so ist

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} > w_n > u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Somit wird w_n gleichzeitig mit U unendlich werden oder endlich bleiben [1]). In folge der für $f(n)$ gemachten Voraussetzung wird $w(f_3)$ mit w_n und also auch mit U unendlich werden oder endlich bleiben.

---

1) Vergl. hierzu Cauchy, sur la convergence des séries. Exerc. de math. Bd. II. p. 221.

Ferner ist

$$\{f(2)-f(1)\}\,u_{f(1)} > w_{f(2)} - w_{f(1)} > \{f(2)-f(1)\}\,u_{f(2)}$$
$$\{f(3)-f(2)\}\,u_{f(2)} > w_{f(3)} - w_{f(2)} > \{f(3)-f(2)\}\,u_{f(3)}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\{f(n+1)-f(n)\}\,u_{f(n)} > w_{f(n+1)} - w_{f(n)}$$
$$> \{f(n+1)-f(n)\}\,u_{f(n+1)},$$

somit

$$\sum_1^n [\{f(n+1)-f(n)\,u_{f(n-1)} > w_{f(n+1)} - w_{f(1)}$$
$$> \sum_1^n [\{f(n+1)-f(n)\}\,u_{f(n+1)}],$$

woraus sich die Behauptung ohne Weiteres ergiebt.

Anmerkung: Es ist

$$u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\} = u_{f(n)} \frac{f(n+1)-f((n)}{f(n)-f(n-1)} \cdots \{f(n)-f(n-1)\}.$$

In allen Fällen, in welchen

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)}$$

stets kleiner als eine endliche Grösse k und stets grösser als eine von Null verschiedene positive Grösse k_1 ist, d. h.

$$k_1\,u_{f(n)}\{(f(n)-f(n-1)\} < u_{f(n)}\,\{f(n-1)-f(n)\}$$
$$< k u_{f(n)}\{f(n)-f(n-1)\},$$

wird

$$k_1 \sum_1^{n-1} [u_{f(n+1)}\,\{f(n+1)-f(n)\}] < \sum_2^n [u_{f(n)}\,\{f(n+1)-f(n)\}]$$
$$< k \sum_1^{n-1} [u_{f(n+1)}\{f(n+1)-f(n)\}].$$

Es convergiren oder divergiren demnach unter der gemachten Voraussetzung gleichzeitig mit Sicherheit die Reihen

$$\Sigma[u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\}], \quad \Sigma u_n, \quad \Sigma[u_{f(n+1)})\{f(n+1)-f(n)\}].$$

II) Anwendungen.

1) Setzt man

$$f(x) = a^x\,(a > 1),$$

so wird

$$f(n+1)-f(n)=a^{n+1}-a^n=a^n(a-1),$$

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)}=\frac{a^{n+1}-a^n}{a^n-a^{n-1}}=\frac{a^n(a-1)}{a^{n-1}(a-1)}=a,$$

$$u_{f(n)}\{f(n+1)-f(n)\}=u_{a^n}(a^{n+1}-a^n)=(a-1)a^n u_{a^n}.$$

Da der constante Factor $(a-1)$ in Rücksicht auf die Convergenz oder Divergenz ohne Einfluss ist, so convergiren oder divergiren gleichzeitig die Reihen

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

und

$$au_a+a^2u_{a^2}+\ldots+a^nu_{a^n}+\ldots$$

Für ein ganzzahliges b erhält man hieraus den p. 2. erwähnten Satz Cauchy's.

2) Die Reihe

$$a+a^2+a^3+\ldots+a^n+\ldots$$

convergirt, wie bekanntlich durch Summirung unmittelbar zu finden, wenn

$$a<1;$$

sie divergirt, wenn

$$a= \text{ oder } >1$$

ist. Setzt man

$$f(x)=lx,$$

so wird

$$f(n+1)-f(n)=l(n+1)-l(n)=l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{n}(1-\varepsilon_n),$$

$$\lim \varepsilon_n=0 \quad \text{für} \quad n=\infty;$$

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{f(n)-f(n-1)}=\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}.$$

Nun ist aber einerseits

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}<1;$$

andererseits

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} > \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n-1}},$$

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

folglich

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^2;$$

$$\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n-a}\right)} > \tfrac{1}{4}.$$

Man erhält demgemäss unter denselben Bedingungen, wie für Σa^n die Convergenz oder Divergenz von $\Sigma \left\{\frac{a^{ln}(1-\varepsilon_n)}{n}\right\}$ und $\Sigma \frac{a^{ln}}{n}$. Setzt man

$$a = e^{la}$$
$$n = e^{ln},$$

so ist

$$\frac{a^{ln}}{n} = e^{la\,ln - ln} = e^{-ln(1-la)} = \frac{1}{n^{1-la}}.$$

Im Falle der Convergenz ist la stets negativ, im Falle der Divergenz Null oder positiv. Nennt man α den absoluten Wert von la, so erhält man die Convergenz von

$$1 + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \cdots,$$

die Divergenz

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

und

$$1 + \frac{1}{2^{1-\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1-\alpha}} + \cdots$$

3) Setzt man in den zuletzt genannten Reihen wieder

$$f(x) = lx,$$

so erhält man unmittelbar die Convergenz von

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\alpha}}$$

und, wenn man in gleicher Weise fortfährt, diejenigen von

$$\Sigma \frac{1}{nln(l_2 n)^{1+\alpha}}, \quad \dots \quad \Sigma \frac{1}{nln l_2 \dots (l_r n)^{1+\alpha}};$$

dagegen die Divergenz von

$$\Sigma \frac{1}{nln}, \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n}, \quad \dots \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n \dots l_r n}$$

und von

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1-\alpha}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln(l_2 n)^{1-\alpha}}, \quad \dots \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n \dots (l_2 n)^{1-\alpha}}.$$

4) Ist $\varphi(x)$ eine eindeutige endliche Function von x, und convergirt oder divergirt die Reihe

$$\Sigma \frac{1}{n^{1+\varphi(n)}},$$

so convergiren oder divergiren gleichzeitig auch die Reihen

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\varphi(ln)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln(l_2 n)^{1+\varphi(l_2 n)}}, \quad \dots,$$

wie unmittelbar folgt, wenn man wieder

$$f(x) = lx$$

wählt. Durch dieselbe Einsetzung ist aus der Convergenz oder Divergenz der Reihen

$$\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\varphi(n)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln(l_2 n)^{1+\varphi(n)}}, \quad \dots$$

zu schliessen auf das entsprechende Verhalten von

$$\Sigma \frac{1}{nln\,(l_2 n)^{1+\varphi(n)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n\,(l_3 n)^{1+\varphi(l_2) n}}, \quad \dots$$

$$\Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n\,(l_3 n)^{1+\varphi(ln)}}, \quad \Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n\, l_3 n\,(l_4 n)^{1+\varphi(l_2 n)}}, \quad \dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

5) Geht man von den unter 3) abgeleiteten Reihen aus und setzt man

$$f(x) = V(x),$$

so convergirt immer die Reihe mit dem Glied

$$\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n-1)\,l\,V(n+1)\,l_2\,V(n+1)\,\ldots\,(l_3\,V(n+1))^{1+\alpha}},$$

dagegen die Reihe mit dem Glied

$$\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n)\,l\,V(n)\,l_2\,V(n)\,\ldots\,(l_3\,V(n))^{1+\alpha}}$$

nur dann mit Sicherheit, wenn

$$k_1 < \frac{V(n+1)-V(n)}{V(n)-V(n-1)} < k \quad \text{(Vgl. p. 68).}$$

Es divergiren immer die Reihen

$$\Sigma\,\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n)\,l\,V(n)\,l_2\,V(n)\,\ldots\,l_r\,V(n)}$$

und

$$\Sigma\,\frac{V(n+1)\;V(n)}{V(n)\,l\,V(n)\,l_2\,V(n)\,\ldots\,(l_r\,V(n))^{1-\alpha}}$$

Wenn gleichzeitig

$$k_1 < \frac{V(n)-V(n+1)}{V(n+1)-V(n)} < k,$$

so divergiren mit Sicherheit auch

$$\Sigma\,\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n+1)\,l\,V(n+1)\,\ldots\,l_r\,V(n+1)}$$

und

$$\Sigma\,\frac{V(n+1)-V(n)}{V(n+1)\,l\,V(n+1)\,l_2\,V(n+1)\,\ldots\,(l_r\,V(n+1))^{1-\alpha}}.$$

Setzt man

$$V(n)=\frac{1}{\varphi(n)}$$

wo also $\varphi(n)$ mit wachsendem n sich der Grenze Null nähert, so convergirt stets die Reihe mit dem Glied

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\,l\,\dfrac{1}{\varphi(n+1)}\,l_2\,\dfrac{1}{\varphi(n+1)}\,\cdots\left(l_r\,\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)^{1+\alpha}};$$

es convergirt ebenfalls stets diejenige mit dem Glied

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\,\frac{1}{\varphi(n)}\, l_2\,\frac{1}{\varphi(n)} \cdots \left(l_2\,\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1+\alpha}} \tag{1}$$

und, sobald

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$$

kleiner bleibt als eine endliche Grösse k. auch mit Sicherheit die Reihe

$$\Sigma \frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1)\, l\,\frac{1}{\varphi(n)}\, l_2\,\frac{1}{\varphi(n)} \cdots \left(l_r\,\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1+\alpha}}.$$

Dagegen divergiren immer die Reihen mit den Gliedern

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1) l\,\frac{1}{\varphi(n)}\, l_2\,\frac{1}{\varphi(n)} \cdots l_r\,\frac{1}{\varphi(n)}}.$$

und

---

1) Die obige Behauptung ist ohne weiteres klar, sobald

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$$

einen von Null verschiedenen Wert behält. Ist dagegen

$$\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 0,$$

so nimmt $\frac{1}{\varphi(n)}$ derartig zu dass $l\,\frac{1}{\varphi(n)} > kn$ wird, wo k eine positive endliche Zahl ist.

Denn setzt man

$$\varphi(n) = e^{-kn},$$

so wird

$$\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \lim \frac{e^{-k(n+1)}}{e^{-kn}} = e^{-k}.$$

In diesem Falle convergirt die Reihe in gleichem Grade wie

$$\Sigma \frac{1}{nln\, l_2 n \ldots (l_r n)^{1+\alpha}}.$$

Wird

$$\lim \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 0,$$

so muss

$$\varphi(n) < e^{-ku}$$

werden. Die Reihe convergirt also stärker oder doch mindestens in gleichem Grade.

$$\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1)\, l\frac{1}{\varphi(n)}\, l_2\frac{1}{\varphi(n)}\cdots\left(l_r\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1-a}};$$

desgleichen, solange $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}$ kleiner bleibt als eine endliche Grösse k_1 die Reihen

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(a)}\cdots l_r\frac{1}{\varphi(n)}}$$

und

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(n)}\, l_1\frac{1}{\varphi(n)}\cdots\left(l_r\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1-a}}$$

sowie

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(n+1)}\, l_2\frac{1}{\varphi(n+1)}\cdots l_r\frac{1}{\varphi(n+1)}}.$$

und

$$\Sigma\frac{\varphi(n)-\varphi(n+1)}{\varphi(n)\, l\frac{1}{\varphi(n+1)}\, l_2\frac{\varphi(n+1)}{1}\cdots\left(l_r\frac{1}{\varphi(n+1)}\right)^{1-a}}.$$

§ 3.

Es mögen zunächst einige Bemerkungen Platz finden, welche der p. 65. citirten Abhandlung du Bois-Reymond's entnommen sind oder sich doch unmittelbar auf dieselbe stützen.

1) Wenn das Glied einer Reihe auf die Form gebracht werden kann

$$u_n = \frac{1}{\lambda_n}((V(n)-V(n+1)),$$

und wenn $\frac{1}{\lambda_n}$ von Null und unendlich verschieden ist, so ist die Function $V(n)$ das Mass für die Convergenz oder Divergenz der Reihe Σu_n.

Bezeichnet man nämlich mit S_n die Summe der n ersten Glieder, mit R_n den Rest der Reihe, so ist im Fall der Divergenz

$$\lim\frac{S_n}{V(n)}.$$

im Fall der Convergenz

$$\lim\frac{R_n}{V(n)}$$

weder Null noch unendlich.

2) Setzt man
$$V(n) = U_n,$$
wo im Fall der Divergenz
$$U_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$
$$u_n = U_{n+1} - U_n,$$
so ist
$$\lambda_n = -1;$$
im Fall der Convergenz sei
$$U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$
$$u_n = U_n - U_{n+1},$$
somit wird
$$\lambda_n = +1.$$

3) Bezeichnet man die entsprechenden Ausdrücke einer zweiten gleichzeitig mit U convergenten oder divergenten Reihe Σv_n durch V_a, so ist, wenn
$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \infty, \quad \text{auch} \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = \infty$$
Denn bliebe
$$\frac{u_n}{v_n} = \varrho_n$$
stets unterhalb einer endlichen Grenze, so würde im Fall der Divergenz sein
$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}{v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}} = \lim \frac{\varrho_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + \dots + \varrho_{n-1} v_{n-1}}{v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}}$$
$$= \lim \frac{\varrho(v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1})}{v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}} = \varrho,$$
wo ϱ ein Mittelwert ist zwischen $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{n-1}$, welcher mit diesen Grössen unterhalb derselben endlichen Grenze bleiben muss.

Im Fall der Convergenz würde man entsprechend haben
$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{u_n + u_{n+1} + \dots}{v_n + v_{n+1} + \dots} = \lim \frac{\varrho_n v_n + \varrho_{n+1} v_{n+1} + \dots}{v_n + v_{n+1} + \dots}$$
$$= \lim \frac{\varrho(u_n + v_{n+1} + \dots)}{v_n + v_{n+1} + \dots} = \varrho,$$
wo für ϱ dasselbe gilt wie vorher.

Wenn
$$\lim \frac{U_n}{V_n} = k,$$

und wenn k eine von Null und unendlich verschiedene Grösse ist, so kann auch, wenn sich $\frac{u_n}{v_n}$ einer bestimmten Grenze nähert, diese keine andere sein als k.

Gesetzt, es sei

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = k \pm \delta.$$

Im Fall der Divergenz kann man n und m gleichzeitig unendlich werden, aber so gegen einander wachsen lassen, dass sowohl

$$\lim \frac{\sum\limits_{m+1}^{n-1} u_n}{\sum\limits_{1}^{m} u_n} = \infty,$$

als auch

$$\lim \frac{\sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n}{\sum\limits_{1}^{m} v_n} = \infty$$

wird.

Nun ist

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}}{v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}} = \frac{\sum\limits_{1}^{m} u_n + \sum\limits_{m+1}^{n-1} u_n}{\sum\limits_{1}^{m} v_n + \sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n}$$

$$= \frac{\left[1+\frac{\sum\limits_{1}^{m} u_n}{\sum\limits_{m+1}^{n-1} u_n}\right]\sum\limits_{m+1}^{n-1} u_n}{\left[1+\frac{\sum\limits_{1}^{m} v_n}{\sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n}\right]\sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n};$$

$$\lim \frac{1+\frac{\sum\limits_{1}^{m} u_n}{\sum\limits_{m+1}^{n-1} u_n}}{1+\frac{\sum\limits_{1}^{m} v_a}{\sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n}} = 1,$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} \gtrless k \pm \delta',$$

wo die beiden Ungleichheitszeichen dem Vorzeichen von δ' entsprechend sind und

$$0 < \delta' < \delta.$$

Demnach würde sein

$$\lim \frac{U_n}{V_n} \gtrless (k \pm \delta') \left\{ \lim \frac{\sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n}{\sum\limits_{m+1}^{n-1} v_n} \right\}$$

$$\lim \frac{U_n}{V_n} \gtrless k \pm \delta',$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Im Fall der Convergenz führt unsere Annahme, wie leicht zu ersehen, auf denselben Widerspruch mit der Voraussetzung.

Setzt man

$$\frac{u_n}{U_n} = \alpha_n,$$

so ist

$$\lim \alpha_n = 0$$

für alle Reihen, diejenigen allein ausgenommen, welche so stark convergiren, dass

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Für divergente Reihen ist die Behauptung ohne weiteres klar. Es braucht nur noch der Fall

$$\lim U_n = 0$$

berücksichtigt zu werden. Für diesen folgt aus

$$\frac{u_n}{U_n} = \alpha_n$$

$$\alpha_n = \frac{U_n - U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

Wenn

$$\lim \alpha_n = 0,$$

so ist

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1.$$

Ferner hat man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha_{n+1} U_{n+1}}{\alpha_n U_n}.$$

Nun ist α_n das Glied einer divergirenden Reihe[1]), somit

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1,$$

daher auch

$$\lim \frac{u_{n+1}}{U_n} = 1.$$

Man kann demnach durch Anwendung von Functionen, welche nur so stark abnehmen, dass

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1,$$

niemals gelangen zu Reihen, bei welchen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

ist.

Wenn

$$\lim \alpha_n > 0$$

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1,$$

so hat

$$u_n = \alpha_n U_n$$

denselben Grad der Abnahme wie U_n. d. h. es ist auch

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

---

1) Ein Product von unendlich vielen Factoren

$$P = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots,$$

worin die Grössen a von einer bestimmten Stelle an dasselbe Vorzeichen behalten, hat einen endlichen Wert, wenn a_n das Glied einer convergirenden Reihe ist; im entgegengesetzten Falle ist es entweder ungleich oder gleich Null, jenachdem die Grössen a alle positiv oder negativ werden. (S. Kummer, über die Convergenz der unendlichen Reihen, Crelle's Journ. Bd. 13. p. 183).

Die obige Behauptung folgt sofort aus dem angegebenen Theorem, wenn man U_n auf die Form bringt

$$U_n = U_1 \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} \ldots \frac{U_n}{U_{n-1}} = U_1(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_{n-1}).$$

§ 4.

I. 1) Es werde zunächst die Reihe U divergent vorausgesetzt.

Bezeichnet man wieder die Fläche, welche eingeschlossen ist von der Abscissenaxe, von den Ordinaten 1 und x und von der Curve (s. Fig. 1. p. 5.), durch w_x, so ist nach § 2. I.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}>w_n>u_2+u_3+\ldots u_{n-1}$$

oder

$$U_n>w_n>U_n\left(1-\frac{u_1}{U_n}\right)$$

$$\lim\frac{w_n}{U_n}=1.$$

Bildet man ferner eine Reihe V dergestalt, dass

$$\begin{aligned}
v_1&=w_{f(2)}-w_{f(1)}\\
v_2&=w_{f(3)}-w_{f(2)}\\
v_3&=w_{f(4)}-w_{f(3)}\\
&\vdots\\
v_{n-1}&=w_{f(n)}-w_{f(n-1)},
\end{aligned}$$

so ist

$$v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}=w_{f(n)}$$

oder

$$v_n=w_{f(n)}-w_{f(1)}=w_{f(n)}\left\{1-\frac{w_{f(1)}}{w_{f(n)}}\right\}$$

Endlich hat man

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}>w_{f(n+1)}-w_{f(n)}>\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}$$

oder

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}>v_n>\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}.$$

2) Es sei die Reihe U convergent.

Bezeichnet man den Wert, welchen die von der Ordinate x, der Abscissenaxe, der Curve und der Ordinate $x+m$ eingeschlossene Fläche für ein über jede Grenze hinauswachsendes m annimmt, mit w'_x, so ist

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots>w'_n>u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$$

oder

$$U_n>w'_n>U_n\left(1-\frac{u_n}{U_u}\right)$$

Sieht man zunächst von denjenigen Fällen der Convergenz ab, in welchen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$ [1]),

so ist für alle übrigen nach § 3. 4)

$$\lim \frac{u_n}{U_n} = 0,$$

somit

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1.$$

Bildet man wieder eine Reihe V dergestalt, dass

$$\begin{array}{lll} v_n & = w'_{f(n)} & - w'_{f(n+1)} \\ v_{n+1} & = w'_{f(n+1)} & - w'_{f(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots , \end{array}$$

so erhält man

$$v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots = w'_{f(n)}$$

oder

$$V_n = w'_{f(n)},$$

und

$$\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n)} > w'_{f(n)} - w'_{f(n+1)} > \{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)}$$

oder

$$\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n)} > v_n > \{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)}.$$

II. Es sei von einem bestimmten Wert an

$$f(n+1) - f(n) > 1,$$

dann ist offenbar

$$\lim \frac{f(n)}{n}$$

grösser oder doch mindestens gleich 1.

1) Wenn U_n und w_n über jede Grenze hinaus wachsen, d. h. die Reihe U divergirt, ist

$$\lim \frac{w_{f(n)}}{w_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Es war nun

$$\lim \frac{w_n}{U_n} = 1,$$

also

---

1) Es wird später gezeigt werden, dass auch für diese Reihen die abzuleitenden Convergenzregeln gültig bleiben.

$$\lim \frac{w_{f(1)}}{U_n} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{f(n)} \left\{1 - \frac{w_{f(1)}}{w_{f(n)}}\right\}}{U_n}, \quad \text{d. i.} \ \lim \frac{V_n}{U_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3) dass

$$\lim \frac{w_{f(n+1)} - w_{f(n)}}{U_{n+1} - U_n}, \quad \text{d. i.} \ \lim \frac{v_n}{u_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1 wird. Nun ist aber nach § 4. I)

$$\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n)} > u_n,$$

woraus hervorgeht, dass für jede divergente Reihe

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\} f(n)}{u_n}$$

grösser oder mindestens der Einheit gleich ist.

2) Wenn dagegen U_n und w_n sich mit wachsendem n der Grenze Null nähern, d. h, die Reihe U convergirt, so ist

$$\lim \frac{w f(n)}{w_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Es war aber

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1,$$

also

$$\lim \frac{w' f(n)}{U_n}, \quad \text{d. i.} \ \lim \frac{V_n}{U_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3), dass

$$\lim \frac{w'_{f(n)} - w'_{f(n+1)}}{U_n - U_{n+1}}, \quad \text{d. i.} \ \lim \frac{v_n}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Nun ist aber nach § 4. I)

$$\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)} < v_n,$$

woraus hervorgeht, dass für jede convergente Reihe, zunächst nach den § 4. I) 2) erwähnten Fall ausgenommen

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)}}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich der Einheit ist.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Ist $f(x)$ eine eindeutige, positive, für endliche Werte von x endliche Function, welche mit wachsendem x derartig zunimmt, dass von einem bestimmten Wert an beständig

$$f(n+1) - f(n) > 1$$

bleibt, so convergirt die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n)}}{u_n} < 1;$$

sie divergirt, sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\} u_{f(n+1)}}{u_n} > 1$$

wird.

Anmerkung: Wenn $f(n+1) - f(n)$ stets unter einer bestimmten endlichen Grösse k bleibt, für welche man immer eine ganze Zahl annehmen kann; wenn ferner durch $f(n) - \delta$ die unmittelbar unter $f(n)$ liegende ganze Zahl ausgedrückt wird, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $\delta = 0$ wird, so ist $u_{f(n)}$ kleiner oder höchstens gleich $u_{f(n)} - \delta$, somit

$$u_{f(n+1)} > u_{f(n)} - \delta + k + 1$$

$$\frac{u_{f(n+1)}}{u_{f(n)}} > \frac{u_{f(n)} - \delta + k + 1}{u_{f(n)} - \delta}.$$

Es ist aber

$$\frac{u_{f(n)} - \delta + k + 1}{u_{f(n)} - \delta} = \frac{u_{f(n)} - \delta + 1}{u_{f(n)} - \delta} \cdot \frac{u_{f(n)} - \delta + 2}{u_{f(n)} - \delta + 1} \cdots \frac{u_{f(n)} - \delta + k + 1}{u_{f(n)} - \delta + k}$$

Die einzelnen Factoren des Productes unterscheiden sich von der Einheit um negative Glieder, welche bei unendlich wachsendem n unendlich klein werden; da die Anzahl der Factoren endlich ist, wird sich auch das Product nur um eine unendlich kleine negative Grösse von der Einheit unterscheiden können. Andrerseits ist

$$u_{f(n+1)} < u_{f(n)},$$

somit

$$\lim \frac{u_{f(n+1)}}{u_{f(n)}} = 1.$$

Setzt man daher in der für die Divergenz geltenden Bedingung

$$u_{f(n+1)} = \frac{u_{f(n+1)}}{u_{f(n)}} \cdot u_{f(n)}$$

so kann

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n+1)}}{u_n} > 1$$

ersetzt werden durch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n)}}{u_n} > 1.$$

III) Es sei von einem bestimmten Werte an beständig

$$f(n+1)-f(n) < 1,$$

dann ist

$$\lim \frac{f(n)}{n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

1) Wenn wieder U_n und w_n über jede Grenze hinaus wachsen, d. h. die Reihe U divergirt, so wird

$$\lim \frac{w_{f(n)}}{w_n}$$

kleiner oder höchstens gleich der Einheit. Es war aber

$$\lim \frac{w_n}{U_n} = 1,$$

also

$$\lim \frac{w_{f(n)}}{U_n} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{f(n)} \left\{1 - \frac{w_{f(1)}}{w_{f(n)}}\right\}}{U_n}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{V_n}{U_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3) dass

$$\lim \frac{w_{f(n+1)} - w_{f(n)}}{U_{n+1} + U_n}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{v_n}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

Ferner halte man nach § 4. I) dass

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n+1)}}{v_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist, woraus hervorgeht, dass für jede divergente Reihe

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n+1)}}{u_n}$$

und, wie aus § 4. II) Anmerkung unmittelbar folgt, auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

2) Wenn dagegen U_n und w'_n sich mit wachsendem n der Grenze Null nähern, d. h. die Reihe U convergirt, so ist

$$\lim \frac{w'_{f(n)}}{w'_n}$$

grösser oder doch mindestens gleich der Einheit.

Es war aber

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1,$$

also

$$\lim \frac{w'f(n)}{U_n}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{V_n}{U_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Daraus folgt nach § 3. 3) dass

$$\lim \frac{w'_{f(n)} - w'_{f(n+1)}}{U_n - U_{n+1}}, \quad \text{d. i.} \quad \lim \frac{v_n}{u_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1 ist. Ferner hatte man nach § 4. I)

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\}u_{f(n)}}{v_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1, woraus hervorgeht, dass für jede convergente Reihe, zunächst nach den I) 2) erwähnten Fall ausgenommen

$$\lim \frac{\{f(n+1) - f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}$$

grösser oder mindestens gleich 1 ist.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Ist $f(x)$ eine eindeutige positive, für endliche Werte von x endliche Function, welche mit zunehmendem x unendlich wird, aber von der Beschaffenheit, dass von einem bestimmten Werte an beständig

$$f(n+1) - f(n) < 1$$

bleibt, convergirt die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} > 1;$$

sie divergirt, sobald

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} < 1$$

wird.

IV) 1) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$f(n+1)-f(n) > 1$$

bleibt, und wenn die Reihe mit dem Gliede u'_n stärker divergirt als diejenige mit dem Gliede u_n, so ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Denn es ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}} = \lim \frac{\dfrac{u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{u_{f(n+1)}}{u_n}}.$$

Da nun u'_x weniger stark abnimmt als u_x, so wird mit wachsendem n

$$\frac{u'_{f(n+1)}}{u'_n} > \frac{u_{f(n+1)}}{u_n},$$

somit

$$\lim \frac{\dfrac{u'_{f(n+1)}}{u'_n}}{\dfrac{u_{f(n+1)}}{u_n}}$$

grösser oder mindestens gleich 1.

Wenn die Reihe mit dem Glied u'_n stärker convergirt als diejenige mit dem Glied u_n, so ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}}$$

kleiner oder höchstens gleich 1.

Der Beweis ist dem des ersten Falles durchaus analog.

2) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$f(n+1)-f(n)<1$$

bleibt, so ist

$$\lim \frac{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n}}{\dfrac{\{f(n+1)-f(n)u_{f n)}}{u_n}},$$

wenn die Reihe U' stärker divergirt als U, kleiner oder höchstens gleich 1; wenn U' stärker convergirt als U, grösser oder mindestens gleich 1.

Der Beweis wird wie ad 1) geführt.

Wenn daher für irgend welche Reihe eine Function f_n gefunden ist, deren Anwendung eine Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz gestattet, so entscheidet die Anwendung derselben Function auch für jede Reihe, welche stärker divergirt oder stärker convergirt als die erstere.

V) Es werde gesetzt, einmal

$$f(n)=\varphi(n),$$

das andre Mal

$$f(n)=\psi(n);$$

es sei ferner von einem bestimmten Werte an

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)>\psi(n+1)-\psi(n)$$

und daher

$$\lim\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$$

grösser oder mindestens gleich 1 [1]).

1) Im Falle der Divergenz von U ist, wenn die Bezeichnungen von § 4. I. angewandt werden,

$$\{\varphi n+1)-\varphi(n)\}>w_{\varphi(n+1)}-w_{\varphi(n)}>\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n+1)}$$
$$\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}>w_{\psi(n+1)}-w_{\psi(n)}>\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n+1)};$$

1) Die Functionen $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ brauchen nur die in § 1. I. für $f(n)$ gestellten Bedingungen zu erfüllen; es bleibt also gleichgültig, ob

$$\varphi(n+1)-\varphi(n),\quad \text{resp.}\quad \psi(n+1)-\psi(n)$$

von einem gewissen Werte an grösser oder kleiner als die Einheit sind.

Nun ist aber

$$\lim \frac{w_{\varphi(n)}}{w_{\psi(n)}} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{\varphi(n)}\left\{1-\frac{w_{\varphi(1)}}{w_{\varphi(n)}}\right\}}{w_{\psi(n)}\left\{1-\frac{w_{\psi(1)}}{w_{\psi(n)}}\right\}},$$

somit auch

$$\lim \frac{w_{\varphi(n+1)}-w_{\varphi(n)}}{w_{\psi(n+1)}-w_{\psi(n)}}$$

grösser oder mindestens gleich 1, woraus folgt, dass für jede divergente Reihe U

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)+1}}$$

grösser oder mindestens gleich 1 ist.

2) Im Fall der Convergenz von U erhält man entsprechend, wie in Rücksicht auf § 4. I. 2) ohne weiteres klar ist, dass

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n+1)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}}$$

kleiner oder höchstens gleich 1 ist.

Anmerkung: Wenn $\varphi(n+1)-\varphi(n)$ und demnach auch $\psi(n+1) - \psi(n)$ stets unterhalb einer endlichen Grenze k bleiben, so kann, wie aus § 4. II) Anm. unmittelbar folgt, sowohl

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n+1)}},$$

als auch

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n+1)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}}$$

ersetzt werden durch

$$\lim \frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}}.$$

VI) Mit Hilfe der unter IV) und V) abgeleiteten Sätze lässt sich nun zeigen, dass die unter II) und III) gebildeten Convergenzregeln auch ihre Gültigkeit behalten für die Reihen, bei denen

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

bleibt; sodass also die durch den Ausschluss dieser Reihen der Anwendung der Kriterien notwendig vorangehende Untersuchung des $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ausnahmslos wegfallen kann.

1) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$f(n+1)-f(n)>1$$

bleibt, so folgt aus der Ableitung in II) 2), dass, wie in allen übrigen convergenten Reihen auch hier

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$$

nur kleiner oder höchstens gleich 1 sein kann. Man hat nur, wie aus I) 2)

$$U_n > w'_n > U_n\left(1-\frac{u_n}{U_n}\right)$$

wegen

$$\lim \frac{u_n}{U_n} > 0$$

hervorgeht, statt

$$\lim \frac{w'_n}{U_n} = 1$$

zu setzen

$$\lim \frac{w'_n}{U_n}$$

kleiner oder gleich 1, wodurch an der weiteren Entwickelung aber nichts geändert wird.

Es lässt sich übrigens leicht zeigen, dass, sobald auch

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\}>1$$

ist, für die Reihen der zu betrachtenden Art stets

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}$$

wird.

Denn setzt man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$$

$$\lim \alpha_n > 0,$$

$$0 < \alpha < \lim \alpha_n,$$

so convergirt die Reihe U stärker als diejenige mit dem Glied $u'_n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}$. Für die letztere wird aber

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n+1)}}{u'_n} = \frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}$$

Ist

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\}=\infty,$$

so wird

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^{f(n)}}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}$$

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{f(n+1)-f(n)}{(1+\alpha)^{f(n+1)-f(n)}}.$$

Der Ausdruck rechts hat aber die Null zur Grenze, man erhält also denselben Grenzwert für

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n}.$$

Ist

$$1<\lim\{f(n+1)-f(n)\}<k,$$

so kann man setzen

$$f(n)=n+\chi(n),$$
$$\lim\chi(n)=\infty,$$

und es wird

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{k(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{n+1+\chi(n+1)}},$$

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n+1)}}<\frac{k}{(1+\alpha)^{1+\chi(n+1)}},$$

wo sich der Ausdruck rechts wieder der Grenze Null nähert.

2) Ist

$$f(n+1)-f(n)<1$$

so unterscheide man zunächst den Fall, dass

$$\lim\{f(n+1)-f(n)\}=1$$

wird. Setzt man

$$f(n)=n-\chi(n),$$

so wird

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}=\lim\frac{u_{n-\chi(n)}}{u_n},$$

welcher Grenzwert niemals kleiner werden kann als 1.

Ist

$$k<\lim\{f(n+1)-f(n)\}<1$$
$$k>0,$$

so wird, wenn man wieder

$$f(n)=n-\chi(n).$$

setzt,

$$\lim \chi(n) = \infty.$$

Führt man, wie unter 1) die schwächer convergirende Reihe mit dem Glied $u'_n = \frac{1}{(1+\alpha)^n}$ ein, dann ist

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n} = \frac{\{f(n+1)-f(n)\}f(1+\alpha)^n}{(1+\alpha)^{f(n)}}$$
$$= \{f(n+1)-f(n)\}(1+\alpha)^{\chi(n)}.$$

Der letzte Ausdruck wächst aber über jede Grenze hinaus, somit auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}.$$

Es sei schliesslich

$$\lim \{f(n+1)-f(n)\} = 0.$$

Die Reihe mit dem Glied $u'_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, für welche

$$\lim \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = 1,$$

convergirt schwächer als die Reihe U, für welche

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

bleibt. Setzt man für die erstere Reihe

$$f(n) = \beta n$$
$$0 < \beta < 1,$$

so wird

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n} = \frac{\{\beta(n+1)-\beta n\}n^{1+\alpha}}{(\beta n)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\beta\alpha}$$

stets grösser sein als die Einheit. Es wird also, wenn

$$\lim \{f(n+1)-f(n)\} = 0$$

und daher

$$f(n) < \beta n,$$

erst recht sein

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u'_{f(n)}}{u'_n} > 1,$$

also auch nach IV) 2)

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} > 1.$$

§ 5.

I) Wenn von einem bestimmten Werte an

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)<1$$
$$\psi(n+1)-\psi(n)<1$$

bleibt; wenn man ferner berücksichtigt, dass

$$\frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}}=\frac{\frac{\{\varphi(n+1)-\varphi(n)\}u_{\varphi(n)}}{u_n}}{\frac{\{\psi(n+1)-\psi(n)\}u_{\psi(n)}}{u_n}},$$

so geht aus den Erörterungen des § 1. V) hervor, dass für den Fall

$$f(n+1)-f(n)<1$$

die Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz um so sicherer geliefert wird, je schwächer zunehmende Functionen $f(n)$ man wählt. Dass es für jede Reihe mit Sicherheit entscheidende Functionen giebt, ist daraus zu entnehmen, dass, wie schwach auch die Zunahme oder Abnahme von U_n und w_n ist, es doch immer Functionen $f(n)$ giebt, dergestalt, dass

$$\lim\frac{w_{f(n)}}{w_n}<1,$$

$$\lim\frac{w'_{f(n)}}{w'_n}>1$$

würde.

Sind nämlich ϑ_n und ϑ'_n irgend welche positive, eindeutige, endliche Functionen, deren Grenzwert für die erstere kleiner, für die zweite grösser als die Einheit ist, so würde die Auflösung der Gleichung

$$w_x=\vartheta_n w_n$$

resp.

$$w'_x=\vartheta'_n w'_n$$

für x Functionen von der geforderten Beschaffenheit liefern.

Ist aber

$$\lim\frac{w_{f(n)}}{w_n}<1,$$

so ist nach § 4. I) auch

$$\lim\frac{V_n}{U_n}<1,$$

somit auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\} u_{f(n)}}{u_n} < 1.$$

Entsprechend wird für

$$\lim \frac{w'_{f(n)}}{w'_n} > 1$$

auch

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\} u_{f(n)}}{u_n} > 1.$$

Für diejenigen Functionen $f(n)$, für welche

$$f(n+1)-f(n) > 1$$

ist, lässt sich die entsprechende Behauptung nicht ohne weiteres allgemein aufstellen, sondern sie wird beschränkt bleiben müssen auf das Gebiet, in welchem

$$1 < f(n+1)-f(n) > k$$

bleibt, innerhalb dessen von höhern und niedern Graden der Zunahme füglich nicht geredet werden kann.

Bei allen divergenten Reihen wörde die Anwendung von

$$f(n) = U_n$$

selbst genügen. Denn dann ist

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\} u_{f(n)}}{u_n} = \frac{\{U_{n+1}-U_n\} u_{U_n}}{u_n} = u_{U_n},$$

also

$$\lim \frac{\{f(n+1)-f(n)\} u_{f(n)}}{u_n} = 0.$$

II) Innerhalb des Gebietes der Convergenz und Divergenz, welches von den gebräuchlichen logarithmischen Kriterien beherrscht wird, reicht die Wahl von

$$f(n) = e^n \, (f(n+1)-f(n) > 1)$$

und von

$$f(n) = l_n \, (f(n+1)-f(n) < 1)$$

aus.

1) Es sei

$$f(n) = e^n.$$

Bildet man den Ausdruck $\frac{\{f(n+1)-fn)\} u_{f(n+1)}}{u_n}$ für die divergente Reihe mit dem Glied

$$\frac{1}{nln\, l_2 n \, \ldots \, l_r n},$$

so ist

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)} = \frac{e^{n+1}-e^n}{e^{n+1}\,le^{n+1}\,l_2e^{n+1}\ldots l_re^{n+1}}$$

$$= \frac{e^n(e-1)}{e^{n+1}(n+1)\,l(n+1)\,l_2(n+1)\ldots l_{r-1}(n+1)}$$

und

$$\frac{\{fn+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n} = \frac{e-1}{e}\cdot\frac{nln\,l_2n\ldots l_{r-1}n\,l_rn}{(n+1)\,l(n+1)\,l_2(n+1)\ldots l_{r-1}(n+1)}$$

daher

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n+1)}}{u_n} = \infty.$$

Bildet man den Ausdruck $\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n}$ für die convergente Reihe mit dem Glied

$$\frac{1}{nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}},$$

so ist

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{e^{n+1}-e^n}{e^n\,le^n\,l_2e^n\ldots(l_re^n)^{1+\alpha}} = \frac{e-1}{nln\,l_2n\ldots(l_{r-1}n)^{1+\alpha}}$$

und

$$\frac{\{fn+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \frac{(e-1)nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}}{nln\,l_2n\ldots(l_{r-1}n)^{1+\alpha}},$$

daher

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 0.$$

2) Es sei

$$f(n) = ln;$$

dann ist für die Reihe $\Sigma\frac{1}{nln\,l_2n\ldots l_rn}$

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{l(n+1)-ln}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,l_{r+1}n}.$$

Man hat nun

$$l(n+1)-ln = l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\ldots = \frac{1-\varepsilon_n}{n},$$

$$\lim\varepsilon_n = 0,$$

somit

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \frac{1-\varepsilon_n}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,l_{r-1}n}$$

und

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = (1-\varepsilon_n)\,\frac{nln\,l_2n\ldots l_rn}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,l_{r-1}n},$$

daher

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 0.$$

In Bezug auf die Reihe $\Sigma\frac{1}{nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}}$ ist

$$\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)} = \frac{1-\varepsilon_n}{nln\,l_2n\ldots l_rn\,(l_{r+1}n)^{1+\alpha}}$$

und

$$\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = (1-\varepsilon_n)\,\frac{nln\,l_2n\ldots(l_rn)^{1+\alpha}}{nln\,l_2n\ldots l_rn(l_{r+1}n)^{1+\alpha}},$$

also

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = \infty.$$

III) Würde die Anwendung von

$$f(n) = ln$$

führen zu

$$\lim\frac{\{f(n+1)-f(n)\}u_{f(n)}}{u_n} = 1,$$

dann würde die Function w_n so langsam zu- oder abnehmen, dass

$$\lim\frac{w_{ln}}{w_n} = 1$$

werden würde. Denselben Grenzwert würde $\frac{w_{lm}}{w_m}$ haben, wenn m irgend eine gleichzeitig mit n unendlich werdende Zahl bedeutet. Daraus folgt, dass auch

$$\lim\frac{w_{l_2n}}{w_{ln}} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\lim\frac{w_{l_rn}}{w_{l_{r-1}n}} = 1$$

sein würde, somit auch

$$\frac{w_{l_rn}}{w_n}$$

demselben Grenzwert sich nähern würde.

Entsprechend würde auch

$$\lim \frac{w_n}{w_{e^n}}$$

und, wenn man e^{e^n} durch $e_2{}^n$ bezeichnet,

$$\lim \frac{w_{e^n}}{w_{e_2{}^n}}, \dots \lim \frac{w_{e_{r-1}{}^n}}{w_{e_r{}^n}}$$

gleich 1 sein, somit auch

$$\lim \frac{w_n}{w_{e_r{}^n}} \quad \text{und} \quad \lim \frac{w_{l_r{}^n}}{w_{e_r{}^n}}$$

In allen anderen Fällen der Convergenz oder Divergenz, in denen

$$\lim \frac{w_{r^n}}{w_{e_r n}}$$

grösser oder kleiner als 1 ist, genügt demnach die Wahl von

$$f(n) = ln.$$

Es folgt aus der vorhergehenden Erörterung noch, dass, wenn diese Wahl nicht ausreicht, auch die von $l_2{}^n$, $l_3 n$, ... $l_r n$ keine Entscheidung liefert.

IV) Aus § 4) V) geht unmittelbar hervor, dass die unter § 4. II) und III) abgeleiteten Convergenzregeln sich noch unter folgender Form verallgemeinern lassen:

> Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutige, positive, für endliche Werte von x endliche, mit x unendlich werdende Functionen; ist ferner von einem bestimmten Wert an
>
> $$\varphi(n+1) - \varphi(n > V(n+1) - V(n),$$
>
> so convergirt die Reihe U, sobald
>
> $$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n+1)}} < 1,$$
>
> sie divergirt, sobald
>
> $$\lim \frac{\{\varphi(n+1) - \varphi(n)\} u_{\varphi(n+2)}}{\{\psi(n+1) - \psi(n)\} u_{\psi(n)}} > 1$$
>
> ist.

V.

Miscellen.

1.

Ueber allgemeine Flächentheorie.

Auf pag. 10. meines Werkchens: „Fundamentalsätze d. allg. Flächentheorie“ findet sich vor:

$$\int = \frac{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv}}{\sqrt{\mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv}}.$$

Nun bedarf aber dieser Ausdruck einer Berichtigung.

Ich sagte an der betreffenden Stelle, dass $d\alpha$ das dem ds der Fläche entsprechende Bogenelement der Einheitskugel ist und somit $d\alpha$ sich ausdrücken lässt durch:

$$d\alpha^2 = \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2.$$

Dies ist aber nicht richtig, da die im Punkte $(u+du,\ v+dv)$ zum Normalschnitte des Punktes $(u,\ v)$ errichtete Normale nicht Flächennormale ist und somit das Bogenelement der Einheitskugel, welches die Endpunkte der durch den Mittelpunkt derselben zur Flächennormale in $(u,\ v)$ und zur genannten Normale parallel gezogenen Radien begrenzen, nicht das dem ds entsprechende Element ist und sonach die Grössen du, dv, durch welche sich $d\alpha$ ausdrückt, nicht dieselben sein können. welche in

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

vorkommen.

Nur dann, wenn der Normalschnitt in (u, v) so beschaffen ist, dass die im Punkte $(u+du, v+dv)$ zu jenem Normalschnitte gezogene Normale zugleich Flächennormale ist, ist

$$d\alpha^2 = \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2,$$

sonst aber ist:

$$d\alpha^2 = \mathfrak{E}du_1{}^2 + \mathfrak{F}du_1\,dv_1 + \mathfrak{G}dv_1{}^2.$$

Jedoch ist klar, dass, wenn du und dv gegeben sind, also ein bestimmter Normalschnitt vorliegt, jene Normale und somit der zu ihm parallele Radius der Einheitskugel gegeben sind; d. h. es ist dann in $d\alpha^2 = \mathfrak{E}du_1{}^2 + 2\mathfrak{F}du_1\,dv_1 + \mathfrak{G}dv_1{}^2$ auch du_1 und dv_1 bestimmt, oder du_1 und dv_1 sind Functionen von du und dv.

Das Problem lautet also:

Der Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes ist gegeben durch:

$$\varrho = \frac{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}}{\sqrt{\mathfrak{E}du_1{}^2 + 2\mathfrak{F}du_1dv_1 + \mathfrak{G}dv_1{}^2}}.$$

wobei du_1 und dv_1 bestimmte Functionen von du und dv sind;

der Krümmungsradius eines Normalschnittes, dessen Normale im Punkte $(u+du, v+dv)$ zugleich Flächennormale ist, ist gegeben durch:

$$\varrho = \frac{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}}{\sqrt{\mathfrak{E}du^2 + \mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2}};$$

wir fragen nun: „Giebt es unter jenen Werten von ϱ, deren zugehöriges Wertsystem von du und dv so beschaffen ist, dass die diesen Grössen du und dv entsprechenden Grössen du_1 dv_1 die Werte

$$du_1 = du, \quad dv_1 = dv$$

haben, ein Maximum oder Minimum?"

Die Lösung dieser Frage ist auf pag. 11. des genannten Werkchens gegeben und die dem Maximum und Minimum entsprechenden Werte ϱ wurden Haupt-Krümmungsradien genannt.

Wien, 31. Mai 81. Eduard Mahler.

2.

Wahrscheinlicher Grad der Homogeneität einer Mischung.

Sind in einem Raume beliebige Quanta mehrerer verschiedenen Stoffe ohne Cohärenz und gegenseitige Einwirkung ihrer Teile eingeschlossen, so pflegt man, ohne sich irgend eines Grundes bewusst zu sein, sofort anzunehmen, dass, wenn die Teile lange genug in mannichfaltige Bewegung versetzt werden, eine Gleichmässigkeit der Mischung bis auf jeden Grad der Annäherung erfolgen müsse. Will man für diese Annahme die Erfahrung geltend machen, so ist, abgesehen davon dass die Theorie nicht dabei stehen bleiben kann, dagegen zu erinnern, dass dann der Satz auch nur in den Grenzen der Erfahrung Anspruch auf Geltung hat. Erstens aber entzieht sich der Endzustand und die unendliche Kleinheit der Abweichung der empirischen Feststellung; der Satz darf demnach als empirischer nicht so ideell ausgesprochen werden. Zweitens sind in neuster Zeit zahlreiche Untersuchungen auf der Basis der Krönig'schen Gashypothese erschienen, welche in der Anwendung aller möglichen Analogien des obigen Satzes, deren Richtigkeit sie ohne Begründung voraussetzen, die Grenzen des Erfahrungsgebietes weit überschreiten. Der vielfach erweiterte Satz tritt hier als ideelles Princip auf, das der Autor weder durch Erfahrung noch durch Beweis, sondern rein durch das Beispiel seiner Vorgänger rechtfertigt.

Die vulgäre Meinung stützt sich, von der Erfahrung zu schweigen, auf mancherlei, wiewol unzureichende, Gründe. Gewöhnlich beginnt das Mischen in einem Zustande starker Anhäufung der Stoffe, so dass anfangs eine zunehmende Ausgleichung unausbleiblich ist, die man dann als eine fortgehende betrachtet. Ferner giebt es Fälle, wo Kräfte direct auf die Ausgleichung hinwirken, wie bei der Diffusion von Lösungen; dem Umrühren, welches die Ausgleichung beschleunigt, schreibt man dann den ganzen Erfolg zu und überträgt die vermeintliche Wirkung auch auf indifferente Stoffe.

In der Tat existirt ein Endzustand, dem ein Gemenge mehr und mehr zugeführt wird, das ist die völlige Zufälligkeit der Anordnung der Teile, indem die mannichfaltige Bewegung allen kenntlichen Causalnexus zunichte macht. Diesen gesetzlosen Zusand wollen wir als erreicht voraussetzen; es handelt sich dann um seine Beziehung zur Homogeneität der Mischung.

Wenn, wie wir angenommen haben, die Teile keine Wirkung auf einander üben, so kann man jeden Stoff für sich betrachten und nur dessen Dichte untersuchen. Was von diesem Falle gilt, lässt sich auch auf den anwenden, wo die Teile einander absperren, wenn sie nur nicht durch ungleiches specifisches Gewicht zur gesonderten Lagerung getrieben werden.

In einem Raume $= 1$ seien n gleiche Atome (oder kleine Körper) eingeschlossen. Alle Lagen eines jeden seien gleich wahrscheinlich. Innerhalb jenes Raumes denken wir uns einen kleineren Raum $= a$ abgegrenzt, in welchem sich in einem Augenblicke k Atome befinden. Unsere Aufgabe ist dann die folgende.

Um welche Grösse differirt wahrscheinlich k von seinem wahrscheinlichen (oder mittleren) Werte?

Die Wahrscheinlichkeit, dass k bestimmte Atome im Raume a sind, ist

$$= a^k$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die übrigen $n-k$ Atome nicht im Raume a, mithin in einem Raume $= 1-a$ sind, ist

$$= (1-a)^{n-k}$$

Treten beliebige Combinationen von k Atomen an die Stelle der k bestimmten, so ist deren Anzahl gleich dem Binomialcoefficienten $(n)_k$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt k Atome und nicht mehr im Raume a sind,

$$= (n)_k a^k (1-a)^{n-k} \tag{1}$$

Multiplicirt man das beliebige k mit dieser seiner Wahrscheinlichkeit und nimmt die Summe über alle Werte von k, so erhält man den wahrscheinlichen oder mittlern Wert von k:

$$\sum_{k=0}^{k=n} k(n)_k a^k (1-a)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} a^k (1-a)^{n-k}$$
$$= na \sum_{k=0}^{k=n-1} (n-1)_k a^k (1-a)^{n-k-1} = na$$

ein Resultat das sich voraussehen liess.

Von diesem mittlern Werte differirt nun k um die positive Grösse $k-an$ oder $an-k$, jenachdem $k \gtrless an$ ist. Beide Differenzen multipliciren wir mit ihrer Wahrscheinlichkeit (1) und nehmen die Summen über diejenigen Werte, für welche jede positiv ist; dann ergiebt sich als wahrscheinliche Differenz vom mittlern Werte:

$$\sum_{k=na}^{k=n}(k-an)(n)_k a^k(1-a)^{n-k}+\sum_{k=0}^{k=na}(an-k)(n)_k a^k(1-a)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{k=n}(k-an)(n)_k a^k(1-a)^{n-k}+2\sum_{k=0}^{k=na}((an-k)(n)_k a^k(1-a)^{n-k}$$

Erstere Summe ist nach dem Vorigen mit Anwendung des binomischen Satzes $=0$. Daher ist die gesuchte wahrscheinliche Differenz

$$K=2\sum_{k-0}^{k=na}(an-k)(n)_k a^k(1-a)^{n-k} \tag{2}$$

Um einen angenäherten Ausdruck für grosse n in entwickelter Form zu erhalten, nehmen wir an, dass die mittlere Zahl der in a enthaltenen Atome

$$c=na$$

bei wachsendem n constant bleibt, indem a verkleinert wird. Gl. (2) lässt sich schreiben:

$$K=2\left(1-\frac{c}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{k=c}c^k\frac{c-k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{c}{n}\right)^{-k}$$

Entwickelt man das allgemeine Glied der Reihe bis auf 2. Potenz von $\frac{1}{n}$, so findet man:

$$N_k=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{c}{n}\right)^{-k}$$
$$=\left(1-\frac{k_2}{n}+\frac{3k_4+2k_3}{n^2}\right)\left\{1+\frac{kc}{n}+\frac{(k+1)_2c^2}{n^2}\right\}$$
$$=1+\frac{kc-k_2}{n}+\frac{(k+1)_2c^2-kk_2c+3k_4+2k_3}{n^2}$$
$$=1+\frac{kc-k_2}{n}+\frac{(k_2+k)c^2-(3k_3+2k_2)c+3k_4+2k_3}{n_2}$$

Vermöge einer Eigenschaft der Binormalcoefficienten lässt sich dies zerlegen in

$$N_k=N_{k-1}+\frac{c-(k-1)}{n}+\frac{1}{n^2}\{[(k-1)+1]c^2-[3(k-1)_2$$
$$+2(k-1)]c+3(k-1)_3+2(k-1)_2\}=N_{k-1}+A-B$$

wo

$$A=\frac{c}{n}+\frac{c}{n^2}\{(k-1)c-(k-1)_2+c-(k-1)\}$$
$$B=\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n^2}\{2(k-1)_2c-3(k-1)_3+(k-1)c-2(k-1)_2\}$$

Setzt man nun

$$M_k = \frac{c^{k+1}}{k!} N_k; \quad C_k = \frac{c^{k+1}}{(k-1)!} A$$

so wird

$$C_{k-1} = \frac{c^k}{(k-1)!} B$$

daher

$$c^k \frac{c-k}{k!} N_k = \frac{c^{k+1}}{k!} N_k - \frac{c^k}{(k-1)!} (N_{k-1} + A - B)$$
$$= M_k - M_{k-1} + C_k - C_{k-1}$$

Ist m die grösste ganze Zahl $\overline{\overline{<}}\, c$, so hat man:

$$K = 2\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{k=m} c^k \frac{c-k}{k!} N_k$$
$$= 2\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{k=m} \{(M_k + C_k) - (M_{k-1} + C_{k-1})\}$$
$$= 2\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n (M_m + C_m)$$

und zwar ist

$$M_m = \frac{c^{m+1}}{m!} \left\{1 + \frac{mc - (m)_2}{n} + \frac{(m+1)_2 c^2 - m(m)_2 c + 3(m)_4 + 2(m)_3}{n^2}\right\}$$

$$C_m = \frac{c^{m+1}}{(m-1)!} \left\{\frac{1}{n} + \frac{mc - (m)_2}{n^2}\right\}$$

$$\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{c}{n}\right)} = e^{-c}\left(1 + \frac{c}{2n} + \frac{c^2}{3n^2}\right)$$
$$= e^{-c}\left\{1 - \frac{c^2}{2n} + \frac{c^3}{n^2}\left(\frac{c}{8} - \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Dies eingeführt giebt:

$$K = 2e^{-c} \frac{c^{m+1}}{m!} \left\{1 + \frac{mc - (m)_2 + m - \frac{1}{2}c^2}{n}\right.$$
$$+ \frac{1}{n^2}[(m+1)_2 c^2 - m(m)_2 c + 3(m_4) + 2(m)_3 + m^2 c - m(m)_2 - \tfrac{1}{2}mc^3$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}(m)_2 c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2 + \tfrac{1}{8}c^4 - \tfrac{1}{4}c^3]\right\}$$

Setzt man $c = m + \varepsilon$, wo also $0 \overline{\overline{<}}\, \varepsilon < 1$, so wird

$$K = 2e^{-c} \frac{c^{m+1}}{m!} \left\{1 + \frac{3m - \varepsilon^2}{2n} + \frac{21m^2 - 2m(1 + 9\varepsilon^2) - (8 - 3\varepsilon)\varepsilon^3}{24n^2}\right\}$$

Die Klammer ist >1 und wächst mit m, was bei hinreichender Kleinheit von $\frac{m}{n}$ oder a durch die Terme höherer Ordnung nicht aufgehoben werden kann. Sie sei $= 1+\delta$. Sei nun zugleich m und $\frac{n}{m}$ sehr gross; dann hat man annähernd:

$$m! = 2\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{\mathrm{R}m}$$

$$c^m = m^m\left(1+\frac{\varepsilon}{m}\right)^m = m^m e^\varepsilon$$

Dies eingeführt giebt:

$$K = c\,\frac{1+\delta}{\sqrt{\mathrm{R}m}}$$

wo R einen rechten Winkel bezeichnet.

Das Ergebniss bestätigt die gewöhnliche Annahme insoweit, als in der Tat innerhalb eines noch so kleinen Teiles des Gesammtraums die wahrscheinliche Differenz der wirklichen und mittleren Atomzahl relativ zu dieser, wenn sie unendlich gross wird, verschwindet. Aber dieses Verschwinden geschieht nur im Verhältniss ihrer Quadratwurzel; die absolute wahrscheinliche Differenz ist selbst unendlich gross, wieder im Verhältniss jener Quadratwurzel.

Hieraus ersieht man, dass die Annahme einer durch zufällige Bewegung herbeigeführten approximativen Ausgleichung einer sehr grossen Menge schon in Anwendung auf zwei der einfachsten Fragen bezüglich auf die eine richtig, auf die andre unrichtig ist. In Anwendung auf andere, hier nicht untersuchte Fragen bezüglich auf weniger einfache Fälle muss daher jene Annahme solange als völlig grundlos gelten, bis der Beweis geführt ist, dass die wahrscheinliche Abweichung verschwindet.

R. Hoppe.

3.

Note sur une classe de fonctions symétriques.

Soient $y_1 y_2 \dots y_q$ les q racines d'une équation

$$y^q = R$$

et soit en outre pour une quelconque des valeurs $i = 1, 2, \dots q$:

$$z_i = A_0 + A_1 y_i + A_2 y_i^2 + \dots A_{q-1} y_i^{q-1}$$

je me propose de déterminer, m étant un nombre entier et positif, la somme

$$S = \frac{y_1^m}{z_1} + \frac{y_2^m}{z_2} + \ldots \frac{y_q^m}{z_q}$$

en fonction des quantités $A_0, A_1 \ldots A_{q-1}$ et R.

Examinons d'abord la fonction symétrique

$$N = z_1 z_2 \ldots z_q.$$

En éliminant y entre les équations

(1) $$z = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots A_{q-1} y^{q-1}$$

et

(2) $$y^q = R$$

on obtiendra une équation du $q^{\text{ième}}$ degré en z, dont les racines sont $z_1, z_2, \ldots z_q$. Cette équation ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable z, aura pour terme constant

$$(-1)^q z_1 z_2 \ldots z_q = (-1)^q N.$$

Pour trouver la résultante des équations (1) et (2) on procède, d'après Cauchy, de la manière suivante. On multiplie la première par y et on déduit de celle-ci et de la seconde ces $q-2$ équations qui sont tous du degré $q-1$:

$$\frac{A_{q-1}}{1} = \frac{A_{q-2} y^{q-1} + \ldots A_1 y^2 + (A_0 - z) y}{-R}$$

$$\frac{A_{q-1} y + A_{q-2}}{y} = \frac{A_{q-3} y^{q-2} + \ldots A_1 y^2 + (A_0 - z) y}{-R}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_{q-1} y^{q-2} + \ldots A_2 y + A_1}{y^{q-2}} = \frac{(A_0 - z) y}{-R}$$

Si l'on adjoint à celles-ci, après les avoir mises sous forme entière, l'équation (1), on aura le système:

$$\begin{aligned}
&A_{q-1} y^{q-1} + A_{q-2} y^{q-2} + \ldots A_2 y^2 + A_1 y + A_0 - z = 0 \\
&A_{q-2} y^{q-1} + A_{q-3} y^{q-2} + \ldots A_1 y^2 + (A_0 - z) y + R A_{q-1} = 0 \\
&A_{q-3} y^{q-1} + A_{q-4} y^{q-2} + \ldots (A_0 - z) y^2 + R A_{q-1} y + R A_{q-2} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(A_0 - z) y^{q-1} + R A_{q-1} y^{q-2} + \ldots R A_3 y^2 + R A_2 y + R A_1 = 0
\end{aligned}$$

L'élimination de $y, y^2, \ldots y^{q-1}$ entre ces équations fournit la resultante demandée:

$$\begin{vmatrix} A_{q-1}, & A_{q-2}, & \dots & A_2, & A_1, & A_0 - z \\ A_{q-2}, & A_{q-3}, & \dots & A_1, & A_0 - z, & RA_{q-1} \\ A_{q-3}, & A_{q-4}, & \dots & A_0 - z, & RA_{q-1}, & RA_{q-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_0 - z, & RA_{q-1} & \dots & RA_3, & RA_2, & RA_1 \end{vmatrix} = 0$$

En substituant dans équation $z = 0$ on aura la fonction

$$N = z_1 z_2 \dots z_q = - \begin{vmatrix} A_{q-1}, & A_{q-2}, & \dots & A_2, & A_1, & A_0 \\ A_{q-2}, & A_{q-3}, & \dots & A_1, & A_0, & RA_{q-1} \\ A_{q-3}, & A_{q-4}, & \dots & A_0, & RA_{q-1}, & RA_{q-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_0, & RA_{q-1}, & \dots & RA_3, & RA_2, & RA_1 \end{vmatrix}$$

Soient r un nombre entier positif et p un nombre entier positif $< q$ on aura toujours:

$$m = rq + p$$

donc:

$$S = \frac{y_1^m}{z_1} + \frac{y_2^m}{z_2} + \dots \frac{y_q^m}{z_q} = R^r \left\{ \frac{y_1^p}{z_1} + \frac{y_2^p}{z_2} + \dots \frac{y_q^p}{z_q} \right\}$$

En introduisant dans cette expression $\frac{dz}{dA_p}$ au lieu de y^p on obtient:

$$S = R^v \left\{ \frac{\frac{dz_1}{dA_p}}{z_1} + \frac{\frac{dz_2}{dA_p}}{z_2} + \dots \frac{\frac{dz_q}{dA_p}}{z_q} \right\}$$

ou

$$S = R^r \frac{\frac{dN}{dA_p}}{N}.$$

Utrecht. Avril 1881. Dr. W. Kapteyn.

4.

Ueber einige Eigenschaften der Kegelschnitte.

Ist K irgend ein Kreis, welcher die Hauptaxe der Ellipse E in einem ihrer Scheitel, z. B. in A berührt, so schneiden sich die Tangenten dieses Kreises aus den Brennpunkten f und f_1 in einem Punkte m der Ellipse, denn es ergibt sich unmittelbar aus der Figur, dass $mf + mf_1 = fA + f_1A = 2a$. Ist o der Mittelpunkt von K, so ist om die Tangente T der Ellipse E in m. Aus analogen Betrachtungen ergibt sich, dass die Leitstrahlen des Punktes m Tangenten eines Kreises K_1 sein müssen, welcher die Hauptaxe im Scheitel A_1 berührt und seinen Mittelpunkt w im Schnittpunkt von T mit S_1 hat, wenn S_1 die Tangente der Ellipse im Scheitel A_1 ist. Die Geraden fo und fw sind normal, weil sie die Nebenwinkel Afm und mfw halbiren, ebenso ist f_1o normal zu f_1w. Man schliesst daraus: Die Strecke ow, welche von den Tangenten S, S_1 in den Scheiteln der Hauptaxe auf irgend einer Tangente T begrenzt wird, projicirt sich aus einem Brennpunkte unter einem rechten Winkel. Die Punkte o, f, f_1 und w liegen auf einem Kreise, der seinen Mittelpunkt in t_1, dem Schnittpunkt von T mit der Nebenaxe hat. Nebenbei sei noch bemerkt, dass der Schnittpunkt t von T mit der Hauptaxe das äussere, und m das innere Aehnlichkeitscentrum von K und K_1 ist; die Punkte t, t_1, o, w sind vier harmonische Punkte.

Dem Dreiseite mf, mf_1, ff_1 lassen sich ausser den Kreisen K und K_1 noch zwei Kreise einschreiben; die Mittelpunkte α und α^* dieser Kreise resultiren als Schnittpunkte von Geraden, welche die Punkte o und w aus den Punkten f und f_1 projiciren, sie liegen ausserdem noch in der Normalen N des Punktes m. In dem $\triangle\, \alpha^*\, o\, w$ sind f, f_1, m die Fusspunkte der drei Höhen, t_1 der Halbirungspunkt der Seite $o\,w$. Diese vier Punkte, so wie auch die Mitten der Seiten $o\alpha^*$ und $w\alpha^*$, liegen auf einem Kreise*), der übrigens auch den Schnittpunkt n der Normalen N mit der Nebenaxe enthalten muss, da letztere ein Durchmesser des Kreises ist und der Winkel t_1mn 90^0 beträgt. Daraus folgt: Der umschriebene Kreis des Dreiecks, welches durch die Tangente, Normale und die Nebenaxe gebildet wird, schneidet die Hauptaxe in den Brennpunkten. Beschreibt der Punkt m die Ellipse E, so erzeugt seine Tangente T auf den zwei Scheiteltangenten S und S_1 zwei projectivische Punktreihen. Projicirt man die Punktreihe S aus dem Brennpunkte f_1, die Punktreihe S_1 aus dem Punkte f, so entstehen zwei projectivische Büschel, deren Erzeugniss, der geometrische Ort des Punktes α, eine Ellipse H sein wird. Den vereinigt liegenden Strahlen ff_1 und f_1f entspricht in jedem Büschel ein zu ff_1 normaler Strahl, daher ist ff_1 eine Axe von H, f und f_1 die Scheitel derselben. Projicirt man die Reihe S aus f, und S_1 aus f_1, so erhält man, als geometrischen Ort des Punktes α^*, eine Ellipse H^*, welche ebenfalls die Punkte f und f_1 zu Scheitelpunkten hat. Die Mittelpunkte der den $\triangle fBf_1$ und fB_1f_1 eingeschriebenen Kreise begrenzen die zweiten Axen der Ellipsen H und H^*, ihre absoluten Längen ergeben sich aus der

*) Der Feuerbach'sche Kreis, siehe Steiner Geometrische Const. pag. 50.

bekannten Relation, zwischen dem Radius des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises und den Längen der Dreiecksseiten. Bezeichnet man die Länge der Axen von E mit $2a$ und $2b$, die lineare Excentricität mit $2c$, und in analoger Weise mit 2α, 2β, 2γ und $2\alpha^*$, $2\beta^*$, $2\gamma^*$ die gleichen Grössen der Ellipsen H und H^*, so erhält man:

$$\alpha = c, \quad \beta = \frac{bc}{a+c}; \quad \alpha^* = \frac{bc}{a-c}, \quad \beta^* = c$$

Ist π ein Punkt der Ellipse H respective H^*, so kann man eine Normale N aus diesem Punkte an die Ellipse E construiren, indem man über π als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt, welcher die Hauptaxen berührt; der Schnittpunkt der zwei durch f und f_1 gehenden Tangenten des Kreises ist der Fusspunkt von N[1]).

Fasst man eine der Ellipsen H oder H^* als gegeben auf, so gelangt man durch Umkehrung der früheren Betrachtungen zu folgendem Satze:

Zieht man aus den Scheitelpunkten einer Axe Tangenten an einen Kreis K, der diese Axe berührt und seinen Mittelpunkt a auf der Ellipse hat; so beschreibt der Schnittpunkt m dieser Tangenten, während a die Ellipse durchläuft, eine Ellipse E, welche die genannten Scheitel zu Brennpunkten hat.

Für die Hyperbel und Parabel ergeben sich aus ähnlichen Betrachtungen analoge Sätze.

Graz, März 1881. **Josef Blaschke.**

5.

Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Umkreis eines Dreiecks.

Mit

$$\begin{matrix} x_a & x_b & x_c \\ p_a & p_b & p_c \end{matrix}$$

seien die trimetrischen Punktcoordinaten der Punkte X und P in der Ebene des Axendreiecks $ABC (BC = a)$ bezeichnet. Der Umkreis dieses Dreiecks hat die Gleichung:

---

1) Die Fusspunkte der drei ausser N noch möglichen Normalen ergeben sich als Schnittpunkte eines Kreises mit E. Siehe: Eckardt in Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Ph. II. Jahrg. 4. Heft.

$$a x_b x_c + b x_c x_a + c x_a x_b$$

Dieser Kreis werde von der Geraden

$$AP \equiv \frac{x_b}{p_b} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

zum zweitenmale in $\mathfrak{P}_a$ getroffen.

Hieraus erhalten wir die Coordinaten von $\mathfrak{P}_a$:

$$\mathfrak{P}_a \equiv -a p_b p_c \quad p_b(b p_c + c p_b) \quad p_c(b p_c + c p_b)$$

Die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Umkreis ist gleich dem Producte

$$PA . P\mathfrak{P}_a$$

und muss für einen Symmetriepunkt P eine symmetrische Function der a, b, c sein. — Die Formel für die Distanz d der Punkte

$$P \equiv p_a \ p_b \ p_c, \quad Q \equiv q_a \ q_b \ q_c$$

lautet:

$$d^2 = -\frac{abc \Sigma a(p_b q - q_b p)(p_c q - q_c p)}{p^2 q^2}$$

$$p = \Sigma a p_a, \quad q = \Sigma a q_a$$

So findet man:

$$\overline{PA}^2 = \frac{bc(-a^2 p_b p_c + b^2 p_b p_c + c^2 p_b p_c + bc p_b^2 + bc p_c^2)}{(\Sigma a p_a)^2}$$

Für $P\mathfrak{P}_a$ erhalten wir, indem wir in der allgemeinen Distanzformel $Q \equiv \mathfrak{P}_a$ setzen:

$$q_a = -a p_b p_c$$
$$q_b = p_b(b p_c + c p_b)$$
$$q_c = p_c(b p_c + c p_b)$$

$$q = -a^2 p_b p_c + b^2 p_b p_c + c^2 p_b p_c + bc p_b^2 + bc p_c^2$$

$$p_b q - q_b p = -a p_b \Sigma a p_b p_c$$
$$p_c q - q_c p = -a p_c \Sigma a p_b p_c$$

$p_a q - q_a p$
$= b^2 p_a p_b p_c + c^2 p_a p_b p_c + bc p_a p_b^2 + bc p_a p_c^2 + ab p_b^2 p_c + ac p_b p_c^2$
$= (b p_b + c p_c) \Sigma a p_b p_c$

Diese Werte geben:

$$-\Sigma a(p_b q - q_b p)(p_c q - q_c p)$$
$$= a(\Sigma a p_b p_c)^2[-a^2 p_b p_c + b p_c(b p_b + c p_c) + c p_b(b p_b + c p_c)]$$
$$= a(\Sigma a p_b p_c)^2[-a^2 p_b p_c + b^2 p_b p_c + c^2 p_b p_c + bc p_b^2 + bc p_c^2]$$

Also ist:

$$\overline{P\mathfrak{P}_a}^2 = \frac{a^2 bc(\Sigma a p_b p_c)^2}{(\Sigma a p_a)^2[-a^2 p_b p_c + b^2 p_b p_c + c^2 p_b p_c + bc p_b^2 + bc p_c^2]}$$

Sonach ist:

$$PA \,.\, P\mathfrak{P}_a = \frac{abc\Sigma a p_b p_c}{(\Sigma a p_a)^2}$$

Da für innere Punkte des Fundamentaldreiecks dieser Ausdruck positiv ist; so hat man, da in diesem Falle die Potenz negativ wird, demselben das Zeichen — vorzusetzen.

Derselbe Wert für die Potenz von P wird auch erhalten, wenn man mittelst der allgemeinen Distanzformel die Differenz

$$r^2 - \overline{PU}^2$$

berechnet, wo U und r Centrum und Radius des Umkreises bezeichnen.

Diese Formel kann dazu benutzt werden, verschiedene symmetrische Ausdrücke zwischen den Grössen a, b, c zu construiren. So wird für $P \equiv J$, dem Inkreiscentrum des Axendreiecks

$$\frac{abc\Sigma a p_b p_c}{(\Sigma a p_a)^2} = \frac{abc}{a+b+c}$$

Errichtet man auf der Verbindungsgeraden des In- und Umkreiscentrums des Dreiecks ABC mit den Seiten a, b, c im Inkreiscentrum J eine Senkrechte, bis sie den Umkreis in D trifft; so ist

$$DJ = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

Die geometrischen Oerter der Punkte, für welche

$$\frac{abc\Sigma a p_b p_c}{(\Sigma a p_a)^2} = \pm\, \Sigma \overline{PA}^2,$$

sind die Kegelschnitte:

$$\Sigma a^2(b^2 + c^2)x_a^2 + \Sigma bc(b^2 + c^2 - 2a^2)x_b x_c = 0$$
$$\text{für} \quad + \Sigma \overline{PA}^2,$$

$$\Sigma a^2(b^2+c^2)x_a^2+\Sigma bc(b^2+c^2)x_b x_c=0$$

$$\text{für}\quad -\Sigma\overline{PA}^2$$

Beide Kegelschnitte erweisen sich nach dem bekannten Kennzeichen als Kreise. Wir haben somit folgenden Satz:

Ist ein beliebiges Dreieck einem Kreise eingeschrieben; so ist der Ort der Punkte, deren Potenzen in Bezug auf diesen Kreis gleich sind den Summen der Quadrate der Abstände dieser Punkte von den Ecken des Dreiecks, sowol für den Fall der äusseren als inneren Potenzen ein Kreis.

Der Abstand des Punktes P von der Geraden

$$\mathfrak{G}_1\equiv a_1x_a+b_1x_b+c_1x_c=0$$

ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{2F\Sigma a_1 p_a}{N_1\Sigma a p_a},\quad N_1^2=\Sigma a_1^2-2\Sigma b_1 c_1\cos a$$

$\mathfrak{G}_2$ sei eine zweite Gerade, ihre Gleichung laute:

$$a_2x_a+b_2x_b+c_2x_c=0$$

Ist w ein Proportionalitätsfactor und setzen wir:

$$\frac{abc\Sigma a x_b x_c}{(\Sigma a x_a)^2}=w\,\frac{2F\Sigma a_1 x_a}{N_1\Sigma a x_a}\,\frac{2F\Sigma a_2 x_a}{N_2\Sigma a x_a},$$

so gewinnen wir folgenden leicht zu specialisirenden Satz:

Die Punkte, deren Potenzen in Bezug auf einen Kreis proportional sind den Rechtecken der Abstände dieser Punkte von zwei festen Geraden in der Ebene des Kreises, liegen auf einem Kegelschnitte. Diese Kegelschnitte gehen durch die vier Punkte, in welchen der gegebene Kreis von den beiden Geraden getroffen wird.

Wien, Februar 1881. Emil Hain.

6.

Eine Billard-Aufgabe.

Auf einem Billard $ABCD$ seien in M und N zwei Kugeln. M wird parallel zu BC in der Richtung gegen N gestossen. Die Kugel N soll zu gleicher Zeit so an die Wand BC gestossen werden, dass sie nach der Reflexion die Kugel M treffe. Nach welchem Punkte X der BC muss N gezielt werden, wenn angenommen wird, dass die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln M, N gleich sind.

Es sei:

$$MM_1 \text{ senkrecht auf } BC, \quad MM_1 = m$$

$$NN_1 \text{ senkrecht auf } BC, \quad NN_1 = n, \quad M_1N_1 = d$$

Die Geschwindigkeit der Kugeln sei c. Beim Zusammenstosse, der in der Zeit t erfolge, befinde sich M in O.

Ferner sei OO_1 senkrecht auf BC. Dann hat man:

$$\frac{OX}{NX} = \frac{m}{n}, \quad OX + NX = ct$$

$$OX = \frac{mct}{m+n}, \quad NX = \frac{nct}{m+n}$$

Weiter gibt die Figur:

$$M_1N_1 = M_1O_1 + O_1X + XN_1$$

d. i.

$$d = ct + \sqrt{OX^2 - m^2} + \sqrt{NX^2 - n^2}$$

Diese Gleichung liefert:

$$t = \frac{d^2 + (m+n)^2}{2cd}$$

Also ist:

$$NX = \frac{nct}{m+n} = \frac{n[d^2 + (m+n)^2]}{2d(m+n)}$$

$$XN_1 = \frac{n[d^2 - (m+n)^2]}{2d(m+n)}$$

Für $d = m + n$ wird $XN_1 = 0$. Die Formeln werden für den Fall, dass die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln nicht gleich sind, ebenso leicht erhalten; nur sind sie umfangreicher, da die Grössen c nicht ausfallen.

Wien, März 1881.

Emil Hain.

7.

Ein Beitrag zur Kreislehre.

Die Halbirungsgerade BD eines Peripheriewinkels ABC bildet mit der zwischen seinen Schenkeln gelegenen Kreissehne AC und der Tangente BF im Scheitel B entgegengesetzt gleiche Winkel.

Beweis.

Wkl. $DAC = DBC$ als Peripheriewinkel über arc. DC
Wkl. $ABD = DBC$ wird vorausgesetzt. Folglich

Wkl. $DAC = ABD$
Wkl. $ADB = FBA$ als Peripheriewinkel über arc. AB

Wkl. $DAC + ADB = ABD + FBA$ oder
Wkl. $BEA = EBF$ q. e. d.

Lässt man den Winkel ABC sich so ändern, dass ihn BD stets halbirt, dann erhält man eine Reihe paralleler Sehnen AC; wird Wkl. $ABC = 0$, dann entsteht als Verlängerung der Sehne AC die Tangente in $D: DG$. Hieraus folgt:

1) der bekannte Satz, dass die Tangenten BF und DG in den Endpunkten einer Kreissehne BD mit dieser entgegengesetzt gleiche Winkel bilden ($FBD = GBD$),

2) dass je zwei Kreispunkte A und C, welche von einem dritten Kreispunkte gleich weit abstehen, auf einer zur Tangente in D parallelen Geraden liegen ($AC \parallel DG$).

Dieser Satz lehrt uns eine ganz einfache, bis jetzt unbeachtet gebliebene Construction der Tangente im Kreispunkte D. Man construire: $DA = DC$ und $DG \parallel AC$.

Auch begründet er den Satz: Wenn man in dem Eckpunkte N eines regulären Polygons an den umschriebenen Kreis eine Tangente zieht, so ist diese parallel zur Diagonale der beiden Nachbarecken oder zwei anderer gleich weit von N entfernter Ecken. Als weitere Anwendungen obiger Sätze erwähne ich folgende.

Ist einem Kreise ein Dreieck ABC eingeschrieben und halbirt man dessen Winkel durch die Kreissehnen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$: dann sind die Kreistangenten der Punkte α, β, γ beziehungsweise zu den Dreiecksseiten: BC, CA, AB parallel.

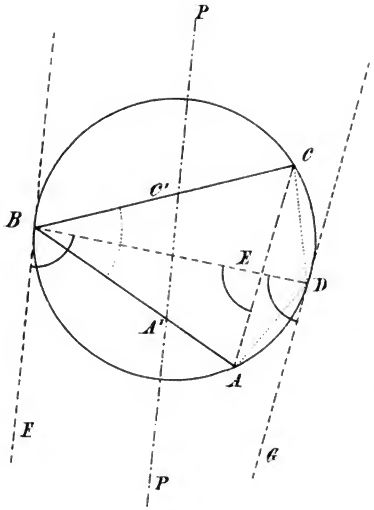
Wenn man einem Kreise ein Dreieck ABC einschreibt und ein zweites Dreieck abc so umschreibt, dass $a\gamma b \parallel AB$, $b\alpha c \parallel BC$, $a\beta c \parallel AC$ ist; dann halbiren die Kreissehnen αA, βB, γC beziehungsweise die Dreieckswinkel A, B, C (und gehen demnach auch durch einen Punkt).

Hat ein Sehnenviereck $ABCD$ zwei gleiche Seiten DA und DC, so bildet die Diagonale DB mit der zweiten Diagonale AC und der Tangente in D gleiche, mit der Diagonale AC und der Tangente in B entgegengesetzt gleiche Winkel.

Nehmen wir an, dass der in Fig. 1. gezeichnete Kreis ein in der Papierfläche liegender grösster Kugelkreis ist, so können wir BF als die Tangentenebene der Kugel in B und AC als einen Kugelkreis betrachten, der auf der Zeichenfläche senkrecht steht. Projiciren wir diesen Kreis AC und dem Projectionscentrum B nach $A'C'$, auf eine zur Ebene BF parallele Projectionsebene PP: dann ist $A'C'$ die stereographische Projection AC und muss nach obigem Satze ein Kreis sein, weil AC und $A'C'$ antiparallele Schnitte des schiefen, projicirenden Kreiskegels BAC sind. (BD muss nämlich als Halbirungsgerade des Winkels der grössten und kleinsten Erzeugenden des Kegels BAC die Kegelachse sein: AC und $A'B'$ bilden aber mit ihr entgegengesetzt gleiche Winkel und stehen auf der Ebene BAC senkrecht, erfüllen also die Bedingungen für Kreisschnitte des Kegels).

Somit begründet vorgeführter Lehrsatz die für die stereographische Projection wichtige Tatsache, dass der Kugelkreis AC in der Projection wieder als Kreis $A'C'$ erscheint.

Eisenstadt, Juli 1881. Franz Schiffner.



V. F. Schiffner: Zur Kreislehre.

Steindr. F.W. Kunike. Greifsw.

VI.

Geschichtliche Entwickelung der mathematischen Elektricitätslehre und Bedeutung des Potentials für die letztere.

Von

August Kiel.

Benutzte Litteratur:

a) Elektrostatik von Kötteritsch.

b) Anwendung der der mechanischen Wärmetheorie zu Grunde liegenden Principien auf die Elektricität von Clausius.

c) Ableitung des Ohm'schen Gesetzes aus dem elektrost. Grundgesetze: Kirchhoff. Poggend. Ann. Bd. 78.

d) Die beiden Abhandlungen von Neumann in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1845 u. vom Jahre 1847.

e) Helmholtz: Borchardt's Journal Bd. 78.

Zu den ersten Physikern, welche die Mathematik auf die Lehre von der Elektricität anwendeten, gehört Cavendish. Zur selben Zeit wie Cavendish veröffentlichte Aepinus ein tentamen theoriae electr. et magn. Er nahm dabei ein elekrisches Fluidum an und legte demselben die beiden Eigenschaften bei, dass sich seine Teilchen entweder mit einer Kraft anziehen, welche mit einer Verringerung ihres gegenseitigen Abstandes wächst, oder seine Teilchen sich andernfalls mit einer Kraft abstossen, welche demselben Gesetze folgt. Coulomb präcisirte dieses Gesetz der gegenseitigen Anziehung, resp. Abstossung noch näher, indem er es als conform mit dem Newton'schen Gravitationsgesetze nachwies. Mit Hülfe dieser Voraussetzung konnten die Gesetze der Verteilung, Anziehung und Abstossung untersucht werden. Wollte man jedoch die Berechnung auf einzelne Fälle anwenden, so zeigten sich sehr viele analytische Schwierigkeiten. Dieselben wurden erst durch die späteren math. Arbeiten von Legendre und Laplace besiegt. Coulomb selbst wendete zwar mit vielem Scharfsinn die analytischen Kunstgriffe seiner Zeit an, aber diese genügten noch nicht und er sah sich infolgedessen zu manchen nicht richtigen Annahmen genötigt, so dass seine Rechnungen zwar im Allgemeinen den Gang der Erscheinungen nachweisen, aber ohne dass eine völlige Uebereinstimmung stattfindet.

Durch Poisson wurde dann zuerst der Gegenstand ausführlicher untersucht. Derselbe legte im Jahre 1811 der Pariser Akademie 2 Abhandlungen vor, welche sich auf die Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche von leitenden Kugeln beziehen, die vorher elektrisirt und einander genähert worden sind. In ihrem Wesen beruhen diese Abhandlungen auf denselben Betrachtungen, wie sie in der Potentialtheorie zu Tage treten. Obwohl nun viele der in den vorher erwähnten Arbeiten angewendeten Methoden wegen ihrer Eleganz bemerkenswert sind, so waren dieselben doch nur ganz bestimmten Problemen angepasst, und es fehlte noch eine allgemeine Mehode, die sich in jedem Falle anwenden lässt. Diesen Mangel empfand Niemand mehr als Green. Indem er nun über die Vorteile nachdachte, welche bei der Lösung vieler schwieriger mechanischer Probleme sich ergeben, wenn man von einer gesonderten Untersuchung jeder der Kräfte, welche auf die verschiedenen Körper eines Systems wirken, ganz absieht und seine Aufmerksamkeit ausschliesslich auf die Function beschränkt, von deren Differentialien sie alle abhängen, befestigte sich in ihm immer mehr die Ueberzeugung, dass dasselbe Verfahren auch in der Elektricitätslehre nur von dem grössten Erfolge sein könne, da ja hier dasselbe Grundgesetz wie in der Mechanik herrsche. Auf diese Weise wurde er zu der Untersuchung über die allgemeinen Beziehungen geführt, welche zwischen der genannten Function und der Elektricitätsmenge in den Körpern, von welcher sie abhängt, besteht. Besonders die grossen Vorteile, welche Laplace im 3ten Buche der mécanique céleste aus der Anwendung der dort gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiten Grades von dieser Function gewonnen hat, erregten die ganze Aufmerksamkeit von Green und veranlassten ihn, diese Gleichung seinem Zwecke dienstbar zu machen. So wurde Green sowohl zu einer weiteren Ausbildung der Lehrsätze von dieser Function, welcher er den Namen „Potentialfunction“ bei-legte, geführt, als auch zu einer vorteilhaften Anwendung derselben auf die Elektricitätslehre.

Von jener legt schon der Umstand Zeugniss ab, dass man einen von ihm aufgestellten Lehrsatz, der in der ganzen Potentialtheorie eine hervorragende Rolle spielt, nach ihm den Green'schen Satz benannt hat. Bezüglich der Anwendung des Potentials auf die Elektricitätslehre war er überhaupt der erste, welcher diese Function in dieselbe einführte. Es geschah dies in seiner ersten Abhandlung, welche er 1828 in Nottingham veröffentlichte und „Ueber die Anwendung der Analysis auf die Theorie der Elektricität und des Magnetismus" betitelte. Gerade das Potential war es, welches ihm zuerst eine solche Anwendung ermöglichte und zwar in einer fest begründeten und ausgedehnten Weise. Und was Green begonnen hat, ist durch die späteren Forschungen von F. E. Neumann, Kirchhoff, Helmholtz und Clausius mit dem schönsten Erfolge weiter geführt worden, so dass jetzt eine ziemlich fest abgeschlossene math. Theorie der Elektricität durch Einführung des Begriffs des Potentials in dieselbe geschaffen ist. Um dies darzutun, sollen die hauptsächlichsten Gesetze entwickelt werden, welche aus dem Begriffe des Potentials für die Elektricität abgeleitet wurden.

Nennen wir das Potential einer elektrischen Masse, die in beliebiger Weise durch einen Raum verteilt ist, φ, so sind:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

die Anziehungscomponenten der elektrischen Masse auf den Punkt (x, y, z). Da nun die Coordinatenaxen beliebig gelegt werden können, so folgt daraus, dass die Anziehungscomponente nach einer beliebigen Richtung n gleich: $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist.

Denkt man sich die Fläche $\varphi = \text{const.}$ durch einen beliebigen Punkt (x, y, z) hindurch gelegt, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, und mithin steht die Richtung der Kraftäusserung der elektrischen Masse auf diesen Punkt senkrecht auf der Fläche $\varphi = \text{const}$, vorausgesetzt natürlich, dass φ das Potential der elektrischen Masse in Beziehung auf den Punkt (x, y, z) ist. Die Fläche $\varphi = \text{const}$ heisst eine Fläche gleichen Potentials. Ein System von solchen Flächen giebt leicht eine Anschauung, wie die Grösse der Componente einer Kraft sich ändert.

Denn besitzt eine Fläche das Potential φ, die andere unendlich nahe φ', und sind beide um ε von einander entfernt, so ist $\frac{\varphi - \varphi'}{\varepsilon}$ die Grösse der Kraft in φ', weil ja $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\varphi - \varphi'}{\varepsilon}$ ist. Da nun φ und φ' constant sind, so ist ersichtlich, dass für die verschiedenen Punkte der beiden Flächen die Kraft sich mit ε ändert und zwar umgekehrt proportional, also umgekehrt proportional mit dem Abstande der beiden Flächen.

Diese Eigenschaft des Potentials macht dasselbe äusserst wichtig für alle Untersuchungen über die Verteilung der Elektricität. Vor Allem wollen wir den Gleichgewichtszustand in's Auge fassen. Da die Kraftäusserung nach einer beliebigen Richtung gleich der Aenderung des Potentials nach derselben ist, so erhellt daraus, dass, wenn diese Aenderung gleich Null ist, auch die Kraftäusserung verschwindet.

Wenn daher die Elektricität auf einem guten Leiter im Gleichgewichte sein soll, so muss das Potential der auf ihm verbreiteten Elektricität für jeden Punkt im Leiter constant sein. Die Discussion dieser Bedingung $\varphi = \text{const}$ für den Gleichgewichtszustand ergiebt mannigfaltige Relationen.

Nach dem Poisson'schen Satze ist für alle Punkte eines Leiters

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi k,$$

wo k die Dichtigkeit der Elektricität bedeutet. Da nun im Gleichgewichtszustande $\varphi = \text{const}$ ist, so muss anderseits:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

sein. Beides lässt sich nur dann mit einander verbinden, wenn $k = 0$ ist. Daher ist im Gleichgewichtszustande die Dichtigkeit der Elektricität im Inneren eines Leiters gleich Null und die Elektricität beschränkt sich auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche.

Da nun das Potential im Gleichgewichtszustande für alle Punkte der Oberfläche denselben constanten Wert besitzt, so ist dieselbe zugleich eine Niveaufläche der in ihr verbreiteten freien Elektricität. Durch diese Bedingung ist eine ganz eindeutig bestimmte Verteilung der Elektricität gegeben. Denn mit der Verteilung der Elektricitätsmenge ändert sich notwendig auch das Potential, mithin ist die Form der Niveaufläche, welche durch einen bestimmten Wert des Potentials gegeben ist, ebenfalls von der Verteilung der vorhandenen Elektricitätsmenge abhängig. Daher kann auch umgekehrt einer gegebenen Niveaufläche nur eine bestimmte Verteilung entsprechen.

Wenn die Dichtigkeit einer auf einer Fläche ausgebreiteten elektrischen Masse, welche wir kurz mit Flächenelektricität bezeichnen wollen, h ist, so ist das Potential derselben: $\varphi = \int h \cdot \frac{ds}{r}$, wobei das Integral über die ganze Fläche, deren Element ds ist, auszudehnen ist, und r die jedesmalige Entfernung eines Elements von dem Punkte bedeutet, in Bezug auf welchen das Potential zu bestimmen ist. Dasselbe ändert sich stetig, auch wenn der Punkt, auf den es sich bezieht, durch die Fläche hindurchgeht. Mit Hülfe des Potentials lässt sich nun im Falle des Gleichgewichts die Verteilung der Elektricität auf der Fläche leicht bestimmen. Es ist alsdann nämlich das Potential für alle Punkte derselben constant. Aus dem Green'schen Satze lässt sich ferner ableiten, dass das Potential innerhalb eines umschlossenen Raumes kein Maximum oder Minimum haben kann, sondern zwischen dem grössten und kleinsten Werte liegt, welchen dasselbe auf der Oberfläche hat. Wenn daher das Potential auf der Oberfläche constant ist, so muss es für alle Punkte des von der Fläche umschlossenen Raumes denselben constanten Wert behalten. Nun erleidet der erste Differentialquotient des Potentials beim Durchgange durch die Fläche eine Sprungdifferenz von $-4\pi h$; d. h. es ist:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi h,$$

wo der Index $(+0)$ andeuten soll, dass der Punkt von Aussen, (-0), dass er von Innen kommt. Da aber sowol für die Punkte der Fläche als auch für die des umschlossenen Raumes $\varphi = \text{const}$, mithin:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{-0} = 0$$

ist, so muss:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi h$$

sein. Da nun im Gleichgewichtszustande die freie Elektricität, wie wir oben gesehen haben, sich überhaupt nur auf der Oberfläche des elektrischen Körpers befindet, so ist durch die vorstehende Formel allgemein die Verteilung der Elektricität im Falle des Gleichgewichts bestimmt.

Derselbe Satz, welcher der Berechnung der Verteilung der Elektricität auf einem einzelnen Leiter zu Grunde liegt, setzt uns auch in den Stand, die Verteilung der Elektricitätsmenge auf 2 Leitern zu berechnen, die durch einen leitenden Draht verbunden sind. Da durch die leitende Verbindung die beiden Leiter zu einem einzigen vereinigt werden, so ist die Gleichgewichtsbedingung dieselbe wie für den einzelnen Leiter, das Potential der ganzen elektrischen Masse muss an jedem Punkte im Innern und an der Oberfläche der verbundenen Leiter denselben constanten Wert haben. Daraus ergiebt sich sofort ein allgemeiner Satz darüber, welche Ladung man einem gegebenen Leiter durch kurz dauernde Verbindung mit einem geladenen Conductor erteilen kann. Während der Verbindung geht auf den Leiter eine solche Menge Elektricität über, dass das Potential der gesammten Elektricitat auf der Oberfläche des Conductors und des damit verbundenen Leiters denselben Wert hat. Wenn ferner ein Leiter mit der Erde verbunden wird, so hat das Potential auf seiner Oberfläche den speciellen Wert Null, weil alsdann der Gesammtleiter mit seinen Dimensionen so weit reicht, also r ungeheuer gross wird. Wenn aber $\varphi = 0$, so auch $h = 0$.

Die bis jetzt abgeleiteten Beziehungen gelten für jeden Gleichgewichtszustand. Bei der ferneren Entwickelung unterscheiden wir die beiden Fälle: entweder der Leiter ist ein einziger, isolirter, d. h. von allem Einflusse fremder elektrischer Massen befreiter, oder er befindet sich in dem Wirkungskreis anderer elektrischer Massen. In jedem von diesen Fällen wird sich die Elektricität im Gleichgewichtszustande anders anordnen.

1) Ist ein Leiter isolirt, so muss, wie Kötteritsch in seiner Elektrostatik ausführt, die Elektricität auf demselben überall einerlei Vorzeichen besitzen. Denn das Potential der elektrischen Oberfläche auf sich selbst:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\int\!\!\int \frac{\varrho\varrho'}{r}\, ds\, ds',$$

wo ϱ und ϱ' die Dichtigkeiten der Elektricität in den beiden Flächenelementen ds und ds' bedeuten und r ihre gegenseitige Entfernung, muss ein Minimum sein und dies ist, wie ebenfalls Kötteritsch ausführt, nur dann möglich, wenn ϱ und ϱ' dasselbe Vorzeichen haben.

2) Ist ein Leiter unter der Influenz eines anderen elektrischen Körpers, so braucht nicht die Elektricität auf dem Leiter nur einerlei Vorzeichen zu haben. Ist zunächst der influenzirende Körper ein Nichtleiter, so muss im Zustande des Gleichgewichts die Potentialfunction des Nichtleiters, vermehrt um die der Elektricität des Leiters für alle Punkte des letzteren einen constanten Wert haben. Da nun die Potentialfunction der Elektricität des Nichtleiters ihrem absoluten Werte nach für die näher gelegenen Punkte des Leiters grösser ist als für die entfernteren, so muss umgekehrt die auf dem Leiter befindliche Elektricität sich so anordnen, dass ihre Potentialfunction für die dem Nichtleiter näher gelegenen Punkte kleiner als

für die anderen. Wenn daher überall gleichartige Elektricität verbreitet ist, so muss die Dichtigkeit derselben in der Nähe des Leiters kleiner sein als an den Stellen, welche von demselben entfernt liegen. Wenn dagegen verschiedenartige Elektricität auf dem Leiter ist, so muss die Dichtigkeit auf den dem Nichtleiter abgewendeten Stellen dasselbe Vorzeichen aufweisen, wie die Gesammtmasse des Nichtleiters, dagegen verschiedenes an der dem Nichtleiter zugewendeten Seite.

Wenn der Leiter mit der Erde in Verbindung gesetzt ist, so muss das Gesammtpotential dieser Ladung Null betragen. Dies ist nur dann möglich, wenn die Elektricität auf dem Leiter entgegengesetztes Vorzeichen besitzt wie auf dem Nichtleiter. Auf diesen Principien beruht die Theorie einer für die Elektricitätslehre sehr wichtigen Gruppe von Apparaten, nämlich des Condensators, der Franklin'schen Tafel und der Leidener Flaschen.

Wenn die elektrischen Körper, welche in gegenseitiger Wechselwirkung stehen, aus einem beliebigen Systeme von Leitern und Nichtleitern bestehen, so ist das Gleichgewicht der Elektricität auch hier an die Bedingung geknüpft, dass das Potential der sämmtlichen im Systeme enthaltenen Elektricität innerhalb eines Leiters überall denselben Wert habe. So einfach nun auch die Bedingung für das elektrische Gleichgewicht lautet, ist trotzdem die Bestimmung desselben, besonders im letzten Falle mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Die Verteilung der Elektricität auf 2 benachbarten leitenden Kugeln ist bis jetzt das einzige Problem gewesen, dessen Lösung auch für die Influenzelektricität, welche die beiden Kugeln auf einander hervorrufen, vollständig gelungen ist. Poisson hatte zuerst das Problem gelöst und seine Rechnungen in den 2 Abhandlungen an die Pariser Akademie niedergelegt, welche wir schon oben erwähnten.

Kirchhoff verarbeitete diese Poisson'sche Rechnung weiter in einem Aufsatze: „Ueber die Verteilung der Elektricität auf 2 leitenden Kugeln", den er im Borchardt'schen Journale hat erscheinen lassen.

Wir haben bis jetzt gesehen, wie das Potential über das Verhalten der Elektricität im Gleichgewichtszustande Aufschluss giebt. Wir gehen nun dazu über, die Anwendung des Potentials bei den stationären Strömen wenigstens in ihren Hauptzügen anzudeuten.

Es liegt nahe, die elektrischen Erscheinungen mit denen der Wärme zu vergleichen. Wie das Potential constant sein muss, wenn die Elektricität sich im Gleichgewichte befinden soll, so muss bei der

Wärme die Temperatur constant sein, wenn keine Wärmeströmung vorhanden sein soll. Bezeichnet nun ϑ die Temperatur und ist

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} ds \gtrless 0,$$

so fliesst eine gewisse Wärmemenge durch das Flächenelement ds, dessen Normale n heisst, und zwar ist dieselbe gleich

$$- k \frac{\partial \vartheta}{\partial n} . ds$$

Die Analogie im Gleichgewichtszustande führt leicht dahin, für den Fall, dass die Elektricität sich bewegt, eine entsprechende Hypothese zu machen und zwar ist darnach:

$$- \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch das Flächenelement ds strömt. Dieselbe ist gleich Null, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ ist, d. h. wenn die Strömung senkrecht auf der Fläche $\varphi =$ const steht. Wenn daher die Oberfläche des elektrischen Körpers zugleich eine Fläche gleichen Potentials für die Elektricität in demselben ist, so kann die Elektricität sich in keiner Strömung befinden. Daraus erhellt, wie die Hypothese mit dem Früheren in Einklang ist. Dieselbe hat Ohm zuerst im Jahre 1827 aufgestellt, freilich nicht mit der Allgemeinheit ausgesprochen, wie es hier geschehen, weil damals der Begriff des Potentials so gut wie gar nicht bekannt war.

Die Hypothese ist mit der Erfahrung nur bei den sogenannten stationären Strömungen im Einklange, also bei Bewegungen elektrischer Massen, wo die Quantität und Geschwindigkeit der positiven und negativen Elektricität, welche in irgend einem Elemente enthalten ist, im Verlaufe der Zeit unverändert erhalten bleibt. Ist nun $- \lambda \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$ der Ausdruck für die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit in die Fläche eindringt, so kann nur dann ein stationärer Zustand vorhanden sein, wenn ebensoviel aus der Fläche heraustritt, daher muss:

$$- \lambda \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} . ds = 0$$

sein. Nun ist aber

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int d\tau . \Delta \varphi,$$

wenn $d\tau$ ein Element des von s umschlossenen Raumes und

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

bedeutet;. also muss auch

$$\int d\tau . \Delta\varphi = 0$$

sein, mithin

(1) $$\Delta\varphi = 0$$

für jeden Teil des umschlossenen Raumes. Wir haben aus dieser Bedingung früher geschlossen, dass im Gleichgewichtszustande keine Elektricität im Inneren des Körpers vorhanden ist. Ebenso kann man aus derselben Gleichung bei der stationären Strömung folgern, dass keine freie Elektricität in das Innere dringt.

Wir wollen uns nun eine Reihe von Leitern vorstellen, welche sich zu je zwei Flächen berühren. An den Stellen, wo das Leitersystem nicht unter sich in Verbindung steht, soll es mit einem Nichtleiter in Berührung sein, und die Fläche des Systems, wo dieses geschieht, heisse die freie Oberfläche. Durch dieselbe fliesst alsdann keine Elektricität, mithin ist daselbst:

(2) $$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$$

Soll nun der Zustand ein stationärer sein, so darf sich an den Berührungsstellen keine Elektricität ansammeln; daher ist für jede Berührungsfläche von 2 Leitern:

$$\int \left(\lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}\right) ds = 0,$$

wo n_1 und n_2 die Normalen nach dem Inneren des jedesmaligen Leiters bedeuten. Mithin:

(3) $$\lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2} = 0$$

für jeden Berührungspunkt. Bei der Wärmeleitung gilt dieselbe Gleichung, also auch hier:

$$k_1 \frac{\partial\vartheta_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial\vartheta_2}{\partial n_2} = 0.$$

Während jedoch hier $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ist, findet die entsprechende Bedingung bei der Elektricität nicht statt. Denn das Potential kann einen Sprung erleiden, wenn man von dem einen Leiter zu dem andern geht. Aber diese Discontinuität, welche das Potential bei dem

Uebergange von einem Leiter zum andern im Allgemeinen erleidet, muss für jedes Element der Berührungsfläche constant sein. Diese constante Differenz

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (1, 2), \tag{4}$$

welche man elektrische Differenz genannt hat, ist nur von der Natur der beiden Leiter abhängig. Im Falle des Gleichgewichts hat nun φ innerhalb desselben Leiters einen constanten Wert, alsdann mithin:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi_2 &= (1, 2) \\
\varphi_2 - \varphi_3 &= (2, 3) \\
&\ldots\ldots \\
\varphi_n - \varphi_1 &= (n, 1) \\
\hline
\text{Mithin: } 0 &= (1, 2) + (2, 3) + \ldots + (n, 1)
\end{aligned}$$

Es giebt nun eine Classe von Leitern, welche in irgend einer geschlossenen Combination diese Bedingung erfüllen; es sind die Körper, welche der sogenannten Spannungsreihe angehören und auch Leiter erster Classe genannt werden. Dieselben haben nämlich die Eigenschaft, dass man für die elektrische Differenz einzelne Zahlen finden kann, derart, dass:

$$\begin{aligned}
(1, 2) &= (1) - (2) \\
(2, 3) &= (2) - (3) \\
&\ldots\ldots \\
(n, 1) &= n - 1 \\
\hline
\text{Mithin: } (1, 2) + (2, 3) + \ldots + (n, 1) &= 0
\end{aligned}$$

Wenn daher ein System nur aus Leitern erster Classe besteht, so befindet sich die Elektricität in demselben im Gleichgewichte. Die Leiter zweiter Classe haben die erwähnte Eigenschaft nicht; wenn daher unter dem System von Leitern erster Classe ein oder mehrere Leiter II. Classe sind, so findet unter der Erfüllung der übrigen Bedingungen stationäre Strömung statt.

Durch die 4 Grenzbedingungen, die wir vorher für das Potential bei stationären Strömungen aufgestellt haben, ist dasselbe bis auf eine additive Constante eindeutig bestimmt. Daraus folgt zugleich, dass, wenn ein Potential diese Bedingungen erfüllt, die Elektricität, für welche dasselbe gilt, sich in einer stationären Strömung befindet.

Die 4 Grenzbedingungen sind in ihrem Zusammenhange zuerst von Kirchhoff aufgestellt worden. Derselbe hat auch nachgewiesen, dass das, was man bisher bei elektromotorisch differenten Körpern als verschiedene Spannung oder Dichtigkeit der Elektricität bezeichnete, identisch sei mit der Differenz der verschiedenen Potentialwerte. Im Anschlusse hieran hat Kirchhoff zugleich eine Ableitung des Ohm'schen Gesetzes gegeben (Poggend. Ann. Bd. 58). Darnach ist:

$$i = \frac{(1,2)+(2,3)+\ldots+(n,1)}{w_1+w_2+\ldots+w_n},$$

wo i die Intensität des Stromes und $w_1, w_2 \ldots w_n$ die Widerstände der einzelnen Leiter bedeuten.

Diese Gleichung schreibt sich dann: $i = \frac{E}{W}$, wo E die elektromotorische Kraft und W der Gesammtwiderstand des Systems ist. Aus beiden Gleichungen ist ersichtlich, dass die elektromotorische Kraft gleich der Summe der verschiedenen elektrischen Differenzen ist. Ohm ist bei der Ableitung seiner Gesetze der Strömungen in der galvanischen Kette von Voraussetzungen über die Elektricität ausgegangen, welche nicht in Uebereinstimmung sind mit den Folgerungen, die man aus dem Verhalten des Potentials für die Elektrostatik ziehen muss und unter deren Annahme man allein die elektrostatischen Erscheinungen erklären kann. Im Widerspruche damit nimmt Ohm nämlich an, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befindet, wenn sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfüllt. Durch Einführung des Potentialbegriffs in die Elektricitätslehre kann man daher nicht nur die elektrostatischen Erscheinungen auf rein mathematischem Wege erklären, sondern auch im engsten Anschlusse an die Theorie der Elektrostatik die Ohm'schen Formeln aus dem elektrostatischen Gesetze für die gegenseitige Abstossung der Elektricitätsteilchen ableiten.

Den ausgeführten Betrachtungen über die stationären elektrischen Ströme ist noch folgendes zuzufügen, woraus eine weitere Bedeutung des Potentials erhellt. Bei der Bewegung der Elektricitätsteilchen wird Arbeit geleistet. Dieselbe lässt sich auf sehr einfache Weise bestimmen. Ist dq irgend ein Elektricitätselement, welches sich auf dem Wege s fortbewegt und ferner φ das Potential der gesammten Elektricität auf eine Elektricitätseinheit, so ist die in die Richtung der Bahn fallende Componente der Kraft, die auf dq wirkt,

$$= - dq \cdot \frac{\partial \varphi}{ds}.$$

Die bei der Bewegung um das Bahnelement ds von der Kraft getane Arbeit ist demnach:

$$= - dq \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot ds$$

und somit die auf der Strecke von s_0 und s_1 getane Arbeit

$$= -dq.\int_{s_0}^{s_1}\frac{d\varphi}{\partial s}.ds$$

$$= \quad dq.(\varphi_0 - \varphi_1)$$

Man sieht hieraus, dass die geleistete Arbeit durch die am Anfangs- und Endpunkte der Bahnstrecke stattfindenden Werte des Potentials vollständig bestimmt ist, ohne dass man den Weg zwischen diesen beiden Punkten zu kennen braucht. Ferner ist $\varphi.dq$ das Potential der Elektricität auf dq, so dass der obige Ausdruck die eingetretene Abnahme des Potentials darstellt und da derselbe Ausdruck ebenso für jedes andere Elektricitätselement gilt, so folgt daraus, dass die bei einer Bewegung einer Elektricitätsmenge geleistete Arbeit gleich der dabei eingetretenen Abnahme des Potentials ist. Hat man nun eine geschlossene Fläche, deren Element $d\omega$ heisse, und ist die in der Zeiteinheit durch dasselbe strömende Elektricitätsmenge $id\omega$, so ist die innerhalb des Raumes, der von der Fläche umschlossen wird, von einem stationären Strome geleistete Arbeit A nach dem angeführten Satze:

$$A = \int \varphi i d\omega.$$

Es muss nun die geleistete Arbeit von einer ebenso grossen Zunahme an lebendiger Kraft begleitet sein. Wenn man hierbei keine äusserlich wahrnehmbare Bewegung der ponderablen Massen annimmt, so bleibt nur die Vermehrung oder Verminderung der Wärmemenge übrig. Ist die Wärme nach mechanischem Masse gemessen, so ist die erzeugte Wärmemenge gleich der von der Kraft geleisteten Arbeit, und die für A gegebenen Formeln gelten auch für die erzeugte Wärme. Ist dagegen die Wärme mit gewöhnlichem Masse gemessen, so ist dieselbe proportional der geleisteten Arbeit und

$$W = k.\int \varphi . id\omega.$$

Ist der Leiter ein Draht, der seiner Länge nach von der Elektricität durchströmt wird, und betrachten wir von ihm ein zwischen 2 Querschnitten liegendes Stück, so braucht die Integration nur für die Flächen dieser beiden Querschnitte ausgeführt zu werden. Innerhalb desselben Querschnittes ist aber φ constant, wenn derselbe senkrecht gegen die Axe geführt wird. Denn legt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem so, dass die Coordinatenaxe der x mit der Axe des Leiters parallel ist, so stellt $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ die ganze Kraftäusserung nach der Voraussetzung dar, und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ sind Null. Mithin ist φ

innerhalb der YZ Ebene und jeder damit parallelen constant. Aber jene beiden Querschnitte sind, falls sie senkrecht gegen die Axe geführt werden, der YZ Ebene parallel.

Mithin ist für jeden der beiden Querschnitte:

$$\int \varphi\, i dw = \varphi \int i dw = \varphi J$$

Daher

$$W = k.(\varphi_0 - \varphi_1)J$$

Nun ist nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$J = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{l},$$

wo l den Leitungswiderstand des betrachteten Stückes bedeutet; also:

$$W = k.J^2.l.$$

Dies gilt für die Zeiteinheit. In der Zeit t wird die Wärme:

$$W_t = k.J^2.l.t.$$

Es ist dies das von Joule gefundene und von Lenz und Becquerel bestätigte Gesetz.

Aus dem elektrostatischen Grundgesetze, welches den vorangegangenen Betrachtungen zu Grunde liegt, lassen sich die Ampère'schen Formeln und die Inductionserscheinungen nicht ableiten. Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Teilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt und das in das elektrostatische übergeht, wenn die Geschwindigkeit verschwindet. Das Ampère'sche Gesetz ist davon verschieden. Jedoch führen beide für geschlossene Ströme zu demselben Resultate. Nun ist die Grösse der elektrodynamischen Kräfte bisher erst für die Wirkungen von je 2 oder mehreren geschlossenen Strömen auf einander und für die Wirkungen eines geschlossenen Stromes auf seine einzelnen Teile bekannt und, wir dürfen das Ampère'sche Gesetz als einen tatsächlich richtigen Ausdruck dieses bis jetzt bekannten Bereichs von Erscheinungen ansehen. Wenn wir uns daher jetzt zu der Betrachtung der elektrodynamischen Kräfte wenden, so werden wir dieselbe nur auf geschlossene Ströme beziehen und hier von der Ampère'schen Formel ausgehen.

Die elektrodynamischen Kräfte zerfallen in elektroponderomotorische und in elektromotorische Kräfte. Das Ampère'sche Gesetz bezieht sich zunächst nur auf die ponderomotorischen Kräfte.

Es ist nun F. E. Neumann zuerst gelungen, aus demselben einen Potentialausdruck abzuleiten, welcher auch für die Theorie der elektromotorischen Kräfte von der wichtigsten Bedeutung ist. Wie daher das Potential die Elektrostatik mit der Theorie der stationären elektrischen Ströme verbindet, so verbindet es auch die Lehre von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs mit der von den elektromotorischen Kräften.

Das elektrodynamische Potential, wie wir es nennen wollen, spielt den ponderomotorischen Kräften zweier Stromleiter gegenüber dieselbe Rolle wie das magnetische oder elektrostatische Potential den magnetischen oder elektrischen Anziehungskräften gegenüber. Es giebt in diesem Sinne die potentielle Energie der ponderomotorischen Kräfte an, welche, wenn die Stromstärken unverändert bleiben, bei den Bewegungen derselben in mechanische Arbeit verwandelt werden kann Und zwar ist hierbei die bei einer bestimmten Verschiebung der Leiter und bei unverändert gebliebenen Stromstärken von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit gleich zu setzen der Differenz, um welche der Wert des Potentials während dieser Verschiebung kleiner geworden ist. Daraus folgt zugleich, dass die mechanische Arbeit der ponderomotorischen Kräfte von geschlossenen Stromkreisen bei constant bleibenden Stromintensitäten nur von der Anfangs- und Endlage, nicht von der Art des Ueberganges abhängig ist.

In der Tat zeigt eine kleine Rechnung. dass der aus dem elektrodynamischen Potential abgeleitete Ausdruck für die bei einer Verschiebung der Leiter geleistete Arbeit gleich dem von Ampère aufgestellten ist. Wir wollen dabei ausgehen von der Gleichung:

$$Q = \frac{ii'}{g^2} \int\int \frac{dl \,.\, dl'}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'} \,,$$

wodurch das Potential zweier geschlossener Ströme ausgedrückt wird, deren Elemente dl und dl' heissen. dl und dl' sollen bei dieser Verrückung keine Veränderung, mithin der Stromleiter keine Ausdehnung erleiden.

Alsdann:

$$\delta Q = \frac{ii'}{g^2} \int\int dl\, dl' \left\{ - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \frac{1}{r^2} \delta r + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \cdot \frac{\partial \delta r}{\partial l'} \right\}$$

Nun ist:

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \delta r}{\partial l} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'} \, dl = \left[\frac{1}{r} \cdot \delta r \,.\, \frac{\partial r}{\partial l'} \right]_{,}^{''} - \int \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l'} \right) . \, \delta r \,.\, dl$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist aber Null, da bei einem geschlossenen Strome die beiden Grenzen zusammenfallen, mithin:

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \delta r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \,.\, dl = -\int \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'}\right) \delta r \, dl$$

Ebenso:

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \cdot \frac{\partial \delta r}{\partial l'} \,.\, dl' = -\int \frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l}\right) \delta r \,.\, dl'$$

Daher:

$$\begin{aligned} \delta Q = -\frac{ii'}{g^2} \iint dl \,.\, dl' \Big\{ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial l} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'} \delta r \\ & + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'}\right) \delta r \\ & + \frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial l}\right) \delta r \Big\} \\ = -\frac{ii'}{g^2} \iint dl \, dl' & \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial l} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial l \, \partial l'} \right\} \delta r \\ = -\frac{ii'}{g^2} \iint \frac{dl \, dl'}{r^2} & \Big(3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos (ll')\Big) \Big\} \end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial r}{\partial l} = -\cos \vartheta;$$

$$\frac{\partial r}{\partial l'} = \cos \vartheta'$$

und ferner

$$\begin{aligned} \cos (ll') &= \frac{dx}{dl} \cdot \frac{dx'}{dl'} + \frac{dy}{dl} \cdot \frac{dy'}{dl'} + \frac{dz}{dl} \cdot \frac{dz'}{dl'} \\ &= -\frac{\partial r}{\partial l} \cdot \frac{\partial r}{\partial l'} - r \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial l \,.\, \partial l'} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, dass die beiden Elemente dl und dl' eine Anziehung von der Stärke

$$\frac{ii}{g^2} \frac{dl \,.\, dl'}{r^2} \Big(3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos (ll')\Big)$$

auf einander ausüben, wie es Ampère ausgesprochen hat.

Es kann wol hier gleichzeitig bemerkt werden, dass Clausius in seinem Buche: „Anwendung der der mechanischen Wärmetheorie zu Grunde liegenden Principien auf die Elektricität“, gezeigt hat, dass, wenn man sowol den Strom s, welcher eine ponderomotorische Kraft erleidet, als auch den Strom s', der dieselbe ausübt, durch ein magnetisches Flächenpaar ersetzt, und das Potential beider Flächenpaare auf einander berechnet, man denselben Ausdruck erhält, welcher sich aus dem Ampère'schen Gesetze ergiebt. Damit ist zugleich auch theoretisch der Beweis für den schon vorher experimentell fest stehenden Satz gebracht, dass magnetische Körper dieselben Kräfte ausüben, wie elektrische und sie daher auch gleichmässig auf einander wirken. Diese Wechselwirkung gilt besonders in Bezug auf die elektromotorischen Kräfte. Eine elektromotorische Kraft wird von einem Magneten oder einem Strome in einem Leiter inducirt, wenn sich die Intensität des Magneten oder Stromes ändert oder ihre Lage oder auch beide zugleich.

Für diese Induction ist zuerst von F. E. Neumann ein Gesetz aufgestellt worden, und zwar hat derselbe es aus dem von ihm gefundenen Potential abgeleitet. Wenig später erschien der erste Abschnitt von W. Weber's „Elektrodynamischen Massbestimmungen", in welchem er alle bis dahin bekannten Wirkungen der Elektricität, die elektrostatischen, elektrodynamischen und inducirenden, unter einen Gesichtspunkt zusammenfasste. Das daraus hergeleitete Inductionsgesetz war natürlich von dem Neumann'schen ebenso abweichend, wie die Weber'sche Formel von der Ampère'schen. Aber auch hier zeigte die darauf folgende Discussion, dass bei richtiger Anwendung des Weber'schen Gesetzes es für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, genau dieselben Resultate giebt wie das von Neumann aufgestellte Gesetz. Es kann daher dasselbe für diesen Fall als unzweifelhaft richtig betrachtet werden.

Neumann geht in seiner Theorie der inducirten Ströme von der durch einen Magneten bewirkten Induction aus und betrachtet auch hier zunächst den Fall, dass die Induction durch Bewegung des Magneten geschehe. Er legt seinen Betrachtungen ausser dem Satz von Lenz den von Weber experimentell bewiesenen Satz zu Grunde, dass die bei einer Bewegung stattfindende Induction in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sei.

Durch mathematische Entwickelungen gelangt dann Neumann zu dem Satze, dass der inducirte Strom allein von der durch die Ortsveränderung hervorgebrachten Veränderung des Wertes des Potentials abhängt, durch welches die Wirkung des Magneten auf den Leiter oder umgekehrt dargestellt wird. Und zwar ist die elektromotorische Kraft, welche in einem geschlossenen Leiter durch einen Magneten erregt wird, sei es, dass der Magnet oder der Leiter bewegt wird, proportional der Differenz der Werte, welche das Potential des Magneten in Bezug auf den Leiter, der von der Stromeinheit durchströmt wird, am Anfange und Ende der Bewegung annimmt. Daraus folgert dann Neumann weiter, dass man den Grund für die Induction nicht in der Bewegung an sich, sondern allein in der dadurch hervorgebrachten Aenderung im Werte des Potentials zu suchen habe und dass es daher gleichgültig ist, wodurch diese Veränderung geschieht. Jeder Umstand demnach, wodurch das Potential verändert wird, kann als die Ursache eines Inductionsstromes angesehen werden. Ein solcher Umstand ist die Veränderung des magnetischen Zustandes. Da nun aber das Potential eines Magneten ersetzt werden kann durch das Potential eines elektrischen Stromes, so war dadurch die Theorie der ganzen Induction gegeben.

Neumann hat seine Betrachtungen in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1845 und 1847 niedergelegt, wovon besonders die Abhandlung von 1847 „Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme" zu obigem Ergebnisse kommt.

Während nach Neumann die elektromotorische Kraft dem nach der Zeit genommenen Differentialquotienten des Potentials proportional ist, hat Helmholtz und auch Clausius gezeigt, dass, wenn für elektrische Ströme und die von ihnen geleistete Arbeit das Gesetz der Erhaltung der Energie gelte, die sogenannte Inductionsconstante $c = 1$ und damit die elektromotorische Kraft der genannten Aenderung des Potentials nicht nur proportional, sondern gleich sein muss. Dabei muss jedoch zur Messung der Stromintensitäten das mechanische Mass angewendet sein.

Wir sehen demnach, wie das Potentialgesetz unter denselben Ausdruck die sämmtlichen Erscheinungen

1) der ponderomotorischen Kräfte,
2) der Induction durch Stromesänderung,
3) der Induction durch Bewegung, also überhaupt das ganze Gebiet der bisher bekannten Tatsachen der Elektrodynamik vereinigt.

Mit Recht bezeichnet daher Helmholtz die Auffindung des Potentialgesetzes als eine der glücklichsten und glänzendsten Errungenschaften der mathematischen Physik. Denn weicht man von dem Potentialgesetz ab, so braucht man für jedes der genannten Gebiete besondere Gesetze, wobei das für 2) mit dem Potentialgesetz übereinstimmt, die beiden anderen complicirter sind als jenes. Helmholtz hat es versucht, einen allgemeineren Potentialausdruck aufzustellen, wovon der Neumann'sche ein specieller Fall ist, wenn das Potential von geschlossenen Strömen herrührt. Jenen allgemeinen Potentialausdruck lässt Helmholtz auch von den ungeschlossenen Strömen gelten und überträgt damit die oben entwickelten Eigenschaften der elektromotorischen Kräfte hypothetisch auch auf ungeschlossene Ströme. Freilich haben die Ausführungen von Helmholtz, die er im 75. und 78. Bd. des Borchardt'schen Journals veröffentlichte, einen lebhaften Streit hervorgerufen, an dem sich besonders Carl Neumann beteiligte.

Wenn nun auch das Gebiet der Elektrodynamik noch nicht mit derselben Sicherheit und Abgeschlossenheit von der Theorie beherrscht wird wie das der Elektrostatik, so möchten unsere Betrachtungen doch bleibenden Wert besitzen. Denn dieselben sind allgemeinerer Natur. Mag man noch ein umfassenderes Gesetz aufstellen wie das von Ampère und Weber, stets wird man durch die Ableitung eines Potentialausdruckes aus demselben zu den von uns entwickelten Sätzen kommen.

VII.

Berechnung der Lichtmenge, die von einem gegebenen leuchtenden Punkt auf ein gegebenes Ellipsoid fällt.

Von

August Kiel.

Wenn man um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius 1 beschreibt und gleichzeitig von ihm aus einen Tangentenkegel an das gegebene Ellipsoid legt, so ist derjenige Teil der Kugeloberfläche, welchen der Tangentenkegel ausschneidet, mit der Lichtmenge proportional, welche auf das Ellipsoid fällt. Setzt man daher diese Lichtmenge $= M$ und den betreffenden Teil der Kugeloberfläche $= O$, so ist:

$$M = k \,.\, O,$$

wo k eine Constante bedeutet. Diese Constante ist ganz von der Natur des Lichtes abhängig. Setzt man dieselbe so voraus, dass die von dem Punkte ausgestrahlte Lichtmenge gleich 4π ist, so ist $k = 1$ und alsdann:

$$M = O.$$

Es kommt somit das vorgelegte Problem darauf hinaus, den Teil der Kugeloberfläche der Berechnung zu unterwerfen, der von dem Tangentenkegel ausgeschnitten wird.

§ 1. Aufstellung der Gleichung des Tangentenkegels.

Die Gleichung des Ellipsoids laute:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Wenn die Coordinaten des leuchtenden Punktes (x_0, y_0, z_0) sind, so ist die Gleichung des von ihm an das Ellipsoid gelegten Tangentenkegels:

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$
$$\times\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)=0$$

Wenn man nun den Mittelpunkt einer Oberfläche 2ter Ordnung zum Coordinatenanfangspunkt wählt, so verschwinden diejenigen Glieder, welche die erste Potenz der Variabeln zu Factoren haben, weil dann jede Coordinalenebene Symmetrieebene der Oberfläche ist. Da nun ausserdem bei dem Kegel der Mittelpunkt auf der Oberfläche selbst liegt, so verschwindet bei dieser Transformation auch das absolute Glied.

Wenn wir daher das Coordinatensystem vom Mittelpunkte des Ellipsoids nach der Spitze des Kegels (x_0, y_0, z_0) parallel mit sich selbst verschieben, so geht die linke Seite obiger Gleichung in eine homogene Function 2ten Grades der Veränderlichen (xyz) über.

Zu dieser Transformation führen die Substitutionen:

$$x=\xi+x_0$$
$$y=\eta+y_0$$
$$z=\zeta+z_0.$$

Durch Einführung derselben erhält man:

$$\left(\frac{\xi+x_0}{a^2}\cdot x_0+\frac{\eta+y_0}{b^2}\cdot y_0+\frac{\zeta+z_0}{c^2}\cdot z_0-1\right)^2$$
$$-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)\left\{\frac{(\xi+x_0)^2}{a^2}+\frac{(\eta+y_0)^2}{b^2}+\frac{(\xi+z_0)^2}{c^2}-1\right\}=0$$

Daraus geht alsdann die Gleichung hervor:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\xi x_0}{a^2}+\frac{\eta y_0}{b^2}+\frac{\zeta z_0}{c^2}\right)^2-\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)=0$$

wo

$$\varepsilon = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1$$

bedeutet. Diese Gleichung vereinfacht sich noch mehr, wenn man sie auf die Hauptaxen transformirt. Dieses Problem kommt algebraisch darauf hinaus, die linearen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

und

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$$

zu identischen Gleichungen machen, wobei $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ die obige Gleichung des Tangentenkegels darstellt. Wenn nun gewisse lineare Substitutionen die homogene Function $\Phi(x, y, z)$ der 2ten Ordnung transformiren in

$$\Phi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2,$$

so transformiren die Auflösungen dieser Substitutionen die reciproke Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ in

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2}$$

(s. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, pg. 240 ff.).

Die Transformation der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ giebt somit zugleich die der vorliegenden Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ an. Da nun die Gestalt der reciproken Function einfacher ist als die von $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, so ist es vorteilhaft, von jener auszugehen.

Um den Ausdruck für $\Phi(x, y, z)$ aufzustellen, muss man die Substitutionen machen:

$$x = \tfrac{1}{2}\varphi'(\xi)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\varphi'(\eta)$$
$$z = \tfrac{1}{2}\varphi'(\zeta)$$

Alsdann:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\Phi'(x)$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}\Phi'(y)$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}\Phi'(z)$$

$$\Phi(x, y, z) = \tfrac{1}{2}\{x\Phi'(x) + y\Phi'(y) + z\Phi'(z)\}$$

Die hier angedeuteten algebraischen Operationen zur Bestimmung der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ führen wir auf die folgende Art aus.

Wir setzen:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}+\frac{z_0\zeta}{c^2}\right)=M$$

Alsdann:

$$x=\frac{x_0}{a^2}M-\frac{\xi}{a^2}$$

$$y=\frac{y_0}{b^2}M-\frac{\eta}{b^2}$$

$$z=\frac{z_0}{c^2}M-\frac{\zeta}{c^2}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\frac{x_0}{\varepsilon}$, $\frac{y_0}{\varepsilon}$, $\frac{z_0}{\varepsilon}$ und addirt dieselben, so erhält man:

$$\frac{1}{\varepsilon}(xx_0+yy_0+zz_0)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)M-M.$$

Nun ist aber:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1+\varepsilon,$$

daher:

$$xx_0+yy_0+zz_0=M$$

Mithin:

$$\xi=x_0M-xa^2=x_0(xx_0+yy_0+zz_0)-xa^2$$
$$\eta=y_0(xx_0+yy_0+zz_0)-yb^2$$
$$\zeta=z_0(xx_0+yy_0+zz_0)-zc^2$$

und

$$\Phi(x,y,z)=(xx_0+yy_0+zz_0)^2-(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2)$$

Wir haben somit das Resultat, dass diejenigen Substitutionen, welche die Function

$$(xx_0+yy_0+zz_0)^2-(x^2a^2+x^2b^2+z^2c^2)$$

transformiren in:

$$(xx_0+yy_0+zz_0)^2-(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2)=\lambda_0X^2+\lambda_1Y^2+\lambda^2Z^2$$

die ursprüngliche Function $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ transformiren in:

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{X^2}{\lambda_0}+\frac{Y^2}{\lambda_1}+\frac{Z^2}{\lambda_2}$$

Nun bestimmen sich aber die Grössen λ_0, λ_1, λ_2 bei der reciproken Function $\Phi(x,y,z)$ als die Wurzeln der irreductiblen kubischen Gleichung:

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2+\lambda}-1=0$$

Also muss nach Auflösung dieser kubischen Gleichung die endgiltige Gleichung des Tangentenkegls lauten, bezogen auf seine Hauptaxen:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2} = 0.$$

§ 2. Directe Methode zur Bestimmung des von dem Tangenkegel aus der Kugeloberfläche ausgeschnittenen Teiles.

Setzt man in der Gleichung des Ellipsoids voraus, dass $a^2 < b^2 < c^2$ ist, und ist $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$, dann liegen bekanntlich die 3 Wurzeln der obigen kubischen Gleichung zwischen folgenden Grenzen:

λ_0 zwischen $-c^2$ und $-b^2$
λ_1 zwischen $-b^2$ und $-a^2$
λ_2 zwischen $-a^2$ und ∞.

Da nun a^2, b^2 und c^2 wesentlich positive Grössen sind, so sind λ_0 und λ_1 negativ, und λ_2 kann sowohl positiv wie negativ sein. Mithin kann man setzen:

$$\lambda_0 = -\alpha^2; \quad \lambda_1 = -\beta^2; \quad \lambda_2 = \pm\gamma^2.$$

Dabei ist $\alpha^2 > \beta^2$ und wenn $\lambda_2 = -\gamma^2$, so $\alpha^2 > \beta^3 > \gamma^2$.

Es lautet demnach die Gleichung des Tangentenkegels:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \mp \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

Bei dieser Gleichung ist jedoch nur das obere Zeichen des letzten Gliedes von geometrischer Bedeutung, da die Gleichung für den Fall des unteren Vorzeichens nur den Coordinatenanfangspunkt darstellt.

Die Gleichung des Tangentenkegels ist also:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

Die Gleichung der Kugeloberfläche ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Der Inhalt des gesuchten Flächenstückes ist gegeben durch das Doppelintegral:

$$\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

wenn dasselbe auf alle Werte von x und y ausgedehnt wird, welche den Punkten der Projection des Flächenstückes auf die xy Ebene entsprechen. Die Gleichung der Begrenzungscurve erhält man aber, wenn man zwischen obigen beiden Gleichungen z eliminirt.

Es lautet daher diese Gleichung:

$$x^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{1}{\gamma^2}$$

oder

$$x^2 . \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2}+y^2 . \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}=1$$

Mithin können wir die Gleichung der Begrenzungscurve schreiben:

$$a^2x^2+b^2y^2=1$$

$$a^2=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2}; \quad b^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}.$$

Es ist daher obiges Doppelintegral $\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ auszudehnen auf alle positiven und negativen Werte von x und y, welche der Bedingung genügen:

$$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1.$$

Dehnt man das Integral blos auf die positiven Werte von x und y aus, so erhält man den 4. Teil der Fläche, weil die Begrenzungscurve der xy Projection, über welche die Integration auszudehnen ist, eine Ellipse darstellt, mithin die Integration über den positiven Teil derselben nur den 4. Teil von der ganzen Integration beträgt. Es ist daher die Fläche gleich $4\int_0^{\frac{1}{a^2}} dx \int_0^{\frac{1}{b^2}\sqrt{1-a^2x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Führen wir nun in diesem Integrale 2 neue Variabeln ein, welche mit x und y durch die Gleichungen verbunden sind:

$$x=\frac{1}{a}.\xi$$

$$y=\frac{1}{b}.\eta,$$

so haben ξ und η die Bedingung zu erfüllen:

$$0 \leqq \xi^2+\eta^2 \leqq 1$$

und das Integral selbst wird:

$$\frac{1}{ab}\int_0^1 d\xi \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}$$

In diesem Integrale führen wir nun die Substitution ein:

$$\xi = \varrho \cos\omega$$
$$\eta = \varrho \sin\omega.$$

Alsdann ist:

$$\iint \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}} = \iint \frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial\varrho}\frac{\partial\eta}{\partial\omega}-\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}\right) d\varrho\, d\omega}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

$$= \iint \frac{\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

Da nun die Integration sich auf alle positiven ξ und η bezieht, für welche:

$$0 \leqq \xi^2+\eta^2 \leqq 1$$

ist, so bleibt der Punkt (ξ, η) innerhalb eines mit dem Radius 1 beschriebenen Kreisquadranten. Führen wir daher für ξ und η die Polarcoordinaten ϱ und ω ein, so muss, damit alle Punkte innerhalb des ersten Quadranten durchlaufen werden:

ϱ von 0 bis 1 und

ω von 0 bis $\frac{\pi}{2}$

gehen. Mithin ist der Inhalt der gesuchten Fläche gleich:

$$\frac{4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^1 \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

Nun

$$\int_0^1 \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

$$=\left[\frac{-a^2b^2\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}\right]_0^1$$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}-\frac{a^2b^2\sqrt{1-\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}$$

Daher ist der Inhalt der Fläche gleich:

$$4\,ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}-4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega\sqrt{1-\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}$$

Wir können nun, ohne der Allgemeinheit der nachfolgenden Betrachtungen Eintrag zu tun, voraussetzen, dass $b^2 > a^2$ ist.

Denn im entgegengesetzten Falle brauchten wir nur die Substitutionen:

$$\xi=\varrho\cos\omega,\quad \eta=\varrho\sin\omega$$

zu vertauschen, um in den folgenden Auseinandersetzungen auch a mit b vertauschen zu können.

Ist nun $b^2 > a^2$, so ist das erste Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{b^2-(b^2-a^2)\sin^2\omega}$$

Substituirt man darin:

$$\operatorname{ctg}\omega=z;\quad \frac{1}{\sin^2\omega}=1+z^2$$

$$-\frac{d\omega}{\sin^2\omega}=dz;\quad d\omega=-\frac{dz}{1+z^2}$$

$$\omega = 0; \quad z = \infty$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}: \quad z = 0;$$

so folgt aus obigem Integral das andere:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{a^2 + b^2 z^2} = \frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} z\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2ab}$$

Was das zweite obiger Integrale betrifft, so kann es auf elliptische Integrale zurückgeführt werden. Es ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \sqrt{1 - \left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega}$$

$$= \frac{1}{ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \{b^2(a^2 - 1) + (b^2 - a^2)\sin^2\omega\}}{\{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2\omega\} \sqrt{b^2(a^2 - 1) + (b^2 - a^2)\sin^2\omega}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \left\{1 + \frac{b^2 - a^2}{b^2(a^2 - 1)} \sin^2\omega\right\}}{\{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2\omega\} \sqrt{1 + \frac{b^2 - a^2}{b^2(a^2 - 1)} \sin^2\omega}}$$

Setzt man in dem letztgenannten Integrale $\frac{b^2 - a^2}{b^2(a^2 - 1)} = n^2$ und substituirt ferner:

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega &= \cos\varphi \\ \cos\omega\, d\omega &= -\sin\varphi\, d\varphi \\ d\omega &= -d\varphi \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} \omega &= 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \omega &= \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

so geht dasselbe über in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\,(1 + n^2 \cos^2\varphi)}{\{b^2 - (b^2 - a^2)\cos^2\varphi\} \sqrt{1 + n^2 - n^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\,(1 + n^2 \cos^2\varphi)}{\{b^2 - (b^2 - a^2)\cos^2\varphi\} \sqrt{1 - \frac{n^2}{1 + n^2}}}$$

$$n^2\cos^2\varphi+1:-(b^2-a^2)\cos^2\varphi+b^2=-\frac{n^2}{b^2-a^2}+\frac{1+\frac{n^2b^2}{b^2-a^2}}{b^2-(b^2-a^2)\cos^2\varphi}$$

$$=-\frac{1}{b^2(a^2-1)}+\frac{a^2}{a^2-1}\cdot\frac{1}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\varphi}$$

Mithin ist:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+n^2\cos^2\varphi)d\varphi}{\{b^2-(b^2-a^2)\cos^2\varphi\}\sqrt{1-\frac{n^2}{1+n^2}\sin^2\varphi}}$$

$$=-\frac{1}{b^2(a^2-1)}F\left(\frac{\pi}{2},k\right)+\frac{1}{a^2-1}\Pi_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{b^2-a^2}{a^2},k\right)$$

wobei

$$k^2=\frac{n^2}{1+n^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2(b^2-1)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}$$

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}=k^2\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}\quad\text{ist.}$$

Daher ist endlich:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{a}}dx\int\limits_0^{\frac{1}{b}\sqrt{1-a^2x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{b^2}{a\sqrt{b^2-1}}\Pi_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)+\frac{1}{a\sqrt{b^2-1}}F\left(\frac{\pi}{2},k\right);$$

wobei

$$\frac{1}{a\sqrt{b^2-1}}=\frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}};$$

$$\frac{b^2}{a\sqrt{b^2-1}}=\frac{\alpha(\beta^2+\beta^2)}{\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^7}}\quad\text{ist.}$$

Um diese Integrale weiter zu vereinfachen, muss vor Allem das in der Legendre'schen Form geschriebene Integral $\Pi_1\left(\frac{\pi}{2},k^2\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$ in die Jacobi'sche übersetzt werden. Jacobi bezeichnet nun in der von ihm gegebenen Normalform der elliptischen Transcendenten der 3ten Gattung den Parameter n $\left(\text{bei uns } = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$ mit $-k^2 \sin^2 \operatorname{am} A$.

Es ist klar, dass diese Darstellungsweise nur solange zulässig ist, als $0 > n > -k^2$ ist. Soll sie auch noch dann anwendbar bleiben, wenn n zwischen andere Grenzen fällt, so muss A imagninär werden. Nun liegt in dem vorliegenden Falle n wirklich zwischen anderen Grenzen, nämlich zwischen ∞ und 0, also müssen wir für die Transformation

$$n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} Ai = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

setzen.

Nun:

$$\Pi_1(\varphi, -k^2 \sin^2 \operatorname{am} A) = u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} A}{\Delta \operatorname{am} A} \Pi(u, A)$$

daher:

$$\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, -k^2 \sin \operatorname{am} Ai\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} Ai}{\Delta \operatorname{am} Ai} \Pi(K, Ai)$$

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Da aber

$$-k^2 \sin^2 \operatorname{am} Ai = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2} = k^2 \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

ist, so

$$\sin \operatorname{am} Ai = \frac{i\gamma}{\beta}$$

$$\cos \operatorname{am} Ai = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta}$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} Ai = \frac{i\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

$$\Delta \operatorname{am} Ai = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}$$

Mithin:

$$\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) = K + \frac{i\beta\gamma\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\alpha(\beta^2 + \gamma^2)} \Pi(K, Ai)$$

und folglich das Doppelintegral:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b}\sqrt{1-a^2x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-i\Pi(K, Ai)+K\left\{\frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}-\frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}-i\Pi(K, Ai)-\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}K$$

Und wenn es uns gestattet ist, in der Bezeichnungsweise von Durège fortzufahren, so können wir setzen:

$$\Pi(K, Ai)=KE(iA)-iAE$$

Aber:

$$E(iA)=i\operatorname{tg}\operatorname{am}(A, k')\Delta\operatorname{am}(A, k')-iE(A, k')+iA$$

Daher:

$$\Pi(K, Ai)=i\operatorname{tg}\operatorname{am}(A, k')\Delta\operatorname{am}(A, k')K-iKE(A, k')+iAK-iAE.$$

Nun:

$$i\operatorname{tg}\operatorname{am}(A, k')=\sin\operatorname{am}Ai$$

$$=i\frac{\gamma}{\beta}$$

also:

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(A, k')=\frac{\gamma}{\beta}.$$

ferner:

$$\sin^2\operatorname{am}(A, k')=\frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$1-k'^2\sin^2\operatorname{am}(A, k')=1-\left(1-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\gamma^2}$$

Mithin:

$$i\operatorname{tg}\operatorname{am}(A, k').\Delta\operatorname{am}(A, k')=i\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$$

und folglich obiges Doppelintegral

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}K-KE(A, k')+K.A$$

$$-\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}K-EA$$

$$=\frac{\pi}{2}-KE(A, k')+(K-E)A$$

Ist nun ferner:

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{\gamma}{\beta}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(A, k')=\frac{\gamma}{\beta}$$

$$\alpha' = \mathrm{am}(A,\ k')$$

$$A = F(\alpha',\ k')$$

Ferner bezeichnet Durège mit der elliptischen Function $E(A,\ k')$ das elliptische Integral:

$$E(\mathrm{am}(A,\ k')) = E(\alpha',\ k').$$

Mithin lautet schliesslich der gesuchte Inhalt der Fläche:

$$F = 2\pi - 4\{K.E(\alpha',\ k') - (K-E)F(\alpha',\ k')\}.$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck, den wir kurz mit W bezeichnen wollen, schreibt sich noch einfacher in den Thetafunctionen. Zu dieser Umwandlung gelangen wir auf folgendem Wege.

Es ist:

$$\tfrac{1}{2}.\pi.l'\vartheta(\alpha',\ \nu') = F'.E(\alpha',\ k') - E'F(\alpha',\ k')$$

wo

$$F' = F\left(\frac{\pi}{2},\ k'\right); \quad E' = E\left(\frac{\pi}{2},\ k'\right)$$

ist. Nun

$$\frac{F}{F'} = \frac{\nu'}{\pi};$$

daher

$$\tfrac{1}{2}\pi\, l'\vartheta(\alpha',\ \nu') = \frac{\pi.FE(\alpha',k')}{\nu'} - E'F(\alpha',\ k')$$

Ferner ist:

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} + FF' - EF'}{F} = E'$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{F} + (F-E)\frac{F'}{F} = E'$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{F} + (F-E)\frac{\pi}{\nu'} = E'$$

Daher:

$$\frac{\pi}{2}.\,{}^{l}{}'\vartheta(\alpha',\ \nu') = \frac{\pi}{\nu'}F.E(\alpha',\ k') - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(\alpha',\ k')}{F}$$

$$-(F-E).\frac{\pi}{\nu'}.F(\alpha',\ k')$$

$$\frac{\nu'}{2} l'\vartheta(a', \nu') = FE(\alpha', k') + EF(\alpha', k')$$
$$- FF(\alpha', k') - \frac{\nu'}{2} \cdot \frac{F(\alpha', k')}{F}$$
$$\frac{F(\alpha', k')}{F} = \frac{\pi F(\alpha', k')}{\nu' F'} = \frac{2a'\vartheta(o, \nu')^2}{\nu'.\vartheta(o, \nu')^2} = \frac{2a'}{\nu'}$$

Daher:

$$\frac{\nu'}{2} l'\vartheta(a', \nu') + a' = W$$

Dabei ist

$$a' = \frac{\pi . F(\alpha', k')}{2F'}$$

Nun ist:

$$\vartheta_2(ai, \nu) = \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}} . e^{\frac{a'^2}{\nu'}} . \vartheta(a', \nu')$$
$$ln\, \vartheta_2(ai, \nu) = ln \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}} + \frac{a'^2}{\nu'} + lu\, \vartheta(a', \nu')$$
$$\frac{dl\vartheta_2(ai, \nu)}{da} = \frac{2a'}{\nu'} \cdot \frac{da'}{da} + \frac{dl\vartheta(a', \nu')}{da'} \cdot \frac{da'}{da}$$
$$\frac{da'}{da} = \sqrt{\frac{\nu'}{\nu}};$$

daher:

$$\frac{dl\vartheta_2(ai, \nu)}{da} = \frac{2a'}{\sqrt{\nu\nu'}} + \frac{dl\vartheta(a', \nu')}{da'} . \sqrt{\frac{\nu'}{\nu}}$$

Mithin:

$$\frac{\nu'}{2} l'\vartheta(a', \nu') + a' = \frac{\pi}{2} \frac{dl\vartheta_2(ai, \nu)}{da}$$

Daher auch:

$$W = \frac{\pi}{2} \frac{dl\vartheta_2(ai, \nu)}{da}$$

Dabei ist:

$$a = a' \sqrt{\frac{\nu'}{\nu}} = a' . \sqrt{\frac{\nu\nu'}{\nu'^2}} = a' . \frac{\pi}{\nu'} = a' . \frac{F'}{F}$$

Da nun:

$$a' = \frac{\pi . F(\alpha', k')}{2F'}$$

ist, so

$$a = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(\alpha', k')}{F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)}$$

Daher auch:

$$F = 2\pi - 2(\nu' l' \vartheta(a',\ \nu') + 2a')$$

oder aber:

$$F = 2\pi - 2\pi \cdot \frac{dl \cdot \vartheta_2(ai,\ \nu)}{da}$$

$$= 2\pi \left\{ 1 - \frac{dl\vartheta_2(ai,\ \nu)}{da} \right\}.$$

§ 3. Indirecte Methode zur Bestimmung des Flächeninhaltes vom betreffenden Stücke der Kugelfläche.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes der von dem Tangentenkegel aus der Kugel ausgeschnittenen sphärischen Ellipse kommt uns ein Princip wesentlich zu Statten, dessen Hesse am Ende seiner 22. Vorlesung über analytische Geometrie des Raumes Erwähnung tut. Dasselbe lautet:

Die Summe des Flächeninhaltes einer sphärischen geschlossenen Curve und des Umfanges ihrer Polarcurve ist gleich 2π. Man kann mithin von dem letzteren auf den gesuchten Flächeninhalt der ursprünglich gegebenen sphärischen Curve schliessen. Da sich nun der Flächeninhalt einer sphärischen Curve als ein Doppelintegral, der Umfang der Polarcurven dagegen als ein einfaches Integral darstellt, so wird durch die Berechnung des letzteren ein bedeutender Vorteil errungen.

Unter Polarcurve einer auf einer Kugel gegebenen Curve versteht man diejenige, welche von dem grössten Kreise berührt wird, dessen Pol die gegebene Curve beschreibt. Wenn daher die gegebene Curve von einem Kegel ausgeschnitten wird, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt, so wird die Polarcurve von dem Kegel ausgeschnitten, welcher beschrieben wird von den in der Spitze dieses Kegels auf seinen Tangentenebenen errichteten Normalen.

Nach 15 der 14. Vorlesung des genannten Werkes von Hesse lautet aber die Gleichung des Polarkegels von

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

ebenso wie die reciproke Function der linken Seite gleich Null gesetzt, also:

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0$$

Hierbei ist nach Früherem

$$\alpha > \beta.$$

Es ist daher unsere Aufgabe, die Grösse der Curve zu berechnen, in welcher sich dieser Kegel schneidet mit der Kugelfläche:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

Um nun den Ausdruck für die Länge des Bogenelements

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

im vorliegende Falle möglichst einfach zu gestalten, führen wir die neue Variabele v ein, welche mit den anderen den Zusammenhang haben soll, dass:

$$\frac{\alpha^2x^2}{1+\alpha^2v}+\frac{\beta^2y^2}{1+\beta^2v}-\frac{\gamma^2z^2}{1-\gamma^2v}=0$$

sei. Da ausserdem:

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2=0$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$

ist, so lassen sich aus diesen 3 Gleichungen x^2, y^2 und z^2 eindeutig bestimmen.

Es ist:

$$\Delta x^2=\begin{vmatrix}0 & \frac{\beta^2}{1+\beta^2v} & \frac{-\gamma^2}{1-\gamma^2v}\\ 0 & \beta^2 & \gamma^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2}{1+\beta^2v}+\frac{\beta^2\gamma^2}{1-\gamma^2v}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)v}{(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}$$

wobei:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2v} & \frac{\beta^2}{1+\beta^2v} & \frac{-\gamma^2}{1-\gamma^2v}\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2v}(\beta^2+\gamma^2)-\frac{\beta^2}{1+\beta^2v}(\alpha^2+\gamma^2)-\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2v}(\alpha^2-\beta^2)$$
$$=\frac{v\{\alpha^2(\beta^4-\gamma^4)+\beta^2(\gamma^4-\alpha^4)-\gamma^2(\alpha^4-\beta^4)\}}{(1+\alpha^2v)(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}$$

Die Klammer des Zählers lässt sich noch vereinfachen. Dieselbe ist nämlich:

$$=-\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)-\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)$$

Addire ich hierbei $\gamma^2\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)$ und subtrahire es gleichzeitig, so erhalte ich:

$$\begin{array}{l} -\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)-\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2) \\ +\alpha^2\gamma^2(\alpha^2-\beta^2) \qquad\qquad\qquad -\gamma^2\alpha^2(\beta^2-\alpha^2) \\ \hline =-(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2) \end{array}$$

Mithin:

$$x^2=\frac{-\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)(1+\alpha^2v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

Ebenso findet man:

$$y^2=\frac{\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)(1+\beta^2v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

$$z^2=\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)(1-\gamma^2v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man

$$(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)=N$$

setzt,

$$dx=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)}{N(1+\alpha^6v)}}\,\alpha^2\,dv$$

$$dy=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)}{N(1+\beta^2v)}}\,\beta^2\,dv$$

$$dz-\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{N(1-\gamma^2v)}}.-\gamma^2\,dv$$

Daher:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

$$=\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\sqrt{\left\{\frac{-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)}{1+\alpha^2v}+\frac{\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)}{1+\beta^2v}-\frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{1-\gamma^2v}\right\}\frac{1}{N}}\,.\,dv$$

Mithin, wenn man auf gleiche Benennung bringt:

$$ds=\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}.\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2v)(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}}\,.\,dv$$

Also:

$$s=\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2v)(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}}\,.\,dv$$

Bei diesem Integrale ist nun sowohl die Bestimmung des Vorzeichens wie die der Grenze auszuführen. Beides geschieht folgendermassen.

Die Länge des Bogenelementes war in der ursprünglichen Form gegeben:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

lässt sich offenbar diese Gleichung in die folgende umwandeln:

$$ds = f(x)\,dx,$$

wo $f(x)$ eine positive reelle Function von x bedeutet. Daraus ist ersichtlich, dass $f(x)dx$ durch die Gleichung:

$$x^2 = \frac{-\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)(1+\alpha^2 v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

transformirt werden kann in den Ausdruck:

$$\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}}\,.\,dv$$

Da $f(x)$ positiv ist, so wird bei dieser Transformation auch der daher rührende Wurzelausdruck positiv zu nehmen sein. Es hängt mithin die Wahl des Vorzeichens nur davon ab, ob bei der Transformation von dx ein positiver oder negativer Ausdruck zum Vorschein kommt. Nun nimmt aber, wie sich aus der obigen Gleichung zwischen x und v ergiebt, v mit zunehmendem x ab, mithin ist jedenfalls:

$$dx = -f_1(v)\,dv,$$

wo $f_1(v)$ einen positiven reellen Ausdruck bedeutet. Daher ist in obiger Gleichung für s das negative Zeichen zu wählen. Mithin:

$$s = \int f(x)\,dx = -\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}}\,dv$$

Bezüglich der Grenzbestimmung kann man ebenfalls von dem Integrale $\int f(x)\,dx$ ausgehen. Die Grenzen von x bestimmen sich aus der Gleichung der Projection der Curve auf die xy Ebene. Dieselbe lautet:

$$(\alpha^2+\gamma^2)x^2 + (\beta^2+\gamma^2)y^2 = \gamma^2$$

Weil diese Projection eine Ellipse ist, so wird das Integral, welches blos über die aus dieser Gleichung sich bestimmenden **positiven** x auszudehnen ist, den 4ten Teil desjenigen Integrales betragen, welches sich über alle x erstreckt, die der Gleichung genügen. Nun erstreckt sich aber das positive x von 0 bis $+\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}$, mithin:

$$s = 4 \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}} f(x)\,dx$$

Transformiren wir nun den zu integrirenden Ausdruck auf v, so bestimmen sich die Grenzen von v leicht aus der Gleichung:

$$x^2 = \frac{-\beta^2\gamma^2(1+\alpha^2 v)(\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

nämlich:

$$v = -\frac{1}{\alpha^2} \quad \text{für} \quad x = 0$$

$$v = -\frac{1}{\beta^2} \quad \text{für} \quad x = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}$$

Daher:

$$s = 4 \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}} f(x)\,dx = -2\alpha\beta\gamma \int_{-\frac{1}{\alpha^2}}^{-\frac{1}{\beta^2}} \sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}} \cdot dv$$

$$= 2\alpha\beta\gamma \int_{-\frac{1}{\beta^2}}^{-\frac{1}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}} \cdot dv$$

Substituirt man hierin:

$$-v = \frac{1}{z}$$

$$dv = \frac{dz}{z^2},$$

so geht das Integral über in:

$$s = 2\alpha\beta\gamma \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}}$$

Um dieses Integral auf die Normalform zu reduciren, substituirt man:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2} = k^2; \qquad \frac{z-\beta^2}{z+\gamma^2} = k^2\sin^2\varphi$$

$$z = \frac{\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)+\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\varphi}{\alpha^2+\gamma^2-(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\varphi}$$

Alsdann ist:

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

und

$$2\alpha\beta\gamma \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}}$$

$$= \frac{4\alpha\beta\gamma}{\beta^2\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$-k^2\sin^2\varphi+1 : \frac{\gamma^2}{\beta^2}k^2\sin^2\varphi+1$$

$$= -\frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}}{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\sin^2\varphi}$$

Daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= -\frac{\beta^2}{\gamma^2} K + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma^2} \quad \Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\right)$$

Folglich:

$$2\alpha\beta\gamma \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}}$$

$$= 4\left\{-\frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} K + \frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\right)\right\}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist identisch mit dem in § 2. S. 143. für W gefundenen. Um nun den gesuchten Flächeninhalt der ursprünglich gegebenen sphärischen Curve zu erhalten, ist $4 . W$ zu subtrahiren; mithin erhält man auch auf diese Weise:

$$F = 2\pi - 4\,W.$$

§ 4. Berechnung eines numerischen Beispiels.

Der gegebene leuchtende Punkt habe die Coordinaten:

$$x = 6; \quad y = 9; \quad z = 15.$$

Das Ellipsoid aber besitze die Axen:

$$a = 2; \quad b = 5; \quad c = 8.$$

Alsdann ist zunächst die Gleichung des vom Punkte (6, 9, 15) an das Ellipsoid gelegten Tangentenkegels aufzustellen.

Die Form dieser Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

wo α, β, γ die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\frac{36}{4+\lambda} + \frac{81}{25+\lambda} + \frac{225}{64+\lambda} - 1 = 0$$

sind. Unsere nächste Aufgabe ist mithin, diese Gleichung aufzulösen

Wenn wir dieselbe nach Potenzen von λ ordnen, so lautet sie:

$$\lambda^3 - 249\,\lambda^2 - 13281\,\lambda - 94436 = 0$$

Substituirt man hierin:

$$\lambda = u + 83,$$

so geht dieselbe über in:

$$u^3 - 33948\,u - 2340333 = 0$$

Setzt man nun den Coefficienten von $u = p$ und das absolute Glied $= q$, so sind nach der Theorie der Gleichungen die durch die Gleichung $u^3 - pu - q = 0$ bestimmten Werte von u:

$$u_1 = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\alpha;$$

$$u_2 = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60-\alpha)$$

$$u_3 = \,2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60+\alpha),$$

wobei

$$\sin 3\alpha = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}$$

ist. Mithin:

$$\sin 3\alpha = \frac{7020999}{67896\sqrt{11316}}$$

$$\begin{aligned}
\log 11316 &= 4{,}0536929 \\
\log \sqrt{11316} &= 2{,}0268465 \\
\log 67896 &= 4{,}8318442 \\
\hline
\log (67896 . \sqrt{11316}) &= 6{,}8586907 \\
\log (7020999) &= 6{,}8463989 \\
\hline
\log \sin 3\alpha &= 9{,}9877082 \\
3\alpha &= 76^0\ 25'\ 57'' \\
\alpha &= 25^0\ 28'\ 39''
\end{aligned}$$

Nun:

$$u_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\alpha.$$

Dabei:

$$\begin{aligned}
\log \sin\alpha &= 9{,}6336266 \\
\log \sqrt{\frac{p}{3}} &= 2{,}0268465 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\hline
\log \left(\sin\alpha \sqrt{\frac{p}{3}} . 2\right) &= 1{,}9615031 \\
\text{num.} &= 91{,}5173
\end{aligned}$$

$$u_1 = -91{,}5173; \quad \lambda_1 = -8{,}5173$$

$$u_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60-\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\log \sin (60-\alpha) &= 9{,}7533761 \\
\log \sqrt{\frac{p}{3}} &= 2{,}0268465 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\hline
\log \left(2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60-\alpha)\right) &= 2{,}7812526 \\
\text{num.} &= 120{,}5737
\end{aligned}$$

$$u_2 = -120{,}5737; \quad \lambda_2 = -37{,}5737$$

$$u_3 = \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60+\alpha)$$

$$\log \sin(60+\alpha) = 9{,}9986457$$
$$\log \sqrt{\frac{p}{3}} = 2{,}0268465$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log\left(2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60+\alpha)\right) = 2{,}3265222$$

$$u_3 = 212{,}0910; \quad \lambda_3 = 295{,}0910$$

Nach unseren früheren Bestimmungen (cf. S. 151) ist nun:

$$\alpha^2 = 37{,}5737$$
$$\beta^2 = 8{,}5173$$
$$\gamma^2 = 295{,}0910$$

Aus diesen Grössen berechnen sich k und die damit zusammenhängenden Modulen.

Es ist nämlich:

$$k^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} = \frac{29{,}0564}{332{,}6647}$$

$$\log 29{,}0564 = 1{,}4632418$$
$$\log 332{,}6647 = 2{,}5220067$$

$$\log k^2 = 8{,}9412351$$
$$\log k = 9{,}4706176$$

Setzt man $k = \sin\alpha$, so ist also auch:

$$\log\sin\alpha = 9{,}4706176$$
$$\alpha = 17^0\ 11'\ 24''$$

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen können wir zur näheren Bestimmung der Grösse W übergehen.

$$W = \frac{\nu'}{2}\cdot l'\vartheta(a', \nu') + a'$$

$$a' = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(\alpha', k')}{K'}$$

Dabei ist α' durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\gamma}{\beta} = \sqrt{\frac{295{,}0910}{8{,}5173}} \quad \text{(cf. S. 142).}$$

$$\log\ 295{,}0910 = 2{,}4699560$$
$$\log\ 8{,}5173 = 0{,}9303019$$

$$\log \operatorname{tg}^2\alpha' = 1{,}5396541$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha' = 0{,}7698270$$
$$\alpha' = 80^0\ 21'\ 28'', 66$$

Mithin haben wir für die Bestimmung von α'

1) Das unvollständige Integral $\int_0^{80^0\,21'\,28'',\,66} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$

2) Das vollständige Integral K' zu berechnen.

ad 1). Für die Berechnung von $F(\alpha', k')$, welches wir mit u' bezeichnen wollen, benutzen wir, da die obere Grenze des Integrals zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, die Formel:

$$u' = \frac{\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\xi}{2\log e \cos \frac{\beta^4}{2}}$$

und

$$\log u' = \log(\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\xi) + 0{,}06118570 - 4\log\cos\frac{\beta}{2}$$

dabei ist

$$k' = \sin a = \cos\alpha; \quad \alpha = 17^0\ 11'\ 24'';$$

$$\sqrt{\sin a} = \sqrt{\cos\alpha} = \cos\beta$$

$$\sin a . \sin\varphi = \sin\gamma; \quad \varphi = 80^0\ 21'\ 28'', 66$$

$$\frac{\cos\beta . \cos\varphi}{\cos\gamma} = \operatorname{tg}\delta$$

$$\sin\xi = \operatorname{tg}\frac{\beta^2}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right)$$

(cf. Schellbach, Lehre d. ell. Int. § 49.)

$$\log\cos\beta = \log\sqrt{\sin a} = 9{,}9900767;$$

$$\beta = 12^0\ 12'\ 5'',_1 7$$

$$\frac{\beta}{2} = 6^0\ 6'\ 2'', 85$$

$$\begin{aligned}
\log\sin a &= 9{,}9801534\\
\log\sin\varphi &= 9{,}9938195\\
\hline
\log\sin\gamma &= 9{,}9739729; \quad \gamma = 70^0\ 21'\ 40'',82\\
\log\cos\beta &= 9{,}9900767\\
\log\cos\varphi &= 9{,}2239942\\
-\log\cos\gamma &= 0{,}4735480\\
\hline
\log\operatorname{tg}\delta &= 9{,}6876189; \quad \delta = 25^0\ 58'\ 14'',71\\
\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) &= 0{,}4623768\\
2\log\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= 8{,}0578184\\
\hline
\log\sin\xi &= 8{,}5201952
\end{aligned}$$

Da $\log\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}$ positiv sein muss, so liegt ξ im 2ten Quadranten, daher:

$$\xi = 178^0\ 6'\ 5'',60$$

$$\frac{\xi}{2} = 89^0\ 3'\ 2'',80$$

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\frac{\xi}{2} &= 1{,}7807154\\
\log\left(\log\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right) &= 0{,}2505945\\
-4\log\cos\frac{\beta}{2} &= -9{,}9901336\\
\hline
& \ 0{,}2604609\\
& \ 0{,}0611857\\
\hline
\log u' &= 0{,}3216466\\
u' &= 2{,}097232
\end{aligned}$$

ad 2). $$K' = \frac{ln\,2 + 2\,ln\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta^4}{2}}$$

$$K' = \frac{0{,}1501515 + \log\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\log e\,.\cos\frac{\beta^4}{2}}$$

$$\log K' = \log\left(0{,}1501515 + \log\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) + 0{,}36221569 - 4\log\cos\frac{\beta}{2}$$

(cf. Schellbach, L. d. ell. Integr. § 49.).

Dabei

$$\sqrt{\sin a} = \cos\beta.$$

Mithin:

$$\frac{\beta}{2} = 6^0\,6'\,2'',85$$

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} & = 0{,}9710908 \\ & \ 0{,}1505150 \\ \hline a & = 1{,}1216058 \\ \log a & = 0{,}0498399 \\ & \ 0{,}3622157 \\ -4\log\cos\frac{\beta}{2} & = 0{,}0098664 \\ \hline \log K' & = 0{,}4219220 \\ K' & = 2{,}641934 \end{array}$$

Nun:

$$a' = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{u'}{K'}$$

$$\begin{array}{rl} \log\frac{\pi}{2} & = 0{,}1961199 \\ \log u' & = 0{,}3216466 \\ \log K' & = 0{,}4219220 \\ \hline \log a' & = 0{,}0958245 \\ a' & = 1{,}246937 \end{array}$$

Es erübrigt uns nun noch $\frac{\nu'}{2}\, l'\vartheta(a', \nu')$ zu berechnen.

$$l'\vartheta(a', \nu') = \frac{\vartheta'(a', \nu')}{\vartheta(a', \nu')}$$

$$\vartheta(a', \nu') = 1 - 2q'\cos 2a' + 2q'^4\cos 4a' - 2q'^9\cos 6a' + \ldots$$

$$\vartheta'(a', \nu') = 4\{q'\sin 2a' - 2q'^4\sin 4a' + 3q'^9\sin 6a' \ldots$$

$$\frac{\vartheta'(a', \nu')}{\vartheta(a', \nu')} = 4.\frac{q'\sin 2a' - 2q'^4\sin 4a' + 3q'^9\sin 6a' - \ldots}{1 - 2q'\cos 2a' + 2q'^4\cos 4a' - 2q'^9\cos 6a' + \ldots}$$

Daher:

$$\frac{\nu'}{2} l' \vartheta(a', \nu') = 2\nu' V,$$

wo

$$V = \frac{q' \sin 2a' - 2q'^4 \sin 4a' + 3q'^9 \sin 6a' - \ldots}{1 - 2q' \cos 2a' + 2q'^4 \cos 4a' - 2q'^9 \cos 6a' + \ldots}$$

Wir werden zunächst q' und daraus ν' berechnen und dann a' in Graden ausdrücken.

$$q' = \lambda' + 2\lambda'^5 + 15\lambda'^9 + \ldots$$

$$\lambda' = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'^2}{2}$$

$$\cos \beta' = \sqrt{\cos a} = \sqrt{\sin \alpha} = \sqrt{\sin 17^0\ 11'\ 24''}$$

$$\log \sin 17^0\ 11'\ 24'' = 9{,}4706182$$
$$\log \cos \beta' = 9{,}7353091$$

$$\beta' = 57^0\ \ 4'\ 6'',31$$

$$\frac{\beta'}{2} = 28^0\ 32'\ 3'',15$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = 9{,}7353826$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta'^2}{2} = 9{,}4707652$$
$$\log \tfrac{1}{2} = 9{,}6989700$$

$$\log \lambda' = 9{,}1697352$$
$$\lambda' = 0{,}147806$$

$$\log \lambda'^5 = 5{,}8486750 - 10$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log(2\lambda'^5) = 61497050 - 10$$
$$2\lambda'^5 = 0{,}0001412$$
$$\log \lambda'^9 = 2{,}5276168 - 10$$
$$\log 15 = 1{,}1760913$$

$$\log(15\lambda'^9) = 3{,}7037081 - 10$$
$$\text{num.} = 0{,}0000005$$

Daher

$$q' = 0{,}1478206 + 0{,}0001412 + 0{,}0000005 = 0{,}1479623$$

$$\log q' = 9{,}1701511$$
$$\nu' = -ln\, q'$$
$$ln\, q' = \log q \,.\, 2{,}3025851$$
$$\nu' = -9{,}1701511 \,.\, 2{,}3025851 = 0{,}8298489 \,.\, 2{,}3025851$$

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}8298489 & = 9{,}9189991 \\ \log 2{,}3025851 & = 0{,}3622156 \\ \hline \log \nu' & = 0{,}2812147 \\ \quad \nu' & = 1{,}910798 \end{array}$$

Um a' in Graden auszudrücken, ist zu bemerken, dass

$$a' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u'}{K'} \quad \text{ist.}$$

Da nun $\pi = 180^0$ ist, so

$$a' = 90^0 \,.\, \frac{u'}{K'}$$

$$\begin{array}{ll} \log 90 & = 1{,}9542425 \\ \log u' & = 0{,}3216466 \\ \log K' & = 0{,}4219220 \\ \hline \log\left(\frac{90u'}{K'}\right) & = 1{,}8539671 \end{array}$$

mithin:

$$a' = 71^0\, 26'\, 39'',\, 19$$

Wenn wir nun zur Berechnung von V übergehen, so brauchen sowohl im Zähler wie im Nenner die Glieder von demjenigen an nicht mehr berücksichtigt werden, welches q'^9 als Factor enthält.

$$\begin{array}{ll} \log q' & = 9{,}1701511 \\ \log \sin 2a' & = 9{,}7805828 \\ \hline \log(q' \sin 2a') & = 8{,}9507339; \quad \underline{\underline{\text{num.} = 0{,}08927584}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log 2q'^4 & = 6{,}9816374 \\ \log \sin 4a' & = 9{,}9833230 \end{array} \Bigg\{ \begin{array}{l} \text{Das Product } 2q'.\sin 4a' \text{ ist negativ,} \\ \text{weil } 4a' \text{ im 4. Quadranten liegt.} \end{array}$$

$$\log(2q'^4 . \sin 4a') = 6{,}9649604\,; \quad \underline{\underline{\text{num.} = -\,0{,}0009225}}$$

$$q' \sin 2a' - 2q'^4 \sin 4a' = 0{,}0901983$$

$$\left.\begin{array}{ll}\log 2q' & = 9{,}4711811 \\ \log\cos 2a' & = 9{,}9017102\end{array}\right\}$$ Das Product $2q'.\cos 2a'$ ist negativ, weil $2a'$ im zweiten Quadranten liegt.

$$\log(2q'\cos 2a') = 9{,}3728913\,; \quad \text{num.} = -\,0{,}2359889$$

$$\log 2q'^4 = 6{,}9816374$$
$$\log\cos 4a' = 9{,}4343802$$

$$\log(2q'^4\cos 4a') = 6{,}4160176\,; \quad \text{num.} = 0{,}0002607$$

$$1 - 2q'\cos 2a' + 2q'^4\cos 4a' = 1{,}2362496$$

Daher:

$$V = \frac{0{,}0901983}{1{,}2362496}$$

$$\log 0{,}0901983 = 8{,}9551983$$
$$\log 1{,}2362496 = 0{,}0921413$$

$$\log V = 8{,}8630570$$
$$\log \nu' = 0{,}2812147$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log\left\{\frac{\nu'}{2}\,l'\vartheta(a',\nu')\right\} = 9{,}4453017$$

$$\frac{\nu'}{2}\,l'\vartheta(a',\nu') = 0{,}2788058$$

Daher:

$$W = \frac{\nu'}{2} = l)\vartheta(a',\nu') + a'$$
$$= 0{,}2788058 + 1{,}246937$$
$$= 1{,}5257428$$

$$F = \quad 2\pi - 4W = 6{,}2831853$$
$$-\,6{,}1029712$$

$$F = \quad 0{,}1802141.$$

VIII.

Sur les équations fondamentales de la dynamique.

Par

Monsieur **Janaud**,
professeur à Saint-Quentin.

Parmi les hypothèses qui servent de fondement à la dynamique se trouve celle de la continuité dans la variation des forces. Nous nous proposons de rechercher comment les équations de la dynamique doivent être modifiées lorsqu' on laisse de coté cette hypothèse de la continuité des forces, en admettant tous les autres principes. Nous supposons que la notion de force et la mesure des forces aient été déduites de considérations de statique.

Cette recherche est justifiée par la considération suivante qui montre l'existence de nouvements ne pouvant être produits que par des forces discontinues dans tout intervalle. Supposons, en effet, sur une droite OX un mobile dont l'abscisse x est une fonction continue du temps admettant une dérivée première continue mais n'admettant de dérivée seconde pour aucune valeur de la variable; la force qui produit un pareil mouvement est nécessairement discontinue dans tout intervalle, ainsi qu'il résulte du § III.

I. Nous nous occupons d'abord du mouvement rectiligne. Soit un point matériel de masse égale à l'unité mobile sur une droite OX sous l'action d'une force F dirigée constamment suivant cette droite. On peut toujours imaginer que la force soit exprimée en fonction du temps

(1) $$F' = \varphi(t);$$

cette fonction $\varphi(t)$ est supposée quelconque, continue ou discontinue; mais, elle est assujettie à rester comprise entre des limites finies dans les intervalles de temps considérés.

Appelons vitesse à l'instant t la vitesse du mouvement uniforme que prendrait le mobile à cet instant si la force F cessait d'agir. Cette vitesse est une fonction continue du temps. En effet, soit v la vitesse à l'instant t, et soient A et a les limites finies entre lesquelles reste comprise la force F dans un intervalle de temps fini comprenant l'instant t. Désignons par $t + \Delta t$ un instant compris dans cet intervalle de temps et par $v + \Delta v$ la valeur de la vitesse à cet instant; on a, quel que soit Δt,

(2) $$A\Delta t > \Delta v > a\Delta t,$$

ce qui démontre la continuité de v. Cette équation (2) est évidente, car l'accroissement Δv est évidemment compris entre celui qui aurait lieu si la force restait constamment égale à sa limite supérieure A et celui qui aurait lieu si elle restait égale à la limite inférieure a.

II. Proposons-nous maintenant d'étudier la variation $v - v_0$ de la vitesse pendant l'intervalle de temps qui sépare deux instants t_0 et t. Intercalons, entre t_0 et t, $(n-1)$ valeurs $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, et posons pour abréger

$$t_1 - t_0 = \delta_1, \quad t_2 - t_1 = \delta_2, \quad \ldots, \quad t - t_{n-1} = \delta_n.$$

Nous formons ainsi n intervalles et nous désignons par M_i et m_i la limite maximum et la limite minimum de la fonction $\varphi(t)$ dans le $i^{\text{ème}}$ intervalle δ_i. (voir Mémoire sur les fonctions discontinues par M. Darboux, Annales de l'École Normale, 2° série, t. IV, p. 65). L'accroissement de vitesse dans l'intervalle δ_i est au plus égal à $M_i\delta_i$ et au moins à $m_i\delta_i$. Si donc l'on considère les deux sommes

(3) $$\begin{cases} M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \ldots M_n\delta_n \\ m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots m_n\delta_n, \end{cases}$$

l'accroissement $v - v_0$ de vitesse dans l'intervalle (t_0, t) est au plus égal à M et au moins à m. Cela posé, faisons croître n indéfiniment et tendre les intervalles δ_i vers zéro; les deux sommes M et m tendent vers des limites indépendantes de la façon dont les δ_i tendent vers zéro; en appelant ces deux limites $M(t_0, t)$ et $m(t_0, t)$, on aura

(4) $$M(t_0, t) \geqq v - v_0 \geqq m(t_0, t).$$

L'on obtient de cette manière deux limites entre lesquelles est compris l'accroissement de vitesse.

Mais il est un cas particulier remarquable où l'inégalité (4) détermine l'accroissement de vitesse; c'est le cas dans lequel les deux limites $M(t_0, t)$ et $m(t_0, t)$ sont égales. La fonction $\varphi(t)$ est alors susceptible d'intégration d'après la définition de Riemann (Mathematische Werke p. 225), et la valeur commune des deux limites est l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt$. On a donc dans ce cas

$$(5) \qquad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt.$$

Cette dernière formule s'applique toutes les fois que la fonction $\varphi(t)$ est susceptible d'intégration; elle s'applique en particulier lorsque $\varphi(t)$ est une fonction continue, ce qui est le cas supposé ordinairement en mécanique, et alors on déduit de (5) la formule habituelle

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(t).$$

Si l'on suppose la même force F exprimée en fonction de l'abscisse

$$F = \psi(x),$$

on formera par la méthode précédente deux limites qui dans tous les cas comprennent l'accroissement de demie-force vive $\frac{v^2 - v_0^2}{2}$ correspondant à un déplacement fini de x_0 à x. Et, on verra encore que, si la function $\psi(x)$ est susceptible d'intégration, l'on a

$$(6) \qquad \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx.$$

III. Supposons, inversement, que l'on connaisse la vitesse en fonction continue du temps

$$(7) \qquad v = f(t),$$

et que l'on veuille les expressions des forces capables de produire un pareil mouvement.

Si la fonction $f(t)$ admet une dérivée $\varphi(t)$ susceptible d'intégration, on pourra produire le mouvement considéré par une force égale à $\varphi(t)$, ainsi qu'il résulte de l'équation (5). Mais on obtiendra encore le même mouvement en changeant la valeur de la force pour un nombre limité de valeurs de t, ce qui ne change pas l'intégrale (5); et l'on pourra même, sans changer le mouvement, modifier la valeur de la force pour une infinité de valeurs de t de telle manière que la force devienne une fonction du temps non susceptible d'intégration. Cette dernière proposition résulte de l'exemple traité dans le § IV.

Si la fonction $f(t)$ n'admet pas de dérivée, la force qui produit le mouvement est une fonction du temps discontinue dans tout intervalle; car si elle était continue dans un certain intervalle, elle serait susceptible d'intégration, et d'après (5) elle serait la dérivée de la vitesse; ce qui est contre l'hypothèse.

IV. Soit $\lambda(t)$ une fonction d'une variable t qui possède la propriété d'être égale à 1 pour une valeur commensurable de la variable t et à 0 pour une valeur incommensurable. Supposons que l'on prenne pour expression de la force F en fonction du temps

$$F = \lambda(t)$$

et vvyons quel mouvement produira cette force. Nous désignons par v_0 la vitesse du mobile au temps $t_0 = 0$. Si, les deux limites désignées en général par $M(t, t_0)$ et $m(t, t_0)$ sont t et 0; et l'on a d'après (4)

$$t \geqq v - v_0 \geqq 0.$$

Nous allons montrer que $v - v_0 = 0$, c'est à dire que le mouvement est uniforme. Pour cela nous démontrons d'abord que le mouvement est uniformément varié.

La fonction $\varphi(t)$ admet pour période tout nombre commensurable; il en résulte que la vitesse croît à quantités égales en des intervalles de temps égaux, si petits qu'ils soient, commençant à des instants commensurables. On a donc pour toute valeur commensurable de t

$$v - v_0 = kt, \tag{8}$$

k étant une constante. Et l'on montre facilement en s'appuyant sur ce que v est une fonction continue du temps que cette formule (8) s'applique aussi aux valeurs incommensurables de t. Cela posé, il nous reste à faire voir que la constante k est nulle. Pour cela, considérons des intervalles de temps tous égaux à ϑ commençant à des instants $t_1, t_2 \ldots t_n$ étant tels qu' aucune des différences $t_i - t_j$ ne soit commensurable. Pendant chacun de ces intervalles l'accroissement de vitesse est $k\vartheta$; ce qui revient à dire que les forces

$$F_1 = \lambda(t_1 + t), \quad F_2 = \lambda(t_2 + t) \; \ldots \; F_n = \lambda(t_n + t)$$

agissant sur le mobile pendant que t varie de 0 à ϑ, lui impriment chacune une accroissement de vitesse $k\vartheta$. A cause de la condition imposée aux nombres t_i, lorsqu' un des nombres $t_i + t$ est commensurable, tous les autres sont incommensurables; et par suite, lorsqu' une des forces F_i est égale à 1 toutes les autres sont nulles. On a donc constamment

$$1 \geqq F_1 + F_2 + \ldots + F_n \tag{9}$$

Si l'on faisait agir une force égale à 1 pendant l'intervalle ϑ elle produirait un accroissement de vitesse ϑ; chacune des forces F_i produisant dans le même intervalle un accroissement $k\vartheta$, on conclut de l'inégalité (9)

$$\vartheta \geqq nk\vartheta;$$

mais n est aussi grand qu' on le veut; donc $k = 0$.

Ainsi, en résumé, l'action de la force $F = \lambda(t)$ sur un mobile est nulle; et il en est de même de toute force dont l'expression analytique est

$$\Phi(t) = a_1 \lambda(t_1 + t) + a_2 \lambda(t_2 + t) + \; \ldots \; a_n \lambda(t_n + t)$$

a_i et t_i étant des constantes. On peut donc ajouter, à une force qui produit un mouvement quelconque, une force telle que $\Phi(t)$, sans altérer le mouvement.

On conclut encore de ce qui précède que, lorsque les deux limites $M(t_0, t)$ et $m(t_0, t)$ sont distinctes, la connaissance de ces seules limites ne peut pas servir à déterminer l'accroissement $v - v_0$. En effet, en ajoutant à la force qui produit le mouvement une force telle que $\Phi(t)$, on ne change pas le mouvement, mais on peut déterminer les constantes a_i de telle façon que la limite supérieure devienne un nombre quelconque plus grand que $M(t_0, t)$, et la limite inférieure un nombre quelconque plus petit que $m(t_0, t)$.

V. L'on étend les considérations précédentes au mouvement curviligne en projetant le point mobile et les forces sur trois axes cordonnés..

IX.

Bewegung und Stabilität eines laufenden Rades.

Von

R. Hoppe.

Ein Rad, welches ohne Einwirkung äusserer Kräfte ausser seiner Schwere auf einer horizontalen Ebene rollt, sei, um nur den einfachsten Fall zu Grunde zu legen, mit Absehen von seinen axialen Dimensionen, als eine Kreisfläche betrachtet, deren Dichte nur radial variirt, so dass der Mittelpunkt Schwerpunkt, und das auf die normale Axe bezügliche Trägheitsmoment doppelt so gross als für jede diametrale Axe ist. Bezeichnet c den Radius, m die Masse, c^2mn das Trägheitsmoment für die diametrale Axe, so ist stets

$$0 < n < \tfrac{1}{2}$$

indem die Grenzen den extremen Fällen entsprechen, wo alle Masse im Mittelpunkt, und wo sie auf der Peripherie liegt. Bei proportionaler Variation der Dichte mit dem Radius von α bis β wird

$$n = \frac{3}{20}\,\frac{\alpha+4\beta}{\alpha+2\beta}$$

mithin bei constanter Dichte

$$n = \tfrac{1}{4}$$

§. 1. Differentialgleichungen der Bewegung.

Es seien die Axen der xyz im Raume fest, die der xy in der Grundebene, die der z vertical nach oben. Die xyz bestimmen die Lage des Masseneelements ∂m, die $x_0 y_0$ die Lage des momentanen Berührungspunkts.

Nimmt man die momentane horizontale Tangente des Rades zur Axe der x_1, die y_1 darauf senkrecht horizontal, die z_1 vertical, und bezeichnet μ den Winkel zwischen der x und x_1 Axe, so lauten die Relationen:

$$x = x_0 + x_1 \cos\mu - y_1 \sin\mu$$
$$y = y_0 + x_1 \sin\mu + y_1 \cos\mu$$
$$z = z_1$$

Das Axensystem der $x_1 y_1 z_1$, um die Radtangente gedreht, bis die $x_1 z_1$ Ebene in die Radebene fällt, gehe in das Axensystem der $x_2 y_2 z_2$ über, und ν sei der Drehungswinkel, mithin $R - \nu$ die Neigung des Rades gegen die Grundebene. Dann lauten die Relationen:

$$x_1 = x_2$$
$$y_1 = y_2 \cos\nu - z_2 \sin\nu$$
$$z_1 = y_2 \sin\nu + z_2 \cos\nu$$

Bezeichnen ferner $r\varphi$ die Polarcoordinaten von ∂m in der Radebene, anfangend im Mittelpunkt und fest am Rade; $-\omega$ in gleichem Drehungssinne den Centriwinkel vom Radius des Berührungspunkts zum Anfang der φ, so dass $c\omega$ den vom Berührungspunkt auf der Grundebene gezeichneten Bogen, und $\varphi - \omega$ den Winkel von der negativen z_2 Axe zum Radiusvector von ∂m darstellt, so ist

$$x_2 = r\sin(\varphi - \omega); \quad y_2 = 0$$
$$z_2 = c - r\cos(\varphi - \omega)$$

Nach Einsetzung dieser Werte erhält man:

$$x = x_0 + r\sin(\varphi - \omega)\cos\mu + [c - r\cos(\varphi - \omega)]\sin\nu\sin\mu$$
$$y = y_0 + r\sin(\varphi - \omega)\sin\mu - [c - r\cos(\varphi - \omega)]\sin\nu\cos\mu$$
$$z = [c - r\cos(\varphi - \omega)]\cos\nu$$

Wendet man diese für beliebigen Punkt in der Radebene geltenden Gleichungen auf den momentanen und consecutiven Berührungspunkt an, so ist für erstern $r = c$; $\varphi - \omega = 0$; $x = x_0$; $y = y_0$; $z = 0$; für letztern $x = x_0 + \partial x_0$; $y = y_0 + \partial y_0$; während $\varphi - \omega$ in $\partial\omega$ übergeht. Folglich hat man:

$$\partial x_0 = c\,\partial\omega\cos\mu; \quad \partial y_0 = c\,\partial\omega\sin\mu \qquad (1)$$

und die Gleichungen lauten nun:

$$x = c\int\partial\omega\cos\mu + r\sin(\varphi - \omega)\cos\mu + [c - r\cos(\varphi - \omega)]\sin\nu\sin\mu \qquad (2)$$
$$y = c\int\partial\omega\sin\mu + r\sin(\varphi - \omega)\sin\mu - [c - r\cos(\varphi - \omega)]\sin\nu\cos\mu$$
$$z = [c - r\cos(\varphi - \omega)]\cos\nu$$

Zur Erläuterung ist hierbei zu bemerken, dass die Incremente von x_0, y_0 zwar nicht direct durch ∂x_0, ∂y_0 dargestellt sind. In beiden ist einesteils der Kreisbogen statt seines Sinus gesetzt, andernteils die seitliche Verschiebung vernachlässigt, welche der consecutive Punkt bei seiner Niedersenkung erleiden kann. Doch differiren sie augenfällig nur in höherer Ordnung von ∂x_0, ∂y_0.

Hiermit sind alle Variabeln auf die 3 Functionen der Zeit ω, μ, ν und die 2 bloss die Lage des Elements bestimmenden Grössen r, φ zurückgeführt. Jetzt sind die Ausdrücke von x, y, z in die Alembert'sche Gleichung

$$\int\{x''\delta x+y''\delta y+(z''+g)\delta z\}\partial m=0 \tag{3}$$

wo die Accente die Differentiation nach der Zeit bezeichnen, einzusetzen. Die Rechnung kürzt sich in doppelter Weise.

Die 4 ersten Grössen stellen sich in der Form dar:

$$\delta x=\delta X\cos\mu-\delta Y\sin\mu;\qquad x''=X_1\cos\mu-Y_1\sin\mu$$
$$\delta y=\delta X\sin\mu+\delta Y\cos\mu;\qquad y''=X_1\sin\mu+Y_1\cos\mu$$

so dass Gl. (3) übergeht in

$$\int\{X_1\delta X+Y_1\delta Y+(z''+g)\delta z\}\partial m=0 \tag{4}$$

Sei nun

$$N=c-r\cos(\varphi-\omega);\quad N'=N_1\omega';\quad N_1'=N_2\omega'$$

mithin

$$N_1=-r\sin(\varphi-\omega);\quad N_2=r\cos(\varphi-\omega)$$

dann ist vermöge der Eigenschaften des Schwerpunkts und der Hauptträgheitsaxen

$$\int NN_1\partial m=0;\quad \int N_1N_2\partial m=0;\quad \int N_1\partial m=0 \tag{5}$$

Wir teilen daher die Ausdrücke, jenachdem die Terme die Factoren N, N_2 oder den Factor N_1 haben. Die Differentiation der Gl. (2) giebt:

$$\left.\begin{aligned}\partial X&=N(\partial\omega+\sin\nu\,\partial\mu)\\ \partial Y&=-N\partial\nu\cos\nu-N_1(\partial\omega\sin\nu+\partial\mu)\\ \partial z&=-N\partial\nu\sin\nu+N_1\partial\omega\cos\nu\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

anzuwenden sowol auf die Verrückungen als auch auf die actuelle Bewegung; in letzterm Sinne geht durch zweite Differentiation daraus hervor:

$$\begin{aligned}X_1=X''-Y'\mu'=N(\omega''+\mu''\sin\nu+2\mu'\nu'\cos\nu)\\ +N_1(\omega'^2+\mu'^2+2\omega'\mu'\sin\nu)\end{aligned}$$

$$Y_1 = Y'' + X'\mu' = N\{(\mu'^2 + \nu'^2)\sin\nu + \omega'\mu' - \nu''\cos\nu\}$$
$$- N_2(\omega'^2\sin\nu + \omega'\mu') - N_1(\mu'' + \omega''\sin\nu + 2\omega'\nu'\cos\nu)$$
$$z'' = - N(\nu''\sin\nu + \nu'^2\cos\nu) + N_2\omega'^2\cos\nu + N_1(\omega''\cos\nu - 2\omega'\nu'\sin\nu)$$

Nach Einführung dieser Werte wird Gl. (4):

$$\begin{aligned}
&(\omega'' + \mu''\sin\nu + 2\mu'\nu'\cos\nu)(\delta\omega + \delta\mu\sin\nu)\int N^2\partial m \\
&-\{(\mu'^2 + \nu'^2)\sin\nu + \omega'\mu' - \nu''\cos\nu\}\delta\nu\cos\nu\int N^2\partial m \\
&+(\omega'^2\sin\nu + \omega'\mu')\delta\nu\cos\nu\int NN_2\partial m \\
&+(\mu'' + \omega''\sin\nu + 2\omega'\nu'\cos\nu)(\delta\omega\sin\nu + \delta\mu)\int N_1^2\partial m \\
&+(\nu''\sin\nu + \nu'^2\cos\nu)\delta\nu\sin\nu\int N^2\partial m \\
&-\omega'^2\cos\nu\,.\,\delta\nu\sin\nu\int NN_2\partial m \\
&+(\omega''\cos\nu - 2\omega'\nu'\sin\nu)\delta\omega\cos\nu\int N_1^2\partial m \\
&-g\,\delta\nu\sin\nu\int N\partial m = 0
\end{aligned}$$

und zwar hat man:

$$\left.\begin{aligned}
&\int N^2\partial m = c^2m(1+n) \\
&-\int NN_2\partial m = \int N_1^2\partial m = c^2mn
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Die Coefficienten der unabhängigen Variationen $\delta\omega$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ sind jetzt nach Division durch c^2m:

$$(1+2n)(\omega'' + \mu''\sin\nu) + 2(1+n)\mu'\nu'\cos\nu = 0$$

$$(1+2n)\omega''\sin\nu + [n + (1+n)\sin^2\nu]\mu'' + 2[n\omega' + (1+n)\mu'\sin\nu]\nu'\cos\nu = 0$$

$$(1+n)(\nu'' - \mu'^2\sin\nu\cos\nu) - (1+2n)\omega'\mu'\cos\nu - \frac{g}{c}\sin\nu = 0 \qquad (8)$$

Von diesen Gleichungen ist ein Integral bekannt, die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\int(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2gz)\partial m = \text{const.}$$

oder:

$$\int(X'^2 + Y'^2 + z'^2 + 2gz)\partial m = \text{const.}$$

oder nach den Formeln (6) mit Berücksichtigung der Werte (5):

$$\int\{N^2[(\omega' + \mu'\sin\nu)^2 + \nu'^2] + N_1^2(\omega'^2 + \mu'^2 + 2\omega'\mu'\sin\nu) + 2gz\}\partial m = \text{const.}$$

folglich nach (7): (9)

$$(1+2n)\omega'^2 + [n + (1+n)\sin^2\nu]\mu'^2 + (1+n)\nu'^2 + 2n\omega'\mu'\sin\nu = \frac{a - 2g\cos\nu}{c}$$

Durch Elimination einzeln von μ'' und ω'' erhält man statt der 2 ersten Differentialgleichungen die 2 einfachern:

$$(1+2n)(\omega''\cos\nu - 2\omega'\nu'\sin\nu) + 2(1+n)\mu'\nu'\cos^2\nu = 0 \qquad (10)$$

$$\mu''\cos\nu + 2\omega'\nu' = 0 \qquad (11)$$

Zu fernerer Vereinfachung sei

$$\omega' = \sigma; \quad \mu' = \pi$$
$$\frac{1+n}{1+2n} = p; \quad p\nu'^2 = \tau \tag{12}$$

woraus:

$$n = \frac{1-p}{2p-1}; \quad 1+n = \frac{p}{2p-1}; \quad 1+2n = \frac{1}{2p-1}$$

Dann werden die 4 erhaltenen Gleichungen (10) (11) (8) (9):

$$\sigma' \cos\nu - 2\sigma\nu' \sin\nu + 2p\pi\nu' \cos^2\nu = 0 \tag{13}$$
$$\pi' \cos\nu + 2\sigma\nu' = 0 \tag{14}$$
$$\frac{\tau'}{2\nu'} = p\pi^2 \sin\nu\cos\nu + \pi\sigma\cos\nu + (2p-1)\frac{g}{c}\sin\nu \tag{15}$$
$$\tau + (\sigma + \pi\sin\nu)^2 + (1-p)\pi^2\cos^2\nu = (2p-1)\frac{a - 2g\cos\nu}{c} \tag{16}$$

§. 2. Integration.

Macht man ν zur unabhängigen Variabeln, so lauten die 2 ersten Gleichungen:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\cos\nu - 2\sigma\sin\nu + 2p\pi\cos^2\nu = 0 \tag{17}$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial\nu}\cos\nu + 2\sigma = 0 \tag{18}$$

woraus nach Elimination von σ:

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial\nu^2}\cos\nu - 3\frac{\partial\pi}{\partial\nu}\sin\nu - 4p\pi\cos\nu = 0$$

Hierin setzen wir

$$\sin\nu = \varepsilon$$

dann kommt:

$$(1-\varepsilon^2)\frac{\partial^2\pi}{\partial\varepsilon^2} - 4\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial\varepsilon} - 4p\pi = 0 \tag{19}$$

eine Gleichung von der Form derjenigen, welcher die Gauss'sche Function

$$F(x, y, z, v) = \sum_{k=0}^{k=\infty} v^k \prod_{h=0}^{h=k-1} \frac{(x+h)(y+h)}{(h+1)(z+h)}$$

genügt, und welche lautet:

$$v(v-1)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + [(x+y+1)v - z]\frac{\partial F}{\partial v} + xyF = 0 \tag{20}$$

Mit ihr lässt sie sich durch 3 verschiedene Substitutionen identificiren. Sei erstlich

$$v = \frac{1 \pm \varepsilon}{2}$$

dann ist zu setzen

$$x + y = 3; \quad z = 2; \quad xy = 4p$$

woraus:

$$(x+h)(y+h) = h^2 + 3h + 4p$$

und man hat die 2 Speciallösungen:

$$\pi = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{1 \pm \varepsilon}{2}\right)^k \prod_{h=0}^{h=k-1} \frac{h^2 + 3h + 4p}{(h+1)(h+2)} \tag{21}$$

Die Convergenz der Reihe steht ausser Zweifel, da $\varepsilon^2 < 1$ ist. Dass ferner beide Lösungen unabhängig sind, ist gleichfalls deutlich; denn sollten sie identisch sein, so müssten die Coefficienten der ungeraden Potenzen von ε verschwinden. Diese bestehen aber (für oberes Zeichen) aus lauter positiven Termen. Statt ihrer wollen wir ihre halbe Summe und halbe Differenz einführen und das vollständige Integral schreiben:

$$\pi = A\pi_1 + B\pi_2$$

$$\pi_1 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(1+\varepsilon)^k + (1-\varepsilon)^k}{k!(k+1)!2^{k+1}} \prod_{h=0}^{h=k-1} (h^2 + 3h + 4p)$$

$$\pi_2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(1+\varepsilon)^k - (1-\varepsilon)^k}{k!(k+1)!2^{k+1}} \prod_{h=0}^{h=k-1} (h^2 + 3h + 4p)$$

Nach Gl. (18) ist nun

$$\sigma = -\frac{1-\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} = A\sigma_1 + B\sigma_2 \tag{22}$$

$$\sigma_1 = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(1+\varepsilon)^{k-1} - (1-\varepsilon)^{k-1}}{(k-1)!(k+1)!2^{k+2}} \prod_{h=0}^{h=k-1} (h^2 + 3h + 4p)$$

$$\sigma_2 = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(1+\varepsilon)^{k-1} + (1-\varepsilon)^{k-1}}{(k-1)!(k+1)!2^{k+2}} \prod_{h=0}^{h=k-1} (h^2 + 3h + 4p)$$

Zur Bestimmung von A und B müssen die Werte von π und σ für einen Zeitpunkt gegeben sein. Setzt man für $\varepsilon = 0$

$$\pi = \pi_0, \quad \sigma = \sigma_0$$

so erhält man:

$$\pi_0 = A \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!(k+1)!2^k} \prod_{h=0}^{h=k-1} (h^2 + 3h + 4p)$$

$$\sigma_0 = -B \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(k-1)!(k+1)!2^{k+1}} \prod_{h=0}^{h=k-1} (h^2 + 3h + 4p)$$

Eine dritte Substitution ist

$$v = \varepsilon^2$$

Gl. (20) geht dabei über in

$$(1-\varepsilon^2)\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + \left[\frac{2z-1}{2} - (2x+2y+1)\varepsilon\right]\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - 4xyF = 0 \qquad (23)$$

und wird identisch mit Gl. (19) für

$$x+y = \tfrac{3}{2}; \quad xy = p; \quad z = \tfrac{1}{2}; \quad F = \pi$$

woraus:

$$(x+h)(y+h) = h\frac{2h+3}{2} + p$$

Die so erhaltene Speciallösung kann, da sie nur gerade Potenzen von ε enthält, bloss bis auf einen constanten Factor identisch mit π_1 sein. Dieser bestimmt sich dadurch, dass, für $\varepsilon = 0$, $A\pi = \pi_0$ sein muss. Man hat also:

$$A\pi_1 = \pi_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2^k \varepsilon^{2k}}{(2k)!} \prod_{h=0}^{h=k-1} [h(2h+3)+2p]$$

Eine neue Lösung, welche π_2 darstellt, findet man auf folgende Weise. Gl. (23) differentiirt giebt:

$$(1-\varepsilon)^2\frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} + \left[\frac{2z-1}{\varepsilon} - (2x+2y+3)\varepsilon\right]\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - \left[\frac{2z-1}{\varepsilon^2} + (2x+1)(2y+1)\right]\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 0$$

Die derivirte wird identisch mit (19) für

$$x+y = \tfrac{1}{2}; \quad xy = p - \tfrac{1}{2}; \quad z = \tfrac{1}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \pi$$

woraus:

$$(x+h)(y+h) = (h+1)\frac{2h-1}{2} + p$$

daher wird

$$F = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2^k \varepsilon^{2k}}{(2k)!} \prod_{h=0}^{h=k-1} [(h+1)(2h-1)+2p] \qquad (24)$$

Der entsprechende Wert von π enthält nur ungerade Potenzen von ε, stellt also bis auf einen constanten Factor π_2 dar. Zur Bestimmung desselben hat man für $\varepsilon = 0$:

$$-2\sigma = \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} = C\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} = 2(2p-1)C$$

woraus:

$$C = -\frac{\sigma_0}{2p-1}$$

Differentiirt man Gl. (24), so wird $2p-1$ gemeinsamer Factor der Reihe, hebt sich also nach Multiplication mit C. Setzt man noch $k+1$ für k und $h+1$ für h, so lautet das vollständige Integral:

$$\pi = \pi_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2^k \varepsilon^{2k}}{(2k)!} \prod_{h=0}^{h=k-1} [h(2h+3)+2p]$$

$$- \sigma_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2^{k+1} \varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{h=0}^{h=k-1} [(h+2)(2h+1)+2p] \tag{25}$$

Nach Gl. (22) geht daraus hervor:

$$\sigma = \sigma_0 \left\{1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k-1+2p}{(2k)!} 2^k \varepsilon^{2k} \prod_{h=0}^{h=k-2} [(h+2)(2h+1)+2p]\right\}$$

$$- \pi_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{k+p}{(2k+1)!} 2^{k+1} \varepsilon^{2k+1} \prod_{h=0}^{h=k-1} [h(2h+3)+2p] \tag{26}$$

Nachdem π und σ bekannt sind, giebt Gl. (16) den Wert von τ, dann Gl. (12) den Wert:

$$\partial t = \partial \nu \sqrt{\frac{p}{\tau}} = \partial \varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}} \tag{27}$$

woraus weiter die Werte

$$\partial \mu = \pi \partial \varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}}; \quad \partial \omega = \sigma \partial \varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}} \tag{28}$$

erhalten werden. Endlich ergiebt sich die Bahn des Berührungspunkts auf der Grundebene nach den Gl. (1), nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \partial x_0 &= c\sigma\partial\varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}} \cos \int \pi \partial \varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}} \\ \partial y_0 &= c\sigma\partial\varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}} \sin \int \pi \partial \varepsilon \sqrt{\frac{p}{\tau(1-\varepsilon^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

§. 3. Permanente Bewegung und Stabilität.

Bei der Integration ist vorausgesetzt, dass ε variirt; für constante Neigung des Rades haben die Resultate keine Bedeutung.

Ist nun $\partial\varepsilon$, mithin auch $\nu' = 0$, so werden nach Gl. (13) (14) π und σ constant, und nach Gl. (12) $\tau = 0$.

Ist, umgekehrt, π constant, so sind es auch ν und σ. Ein constantes $\sigma \gtrless 0$ würde für variables ν ergeben:

$$\pi = \frac{\sigma \sin \nu}{p \cos^2 \nu}; \quad \partial\pi = -\frac{\sigma \partial \nu}{\cos \nu}$$

was unvereinbar ist. Folglich kann von ν, π, σ jedes nur constant sein, wenn es alle sind.

In Gl. (15) ist die linke Seite $= p\nu'' = 0$; daher ergiebt sie zwischen den Constanten π, σ, ν die Relation:

$$\sigma = -\frac{\operatorname{tg} \nu}{\pi} \left\{ p\pi^2 \cos \nu + (2p-1)\frac{g}{c} \right\} \tag{30}$$

Die Klammer ist stets positiv. Denkt man, was freisteht, σ positiv, so muss π das entgegengesetzte Vorzeichen von ν haben und kann nur gemeinsam mit ν verschwinden.

Bedingung der permanenten Bewegung ist demnach, dass 1) das Rad beim Aufsetzen keinen die Neigung verändernden Anstoss erhält; 2) der tangentiale Anstoss genau mit der Geschwindigkeit (27) geschieht.

Bei constantem π, σ ist nun

$$\mu = \pi t; \quad \omega = \sigma t$$

(ein constanter Addend würde nur für die Lage des Axensystems Bedeutung haben). Die auf der Grundebene beschriebene Bahn hat dann nach (1) die Gleichungen:

$$x_0 = \frac{c\sigma}{\pi} \sin(\pi t); \quad y_0 = -\frac{c\sigma}{\pi} \cos(\pi t)$$

ist also ein Kreis vom Radius

$$-\frac{c\sigma}{\pi} = cp \sin \nu + g(2p-1)\frac{\operatorname{tg} \nu}{\pi^2}$$

der in einer Zeit $= \frac{4R}{\pi}$ durchlaufen wird. Aus Gl. (30) ist zu ersehen, dass σ ein Minimum wird, nämlich

$$\sigma = \sin \nu \sqrt{\frac{2p(2p-1)g}{c \cos \nu}} \quad \text{für} \quad \pi = \sqrt{\frac{(2p-1)g}{pc \cos \nu}} \tag{31}$$

bei kleinerer Laufgeschwindigkeit ist die Bewegung nie permanent.

Für den Fall $\nu = 0$ sagt die Formel nichts, als dass dann entweder π oder σ null sein muss. Dauernd verticale Stellung des Rades ist also nur möglich, wenn das Rad entweder in gerader Linie läuft oder auf einem Punkte sich wie ein Kreisel dreht.

Dies Ergebniss ist indes unzureichend. In der verticalen Stellung ist die Wirkung der Schwere null. Daher können bei Voraussetzung der Permanenz die Formeln nichts weiter ergeben als das selbstverständliche Gleichgewicht. In Wirklichkeit aber hat dieses keine Bedeutung, wenn es nicht stabil ist.

Zur Berechnung der Stabilität, welche bei jeder Neigung stattfinden kann, nehmen wir den Fall verticaler Stellung voraus und suchen die Bedingung einer oscillirenden Bewegung bei unendlich kleiner Ausweichung aus dieser Stellung.

Sei ε unendlich klein; dann ist bis auf 2. Potenz entwickelt nach (25) (26):

$$\pi = \pi_0(1+2p\varepsilon^2) - 2\sigma_0\varepsilon$$
$$\sigma = \sigma_0[1+(2p+1)\varepsilon^2] - 2\pi_0 p\varepsilon$$

Dies in Gl. (16) eingeführt giebt:

$$\tau + \pi_0^2(1-p) + \sigma_0^2 + 2\pi_0\sigma_0(1-4p+2p^2)\varepsilon + (\pi_0^2+2\sigma_0^2)p\varepsilon^2 = (2p-1)\frac{g}{c}\varepsilon^2 + \text{const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, sei τ_0 der Wert von τ für $\varepsilon = 0$. Dann wird

$$\tau = \tau_0 - 2\pi_0\sigma_0(1-4p+2p^2)\varepsilon - \left[(\pi_0^2+2\sigma_0^2)p - (2p-1)\frac{g}{c}\right]\varepsilon^2$$

Setzt man

$$\alpha^2 = \tau_0 + (\pi_0^2+2\sigma_0^2)p - (2p-1)\frac{g}{c} \tag{32}$$
$$\alpha\beta = \pi_0(1-4p+2p^2)$$

so hat man:

$$\tau(1-\varepsilon^2) = \tau_0 + \beta^2 - (\alpha\varepsilon+\beta)^2$$

und Gl. (27) giebt nach Integration:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\tau_0+\beta^2}\sin\frac{\alpha t}{\sqrt{p}} - \beta}{\alpha}$$

Bedingung dieser Periodicität ist erstens, dass α reell, also

$$\tau_0 + (\pi_0^2+2\sigma_0^2)p > (2p-1)\frac{g}{c} \tag{33}$$

ist. Zweitens muss, weil ε unendlich klein vorausgesetzt, die Amplitude der Oscillation

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\tau_0+\beta^2}$$

unendlich klein sein, was wieder nur möglich, wenn τ_0 und β unendlich klein sind. Letzteres erfordert, dass π_0 oder σ_0 unendlich klein ist. Jenachdem es aber π_0 oder σ_0 ist, muss σ_0 oder π_0 gross genug sein um die Bedingung (33) zu erfüllen. So gelangen wir wieder auf dieselbe Scheidung zweier Fälle, zwischen denen kein Uebergang möglich ist, wie sie sich für $\varepsilon = 0$ gezeigt haben, die Fälle eines gerade laufenden und eines rotirenden Rades.

Lässt man jetzt π_0 und τ_0 verschwinden, so bleibt als Bedingung der Stabilität in verticaler Stellung übrig:

$$\sigma_0 > \sqrt{\frac{(2p-1)g}{2pc}}$$

Für kleinere Laufgeschwindigkeit wird das Rad anfangen sich zu neigen.

Für Rotation auf einem Punkte ($\sigma_0 = 0$) wird die Bedingung der Stabilität:

$$\pi_0 > \sqrt{\frac{(2p-1)g}{pc}}$$

Die Oscillationsdauer bei unendlich kleiner Gleichgewichtsstörung ist

$$= \frac{4R\sqrt{p}}{\alpha}$$

d. i. beim gerade laufenden Rade

$$= \frac{4R}{\sqrt{2\sigma_0^2 - \frac{2p-1}{p}\frac{g}{c}}}$$

beim rotirenden

$$= \frac{4R}{\sqrt{\pi_0^2 - \frac{2p-1}{p}\frac{g}{c}}}$$

Sie verlängert sich ins unendliche, wenn das Rad durch Friction ermattet. Je grösser die Geschwindigkeit, desto näher ist dieser die Oscillationsdauer umgekehrt proportional.

Bei permanenter Bewegung in endlicher Neigung ε kann gleichfalls nach der Oscillation infolge unendlich kleiner Störung gefragt werden. Denkt man π, σ, τ durch (25) (26) (16) bestimmt, so lassen sich die Gl. (13) (14) (15) als Differentialformeln gültig für jede Variation von ε anwenden, ohne dass diese der actuellen Bewegung zu entsprechen braucht. Man hat also:

$$\frac{\partial\pi}{\partial\varepsilon} = -\frac{2\sigma}{1-\varepsilon^2}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}=\frac{2\sigma\varepsilon}{1-\varepsilon^2}-2p\pi$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}=2\pi(p\pi\varepsilon+\sigma)+2(2p-1)\frac{g}{c}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{34}$$

woraus:

$$(1-\varepsilon^2)\frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon^2}=-2p\pi^2(1-\varepsilon^2)-4(2p-1)\pi\sigma\varepsilon-4\sigma^2+2(2p-1)\frac{g}{c\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Geht nun ε durch Störung über in $\varepsilon+\varkappa$, so geht $\tau(1-\varepsilon^2)$ über in

$$\tau(1-\varepsilon^2)+\varkappa\frac{\partial.\tau(1-\varepsilon^2)}{\partial\varepsilon}+\frac{\varkappa^2}{2}\frac{\partial^2.\tau(1-\varepsilon^2)}{\partial\varepsilon^2}+\ldots=\gamma+2\alpha\beta\varkappa-\alpha^2\varkappa^2$$

wo

$$\alpha^2=-\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\frac{\partial^2\tau}{\partial\varepsilon^2}+\varepsilon\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}+\tau$$

$$\alpha\beta=\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}-\varepsilon\tau \tag{35}$$

$$\gamma=(1-\varepsilon^2)\tau \tag{36}$$

Gl. (27) lautet nun, wenn in $\varepsilon+\varkappa$ nur $\varkappa$ variirt:

$$\partial t=\partial\varkappa\sqrt{\frac{p}{\gamma+2\alpha\beta\varkappa-\alpha^2\varkappa^2}}$$

woraus nach Integration:

$$\varkappa=\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\gamma+\beta^2}\sin\frac{\alpha t}{\sqrt{p}}+\beta\right)$$

Demnach ist die Oscillationsdauer

$$=\frac{4R}{\alpha}\sqrt{p}$$

Erst jetzt kann man für ε, π, σ, τ die Gleichgewichtswerte einführen, wo nach (30)

$$p\pi^2\varepsilon+\pi\sigma+(2p-1)\frac{g}{c}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=0;\quad \tau=0 \tag{37}$$

also nach (34) (35) (36)

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varepsilon}=0;\quad \beta=0;\quad \gamma=0$$

wird. Dann ergiebt sich:

$$\alpha^2=p\pi^2(1-\varepsilon^2)+2(2p-1)\pi\sigma\varepsilon+2\sigma^2-(2p-1)\frac{g}{c\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{38}$$

oder, mit Zuziehung der Gl. (37):

$$\alpha^2=p\pi^2(2-\varepsilon^2)+\pi\sigma\left[\frac{1}{\varepsilon}+2(2p-1)\varepsilon^2\right]+2\sigma^2$$

Solange diese Grösse positiv ist, ist die permanente Bewegung stabil. Es ist leicht hieraus zu berechnen, zwischen welchen Grenzen des Verhältnisses $-\frac{\pi}{\sigma}$ die Stabilität fehlt.

X.

Kegelschnittbüschel-Constructionen.

Von

Herrn **Franz Bergmann,**

k. k. Professor in Jägerndorf (österr. Schlesien).

---

1. Zur Construction des Kegelschnittbüschels nimmt man bekanntlich auf zwei willkürlich gewählten Trägern t und τ (Fig. 1.) Punktinvolutionen — durch je zwei Punktepaare a, a'; b, b'; und α, α'; β, β' — an und projicirt sodann aus je einem Punktepaare der Involution τ die Punktinvolution auf t; ein jedes in solcher Weise auftretende Strahlenbüschelpaar ist projectivisch und erzeugt einen Kegelschnitt. Alle in dieser Weise erzeugten Kegelschnitte sind nun Elemente eines Kegelschnittbüschels: denn sie enthalten zweifellos die Doppelpunkte d_1 und d_2 der Involution t; sie gehen aber noch durch die beiden Punkte D_1 und D_2 in welchen die Geraden $d_1\delta_1$ und $d_2\delta_2$, $d_1\delta_2$ und $d_2\delta_1$ sich schneiden, wobei δ_1 und δ_2 die Doppelpunkte der Involution τ bedeuten. Die gegebenen Involutionen t und τ liegen nämlich bezüglich der Punkte D_1 und D_2 perspectivisch, indem aus leicht begreiflichen Gründen jedes Strahlenpaar, welches aus einem derselben zwei involutorisch zugeordnete Punkte des Trägers t projicirt, auch den anderen Träger τ in zwei solchen Punkten trifft, und umgekehrt; bezeichnen also α und α' irgend ein Punktepaar der Involution τ, so projiciren die Strahlenpaare $D_1(\alpha, \alpha')$ und $D_2(\alpha, \alpha')$ auch ein Punktepaar der anderen Involution und werden deshalb allen den erwähnten projectivischen Strahlenbüscheln, und die Punkte D_1 und D_2 allen von denselben erzeugten Kegelschnitten angehören. Der Kegelschnittbüschel besitzt somit die Mittelpunkte d_1, d_2, D_1, D_2,

welche leicht zu construiren sind; jeder Kegelschnitt enthält ausserdem noch die Mittelpunkte der ihn projicirenden Strahlenbüschel, also ein Punktepaar der Involution τ. Dabei bemerken wir, dass der Punkt b, wie auch der Punkt β dem Schnittpunkte $b'=\beta'$ der Träger t und τ involutorisch entspricht, woraus wir entnehmen, wie die stets reelle Gerade $D_1D_2(=T)$ zu construiren ist, wenn die Doppelpunkte der Involution imaginär werden.

2. Die beiden Strahlenbüschel, durch welche ein besonderer Kegelschnitt des Büschels projicirt wird, schneiden, da sie projectivisch sind, auf der Geraden T zwei projectivische Punktreihen aus, und wir werden derartige Punktreihen auf T so oftmal vorfinden, als Kegelschnitte erzeugt werden können. Sämmtlichen diesen Punktreihen kommt jedoch dasselbe Paar von Doppelpunkten (D_1 und D_2) zu, und ausserdem ist ihnen das Punktepaar b, β — entstanden durch Projiciren von b und b' aus einem willkürlichen Punktepaare von τ — gemeinschaftlich: es sind somit alle diese Punktreihen auf T identisch. Das letztere Punktepaar ist ausserdem, wie sich ohne Mühe zeigen lässt, ein doppeltentsprechendes und wird auch durch D_1 und D_2 harmonisch getrennt; die projectivischen Punktreihen auf T bilden demnach eine Involution, welche sich ohne Mühe aus den beiden gegebenen ableiten lässt. Indem wir also aus willkürlichen zwei Punkten des Systems τ die Involution t projiciren, projiciren wir gleichzeitig auch die Involution T mit den Doppelpunkten D_1 und D_2, so dass wir also die Kegelschnitte auf scheinbar zweifache Weise entstehen lassen können: durch Projection 1) der Involution t oder 2) der Involution T aus den Punktepaaren der Involution τ.

Drei von den Kegelschnitten des Büschels degeneriren in Geradenpaare. Verlegen wir beispielsweise die Mittelpunkte der Strahlenbüschel nach β und β', so erhalten wir durch Projiciren der Involution auf t die Gerade t, durch Projiciren der Involution auf T hingegen die Gerade T; das Geradenpaar t, T gehört somit dem Büschel an. Fallen die Mittelpunkte der projicirenden Strahlenbüschel in δ_1 zusammen, so wird, wie man sich leicht überzeugt, das in δ_1 sich schneidende Geradenpaar d_1D_1 und d_2D_2 erzeugt und analog erhält man durch die Projection aus δ_2 das Geradenpaar d_1D_2 und d_2D_1. Von diesen drei Geradenpaaren ist das erste stets reell, die beiden letzteren sind entweder gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär.

3. Es sei nach diesen einleitenden Bemerkungen das Dreiseit $\tau t T$ (Fig. 2.) der Träger der drei soeben besprochenen Involutionen. Durch die gegenseitigen Schnittpunkte dieser drei Geraden wird bekanntlich von jeder Involution schon ein Punktepaar bestimmt und werden zudem noch die Mittelpunkte ω und o der ersten beiden

Involutionen angenommen, so sind dieselben auch vollständig fixirt. O, der Schnittpunkt der Geraden ωo mit T ist sodann der Mittelpunkt des dritten Punktsystems T; denn werden die Punkte ω und τ_∞ zu Mittelpunkten von zwei projectivischen Strahlenbüscheln gewählt, so entspricht in denselben dem Strahle $\omega(o)$ offenbar die unendlich ferne Gerade der Ebene und dem Punkte O auf der Geraden T der unendlich ferne Punkt T_∞. Gemäss unserer Annahme sind beide Involutionen t und T elliptisch, der Kegelschnittbüschel wird mithin vier imaginäre Mittelpunkte besitzen. Zur Construction einzelner Punktepaare von τ bedienen wir uns eines durch b gehenden Kreises K, auf welchen wir die Involution τ aus b projiciren: F ist für diese neue, am Kreise erscheinende Involution der Pol. Irgend ein aus F geführter Strahl bestimmt auf dem Kreise die Punkte I und II; diese liefern wieder, aus b projicirt, auf τ zwei involutorisch entsprechende Punkte H_1 und H_2, in welchen jener Büschelkegelschnitt H die Gerade τ treffen wird, dessen erzeugende, das Punktsystem t projicirende Strahlenbüschel in H_1 und H_2 ihre Mittelpunkte besitzen. Ein jeder aus F gezogene Strahl gibt also zu einem besonderen Büschelkegelschnitte Entstehung und so viel Strahlen aus F möglich sind, ebensoviel Kegelschnitte werden uns auch im Büschel auftreten. Gleichzeitig bemerkt man, dass eine Anzahl der Kegelschnitte mit der Geraden τ imaginäre Schnittpunkte liefert, indem einzelne Strahlen aus F am Kreise K ohne zu schneiden vorübergehen; insofern also diejenigen, solche Kegelschnitte erzeugenden Strahlenbüschel aus imaginären Punktepaaren der Involution τ die Involution t projiciren, sind sie selbst imaginär. Es folgt jedoch weiter, dass auch der durch solche imaginäre Strahlenbüschel entstehende Kegelschnitt imaginär ist. Denn das Punktsystem auf t besitzt, weil elliptisch, ausschliesslich reelle Punktepaare und projiciren wir nun irgend ein reelles Punktepaar von t aus einem imaginären von τ, so ergeben sich uns zwei imaginäre Strahlen, die in ihrem Schnittpunkte einen Punkt des Kegelschnittes erzeugen; dieser kann jedoch in keiner Weise reell sein, indem sofort an die Stelle der imaginären, reelle Mittelpunkte treten würden. Die Existenz dieses Kegelschnittes ist deshalb imaginär und die Gesammtheit aller Büschelkegelschnitte trennt sich in unserem Falle in die Gruppe der reellen und imaginären.

Zu dem reellen Kegelschnitte H zurückkehrend, erkennen wir in dem Strahlenpaare $b(H_1)$ und $b(H_2)$ die in H_1 und H_2 berührenden Tangenten desselben, indem nach Früherem die (reellen oder imaginären) Punkte d_1, d_2 und D_1, D_2 von den Punktepaaren b und b' resp. b und β harmonisch getrennt werden, weshalb die Gerade τ die Polare des Punktes b bezüglich aller Büschelkegelschnitte ist.

Und construiren wir ferner die Doppelpunkte δ_1, δ_2 von τ, so erscheint uns, da die Punkte δ_1 und δ_2 bezüglich jedes Büschelkegelschnittes conjugirt sind, in dem Dreiecke $b\delta_1\delta_2$ das sämmtlichen Büschelkegelschnitten gemeinsame Tripel conjugirter Pole, und alle von b, δ_1 oder δ_2 zu den Kegelschnitten geführten Tangentenpaare berühren längs der Geraden τ, resp. $b\delta_2$ oder $b\delta_1$.

4. Es ist ferner bekannt, dass die Involution, welche gebildet wird durch die aus b zu den Asymptoten sämmtlicher Büschelkegelschnitte parallel geführten Strahlen, durch die beiden Strahlenpaare $b(t)$, $b(T)$ und $b(u)$, $b(v)$ — welcher letztere Strahl zur Geraden $oO\omega$ parallel ist — fixirt ist. Die von derselben gleichzeitig auf dem Kreise erzeugte Punktinvolution besitzt ihren Pol in Φ. Wird nun aus dem Punkte Φ irgend ein Strahl gezogen und seine Schnittpunkte mit dem Kreise K aus b projicirt, so gibt uns dies die Asymptotenrichtungen irgend eines besonderen Büschelkegelschnitts.

Zur Construction der Asymptotenrichtungen des besonderen Kegelschnittes H eignet sich nun folgender Weg: W i r v e r b i n d e n x (d e n S c h n i t t p u n k t d e s S t r a h l e s $F(III)$ m i t d e r f e s t e n K r e i s t a n g e n t e i n u) m i t Φ u n d v e r f o l g e n d i e s e G e r a d e b i s z u i h r e m S c h n i t t e y_1 u n d y_2 m i t d e m K r e i s e K. D a s S t r a h l e n p a a r $b(y_1)$ u n d $b(y_2)$, w e l c h e s a u s b d i e l e t z t e r e n P u n k t e p r o j i c i r t, l i e f e r t d i e g e w ü n s c h t e n A s y m p t o t e n r i c h t u n g e n.

Werden nämlich die beiden, den Kegelschnitt H erzeugenden Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten H_1 und H_2 parallel zu sich selbst nach b verschoben, so erzeugen sie in ihrer neuen, concentrischen Lage auf dem Kreise zwei projectivische Punktreihen. So gelangen beispielsweise die zugeordneten Strahlen $H_1(b)$ und $H_2(b')$, ferner $H_1(\beta)$ und $H_2(b)$ nach der Verschiebung in die Lage $b(I)$ und $b(u)$, $b(u)$ und $b(II)$, und auf dem Kreise sind I und u, ferner u und II zwei Elementenpaare dieser projectivischen Punktreihen; indem wir dieselben kreuzweise verbinden, d. h. die Tangente des festen Punktes u mit dem Strahle $F(III)$ zum Schnitte bringen, erhalten wir einen Punkt x der Vervollständigungsaxe der beiden projectivischen Punktreihen. Die Vervollständigungsaxe enthält ausserdem noch die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen und diese entsprechen wieder den Doppelstrahlen der nach b parallel verschobenen Strahlenbüschel; die Doppelstrahlen ferner sind zu den Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes H parallel, treffen daher nach Früherem den Kreis K in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch Φ geht: die Vervollständigungsaxe selbst wird daher durch den Punkt Φ gehen und, da sie den Punkt x enthalten soll, mit dem Strahle $\Phi(x)$

zusammenfallen. Dadurch ist der Nachweis der angeführten Construction geliefert.

Die Axenrichtungen der beiden Parabeln des Büschels finden wir nun ohne Schwierigkeit, indem wir die Polare φ von Φ in Bezug auf K construiren und ihre Schnittpunkte π_1 und π_2 aus b projiciren. Und um die zugehörigen Durchschnittspunkte der Parabeln mit der Geraden τ zu erhalten, haben wir den unter 3) angegebenen Weg einzuschlagen: wir schneiden die feste Tangente des Punktes u mit den Strahlen $\Phi(\pi_1)$ und $\Phi(\pi_2)$, verbinden diese Schnittpunkte mit F, wodurch wieder auf dem Kreise Schnitte entstehen, welche aus b auf τ zu projiciren sind. Für die gleichseitige Hyperbel ist der Strahl $\Phi(\mu)$ zu nehmen, denn für denselben wird Wkl. $y_1 b y_2$ ein Winkel im Halbkreise. Ferner ist ersichtlich, an welchen Stellen die Gerade τ von Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln getroffen wird, und in welcher Weise sich die reellen Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln gruppiren. Der von den Hyperbeln erfüllte Teil der Ebene wird durch die beiden Parabeln und die unendlich ferne Gerade vollständig begrenzt; ausserdem treten in zwei getrennten Gruppen die Ellipsen auf, welche das Innere der beiden Parabeln erfüllen. Die imaginären Punkte der Ebene werden durch die imaginären Ellipsen des Büschels erfüllt; ihre Begrenzung im Endlichen geschieht durch die beiden, unendlich kleinen Ellipsen in δ_1 und δ_2.

5. Fällen wir vom Mittelpunkte μ des Kreises K ein Perpendikel auf den Strahl $\Phi(x)$ und projiciren seine Schnittpunkte z_1 und z_2 mit dem Kreise aus dem Punkte b, so erhalten wir in den Strahlenpaaren $b(z_1)$ und $b(z_2)$ die Axenrichtungen des Kegelschnittes H.

Denn die Punkte z_1 und z_2 halbiren die beiden Bögen $y_1 y_2$, somit halbiren die Strahlen $b(z_1)$ und $b(z_2)$ den Winkel $y_1 b y_2$ der Asymptoten und geben somit die Axenrichtungen. Die Construction hängt von der Realität der Punkte y_1 und y_2 nicht ab, ist somit für reelle, wie für imaginäre Kegelschnitte mit imaginären Asymptoten durchführbar.

6. Soll das Axenpaar des Kegelschnittes H dem Orte nach bestimmt werden, so construiren wir in den eben gewonnenen Punkten z_1 und z_2 die Tangenten und führen dieselben bis zu ihrem Durchschnittspunkte x_1 resp. x_2 mit dem Strahle $F(x)$; sodann beschreiben wir aus den gewonnenen Punkten (x_1 und x_2) die Kreisbögen $z_1\mathfrak{z}_1$ resp. $z_2\mathfrak{z}_2$ und projiciren aus b das Punktepaar $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ nach σ_1 und σ_2. In diesen letzteren Punkten treffen die Axen unseres Kegelschnittes H mit der festen Geraden τ zu-

sammen und zwar geht durch σ_1 die zum Strahle $b(z_2)$, durch σ_2 die zu $b(z_1)$ parallele Axe.

Um den Nachweis dafür zu liefern, erwägen wir, dass die zu einer Axe des Kegelschnittes H parallele Gerade $b(z_1)$, da sie eben durch b geht, ihren Pol auf τ besitzt; ausserdem befindet er sich auch noch — wegen des Parallelismus der genannten Geraden mit der ersten Axe — auf der zweiten Axe des Kegelschnittes: folglich hat dieser Pol (σ_1 genannt) im Schnittpunkte der Geraden τ mit der zum Strahle $b(z_1)$ senkrechten Axe seinen Ort. Nennen wir σ_1' — welcher Punkt in der Figur nicht bezeichnet ist — den Schnittpunkt des Strahles $b(z_1)$ mit τ, so haben wir in Folge dieser polaren Beziehungen in H_1 und H_2, ferner in σ_1' und σ_1 zwei Paar sich harmonisch trennender Punkte, von welchen uns der Ort der ersten drei vollkommen bekannt ist. Die Construction des vierten erfolgte auf dem Kreise K, indem daselbst die Punkte I, II und z_1 Projectionen von H_1, H_2 und σ_1' sind, und wir können dem Punkte z_1 die Bedeutung des einen Doppelpunktes jener Involution beilegen, zu welcher das Punktepaar I und II als ein entsprechendes angehört, deren Pol wir somit in x_1 finden. Der andere Doppelpunkt $\mathfrak{z}_1$ dieser Involution, dessen Bestimmung entweder durch die zweite von x_1 zum Kreise K führende Tangente, oder einfach durch den Bogen $z_1\mathfrak{z}_1$ geschehen kann, ist der zu I, II und z_1 vierte harmonische auf dem Kreise; deswegen ist es auch seine Projection σ_1 zu den Punkten H_1, H_2 und σ_1' auf der Geraden τ.

Ein analoger Gedankenweg lässt sich ohne Zweifel bei der Begründung der Construction des Punktes σ_2 einschlagen. Die Gerade $b(z_2)$, weil parallel zu einer Axe des Kegelschnittes, hat auf der anderen Axe ihren Pol, ausserdem aber auch noch auf der Geraden τ, weil diese die Polare des Punktes b ist: der Pol der Geraden $b(z_2)$ — σ_2 genannt — ist also der Schnittpunkt einer Axe von H mit τ. Um ihn zu construiren, erwägen wir, dass σ_2' — der Schnittpunkt von $b(z_2)$ mit τ — und σ_2 conjugirte Punkte bezüglich des Kegelschnittes H sind, welcher die Gerade τ in den Punkten H_1 und H_2 trifft; demzufolge trennen sich diese beiden Punktepaare harmonisch, und da uns von denselben die drei letzteren ihrem Orte nach vollkommen bekannt sind, kann der eine von ihnen (σ_2) ohne Schwierigkeit gefunden werden. Seine Construction wurde wieder auf den Kreis K verlegt; H_1, H_2 und σ_2' wurden zu dem Zwecke aus b nach I, II und z_2 projicirt, in z_2 die Tangente gezogen und aus dem Centrum x_2 der Bogen $z_2\mathfrak{z}_2$ beschrieben. Vom Punkte $\mathfrak{z}_2$ gelangen wir schliesslich auf die bekannte Weise zum verlangten Punkte σ_2.

Da die Construction des Punktes σ_1 oder besser $\mathfrak{z}_1$ lediglich darauf zurückgeht, zu drei bekannten Kreispunkten den vierten harmonischen zu suchen, so können wir auch — indem I und II diesmal als Doppelpunkte einer Involution angesehen werden — in I und II die Tangenten bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte (oder auch eine derselben bis zu ihrem Durchschnittspunkte mit der festen Polaren f von F) ziehen und diesen Punkt mit z_1 (resp. z_2) verbinden, wobei wir in der Verlängerung dieser Geraden bis zu ihrem Schnitte mit K den Punkt $\mathfrak{z}_1$ (resp. $\mathfrak{z}_2$) erhalten. Beide Constructionen lassen sich überdies combiniren.

Eine Probe für die Genauigkeit der Construction gibt uns der Schnittpunkt M des gewonnenen Axenpaares, der Mittelpunkt des Kegelschnittes H. Wir beschreiben zu diesem Zwecke aus dem Punkte x den Bogen uu_1 und erhalten in dem Strahle $b(u_1)$ sofort einen neuen — den zur Richtung der Geraden τ conjugirten — Durchmesser der Curve H, welcher daher mit den bereits construirten Axen nur einen einzigen Schnittpunkt liefern darf.

Denn der Halbirungspunkt der Strecke H_1H_2 ist bekanntlich zu den eben genannten Punkten und dem unendlich fernen der Geraden τ der vierte harmonische; auf den Kreis K projicirt, fixiren wir daselbst eine Involution, von welcher ein. Punktepaar I, II und ein Doppelpunkt u (welcher τ_∞ entspricht), daher auch schon der Pol x bekannt ist; ihren zweiten Doppelpunkt bestimmt die zweite zum Kreise K geführte Tangente aus x oder einfach der aus dem Centrum x beschriebene Bogen uu_1. Reichen also in irgend welchem Notfalle die vorigen beiden Constructionen nur zur Bestimmung eines einzigen von den Punkten σ_1 oder σ_2 aus, so kann auch von dieser Probeconstruction Gebrauch gemacht werden.

7. Wollen wir zum Centrum von H auf einem directen Wege gelangen, so haben wir blos zu erwägen dass der Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Büschelkegelschnitte eine neue Kegelschnittlinie M ist, welche in unserem Falle eine durch die Punkte b, δ_1 und δ_2 führende Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen $b(\pi_1)$ und $b(\pi_2)$ ist. Zur Erzeugung derselben sind hinreichend viele Stücke vorhanden; b und δ_1 (oder auch δ_2) können zu Mittelpunkten der beiden sie erzeugenden Strahlenbüschel genommen werden, von welchen der letztere wieder nach b parallel verschoben wird. In ihrer neuen concentrischen Lage besitzen dieselben offenbar die Doppelstrahlen $b(\pi_1)$ und $b(\pi_2)$ und wenn wir die projectivischen Punktreihen betrachten, welche diese in b concentrischen Strahlenbüschel auf dem Kreise ausschneiden, so ergibt sich, dass $\pi_1\pi_2$ ihre Vervollständigungsaxe ist. Zu dem

Strahle $b(u_1)$, auf welchen das Centrum von H liegt, haben wir nun den im Büschel δ_1 resp. im Büschel δ_2 entsprechenden zu finden, was offenbar auf die Weise geschehen kann, dass wir die Geraden $u_1 u$ und $\pi_1 \pi_2$ bis zum gegenseitigen Schnitte verlängern, diesen mit u resp. mit $\mathfrak{v}$ verbinden, um auf dem Kreise die Punkte u′ resp. $\mathfrak{v}'$ zu gewinnen. Sodann ziehen wir im ersten Falle durch δ_1 eine Parallele zu b(u′), im zweiten durch δ_2 eine Parallele zu $b(\mathfrak{v}')$ und erhalten bei richtiger Construction einen und denselben Schnittpunkt mit dem uns bereits bekannten Durchmesser $b(u_1)$: das Centrum M nämlich des Kegelschnittes H. — $\delta_1 M$ und $\delta_2 M$ sind somit neue Durchmesser des Kegelschnitts. Dieselbe Construction ist auch für die imaginären Kegelschnitte verwendbar.

8. Um die Grösse der Axen des Kegelschnittes H, und zwar vorerst jener zum Strahle $b(z_2)$ parallelen in einfachster Weise zu erhalten, verbinden wir die Punkte u_1 und $\mathfrak{z}_1$, wodurch sich auf der Geraden $z_1 z_2$ ein Schnittpunkt ξ_1 ergibt; die Gerade $x_1 \xi_1$ liefert uns auf dem Kreise K zwei Schnittpunkte α und α', und indem wir dieselben aus b auf die vorhin genannte Axe projiciren, erhalten wir darauf ihre Scheitelpunkte A und A'.

Analog ist mit der zweiten, zum Strahle $b(z_1)$ parallelen Axe zu verfahren: Die Punkte u_1 und $\mathfrak{z}_2$ sind zu verbinden, diese Verbindungslinie ist mit der Geraden $z_1 z_2$ zum Schnitte (ξ_2) zu bringen, und schliesslich sind die Punkte β und β' — die Schnittpunkte der Geraden $x_2 \xi_2$ mit dem Kreise K — aus dem Punkte b auf die erwähnte Axe zu projiciren; dies liefert das zweite Scheitelpaar B und B', welches in unserem Falle, da die Gerade $x_2 \xi_2$ am Kreise ohne zu schneiden vorübergeht, imaginär ist, wie schon aus der Realität der Asymptotenrichtungen vorauszusehen war. Sonach ist AA' die reelle, BB' die imaginäre Axe der Hyperbel H.

Wir haben nämlich in einem vorhergehenden Abschnitte, um den Ort der Axe AA' aufzusuchen, den Pol σ_1 des zur anderen Kegelschnittsaxe parallelen Strahles $b(z_1)$ in Bezug auf den betrachteten Kegelschnitt H construirt; derselbe lag auf dem festen Träger τ, war zu den drei Punkten H_1, H_2, σ_1' der vierte harmonische und war gleichzeitig auch der Schnittpunkt dieser Axe mit dem Träger τ. Aus dieser polaren Beziehung von σ_1 und $b(z_1)$ folgt, dass der (in der Figur nicht bezeichnete) Schnittpunkt z_1' der ersten Axe AA' mit $b(z_1)$ und der Punkt σ_1 jener Involution angehören, deren Doppelpunkte die auf dieser Axe vorhandenen Scheitel A und A' sind, und deren Centrum mit dem Kegelschnittscentrum M zusammenfällt. Das Wesen der Construction der Scheitel A und A' besteht demnach in der Construction der Doppelelemente der erwähnten Punktinvolution, was sich wieder auf dem Kreise K am vorteilhaftesten ausführen lässt. Daselbst wird eine Involution durch die Punktepaare z_1 und $\mathfrak{z}_1$ (entsprechend z_1' und σ_1), u_1 und z_2 (entsprechend M und dem unendlich fernen Punkte der ersten Axe) fixirt; ihre Polare zeigt uns die Doppelpunkte derselben. Ein Punkt dieser Polaren ist sicher der von uns bereits construirte Punkt x_1, weil darin die Tangenten des Punktepaares z_1 und $\mathfrak{z}_1$ zusammentreffen; ein zweiter Punkt derselben ergibt sich bekanntlich im Schnitte ξ_1 der Geraden $z_1 z_2$ und $\mathfrak{z}_1 u_1$, indem durch dieselben zwei Paare involutorischer Punkte kreuzweise verbunden werden. Es ist somit $x_1 \xi_1$ die Polare der Punktinvolution auf dem Kreise und ihre Schnittpunkte α und α' mit demselben sind ihre Doppelelemente, welche wir aus b zu projiciren haben, um die Scheitel A und A' der ersten Axe zu erhalten.

Analog lässt sich auch die Begründung der Construction des Scheitelpaares auf der zweiten Axe führen; hier wurde ebenfalls zum Strahle $b(z_2)$ der Pol gesucht und nach früheren Auseinandersetzungen in σ_2 gefunden, wohin zugleich auch der Schnittpunkt des Trägers τ mit dieser Axe fiel. Nennen wir ferner z_2' den Schnittpunkt der zweiten Axe mit dem Strahle $b(z_2)$, so sind z_2' und σ_2 zwei bezüglich des Kegelschnittes H conjugirte Punkte, welche somit jener Involution angehören, deren Mittelpunkt wieder nach M fällt, deren Doppelelemente die Scheitel dieser Axe sind und welche elliptisch ist, wie wir sofort aus der Situation dieser zwei Punktepaare entnehmen. Diese Involution wurde abermals aus dem Punkte b auf den Kreis K projicirt (worauf die Punktepaare z_2, $\mathfrak{z}_2$; u_1 und z_1 erschienen) und ihre Polare construirt, welche durch den Schnittpunkt x_2 der Tangenten in den einander entsprechenden Punkten z_2 und $\mathfrak{z}_2$, aber auch durch den Schnittpunkt der Geraden $z_1 z_2$ und $u_1 \mathfrak{z}_2$ ging. Die (imaginären) Schnittpunkte β und β' derselben mit dem Kreise werden auf die Axe projicirt, wodurch sich darauf das (imaginäre) Scheitelpaar B und B' ergab.

9. Eine andere Construction des ersten Scheitelpaares A und A' kann auf die Weise geschehen, dass wir zum Beispiel in H_1 zu der betrachteten Axe eine Senkrechte fällen; diese, und dann die Tangente $b(H_1)$ bestimmen auf unserer Axe zwei Schnittpunkte, welche zu derjenigen Involution gehören, von welcher der Punkt M das Centrum ist, die Scheitel A und A' ferner die Doppelpunkte sind. Ihre Construction kann ebenfalls auf dem Kreise K geschehen.

Auch können wir uns mit Hilfe der Tangenten $b(H_1)$ resp. $b(H_2)$

und der beiden, ihrem Orte nach construirten Axen die Brennpunkte des Kegelschnittes H verschaffen, indem wir der Tangente und der Normale des Punktes H_1 resp. H_2 einen Kreis umschreiben, welcher die Brennpunkte enthält. Diese liefern uns wieder die Leitstrahlen, der Punkte H_1 und H_2, also auch die Axenlängen.

Die Construction der Tangenten $b(H_1)$ und $b(H_2)$ kann dabei von vornherein mit der grössten Genauigkeit geschehen; die Genauigkeit der Construction der Axen ihrem Orte nach kann hingegen durch die bereits angeführten Proben stets geprüft werden, weshalb auch diese Construction mit Erfolg verwendet werden kann.

10. Construiren wir im Punkte I die Tangente zum Kreise K und verfolgen dieselbe bis zu ihrem Schnittpunkte m_1 mit der festen Tangente in u; es sei ferner m der Schnittpunkt der Geraden z_1z_2 mit φ (der Polaren von Φ): so zeigt sich, je nachdem die Gerade mm_1 mit dem Kreise K reelle oder imaginäre Schnittpunkte s_1' und s_2' liefert; ob der von uns betrachtete Kegelschnitt H von dem Durchmesser $b(u_1)$ reell oder imaginär — in s_1 und s_2 — getroffen wird. Diese letzteren finden wir durch Construction der Parallelen $H_1(s_1) \parallel b(s_1')$ und $H_1(s_2) \parallel b(s_2')$. Desgleichen kann im Punkte II die Tangente zum Kreise construirt und bis zum Schnittpunkte m_2 (nicht in die Figur aufgenommen) mit der festen Tangente in u gezogen werden; die Gerade mm_2 zeigt uns wieder, je nachdem sie den Kreis K in s_1'' und s_2'' reell oder imaginär schneidet, ob der Durchmesser $b(u_1)$ vom Kegelschnitte H in reellen oder imaginären Punkten s_1 und s_2 getroffen wird. Man findet diese letzteren analog durch die Parallelen: $H_2(s_1) \parallel b(s_1'')$ und $H_2(s_2) \parallel b(s'')$.

Es kann nämlich der Punkt H_1, um den ersten Teil nur der angeführten Construction nachzuweisen, als Centrum von zwei Strahleninvolutionen angesehen werden: 1) jener Involution, deren Doppelelemente die Strahlen $H_1(b)$ und $H_1(H_2)$ sind; welche somit das Strahlenpaar $H_1(s_1, s_2)$ sicher enthält, weil es von den genannten Doppelstrahlen harmonisch geteilt wird; 2) jener Involution, welche die Endpunkte sämmtlicher Durchmesser des Kegelschnittes H projicirt, mithin zur Involution der conjugirten Durchmesser desselben parallel ist und ebenfalls das Paar $H_1(s_1, s_2)$ enthalten wird. Dieses letztere, beiden Involutionen gemeinsame Strahlenpaar haben wir zu construiren. Wir verschieben zu dem Zwecke beide Strahleninvolutionen parallel zu sich selbst nach b und untersuchen, welche Punktsysteme sie auf dem Kreise erzeugen: die erste liefert uns eins mit den Doppelelementen l und u, also mit dem Pole in m_1; die zweite (da ihre Doppelstrahlen die Asymptoten sind), besitzt ihren Pol auf φ und zwar, weil die zu den Axenrichtungen von H parallelen Strahlen $b(z_1)$ und $b(z_2)$ ebenfalls zu der unter 2) angeführten Involution zählen, im Punkte m. Die Gerade mm_1, welche die beiden Pole verbindet, bestimmt auf dem Kreise das beiden Involutionen gemeinsame Punktepaar s_1' und s_2'; $b(s_1', s_2')$ ist also das den Involutionen in b gemeinsame Strahlenpaar, und mithin ist es auch das Strahlenpaar $H_1(s_1, s_2)$ für die in H_1 concentrischen Involutionen, wenn $H_1(s_1) \parallel b(s_1')$ und $H_1(s_2) \parallel b(s_2')$. — Der Nachweis des zweiten Teiles der Construction ist analog.

11. Zu den einzelnen Kegelschnitten lässt sich schliesslich, da $b\delta_1\delta_2$ das allen Büschelkegelschnitten gemeinsame Poldreieck ist, von δ_1 (resp. δ_2) ein längs der Geraden $b\delta_2$ resp. $b\delta_1$ berührendes Tangentenpaar führen; so können wir zum Kegelschnitte H beispielsweise vom Punkte δ_1 ein reelles, vom Punkte δ_2 ein imaginäres Tangentenpaar ziehen, dessen Construction in folgender Art und Weise ausgeführt wurde:

Wir beschreiben vorerst einen, durch die Punkte δ_1 und δ_2 führenden Kreis k (dessen Mittelpunkt in Fig. 3. in ω gewählt wurde), bezeichnen den Schnittpunkt von $\delta_1 b$ resp. $\delta_2 b$ mit demselben mit Σ_1 resp. Σ_2, ebenso den Schnittpunkt dieses Kreises mit dem aus δ_1 (resp. δ_2) zu $\delta_2 b$ (resp. $\delta_1 b$) parallel gezogenen Strahle mit Σ_2' (resp. Σ_1') und ziehen sodann die für sämmtliche folgenden Constructionen festbleibende Gerade $\delta_2\Sigma_2'$ (resp. $\delta_1\Sigma_1'$). Ferner bestimmen wir uns den Durchschnittspunkt Φ_1 (resp. Φ_2) der Kreistangenten in den Punkten Σ_1 und δ_2 (resp. Σ_2 und δ_1). Um nun das aus δ_1 zum Kegelschnitte H führende Tangentenpaar zu finden, projiciren wir den Mittelpunkt M dieses Kegelschnittes aus δ_1 auf den Kreis k (nach μ_1) und suchen ferner den Schnittpunkt Σ der festen Geraden $\delta_2\Sigma_2'$ mit $\mu_1\Sigma_1$; die Gerade $\Phi_1\Sigma$ bestimmt uns sodann auf dem Kreise k zwei Punkte 1 und 2, und diejenigen, diese beiden Punkte aus δ_1 projicirenden Strahlen $\delta_1(1)$ und $\delta_1(2)$ liefern das verlangte Tangentenpaar.

Denn sämmtliche von δ_1 führenden, bezüglich des besonderen Büschelkegelschnittes H conjugirten Strahlen erfüllen eine Involution mit dem Mittelpunkte in δ_1, deren Doppelstrahlen die von diesem Punkte zum Kegelschnitte führenden Tangenten sind. Die Involution dieser Strahlen ist durch folgende zwei Paare fixirt: 1) $\delta_1(\delta_2)$ und $\delta_1(b)$ — da $\delta_1\delta_2 b$ ein Poldreieck des Kegelschnittes ist; 2) $\delta_1(\Sigma_2')$ und $\delta_1(M)$ — von welchen der erste Strahl zu $\delta_2(b)$ parallel ist und der zweite den Mittelpunkt des Kegelschnittes H projicirt. Somit geht die Lösung der Aufgabe auf die Construction der (reellen oder imaginären) Doppelstrahlen der so charakterisirten Involution zurück. Zu dem Zwecke betrachten wir wieder die auf dem Kreise k auftretende Punktinvolution δ_2 und Σ_1, Σ_2' und μ_1 und finden im Schnittpunkte Φ_1 der Kreis-Tangenten des ersteren Punktepaares einen Punkt ihrer Polaren, während ein zweiter (Σ) im Schnittpunkte der Geraden $\Sigma_2'\delta_2$ (fix) und $\mu_1\Sigma_1$ sich findet, so dass $\Phi_1\Sigma$ die Polare selbst, die Punkte 1, 2 die Doppelpunkte der Involution auf dem Kreise, die Strahlen $\delta_1(1)$ und $\delta_1(2)$ somit die Doppelelemente der aus δ_1 führenden Involution bezüglich H conjugirter Strahlen, also die gewünschten Tangenten sind.

Für jeden einzelnen Büschelkegelschnitt erscheint in dieser Weise im Punkte δ_1 eine besondere Strahleninvolution; allen ist jedoch das Strahlenpaar $\delta_1(\delta_2)$ und $\delta_1(b)$, sowie auch ferner der Strahl $\delta_1(\Sigma_2')$ gemeinschaftlich, und der Charakter der Strahleninvolution verändert sich nur dadurch, dass der dem letztern Strahle $\delta_1(\Sigma_2')$ zugeordnete $\delta_1(M)$ variirt. Es sind somit auch sämmtlichen Involutionen, welche auf der Peripherie von k erscheinen, die drei Punkte δ_2, Σ_1 und Σ_2' gemeinschaftlich, und die Bestimmung jeder einzelnen hängt nur ab von der Lage des Punktes μ_1. Alle, die Punkte 1 und 2 enthaltenden Polaren gehen somit durch einen fixen Punkt Φ_1 und werden ihrer Lage nach durch den variirenden Strahl $\Sigma_1\mu_1$ bestimmt, welcher den zweiten Punkt Σ derselben bestimmt. Die Gesammtheit der Tangentenpaare aus δ_1 zu den Büschelkegelschnitten bildet daher — wie bekannt — eine Strahleninvolution mit den Doppelelementen $\delta_1(\delta_2)$ und $\delta_1(b)$.

Analog verhält es sich mit den Tangenten aus δ_2; auch diese sind die Doppelstrahlen einer durch die Paare: $\delta_2(\delta_1)$ und $\delta_2(b)$, ferner $\delta_2(\Sigma_1') \parallel \delta_1(b)$ und $\delta_2(M)$ fixirten Involution. Dieselbe erzeugt eine durch die Punkte δ_1, Σ_2, Σ_1' und μ_2 hinreichend bestimmte Involution auf k, und indem wir die Tangenten in den Punkten des ersten Paares zum Schnitt bringen, erhalten wir einen Punkt Φ_2 ihrer Polaren. Ein zweiter ergibt sich im Schnittpunkte $\mathfrak{S}$ von $\delta_1\Sigma_1'$ (fix) mit $\delta_2\mu_2$, und wir haben die Schnittpunkte des Kreises mit dieser Polaren aus δ_2 zu projiciren, um die gewünschten Tangenten zu erhalten. Auch jetzt gehen alle Polaren durch Φ_2.

12. In der Fig. 4. werden schliesslich die angegebenen Constructionen für einen imaginären Kegelschnitt ausgeführt.

Zu diesem Zweck wurde der Strahl $F(x)$ gezogen, dessen Schnittpunkte mit dem Kreise K imaginär sind; der entsprechende Büschelkegelschnitt E trifft somit die Gerade τ in zwei imaginären Punkten E_1 und E_2 und die imaginären Strahlen $b(E_1)$ und $b(E_2)$ berühren denselben in den soeben genannten Punkten. Der Strahl $\Phi(x)$, durch dessen Schnittpunkte y_1 und y_2 mit dem Kreise K die Asymptotenrichtungen bestimmt werden, wird ebenfalls an diesem Kreise vorübergehen, woraus wir folgern, dass der imaginäre Kegelschnitt E keine Hyperbel, sondern eine Ellipse ist und es ist gleichzeitig leicht aus der ganzen Situation der Figur zu ersehen, dass unter den imaginären Kegelschnitten blos Ellipsen vorkommen, wie dies auch anderen Umständen vollkommen entsprechend ist.

Die Axenrichtungen des von uns betrachteten Kegelschnittes, sowie auch sämmtlicher imaginären Kegelschnitte des Büschels sind jedoch reell; denn die aus μ zum Strahle $\Phi(x)$ rechtwinklig gezogene Gerade $z_1 z_2$ trifft den Kreis stets in zwei reellen Punkten, welche immer aus dem Punkte b durch reelle Strahlen projicirt werden können. Und auch der Ort der Axen lässt sich ohne Schwierigkeit angeben, indem wir aus dem Punkte x_1 (resp. x_2) den Bogen $z_1 \mathfrak{z}_1$ (resp. $z_2 \mathfrak{z}_2$) beschreiben und den Punkt $\mathfrak{z}_1$ (resp. $\mathfrak{z}_2$) aus b nach σ_1 (resp. σ_2) projiciren; σ_1 und σ_2 sind, wie uns nach früheren Auseinandersetzungen bekannt ist, die Schnittpunkte der Kegelschnittaxen mit der festen Geraden τ und wir haben nur noch durch σ_1 eine Parallele zu $b(z_2)$, durch σ_2 eine Parallele zu $b(z_1)$ zu ziehen, um die Axen des Kegelschniltes E zu erhalten. Ihr Schnittpunkt M ist der Mittelpunkt des imaginären Kegelschnittes und ist ebenfalls reell.

Die Genauigkeit dieser Constructionen lässt sich nach in den früheren Abschnitten erklärten Methoden ebenfalls prüfen; so wurde in der Fig. 4. beispielsweise aus dem Punkte x der Bogen uu_1 beschrieben und so in dem Strahle $b(u_1)$ ein neuer Durchmesser des Kegelschnittes gewonnen.

Selbstverständlich sind die beiden, in den Axen liegenden Scheitelpaare des Kegelschnittes, ferner die Tangenten von den Doppelpunkten δ_1 und δ_2 etc. imaginär, wie auch durch ihre specielle Construction mit Leichtigkeit gezeigt werden kann; die Brennpunkte des Kegelschnittes dagegen sind reell.

Ziehen wir nämlich durch M zu den Strahlen $b(\pi_1)$ und $b(\pi_2)$ die Parallelen: $b(\pi_1) \parallel M(d_1)$ und $b(\pi_2) \parallel M(d_2)$, so sind diese bekanntlich ein Paar conjugirter Durchmesser des Kegelschniites E und der Punkt M ist der Mittelpunkt der auf denselben erscheinenden Involutionen conjugirter Punkte. Ein solches Paar conjugirter Punkte auf dem Durchmesser d_2 bilden der Punkt p und der Schnittpunkt σ (in der Figur nicht bezeichnet) des Durchmessers d_2 mit $b(\pi_1)$; denn weil τ die Polare von b und der Durchmesser d_2 die Polare des unendlich fernen Punktes des Durchmessers d_1 ist, ist auch die zu d_1 parallele Gerade $b(\pi_1)$ die Polare des Schnittpunktes p von τ und d_2, weshalb die Punkte p und σ bezüglich des Kegelschnittes E conjugirt sind.

Schneiden wir nun die Axe AA' durch die von p zu d_1 senkrechte Gerade, wie auch durch den Strahl $b(\pi_1)$, so erhalten wir darauf ein Punktepaar jener Involution, deren Centrum M ist und deren Doppelpunkte f und f' bekanntlich die Brennpunkte des imaginären Kegelschnittes E sind.

Jägerndorf, den 17. Febr. 1881.

XI.

Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck.

Fortsetzung.

Von

J. Lange.

13. Die Ausdrücke für die Flächen F findet man auch direct in folgender Weise:

Es ist

$$O_aO_bO_c = O_aBC + O_bAC + O_cAB + ABC$$
$$OO_bO_c = OBC + O_bAB + O_cAC - ABC$$

d. h.

$$F = \tfrac{1}{2}(a\varrho_a + b\varrho_b + c\varrho_c) + \varDelta$$
$$= \varDelta\left(\frac{\varrho_a}{h_a} + \frac{\varrho_b}{h_b} + \frac{\varrho_c}{h_c} + 1\right)$$
$$= \varDelta\left(\frac{\varrho_a - \varrho}{2\varrho} + \frac{\varrho_b - \varrho}{2\varrho} + \frac{\varrho_c - \varrho}{2\varrho} + 1\right)$$
$$= \varDelta\left(\frac{4r - 2\varrho}{2\varrho} + 1\right) = \varDelta\frac{2r}{\varrho}$$

$$F_a = \tfrac{1}{2}(a\varrho + b\varrho_c + c\varrho_b) - \varDelta$$
$$= \varDelta\left(\frac{\varrho}{h_a} + \frac{\varrho_c}{h_b} + \frac{\varrho_b}{h_c} - 1\right)$$
$$= \varDelta\left(\frac{\varrho_a - \varrho}{2\varrho_a} + \frac{\varrho_a + \varrho_c}{2\varrho_a} + \frac{\varrho_a + \varrho_b}{2\varrho_a} - 1\right)$$
$$= \varDelta\left(\frac{4r + 2\varrho_a}{2\varrho_a} - 1\right) = \varDelta\frac{2r}{\varrho_a}$$

14. Die Punkte O und P entsprechen sich als Umkreiscentra der ähnlich liegenden ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ und $O_aO_bO_c$, folglich geht OP durch ihren Aehnlichkeitspunkt N, und man hat in Verbindung mit XII. allgemein

XV. Je drei entsprechende Punkte NOP (mit gleichem Index) liegen mit M in einer Graden.

15. Zieht man im Umkreis die Durchmesser AA_2 BB_2 CC_2, so sind die Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$ congruent und ähnlich liegend für M als inneren Aehnlichkeitspunkt. Nach XII. entsprechen sich in diesem System die Punkte O und P, letztere sind also die Berührungskreiscentra für $A_2B_2C_2$ und bilden ein vollständiges Viereck, dessen 6 Seiten von dem Umkreis M halbirt werden, und welches dem durch die Punkte O gebildeten congruent ist. Ausserdem folgt

XVI. Je zwei Seiten der Vierecke O und P sind gleich und parallel, wie O_bO_c und P_bP_c, je zwei andere halbiren sich unter rechtem Winkel auf dem Umkreis, wie O_bO_c und PP_a.

16. Die Punkte O'' bilden nach 5. ein Viereck, welches mit dem aus den Punkten O gebildeten ähnlich und ähnlich liegend ist für das Aehnlichkeitsverhältniss $2:1$, folglich

XVII. Die Verbindungslinie zweier Punkte O'' ist parallel der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte O und doppelt so gross als diese.

17. Zwischen den Strecken der bisher betrachteten Figur finden merkwürdige Beziehungen statt, welche einerseits durch die Radien $\varrho_a\varrho_b\varrho_c$, andererseits durch die Grössen r ϱ s am zweckmässigsten dargestellt werden. — Es sei X die Mitte von OO_a und Y diejenige von O_bO_c, so ist XY ein Durchmesser im Umkreis und seht senkrecht auf BC, weil sie die Mitten der zu BC gehörigen Bogen verbindet. XY geht demnach durch A'. Im Trapez $O\mathfrak{A}\mathfrak{A}_aO_a$ ist $XA' = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho)$ als Verbindungslinie der Diagonalenmitten und im Trapez $O_b\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_cO_c$ ist $YA' = \frac{1}{2}(\varrho_b + \varrho_c)$ als Verbindungslinie der Schenkelmitten. Im rechtwinkligen Dreieck XYB ist aber

$$XY = XA' + YA' = 2r$$
$$XB^2 = XY.XA' = r(\varrho_a - \varrho)$$
$$YB^2 = XY.YA' = r(\varrho_b + \varrho_c)$$

und da ausserdem

$$OO_a = 2XB, \quad O_bO_c = 2YB$$

ist, so folgt

XVIII. $OO_a^2 = 4r(\varrho_a - \varrho)$ $\quad O_bO_c^2 = 4r(\varrho_b + \varrho_c)$

$OO_b^2 = 4r(\varrho_b - \varrho)$ $\quad O_aO_c^2 = 4r(\varrho_a + \varrho_c)$

$OO_c^2 = 4r(\varrho_c - \varrho)$ $\quad O_aO_b^2 = 4r(\varrho_a + \varrho_b)$

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$$

$$OO_a^2 + OO_b^2 + OO_c^2 + O_bO_c^2 + O_aO_c^2 + O_aO_b^2 = 48r^2$$

Wendet man auf die Dreiecke $O_aO_bO_c$, OO_bO_c etc. den allgemeinen Pythagoras an, so findet man mit Hülfe der letzten Gleichungen

XIX. $OA.OO_a = OB.OO_b = OC.OO_c = 4r\varrho$

$O_aA.O_aO = O_aB.O_aO_c = O_aC.O_aO_b = 4r\varrho_a$

$O_bA.O_bO_c = O_bB.O_bO = O_bC.O_bO_a = 4r\varrho_b$

$O_cA.O_cO_b = O_cB.O_cO_a = O_cC.O_cO = 4r\varrho_c$

Wegen $OO_a = 2OX$ und $O_bO_c = 2O_bY$ ist nach XIX. $OA.OX = 2r\varrho$ und $O_bA.O_bY = 2r\varrho_b$. Drückt man die Potenz der Punkte O in Bezug auf den Umkreis durch ihre Entfernung vom Mittelpunkt und durch den Radius des Kreises aus, so erhält man $OA.OX = r^2 - OM^2$ und $O_bA.O_bY = O_bM^2 - r^2$, oder $OM^2 = OP^2 = r^2 - 2r\varrho$, $O_bM^2 = r^2 + 2r\varrho_b$. Da ferner die Punkte O und M von ABC den Punkten O'' und H von $A''B''C''$ entsprechen, so wird

XX. $PO^2 = 4OM^2 = O''H^2 = 4(r^2 - 2r\varrho)$

$P_aO_a^2 = 4O_aM^2 = O_a''H^2 = 4(r^2 + 2r\varrho_a)$

$P_bO_b^2 = 4O_bM^2 + O_b''H^2 = 4(r^2 + 2r\varrho_b)$

$P_cO_c^2 = 4O_cM^2 + O_c''H^2 = 4(r^2 + 2r\varrho_c)$

$$PO^2 + P_aO_a^2 + P_bO_b^2 + P_cO_c^2 = 4(OM^2 + O_aM^2 + O_bM^2 + O_cM^2) =$$
$$O''H^2 + O_a''H^2 + O_b''H^2 + O_c''H^2 = 48r^2$$

18. Aus den bekannten Gleichungen

a) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4r} = \varrho s$

$$\varrho = \frac{\Delta}{s} \quad \varrho_a = \frac{\Delta}{s-a} \quad \varrho_b = \frac{\Delta}{s-b} \quad \varrho_c = \frac{\Delta}{s-c}$$

liest man sofort die folgenden ab:

b)

$$\varrho_a - \varrho = \frac{a\Delta}{s(s-a)} \qquad \varrho_b - \varrho = \frac{b\Delta}{s(s-b)} \qquad \varrho_c - \varrho = \frac{c\Delta}{s(s-c)}$$

$$\varrho_b + \varrho_c = \frac{a\Delta}{(s-b)(s-c)} \quad \varrho_a + \varrho_c = \frac{b\Delta}{(s-a)(s-c)} \quad \varrho_a + \varrho_b = \frac{c\Delta}{(s-a)(s-b)}$$

$$\varrho_a\varrho = (s-b)(s-c) \qquad \varrho_b\varrho = (s-a)(s-c) \qquad \varrho_c\varrho = (s-a)(s-b)$$
$$\varrho_b\varrho_c = s(s-a) \qquad \varrho_a\varrho_c = s(s-b) \qquad \varrho_a\varrho_b = s(s-c)$$
$$\varrho_b\varrho_c + \varrho_a\varrho = bc \qquad \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho = ac \qquad \varrho_a\varrho_b + \varrho_c\varrho = ab$$
$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2$$
$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \Delta^2$$

c) $$\frac{2\varrho_a\varrho}{\varrho_a-\varrho} = \frac{2\varrho_b\varrho_c}{\varrho_b+\varrho_c} = \frac{2\Delta}{a} = h_a$$
$$\frac{2\varrho_b\varrho}{\varrho_b-\varrho} = \frac{2\varrho_a\varrho_c}{\varrho_a+\varrho_c} = \frac{2\Delta}{b} = h_b$$
$$\frac{2\varrho_c\varrho}{\varrho_c-\varrho} = \frac{2\varrho_a\varrho_b}{\varrho_a+\varrho_b} = \frac{2\Delta}{c} = h_c$$

d) $$(\varrho_a-\varrho)(\varrho_b-\varrho)(\varrho_c-\varrho) = \frac{abc}{s^2}\Delta = 4r\varrho^2$$
$$(\varrho_a-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b)(\varrho_a+\varrho_c) = \frac{abc}{(s-a)^2}\Delta = 4r\varrho_a^2$$
$$(\varrho_b-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b)(\varrho_b+\varrho_c) = \frac{abc}{(s-b)^2}\Delta = 4r\varrho_b^2$$
$$(\varrho_c-\varrho)(\varrho_a+\varrho_c)(\varrho_b+\varrho_c) = \frac{abc}{(s-c)^2}\Delta = 4r\varrho_c^2$$
$$(\varrho_a+\varrho_b)(\varrho_a+\varrho_c)(\varrho_b+\varrho_c) = \frac{abc}{\Delta}s^2 = 4rs^2$$

Aus XVIII. und XIX. folgt
$$OA^2 = \frac{4r\varrho^2}{\varrho_a-\varrho} \qquad O_bA^2 = \frac{4r\varrho_b^2}{\varrho_b+\varrho_c}$$
und dies giebt mit 18d):

XXI.

$$OA^2 = (\varrho_b-\varrho)(\varrho_c-\varrho) \quad OB^2 = (\varrho_a-\varrho)(\varrho_c-\varrho) \quad OC^2 = (\varrho_a-\varrho)(\varrho_b-\varrho)$$
$$O_aA^2 = (\varrho_a+\varrho_b)(\varrho_a+\varrho_c) \quad O_aB^2 = (\varrho_a-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b) \quad O_aC^2 = (\varrho_a-\varrho)(\varrho_a+\varrho_c)$$
$$O_bA^2 = (\varrho_b-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b) \quad O_bB^2 = (\varrho_a+\varrho_b)(\varrho_b+\varrho_c) \quad O_bC^2 = (\varrho_b-\varrho)(\varrho_b+\varrho_c)$$
$$O_cA^2 = (\varrho_c-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b) \quad O_cB^2 = (\varrho_c-\varrho)(\varrho_b+\varrho_c) \quad O_cC^2 = (\varrho_a+\varrho_c)(\varrho_b+\varrho_c)$$
$$a^2 = (\varrho_a-\varrho)(\varrho_b+\varrho_c) \quad b^2 = (\varrho_b-\varrho)(\varrho_a+\varrho_c) \quad c^2 = (\varrho_c-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b)$$
(cf. 18b)

XXII.
$$OA.OB.OC = 4r\varrho^2$$
$$O_aA.O_aB.O_aC = 4r\varrho_a^2$$
$$O_bA.O_bB.O_bC = 4r\varrho_b^2$$
$$O_cA.O_cB.O_cC = 4r\varrho_c^2$$
$$O_aA.O_bB.O_cC = 4rs^2$$

XXIII. $$\begin{aligned} OA.O_aA &= O_bA.O_cA = bc = \varrho_b\varrho_c + \varrho_a\varrho \qquad \text{(cf. 18b)}\\ OB.O_bB &= O_aB.O_cB = ac = \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho\\ OC.O_cC &= O_aC.O_bC = ab = \varrho_a\varrho_b + \varrho_c\varrho\\ O_aC.O_bA.O_cB &= O_aB.O_bC.O_cA = abc = 4r\varrho s \end{aligned}$$

Aus XVIII. und 18d) folgt:

XXIV. $$\begin{aligned} OO_a\,.OO_b\,.OO_c &= 16r^2\varrho\\ O_aO\,.O_aO_b.O_aO_c &= 16r^2\varrho_a\\ O_bO_a.O_bO\,.O_bO_c &= 16r^2\varrho_b\\ O_cO_a.O_cO_b.O_cO &= 16r^2\varrho_c\\ O_aO_b.O_aO_c.O_bO_c &= 16r^2s \end{aligned}$$

19. Nach 12. ist:

$$\mathfrak{ABC} : O_aO_bO_c = \mathfrak{AB}^2 : O_aO_b^2 = \varrho^2 : 4r^2$$

und deswegen mit Hülfe von XVIII.:

XXV.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{AB}^2 = \dfrac{\varrho^2}{r}(\varrho_a+\varrho_b) & \mathfrak{BC}^2 = \dfrac{\varrho^2}{r}(\varrho_b+\varrho_c) & \mathfrak{AC}^2 = \dfrac{\varrho^2}{r}(\varrho_a+\varrho_c)\\[2ex] \mathfrak{A}_a\mathfrak{B}_a{}^2 = \dfrac{\varrho_a{}^2}{r}(\varrho_c-\varrho) & \mathfrak{B}_a\mathfrak{C}_a{}^2 = \dfrac{\varrho_a{}^2}{r}(\varrho_b+\varrho_c) & \mathfrak{A}_a\mathfrak{C}_a{}^2 = \dfrac{\varrho_a{}^2}{r}(\varrho_b-\varrho)\\[2ex] \mathfrak{A}_b\mathfrak{B}_b{}^2 = \dfrac{\varrho_b{}^2}{r}(\varrho_c-\varrho) & \mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_b{}^2 = \dfrac{\varrho_b{}^2}{r}(\varrho_a-\varrho) & \mathfrak{A}_b\mathfrak{C}_b{}^2 = \dfrac{\varrho_b{}^2}{r}(\varrho_a+\varrho_c)\\[2ex] \mathfrak{A}_c\mathfrak{C}_c{}^2 = \dfrac{\varrho_c{}^2}{r}(\varrho_a+\varrho_b) & \mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_c{}^2 = \dfrac{\varrho_c{}^2}{r}(\varrho_a-\varrho) & \mathfrak{A}_c\mathfrak{C}_c{}^2 = \dfrac{\varrho_c{}^2}{r}(\varrho_b-\varrho) \end{array}$$

$\mathfrak{BCB}_a\mathfrak{C}_a$ ist ein gleichschenkliges Trapez, also ein Kreisviereck; zwei gegenüberliegende Seiten desselben sind $\mathfrak{BB}_a = \mathfrak{CC}_a = a$, die beiden andern $\mathfrak{BC}$ und $\mathfrak{B}_a\mathfrak{C}_a$, die Diagonalen $\mathfrak{BC}_a$ und $\mathfrak{B}_a\mathfrak{C}$, folglich nach dem Ptolemäus und mit Hülfe von XXI. und XXV.:

XXVI.

$$\begin{aligned} \mathfrak{BC}_a{}^2 &= \mathfrak{B}_a\mathfrak{C}^2 = a^2 + \frac{\varrho_a\varrho}{r}(\varrho_b+\varrho_c) = (\varrho_b+\varrho_c)\left(\varrho_a-\varrho+\frac{\varrho_a\varrho}{r}\right) = a^2+\frac{a\varDelta}{r}\\ \mathfrak{AC}_b{}^2 &= \mathfrak{A}_b\mathfrak{C}^2 = b^2 + \frac{\varrho_b\varrho}{r}(\varrho_a+\varrho_c) = (\varrho_a+\varrho_c)\left(\varrho_b-\varrho+\frac{\varrho_b\varrho}{r}\right) = b^2+\frac{b\varDelta}{r}\\ \mathfrak{AB}_c{}^2 &= \mathfrak{A}_c\mathfrak{B}^2 = c^2 + \frac{\varrho_c\varrho}{r}(\varrho_a+\varrho_b) = (\varrho_a+\varrho_b)\left(\varrho_c-\varrho+\frac{\varrho_c\varrho}{r}\right) = c^2+\frac{c\varDelta}{r} \end{aligned}$$

Auch $\mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_b\mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_c$ ist ein gleichschenkliges Trapez, demnach ein Kreisviereck; zwei gegenüberliegende Seiten desselben sind $\mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_b$ und $\mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_c$, die beiden andern $\mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_c = \mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_b$, die Diagonalen $\mathfrak{B}_b\mathfrak{B}_c = \mathfrak{C}_b\mathfrak{C}_c = a$, demnach mit Benutzung von XXV.:

XXVII.

$$\mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_c^2 = \mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_b^2 = a^2 - \frac{\varrho_b\varrho_c}{r}(\varrho_a-\varrho) = (\varrho_a-\varrho)\left(\varrho_b+\varrho_c-\frac{\varrho_b\varrho_c}{r}\right) = a^2-\frac{a\Delta}{r}$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{C}_c^2 = \mathfrak{A}_c\mathfrak{C}_a^2 = b^2 - \frac{\varrho_a\varrho_c}{r}(\varrho_b-\varrho) = (\varrho_b-\varrho)\left(\varrho_a+\varrho_c-\frac{\varrho_a\varrho_c}{r}\right) = b^2-\frac{b\Delta}{r}$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{B}_b^2 = \mathfrak{A}_b\mathfrak{B}_a^2 = c^2 - \frac{\varrho_a\varrho_b}{r}(\varrho_c-\varrho) = (\varrho_c-\varrho)\left(\varrho_a+\varrho_b-\frac{\varrho_a\varrho_b}{r}\right) = c^2-\frac{c\Delta}{r}$$

XXVIII.

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}_a^2+\mathfrak{B}_a\mathfrak{C}^2+\mathfrak{B}_b\mathfrak{C}_c^2+\mathfrak{B}_c\mathfrak{C}_b^2 = 4a^2 = 4(\varrho_a-\varrho)(\varrho_b+\varrho_c)$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}_b^2+\mathfrak{A}_b\mathfrak{C}^2+\mathfrak{A}_a\mathfrak{C}_c^2+\mathfrak{A}_c\mathfrak{C}_a^2 = 4b^2 = 4(\varrho_b-\varrho)(\varrho_a+\varrho_c)$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_c^2+\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}^2+\mathfrak{A}_a\mathfrak{B}_b^2+\mathfrak{A}_b\mathfrak{B}_a^2 = 4c^2 = 4(\varrho_c-\varrho)(\varrho_a+\varrho_b)$$

20. Es ist

$$\mathfrak{A}B\,.\,\mathfrak{A}C = \mathfrak{A}_aB.\mathfrak{A}_aC = (s-b)(s-c) = \varrho_a\varrho$$
$$\mathfrak{A}_cB.\mathfrak{A}_cC = \mathfrak{A}_bB.\mathfrak{A}_bC = s(s-a) = \varrho_b\varrho_c$$

andererseits sind die Potenzen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_b$ in Bezug auf den Umkreis $r^2 - M\mathfrak{A}^2$ und $M\mathfrak{A}_b^2 - r^2$, folglich hat man:

XXIX.

$$M\mathfrak{A}^2 = M\mathfrak{A}_a^2 = r^2-\varrho_a\varrho \qquad M\mathfrak{A}_b^2 = M\mathfrak{A}_c^2 = r^2+\varrho_b\varrho_c$$
$$M\mathfrak{B}^2 = M\mathfrak{B}_b^2 = r^2-\varrho_b\varrho \qquad M\mathfrak{B}_a^2 = M\mathfrak{B}_c^2 = r^2+\varrho_a\varrho_c$$
$$M\mathfrak{C}^2 = M\mathfrak{C}_c^2 = r^2-\varrho_c\varrho \qquad M\mathfrak{C}_a^2 = M\mathfrak{C}_b^2 = r^2+\varrho_a\varrho_b$$

Wegen

$$\mathfrak{A}B = \frac{a}{2} - A'\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}C = \frac{a}{2} + A'\mathfrak{A}$$

ist

$$\mathfrak{A}B.\mathfrak{A}C = \frac{a^2}{4} - A'\mathfrak{A}^2$$

und wegen

$$\mathfrak{A}_cB = A'\mathfrak{A}_c - \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_cC = A'\mathfrak{A}_c + \frac{a}{2}$$

ist

$$\mathfrak{A}_cB.\mathfrak{A}_cC = A'\mathfrak{A}_c^2 - \frac{a^2}{4}$$

aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_a = 2A'\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c = 2A'\mathfrak{A}_c$$

folglich:

XXX.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_a^2 = a^2-4\varrho_a\varrho \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_b^2 = b^2-4\varrho_b\varrho \qquad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_c^2 = c^2-4\varrho_c\varrho$$
$$\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c^2 = a^2+4\varrho_b\varrho_c \qquad \mathfrak{B}_a\mathfrak{B}_c^2 = b^2+4\varrho_a\varrho_c \qquad \mathfrak{C}_a\mathfrak{C}_b^2 = c^2+4\varrho_a\varrho_b$$

Mit diesen Gleichungen erhält man aus den Dreiecken $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{A}_a$, $\mathfrak{A}_a'\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_b'\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_c$ und $\mathfrak{A}_c'\mathfrak{A}_c\mathfrak{A}_b$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_a^2 = a^2 - 4\varrho_a\varrho + 4\varrho^2 \qquad \mathfrak{A}_b'\mathfrak{A}_c^2 = a^2 + 4\varrho_b\varrho_c + 4\varrho_b^2$$
$$\mathfrak{A}_a'\mathfrak{A}^2 = a^2 - 4\varrho_a\varrho + 4\varrho_a^2 \qquad \mathfrak{A}_c'\mathfrak{A}_b^2 = a^2 + 4\varrho_b\varrho_c + 4\varrho_c^2$$

Als entsprechende Seiten ähnlicher Dreiecke sind

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_a = 2OA' \qquad \mathfrak{A}_a'\mathfrak{A} = 2O_aA' \qquad \mathfrak{A}_b'\mathfrak{A}_c = 2O_bA' \qquad \mathfrak{A}_c'\mathfrak{A}_b = 2O_cA'$$

und als entsprechende Strecken in den ähnlichen Systemen $A''B''C''$ und ABC

$$O''A = 2OA' \qquad O_a''A = 2O_aA' \qquad O_b''A = 2O_bA' \qquad O_c''A = 2O_cA'$$

daher $O''A = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_a$ etc. oder die Punkte O'' und $\mathfrak{A}'$ liegen symmetrisch auf der Transversale $A\mathfrak{A}_a$. Setzt man schliesslich für a^2 den Wert aus XXI. ein, so wird

XXXI.

$$O''A^2 = (\varrho_a - \varrho)(\varrho_b + \varrho_c - 4\varrho) \qquad O''B^2 = (\varrho_b - \varrho)(\varrho_a + \varrho_c - 4\varrho)$$
$$O_a''A^2 = (\varrho_a - \varrho)(\varrho_b + \varrho_c + 4\varrho_a) \qquad O_a''B^2 = (\varrho_a + \varrho_c)(\varrho_b - \varrho + 4\varrho_a)$$
$$O_b''A^2 = (\varrho_b + \varrho_c)(\varrho_a - \varrho + 4\varrho_b) \qquad O_b''B^2 = (\varrho_b - \varrho)(\varrho_a + \varrho_c + 4\varrho_b)$$
$$O_c''A^2 = (\varrho_b + \varrho_c)(\varrho_a - \varrho + 4\varrho_c) \qquad O_c''B^2 = (\varrho_a + \varrho_c)(\varrho_b - \varrho + 4\varrho_c)$$
$$O''C^2 = (\varrho_c - \varrho)(\varrho_a + \varrho_b - 4\varrho)$$
$$O_a''C^2 = (\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_c - \varrho + 4\varrho_a)$$
$$O_b''C^2 = (\varrho_a + \varrho_b)(\varrho_c - \varrho + 4\varrho_b)$$
$$O_c''C^2 = (\varrho_c - \varrho)(\varrho_a + \varrho_b + 4\varrho_c)$$

Denkt man $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_a'\mathfrak{A}_a$ auf AA_1 projicirt, so wird

$$\mathfrak{A}_a'\mathfrak{A} : \mathfrak{A}_a'A = O_a''A : O_a''\mathfrak{A} = 2\varrho_a : 2\varrho_a + h_a = \varrho_a - \varrho : \varrho_a$$
$$\mathfrak{A}_b'\mathfrak{A}_c : \mathfrak{A}_b'A = O_b''A : O_b''\mathfrak{A}_c = 2\varrho_b : 2\varrho_b - h_a = \varrho_b + \varrho_c : \varrho_b \quad \text{etc.}$$

folglich:

XXXII.

$$O_a''A : O_a''\mathfrak{A} = \varrho_a - \varrho : \varrho_a \qquad O_a''B : O_a''\mathfrak{B}_c = \varrho_a + \varrho_c : \varrho_a$$
$$O_b''A : O_b''\mathfrak{A}_c = \varrho_b + \varrho_c : \varrho_b \qquad O_b''B : O_b''\mathfrak{B} = \varrho_b - \varrho : \varrho_b$$
$$O_c''A : O_c''\mathfrak{A}_b = \varrho_b + \varrho_c : \varrho_c \qquad O_c''B : O_c''\mathfrak{B}_a = \varrho_a + \varrho_c : \varrho_c$$
$$O''A : O''\mathfrak{A}_a = \varrho_a - \varrho : \varrho \qquad O''B : O''\mathfrak{B}_b = \varrho_b - \varrho : \varrho$$
$$O_a''C : O_a''\mathfrak{C}_b = \varrho_a + \varrho_b : \varrho_a$$
$$O_b''C : O_b''\mathfrak{C}_a = \varrho_a + \varrho_b : \varrho_b$$
$$O_c''C : O_c''\mathfrak{C} = \varrho_c - \varrho : \varrho_c$$
$$O''C : O''\mathfrak{C}_c = \varrho_c - \varrho : \varrho$$

Denkt man die Seiten der Dreiecke $AB\mathfrak{A}$, $AB\mathfrak{A}_a$, $AB\mathfrak{A}_b$, $AB\mathfrak{A}_c$ durch je eine Transversale $C\mathfrak{C}$, $C\mathfrak{C}_a$, $C\mathfrak{C}_b$, $C\mathfrak{C}_c$ geschnitten, drückt die Abschnitte auf den Seiten von ABC durch s, $s-a$, $s-b$, $s-c$

aus und setzt für $s-b:s-c=\varrho_c:\varrho_b$ und hiernach für $s-b:a=\varrho_c:\varrho_b+\varrho_c$ etc., so erhält man mit Hülfe des Ceva:

XXXIII.

$$\begin{array}{ll} LA\ :L\mathfrak{A}\ =\varrho_b+\varrho_c:\varrho_a & L_cB:L_c\mathfrak{B}_c=\varrho_b-\varrho\ :\varrho_a \\ L_cA:L_c\mathfrak{A}_c=\varrho_a-\varrho\ :\varrho_b & LB\ :L\mathfrak{B}\ =\varrho_a+\varrho_c:\varrho_b \\ L_bA:L_b\mathfrak{A}_b=\varrho_a-\varrho\ :\varrho_c & L_aB:L_a\mathfrak{B}_a=\varrho_b-\varrho\ :\varrho_c \\ L_aA:L_a\mathfrak{A}_a=\varrho_b+\varrho_c:\varrho & L_bB:L_b\mathfrak{B}_b=\varrho_a+\varrho_c:\varrho \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_bC:L_b\mathfrak{C}_b=\varrho_c-\varrho\ :\varrho_a \\ L_aC:L_a\mathfrak{C}_a=\varrho_c-\varrho\ :\varrho_b \\ LC\ :L\mathfrak{C}\ =\varrho_a+\varrho_b:\varrho_c \\ L_cC:L_c\mathfrak{C}_c=\varrho_a+\varrho_b:\varrho \end{array}$$

21. Es ist Wkl. $BAA_1=BCC_1$, und weil AB_1HC_1 und CA_1HB_1 Kreisvierecke sind, so ist auch $BAA_1=C_1B_1H$ und $BCC_1=A_1B_1H$, folglich $C_1B_1H=A_1B_1H$ d. h. im Dreieck $A_1B_1C_1$ wird der Winkel B_1 durch BB_1 halbirt, ebenso A_1 durch AA_1 und C_1 durch CC_1. Daher sind $HABC$ die Berührungskreiscentra für $A_1B_1C_1$. Im Folgenden soll immer ein spitzwinkliges Dreieck vorausgesetzt werden, für stumpf- und rechtwinklige Dreiecke erleiden die Formeln, in welchen Höhenabschnitte auftreten, geringe und leicht erkennbare Modificationen. Der Umkreis für $A_1B_1C_1$ ist der Feuerbachsche Kreis von ABC, sein Radius ist $\frac{r}{2}$, sein Mittelpunkt M' liegt nach I. in der Mitte von HM. Die Radien der Berührungskreise für $A_1B_1C_1$ mögen mit $\varrho^1\,\varrho_a^1\,\varrho_b^1\,\varrho_c^1$, die oberen Höhenabschnitte $HA\ HB\ HC$ mit $h_a'\,h_b'\,h_c'$, die unteren $HA_1\ HB_1\ HC_1$ mit $h_a''\,h_b''\,h_c''$ bezeichnet werden, dann hat man mit Anwendung von XIX. auf das Dreieck $A_1B_1C_1$:

XXXIV.

$$\begin{array}{l} h_a'h_a''=h_b'h_b''=h_c'h_c''=2r\varrho^1 \\ h_ah_a'\ =bAB_1\ =cAC_1\ =2r\varrho_a^1 \\ h_bh_b'\ =aBA_1\ =cBC_1\ =2r\varrho_b^1 \\ h_ch_c'\ =aCA_1\ =bCB_1\ =2r\varrho_c^1 \end{array}$$

Nach 8. ist

$$\begin{aligned} 2aBA_1 &= a^2+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2-2ac=(a+b+c)(a-b+c)-2ac \\ &= 4s(s-b)-2ac=4\varrho_a\varrho_c-2(\varrho_a\varrho_c+\varrho_b\varrho) \end{aligned}$$

folglich:

XXXV.

$$\begin{array}{l} h_ah_a'=2r\varrho_a^1=\varrho_b\varrho_c-\varrho_a\varrho \\ h_bh_b'=2r\varrho_b^1=\varrho_a\varrho_c-\varrho_b\varrho \\ h_ch_c'=2r\varrho_c^1=\varrho_a\varrho_b-\varrho_c\varrho \end{array}$$

Mit Hülfe von XX. erhält man:

XXXVI.

$$\begin{aligned}
4M'H^2 &= r^2 - 4r\varrho^1 &&= r^2 - 2h_a'h_a'' &&= MH^2\\
4M'A^2 &= r^2 + 4r\varrho_a^1 &&= r^2 + 2h_ah_a' &&= r^2 + \varrho_b\varrho_c - \varrho_a\varrho\\
4M'B^2 &= r^2 + 4r\varrho_b^1 &&= r^2 + 2h_bh_b' &&= r^2 + \varrho_a\varrho_c - \varrho_b\varrho\\
4M'C^2 &= r^2 + 4r\varrho_c^1 &&= r^2 + 2h_ch_c' &&= r^2 + \varrho_a\varrho_b - \varrho_c\varrho
\end{aligned}$$

In den ähnlichen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sind HA und MA' entsprechende Linien, folglich $h_a' = 2MA'$, $h_b' = 2MB'$, $h_c' = 2MC'$. Ferner ist (cf. 17) $XA' = MX - MA'$ und $YA' = MY + MA'$, daher gleichfalls nach 17.:

XXXVII.

$$\begin{aligned}
\varrho_a - \varrho &= 2r - h_a' & \qquad \varrho_b + \varrho_c &= 2r + h_a'\\
\varrho_b - \varrho &= 2r - h_b' & \varrho_a + \varrho_c &= 2r + h_b'\\
\varrho_c - \varrho &= 2r - h_c' & \varrho_a + \varrho_b &= 2r + h_c'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2h_a' &= -\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho\\
2h_b' &= \varrho_a - \varrho_b + \varrho_c + \varrho\\
2h_c' &= \varrho_a + \varrho_b - \varrho_c + \varrho\\
4r &= \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho
\end{aligned}$$

22. Die Projection von OA auf AA_1 ist $h_a - \varrho$, folglich im Dreieck OHA nach dem allgemeinen Pythagoras

$$\begin{aligned}
OH^2 &= OA^2 + h_a'^2 - 2h_a'(h_a - \varrho) = OA^2 - h_ah_a' - h'h_a'' + 2h_a'\varrho\\
&= \varrho(\varrho_a - \varrho_b - \varrho_c + \varrho) - 2r\varrho^1 + 2h_a'\varrho
\end{aligned}$$

wo zunächst $h_a'^2 = h_a'(h_a - h_a'')$ und dann für OA^2, h_ah_a' und $h_a'h_a''$ die Werte aus dem vorhergehenden gesetzt sind. Ebenso findet man

$$O_aH^2 = \varrho_a(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho) - 2r\varrho^1 - 2h_a'\varrho$$

Nimmt man jetzt die Werte für $2h_a'$ aus XXXVII., so folgt

XXXVIII.

$$\begin{aligned}
OH^2 &= 2\varrho^2 - 2r\varrho^1 & \qquad O_bH^2 &= 2\varrho_b^2 - 2r\varrho^1\\
O_aH^2 &= 2\varrho_a^2 - 2r\varrho^1 & O_cH^2 &= 2\varrho_c^2 - 2r\varrho^1
\end{aligned}$$

Im Dreieck ABA' ist

$$c^2 = A'A^2 + \frac{a^2}{4} \pm aA'A_1$$

und im Dreieck ACA'

$$b^2 = A'A^2 + \frac{a^2}{4} \mp aA'A_1$$

folglich:

$$4A'A^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

Entsprechend also in den Dreiecken OHM, O_aHM etc.

$$4M'O^2 = 2OH^2 + 2OM^2 - HM^2 = 4\varrho^2 - 4r\varrho^1 + 2r^2 - 4r\varrho - r^2 + 4r\varrho^1 = r^2 - 4r\varrho + 4\varrho^2$$

$$4M'O_a^2 = 2O_aH^2 + 2O_aM^2 - HM^2 = 4\varrho_a^2 - 4r\varrho^1 + 2r^2 + 4r\varrho_a - r^2 + 4r\varrho^1 = r^2 + 4r\varrho_a + 4\varrho_a^2$$

daher

$$\text{XXXIX.} \qquad M'O = \frac{r}{2} - \varrho \qquad M'O_b = \frac{r}{2} + \varrho_b$$

$$M'O_a = \frac{r}{2} + \varrho_a \qquad M'O_c = \frac{r}{2} + \varrho_c$$

d. h. Der Feuerbachsche Kreis berührt die vier Berührungskreise.

23. Eine Reihe von je drei gleichartigen Strecken sind die Wurzeln kubischer Gleichungen, deren Coefficienten in den vorhergehenden Formeln durch die Grössen $r\varrho$ und s bereits ausgedrückt sind oder doch sehr leicht aus ihnen ermittelt werden können. Aus 18a) und b) und XVIII. hat man:

$$\text{XXXX.} \qquad a + b + c = 2s$$

$$ab + ac + bc = s^2 + 4r\varrho + \varrho^2$$

$$abc = 4r\varrho s$$

$$\text{XXXXI.} \qquad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho$$

$$\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2$$

$$\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \varrho s^2$$

Es war AA_2 ein Durchmesser im Umkreis. Aus Aehnlichkeit der Dreiecke ACA_2 und ABA_1 ergiebt sich $b : 2r = h_a : c$, daher ist:

$$2rh_a = bc \qquad 2rh_b = ac \qquad 2rh_c = ab$$

$$4r^2h_ah_b = c.abc \qquad 4r^2h_ah_c = b.abc \qquad 4r^2h_bh_c = a.abc$$

$$8r^3h_ah_bh_c = (abc)^2$$

$$\text{XXXXII.} \qquad h_a + h_b + h_c = \frac{1}{2r}(s^2 + 4r\varrho + \varrho^2)$$

$$h_ah_b + h_ah_c + h_bh_c = \frac{1}{2r}.4\varrho s^2$$

$$h_ah_bh_c = \frac{1}{2r}.4\varrho^2 s^2$$

Aus XXXVII. folgt:

$$\text{a)} \quad h_a' + h_b' + h_c' = 2(r + \varrho)$$

und hieraus wegen

$$h_a + h_b + h_c = h_a' + h_b' + h_c' + (h_a'' + h_b'' + h_c'')$$

$$\text{b)}\quad h_a''+h_b''+h_c'' = \frac{1}{2r}(s^2+\varrho^2-4r^2)$$

Schneidet AA_1 den Umkreis in A_3, so ist A_3 Gegenpunkt von H in Bezug auf BC, folglich:

$$BA_3 = BH = h_b' \qquad CA_3 = CH = h_c' \qquad A_1A_3 = HA_1 = h_a''$$

und im Dreieck A_3BC nach 20.:

$$\text{c)}\quad h_b'h_c' = 2rh_a'' \qquad h_a'h_c' = 2rh_b'' \qquad h_a'h_b' = 2rh_c''$$

daher

$$\text{d)}\quad h_a'h_b'+h_a'h_c'+h_b'h_c' = s^2+\varrho^2-4r^2$$

Es ist

$$4r\varrho^2 = (\varrho_a-\varrho)(\varrho_b-\varrho)(\varrho_c-\varrho) = (2r-h_a')(2r-h_b')(2r-h_c')$$
$$= 8r^3-(h_a'+h_b'+h_c')4r^2+(h_a'h_b'+h_a'h_c'+h_b'h_c')2r-h_a'h_b'h_c'$$

daher

$$\text{e)}\quad h_a'h_b'h_c' = 2r\{s^2-(2r+\varrho)^2\}$$

Ferner

$$4r^2.h_a''h_b'' = h_c'.h_a'h_b'h_c' \qquad 4r^2.h_a''h_c'' = h_b'.h_a'h_b'h_c'$$
$$4r^2.h_b''h_c'' = h_a'.h_a'h_b'h_c'$$
$$8r^3.h_a''h_b''h_c'' = (h_a'h_b'h_c')^2$$

daher

XXXXIII.
$$h_a'+h_b'+h_c' = 2(r+\varrho)$$
$$h_a'h_b'+h_a'h_c'+h_b'h_c' = s^2+\varrho^2-4r^2$$
$$h_a'h_b'h_c' = 2r\{s^2-(2r+\varrho)^2\}$$

XXXXIV.
$$h_a''+h_b''+h_c'' = \frac{1}{2r}(s^2+\varrho^2-4r^2)$$
$$h_a''h_b''+h_a''h_c''+h_b''h_c'' = \frac{r+\varrho}{r}\{s^2-(2r+\varrho)^2\}$$
$$h_a''h_b''h_c'' = \frac{1}{2r}\{s^2-(2r+\varrho)^2\}^2$$

22. Nach XXXVII. ist

$$(\varrho_a-\varrho)(\varrho_b-\varrho) = 4r^2-2r(h_a'+h_b')+h_a'h_b'$$
$$(\varrho_a+\varrho_c)(\varrho_b+\varrho_c) = 4r^2+2r(h_a'+h_b')+h_a'h_b' \quad \text{etc.}$$

Bezeichnet man noch die Strecken OO_a OO_b OO_c mit n_a n_b n_c, O_bO_c O_aO_c O_aO_b mit m_a m_b m_c, $\mathfrak{BC}$ $\mathfrak{AC}$ $\mathfrak{AB}$ mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$, so erhält man aus XVIII. und XXIV. mit Hülfe von XXXXIII. leicht:

XXXXV.
$$n_a^2+n_b^2+n_c^2 = 8r(2r-\varrho)$$
$$n_a^2n_b^2+n_a^2n_c^2+n_b^2n_c^2 = 16r^2(s^2-8r\varrho+\varrho^2)$$
$$n_a^2n_b^2n_c^2 = 256r^4\varrho^2$$

$$\text{XXXXVI.} \qquad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 8r(4r+\varrho)$$
$$m_a^2 m_b^2 + m_a^2 m_c^2 + m_b^2 m_c^2 = 16r^2\{s^2 + (4r+\varrho)^2\}$$
$$m_a^2 m_b^2 m_c^2 = 256 r^4 s^2$$

$$\text{XXXXVII.} \qquad \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = \frac{2\varrho^2}{r}(4r+\varrho)$$
$$\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 = \frac{\varrho^4}{r^2}\{s^2 + (4r+\varrho)^2\}$$
$$\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 = \frac{4\varrho^6 s^2}{r^2}$$

24. Die Strecken OA OB OC mögen mit w_a w_b w_c, O_aA O_bB O_cC mit v_a v_b v_c bezeichnet werden, so ergiebt sich aus XXI. mit Hülfe von 22. und aus XXII.:

$$\text{XXXXVIII.} \qquad w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 = s^2 - 8r\varrho + \varrho^2$$
$$w_a^2 w_b^2 + w_a^2 w_c^2 + w_b^2 w_c^2 = 8r\varrho^2(2r-\varrho)$$
$$w_a^2 w_b^2 w_c^2 = 16 r^2 \varrho^4$$

$$\text{XXXXIX.} \qquad v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = s^2 + (4r+\varrho)^2$$
$$v_a^2 v_b^2 + v_a^2 v_c^2 + v_b^2 v_c^2 = 8rs^2(4r+\varrho)$$
$$v_a^2 v_b^2 v_c^2 = 16 r^2 s^4$$

$$\text{L.} \qquad \frac{abc}{v_a v_b v_c} = \frac{\mathfrak{abc}}{h_a h_b h_c} = \frac{n_a n_b n_c}{m_a m_b m_c} = \frac{w_a w_b w_c}{abc} = \frac{\varrho}{s}.$$

XII.

Miscellen.

1.

Zur Theorie der asymptotischen Punkte.

Es ist üblich, den Curvenpunkt, welchem sich eine Curve in unendlich vielen, immer kleiner werdenden Windungen nähert, einen asymptotischen Punkt zu nennen; so z. B. ist für die Curve, welche in den Polarcoordinaten r und u die Gleichung $r = \frac{a}{u}$ hat, der Pol ein solcher Punkt.

Mit gleichem Rechte werden wir auch jenen Punkt einer Curve als einen asymptotischen Punkt bezeichnen können, den die Curve erst erreicht, nachdem sie unendlich viele Oscillationen gemacht hat, die dem betreffenden Punkte immer näher rücken und dabei immer kleiner werden. Wir scheuen uns ja auch nicht, ausser der Geraden, welche sich einer Curve immer mehr und mehr nähert und sie erst im Unendlichen erreicht, (wie z. B. die Abscissenaxe OX die Curve $y = \frac{a}{x}$), auch jene Gerade eine Asymptote zu nennen, um welche sich die Curve in unendlich vielen, immer kleiner werdenden Schwingungen bewegt und erst im Unendlichen in sie übergeht (z. B. die Abscissenaxe OX für die Curve ... $y = \frac{a}{x} \sin x$).

Stellen wir uns zwei Curven der erst genannten zwei Arten vor, so werden wir sogleich erkennen, dass sich der Radiusvector r in beiden Fällen dem Grenzwerte Null nähern muss, wenn der Polarwinkel u ins Unendliche wächst — nur wird im 1. Falle u alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen können, während sich u im 2. Falle nur innerhalb gewisser Intervalle bewegen darf. Dies wäre z. B. der Fall bei der Curve mit den Gleichungen ($r = \frac{a}{x}\sqrt{1+b^2\sin^2\alpha}$, $\operatorname{tang} u = b \sin\alpha$) oder ($x = \frac{a}{\alpha}$, $y = \frac{a.b}{\alpha}\sin\alpha$), wobei α die unabhängig Variable ist.

Wenn wir die genannten vier Curvenarten vergleichen, so finden wir gewisse Uebereinstimmungen und Gegensätze, die sich am deutlichsten bei den Werten für x, y und r zu erkennen geben.

Z. B. haben wir bei den erwähnten vier speciellen Curven — wenn wir überall α als Veränderliche einführen — für ein zunehmendes α:

$x = \alpha$	$x = \alpha$	$x = a\,\frac{\cos\alpha}{\alpha}$
$y = \frac{\alpha}{2}$	$y = \frac{\sin\alpha}{a}$	$y = a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
$r = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^4+\alpha^2}$	$r = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^4+\alpha^2\sin^2\alpha}$	$r = \frac{a}{\alpha}$
$u = \alpha$	$u = \alpha$	$u = \alpha$
x zunehmend y abnehmend r zunehmend Asymptote der ersten Art.	x zunehmend y zu- und abnehmend r zunehmend Asymptote der zweiten Art.	x ab- und zunehmend y zu- und abnehmend r abnehmend Asymptotischer Punkt der ersten Art.

$$x = \frac{a}{2}$$

$$y = ab\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$r = \frac{a}{\alpha}\sqrt{1+b^2\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tang} u = b\sin\alpha$$

x abnehmend
y zu- und abnehmend
r abnehmend
Asymptotischer Punkt
der zweiten Art.

Es ist wohl nicht notwendig, die Analogien und Contrarien, welche sich diesem Schema entnehmen lassen, besonders hervorzuheben — auch brauchen wir nicht erst weitere und allgemeinere

Betrachtungen anzustellen um darzulegen, dass der asymptotische Punkt der zweiten Art in die Reihe der asymptotischen Elemente aufgenommen werden muss, wenn diese nicht lückenhaft bleiben soll.

Betrachten wir nun jene Curve näher, welche nach Obigem einen solchen Punkt haben soll.

In orthogonalen Punktcoordinaten lautet ihre Gleichung: $y = bx \sin \frac{a}{x}$. Diese lässt uns sogleich erkennen, dass die Curve zu beiden Seiten der Asymptotenaxe YY' symmetrisch verläuft; denn $y = f(x)$ hat für $x = +x_1$ und $x = -x_1$ denselben Wert. Wir brauchen daher nur die eine Hälfte der Curve, z. B. die rechtsliegende, zu untersuchen.

Um dies leichter tun zu können, führen wir eine neue Veränderliche α ein, und setzen $\frac{a}{x} = \alpha$.

Die Curve C ist dann bestimmt durch die zwei Gleichungen: $\left(x = \frac{a}{\alpha}, \quad y = ab \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$.

Dem Werte $\alpha = 0$ entspricht $x = \infty$ und $y = \frac{0}{0} = \left.\frac{D_\alpha(ab \sin \alpha)}{D_\alpha(\alpha)}\right]_{\alpha=0} = \left.\frac{ab \cos \alpha}{1}\right]_{\alpha=0} = a.b$ oder der Punkt $U \ldots (x = \infty,\ y = ab)$.

Nimmt α stetig zu, so nimmt x stetig ab und nähert sich, während α ins Unendliche wächst, der Grenze Null.

Anders y! $\sin \alpha$ durchläuft periodisch alle Werte von Null über $(+1)$ bis Null, und von da über (-1) bis Null; es wird daher $y = ab \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ auch stetig aus dem Positiven ins Negative und umgekehrt übergehen, wobei aber — da $\sin \alpha < \alpha$ ist, und der Unterschied immer grösser wird — der absolute Wert von y in immer kleiner werdenden Intervallen sich bewegt.

Bis α unendlich gross wird, hat $\sin \alpha$ und auch y unendlichmal Null nach der positiven und negativen Seite hin überschritten und y schliesslich den Grenzwert Null erreicht, weil ja $\sin \alpha$ nie unendlich wird.

Die Curve C kommt also von dem unendlichen Punkte U her und nähert sich, um die Abscissenaxe XX' oscillirend, dem Anfangspunkte O in unendlich vielen, immer kleiner werdenden Oscillationen.

In Polarcoordinaten sind ($r = \frac{a}{\alpha}\sqrt{1 + b^2 \sin^2\alpha}$, $\operatorname{tg} u = b \sin\alpha$) die Gleichungen der Curve C.

Die zweite Gleichung lässt uns sogleich erkennen, dass u nicht alle möglichen Werte annehmen kann, sondern wegen $\sin\alpha$ nur solche, welche in den Grenzen:

$O \ldots \operatorname{arctang}(+b) \ldots O \ldots \operatorname{arctang}(-b) \ldots$ liegen: diese kehren aber periodisch wieder, wenn sich α stetig ändert.

Was r betrifft, so sieht man, dass, für $\alpha = 0$, $r = \infty$, mit wachsendem α aber immer kleiner wird und sich dem Grenzwerte Null nähert, wenn α ins Unendliche wächst.

Somit wird das bestätigt, was wir oben über den Verlauf der Curve C gesagt haben und nun dahin ergänzt, dass die Schwingungen um XX' die äussern Schenkel g und g' der Winkel $(+u_1)$ und $(-u_1)$ nicht überschreiten dürfen. ($\operatorname{tg} u_1 = b$).

Wäre in der Gleichung der Curve $C \ldots y = bx \sin\frac{a}{x}$ der Factor $\sin\frac{a}{x}$ constant, so hätte diese die Form der Gleichung einer Geraden die durch O geht. Nun ist $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$ wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = (2n \pm 1)\pi$ oder wenn $\alpha_1 - \alpha_2 = 2n\pi$; also liegen alle jene Punkte $p_m \ldots (x_m, y_m)$ auf einer durch O gehenden Geraden, bei welchen sich die Quotienten $\frac{a}{x_m}$ zu $(2n \pm 1)\pi$ ergänzen oder um $2n\pi$ unterscheiden (In der Figur liegen die Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ auf der Geraden g_1, die Punkte p_1', p_2', $p_3' \ldots$ auf der Geraden g_1') ... 1).

Für den Abschnitt OT der Tangente auf der Ordinatenaxe hat man $OT = y - x\frac{dy}{dx}$. Hier ist $\frac{dy}{dx} = b \sin\frac{a}{x} - \frac{ab}{x}\cos\frac{a}{x}$, daher $OT = ab\cos\frac{a}{x}$. Dieser Wert ist bei allen Punkten gleich, bei denen die Summe oder Differenz der Quotienten $\frac{a}{x_m} \ldots 2n\pi$ beträgt (z. B. für p_1 und p_1' oder p_3 und p_1') und entgegengesetzt gleich, wenn diese Summe oder Differenz $(2n \pm 1)\pi$ gleich ist (d. i. z. B. der Fall bei den Punkten p_1 und p_2 oder p_2 und p_1'). OT wird Null, wenn $x = \frac{2a}{\pi}, \ldots \frac{2a}{3\pi}, \ldots \frac{2a}{(2n \pm 1)\pi}$. Für diese Werte findet sich $y = \frac{2ab}{\pi}, -\frac{2ab}{3\pi}, \ldots \pm \frac{2a}{(2a \pm 1)\pi}$ und $\frac{dy}{dx} = \pm b$. Die entsprechenden Punkte P_1, P_1', P_2, P_2' ... genügen auch der Bedingung 1) und liegen somit auf den zwei Geraden g und g', welche zugleich vielfache Tangenten der Curve sind. (Es sind das jene zwei Gerade, in deren Winkel die Curve C oscillirt).

$OT = ab\cos\frac{a}{x}$ hat den grössten, beziehungsweise kleinsten Wert $OT_1 = \pm ab$, wenn $x = \infty$, $\frac{a}{\pi}$, $\frac{a}{2\pi}$ ... $\frac{a}{n\pi}$. Für diese Werte, welche den Punkten U, W_1, W_2 ... entsprechen, ist aber auch $\frac{dy}{dx} = b\sin\frac{a}{x} - \frac{ab}{x}\cos\frac{a}{x}$ ein Maximum oder Minimum $(0, +b\pi, -b\pi \ldots)$, denn $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b}{x^3}\sin\frac{a}{x}$ ist dafür Null, während $\frac{d^3y}{dx^3}$ nur für $(x = \infty$ $y = ab)$ ... U Null, sonst aber abwechselnd positiv und negativ ist. Die in XX' gelegenen Punkte W_1, W_2 ... sind also Wendepunkte der Curve, die Geraden $T_1'W_1$, T_1W_2, $T_1'W_3$, T_1W_4 ... ihre Wendetangenten; U aber ist der unendlich ferne Punkt der Curve C und T_1U oder G eine osculirende Asymptote derselben — daher kehrt auch die Curve d auf derselben Seite von G, links von YY' aus dem Unendlichen zurück.

Eisenstadt, Jan. 1881.

Franz Schiffner,
Lehrer an der k. k. Militär-Unterrealschule
in Eisenstadt (Ungarn).

2.

Ueber eine Raumcurve mit einem asymptotischen Punkte und deren Tangentenfläche.

Unter den Raumcurven, welche man bisher in der analytischen Geometrie des Raumes und der Projectionslehre besonders studirt hat, nehmen die cylindrische und konische Schraubenlinie einen hervorragenden Platz ein. Erstere entsteht, wenn sich ein Punkt um eine feste Gerade A dreht und mit wachsendem Drehungswinkel gleichmässig in der Richtung der Drehungsachse A vorwärts schreitet (oder sich gleichmässig von einer zu A senkrechten Ebene entfernt) ohne seine Entfernung von A zu ändern; letztere, wenn sich der drehende Punkt bei zunehmendem Drehungswinkel gleichmässig von der Drehungsachse A und einer zu ihr senkrechten Ebene entfernt.

Es liegt nun die Frage nahe, was für eine Curve entsteht, wenn sich ein Punkt um eine feste Gerade A dreht und die Entfernung desselben von der Drehungsachse sowohl, als auch von einer zu ihr senkrechten Ebene mit dem Drehungswinkel in einem umgekehrten Verhältnisse stehen?

Nehmen wir die Drehungsachse A als die verticale Z Achse eines orthogonalen Coordinatensystems an, so werden sich die Aenderungen in der Richtung von A im Aufriss, der Drehungswinkel und die Entfernung des erzeugenden Punktes von A im Grundriss in ihrer natürlichen Grösse projiciren. Nennen wir den Drehungswinkel w, den Radiusvector der Raumcurve r und dem entsprechend den Radiusvector der Grundrissprojection r', so ergeben sich für die Curve C folgende Bedingungsgleichungen: $r' = \frac{a}{w}$, $z = \frac{b}{w}$ oder $x = \frac{a}{w} \cos w$, $y = \frac{a}{w} \sin w$, $z = \frac{b}{w}$.

Wenn der Winkel, welchen der Radiusvector der Raumcurve C: $r = \sqrt{r'^2 + z^2} = \frac{1}{w}\sqrt{a^2 + b^2}$ mit der horizontalen Bildebene macht, mit n bezeichnet wird, so hat man $\cos n = \frac{r'}{r}$ oder $\cos n = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ d. ist ein constanter Wert.

Der Leitstrahl r der Raumcurve C ist also gegen die horizontale Bildebene und gegen die Drehungsachse A immer gleich geneigt, und es liegt deshalb die ganze Raumcurve C auf einem Rotationskegel K mit dem Scheitel O, (Anfangspunkt des Coordinatensystems) der Achse A und der Neigung $\left(\frac{\pi}{2} - n\right)$ seiner Erzeugenden gegen die Achse A.

Als Gleichung dieses Kegels K ergibt sich: $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} z^2$, denn es ist $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{w^2}$ und wenn man daraus w mit Berücksichtigung von $z = \frac{b}{w}$ eliminirt, so erhält man jene Gleichung, welcher aller Curvenpunkte genügen müssen.

Man erkennt, dass der Kegel K in der Entfernung $z = b$ von der horizontalen Bildebene den horizontalen Kreisschnitt $x^2 + y^2 = a^2$ hat; dies oder $\cos n = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lehrt uns den Kegel K einfach construiren.

Hierauf gestützt können wir die Raumcurve C leicht abbilden. Die Projection C' der Cure C auf der horizontalen Bildebene ist nämlich eine hyperbolische Spirale mit den Gleichungen $x = \frac{a}{w} \sin w$, $r' = \frac{a}{w}$, deren Construction bei gegebenem Werte für a eine einfache ist, besonders wenn man berücksichtigt:

1) dass ihre Subtangente den constanten Wert $-a$ hat,

2) dass, wenn der Punkt P' der hyperbolischen Spirale C' und der Punkt (P) der Kreisevolvente, welche von einem beliebigen Punkte der Abscissenachse OX beschrieben wird, demselben Drehungswinkel beziehungsweise Wälzungswinkel, entsprechen, die Tangente des Punktes P' parallel ist mit dem Radiusvector des Punktes P. (Siehe vorigen Aufsatz.)

[Wir haben, um mit der analytischen Geometrie in der Ebene in Uebereinstimmung zu bleiben, bei der beigegebenen Figur die Drehung entgegengesetzt jener der Zeiger einer Uhr, als die positive angenommen].

Hat man die hyperbolische Spirale C' gezeichnet, so kann man zu jedem Punkte P' des Grundrisses den Aufriss P'' finden, wenn man jene Kegelerzeugende von K sucht, auf welcher er liegt. Auf jeder Erzeugenden des Kegels K werden sich unendlich viele Punkte der Curve C finden lassen, weil ja C' unendlich viele Windungen um O macht und immer wieder dieselbe Gerade G' trifft, wenn w um $2n\pi$ gewachsen ist. Das geht überdies auch aus dem Umstande hervor, dass die Gleichungen der Curve C ganz denen einer durch O gehenden Geraden entsprechen, wenn $\cos w$ und $\sin w$ constant wären. Dies ist aber der Fall für alle Werte von w, die sich um $2n\pi$ unterscheiden; also kehrt der erzeugende Punkt immer wieder in dieselbe zurück, wenn w um $2n\pi$ gewachsen ist.

Es liessen sich wohl auch einzelne Punkte der Curve C durch Vermittlung der Rechnung darstellen. Man hat so z. B.

für $w = 0$ den Punkt $U \ldots \left(x = \infty,\ y = \frac{0}{0} = \left[\frac{a \cos w}{1}\right]_{w=0} = a,\ z = \infty\right)$

„ $w = \frac{\pi}{2}$ „ „ $P \ldots \left(x = 0,\ y = \frac{2a}{\pi},\ z = \frac{2b}{\pi}\right)$

„ $w = \pi$ „ „ $P_1 \ldots \left(x = -\frac{a}{\pi},\ y = 0,\ z = \frac{b}{\pi}\right)$

„ $w = 2\pi$ „ „ $P_2 \ldots \left(x = \frac{a}{2\pi},\ y = 0,\ z = \frac{b}{2\pi}\right)$

. . . .

„ $w = \infty$ „ „ $O \ldots (x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$

Verbindet man die gefundenen Punkte $P' \ldots$ und $P'' \ldots$ durch je einen stetigen Zug, so erhält man zwei Bilder, den Grundriss C' und den Aufriss C'', der Raumcurve C, welche diese vollständig bestimmen.

Der Aufriss ist eine Curve, die von dem unendlichen Punkte der einen Kegelcontourkante herkommend in unendlich vielen, immer kleiner werdenden Schwingungen innerhalb der Kegelcontour, dem Punkte O'' sich nähert. Die Gleichungen derselben $x = \frac{a}{w} \cos w$, $z = \frac{b}{w}$ oder $x = \frac{a}{b} z \cos \frac{b}{z}$ bestätigen dies vollinhaltlich.

Aehnlich verläuft die Kreuzrisscurve, deren Gleichungen $y = \frac{a}{w} \sin w$, $z = \frac{b}{w}$ oder $y = \frac{a}{b} z \sin \frac{b}{z}$ sind. (Näheres über diese Curve siehe vor. Aufs.).

Wenn wir den Begriff des asymptotischen Punktes einer ebenen Curve erweitern und nicht allein jenen Punkt einen asymptotischen nennen, welchen die Curve erst erreicht, nachdem sie unendlich viele, immer kleiner werdende Windungen um ihn durchlaufen hat, sondern auch denjenigen, in welchen die Curve durch unendlich viele, immer kleiner werdende Schwingungen übergeht, so haben wir nach Obigem eine Raumcurve C vor uns, deren Grundriss, Aufriss und Kreuzriss ebene Curven mit je einem asymptotischen Punkte sind. Das deutet denn wohl auf einen asymptotischen Punkt in der Raumcurve selbst. Ihr Verlauf ist auch wirklich dem entsprechend.

Die Raumcurve C geht von dem unendlichen Punkte $U \ldots (w=0$, $y = a$, $z = \infty)$ aus, dreht sich — auf dem Mantel des Kegels K weiterschreitend — fortwährend um dessen Achse A, wobei sie dieser und dem Punkte O immer näher rückt (denn $r' = \frac{a}{w}$ und $r = \frac{1}{w} \sqrt{a^2 + b^2}$ werden bei wachsendem w immer kleiner), bis endlich, wenn w ins Unendliche gewachsen ist, also viele Umdrehungen erfolgt sind, die Curve in den Punkt O übergeht.

In einem zweiten Teile, welcher den negativen Werten von w entspricht, entfernt sich die Curve nach der entgegengesetzten Seite hin in derselben Weise vom Punkte O; denn setzt man $w = \pm w$, so hat man $x_1 = \pm \frac{a}{w} \cos w_1$, $y_1 = + \frac{a}{w_1} \sin w_1$, $z = \pm \frac{b}{w_1}$ und sieht, dass jedem Punkte $P_n \ldots (+x_n, +y_n, +z_n, +r_n)$ ein Punkt $(P_n) \ldots (-x_n, +y_n, -z_n, -r_n)$ auf derselben Seite der Coordinatenebene XOZ, aber zu verschiedenen Seiten der Coordinatenebenen XOY, YOZ und mit gleich langem, aber entgegengesetzt gerichtetem Radiusvector entspricht. Es könnte daher der zweite Teil der Raumcurve erhalten werden, indem man ihren ersten Teil um die Coordinatenachse YY' um 180^0 (π) dreht. Aus diesem Grunde brauchen wir auch den zweiten Teil von C nicht näher zu untersuchen, und werden deshalb in Hinkunft nur immer positive Werte für w voraussetzen.

Die Tangenten der Raumcurve $C \ldots \left(x = \frac{a}{w}\cos w,\ y = \frac{a}{w}\sin w,\ z = \frac{b}{w}\right)$.

Bezeichnen wir die laufenden Coordinaten der Curventangenten mit ξ, η, ζ, die Coordinaten ihres Berührungspunktes mit x, y, z, so sind bekanntlich $\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - x}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}$ die Gleichungen der Tangente. Hier ist $x' = \frac{dx}{dw} = -\frac{a}{w}\sin w - \frac{a}{w^2}\cos w$, $y' = \frac{dy}{dw} = \frac{a}{w}\cos w - \frac{a}{w^2}\sin w$, $z' = \frac{dz}{dw} = -\frac{b}{w^2}$ und somit hat man:

$$\frac{\xi - \frac{a}{w}\cos w}{-a\sin w - \frac{a}{w}\cos w} = \frac{\eta - \frac{a}{w}\sin w}{a\cos w - \frac{a}{w}\sin w} = \frac{\zeta - \frac{b}{w}}{-\frac{b}{w}}$$

als die Tangentengleichungen. Durch eine einfache Umformung lassen sich hieraus die Gleichungen: $b\xi - a\zeta(\cos w + w\sin w) = -ab\sin \eta$, $b\eta - a\zeta(\sin w - w\cos w) = ab\cos w$, $\xi(\sin w - w\cos w) - \eta(\cos w + w\sin w) = -a$ ableiten, oder kann man schliesslich die Curventangenten in der Form:

$$\xi = \frac{a}{b}\zeta(\cos w + w\sin w) - a\sin w,\quad \eta = \frac{a}{b}\zeta(\sin w - w\cos w) + a\cos w$$

ausdrücken.

Setzt man hierin, um den Schnittpunkt mit der Ebene XOY zu bestimmen, $\zeta = \varphi$, so ergibt sich $\xi = -a\sin w$, $\eta = a\cos w$ oder $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ d. h. die Schnittpunkte aller Curventangenten mit der horizontalen Bildebene bilden einen Kreis k, dessen Mittelpunkt O' und dessen Halbmesser a ist.

Es lässt sich sogar auch der Spurpunkt S jeder Tangente bei gegebenen Werte w direct finden. Es schneidet nämlich die Gerade, welche durch O' geht und mit OX den Wkl. w_1 bildet, den Kreis k

in dem Punkte $S \ldots (x_1 = a\cos w_1, \ y_1 = a\sin w_1)$. Setzt man $w_1 = \frac{\pi}{2} + w$, so ist $\cos w_1 = -\sin w$ und $\sin w_1 = \cos w$, somit haben wir $x_1 = -a\sin w$, $y = a\cos w$ d. s. die Werte für den Spurpunkt jener Tangente, welche zum Wkl. w gehört. Wenn also der Punkt P dem Drehungswinkel w entspricht, so schneidet die Curventangente im Punkte P die horizontale Bildebene in dem Punkte, in welchen die zu $P'O'$ senkrechte Gerade den Kreis k trifft. Da für alle Curvenpunkte, welche auf einer Erzeugenden des Kegels K liegen, $\cos w$ und $\sin w$ dieselben Werte haben, so ist auch der Spurpunkt in der Ebene XOY für die Tangenten in allen diesen Punkten derselbe.

Damit sind uns die Mittel zur einfachen Lösung vieler Aufgaben gegeben, von denen wir erwähnen:

1) Die Tangente der Raumcurve C zu construiren, wenn ihr Berührungspunkt P gegeben ist. Die zu $P'O'$ senkrechte Gerade $O'S$ schneidet den Kreis k im Spurpunkte $S(S')$ der Tangente T. $S'P'$ ist also die erste, $S''P''$ die zweite Projection der Tangente T. (S'' liegt in der Projectionsachse).

2) Bei gegebener Tangente $T \ldots (T', T'')$ ihren Berührungspunkt zu finden. T' trifft den Kreis k in $S'(S)$. Die Normale $O'P'$ zu $O'S'$ schneidet T' in P', der ersten Projection des fraglichen Berührungspunktes P. P'' in T''.

3) Die developpable Fläche der Raumcurve C zu bestimmen. Wiederholt man die unter 1) angeführte Construction für eine Reihe von Curvenpunkten, so erhält man eine Reihe von Tangenten T, die in ihrer Gesammtheit die entwickelbare Fläche der Raumcurve bilden. Die Spur dieser Fläche in der horizontalen Bildebene ist der Kreis k; nach Obigem muss dieser Kreis eine vielfache Linie der developpablen Fläche sein. In der beigegebenen Figur ist nur jener Teil der Fläche abgebildet, welcher zwischen dem vielfachen Kreise k und der Raumcurve liegt.

4) Die Schmiegungs- oder Osculationsebene eines gegebenen Punktes der Raumcurve zu suchen. Da die Schmiegungsebene einer Raumcurve zugleich Tangentenebene ihrer developpablen Fläche ist, so enthält sie ausser einer Tangente der Raumcurve auch immer eine Tangente jedes ebenen Schnittes der entwickelbaren Fläche. In unserem Falle ist der Kreis k ein ebener Schnitt der developpablen Fläche (Ck) und es enthält also jede Schmiegungsebene auch eine Tangente des Kreises k, und $\mathfrak{z}$ ist ihr Berührungspunkt, der Spurpunkt jener Coordinatentangente, welche die Raumcurve in dem Punkte berührt, dessen Osculationsebene gesucht wird. Die Schmiegungsebene

F der Raumcurve für ihren Punkt P ist also bestimmt durch die Curventangente $PS(T)$ und die Tangente E_1, welche den Kreis k im Spurpunkte S der Geraden T berührt. Wie gesagt, ist diese Ebene E zugleich eine Tangentenebene der entwickelbaren Fläche (Ck) und hat mit dieser die Erzeugende $PS(T)$ gemein.

Der Richtungskegel der developpablen Fläche (C, k).

Die Gleichungen der Curventangente T sind nach Früherem:

$$\xi = \frac{a}{b}\zeta(\cos w + w \sin w) - a \sin w, \quad \eta = \frac{a}{b}\zeta(\sin w - w \cos w) + a \cos w.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten eines betiebigen Raumpunktes C mit ξ_1, η_1, ζ_1 und die laufenden Coordinaten einer durch C parallel zu T gehenden Geraden G mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so müssen dieser Geraden die Gleichungen $\mathfrak{x} - \xi_1 = m(\mathfrak{z} - \zeta_1)$; $\mathfrak{y} - \eta_1 = m_1(\mathfrak{z} - \zeta_1)$ entsprechnn. Weil $G \parallel T$, so muss $m = \frac{a}{b}(\cos w + w \sin w)$ und $m_1 = \frac{a}{b}(\sin w - w \cos w)$ sein; es hat also G die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} - \xi_1 = \frac{a}{b}(\cos w + w \sin w)(\mathfrak{z} - \zeta_1), \quad \mathfrak{y} - \eta_1 = \frac{a}{b}(\sin w - w \cos w)(\mathfrak{z} - \zeta_1).$$

Setzen wir $\mathfrak{z} = 0$, so erhalten wir die Basis des Richtungskegels in der horizontalen Bildebene bestimmt durch:

$$\mathfrak{x} - \xi_1 = -\frac{a}{b}(\cos w + w \sin w)\zeta_1 \text{ und } \mathfrak{y} - \eta_1 = -\frac{a}{b} \sin w - w \cos w)\zeta$$

welche Gleichungen uns eine Kreisevolvente erkennen lassen.

Für den Punkt $P \ldots (\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \zeta_1 = b)$ als Kegelspitze ergibt sich $\mathfrak{x} = -a(\cos w + w \sin w)$, $\mathfrak{y} = -a(\sin w - w \cos w)$ als Kegelbasis. Das ist aber die Evolvente k_e des Kreises k, welche der Punkt $\ldots (x = -a, \; y = 0)$ beschreibt und also leicht zu construiren Damit ist auch der Richtungskegel Pk_e leicht bestimmt.

Zu jeder Erzeugenden $(\mathfrak{E}) \ldots P\sigma$ des Richtungskegels Pk_e lässt sich eine parallele Erzeugende $\mathfrak{E}$ der developpablen Fläche (Ck) finden, und umgekehrt. Offenbar sind auch die längst correspondirenden Erzeugenden $\mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{E})$ die Flächen (Ck) und Pk_e berührenden Ebenen parallel, und somit haben die Spuren k und k_e dieser Flächen parallele Tangenten mn und $m_1 n_1$ in den Spurpunkten s und σ correspondirender Erzeugenden $\mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{E})$.

Der Richtungskegel kann wieder vielfach zur Lösung von Constructionsaufgaben benutzt werden.

Sollen z. B. jene Curventangenten, beziehungsweise jene Erzeugenden der enkwickelbaren Fläche (Ck) gesucht werden, welche zu einer gegebenen Ebene e parallel sind, so wird man durch die Spitze P des Richtungskegels eine zu e parallele Ebene legen und den Schnitt derselben mit dem Kegel Pk_e suchen. Parallel diesen Schnitterzeugenden gehen die verlangten Geraden und können nun leicht gefunden werden, weil ja die Tangenten der Kreisevolvente k_e mit den Tangenten des Kreises k parallel sind, wenn ihre Berührungspunkte Spurpunkte correspondirender Erzeugenden sind.

Die Tangenten der Raumcurve C von bestimmter Horizontalneigung sind parallel jenen Erzeugenden des Richtungskegels Pk_e, welche zugleich einem aus P beschriebenen Rotationskegel angehören, dessen Erzeugende die verlangte Horizontalneigung haben.

Wären jene Osculationsebenen der Raumcurve zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt Q gehen, dann würde man durch Q einen zum Richtungskegel Pk_e parallelen Kegel $Q(k_e)$ legen. Die Basis (k_e) dieses Kegels in der horizontalen Bildebene ist auch eine Kreisevolvente und wird von dem Spurpunkte h jener Geraden $\mathfrak{e}_0$ beschrieben, welche zur Curventangente $\mathfrak{E}_0 \ldots (\xi = \frac{a}{b}\zeta, \ \eta = a)$ parallel ist. Die zu suchenden Ebenen sind gemeinschaftliche Berührungsebenen der Flächen (Ck) und $Q(k_e)$ und ihre Spuren in XOY berühren also k und (k_e). Geschieht dies beziehungsweise in den Punkten s und (s), so ist die fragliche Ebene (in der beigegebenen Figur ist nur eine solche Ebene MNO gezeichnet) durch die parallelen Geraden $(s)Q$ und sp bestimmt, von denen letztere eine Tangente der Curve C sein muss.

Stellt Q einen leuchtenden Punkt vor, dann bildet die gefundene Gerade sp die Selbstschattengrenze der developpablen Fläche (Ck).

Die zur Richtung L parallelen Tangenebenen der entwickelbaren Fläche (Ck) sind zugleich parallel mit den Tangentenebenen eines Richtungskegels, welche eine Gerade von der Richtung L enthalten. In der Figur ist mno eine solche Ebene; ihre Berührungserzeugende $\mathfrak{E}_2$ ist die Selbstschattengrenze der developpablen Fläche für in der Richtung L einfallende Lichtstrahlen.

Eisenstadt, Febr. 1881.

Franz Schiffner,
k. k. R. Lieutenant,
Lehrer a. d. k. k. Militär-Unterrealschule
in Eisenstadt.

3.

Ueber die Darstellbarkeit von Primzahlen durch die Form a^2+b^2.

Bekanntlich lässt sich jede Primzahl von der Form $4n+1$ und jede zusammengesetzte Zahl, welche nur Primfactoren von dieser Form enthält, durch die Summe von zwei Quadraten, also durch die Form a^2+b^2 ausdrücken. Die Zahlentheorie lehrt auch die Frage, welches die jedesmaligen Werte von a und b sind, beantworten. In den vorliegenden Zeilen soll versucht werden, eine Antwort auf die umgekehrte Frage zu geben:

> Wie kann man entscheiden, ob durch a^2+b^2 eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl dargestellt wird, ohne dass man nötig hätte, a^2+b^2 wirklich zu berechnen?

Zunächst ist als selbstverständlich anzunehmen, dass die beiden darstellenden Zahlen relativ prim zu einander sind, sowie dass eine derselben ungerade, die andere gerade ist, Dass a und b keine pythagoräischen Zahlen seien, d. h. für ein ganzzahliges c nicht der Bedingung $a^2+b^2=c^2$ genügen dürfen, ist zwar ebenso selbstverständlich, aber nicht so leicht zu übersehen; auch verlangen die nachstehenden Notizen eine Absonderung dieses Falles nicht.

Weiterhin ergibt sich aus der Anwendung des dekadischen Zahlensystems Folgendes: Ist a ungerade und b gerade, so sind alle Quadratzahlen enthalten in den Formen

$$a^2 \equiv 1,\ 9,\ 5 \quad b^2 \equiv 0,\ 4,\ 6 \mod. 10.$$

Diesen Formen entsprechen die Grundzahlen

$$a \equiv \pm 1,\ 3,\ 5 \quad b \equiv \pm 0,\ 2,\ 4 \mod. 10.$$

Somit übersieht man direct, dass ausser der selbstverständlich nicht brauchbaren Verbindung

$$a \equiv 5, \quad b \equiv 0 \mod. 10$$

auch die Formen

$$\left.\begin{array}{rl} & a \equiv \pm 1, \quad b \equiv \pm 2 \\ \text{und} & a \equiv \pm 3, \quad b \equiv \pm 4 \end{array}\right\} \mod. 10$$

keine Primzahlen darstellen können, weil für sie

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &\equiv 5 \mod. 10, \quad \text{also auch} \\ &\equiv 0 \mod. 5 \quad \text{wird.} \end{aligned}$$

Durch diese Bemerkung wird man direct auf dasjenige Hilfsmittel gewiesen, welches ermöglicht, die vorliegende Frage umfassender zu beantworten, nämlich auf die quadratischen Reste.

Ist nämlich p eine Primzahl von der Form $4n+1$ und q eine solche von der Form $4n+3$, so überzeugt man sich für ein beliebiges α, welches unbedenklich $<\frac{p-1}{2}$ resp. $\frac{q-1}{2}$ angenommen werden kann, sehr leicht von der Richtigkeit der Relationen

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \left(\frac{-\alpha}{p}\right)$$
$$\left(\frac{\alpha}{q}\right) = -\left(\frac{-\alpha}{q}\right)$$

d. h. für die Primzahlen p sind die Zahlen α und $-\alpha$ gleichzeitig Reste oder Nichtreste, für die Primzahlen q ist stets eine derselben Rest, die andere Nichtrest *).

Sobald sich demnach eine Primzahl p finden lässt, für welche die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \equiv \pm\alpha \\ b^2 \equiv -\alpha \end{array}\right\} \text{mod. } p$$

gleichzeitig stattfinden, so muss a^2+b^2 durch p teilbar sein. Da ferner jede zusammengesetzte Zahl a^2+b^2 notwendig mindestens einen Primfactor haben muss, der $\leqq \sqrt{a^2+b^2}$ ist, und da ferner

$$\sqrt{a^2+b^2} < a+b$$

ist, so hat man nur nötig, zu entscheiden, welche kleinsten Reste a

---

*) Aus den Grundsätzen über quadratische Reste lässt sich übrigens auch ein bekannter Satz der elementaren Mathematik ableiten. Für zwei beliebige Zahlen a und m ist stets

$$a^2 \equiv (m-a)^2 \text{ mod. } m.$$

Ist also $a < m$ und relativ prim zu m und bezeichnet man den quadratischen Rest von a^2 mod. m mit $\pm\alpha$, so ist α, abgesehen vom Vorzeichen stets kleiner als $\frac{m}{2}$; also hat man, wenn $m-a=b$ gesetzt wird

$$a^2+b^2 \equiv \pm 2\alpha \text{ mod. } (a+b)$$

d. h. die Summe zweier Quadrate, welche relativ prim zu einander sind, ist durch die Summe ihrer Grundzahlen nicht teilbar. Aehnlich liesse sich auch zeigen, dass a^2-b^2 durch $a+b$ teilbar ist.

und b durch Division mit den Primzahlen p, welche unterhalb $a+b$ liegen, ergeben, sodann die quadratischen Reste zu diesen linearen Resten für die betreffenden Moduli zu bestimmen, um danach direct die obige Frage beantworten zu können.

Handelt es sich darum, diese Untersuchungen in grösserem Massstabe anzustellen, so dürfte es sich empfehlen, Tabellen aufzustellen, welche für die in Frage kommenden Primzahlen angeben, bei welchen Werten von a und b sich die Reste von a^2 und b^2 zur Summe p ergänzen. Dann fiele das jedesmalige Berechnen der quadratischen Reste fort.

Nimmt man die direct untereinander stehenden Zahlen als zusammen gehörig an, so findet man für die ersten fünf in Frage kommenden Primzahlen p folgende $\frac{p-1}{4}$ Combinationen, deren jede 4 Möglichkeiten, im Ganzen also für jedes p $p-1$ Möglichkeiten umschliesst:

a^2+b^2 ist durch p teilbar für

$$p = 5, \text{ wenn } \left.\begin{array}{l} a \equiv \pm 1 \\ b \equiv \pm 2 \end{array}\right\} \text{mod. } 5.$$

$$p = 13, \quad ,, \quad \left.\begin{array}{l} a \equiv \pm 1,\ 2,\ 4 \\ b \equiv \pm 5,\ 3,\ 6 \end{array}\right\} \text{mod. } 13.$$

$$p = 17, \quad ,, \quad \left.\begin{array}{l} a \equiv \pm 1,\ 2,\ 3,\ 6 \\ b \equiv \pm 4,\ 8,\ 5,\ 7 \end{array}\right\} \text{mod. } 17.$$

$$p = 29, \quad ,, \quad \left.\begin{array}{l} a \equiv \pm\ \ 1,\ 2,\ 3,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 8,\ 11 \\ b \equiv \pm 12,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ \ 9,\ 13 \end{array}\right\} \text{mod. } 29.$$

$$p = 37, \quad ,, \quad \left.\begin{array}{l} a \equiv \pm 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ 5,\ \ 8,\ \ 9,\ 10,\ 15 \\ b \equiv \pm 6,\ 12,\ 18,\ 13,\ 7,\ 11,\ 17,\ 14,\ 16 \end{array}\right\} \text{mod. } 37.$$

. . . .

In dieser Tabelle kann a resp. b sowohl die ungerade als auch die gerade Zahl bedeuten.

Beispiele. α. Ist 7^2+32^2 eine Primzahl? Als kleinste Reste findet man

$$\begin{array}{llll} 7 \equiv \ \ \ 2 & 32 \equiv \ \ \ 2 & \text{mod. } 5 \\ 7 \equiv -6 & 32 \equiv \ \ \ 6 & \ \ ,, \ \ 13 \\ 7 \equiv \ \ \ 7 & 32 \equiv -2 & \ \ ,, \ \ 17 \\ 7 \equiv \ \ \ 7 & 32 \equiv \ \ \ 3 & \ \ ,, \ \ 29 \\ 7 \equiv \ \ \ 7 & 32 \equiv -5 & \ \ ,, \ \ 37. \end{array}$$

Die so gefundenen Restepaare fallen in der Tabelle für $p = 29$ und $p = 37$ zusammen, also ist die vorliegende Quadratsumme durch diese Primzahlen teilbar. Und tatsächlich ist

$$7^2+32^2 = 1073 = 29.37.$$

β. Ist 18^2+23^2 eine Primzahl? Die Berechnung der kleinsten Reste ergibt

$$\begin{array}{rrrrl} 18 \equiv & -2 & 23 \equiv & -2 & \text{mod. } 5 \\ 18 \equiv & 5 & 23 \equiv & -3 & \text{,, } 13 \\ 18 \equiv & 1 & 23 \equiv & 6 & \text{,, } 17 \\ 18 \equiv & -11 & 23 \equiv & -6 & \text{,, } 29 \\ 18 \equiv & 18 & 23 \equiv & -14 & \text{,, } 37. \end{array}$$

Kein so gefundenes Restepaar gehört nach der Tabelle zusammen' also ist

$$18^2+23^2 = 853 \text{ eine Primzahl.}$$

In vielen Fällen wird sich die Untersuchung noch durch folgende Bemerkungen vereinfachen lassen.

Wenn eine der beiden darstellenden Zahlen a und b selbst eine Primzahl von der Form $4n+1$, oder ein Vielfaches einer solchen ist, oder wenn Beides für a resp. b zusammenfällt, so fällt die Probe mit diesen Primzahlen fort, weil das Quadrat der jedesmaligen andern Zahl durch diese Primzahl selbstverständlich, weil a und b relativ prim zu einander sind, nicht teilbar sein kann.

Hat man z. B. 10^2+13^2 zu untersuchen, so fällt die Probe mit 5 und 13 fort, es genügt diejenige mit 17. Da nun

$$10 \equiv -7, \quad 13 \equiv -4, \quad \text{mod. } 17$$

so ergibt sich aus der Tabelle, dass

$$10^2 - 23^2 - 269 \text{ eine Primzahl ist.}$$

Ist $a+b$ ein ungerades Vielfaches einer solchen Primzahl, so ist zufolge der früheren Note unter dem Texte der quadratische Rest von a^2 für diese Primzahl derselbe wie derjenige von b^2, also eine Teilbarkeit durch diese Primzahl unmöglich. Ganz ähnlich lässt sich nachweisen, dass auch, wenn $a-b$ eine Primzahl $4n+1$ oder ein ungerades Vielfaches einer solchen ist, die Probe mit dieser Primzahl in Wegfall kommen kann.

Endlich kann man häufig direct erkennen, ohne die Quadrate zu berechnen, dass

$$a^2+b^2 < p_n^2,$$

wenn unter p_n die letzte, d. h. grösste Primzahl $p=4n+1$ unter $a+b$ verstanden wird. Besonders wird dies oft der Fall sein, wenn die Grössen a und b erheblich differiren. Dann würde also auch die Probe mit p_n fortfallen; denn wenn a^2+b^2 auch durch p_n teilbar wäre, so müsste es auch noch kleinere Teiler enthalten, also schon früher als zusammengesetzt erkannt worden sein.

Für das besonders günstige Beispiel 34^2+5^2 findet man, dass nach dem ersten Teile dieser Bemerkungen die Probe mit 17 und 5, nach dem zweiten diejenige mit 13 und 29, endlich nach dem dritten diejenige mit 37 wegfallen kann. Damit sind aber alle in Frage kommenden Primzahlen ausgeschlossen, also ist

$$34^2+5^2=1181 \text{ eine Primzahl.}$$

Berlin, 9. Juli 1881. **Th. Harmuth.**

4.

Ueber den Schnitt zweier Kegel zweiter Ordnung nach Curven zweiter Ordnung.

Hat die Durchdringungscurve zweier Kegel 2. Ordnung zwei reelle oder imaginäre Punkte, so zerfällt sie in zwei Curven 2. Ordnung. Zwei reelle Doppelpunkte sind vorhanden, wenn die beiden Kegel zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen zulassen, und für diesen Fall ist die Construction conjugirter Durchmesser der Schnittcurven bekannt. Liegt die Spitze des einen Kegels innerhalb des zweiten, so werden die gemeinschaftlichen Tangentialebenen imaginär; es frägt sich nun, wann solche vorhanden sind oder besser, wann sich die beiden Kegel 2. Ordnung nach Curven 2. Ordnung schneiden, und wie man conjugirte Durchmesser der Schnittcurven findet.

Nehmen wir an: die beiden Kegel 2. Ordnung schneiden sich nach Curven 2. Ordnung, welche wir mit D und D_1 bezeichnen. Die Spitzen der beiden Kegel seien S und S_1; eine gemeinschaftliche Basisebene E schneide die Kegel nach den Curven B und B_1. Projicirt man D und D_1 aus S und S_1 auf E, so erhält man B und B_1.

Sollen sich also die beiden Kegel nach Curven 2. Ordnung schneiden, so müssen B und B_1 collinear gegen den Durchstosspunkt der Verbindungslinie der beiden Spitzen mit E sein.

In Figur 1. sind B und B_1 die in der horizontalen Projectionsebene liegenden Basen der beiden Kegel 2. Ordnung mit den Spitzen S und S_1, deren horizontale Projectionen S' und S_1' sind; c ist der horiz. Durchstosspunkt der Verbindungslinie der beiden Spitzen. B und B_1 wurden collinear gegen c construirt.

Projicirt man D und D_1 aus S und dann orthogonal auf die horiz. Projectionsebene, so erhält man B, D' und D_1', welche Curven gegen S' collinear sind; ebenso sind auch D_1, D' und D_1' collinear gegen S_1' gelegen.

Ziehen wir nun einen beliebigen Strahl durch c und verbinden die Schnittpunkte desselben mit B und B_1 mit den entsprechenden Spitzen, so erhalten wir vier Punkte der Schnittcurven; je zwei Punkte, welche nicht in einer Erzeugenden der beiden Kegel liegen, gehören einer Schnittcurve an (Fig. 2.).

I und II sollen der Curve D angehören.

Für diese Curve D sind p_1'' und p_2'' oder p_2' und p_1' einander zugeordnet, wovon man sich leicht durch projiciren von I und II aus S und S_1 auf E überzeugen kann.

Für D_1 haben wir die Zuordnung $[p_2'', p_2']$ oder $[p_1'', p_1']$.

Construiren wir in p_1'' und p_2'' die Tangenten t und t_1; sie schneiden sich im Punkte d in A. d_I ist der Schnitt der Tangentialebenen in den Erzeugenden Sp_1'' und S_1p_2''; daher T' eine Tangente an D' im Punkte I' ist.

Es handelt sich um die parallele Tangente zu T' an D'; um diese zu finden, ziehen wir durch S' oder S_1' eine Parallele g' bezüglich g_1' zu T'. Die Schnittpunkte von g' und t oder g_1' und t_1 geben Punkte von Gegenaxen der Systeme S', B und S_1', B_1 mit der Axe A.

Benutzen wir den Punkt $\varDelta$ und ziehen von diesem die Tangente an B. Wir erhalten den Berührungspunkt m und bei der Zuordnung für D den entsprechenden Punkt m_1, wie man sich leicht mit Hülfe der Geraden mp_1'' und m_1p_2'' überzeugen kann.

Im Schnitte von mS' und m_1S_1' erhalten wir einen Punkt 2 von D', in welchem die Tangente parallel zu T ist. Die Endpunkte des 2. conjugirten Durchmessers sind leicht gefunden.

A ist die horizontale Spur der Ebene von D.

Nehmen wir die zweite Zuordnung, so erhalten wir auf dieselbe Art wie früher conjugirte Durchmesser von D_1'.

σ ist ein Punkt der horiz. Spur von D_1; einen zweiten Punkt können wir leicht auf ähnliche Art finden, oder indem wir den Schnitpunkt von t_1 mit der Tangente in p_2' aufsuchen.

Bei unserer Annahme ist eine Schnittcurve eine Hyperbel.

Die Asymptoten-Richtungen erhalten wir, indem wir durch S oder S_1 eine parallele Ebene zur Ebene der betreffenden Schnittcurve construiren und die Schnitterzeugenden aufsuchen oder indem wir durch $\varDelta$ (oder $\varDelta_*$) eine Parallele zur horizontalen Spur der betreffenden Schnittcurve zeichnen, und wo diese die B (resp. B_1) trifft, erhalten wir die Punkte, welche mit den betreffenden Kegelspitzen verbunden, die Richtungen der Asymptoten geben. Haben wir die Asymptoten, so können wir leicht die Axe der horizontalen Proj. der Hyperbel finden.

Die Leitlinien zweier Kegel 2. Ordnung sind in der horiz. Proj.-Ebene collinear gegen den horiz. Durchstosspunkt der Verbindungslinie der Spitzen gegeben. S ist die Spitze des einen Kegels. Wir können die Spitze des 2. Kegels (S_1) so bestimmen, dass eine Schnittcurve eine Parabel wird (Fig. 3.).

Wir nehmen Σh als horiz. Spur der Ebene dieser Parabel an.

Ziehen wir parallel zu Σh die Tangenten an B und B_1. Für unsere Schnittcurve sind dann p_1'' und p_2'' oder p_1' und p_2' zugeordnete Punkte. Der Schnittpunkt der durch p_2'' zu $p_1''S'$ geführten Parallelen mit S'_c ist die horiz. Project. der Spitze des 2. Kegels. Die Erzeugende $S'p_1''$ gibt uns die Richtung der Axe der horiz. Proj. der Parabel an. $\sigma'h$ ist ein Durchmesser derselben, und $\sigma'd$ die zugehörige Tangente. Die Lage der Axe ist leicht bestimmt.

Für die 2. Durchdringungscurve haben wir die Zuordnung (p_2'', p_2'), oder (p_1'', p_1'). Es ist dann $I'II''$ ein Durchmesser, und $m\delta$ die Richtung des conjugirten Durchmessers der 2. Schnittcurve.

Denn $I\delta$ ist eine Tangente der 2. Curve. Wir haben nun durch S' eine Parallele zu $I\delta$ zu ziehen bis τ getroffen wird (in der Figur in Δ) und durch diesen Punkt eine Tangente an B zu legen. Diese Tangente ist aber schon t, da p_2' das Aehnlichkeitscentrum der Dreiecke $Ip_2''\delta$ und $S'p_1''\Delta$ ist, und daher die Parellele zu $I\delta$ durch S' im Schnittpunkte von τ und t eintreffen muss. Dem Berührungspunkt p_1'' von t entspricht jetzt der Punkt p_1', daher der Schnittpunkt II der Erzeugenden $p_1''S$ und $p_1'S_1$ ein Punkt der 2. Schnittcurve ist, in welchem die Tangente parallel zu der in I ist.

Wir können auch von der Tangente $II\vartheta$ ausgehen und durch S_1 die Parallele zu $II\vartheta$ zeichnen u. s. w. Wir finden dann, dass I ein Punkt der Schnittcurve mit einer zu $II\vartheta$ parallelen Tangente ist.

Jg. Dickl,
Hörer der k. k. tech. Hochschule
zu Graz.

5.

Tangentenconstruction der Astroide.

Die beiden hübschen Constructionen, welche A. Sucharda, auf die Betrachtung projectivischer Eigenschaften gestützt, im 3. Heft (S. 321. flgd.) des 66. Teils dieses Archivs veröffentlicht hat, haben mich veranlasst, die Aufgabe auf analytischem Wege anzugreifen. Der Hinblick auf das bekannte Ergebniss gestaltet die Lösung zu einer sehr einfachen.

1) Verallgemeinert man die Aufgabe, so heisst sie folgendermassen: Eine Gerade von gegebener Länge a gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei Geraden, die sich unter dem beliebigen Winkel w schneiden, und umhüllt dabei eine Curve. Verlangt, von einem Punkt ξ, η aus die Tangenten an die Curve zu legen.

Wir nehmen die beiden festen Geraden zu Coordinatenaxen, deren Durchschnittspunkt 0 heisse. Die Stücke, welche die bewegliche Gerade von den Coordinatenaxen abschneidet, sollen p und q heissen.

I) Diese Aufgabe lautet auch, durch einen gegebenen Punkt zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine Gerade von gegebener Länge zu legen.

Wir haben die beiden Bedingungen

$$p^2+q^2-2pq\cos\omega = a^2; \quad p\eta+q\xi = pq \tag{I}$$

Setzt man $n = -\frac{q}{p}$, so wird hieraus die Richtung der durch den Punkt ξ, η gehenden Tangente durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{(n\xi-\eta)^2}{n^2}(n^2+2n\cos\omega+1) = a^2 \tag{II}$$

Zieht man zu den 4 Tangenten Parallelen durch 0, so ist ihre Gleichung

$$y = nx.$$

Diese 4 Geraden schneiden den Kreis um 0 mit dem Radius a in vier Punkten, welche als die Durchschnittspunkte des Kreises mit einem Kegelschnitte betrachtet werden können. Da hiernach von dem Kegelschnitte nur 4 Punkte gegeben sind, so können wir noch die Bedingung hinzufügen, dass er auch durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen soll. Seine Gleichung ist demnach

$$my^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex = 0,$$

während die Gleichung des Kreises ist:

$$y^2+2xy\cos w+x^2 = a^2.$$

Eliminirt man x und y zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung $y = nx$, so erhält man

$$4\frac{(dn+e)^2}{(mn^2+2bn+c)^2}(n^2+2n\cos w+1) = a^2.$$

Diese Gleichung wird identisch mit II), wenn man setzt

$$m = c = 0,\quad b = \pm 1,\quad d = \pm\xi,\quad e = \pm\eta.$$

Der gesuchte Kegelschnitt hat also zur Gleichung

$$\pm xy + \xi y - \eta x = 0 \tag{III}$$

Die beiden durch diese Gleichung dargestellten Hyperbeln, deren Asymptoten den Coordinatenaxen parallel sind, genügen also der Bedingung, dass die Verbindungslinien ihrer Durchschnittspunkte mit der Kreisperipherie mit dem Punkte 0 der von ξ, η aus gezogenen Tangenten parallel seien. Obgleich wir auf diese Weise acht Durchschnittspunkte erhalten, gibt es nur vier Richtungen, weil die Verbindungslinien zu je zweien auf einander fallen.

Die Hyperbel, welche für $\omega = 90^0$ zu einer gleichseitigen wird, ist nicht von a, sondern nur von ξ. η und ω abhängig. In beiden Fällen ist ihre Gleichung, auf diesen als Anfangspunkt der Coordinaten bezogen,

$$xy = -\xi\eta.$$

Die Axen der Hyperbel sind $a = 2\sqrt{xy}\cos\frac{\omega}{2}$, $b = 2\sqrt{\xi\eta}\sin\frac{\omega}{2}$.

Die Hyperbel ändert also nur ihre Lage und nicht ihre Form, wenn ξ und η sich so ändern, dass ihr Product constant bleibt, das heisst, wenn der Punkt, von welchem aus die Tangenten gezogen werden sollen, eine Hyperbel beschreibt, die die festen Geraden zu Asymptoten hat. Da nun nur die Richtung der Tangenten bestimmt werden soll, so kann man in diesem Falle sich mit einer einzigen Hyperbel begnügen, während der Kreis verschoben wird. Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, ergiebt sich nunmehr folgende einfachere Construction: Bewegt sich der Punkt ξ, η auf einer Hyperbel H_1, welche die beiden festen Geraden zu Asymptoten hat, so construirt man die conjugirte Hyperbel H_2 und sucht deren Durchschnittspunkt mit einem Kreise von Radius a, dessen Mittelpunktscoordinaten ξ und $-\eta$ oder $-\xi$ und $+\eta$ sind. Den Verbindungslinien dieses Mittelpunkts mit den Durchschnittspunkten sind die gesuchten Tangenten parallel. Wenn nur ein Punkt ξ, η gegeben ist, so lassen sich bekanntlich die beiden Hyperbeln leicht construiren, welche dieselben bleiben für jeden Wert von a.

2) Ob die zweite Aufgabe, auf der beweglichen Gerade in jeder ihrer Lagen den Berührungspunkt zu finden sich also allgemein für jeden Winkel ω lösen lässt, erscheint mir bis jetzt noch zweifelhaft. Ich teile daher vorläufig die Entwickelung mit für den besondern Fall $\omega = 90^0$, auf den sich auch Sucharda beschränkt. Sind x', y' die Coordinaten des Berührungspunkts, so hat man die beiden Gleichungen

$$p^2 + q^2 = a^2, \quad py' + qx' = pq.$$

Eliminirt man zwischen beiden q, so kommt

$$p^4 - 2p^3x' + p^2(x'^2 + y'^2 - a^2) + 2pa^2x' - a^2x'^2 = 0.$$

Die Derivirte dieser Gleichung ist

$$4p^3 - 6p^2x' + 2p(x'^2 + y'^2 - a^2) + 2a^2x' = 0.$$

Bekanntlich müssen beide Gleichungen gleichzeitig durch x', y' befriedigt werden. Multiplicirt man die erste mit 2 und die zweite mit p, uud subtrahirt, so erhält man

$$a^2x'^2 - px'(p^2 + v^2) + p^4 = 0;$$

Daraus $x_1' = p$, $x_2' = \frac{p^3}{a^2}$; folglich $y_1' = q$, $y_1' = \frac{q^3}{a^2}$. Nur die zweiten Werte genügen der Gleichung $py' + qx' = pq$. Die Normale im Punkte $x'y'$ hat daher zur Gleichung

$$\left(y - \frac{q^3}{a^2}\right) = \frac{p}{q}\left(x - \frac{p^3}{a^2}\right),$$

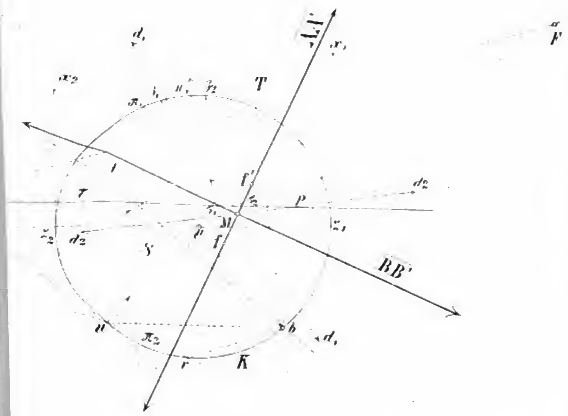
oder

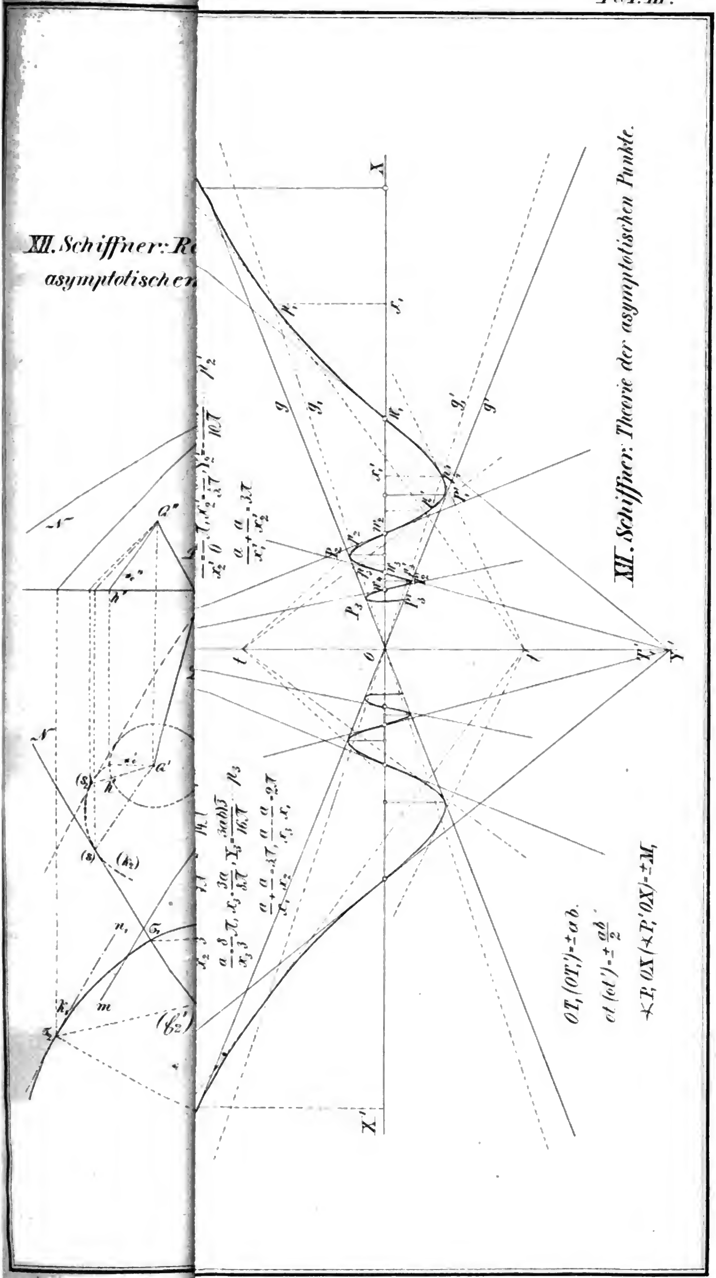
$$qy - px = \frac{q^4 - p^4}{a^2} = \frac{q^2 + p^2}{a^2}(q^2 - p^2) = q^2 - p^2.$$

Da diese Gleichung durch $y = q$, $x = p$ befriedigt wird, so ergibt sich folgende Construction. Durch die Endpunkte der gegebenen Tangente zieht man Parallele zu der festen Geraden und fällt von ihrem Durchschnittspunkt (der auf dem Kreise um 0 mit dem Radius a liegt) eine Senkrechte auf die Tangente. Der Fusspunkt ist der verlangte Berührungspunkt. Dr. Stammer.

Bergmann: Kegelschnittbüschel Constructionen.

Fig. 4.





Steindruckerei v. F. W. Kunike Greifswald.

XIII.

Der Beweis des Ptolemäusschen Satzes.

Von

Herrn Dr. **Schnell.**

Das Product der Diagonalen eines Sehnenvierecks ist gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten.

§ 1.

Sehnenviereck kann nur ein Viereck sein, dessen Gegenwinkel gleich 2 Rechten sind.

Daher sind Sehnenvierecke:

1) Quadrat und Oblongum,

2) Gleichschenkliges Trapez,

3) Jedes Trapezoid, welches die allgemeine Bedingung erfüllt.

Unter den Trapezoiden verdient ein Viereck hervorgehoben zu werden, dessen je zwei Nebenseiten gleich sind. In ihm stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander; die grössere Diagonale halbirt ihre Winkel und die kleinere Diagonale; die Gegenwinkel, welche die letztere teilt, sind gleich. Wir wollen es zur kurzen Bezeichnung der Aehnlichkeit wegen Draco nennen. Die gleichen Gegenwinkel des Sehnendraco sind rechte.

§ 2.

Der Ptolemäus lässt sich beim Quadrat, Oblongum und Sehnendraco schon aus den Sätzen des rechtwinkligen Dreiecks beweisen.

Bei den beiden ersteren beweist der Pythagoras, weil die Diagonalen so wie die Gegenseiten gleich sind.

Beim Sehnendraco beweist der Satz, dass im rechtwinkligen Dreieck das Product der Katheten dem Product der Hypotenuse und der Höhe auf dieselbe gleich ist, in Verbindung damit, dass zwei Nebenseiten gleich, die kleine Diagonale aber halbirt ist.

§ 3.

Die Diagonalen eines Vierecks können entweder sämmtliche vier, oder zwei oder einen Winkel halbiren. Das erstere ist im Quadrat, das zweite im Draco und dem gleichschenkligen Trapez, dessen eine Grundlinie dem Schenkel gleich ist, der Fall, das letztere kann in jedem andern Trapezoid der Fall sein.

Geht man von einem halbirten Viereckswinkel aus, so ergiebt sich der Beweis des Ptolemäus aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ohne Ziehung einer Hülfslinie.

Nehmen wir den Fall eines Trapezoids mit einem halbirten Winkel in Fig. 1.

Voraussetzung. Wkl. α = Wkl. β.

Dann ist:

$$\text{Dreieck } ABE \backsim ADC$$
$$\text{Dreieck } ADE \backsim ABC$$

folglich:

$$AB.CD = BE.AC$$
$$AD.BC = DE.AC$$

addirt:

$$(AB.CD) + (AD.BC) = BD.AC$$

Die Anwendung auf die übrigen Fälle ist selbstverständlich.

§ 4.

Wahrscheinlich, obgleich der Almagest keine directe Andeutung darüber enthält, hat diese Wahrnehmung den Ptolemäus auf die Idee seiner Beweisführung gebracht. Er berücksichtigt nur den Fall, dass Wkl. A durch AC ungleich geteilt ist. Um nun den Beweis der Fig. 1. auch hier analog anwenden zu können, muss offenbar in Fig. 2. der Wkl. BAE dem Wkl. CAD, und damit der Wkl. DAE

dem Wkl. BAC gleichgemacht werden. Dann verläuft der Beweis ganz mit der Bezeichnung der Fig. 1.*)

Während dieser Beweisführung der Vorzug der praktischen Einfachheit und Kürze nicht abzustreiten ist, leidet sie vom wissenschaftlichen Standpunkt aus an dem Mangel:

> dass sie nicht gradezu auf das Ziel losgeht: unter Anlegung eines gemeinschaftlichen Flächenmasses die Inhaltsgleichheit der bezüglichen Producte nachzuweisen.

Dass diese Beweisführung möglich ist, ergiebt das Folgende.

§ 5.

Die natürliche Masseinheit für alle Flächen, die zu dem Kreise in Beziehung stehen, ist das Quadrat des Radius, aus dem der Kreis erwächst, oder des Durchmessers als grösster Sehne und $2r$.

Nehmen wir zunächst den Quadratdurchmesser als Einheit an. Dann stellen sich die bezüglichen Producte als Rechtecke dar, deren Grundlinie der Durchmesser ist, und deren „Höhenlinie" gefunden werden soll. Der analytische Plan geht demnach darauf hinaus:

> die Gleichheit der Höhenlinie des Diagonalenproducts und der Höhenliniensumme der Producte der Gegenseiten nachzuweisen.

Der entscheidende Satz ist:

> Das Product der Schenkel eines Peripheriewinkels ist gleich dem Product aus dem Durchmesser und der Höhe auf die Richtung der Sehne des Winkels.

Es sind hier 3 Hauptfälle zu unterscheiden:

a) das Centrum liegt in der Winkelfläche (Fig. 3.),
b) der eine Schenkel ist Durchmesser (Fig. 4.),
c) das Centrum liegt ausserhalb der Winkelfläche (Fig. 5.).

Im ersten und dritten Fall ergiebt sich der Satz aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und ACE, denn auch im dritten Fall ist

---

*) Unserer Ansicht nach sollten in den Lehrbüchern beide Fälle gleiche Berücksichtigung finden, weil die gewöhnliche einseitige Behandlung auf den Schüler zu leicht den Eindruck der blossen Zufälligkeit und Willkür macht.

der gemeinschaftliche Bogen der Winkel ABD und ALC arcus ABC. Im zweiten Fall ist die Kathete AB selbst Höhe auf die Richtung der Sehne BC.

Es ist hier noch der Fall zu berücksichtigen, dass beide Schenkel sich decken, also der Peripheriewinkel $BAC = 0^0$ ist. Hier verschwindet zwar die reelle Sehne, allein aus den progressiven Sehnenrichtungen bei progressiver Annäherung der Endpunkte der Schenkel eines Peripherie- oder Centriwinkels lässt sich schliessen, dass als Richtungslinie der zwischen den vereinigten Endpunkten zu denkenden ideellen Sehne die Richtung der Tangente des Vereinigungspunktes anzusehen ist.

Die Richtungslinie der ideellen Sehne des Winkels BAC liegt in der Tangente EF, und die Höhenlinie darauf ist der Durchmesser selbst.

Die Richtungslinie der ideellen Sehne des Winkels GAH liegt in der Tangente FJ und AJ ist die Höhenlinie. Hier lässt sich zugleich Probe der Richtigkeit der Anschauung machen. Zieht man $AK = AG$, so ist die Höhenlinie ihres Products AL und diese muss AJ gleich sein. Die Gleichheit folgt aus der Congruenz der Dreiecke AGJ und AGL; denn

$$AG = AG$$
$$\text{Wkl. } L = \text{Wkl. } J$$
$$\text{Wkl. } AGJ = \text{Wkl. } AGL$$

weil die dazu gehörigen Bogen AG und AK gleich sind.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn die gleichen Schenkel eines Peripheriewinkels sich nicht decken, wie AH und AK, die Höhenlinie stets in der Richtuug des Durchmessers von der Winkelspitze aus liegt.

§ 6.

Soll nun der in § 5. enthaltene Satz Anwendung auf den Ptolemäus finden, so müssen die Gegenseiten in Nebenseiten verwandelt und die Diagonalen zu Schenkeln eines Peripheriewinkels zusammengelegt werden. Die Verwandlung geschieht am einfachsten durch Umlegung zweier Nebenseiten.

In Fig. 7. ist $ABCD$ das gegebene Sehnenviereck, AC und BD sind die Diagonalen. Indem BC und CD ihre Plätze wechseln, entsteht das Viereck $ABZD$. Die Diagonale BD bleibt in ihrer Lage. Wenn wir nun die Bogen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $DA = d$

nennen, so ist die andere Diagonale AC Sehne der Summe der Nebenbogen $a+b$ oder $c+d$. Man kann sie an B oder D legen, hier geschieht es an B, indem man auf dem Bogen ADZ entweder b von A oder d von Z aus nach E abträgt. Dann soll sein:

$$(AB\,.\,BZ)+(AD\,.\,DZ)=BD\,.\,BE$$

Beweis. Um die Fig. 7. nicht zu sehr zu überladen ist das neu gebildete Sehnenviereck $ABZD$ mit BD und BE in Fig. 8. besonders gezeichnet.

Da nun

$$\text{Bogen } AE=b \text{ oder}$$
$$\text{Bogen } ZDE=d$$

so ist die Richtung der Sehne DE des Diagonalenwinkels DBE parallel zu AZ, der gemeinschaftlichen Sehne der beiden Supplementär-Peripheriewinkel ABZ und ADZ.

Die Höhenlinien der Schenkelproducte dieser beiden Winkel sind BF und DG, die Höhenlinie des Schenkelproducts des Diagonalenwinkels BH, und da

$$DG=FH$$

so ist

$$BH=BF+DG$$

womit der versprochene Beweis ausgeführt ist.

Denn da

$$(AB\,.\,BZ)+(AD\,.\,DZ)=BD\,.\,BE$$

und

$$BZ=CD$$
$$DZ=BC$$
$$BE=AC$$

so ist

$$(AB\,.\,CD)+(AD\,.\,BC)=AC\,.\,BD$$

Man verfolge diese Beweisführung auch an Sehnenvierecken, deren eine Seite Durchmesser ist oder deren Fläche ausserhalb des Centrums liegt, so wie am Quadrat, Oblongum u. s. w. Für Beurteilung aller dieser speciellen Fälle ist durch den § 5. gesorgt.

Als Nebensatz des Ptolemäus aber ergiebt sich aus vorstehender Betrachtung der Satz:

> Die Schenkelproductensumme zweier ein Sehnenviereck bildender Peripheriewinkel ist gleich dem Schenkelproduct eines Winkels, dessen einer Schenkel Verbindungslinie der beiden Winkelspitzen, der andere Sehne zweier summirter Gegenbogen des Vierecks ist.

Stellt man diesen Satz voran, so ergiebt sich der Ptolemäus von selbst. Denn, wenn man die Schenkel der „zwei“ Winkel zu Gegenseiten eines Sehnenvierecks macht, so sind die Schenkel des „einen“ Winkels Diagonalen des Vierecks.

§ 7.

Nehmen wir laut Eingangs des § 5. den **Quadratradius** als Flächenmass der zu bildenden Schenkelproducte an, so ist die Beweisführung, mechanisch angesehen, sehr einfach, indem man lediglich die vorstehend gewonnenen Höhenlinien verdoppelt. Denn

$$h.\mathrm{diam} = 2h.r$$

Wir ziehen jedoch die selbstständige Lösung der Aufgabe vor, weil sie an sich mehreres Interessante bietet.

Wie im Vorstehenden der Durchmesser als constante Grundlinie der fraglichnn Rechtecke angenommen und die Höhenlinie gesucht ist, so nehmen wir hier den Radius als constante Höhe an und suchen die Grundlinie oder „Längenlinie“ dazu.

Wir werden bald sehen, dass sich diese Längenlinie nur ausnahmsweise als eine einzige, in den meisten Fällen aber als Summe oder Differenz zweier Linien im Kreise darstellt.

Zur kürzeren Bezeichnung und leichteren Handhabung der Formeln gestatte man mir die Einführung eines Begriffs, der auch in andern Beziehungen wichtig werden kann, desjenigen der „Cochorde“ (coch), worunter verstanden wird:

> Die Sehne (chorde, ch) eines Bogens, welcher mit einem gegebenen Bogen oder dem Bogen einer gegebenen chorde oder eines gegebenen Winkels 180^0 ausmacht.

Die coch wird construirt, indem man von einem Ende des gegebenen Bogens aus den gegenüberliegenden Endpunkt des Durchmessers bezeichnet; die Gerade von diesem Endpunkt zum andern Bogenende ist die coch.

Bezeichnet man den gegebenen Bogen mit arc, so ist die coch desselben,

1)	wenn arc $< 180^0$,	$= \mathrm{ch}(180^0 - \mathrm{arc})$ und positiv
2)	„ arc $= 180^0$,	$= \mathrm{ch}(0)$
3)	„ arc $> 180^0$,	$= \mathrm{ch}(\mathrm{arc} - 180^0)$ und negativ
4)	„ arc $= 0^0$,	$= \mathrm{ch}\ 180^0$ und positiv
5)	„ arc $= 360^0$,	$= \mathrm{ch}\ 180^0$ und negativ.

Der einfachste und gewöhnliche Fall ist der erste, wie in Fig. 9. Arc AC ist gegeben und da B der Endpunkt des Durchmessers von C aus ist, so ist arc $AB = 180^0 - \text{arc} AC$, also AB die coch arc AC. Wäre der erhabene arc $CABE$ gegeben (dritter Fall), so würde die coch desselben BF und negativ sein.

Ch und coch bilden einen rechten Peripheriewinkel, dessen Sehne der Durchmesser ist.

Die Summe der Centriwinkel, denen sie angehören, ist $= 180^0$, der bezüglichen Peripheriewinkel $= 90^0$.

Der Zusammenhang der ch und coch des Peripheriewinkels α mit sin CE und cos DE des gleichen Centriwinkels β ist unverkennbar.

§ 8.

Fragen wir nun zunächst nach der Längenlinie des Schenkelproducts eines einzelnen Peripheriewinkels bei Annahme des Radius als Höhe des Products und benennen die den Schenkeln zugehörigen Bogen mit a und b, so zwar, dass, wenn sie nicht gleich sind, a den grösseren bezeichnet, so ist der entscheidende Satz:

> Das Schenkelproduct eines Peripheriewinkels ist gleich dem Product aus dem Radius und den Cochorden 1) der Differenz der Schenkelbogen und 2) des Bogens des Peripheriewinkels.
>
> $\text{ch}\, a . \text{ch}\, b = [\mp \text{coch}(a-b) \mp \text{coch}(360^0 - a - b)] r.$

Beim Beweise dieses Satzes sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1) Der gegebene Winkel ist stumpf, Winkel ABC ist gegeben, die Schenkelbogen sind a und b, der Bogen des Winkels arc $ADEC$.

Um die coch$(a-b)$ zu finden, trägt man b auf a von A nach H ab, von H bemerkt man den gegenüberliegenden Endpunkt des Durchmessers in D und verbindet D mit B.

Ebenso verbindet man, um die coch des Winkelbogens oder $(360^0 - a - b)$ zu finden, den A gegenüberliegenden Durchmesserendpunkt E mit C.

Die erste coch ist positiv, weil $(a-b) < 180^0$, die zweite negativ, weil $(360^0 - a - b) > 180^0$.

Es soll daher sein:

$$AB . BC = (BD - CE) r$$

Um dies zu beweisen, verlängert man EC, bis $EF = BD$, dann ist

$$BD - CE = CF$$

Zieht man nun noch die Hilfslinien BF, BG und AG, so lässt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke CBF und ABG beweisen. Denn, da BH parallel AC, BD senkrecht auf BH, und EC senkrecht auf AC, so sind BD und CE Parallelen, und da $DE =$ sowohl BC wie CF, so ist $BC = BF$, also Dreieck CBF ebenso wie ABG ein gleichschenkliges Dreieck, und da endlich Winkel $BCF = BFC = BDE$ mit Winkel BAG denselben arc ECB hat, so ist die Aehnlichkeit bewiesen. Dann verhält sich

$$\frac{AB : AG = CF : BC}{AB . BC = CF . r = (BD - CE) r}$$

2) Der Winkel ist ein rechter.

Dann ist die zweite coch $= 0$, es bleibt nur coch$(a - b)$ und der Beweis ist einfach.

3) Der Winkel ist ein spitzer.

Hier haben wir zu unterscheiden:

a) $(a - b) < 180^0$
b) $(a - b) = 180^0$
c) $(a - b) > 180^0$

Der Fall sub

3a) hat das grösste Gebiet.

ABC ist der gegebene spitze Winkel. $a - b$ ($= BH$) ist ebensowohl wie arc $ADC < 180^0$, folglich sind beide coch BD und CE positiv. Nachdem CE um BD bis F verlängert ist, ergiebt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke AGB und CBF. Also ist:

$$\frac{AB : r = (BD + CE) : BC}{AB . BC = (BD + CE) r}$$

3b) $(a - b)$ des spitzen Peripheriewinkels ist $= 180^0$.

Dann ist coch$(a - b) = 0$.

$$AB . BC = \text{coch}\,(360^0 - a - b)$$

Beweis einfach.

3c) $(a-b) > 180^0$.

Dann muss $a > 180^0$ und $b < (a-180^0)$ sein.

ABC ist der gegebene Peripheriewinkel; als Bogen des Schenkels AB ist nicht etwa arc ACB, sondern arc $AHEB$ zu betrachten, weil sonst a und b in einander übergehen würden.

$a-b$ $(b = AH)$ ist arc $BDEH$, also $> 180^0$, demnach coch $(a-b) = BD$ negativ, während die zweite coch CE positiv ist. Daher:

$$AB \,.\, BC = (CE - BD)r$$

Der Beweis folgt, nachdem man $DF = CE$ gemacht hat, wiederum aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AGB und BCF.

Damit sind offenbar alle möglichen Fälle erschöpft und in allen hat sich die Formel:

$$\text{ch}\, a \,.\, \text{ch}\, b = [\mp \text{coch}\,(a-b) \mp \text{coch}\,(360^0 - a - b)]r$$

als zutreffend erwiesen.

Wir rangiren die Fälle kurz so:

Im Fall 3a) sind beide coch positiv,
„ „ 1) ist die zweite coch negativ,
„ „ 3c) „ „ erste coch negativ,
„ „ 2) „ „ zweite coch = 0,
„ „ 3b) „ „ erste coch = 0.

Dabei erinnere man sich aus § 7, dass coch 0^0 (wie auch 0^0 entstanden sein möge), der positive Durchmesser ist.

§ 9.

Wie verhält es sich mit der Summirung der Schenkelproducte zweier Supplementär-Peripheriewinkel?

Satz: Die Schenkelproductensumme zweier ein Sehnenviereck bildenden Peripheriewinkel ist gleich dem Product aus dem Radius und den summirten $\pm$ Cochorden der Differenzen der Bogen der Schenkelpaare.

Sind a und b so wie c und d die Schenkelbogen der beiden Peripheriewinkel, und bedeuten a und c, im Fall der Ungleichheit, die grösseren Bogen, so ist

$$(\text{ch}\, a \,.\, \text{ch}\, b) + (\text{ch}\, c \,.\, \text{ch}\, d) = [\mp \text{coch}\,(a-b) \mp \text{coch}\,(c-d)]r$$

Beweis. Hier sind zwei Fälle möglich:

a) entweder sind beide Winkel rechte; dann ist sowohl coch $(360^0 - a - b)$ als auch coch$(360^0 - c - d) = 0$ und es bleiben nur die beiden positiven

$$\operatorname{coch}(a-b) + \operatorname{coch}(c-d)$$

b) oder der eine Winkel ist stumpf, der andere spitz. Dann ist coch$(360^0 - a - b)$ und coch$(360^0 - c - d)$ dieselbe Linie, die coch des spitzen Winkels aber positiv, die des stumpfen negativ; sie heben sich daher bei der Summirung auf, und es bleibt wiederum nur

$$\operatorname{coch}(a-b) \quad \text{und} \quad \operatorname{coch}(c-d)$$

Da wir jedoch bei der allgemeinen Formulirung nicht wissen können, welche Bezeichnung den Winkeln zufallen wird, und die erste coch des spitzen Winkels (Fälle 3a und 3c des § 7) positiv oder negativ sein kann, so müssen wir an sich beide Cochorden mit $\pm$ bezeichnen. Wenn aber a und b die Schenkelbogen des stumpfen Winkels bezeichnen, so sind die betreffenden Längenlinien

$$\operatorname{ch}(a-b) \mp \operatorname{coch}(c-d)$$

und der Fall der Negativität der letzteren tritt selten ein.

§ 10.

Bei Anwendung des vorstehenden Satzes behuf Beweises des Ptolemäus können wir uns auf blosse Rechnung beschränken.

Nennen wir die Gegenbogen des mit seinen Diagonalen gegebenen Sehnenvierecks a und b bzhw. c und d, und bezeichnen, im Fall der Ungleichheit, die grösseren Bogen mit a und c, so ist nach § 9. die Schenkelproductensumme der Gegenseiten:

$$(\operatorname{ch} a \,.\, \operatorname{ch} b) + (\operatorname{ch} c \,.\, \operatorname{ch} d) = [\mp \operatorname{coch}(a-b) \mp \operatorname{coch}(c-d)]\, r$$

Die beiden Diagonalen können an sich als Sehnen betrachtet werden von bzhw.

1) $\operatorname{arc}(a+d)$ oder $\operatorname{arc}(b+c)$
2) $\operatorname{arc}(a+c)$ oder $\operatorname{arc}(b+d)$

Wenn aber, wie zum Beweise erforderlich, die Diagonalen zu einem Peripheriewinkel zusammengelegt werden sollen, so darf die Summe ihrer Bogen begreiflicherweise das Mass von 360^0 nicht überschreiten. Dies würde geschehen, wenn einer der grösseren Bogen a oder c in beiden Diagonalenbogen vorkäme. Deswegen ist arc $(a+c)$ von der Zusammenlegung auszuschliessen, weil er entweder mit $(a+d)$ oder $(b+c)$ zusammentreffen würde.

Die Schenkelbogen des Diagonalenwinkels erscheinen demnach:

1) entweder als arc$(a+d)$ und arc$(b+d)$
2) oder als arc$(b+c)$ und arc$(b+d)$

Bei der erfolgenden Berechnung der Schenkelproducte aber sind beide coch mit $\mp$ zu bezeichnen, weil wir nicht wissen, ob ein und welcher arc etwa $> 180^0$ ist.

1) Das Schenkelproduct ad Nr. 1 berechnet sich, wie folgt:

$$\mathrm{ch}(a+d)\,.\,\mathrm{ch}(b+d) = [\mp \mathrm{coch}(a+d-b-d) \mp \mathrm{coch}(360^0-a-b-2d)]r$$

Da in der ersten coch die beiden d sich aufheben, in der zweiten aber von 360^0 nur c nach Abzug des einen d übrig bleibt, so ist

$$\mathrm{ch}(a+d)\,.\,\mathrm{ch}(b+d) = [\mp \mathrm{coch}(a-b) \mp \mathrm{coch}(c-d)]r$$

2) Das Schenkelproduct ad Nr. 2 berechnet sich:

$$\mathrm{ch}(b+c)\,.\,\mathrm{ch}(b+d) = [\mp \mathrm{coch}(b+c-b-d) \mp \mathrm{coch}(360^0-2b-c-d)]r$$

In der ersten coch heben sich die beiden b auf, in der zweiten bleibt von 360^0 nur a nach Abzug des einen b übrig, also:

$$\mathrm{ch}(b+c)\,.\,\mathrm{ch}(b+d) = [\mp \mathrm{coch}(c-d) \mp \mathrm{coch}(a-b)]r$$

Damit ist der Beweis erbracht. Die geometrische Construction zu den beiden letzten Paragraphen kann, namentlich nach Ansicht der Fig. 7 und 8, keine Schwierigkeiten bieten.

Anhang 1. Vielleicht interessirt es, die halbe Länge der nach §§ 5—6. gewonnenen Höhenlinien gegenüber den nach §§ 8—9. gewonnenen Längenlinien durch geometrische Construction zu erkennen. Es sind daher in den Fig. 10—12. die Höhenlinien mit BJ bezeichnet, und dass diese die Hälfte der Längenlinien CF bzw. BF sind, bedarf keiner Ausführung. In den Fällen, wo eine der coch gleich 0 wird, ist die Sache noch einfacher. Nur den gewöhnlichsten Fall der Summirung der beiden Supplementär-Peripheriewinkel mag schliesslich die Fig. 13. veranschaulichen:

Gegeben sind die beiden Peripheriewinkel ABC und ADC; die Höhenlinien der beiden Schenkelproducte sind BE und DF, die Längenlinien BG und DH. Dann soll sein:

$$BE + DF = \frac{BG + DH}{2}$$

Man errichte in D und H die Senkrechten DJ und HK auf DH, dann ist

$$LM = DH$$
$$GL = BM$$

Da aber

$$BL = BE + DF \text{ und}$$
$$BL = LG + DH$$

so ist
$$BE + DF = \frac{BG + DH}{2}$$

Anhang 2. Der etwa gewünschte Nachweis der Concordanz der alten und neuen Beweisführung ist kurz folgender:

Nehmen wir zuvörderst in Fig. 14. den einfacheren Fall der Fig. 1.

$$\text{Wkl. } \alpha = \text{Wkl. } \beta, \text{ also auch } BC = CD.$$

Nach der alten Beweisführung ist

$$AB.CD = AC.BE$$
$$AD.BC = AC.DE$$

oder da $BC = CD$

$$AB.BC = AC.BE$$
$$AD.CD = AC.DE$$

Nach der neuen Beweisführung (§§ 5 und 6) sind diese Producte gleich, wenn ihre Höhenlinien gleich sind.

Bezüglich der ersten Productengleichung ist BF die Höhenlinie von $AB.BC$, und trägt man BE von A nach H, so ist AJ die Höhenlinie von $AC.AH = AC.BE$.

Die Dreiecke BEF und AHJ aber sind congruent, da

$$BE = AH$$
$$\text{Wkl. } F = \text{Wkl. } J$$
$$\text{Wkl. } x = \text{Wkl. } y$$

(weil arc des Wkl. x, als innerexcentrischen Winkels $= \text{arc}(BC + AD)$ und da $BC = CD$, so $= \text{arc}\, ADC$, welcher Bogen auch dem Wkl. y als einsehnigem Peripheriewinkel zukommt), folglich

$$BF = AJ$$

In gleicher Art beweist sich aus der Congruenz der Dreiecke DEG und AKL, dass Höhenlinie DG von $AD.CD$ und Höhenlinie AL von $AC.DE$ oder $AC.AK$ gleich sind.

Das Resultat bleibt natürlich dasselbe, ob nun BE und DE auf der einen oder anderen Seite von A oder C angetragen werden.

In dem complicirteren Falle der Fig. 2. ist der Nachweis der Concordanz fast derselbe.

In Fig. 15. ist $ABCD$ das gegebene Viereck mit den Diagonalen AC und BD. Nach Vorschrift der alten Beweisführung ist Winkel BAC an AD getragen, indem der Bogen DKZ dem Bogen BC gleichgemacht und die Grade ZA gezogen ist. Dadurch ist Wkl. $BAC =$ Wkl. DAZ. Wird nun Z mit B und D verbunden, so entsteht das neue Sehnenviereck $ABZD$, in welchem die bisherigen Gegenseiten zu Nebenseiten und zu Schenkeln der beiden Winkel ABZ und ADZ werden.

Nach der alten Beweisführung soll nunmehr sein

$$AC.BE = AB.CD = AB.BZ$$
$$AC.DE = AD.BC = AD.DZ$$

Man trage BE von A nach H und DE von C nach K, construire die Höhenlinien BF und AJ bzhw. DG und CL, deren bezügliche Gleichheit, wie vorhin, aus der Congruenz der Dreiecke BEF und AHJ bzhw. DEG und CKL folgt. Es versteht sich, dass auch hier BE und DE von A oder C nach beiden Seiten abgetragen werden können.

Ein praktisch leichterer, aber schwächerer Nachweis der Concordanz ist der folgende:

Man lege, wie in Fig. 14. ausgeführt ist, von A (oder C u. s. w.) den Durchmesser AM und verbinde M mit C. Dann ist

$$\text{Dreieck } AMC \backsim BEF \backsim DEG$$

denn

$$\text{Wkl. } ACM = \text{Wkl. } F = \text{Wkl. } G = R$$
$$\text{Wkl. } AMC = \text{Wkl. } x = \text{Wkl. } DEG$$

weil

$$\text{arc Wkl. } AMC = \text{arc} \, ADC$$
$$\text{arc Wkl. } x = \text{arc Wkl. } DEG = \text{arc}\,(BC + AD) = \text{arc}\, ADC$$

folglich

$$BF : BE = AC : AM = DG : DE$$
$$AC.BE = \text{diam.}\, BF$$
$$AC.DE = \text{diam.}\, DG$$

In Fig. 15. ist

$$\text{arc Wkl.}\, x = \text{arc Wkl.}\, DEG = \text{arc}(BZ + AD) = \text{arc}(CD + AD) = \text{arc}\, ADC.$$

Hannover, August 1881.

XIV.

Ueber magische Parallelepipeda.

Von

Th. Harmuth.

In Uebereinstimmung mit früheren Bezeichnungen möge unter einem magischen Parallelepipedon verstanden werden die räumliche Anordnung von pqr auf einander folgenden ganzen Zahlen in der Weise, dass in jeder Reihe der einen Richtung je p, der zweiten je q und der dritten je r Zahlen stehen, und die sämmtlichen Zahlensummen einer und derselben Richtung unter sich gleich sind. Nimmt man zur Herstellung die ersten pqr ganzen Zahlen, von 1 angerechnet, so wird man, da die Gesammtsumme $\frac{pqr(pqr+1)}{2}$ ist, und in den einzelnen Richtungen der Reihe nach qr, pr, pq Teilsummen vorhanden sind, sofort übersehen, dass die diesen Richtungen entsprechenden Teilsummen =

$$\frac{p(pqr+1)}{2}, \quad \frac{q(pqr+1)}{2}, \quad \frac{r(pqr+1)}{2}$$

sein müssen. Aus der Form dieser Teilsummen gewinnt man leicht den Schluss, dass magische Parallelepipeda nur darstellbar sein können, wenn die drei Zahlen p, q, r sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind, weil für andere Annahmen die Ausdrücke für die Teilsummen teilweise auf gebrochene Zahlen führen.

§. 1. Eine theoretisch leicht nachweisbare Lösung von allgemeiner Giltigkeit für beide Fälle ist folgende, die wegen ihrer grossen Symmetrie zunächst ins Auge fallen muss.

Setzt man zur Abkürzung

$$a_{ikl} = (i-1)qp + (k-1)p + l$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots r, \quad k = 1, 2, 3 \ldots q, \quad l = 1, 2, 3 \ldots p$$

so kann man das System der zu verwendenden Zahlen folgendermassen bezeichnen:

$$\begin{array}{llcl}
a_{111} & a_{112} & \ldots & a_{11p} \\
a_{121} & a_{122} & \ldots & a_{12p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1q1} & a_{1q2} & \ldots & a_{1qp} \\
\hline
a_{211} & a_{212} & \ldots & a_{21p} \\
a_{221} & a_{222} & \ldots & a_{22p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{2q1} & a_{2q2} & \ldots & a_{2qp} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
a_{r11} & a_{r12} & \ldots & a_{r1p} \\
a_{r21} & a_{r22} & \ldots & a_{r2p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{rq1} & a_{rq2} & \ldots & a_{rpq} \\
\hline
\end{array}$$

Bezeichnet man ferner die drei Dimensionen des Parellelepipedons als horizontale, verticale und laterale Dimension und versteht sodann unter

$$\Sigma H_\alpha, \quad \Sigma V_\alpha, \quad \Sigma L_\alpha$$

die Summe der αten Indices in den Horizontal-, Vertical- und Lateralreihen, so ist das obige Zahlensystem so umzustellen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\Sigma H_1 = \frac{p(r+1)}{2} \qquad \Sigma H_2 = \frac{p(q+1)}{2} \qquad \Sigma H_3 = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\Sigma V_1 = \frac{q(r+1)}{2} \qquad \Sigma V_2 = \frac{q(q+1)}{2} \qquad \Sigma V_3 = \frac{q(p+1)}{2}$$

$$\Sigma L_1 = \frac{r(r+1)}{2} \qquad \Sigma L_2 = \frac{r(q+1)}{2} \qquad \Sigma L_3 = \frac{r(p+1)}{2}.$$

Beweis. In jeder Horizontalreihe stehen p Glieder. Da jedes Glied

$$a_{ikl} = (i-1)pq + (k-1)p + l$$

ist, wie oben angenommen wurde, so ist die Summe der sämmtlichen Glieder einer Horizontalreihe =

$$(i'-p)pq+(k'-p)p+l',$$

wenn unter i', k', l' die Summe der p Werte von i, k, l verstanden wird. Ersetzt man darin die Ausdrücke i', k', l' der Reihe nach durch die obigen Werte von ΣH_1, ΣH_2, ΣH_3, so erhält man:

$$\left(\frac{p(r+1)}{2}-p\right)pq+\left(\frac{p(q+1)}{2}-p\right)p+\frac{p(p+1)}{2}=\frac{p(pqr+1)}{2}$$

wie verlangt wird. Durch ein ganz analoges Verfahren erhält man den Nachweis für die beiden anderen Dimensionen.

Ob sich nun das obige Zahlensystem der a_{ikl} so transformiren lässt, dass die aufgestellten Indexsummen erhalten werden, möge dahingestellt bleiben. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass unabhängig von diesem Verfahren, magische Parallelepipeda sich in bestimmten Fälllen aus den für magische Quadrate und Rechtecke vom Verfasser gegebenen Lösungen — cf. Teil LXVI, Nr. XXI und XXXII dieses Journals, welche Arbeiten im Folgenden kurz mit I und II bezeichnet werden mögen — herleiten lassen.

Bemerkt sei übrigens, dass die in I, §. 15. gegebene Lösung für magische Kuben, deren Argument ungerade oder durch 4 teilbar ist, auch in dieses Gebiet fällt, da die magischen Kuben als Parallelepipeda mit 3 gleichen Argumenten resp. Seitenzahlen aufzufassen sind.

Im Uebrigen ist die Darstellung sehr verschieden, jenachdem ungerade oder gerade Argumente zur Darstellung vorliegen.

1) Magische Parallelepipeda mit ungeraden Seitenzahlen.

Dieselben sind natürlich nur denkbar, wenn jedes Argument mindestens = 3 ist.

§. 2. Am einfachsten ist nächst den Kuben die Form $P(p_1 p_1 q)$ — in welcher demnach zwei Seitenzahlen gleich sind — zur Darstellung zu bringen. Ist zunächst $p<q$, so geht man von p auf einander folgenden und nach demselben Gesetz gebauten Rechtecken aus. Diese sind:

$$
\begin{array}{llllllll}
R_1(p,q) & \text{gebildet} & \text{aus} & \text{den} & \text{Zahlen} & 1 & \text{bis} & pq \\
R_2(p,q) & ,, & ,, & ,, & ,, & pq+1 & ,, & 2pq \\
\cdots & & & & & & & \\
R_p(p,q) & ,, & ,, & ,, & ,, & (p-1)pq+1 & ,, & p^2.q
\end{array}
$$

Bezeichnet man nun die Horizontalreihen von

$$R_i(p,q) \text{ mit } H_{i,1}\ H_{i,2} \ldots H_{i,q},$$

so ist das System derselben, welches, sobald die Rechtecke nebeneinander stehen, die Form:

$$
\begin{array}{llll}
H_{1,1} & H_{2,1} & \ldots & H_{p,1} \\
H_{1,2} & H_{2,2} & \ldots & H_{p,2} \\
\cdots & & & \\
H_{1,q} & H_{2,p} & \ldots & H_{p,q}
\end{array}
$$

hat, nach II, §. 6. so umzuformen, dass jede Grösse $H_{i,k}$ in ihrer Horizontalreihe bleibt, dass jedoch die Summe der ersten Indices in allen Verticalen gleich gross wird. Diese Anordnung lässt sich, wie a. a. O. gezeigt wurde, verschieden treffen; seiner Einfachheit wegen empfiehlt sich das nachstehende Schema:

$$
\begin{array}{lllllll}
H_{1,1} & H_{2,1} & H_{3,1} & \ldots & H_{p-1,1} & H_{p,1} \\
H_{\frac{p+1}{2},2} & H_{\frac{p+3}{2},2} & H_{\frac{p+5}{2},2} & \ldots & H_{\frac{p-3}{2},2} & H_{\frac{p-1}{2},2} \\
H_{p,3} & H_{p-2,3} & H_{p-4,3} & \ldots & H_{4,2} & H_{1,1}
\end{array}
$$

für die drei ersten Reihen und für die folgenden dann paarweise:

$$
\begin{array}{llllll}
H_{1,4} & H_{2,4} & H_{3,4} & \ldots & H_{p-1,4} & H_{p,4} \\
H_{p,5} & H_{p-1,5} & H_{p-2,5} & \ldots & H_{2,5} & H_{1,5} \\
\cdots & & & & & \\
H_{1,q-1} & H_{2,q-1} & H_{3,q-1} & \ldots & H_{p-1,\,q-1} & H_{p,\,q-1} \\
H_{p,q} & H_{p-1,q} & H_{p-2,q} & \ldots & H_{2,q} & H_{1,q}.
\end{array}
$$

Bezeichnet man nun die so veränderten Verticalen von

$$R_i(p,q) \text{ mit } V_{i,1}\ V_{i,2} \ldots V_{i,p},$$

so ist das vollständige Verticalsystem

$$
\begin{array}{llll}
V_{1,1} & V_{1,2} & \ldots & V_{1,p} \\
V_{2,1} & V_{2,2} & \ldots & V_{2,p} \\
\cdots & & & \\
V_{p,1} & V_{p,2} & \ldots & V_{p,p}
\end{array}
$$

nach I, §. 1. oder 2. räumlich so anzuordnen, dass nicht zwei Glieder irgend einer wagrechten oder senkrechten Reihe denselben vorderen oder denselben hinteren Index behalten. Dadurch erhält man direct das verlangte Parallelepipedon.

Von der Richtigkeit der Darstellung überzeugt man sich für Horizontalreihen und Lateralreihen einfach dadurch, dass in Folge der Anordnung jede derselben in ihren p Gliedern die p Glieder einer Horizontalreihe des zu Grunde liegenden Rechteckes enthält, nur vermehrt in irgend einer Reihenfolge um diejenigen Zahlen, um welche gleichstellige Zahlen der Rechtecke differiren, d. h. um

$$0, \quad pq, \quad 2pq \; . \; . \; . \; (p-1)pq.$$

Für die Verticalreihen war der Beweis schon angedeutet.

Ist $p > q$, so besteht die Abweichung in der Darstellung nur darin, dass die Horizontalreihen der Rechtecke als Verticalen zu behandeln sind, und ihre Verticalen als Horizontalen.

Beispiel. Geht man von der Form

$$R(3,5) = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 12 \\ 5 & 15 & 4 \\ 9 & 1 & 14 \\ 11 & 6 & 7 \\ 13 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

aus, so erhält man unter Benutzung von I, §. 2. die Lösung

$$\left\| \begin{vmatrix} 2 & 25 & 42 \\ 20 & 45 & 4 \\ 39 & 1 & 29 \\ 11 & 21 & 37 \\ 43 & 23 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 27 & 32 & 10 \\ 34 & 5 & 30 \\ 14 & 24 & 31 \\ 22 & 41 & 6 \\ 18 & 13 & 38 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 40 & 12 & 17 \\ 15 & 19 & 35 \\ 16 & 44 & 9 \\ 36 & 7 & 26 \\ 8 & 33 & 18 \end{vmatrix} \right\| = P(3,3,5)$$

mit den Teilsummen 69, 69, 115.

§. 3. Durch weitere Ueberlegung findet man, von $P(p,p,q)$ ausgehend, Darstellungen für $P(p, sp, q)$ und $P(rp, sp, q)$ worin r und s beliebige ungerade ganze Zahlen sind.

Man gehe von den Parallelepipeden

$P_1(p,p,q)$	gebildet aus den Zahlen	1	bis	p^2q
$P_2(p,p,q)$	„ „ „ „	p^2q+1	„	$2p^2q$
. . . .	. . . .	. . . . . .	. .	. . . .
$P_s(p,p,q)$	„ „ „ „	$(s-1)p^2q+1$	„	sp^2q

aus und bezeichne die Horizontalebenen — d. h. die Gruppen von Horizontalreihen, welche in gleicher Höhe stehen —

$$\text{von } P_i(p, p, q) \text{ mit } H'_{i,1}\ H'_{i,2} \ldots H'_{i,q},$$

so ist das System $H'_{i,k}$ ebenso zu behandeln wie das System $H_{i,k}$ im vorigen Paragraphen. Dadurch erreicht man, wie dort, zunächst gleiche Summen in allen Verticalreihen. In den Horizontalreihen ist die gleiche Summe vorhanden, sobald die $P_i(p, p, q)$ einfach neben einander gestellt werden. In den Lateralseiten, deren Summe nur um Vielfache von p^2q verschieden sein kann, erreicht man den Ausgleich, wie leicht ersichtlich ist, dadurch, dass man — die Verticalebenen der transformirten Teilparallelepipeda mit

$$V'_{i,1}\ V'_{i,2} \ldots V'_{i,p} \quad i = 1, 2 \ldots 5$$

bezeichnet — das System

$$\begin{array}{llll} V'_{1,1} & V'_{1,2} & \ldots & V'_{1,p} \\ V'_{2,1} & V'_{2,2} & \ldots & V'_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V'_{s,1} & V'_{s,2} & \ldots & V'_{s,p}, \end{array}$$

ohne ein Glied in eine andere Horizontale zu bringen, so umstellt, dass die Summe der zweiten Indices für alle Verticalen dieselbe ist.

Das ist nach früheren Angaben leicht ausführbar, folglich ist die Darstellbarkeit von $P(p, sp, q)$ nachgewiesen. Der Beweis ist dem vorigen analog.

Bildet man nun ferner das Parallelepipedon

$$\begin{array}{llllll} P_1(p, sp, q) & \text{aus den Zahlen} & & 1 & \text{bis} & sp^2q \\ P_2(p, sp, q) & ,, \quad ,, & ,, & sp^2q + 1 & ,, & 2sp^2q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_3(p, sp, q) & ,, \quad ,, & ,, & (r-1)sp^2q + 1 & ,, & rsp^2q, \end{array}$$

und hat $P_i(p, sp, q)$ die Horizontalebenen

$$H''_{i,1}\ H''_{i,2} \ldots H''_{i,q},$$

so sind diese zunächst ebenso wie die Horizontalreihen im vorigen Paragraphen zu ordnen, damit die Verticalsumme durchweg die verlangte wird. Stehen die so transformirten Parallelepipeda dann mit den Seiten neben einander, welche dem Argument sp entsprechen, so findet sich auch in den zu dieser Richtung senkrecht stehenden Reihen sofort die verlangte Summe. In der dritten Richtung ist sie dadurch zu erreichen, dass man — diejenigen Teilparallelepipeda, welche in dem so veränderten System ihrer Ausdehnung nach den ursprünglichen Rechtecken $P(p, p, q)$ entsprechen, mit

$$P_{i,1} \quad P_{i,2} \ldots P_{i,s} \quad i = 1, 2 \ldots r$$

bezeichnet — das System

$$\begin{array}{llll} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,s} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{r,1} & P_{r,2} & \ldots & P_{r,s} \end{array}$$

in der mehrfach erwähnten Weise so umformt, dass jedes Glied in seiner senkrechten Reihe stehen bleibt, aber die Summe der vorderen Indices in jeder wagerechten Weise dieselbe wird.

Damit ist die Form $P(rp, sp, q)$ dargestellt.

Auch hier ist der Beweis ohne Schwierigkeit zu führen, da er den vorigen beiden analog ist.

§. 4. Dass eine Herleitung von Parallelepipeden mit drei beliebigen ungeraden Argumenten sich nicht in ähnlicher Weise bewerkstelligen lässt, kann man folgendermassen zeigen.

Geht man zur Darstellung von $P(p, q, r)$ von r Rechtecken

$$R_1(p, q) \quad R_2(p, q) \ldots R_r(p, q)$$

aus, so kann man nach dem Vorigen durch Vertauschung ganzer Horizontalreihen zunächst sehr leicht erreichen, dass die Verticalreihen in allen Rechtecken dieselbe Summe erhalten. Durch eine darauf folgende Vertauschung der veränderten Verticalen wird man auch sämmtliche Horizontalreihen gleichsummig machen können, weil die ursprünglichen Glieder durch beide Vertauschungen nur darin geändert werden, dass diejenige Grösse hinzutritt, um die sich gleichstehende Glieder in den einzelnen Rechtecken unterscheiden. Wie nun aber auch die weitere Anordnung getroffen werden möge, auf keinen Fall wird man für jede Lateralreihe r Glieder aus den p Gliedern der Horizontalreihen der zu Grunde liegenden Rechtecke so auswählen können, dass die Lateralreihen notwendig gleichsummig werden müssen, da eine Anordnung von der Regelmässigkeit, wie sie den gleichen Argumenten der Quadrate entsprechen würde, für die ungleichen Argumente der Rechtecke nicht bekannt ist.

Es lassen sich demnach magische Parallelepipeda mit ungeraden Argumenten auf Zahlenfiguren von zwei Dimensionen nur dann zurückführen, wenn mindestens zwei Argumente derselben gleich sind oder einen gemeinschaftlichen Factor haben.

2) Magische Parallelepipeda mit geraden Seitenzahlen.

Dieselben lassen sich zunächst allgemein nicht darstellen, wenn mehr als ein Argument $= 2$ angenommen wird, da eine Zahl nicht mit zwei verschiedenen anderen dieselbe Summe ergeben kann.

§. 5. Durchweg darstellbar sind zunächst diejenigen Parallelepipeda, bei denen wenigstens zwei Argumente $\equiv 0$ mod. 4. sind, also allgemein die Formen $P(2l,\ 4m,\ 4n)$.

Geht man von dem Falle $l = 1$ aus und verwendet ein Rechteck $R(4m,\ 4n)$ von der Eigenschaft, dass je zwei Glieder, welche in derselben Horizontalreihe gleichweit vom Ende stehen, dieselbe Summe haben — cf. I. §. 8. und 9. (13) — so hat man folgende Darstellung.

Ist

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,4m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,4m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{4n,1} & a_{4n,2} & \dots & a_{4n,4m} \end{vmatrix}$$

eine in diesem Sinne abgeleitete Darstellung für $R(4m,\ 4n)$; ist ferner

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & a_{1,4m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,4m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{4n,1} & b_{4n,2} & \dots & b_{4n,4m} \end{vmatrix}$$

ein nach demselben Gesetz gebautes Rechteck aus den Zahlen

$$4n\,.\,4m+1 \quad 4n\,.\,4m+2\ \dots\ 2\,.\,4n\,.\,4m,$$

so ergibt sich das verlangte Parallelepipedon direct durch Zusammenstellung folgender zwei Rechtecke:

$$\left|\begin{array}{l}
a_{1,1} \quad a_{1,2} \ldots a_{1,m} \quad b_{1,m+1} \quad b_{1,m+2} \ldots b_{1,3m} \ldots \\
\qquad a_{1,3m+1} \quad a_{1,3m+2} \ldots a_{1,4m} \\[1ex]
b_{2,1} \quad b_{2,2} \ldots b_{2,m} \quad a_{2,m+1} \quad a_{2,m+2} \ldots a_{2,3m} \\
\qquad b_{2,3m+1} \quad b_{2,3m+2} \ldots b_{2,4m} \\[1ex]
a_{3,1} \quad a_{3,2} \ldots a_{3,m} \quad b_{3,m+1} \quad b_{3,m+2} \ldots b_{3,3m} \\
\qquad a_{3,3m+1} \quad a_{3,3m+2} \ldots a_{3,4m} \\[1ex]
b_{4,1} \quad b_{4,2} \ldots b_{4,m} \quad a_{4,m+1} \quad a_{4,m+2} \ldots a_{4,3m} \\
\qquad b_{4,3m+1} \quad b_{4,3m+2} \ldots b_{4,4m} \\[1ex]
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\[1ex]
a_{4n-1,1} a_{4n-1,2} \ldots a_{4n-1,m} b_{4n-1,m+1} b_{4n-1,m+2} \ldots b_{4n-1,3m} \ldots \\
\qquad a_{4n-1,3m+1} a_{4n-1,3m+2} \ldots a_{4n-1,4m} \\[1ex]
b_{4n,1} \quad b_{4n,2} \ldots b_{4n,m} \quad a_{4n,m+1} \quad a_{4n,m+2} \ldots a_{4n,3m} \\
\qquad b_{4n,3m+1} \quad b_{4n,3m+2} \ldots b_{4n,4m}
\end{array}\right|$$

und

$$\left|\begin{array}{l}
b_{1,4m} \quad b_{1,4m-1} \ldots b_{1,3m+1} \quad a_{1,3m} \quad a_{1,3m-1} \ldots a_{1,m+1} \\
\qquad b_{1,m} \quad b_{1,m-1} \ldots b_{1,1} \\[1ex]
a_{2,4m} \quad a_{2,4m-1} \ldots a_{2,3m+1} \quad b_{2,3m} \quad b_{2,3m-1} \ldots b_{2,m+1} \\
\qquad a_{2,m} \quad a_{2,m-1} \ldots a_{2,1} \\[1ex]
b_{3,4m} \quad b_{3,4m-1} \ldots b_{3,3m+1} \quad a_{3,3m} \quad a_{3,3m-1} \ldots a_{3,m+1} \\
\qquad b_{3,m} \quad b_{3,m-1} \ldots b_{3,1} \\[1ex]
a_{4,4m} \quad a_{4,4m-1} \ldots a_{4,3m+1} \quad b_{4,3m} \quad b_{4,3m-1} \ldots b_{4,m+1} \\
\qquad a_{4,m} \quad a_{4,m-1} \ldots a_{4,1} \\[1ex]
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\[1ex]
b_{4n-1,4m} b_{4n-1,4m-1} \ldots b_{4n-1,3m+1} a_{4n-1,3m} a_{4n-1,3m-1} \ldots a_{4n-1,m+1} \\
\qquad b_{4n-1,m} \, b_{4n-1,m-1} \ldots b_{4n-1,1} \\[1ex]
a_{4n,4m} \quad a_{4n,4m-1} \ldots a_{4n,3m+1} \quad b_{4n,3m} \, b_{4n,3m-1} \ldots b_{4n,m+1} \\
\qquad a_{4n,m} \quad a_{4n,m-1} \ldots a_{4n,1}
\end{array}\right|$$

Die Richtigkeit der Darstellung ist sofort zu übersehen. In jeder Horizontalreihe steht eine Horizontalreihe des Rechtecks, vermehrt um $2m.4m.4n = 32m^2n$; in jeder Verticalreihe steht eine Verticalreihe des Rechtecks, um $2n.4m.4n = 32mn^2$ vermehrt. Jede Lateralreihe endlich enthält zwei Glieder der Rechtecke, die sich zu derselben Summe ergänzen, aus jedem der zu Grunde liegenden Rechtecke eins genommen. — Dass die Anordnung in verticaler Richtung auch anders stattfinden kann, ohne dass die Richtigkeit beeinträchtigt wird, ist leicht zu sehen; es kommt nur darauf an, dass eine Hälfte der Horizontalreihen so gebaut ist, wie oben die ungradstelligen, die andern so, wie oben die zweistelligen Horizontalreihen.

Beispiel. Von $R(4, 8)$ in I., §. 8. (13) ausgehend, erhält man danach:

$$P(2,4,8) = \left\Vert \begin{array}{rrrr|crrrr} 1 & 34 & 63 & 32 & & 64 & 31 & 2 & 33 \\ 35 & 4 & 29 & 62 & & 30 & 61 & 36 & 3 \\ 28 & 59 & 38 & 5 & & 27 & 6 & 27 & 60 \\ 58 & 25 & 8 & 39 & & 7 & 40 & 57 & 26 \\ 24 & 55 & 42 & 9 & & 41 & 10 & 23 & 56 \\ 54 & 21 & 12 & 43 & & 11 & 44 & 53 & 22 \\ 13 & 46 & 51 & 20 & & 52 & 19 & 14 & 45 \\ 47 & 16 & 17 & 50 & & 18 & 49 & 48 & 15 \end{array} \right\Vert$$

Nun übersieht man sofort, in welcher Weise für den Fall vorzugehen ist, dass $l > 1$ ist. Man hat für ein beliebiges l einfach die $2l$ Rechtecke aus den Zahlen

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \ldots\ 4m.4n \\ 4m.4n+1, & 4m.4n+2 & \ldots\ 2.4m.4n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (2l-1)4m.4n+1, & (2l-1)4m.4n+2 & \ldots\ 2l.4m.4n \end{array}$$

nach den genannten Paragraphen — natürlich nach demselben Gesetz — zu bilden. Bezeichnet man deren Glieder, abgesehen von den unteren Indices, mit

$$a^{(1)},\quad a^{(2)},\quad a^{(3)} \ldots a^{(2l)}$$

so sind dieselben wie vorher je zwei und zwei paarweise zu combiniren, nämlich die Rechtecke mit den Gliedern

$$\begin{array}{ccc} a^{(1)} & \text{und} & a^{(2l)} \\ a^{(2)} & ,, & a^{(2l-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{(l)} & ,, & a^{(l+1)}. \end{array}$$

Der Beweis lässt sich leicht für diesen Fall verallgemeinern.

§. 6. Geht man zur Darstellung von Parallepipeden von denjenigen Rechtecken $R(4m, 4n)$ aus, welche in I., §. 6. und 7 (13) behandelt wurden, in denen also die Glieder einer und derselben Verticalreihe paarweise dieselbe Summe haben, nämlich das erste und zweite, dritte und vierte u. s. w., so findet man folgendermassen eine Darstellung für $P(4l, 4m, 4n)$.

Für den Fall $l = 1$ verwendet man 4 Rechtecke dieser Art, nämlich das gewöhnliche

$$R(4m, 4n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{4n,1} & a_{4n,2} \ldots & a_{4n,4m} \end{vmatrix}$$

aus den Zahlen $1, 2 \ldots 4m.4nn$ und die drei folgenden

aus den Zahlen $4m.4n+1$ bis $2.4m.4n$,
„ „ „ $2.4m.4n+1$ „ $3.4m.4n$,
„ „ „ $3.4m.4n+1$ „ $4.4m.4n$

mit den Gliedern $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $d_{i,k}$, $i = 1, 2 \ldots 4n$, $k = 1, 2 \ldots 4m$.

Das Parallelepipedon ergibt sich dann durch directe Zusammenstellung folgender vier Rechtecke:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & d_{1,2} & a_{1,3} & d_{1,4} & \ldots & a_{1,4m-1} & d_{1,4m} \\ d_{2,1} & a_{2,2} & d_{2,3} & a_{2,4} & \ldots & d_{2,4m-1} & a_{2,4m} \\ a_{3,1} & d_{3,2} & a_{3,3} & d_{3,4} & \ldots & a_{3,4m-1} & d_{3,4m} \\ d_{4,1} & a_{4,2} & d_{4,3} & a_{4,4} & \ldots & d_{4,4m-1} & a_{4,4n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{4n-1,1} & d_{4n-1,2} & a_{4n-1,3} & d_{0n-1,4} & \ldots & a_{4n-1,4m-1} & d_{4n-1,4n} \\ d_{4n,1} & a_{4n,2} & d_{4n,3} & a_{4n,4} & \ldots & d_{4n,4m-1} & a_{4n,4m} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{1,1} & a_{1,2} & d_{1,3} & a_{1,4} & \ldots & d_{1,4m-1} & a_{1,4m} \\ a_{2,1} & d_{2,2} & a_{2,3} & d_{2,4} & \ldots & a_{2,4m-1} & d_{2,4m} \\ d_{3,1} & a_{,2} & d_{3,3} & a_{3,4} & \ldots & d_{3,4m-1} & a_{3,4m} \\ a_{4,1} & d_{4,2} & a_{4,3} & d_{4,4} & \ldots & a_{4,4m-1} & d_{4,4m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ d_{4n-1,1} & a_{4,n-1,2} & d_{4n-1,3} & a_{4n-1,4} & \ldots & d_{4n-1,4m-1} & a^{4}_{n-1,4m} \\ a_{4n,1} & d_{4n,2} & a_{4n,3} & d_{4n,4} & \ldots & a_{4n,4m-1} & d_{4n,4m} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{2,1} & c_{2,2} & b_{2,3} & c_{2,4} & \ldots & b_{2,4m-1} & c_{2,4m} \\ c_{1,1} & b_{1,2} & c_{1,3} & b_{1,4} & \ldots & c_{1,4m-1} & b_{1,4m} \\ b_{4,1} & c_{4,2} & b_{4,3} & c_{4,4} & \ldots & b_{4,4m-1} & c_{4,4m} \\ c_{3,1} & b_{3,2} & c_{3,3} & b_{3,4} & \ldots & c_{3,4m-1} & b_{3,4m} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{4n,1} & c_{4n,2} & b_{4n,3} & c_{4n,4} & \ldots & b_{4n,4m-1} & c_{4n,4m} \\ c_{4n-1,1} & b_{4n-1,2} & c_{4n-1,3} & b_{4n-1,4} & \ldots & c_{4n-1,4m-1} & b_{4n-1,4m} \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
c_{2,1} & b_{2,2} & c_{2,6} & b_{2.4} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{2,4m-1} & b_{2,4m} \\
b_{1,1} & c_{1,2} & b_{1,3} & c_{1,4} & \cdot\;\cdot\;\cdot & b_{1,4m-1} & c_{1,4m} \\
c_{4,1} & b_{4,2} & c_{4,3} & b_{4,4} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{4,4m-1} & b_{4,4m} \\
b_{3,1} & c_{3,2} & b_{3,3} & c_{3,4} & \cdot\;\cdot\;\cdot & b_{3,4m-1} & c_{3,4m} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
c_{4n,1} & b_{4n,2} & c_{4n,3} & b_{4n,4} & \cdot\;\cdot\;\cdot & c_{4n,4m-1} & b_{4n,4m} \\
b_{4n-1,1} & c_{4n=1,2} & b_{4n-1,3} & c_{4n-1,4} & \cdot\;\cdot\;\cdot & b_{4n-1,4m-1} & c_{4n-1,4m}
\end{array}\right|$$

Beweis. In jeder Horizontalreihe steht eine Horizontalreihe des ursprünglichen Rechtecks, in der entweder eine Hälfte der Zahlen unverändert geblieben und die andere um $3.4m.4n$ gewachsen oder eine Hälfte um $1.4m.4n$, die andere um $2.4m.4n$ gewachsen ist. Demnach sind alle Horizontalreihen gleichsummig. Für die Verticalreihen ist der Nachweis derselbe. In jeder Lateralreihe stehen 4 Glieder, nämlich 2 Paare, die sich im ursprünglichen Rechtecke zu gleichen Summen ergänzten, in irgend einer Reihenfolge vermehrt um

$$0,\quad 4m.4n,\quad 2.4m.4n,\quad 3.4m.4n.$$

Beispiel. Geht man von der nach I. §. 6. gebildeten Form:

$$R(4,4) = \left|\begin{array}{rrrr}
1 & 8 & 10 & 15 \\
16 & 9 & 7 & 2 \\
3 & 6 & 12 & 13 \\
14 & 11 & 5 & 4
\end{array}\right|$$

aus, so erhält man danach für $P(4, 4, 4)$ folgende Darstellung mit der jedesmaligen Teilsumme 130:

$$\left\|\begin{array}{rrrr}
1 & 56 & 10 & 63 \\
64 & 9 & 55 & 2 \\
3 & 54 & 12 & 61 \\
62 & 11 & 53 & 4
\end{array}\right|\;\left|\begin{array}{rrrr}
49 & 8 & 58 & 15 \\
16 & 57 & 7 & 50 \\
51 & 6 & 60 & 13 \\
14 & 59 & 5 & 52
\end{array}\right|\;\left|\begin{array}{rrrr}
32 & 41 & 23 & 34 \\
33 & 24 & 42 & 31 \\
30 & 43 & 21 & 36 \\
35 & 22 & 44 & 29
\end{array}\right|\;\left|\begin{array}{rrrr}
48 & 25 & 39 & 18 \\
17 & 40 & 26 & 47 \\
46 & 27 & 37 & 20 \\
19 & 38 & 28 & 45
\end{array}\right\|$$

Für einen beliebigen Fall $l > 1$ hat man natürlich nur die entsprechende Anzahl von Rechtecken mehr zu verwenden, bis zu dem jedesmaligen letzten $R_{4l}(4m, 4n)$. Diese sind zu je 4 und 4 so zusammen zustellen, wie für den Fall $l = 1$ gezeigt worden ist. Bezeichnet man die Glieder dieser $4l$ Rechtecke mit

$$a^{(1)}\; a^{(2)}\; a^{(3)}\; .\;.\;.\; a^{(4l)}$$

und bezeichnet ferner das System der ersten beiden von obigen 4 Rechtecken als (ad), das System der beiden folgenden als (bc), so sind zusammen zu stellen

wie (ad):			wie (bc):		
$a^{(1)}$	und	$a^{(4l)}$	$a^{(2)}$	und	$a^{(4l-1)}$
$a^{(3)}$	„	$a^{(4l-2)}$	$a^{(4)}$	„	$a^{(4l-3)}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$a^{(2l-1)}$	„	$a^{(2l+2)}$	$a^{(2l)}$	„	$a^{(2l+1)}$

Der Beweis folgt direct aus dem speciellen Fall.

Dass zur Darstellung eines Parallelepipedons auf diesem Wege zwei Rechtecke, wie im vorigen Paragraphen, nicht ausreichen, ist leicht zu sehen. Dieselben mussten, um gleiche Lateralsummen zu geben, je eins nach dem System (ad) und eins nach dem System (bc) gebaut sein; sie würden demnach, da in jeder Lateralreihe ein Glied des ursprünglich ersten und eins des ursprünglich zweiten Rechteckes stehen müsste, notwendig $4m.4n$ Zahlen gar nicht enthalten. — Beachtet man die Darstellung der Rechtecke, in denen das Verticalen-Argument $\equiv 2$, mod. 4 ist, so überzeugt man sich direct, dass genau ebenso auch die Form $P(4l, 4m, 4n+2)$ behandelt werden kann.

§. 7. Will man solche Parallelepipeda darstellen, in denen zwei Argumente $\equiv 2$ mod. 4. sind, so hat man von den Rechtecken auszugehen, welche sich an die in I. §. 10. und 11. (13) behandelten Quadrate anschliessen. Dieselben haben die Eigentümlichkeit, dass ihre beiden mittelsten Verticalen so gebaut sind, dass je 2 in derselben Horizontalreihe stehende Glieder gleiche Summen haben, während in den übrigen Verticalen die in derselben Verticalreihe paarweise auf einander folgenden Glieder gleichsummig sind. Danach übersieht man leicht, dass sich auf diese $2m$ äusseren Verticalenpaare direct das im vorigen Paragraphen gelehrte Verfahren übertragen lässt.

Um die Behandlung der beiden mittelsten Verticalreihen zu zeigen, wählen wir den Fall, in welchem überhaupt nur zwei Verticalreihen vorhanden sind, stellen uns also die Aufgabe, aus dem Rechtecke $R(2, 4n+2)$ das Parallelepipedon $P(4, 2, 4n+2)$ darzustellen. Die Auflösung ist direct folgende. Es sei

$$\left|\begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ \cdots & \cdots \\ a_{4n+2,1} & a_{4n+2,2} \end{array}\right|$$

eine Lösung für $R(2, 4n+2)$, gebildet aus den Zahlen 1 bis $8n+4 = 2(4n+2)$. Man bilde die analogen Rechtecke aus den Zahlen

$$\begin{array}{rcl} 8n+5 & \text{bis} & 16n+8 \\ 16n+9 & ,, & 24n+12 \\ 24n+13 & ,, & 32n+16 \end{array}$$

und bezeichne ihre Glieder mit $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $d_{i,k}$. Dann ist

$$\left\| \begin{array}{ll|ll|ll|ll} a_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,2} & c_{1,1} & c_{1,2} & b_{1,1} \\ d_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,1} & d_{2,2} & c_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,2} & c_{2,1} \\ a_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,2} & c_{3,1} & c_{3,2} & b_{3,1} \\ d_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,1} & d_{4,2} & c_{4,2} & b_{4,1} & b_{4,2} & c_{4,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{4n+1,1} & d_{4n+1,2} & d_{4n+1,1} & a_{4n+1,2} & b_{4n+1,2} & c_{4n+1,1} & c_{4n+1,2} & b_{4n+1,1} \\ d_{4n+2,1} & a_{4n+2,2} & a_{4n+2,1} & d_{4n+2,2} & c_{4n+2,2} & b_{4n+1,1} & b_{4n+2,2} & c_{4n+2,1} \end{array} \right\|$$

das verlangte Parallelepipedon.

Beweis. Die Horizontalreihen enthalten jedesmal eine Horizontalreihe des Rechtecks, die einzelnen Glieder vermehrt um

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{und} & 24n+12 \\ \text{oder um}\ 8n+4 & ,, & 16n+8. \end{array}$$

Die Lateralreihen enthalten jedesmal zwei vollständige Horizontalreihen des Rechtecks, und zwar dieselbe zweimal, die einzelnen Glieder vermehrt in irgend einer Reihenfolge um

$$0,\quad 8n+4,\quad 16n+8,\ 24n+12.$$

Die Verticalreihen enthalten eine Verticalreihe des Rechtecks, in der $2n+1$ Glieder unverändert und ebensoviel um $24n+12$ vermehrt, oder in der $2n+1$ Glieder um $8n+4$ und ebensoviel um $16n+8$ vermehrt sind.

In welcher Weise zu verfahren ist, wenn statt des Lateral-Argumentes 4 das Argument $4l$ gewünscht wird, ist nach dem Vorigen sofort verständlich.

Beispiel. Geht man für $R(2, 6)$ von der Form

$$R(2,6) = \left| \begin{array}{rr} 1 & 12 \\ 11 & 2 \\ 3 & 10 \\ 9 & 4 \\ 8 & 5 \\ 7 & 6 \end{array} \right|$$

aus, so erhält man danach ohne Mühe

$$P(4,2,6)=\left\|\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 48 & 37 & 12 & 24 & 25 & 36 & 13 \\ 47 & 2 & 11 & 38 & 26 & 23 & 14 & 35 \\ 3 & 46 & 39 & 10 & 22 & 27 & 34 & 15 \\ 45 & 4 & 9 & 40 & 28 & 21 & 16 & 33 \\ 8 & 41 & 44 & 5 & 17 & 32 & 29 & 20 \\ 43 & 6 & 7 & 42 & 30 & 19 & 18 & 31 \end{array}\right\|$$

mit den Teilsummen 98, 49, 147.

Stellt man die Lösung dieses Paragraphen mit der des vorigen zusammen, so ist danach auch jede Form $P(4l, 4m+2, 4n+2)$ lösbar.

§. 8. In dem Vorigen ist es als Uebelstand bezeichnet worden, dass die zur Verwendung gelangenden Rechtecke in einem Teile nach einem andern Gesetz gebaut sind, als in dem andern.

Die Darstellung der Parallelepipeden würde sich offenbar vereinfachen lassen, wenn es gelänge, für die Rechtecke eine gleichmässigere, einem Gesetz folgende Läsung zu finden.

Eine solche erhält man auf folgendem Wege. Man setze sich das Rechteck $R(4m+2, 4n+2)$ aus $2m+1$ Rechtecken von der Form $R(2, 4n+2)$, die der Reihe nach aus den Zahlen

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & 2(4n+2) \\ 2(4n+2)+1, & 2(4n+2)+2 & \ldots & 4(4n+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 4m(4n+2)+1, & 4m(4n+2)+2 & \ldots & (4m+2)(4n+2) \end{array}$$

gebildet sind und die Horizontalreihen

$$\begin{array}{cccc} H_{1,1} & H_{1,2} & \ldots & H_{1,4n+2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \ldots & H_{2,4a+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{2m+1,1} & H_{2m+1,2} & \ldots & H_{2m+1,4n+2} \end{array}$$

enthalten, zusammen. Am einfachsten erhält man das gesuchte Rechteck dann durch die Zusammenstellung

$H_{1,1}$	$H_{2,1}$	... $H_{2m,1}$	$H_{2m+2,1}$
$H_{2m+1,2}$	$H_{2m,2}$	... $H_{2,2}$	$H_{1,2}$
$H_{1,3}$	$H_{2,3}$	... $H_{2m,3}$	$H_{2m+1,3}$
$H_{2m+1,4}$	$H_{2m,4}$	... $H_{2,4}$	$H_{1,4}$
...	...	...	...
$H_{1,4n+1}$	$H_{2,4n+1}$	... $H_{2m,4n+1}$	$H_{2m+1,4n+1}$
$H_{2m+1,4n+2}$	$H_{2m,4n+2}$	... $H_{2,4n+2}$	$H_{1,4n+2}$

Beispiel. Geht man von dem im vorigen Paragraphen für $R(2,6)$ gegebenen Schema aus, so erhält man für $R(6,6) = Q(6)$ — dass beide Argumente gleich sind, ist unwesentlich — die Form

1	12	13	24	25	36
35	26	23	14	11	2
3	10	15	22	27	34
33	28	21	16	9	4
8	5	20	17	32	29
31	30	19	18	7	6

Das auf diesem Wege erhaltene Rechteck ist vollständig so gebaut, wie in der früheren Form die beiden mittelsten Verticalen, d. h. diejenigen Glieder, welche in derselben Horizontalreihe gleich weit vom Ende stehen, haben dieselbe Summe.

Man wird demnach zur Darstellung von Parallelepipeden aus diesen Rechtecken ein einheitliches Schema nach Analogie des in §. 7. behandelten Falles $P(4l, 2, 4m+2)$ ableiten können und dadurch $P(4l, 4m+2, 4n+2)$ erhalten. Immer aber bleiben $4l$ Rechtecke zur Darstellung erforderlich; das eine Argument $4l$ kann also nicht durch $4l+2$ ersetzt werden.

Da nun diese Form der Rechtecke auch eine Behandlung nach Analogie von §. 5. nicht zulässt, weil in einem Rechteck von $4m+2$ Verticalreihen nicht $2m+1$ mittelste Verticalen abgesondert werden können, so sieht man leicht, dass man, von $R(4m+2, 4n+2)$ ausgehend, immer einer durch 4 teilbaren Anzahl von Rechtecken zur Darstellung von Parallelepipeden bedarf, dass mithin die Form $P(4l+2, 4m+2, 4n+2)$ mit den vorliegenden Hülfsmitteln nicht zu lösen ist.

Demnach sind magische Parallelepipeda mit geraden Argumenten auf die Lösung von magischen Quadraten resp. Rechtecken zurückzuführen, wenn wenigstens eins der drei Argumente durch 4 ohne Rest teilbar ist.

Berlin, den 30. Mai 1881.

XV.

Sur quelques corps engendrés par la révolution.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Théorème fondamental.** D'un point S (Fig. 1), extérieur à un cercle O, on mène à ce cercle la tangente SA et au centre la sécante SO, qui coupe la circonférence en B et C. Si l'on fait tourner la figure autour de SO, les triangles mixtilignes $SAMB$ et $SANC$ engendrent des volumes, qui sont équivalents aux cônes, ayant pour rayons de base les deux segments SB et SC de la sécante et pour hauteur commune la projection OD du rayon de contact OA sur cette sécante;

c'est-à-dire que

$$\text{vol.}\, SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{SB}^2.OD,$$
$$\text{vol.}\, SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{SC}^2.OD.$$

Nous avons évidemment

$$\text{vol.}\, SAMB = \text{vol.}\, SAO + \text{vol.}\, ABO,$$
$$\text{vol.}\, SANC = \text{vol.}\, SAO - \text{vol.}\, ACO;$$

ou

$$\text{vol.}\, SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.SO + \tfrac{2}{3}\pi\overline{AO}^2.BD,$$
$$\text{vol.}\, SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.SO - \tfrac{2}{3}\pi\overline{AO}^2.CD.$$

Comme le triangle rectangle SAO nous donne

$$\overline{AD}^2 = SD.OD,$$
$$\overline{AO}^2 = SO.OD,$$

il nous vient

$$\text{vol. } SAMB = \tfrac{1}{3}\pi(SD+2AD)SO.OD,$$
$$\text{vol. } SANC = \tfrac{1}{3}\pi(SD-2CD)SO.OD;$$

ou bien

$$\text{vol. } SAMB = \tfrac{1}{3}\pi(SB+BD)SO.OD,$$
$$\text{vol. } SANC = \tfrac{1}{3}\pi(SC-CD)SO.OD.$$

Or, de ce que

$$\overline{SA}^2 = SB.SC$$

et

$$\overline{SA}^2 = SO.SD,$$

nous avons

$$SB.SC = SO.SD,$$

ou

$$\frac{SB}{SO} = \frac{SD}{SC},$$

et

$$\frac{SC}{SO} = \frac{SD}{SB}.$$

La première égalité nous donne

$$\frac{SB}{SO} = \frac{2SB-SD}{2SO-SC} = \frac{SB+(SB-SD)}{SO+(SO-SC)} = \frac{SB+BD}{SO+OB} = \frac{SB+BD}{SB},$$

d'où

$$(SB+BD)SO = \overline{SB}^2.$$

De la seconde égalité nous tirons

$$\frac{SC}{SO} = \frac{2SC-SD}{2SO-SB} = \frac{SC-(SD-SC)}{SO-(SB-SO)} = \frac{SC-CD}{SO-OC} = \frac{SC-CD}{SC},$$

d'où

$$(SC-CD)SO = \overline{SC}^2.$$

Donc nous trouvons que

$$\text{vol. } SAMB = \tfrac{1}{3}\pi\overline{SB}^2.OD,$$
$$\text{vol. } SANC = \tfrac{1}{3}\pi\overline{SC}^2.OD.$$

2. **Remarque I.** La différence de ces deux volumes doit être égale au volume de la sphère ayant $OA = R$ pour rayon.

Cette différence, en effet, a pour expression

$$\tfrac{1}{3}\pi(SO+R)^2.OD - \tfrac{1}{3}\pi(SO-R)^2.OD$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi R.SO.OD = \tfrac{4}{3}\pi R.\overline{OA}^2 = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

3. **Remarque II.** Si l'on pose $SO = a$, d'où, par le triangle rectangle SAO, $OD = \frac{R^2}{a}$, on aura

$$\text{(I)} \qquad \text{vol.}\, SAMB = \tfrac{1}{3}\pi \frac{R^2(a+R)^2}{a},$$

$$\text{(II)} \qquad \text{vol.}\, SANC = \tfrac{1}{3}\pi \frac{R^2(a-R)^2}{a}.$$

4. **Volume compris entre deux sphères et le cône circonscrit.** Par les centres O, O' des deux sphères (Fig. 2) et par le sommet S du cône, lesquels sont en ligne droite, conduisons un plan; ce plan coupe les surfaces des deux sphères suivant les circonférences ABC, $A'B'C'$, et la surface latérale du cône suivant les tangentes $AA'S$, $EE'S$ communes aux deux cercles O, O'.

Le volume V en question est évidemment engendré par la révolution du quadrilatère mixtiligne $ANCB'M'A'$ autour de la ligne des centres OO'. Nous avons donc

$$V = \text{vol.}\, SANC - \text{vol.}\, SA'M'B',$$

ou, d'après les formules (II) et (I),

$$\text{(1)} \qquad V = \tfrac{1}{3}\pi \frac{R^2(a-R)^2}{a} - \tfrac{1}{3}\pi \frac{R'^2(a'+R')^2}{a'},$$

où l'on a posé

$$OA = R, \quad SO = a, \quad O'A' = R', \quad SO' = a'.$$

Par les triangles semblabes SAO et $SA'O'$ il nous vient

$$\frac{SO}{R} = \frac{SO'}{R'} = \frac{SO - SO'}{R - R'} = \frac{OO'}{R - R'};$$

nous en tirons, en représentant par D la distance OO' des centres

$$a = SO = \frac{RD}{R - R'}, \quad a' = SO' = \frac{R'D}{R - R'};$$

et, par suite

$$a - R = \frac{R(D + R' - R)}{R - R'},$$

$$a' + R = \frac{R(D + R - R')}{R - R'}.$$

Si nous mettons ces valeurs dans l'expression (1) de V, celle-ci deviendra

$$\text{(III)} \qquad V = \tfrac{1}{3}\pi \frac{R^3(D + R' - R)^2 - R'^3(D + R - R')^2}{D(R - R')}.$$

Le numérateur s'évanouit pour $R=R'$; il est donc divisible par $R-R'$; en effectuant cette division, on trouve que

$$\text{(IV)}\quad V=\frac{\pi}{3D}[(R^2+RR'+R'^2)D^2-2(R^3+R'^3)D+(R^3-R'^3)(R-R')].$$

Cette expression peut encore s'écrire

$$\text{(V)}\qquad V=\frac{\pi}{3D}(R^2+RR'+R'^2)(D+R-R')(D+R'-R)$$
$$-\frac{2\pi}{3D}[R^3(D+R'-R)+R'^3(D+R-R')].$$

5. Si les deux sphères sont tangentes, on aura $D=R+R'$, et la formule (III) deviendra

$$V=\tfrac{1}{3}\pi\left[\frac{4R^3R'^2}{R^2-R'^2}-\frac{4R^2R'^3}{R^2-R'^2}\right],$$

ou après simplification,

$$\text{(VI)}\qquad V=\tfrac{4}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

Il est aisé de calculer directement cette valeur. A cet effet nous établirons les théorèmes suivants.

6. **Théorème I.** Si d'un point C (Fig. 3), pris hors d'un cercle O, on mène les deux tangentes CA et CB, et que du point de contact A on abaisse la perpendiculaire AD sur le diamètre BE qui passe par le point de contact B de l'autre tangente CB, on a

$$BC\times AD=BD\times BO.$$

Tirons la droite CO et menons la corde AB.

Nous formons deux triangles rectangles BCO et ABD, qui, ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables et donnent

$$\frac{BC}{BD}=\frac{BO}{AD};$$

on en déduit

$$\text{(VII)}\qquad BC\times AD=BD\times BO.$$

7. **Problème.** Connaissant la longueur a de la tangente BC ou AC et le rayon $BO=R$ du cercle, trouver la valeur de la projection BD de AC sur le diamètre BE.

Menons la droite AE (Fig. 3). Le triangle ABE étant rectangle et semblable au triangle BCO, on a

$$\frac{BD}{DE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AE}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BO}^2}=\frac{a^2}{R^2}:$$

il vient donc

$$\frac{BD}{a^2}=\frac{DE}{R^2}=\frac{BD+DE}{a^2+R^2}=\frac{2R}{a^2+R^2};$$

on en tire

$$\text{(VIII)}\qquad BD=\frac{2a^2R}{a^2+R^2}$$

8. **Théorème II.** Si l'on fait tourner la figure $ACBD$ (Fig. 3) autour du diamètre BE, le triangle mixtiligne $AMBC$ engendre un solide, qui est équivalent au cône engendré par le triangle rectangle BCD (Tirer la droite CD dans la figure)

Le solide engendré par le triangle mixtiligne $AMBC$ est équivalent à la différence entre le tronc de cône décrit par le trapèze birectangle $ACBD$ et le segment sphérique engendré par le demi-segment circulaire $AMBD$. Nous avons par conséquent

$$\begin{aligned}\text{vol.}\,AMBC &= \tfrac{1}{3}\pi BD(\overline{AD}^2+AD.BC+\overline{BC}^2)-(\tfrac{1}{2}\pi\overline{AD}^2.BD+\tfrac{1}{6}\pi\overline{BD}^3)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\overline{BC}^2.BD+\tfrac{1}{6}\pi BD(2\overline{AD}^2+2AD.BC-3\overline{AD}^2-\overline{BD}^2)\\ &= \tfrac{1}{3}\pi\overline{BC}^2.BD-\tfrac{1}{6}\pi BD(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2AD.BC).\end{aligned}$$

Mais, puisque

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2=BD.BE=2BD.BO$$

et que (VII)

$$2AD.BC=2BD.BO,$$

la différence entre parenthèses se réduit à zéro.

Donc on a

$$\text{(IX)}\qquad \text{vol.}\,AMBC=\tfrac{1}{3}\pi\overline{BC}^2.BD.$$

9. **Théorème III.** Lorsque deux cercles O et O' (Fig. 3) sont tangents extérieurement, la perpendiculaire BC à la ligne des centres OO', menée par le point de contact B jusqu' à la tangente commune extérieure AA', est moyenne proportionnelle entre les rayons R et R' des deux cercles.

Tirons les droites OC et $O'C$. Les droites OC et $O'C$ sont les bissectrices des deux angles supplémentaires ACB et $A'CB$; elles sont par suite perpendiculaires entre elles et le triangle OCO' est rectangle en C.

On a donc

$$\overline{BC}^2 = OB.O'B,$$

ou

(X) $$\overline{BC}^2 = RR'.$$

10. **Corollaire.** Dans l'expression (VIII), mettons à la place de a^2 celle (X) de $\overline{BC}^2$; nous trouvons que

$$BD = \frac{2R^2R'}{RR'+R^2}$$

ou

(XI) $$BD = \frac{2RR'}{R+R'}.$$

11. **Volume engendré par la révolution du triangle mixtiligne** $AMBNA'$ **autour de** OO' (Fig. 3). Puisque $AC = CB = CA'$, on a $BD' = BD$. Donc les deux triangles mixtilignes $AMBC$ et $A'NBC$, en tournant autour de OO', engendrent des volumes égaux. On a ainsi

$$\text{vol.}\, AMBNA' = 2\text{vol.}\, AMBC$$

ou, d'après (IX),

$$\text{vol.}\, AMBNA' = \tfrac{2}{3}\pi\overline{BC}^2.BD.$$

Si, à la place de $\overline{BC}^2$ et BD, nous mettons leurs valeurs (X) et (XI), nous trouverons que

$$\text{vol.}\, AMBNA' = \tfrac{2}{3}\pi.RR'.\frac{2RR'}{R+R'},$$

ou

(XII) $$\text{vol.}\, AMBNA' = \tfrac{4}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

12. Si les deux sphères, sans être tangentes, avaient le même rayon $R = R'$, le cône circonscrit deviendrait un cylindre, et l'on aurait, en vertu de (IV),

(XIII) $$V = \pi R^2 D - \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Dans le cas où les deux sphères sont tangentes, cette valeur se réduit à

(XIV) $$V = \tfrac{2}{3}\pi R^3.$$

13. **Les deux sphères sont inscrites dans les deux nappes du cône.** Dans ce cas, le sommet S du cône (Fig. 4) est situé entre les deux sphères, et tout plan de section principale coupe la surface latérale du cône suivant les deux tangentes intérieures aux cercles de section ASA', ESE'.

En posant toujours

$$SO = a, \quad SO' = a',$$

le volume compris entre le cône et les deux sphères est

$$V = \text{vol.}\, SANC + \text{vol.}\, SA'N'C,$$

ou, d'après la formule (II),

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \frac{R^2(a-R)^2}{a} + \tfrac{1}{3}\pi \frac{R'^2(a'-R')^2}{a'}.$$

Représentons toujours par D la distance des centres OO'; nous avons

$$\frac{SO}{R} = \frac{SO'}{R'} = \frac{SO+SO'}{R+R'} = \frac{D}{R+R'},$$

d'où nous tirons

$$a = SO = \frac{RD}{R+R'},$$

$$a' = SO' = \frac{R'D}{R+R'};$$

et, par suite,

$$\frac{(a-R)^2}{a} = \frac{R(D-R-R')^2}{D(R+R')},$$

$$\frac{(a'-R')^2}{a} = \frac{R'(D-R-R')^2}{D(R+R')}$$

Notre volume sera donc

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \frac{R^3(D-R-R')^2 + R'^3(D-R-R')^2}{D(R+R')}$$

ou

(XV) $$V = \tfrac{1}{3}\pi \frac{(R^2-RR'+R'^2)(D-R-R')^2}{D}.$$

Ce volume s'évanouit, lorsque $D = R+R'$.

14. Lorsque les deux sphères out même rayon $R = R'$, l'expression (XV) se réduit à

(XVI) $$V = \frac{\pi R^2(D-2R)^2}{D}.$$

Si, dans ce cas, on a $D = 4R$, il viendra

(XVII) $$V = \pi R^3.$$

15. **Rayons des deux sphères, l'une inscrite et l'autre ex-inscrite à un cône.** Par l'axe SC d'un cône (Fig. 5) conduisons un plan, qui y détermine la section triangulaire isocèle SAB, et coupe les deux sphères suivant les cercles O et O' tangents aux trois côtés du triangle SAB.

Désignons les rayons OD, $O'D'$ de ces cercles par r et r', et soient

$$AC = R, \quad SC = H, \quad SA = C$$

le rayon de base, la hauteur et le côté du cône.

Chacun des deux triangles SOD, $SO'D'$ étant semblable au triangle SAC, on a les proportions

$$\frac{OD}{AC} = \frac{SO}{SA}, \quad \frac{O'D'}{AC} = \frac{SO'}{SA},$$

ou bien

$$\frac{r}{R} = \frac{H-r}{C}, \quad \frac{r'}{R} = \frac{H+r'}{C};$$

on en tire

$$\frac{r}{R} + \frac{r}{C} = \frac{H}{C}, \quad \frac{r'}{R} - \frac{r'}{C} = \frac{H}{C}$$

Ces égalités donnent les expressions

$$\text{(XVIII)} \qquad r = \frac{RH}{C+R}, \quad r' = \frac{RH}{C-R}$$

pour les rayons de nos deux sphères.

Il est utile de faire remarque que l'on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{C-R}{C+R}.$$

16. **Rapport des rayons dé deux sphères consécutives inscrites dans le cône.** Par l'extrémité C_1 du diamètre CC_1 de la sphère O (Fig. 5) menons un plan parallèle à la base du cône; ce plan détermine dans le cône une section circulaire, dont le rayon est A_1C_1; et cette section est la base d'un cône SA_1B_1 homothétique au cône donné. Le rapport de similitude linéaire est

$$\frac{SC_1}{SC} = \frac{H-2r}{H} = \frac{H - \dfrac{2RH}{C+R}}{H} = \frac{C-R}{C+R}.$$

Posons, pour plus de simplicité,

$$\text{(1)} \qquad \frac{C-R}{C+R} = m.$$

Si nous désignons par r_1 le rayon de la sphère inscrite dans le cône SA_1B_1, nous aurons

$$\frac{r_1}{r} = m.$$

On en tire

$$\text{(XIX)} \qquad r_1 = mr, \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{C-R}{C+R}r.$$

17. **Rayons des sphères inscrites successives.** Le rayon r_2 de la sphère suivante sera de même

$$r_2 = mr_1$$

ou, en vertu de (XIX),

$$r_2 = m^2r.$$

On aurait semblablement

$$r_3 = mr_2 = m^3r.$$

Donc on a, en général,

$$\text{(XX)} \qquad r_n = m^nr.$$

Si, dans cette expression, nous remplaçons m et r par leurs valeurs (1) et (XVIII), nous obtiendrons la formule générale

$$\text{(XXI)} \qquad r_n = \frac{RH}{C+R}\cdot\left(\frac{C-R}{C+R}\right)^n.$$

18. **Somme des sphères inscrites dans le cône.** Les rayons de ces sphères successives sont

$$r, \quad mr, \quad m^2r, \quad m^3r, \quad \ldots;$$

les volumes des mêmes sphères sont par suite

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3, \quad \tfrac{4}{3}\pi m^3r^3, \quad \tfrac{4}{3}\pi m^6r^3, \quad \tfrac{4}{3}\pi m^9r^3, \ldots$$

On obtient ainsi, pour la somme de ces volumes,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3(1+m^3+m^6+m^9+\ldots),$$

ou

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3\cdot\frac{1}{1-m^3}.$$

Or, d'après (1), nous avons

$$\frac{1}{1-m^3} = \frac{(C+R)^3}{(C+R)^3-(C-R)^3} = \frac{(C+R)^3}{2R(3C^2+R^2)}.$$

Nous trouvons donc

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\frac{R^3H^3}{(C+R)^3}\cdot\frac{(C+R)^3}{2R(3C^2+R^2)} = \tfrac{2}{3}\pi\frac{R^2H^3}{3C^2+R^2}$$

pour la somme des volumes de toutes les sphères inscrites dans le cône.

Cette expression peut se mettre sous la forme

(XXII) $$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H . \frac{2H^2}{3C^2+R^2}.$$

19. **Espace laissé vide dans le cône par toutes les sphères inscrites.** Représentons cet espace par E. Nous avons évidemment

$$E = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H - V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H\left(1 - \frac{2H^2}{3C^2+R^2}\right)$$

Puisque $H^2 = C^2 - R^2$, il vient

$$1 - \frac{2H^2}{3C^2+R^2} = \frac{(3C^2+R^2)-(2C^2-2R^2)}{3C^2+R^2} = \frac{C^2+3R^2}{3C^2+R^2}.$$

Donc nous trouvons que

(XXIII) $$E = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H . \frac{C^2+3R^2}{3C^2+R^2} = \frac{4R^2+H^2}{4R^2+3H^2}.$$

20. **Partie du cône comprise entre deux sphères consécutives.** Si r_{n-1} et r_n sont les rayons des deux sphères, l'espace e compris, dans le cône, entre ces deux sphères, est

$$e = \tfrac{4}{3}\pi \frac{r_{n-1}^2 r_n^2}{r_{n-1}+r_n},$$

ou, d'après la formule (XX),

$$e = \tfrac{4}{3}\pi r^3 . \frac{m^{2n-2} . m^{2n}}{m^{n-1}+m^n} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 . \frac{m^{4n-2}}{m^{n-1}(1+m)},$$

c'est-à-dire

$$e = \tfrac{4}{3}\pi r^3 . \frac{m^{3n-1}}{1+m}.$$

Mais l'égalité (1) donne

$$1+m = \frac{2C}{C+R} = \frac{2C}{C-R} . \frac{C-R}{C+R} = \frac{2Cm}{C-R};$$

il vient par suite

$$e = \tfrac{4}{3}\pi r^3 . \frac{C-R}{2C} m^{3n-2}.$$

Remplaçons r et m par leurs valeurs (XVIII) et (1); nous obtenons

$$e = \tfrac{2}{3}\pi \frac{R^3 H^3}{(C+R)^3} . \frac{C-R}{C}\left(\frac{C-R}{C+R}\right)^{3n-2} = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H . \frac{2RH^2}{C(C+R)^2}\left(\frac{C-R}{C+R}\right)^{3n-1}.$$

Dans la fraction $\frac{2RH^2}{C(C+R)^2}$ remplaçons H^2 par son équivalent C^2-R^2; il nous vient

$$\frac{2RH^2}{C(C+R)^2}=\frac{2R(C^2-R^2)}{C(C+R)^2}=\frac{2R(C-R)}{C(C+R)}=\frac{2R}{C}\left(\frac{C-R}{C+R}\right).$$

Nous avons donc, en définitive,

(XXIV) $$e=\tfrac{1}{3}\pi R^2H\,.\,\frac{2R}{C}\left(\frac{C-R}{C+R}\right)^{3n}.$$

XVI.

Relations entre certaines sommes de carrés.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Carré égal à la somme de trois carrés.** Nous avons identiquement

$$a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=a(a+b)+b(a+b)-ab,$$

et, en élevant au carré,

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+ab)^2 &= a^2(a+b)^2+b^2(a+b)^2+a^2b^2\\ &\quad +2ab(a+b)^2-2ab\left[a(a+b)+b(a+b)\right];\end{aligned}$$

or il est aisé de voir que le facteur entre crochets est égal à $(a+b)^2$; donc il vient

$$\text{(I)}\qquad (a^2+b^2+ab)^2=a^2(a+b)^2+b^2(a+b)^2+a^2b^2.$$

2. **Carré égal à la somme de quatre carrés.** Puisque

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2=(a+b+c)^2-(ab+ac+bc)\\ &=a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)-(ab+ac+bc),\end{aligned}$$

nous obtenons, en élevant au carré,

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2 &= a^2(a+b+c)^2\underline{+2ab(a+b+c)^2}\\ &\quad+b^2(a+b+c)^2\underline{+2ac(a+b+c)^2}\\ &\quad+c^2(a+b+c)^2\underline{+2bc(a+b+c)^2}\\ &\quad+(ab+ac+bc)^2\underline{-2(a+b+c)^2(ab+ac+bc)}.\end{aligned}$$

Mais le polynôme formé par les termes **soulignés** se réduit à zéro. On trouve donc que

(II) $$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2 = a^2(a+b+c)^2+b^2(a+b+c)^2 + c^2(a+b+c)^2+(ab+ac+bc)^2.$$

3. **Carré égal à la somme de cinq carrés.** On a encore

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \\ &= (a+b+c+d)^2-(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= a(a+b+c+d)+b(a+b+c+d)+c(a+b+c+d) \\ &+ d(a+b+c+d)-(ab+ac+ad+bc+bd+cd). \end{aligned}$$

Afin de simplifier, représentons par P le polynôme

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd.$$

Si nous élevons au carré les deux membres de l'identité précédente, nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+d^2+P)^2 = \; & a^2(a+b+c+d)^2 + \underline{2ab(a+b+c+d)^2} \\ & + b^2(a+b+c+d)^2 + \underline{2ac(a+b+c+d)^2} \\ & + c^2(a+b+c+d)^2 + \underline{2ad(a+b+c+d)^2} \\ & + d^2(a+b+c+d)^2 + \underline{2bc(a+b+c+d)^2} \\ & + P^2 \qquad\qquad\qquad\quad + \underline{2bd(a+b+c+d)^2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \underline{2cd(a+b+c+d)^2} \\ & \underline{-2P(a+b+c+d)(a+b+c+d)}. \end{aligned}$$

Or il est aisé de voir que l'ensemble des termes soulignés est égal à zéro. Donc on a

(III) $$\begin{aligned} &(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \\ &= a^2(a+b+c+d)^2+b^2(a+b+c+d)^2+c^2(a+b+c+d)^2 \\ &+ d^2(a+b+c+d)^2+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2. \end{aligned}$$

4. En suivant la même méthode, on peut obtenir un carré, qui soit égal à la somme de **six** carrés, ou à la somme de **sept** carrés, etc.; et, en général, un carré égal à la somme de n carrés.

Ainsi, étant données $n-1$ quantités quelconques $a, b, c, \ldots, l$, entières ou fractionnaires, positives ou négatives, réelles ou imaginaires, nous avons la formule générale

(IV) $$\begin{aligned} &(a^2+b^2+c^2+\ldots+ab+ac+bc+\ldots)^2 \\ &= (a^2+b^2+c^2+\ldots)(a+b+c+\ldots)^2+(ab+ac+bc+\ldots)^2, \end{aligned}$$

dont le second membre est la somme de n carrés.

5. Egalité entre deux sommes de quatre carrés

§. 1. Quelles que soient les quantités a, b, c, d et p, on a les identités

$$(p-a)^2 = p^2-2ap+a^2,$$
$$(p-b)^2 = p^2-2bp+b^2,$$
$$(p-c)^2 = p^2-2cp+c^2,$$
$$(p-d)^2 = p^2-2dp+d^2,$$

qui, étant ajoutées membres à membres, donnent

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+(p-d)^2$$
$$= 4p^2-2(a+b+c+d)p+a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Supposons que l'on ait

$$a+b+c+d = 2p;$$

les deux premiers termes du second membre s'entredétruisent, et nous obtenons la relation assez curieuse

$$\text{(I)} \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = (p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+(p-d)^2.$$

§. 2. Si la quantité d devient nulle, cette relation se réduit à l'égalité

$$\text{(II)} \qquad a^2+b^2+c^2 = p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2,$$

qui a été remarquée par M. Catalan (Nouvelle Correspondance mathématique, 1878, Tome IV, page 3 (3).

§. 3. On peut semblablement décomposer une somme de n carrés

$$a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2$$

en une autre somme de n ou de $n+1$ carrés.

Car, si l'on ajoute l'identité

$$(p-a)^2 = p^2-2ap+a^2,$$

où p désigne une quantité quelconque, aux $n-1$ identités analogues, que fournit la permutation de la quantite a avec les $n-1$ autres quantités b, c, ..., k, l, on obtiendra l'égalité

$$\Sigma(p-a)^2 = np^2-2(a+b+c+\ldots+k+l)p+\Sigma a^2.$$

Il nous suffira d'y poser

$$\text{(2)} \qquad a+b+c+\ldots+k+l = \tfrac{1}{2}np,$$

pour avoir la relation

$$\Sigma(p-a)^2 = \Sigma a^2$$

ou

$$\text{(III)} \qquad a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2$$
$$= (p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+\ldots+(p-k)^2+(p-l)^2.$$

§. 4. Dans cette relation faisons $l=0$; elle se réduit à l'égalité

$$\text{(IV)} \qquad a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2$$
$$=p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+\ldots+(p-k)^2,$$

où le premier membre se compose de $n-1$ carrés, tandisque le second membre contient n carrés.

XVII.

Berechnung einiger vierdehnigen Winkel.

Von

R. Hoppe.

In T. LXVI. S. 448. habe ich eine Formel entwickelt, welche die Berechnung eines Winkels von 4 Dimensionen auf eine Kubatur zurückführt. Hiervon mache ich im Folgenden Gebrauch für 2 Fälle. Wird nämlich erstens der Winkel von einem Raume in einem Rotationskörper geschnitten, und liegt die Spitze normal über einem Punkte der Axe, so ist unter leicht ersichtlichen Bedingungen die Kubatur in endlicher Form ausführbar. Ist zweitens der Schnitt ein Polyeder, so enthält das Resultat eine Function in Form eines einfachen bestimmten Integrals. Die Eigenschaften dieser Function sind wol bisher noch nicht untersucht. Da aber der schneidende Raum willkürlich ist, so enthalten die Argumente der Function willkürliche Elemente, von denen der Ausdruck des Winkels unabhängig sein muss. Hiermit ist ein Weg eröffnet, eine vor der Hand nicht übersehbare Menge linearer Relationen verschiedener Werte derselben Function zu finden, deren Beweis durch reine Analysis und euklidische Geometrie Schwierigkeit haben würde. Es zeigt dies Beispiel, dass die Untersuchung mehrdehniger Gebilde fruchtbar für die gewöhnliche Mathematik werden kann.

Die für beliebig viele Dimensionen aufgestellte Formel auf 4 Dimensionen angewandt lautet:

$$W = h\int\frac{\partial V}{r^4} \tag{1}$$

wo sich die Integration über den Körper V, d. i. den linearen Schnitt des vierdehnigen Winkels W erstreckt, h den normalen Abstand der Spitze vom schneidenden Raume, und r den Radiusvector des Elements ∂V von der Spitze aus bezeichnet.

§. 1.

Die Winkelspitze sei Anfang der rechtwinkligen Coordinaten $xyzw$, die w Axe normal zum schneidenden Raume $w = h$. Setzt man

$$y = \varrho \cos \varphi; \quad z = \varrho \sin \varphi$$

so wird

$$r^2 = h^2 + x^2 + \varrho^2; \quad \partial V = \varrho \partial \varrho \partial \varphi \partial x$$

und, wenn man über einen Rotationskörper, dessen Axe die der x, integrirt,

$$W = h \int_{x_0}^{x_1} \partial x \int_0^{\varrho} \frac{\varrho \partial \varrho}{(h^2 + x^2 + \varrho^2)^2} \int_0^{4R} \partial \varphi$$

$$= 2Rh \int_{x_0}^{x_1} \partial x \left(\frac{1}{h^2 + x^2} - \frac{1}{h^2 + x^2 + \varrho^2} \right)$$

$$= 2R \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x_1}{h} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0}{h} - h \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial x}{h^2 + x^2 + \varrho^2} \right) \tag{2}$$

wo ϱ als Function von x den Meridian bestimmt. Es ist leicht zu sehen, welche Formen des Meridians die Ausführung der Integration gestatten.

Ist z. B. der Meridian ein Kegelschnittt, die x Axe eine seiner Axen, so ist

$$\varrho^2 = ax^2 + 2bx + c \tag{3}$$

und man findet:

$$W = 2R \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1}{h} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0}{h} - \frac{h}{e} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{(1+a)x_1 + b}{e} - \operatorname{arc\,tg} \frac{(1+a)x_0 + b}{e} \right] \right\} \tag{4}$$

$$e = \sqrt{(h^2 + c)(1 + a) - b^2}$$

Für den Fall eines Kugelstücks ist $a = -1$, und man hat:

$$W = 2R \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x_1}{h} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0}{h} + \frac{h}{2b} \log \frac{2bx_0 + h^2 + c}{2bx_1 + h^2 + c} \right)$$

für die volle Kugel

$$W = 2R\left\{\operatorname{arctg}\frac{b+\sqrt{b^2+c}}{h} - \operatorname{arctg}\frac{b-\sqrt{b^2+c}}{h}\right.$$

$$\left. + \frac{h}{2b}\log\frac{h^2+(b-\sqrt{b^2+c})^2}{h^2+(b+\sqrt{b^2+c})^2}\right\} \tag{5}$$

insbesondere wenn die Winkelspitze normal über dem Mittelpunkt steht, wo $b = 0$,

$$W = 4R\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c}}{h} - \frac{h\sqrt{c}}{h^2+c}\right) \tag{6}$$

Der logarithmische Term tritt ein beim Ellipsoid, Paraboloid und zweischaligen Hyperboloid für

$$b^2 > (h^2+c)(1+a)$$

beim einschaligen Hyperboloid, Cylinder und Kegel nie. Im Grenzfall

$$h^2 = \frac{b^2}{1+a} - c$$

wird

$$W = 2R\left\{\operatorname{arctg}\frac{x_1}{h} - \operatorname{arctg}\frac{x_0}{h} - \frac{h}{(1+a)x_1+b} + \frac{h}{(1+a)x_0+b}\right\}$$

für das volle Ellipsoid

$$W = 2R\left\{\operatorname{arctg}\frac{b+\sqrt{\frac{b^2}{1+a}+ah^2}}{-ah} - \operatorname{arctg}\frac{b-\sqrt{\frac{b^2}{1+a}+ah^2}}{-ah}\right.$$

$$\left. + 2h\frac{\sqrt{(1+a)b^2+a(1+a)^2h^2}}{b^2+(1+a)^2h^2}\right\} \tag{7}$$

§. 2.

Für eine ungleichaxige Oberfläche 2. Grades von V würde die directe Berechnung von W schwierig sein; doch kann man durch Erweiterung des Resultats für Rotationsflächen auch zu diesem Ziele gelangen. Lässt man nämlich den durch ein rotatives V bestimmten Winkel von einem beliebigen neuen Raume schneiden, so ist die Oberfläche des Schnitts wieder eine Fläche 2. Grades und im allgemeinen ungleichaxig. Zur Verfügung stehen, nach Abzug der nur die absolute Grösse der Gesammtfigur bestimmenden, noch 5 Constante, 2 in der Gleichung der Rotationsfläche und 3 in der des schneidenden Raumes, gerade die genügende Zahl, um die Axenverhältnisse und die Coordinaten der Projection der Spitze beliebig zu bestimmen. Ich will indes hier nur den einfachsten Fall in Betracht ziehen, wo der schneidende Raum nur um eine Parallele mit der xy Ebene gedreht wird. Seinen normalen Abstand von der Spitze, welcher gleichgültig ist, setzen wir wieder $=h$; dann hat seine Gleichung die Form:

$$w_3 \cos\vartheta + z_3 \sin\vartheta = h$$

Ein Strahl von der Spitze durch den laufenden Punkt $xyzh$ von V gezogen schneidet jenen Raum im Punkte $x_3y_3z_3w_3$, wo

$$x = \frac{hx_3}{w_3}; \quad y = \frac{hy_3}{w_3}; \quad z = \frac{hz_3}{w_3}$$

wird. Nimmt man ihm parallel den Coordinatenraum der $x_2y_2z_2$ durch die Spitze, so ist zu setzen:

$$x_3 = x_2; \quad y_3 = y_2; \quad z_3 = h\sin\vartheta - z_2\cos\vartheta; \quad w_3 = h\cos\vartheta + z_2\sin\vartheta$$
$$w_2 = h \tag{8}$$

Führt man diese Werte in die Gleichung der Oberfläche von V

$$\alpha^2(x-\beta)^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 \tag{9}$$

ein, so kommt:

$$\alpha^2\left(x_3 - \frac{\beta w_3}{h}\right)^2 + y_3^2 + z_3^2 = \frac{\gamma^2 w_3^2}{h^2}$$

oder:

$$\alpha^2\left(x_2 - \frac{\beta z_2}{h}\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta\right)^2 + y_2^2 + (z_2\cos\vartheta - h\sin\vartheta)^2 =$$
$$\left(\frac{\gamma z_2}{h}\sin\vartheta + \gamma\cos\vartheta\right)^2$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\alpha^2\beta^2 - \gamma^2}{h^2} - 1 = \varepsilon$$

setzt:

$$\alpha^2 x_2^2 + y_2^2 + (1 + \varepsilon\sin^2\vartheta)z_2^2 - \frac{2\alpha^2\beta\sin\vartheta}{h} x_2 z_2$$
$$-2\alpha^2\beta\cos\vartheta \,.\, x_2 + 2\varepsilon h\sin\vartheta\cos\vartheta \,.\, z_2 + (1 + \varepsilon\cos^2\vartheta)h^2 = 0$$

Nimmt man die Axen dieser Fläche zu Axen der $x_1y_1z_1$, bezeichnet durch a, b, c ihre Halbaxen, so geht durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1\cos\eta - z_1\sin\eta + \xi; \quad y_2 = y_1 \\ z_2 &= x_1\sin\eta + z_1\cos\eta + \zeta \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ihre Gleichung über in

$$\frac{x_1^2}{a_2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \tag{11}$$

und zwar ist

$$\cot 2\eta = \frac{h}{2}\,\frac{1-\alpha^2+\varepsilon\sin^2\vartheta}{\alpha^2\beta\sin\vartheta}$$

$$\xi = \frac{h^2\beta\cos\vartheta}{h^2\cos^2\vartheta-\gamma^2\sin^2\vartheta}; \qquad \zeta = \frac{h(h^2+\gamma^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}{h^2\cos^2\vartheta-\gamma^2\sin^2\vartheta}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{h^2\cos^2\vartheta-\gamma^2\sin^2\vartheta}{h^2\gamma^2}\left(\frac{1+\alpha^2+\varepsilon\sin^2\vartheta}{2}-\frac{\alpha^2\beta\sin\vartheta}{h\sin 2\eta}\right)$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{h^2\cos^2\vartheta-\gamma^2\sin^2\vartheta}{h^2\gamma^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{h^2\cos^2\vartheta-\gamma^2\sin^2\vartheta}{h^2\gamma^2}\left(\frac{1+\alpha^2+\varepsilon\sin^2\vartheta}{2}+\frac{\alpha^2\beta\sin\vartheta}{h\sin 2\eta}\right)$$

Für hinreichend kleine ϑ sind letztere 3 Grössen positiv, der Schnitt des Winkels mithin ein Ellipsoid.

Die Coordinaten der Projection der Spitze auf den Raum des Ellipsoids sind:

$$x_3 = y_3 = 0; \quad z_3 = h\sin\vartheta; \quad w_3 = h\cos\vartheta$$

woraus nach Gl. (8):

$$x_2 = y_2 = 0; \quad z_2 = 0; \quad w_2 = h$$

und nach Gl. (10):

$$x_1 = -\xi\cos\eta - \zeta\sin\eta; \quad y_1 = 0; \quad z_1 = \xi\sin\eta - \zeta\cos\eta; \quad w_1 = h \qquad (12)$$

Die Bedeutung des Resultats ist folgende. Ein Strahl, der vom Anfangspunkt der $x_3y_3z_3w_3$, das ist dem Endpunkt eines im Punkte (12) auf dem Raume des Ellipsoids (11) errichteten Lotes $= h$, ausgeht, erzeugt, wenn sein Durchschnitt mit diesem Raume das Ellipsoid beschreibt, denselben vierdehnigen Winkel, wie der Strahl, welcher vom Anfangspunkt der $xyzw$ ausgeht, während sein Durchschnitt mit dem Raume des Rotationsellipsoids (9) eben dies Rotationsellipsoid beschreibt.

Letzterer Winkel ist durch die Formel (4) ausgedrückt, in welcher

$$a = -\alpha^2; \quad b = \alpha^2\beta; \quad c = \gamma^2 - \alpha^2\beta^2$$

gesetzt werden muss um Gl. (3) mit (9) zu identificiren. Ausserdem sind die Grenzen der x

$$x_1 = \beta + \frac{\gamma}{\alpha}; \qquad x_0 = \beta - \frac{\gamma}{\alpha}$$

einzusetzen. Dann wird

$$W = 2R\left\{\operatorname{arctg}\frac{\alpha\beta+\gamma}{h\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha\beta-\gamma}{h\alpha}\right. \tag{13}$$

$$\left.-\frac{h}{c}\left[\operatorname{arctg}\frac{\alpha\beta+(1-\alpha^2)\gamma}{e\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha\beta-(1-\alpha^2)\gamma}{e\alpha}\right]\right\}$$

$$e = \sqrt{(h^2+\gamma^2)(1-\alpha^2)-\alpha^2\beta^2}$$

Die Grenze, bis zu welcher a^2 positiv bleibt, ist

$$\sin\vartheta = \frac{h}{\sqrt{h^2+\gamma^2}}$$

Hier verschwinden beide Factoren von $\frac{1}{a^2}$ zugleich, mithin auch $\frac{1}{b^2}$ und $\frac{1}{c^2}$. Dem entspricht das Verhältniss:

$$\frac{b^2}{c^2} = \alpha^2\left(1+\frac{\beta^2}{h^2+\gamma^2}\right)$$

woraus zu ersehen, dass überhaupt alle Axenverhältnisse möglich sind.

§. 3.

Ein beliebiges Polyeder werde auf folgende Art im Tetraeder zerlegt. Man fälle von einem beliebigen Punkte D, den wir zur Projection der Winkelspitze E auf den Raum des Polyeders machen wollen, ein Lot DC auf jede Seitenfläche, von C wieder ein Lot CB auf jede derselben angehörige Kante, die Kante endige in der Ecke A. Dann bilden die sämmtlichen Tetraeder $ABCD$ zusammen das Polyeder (wenn wir unter Umständen einige derselben negativ rechnen); und wenn dem Volum $V = ABCD$ der vierdehnige Winkel W bei E entspricht, so ist ΣW der Winkel über dem Polyeder.

Nach dieser Construction haben wir das folgende System orthogonaler Geraden, die wir zu Richtungen der Axen der x, y, z, w wählen. Vom Anfangspunkt E gehe die Axe der x in der Richtung BA, die der y in der Richtung CB, die der z in der Richtung DC, die der w in der Richtung ED. Sei der ebene Winkel

$$ACB = \alpha;\quad BDC = \beta:\quad CED = \gamma;\quad DE = h$$

dann wird

$$\begin{aligned} CD &= h\operatorname{tg}\gamma \\ BC &= CD\operatorname{tg}\beta = h\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \\ AB &= BC\operatorname{tg}\alpha = h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \end{aligned}$$

Das Tetraeder V wird erzeugt, wenn x von 0 bis $y\,\mathrm{tg}\,\alpha$, y von 0 bis $z\,\mathrm{tg}\,\beta$, z von 0 bis $h\,\mathrm{tg}\,\gamma$ variirt; folglich ist nach der Formel (1)

$$W = h\int_0^{h\mathrm{tg}\gamma}\partial z\int_0^{z\mathrm{tg}\beta}\partial y\int_0^{y\mathrm{tg}\alpha}\frac{\partial x}{(x^2+y^2+z^2+h^2)^2}$$

Substituirt man erst $xy\,\mathrm{tg}\,\alpha$ für x, dann $yz\,\mathrm{tg}\,\beta$ für y, dann $zh\,\mathrm{tg}\,\gamma$ für z, so kommt:

$$W=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta\,\mathrm{tg}^3\gamma\int_0^1 z^2\partial z\int_0^1 y\partial y\int_0^1\frac{\partial x}{\{[(x^2\mathrm{tg}^2\alpha+1)y^2\mathrm{tg}^2\beta+1]z^2\mathrm{tg}^2\gamma+1\}^2}$$

Integrirt man erst nach y, dann nach x, dann nach z, so kommt:

$$W=\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma\int_0^1\partial z\int_0^1\frac{\partial x}{x^2\mathrm{tg}^2\alpha+1}\left\{\frac{1}{z^2\mathrm{tg}^2\gamma+1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[(x^2\mathrm{tg}^2\alpha+1)\mathrm{tg}^2\beta+1]z^2\mathrm{tg}^2\gamma+1}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}^2\beta\mathrm{tg}^3\gamma\int_0^1\frac{z^2\partial z}{z^2\mathrm{tg}^2\gamma+1}\int_0^1\frac{\partial x}{x^2z^2\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\beta\mathrm{tg}^2\gamma+z^2\sec^2\beta\mathrm{tg}^2\gamma+1}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\beta\mathrm{tg}^2\gamma\int_0^1\frac{z\partial z}{(z^2\mathrm{tg}^2\gamma+1)\sqrt{z^2\mathrm{tg}^2\gamma+\cos^2\beta}}\mathrm{arc\,tg}\frac{z\mathrm{tg}\alpha\sin\beta\mathrm{tg}\gamma}{\sqrt{z^2\mathrm{tg}^2\gamma+\cos^2\beta}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{z=\mathrm{tg}\gamma}^{z=0}\mathrm{arc\,tg}\frac{z\mathrm{tg}\alpha\sin\beta}{\sqrt{z^2+\cos^2\beta}}\partial\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sin\beta}{\sqrt{z^2+\cos^2\beta}}$$

Dies hat die Form:

$$W=\tfrac{1}{2}\int_{z=\mathrm{tg}\gamma}^{z=0}\mathrm{arc\,tg}\,u\,\partial\,\mathrm{arc\,tg}\,v$$

wo zwischen u und v die Relation besteht:

$$\frac{u^2\cot^2\alpha}{\sin^2\beta}+v^2\cot^2\beta=1$$

und u variirt von $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+\cos^2\beta\cot^2\gamma}}$ bis 0, und v von $\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma+\cos^2\beta}}$ bis $\mathrm{tg}\,\beta$. Setzt man

$$\sin\delta=\sin\beta\cos\gamma;\quad u=\mathrm{tg}\,\varphi;\quad v=\mathrm{tg}\,\psi$$

so wird

$$W = \tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\beta} \varphi\,\partial\psi \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\beta} + \frac{\mathrm{tg}^2\psi}{\mathrm{tg}^2\beta} = 1 \tag{15}$$

Hiernach ist die Grösse des Winkels über dem Polyeder eine Summe von Werten derselben Function (14) von α, β, γ. Von den α, die sich für jede Seitenfläche zu 4R ergänzen (bzhw. die Summe 0 haben), hängt nur φ ab, dessen Werte parweise bei gemeinsamen Integralgrenzen sich einfach addiren; die γ sind für jede Seitenfläche gemeinsam.

§. 4.

Der Winkel ΣW wird bestimmt durch das System von Strahlen, die von E aus nach allen Ecken des Polyeders gehen. Im einfachsten Falle, den wir betrachten wollen, dem eines Tetraeders, hat der Winkel 4 Kanten. Deren Gleichungen in Bezug auf ein beliebiges orthogonales Coordinatensystem mit dem Anfang in E seien

$$\begin{array}{llll}
x = au; & y = bu; & z = cu; & w = du \\
x_1 = a_1u_1; & y_1 = b_1u_1; & z_1 = c_1u_1; & w_1 = d_1u_1 \\
x_2 = a_2u_2; & y_2 = b_2u_2; & z_2 = c_2u_2; & w_2 = d_2u_2 \\
x_3 = a_3u_3; & y_3 = b_3u_3; & z_3 = c_3u_3; & w_3 = d_3u_3
\end{array}$$

wo die a, b, etc. Richtungscosinus bezeichnen. Der beliebige Raum

$$Ax + By + Cz + Dw = h \tag{16}$$

schneide auf ihnen die Strecken u, u_1, u_2, u_3 ab; dann ist

$$u = \frac{h}{Aa + Bb + Cc + Dd}; \quad \text{etc.} \tag{17}$$

Die Endpunkte dieser Strecken sind die Ecken des Tetraeders ΣV, die 3 ersten die Ecken der Seitenfläche, die 2 ersten begrenzen die Kante, der erste ist die Ecke, die wir betrachten wollen.

Die Projection der Spitze E auf den Raum (16) hat die Coordinaten:

$$x = Ah, \quad y = Bh, \quad z = Ch, \quad w = Dh$$

Von diesem Punkte fällen wir ein Lot auf die Seitenfläche (uu_1u_2). Letztere wird bestimmt durch den Durchschnitt des Raumes (16) und eines Raumes, den wir durch den Anfangspunkt und die 3 Ecken der Seitenfläche legen, nämlich des Raumes:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & x \\ b & b_1 & b_2 & y \\ c & c_1 & c_2 & z \\ d & d_1 & d_2 & w \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Ist $(xyzw)$ ein variabler Punkt der Seitenfläche, so ist das Quadrat jenes Lotes

$$(h \operatorname{tg} \gamma)^2 = \text{Minimum } \{(x-Ah)^2+(y-Bh)^2+(z-Ch)^2+(w-Dh)^2\}$$

Zur Bestimmung der Coordinaten des Fusspunkts haben wir die 3 Gleichungen

$$x\partial x + y\partial y + z\partial z + w\partial w = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & \partial x \\ b & b_1 & b_2 & \partial y \\ c & c_1 & c_2 & \partial z \\ d & d_1 & d_2 & \partial w \end{vmatrix} = 0$$
$$A\partial x + B\partial y + C\partial z + D\partial w = 0$$

woraus:

$$x = \lambda A + \mu A_1; \quad y = \lambda B + \mu B_1; \quad \text{etc.} \tag{19}$$

wenn $A_1 B_1 C_1 D_1$ die Richungscosinus der Normale des Raumes (18) bezeichnen. Führt man diese Werte in die Gl. (16) (18) ein, und setzt

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = \cos\vartheta$$

so erhält man zur Bestimmung von λ und μ:

$$\lambda + \mu\cos\vartheta = h$$
$$\lambda\cos\vartheta + \mu = 0$$

woraus:

$$\lambda = \frac{h}{\sin^2\vartheta}; \quad \mu = -\frac{h\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

Jetzt ist

$$(h \operatorname{tg}\gamma)^2 = [(\lambda-h)A+\mu A_1]^2 + [(\lambda-h)B+\mu B_1]^2 + \ldots$$
$$= (h\cot\vartheta)^2$$

also

$$\gamma = \mathrm{R} - \vartheta$$

Von dem Punkte (19) ist nun ein Lot auf die Kante (uu_1) zu fällen. Ist k die Länge der Kante, so sind ihre Richtungscosinus:

$$\frac{au-a_1u_1}{k}, \quad \frac{bu-b_1u_1}{k}, \ldots$$

und die Gleichung eines Raumes, der normal zu ihr durch den Punkt (19) geht:

$$\frac{au-a_1u_1}{k}(x-\lambda A-\mu A_1) + \frac{bu-b_1u_1}{k}(y-\lambda B-\mu B_1) + \ldots = 0$$

Nun ist

$$A_1a+B_1b+\ldots=0;\quad A_1a_1+B_1b_1+\ldots=0$$

$$A\,a+B\,b+\ldots=\frac{h}{u};\quad A\,a_1+B\,b_1+\ldots=\frac{h}{u_1}$$

daher reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{au-a_1u_1}{k}x+\frac{bu-b_1u_1}{k}y+\ldots=0 \tag{20}$$

Dieser Raum schneidet von der Kante die Strecke $h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$ ab, daher sind die Coordinaten seines Durchschnitts mit der Kante:

$$x=au-\frac{au-a_1u_1}{k}h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma;\quad \text{etc.}$$

und nach Einführung in Gl. (20) erhält man:

$$h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma=au\frac{au-a_1u_1}{k}+\ldots \tag{21}$$

Das Quadrat der Länge des Lotes ist dann:

$$(h\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma)^2=\left(au-\lambda A-\mu A_1-\frac{au-a_1u_1}{k}h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma\right)^2+\ldots$$

Man findet aber:

$$(au-\lambda A-\mu A_1)^2+\ldots=u^2+\frac{h^2}{\sin^2\vartheta}-2\lambda u(Aa+\ldots)$$

$$=u^2-\frac{h^2}{\sin^2\vartheta}=u^2-\frac{h^2}{\cos^2\gamma}$$

daher wird die vorige Gleichung mit Anwendung von (21):

$$(h\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma)^2=u^2-\frac{h^2}{\cos^2\gamma}-(h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma)^2$$

$$=\left(u^2-\frac{h^2}{\cos^2\gamma}\right)\cos^2\alpha$$

woraus:

$$\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{u^2}{h^2}\cos^2\gamma-1} \tag{22}$$

Setzt man

$$aa_1+bb_1+cc_1+dd_1=\cos\varepsilon$$

so giebt Gl. (21):

$$h\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma=u\frac{u-u_1\cos\varepsilon}{k}$$

und nach Elimination von $\mathrm{tg}\,\beta$ durch Gl. (22):

$$\sin\alpha = \frac{u - u_1\cos\varepsilon}{k\sqrt{u^2\cos^2\gamma - h^2}}\,u\cos\gamma \tag{23}$$

woraus:

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{u^2u_1{}^2\sin^2\varepsilon\cos^2\gamma - k^2h^2}{u^2\cos^2\gamma - h^2}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\left(\frac{uu_1\sin\varepsilon\cos\gamma}{kh}\right)^2 - 1}$$

$$\cos\beta = \frac{kh}{uu_1\sin\varepsilon\cos\gamma} \tag{24}$$

In diesen Ausdrücken für α, β, γ sind gegeben die 16 Grössen a, b, c, d, a_1, b_1, etc., dadurch zugleich A_1, B_1, C_1, D_1 und ε. Willkürlich sind dagegen die 3 Verhältnisse von A, B, C, D, in denen sich nach den obigen Formeln u, u_1, u_2, u_3 und k entwickelt darstellen lassen. Permutirt man die Indices der 16 Gegebenen, so erhält man 24 Wertsysteme für α, β, γ, δ, und dadurch die 24 Terme der Summe

$$\Sigma W = \Sigma\int_\delta^\beta \varphi\,\partial\psi$$

Betrachtet man jetzt die Verhältnisse von A, B, C, D als Variable, so hat man, da ΣW constant ist, eine lineare Relation von 24 Functionswerten, die sich durch die besonders zu bestimmenden Constanten unterscheiden.

§. 5.

Dem äusserst complicirten allgemeinen Resultate stelle ich noch eine Reihe einfacher specieller Ergebnisse zur Seite.

Im Aufsatz II. d. T. habe ich die Bestimmungsstücke der 6 regelmässigen Polytope (d. i. linear begrenzten Gebilde von 4 Dimensionen) berechnet. Hiernach hängt die Gestalt eines regelmässigen Polytops von 3 ganzen Zahlen l, m, n ab. Bezeichnet man ein regelmässiges Polyeder, um dessen Ecken je m Vielecke zu n Kanten liegen, durch (m, n), so ist ein solches Polytop dadurch bestimmt, dass um jede Ecke eine gleiche Anzahl Polyeder (m, n) in Form eines Polyeders (l, m) gruppirt sind. Ein vierdehniger Winkel nun mit der Spitze im Mittelpunkt über der vollständigen Grenze des Polytops, bestehend aus p Polyedern, als Basis ΣV construirt, erfüllt die unbegrenzte Vierdehnung, ist daher

$$= 8R^2$$

Zerlegt man jedes Polyeder (m, n) nach §. 3. im Tetraeder V, so gehören deren 4 zu jeder Kante. Folglich ist die Gesammtzahl aller Tetraeder V

$$= \frac{4p}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$$

Durch diese den vollen Winkel dividirt, giebt für den Winkel auf der Basis V:

$$\frac{1}{2}\int_{\delta}^{\beta} \varphi\,\partial\psi = \frac{2R^2}{p}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right) \tag{25}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\beta}+\frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\operatorname{tg}^2\beta}=1; \quad \sin\delta = \sin\beta\cos\gamma \tag{26}$$

Es sind die Constanten α, β, γ, δ zu berechnen.

Nach d. cit. Aufs. ist der Abstand des Mittelpunkts vom Raume eines Polyeders (die Kante = 2 gesetzt):

$$h = \frac{\cos\frac{2R}{l}\cos\frac{2R}{m}\cos\frac{2R}{n}}{MN}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= \sin^2\frac{2R}{l}\sin^2\frac{2R}{n}-\cos^2\frac{2R}{m} \\ N^2 &= \sin^2\frac{2R}{n}-\cos^2\frac{2R}{m} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Ferner ist bekanntlich der Abstand des Polyedermittelpunkts vom Vieleck

$$h\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\frac{2R}{m}\cot\frac{2R}{n}}{N}$$

der Abstand des Vielecksmittelpunkts von der Kante:

$$h\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = \cot\frac{2R}{n}$$

die halbe Kante

$$h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1$$

Durch Division ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{2R}{n}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{N}{\cos\frac{2R}{m}}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{M}{\cos\frac{2R}{l}\sin\frac{2R}{n}}$$

woraus weiter:

$$\alpha = \frac{2R}{n}; \quad \sin\beta = \frac{N}{\sin\frac{2R}{n}}; \quad \cos\gamma = \frac{\cos\frac{2R}{l}\sin\frac{2R}{n}}{N}$$

$$\delta = \left(1 - \frac{2}{l}\right)R$$

Die Relation (26) wird:

$$\frac{\cos^2\frac{2R}{n}}{\cos^2\varphi} + \frac{\cos^2\frac{2R}{m}}{\cos^2\psi} = 1 \tag{28}$$

Es zeigt sich, dass von l nichts weiter als δ abhängt; daher unterscheiden sich für gleiche Polyeder die Integrale (25) nur durch die untere Grenze, und ihre Werte (25) nur durch den Factor p.

Bezeichnet man das den Zahlen l, m, n entsprechende Polytop durch (l, m, n), so giebt es, wie a. a. O. gezeigt, folgende 6 regelmässige Polytope:

(3, 3, 3) von 5 Tetraedern,
(4, 3, 3) von 16 Tetraedern,
(5, 3, 3) von 600 Tetraedern,
(3, 4, 3) von 18 Oktaedern,
(3, 3, 4) von 8 Hexaedern,
(3, 3, 5) von 120 Dodekaedern begrenzt.

Setzt man diese Zahlenwerte in (25) (26) ein und drückt φ in ψ aus, so ergeben sich die 6 Formeln:

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}} \partial\psi \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{2}{15}R^2 \tag{29}$$

$$\int_{\frac{1}{2}R}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}} \partial\psi \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{1}{24}R^2 \tag{30}$$

$$\int_{\frac{3}{5}R}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}} \partial\psi \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2 - \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{1}{900}R^2 \tag{31}$$

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{R - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}} \partial\psi \operatorname{arc\,tg}\sqrt{1 - 2\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{1}{54}R^2 \tag{32}$$

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\frac{1}{2}R} \partial\psi \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2\psi}{2}} = \frac{1}{24}R^2 \tag{33}$$

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \partial\psi \operatorname{arctg} \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}^2\psi}\right\} = \frac{1}{900}R^3 \qquad (34)$$

woraus durch Subtraction und Addition:

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\frac{1}{2}R} \partial\psi \operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{11}{120}R^2 \qquad (35)$$

$$\int_{\frac{1}{2}R}^{\frac{3}{5}R} \partial\psi \operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{73}{1800}R^2 \qquad (36)$$

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\frac{1}{2}R} d\psi \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\psi} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}_2\psi}{2}}\right) = \frac{1}{20}R^2$$

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\frac{1}{2}R} \partial\psi \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\psi} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2\psi}{2}}\right) = \frac{2}{15}R^2$$

oder

$$\int_{\frac{1}{3}R}^{\frac{1}{2}R} \partial\psi \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\psi} \pm \cos 2\psi\sqrt{2(1-\operatorname{tg}^2\psi)}}{\sin^2\psi(5-\operatorname{tg}^2\psi)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{20}R^2 \\ \frac{2}{15}R^2 \end{Bmatrix} \qquad (37)$$

Integrirt man teilweise und drückt nach Gl. (28) ψ in φ aus, so erhält man Integrale derselben Form nicht nur, sondern mit Ausnahme der sechsten Formel sogar Integrale derselben Function zwischen neuen Grenzen. Es ergiebt sich in derselben Reihenfolge:

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}}} \partial\varphi \operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{3}R\left(\frac{2}{5}R + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \qquad (38)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}R} \partial\varphi \operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{7}{24}R^2 \qquad (39)$$

$$\int_0^{\frac{1}{5}R} \partial\varphi \operatorname{arctg}\sqrt{2-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{109}{900}R^2 \qquad (40)$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}R} \partial\varphi \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2}} = \frac{7}{54}R^2 \qquad (41)$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}R} \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1-2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{11}{72}R^2 \tag{42}$$

$$\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}} \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$
$$= \frac{1}{3}R\left(\frac{1}{300}R + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}\right) \tag{43}$$

Diese Formeln lassen sich wieder unter einander und mit den vorigen verbinden; man erhält aus (29) (30) (31) (38) 39) (40), indem wir das reelle Gesammtintervall in seine kleinsten Teile zerlegen und die Abkürzungen

$$f\left(\frac{\varphi}{R}\right) = \int \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2-\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{R}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} = 0{,}6081734$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{R}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{5}{3}} = 0{,}5804308$$

gebrauchen:

$$\begin{array}{lll}
f(\frac{1}{5}) & -f(0) & = \frac{109}{900}R^2 \\
f(\frac{1}{3}) & -f(\frac{1}{5}) & = \frac{71}{900}R^2 \\
f(\frac{1}{2}) & -f(\frac{1}{3}) & = \frac{11}{120}R^2 \\
f(\varphi_1) & -f(\frac{1}{2}) & = \frac{1}{3}(\varphi_1 - \frac{19}{40})R^2 \\
f(\frac{3}{5}) & -f(\varphi_1) & = \frac{1}{3}(\frac{179}{300} - \varphi_1)R^2 \\
f(\varphi_0) & -f(\frac{3}{5}) & = \frac{1}{900}R^2 \\
\hline
f(\varphi_0) & -f(0) & = \frac{1}{3}R^2
\end{array}$$

Sei ferner

$$f_1\left(\frac{\varphi}{R}\right) = \int \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1-2\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$f_2\left(\frac{\varphi}{R}\right) = \int \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2}}$$

dann ergiebt sich aus (32) (42),

$$\begin{array}{lll}
f_1(\frac{1}{3}) & -f_1(0) & = \frac{11}{72}R^2 \\
f_1(1-\varphi_0) & -f_1(\frac{1}{3}) & = \frac{1}{54}R^2 \\
\hline
f_1(1-\varphi_0) & -f_1(0) & = \frac{37}{216}R^2
\end{array}$$

und aus (33) (41):

$$f_2(\tfrac{1}{3})-f_2(0) = \tfrac{7}{54}R^2$$
$$f_2(\tfrac{1}{2})-f_2(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{24}R^2$$
$$f_2(\tfrac{1}{2})-f_2(0) = \tfrac{37}{216}R^2$$

Auch lassen sich wie in (37) die Gl. (41) (42) durch Subtraction und Addition verbinden.

Ob diese Integralformeln ohne Hülfe der Vierdimensionen-Geometrie gewonnen oder bewiesen werden können, zweifle ich. Ist es der Fall, so stellt sich die weitere Frage ein, ob sie speciell in einer allgemeinern Formel enthalten sind. Da in dem umfassenden Ausdruck des Integrals (25) die bisher noch keinem Gesetz unterworfene Zahl p vorkommt, so steht auch die Ermittelung dieses Gesetzes mit jener Aufgabe in Verbindung. Nimmt man das Reciprocitätsgesetz, demzufolge für jedes Polytop ein zweites existiren muss, dessen Ecken, Kanten, Flächen, Räume den Räumen, Flächen, Kanten, Ecken des ersten entsprechen, und welches sich für die 6 regelmässigen Polytope bestätigt hat, so reduciren sich die 6 Werte von p auf 4. Denn setzt man

$$F(l, m, n) = 6p\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)$$

so hat man:

$$F(3, 3, 3) = 5$$
$$F(4, 3, 3) = F(3, 3, 4) = 8$$
$$F(3, 4, 3) = 9$$
$$F(5, 3, 3) = F(3, 3, 5) = 120$$

Die Vertauschbarkeit des 1. und 3. Arguments folgt apriori aus dem Reciprocitätsgesetze und aposteriori aus den resultirenden Zahlen.

§. 6.

Nach dem obigen Verfahren würde ein Tetraeder als Basis V in 24 Elementartetraeder zerlegt werden müssen. Hierdurch werden offenbar mehr Constanten eingeführt, als zur Bestimmung von V nötig sind. Wir wollen nun die Aufgabe für ein beliebiges Tetraeder ohne Zerlegung in Angriff nehmen.

Wir nehmen die eine Ecke D des Tetraeders $ABCD$ zum Anfang der xyz, die z Axe normal zur Ebene ABC, die y Axe normal zur Kante AB, mithin die x Axe parallel AB.

Parallel ABC durch das Element ∂V gehe der Schnitt $A'B'C'$, parallel $A'B'$ durch dasselbe der Schnitt $A''B''$. Das Höhenlot $DE = g$ schneide $A'B'C'$ in E', das Höhenlot $C'F$ schneide $A''B''$ in G, das Lot $E'H$ in J.

Folgende Strecken sind z proportioual:

$$GJ = FH = az; \quad C'F = (b+f)z; \quad E'H = fz$$

folgende proportional $C'G = y + bz$:

$$A''G = c(y+bz); \quad GB'' = e(y+bz)$$

Es variirt zunächst x bei constanten y, z

$$\begin{array}{ll} \text{von} & -A''J = JG - A''G = az - c(y+bz) \\ \text{bis} & JB'' = JG + GB'' = az + e(y+bz) \end{array}$$

dann y bei constantem z von $-bz$ bis fz, endlich z von 0 bis g.

Die Coordinaten der Projection der Winkelspitze auf den Tetraederraum seien $\alpha\beta\gamma$. Zur Abkürzung setzen wird

$$\begin{aligned} u &= az - \alpha + e(bz + \beta) \\ v &= az - \alpha - c(hz + \beta) \\ w^2 &= (z-\gamma)^2 + h^2 \end{aligned}$$

wo h wie oben den Abstand der Spitze von V bezeichnet. Dann ist nach Gl. (1) der vierdehnige Winkel

$$W = h\int_0^g \partial z \int_{-bz}^{fz} \partial y \int_{v+\alpha-c(y-\beta)}^{u+\alpha+e(y-\beta)} \frac{\partial x}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + w^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{44}$$

Zur Integration sei gesetzt

$$y = \beta + w \operatorname{tg} \psi$$

$$x = \alpha + \frac{w \operatorname{tg} \varphi}{\cos \psi}$$

Die Grenzen von φ und ψ seien bezeichnet durch φ_0, φ_1 und ψ_0, ψ_1, so dass

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{fz - \beta}{w}; \quad \operatorname{tg} \psi_0 = -\frac{bz + \beta}{w}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{u}{w} \cos \psi + e \sin \psi; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{v}{w} \cos \psi - c \sin \psi \tag{45}$$

oder, wenn man überdies

$$u = w \operatorname{tg} \varrho \cos \lambda; \qquad e = \operatorname{tg} \varrho \sin \lambda$$
$$v = w \operatorname{tg} \sigma \cos \mu; \quad -c = \operatorname{tg} \sigma \sin \mu$$

setzt,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varrho \cos(\psi - \lambda); \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \sigma \cos(\psi - \mu)$$

wird. Dies eingeführt giebt:

$$W = h \int_0^g \frac{\partial z}{w^2} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \partial \psi \cos \psi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \partial \varphi \cos^2 \varphi$$

$$= h \int_0^g \frac{\partial z}{w^2} \left[\sin \psi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \partial \varphi \cos^2 \varphi - \int (\partial \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 - \partial \varphi_0 \cos^2 \varphi_0) \sin \psi \right]_{\psi = \psi_0}^{\psi = \psi_1}$$

ein Ausdruck der die Form hat:

$$W = h \int_0^g \frac{\partial z}{w^2} (\Phi_1 - \Phi_0)$$

wo

$$\Phi_1 = \left[\frac{\varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{2} \sin \psi - \int \partial \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \sin \psi \right]_{\psi = \psi_0}^{\psi = \psi_1}$$

$$\Phi_0 = \left[\frac{\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{2} \sin \psi - \int \partial \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \sin \psi \right]_{\psi = \psi_0}^{\psi = \psi_1}$$

Aus Gl. (45) lässt sich entwickeln:

$$\sin \psi = \frac{\sin \lambda \operatorname{tg} \varphi_1 \pm \cos \lambda \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varrho - \operatorname{tg}^2 \varphi_1}}{\operatorname{tg} \varrho}$$

woraus:

$$\int \partial \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \sin \psi = \frac{\sin \lambda}{2 \operatorname{tg} \varrho} \sin^2 \varphi_1 \pm \frac{\cos \lambda}{\operatorname{tg} \varrho} \int \partial \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varrho - \operatorname{tg}^2 \varphi_1}$$

$$= \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{2} \left(\sin \psi \mp \frac{\cos \lambda}{\operatorname{tg} \varrho} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varrho - \operatorname{tg}^2 \varphi_1} \right)$$
$$\pm \frac{\cos \lambda}{\operatorname{tg} \varrho} \int \partial \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varrho - \operatorname{tg}^2 \varphi_1}$$

und nach Einführung und leichten Reductionen:

$$\Phi_1 = \left[\frac{\varphi_1}{2} \sin \psi \pm \frac{\cos \lambda}{\sin \varrho} \left(\frac{\sin \varphi_1}{2} \sqrt{\sin^2 \varrho - \sin^2 \varphi_1} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int \partial \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \sqrt{\sin^2 \varrho - \sin^2 \varphi_1} \right) \right]_{\psi = \psi_0}^{\psi = \psi_1}$$

oder, wenn $\sin \varphi_1 = \sin \varrho \sin \chi$,

$$\Phi_1 = \left[\frac{\varphi_1 \sin \psi \mp \chi \cos \lambda \sin \varrho}{2} \right]_{\psi = \psi_1}^{\psi = \psi_0}$$

Hier ist

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{\sin^2\varrho - \sin^2\varphi_1}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{\sin^2\varrho - \cos^2\varrho\operatorname{tg}^2\varphi_1}} = \frac{1}{\cos\varrho\operatorname{tg}(\psi-\lambda)}$$

daher

$$\Phi_1 = \tfrac{1}{2}(\Psi_1 - \Psi_0); \quad \Phi_0 = \tfrac{1}{2}(\Psi_1' - \Psi_0')$$

wo

$$\Psi_1 = \sin\psi_1 \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\varrho\cos(\psi_1-\lambda)] \mp \cos\lambda\sin\varrho \operatorname{arc tg}\frac{1}{\cos\varrho\operatorname{tg}(\psi_1-\lambda)}$$

$$\Psi_0 = \sin\psi_0 \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\varrho\cos(\psi_0-\lambda)] \mp \cos\lambda\sin\varrho \operatorname{arc tg}\frac{1}{\cos\varrho\operatorname{tg}(\psi_0-\lambda)}$$

$$\Psi_0' = \sin\psi_1 \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\sigma\cos(\psi_1-\mu)] \mp \cos\mu\sin\sigma \operatorname{arc tg}\frac{1}{\cos\sigma\operatorname{tg}(\psi_1-\mu)}$$

$$\Psi_0' = \sin\psi_0 \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\sigma\cos(\psi_0-\mu)] \mp \cos\mu\sin\sigma \operatorname{arc tg}\frac{1}{\cos\sigma\operatorname{tg}(\psi_0-\mu)}$$

Diese 8 Kreisbogen haben parweise gemeinsamen Coefficienten, so dass sie sich auf 4 reduciren. Man erhält dann:

$$2(\Phi_1 - \Phi_0) = K\sin\psi_1 - L\sin\psi_0 \mp M\cos\lambda\sin\varrho \pm N\cos\mu\sin\sigma$$

wo

$$\begin{aligned}
K &= \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\varrho\cos(\psi_1-\lambda)] - \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\sigma\cos(\psi_1-\mu)] \\
&= \operatorname{arc tg}\left(\frac{u}{w}\cos\psi_1 + e\sin\psi_1\right) - \operatorname{arc tg}\left(\frac{v}{w}\cos\psi_1 - c\sin\psi_1\right) \\
&= \operatorname{arc tg}\left[\cos\psi_1 \frac{u+e(fz-\beta)}{w}\right] - \operatorname{arc tg}\left[\cos\psi_1 \frac{v-c(fz-\beta)}{w}\right] \\
&= \operatorname{arc tg}\frac{[a+c(b+f)]z-\alpha}{\sqrt{(fz-\beta)^2+w^2}} - \operatorname{arc tg}\frac{[a-c(b+f)]z-\alpha}{\sqrt{(fz-\beta)^2+w^2}} \qquad (46) \\
&= \operatorname{arc tg}\frac{(c+e)(b+f)z\sqrt{(fz-\beta)^2+w^2}}{(fz-\beta)^2+w^2+\{[a+e(b+f)]z-\alpha\}\{[a-c(b+f)]z-\alpha\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\varrho\cos(\psi_0-\lambda)] - \operatorname{arc tg}[\operatorname{tg}\sigma\cos(\psi_0-\mu)] \\
&= \operatorname{arc tg}\left(\frac{u}{w}\cos\psi_0 + e\sin\psi_0\right) - \operatorname{arc tg}\left(\frac{v}{w}\cos\psi_0 - c\sin\psi_0\right) \\
&= \operatorname{arc tg}\left[\cos\psi_0 \frac{u-e(bz+\beta)}{w}\right] - \operatorname{arc tg}\left[\cos\psi_0 \frac{v+c(bz+\beta s}{w}\right] \\
&= \operatorname{arc tg}\left[\cos\psi_0 \frac{az-\alpha}{w}\right] - \operatorname{arc tg}\left[\cos\psi_0 \frac{az-\alpha}{w}\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{\cos\varrho[\operatorname{tg}(\psi_0-\lambda)-\operatorname{tg}(\psi_1-\lambda)]}{1+\cos^2\varrho\operatorname{tg}(\psi_0-\lambda)\operatorname{tg}(\psi_1-\lambda)}$$

$$= \frac{\cos\varrho\sin(\psi_0-\psi_1)}{\cos(\psi_0-\lambda)\cos(\psi_1-\lambda)+\cos^2\varrho\sin(\psi_0-\lambda)\sin(\psi_1-\lambda)}$$

$$= \frac{\cos\varrho(\operatorname{tg}\psi_0-\operatorname{tg}\psi_1)(1+\operatorname{tg}^2\lambda)}{(1+\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\psi_0)(1+\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\psi_1)+\cos^2\varrho(\operatorname{tg}\psi_0-\operatorname{tg}\lambda)(\operatorname{tg}\psi_1-\operatorname{tg}\lambda)}$$

$$= -\frac{\cos\varrho(b+f)zw(u^2+e^2w^2)}{w^2[u-e(bz+\beta)][u+e(fz-\beta)] \ldots \atop -\cos^2\varrho[u(bz+\beta)+ew^2][u(fz-\beta)-ew^2]}$$

$$= -\frac{(b+f)z(u^2+e^2w^2\sqrt{u^2+(e^2+1)w^2}}{[u^2+(e^2+1)w^2](az-\alpha)[a+e(b+f)z-\alpha] \ldots \atop -[u(bz+\beta)+ew^2][u(fz-\beta)-ew^2]}$$

analog $\operatorname{tg} N$, wo für u, v, w noch die Werte zu setzen sind. Dann lautet der Ausdruck:

$$W = \frac{h}{2}\int_0^g \frac{\partial z}{(z-\gamma)^2+h^2}\left\{\frac{fz-\beta}{\sqrt{(fz-\beta)^2+(z-\gamma)^2+h^2}} \times \right. \tag{47}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{kz\sqrt{(fz-\beta)^2+(z-\gamma)^2+h^2}}{(fz-\beta)^2+(z-\gamma)^2+h^2+(a_1z-\alpha)(a_0z-\alpha)}$$

$$\pm\frac{a_3z-\alpha_1}{\sqrt{(a_3z-\alpha_1)^2+(e^2+1)[(z-\gamma)^2+h^2]}} \times$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{(b+f)z[(a_3z-\alpha_1)^2+e^2(z-\gamma)^2+c^2h^2]\sqrt{(a_3z-\alpha_1)^2+(c^2+1)[(z-\gamma)^2+h^2]}}{\{(a_3z-\alpha_1)^2+(e^2+1)[(z-\gamma)^2+h^2]\}(az-\alpha)(a_1z-\alpha) \ldots \atop -\{(a_3z-\alpha_1)(bz+\beta)+e[(z-\gamma)^2+h^2]\}\{(a_3z-\alpha_1)(fz-\beta)-e[(z-\gamma)^2+h^2]\}}$$

$$\mp\frac{a_2z-\alpha_0}{\sqrt{(a_2z-\alpha_0)^2+(c^2+1)[(z-\gamma)^2+h^2]}} \times$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{(b+f)z[(a_2z-\alpha_0)^2+c^2(z-\gamma)^2+c^2h^2]\sqrt{(a_2z-\alpha_0)^2+(c^2+1)[(z-\gamma)^2+h^2]}}{\{(a_2z-\alpha_0)^2+(c^2+1)[(z-\gamma)^2+h^2]\}(nz-\alpha)(a_0z-\alpha) \ldots \atop -\{(a_2z-\alpha_0)(bz+\beta)-c[(z-\gamma)^2+h^2]\}\{(a_2z-\alpha_0)(fz-\beta)+e[(z-\gamma)^2+h^2]\}}\Bigg\}$$

wo

$$k = (c+e)(b+f)$$

$$a_1 = a+e(b+f); \quad a_0 = a-c(b+f)$$

$$a_3 = a+eb; \quad a_2 = a-cb$$

$$\alpha_1 = \alpha-e\beta; \quad \alpha_0 = \alpha+c\beta$$

Von dieser allgemeinen Formel machen wir zunächst Anwendung auf den Fall eines regelmässigen Tetraeders V, in dessen Mittelpunkt überdies die Projection der Spitze des Winkels W fällt. Hier ist, die Kante $= 1$ gesetzt,

$$\alpha=0;\quad \beta=0;\qquad \gamma=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}};\qquad g=\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$a=0;\quad b=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad c=e=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad f=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

woraus:

$$k=\sqrt{\tfrac{3}{2}};\quad a_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}};\quad a_3=\frac{1}{\sqrt{6}};\quad \alpha_1=0$$

$$a_0=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}};\quad a_2=-\frac{1}{\sqrt{6}};\quad \alpha_0=0$$

Ferner ist hier der Ausdruck (46) für K vorzuziehen. da beide Teile einander gleich werden. Ausserdem fallen der 2. und 3. Term zusammen, da $M=-N$, und die Coefficienten beider gleich sind. So findet man:

$$W=h\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{\partial z}{\left(z-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2+h^2}\,\frac{z}{\sqrt{9z^2-4\sqrt{6}.z+3+8h^2}}\times$$

$$\left\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}.z}{\sqrt{9z^2-4\sqrt{6}.z+3+8h^2}}\pm\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}z\sqrt{9z^2-4\sqrt{6}.z+3+8h^2}}{6z^2-4\sqrt{6}.z+3+8h^2}\right\}$$

oder nach Substituiion von $z\sqrt{\frac{2}{3}}$ für z:

$$W=h\int_0^1\frac{16\partial z}{(4z-3)^2+2+h^2}\,\frac{z}{\sqrt{6z^2-8z+3+8h^2}}\times$$

$$\left\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}.z}{\sqrt{6z^2-8z+3+8h^2}}+\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}.z\sqrt{6z^2-8z+3+8h^2}}{4z^2-8z+3+8h^2}\right\}$$

Dass nur das obere Zeichen möglich ist, ist zu ersehen, weil der zweite Teil grösser ist als der erste. Addirt man die beiden Arcus, so kommt:

$$W=h\int_0^1\frac{16\partial z}{(4z-3)^2+24h^2}\,\frac{z}{\sqrt{6z^2-8z+3+8h^2}}\times \tag{48}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}.z}{8h^2+3-8z}\,\frac{(4z-3)^2+24h^2}{\sqrt{6z^2-8z+3+8h^2}}$$

Für $z>h^2+\frac{3}{8}$ ist 2R zum Arcus zu addiren.

Die Grösse dieses Winkels ist bekannt, wenn er der Centriwinkel eines regelmässigen Polytops ist, der auf einer Seite desselben steht. Nun giebt es (s. p. 42.) 3 regelmässige Polytope, die bzhw. von 5, 16, 600 Tetraedern begrenzt sind, und zwar sind die Abstände des Mittelpunkts von den Tetraederräumen bzhw.

$$h = \frac{1}{2\sqrt{10}}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{2}}$$

Die ganze Vierdehnung, d. i. die Summe aller Winkel um einen Punkt herum, ist (nach T. LXVI. p. 203) $= 8R^2$. Setzt man die 3 Werte von h in Gl. (48) ein, so erhält man: (49)

$$\int_0^1 \frac{\partial z}{10z^2-15z+6} \frac{z}{\sqrt{15z^2-20z+8}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{5}\,.\,z}{2-5z} \frac{10z^2-15z+6}{\sqrt{15z^2-20z+8}} = \tfrac{1}{2}\tfrac{6}{5}R^2$$

$$\int_0^1 \frac{\partial z}{4z^2-6z+3} \frac{z}{\sqrt{3z^2-4z+2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{1-2z} \frac{4z^2-6z+3}{\sqrt{3z^2-4z+2}} = \tfrac{1}{2}R^2$$

$$\int_0^1 \frac{\partial z}{4z^2-6z+9+3\sqrt{5}} \frac{z}{\sqrt{3z^2-4z+6+2\sqrt{5}}} \times$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{3+\sqrt{5}-2z} \frac{4z-6z+9+3\sqrt{5}}{\sqrt{3z^2-4z+6+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-2}{75} R^2$$

Entwickelt man die Bestimmungsstücke des allgemeinen Tetraeders aus dem Schnitt eines mit 4 Parametern variirenden Raumes und eines festen vierdehnigen Winkels W und setzt sie in Gl. (47) ein, so erhält man einen Ausdruck in 3 bestimmten Integralen, deren Summe dann gegen die 4 Parameter constant sein muss.

Auch bei unverändertem Schnitt kann man Transformationen aus Gl. (47) erhalten, indem man nur die Ecken des Tetraeders vertauscht. Beides will ich hier nur andeuten und komme vielleicht später darauf zurück.

XVIII.

Ueber das Kubiren und Kubikwurzelausziehen nach Horner's Methode.

Von

Herrn **Moriz Rusch**

in Wien.

Wohl auf keinem Gebiete menschlicher Tätigkeit wird eine neue Methode, ein neues Lehrverfahren mit soviel Vorurteil empfangen, als auf dem des Unterrichtes. Die Erklärung dieser Tatsache ist nicht schwer: ein Lehrer hat jahrelang nach seiner Weise unterrichtet, sich in diese ganz hineingelebt, schöne Resultate damit erzielt und nun soll er einen ganz neuen Weg einschlagen, soll Altes, ihm Geläufiges dem erst zu Erlernenden opfern. Da prüft er denn das Neue nicht einmal gründlich, sondern geht ruhig den bisher gewohnten Weg weiter. Die jüngeren Lehrkräfte folgen im Grossen und Ganzen derselben Methode, nach der sie unterrichtet wurden, um so mehr, da ihnen an der Hochschule, wo zumeist nur die höheren Disciplinen gepflegt werden, ein eingehendes, wissenschaftlich vertieftes Studium der niedern Mathematik nicht geboten wurde. So bricht sich denn nur sehr langsam eine neue Ansicht Bahn. Wie gross die Scheu vor dem Neuen ist, zeigt sich z. B. auch darin, dass noch immer die allgemeine Anwendung des metrischen Masses in sonst trefflichen Lehrbüchern der Geographie nicht durchgedrungen ist. Und diese Scheu ist desto schwerer zu überwinden, wenn das alt Gebrauchte nicht eben schlecht, das Neue wenigstens auf den ersten oberflächlichen Blick, sich nicht von vornherein als entschieden besser empfiehlt.

Dieses Vorurteil gegen das Neue mag wol auch der Hauptgrund sein, weshalb die so schöne Horner'sche Methode des Kubirens und Kubikwurzelausziehens trotz ihrer grossen Vorzüge bis jetzt so wenig Anhänger und so geringe Anwendung im Mittelschulunterrichte *) gefunden hat.

Zweck dieser Zeilen soll nun sein, dieser Methode, die schon 1819 von Horner in „philosophical transactions. London." gleichzeitig mit seiner leider auch zu wenig bekannten Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen bekannt gegeben wurde, das Wort zu reden.

Die Vorzüge dieser Methode vor der gewöhnlich gebräuchlichen lassen sich wol in folgende Punkte zusammenfassen:

1. Alle Operationen schreiten in einem ununterbrochenen Zuge fort, so dass nicht jede Arbeit bei der folgenden Stufe neu gemacht werden muss, wie dies bei der Bildung des 3fachen Quadrates nach der gewöhnlich gebräuchlichen Methode nötig ist.

2. Man rechnet nach ihr sicherer und kürzer; sie ist somit praktischer.

3. empfiehlt sie sich der Ordnung und Uebersichtlichkeit der darnach ausgeführten Rechnung wegen.

4. Das abgekürzte Kubiren und Kubikwurzelausziehen gestaltet sich nach dieser Methode besonders einfach und lässt ohne vorhergegangene theoretische Untersuchungen und ohne alle Complication der Rechnung eine grössere Genauigkeit zu.

5. begreift der Schüler diese Methode ebenso leicht als die gewöhnlich gebräuchliche und erhält dabei, besonders beim abgekürzten Verfahren, eine grössere Anregung zum Denken.

Jeder, der unbefangen an diese Methode, die im folgenden entwickelt werden soll, herantritt, wird gewiss mit vorstehenden Punkten einverstanden sein, besonders, wenn er es sich nicht der Mühe verdriessen lässt, einige Beispiele nach dieser und auch nach der sonst üblichen wirklich durchzuführen. Nur der letzte Punkt wird vielleicht einiges Bedenken erregen, aber auch dieses sofort schwinden, wenn der Versuch gemacht ist. Schreiber dieses hatte selbst, so sehr ihm die Methode auch von vornherein gefiel, grosse Scheu, sie im Unterrichte zu verwenden, bis er den Versuch wirklich wagte und sich so durch die Erfahrung von der Richtigkeit des unter 5. Angeführten

*) Gymnasien und Realschulen.

überzeugte. Aber nicht die eigne Erfahrung allein, vielmehr die Erfahrung anderer bewährter Lehrer — so wird an der k. k. Staats-Oberrealschule im III. Bezirke Wiens seit fast 30 Jahren nur nach dieser Methode unterrichtet und wurden damit schöne Erfolge erzielt — sind dem Schreiber dieses eine Gewähr für seine Behauptung.

Die Horner'sche Methode wurde zuerst von Dr. Schulz v. Strassnitzky, w. Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien, in seinem Buche: „Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen und zur Auffindung der dritten und höheren Wurzeln aus bestimmten Zahlen. Wien 1842" in deutscher Sprache bekannt gegeben und auch in sein „Lehrbuch der Arithmetik für Practiker. Wien 1844" von ihm aufgenommen. Leider fand dieses viel Wertvolles enthaltende Buch seiner zu grossen Breite und Ausführlichkeit wegen nicht die verdiente Verbreitung und somit auch die Horner'sche Methode nur wenige Freunde. Der k. Rath Prof. Dr. Zampieri, durch langjährige Erfahrung von der Trefflichkeit dieser Methode überzeugt, nahm sie zwar in die von ihm edirte Ausgabe des „Lehrbuchs der Elementarmathematik für Oberrealschulen von Salomon. 3. Auflage. Wien 1865" auf, aber schon in der nächsten Auflage dieses Buches, die von Prof. Sevcik besorgt wurde, trat wieder das alte Verfahren an Stelle des neuen. Erst in jüngster Zeit wurde sie von Prof. Haberl in sein „Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 3. Auflage. Wien 1880" und von Prof. Glöser in seine „Grundzüge der allgemeinen Arithmetik für die 3. Klassen oestr. Mittelschulen. Wien 1880" aufgenommen.

Um nun der in Rede stehenden Methode eine weitere Verbreitung und grösseren Eingang im Unterrichte als dies bis jetzt der Fall war, zu verschaffen und zur Rechtfertigung der oben citirten Vorzüge derselben, glaubt der Verfasser dieses Aufsatzes, ehe er zur Vergleichung der erwähnten Methode mit der sonst üblichen schreitet, eine Darstellung derselben voranschicken zu sollen, wobei er sich an den von Prof. Dr. Schulz v. Strassnitzky eingeschlagenen Weg zu halten gedenkt.

Bekanntlich ist:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

oder wenn b als Factor herausgehoben wird:

$$(a+b)^3 = a^3 + [3a^2 + (3a+b)b]b.$$

d. h. man findet den Kubus eines Binoms, wenn man zu dem 3fachen des ersten Teiles den zweiten Teil addirt, die Summe mit dem zweiten Teile multiplicirt, das Product zu dem 3fachen Quadrate des ersten Teiles addirt, die Summe abermals mit dem zweiten Teile multiplicirt und schliesslich dieses Product zu dem Kubus des ersten Teiles addirt, oder in schematischer Darstellung:

I.	II.	III.
a^3	$3a^2$	$3a$
$[3a^2+(3a+b)b]b$	$(3a+b)b$	b
$(a+b)^3$	$3a^2+(3a+b)b$	$3a+b$

Wir sehen, die ganze Rechnung gliedert sich in 3 Columnen, von denen die erste mit dem Kubus, die zweite mit dem 3fachen Quadrate, die dritte mit dem 3fachen des ersten Teiles beginnt. Zur dritten Columne addirt man den zweiten Teil, multiplicirt die Summe mit diesem, schreibt das Product gleich in die zweite Columne, addirt, multiplicirt die Summe abermals mit dem zweiten Teile, schreibt das Product in die erste Columne und addirt. Die Summe ist der verlangte Kubus.

Wie diese Regel sich direct auf das Kubiren dekadischer Zahlen anwenden lässt, ist leicht einzusehen.

1) Es sei der Kubus von 49 zu bilden. Wir setzen $a = 40$, $b = 9$ und erhalten:

I.	II.	III.
64000	4800	120
53649	1161	9
117649	5961	129

$$(49)^3 = 117649.$$

2) $(87)^3 = ?$ $a = 80,$ $b = 7$

I.	II.	III.
512...	192..	247
146503	1729	
658503	20929	

$$(87)^3 = 658503.$$

Die Nullen wurden nur durch Punkte markirt und in III. die Addition gleich ausgeführt.

Um dasselbe Verfahren für das Kubiren mehrziffriger Zahlen anwenden zu können, setzen wir in obiger Formel statt a $a+b$ und statt b c, dann wird:

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + \{3(a+b)^2 + [3(a+b)+c]c\}c$$

oder in schematischer Darstellung:

I.	II.	III.
$(a+b)^3$	$3(a+b)^2$	$3(a+b)$
$\{3(a+b)^2+[3(a+b)+c]c\}c$	$[3(a+b)+c]c$	c
$(a+b+c)^3$	$3(a+b)^2+[3(a+b)+c]c$	$3(a+b)+c$

$(a+b)^3$ bildet man auf obige Weise.

Um $3(a+b)^2$ zu erhalten, was bei der gewöhnlichen Kubirungsmethode immer von Anfang an zu geschehen hat, ist weiter nichts notwendig als in der Entwicklung für $(a+b)^3$ zu den beiden letzten Posten der Mittelcolumne b^2 zu addiren, denn man hat:

$$[(3a+b)b]+[(3a+b)b+3a^2]+b^2 = 3ab+b^2+3ab+b^2+3a^2+b^2$$
$$= 3(a^2+2ab+b^2) = 3(a+b)^2.$$

Die ganze Entwicklung von $(a+b+c)^3$ lässt sich demnach in folgendes Schema bringen:

I.	II.	III.
a^3	$3a^2$	$3a$
$\beta_1 b$	$\alpha_1 b$	b
$\beta_2 c$	$3a^2+\alpha_1 b = \beta_1$	$3a+b = \alpha_1$
$(a+b+c)^3$	b^2	$3(a+b)$
	$3(a+b)^2$	c
	$\alpha_2 c$	$3(a+b)+c = \alpha_2$
	$3(a+b)^2+\alpha_2 c = \beta_2$	

Die Klammer in der Mittelcolumne zeigt an, dass diese 3 Posten zu addiren sind, um $3(a+b)^2$ zu erhalten.

1) Es sei der Kubus von 792 zu bilden.

$a = 700 \qquad b = 90 \qquad c = 2$

Zunächst bilde man a^3, $3a^2$ und $3a$, welche Zahlen die 3 Columnen eröffnen, addire zu $3a$ das b, multiplicire die Summe mit b, schreibe das Product in die zweite Columne, addire und multiplicire abermals mit b. Das Product schreibe man in die erste Columne.

Man erhält:

343000000	1470000	2100
150039000	197100	90
	1667100	2190

Nun addire man zu den 2 letzten Posten der Mittelcolumne $b^2 = 90^2 = 8100$ und bilde das 3fache von $(a+b)$ d. i. von 790; addire zu letzterem die nun in Rechnung kommende Ziffer der Wurzel $c = 2$, multiplicire die Summe mit 2, addire das Product zu dem letzten Posten der Mittelcolumne d. i. zu $3(a+b)^2$, multiplicire die Summe abermals mit $c = 2$ und addire schliesslich zu den Zahlen der ersten Columne. Es wird:

I.	II.	III.
343000000	1470000	2100
150039000	197100	90
3754088	1667100	2190
496793088	8100	2370
	1872300	2
	4744	2372
	1877044	

Bei Berücksichtigung des Stellenwertes der einzelnen Ziffern — der ja beim Rechnen nie ausser Acht gelassen werden sollte — ergiebt sich leicht, dass in der Mittelcolumne jedes neue Product um 2, in der Hauptcolumne um 3 Stellen herausgeschrieben werden muss und in der 3. Columne die Addition der neu hinzutretenden Ziffer der Wurzel dadurch geschieht, dass man sie einfach neben das Dreifache schreibt. Die ganze Rechnung gestaltet sich also folgendermassen:

343	147	219
150039	1971	2372
3754088	16671	
496793088	81	
	18723	
	4744	
	1877044	

Es ist leicht einzusehen, dass dieses Verfahren auch für mehr als dreiffrige Zahlen dasselbe bleibt, da man, um das 3fache Quadrat des schon in Rechnung gezogenen Teiles der zu kubirenden Zahl zu bilden, immer nur das Quadrat der zuletzt benützten Ziffer zu den beiden letzten Posten der Mittelcolumne zu addiren hat. Z. B. es soll der Kubus von 7964 entwickelt werden.

343
150039
11319336
760721344
505119057344

147
1971
16671
81
18723
14256
1886556
36
1900848
95536
190180336

219
2376
23884

$$(7964)^3 = 505119057344$$

Wir wollen nun zum besseren Vergleich mit der üblichen Methode, dasselbe Beispiel nach dieser rechnen.

$$(7964)^3 = ?$$

343
1323
1701
729
112338
8532
216
7603392
38208
64
505119057344

49×27
98
343
1323

$(79)^2$
49
126
81
6241×18
49928
112338

$(796)^2$
6241
948
36
633616×12
1267232
7603392

21×81
168
1701

79×108
632
8532

796×48
3184
6368
38208

Es ist wol nicht nötig, erst noch die Frage aufzuwerfen, welche von den beiden Methoden kürzer, sicherer, praktischer ist; welche der beiden Rechnungen geordneter und übersichtlicher erscheint. Aber auch dann, wenn wir bei der gewöhnlichen Art des Kubirens alle Rechnungsvorteile, die man übrigens von einem Schüler kaum noch verlangen darf, anwenden, stellt sich der Vorteil auf Seite der Horner'schen Methode, wie sich durch den Vergleich ergiebt:

$$(7964)^3 = ?$$

343	49×27	81×21
1323	126	237×36
1701	81	711
729	6241×18	1422
112338	948	2388×16
8532	36	
216	633616×12	
7603392		
38208		
64		
505119057344		

Es sind hier die Producte aus a^2 und $3b$ gleich im Kopfe entwickelt, an die entsprechende Stelle der Hauptcolumne geschrieben und das a^2 ist im fortlaufenden Zuge zur Bildung des $(a+b)^2$ etc. benutzt worden, und trotz alledem hat man nur um eine Ziffer weniger geschrieben als bei der nach Horner ausgeführten Rechnung. Wieviel Zeit ist aber verloren gegangen, wieviel Fehlerquellen sind durch diese Künsteleien zugewachsen!

Aber noch deutlicher zeigen sich die Vorteile dieser Methode, wenn es sich darum handelt, einen Kubus, etwa jenen einer irrationalen Zahl nur bis zu einem bestimmten Grade der Genauigkeit abgekürzt zu entwickeln, wie dies an folgendem Beispiel erörtert werden soll.

Es sei der Kubus der irrationalen Zahl $\pi = 3{\cdot}1415926\ldots$ etwa bis zur 5. Decimalstelle genau zu entwickeln.

Man wird hier wie bei jeder abgekürzten Rechnung der Genauigkeit wegen um eine Decimale mehr als unmittelbar verlangt wird, rechnen; in diesem Falle somit das Resultat der Rechnung in 6 Decimalen entwickeln.

Man wird nach dem oben beschriebenen Verfahren die Rechnung zunächst so weit führen bis man in der Hauptcolumne bei der 6. Decimalstelle angelangt ist; wobei man jedoch die Rechnung mit der zuletzt in Anspruch genommenen Ziffer der Wurzel ganz zu Ende führt, d. h. auch ihr Quadrat zu den zwei letzten Posten der Mittelcolumne addirt und das 3fache des bereits berücksichtigten Teiles der Wurzel bildet. Sonach haben wir:

$$\pi^3 = (3{\cdot}1415926535\ldots)^3 = ?$$

27·......	27·	9·1
2·791	0·91	
1·168144	27·91	9·34
	1	
	28·83	9·42
	0·3736	
	29·2036	
	16	
	29·5788	

Von nun an wird die Abkürzung eingeleitet. Dabei ist stets darauf zu achten, dass sich die Genauigkeit der Rechnungsresultate in der zweiten Columne nach jener des Resultates in der Hauptcolumne, und die Genauigkeit in der letzten Columne (bei welcher stets die Rechnung beginnt) nach jener der Resultate in der Mittelcolumne richten muss. Die Genauigkeit des Resultates in der Hauptcolumne bleibt während der ganzen Rechnung stets unverändert, so erstreckt sich dieselbe in unserem Falle stets bis zur 6. Decimale; aber die Genauigkeiten in den beiden anderen Columnen ändern sich stets beim Uebergange von einer Ziffer der Wurzel auf die unmittelbar folgende.

In dem vorliegenden Falle kommen wir nun zur dritten Decimale der Wurzel, d. i. zu 0·001. Da die 3. Decimale, das sind die Tausendtel wieder mit Tausendtel multiplicirt werden müssen, um die 6. Decimale zu liefern, so folgt, dass wir bei der Rechnung mit 0·001 in der Mittelcolumne nur die dritte, der Correctur wegen die 4. Decimale und demzufolge in der letzten Columne nur die erste, der Correctur wegen die 2. Decimale benötigen, weshalb wir in der 3. Columne 0·001 nicht weiter einzuzählen haben. Sonach stellt sich die Rechnung folgendermassen dar:

27·......	27·	9·1
2·791	0·91	
1·168144	27·91	9·34
29588	1	
	28·83	9·42
	0·3736	
	29·2036	
	16	
	29·5788	
	94	
	29·5882	

Zum Zwecke der weiteren Rechnung wäre nun das Quadrat von 0·001 zu den beiden letzten Posten der Mittelcolumne hinzuzufügen; allein dies Quadrat hat nur einen Einfluss hier auf die 6. Decimale und im Allgemeinen höchstens auf die 5. Decimale der Mittelcolumne, von welcher aber schon jetzt nur die vier ersten Decimalen in Anspruch genommen wurden, woraus folgt, dass zur weiteren Rechnung nicht einmal diese Genauigkeit erforderlich sein wird; wir daher in der Mittelcolumne nur die 2 letzten Posten zu addiren haben. (Den dritten hier entfallenden Posten wollen wir hier durch einen Punkt markiren.) Auch die Bildung des 3fachen des bereits in Anspruch genommenen Teiles der Wurzel ist nicht weiter notwendig, da nur noch die höchsten Ziffern dieser Columne benötigt werden und diese unverändert bleiben.

Wir gehen nun zur nächsten Ziffer der Wurzel, d. i. 0·0005 über. Diese Ziffer erheischt als 4. Decimale mit gehöriger Rücksicht auf die Correctur in der Mittelcolumne eine Genauigkeit von 3 Decimalen, somit in der letzten Columne ebenfalls mit Rücksicht auf die Correctur nur eine Genauigkeit, welche bis zu den Einsern reicht. Wir erhalten:

27·......	27·	9·1
2·791	0·91	
1·168144	27·91	9·34
29588	1	
14801	28·83	9·42
	0·3736	
	29·2036	
	16	
	29·5788	
	94	
	29·5882	
	·	
	29·597	
	5	
	29·602	

Da das Quadrat von 0·0005 keinen Einfluss mehr auf die noch in Anwendung kommenden Ziffern der Mittelcolumne besitzt, haben wir wieder nur die beiden letzten Posten der Mittelcolumne zu addiren; natürlich entfällt auch die Neubildung der 3. Columne. Die jetzt in Rechnung kommende Ziffer der Wurzel 0·00009 erfordert in der Mittelcolumne nur mehr eine Genauigkeit von 2 Decimalen, in der letzten Columne eine, welche bis zu den Hunderten reicht. Es hat somit diese Columne gar keinen Einfluss mehr auf die weitere Rechnung.

Schon an dieser Stelle zeigt sich, dass sich nur noch die zur Correctur nötige Ziffer der Mittelcolumne ändert, die andern Ziffern aber unverändert bleiben; dies wird um so mehr der Fall sein bei Anwendung der weiteren Decimalen der Wurzel; das Kubiren wird somit in eine abgekürzte Multiplication übergehen.

Die ganze Rechnung stellt sich demnach folgendermassen:

$$(3{\cdot}1415926535\ldots)^3 = ?$$

27·......	27·	9·1
2·791	0·91	
1·168144	27·91	9·34
29588	1	
14801		
2665	28·83	9·42
59	0·3736	
17	29·2036	
1	16	
31·006275	29·5788	
	94	
	29·5882	
	·	
	29·597	
	5	
	29·602	
	·	
	29·61	

So recht auffällig wird der Vorteil auf diese Art zu rechnen beim Kubiren eines periodischen Decimalbruches, wobei auf sehr einfache und kurze Weise eine Genauigkeit erzielt werden kann, die weit alle praktischen Bedürfnisse übersteigt.

So sei z. B. der Kubus von $0{\cdot}75\dot{3}6\dot{7}\ldots$, wobei 367 die Periode ist, bis auf 9 Decimalen, der Genauigkeit wegen also auf 10 Decimalen zu entwickeln.

Da 0·753 im Kubus 9, 0·7536 aber schon 12 Decimalen gibt, so entwickle man zunächst den Kubus von 0·753 ohne alle Abkürzung und führe auch die Rechnung mit 0·003 ganz zu Ende. Also:

0·343......	1·47	2·15
78875	0·1075	
5082777	1·5775	
	25	2·253
	1·6875	
	6759	
	1·694259	2·259
	9	
	1·701027	

Nun kommt die 4. Decimale der Wurzel, d. i. 0·0006 in Rechnung. Da die 4. Decimale, das sind die Zehntausendtel, mit der 6., das sind die Milliontel, multiplicirt werden müssen, um die 10. Decimale zu liefern, so wird sich die Genauigkeit in der Mittelcolumne auf 6 und der Correctur wegen auf 7 Decimalen erstrecken, somit in der 3. Columne auf 3, der Correctur wegen auf 4. Man wird daher 0·0006 noch in der letzten Columne einzählen, aber bei der weiteren Rechnung nur als Correcturziffer benützen.

Von da an wird nun in derselben Weise, wie dies am vorigen Beispiele gezeigt wurde, abgekürzt weiter gerechnet, wobei natürlich die Periodenziffern der Wurzel so weit fortgesetzt werden, als durch ihre Multiplication mit der Mittelcolumne sich noch ein Einfluss auf die Hauptcolumne ergibt. Im vorliegenden Falle hat die höchste Ziffer der Mittelcolumne den Stellenwert der Einser, mithin wird noch die 11. Decimale der Wurzel in Rechnung gezogen werden müssen, da diese noch den Einfluss der Correctur auf die 10. Decimale der Hauptcolumne hat.

Wir erhalten:

$$(0{\cdot}75\dot{3}67\dot{3}673673\,..)^3 = ?$$

0·343.......	1·47	2·15
78875	0·1075	
5082777	1·5775	
10213697	25	
1192728	1·6875.	2·253
51122	6759	
10224	1·694259	
1193	9	
51	1.701027	2·2596
10	13558	
1	1·7023828	
0·4281046796	4	2·2608
	1·703739	
	158	
	1·703897	
	.	
	1·70406	
	1	
	1·70407	

Hat man einen unvollständigen Decimalbruch zu kubiren, so ergibt sich die Genauigkeit, mit welcher der Kubus berechnet werden kann, ohne weitere theoretische Untersuchungen von selbst.

Es sei der Kubus von 81·536237 .... zu entwickeln. Wir bilden wie gewöhnlich a^3, $3a^2$ und $3a$ d. i.

512 ... 192 .. 24

und bestimmen nun den Grad der Genauigkeit des Kubus. Die letzte bekannte Ziffer der Wurzel darf, wie auch bei der abgekürzten Multiplication auf das Endresultat nur den Einfluss der Correctur haben, somit wird die vorletzte Ziffer der Wurzel d. i. 0·00003 multiplicirt mit der höchsten Ziffer der Mittelcolumne, deren Stellenwert sich nicht mehr ändert, die Genauigkeit des Resultates in der Hauptcolumne bestimmen. Im vorliegenden Falle hat die höchste Ziffer der Mittelcolumne den Stellenwert der Zehntausender. Zehntausender multiplicirt mit Hunderttausendteln geben Zehntel; wir können daher den Kubus nur mit einer bis zu den Zehnteln reichenden Genauigkeit entwickeln. Der übrige Gang der Rechnung bleibt derselbe wie in den früheren Beispielen. Also:

$$(81·536237\ldots)^3 = ?$$

512...	192..	241
19441	241	
9902·4	19441	
598·0	1	243·5
119·6	19683	
4·0	121·8	
0·6	19804·8	244·5
0·1	3	
542065·7	19927	
	7	
	19934	
	.	
	1994	

Dass diese Art des Kubirens wirklich die eingangs erwähnten Vorzüge besitzt, wird wohl niemand bezweifeln, wohl aber werden manche, die vielleicht auch zugeben, dass die Methode an und für sich dem Schüler nicht mehr Schwierigkeiten bietet als die gewöhnliche, dies für das abgekürzte Verfahren bestreiten. Allerdings scheint es, dass das Bestimmen der jedesmaligen Genauigkeit dem Schüler viele Schwierigkeiten bereitet und dadurch viel Zeit vergeudet wird. Das wird auch wirklich der Fall sein bei Schülern, die das abgekürzte Multipliciren und Dividiren nur schablonenmässig gelernt haben, bei Schülern, die nie im Bestimmen des Stellenwertes geübt worden sind. Diese Bestimmung des Stellenwertes eines Productes oder eines Quotienten erst jetzt einüben zu wollen, wäre freilich zu spät und nicht am Platze, auf diese nimmt aber ein rationeller Unterricht gleich beim Beginn des Rechnens mit Decimalen die gehörige Rücksicht.

Will sich aber jemand absolut nicht dazu verstehen, Regeln so viel als möglich zu vermeiden, so kann er ja auch dieses Verfahren in Regeln kleiden, die sich wol auch nicht complicirt gestalten würden. Etwa auf folgende Weise:

Man rechne auf gewöhnliche Weise bis die Hauptcolumne die verlangte Genauigkeit hat, bestimme die für die nächste Ziffer der Wurzel erforderliche Genauigkeit der zweiten und letzten Columne und streiche bei Inanspruchnahme einer neuen Ziffer der Wurzel in der Mittelcolumne eine, in der letzten Columne zwei Stellen ab und benütze die abgestrichene Ziffer zur Correctur.

Hält aber vielleicht der eine oder der andere die Methode an und für sich für zu schwierig, so kann er die Schüler schon beim Quadriren darauf vorbereiten und sie an die Schreibweise in Columnen gewöhnen. Andeutungsweise wäre dabei folgendermassen zu verfahren:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = a^2+(2a+b)b$$

Z. B. 1) $(69)^2 = ?$

I.

$a = 60$	$a^2 = 36..$	$2a+b = 129$
$b = \;\;9$	$(2a+b)b = 1161$	
	$(a+b)^2 = 4761$	

2) $(347)^2 = ?$

9..	64
256..	687
4809	
120409	

3) $(0{\cdot}274836)^2 = ?$ (5 D. genau)

0·04....	0·47
329	0·544
2176	0·5498
439	
16	
3	
0·075534	

Wer bis dahin diese Methode des Kubirens aufmerksam verfolgt hat, wird wol zugeben, dass sich dieselbe für das Ausziehen der Kubikwurzel vorzüglich eignet.

Wir wollen dies an einigen Beispielen zeigen.

1) Es sei die Kubikwurzel von 247673152 zu bestimmen.

Man verfahre ganz so wie bei der gewöhnlich üblichen Methode bis die zweite Ziffer der Wurzel bestimmt ist. Sobald diese gefunden, hätte man die drei Glieder $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 zu bilden und deren Summe vom Radicanden abzuziehen. Nach Horner geschieht nun die Bildung dieser Summe genau so wie beim Kubiren in fortlaufendem Zuge, nicht indem man wie sonst jedes Glied einzeln berechnet. Man schreibt wieder das 3fache Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel in eine, das Dreifache derselben Ziffer in eine zweite Columne, addirt zu letzterem die zweite gefundene Ziffer der Wurzel, multiplicirt die Summe mit dieser Ziffer, schreibt das Product gleich unter das 3fache Quadrat, addirt und multiplicirt abermals die Summe mit der zweiten Wurzelziffer. Das Product repräsentirt, wie schon vom Kubiren her bekannt, die Summe der 3 zu bildenden Glieder; man zieht es vom Radicanden ab und setzt zum Reste die nächste Classe. Mithin erhalten wir:

$\sqrt[3]{247\vert 673\vert 152} = 62$		
216	108..	182
31 673	364	
9 345	11164	

Um die nächste Ziffer der Wurzel zu finden, hat man wie bekannt, die erhaltene Restzahl durch das 3fache Quadrat des bereits gefundenen Teiles der Wurzel zu dividiren. Die Bildung dieses 3-fachen Quadrates gestaltet sich bei dieser Methode, wie schon beim Kubiren erörtert wurde, sehr einfach, man hat nämlich nur das Quadrat der zuletzt gefundenen Ziffer der Wurzel zu den beiden letzten Posten der Mittelcolumne zu addiren.

Nun könnte man die Division ausführen. Es ist jedoch angezeigt früher noch das Dreifache des gefundenen Teiles der Wurzel zu bilden, was in die letzte Columne zu schreiben ist, damit die Rechnung mit der zuletzt gefundenen Ziffer vollständig beendet sei und man sofort nach Auffindung der nächsten Ziffer zur Rechnung mit derselben schreiten kann. Dann dividire man und verfahre mit dem Quotienten, das ist mit der nächsten Ziffer der Wurzel genau in der angegebenen Weise. Somit erhalten wir:

$\sqrt[3]{247|673|152} = 628$
216
31 673
9 345 152
0

108
364
11164
4
11532
14944
1168144

182
1868

2) So ergibt sich die $\sqrt[3]{0{\cdot}048507321013}$ nach dem eben beschriebenen Verfahren in folgender Weise:

$\sqrt[3]{0{\cdot}048|507|321|013} = 0{\cdot}3647$
27
21 507
1 851 321
278 777 023
0

0·27
576
0·3276
36
0·3888
4336
0·393136
16
0·397488
76489
0·39825289

0·96
1·084
1·0927

Da bekanntlich das Ausziehen der Kubikwurzel gerade so wie das der Quadratwurzel als Division aufgefasst werden kann, bei welcher sich aber der Divisor bei jeder neuen Ziffer der Wurzel ändert, so kann man, falls die Kubikwurzel nur in einer bestimmten Genauigkeit zu berechnen ist, ebenso das abgekürzte Verfahren in Anwendung bringen wie bei der Division, wenn man nur die Aenderungen des Divisors gehörig berücksichtigt.

1. Es sei z. B. $\sqrt[3]{382{\cdot}156885}$ in 5 Decimalen zu entwickeln. Der Genauigkeit wegen wird man natürlich 6 Decimalen rechnen.

Zunächst handelt es sich wie bei jeder abgekürzten Division um Bestimmung des abgekürzten Dividends. Die Genauigkeit des Dividends ist abhändig von dem Stellenwert der höchsten Ziffer des Divisors d. i. des dreifachen Quadrates der ersten Ziffer der Wurzel. Die erste Ziffer der Wurzel ist hier 7 und hat den Stellenwert der Einser, das dreifache Quadrat davon ist 147; die höchste Ziffer des Divisors hat somit den Stellenwert der Hunderter. Dieser Stellenwert ändert sich während der Rechnung nicht mehr. Um nun bei der Division durch Hunderter im Quotienten zur 6. Decimale zu gelangen, muss der Dividend 4 Decimalen erhalten. Wir werden somit vom Radicanden nur 4 Decimalen in Rechnung zu ziehen haben und machen daher um jeder Irrung vorzubeugen nach der 4. Decimalstelle einen Verticalstrich, den sogenannten „Sicherheitsstrich“. Nun rechnen wir auf gewöhnliche Weise bis wir die 4. Decimale heruntergesetzt haben.

$\sqrt[3]{382\cdot1568\vert85} = 7\cdot2$	147	21·2
343	4·24	
39·156	151·24	
8·9089	4	21·6
	155·52	

Nachdem man mit 0·2 die Rechnung beendet, d. h. auch ihr Quadrat zu den beiden letzten Posten der Mittelcolumne addirt und die dritte Columne neu gebildet, beginnt das abgekürzte Verfahren. Gerade so wie beim Kubiren ändert sich die Genauigkeit in der mittleren und letzten Columne bei jeder neuen Ziffer der Wurzel, die der Hauptcolumne bleibt ungeändert.

Die 3. Ziffer der Wurzel ergibt sich wieder durch Division; der neue Divisor ist bereits gebildet; man erhält 0·05. Da die Genauigkeit der Hauptcolumne nur bis zur 4. Decimale reicht, wird die der Mittelcolumne sich auf 2, der Correctur wegen jedoch auf 3 Decimalen erstrecken müssen und die der letzten Columne nur auf 1, der Correctur wegen aber auf 2. Man wird also 0·05 noch in der letzten Columne addiren, diese Ziffer aber nur als Correcturziffer benutzen.

Um die Rechnung mit 0·05 zu Ende zu führen, hätten wir noch das Quadrat davon zu den beiden letzten Posten der Mittelcolumne zu addiren; dieses hat aber nur Einfluss auf die 3. und 4. Decimale; in der Mittelcolumne war jedoch jetzt schon nur eine Genauigkeit bis zur 3. Decimale erforderlich, die im folgenden noch geringer sein wird; daher dieses Quadrat nicht mehr zu bilden ist*); auch die letzte Columne wird nicht neu zu rechnen sein, da nur die höchsten Stellen derselben noch in Rechnung kommen, diese aber unveränderlich bleiben.

Die Rechnung gestaltet sich daher wie folgt:

*) Wie schon beim Kubiren ist es auch hier ratsam, behufs einer Nachcontrolle der Rechnung an Stelle des hier entfallenden Quadrates einen Punkt zu setzen.

$\sqrt[3]{382{\cdot}1568\vert 85} = 7{\cdot}25$	147	21·2
343	4·24	
39·156	151·24	
8·9089	4	21·65
1·0787	155·52	
	1·083	
	156·603	
	.	
	157·69	

Als nächste Ziffer der Wurzel ergibt sich 1·0787 : 157·69 = 0·006. Da Tausendtel mit Zehntel multiplicirt Zehntausendtel, d. i. die Genauigkeit der Hauptcolumne geben, so wird in der Mittelcolumne die Genauigkeit nur auf 1, der Correctur wegen auf 2 Decimale reichen und in der dritten Columne somit bis zu den Einsern, die jedoch nur zur Correctur zu benutzen sind. Natürlich wird auch hier die Bildung des Quadrates dieser Ziffer 0·006, sowie auch die Neubildung der letzten Columne entfallen. Wir erhalten:

$\sqrt[3]{382{\cdot}1568\vert 85} = 7{\cdot}256$	147	21·2
343	4·24	
39·156	151·24	
8·9089	4	21·65
1·0787	155·52	
0·1318	1·083	
	156·603	
	.	
	157·69	
	0·13	
	157·82	
	.	
	158·0	

0·1318 : 158·0 gibt als 4. Decimale der Wurzel 0·0008. Wie leicht einzusehen ist jetzt in der Mittelcolumne nur eine Genauigkeit bis zur 1. Decimale (schon mit Berücksichtigung der Correctur) erforderlich, während die letzte Columne ohne Einfluss bleibt. Die noch in Rechnung kommenden Stellen der Mittelcolumne bleiben unverändert, die ganze Rechnung geht in eine abgekürzte Division über:

$\sqrt[3]{382{\cdot}1568|85} = 7{\cdot}256834$

343	147	21·2
39·156	4·24	
8·9089	151·24	
1·0787	4	21·65
0·1318	155·52	
54	1·083	
7	156·603	
1	157·69	
	0·13	
	157·82	
	158·0	

2. $\sqrt[3]{0{\cdot}002857} = ?$ (in 5 Dec. genau).

$\sqrt[3]{0{\cdot}002|857} = 0{\cdot}1\ldots..$

Die höchste Ziffer der Wurzel ist 0·1, das dreifache Quadrat davon 0·03; der Stellenwert der höchsten Ziffer des Divisors ist also der der Hundertel. Um aber bei der Division durch Hundertel die 6. Decimale zu erhalten, muss die 8. Decimale dividirt werden, somit benötigen wir im Radicanden 8 Decimalen; da nur 6 gegeben sind, werden wir die fehlenden Stellen durch 2 Nullen ersetzen und nach diesen den „Sicherheitsstrich“ machen. Die Rechnung wird nun so lange unabgekürzt fortgesetzt bis auch die Nullen herabkommen und erst von da an wird die Abkürzung eingeleitet. Also:

$\sqrt[3]{0{\cdot}00285700|} = 0{\cdot}141265 = 0{\cdot}14127$

1857	0·03	0·3
11300	136	
2378	436	
584	16	
45	888	0·421
0	421	
	89221	
	1	0·423
	8964	
	8	
	8972	
	898	

In derselben Weise wird man vorgehen, um aus einem periodischen Decimalbruche die Kubikwurzel zu ziehen. Selbstverständlich wird man dabei die Periode so weit fortsetzen, als es die Genauigkeit erfordert.

Z. B. $\sqrt[3]{0{\cdot}81\dot{5}3\dot{6}}$ ist auf 6 Decimalen genau anzugeben.

$$\sqrt[3]{0{\cdot}81\dot{5}|3\dot{6}} = 0{\cdot}9\ldots\ldots$$

Die erste Ziffer der Wurzel ist 0·9, ihr dreifaches Quadrat 2·43; der Stellenwert der höchsten Ziffer des Divisors ist der der Einser, folglich muss der abgekürzte Dividend 7 Decimalen enthalten. Man setzt also die Periode bis zur 7. Decimale fort und rechnet wie im vorigen Beispiele.

$$\sqrt[3]{0{\cdot}815|365|4|6} = 0{\cdot}934223\underline{4} = 0{\cdot}934223$$

0·729		
86 365	2·43	2·73
11 008 4	819	
584 9	2·5119	
61 4	9	2·79$\underline{4}$
9 0	2·5947	
1 1	1118	
1	2·60588	2·$\underline{8}$02
	$\bar{2}$	
	2·6171	
	6	
	2·6177	
	$\bar{.}$	
	2·618	

Hat man aus einem unvollständigen Decimalbruche die Kubikwurzel zu ziehen, so bestimmt sich die Genauigkeit, mit welcher die Wurzel gefunden werden kann, von selbst.

Es sei $\sqrt[3]{31{\cdot}006275\ldots}$ zu bestimmen.

$$\sqrt[3]{31{\cdot}006275} = 3{\cdot}\ldots\ldots$$

Die höchste Ziffer der Wurzel ist 3, ihr dreifaches Quadrat 27; der Stellenwert der höchsten Ziffer des Divisors der der Zehner. Die letzte Stelle des Radicanden hat den Stellenwert der Milliontel. Milliontel dividirt durch Zehner gibt Zehnmilliontel; wir erhalten somit die Wurzel in 7 Decimalen, wovon jedoch die 7. Decimale nicht mehr ganz verlässlich ist. Uebrigens ist diese ganze Ueberlegung nicht notwendig. Man rechne einfach unabgekürzt bis die letzte nicht mehr vollständige Classe des Radicanden herabgesetzt ist und leite von da an das abgekürzte Verfahren ein.

$$\sqrt[3]{31\cdot006275\ldots} = 3\cdot1415926 = 3\cdot141593$$

4·006		
1·215275	27·	9·1
47131	0·91	
17543	27·91	
2741	1	9·34
76	28·83	
17	0·3736	
0	29·2036	9·42
	16	
	29·5788	
	94	
	29·5882	
	.	
	29·598	
	5	
	29·603	
	.	
	29·61	

Diese Beispiele dürften wohl zur Bekräftigung der am Eingange dieses Aufsatzes aufgestellten Behauptung über die Vorzüge der Horner'schen Kubirungs- und Kubikwurzelausziehungsmethode genügen, und der Verfasser schmeichelt sich mit der Hoffnung, dass der geneigte aufmerksame Leser dieser Zeilen seine diesbezügliche Ansicht teilen und zur allmäligen Einbürgerung und allgemeineren Verbreitung der in Rede stehenden Methode nach Tunlichkeit das Seine beitragen wird.

XIX.

Ueber Integrale einiger Differentialgleichungen.

Von

Norbert Herz.

Im zweiten Bande seiner Integralrechnung behandelt Euler die seither vielfach betrachtete Differentialgleichung

$$X = Ax + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

deren Integral

$$y = e^{\alpha_n x}\int e^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)x}\,dx\int e^{(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})x}\,dx \ldots \int e^{(\alpha_1-\alpha_2)x}\,dx\int e^{-\alpha_1 x}X\,dx$$

ist [deutsche Uebersetzung von Salomon pag. 339.], wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Lösungen der algebraischen Gleichung

$$P_n = A + Bz + Cz^2 + \ldots + Nz^n = 0$$

sind. Dieses Integral bleibt auch giltig, wenn einige der Wurzeln einander gleich werden; sind jedoch sämmtliche Wurzeln von einander verschieden, so ergiebt sich das Integral einfacher in der Form

$$y = \sum_1^n{}_\varrho \frac{\partial P_n}{\partial \alpha_\varrho} e^{\alpha_\varrho x}\int e^{-\alpha_\varrho x} X\,dx$$

Sind nun die Coefficienten derart beschaffen, dass man die unend- Reihe

$$P = A + Bz + Cz^2 + \ldots \text{ in inf.} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen und die Nullpunkte dieses Ausdruckes angeben kann, so wird man auch das Integral der Differentialgleichung

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ in inf.} \quad \ldots\ldots (2)$$

erhalten können. Wenn nun die an Stelle der Reihe P gesetzte Function unendlich viele Nullpunkte hat, was immer dann eintreten wird, wenn dieselbe eine transcendente Function ist, so wird man in einem gewissen Sinne (wenn man nämlich die Benennung von den Differentialgleichungen einer beliebig hohen aber endlichen Ordnung auf die betrachteten unendlich hoher Ordnung überträgt) dadurch ein allgemeines Integral der Gleichung (2) erhalten.

Für die Differentialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$

ergiebt sich die algebraische Gleichung

$$P = \frac{1}{1-z} = 0$$

für die man nur die Wurzel $z = \infty$ erhält; daher verliert das von Euler für die endliche Differentialgleichung gefundene Integral in diesem Falle seine Bedeutung.

Für die Gleichung

$$X = y - \frac{1}{2!}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3!}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{4!}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

wird

$$P = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}).$$

Die Nullpunkte sind die Lösungen der Gleichung

$$e^x = 1$$

mit Ausnahme von $x = 0$; also

$$x = \pm 2k\pi i$$

Demnach ist jedes particuläre Integral in der Form enthalten

$$e^{2k\pi ix}\int Xe^{-2k\pi ix}dx + e^{-2k\pi ix}\int Xe^{2k\pi ix}\,dx$$

wo nunmehr k alle **positiven** ganzen Zahlen, die 0 ausgeschlossen, zu durchlaufen hat. Führt man für die Exponentialgrösse die trigonometrischen Functionen ein, so erhält man das von Euler auf anderem Wege gefundene Integral

$$y = \sum_1^{\infty}{}_r\left[\cos 2k\pi x \int X \sin 2k\pi x\, dx + \sin 2k\pi x \int X \cos 2k\pi x\, dx\right]$$

Die Differentialgleichug

$$X = y - \frac{1}{2!\,b^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4!\,b^4}\frac{d^4y}{dx^4} - \ldots$$

ergiebt, wie sofort zu sehen

$$P = \cos\frac{z}{b}$$

deren Nullpunkte in $z = \pm\frac{2k+1}{2}\pi b$ liegen, so dass das Integral dieser Differentialgleichung

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k e^{\frac{2k+1}{2}\pi b x}\int X e^{-\frac{2k+1}{2}\pi b x}\, dx$$

wird. Dasselbe Integral gilt auch für die Gleichung

$$X = y + \frac{1}{2!\,b^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4!\,b^4}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$$

indem nur b mit bi zu vertauschen ist. Auch dieses Resultat wurde von Euler auf anderem Wege gefunden.

Aehnlich findet man als Integral der Differentialgleichung

$$X = \frac{1}{b}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3!\,b^3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{5!\,b^5}\frac{d^4y}{dx^4} - \ldots$$

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k e^{k\pi b x}\int e^{-k\pi b x} X\, dx$$

Für die Gleichung

$$X = y + \frac{1}{2!\,c^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4!\,c^4}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$

wird

$$P = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\sqrt{z}}{c}} + e^{-\frac{\sqrt{z}}{c}}\right)$$

deren Nullpunkte aus der Gleichung $e^{\frac{2\sqrt{z}}{c}} = -1$ folgen; sie sind

$$z = -(2k+1)^2 \frac{c^2\pi^2}{4}$$

also ist das Integral

$$y = \sum_0^\infty {}_k\, e^{-(2k+1)^2 \frac{\pi^2 c^2}{4} x} \int e^{(2k+1)^2 \frac{\pi^2 c^2}{4} x} X dx$$

Es wird nun sofort ersichtlich, welches die unendlichen Differentialgleichungen sind, deren Integrale angegeben werden können. Ist nämlich $\Phi(x)$ eine Function, deren Nullpunkte $x_1, x_2 \ldots x_n$ innerhalb des Convergenzbereiches der für $\Phi(x)$ bekannten Reihenentwickelung

$$P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

liegen, so wird die Differentialgleichung

$$X = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2y}{dx^2} + A_3 \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

das Integral

$$y = \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_k}\right) e^{\alpha_k x} \int e^{-\alpha_k x} X dx$$

haben. [Wird $X = 0$, so gehen alle Integrale in Constante über].

So folgt beispielsweise für die Gleichung

$$X = \frac{dy}{dx} + \frac{2}{3!} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{16}{5!} \frac{d^5y}{dx^5} + \frac{272}{7!} \frac{d^7y}{dx^7} + \ldots$$

deren Coefficienten die Bernoulli'schen Zahlen sind, das particuläre Integral

$$y = \int X dx$$

während die andern aus der oberen Formel folgenden ungiltig werden, weil die anderen Lösungen $x = \pm k\pi$ der Summe

$$P = \operatorname{tg} x$$

ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe fallen.

Desgleichen hat die Differentialgleichung

$$X = \frac{dy}{dx} + A_1 \frac{d^3y}{dx^3} + A_2 \frac{d^5y}{dx^5} + A_3 \frac{d^7y}{dx^7} + \ldots$$

wo

$$A_1 = -\frac{1+k^2}{3!}$$

$$A_2 = \frac{1+14k^2+k^4}{5!}$$

$$A_3 = \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}$$

und für

$$a_\varrho = \Sigma \frac{6}{\alpha!\beta!\gamma!(3-(\alpha+\beta+\gamma))!} A_m{}^\alpha A_n{}^\beta A_p{}^\gamma \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma \leqq 3 \\ \alpha m+\beta n+\gamma p = \varrho \end{array} \right.$$

$$A_\varrho = \frac{2k^2 a_{\varrho-2} - (1+k^2)A_{\varrho-1}}{2\varrho(2\varrho+1)}$$

das particuläre Integral

$$y = \int X dx$$

weil $P = \operatorname{sn} x$ und in den Convergenzbereich nur die Wurzel $x = 0$ fällt. Es ist bemerkenswert, dass das Integral von dem Werte von k unabhängig ist.

Eine ähnliche Behandlungsweise gestattet die Gleichung

$$(a_0+b_0x)y+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots = 0 \quad . \; . \; (3)$$

Integrirt man diese Gleichung nach der Laplace'schen Methode, und setzt

$$\left. \begin{array}{l} a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots = U_0 \\ b_0+b_1u+b_2u^2+\ldots = U_1 \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

so wird das Integral der Gleichung (3)

$$y = \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_\varrho C_\varrho \int_{u_0}^{u_\varrho} \frac{e^{ux+\int \frac{U_0}{U_1} du}}{U_1} du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

wenn die Grenzen u_0, u_1 u_2 ... Lösungen der Gleichung

$$e^{ux+\int \frac{U_0}{U_1} du} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6a)$$

sind. Man hat es also hier zunächst mit dem Ausdrucke

$$P = e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

zu tun. Lassen sich die Reihen U_0, U_1 summiren, und ist es möglich Nullpunkte dieser Function P anzugeben, so sind hiermit Integrale der Gleichung (3) bestimmt. Es müssen aber ebenfalls die Nullpunkte innerhalb des Convergenzbereiches beider Reihen fallen, weil ja nur für solche Punkte die Reihen mit den für sie gesetzten Functionen zusammenfallen.

Es sei die Differentialgleichung

$$0 = xy - a\frac{dy}{dx} - \frac{a^2}{2!}x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{a^4}{4!}x\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{a^5}{5!}\frac{d^5y}{dx^5} - \dots$$

zu integriren: es wird

$$U_0 = -\sin au$$
$$U_1 = \quad \cos au$$
$$P = e^{\frac{1}{a}\log\cos au} = \cos au^{\frac{1}{a}} = 0$$

also

$$u = \frac{2\varrho+1}{2}\,\frac{\pi}{a} \quad \text{für} \quad a > 0$$

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho \int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{2\varrho+1}{2}\frac{\pi}{a}} \frac{e^{ux+\frac{1}{a}\log\cos au}}{\cos au}\, du = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho \int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{2\varrho+1}{2}\frac{\pi}{a}} \frac{e^{ux}\, du}{\cos au^{\frac{a-1}{a}}}$$

welche Integrale stets einen Sinn haben, da $\frac{a-1}{a}$ für positive a immer kleiner als 1 ist. Wenn aber a negativ wäre, so würden diese Integrale keinen Sinn haben, weil sie für die Grenzen unendlich würden; dieser Fall ist also nicht weiter zu betrachten. Die einzelnen Integrale lassen sich in allen Fällen, wo der Exponent des Nenners eine ganze Zahl ist, in geschlossener Form darstellen; da aber, wenn

$$\frac{a-1}{a} = m$$

sein soll,

$$a = \frac{1}{1-m}$$

folgt, und $a > 0$ sein muss, so wird nur für $m = 0$, also $a = 1$ die Integration wirklich ausgeführt werden können, und dann ist das unbestimmte Integral $\frac{e^{ux}}{x}$; und wenn man nun von allen einzelnen Teilen die Werte, die sie für die unteren Grenzen annehmen, zusammenzieht:

$$y = \frac{1}{x}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho e^{\frac{2\varrho+1}{2}\pi x}$$

Man findet ebenso bei positivem a für die Gleichung

$$0 = y + ax\frac{dy}{dx} - \frac{a^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{a^3}{3!}x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{a^4}{4!}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{a^5}{5!}x\frac{d^5y}{dx^5} - \dots$$

$$U_0 = \cos au$$
$$U_1 = \sin au$$
$$P = \sin au^{\frac{1}{a}} = 0; \quad u = \varrho\frac{\pi}{a} \text{ für } a > 0$$

demnach

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho \int_0^{\frac{\varrho\pi}{a}} \frac{e^{ux}}{\sin au^{\frac{a-1}{a}}}\, du$$

also für $a = 1$

$$y = \frac{1}{x} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho\, e^{\varrho\pi x}$$

Die Gleichung

$$0 = (x \pm b)y - \frac{a^2}{2!}x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^4}{4!}x\frac{d^4y}{dx^4} - \ldots$$

hat das Integral

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho \int_{\mp\frac{\pi}{2a}}^{\frac{4\varrho\mp1}{2}\frac{\pi}{a}} \frac{e^{ux}}{\cos au} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{au}{2}\right)^{\frac{b}{a}} du$$

wo die oberen und unteren Zeichen zusammengehören.

Die Gleichungen

$$0 = \pm by + ax\frac{dy}{dx} - \frac{a^3}{3!}x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{a^5}{5!}x\frac{d^5y}{dx^5} - \ldots$$

haben die Integrale (je nach dem oberen oder unteren Zeichen):

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho \int_0^{2\varrho\frac{\pi}{a}} \frac{e^{ux} \operatorname{tg} \frac{1}{2}au^{\frac{b}{a}}\, du}{\sin au}$$

oder

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\varrho}\, C_\varrho \int_{\frac{\pi}{a}}^{(2\varrho+1)\frac{\pi}{a}} \frac{e^{ux}\, du}{\sin au \operatorname{tg}\frac{1}{2}au^{\frac{b}{a}}}$$

Bezeichnet man für das folgende der Kürze halber

$$a_2 = -\frac{k^2}{12} \qquad c_1 = -\frac{1}{2!}$$

$$a_3 = +\frac{k^2+k^4}{90} \qquad c_2 = +\frac{1+2k^2}{4!}$$

$$a_4 = -\frac{8k^2+17k^4+8k^6}{10080} \qquad c_3 = -\frac{1+6k^2+8k^4}{6!}$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$b_1 = -\frac{1+k^2}{3!} \qquad d_1 = -\frac{k^2}{2!}$$

$$b_2 = +\frac{1+4k^2+k^4}{5!} \qquad d_2 = +\frac{2k^2+k^4}{4!}$$

$$b_3 = -\frac{1+9k^2+9k^4+k^6}{7!} \qquad d_3 = -\frac{8k^2+6k^4+k^6}{6!}$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

so wird für die Differentialgleichung

$$0 = xy + \frac{dy}{dx} + b_1\frac{d^3y}{dx^3} + a_2 x\frac{d^4y}{dx^4} + b_2\frac{d^5y}{dx^5} + a_3 x\frac{d^6y}{dx^6} + b_3\frac{d^7y}{dx^7} + \ldots$$

$$U_0 = \mathrm{Al}(u)_1$$

$$U_1 = \mathrm{Al}(u)_0$$

$$\frac{U_0}{U_1} = \operatorname{sn} u;$$

dann wird

$$\int\frac{U_0}{U_1}du = \int\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)_0}du = \int\operatorname{sn} u\,du = \frac{1}{k}\log\frac{1+k\operatorname{sn}\frac{u^2}{2}}{1-k\operatorname{sn}\frac{u^2}{2}}$$

oder

$$= \frac{1}{k}\log[\operatorname{dn} u - k\operatorname{cn} u];$$

also

$$P = [\operatorname{dn} u - k\operatorname{cn} u]^{\frac{1}{k}}$$

Die Lösungen der Gleichung $P = 0$ müssen die Gleichung

$$\frac{\operatorname{dn} u}{k\operatorname{cn} u} = +1$$

erfüllen, gleichgiltig ob k positiv oder negativ ist*), wie man sich leicht überzeugt; sie sind, wenn λ, λ' ein Paar Elementarperioden der sn bezeichnen:

$$u = 2\sigma\lambda + (2\sigma'+1)\frac{\lambda'}{2}$$

demnach das Integral

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'} \int_{\frac{\lambda'}{2}}^{2\sigma\lambda+(2\sigma'+1)\frac{\lambda'}{2}} \frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_0} [\mathrm{dn}\, u - k\, \mathrm{cn}\, u]^{\frac{1}{k}} du$$

Hat man die Differentialgleichung

$$0 = (1+x)y + c_1 \frac{d^2y}{dx^2} + (c_2 + a_2 x)\frac{d^4y}{dx^4} + (c_3 + a_3 x)\frac{d^6y}{dx^6} + \ldots$$

so ist:

$$U_0 = \mathrm{Al}(u)_2; \quad U_1 = \mathrm{Al}(u)_0$$

$$\int \frac{U_0}{U_1} du = \int \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)_0} du = \int \mathrm{cn}\, u\, du = \log[\mathrm{dn}\, u - ik\, \mathrm{sn}\, u]^{\frac{i}{k}}$$

$$P = [\mathrm{dn}\, u - ik\, \mathrm{sn}\, u]^{\frac{i}{k}}$$

Ob nun k positiv oder negativ, so werden die Lösungen von $P = 0$ die Gleichung

$$-\frac{i\, \mathrm{dn}\, u}{k\, \mathrm{sn}\, u} = +1$$

erfüllen, also

$$u = \sigma\frac{\lambda}{2} + (2\sigma'+1)\frac{\lambda'}{2}$$

demnach das Integral

$$y = \Sigma_\sigma \Sigma_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'} \int_{\frac{\lambda'}{2}}^{\sigma\frac{\lambda}{2}+(2\sigma'+1)\frac{\lambda'}{2}} \frac{e^{ux}}{Al(u)_0} [\mathrm{dn}\, u - ik\, \mathrm{sn}\, u]^{\frac{i}{k}} du$$

Berücksichtigt man nun noch, dass

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)_0} du = \int \mathrm{dn}\, u\, du = i \log[\mathrm{cn}\, u - i\, \mathrm{sn}\, u]$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_0}{\mathrm{Al}(u)_1} du = \int \frac{du}{\mathrm{sn}\, u} = \frac{1}{k} \log \frac{\mathrm{dn}\, u - \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{sn}\, u}$$

---

*) Im letzteren Falle ist k der positiv genommene Betrag des Integralmoduls.

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_0}{\mathrm{Al}(u)_2}\,du = \int \frac{du}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{1}{k_1}\log\frac{\mathrm{dn}\,u + k_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_0}{\mathrm{Al}(u)_3}\,du = \int \frac{du}{\mathrm{dn}u} = \frac{i}{k_1}\log\frac{i\,\mathrm{cn}\,u + k_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)_2}\,du = \int \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\,du = \frac{1}{k_1}\log\frac{\mathrm{dn}\,u + k_1}{\mathrm{cn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)_1}\,du = \int \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\,du = \log\frac{1 - \mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)_3}\,du = \int \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\,du = \frac{i}{kk_1}\log\frac{ik\,\mathrm{cn}\,u + k_1}{\mathrm{dn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)_1}\,du = \int \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\,du = \log\frac{1 - \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u_2)}{\mathrm{Al}(u_3)}\,du = \int \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\,du = \frac{1}{k}\log\frac{1 + k\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

$$\int \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)_2}\,du = \int \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\,du = \log\frac{1 + \mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

ist, so erhält man noch folgende Differentialgleichungen mit ihren entsprechenden Integralen:

$$\begin{cases} 0 = (1+x)y + d_1\dfrac{d^2y}{dx^2} + (d_2 + a_2x)\dfrac{d^4y}{dx^4} + (d_3 + a_3x)\dfrac{d^6y}{dx^6} + \ldots \\[2ex] y = \Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'} \displaystyle\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\sigma\frac{\lambda}{2} + (4\sigma'-1)\frac{\lambda'}{2}} \frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_0}(\mathrm{cn}\,u - i\,\mathrm{sn}\,u)^i\,du \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y + x\dfrac{dy}{dx} + b_1x\dfrac{d^3y}{dx^3} + a_2\dfrac{d^4y}{dx^4} + b_2x\dfrac{d^5y}{dx^5} + a_3\dfrac{d^6y}{dx^6} + \ldots \\[2ex] y = \Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'} \displaystyle\int_0^{\sigma\lambda + \sigma'\lambda'} \frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_1}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u - \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right)^{\frac{1}{k}} du \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (1+x)y + c_1x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (a_2 + c_2x)\dfrac{d^4y}{dx^4} + (a_3 + c_3x)\dfrac{d^6y}{dx^6} + \ldots \\[2ex] y = \Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'} \displaystyle\int_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{4\sigma+1}{4}\lambda + \sigma'\lambda'} \frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_2}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u + k_1\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)^{\frac{1}{k_1}} du \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned} &0=(1+x)y+d_1x\frac{d^2y}{dx^2}+(a_2+d_2x)\frac{d^4y}{dx^4}+(a_3+d_3x)\frac{d^6y}{dx_6}+\;.\;.\;.\\ &y=\Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'}\int\limits_{\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda'}{2}}^{(2\sigma+1)\frac{\lambda}{4}+(4\sigma'-1)\frac{\lambda'}{2}}\frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_3}\left(\frac{k_1\,\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)^{\frac{i}{k_1}}du\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &0=xy+\frac{dy}{dx}+c_1x\frac{d^2y}{dx^2}+b_1\frac{d^3y}{dx^3}+c_2x\frac{d^4y}{dx^4}+b_2\frac{d^5y}{dx^5}+\;.\;.\;.\\ &y=\Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'}\int\limits_{\frac{\lambda}{4}+\lambda'}^{\frac{2\sigma+1}{4}\lambda+(2\sigma'+1)\lambda'}\frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_2}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u+k_1}{\mathrm{cn}\,u}\right)^{\frac{1}{k_1}}du\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &0=y+x\frac{dy}{dx}+c_1\frac{d^2y}{dx^2}+b_1x\frac{d^3y}{dx^3}+c_2\frac{d^4y}{dx^4}+b_2x\frac{d^5y}{dx^5}+\;.\;.\;.\\ &y=\Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'}\int\limits_{0}^{\sigma\frac{\lambda}{2}+2\sigma'\lambda'}\frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_1}\,\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\,du\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &0=xy+\frac{dy}{dx}+d_1x\frac{d^2y}{dx^2}+b_1\frac{d^3y}{dx^3}+d_2x\frac{d^4y}{dx^4}+b_2\frac{d^5y}{dx^5}+\;.\;.\;.\\ &y=\Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'}\int\limits_{\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda'}{2}}^{(2\sigma+1)\frac{\lambda}{4}+(2\sigma'-1)\frac{\lambda'}{2}}\frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_3}\left(\frac{ik\,\mathrm{cn}\,u+k_1}{\mathrm{dn}\,u}\right)^{\frac{i}{k\,k_1}}du\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &0=y+x\frac{dy}{dx}+d_1\frac{d^2y}{dx^2}+b_1x\frac{d^3y}{dx^3}+d_2\frac{d^4y}{dx^4}+b_2x\frac{d^5y}{dx^5}+\;.\;.\;.\\ &y=\Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'}\int\limits_{0}^{\sigma\frac{\lambda}{2}+\sigma'\lambda'}\frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_1}\,\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\,du\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &0=(1+x)y+(c_1+d_1x)\frac{d^2y}{dx^2}+(c_2+d_2x)\frac{d^4y}{dx^4}+\;.\;.\;.\\ &y=\Sigma_\sigma\,\Sigma_{\sigma'}\,C_{\sigma\sigma'}\int\limits_{\frac{3\lambda}{4}+\frac{\lambda'}{2}}^{(4\sigma-1)\frac{\lambda}{4}+(2\sigma'+1)\frac{\lambda'}{2}}\frac{e^{ux}}{\mathrm{Al}(u)_3}\left(\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)^{\frac{1}{k}}du\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} 0 = (1+x)y + (d_1 + c_1 x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (d_2 + c_2 x)\dfrac{d^4y}{dx^4} + \ldots \\[2ex] y = \Sigma_\sigma \, \Sigma_{\sigma'} \, C_{\sigma\sigma'} \displaystyle\int_{\frac{3\lambda}{4}}^{(4\sigma-1)\frac{\lambda}{4}+\sigma'\lambda'} \frac{e^{ux}}{Al(u)_2} \, \frac{1+\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \, du \end{cases}$$

Es erübrigt hier noch zu bemerken, dass die Lösungen

$$u = \tau\frac{\lambda}{2} + \frac{2\tau'+1}{2}\lambda'$$

für welche $\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \infty$ werden, keine Grenzen für das Integral geben, weil wol der Nenner unendlich wird, aber auch der Zähler und, wie man sich leicht überzeugt, der Wert von P für obige u ein endlicher von Null verschiedener ist.

Wien, im April 1881.

XX.

Miscellen.

1.

Ueber das vollständige Viereck.

Es sei *abcd* ein vollständiges Viereck und $O_1 O_2 O_3$ sein Diagonaldreieck; sucht man die Schnittpunktepaare 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 der Gegenseiten des Vierecks mit den Diagonaldreiecksseiten, so bilden diese — wie bekannt — die 6 Ecken eines vollständigen Vierseits; dessen Diagonaldreiseit identisch ist mit dem Diagonaldreiecke des vollständigen Vierecks *abcd.*

Nimmt man nun solche 4 dieser 6 Punkte, von denen nicht 3 auf einer Geraden liegen, so bilden diese wieder ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck so beschaffen ist, dass 2 seiner Ecken die andern 2 der genannten 6 Punkte, und dessen 3. Ecke jene Ecke des *abcd* gehörigen Diagonaldreiecks ist, welche der Diagonaldreiecksseite, auf welcher eben die ersten 2 Ecken liegen, gegenüberliegt. (Siehe die Figur).

Nachdem sich aber die 6 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 dreimal zu je 4 auf der genannten Weise combiniren lassen, so gibt es 3 solche Vierecke und zwar 1324, dessen Diagonaldreieck $56 O_3$ ist, 1265 mit dem Diagonaldreiecke $34 O_1$ und Viereck 4563, dessen Diagonaldreieck $12 O_2$ ist.

Betrachten wir nun eines dieser 3 Vierecke, etwa das Viereck 1234 und denken uns die Ecken desselben als Basispunkte eines Kegelschnittsbüschels, so bilden die Schnittpunktepaare der einzelnen Elemente desselben auf der Geraden *bd* eine Punktinvolution; es werden daher auch die Schnittpunktepaare der Gegenseiten des Vierecks 1324, welche als die deg. Kegelschnitte des Büschels aufzufassen sind, mit der Geraden *bd*, Punktepaare der Involution sein.

Nun geht aber die Gerade *bd* durch den Doppelpunkt O_3 des einen und durch den Doppelpunkt 5 eines 2. Geradenpaares, während das 3. Geradenpaar die Gerade *bd* in β und δ schneidet, daher O_3 und 5 die Doppelpunkte der genannten Involution sind. Da aber — wie aus den Sätzen über das vollständige Viereck bekannt ist — die Punkte *b*, *d* die Strecke $5O_3$ harmonisch teilen, so bilden auch *b*, *d* ein Punktepaar der Involution, daher durch die beiden Punkte *b*, *d* ein Kegelschnitt des Büschels 1324 gehen muss; d. h. die 6 Punkte 1, 2, 3, 4, *b*, *d* liegen auf einem Kegelschnitte. Ebenso geht durch *a*, *c*, 1, 3, 2, 4 ein Kegelschnitt. Was aber bezüglich des Vierecks 1324 gesagt wurde, gilt natürlich auch bzgl. der beiden andern Vierecke 1265 und 4563, und wir haben folgenden Satz:

„Wenn man in einem vollständigen Vierecke die Schnittpunktepaare der Gegenseiten mit den Diagonaldreiecksseiten sucht, so liegen jene 4 dieser Punkte, welche ein vollständiges Viereck bilden, mit 2 auf einer nicht durch einen der 4 Punkte gehenden Seite des vollständigen Vierecks gelegenen Eckpunkten auf einem Kegelschnitte".

Man erhält auf diese Weise 6 Kegelschnitte, von denen je zwei 4 Punkte und je drei 2 Punkte gemein haben.

Wir suchen nun bzgl. eines jeden der Vierecke 1324, 1562 und 4563 jene 3 Vierecke, welche sie bzgl. des gegebenen Vierecks *abcd* sind, so ist unter diesen je eines, welches das Dreieck $O_1O_2O_3$ zum Diagonaldreieck hat. So hat das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$, welches bzgl. 1324 dieselbe Rolle spielt, wie dieses bzgl. *abcd*, das Dreieck $O_1O_2O_3$ zum Diagonaldreiecke. Sucht man aber dann jenes Viereck 1'3'2'4', welches $\alpha\beta\gamma\delta$ gegenüber dieselbe Rolle spielt, wie dieses gegenüber dem Vierecke 1324, oder Letzteres dem Vierecke *abcd* gegenüber so hat dieses wieder das Dreieck $56O_3$ zum Diagonalgreiecke, während das auf ihn folgende $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ wieder $O_1\,O_2\,O_3$ zum Diagonaldreiecke hat. Wird dies so in der entsprechenden Weise fortgesetzt, so erhält man eine ganze Gruppe von Vierecken, welche dem gegebenen Vierecke *abcd* gegenüber folgende Rolle spielen: die Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, $\alpha''\beta''\gamma''\delta''$ ... haben das Diagonaldreieck des Urvierecks (wie wir das gegebene Viereck nennen wollen) als Diagonaldreieck gemein, während die Vierecke 1324, 1'3'2'4 ... das Dr eieck $56O$ als Diagonaldreieck gemein haben".

Auch kann in ganz analoger Weise wie oben bewiesen werden (es wurde bewiesen, dass $bd\,1324$ und $ac\,1324$ auf je einem Kegelschnitte liegen), dass $\beta\delta\,1'2'3'4'$ und $\alpha\gamma\,1'2'3'4'$ auf je einem Kegelschnitte liegen; ebenso liegen $\beta'\delta'1''2''3''4''$ und $\alpha'\gamma'1''2''3''4''$ auf je einem Kegelschnitte u. s. w., so dass man ein ganzes System von Kegelschnitten bekommt, welchen das Dreieck $56O_3$ als gem. sich selbst conjugirtes Dreieck entspricht. Genau in derselben Weise sieht man, dass $43\alpha\beta\gamma\delta$ und $12\alpha\beta\gamma\delta$ auf je einem Kegelschnitte liegen, wie auch $4'3'\alpha'\beta'\gamma'\delta$ und $1'2'\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ je einem Kegelschnitte angehören u. s. w. und dass alle diese Kegelschnitte dasselbe Dreieck $O_1\,O_2\,O_3$ als gem. sich selbst conjugirtes Dreieck besitzen, welches auch das gem. sich selbst conjugirte Dreieck bzgl. der Kegelschnitte des durch *abcd* bestimmten Büschels ist.

Nachdem aber eine jede durch eine der 3 Ecken des einem Systeme von Kegelschnitten gem. sich selbst conjugirten Dreiecks gehende Transversale die Kegelschnitte jenes Systems in Punktepaaren einer Involution schneidet, so wird auf jeder der durch O_3 gehenden Geraden und somit auch auf bd eine Involution entstehen, deren Elementenpaare bd, $\beta\delta$, $\beta'\delta'$ ... sind, und deren Doppelpunkte — wie bereits oben erwähnt wurde — O_3 und 5 sind. Ebenso entsteht auf der Geraden O_1O_3 eine Involution, deren Doppelelemente O_1 und O_3 und deren Elementenpaare 12, 1'2' ... sind. Ueberhaupt wird, nachdem die Ecke O_3 und die Seite O_1O_2 sowohl zum Dreieck $O_1O_2O_3$ als auch zu $56O_3$ (indem 5 und 6 auf O_1O_2 liegen) gehören, also O_1O_2 Polare des Punktes O_3 bezüglich aller Kegelschnitte der beiden genannten Systeme ist, jede durch O_3 gehende Transversale die Kegelschnitte beider Systeme (des Systemes, welches $O_1O_2O_3$ zum sich selbst conjugirten Dreiecke hat, und des Systemes, welches $56O_3$ zum Dreieck hat) in Punktepaaren einer Involution schneiden, deren Doppelpunkte der Punkt O_3 und der Schnittpunkt jener Transversale mit O_1O_2 sind. Ganz analog wird auch O_1O_3 Polare des Punktes O_2 bzgl. einer Gruppe von Kegelschnitten sein, die jede durch O_2 gehende Transversale in einer Punktinvolution schneiden, deren Doppelpunkte O_2 und der Schnittpunkt jener Transversale mit O_1O_3 sind. Dasselbe findet auch statt bzgl. des Punktes O_1 und der Geraden O_2O_3.

Wien, 21. Juli 1881.

Dr. Eduard Mahler.

2.

Ueber neuere Formen von höheren Reihen.

1.

Unter der Voraussetzung, dass aus der Reihe

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ldots a_r \ldots$$

auf die bekannte Art sich die Differenzen durch die Formen:

$$d^{r+1} a_{n-1} = d^r a_n - \partial^r a_{n-1} \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

und

$$\partial' a_{n-1} = a_n - a_{n-1} \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

wobei statt des Operationszeichens Δ, wie wir später sehen werden, der Einheit halber d als solches gewählt wird; ausdrücken — erhält man für das allgemeine Glied a_n der Reihe:

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1} \Delta^1 a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0 + \ldots \ldots \ldots (3)$$

Aus dieser mit ihren Eigenschaften als bekannt vorausgesetzten Reihenform erhält man für den Fall als die Ableitungsformen für die Differenzen durch die Formen:

$$\partial^1 a_{n-1} = a_{n-1} - a_n \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

und

$$d^{r+1} a_{n-1} = \partial^r a_{n-1} - \partial^r a_n \ldots \ldots \ldots (5)$$

gegeben sind, für das allgemeine Glied a^n folgende Gleichung:

$$a_n = a_0 - \binom{n}{1} \Delta^1 a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0 \ldots \ldots \ldots (6)$$

da man, wie sich durch Vergleichung der entwickelten Differenzen zeigen lässt, bloss zu berücksichtigen hat, dass die geraden Differenzen dasselbe, die ungeraden das entgegengesetzte Vorzeichen in Bezug auf die Differenzen der zuerst entwickelten Reihe haben werden.

Diese zweite Reihe könnte man in Bezug auf die erste Reihe (Grundreihe) also auch als Reihe mit conträr gebildeten Differenzen auffassen. (Conträre Reihe).

Geschieht die Weiterbildung der abgeleiteten Reihenformen statt wie bisher durch Differenzenbildung durch Summirung der gegebenen Reihenglieder, so hat man s als Operationszeichen gewählt zunächst für die Ableitungsformen:

$$s' a_{n-1} = a_n + a_{n-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

und

$$s^{r+1} = s^r a_{n-1} + s^r a_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

und hieraus für das allgemeine Glied der Reihe

$$a_n = s^n a_0 - \binom{n}{1} s^{n-1} a_0 + \binom{n}{2} s^{n-2} a_0 \ldots + (-1)^n a_0 \quad \ldots \ldots (9)$$

Diese Form wird durch successive Substitution gewonnen, wie dieser Weg als bekannt vorausgesetzt ebenso bei obiger Differenzreihe eingeschlagen wird; es lassen sich auch an dieser Reihe dieselben Aufgaben durchführen wie bei obigen Reihen.

2.

Bildet man jedoch aus der Reihe $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$ die folgenden Gliederreihen durch Division des nachfolgenden durch das vorhergehende Glied, so wären für das Bildungsgesetz folgende Gleichungen massgebend:

$$q' a_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

und

$$q^{r+1} a_{n-1} = \frac{q^r a_n}{q^r a_{n-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

wobei wieder q das Operationszeichen bedeutet.

Auf Grund dieser Gleichungen erhielte man durch successive Entwickelung:

$$a_n = a_0 (q^1 a_0)^{\binom{n}{1}} \cdot (q^2 a_0)^{\binom{n}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

oder hieraus

$$\log a_n = \log a_0 + \binom{n}{1} \log (q^1 a_0) + \binom{n}{2} \log (q^2 a_0) + \ldots (13)$$

Vergleicht man die Gleichung (13) mit der Gleichung (3), so ergiebt sich der Zusammenhang sehr leicht; man sieht, dass zur Auflösung „höherer geometrischer“ Reihen (diese Formen können so genannt werden) es nur nötig ist, dieselben mit Hülfe des logarithmischen Calculs auf höhere arithmetische zurückzuführen, wobei der Logarithmus des Anfangsgliedes und die Logarithmen der Quotienten der geometrischen Reihe das Anfangsglied und die Differenzen der arithmetischen Reihen vorstellen würden.

Eine Anwendung kann darin gefunden werden, dass man berechtigt wäre zu schliessen, dass eine Reihe höherer Art geometrischer Natur eine arithmetische Reihe ebensovielter Ordnung geben müsste·

Da z. B. die Logarithmen der natürlichen Zahlen ungefähr eine arithmetische Reihe bilden, so müssten die diesbezüglichen Zahlen eine geometrische Reihe ebensovielter Ordnung (d. i. 2ter Ordnung bilden; dies ist auch näherungsweise umso eher der Fall, je kleiner die Intervalle sind.

Aus den Formen (10) bis (13) ergeben sich für die höheren geometrischen Reihen mit conträr-gebildeten Quotienten zunächst zur Ableitung

$$q^1 a_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$q^{r+1} a_{n-1} = \frac{q^{r+1} a_{n-1}}{q^r a_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und hieraus wieder:

$$a_n = a_0 \,.\, \frac{(q^2 a_0)^{\binom{n}{2}} (q^4 a_0)^{\binom{n}{4}} \ldots}{(q^1 a_0)^{\binom{n}{1}} (q^3 a_0)^{\binom{n}{3}} \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

oder

$$\log a_n = \log a_0 - \binom{n}{1} \log (q^1 a_0) + \binom{n}{2} \log (q^2 a_0) - \ldots \quad (17)$$

Bilden wir die nächstfolgenden Glieder der Reihe statt durch Division durch die Multiplication, so erhalten wir, — p als Operationszeichen gewählt —: für die Bestimmungsglieder:

$$p^1 . a_{n-1} = a_n . a_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$p^{r+1} . a_{n-1} = p^r a_n . p^{\nu} a_{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

und hieraus

$$a_n = \frac{(p^n a_0)(p^{n-2} a_0)^{\binom{n}{2}} \ldots}{(p^{n-1} a_0)^{\binom{n}{1}} . (p^{n-3} a_0)^{\binom{n}{3}} \ldots} . a_0 (-1)^n \quad \ldots \quad (20)$$

$$\log a_n = \log (p^n a_0) - \binom{n}{1} \log (p^{n-1} a_0) + \ldots + (-1)^n \log a_0 \quad \ldots \quad (21)$$

Wie man sieht stehen die Reihen (17) und (20) mit den Reihen (6) und (9) in einem ähnlichen Zusammenhange, wie dies schon von den beiden Reihen (3) und (17) nachgewiesen wurde; ja dieser Zusammenhang erstreckt sich selbst auf die Reihen untereinander und auf die Bestimmungsglieder (10) (11) (14) (15) (18) (19) und (1) (2) (4) (5) (7) (8).

Man ersieht hieraus auch, dass die hier entwickelten, den vier Grundrechnungsoperationen entsprechenden Reihen mit einander ähnlich verknüpft sind, wie diese Operationen selbst; der logarithmische Calcul ist jene Operation, mit dessen Hilfe man diese Reihen in einander überzuführen im Stande ist. Mit diesen Reihen ist auch sozusagen eine Grundfamilie der Reihen dargestellt.

Wien, Mai 1881.

Franz Carl Lukas.

3.

Ueber einen geometrischen Ort.

Unsere Aufgabe ist den geometrischen Ort jener Punkte zu bestimmen, in welchen zwei durch A und B Punkte gehende und zur Ebene E gleichgeneigte Geraden sich schneiden.

Betrachten wir die von A und B auf E gefällten Senkrechten, deren Fusspunkte A' und B' sind, als die Axen zweier Rotationskegel, deren Seiten sich zur Ebene E unter gleichem Winkel neigen, so wird die gemeinschaftliche Linie dieser Kegel dem gewünschten geometrischen Orte angehören.

Bezeichnen wir die Entfernung $A'B'$ mit $2d$ die Differenz der Entfernungen der Punkte AB von der Ebene E mit $2c$ und betrachten wir die durch AB senkrecht zu E gelegte Ebene als XZ die durch den Halbirungspunkt O der Strecke AB parallel zu E gelegte Ebene als XY Coordinatenebene eines Systemes mit dem Ursprung O, so werden die Gleichungen der erwähnten zwei Kegel

$$(x+d)^2+y^2 = k^2(z+c)^2$$

$$(x-d)^2+y^2 = k^2(z-c)^2$$

sein, worin k den von dem Neigungswinkel der Seiten und Kegelaxe abhängigen Parameter bezeichnet. Eliminirt man aus diesen zwei Gleichungen k, so erhält man die Gleichung des gewünschten geometrischen Ortes:

$$y^2 . zc - (zd - xc)(xz - cd) = O.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

1. Die XZ Ebene schneidet die Fläche in der Geraden AB und in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die X und Z sind.

2. Die Fläche wird durch diese Ebene in zwei symmetrische Teile geteilt.

3. Jede zu E parallele Ebene schneidet die Fläche in einem Kreise; die orthogonalen Projectionen der AB Punkte auf diese Ebene sind conjugirte Punkte bezüglich des Kreises. Der Kreis geht über in eine Gerade, wenn die Ebene durch O geht.

Von der Gestalt dieser Fläche können wir uns eine klare Vorstellung machen, wenn wir in der XZ Ebene eine Hyperbel beschreiben, welche durch AB geht, XZ Axen zu Asymptoten hat, und einen Kreis mit veränderlichem Durchmesser so bewegen, dass seine Ebene zu E parallel liegt, die Endpunkte eines Durchmessers auf AB, resp. auf der Hyperbel bleiben.

4. Jede durch die Y Axe gehende und zu E unter φ Winkel geneigte Ebene schneidet die Fläche ausser der Y Axe nach Ellipse, Gerade oder Hyperbel, je nachdem $\operatorname{tg}\varphi \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \frac{c}{d}$. Die Axen dieser Curven liegen in Y und in der XZ Ebene und werden resp. gleich:

$$2\sqrt{\frac{d(c\cos\varphi - d\sin\varphi)}{\sin\varphi}}; \quad 2\frac{cd}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Die Asymptoten dieser hyperbolischen Schnitte bilden eine Kegelfläche, deren Gleichung: $x^2 + y^2 - xz\frac{d}{c} = 0$ ist. Die Kreisschnitte dieser Kegelfläche mit der zu E parallel gehenden Ebene werden durch die Z Axe und AB Gerade in den Endpunkten eines Durchmessers geschnitten.

Jede durch AB gelegte Ebene schneidet die Fläche nach einer Hyperbel.

Aus der Entstehung dor Fläche folgt ferner: Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers AB einer gleichseitigen Hyperbel mit einem beliebigen Punkte derselben, so neigen sich die Verbindungsgeraden unter gleichen Winkeln zu den Asymptoten.

Da man diese Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, wie auch den geometrischen Ort in jeder zu E parallelen Ebene elementar finden kann, so lässt sich die Aufgabe elementar behandeln.

Wir können ferner sagen:

Das Bild des A Punktes von B betrachtet, würde auf einem Planspiegel als Kreis erscheinen, wenn die Ebenen des Einfallswinkels und Reflexionswinkels nicht zusammenfallen möchten.

Pressburg, den 3. Sept. 1881. L. Klug.

4.

Ueber 3fach berührende Kegelschnitte mit vorgegebenem Brennpunkte.

Die Lösung der Aufgabe „einen Kegelschnitt zu construiren, der einen gegebenen festen Punkt B zum Brennpunkte hat und einen gegebenen Kegelschnitt K im Berührungspunkte A der gegebenen Tangente T möglichst innig berührt“ scheint mir ein hübsches Beispiel für eine allgemein giltige Methode zu liefern, eine Methode, welche dazu dient Sätze aus der Euklidischen Geometrie, welche sich bei ihren Constructionen schliesslich immer auf 2 gewisse feste Punkte stützt, zu übertragen in eine Geometrie, die man recht wohl „die Geometrie des einen Brennpunktes“ nennen könnte. Der bei dieser Uebertragung leitende Gedanke ist die Analogie, die offenbar besteht zwischen einem Kreise, als einem durch 2 feste Punkte gehenden Kegelschnitte, und einem einen fest gegebenen Punkt als Brennpunkt besitzenden Kegelschnitt, der seinerseits 2 feste imaginäre Gerade zu Tangenten hat *). Vor Allem ist bekannt, dass der Mittelpunkt eines eine Gerade an einer bestimmten Stelle berührenden Kreises auf der im Berührungspunkte der Geraden errichteten Senkrechten liegt: daher:

Die Directrix unseres gesuchten Kegelschnittes geht jedenfalls durch jenen Punkt, in welchem die im Brennpunkte B auf der Verbindungslinie AB errichtete Senkrechte die Tangente T schneidet.

Die aus der Theorie der Kegelschnitte bekannte Construction des 3fach berührenden Kreises fährt dann fort: — alle im vorgegebenen Punkte berührenden Kreise schneiden den Kegelschnitt so, dass die 2te gemeinschaftliche Secante von Kegelschnitt und Kreis durch einen festen Punkt der unendlich fernen Geraden geht —: — construirt man beliebig viele Kegelschnitte, welche den festen Punkt B zum Brennpunkte haben und K mit berühren, so liegt der Schnittpunk jenes Tangentenpaares, welches ein solcher Kegelschnitt ausser der doppelt zählenden T mit K gemein hat, auf einer festen durch B gehenden Geraden. Man braucht daher nur diese Gerade, zu deren Bestimmung ein einziger Hülfskegelschnitt genügt, zum Schnitt mit der vorgegebenen Tangente T zu bringen: die vom Schnittpunkte S aus an K mögliche 2te Tangente C muss vom gesuchten Kegelschnitt berührt werden.

---

*) Dasselbe Princip findet sich auf gänzlich verschiedenem Gedankengange abgeleitet in Salmon-Fiedler Kegelschnitte § 385.

Demnach ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, insofern als von dem gesuchten Kegelschnitt 4 Tangenten, darunter 2 imaginäre und ein Berührungspunkt gegeben sind.

Doch sei hier als weiteres Beispiel der betrachteten Methode die endliche Bestimmung der Directrix, sowie die Construction der umhüllenden Tangenten unseres Kegelschnittes wirklich durchgeführt.

Um den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, der eine gegebene Gerade A in T berührt, sowie durch C geht, errichtet man im Mittelpunkte von TC eine Senkrechte, welche die auf A in T errichtete Senkrechte im verlangten Centrum M schneidet. Um den Kreis punktweise zu erhalten, wird man $DM = CM$ machen, hierauf durch C beliebig viele Strahlen ziehen; die Fusspunkte der von D auf diese Strahlen gefällten Senkrechten geben Punkte des Kreises.

Demnach: Man suche jenen Strahl des Büschels S, welcher mit dem Punkte B die Strahlen T und C harmonisch trennt. Dieser Strahl wird irgendwo geschnitten von der in B auf SB errichteten Senkrechten; dieser zuletzt erhaltene Schnittpunkt ist ein 2ter Ort für die Directrix unseres Kegelschnittes, für welche oben schon ein erster Ort bestimmt wurde.

Man bestimmt nun jenen Strahl D, welcher mit der Tangente C die Directrix und den Brennpunkt harmonisch trennt; derselbe ist eine weitere Tangente unseres Kegelschnittes. Verbindet man dann immer paarweise 2 Punkte, welche — der eine auf C, der andre auf D liegend — von B aus unter rechtem Winkel erscheinen, so geben diese Verbindungslinien die einhüllenden Tangenten unseres gesuchten Kegelschnittes.

München, September 1881.

Fritz Hofmann.

5.

Uebungsaufgabe für Schüler.

In einem gegebenen Quadrate durch Zeichnung von 4 Geraden unmittelbar ein Quadrat herzustellen, dessen Inhalt gleich einem Fünfteil, und dessen Mittelpunkt der des gegebenen Quadrats ist.

Lösung. (S. die Figur).

Man halbire vom gegebenen Quadrat Q die Seite DA in E, AB in F, BC in G, CD in H und verbinde A mit G, B mit H, C mit E und D mit F. Das durch diese 4 Geraden begrenzte Viereck $JKLM$ ist das gesuchte Quadrat P.

Behauptung 1. P ist ein Quadrat.

Beweis. 1) Die 4 gezogenen Geraden sind paarweise parallel, denn sie begrenzen auf den Gegenseiten Q gleiche gleich gerichtete Strecken.

Folglich ist P ein Parallelogramm.

2) Die rechtwinkligen Dreiecke DAF, ABG, BCH, CDE sind einander congruent wegen Gleichheit der Katheten, woraus zunächst:

$$\text{Wkl. } ADF = DCE$$

Daher ist HJK ein Rechter als Aussenwinkel im Drk. CDJ.

Folglich ist P ein Rechteck.

3) Drk. CJD ist congr. BMC, und CMH congr. BLG (alle Winkel und 1 Seite gleich). Demnach ist

$$CJ = BM \quad \text{und} \quad CM = BL, \quad \text{woraus:}$$

$$MJ = LM$$

Folglich ist P ein Quadrat.

Behauptung 2. $P = \frac{1}{5}\, Q$.

Beweis. Wir ziehen HT parallel CJ; dann ist Drk. CMH congr. HTD (alle Winkel und 1 Seite gleich). Demnach ist

$$CM = HT = MJ, \quad \text{oder}$$

$$CJ = 2MJ$$

Die 4 Dreiecke CJD, DKA, ALB, BMC sind $= P$, weil sie gleiche Grundlinie und doppelte Höhe haben, und ergänzen sich mit P zu Q.

Folglich ist $Q = 5P$.

Behauptung 3. Die Mittelpunkte von P und Q fallen zusammen.

Beweis. Die Diagonalen AC und JL mögen sich in N treffen.

Drk. CJN ist congr. ALN (alle Winkel und 1 Seite gleich).

Folglich ist N die gemeinsame Mitte beider Diagonalen und als solche Mittelpunkt von P und Q.

Bemerkung 1. Die Behauptung ist ist auch einfache Folge des Pythogoräischen Satzes bezüglich auf das Dreieck CJD.

Bemerkung 2. Die Geraden AG, BH, CE, DF fünfteilen auch einander.

Hannover, Juli 1881.

Schnell, Dr.

6.

Dreieckssätze.

I. Lehrsatz: Wenn H der Höhendurchschnitt und O der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises eines Dreiecks sind, so gilt die Gleichung

$$\overline{OH}^2 = (3r)^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Beweis: Es bedeute ∂ den Abstand des Mittelpunktes O von a, sowie den halben obern Abschnitt von h, ferner die Projection von b auf a. Die Mitte von OH heisse N, so dass N das Centrum des Feuerbach'schen Kreises $\left(\text{mit dem Radius } \frac{r}{2}\right)$ ist. Von O auf h ist das Lot OE gefällt. Man schliesst

$$\begin{aligned}
\overline{OH}^2 &= \overline{HE}^2 + \overline{OE}^2 \\
&= (h - 3\partial)^2 + \left(p - \frac{a}{2}\right)^2 \\
&= h^2 + p^2 - 6h\partial + 9\partial^2 - ap + \frac{a^2}{4} \\
&= b^2 - 6h\partial + 9\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) - ap + \frac{a^2}{4} \\
&= b^2 + 9r^2 - 2a^2 - ap - 6a\partial.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$ap = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

und

$$\begin{aligned}
h\partial &= (2\partial + \overline{HD})\partial \\
&= 2\partial^2 + \left(\frac{r}{2} + \overline{NH}\right) \cdot \left(\frac{r}{2} - \overline{NH}\right) \\
&= 2\partial^2 + \frac{r^2}{4} - \frac{\overline{OH}^2}{4}.
\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werte giebt:

$$\overline{OH}^2 = b^2 + 9r^2 - 2a^2 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - 12\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)$$
$$- 6\left(\frac{r^2}{4} - \frac{\overline{OH}^2}{4}\right)$$

geordnet

$$\overline{OH}^2 = (3r)^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

II. Aufgabe: Es ist ein gleichschenkliges Dreieck und an beliebiger Stelle ein Punkt gegeben. Man soll durch den Punkt eine Gerade legen, welche die Schenkel des Dreiecks so schneidet, dass der obere Abschnitt auf dem einen gleich dem untern auf dem andern Schenkel ist.

Auflösung: Sei ABC das Dreieck, P der Punkt, PXY die zu construirende Gerade. Wenn man den Mittelpunkt O des dem Dreieck umschriebenen Kreises mit X, mit Y und A verbindet und von O auf die Schenkel AC und AB die Lote OD und OE fällt, so ist Dreieck ODX congruent OEY wegen der Uebereinstimmung in den rechten Winkeln und in den Katheten (DX ist $= EY$, weil $DC = AE$ und $CX = AY$). Daraus folgt, dass Wkl. $OXD = OYE$ ist. Man schliesst weiter: $AXOY$ ist ein Sehnenviereck, Wkl. $XYO = XAO$ d. h. Wkl. $PYO = \frac{1}{2} BAC$. Demgemäss bestimmt sich der Punkt Y durch den Kreisbogen, der durch P und O geht und als Peripheriewinkel einen Winkel $= \frac{1}{2} BAC$ fasst.

Posen, Juni 1881.

E. Jackwitz.

Fig. 1.

Fig. 7.

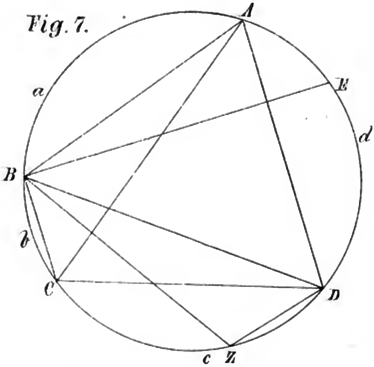


Fig. 4.

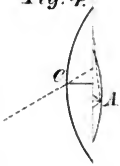


Fig. 8.

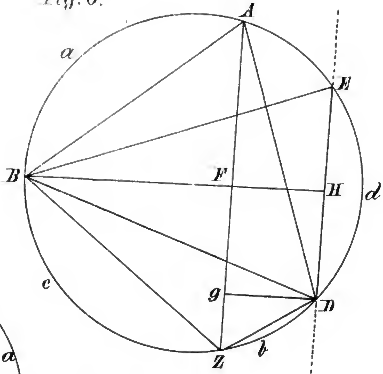


Fig. 9.

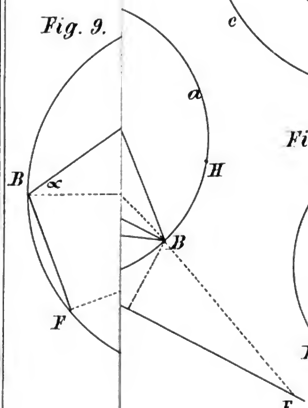
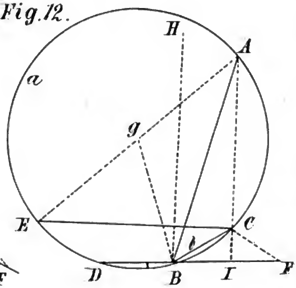


Fig. 12.



Druck v. F. W. Kunike Greifsw.

Fig. 13.

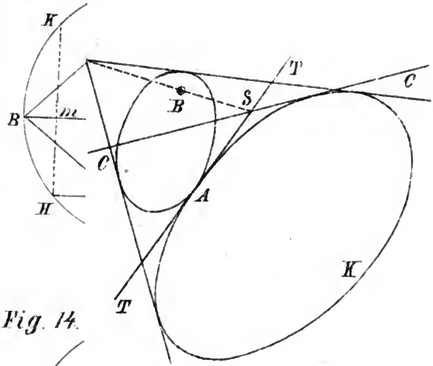
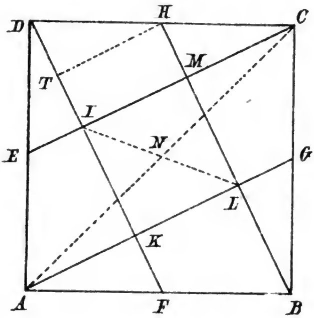


Fig. 14.

…mann: 3fach berührende Kegelschnitte.

Fig. 15.



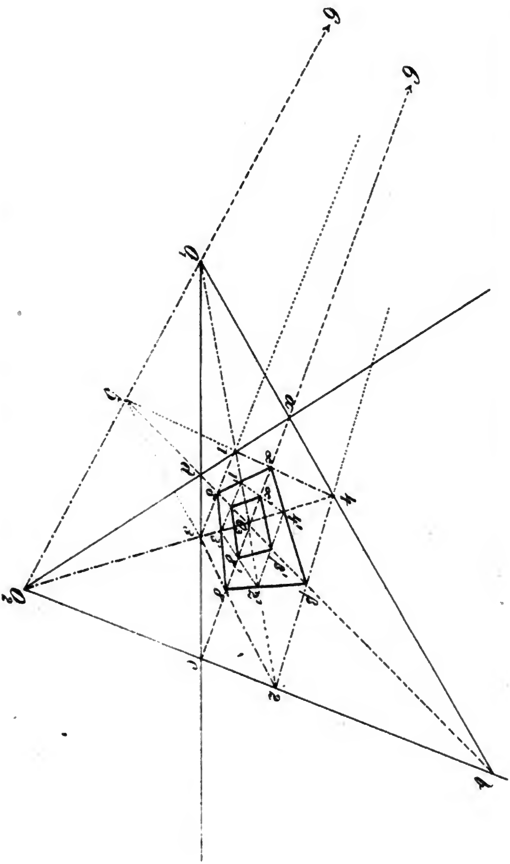
XIII. Sc…

Sat…

XX. Schnell: Aufgabe.

Steindr. v. F. W. Kunike Greifswald.

XX. Mahler: Vollständiges Viereck.



F. W. Kunike, Greifsw.

XXI.

Die Entwickelung des Euler'schen Algorithmus.

Von

Leopold Klug.

Zähler und Nenner eines in gewöhnliche Brüche verwandelten Kettenbruches

$$\gamma_1 + \frac{1}{\gamma_2 + \frac{1}{\gamma_3 + \cdots + \frac{1}{\gamma_n}}}$$

wurde von Euler durch $[\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n]$, $[\gamma_2 \ldots \gamma_n]$ Algorithmen bezeichnet.

Als Definition derselben können wir folgende Gleichungen

$$[\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-1}\gamma_n] = [\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-1}]\gamma_n + [\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-2}]$$

annehmen, und fragen nach welchem Gesetze bildet man die Glieder des Algorithmus $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$ und aus wie viel Gliedern wird dasselbe bestehen?

Aus der Definition folgt

$$\begin{aligned}[\gamma_1\gamma_2\gamma_3] &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1 \\ &\quad + \gamma_3 \\ [\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4] &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \gamma_1\gamma_2 + 1 \\ &\quad + \gamma_1\gamma_4 \\ &\quad + \gamma_3\gamma_4\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5] = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 &+ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1 \\
&+ \gamma_1\gamma_2\gamma_5 + \gamma_3 \\
&+ \gamma_1\gamma_4\gamma_5 + \gamma_5 \\
&+ \gamma_3\gamma_4\gamma_5
\end{aligned}
$$

Wenn wir die $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$ Grössen, Elemente des Algorithmus nennen, so sehen wir aus den obigen Beispielen, dass in der Entwickelung des Algorithmus ein Glied aus ebensoviel Factoren besteht, als das Algorithmus Elemente hat, die übrigen Glieder aber um 2, 4, 6, ... Factoren weniger haben.

Dies ist allgemein gültig, denn wenn $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-2}]$ nur Glieder mit $n-2$, $n-4$ ... Factoren, $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}]$ nur Glieder mit $n-1$, $n-3$ ... Factoren hat, so wird nach der ersten Gleichung, welche als Definition diente, $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$ nur Glieder mit n, $n-2$, $n-4$ etc. haben.

Wenn wir nun die Glieder in $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$, welche n, $n-2.1$ ... $n-2m$ Factoren haben, als zur 1sten, 2ten ... $m+1$ten Gruppe angehörend betrachten, dann können wir sagen, dass die $m+1$te Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$ aus den Gliedern der $m$ten Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-2}]$ und aus den Gliedern der $m+1$ten Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}]$ besteht, ferner dass die Anzahl der Gruppen von $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$, $\frac{n}{2}+1$ oder $\frac{n+1}{2}$ betragen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die Bildungsweise der Gruppen.

Wir nennen erstes Glied einer Gruppe dasjenige, welches aus den n, $n-2.1$, $n-2.2$ etc. ersten Elementen besteht, es ist daher das erste Glied der $m+1$ten Gruppe des Algorithmus

$$[\gamma_1 \ldots \gamma_n], \quad \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-2m}.$$

Alle Glieder einer Gruppe werden aus dem ersten Gliede derselben dadurch gebildet, dass man die Indexe vertauscht, und zwar wird ein gerader Index nur mit einem von ihm grösseren geraden, ein ungerader mit einem von ihm grösseren ungeraden Index vertauscht, aber so, dass in jeder Complexion der Indexe dieselben in natürlicher Ordnung seien d. h. ein höherer Index (Zahl) stehe niemals vor einem Niedrigeren.

Bilden wir in der Tat nach diesem Gesetze vom ersten Gliede $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-2m}$ der $m+1$ten Gruppe die übrigen.

Vertauschen wir zu diesem Ende bloss den letzten Index mit, von ihm um zwei Einheiten grösseren Zahlen, bis wir zu n gelangen; dadurch erhalten wir m Glieder. Vertauschen wir ferner den vorletzten Index mit einer, von ihm um zwei Einheiten grösseren Zahl und auch, damit die Complexion nach dem Gesetze gebildet sei, den letzten Index, so bekommen wir

$$\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{n-2m+1}\gamma_{n-2m+2} \tag{α}$$

Wenn hier der letzte Index immer um zwei Einheiten erhöht wird, bis er die Zahl n erreicht, während alle übrigen Indexe unverändert bleiben, so kommen $m-1$ neue Glieder zu; es gibt daher m solche Glieder, in denen der vorletzte Index um zwei Einheiten erhöht ist, während die vorhergehenden unverändert sind.

Vertauschen wir in (α) den letzten und vorletzten Index mit $n-2m+3$ resp. $n-2m+4$ und erhöhen wir in der erhaltenen Complexion der Indexe bloss den letzten, so bekommen wir $m-1$ neue Glieder.

Wenn man nun dies Verfahren fortsetzt, so ist leicht ersichtlich, dass die Anzahl aller Glieder, welche entstanden sind, dadurch dass der vorletzte Index alle für ihn möglichen Werte annahm, während die vor ihm stehenden Indexe unverändert geblieben sind,

$$m+(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1=\frac{(m+1)m}{1.2}=\binom{m+1}{2}$$

ist.

Vertauschen wir jetzt die drei letzten Indexe im ersten Gliede der Gruppe mit den um zwei Einheiten erhöhten Zahlen, so erhalten wir

$$\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{n-2m}\gamma_{n-2m+1}\gamma_{n-2m+2} \tag{β}$$

und wenn wir (β) ganz denselben Veränderungen unterwerfen als das Glied (α), so bekommen wir $\binom{m+1}{2}$ neue Glieder.

In (β) erhöhen wir $n-2m$ und die folgenden Indexe um zwei Einheiten und machen mit dem erhaltenen Gliede dieselben Veränderungen als mit (α), dann bekommen wir $\binom{m}{2}$ neue Glieder.

Setzen wir dies Verfahren so fort, bis der drittletzte Index die (für ihn in Folge seiner Stelle mögliche) höchste Zahl erreicht hat, so wird die Anzahl aller Glieder, welche durch Veränderung des drittletzten Indexes entstanden sind

$$\binom{m+1}{2}+\binom{m}{2}+\binom{m-1}{2}+\ldots+6+3+1=\binom{m+2}{3}$$

Ein analoges Verfahren liefert uns die Glieder, welche durch Veränderung des viertletzten Indexes gebildet werden, ihre Anzahl ist $\binom{m+2}{3}+\binom{m+1}{3}+\ldots+4+1=\binom{m+3}{4}$

Endlich wird die Anzahl der Glieder, welche durch Veränderung des Index 1 (des von rückwärts gezählten $n-2m$ten) entstanden sind, $\binom{m+n-2m-1}{n-2m}$ betragen.

Es ist daher die Anzahl S^n_{m+1} aller Glieder der $m+1$ten Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$ gleich mit der Anzahl aller Glieder, welche durch Veränderung der Indexe entstanden sind, plus 1, nämlich hinzuzuzählen das Glied, von welchem sie gebildet werden, oder

$$S^n_{m+1}=1+\binom{m}{1}+\binom{m+1}{2}+\ldots+\binom{m+n-2m-1}{n-2m}=\binom{n-m}{m}$$

Nehmen wir nun an, dass für $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-2}]$ und $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}]$ die angegebene Bildungsweise der Gruppen richtig ist, dann hätte die $m+1$te Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}]$

$$S^{n-1}_{m+1}=\binom{n-m-1}{m},$$

und die $m$te Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_{n-2}]$

$$S^{n-2}_{m}=\binom{n-m-1}{m-1}$$

Glieder.

Die ersteren mit γ_n multiplicirt und zur letzteren addirt, bilden aber die Glieder der $m+1$ten Gruppe in $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$ und da dies Aggregat nur nach dem angeführten Gesetze gebildete Glieder enthält, ferner

$$\binom{n-m-1}{m}+\binom{n-m-1}{m-1}=\binom{n-m}{m}=S^n_{m+1},$$

so ist das ausgesprochene Gesetz bezüglich der Bildung der Glieder richtig.

Wenn man daher das Algorithmus $[\gamma_1 \ldots \gamma_n]$ entwickeln will, so bildet man die ersten Glieder der Gruppen und von diesen die übrigen. Ist n eine ungerade Zahl, dann bestehen die Glieder der letzten Gruppe aus einem Factor; ist aber n eine gerade Zahl, dann haben die Glieder der vorletzten Gruppe zwei Factoren und die letzte Gruppe ist die Einheit.

Die letzten Glieder der einzelnen Gruppen erhält man, wenn von den in umgekehrter Ordnung geschriebenen allerersten Gliede $\gamma_n\gamma_{n-1}\ldots\gamma_2\gamma_1$ je zwei Elemente weggelassen werden.

„Die einzelnen Glieder irgend einer Gruppe können durch Vertauschen der Indexe von dem in umgekehrter Ordnung geschriebenen letzten Gliede der Gruppe gebildet werden und zwar wird ein gerader Index mit einem von ihm kleineren geraden Index, ein ungerader nur mit einem von ihm kleineren ungeraden Index vertauscht, aber so, dass in keiner Complexion ein kleinerer Index vor einem grösseren stehe.“

Das letzte Glied der $m+1$ten Gruppe ist

$$\gamma_n\gamma_{n-1}\ldots\gamma_{2m+2}\gamma_{2m+1} \tag{δ}$$

Wir verkleinern hier den letzten Index m-mal um zwei Einheiten, wodurch wir m neue Glieder bekommen, ferner verkleinern wir die zwei letzten Indexe in (δ) und in dem erhaltenen Gliede

$$\gamma_n\gamma_{n-1}\ldots\gamma_{2m}\gamma_{2m-1} \tag{ε}$$

nur den letzten Index um je zwei Einheiten, bis er 1 wird, wodurch m neue Glieder entstehen. Ebenso verkleinern wir in (ε) die zwei letzten Indexe, in

$$\gamma_n\gamma_{n-1}\ldots\gamma_{2m-2}\gamma_{2m-3} \tag{ζ}$$

nur den letzten Index, so erhalten wir $m-1$ neue Glieder.

Wenn wir das Verfahren so fortsetzen, bis der Index $2m+2$ in (δ) den kleinsten Wert erreicht hat, den er in Folge seiner Stelle erreichen kann, so wird die Anzahl der Glieder, welche wir durch Veränderung dieses Indexes bekommen, $\binom{m+1}{2}$ betragen.

Analog können wir mit dem drittletzten Index in (δ) vorgehen und wir erhalten $\binom{m+2}{3}$ neue Glieder.

Wenn wir nun alle Glieder bilden, welche zu dieser Gruppe gehören, so ist ihre Anzahl

$$S^n_{m+1} = 1+\binom{m}{1}+\binom{m+1}{2}+\ldots+\binom{m+n-2m-1}{n-2m}$$

d. h. gleich mit der Anzahl der Glieder, welche aus dem ersten Gliede der Gruppe gebildet wurden. Aber nicht allein die Anzahl der Glieder, sondern auch ihre Werte sind gleich, ob wir sie vom ersten oder letzten Gliede der Gruppe bilden, und da dasselbe für alle Gruppen gilt, so ist

$$[\gamma_1 \gamma_2 \; . \; . \; . \; \gamma_n] = [\gamma_n \gamma_{n-1} \; . \; . \; . \; \gamma_1].$$

In der zur Definition dienenden Gleichung

$$[\gamma_1 \; . \; . \; . \; \gamma_n] = [\gamma_1 \; . \; . \; . \; \gamma_{n-1}]\gamma_n + [\gamma_1 \; . \; . \; . \; \gamma_{n-2}]$$

setzen wir

$$\begin{array}{llllllll}
\gamma_1 & \text{statt} & \gamma_n & \text{und} & \gamma_n & \text{statt} & \gamma_1 \\
\gamma_2 & ,, & \gamma_{n-1} & ,, & \gamma_{n-1} & ,, & \gamma_2 \\
. \; . & . \; . & . \; . & . \; . & . \; . & . \; . & . \; . \\
\gamma_{m+1} & ,, & \gamma_{n-m} & ,, & \gamma_{n-m} & ,, & \gamma_{m+1}
\end{array}$$

und erhalten

$$[\gamma_n \; . \; . \; . \; \gamma_1] = [\gamma_n \; . \; . \; . \; \gamma_2]\gamma_1 + [\gamma_n \; . \; . \; . \; \gamma_3]$$

welche mit der ersten Gleichung verglichen zu

$$[\gamma_1 \; . \; . \; . \; \gamma_n] = [\gamma \; . \; . \; . \; \gamma_2]\gamma_1 + [\gamma_n \; . \; . \; . \; \gamma_3]$$

führt. Die zur Definition dienenden drei Gleichungen involviren daher diese letzte Gleichung.

Pressburg, den 4. September 1881.

XXII.

Einige Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen.

Von

Norbert Herz.

Ich betrachte im Folgenden die Integrale solcher Functionen, die rational aus den drei elliptischen Functionen $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ zusammengesetzt sind, und zwar vorerst die ganzen Functionen.

Jede ganze Function dieser 3 Grössen wird notwendig ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p$$

sein, und man kann demnach das ganze Integral in eine Summe von Partialintegralen zerlegen, von denen jedes einzelne also die Form

$$J = \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p dx$$

haben wird (unter m, n, p ganze positive Zahlen verstanden), welches uns nun beschäftigen wird.

Zur Bestimmung dieses Integrales könnte man einen doppelten Weg einschlagen. Man setze z. B. $\operatorname{sn} x = z$, dann wird:

$$J = \int z^m \sqrt{\{(1 - z^2)^{n-1} (1 - k^2 z^2)^{p-1}\}} dz$$

also das Integral auf ein algebraisches zurückgeführt. Wiewol in manchen Fällen diese Substitution Vorteile bietet, so wird im allgemeinen die Behandlung in der ursprünglichen Form einfacher, weshalb ich hier auf die zweite nicht weiter eingehe, und nur gelegentlich von ihr Gebrauch machen werde. Man kann nun auch

$$J = \int \operatorname{sn} x^m (1-\operatorname{sn} x^2)^{\left[\frac{n}{2}\right]} (1-k^2 \operatorname{sn} x^2)^{\left[\frac{p}{2}\right]} \operatorname{cn} x^i \operatorname{dn} x^{i'} dx$$

setzen, wobei dem in der Zahlentheorie eingeführten Gebrauche gemäss $\left[\frac{n}{2}\right]$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, und demnach i und i' nur 0 oder 1 bedeuten können. Da jedoch hier eine Entwicklung nach dem binomischen Satze vorzunehmen ist, und man schliesslich doch nur relativ einfachere Integrale (mit nur einer der 3 elliptischen Functionen) erhält, so wird es zumeist vorzuziehen sein, hier so wie in vielen anderen Fällen Reductionsformeln aufzustellen; die Ableitung derselben ist nun die nächste Aufgabe.

Es ist zu bemerken, dass zwischen den drei elliptischen Functionen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\operatorname{sn} x^2 = 1 - \operatorname{cn} x^2 = \frac{1}{k^2}(1-\operatorname{dn} x^2)$$

$$\operatorname{cn} x^2 = 1 - \operatorname{sn} x^2 = \frac{1}{k^2}\operatorname{dn} x^2 - \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{1}{k^2}\operatorname{dn} x^2 - \frac{k_1{}^2}{k^2}$$

$$\operatorname{dn} x^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn} x^2 = (1-k^2) + k^2 \operatorname{cn} x^2 = k_1{}^2 + k^2 \operatorname{cn} x^2$$

Nun lässt sich J folgendermassen darstellen:

a) $J = \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p \, dx = \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1} . \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \, dx =$

$$\frac{\operatorname{sn} x^{m+1}}{m+1} \operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sn} x^{m+2} \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p \, dx$$

$$+ \frac{k^2(p-1)}{m+1} \int \operatorname{sn} x^{m+2} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} \, dx$$

Da diese Formel nicht an die Bedingung geknüpft ist, dass m, n, p ganze positive Zahlen sein müssen, so erhält man daraus eine Reductionsformel für negative m, denn dann ergiebt sich:

$$\text{I)} \int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{\operatorname{sn} x^m} dx = - \frac{\operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1}}{(m-1) \operatorname{sn} x^{m-1}}$$

$$- \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p}{\operatorname{sn} x^{m-2}} dx - \frac{k^2(p-1)}{m-1} \int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2}}{\operatorname{sn} x^{m-2}} dx$$

Durch Transposition erhält man aus a) ähnliche Formeln; sucht man erst das zweite Glied rechts durch die anderen auszudrücken, und setzt dann m für $m+2$ und n für $n-2$, so findet man

$$\text{II)} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^p}{\operatorname{cn} x^n} = + \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{dn} x^{p-1}}{(n-1) \operatorname{cn} x^{n-1}}$$

$$- \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^p}{\operatorname{cn} x^{n-2}} dx + \frac{k^2(p-1)}{n-1} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^{p-2}}{\operatorname{cn} x^{n-2}} dx$$

und ähnlich

$$\text{III)} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n}{\operatorname{dn} x^p} dx = + \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^{n-1}}{k^2(p-1) \operatorname{dn} x^{p-1}}$$

$$- \frac{m-1}{k^2(p-1)} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n}{\operatorname{dn} x^{p-2}} dx + \frac{n-1}{k^2(p-1)} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2}}{\operatorname{dn} x^{p-2}} dx$$

Ersetzt man in a) rechter Hand $\operatorname{sn} x^{m+2}$ einmal durch $\operatorname{sn} x^m(1 - \operatorname{cn} x^2)$ das andere Mal durch $\frac{1}{k^2} \operatorname{sn} x^m(1 - \operatorname{dn} x^2)$, so ergiebt sich:

$$J = \frac{\operatorname{sn} x^{m+1}}{m+1} \operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p dx$$

$$+ \frac{p-1}{m+1} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx - \frac{n-1}{m+1} J - \frac{p-1}{m+1} J$$

folglich

$$1^*) \quad J = \frac{\operatorname{sn} x^{m+1} \operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1}}{m+n+p-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n+p-1} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p dx$$

$$+ \frac{p-1}{m+n+p-1} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx$$

Verfährt man ebenso mit den aus a) durch Transposition entstehenden (die ich nicht aufgeschrieben habe), die man übrigens auch durch eine andere Gruppirung in J und nachherige partielle Integration erhalten könnte, so findet man ferner:

$$2^*) \quad J = - \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^{n+1} \operatorname{dn} x^{p-1}}{m+n+p-1}$$

$$+ \frac{m-1}{m+n+p-1} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p dx$$

$$+ \frac{(1-k^2)(p-1)}{m+n+p-1} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx$$

$$3^*)\quad J=-\frac{\operatorname{sn}x^{m-1}\operatorname{cn}x^{n-1}\operatorname{dn}x^{p+1}}{k^2(m+n+p-1)}$$
$$+\frac{m-1}{k^2(m+n+p-1)}\int\operatorname{sn}x^{m-2}\operatorname{cn}x^{n}\operatorname{dn}x^{p}\,dx$$
$$-\frac{(1-k^2)(n-1)}{k^2(m+n+p-1)}\int\operatorname{sn}x^{m}\operatorname{cn}x^{n-2}\operatorname{dn}x^{p}\,dx$$

Diese drei letzten Formeln werden jedoch in gewissen Fällen ungiltig; wenn nur eine der drei Zahlen m, n, p gleich 0 oder 1 ist, so wird eine derselben unanwendbar, dann wird aber stets eine der beiden anderen zum Ziele führen, und zwar die 1*), 2*) oder 3*), je nachdem m, n oder p gleich 0 oder 1 sind; wenn aber zwei dieser Zahlen 0 oder 1 sind, ist keine mehr zu verwenden. Man findet aber unmittelbar

$$4^*)\quad\begin{cases}\int\operatorname{sn}x^m\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\,dx=\dfrac{\operatorname{sn}x^{m+1}}{m+1}+C\\[2mm]\int\operatorname{cn}x^n\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x\,dx=-\dfrac{\operatorname{cn}x^{n+1}}{n+1}+C\\[2mm]\int\operatorname{dn}x^p\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\,dx=-\dfrac{1}{k^2}\,\dfrac{\operatorname{dn}x^{p+1}}{p+1}+C\end{cases}$$

welche, wie man sofort sieht, auch noch aus 1*), 2*), 3*) hervorgehen, indem dann die noch zu integrirenden Teile wegen der Factoren $(m-1)$, $(n-1)$, $(p-1)$ verschwinden. Auf dem bereits betretenen Wege findet man ferner:

$$5^*)\quad\begin{cases}\int\operatorname{sn}x^m\operatorname{cn}x\,dx=-\dfrac{1}{k^2m}\operatorname{sn}x^{m-1}\operatorname{dn}x+\dfrac{m-1}{k^2m}\int\operatorname{sn}x^{m-2}\operatorname{cn}x\,dx\\[2mm]\int\operatorname{sn}x^m\operatorname{dn}x\,dx=-\dfrac{1}{m}\operatorname{sn}x^{m-1}\operatorname{cn}x+\dfrac{m-1}{m}\int\operatorname{sn}x^{m-2}\operatorname{dn}x\,dx\\[2mm]\int\operatorname{cn}x^n\operatorname{sn}x\,dx=-\dfrac{1}{k^2n}\operatorname{cn}x^{n-1}\operatorname{dn}x-\dfrac{(n-1)(1-k^2)}{k^2n}\int\operatorname{cn}x^{n-2}\operatorname{sn}x\,dx\\[2mm]\int\operatorname{cn}x^n\operatorname{dn}x\,dx=\dfrac{1}{n}\operatorname{cn}x^{n-1}\operatorname{sn}x+\dfrac{(n-1)}{n}\int\operatorname{cn}x^{n-2}\operatorname{dn}x\,dx\\[2mm]\int\operatorname{dn}x^p\operatorname{sn}x\,dx=-\dfrac{1}{p}\operatorname{dn}x^{p-1}\operatorname{cn}x+\dfrac{(1-k^2)(p-1)}{p}\int\operatorname{dn}x^{p-2}\operatorname{sn}x\,dx\\[2mm]\int\operatorname{dn}x^p\operatorname{cn}x\,dx=\dfrac{1}{p}\operatorname{dn}x^{p-1}\operatorname{sn}x+\dfrac{p-1}{p}\int\operatorname{dn}x^{p-2}\operatorname{cn}x\,dx\end{cases}$$

Sind zwei der Exponenten m, n, p gleich 0, so lässt sich keine solche Reductionsformel aufstellen. Hier könnte man sich nun etwa der Formen

$$\int \operatorname{sn} x^m \, dx = \int [1 - \operatorname{cn} x^2]^{\left[\frac{m}{2}\right]} \operatorname{sn} x^i \, dx \quad \text{etc.}$$

bedienen; einfacher ist jedoch wieder

$$6^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \operatorname{sn} x^m \, dx &= \int \operatorname{sn} x^{m-2} \, dx - \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \, dx - \frac{1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^2 \, dx \quad ^*) \\ \int \operatorname{cn} x^m \, dx &= \int \operatorname{cn} x^{m-2} \, dx - \int \operatorname{cn} x^{m-2} \operatorname{sn} x^2 \, dx \\ &= -\frac{1-k^2}{k^2} \int \operatorname{cn} x^{m-2} \, dx + \frac{1}{k^2} \int \operatorname{cn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^2 \, dx \\ \int \operatorname{dn} x^m \, dx &= (1-k^2) \int \operatorname{dn} x^{m-2} \, dx + k^2 \int \operatorname{dn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2 \, dx \\ &= \int \operatorname{dn} x^{m-2} \, dx - k^2 \int \operatorname{dn} x^{m-2} \operatorname{sn} x^2 \, dx \end{aligned} \right.$$

wodurch der Exponent der zu integrirenden Functionen um 2 Einheiten erniedrigt wird, hingegen noch Teile hinzutreten, die zwei Functionen enthalten, und die sich nach dem Formelsysteme 1*), 2*), 3*) würden behandeln lassen, für die sich aber durch die folgenden einfachen Betrachtungen weitergehende Reductionsformeln finden lassen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^2 \, dx &= -\frac{1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x \, d \operatorname{dn} x \\ &= -\frac{1}{k^2} \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \frac{m-1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2 \, dx \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{k^2} \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \frac{m-1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2 \, dx \\ &\quad - (m-1) \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^2 \, dx - \frac{1}{k^2} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^2 \, dx \end{aligned}$$

Transponirt man jetzt das dritte und vierte Glied, ersetzt im letzteren $\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x^2$ durch $\operatorname{cn} x^2 + \frac{1-k^2}{k^2}$ und dividirt durch $(m+1)$, so findet man

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^2 \, dx &= -\frac{1-k^2}{k^2(m+1)} \int \operatorname{sn} x^m \, dx - \frac{1}{k^2(m+1)} \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \\ &\quad + \frac{m-1}{k^2(m+1)} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2 \, dx \end{aligned}$$

und indem man im ersten Gliede rechts $\operatorname{sn} x^m = \operatorname{sn} x^{m-2}(1 - \operatorname{cn} x^2)$ setzt und gehörig reducirt:

---

*) Eine andere Reductionsformel für dieses Integral s. Briot u. Bouquet, doppelt-periodische Functionen pag. 225. Formel 14.

$$\int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^2\, dx = -\frac{1}{k^2(m+1)} \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$
$$-\frac{1-k^2}{k^2(m+1)} \int \operatorname{sn} x^{m-2}\, dx + \frac{m-k^2}{k^2(m+1)} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2\, dx$$

und ebenso:

7*)

$$\int \operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^2\, dx = -\frac{1}{m+1} \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{dn} x \operatorname{cn} x$$
$$+\frac{1-k^2}{m+1} \int \operatorname{sn} x^{m-2}\, dx + \frac{mk^2-1}{k^2(m+1)} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^2\, dx$$

$$\int \operatorname{cn} x^m \operatorname{sn} x^2\, dx = -\frac{1}{k^2(m+1)} \operatorname{cn} x^{m-1} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$
$$+\frac{1}{k^2(m+1)} \int \operatorname{cn} x^{m-2}\, dx - \frac{m+k^2-mk^2}{(m+1)k^2} \int \operatorname{cn} x^{m-2} \operatorname{sn} x^2\, dx$$

$$\int \operatorname{cn} x^m \operatorname{dn} x^2\, dx = \frac{1}{m+1} \operatorname{cn} x^{m-1} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$$
$$-\frac{1-k^2}{k^2(m+1)} \int \operatorname{cn} x^{m-2}\, dx + \frac{1-k^2+mk^2}{(m+1)k^2} \int \operatorname{cn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^2\, dx$$

$$\int \operatorname{dn} x^m \operatorname{sn} x^2\, dx = -\frac{1}{m+1} \operatorname{dn} x^{m-1} \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$$
$$+\frac{1}{m+1} \int \operatorname{dn} x^{m-2}\, dx + \frac{m-1-mk^2}{m+1} \int \operatorname{dn} x^{m-2} \operatorname{sn} x^2\, dx$$

$$\int \operatorname{dn} x^m \operatorname{cn} x^2\, dx = \frac{1}{m+1} \operatorname{dn} x^{m-1} \operatorname{cn} x \operatorname{sn} x$$
$$+\frac{1-k^2}{m+1} \int \operatorname{dn} x^{m-2}\, dx + \frac{m-1+k^2}{m+1} \int \operatorname{dn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^2\, dx$$

Wendet man nun auf das Integral J successive die hier abgeleiteten Reductionen an, so wird man schliesslich auf Formen geführt, deren Integration entweder auf elliptische Functionen selbst oder auf elliptische Integrale zweiter Gattung derselben führt. Man erhält nämlich zum Schlusse eine der folgenden Formen:

8*)
$$\int \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx = \tfrac{1}{2} \operatorname{sn} x^2 + C_1 = -\tfrac{1}{2} \operatorname{cn} x^2 + C_2 = -\frac{1}{2k^2} \operatorname{dn} x^2 + C_3$$

9*)
$$\begin{cases} \int \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x\, dx = -\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x + C \\ \int \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x\, dx = -\operatorname{cn} x + C \\ \int \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx = \operatorname{sn} x + C \end{cases}$$

10*)
$$\begin{cases} \int \operatorname{sn} x^2\, dx = E(\operatorname{sn} x) + C \\ \int \operatorname{cn} x^2\, dx = x - E(\operatorname{sn} x) + C \\ \int \operatorname{dn} x^2\, dx = x - k^2 E(\operatorname{sn} x) + C \end{cases}$$

wo $E(x)$ das elliptische Normalintegral zweiter Gattung ist, und schliesslich noch die drei Formen

$$\int \operatorname{sn} x\,dx,\quad \int \operatorname{cn} x\,dx,\quad \int \operatorname{dn} x\,dx$$

Zur Bestimmung dieser Integrale hat man zunächst *)

$$\frac{1-\operatorname{cn}2u}{\operatorname{sn}2u}=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}$$

$$\frac{1-\operatorname{dn}2u}{\operatorname{sn}2u}=\frac{k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$$

Durch Integration folgt demnach

$$11^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{1-\operatorname{cn}2u}{\operatorname{sn}2u}\,du=-\log\operatorname{cn}u+C\\ &\int\frac{1-\operatorname{dn}2u}{\operatorname{sn}2u}\,du=-\log\operatorname{dn}u+C\end{aligned}\right.$$

Betrachtet man zunächst das erste Integral, so ist:

$$\int\operatorname{sn}x\,dx=\int\frac{4\operatorname{sn}\frac{x}{2}\operatorname{cn}\frac{x}{2}\operatorname{dn}\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}\frac{x^4}{2}}$$

$$=4\int\frac{\operatorname{sn}\frac{x}{2}\,d\operatorname{sn}\frac{x}{2}}{\left(1-k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}\right)\left(1+k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}\right)}=2\int\frac{d\left(\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}\right)^2}{\left(1-k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}\right)\left(1+k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{d\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}}{1-k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}}+\int\frac{d\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}}{1+k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}}$$

$$\int\operatorname{sn}x\,dx=\frac{1}{k}\log\frac{1+k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}}{1-k\operatorname{sn}\frac{x^2}{2}}+C$$

Beachtet man nun die Relationen

$$\operatorname{sn}x=\frac{1}{k\operatorname{sn}\left(x-\frac{\Omega'}{2}\right)}$$

*) Die Fundamentalformeln sind dem Werke „Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" entnommen.

$$\operatorname{cn} x = -\frac{i \operatorname{dn}\left(x - \frac{\Omega'}{2}\right)}{k \operatorname{sn}\left(x - \frac{\Omega'}{2}\right)}$$

$$\operatorname{dn} x = -\frac{i \operatorname{cn}\left(x - \frac{\Omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(x - \frac{\Omega'}{2}\right)}$$

so findet man mit Berücksichtigung von 11*)

$$\int (\operatorname{cn} x + i \operatorname{sn} x) dx = \int \frac{i}{k} \frac{1 - \operatorname{dn}\left(x - \frac{\Omega'}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(x - \frac{\Omega'}{2}\right)} dx$$

$$= -\frac{2i}{k} \log \operatorname{dn}\left(\frac{x}{2} - \frac{\Omega'}{4}\right) + C$$

und hieraus durch Substitution des Wertes für $\int \operatorname{sn} x\, dx$ denjenigen von $\int \operatorname{cn} x\, dx$. Auf dieselbe Weise erhält man auch $\int \operatorname{dn} x\, dx$, so dass also:

$$12^*) \left\{ \begin{aligned} \int \operatorname{sn} x\, dx &= \frac{1}{k} \log \frac{1 + k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}}{1 - k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}} + C \\ \int \operatorname{cn} x\, dx &= -\frac{i}{k} \log \left[\frac{1 + k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}}{1 - k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{2} - \frac{\Omega'}{4}\right)^2 \right] + C \\ \int \operatorname{dn} x\, dx &= -i \log \left[\frac{1 + k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}}{1 - k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}} \operatorname{cn} \left(\frac{x}{2} - \frac{\Omega'}{4}\right)^2 \right] + C \end{aligned} \right.$$

Das erste Integral hätte man durch die Substitution $\operatorname{cn} x = y$ in folgender Form gefunden:

$$\int \operatorname{sn} x\, dx = -\frac{1}{k} \log[\operatorname{dn} x + k \operatorname{cn} x] + C'$$

da aber durch Einführung der halben Argumente

$$\operatorname{dn} x + k \operatorname{cn} x = (k+1) \frac{1 - k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}}{1 + k \operatorname{sn} \frac{x^2}{2}}$$

wird, so sieht man sofort die Identität der beiden Integrale. Uebrigens ergeben sich ähnliche Formen für die beiden anderen Integrale, wenn man darin $y = \operatorname{sn} x$ setzt und für die entstehenden Integrale die logarithmische Form (statt der reellen cyklometrischen) wählt. Man findet

12a*)
$$\left\{\begin{aligned} &\int \operatorname{sn} x\, dx = -\frac{1}{k}\log[\operatorname{dn} x + k \operatorname{cn} x] + C' \quad {}^{*)} \\ &\int \operatorname{cn} x\, dx = -\frac{i}{k}\log[ik \operatorname{sn} x + \operatorname{dn} x] + C' \\ &\int \operatorname{dn} x\, dx = -i\log[i \operatorname{sn} x + \operatorname{cn} x] + C' \end{aligned}\right.$$

Es ist hierdurch gezeigt, dass das Integral jeder ganzen, rationalen Function der drei elliptischen Functionen sich wieder durch diese selbst oder Logarithmen derselben oder endlich durch elliptische Integrale zweiter Gattung der sn darstellen lässt. Es mag noch bemerkt werden, dass mit Rücksicht auf die Relationen, die zwischen elliptischen Functionen bestehen, deren Argumente sich um Perioden oder deren Teile unterscheiden (Königsberger, elliptische Functionen), sich noch die folgenden bemerkenswerten Integrale ableiten lassen.

13*)
$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\operatorname{sn} x} = -\log\frac{\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} + C \quad {}^{*)} \\ &\int \frac{dx}{\operatorname{cn} x} = \frac{1}{k_1}\log\frac{\operatorname{dn} x + k_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} + C \\ &\int \frac{dx}{\operatorname{dn} x} = -\frac{i}{k_1}\log\frac{i\operatorname{cn} x - k_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} + C \\ &\int \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}dx = \frac{1}{k_1}\log\frac{\operatorname{dn} x + k_1}{\operatorname{cn} x} + C \\ &\int \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}dx = \frac{i}{kk_1}\log\frac{ik\operatorname{cn} x + k_1}{\operatorname{dn} x} + C \\ &\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x}dx = \log\frac{1 - \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} + C \\ &\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}dx = \frac{1}{k}\log\frac{1 + k\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} + C \\ &\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}dx = \log\frac{1 - \operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} + C \\ &\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}dx = \log\frac{1 + \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} + C \end{aligned}\right.$$

---

*) Für diese beiden Integrale s. „Briot und Bouquet, doppelt-periodische Functionen", deutsch v. H. Fischer, pag. 220 und 221.

Es ist nämlich

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sn} x} = k \int \operatorname{sn}\left(x \pm \frac{\Omega'}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{k}{k}\log\left[\operatorname{dn}\left(x \pm \frac{\Omega'}{2}\right) + k \operatorname{cn}\left(x \pm \frac{\Omega'}{2}\right)\right] + C$$

$$= -\log\left[\mp \frac{i \operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} \mp k \cdot \frac{i \operatorname{dn} x}{k \operatorname{sn} x}\right] + C = -\log \frac{\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} + C'.$$

Für das zweite Integral ergeben sich zunächst zwei Formen, denn es ist:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{cn} x} = \pm \frac{k}{ik_1} \int \operatorname{cn}\left(x + \frac{\Omega}{4} \mp \frac{\Omega'}{2}\right) dx$$

$$= \mp \frac{1}{k_1} \log\left[ik \operatorname{sn}\left(x + \frac{\Omega}{4} \mp \frac{\Omega'}{2}\right) + \operatorname{dn}\left(x + \frac{\Omega}{4} \mp \frac{\Omega'}{2}\right)\right] + C$$

$$= \mp \frac{1}{k_1} \log\left[\frac{i \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} \mp \frac{ik_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}\right] + C$$

$$= \mp \frac{1}{k_1} \log \frac{\operatorname{dn} x \mp k_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} + C'$$

und

$$\int \frac{dx}{\operatorname{cn} x} = \pm \frac{k}{ik_1} \int \operatorname{cn}\left(x - \frac{\Omega}{4} \pm \frac{\Omega'}{2}\right) dx$$

$$= \mp \frac{1}{k_1} \log\left[ik \operatorname{sn}\left(x - \frac{\Omega}{4} \pm \frac{\Omega'}{2}\right) + \operatorname{dn}\left(x - \frac{\Omega}{4} \pm \frac{\Omega'}{2}\right)\right] + C$$

$$= \mp \frac{1}{k_1} \log\left[-\frac{i \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} \pm \frac{ik_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}\right] + C$$

Der zweite Ausdruck ist mit dem ersten identisch, da man $\mp \frac{1}{k_1} \log(-i)$ in die Constante hineinziehen kann; da aber vermöge der Beziehung $k^2 + k_1^2 = 1$ auch

$$-\frac{1}{k_1} \log \frac{\operatorname{dn} x - k_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} = \frac{1}{k_1} \log \frac{\operatorname{cn} x (\operatorname{dn} x + k_1 \operatorname{sn} x)}{\operatorname{dn} x^2 - k_1^2 \operatorname{sn} x^2}$$

$$= \frac{1}{k_1} \log \frac{\operatorname{cn} x (\operatorname{dn} x + k_1 \operatorname{sn} x)}{\operatorname{cn} x^2}$$

ist, so folgt die Identität der Ausdrücke für beide Zeichen. Ebenso werden die anderen Formeln der Gruppe 13*) erhalten.

Geht man nun auf gebrochene Functionen über, so wird man sofort sehen, dass die Mannigfaltigkeit der hierher gehörigen Integrale keine ebenso einfache Behandlungsweise gestattet. Man kann zunächst den Nenner so umformen, dass er nur eine der drei elliptischen Functionen enthält; denn es geht

$$N = F[\mathrm{sn}\, x, \quad \mathrm{cn}\, x, \quad \mathrm{dn}\, x]$$

durch die Substitutionen

$$\mathrm{cn}\, x^2 = 1 - \mathrm{sn}\, x^2, \quad \mathrm{dn}\, x^2 = 1 - k^2 \,\mathrm{sn}\, x^2$$

über in

$$N = \varphi_1(\mathrm{sn}\, x) + \varphi_2(\mathrm{sn}\, x)\,.\,\mathrm{cn}\, x + \varphi_3(\mathrm{sn}\, x)\,.\,\mathrm{dn}\, x + \varphi_4(\mathrm{sn}\, x)\,\mathrm{cn}\, x\,\mathrm{dn}\, x$$

wo auch φ_2, φ_3 oder φ_4 verschwinden können; also:

$$N = [\varphi_1 + \varphi_2\,.\,\mathrm{cn}\, x] + [\varphi_3 + \varphi_4\,.\,\mathrm{cn}\, x]\,\mathrm{dn}\, x$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner mit

$$N' = [\varphi_1 + \varphi_2\,\mathrm{cn}\, x] - [\varphi_3 + \varphi_4\,\mathrm{cn}\, x]\,\mathrm{dn}\, x$$

so geht der Nenner über in

$$NN' = \psi_1(\mathrm{sn}\, x) + \psi_2(\mathrm{sn}\, x)\,\mathrm{cn}\, x$$

und wird noch Zähler und Nenner mit

$$N'' = \psi_1(\mathrm{sn}\, x) - \psi_2(\mathrm{sn}\, x)\,\mathrm{cn}\, x$$

multiplicirt, so wird schliesslich der Nenner $NN'N''$ eine reine Function der $\mathrm{sn}\, x$. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn man je nach Bequemlichkeit im Nenner blos $\mathrm{cn}\, x$ oder $\mathrm{dn}\, x$ haben wollte. Der Zähler wird dadurch weitläufiger (weshalb in speciellen Fällen oft andere Mittel rascher zum Ziele führen werden), bleibt aber eine ganze, rationale Function der drei elliptischen Functionen. Nun lässt sich auf den Nenner eine Art Partialbruchzerlegung anwenden, und es wird

$$\frac{1}{\Phi(\mathrm{sn}\, x)} = \Sigma\Sigma \frac{m_{ik}}{(\mathrm{sn}\, x - \mu_i)^k}; \qquad \frac{1}{\Psi(\mathrm{cn}\, x)} = \Sigma\Sigma \frac{n_{ik}}{(\mathrm{cn}\, x - \nu_i)^k};$$

$$\frac{1}{X(\mathrm{dn}\, x)} = \Sigma\Sigma \frac{p_{ik}}{(\mathrm{dn}\, x - \pi_i)^k}$$

Multiplicirt man mit dem Zähler, so ergeben sich nun die folgenden Integrale:

$$\int \frac{\mathrm{sn}\, x^m\,\mathrm{cn}\, x^n\,\mathrm{dn}\, x^p}{(a_1\,\mathrm{sn}\, x + a_2)^\varrho}\,dx; \quad \int \frac{\mathrm{sn}\, x^m\,\mathrm{cn}\, x^n\,\mathrm{dn}\, x^p}{(a_1\,\mathrm{cn}\, x + a_2)^\varrho}\,dx;$$

$$\int \frac{\mathrm{sn}\, x^m\,\mathrm{cn}\, x^n\,\mathrm{dn}\, x^p}{(a_1\,\mathrm{dn}\, x + a_2)^\varrho}$$

Man findet für das erste dieser Integrale, indem

$$\mathrm{sn}\, x = \frac{1}{a}[(a\,\mathrm{sn}\, x + b) - b]$$

gesetzt wird:

14*) $$\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} dx = \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{(a \operatorname{sn} x + b)^{r-1}} dx - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} dx$$

Hierdurch gelangt man also teils zu ganzen Functionen, theils zu Ausdrücken, die sich weiter folgendermassen behandeln lassen:

$$\int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} = \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1} a \operatorname{sn} x}{(a \operatorname{sn} x + b)^r}$$
$$= - \frac{\operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1}}{a(r-1)(a \operatorname{sn} x + b)^{r-1}} - \int \frac{(n-1) \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x^p dx}{a(r-1)(a \operatorname{sn} x + b)^{r-1}}$$
$$- \int \frac{k^2 (p-1) \operatorname{cn} x^n \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x^{p-2} dx}{a(r-1)(a \operatorname{sn} x + b)^{r-1}}$$

also

15*) $$\int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p dx}{(a \operatorname{sn} (x + b)^r} = - \frac{\operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^{p-1}}{a(r-1) a \operatorname{sn} u + b)^{r-1}}$$
$$- \frac{n-i}{a(r-1)} \left\{ \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^{r-2}} - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^{r-i}} \right\}$$
$$- \frac{k^2 (p-1)}{a(r-1)} \left\{ \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^{r-2}} - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^{r-1}} \right\}$$

Diese Formel gilt bis einschliesslich $r = 2$ und wird für $r = 1$ unbrauchbar; schliesst man für's erste diesen Fall aus, so wird man hierdurch den Nenner erniedrigen können, so lange $n \geqq 1$, $p \geqq 1$, weil die mit $\operatorname{cn} x^{n-2}$ resp. $\operatorname{dn} x^{p-2}$ vorkommenden Ausdrücke wegen der Coefficienten $(n-1)$, $(p-1)$ für den Fall $n = i$ oder $p = i$ verschwinden; für den speciellen Fall, dass $n = p = i$, wird

$$\int \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} = - \frac{1}{a(r-1)(a \operatorname{sn} x + b)^{r-i}}$$

Es ist ferner:

$$\int \frac{\operatorname{cn} x^n dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} = \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2} dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} - \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2} \operatorname{sn} x^2 dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^r}$$
$$= \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2} dx}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} - \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2} (a \operatorname{sn} x + b)^2}{(a \operatorname{sn} x + b)^r}$$
$$+ \frac{2b}{a^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2} (a \operatorname{sn} x + b)}{(a \operatorname{sn} x + b)^r} - \frac{b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}}{(a \operatorname{sn} x + b)^r}$$

also

$$16^*)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int \frac{\operatorname{cn} x^m\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^r}\,dx = \frac{(a^2-b^2)}{a^2}\int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^r}\\
&+\frac{2b}{a^2}\int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-1}}-\frac{1}{a^2}\int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-2}}\\
&\text{und}\\
&\frac{\operatorname{dn} x^m\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^r}\,dx = \frac{a^2-k^2b^2}{a^2}\int \frac{\operatorname{dn} x^{m-2}\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^r}\\
&+\frac{2bk^2}{a^2}\int \frac{\operatorname{dn} x^{m-2}\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-1}}-\frac{k^2}{a^2}\int \frac{\operatorname{dn} x^{m-2}\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-2}}
\end{aligned}\right.$$

welche Formeln auch noch für $r=2$ und $m=2$ giltig sind, für $m=1$ wird endlich noch folgender Weg einzuschlagen sein. Es ist:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{dn} x}{(a\sin x+b)^{r-1}}\right] = -\frac{a(r-1)\operatorname{dn} x^2\operatorname{cn} x}{(a\operatorname{sn} x+b)^r}-\frac{k^2\operatorname{sn} x\operatorname{cn} x}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-1}}$$

Setzt man hier

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{a}(a\operatorname{sn} x+b)-\frac{b}{a}$$

$$\operatorname{dn} x^2 = 1-\frac{k^2}{a^2}\left[(a\operatorname{sn} x+b)^2-2b(a\operatorname{sn} x+b)+b^2\right]$$

reducirt gehörig und geht auf die Integrale über, so ergiebt sich:

$$17^*)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int \frac{(a\operatorname{sn} x+b)^r}{\operatorname{cn} x\,dx} = -\frac{a\operatorname{dn} x}{(a^2-k^2b^2)\,(r-1)\,(a\operatorname{sn} x+b)^{r-i}}\\
&-\frac{2r-3}{r-1}\cdot\frac{k^2b}{a^2-k^2b^2}\int \frac{\operatorname{cn} x\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-i}}\\
&+\frac{(r-2)k^2}{(r-1)\,(a^2-k^3b^2)}\int \frac{\operatorname{cn} x\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-2}}\\
&\text{und ebenso:}\\
&\int \frac{\operatorname{dn} x\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^r} = -\frac{a\operatorname{cn} x}{(a^2-b^2)\,(r-1)\,(a\operatorname{sn} x+b)^{r-1}}\\
&-\frac{2r-3}{r-1}\cdot\frac{b}{a^2-b^2}\int \frac{\operatorname{dn} x\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-1}}\\
&+\frac{(r-2)}{(r-1)\,(a^2-b^2)}\int \frac{\operatorname{dn} x\,dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^{r-2}}
\end{aligned}\right.$$

Auch diese Gleichungen gelten noch für $r=2$ und werden für $r=1$ ungültig. Da ferner

$$18^*)\quad \int \frac{dx}{(a\operatorname{sn} x+b)^r} = \frac{(-1)^{r-i}}{(r-1)!}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial b^{r-1}}\int \frac{dx}{a\operatorname{sn} x+b}$$

ist, so ist hiermit alles auf die einfachere Form zurückgeführt, wo der Nenner nur die erste Potenz $(a \operatorname{sn} x + b)$ enthält. Man findet ebenso die analogen Formeln:

14a*)
$$\left\{\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} &= \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-i} \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-i}} \\
&\quad - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-i} \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} \\
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r} &= - \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-i}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-i}} \\
&\quad - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-i}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r}
\end{aligned}\right.$$

15a*)
$$\left\{\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} &= \frac{\operatorname{sn} x^{m-i} \operatorname{dn} x^{p-i}}{a(r-1)(a \operatorname{cn} x + b)^{r-i}} \\
&- \frac{m-1}{a(r-1)} \left[\frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-2}} - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^p\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-1}}\right] \\
&+ \frac{k^2(p-1)}{a(r-1)} \left[\frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^{p-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-2}} - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^{p-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-1}}\right] \\
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r} &= \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^{n-1}}{ak^2(r-1)(a \operatorname{dn} x + b)^{r-1}} \\
&- \frac{m-1}{ak^2(r-1)} \left[\frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-2}} - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-1}}\right] \\
&+ \frac{n-1}{ak^2(r-1)} \left[\frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-2}} - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-1}}\right]
\end{aligned}\right.$$

16a*)
$$\left\{\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sn} x^m\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} \\
&+ \frac{2b}{a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-1}} - \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-2}} \\
\int \frac{\operatorname{dn} x^m\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} &= \frac{a^2 k_1^2 + b^2 k^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{dn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^r} \\
&- \frac{2b k^3}{a^2} \int \frac{\operatorname{dn} x^{m-2}\, dx}{a(\operatorname{cn} x + b)^{r-1}} + \frac{k^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{dn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{cn} x + b)^{r-2}} \\
\int \frac{\operatorname{sn} x^m\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r} &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 k^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r} \\
&+ \frac{2b}{k^2 a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-1}} - \frac{1}{k^2 a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-2}} \\
\int \frac{\operatorname{cn} x^m\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r} &= \frac{b^2 - a^2 k_1^2}{a^2 k^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^r} \\
&- \frac{2b}{a^2 k^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-1}} + \frac{1}{k^2 a^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{m-2}\, dx}{(a \operatorname{dn} x + b)^{r-2}}
\end{aligned}\right.$$

$$
17a^{*})\left\{
\begin{aligned}
&\int \frac{\operatorname{sn} x\,dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^r}=\frac{a\operatorname{dn} x}{(a^2k_1^{\,2}+b^2k^2)(r-1)(a\operatorname{cn} x+b)^{r-1}}\\
&+\frac{2r-3}{r-1}\,\frac{k^2b}{a^2k_1^{\,2}+b^2k^2}\int\frac{\operatorname{sn} x\,dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^{r-1}}\\
&+\frac{(r-2)k^2}{(r-1)(a^2k_1^{\,2}+b^2k^2)}\int\frac{\operatorname{sn} x\,dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^{r-2}}\\
&\int \frac{\operatorname{dn} x\,dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^3}=\frac{a\operatorname{sn} x}{(a^2-b^2)(r-1)(a\operatorname{cn} x+b)^{r-1}}\\
&-\frac{2r-3}{r-1}\,\frac{b}{a^2-b^2}\int\frac{\operatorname{dn} x\,dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^{r-1}}\\
&+\frac{r-2}{(r-1)(a^2-b^2)}\int\frac{\operatorname{dn} x\,dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^{r-2}}\\
&\int \frac{\operatorname{sn} x\,dx}{(\operatorname{dn} x+b)^r}=-\frac{a\operatorname{cn} x}{(a^2k_1^{\,2}-b^2)(r-1)(\operatorname{dn} x+b)^{r-1}}\\
&-\frac{2r-3}{r-1}\,\frac{b}{a^2k_1^{\,2}-b^2}\int\frac{\operatorname{sn} x\,dx}{(\operatorname{dn} x+b)^{r-1}}\\
&+\frac{r-2}{(r-1)(a^2k_1^{\,2}-b^2)}\int\frac{\operatorname{sn} x\,dx}{(a\operatorname{dn} x+b)^{r-2}}\,.\\
&\int \frac{\operatorname{cn} x\,dx}{(a\operatorname{dn} x+b)^r}=\frac{a\operatorname{sn} x}{(a^2-b^2)(r-1)(a\operatorname{dn} x+b)^{r-1}}\\
&-\frac{2r-3}{r-1}\,\frac{b}{a^2-b^2}\int\frac{\operatorname{cn} x\,dx}{(a\operatorname{dn} x+b)^{r-1}}\\
&+\frac{r-2}{(r-1)(a^2-b^2)}\int\frac{\operatorname{cn} x\,dx}{(a\operatorname{dn} x+b)^{r+2}}
\end{aligned}\right.
$$

$$
18a^{*})\left\{
\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{(a\operatorname{cn} x+b)^r}=\frac{(-1)^{r-1}\partial^{r-1}}{(r-1)!\,\partial b^{r-1}}\int\frac{dx}{a\operatorname{cn} x+b}\\
&\int\frac{dx}{(a\operatorname{dn} x+b)^r}=\frac{(-1)^{r-1}\partial^{r-1}}{(r-1)!\,\partial b^{r-1}}\int\frac{dx}{a\operatorname{dn} x+b}
\end{aligned}\right.
$$

Es erübrigt jetzt noch den Fall zu erledigen, der bisher stets ausgeschlossen wurde, wo nämlich $r=1$ ist. Man erhält nach dem für 14*) gewählten Vorgange *):

) Die Formeln 14b) sind nur der Vollständigkeit wegen angeführt, und liessen sich auch aus den entsprechenden 14*) und 14a*) für $r-1$ ableiten.

$$
14b^*)\quad \left\{
\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^q}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx &= \frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p\, dx \\
&\quad - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-1} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx \\
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{cn} x + b}\, dx &= \frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^p\, dx \\
&\quad - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-1} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{cn} x + b}\, dx \\
\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{dn} x + b}\, dx &= \frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-1}\, dx \\
&\quad - \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-4}}{a \operatorname{dn} x + b}\, dx
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Formeln verlieren ihre Giltigkeit für m, n, p gleich Null; es ist aber

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx &= \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p - \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx \\
&= \int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} - k^2 \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} \operatorname{sn} x^2}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx
\end{aligned}
$$

Wendet man auf den zweiten Teil dieser Integrale Formel 14b*) an, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx = \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx &= \frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p\, dx \\
&\quad + \frac{b}{a} \int \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx \\
&= \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx - \frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p\, dx \\
&\quad + \frac{b}{a^2} \int \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p\, dx - \frac{b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b}\, dx
\end{aligned}
$$

Das letzte Glied kann man mit dem ersten vereinigen, und hieraus findet man nun, wenn man gleichzeitig die sich aus der zweiten oben hingeschriebenen Form ergebende Gleichung und die analogen andern Formeln beifügt, das folgende System:

19a*) $$\int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b} dx = -\frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p dx$$
$$+ \frac{b}{a^2} \int \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p dx + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{sn} x + b} dx$$
$$= -\frac{k^2}{a} \int \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx + \frac{k^2 b}{a^2} \int \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2} dx$$
$$+ \frac{a^2 - k^2 b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x^{p-2}}{a \operatorname{sn} x + b} dx$$

19b*) $$\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{cn} x + b} dx = -\frac{1}{a} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x^p dx$$
$$+ \frac{b}{a^2} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^p dx + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{dn} x^p}{a \operatorname{cn} x + b} dx$$
$$= \frac{k^2}{a} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x^{p-2} dx - \frac{k^2 b}{a^2} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^{p-2} dx$$
$$+ \frac{k_1^2 a^2 + k^2 b^2}{a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{dn} x^{p-2}}{\operatorname{cn} x + b} dx$$

19c*)
$$\int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^n}{a \operatorname{dn} x + b} dx = -\frac{1}{k^2 a} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n \operatorname{dn} x dx + \frac{b}{k^2 a^2} \int \operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n dx$$
$$+ \frac{a^2 - b^2}{k^2 a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^{m-2} \operatorname{cn} x^n}{a \operatorname{dn} x + b} dx$$
$$= \frac{1}{k^2 a} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2} \operatorname{dn} x dx - \frac{b}{k^2 a^2} \int \operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2} dx$$
$$- \frac{k_1^2 a^2 - b^2}{k^2 a^2} \int \frac{\operatorname{sn} x^m \operatorname{cn} x^{n-2}}{a \operatorname{dn} x + b} dx$$

Die wiederholte Anwendung dieser Formeln führt stets auf solche Integrale, wo m, n, p gleich 1 oder 0 sind, dann aber müssen dieselben durch andere ersetzt werden. Hiefür ist nun

20*) $$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{a \operatorname{sn} x + b} dx = \frac{1}{a} \log(a \operatorname{sn} x + b) + C \\ &\int \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{a \operatorname{cn} x + b} dx = -\frac{1}{a} \log(a \operatorname{cn} x + b) + C \\ &\int \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{a \operatorname{dn} x + b} dx = -\frac{1}{k^3 a} \log(a \operatorname{dn} x + b) + C \end{aligned}\right.$$

Zur Bestimmung des Integrales

$$J = \int \frac{\operatorname{cn} x \, dx}{a \operatorname{sn} x + b}$$

kann man

$$\operatorname{sn} x = y$$

setzen; dann wird

$$\operatorname{cn} x\, dx = \frac{dy}{\operatorname{dn} x} = \frac{dy}{\sqrt{1-k^2y^2}},$$

also

$$J = \int \frac{dy}{(ay+b)\sqrt{1-k^2y^2}}$$

und mittels der Substitution

$$\frac{1}{ay+b} = z, \quad dy = -\frac{dz}{az^2};$$

$$1-k^2y^2 = \frac{(a^2-b^2k^2)z^2+2bk^2z-k^2}{a^2z^2}$$

$$J = -\int \frac{dz}{\sqrt{(a^2-b^2k^2)z^2+2bk^2z-k^2}}$$

$$= -\frac{1}{\mp\sqrt{a^2-b^2k^2}} \log\{2bk^2+2(a^2-b^2k^2)z$$

$$\pm 2\sqrt{a^2-b^2k^2}\sqrt{(a^2-b^2k^2)z^2+2bk^2z-k^2}\} + C$$

und durch Restitution des Wertes $z = \frac{1}{a\operatorname{sn} x+b}$ und gehörige Reduction:

$$J = -\frac{1}{\pm\sqrt{a^2-b^2k^2}} \log\left\{\frac{2abk^2\operatorname{sn} x + 2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2-b^2k^2}\operatorname{dn} x}{a\operatorname{sn} x+b}\right\} + C$$

und nach Absonderung des Factors $2a$ unter dem Logarithmus*):

21*)

$$\int \frac{\operatorname{cn} x\, dx}{a\operatorname{sn} x+b} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2k^2}} \log \frac{a+bk^2\operatorname{sn} x - \sqrt{a^2-b^2k^2}\operatorname{dn} x}{a\operatorname{sn} x+b} + C$$

und für die anderen Integrale:

$$\int \frac{\operatorname{dn} x\, dx}{a\operatorname{sn} x+b} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log \frac{a+b\operatorname{sn} x - \sqrt{a^2-b^2}\operatorname{cn} x}{a\operatorname{sn} x+b} + C$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} x\, dx}{a\operatorname{cn} x+b} = \frac{1}{\sqrt{a^2k_1^2+b^2k^2}} \log \frac{ak_1^2-bk^2\operatorname{cn} x + \sqrt{a^2k_1^3+b^2k^2}\operatorname{dn} x}{a\operatorname{cn} x+b} + C$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} x\, dx}{a\operatorname{cn} x+b} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log \frac{a+b\operatorname{cn} x + \sqrt{a^2-b^2}\operatorname{sn} x}{a\operatorname{cn} x+b} + C$$

) Ueber das Zeichen s. die Bemerkung nach den Formeln 21).

$$\int \frac{\operatorname{sn} x\, dx}{a \operatorname{dn} x + b} = \frac{1}{k\sqrt{b^2 - a^2 k_1^2}} \log \frac{a k_1^2 + b \operatorname{dn} x - \sqrt{b^2 - a^2 k_1^2}\, k \operatorname{cn} x}{a \operatorname{dn} x + b} + C$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} x\, dx}{a \operatorname{dn} x + b} = \frac{1}{k\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + b \operatorname{dn} x + \sqrt{a^2 - b^2}\, k \operatorname{sn} x}{a \operatorname{dn} x + b} + C$$

Aus den Formeln 21*) gehen für $a = 1$, $b = 0$ wieder die auf anderem Wege gefundenen Formeln 13*) hervor; das Zeichen der Quadratwurzel ist ganz beliebig, indem die für das positive und negative Zeichen entstehenden Ausdrücken identisch sind.

Endlich geht:

$$J = \int \frac{dx}{a \operatorname{sn} x + b}$$

durch die Substitution

$$y = \operatorname{sn} x, \quad dy = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx, \quad dx = \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}$$

über in:

22*)

$$\left\{\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{a \operatorname{sn} x + b} = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{\left(y + \frac{b}{a}\right) \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} \\
&\text{und ebenso:} \\
&\int \frac{dx}{a \operatorname{cn} x + b} = -\frac{1}{a k_1} \int \frac{dy}{\left(y + \frac{b}{a}\right) \sqrt{(1 - y^2)\left(1 + \frac{k_2}{k_1^2} y^2\right)}} \\
&\int \frac{dx}{a \operatorname{dn} x + b} = \frac{i}{a k_1} \int \frac{dy}{\left(y + \frac{b}{a}\right) \sqrt{(1 - y^2)\left(1 - \frac{y^2}{k_1^2}\right)}}
\end{aligned}\right.$$

so dass diese Integrale also sich durch elliptische Integrale dritter Gattung ausdrücken.

Hiermit wären nun auch die gebrochenen Functionen auf die einfachsten Integralausdrücke reducirt, und somit die eingangs gestellte Aufgabe gelöst. Ich will jedoch hier noch einige bemerkenswerte Integrale anführen, die sich unmittelbar durch Zurückführung auf das System 21*) integriren lassen, nämlich Integrale von der Form

$$\int \frac{P\, dx}{aM + bN}$$

wo M, N und P irgend welche zwei elliptischen Functionen bedeuten; ich will die Lösung für $P = 1$, $M = \operatorname{sn} x$, $N = \operatorname{cn} x$ durchführen und im Anschlusse an das Resultat auch wieder die analogen Ausdrücke zusammenstellen. Es ist

$$J=\int\frac{dx}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cn}\,x}=\int\frac{\frac{1}{\mathrm{cn}\,x}\,dx}{a\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}+b}$$

und mittels der mehrfach erwähnten Transformationsformeln

$$J=\int\frac{\mp\frac{k}{ik_1}\,\mathrm{cn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)dx}{\pm\frac{a}{ik_1}\,\mathrm{dn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)+b}$$

$$=-\int\frac{\mathrm{cn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)d\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)}{\frac{a}{k}\,\mathrm{dn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)\pm\frac{ik_1}{k}b}$$

$$=-\frac{1}{k\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+\frac{k_1{}^2}{k^2}b^2}}$$

$$\times\log\frac{\frac{a}{k}\pm\frac{ik_1}{k}b\,\mathrm{dn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)+\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+\frac{k_1{}^2}{k^2}b^2}.k\,\mathrm{sn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)}{\frac{a}{k}\,\mathrm{dn}\left(x+\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)\pm\frac{ik_1}{k}b}+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}}\log\frac{a-k_1{}^2b\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}+\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}\cdot\frac{\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}}{\pm aik_1\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}\pm 2k_1b}+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}}\log\frac{a\,\mathrm{cn}\,x-bk_1{}^2\,\mathrm{sn}\,x+\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}\,\mathrm{dn}\,x}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cn}\,x}+C$$

wobei schliesslich der Ausdruck $-\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}\log\mp\frac{i}{k_1}$ in die Constante hineingezogen wurde. Es ist aber auch

$$J=\int\frac{\pm\frac{k}{ik_1}\,\mathrm{cn}\left(x-\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)dx}{\pm\frac{a}{ik_1}\,\mathrm{dn}\left(x-\frac{\Omega}{4}\pm\frac{\Omega'}{2}\right)+b}$$

und in der oben ausführlich hingeschriebenen Weise fortfahrend:

$$J=+\frac{1}{\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}}\log\frac{a\,\mathrm{cn}\,x-bk_1{}^2\,\mathrm{sn}\,x-\sqrt{a^2+k_1{}^2b^2}\,\mathrm{dn}\,x}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cn}\,x}+C$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner des Logarithmus mit

$$a\,\mathrm{cn}\,x - bk_1^2\,\mathrm{sn}\,x + \sqrt{a^2+k_1^2b^2}\,\mathrm{dn}\,x,$$

so wird der Zähler:

$$\begin{aligned}
&a^2\,\mathrm{cn}\,x^2 - 2abk_1^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,b^2k_1^4\,\mathrm{sn}\,x^4 - a^2\,\mathrm{dn}\,x^2 - k_1^2b^2\,\mathrm{dn}\,x^2\\
= {}&a^2(\mathrm{cn}\,x^2 - \mathrm{dn}\,x^2) - 2abk_1^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x - k_1^2b^9(\mathrm{dn}\,x^2 - k_1^2\,\mathrm{sn}\,x^2)\\
= {}&- a^2k_1^2\,\mathrm{sn}\,x^2 - 2abk_1^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x - k_1^2b^2\,\mathrm{cn}\,x^2\\
= {}&- k_1^2(a\,\mathrm{sn}\,x + b\,\mathrm{cn}\,x)^2,
\end{aligned}$$

so dass

$$J = +\frac{1}{\sqrt{a^2+k_1^2b^2}}\log\frac{-k_1^2(a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cn}\,x)}{a\,\mathrm{cn}\,x - bk_1^2\,\mathrm{sn}\,x + \sqrt{a^2-k_1^2b^2}\,\mathrm{dn}\,x}$$

wird, welcher Ausdruck mit dem zuerst erhaltenen identisch ist*). Man erhält auf diese Weise die folgenden Integrale:

$$23^*)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cn}\,x}\\
&\quad=\frac{1}{\sqrt{a^2+k_1^2b^2}}\log\frac{a\,\mathrm{cn}\,x - bk_1^2\,\mathrm{sn}\,x - \sqrt{a^2+b^2k_1^2}\,dx}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cn}\,x}+C\\
&\int\frac{dx}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{dn}\,x}\\
&\quad=\frac{1}{\sqrt{a^2-k_1^2b^2}}\log\frac{a\,\mathrm{dn}\,x + bk_1^2\,\mathrm{sn}\,x - \sqrt{a^2-k_1^2b^2}\,\mathrm{cn}x}{a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{dn}\,x}+C\\
&\int\frac{dx}{a\,\mathrm{cn}\,x+b\,\mathrm{dn}\,x}\\
&\quad=\frac{1}{k_1\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a\,\mathrm{dn}\,x + b\,\mathrm{cn}\,x + k_1\sqrt{a_2-b^2}\,\mathrm{sn}x}{a\,\mathrm{cn}\,x+b\,\mathrm{dn}\,x}+C
\end{aligned}\right.$$

---

*) Man könnte auch

$$J = \int\frac{\frac{1}{\mathrm{sn}\,x}\,dx}{b\,\frac{\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}+a}$$

setztn; führt man hiefür die Rechnung wie oben durch, so erhält man (wie auch stets bei den verschiedenen Rechnungsarten der folgenden Integrale) denselben Wert.

$$\left\{\begin{aligned}
&\int \frac{\operatorname{dn} x\, dx}{a \operatorname{sn} x + b \operatorname{cn} x} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{b \operatorname{sn} x - a \operatorname{cn} x + \sqrt{a^2+b^2}}{a \operatorname{sn} x + b \operatorname{cn} x} + C \\
&\int \frac{\operatorname{cn} x\, dx}{a \operatorname{sn} x + b \operatorname{dn} x} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2k^2}} \log \frac{bk^2 \operatorname{sn} x - a \operatorname{dn} x + \sqrt{a^2+b^2k^2}}{a \operatorname{sn} x + b \operatorname{dn} x} + C \\
&\int \frac{\operatorname{sn} x\, dx}{a \operatorname{cn} x + b \operatorname{dn} x} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2k^2}} \log \frac{a \operatorname{dn} x + bk^2 \operatorname{cn} x + k_1 \sqrt{a^2-b^2k^2}}{a \operatorname{cn} x + b \operatorname{dn} x} + C
\end{aligned}\right.$$

Ich kehre nun wieder zu den Relationen 13*) zurück, um aus denselben einige weitere Folgerungen zu ziehen. Es ist:

$$-\int \frac{dx}{\operatorname{sn} x} = \log \frac{\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} - \log c'$$

$$= \log \frac{\operatorname{cn} x^2 - \operatorname{dn} x^2}{\operatorname{sn} x(\operatorname{cn} x - \operatorname{dn} x)} - \log c' = \log \frac{-k_1{}^2 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x - \operatorname{dn} x} - \log c'$$

$$= -\log \frac{\operatorname{cn} x - \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} - \log\left(-\frac{c'}{k_1{}^2}\right),$$

also:

$$\text{IV.} \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} &= c' e^{-\int \frac{dx}{\operatorname{sn} x}} \\
\frac{\operatorname{cn} x - \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} &= -\frac{k_1{}^2}{c'} e^{+\int \frac{dx}{\operatorname{sn} x}}
\end{aligned}\right.$$

und aus den anderen:

$$\text{V.} \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\operatorname{dn} x + k_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} &= c'' e^{+k_1 \int \frac{dx}{\operatorname{cn} x}} \\
\frac{\operatorname{dn} x - k_1 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} &= \frac{1}{c''} e^{-k_1 \int \frac{dx}{\operatorname{cn} x}}
\end{aligned}\right.$$

$$\text{VI.}\quad\begin{cases}\dfrac{i\,\mathrm{cn}\,x-k_1\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}=c''e^{+ik_1\int\frac{dx}{\mathrm{dn}x}}\\[2ex]\dfrac{i\,\mathrm{cn}\,x+k_1\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}=-\dfrac{1}{c''}\,e^{-ik_1\int\frac{dx}{\mathrm{dn}\,x}}\end{cases}$$

$$\text{VII.}\quad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{dn}\,x+k_1}{\mathrm{cn}\,x}=e_1e^{+k_1\int\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}dx}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d\,n}x-k_1}{\mathrm{cn}\,x}=\dfrac{k^2}{c_1}e^{-k_1\int\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}dx}\end{cases}$$

$$\text{VIII.}\quad\begin{cases}\dfrac{ik\,\mathrm{cn}\,x+k_1}{\mathrm{dn}\,x}=c_2\,e^{-ikk_1\int\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}dx}\\[2ex]\dfrac{ik\,\mathrm{cn}\,x-k_1}{\mathrm{dn}\,x}=-\dfrac{1}{c_2}\,e^{+ikk_1\int\frac{\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}dx}\end{cases}$$

$$\text{IX.}\quad\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=c_3e^{+\int\frac{\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}dx}\\[2ex]\dfrac{1+\mathrm{dn}x}{\mathrm{sn}\,x}=\dfrac{k^2}{c_3}e^{-\int\frac{\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}dx}\end{cases}$$

$$\text{X.}\quad\begin{cases}\dfrac{1+k\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}=c_4e^{+k\int\frac{\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}dx}\\[2ex]\dfrac{1-k\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}=\dfrac{1}{c_4}e^{-k\int\frac{\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}dx}\end{cases}$$

$$\text{XI.}\quad\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=c_5e^{+\int\frac{\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}dx}\\[2ex]\dfrac{1+\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=\dfrac{1}{c_5}e^{-\int\frac{\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}dx}\end{cases}$$

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} \dfrac{1+\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x} = c_6 e^{+\int \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}dx} \\[2ex] \dfrac{1-\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x} = \dfrac{1}{c_6} e^{-\int \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}dx} \end{cases}$$

Werden nun je zwei zusammengehörige Ausdrücke einmal addirt, einmal subtrahirt, so findet sich

$$\text{IVa.}\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x} = \tfrac{1}{2}c' e^{-\int \frac{dx}{\operatorname{sn}x}} - \tfrac{1}{2}\dfrac{k_1^2}{c'} e^{+\int \frac{dx}{\operatorname{sn}x}} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x} = \tfrac{1}{2}c' e^{-\int \frac{dx}{\operatorname{sn}x}} - \tfrac{1}{2}\dfrac{k_1^2}{c'} e^{+\int \frac{dx}{\operatorname{sn}x}} \end{cases}$$

$$\text{Va.}\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x} = \tfrac{1}{2}c'' e^{+k_1\int \frac{dx}{\operatorname{cn}x}} + \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{c''} e^{-k_1\int \frac{dx}{\operatorname{cn}x}} \\[2ex] k_1\dfrac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x} = \tfrac{1}{2}c'' e^{+k_1\int \frac{dx}{\operatorname{cn}x}} - \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{c''} e^{-k_1\int \frac{dx}{\operatorname{cn}x}} \end{cases}$$

$$\text{VIa.}\quad \begin{cases} i\dfrac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x} = \tfrac{1}{2}c''' e^{+ik_1\int \frac{dx}{\operatorname{dn}x}} - \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{c'''} e^{-ik_1\int \frac{dx}{\operatorname{dn}x}} \\[2ex] k_1\dfrac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x} = \tfrac{1}{2}c''' e^{-ik_1\int \frac{dx}{\operatorname{dn}x}} - \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{c'''} e^{-ik_1\int \frac{dx}{\operatorname{dn}x}} \end{cases}$$

$$\text{VIIa.}\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x} = \tfrac{1}{2}c_1 e^{+k_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx} + \tfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{c_1} e^{-k_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}nx} \\[2ex] \dfrac{k_0}{\operatorname{cn}x} = c_1 e^{+k_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx} - \tfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{c_1} e^{-k_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx} \end{cases}$$

$$\text{VIIIa.}\quad \begin{cases} \dfrac{ik\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x} = \tfrac{1}{2}c_2 e^{-ikk_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx} - \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{c_2} e^{+ikk_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx} \\[2ex] \dfrac{k_1}{\operatorname{dn}x} = c_2 e^{-ikk_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx} + \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{c_2} e^{+ikk_1\int \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx} \end{cases}$$

IXa.
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sn} x} = \tfrac{1}{2} c_3 e^{+\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} dx} + \tfrac{1}{2} \dfrac{k^2}{c_3} e^{-\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} dx} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} = - c_3 e^{+\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} dx} + \tfrac{1}{2} \dfrac{k^2}{c_3} e^{-\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} dx} \end{cases}$$

Xa.
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{dn} x} = \tfrac{1}{2} c_4 e^{+k\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} dx} + \tfrac{1}{2} \dfrac{1}{c_4} e^{-k\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} dx} \\[2ex] k\dfrac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} = \tfrac{1}{2} c_4 e^{+k\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} dx} - \tfrac{1}{2} \dfrac{1}{e_4} e^{-k\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} dx} \end{cases}$$

XIa
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sn} x} = \tfrac{1}{2} c_5 e^{+\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} dx} + \tfrac{1}{2} \dfrac{1}{c_5} e^{-\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} dx} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} = - \tfrac{1}{2} c_5 e^{+\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} dx} + \tfrac{1}{2} \dfrac{1}{c_5} c^{-\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} dx} \end{cases}$$

XIIa.
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{cn} x} = \tfrac{1}{2} c_6 e^{+\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} dx} + \tfrac{1}{2} \dfrac{1}{c_6} e^{-\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} dx} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} = \tfrac{1}{2} c_6 e^{+\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} dx} - \tfrac{1}{2} \dfrac{1}{c_6} e^{-\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} dx} \end{cases}$$

Aus den Ausgangsgleichungnn 13*) lassen sich nun die unteren Grenzen der Integrale leicht so bestimmen, dass die Constanten möglichst einfache Werte annehmen. Setzt man nämlich für die unteren Grenzen der Reihe nach

24*)
$$\begin{cases} \alpha' = (2m'+1)\dfrac{\Omega}{4} + n'\Omega'; \quad \alpha'' = m''\dfrac{\Omega}{2} + n''\Omega'; \\[2ex] \alpha_1 = m_1\dfrac{\Omega}{2} + n_1\Omega'; \quad \alpha_2 = (2m_2+1)\dfrac{\Omega}{4} + n_2\Omega'; \\[2ex] \alpha_4 = m_4\dfrac{\Omega}{2} + n_4\Omega'; \quad \alpha_5 = (2m_5+1)\dfrac{\Omega}{4} + n_5\Omega'; \\[2ex] \alpha''' = m'''\dfrac{\Omega}{2} + n''\Omega' \\[2ex] \alpha_3 = (2m_3+1)\dfrac{\Omega}{4} + n''\Omega' \\[2ex] \alpha_6 = m_6\dfrac{\Omega}{2} + n_6\Omega' \end{cases}$$

so werden die Constanten:

$$c' = (-1)^{m'+n'} k_1 = \frac{k_1^{\,2}}{c'}\,; \quad c'' = \frac{1}{c''} = (-1)^{m''};$$

$$c''' = (-1)^{m'''} i \frac{1}{c'''} = -(-1)^{m'''} i$$

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= \frac{1+(-1)^{n_1}k_1}{(-1)^{m_1}} \\ \frac{k^2}{c_1} &= \frac{1-(-1)^{n_1}k_1}{(-1)^{m_1}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} c_2 &= (-1)^{n_2} \\ \frac{1}{c_2} &= (-1)^{n_2} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} c_3 &= \frac{1-(-1)^{n_3}k_1}{(-1)^{m_3}} \\ \frac{k^2}{c_1} &= \frac{1+(-1)^{n_3}k_1}{(-1)^{m_3}} \end{aligned}\right.$$

$$c_4 = \frac{1}{c_4} = (-1)^{n_4}$$

$$c_5 = \frac{1}{c_5} = (-1)^{m_5}; \quad c_6 = \frac{1}{c_6} = (-1)^{m_6+n_6}$$

Wie man sieht, drücken sich jetzt die elliptischen Functionen (bzhw. Quotienten derselben) durch die Summen und Differenzen von Exponentialfunctionen aus. Setzt man zur Abkürzung

$$25^*)\quad \left\{\begin{aligned} & e^{+\int \frac{dx}{\operatorname{sn} x}} = \Sigma \qquad & e^{+k_1 \int \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} dx} = A \\ & e^{+k_1 \int \frac{dx}{\operatorname{cn} x}} = \Gamma \qquad & e^{+ikk_1 \int \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} dx} = B \\ & e^{+ik_1 \int \frac{dx}{\operatorname{dn} x}} = \Delta \qquad & e^{+\int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x} dx} = C \\ & & e^{+k \int \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} dx} = D \\ & & e^{+\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} dx} = E \\ & & e^{+\int \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} dx} = F \end{aligned}\right.$$

$$
26^*)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\Sigma+\dfrac{1}{\Sigma}=\sigma_1(x) & A+\dfrac{1}{A}=\varphi_1(x) & D+\dfrac{1}{D}=\varphi_4(x)\\[2ex]
\Sigma-\dfrac{1}{\Sigma}=\sigma_2(x) & A-\dfrac{1}{A}=\psi_2(x) & D-\dfrac{1}{D}=\psi_4(x)\\[2ex]
\Gamma+\dfrac{1}{\Gamma}=\gamma_1(x) & B+\dfrac{1}{B}=\varphi_2(x) & E+\dfrac{1}{E}=\varphi_5(x)\\[2ex]
\Gamma-\dfrac{1}{\Gamma}=\gamma_2(x) & B-\dfrac{1}{B}=\psi_2(x) & E-\dfrac{1}{E}=\psi_5(x)\\[2ex]
\Delta+\dfrac{1}{\Delta}=\delta_1(x) & C+\dfrac{1}{C}=\varphi_3(x) & F+\dfrac{1}{F}=\varphi_6(x)\\[2ex]
\Delta-\dfrac{1}{\Delta}=\delta_2(x) & C-\dfrac{1}{C}=\psi_3(x) & F-\dfrac{1}{F}=\psi_6(x)
\end{array}\right.
$$

so findet man nun das folgende System von Formeln:

$$
27)^*\quad\left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x}=-\dfrac{(-1)^{m'+n'}k_1}{2}\sigma_2(x)\\[2ex]\dfrac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}=\dfrac{(-1)^{m'+n'}k_1}{2}\sigma_1(x)\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}\operatorname{cn}x=\dfrac{(-1)^{m_1}2k_1}{\psi_1(x)+(-1)^{n_1}\varphi_1(x)}\\[2ex]\operatorname{dn}x=k_1\dfrac{\varphi_1(x)+(-1)^{n_1}k_1\psi_1(x)}{\psi_1(x)+(-1)^{n_1}k_1\varphi_1(x)}\end{array}\right.\\[5ex]
\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}=\dfrac{(-1)^{m''}}{2}\gamma_1(x)\\[2ex]\dfrac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}=\dfrac{(-1)^{m''}}{2k_1}\gamma_2(x)\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}\operatorname{cn}x=-\dfrac{k}{ik_1}\dfrac{\psi_2(x)}{\varphi_2(x)}\\[2ex]\operatorname{dn}x=2k_1\dfrac{(-1)^{n_2}}{\varphi_2(x)}\end{array}\right.\\[5ex]
\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}=\dfrac{(-1)^{m'''}}{2}\delta_1(x)\\[2ex]\dfrac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}=-\dfrac{(-1)^{m'''}i}{2k_1}\delta_2(x)\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sn}x=\dfrac{2(-1)^{m_3}}{\varphi_3(x)-(-1)^{n_3}k_1\psi_3(x)}\\[2ex]\operatorname{dn}x=\dfrac{-\psi_3(x)+(-1)^{n_3}k_1\varphi_3(x)}{\varphi_3(x)-(-1)^{n_3}k_1\psi_3(x)}\end{array}\right.\\[5ex]
\multicolumn{2}{c}{\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sn}x=\dfrac{1}{k}\dfrac{\psi_4(x)}{\varphi_4(x)}\\[2ex]\operatorname{dn}x=\dfrac{2(-1)^{n_4}}{\varphi_4(x)}\end{array}\right.}\\[5ex]
\multicolumn{2}{c}{\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sn}x=\dfrac{2(-1)^{m_5}}{\varphi_5(x)}\\[2ex]\operatorname{cn}x=-\dfrac{\psi_5(x)}{\varphi_5(x)}\end{array}\right.}
\end{array}\right.
$$

$$\left\{ \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn} x &= \frac{\psi_6(x)}{\varphi_6(x)} \\ \operatorname{cn} x &= \frac{2(-1)^{m_6+n_6}}{\varphi_6(x)} \end{aligned} \right. \right.$$

Zwischen den Functionen Σ, Γ, Δ, so wie unter den 6 Functionen A, B, C, D finden einige bemerkenswerte Relationen statt, die sich durch Vergleichung der einzelnen Gleichungen in 27*) herleiten lassen. Es ist nämlich:

$$\frac{-(-1)^{m'+n'}}{2}\,\sigma_2(x) = (-1)^{m''}\frac{2k_1}{\gamma_2(x)}$$

$$\frac{(-1)^{m'+n'}k_1}{2}\,\sigma_1(x) = (-1)^{m''}i\,\frac{2k_1}{\delta_2(x)}$$

$$\frac{(-1)^{m''}}{2}\,\gamma_1(x) = (-1)^{m''}\frac{2}{\delta_1(x)}$$

und durch die Substitution aus 26*) und entsprechende Reduction:

$$\text{XIII.}\qquad \left\{ \begin{aligned} (\Sigma^2-1)(\Gamma^2-1) &= -4(-1)^{m'+m''+n'}\Sigma\Gamma \\ (\Sigma^2+1)(\Delta^2-1) &= 4i(-1)^{m'+m''+n'}\Sigma\Delta \\ (\Gamma^2+1)(\Delta^2+1) &= 4(-1)^{m''+m'''}\Gamma\Delta \end{aligned} \right.$$

Da nun

$$\Sigma^2 + \frac{4(-1)^{m'+m''+n'}}{\Gamma^2-1}\,\Sigma\Gamma - 1 = 0$$

aus der ersten folgt, so wird:

$$\Sigma = -\frac{2(-1)^{m'+m''+n'}\Gamma}{\Gamma^2-1} \pm \sqrt{\frac{4\Gamma^2}{(\Gamma^2-1)^2}+1}$$

$$= \pm\frac{(\Gamma \mp (-1)^{m'+m''+n'})^2}{\Gamma^2-1}$$

Setzt man nun

$$m' = m'' = m''' = n' = n'' = n''' = 0,$$

so wird

$$\alpha' = \frac{\Omega}{4},\quad \alpha'' = 0,\quad \alpha''' = 0$$

und

$$\Sigma = \pm\frac{(\Gamma \mp 1)^2}{\Gamma^2-1}$$

Um über das Zeichen zu entscheiden, kann man einen speciellen Fall vornehmen und $k = 0$ setzen, wodurch dann

$$\Sigma = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x,\quad \Gamma = \operatorname{tg}(45+\tfrac{1}{2}x)\quad \Delta = e^{ix}$$

wird. Da nun

$$\Sigma_1 = + \frac{(\Gamma-1)^2}{\Gamma^2-1} = + \frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} = \frac{\operatorname{tg}(45+\frac{1}{2}x)-1}{\operatorname{tg}(45+\frac{1}{2}x)+1} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

und

$$\Sigma_2 = - \frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma^2-1} = - \frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} = - \cot\frac{x}{2}$$

ist, so sieht man, dass die oberen Zeichen beizubehalten sind, und es wird

$$\Sigma = \frac{\Gamma-1}{\Gamma+1}$$

Da nun die erste Formel XIII. symmetrisch in Bezug auf Σ und Γ ist, so wird auch

$$\Gamma = \pm \frac{(\Sigma \mp 1)^2}{\Sigma^2-1},$$

Durch Specialisirung findet man aber hier, dass die unteren Zeichen Geltung haben, also:

$$\Gamma = - \frac{\Sigma+1}{\Sigma-1}$$

was auch aus der obigen Formel für Σ gefunden werden kann. Genau so kann man für die beiden anderen Gleichungen in XIII vorgehen und findet dann (für $m' = m'' = m''' = n' = n'' = n''' = 0$):

$$\left\{\begin{array}{ll} \Sigma = \dfrac{\Gamma-1}{\Gamma+1} & \Gamma = -\dfrac{\Sigma+1}{P-1} \\[2ex] \Sigma = -i\dfrac{\Delta-1}{\Delta+1} & \Delta = -\dfrac{\Sigma-i}{\Sigma+i} \\[2ex] \Gamma = -i\dfrac{\Delta+i}{\Delta-i} & \Delta = i\dfrac{\Gamma-i}{\Gamma+i} \end{array}\right.$$

Multiplicirt man die Gleichungen XIII. miteinander, so wird:

29a*) $$\Sigma^4-1)(\Gamma^4-1)(\Delta^4-1) = -64 i \Sigma^2 \Gamma^2 \Delta^2$$

Da ferner aus 28*)

$$\begin{aligned} \Gamma\Sigma &= \Gamma - \Sigma - 1 \\ \Sigma\Delta &= -\Sigma - i\Delta + i \\ \Gamma\Delta &= i\Gamma - i\Delta + 1 \end{aligned}$$

folgt, so findet man durch Mutiplication dieser drei Gleichungen, indem man nachher rechts die Producte je zweier der drei Grössen Σ, Γ, Δ wieder durch obige Gleichungen hinausschafft:

$$\Sigma^2\Gamma^2\Delta^2 = \Sigma^2 - \Gamma^2 + \Delta^2 + 4\Sigma + 4\Gamma - 4\Delta - 4i\Sigma + 4i\Gamma + 4i\Delta - 8i$$

oder

$$\Sigma^2\Gamma^2\Delta^2 = (\Sigma+2-2i)^2-(\Gamma-2-2i)^2+(\Delta-2+2i)^2+16i$$

daher auch

29b*) $(\Sigma^4-1)(\Gamma^4-1)(\Delta^4-1)$
$$= -64i\{(\Sigma+2-2i)^3-(\Gamma-2-2i)^2+(\Delta-2+2i)^2\}+1024$$

Aus den 12 letzten Formeln in 27*) erhält man ferner, wenn man für die φ und ψ die durch 26*) definierten Werte einsetzt:

a) $$\frac{(-1)^{m_3}\, 2C}{(C^2+1)-(-1)^{n_3}k_1(C^2-1)} = \frac{1}{k}\frac{D^2-1}{D^2+1} = (-1)^{m}\frac{2E}{E^2+1} = \frac{F^2-1}{F^2+1}$$

b) $$\frac{(-1)^{m_1}2k_1A}{(A^2-1)+(-1)^{n_1}k_1(A^2+1)} = -\frac{k_1}{ik}\frac{B^2-1}{B^2+1} = -\frac{E^2-1}{E^2+1} = (-1)^{m_6+n_6}\frac{2F}{F^2+1}$$

c) $$k_1\frac{(A^2+1)+(-1)^{n_1}k_1(A^2-1)}{(A^2-1)+(-1)^{n_1}k_1(A^2+1)} = \frac{2k_1(-1)^{n_2}B}{B^2+1} = -\frac{(C^2-1)+(-1)^{n_3}k_1(C^2+1)}{(C^2+1)-(-1)^{n_3}k_1(C^2-1)} = (-1)^{n_4}\frac{2D}{D^2+1}$$

Sucht man nun aus b) B^2 durch A auszudrücken, so findet man dafür
$$B^2 = \frac{A^2[1+(-1)^{n_1}k_1]-2ik(-1)^{m_1}A-[1-(-1)^{n_1}k_1]}{A^2[1+(-1)^{n_1}k_1]+2ik(-1)^{m_1}A-[1-(-1)^{m_1}k_1]}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem Nenner, so lässt sich die Quadratwurzel ziehen und man findet:

$$B = \pm\frac{A^2[1+(-1)^{n_1}k_1]+[1-(-1)^{n_1}k_1]}{A^2[1+(-1)^{n_1}k_1]+2ik(-1)^{m_1}A-[1-(-1)^{n_1}k_1]}$$

Um über das Zeichen zu entscheiden, könnte man wieder specielle Fälle der Integrale (etwa $k=0$) betrachten; kürzer gelangt man hier zum Ziele, wenn man B^2+1 bildet, seinen Wert in c) substituirt und daraus B bestimmt, denn offenbar müssen beide Ausdrücke denselben Wert für B liefern; in der Tat wird

30a*) $$B = (-1)^{n_2}\frac{(A^2+1)+(-1)^{n_1}(A^2-1)}{(A^2-1)+(-1)^{n_1}k_1(A^2+1)+2ik(-1)^{m_1}A}$$

Ebenso erhält man aus c):

$$A^2 = -\frac{1-(-1)^{n_1}k_1}{1+(-1)^{n_1}k_1}\left(\frac{1+(-1)^{n_2}B}{1-(-1)^{n_2}B}\right)^2;$$

$$A = \pm\frac{1-(-1)^{n_1}k_1}{k}\,i\cdot\frac{1+(-1)^{n_2}B}{1-(-1)^{n_2}B}$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in b) entsteht:

$$\text{30b*)} \qquad A - (-1)^{m_1}\frac{1-(-1)^{n_1}k_1}{k}\,i\cdot\frac{1+(-1)^{n_2}B}{1-(-1)^{n_2}B}$$

Ebenso folgen aus der Verbindung von a) und c) die folgenden Relationen zwischen C und D

$$\text{31*)} \quad \left\{\begin{aligned} D &= (-1)^{n_4+1}\frac{(C^2-1)-(-1)^{n_3}k_1(C^2+1)}{(C^2+1)-(-1)^{n_3}k_1(C^2-1)-(-1)^{m_3}2Ck} \\ C &= (-1)^{m_3}\frac{1+(-1)^{n_3}k_1}{k}\cdot\frac{D-(-1)^{n_4}}{D+(-1)^{n_4}} \end{aligned}\right.$$

Und aus a) und b):

$$\text{32*)} \quad \left\{\begin{aligned} F &= -(-1)^{m_6+a_6}\frac{E+(-1)^{m_5}}{E-(-1)^{m_5}} \\ E &= (-1)^{m_5}\frac{F-(-1)^{m_6+n_6}}{F+(-1)^{m_6+n_6}} \end{aligned}\right.$$

Auch zwischen den vorderen Integralen bestehen Beziehungen, deren Herleitung nach obigem unmittelbar klar ist; es ist jedoch zu bemerken, dass diese Relationen nicht mehr linear ausdrückbar sein werden, d. h. dass sich die Integrale nicht mehr rational durch einander ausdrücken werden; man übersieht sofort, dass man Quadratwurzeln hineinbekömmt; in der Tat ist z. B.

$$C = (-1)^{m_1+m_3}\frac{1-k_1}{1-(-1)^{n_3}k_1}\sqrt{\frac{A^2-\dfrac{[1-(-1)^{n_1}k_1]^2}{(1-k_1^2)^2}}{A^2-\dfrac{[1-(-1)^{n_1}k_1]^2}{(1+k_1)^2}}}$$

u. s. f.

Schliesslich will ich noch die einfachsten Beziehungen zwischen den Ihtegralen ansetzen, welche aus den Formeln 30), 31), 32) entstehen, wenn man in denselben die sämmtlichen m und n gleich 0 setzt; sie sind:

33*)

$$e^{+k_1\int\limits_0 \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx} = \frac{1-k_1}{k}\cdot i\,\frac{1+e^{ikk_1\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx}}{1-e^{ikk_1\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx}}$$

$$e^{ikk_1\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx} = \frac{(1+k_1)e^{+k_1\int\limits_0 \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx}+(1-k_1)^{-k_1\int\limits_0 \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx}}{(1+k_1)e^{+k_1\int\limits_0 \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx}-(1-k_1)e^{-k_1\int\limits_0 \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{cn}x}dx}+2ik}$$

$$e^{+\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x}dx} = \frac{1}{1-k_1}\,\frac{e^{+k\int\limits_0 \frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}dx}-1}{e^{+k\int\limits_0 \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}dx}+1}$$

$$e^{+k_1\int\limits_0 \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}dx} = -\,\frac{(1-k_1)e^{+\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x}dx}-(1+k_1)e^{-\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x}dx}}{(1-k_1)e^{+\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}dx}+(1+k_1)e^{-\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{sn}x}dx}-2k}$$

$$e^{+\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}dx} = \frac{e^{+\int\limits_0 \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}dx}-1}{e^{+\int\limits_0 \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}dx}+1}$$

$$e^{+\int\limits_0 \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}dx} = -\,\frac{e^{+\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}dx}+1}{e^{+\int\limits_{\frac{\Omega}{4}} \frac{\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}dx}-1}$$

Wien, im Juli 1881.

XXIII.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von N. XXV. in T. LXV.

Artikel VIII. (§ 47—§ 61.)

Zur Bestimmung der complexen Wurzeln.

§ 47.

I. Wir setzen die algebraische Gleichung in der allgemeinsten Form voraus:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} f(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} z + \alpha_n = \sum\limits_0^n \alpha_m z^{n-m} \\ \qquad = P + Qi \\ \text{wo} \\ \alpha_m = a_m(\cot A_m + i \sin A_m), \quad a_m > 0, \quad A_m \gtreqq 0 \\ z = x + yi = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \quad \varrho > 0, \quad \vartheta \gtreqq 0; \\ \text{so dass} \\ \qquad P = \sum\limits_0^n a_m \varrho^{n-m} \cos(A_m + (n-m)\vartheta) \\ \qquad Q = \sum\limits_0^n \quad ,, \quad \sin(\quad ,, \quad). \end{array}\right.$$

Es seien die Wurzeln dieser Gleichung zu trennen und näherungsweise zu berechnen, oder, geometrisch, indem wir ein Axensystem OXY zu Grunde legen: die den Wurzeln $w = x + yi$ entsprechenden, sogenannten Wurzelpunkte W mit den Coordinaten x, y aufzusuchen.

(2) Die Wurzelpunkte sind die Durchschnitte der Curven
$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Betrachten wir die Hülfsgleichung

$$g(z) = \Sigma \beta_m z^{e_m} = 0 \tag{3}$$
worin $\beta_m = b_m(\cos B_m + i \sin B_m)$, $C_m = k a_m$, $B_m = A_m + \tau$, $e_m = n + \lambda - m$, λ, k und τ beliebig reell und constant.

Es ist
$$g(z) = F + Gi$$

(3)a
$$F = \sum_0^n k a_m \varrho^{e_m} \cos w_m = k\varrho^\lambda (\cos t \,.\, P - \sin t \,.\, Q)$$
$$G = \sum_0^n k a_m \varrho^{e_m} \sin w_m = k\varrho^\lambda (\sin t \,.\, P + \cos t \,.\, Q)$$
wo
$$w_m = A_m + \tau + e_m \vartheta, \quad t = \tau + \lambda \vartheta.$$

(3)b
$$g(z) = k(\cos \tau + i \sin \tau)\, \tau^\lambda f(z),$$
woraus folgt:

Diejenige Gleichung (3), welche aus der ursprünglichen entsteht, indem man die Moduln der Coefficienten mit k multiplicirt, die Argumente derselben um τ und die Exponenten von z um λ vermehrt, hat ausser den Wurzeln von $z^\lambda = 0$ dieselben Wurzeln wie $f(z) = 0$.

(4) geom.: Die Curven $F = 0$, $G = 0$ gehen durch die Wurzelpunkte W.

Statt der gegebenen Gleichung behandeln wir daher der Willkürlichkeit von k, τ, λ wegen mit Vorteil die allgemeinere
$$g(z) = 0$$

worin k der Einfachheit halber $= 1$ sei.

(Letztere geht in erstere über wenn $> = 0$ und $\tau = 0$).

Die erste Derivirte von $g(z)$ ist

$$(5)\quad \begin{cases} g'(z) = \sum\limits_0^u e_m \beta_m z^{e_m - 1} = F' + G' i \\[2ex] F' = \sum\limits_0^n k a_m e_m \varrho^{e_m - 1} \cos(A_m + \tau + (e_m - 1)\vartheta) \\[2ex] G' = \sum\limits_0^n \quad „ \quad \sin(\quad „ \quad). \end{cases}$$

Auf Hülfsgleichungen von der Form (3), wo k gewisse Functionen von m sind, werden wir im Folgenden wiederholt geführt.

II. Die Ausdrücke, welche entstehen, wenn man F und G mit $\varrho^{p-\lambda}$ multiplicirt, unter

p vorläufig eine beliebige reelle Zahl verstanden, mögen mit H und K bezeichnet sein,

sodass

$$(1)\quad \begin{cases} H = \sum\limits_0^n k a_m \varrho^{n+p-m} \cos w_m = \overset{r}{k} \varrho (\cos t . P - \sin t . Q) \\[2ex] K = \sum\limits_0^n \quad „ \quad \sin w_m = \overset{r}{k} \varrho (\sin t . P + \cos t . Q) \end{cases}$$

ferner diejenigen, die aus K hervorgehen, dadurch, dass statt a_m, A_m, n : $u a_m$, $A_m + v$, $n + w$ gesetzt wird, wo u eine Function von m oder constant sei, bezüglich mit

$$(2)\qquad \underset{u}{K}, \quad \underset{(v)}{K}, \quad \overset{w}{N}$$

Nimmt man die 1ste und 2te Aenderung vor, so entstehe $\underset{u(v)}{K}$ etc.

Dann können wir schreiben

$$(3)\quad \begin{cases} H = - \underset{(\pm 180)}{H} = \underset{(\pm 90)}{K} \\[2ex] K = - \underset{(\pm 180)}{K} = - \underset{(\pm 90)}{H} \end{cases}$$

$$(4)\qquad K_u = \varrho^{p-\lambda} G_u = k \varrho^p (\sin t . P_u + \cos t . Q_u)$$

u. s. w.

$$(5)\qquad F = \overset{\lambda}{\underset{k(\tau)}{P}}, \qquad G = \overset{\lambda}{\underset{k(\tau)}{Q}}$$

und zur Abkürzung

e statt e_m eingeführt:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} F' &= \overset{-1}{F_e} = \varrho^{-1}(\sin\vartheta\,.\,G_e + \cos\vartheta\,.\,F_e) \\ G' &= \overset{-1}{G_e} = \overset{-1}{\varrho}(\cos\vartheta\,.\,G_e - \sin\vartheta\,.\,F_e) \end{aligned}\right.$$

Zwischen den partiellen Diff.-Quot. von F und G nach ϑ, ϱ, x, y bestehen die Relationen:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial\vartheta} &= -\,\varrho\frac{\partial G}{\partial\varrho} = -\,G_e \\ \frac{\partial G}{\partial\vartheta} &= +\,\varrho\frac{\partial F}{\partial\varrho} = +\,F_e \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= +\frac{\partial G}{\partial y} = F' \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{\partial F}{dy} = G'. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (7) und ebenso (8) sind die **notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die complexe Function**

$F + Gi$ **eine Function der complexen Variabeln** z **sei.**

Die Einen lassen sich aus den Andern ableiten.

III. Hat die Gleichung $fz = 0$ keine gleichen Wurzeln, so ist

(1)
1) nicht zugleich $P = 0$, $Q = 0$, $F' = 0$ und $G' = 0$
2) „ „ $P = 0$, $Q = 0$, $F_e = 0$ und $G_e = 0$
(siehe II. (6))

geom.: Die Wurzelpunkte W von $fz = 0$ und diejenigen der

(1)a Derivirten $g'(z) = 0$ von $g(z) = 0$, die zugleich der Gleichung $g_e(z) = F_e + G_e i = 0$ angehören, liegen von einander getrennt,

allgemein gilt dieses von den einfachen Wurzeln einer beliebigen Gleichung $f(z) = 0$.

Die Curven $F = 0$, $G = 0$ schneiden sich in jedem Wurzelpunkt W rechtwinklig.

Denn die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Tangenten in W an diese Curven mit dem Radiusvector OW bilden, sind $\frac{F_e}{G_e}$ und $-\frac{G_e}{F_e}$, ihr Product ist $= -1$; diejenigen der Winkel der Tangenten mit der X-Achse: $\frac{F'}{G'}$ und $-\frac{G'}{F'}$ (das Product ist $= -1$).

Allgemeiner: Die Curven

(2) $$\begin{cases} uP - vQ = 0, \\ vP + uQ = 0, \end{cases}$$
unter u und v einwertige, endliche, stetige Functionen von ϑ und ϱ (x und y) verstanden, gehn durch W und schneiden sich in jedem einfachen Wurzelpunkt rechtwinklig.

(2)a speciell gilt dies von $H = 0$, $K = 0$ ($F = 0$, $G = 0$).

§ 48.

I. Im Folgenden bezeichnen wir Ringstücke, begrenzt von 2 Kreisbögen aus 0 und 2 Radien durch 0 und Rechtecke mit zu den Coordinaten-Achsen parallelen Seiten, in welchen Gebieten K (§ 47. II. (1) dasselbe Vorzeichen besitzt, bezüglich durch:

$$(K) \quad \text{und} \quad [K],$$

analog

$$(H) \quad „ \quad [H];$$

ferner solche, wenn sowohl H als K ihr Zeichen behalten, mit

$$(H, K) \quad \text{und} \quad [H, K].$$

Die Gebiete in erster Reihe lassen sich, wie wir zeigen werden, in einfacher Weise bestimmen, mithin wegen $H = K$ (§ 47. II. (3) auch die in 2ter, schliesslich die in 3ter als (H) und (K) gemeinsames Ringstück, bezüglich

$$[H] \quad \text{und} \quad [K] \quad \text{gemeinsames Rechteck.}$$

Hierbei können die in H und K vorkommenden p von einander verschieden angenommen werden.

Die Ecken solcher Gebiete seien der Reihe nach

$$A \quad B \quad C \quad D$$

und zwar die Coordinaten hierin:

$$\vartheta_1 \varrho_1 \quad \vartheta_1 \varrho_2 \quad \vartheta_2 \varrho_2 \quad \vartheta_2 \varrho_1$$

resp.

$$x_1 y_1 \quad x_2 y_1 \quad x_2 y_2 \quad x_1 y_2$$

wo

$$\vartheta_2 > \vartheta, \quad \varrho_2 > \varrho_1$$
$$x_2 > x_1, \quad y_2 > y_1$$

Kriterium I. In jedem Gebiet der Zahlen-Ebenen, speciell in: (K) und $[K]$, in welchen das Vorzeichen von K dasselbe bleibt, liegt keine Wurzel.

(§ 47. I. (4), $G \gtrless 0$).

Kriterium II. In den Gebieten: $\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}, \frac{\partial G}{\partial \varrho}\right)$, (H_ϵ, K_ϵ) liegt höchstens Eine Wurzel, und dieselben haben folgende Eigenschaften.

Da $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial F}{\partial \vartheta}$ (§ 47. II. (7)) ihre Zeichen nicht ändern, so liegt auf jeder Seite des Umfangs, sowie innerhalb auf jedem Kreisbogen aus 0 und jedem Radius-Vector höchstens Ein Punkt, worin $F = 0$ und zwar keiner, einer, je nachdem die Vorzeichen von F in den Endpunkten gleich oder entgegengesetzt sind.

Daraus folgt, dass in dem Ringstück entweder überall F dasselbe Zeichen besitzt oder die Punkte, in denen $F = 0$ ist, eine zusammenhängende Curve bilden.

Es behalten aber auch $\frac{\partial G}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial G}{\partial \vartheta}$ (§ 47. II. (7)) ihre Vorzeichen, sodass dasselbe in Bezug auf die Curve $G = 0$ gilt.

Ferner: In einem der beiden Curvenbögen entspricht jedem grösseren ϑ ein grösseres ϱ, in dem anderen dagegen ein kleineres, beide können sich daher höchstens Einmal schneiden, nämlich unter rechtem Winkel (§ 47. III. (2)a).

Das Gebiet enthält

a) keine Wurzel

α) wenn in A, B, C, D die Vorzeichen von H (oder, und die von K) mit einander übereinstimmen, und zwar findet dieses statt, falls

1) $K_\epsilon > 0$, $H_\epsilon > 0$ und K in $\begin{cases} A \\ C \end{cases}$ oder H in $\begin{cases} D \\ B \end{cases} \gtrless 0$

2) $\quad >$ $\quad <$ „ $\begin{cases} D \\ B \end{cases}$ „ $\begin{cases} C \\ A \end{cases}$ „

3) $K_e < 0$, $H_e > 0$ und K in $\begin{cases} B \\ D \end{cases}$ oder H in $\begin{cases} A > \\ C < \end{cases} 0$

4) $<$ $>$ „ $\begin{cases} C \\ A \end{cases}$ „ $\begin{cases} B \\ D \end{cases}$ „

β) wenn in den 4 Ecken weder H noch K gleiche Vorzeichen haben und diejenigen Punkte des Umfangs, wo $F = 0$ ist, auf Einer Seite der Verbindungslinie derjenigen zwei liegen; worin $G = 0$.

b) eine Wurzel

falls die Einen auf entgegengesetzte Seiten der Verbindungslinien der Andern fallen.

Kriterium III. In den Gebieten: $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial x}\right]$, $[H_{e+1}, K_{e+1}]$ liegt höchstens eine Wurzel, und es gilt für diese Analoges wie für die ad Kriterium II.

Das erstere, letztere jener Rechtecke ist ein solches, in dem die Vorzeichen der Bestandteile der ersten Derivirten von $g(z) = F + Gi$, $\overset{+1}{g}(z) = \overset{+1}{F} + \overset{+1}{G}i$ (siehe § 47. II. (2)) dieselben bleiben.

II. Durch wiederholte Anwendung der Kriterien I. und II. oder I. und III. lässt sich jeder einfache Wurzelpunkt W von den übrigen trennen, d. h. jeder für sich einschliessen in ein Gebiet der Polar- resp. rechtwinkligen Coordinaten.

Denn wegen der Willkürlichkeit von τ können die Ausdrücke

$$H_e = \varrho^{p-\lambda} F_e = k\varrho^p(\cos t \,.\, P_e - \sin t \,.\, Q_e)$$
$$K_e = \varrho^{p-\lambda} G_e = k\varrho^p(\sin t \,.\, P_e + \cos t \,.\, Q)$$

ebenso

$$H_{e+1}, \quad K_{e+1}$$

für jeden einfachen Wurzelpunkt und wegen § 47. III. (1)a auch für jeden hinreichend benachbarten Punkt von null verschieden vorausgesetzt werden.

§ 49.

I. Sei

$$\mathfrak{G}$$

ein Polarcoordinaten-Gebiet, begrenzt

einerseits von ϑ_0 und $\vartheta' > \vartheta_0$
anderseits „ ϱ_0 „ $\varrho' > \varrho_0$

und bezeichnen wir eine untere Grenze einer Function $\varphi(\vartheta, \varrho)$ in Bezug auf $\mathfrak{G}$ durch

$$\overset{<}{\varphi}(\vartheta, \varrho), \quad \text{kürzer durch} \quad \overset{<}{\varphi},$$

ferner solche Grenzen, φ als Function und von

mit ϑ oder ϱ aufgefasst,

$$\overset{<}{\varphi}(\vartheta), \quad \overset{<}{\varphi}(\varrho),$$

ähnlich obere Grenzen, und zwar

$\overset{<}{\varphi}$ constant, $\overset{<}{\varphi}(\vartheta)$ nur von ϱ, $\overset{<}{\varphi}(\varrho)$ und von ϑ abhängig.

(Demgemäss $\overset{<}{\vartheta} = \vartheta_0 \ldots \overset{>}{\varrho} = \varrho'$).

Unter

$$\overset{<}{\varphi}(\vartheta, \varrho_0), \quad \overset{<}{\varphi}(\vartheta, \varrho')$$

wollen wir die Ausdrücke $\varphi(\vartheta)$ worin $\varrho = \varrho_0$, ϱ', verstehen.

Ist

$\overset{<}{\varphi}(\vartheta) = \psi(\varrho) > 0$ zwischen ϱ_0 und ϱ', so ist
$\varphi(\vartheta, \varrho) > 0$ im Gebiet $\mathfrak{G}$.

Dies ist der Fall, wenn $\overset{<}{\psi}(\varrho) > 0$.

Hiernach lassen sich zunächst

1) Gebiete: (K) mit gegebener Ecke z. B. A
2) " (H, K) " " " " A

bestimmen.

Ehe wir hierzu übergehen, schicken wir zwei dabei zu lösende Hülfsaufgaben voraus.

Die gegebene Ecke habe die Coordinaten ϑ_1 und ϱ_1.

II. Ad I. 1) ist die Bedingung zu erfüllen:

$$K(\vartheta_1, \varrho_1) > 0. \tag{1}$$

Es ist

$$K(\vartheta_1 \varrho_1) = \varrho_1^p (\sin t_1 . P + \cos t_1 . Q)$$

wo

$$t_1 = \tau + \lambda\vartheta_1 \quad \text{und in } P,\ Q: \vartheta = \vartheta_1 \quad \text{und} \quad \varrho = \varrho_1$$

Führt man

$$S = +\sqrt{P^2 + Q^2} > 0, \quad Q = S\sin\sigma, \quad P = S\cos\sigma$$

ein, so entsteht

(2) $$K(\vartheta_1\,\varrho_1) = \varrho_1{}^p . S\sin(\sigma + t_1).$$

Daher muss:

(3) $$\left\{\begin{array}{ll} & \varrho_1{}^p > 0, \text{ d. h. falls } \varrho_1 = 0 : p = 0 \\ \text{und} & \sin(\sigma + t_1) > 0 \text{ sein,}\end{array}\right.$$

woraus sich für τ und λ die lineare Relation ergiebt:

$$\sigma + t_1 = \text{einem Wkl. zw. 0 und 2R oder 4R und 6R} \ldots$$

(4) $$\left\{\begin{array}{l} \text{Bei gegebenem } \lambda \text{ und } p \text{ ist} \\ \qquad K(\vartheta_1\,\varrho_1) \text{ ein Maximum} \\ \text{wenn} \\ \qquad \sigma + t_1 = R \quad \text{oder} \quad 5R \ldots \end{array}\right.$$

III, Ad I. 2) hat man, damit

$$H > 0, \quad K > 0$$

die Bedingungen:

$$\varrho_1{}^p > 0 \ (p = 0 \text{ wenn } \varrho_1 = 0)$$
$$\sin(\sigma + t_1) > 0, \quad \cos(\sigma + t_1) > 0.$$

Dies giebt zw. τ und λ die Gleichung 1sten Grades:

$$\sigma + \tau_1 = \text{Wkl. zw. 0 und } R \quad \text{oder} \quad 4R \text{ und } 5R \ldots$$

HK ist ein Maximum, wenn

$$\sigma + t_1 = \frac{R}{2} \quad \text{oder} \quad 4\tfrac{1}{2}R \ldots,$$

oder was dasselbe, indem $H = K$:

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{P - Q}{P + Q}.$$

Vermehrt man dieses t_1

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{um} & R, & \text{so ist} & H < 0, & K > 0 \\ ,, & 2R, & ,, & < & < \\ ,, & 3R, & ,, & > & < \end{array}\right\} \text{und } HK \text{ absol. ein Maximum.}$$

Bestimmung von Gebieten: (K) mit einer gegebenen Ecke.

§ 50.

Besonderer Fall: $\varrho_1 = 0$ oder $\varrho_2 = \infty$, $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 4R = 360$

I. $\varrho_1 = 0$.

Gesucht ϱ_2, d. h. eine untere Grenze der Moduln der Wurzeln.

Es ist:

$$K(\vartheta_1 \varrho_1) = a_0 \varrho_1^{n+p} \sin(A_0 + \tau + (n+\lambda)\tau_1) + , \ldots a_n \varrho_1^p \sin(A_n + \tau + \lambda\vartheta_1).$$

Wir setzen $\lambda = 0$, $p = 0$, $\tau = 90 - A_n$, sodass $K(\vartheta_1 \varrho_1) = a_n > 0$.

Für $\vartheta_0 = \vartheta_1$ beliebig, $\vartheta' = \vartheta_1 + 4R$ hat man (siehe § 49. I.):

$$\overset{<}{K}(\vartheta) = -a_0 \varrho^n - a_1 \varrho^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\varrho + a^n = \psi(\varrho).$$

Ist g_0 eine untere Grenze der positiven Wurzel von $\psi(\varrho) = 0$, so genügt

$$\varrho_2 = g_0,$$

speciell $\frac{a_n\,{}^{*)}}{a_n + a_{0,n-1}}$, den grössten der Moduln a_r, $a_{r+1} \ldots$ mit $a_{r,s}$ bezeichnet.

II. $\varrho_2 = \infty$.

Gesucht ϱ_1, d. i. eine obere Grenze der Moduln der Wurzeln.

Für die Ecke B ist:

$$K(\vartheta_1 \varrho_2) = a_0 \varrho_2^{n+p} \sin(A_0 + \tau + (n+\lambda)\vartheta_1) + \ldots$$

Wir wählen $p = 0$, $\lambda = -n$, $\tau = 90 - A_0$, wodurch $K(\vartheta_1 \varrho_2) = a_0 > 0$

In Bezug auf die Grenzen $\vartheta_0 = \vartheta_1$ und $\vartheta' = \vartheta_1 + 4R$ ist

$$\overset{<}{K}(\vartheta) = a_0 \varrho^n - a_1 \varrho^{n-1} - \ldots a_{n-1}\varrho - a_n = \psi(\varrho)$$

$$\varrho_1 = g' = \text{obere Grenze der pos. Wurzel von } \psi(\varrho) = 0,$$

eine solche ist

$$\frac{a_0 + a_{1,n}\,{}^{**)}}{a_0}.$$

---

*) und **) Vergl. J. A. Serret, Handbuch d. höheren Algebra, deutsch von G. Wertheim.

III. Zahlenbeispiel.

$$f(z) = z^6 - 5z^5 + 11z^4 - 17z^3 + 18z^2 - 12z + 6 \text{ *)}.$$

Hier ist
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5 \quad \ldots \quad a_6 = 6$$
$$A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = 0$$
$$A_1 = A_3 = A_5 = 2R = 180.$$

Mau findet die Moduln der Wurzeln zwischen 0, 3 und 7 liegend.

§ 51.

2ter Fall: $\varrho_1 = 0$ oder $\varrho_2 = \infty$, ϑ_1 und ϑ_2 beliebig.

I. $\varrho_1 = 0$.

ϱ_2 gesucht, d. h. eine untere Grenze der Moduln derjenigen Wurzeln, deren Argumente zwischen ϑ_1 und ϑ_2 liegen.

Für $\vartheta_0 = \vartheta_1$ und $\vartheta' = \vartheta_2$ ist
$$\overset{<}{K}(\vartheta) = \sum_0^n a_m \varrho^{n+p-m} . \sin \overset{<}{w_m} = \psi(\varrho),$$
wo
$$w_m = A_m + \tau + e_m \vartheta = h(\vartheta) = D$$
$$e_m = e = n + \lambda - m.$$
Sei
$$h(\vartheta_1) = D_1, \quad h(\vartheta_2) = D_2,$$
so ist, wenn
$$e_m \gtrless 0: \overset{<}{w_m} = \begin{cases} D_1 \\ D_2 \end{cases}, \quad \overset{>}{w_m} = \begin{cases} D_2 \\ D_1 \end{cases}$$
Ist
$$\overset{>}{w_m} - \overset{<}{w_m} = \Delta_m = \pm e_m(\vartheta_2 - \vartheta_1) < 2R,$$
so kann τ so gewählt werden, dass die Grenzen D_1 und D_2 zwischen 0 und $2R$ fallen, mithin
$$\sin \overset{<}{w_m} \overset{>}{=} 0.$$
Nämlich wie folgt:

Die $\tau = 0$ entsprechenden Werte von D_1 und D_2 seien $\overset{0}{D}_1$ und $\overset{0}{D}_2$.

*) P. C. Jelinek S. J., die Aufl. d. höheren numer. Glg. (Leipzig 1865).

Im Fall $e_m > 0$ sei $k4R$ das grösste ganze Vielfache von $4R = 360$, das in $\overset{0}{D}_1$ enthalten ist ($k \geqq 0$); ferner

$$u = \overset{0}{D}_1 - k4R, \quad v = \overset{0}{D}_2 - k4R (> u).$$

Liegt u zwischen 0 und $2R$, v zw. 0 und $2R$, so liegt

$$\tau \text{ zw. } 0 \text{ und } 2R - v \quad \text{oder}$$
$$\text{„} \quad 4R - u \text{ und } 4R;$$

anderfalls

$$\text{„} \quad 4R - u \quad \text{„} \quad 6R - v.$$

Im Falle $e_m < 0$ setzen wir

$$u = \overset{0}{D}_2 - k4R, \quad v = \overset{0}{D}_1 - k4R (> u)$$

wo k eine ganze Zahl sei, so, dass $0 < u < 4R$, im Uebrigen wie vor.

Ist hiernach

$$\sin w_n \gtrless 0, \quad p = 0$$

oder

$$= 0, \quad \sin w_{n-1} \gtrless 0, \quad p = -1$$

⋮

so ist

$\varrho_2 =$ untere Grenze der positiven Wurzeln von $\psi(\varrho) = 0$.

II. $\varrho_2 = \infty$.

gesucht ϱ_1, d. h. eine obere Grenze der Moduln der ihre Argumente zwischen ϑ_1 und ϑ_2 habenden Wurzeln.

Ist in Bezug auf die Grenzen $\vartheta_0 = \vartheta_1$ und $\vartheta' = \vartheta_2$

$$\sin w_0 \gtrless 0$$

oder

$$\text{„} \quad = 0, \quad \sin w_1 \gtrless 0$$

⋮

und macht p das letzte von null verschiedene Glied in $\psi(\varrho)$, wenn ϱ unabhängig, so genügt

$\varrho_1 =$ obere Grenze der positiven Wurzeln von $\psi(\varrho) = 0$.

§ 52.

I. Bsple. zu § 51., I., Glg. wie in § 50., III.

1) $\vartheta_1 = 0, \; \vartheta_2 = 45 = \dfrac{R}{2}$,

$\lambda = 0, \; p = 0, \; \tau = R$

$$\psi(\varrho) = -\varrho^6 - 5\varrho^5 - 11\varrho^4 - 17\varrho^3 - 0.\varrho^2 - 12\varrho + 6,$$

$$\varrho_2 = 0{,}35.$$

2) $\vartheta_1 = \frac{R}{2}$, $\vartheta_2 = R$.

$\lambda = 0$, $p = -1$, $\tau = 2R$:

$$\psi(\varrho) = -\varrho^5 - 5\varrho^4 - 0.\varrho^3 - 17\varrho^2 - 18\varrho + 6\sqrt{2}$$

$$\varrho_2 = 0{,}35.$$

3) $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 10$.

$\lambda = 0$, $p = 0$, $\tau = R$:

$$\psi(\varrho) = \sin 30\varrho^6 - 5\varrho^5 + 11\sin 50\,.\,\varrho^4 - 17\varrho^3 + 18\sin 70\,.\,\varrho^2 - 12\varrho + 6$$

$$\varrho_2 = 0{,}8.$$

4) $\vartheta_1 = 10$, $\vartheta_2 = 20$.

$\lambda = 0$, $p = 0$, $\tau = R$:

$$\psi(\varrho) = -\sin 30\,.\,\varrho^6 - 5\sin 40\,.\,\varrho^5 + 11\sin 10\varrho^4 - 17\sin 60\,.\,\varrho^3$$
$$+ 18\sin 50\,.\,\varrho^2 - 12\sin 80\,.\,\varrho + 6$$

$$\varrho_2 = 0{,}6.$$

5) $\vartheta_1 = 80$, $\vartheta_2 = 90 = R$.

$\lambda = 0$, $p = -1$, $\tau = 2R$:

$$\varrho_2 = 0{,}6.$$

6) $\vartheta_1 = 70$, $\vartheta_2 = 72$.

$\lambda = 0$, $p = 0$, $\tau = R$:

$$\varrho_2 = 0{,}7.$$

7) $\vartheta_1 = 30$, $\vartheta_2 = 32$.

$\lambda = 0$, $p = -1$, $\tau = 2R$:

$$\varrho_2 = 0{,}5.$$

II. Bsple. zu § 51., II., $f(z)$ wie vor.

1) $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 10$.

a) $\lambda = 0$, $p = 0$, $\tau = R$ (zw. 0 und 120):

$\varrho_1 =$ obere Grenze der Wurzeln der Glg. in I. 3)

$$\varrho_1 = 9.$$

b) $\lambda = -6$, $p = 0$, $\tau = R$:

$$\psi(\varrho) = \varrho^6 - 5\varrho^5 + 11\sin 70\,.\,\varrho^4 - 17\varrho^3 + 18\sin 50\varrho^2 - 12\varrho + 6\sin 30$$

$\varrho_1 = 4$ (günstiger als ad a)).

2) $\vartheta_1 = 10,\ \vartheta_2 = 20.$

$\lambda = 0,\ p = -1,\ \tau = 0$ (zw. 0 und 60):

$$\psi(\varrho) = \sin 60 . \varrho^5 - 5\varrho^4 + 11 \sin 40 . \varrho^3 - 17 \sin 60 . \varrho^2 + 18 \sin 20 . \varrho - 12 \sin 20$$

$$\varrho_1 = 6.$$

3) $\vartheta_1 = 70,\ \vartheta_3 = 72.$

a) $\lambda = 0,\ p = -1,\ \tau = 0$:

$$\psi(\varrho) = \sin 60 . \varrho^5 + 0 . \varrho^4 - 11 \sin 80 . \varrho^3 + 17 \sin 30 \varrho^2 + 18 \sin 36 \varrho - 12 \sin 72$$

$$\varrho_1 = 3.$$

b) $\lambda = -6,\ p = 0,\ \tau = R$:

$$\psi(\varrho) = \varrho^6 - 5 \sin 20 \varrho^5 - 11 \sin 54 \varrho^4 + 17 \sin 54 \varrho^3 + 18 \sin 10 \varrho^2 - 12 \varrho + 6 \sin 18$$

$\psi(3) < 0,\ \varrho_1 > 3$, d. i. ungefähr wie ad a).

4) $\vartheta_1 = 30,\ \vartheta_2 = 32.$

$\lambda = 0,\ p = 0,\ \tau = 2R$ (wie I. 7)).

§ 53.

Allgemeiner Fall, Iste Methode.

I. $A = (\vartheta_1 \varrho_1)$ gegeben, $C = (\vartheta_2 \varrho_2)$ gesucht.

Wir wählen $\vartheta_0 = \vartheta_1$, $\vartheta' = \vartheta_0 + \theta$, θ zw. 0 und einem $\theta_1 (> 0)$, welches so klein sei, dass für die Grenzen ϑ_0 und jedes $\vartheta' \overline{\overline{<}} \vartheta_0 + \theta_1$ sowie $m = 0, 1, \ldots n$:

$$(1) \qquad \overset{<}{\sin w_m} \text{ entweder } = \overset{<}{\sin w_m} \text{ oder } = \overset{>}{\sin w_m}.$$

Ist

$$(2) \qquad \begin{cases} e_m > 0, \text{ so } \overset{<}{w_m} = A_m + \tau + e_m \vartheta_0, \text{ sei } = \overset{0}{w_m} \\ \qquad\qquad \overset{<}{w_m} = A_m + \tau + e_m \vartheta', \;\; ,, \;\; = \overset{\prime}{w_m} \\ \text{sonst umgekehrt.} \end{cases}$$

In Bezug auf jenes feste ϑ_0 und variable ϑ' (zw. ϑ_0 und $\vartheta_0 + \theta_1$) hat man:

$$(3) \qquad \overset{<}{K(\vartheta)} = \Sigma a_r \varrho^{n+p-r} \sin \overset{0}{w_r} + \Sigma a_s \varrho^{n+p-s} \sin (\overset{0}{w_s} + e_s \theta),$$

d. i. eine Function von $\theta = \vartheta' - \vartheta_0$, wo

$$e_r \cos \overset{0}{w_r} > 0, \quad e_s \cos \overset{0}{w_s} < 0,$$

d. h. die 1ste, 2te Σ ausgedehnt über alle m für welche $e_m \cos \overset{0}{w_m} >$, $<$ 0.

Es sei

(4) $$\underset{\varrho=\varrho_1}{\overset{<}{K}} (\vartheta) = \varphi(\theta)$$

(5) $$\varphi(0) = K(\vartheta_1 \varrho_1) > 0 \quad \text{(siehe § 49., II.)}$$

(6) θ' eine untere Grenze der pos. Wurzeln von $\varphi(\theta) = 0$,

(siehe weiter) sodass

$$\varphi(\theta') > 0.$$

Schliesslich

(7) $$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \theta'$$

(8) ϱ_2 so nahe an ϱ_1, dass $\psi(\varrho) = \underset{\theta=\theta'}{\overset{<}{K}} (\vartheta) = 0$ zw. ϱ_1 und ϱ_2.

Das pos. Vorzeichen behält $(\psi(\varrho_1) = \varphi(\theta') > 0)$.

Ermittlung von θ'.

Die beiden ersten Derivirten von $\varphi(\theta)$ sind

$$\varphi'(\theta) = -\Sigma e_s a_s \varrho_1^{n+p-s} \cos \overset{\prime}{w_s}$$

$$\varphi''(\theta) = -\Sigma e_s^2 a_s \varrho_1^{n+p-s} \sin \overset{\prime}{w_s}$$

Da wegen (1) $\cos \overset{\prime}{w_s}$ und $\cos \overset{0}{w_s}$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$e_s \cos \overset{\prime}{w_s} < 0$.

Zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \theta_1$ ist folglich $\varphi'(\theta) < 0$ und hat somit $\varphi(\theta) = 0$ höchstens Eine Wurzel und zwar

$$\text{jenachdem } \varphi(\theta_1) \gtrless 0: \left.\begin{matrix}\text{keine}\\ \text{eine}\end{matrix}\right\} \text{solche.}$$

Im 1sten Fall kann man setzen:

$$\theta' = \theta_1.$$

Im 2ten lässt sich θ' leicht durch Probiren finden.

Soll exact verfahren werden, so unterscheiden wir folgende Fälle, indem wir beachten, dass $\varphi''(\theta)$ mit θ wächst (da $\sin \acute{w}_s$ abnimmt für jedes s):

1) $\varphi''(0) > 0$.

$\varphi''(\theta)$ ist > 0 zw. 0 und θ_1, daher genügt $\theta' = -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}$ (Eul., Näh.-W.).

2) $\varphi''(\theta_1) < 0$.

Hier ist $\varphi''(\theta) > 0$, folgl. $\theta' = \theta_1 \frac{\varphi(0)}{\varphi(0) - \varphi(\theta_1)}$ (Regula falsi).

3) $\varphi''(0) < 0$ und $\varphi''(\theta_1) > 0$.

$$\theta' = \theta_1 - \frac{\varphi(\theta_1)}{\varphi'(\theta_1)}, \quad \text{wenn} \quad > 0$$

sonst

$$\theta' = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi''(0)} + \sqrt{\left(\frac{\varphi'(0)}{\varphi''(0)}\right)^2 - \frac{2\varphi(0)}{\varphi''(0)}}.\ ^{*)}$$

II. B, C oder D gegeben.

1) $B = (\vartheta_1 \varrho_2)$.
wie ad I. statt ϱ_1 und ϱ_2 gesetzt.

2) C oder D.

$\vartheta' = \vartheta_2$, $\vartheta_0 = \vartheta_2 - \theta$, θ_1 wie ad I., so dass $\overset{<}{K}(\vartheta) = \Sigma a_r \varrho^{n+p-r} \sin \acute{w}_r + \Sigma a_s \varrho^{n+p-s} \sin(\acute{w}_s - c_s\theta)$, $e_r \cos \acute{w}_r < 0$, $e_s \cos \acute{w}_s > 0$ u. s. w., wie vor.

§ 54.

Zahlenbsplc. zu § 53., $f(z)$ wie früher.

1) $v_1 = 30$, $\varrho_1 = 1$.

$\lambda = 0$, $p = 0$, $\operatorname{tg} \sigma = \frac{Q(30,1)}{P(30,1)} = \frac{-0{,}38526}{+2{,}43782}$, $\sigma = c^2$. $4R - 9$, so dass nach § 49. II. $\tau = 99$: ein Maximum von $K(30, 1)$ entspricht, τ sei $= 90$, so hat man

*) Anwendung des Kriterium II. des Artikel I. § 3. auf die transcendente Glg. $\varphi(\theta) = 0$, das dortige $F(x) = \lambda(x - h)^2$.

$$\overset{<}{K}(\vartheta) = -\varrho^6 + 5\sin 60 . \varrho^5 - 11\sin(30+4\theta) . \varrho^4 + 0 . \varrho^3$$
$$+ 18\sin(30-2\theta) . \varrho^2 - 12\sin 60 . \varrho + 6 \qquad :$$

wenn $6\theta < 360$, $5\theta < 60$, $4\theta < 60$, $3\theta < 180$, $2\theta < 120$, $\theta < 300$, d. i.

$$\theta_1 = 12.$$

Da

$$\varphi(1) = -1 + 5\sin 60 - 11\sin 34 + 0 + 18\sin 28 - 12\sin 60 + 6$$
$= 1,237 > 0$, so genügt

$$\theta' = 1.$$

Nun hat

$$\psi(\varrho) = -\varrho^6 + 5\sin 60\,\varrho^5 - 11\sin 34\,\varrho^4 + 0\,\varrho^3 + 18\sin 28\,\varrho^2$$
$$-12\sin 60\,\varrho + 6 = 0$$

zwischen 1 und 1,4 keine Wurzel, daher

$$\vartheta_2 = 31, \quad \varrho_2 = 1,4.$$

2) Wir nehmen an, die reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ seien annähernd $= 1,54$ und $2,26$ gefunden. Zwischen denselben ist $P = \underset{(90)}{Q} < 0$, daher $\underset{(3R)}{Q} > 0$, d. i. $K(\vartheta, \varrho) > 0$, worin $\lambda = 0$, $p = 0$, $\tau = 3R$.

Setzen wir $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta' = \theta$, so ist

$$\overset{<}{K}(\vartheta) = -\varrho^6 + 5\cos 5\theta . \varrho^5 - 11\varrho^4 + 17\cos 3\theta . \varrho^3 - 18\varrho^2 + 12\cos\theta . \varrho - 6:$$

wenn 6θ, 4θ, $2\theta < 360$; 5θ, 3θ, $\theta < 180$, mithin

$$\theta < 36, \quad \text{sei} = 1.$$

Dann ist

$$\overset{<}{K}(\vartheta) = \psi(\varrho) > 0 \text{ zw. } \varrho = 1,6 \text{ und } \varrho = 2,1,$$

welche Werte, wie vorauszusehen war, zwischen jenen Wurzeln liegen, was die Aufsuchung jener erleichtert.

Daher tritt zwischen $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = 1$ einer- und $\varrho_1 = 1,6$ u. $\varrho_2 = 2,1$ anderseits kein Zeichenwechsel von $K = -P$ ein.

3) Es sei $\vartheta_2 = 90$, $\varrho_2 = 1$ gegeben.

$Q(90, \varrho) = -5\varrho^5 + 17\varrho^3 - 12\varrho = -\varrho(\varrho^2 - 1)(5\varrho^2 - 12)$
$P(90, \varrho) = -\varrho^6 + 11\varrho^4 - 18\varrho^2 + 6$
$Q(90, 1) = 0$, $P(90, 1) = -2$, das σ in § 49. II. $= 2R$.

$K(\vartheta_2 \varrho_2)$ wird ein Maximum, wenn $t_1 = 3R$ oder
$\lambda = 0$, $p = 0$ gesetzt: $\tau = 3R$.

Für $\vartheta' = 90$, $\vartheta_0 = 90 - \theta$ ist

$$\overset{<}{K}(\vartheta) = \cos 6\theta \,.\, \varrho^6 + 0 \,.\, \varrho^5 - 11\varrho^4 - 17\sin 3\theta \,.\, \varrho^3 + 18\cos 2\theta \,.\, \varrho^2 + 0 . \varrho - 6 :$$

falls $6\theta < 2R \ldots \theta < 2R$, also $\theta \leqq 30$.

Sei $\theta \overset{=}{<} 1$, so $\overset{<}{K}(\vartheta) > 0$ zw. $\varrho = 0{,}8$ und $\varrho = 1$, sodass

$$\vartheta_1 = 89, \quad \varrho_1 = 0{,}8$$

(oder wenn $\varrho_1 = 1$: $\quad \vartheta_1 = 89, \quad \varrho_2 = 1{,}1$).

§ 55.

IIte Methode.

I. Gegeben die Ecke $A = (\vartheta_1 \varrho_1)$.

Es sei p und λ beliebig, τ an die Bedingung geknüpft (§ 49. II.)

(1) $$K(\vartheta_1 \varrho_1) > 0.$$

K lässt sich auf die Form bringen:

(2) $$K(\vartheta, \varrho) = K(\vartheta_1 \varrho) + (\vartheta - \vartheta_1) L(\vartheta, \varrho)$$

wo $L(\vartheta, \varrho)$ eine ganze Function von ϑ und ϑ_1 ist:

$$L(\vartheta, \varrho) = \frac{K(\vartheta \varrho) - K(\vartheta_1 \varrho)}{\vartheta - \vartheta_1}$$

$$= \sum_0^n a_m \varrho^{n+p-m} \,.\, \frac{\sin(A_m + \tau + e_m \vartheta) - \sin(A_m + \tau + e_m \vartheta_1)}{\vartheta - \vartheta_1}\,.$$

$$= \sum_0^n 2a_m \varrho^{n+p-m} \frac{\sin \frac{e_m(\vartheta \,.\, \vartheta_1)}{2}}{\vartheta - \vartheta_1} \cos W_m$$

(3) $$\left\{\begin{aligned} & L(\vartheta, \varrho) = \sum_0^n a_m \varrho^{n+p-m} B_m \cos W_m \\ & \text{worin} \\ & W_m = A_m + \tau + e_m \frac{(\vartheta + \vartheta_1)}{2} \\ & B_m = e_m \frac{\sin h}{h}, \quad h = \pm e_3 \frac{(\vartheta - \vartheta_1)}{2} > 0, \; e_m = n + \lambda - m. \end{aligned}\right.$$

Wir wählen die Grenzen des Gebietes $\mathfrak{G}$ in § 49. I. wie folgt:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \varrho_0 = \varrho_1, \quad \varrho' \text{ beliebig } (> \varrho_0), \quad \vartheta_0 = \vartheta_1 \\ \text{und} \\ \text{1) falls } \lambda \geqq 0: \vartheta' - \vartheta_0 < \dfrac{4R}{n+\lambda} \\ \text{2) ,, } \lambda \leqq -n: \quad \text{,,} < \dfrac{4R}{-\lambda} \\ \text{3) ,, } -n \leqq \lambda < 0: \text{ ,, } < \text{ ,, und } < \dfrac{4R}{n+\lambda} \end{array}\right.$$

sodass

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{ad 1)} & e_m > 0, & B_m > 0 & \\ \quad\;\; 2) & \quad < , & \quad < & \\ \quad\;\; 3) & \quad \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} , & \quad \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} & \text{für } m \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} n+\lambda: \end{array}\right.$$

Folglich ad 1) resp. 2):

$$\overset{<}{L}(\vartheta) = \Sigma a_m \varrho^{n+p-m} \overset{<}{B}_m (\cos \overset{\gtrless}{W}_m)^+ + \Sigma a_m \varrho^{n+p-m} \overset{>}{B}_m (\cos \overset{\gtrless}{W}_m)^-,$$

die 1ste, 2te Σ ausgedehnt über alle $m = 0,1 \ldots n$ für welche $\cos \overset{\lessgtr}{W}_m$ das $+$, $-$ Zeichen besitzt; wie in der Formel angedeutet.

ad 1) ist

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \overset{<}{B}_m = \dfrac{2\sin\dfrac{e_m(\vartheta'-\vartheta_0)}{2}}{\vartheta'-\vartheta_0} = B_m, \quad \overset{>}{B}_m = e_m \dfrac{\pi}{180} = \overset{0}{B}_m \\ \text{entsprechend } \vartheta = \vartheta', \vartheta_0 \\ \qquad \overset{<}{W}_m = A_m = \tau + e_m \vartheta_0 = \overset{0}{W}_m, \\ \qquad \overset{>}{W}_m = A_m + \tau + e_m \dfrac{(\vartheta_0 + \vartheta')}{2} = \overset{\prime}{W}_m \end{array}\right.$$

ad 2) umgekehrt.

Unter S irgend eine Summe von positiven und negativen Gliedern verstanden, wollen wir im Folgenden die Gesammtheit der pos. mit S_+, die der negativen mit: $-S_-$ bezeichnen, sodass

$$S = S_+ - S_-.$$

Darnach:

$$\overset{<}{L}(\vartheta) = \overset{<}{L}_+(\vartheta) - \overset{<}{L}_-(\vartheta) = M(\varrho) \tag{7}$$

(8)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{ad 1)}\quad \overset{<}{L}_\pm(\vartheta) = \pm \overset{\lessgtr}{\Sigma} a_m B_m \varrho^{n+p-m} (\overset{<}{\cos} W_m)^{\pm} \\
&\text{2)}\quad\quad ,, \quad = \pm \overset{\gtrless}{\Sigma} a_m B_m \varrho^{n+p-m} (\overset{>}{\cos} W_m)^{\mp} \\
&\text{3)}\quad \overset{<}{L}_+(\vartheta) = \sum_0^r a_m B'_m \varrho^{n+p-m} (\overset{<}{\cos} W_m)^+ + \sum_{r+1}^n a_m B'_m (\overset{>}{\cos} W_m)^- \\
&\quad\ \overset{<}{L}_-(\vartheta) = -\sum_0^r a_m \overset{0}{B}_m \varrho^{n+p-m} (\cos W_m)^- \\
&\quad\quad\quad\quad - \sum_{r+1}^n a_m \overset{0}{B}_m (\overset{>}{\cos} W_m)^+
\end{aligned}\right.$$

wo

$$r \leqq n + \lambda < r + 1.$$

Eine noch von ϑ und ϱ abhängige, in Bezug auf ϑ lineare untere Grenze von $K(\vartheta, \varrho)$ ist

$$\overset{<}{K}(\vartheta, \varrho) = K(\vartheta_1 \varrho) + (\vartheta - \vartheta_1) \overset{<}{M}(\varrho) = \varphi(\vartheta, \varrho). \tag{9}$$

1. Fall: $\overset{<}{M}(\varrho) > 0.$

Wegen (1) ist $\varphi(\vartheta_1 \varrho_1) > 0.$

$$\overset{<}{\varphi}(\vartheta) = \varphi(\vartheta_1 \varrho) = K(\vartheta_1 \varrho) = \psi(\varrho).$$

Daher genügt

$$\vartheta_2 = \vartheta'$$

(10) $\left\{ \varrho_2 \leqq \varrho', \right.$ so nahe an ϱ, dass $\psi(\varrho)$ zw. ϱ_1 und ϱ_2 positiv bleibt.

2. Fall: $\overset{<}{M}(\varrho) < 0.$

Man hat für ϑ_2 und ϱ_2 die Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi(\vartheta_2 \varrho_1) > 0 \\
&\varphi(\vartheta_2 \varrho) = \psi(\varrho) > 0 \text{ zw. } \varrho_1 \text{ und } \varrho_2 \\
&\vartheta_2 \leqq \vartheta', \quad \varrho_2 \leqq \varrho'.
\end{aligned}\right. \tag{10a}$$

II. Ecke $D = (\vartheta_2 \varrho_1)$ gegeben.

(1) ... (6) wie ad I., statt $\vartheta_1 : \vartheta_2$ gesetzt, $\vartheta' = \vartheta_2 (\vartheta_0 < \vartheta_2)$

$$\overset{<}{K}(\vartheta, \varrho) = K(\vartheta_2 \varrho) + (\vartheta - \vartheta_2) \overset{>}{M}(\varrho) = \varphi(\vartheta \varrho)$$

$$M(\varrho) = \overset{>}{L}(\vartheta) = \overset{>}{L}_+(\vartheta) - \overset{>}{L}_-(\vartheta)$$

ad I. 1) $\overset{>}{L}_\pm(\vartheta) = \pm \overset{\lesseqgtr}{\Sigma} a_m B_m \varrho^{n+p-m} (\overset{>}{\cos} W_m)^\pm$

ad I. 2) $L_\pm(\vartheta) = \pm \overset{\lesseqgtr}{\Sigma} a_m B_m \varrho^{n+p-m} (\overset{<}{\cos} W_m)^\mp$ u. s. w.

Ist 1) $\overset{>}{M}(\varrho) < 0$, so genügt

$\vartheta_1 = \vartheta_0$, $\varrho_2{}' \overset{<}{=} \varrho'$, so nahe an ϱ_1, dass $K(\vartheta_2 \varrho) > 0$ zw. ϱ_1 u. ϱ_2.

2) $\overset{>}{M}(\varrho) > 0$.

$$\varphi(\vartheta_1 \varrho_1) \overset{>}{=} 0 \text{ liefert } \vartheta_1, \quad \varphi(\vartheta_1 \varrho) \overset{>}{=} 0 : \varrho_2.$$

III. B oder C gegeben.

wie unter I., II., statt $\varrho_1 : \varrho_2$ eingeführt.

§ 56.

IIIte Methode.

I. Gegeben sei Ecke $A = (\vartheta_1 \varrho_1)$.

Wir wählen das Gebiet $\mathfrak{G}$ (§ 49. I.) so, dass A in dasselbe fällt

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda \text{ und } \vartheta' - \vartheta_0 \text{ wie in § 55., I., (4), Fall 1), 2), 3).} \\ p = 0 \text{ (oder ganze pos. Zahl) *)} \\ \tau \text{ so, dass } K(\vartheta_1 \varrho_1) > 0 \text{ (§ 49. II.).} \end{cases}$$

und bringen K auf die Form:

---

*) Ist $a_n \sin(A_n + \tau + \lambda\vartheta) = 0$, so ist $p = -1$ zulässig (siehe § 59. II.).

$$(2)\quad K(\vartheta_1\,\varrho) = K(\vartheta_1\,\varrho_1) + (\vartheta - \vartheta_1)L(\vartheta\,\varrho) + (\varrho - \varrho_1)M(\vartheta\,\varrho)\ ^{*)}$$

wo

$$L(\vartheta\,\varrho) = \frac{K(\vartheta\,\varrho) - K(\vartheta_1\,\varrho)}{\vartheta - \vartheta_1} + k(\varrho - \varrho_1)$$

$$M(\vartheta\,\varrho) = \frac{K(\vartheta_1\,\varrho) - K(\vartheta_1\,\varrho_1)}{\varrho - \varrho_1} + k_1(\vartheta - \vartheta_1)$$

$$k + k_1 = 0$$

L und M sind ganze Functionen von $\vartheta\,\varrho$, $\vartheta_1\,\varrho_1$, wenn k und k_1 solche sind, am einfachsten

$$k = -k_1 = 0.$$

Dann ist

(3) $\qquad L(\vartheta\,\varrho)$ wie im § 55. I.

$$(4)\quad M(\vartheta, \varrho) = \sum_0 a_m \frac{\varrho^{n+p-m} - \varrho_1^{n+p-m}}{\varrho - \varrho_1} \sin(A_m + \tau + e_m\,\vartheta_1)$$

ϑ, ϱ seien bezüglich $>\vartheta_1$, ϱ_1 und mit diesen innerhalb $\mathfrak{G}$ variabel.

Untere Grenzen von L, M, K sind

$$\overset{<}{L}(\vartheta) = \varphi(\varrho)$$

wie in § 55. I., statt $W_m : w_m$ gesetzt.

$$\overset{<}{M}(\vartheta) = \Sigma a_m \frac{\varrho^{n+p-m} - \varrho_1^{n+p-m}}{\varrho - \varrho_1} \sin \overset{<}{w^m} = \psi(\varrho\,\varrho_1)$$

$$(5)\quad \overset{<}{K}(\vartheta\,\varrho) = K(\vartheta_1\,\varrho_1) + (\vartheta - \vartheta_1)\overset{<}{L} + (\varrho - \varrho_1)\overset{<}{M} = N(\vartheta\,\varrho)$$

linear in Bezug auf ϑ und ϱ

$$\overset{<}{L} = \overset{<}{\varphi}(\varrho)$$

---

*) Auf ähnliche Formen lassen sich die ganzen Functionen beliebig vieler Variabeln bringen:

$$(F(u, v, w) = F(u_1\,v_1\,w_1) + (u - u_1)\,U + (v - v_1)\,V + (w - w_1)\,W).$$

(6)
$$\left\{\begin{array}{l}
\text{ad (1) 1):} \\
\overset{<}{L}_{+} = \underset{\underset{B}{>}}{\overset{<}{H}}_{+}(\vartheta; \varrho_0), \quad \overset{<}{L}_{-} = \underset{\underset{B}{>}}{\overset{<}{H}}_{-}(\vartheta, \varrho') \\
\text{ad (1) 2):} \\
\overset{<}{L}_{+} = -\underset{\underset{B}{>}}{\overset{>}{H}}_{-}(\vartheta, \varrho_0), \quad \overset{<}{L}_{-} = -\underset{\underset{B}{<}}{\overset{>}{H}}_{+}(\vartheta, \varrho') \\
\text{ad (1) 3):} \\
\overset{<}{L}_{+} = \underset{B'}{\overset{<}{H}}_{+}{}'(\vartheta, \varrho_0) - \underset{B'}{\overset{>}{H}}_{-}{}''(\vartheta, \varrho_0), \quad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

wo zur Abkürzung $B = B_m$, $B' = B_m'$ (§ 55., I. (6)), $\overset{<}{H}(\vartheta\,\varrho_0)\ldots$ wie in § 49., I., H' die Summe der ersten $r+1$ Glieder, H'' die der übrigen von H, $r \overset{<}{=} n+\lambda < r+1$

$$\overset{<}{M} = \overset{<}{\psi}(\varrho\,\varrho_1)$$

$$\text{(7)} \qquad \varrho_0 \overset{<}{M}_{+} = \underset{n+p-m}{\overset{<}{K}_{+}}(\vartheta\,\varrho_1), \quad \varrho' \overset{<}{M}_{-} = \underset{n+p-m}{\overset{<}{K}}(\vartheta\,\varrho')$$

$$\text{(8)} \qquad \overset{<}{L} = \overset{<}{L}_{+} - \overset{<}{L}_{-}, \quad \overset{<}{M} = \overset{<}{M}_{+} - \overset{<}{M}_{-}.$$

Schliesslich $\vartheta_2 \left(\overset{<}{=} \vartheta'\right)$ und $\varrho_2 \left(\overset{<}{=} \varrho'\right)$ hinreichend nahe an ϑ_1 und ϱ_1 und zwar falls

(9)
$$\left\{\begin{array}{lllll}
L > 0 \text{ und } M > 0, & & \text{so} & \vartheta_2 = \vartheta' & \varrho_2 = \varrho' \\
> & < & ,, & \vartheta_2 \overset{=}{<} \vartheta' & N(\vartheta_1\,\varrho_2) > 0 \\
< & > & ,, & N(\vartheta_2\,\varrho_1) > 0 & \varrho_2 \overset{=}{<} \varrho' \\
< & < & ,, & N(\vartheta_2\,\varrho_2) > 0 &
\end{array}\right.$$

II. Aehnlich wie vor, wenn eine der Ecken B, C, D gegeben.

An die Stelle von I. (5) tritt bezüglich

$$\overset{<}{K}(\vartheta,\varrho) = K(\vartheta_1\varrho_2) + (\vartheta-\vartheta_1)\overset{<}{L} + (\varrho-\varrho_2)\overset{>}{M} = N(\vartheta,\varrho)$$

$$\text{,,} \quad = K(\vartheta_2\varrho_2) + (\vartheta-\vartheta_2)\overset{>}{L} + (\varrho-\varrho_2)\overset{>}{M} = \quad \text{,,}$$

$$\text{,,} \quad = K(\vartheta_2\varrho_1) + (\vartheta-\vartheta_2)\overset{>}{L} + (\varrho-\varrho_1)\overset{<}{M} = \quad \text{,,}$$

Wir unterscheiden wieder die 3 Fälle 1), 2), 3) in § 55., I. (4).

ad 1) ist $\overset{>}{L}_+ = \underset{\overset{>}{B}}{\overset{>}{H}_+}(\vartheta,\varrho')$, $\quad \overset{>}{L}_- = \underset{\overset{<}{B}}{\overset{>}{H}_-}(\vartheta,\varrho_0)$

„ 2) „ $= -\underset{\overset{<}{B}}{\overset{<}{H}_-}(\vartheta,\varrho')$, „ $= -\underset{\overset{>}{B}}{\overset{<}{H}}(\vartheta,\varrho_0)$

„ 3) „ $= \underset{B}{\underset{0}{\overset{>}{H}_+'}}(\vartheta,\varrho') - \underset{B}{\underset{0}{\overset{<}{H}_-}}(\vartheta,\varrho')$, ähnlich $\overset{>}{L}_-$

$$\varrho'\overset{>}{M}_+ = \underset{n+p-m}{\overset{>}{K}_+}(\vartheta,\varrho'), \quad \varrho_0\overset{>}{M}_- = \underset{n+p-m}{\overset{>}{K}_-}(\vartheta,\varrho_0')$$

u. s. w.

III. Wir können im Vorigen auch von der Bedingung $K(\vartheta_1\varrho_1)<0$ ausgehen und bewirken, dass $\overset{>}{K}(\vartheta\varrho) < 0$.

Ad I. tritt dann an die Stelle von (5):

$$\overset{>}{K}(\vartheta\varrho) = K(\vartheta_1\varrho_1) + (\vartheta-\vartheta_1)\overset{>}{L} + (\varrho-\varrho_1)\overset{>}{M}.$$

Beides lässt sich wie folgt zusammen fassen.

Es sei τ beliebig, bezeichnen wir die in unserem Gebiet $\mathfrak{G}$ willkürlich gegebene Ecke von (K) mit $E_1 = (\vartheta_1\varrho_1)$, die gesuchte mit $E_1 = (\vartheta\varrho)$, und ermitteln wir nach dem Vorigen, wenn $K(\vartheta_1\varrho) \lesseqgtr 0$ eine $\left\{\begin{matrix}\text{untere}\\ \text{obere}\end{matrix}\right\}$ Grenze von K:

$$\overset{\substack{>\\<}}{K}(\vartheta\varrho) = K(\vartheta_1\varrho_1) + (\vartheta-\vartheta_1)\,U + (\varrho-\varrho_1)\,V = \varphi(\vartheta\varrho)$$

wo falls

$$\begin{array}{llll}
E_1 = A: & U = \overset{\lessgtr}{L}, & & V = \overset{\lessgtr}{M} \\
B & \quad " & & \quad \overset{\gtrless}{M} \\
C & \quad \overset{\gtrless}{L} & & \quad " \\
D & \quad " & & \quad \overset{\lessgtr}{M}
\end{array}$$

(wie früher diejenige Ecke des zu suchenden Gebietes (K) mit $\left\{\begin{matrix} A \\ E \end{matrix}\right\}$ bzhw., welche die $\left\{\begin{matrix} \text{kleinsten} \\ \text{grössten} \end{matrix}\right\}$ Polar-Coordinaten, mit $\left\{\begin{matrix} B \\ D \end{matrix}\right\}$ diejenige, die dasselbe ϑ wie $\left\{\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right\}$ hat). Dann haben wir die Bedingungen zu erfüllen, dass E ein Punkt in $\mathfrak{G}$ sei und bezüglich

$$\varphi(\vartheta\,\varrho) \gtrless 0, \quad \varphi(\vartheta\,\varrho_1) \gtrless 0, \quad \varphi(\vartheta_1\,\varrho) \gtrless 0, \quad (\varphi(\vartheta_1\,\varrho_1) \gtrless 0).$$

Mittelst dieser Formeln können wir eine Reihe zusammenhängender Gebiete (K) bestimmen, in denen keine Wurzel liegt. Sind U und V einmal berechnet, so ist bei jeder neuen Lage von E_1 nur noch $K(\vartheta_1\,\varrho_1)$ auszurechnen.

§ 57.

Bspl. zu § 56. III., $f(z)$ wie früher.

I. $\vartheta_0 = 70,\ \vartheta' = 72,\ \varrho_0 = 1,\ \varrho' = 1{,}2$

$\lambda = 0,\ p = 0,\ \tau = 90$, sodass $K = \underset{(90)}{Q} = P,\ H = -Q = \underset{(180)}{Q}$
(§ 47. II. (2))

1) $E_1 = A = (70{,}1)$

$$K(70{,}1) = 0{,}3155 > 0$$

$$\overset{<}{K}(\vartheta\varrho) = 0{,}3155 + (\vartheta - 70)\,U + (\varrho - 1)\,V = \varphi(\vartheta\varrho)$$

$$U = \overset{<}{L}; \quad V = \overset{<}{M}$$

$$\overset{<}{B}_m = \sin e, \quad \overset{>}{B}_m = ke, \quad \text{wo} \quad e = n - m, \quad k = \frac{\pi}{180}.$$

Zur Berechnung von $\overset{<}{L}$ hat man zunächst

$$\overset{<}{H}_{\pm}(\vartheta) = \overset{>}{Q}_{\mp}(\vartheta) \text{ zu bilden:}$$

$$Q = \sin 6\vartheta \,.\, \varrho^6 + 5\sin(2R+5\vartheta) \,.\, \varrho^5 + 11\sin 4\vartheta \,.\, \varrho^4 + 17\sin(2R+3\vartheta) \,.\, \varrho^3 + 18\sin 2\vartheta \,.\, \varrho^2 + 12\sin(R+\vartheta) \,.\, \varrho$$

$$\overset{>}{Q}_-(\vartheta) = 11\sin 72 \,.\, \varrho^4 + 12\sin 70 \,.\, \varrho$$

$$\overset{>}{Q}_+(\vartheta) = \sin 72 \,.\, \varrho^6 + 5\sin 10 \,.\, \varrho^5 + 17\sin 36 \,.\, \varrho^3 + 18\sin 40 \,.\, \varrho^2$$

$$\overset{<}{L}_+ = \underset{\sin e^-}{\overset{>}{Q}}(\vartheta; 1) = 11\sin 4\sin 72 + 12\sin 1\sin 70 = 0{,}927$$

$$\overset{<}{L}_- = \underset{ke}{\overset{>}{Q}}(\vartheta; 1{,}2) = \frac{\pi}{180}(6 \,.\, 1{,}2^6\sin 72 + 5 \,.\, 5 \,.\, 1{,}2^5\sin 10$$
$$+ 3 \,.\, 17 \,.\, 1{,}2^3\sin 36 + 2 \,.\, 18 \,.\, 1{,}2^2\sin 40) = 1{,}972$$

$$U = 0{,}927 - 1{,}972 = -1{,}045.$$

Ferner zur Berechnung von $\overset{<}{M}$:

$$\overset{<}{K}_{\pm}(\vartheta) = \overset{<}{P}_{\pm}(\vartheta)$$

$$P = \cos 6\vartheta \,.\, \varrho^6 + 5\cos(2R+5\vartheta) \,.\, \varrho^5 + \ldots + 6$$

$$\overset{<}{P}_+(\vartheta) = \cos 72 \,.\, \varrho^6 + 11\cos 80 \,.\, \varrho^4 + 17\cos 36 \,.\, \varrho^3 + 6$$

$$\overset{<}{P}_-(\vartheta) = 5\varrho^5 + 18\cos 36 \,.\, \varrho^2 + 12\cos 70 \,.\, \varrho$$

$$\overset{<}{M}_+ = \underset{e}{\overset{<}{P}}_+(\vartheta; 1) = 6\cos 72 + 4 \,.\, 11\cos 80 + 3 \,.\, 17 \,.\, \cos 36 = 50{,}75$$

$$\overset{<}{M}_- = \frac{1}{1{,}2}\underset{e}{\overset{<}{P}}_-(\vartheta; 1{,}2) = 5 \,.\, 5 \,.\, 1{,}2^4 + 2 \,.\, 18 \,.\, 1{,}2\cos 36 + 12\cos 70 = 90{,}89$$

$$V = 50{,}75 - 90{,}89 = -40{,}14$$

$$\varphi(\vartheta, \varrho) = 0{,}3155 - 1{,}045(\vartheta - 70) - 40{,}14(\varrho - 1) > 0$$

z. B.

$$\varrho = 1{,}001; \quad \vartheta = 70{,}26$$

oder

$$\vartheta = 70{,}2; \quad \varrho = 1{,}0026$$

2) $E_1 = A = (71; 1)$

$K(71; 1) = 0{,}2533 > 0$

$\varphi(\vartheta, \varrho) = 0{,}2533 - 1{,}045(\vartheta - 71) - 40{,}14(\varrho - 1) > 0$

z. B.

$$\varrho = 1{,}001; \quad \vartheta = 71^0\, 12'$$
$$\vartheta = 71^0\, 6'; \quad \varrho = 1{,}0037.$$

3) $E_1 = A = (71^0\, 15';\; 1{,}15)$

$K(\vartheta_1\, \varrho_1) = 0{,}00525$ (Fehlergrenze ± 3 in Einheiten der 5ten Decimale).

$\varphi(\vartheta\, \varrho) = 0{,}00525 - 1{,}045(\vartheta - 71{,}25) - 40{,}14(\varrho - 1{,}15) > 0$ etc.

4) $E_1 = D\; (71^0\, 17';\; 1{,}154)$

$K(\vartheta_1\, \varrho_1) = -\, 0{,}00415$ (Fehlergrenze wie vor).

$\varphi(\vartheta\, \varrho) = -\, 0{,}00415 - 1{,}045\, (\vartheta - 71{,}25) - 40{,}14\, (\varrho - 1{,}154) < 0$ etc.

II. $\vartheta_0 = 70,\; \vartheta' = 72,\; \varrho_0 = 2,\; \varrho' = 3$

$\lambda = 0,\; p = 0,\; \tau = 90,$ sodass $K = \underset{(90)}{Q} = P,\; H = \underset{(90)}{P} = \underset{(180)}{Q}.$

Gegeben sei $E_1 = A = (70;\; 2)$.

$K(\vartheta_1\, \varrho_1) = -\, 34{,}59 < 0$

$\varphi\,(\vartheta\, \varrho) = -\, 34{,}59 + (\vartheta - 70)\, U + (\varrho - 2)\, V.$

$$U = \overset{>}{L}, \quad V = \overset{>}{M}$$
$$\overset{>}{H}_{\pm}(\vartheta) = \overset{<}{Q}_{\mp}(\vartheta).$$

$\overset{<}{Q}_{-}(\vartheta) = 11 \sin 80 \,.\, \varrho^4 + 12 \sin 72 \,.\, \varrho$

$\overset{<}{Q}_{+}(\vartheta) = \sin 60 \varrho^6 + 17 \sin 30 \,.\, \varrho^3 + 18 \sin 36 \,.\, \varrho^2$

$\overset{>}{L}_{+} = k \underset{n-m}{\overset{<}{Q}_{-}}(\vartheta, 3) = \frac{\pi}{180}(44 \,.\, 3^4 \,.\, \sin 80 + 12 \,.\, 3 \sin 72) = 61{,}856$

$$\overset{>}{L}_{-} = \underset{\sin(n-m)}{\overset{>}{Q}}\, (\vartheta, 2) = 2^6 \sin 6 \sin 60 + 17 \,.\, 2^3 \sin 3 \sin 30 + 18 \,.\, 2^2 \sin 2 \sin 36 = 10{,}824$$

$$U = 51{,}027.$$

Weiter ist

$$\overset{>}{K}_{\pm}(\vartheta) = \overset{>}{P}_{\pm}(\vartheta)$$

$\overset{>}{P}_{+}(\vartheta) = \cos 60 \,.\, \varrho^6 + 11 \cos 72 \,.\, \varrho^4 + 17 \cos 30 \,.\, \varrho^3 + 6$

$$\overset{>}{P}_-(\vartheta) = 5\cos 10 \,.\, \varrho^5 + 18 \cos 40 \,.\, \varrho^2 + 12 \cos 72 \,.\, \varrho$$

$$V_+ = \overset{>}{M}_+ = \tfrac{1}{3} \underset{n-m}{\overset{>}{P}_+}(\vartheta, 3) = 1493{,}62$$

$$V_- = \overset{>}{M}_- = \tfrac{1}{2} \underset{n-m}{\overset{>}{P}_-}(\vartheta, 2) = 452{,}78$$

$$V = 1040{,}84.$$

$$\varphi(\vartheta, \varrho) = -34{,}59 + (\vartheta - 70)\, 51{,}03 + (\varrho - 2)\, 1040{,}84 < 0.$$

Z. B.

$$\varrho = 2{,}02; \quad \vartheta = 70{,}26 = 70^0\, 15',6$$
$$\vartheta = 70{,}5 = 70^0\, 31'; \quad \varrho = 2{,}0087.$$

§ 58.

Bestimmung von Gebieten: $[F]$ und $[G]$ mit einer gegebenen Ecke E_1 (A, B, C, D).

I. Gegeben $E_1 = A$, gesucht $E = C$.

Die Coordinaten von E_1 seien $x_1 y_1 \vartheta_1 \varrho_1$, die von E: $x y \vartheta \varrho$.

Um zu einer praktisch brauchbaren Lösung zu gelangen, gehen wir von der Glg. § 47. (3)^b aus:

$$g(z) = k(\cos\tau + i \sin\tau) z^\lambda f(z).$$

wo $k = 1$, λ eine ganze Zahl $\geqq 0$ sei.

Alsdann ist $g(z)$ eine ganze Function von z:

$$\beta_0 z^{n+\lambda} + \beta_1 z^{n+\lambda-1} + \dots.$$
$$\beta_m = a_m(\cos(A_m + \tau) + i \sin(A_m + \tau))$$

und

$$g_1(z, z_1) = \frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1}$$

eine ganze Function von $z = x + yi$ und $z_1 = x_1 + y_1 i$.

Einerseits ist

$$\begin{aligned} g_1(z z_1) = {} & \beta_0(z^{n+\lambda-1} + z_1 z^{n+\lambda-2} + \dots) \\ & + \beta_1(z^{n+\lambda-2} + z_1 z^{n+\lambda-1} + \dots) \\ & \vdots \\ & + \beta_{n-1}(z^\lambda + z_1 z^{\lambda-1} + \dots) \\ & + \beta_n(z^{\lambda-1} + z_1 z^{\iota-2} + \dots) \\ & = h(\vartheta\, \varrho) + i l(\vartheta\, \varrho) \end{aligned}$$

$$h(\vartheta\,\varrho) = a_0\,(\varrho^{n+\lambda-1}\cos(A_0+\tau+(n+\lambda-1)\vartheta)$$
$$+\,\varrho_1\varrho^{n+\lambda-2}\cos(A_0+\tau+\vartheta_1+(n+\lambda-2)\vartheta)+\ldots)$$
$$\vdots$$
$$+\,a_{n-1}(\varrho^{\lambda}\cos(A_{n-1}+\tau+\lambda\vartheta)$$
$$+\,\varrho_1\,\varrho^{\lambda-1}\cos(A_{n-1}+\tau+\vartheta_1+(\lambda-1)\,\vartheta)+\ldots)$$
$$+\,a_n(\varrho^{\lambda-1}\cos(A_n+\tau+(\lambda-1)\vartheta)+\ldots)$$

$l(\vartheta\,\varrho)$ = wie $h(\vartheta,\varrho)$ statt cos: sin gesetzt.

Diese Ausdrücke sind von der Form:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &h(\vartheta\,\varrho) = a_0\,C_{n+\lambda-1}+a_1\,C_{n+\lambda-2}+\ldots\; a_{n-1}\,C_{\lambda}+a_n\,C_{\lambda-1}\\ &l(\vartheta\,\varrho) = a_0\,S_{n+\lambda-1}+a_1\,S_{n+\lambda-2}+\ldots\; a_{n-1}\,S_{\lambda}+a_r\,S_{\lambda-1}\\ &\text{wo}\\ &C_r = \varrho_r\cos(A_{n+\lambda-1-r}+\tau+r\vartheta)\\ &\qquad+\,\varrho_1\,\varrho^{r-1}\cos(A_{n+\lambda-1-r}+\tau+\vartheta_1+(r-1)\vartheta)+\ldots\\ &S_r = \varrho_r\sin(A_{n+\lambda-1-r}+\tau+r\vartheta)+\ldots\end{aligned}\right.$$

Anderseits:

$$g_1(zz_1) = \frac{F(xy)+iG(xy)-F(x_1y_1)-iG(x_1y_1)}{x+yi-x_1-y_1i}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $g_1(zz_1)$ entsteht:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(xy) &= F(x_1y_1)+(x-x_1)\,h(\vartheta\,\varrho)-(y-y_1)\,l(\vartheta\,\varrho)\\ G(xy) &= G(x_1y_1)+(x-x_1)\,l(\vartheta\,\varrho)+(y-y_1)\,h(\vartheta\,\varrho)\end{aligned}\right.$$

ähnlich wie § 56. I. (2).

Diese Formeln bieten den Vorteil dar, dass die Coefficienten von $x-x_1$ und $y-y_1$ in einfacher Weise durch die Polarcoordinaten ausgedrückt sind *).

---

*) Als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten erhält man dieselben in der Form der Brüche:

$$h = \frac{(x-x_1)(F-F_1)+(y-y_1)(G-G_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$l = \frac{(x-x_1)(G-G_1)-(y-y_1(F-F_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

wo

$$F = F(x,y),\quad F_1 = F(x_1y_1)\;\ldots$$

Aus dem 2ten Ausdruck für $g_1(zz_1)$, indem man $z=x+yi$, $z_1=x_1+y_1i$ substituirt, ergiebt sich, dass diese Brüche ganze Functionen von xyx_1y_1 sind.

Wir wählen wieder wie in § 56. ein Gebiet 𝔊 (§ 49. I), welches die gegebene Ecke E_1 einschliesst, und behalten die früheren Bezeichnungen bei.

In Bezug auf 𝔊 ist:

$$\overset{<}{C_1}(\vartheta\,\vartheta_1) = (\varrho^r + \varrho_1\,\varrho^{r-1} + \ldots)\overset{<}{\cos}(A_{n+\lambda-1-r} + \tau + r\vartheta)$$

daher

$$\begin{aligned}\overset{<}{h}(\vartheta\,\vartheta_1) &= a_0(\varrho^{n+\lambda-1} + \varrho_1\,\varrho^{n+\lambda-2} + \ldots)\overset{<}{\cos}(A_0 + \tau + (n+\lambda-1)\vartheta) \\ &\quad + a_1(^{n+\lambda-2} + \varrho_1\,\varrho^{n+\lambda-3} + \ldots)\overset{<}{\cos}(A_1 + \tau + (a+\lambda-2)\vartheta) \\ &\quad\vdots \\ &= \varphi(\varrho\,\varrho_1)\end{aligned}$$

analog $\overset{<}{\varphi_r}(\vartheta\,\vartheta_1)$ und $\overset{<}{l}(\vartheta\,\vartheta_1)$.

$$\begin{aligned}\overset{<}{\varphi}(\varrho\,\varrho_1) &= \Sigma a_m e \varrho_0{}^{e-1}\{\overset{<}{\cos}(A_m + \tau + (e-1)\,\vartheta\}^+ \\ &\quad + \Sigma a_m\, e\, \varrho'^{e-1}\{\overset{<}{\cos}(\ldots)\}^-,\end{aligned}$$

also:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\overset{<}{h}_+ = \overset{<}{F}_+{}'(\vartheta, \varrho_0), \quad \overset{<}{h}_- = \overset{<}{F}_-{}'(\vartheta, \varrho') \\ &\text{analog} \\ &\overset{<}{l}_+ = \overset{<}{G}_+{}'(\vartheta, \varrho_0), \quad \overset{<}{l}_- = \overset{<}{G}_-{}'(\vartheta, \varrho'):\end{aligned}\right.$$

wo F' und G' die Bedeutung in § 47. I. (5) haben. Ferner

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\overset{>}{h}_+ = \overset{>}{F}_+{}'(\vartheta, \varrho'), \quad \overset{>}{h}_- = \overset{>}{F}_-{}'(\vartheta, \varrho_0) \\ &\overset{>}{l}_+ = \overset{>}{G}_+{}'(\vartheta, \varrho^1), \quad \overset{>}{l}_- = \overset{>}{G}_-{}'(\vartheta, \varrho_0).\end{aligned}\right.$$

Schliesslich

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\overset{<}{\underset{>}{F}}(\vartheta\,\varrho) = F(\vartheta_1\,\varrho_1) + (x - x_1)\overset{<}{\underset{>}{h}} - (y - y_1)\overset{>}{\underset{<}{l}} = \psi(x\,y) \\ &\overset{<}{\underset{>}{G}}(\vartheta\varrho) = G(\vartheta_1\,\varrho_1) + (x - x_1)\overset{<}{\underset{>}{l}} + (y - y_1)\overset{<}{\underset{>}{h}} \quad ,,\end{aligned}\right.$$

Diese Grenzen sind lineare Functionen von x und y.

Man hat die Bedingungen zu erfüllen:

(6) $\psi(x_1 y_1) \gtrless 0, \quad \psi(x_1 y) \gtrless 0, \quad \psi(x y_1) \gtrless 0, \quad \psi(xy) \gtrless 0,$

sowie, dass das durch die Ecken $A = (x_1 y_1)$ und $C = (x y)$ bestimmte Rechteck $ABCD$ ganz in das Gebiet $\mathfrak{G}$ falle.

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d. i. falls } 0 < \vartheta_0 < \vartheta' < 90: \\ x < \frac{y_1}{\operatorname{tg} \vartheta_0}, \quad y < x_1 \operatorname{tg} \vartheta', \quad \varrho < \varrho'. \end{array} \right.$$

II. Aehnlich wenn eine der anderen Ecken gegeben ist. An die Stelle von I. (5) treten

$$\text{falls } \overset{<}{E_1} = B: \overset{<}{F}(\vartheta, \varrho) = F(\vartheta_1 \varrho_1) + (x - x_1)\overset{>}{h} - (y - y_1)\overset{>}{l}$$

$$\overset{<}{G}(\vartheta \varrho) = G(\vartheta_1 \varrho_1) + (x - x_1)\overset{>}{l} + (y - y_1)\overset{<}{h}$$

analog $\overset{>}{F}$ und $\overset{>}{G}$

u. s. w.

§. 59.

I. Es sei nach § 48. Kriterium II. und einer der Methoden in § 50. — §. 57, etwa § 56., der Wurzelpunkt W getrennt durch ein Ringstück $ABCD$ mit den Grenzen $\vartheta_1 \vartheta_2 \varrho_1 \varrho_2$ (worin $\frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \dots \frac{\partial G}{\partial \varrho}$ ihre Vorzeichen behalten).

Die beiden Punkte des Umfangs, wo

$$\text{wo} \quad \begin{array}{l} F = 0, \text{ seien } \mathfrak{F}_1 \text{ und } \mathfrak{F}_2, \\ G = 0, \quad \text{„} \quad \mathfrak{G}_1 \quad \text{„} \quad \mathfrak{G}_2 \end{array}$$

und zwar der Reihe nach, wenn man von A ausgehend den Umfang $ABCDA$ durchläuft (entgegengesetzt der Richtung, die der Uhrzeiger-Bewegung entspricht).

Die Bögen $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ schneiden sich nach § 47. III. rechtwinklig in $W = (\vartheta. \varrho)$ und man erhält in den Polarcoordinaten jener 4 Punkte Grenzen von ϑ und ϱ, die zum Teil enger sind als obige.

Um einen besonderen Fall vor Augen zu haben, mögen die genannten 8 Punkte in nachstehender Weise aufeinander folgen, $ABCD$ ist als Ringstück im ersten Quadranten XOY zu denken:

$$\begin{array}{cccc} D & \mathfrak{F}_2 & & C \\ & & & \mathfrak{G}_2 \\ A & \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{F}_1 & B \end{array}$$

Dann liegt:

$\vartheta =$ Wkl. XOW zw. Wkl. XOB und Wkl $XO\mathfrak{G}_2$

$\varrho =$ OW „ $\left.\begin{array}{l} O\mathfrak{F}_2 \\ O\mathfrak{G}_1 \end{array}\right\}$ „ $O\mathfrak{F}_1$.

II. Zahlenbeispiel, $f(z)$ wie früher.

Wir wenden Kriterium II. in § 48. auf den Fall

$\lambda = 0$, $\tau = 0$, $p = -1$ an, sodass $K_e = \dfrac{\partial Q}{\partial \varrho}$, $H_e = \dfrac{\partial P}{\partial \varrho}$.

Für $\vartheta_1 = 71$, $\varrho_1 = 1{,}10$ ist $K_e = +1{,}837$, $H_e = -1{,}722$
$\qquad 71 \qquad 1{,}15 \qquad +0{,}7818 \qquad -2{,}425$.

Diese Werte von ϑ_1 und ϱ_1 liegen zwischen

$$\vartheta_0 = 70, \quad \vartheta' = 72$$
$$\varrho_0 = 1, \quad \varrho' = 1{,}2.$$

In Bezug auf variable ϑ_1, ϱ_1, $\vartheta > \vartheta_1$ und $\varrho > \varrho_1$ innerhalb dieser Grenzen findet man nach dem Verfahren des § 56. III. (Fall $\lambda = 0$, $\tau = 0$. $p = -1$, $a_m = e_m a_m$):

$$K_e(\vartheta\,\varrho) \overset{<}{=} K_e(\vartheta_1\,\varrho_1) - 2{,}923(\vartheta - \vartheta_1) - 89{,}052(\varrho - \varrho_1);$$

ferner (Fall $\lambda = 0$, $\tau = 90$, $p = --1$, $a_m = e_m a_m$):

$$H(\vartheta\,\varrho) \overset{>}{=} H_e(\vartheta_1\,\varrho_1) + 2{,}811(\vartheta - \vartheta_1) + 69{,}79(\varrho - \varrho_1).$$

Woraus folgt:

$K_e > 0$ z. B. zw. den Systemen	$\vartheta_1 = 71$,	$\varrho_1 = 1{,}10$	und	$\vartheta = 71^0\,18'$ $\varrho = 1{,}11$
	71	1,15		$71^0\,15'$ 1,1503
$H_e < 0$ „ „ „ „	71	1,10	„	$71^0\,20'$ 1,11
	71	1,15		$71^0\,20'$ 1,17

Zwischen den Systemen:

$$\begin{array}{llllll} 1) & \vartheta_1 = 71; & \varrho_1 = 1{,}10 & \text{und} & \vartheta = 71^0\,18, & \varrho = 1{,}11 \\ 2) & \phantom{\vartheta_1 = {}} 71 & \phantom{\varrho_1 = {}} 1{,}15 & & \phantom{\vartheta = {}} 71^0\,15', & \phantom{\varrho = {}} 1{,}1503 \end{array}$$

liegt daher höchstens eine Wurzel und da $H(\vartheta\,\varrho) > 0$ keine (§ 48. I. 2)).

Weiter ist für $\vartheta_1 = 71^0\,15'$; $\varrho_1 = 1{,}15$:

$$K_e(\vartheta_1\,\varrho_1) = 0{,}6823.$$

$$\overset{<}{K_e}(\vartheta\,\varrho) = 0{,}6823 - 2{,}923(\vartheta - \vartheta_1) - 89{,}052\,(\varrho - \varrho_1) > 0$$

z. B. zw.

3) $\vartheta_1 = 71^0\,15'$, $\varrho_1 = 1{,}15$ und $\vartheta = 71^0\,20'$, $\varrho = 1{,}154$

Innerhalb dieser Systeme ist ausser $K_e > 0$, nach Obigem auch $H_e < 0$ und liegt folglich keine oder eine Wurzel.

ad 3) haben $\left\{\begin{matrix} H \\ K \end{matrix}\right\}$ in den Ecken $A = (\vartheta_1\varrho_1)$ ... folgende Werte, ausgedrückt in Einheiten der 5ten Decimale:

$$\begin{array}{llll} \text{in } D: & +414, & \text{in } C: & -511 \\ & -448 & & -208 \\ \\ \text{„} \quad A: & +525 & \text{„} \quad B: & -415 \\ & -\;\;65 & & +190. \end{array}$$

Es liegt obiger besonderer Fall vor, in dem Gebiete 3) befindet sich genau eine Wurzel und es ist:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \text{Wkl. } XOW < XO\mathfrak{G}_2 = 71^0\,17',4 \\ \varrho &= OW > O\mathfrak{F}_2 > 1{,}1517 \\ & < O\mathfrak{F}_1 < 1{,}1523. \end{aligned}$$

§ 60.

Das Ringstück *ABCD* im vorigen § sei hinreichend klein. Dann können annähernd die Bögen *AD* und *BC* als Gerade betrachtet, sowie die Punkte $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ mit Hülfe der Regula falsi gefunden werden, an Stelle der Curven $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ kann man die Sehnen setzen und den Durchschnitt

$$S$$

beider als einen Näherungspunkt von W ansehen.

Für den besonderen Fall in § 59. heben wir unter den verschiedenen Methoden S zu bestimmen, folgende beiden hervor. (Die Figuren wird sich der geneigte Leser leicht vorstellen können).

Die Polarcoordinaten ϑ, ϱ von A, C seien $\vartheta_1 \varrho_1$; $\vartheta_2 \varrho_2$
die von S, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{F}_1$: t, r; $t_1 r_1$; t_2, r_2.

1) S als Fusspunkt des von $\mathfrak{F}_1$ auf $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ gefällten Perpendikels aufgefasst.

Mit α den Winkel bezeichnet, welche $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ mit der X-Achse bildet, ist

$$\operatorname{tg}(t-\alpha) = \frac{r_1}{r_2} \frac{\sin(t_1-\alpha)}{\cos(t_2-\alpha)}$$

$$r^2 = r_1^2 \sin^2(t-t_1) + r_2^2 \cos^2(t-t_2)$$

oder, da $t_1 = t_2 = \vartheta_1$, einfacher:

$$\operatorname{tg}(\alpha-t) = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg}(\alpha-\vartheta_1) = \frac{r_1}{r_2} \frac{B\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_1 B}.$$

Setzen wir $\beta = \alpha - \vartheta_1$, $\gamma = \alpha - t$ so entsteht:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} t &= \vartheta_1 + \beta - \gamma \\ \beta &= \operatorname{arc tg} A, \\ \gamma &= \operatorname{arc tg}\left(\frac{r_1}{r_2} A\right), \quad \text{wo } A = \frac{B\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_1 B} \end{aligned} \right.$$

$$r^2 = r_1^2 \sin^2(t-\vartheta_1) + r_2^2 \cos^2(t-\vartheta_1)$$

$$(2) \qquad r^2 = r_2^2 - (r_2^2 - r_1^2) \sin^2(\beta-\gamma).$$

In dem

Bspl. 3) in § 59.

ist

$$r_1 = 1{,}15102, \quad r_2 = 1{,}15223$$

$$B\mathfrak{G}_2 = \frac{190}{398} BC = \pi \frac{109{,}63}{429\,840}, \quad \mathfrak{G}_1 B = 0{,}00298.$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 15^0\,35'\,51'' \\ \gamma &= 15^0\,34'\,51'' \end{aligned}\right\} \beta - \gamma = 1'$$

$$t = 71^0\,16'; \quad r = 1{,}1522.$$

Dies sind in der Tat Näherungswerte des Arguments ϑ und des Moduls ϱ der Wurzel w *).

*) $\vartheta = 41^0\,15'\,58''$
$\varrho = 1{,}15216.$

(Eine obere Grenze von t ist der Wkl. t' der von O an den Halbkreis $\mathfrak{G}_1 S \mathfrak{F}_1$ gezogenen Tangente mit der X-Achse; es ist $\operatorname{tg}(t'-\vartheta_1) = \dfrac{\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}_1}{O\mathfrak{G}_1 + O\mathfrak{F}_1}$, $t'-\vartheta_1 = 1'\,48''$, $t' = 71^0\,16'\,48''$.

2) Die Flächen, deren Gleichungen in Bezug auf die orthogonalen Coordinaten x, y, v: $v = F(x, y)$ und $v = G(x, y)$ sind, somit durch den Wurzelpunkt W gehen, betrachten wir als eben über dem Dreieck ABC, S als Durchschnitt beider.

OS schneide $B\mathfrak{G}_2$ in T.

Znr Unterstützung der Anschauung dirne statt der Figur folgendes Bild derselben

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & C \\ & & & & & \mathfrak{G}_2 \\ & & & & S & T \\ O & A & \mathfrak{G}_1 & & \mathfrak{F}_1 & B \end{array}$$

Im Dreieck $B\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_1$, durchschnitten von der Transversalen TSO ist (nach dem Satz von Ptolemäus, eigentlich Menelaos):

$$\frac{BT}{T\mathfrak{G}_2} \cdot \frac{\mathfrak{G}_2 S}{S\mathfrak{G}_1} \cdot \frac{\mathfrak{G}_1 O}{OB} = -1$$

und in $T\mathfrak{G}_2 S$, durchschnitten von $B\mathfrak{G}_1 O$:

$$\frac{SO}{OT} \cdot \frac{TB}{B\mathfrak{G}_2}, \frac{\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_1 S} = -1.$$

Hieraus erhält man, wegen

$$\frac{\mathfrak{G}_1 A}{\mathfrak{G}_1 B} = \frac{G_A}{G_B}, \quad \frac{\mathfrak{G}_2 B}{\mathfrak{G}_2 C} = \frac{G_B}{G_C}$$

und

$$\frac{S\mathfrak{G}_1}{S\mathfrak{G}_2} = \frac{F \text{ in } \mathfrak{G}_1}{F \text{ in } \mathfrak{G}_2} = \frac{\mathfrak{G}_1 B \,.\, F_A + A\mathfrak{G}_1 \,.\, F_B}{\mathfrak{G}_2 C \,.\, F_B + B\mathfrak{G}_2 \,.\, F_C} \cdot \frac{BC}{AB}$$

wo $G_A \ldots$ das G in A bezeichnet, für t und r die Relationen:

$$\frac{t-\vartheta_1}{\vartheta_2-\vartheta_1} = \frac{G_B \,.\, D_1}{(G_B - G_C)D_1 - \left(G_A - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} G_B\right) D_2}$$

$$\frac{r}{\varrho_2} = \frac{(G_B - G_C)D_1 - \left(G_A - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} G_B\right) D_2}{(G_B - G_C)D_1 - (G_A - G_B)E_2},$$

wo

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_A, & F_B \\ G_A, & G_B \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} F_B, & F_C \\ G_B, & G_C \end{vmatrix}.$$

In unserem

Bspl. 3) in § 59.

finden wir:

$$t = 71^0\,15'\,55''; \quad r = 1{,}15215.$$

Diese Werte liegen ϑ und r näher als die ad 1) (siehe die Anmerkung).

§ 61.

I. Ist der Wurzelpunkt W nach § 48., Kriterium III. unter Anwendung des Verfahrens in § 58. durch ein Rechteck $ABCD$ getrennt, in welchem $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ ihre Vorzeichen nicht ändern, so erhält man in den rechtwinkligen Coordinaten derjenigen Punkte

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2; \quad \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$$

des Umfangs, in denen $F = 0$, $G = 0$

> Grenzen der Coordinaten x und y von W, die zum Teil enger sind als x_1x_2 y_1y_2 mit x_1y_1; x_2y_2 die von A und C bezeichnet.

Sind die Seiten des Rechtecks hinreichend klein, so können annähernd $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ als Gerade und der Durchschnitt beider als ein benachbarter Punkt von W betrachtet werden.

II. Statt dessen kann man mit Hülfe von § 60. wie folgt verfahren.

1) Näherungswerte für x und y sind die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes S:

$$r\cos t, \quad r\sin t.$$

In dem Bspl. 3) des § 59.:

$$x = c^2\,0{,}3700, \quad y = c^2 1{,}0911\ *)$$

2) Um Grenzen für x und y in exacter Weise zu ermitteln, verengere man die Grenzen der Polarcoordinaten des nach § 59. durch ein Ringstück $ABCD$ getrennten Wurzelpunktes W so, dass das dem neuen Ringstück $A'B'C'D'$, welches W einschliesst, umschriebene

---

*) Genauer

$$x = 0{,}370039$$
$$y = 1{,}091123.$$

Rechteck $A''B''C''D''$, dessen Seiten den Achsen parallel sind, ganz innerhalb $ABCD$ fällt.

Alsdann enthält $A''B''C''D''$ nur den Wurzelpunkt W.

Im Allgemeinen hat aber ein solches Rechteck nicht die Eigenschaft von $ABCD$ ad I., sondern die partiellen Differentialquotienten von F und G nach x und y können ihre Vorzeichen innerhalb desselben ändern.

In unserem

Bspl. 3) in § 59.

fanden wir eine Wurzel w zwischen

$\vartheta_1 = 71^0\,15'$ und $\vartheta_2 = 71^0\,20'$ einer- und
$\varrho_1 = 1{,}150$ „ $\varrho_2 = 1{,}154$ andrerseits.

Engere Grenzen sind

für ϑ: $71^0\,1'\,50''$ und $71^0\,16'$
„ ϱ: $1{,}1521$ „ $1{,}1522$

und es ergeben sich nach Vorstehendem

für x die Grenzen $0{,}37001$ und $0{,}37015$
„ y „ $1{,}09104$ „ $1{,}09117$.

Im folgenden Artikel wollen wir uns mit der Bestimmung der Anzahl der Wurzelpunkte in beliebigen Gebieten beschäftigen (Satz von Cauchy) behufs Unterstützung der obigen Methoden.

XXIV.

Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction nebst Anwendung.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Erste Relation.

Gehen wir von der Identität

$$u^2(v^2+1)\cos^2\beta+v^2(u^2+1)\sin^2\beta = N$$

wo

$$N = u^2v^2+u^2\cos^2\beta+v^2\sin^2\beta$$

gesetzt ist, aus und dividiren durch $N(u^2+1)(v^2+1)$, so kommt:

$$\frac{u^2\cos^2\beta}{N(u^2+1)}+\frac{v^2\sin^2\beta}{N(v^2+1)} = \frac{1}{u^2+1}\,\frac{1}{v^2+1}$$

Dies mit $\partial u\,\partial v$ multiplicirt und von 0 an integrirt giebt:

$$\int\limits_{u=0} \operatorname{arc\,tg}\frac{v\sqrt{u^2+\sin^2\beta}}{u\cos\beta}\,\partial\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{u^2+\sin^2\beta}}{\cos\beta} \tag{1}$$

$$+\int\limits_{v=0} \operatorname{arc\,tg}\frac{u\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}{v\sin\beta}\,\partial\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}{\sin\beta} =$$

$$\operatorname{arc\,tg} u\,\operatorname{arc\,tg} v$$

§. 2. Zweite Relation.

Sei für positive u, v und $0 < \beta < \mathrm{R}$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}}; \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{v \sin\beta}{u\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}} \tag{2}$$

dann findet man durch Elimination von v:

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \left(\frac{u \operatorname{tg}\psi}{\sin\beta}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

Jetzt lassen sich neue Constanten u_1, β_1 so bestimmen, dass

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{u_1 \operatorname{tg}\varphi}{\sin\beta_1}\right)^2 = 1 \tag{4}$$

wird. Bedingung ist

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\sin\beta}{u}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta_1}{u_1}$$

Setzt man

$$u = \cot\alpha; \quad u_1 = \cot\alpha_1 \tag{5}$$

so wird

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha_1 = \sin\alpha\cos\beta; & \cos\alpha = \sin\alpha_1\cos\beta_1 \\ \operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg}\alpha\sin\beta; & \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha_1\sin\beta_1 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Nun ist

$$\psi\,\partial\varphi + \varphi\,\partial\psi = \partial(\varphi\psi)$$

Dies von $v = 0$ an integrirt giebt:

$$\int_\beta \psi\,\partial\varphi + \int_0 \varphi\,\partial\psi = \varphi\psi \tag{7}$$

Setzt man in Gl. (1) $v = \infty$, so kommt:

$$\mathrm{R}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{u^2 + \sin^2\beta}}{\cos\beta} - \beta\right) \tag{8}$$

$$+\int_{v=0}^{v=\infty} \operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}}{v\sin\beta}\,\partial\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}}{\sin\beta} =$$

$$\mathrm{R}\operatorname{arctg} u$$

Hierbei ist zu bemerken, dass nach (5) (6)

$$\frac{\sqrt{u^2 + \sin^2\beta}}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\beta}}{\sin\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha_1$$

ist. Wendet man ausserdem die Gl. (2) an, so lässt sich die erhaltene Gleichung schreiben:

$$\mathrm{R}(\alpha_1 - \beta) - \int_\beta^0 (\mathrm{R} - \psi)\partial\varphi = \mathrm{R}(\mathrm{R} - \alpha)$$

das ist

$$\int_0^{\beta} \psi \partial \varphi = \mathrm{R}(\alpha + \alpha_1 - \mathrm{R}) \tag{9}$$

Da sich α, β, φ, ψ mit α_1, β_1, ψ, φ vertauschen lassen, so muss auch sein

$$\int_0^{\beta_1} \varphi \partial \psi = \mathrm{R}(\alpha + \alpha_1 - \mathrm{R})$$

Dies subtrahirt von Gl. (8) giebt:

$$\int_{\beta} \psi \partial \varphi + \int_{\beta_1} \varphi \partial \psi = \mathrm{R}(\mathrm{R} - \alpha - \alpha_1) + \varphi \psi \tag{10}$$

oder, um auf die Form (1) zurückzugehen:

$$\begin{aligned}
&\int_{v=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{v \sin\beta}{u\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}} \, \partial \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}} \\
&+ \int_{v_1=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_1 \sin\beta_1}{u_1\sqrt{v_1^2 + \cos^2\beta_1}} \, \partial \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta_1}{\sqrt{v_1^2 + \cos^2\beta_1}} = \qquad (11) \\
&\mathrm{R}(\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} u_1 - \mathrm{R}) - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2 + \cos^2\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta_1}{\sqrt{v_1^2 + \cos^2\beta_1}}
\end{aligned}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
&u_1 = \frac{\cos\beta}{\sqrt{u^2 + \sin^2\beta}}; \quad v_1 = \frac{u}{v}\sqrt{\frac{v^2 + \cos^2\beta}{u^2 + \sin^2\beta}} \\
&\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\sin\beta}{u}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

§. 3. Anwendung auf Winkel von 4 Dimensionen.

Gleichwie man den von 3 Ebenen begrenzten körperlichen Winkel ein „Trieder“ nennt, wollen wir den von 4 Räumen begrenzten 4dehnigen Winkel ein „Tetratop“ nennen. Hat man ein beliebiges Polytop (linear begrenzte Figur von 4 Dimensionen), fällt von einem beliebigen innern Punkte E ein Lot ED auf jedes begrenzende Polyeder, vom Fusspunkt D ein Lot DC auf jedes begrenzende Vieleck, vom Fusspunkt C ein Lot CB auf jede begrenzende Kante AA, und betrachtet die Punktsysteme E, D, C, B, A als die 5 Ecken von lauter Pentatopen, so zerlegt sich das Polytop in Elementar-Pentatope $ABCDE$ von der Eigenschaft, dass die 4 Kanten AB, BC, CD, DE orthogonal, d. h. jede gegen jede normal sind. Zu ihrer Bestimmung reichen (ausser einer Lineargrösse, die hier nicht in Betracht kommt) 3 ebene spitze Winkel

$$ACB = \alpha, \quad BDC = \beta, \quad CED = \gamma$$

hin. Gleichzeitig zerlegt sich der Vollwinkel von 16 vierdehnigen Rechten $= 8\ \mathrm{R}^2$ um E herum, welcher die ganze Vierdehnung ausmacht, in ebensoviele Elementar-Tetratope, welche die Ecke E jedes Pentatops bilden und durch dieselben α, β, γ bestimmt sind. Im Artikel XVII. S. 276. Gl. (14) (15) ist für ein solches Tetratop W folgender Ausdruck gegeben:

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \tfrac{1}{2}\int_{\delta}^{\beta} \psi\, \partial\varphi \tag{13}$$

wo ψ und φ gemäss Gl. (3) in Relation stehen, und

$$\sin\delta = \sin\beta \cos\gamma \tag{14}$$

gesetzt ist, und α, β ihre Bedeutung behalten. Das Integral (13) wird mit dem zweiten Integral in Gl. (1), nur mit vertauschten Grenzen identisch, wenn man $\mathrm{tg}\,\gamma$ zur obern Grenze der v macht, und für die Arcus ihre Complemente setzt. Da die der u bereits $\cot\alpha$ ist, so erhält man das erste Integral aus dem zweiten durch Substitution der Complemente von γ, β, α für α, β, γ. Zugleich geht dann δ in $\mathrm{R}-\alpha_1$ über. Die Formel (1) lautet zunächst:

$$\int_{\beta}^{\delta} (\psi - \mathrm{R})\partial\varphi + \int_{\mathrm{R}-\beta}^{\mathrm{R}-\alpha_1} (\psi' - \mathrm{R})\partial\varphi' = \gamma(\mathrm{R}-\alpha)$$

und jetzt nach Gl. (13):

$$2\,W(\alpha, \beta, \gamma) + 2\,W(\mathrm{R}-\gamma,\ \mathrm{R}-\beta,\ \mathrm{R}-\alpha) = \mathrm{R}(\alpha_1 - \delta) + \gamma(\alpha - \mathrm{R}) \tag{15}$$

Gl. (10) lässt sich nach Einsetzung der obern Grenzen δ, δ_1 unmittelbar schreiben:

$$2\,W(\alpha, \beta, \gamma) + 2\,W(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \mathrm{R}(\alpha + \alpha_1 - \mathrm{R}) - \delta\delta_1 \tag{16}$$

wo analog

$$\sin\delta_1 = \sin\beta_1 \cos\gamma_1$$

zu setzen ist.

§. 4. Cyklus von 6 auf einander reducirbaren Tetratopen.

Durch abwechselnde Anwendung der Relationen (15) (16) ergänzt durch die aus (3) für $\varphi = \delta$, $\psi = \delta_1$ und aus der reciproken Beziehung hervorgehenden Relationen

$$\mathrm{tg}\,\delta_1 = \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\gamma\, \mathrm{tg}\,\delta; \quad \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\,\gamma\, \mathrm{tg}\,\alpha_1\, \mathrm{tg}\,\gamma_1 = 1$$

und der Relationen der Complemente in umgekehrter Folge erhält man folgende Reihe von Systemen der α, β, γ, δ:

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha_1 = \sin\alpha\cos\beta; & \operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg}\alpha\sin\beta \\ \operatorname{tg}\gamma_1 = \cot\alpha\cot\gamma\cot\alpha_1; & \operatorname{tg}\delta_1 = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$\alpha_2 = R-\gamma_1;\quad \beta_2 = R-\beta_1;\quad \gamma_2 = R-\alpha_1;\quad \delta_2 = R-\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\operatorname{tg}\gamma\sin\alpha_1}{\cos\alpha\,\cos\beta};\quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\cot\alpha}{\sin\beta};\quad \sin\gamma_2 = \sin\alpha\cos\beta$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_3 = \sin\alpha_2\cos\beta_2;\quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \dfrac{\cot\alpha\cos\delta}{\sin\beta\sin\gamma} \\ \operatorname{tg}\beta_3 = \operatorname{tg}\alpha_2\sin\beta_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\beta};\quad \sin\beta_3 = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\delta} \\ \operatorname{tg}\gamma_3 = \cot\alpha_2\cot\gamma_2\cot\alpha_3;\quad \gamma_3 = \delta \end{array}\right\} \tag{18}$$

$$\operatorname{tg}\delta_3 = \operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\gamma_2\operatorname{tg}\delta_2;\quad \delta_3 = \gamma$$

$$\alpha_4 = R-\gamma_3;\quad \beta_4 = R-\beta_3;\quad \gamma_4 = R-\alpha_3$$

$$\alpha_4 = R-\delta;\quad \cos\alpha_4 = \sin\beta\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\beta_4 = \cos\beta\cot\gamma;\quad \cos\beta_4 = \frac{\sin\gamma}{\cos\delta}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_4 = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\delta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta;\quad \gamma_4 = \delta_1$$

$$\operatorname{tg}\delta_4 = \frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\operatorname{tg}\gamma\sin\alpha};\quad \delta_4 = \gamma_1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha_5 = \sin\alpha_4\cos\beta_4; & \alpha_5 = R-\gamma \\ \operatorname{tg}\beta_5 = \operatorname{tg}\alpha_4\sin\beta_4; & \beta_5 = R-\beta \\ \operatorname{tg}\gamma_5 = \cot\alpha_4\cot\gamma_4\cot\alpha_5; & \gamma_5 = R-\alpha \end{array}\right\} \tag{19}$$

$$\sin\delta_5 = \sin\beta_5\cos\gamma_5 = \sin\alpha\cos\beta;\quad \delta_5 = \alpha_1$$

Hiermit ist der Kreis geschlossen; denn es würde folgen:

$$\alpha_6 = R-\gamma_5 = \alpha;\quad \beta_6 = R-\beta_5 = \beta;\quad \gamma_6 = R-\alpha_5 = \gamma$$

Bezeichnet man nun die diesen numerirten Wertsystemen entsprechenden W mit gleichem Index, so finden zwischen den successiven W abwechselnd die Relationen (15) und (16) statt. Es ist demnach

$$\begin{aligned} 2(W+W_1) &= R(\alpha+\alpha_1-R)-\gamma_3\gamma_4 \qquad (20)\\ 2(W_1+W_2) &= R(\alpha+\alpha_3-R)-\gamma_1\gamma_2 \\ 2(W_2+W_3) &= R(\alpha_2+\alpha_3-R)-\gamma_5\gamma \\ 2(W_3+W_4) &= R(\alpha_2+\alpha_5-R)-\gamma_3\gamma_4 \\ 2(W_4+W_5) &= R(\alpha_4+\alpha_5-R)-\gamma_1\gamma_2 \\ 2(W_5+W) &= R(\alpha_4+\alpha_1-R)-\gamma_5\gamma \end{aligned}$$

woraus durch Summation mit abwechselnden Vorzeichen:

$$2(W+W_1) = R(\alpha+\alpha_1-R)-\gamma_3\gamma_4 \tag{21}$$
$$2(W-W_2) = R(\alpha_1-\alpha_3)+\gamma_1\gamma_2-\gamma_3\gamma_4$$
$$2(W+W_3) = R(\alpha_1+\alpha_2-R)+\gamma_1\gamma_2-\gamma_3\gamma_4-\gamma_5\gamma$$
$$2(W-W_4) = R(\alpha_1-\alpha_5)+\gamma_1\gamma_2-\gamma_5\gamma$$
$$2(W+W_5) = R(\alpha_1+\alpha_4-R)-\gamma_5\gamma$$

Ist also ein W bekannt, so sind es auch 5 andere, wofern sie nicht zusammenfallen.

§. 5. Drei Tetratopwerte, die von einer Variabeln abhangen.

Identificirt man in vorstehenden Relationen W einzeln mit W_1, W_3, W_5, so gehen die erste, dritte und fünfte über in

$$\left.\begin{aligned} 4W &= R(2\alpha-R)-\gamma_3\gamma_4 \\ 4W &= R(\alpha_1+\alpha_2-R)+\gamma_1\gamma_2-\gamma(\gamma_4+\gamma_5) \\ 4W &= R(\alpha_1+\alpha_4-R)-\gamma^2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Als Bedingungen der Identität erhält man leicht aus den Gl. (17) (18) (19) für alle 3 Fälle:

$$\alpha+\gamma = R$$

ausserdem beziehungsweise:

$$\cos\beta = \operatorname{tg}\gamma; \quad \sin\beta = \operatorname{tg}\gamma; \quad 2\beta = R$$

Demzufolge wird im ersten Falle

$$\gamma_3 = \gamma_4 = \delta = \arcsin\sqrt{\cos 2\gamma}$$

im zweiten

$$\gamma = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 = R-\alpha_1 = R-\alpha_2 = \arcsin\sqrt{\cos 2\gamma}$$

im dritten

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \arccos\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}R+\tfrac{1}{2}\arcsin(\sin^2\gamma)$$

und die entwickelten Formeln lauten:

$$4W(R-\gamma,\ \arccos(\operatorname{tg}\gamma),\ \gamma) = R^2-2R\gamma-(\arccos(\sqrt{2}\sin\gamma))^2 \tag{23}$$
$$4W(R-\gamma,\ \arcsin(\operatorname{tg}\gamma),\ \gamma) = (\arcsin(\sqrt{2}\sin\gamma))^2-2\gamma^2 \tag{24}$$
$$4W(R-\gamma,\ \tfrac{1}{2}R,\ \gamma) = R\arcsin(\sin^2\gamma)-\gamma^2 \tag{25}$$

Die beiden ersten setzen voraus:

$$\gamma \leqq \tfrac{1}{2}R$$

Führt man diese 3 bekannten Werte in den Cyklus (21) ein, so werden die sechs W jedesmal parweise identisch, sind also sämmtlich bereits bekannt.

§. 6. Resultirende Einzelwerte von Tetratopen.

Ist das in §. 3. angenommene Polytop regelmässig, E sein Mittelpunkt, wird es begrenzt von p Polyedern, jedes Polyeder von f Vielecken, jedes Vieleck von k Kanten, so ist

$$q = 2kfp$$

die Anzahl der Elementar-Pentatope, aus denen es besteht, daher wird am Mittelpunkt in jedem derselben ein Tetratop

$$W = \frac{8R^2}{q}$$

gebildet. Im cit. Aufs. S. 281 sind die Formeln für α, β, γ, im Artikel II. S. 42 die Werte von p und die Arten der Polyeder aufgestellt, woraus die f und k hervorgehen. Die Arten der regelmässigen Polytope waren daselbst durch 3 Zahlen l, m, n bestimmt, welche ausdrücken, dass m Seiten von n Kanten um jede Ecke eines Grenzpolyeders, und ebenso l Seiten von m Kanten um jede Ecke desjenigen Polyeders liegen, nach welchem die Grenzpolyeder um die Polytopecke gruppirt sind. Nach jenen Formeln berechnet ergiebt sich folgende Tabelle:

(26)

(l, m, n)	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\gamma$	$2.k.f.p$	$= q$
(3, 3, 3)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	2.3.4.5	= 120
(4, 3, 3)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	2.3.4.16	= 384
(5, 3, 3)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$	2.3.4.600	= 14400
(3, 4, 3)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	2.3.8.24	= 1152
(3, 3, 4)	1	1	1	2.4.6.8	= 384
(3, 3, 5)	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	2.5.12.120	= 14400

Unter diesen 6 Systemen von α, β, γ sind bereits 3, nämlich für (4, 3, 3), (3, 4, 3), (3, 3, 4), welche bzhw. den Argumenten von W in den Formeln (23) (24) (25) speciell entsprechen. Daher würde der mit ihnen beginnende Cyklus nur bekannte Werte liefern. Die 3 übrigen ergeben die folgenden Cyklen:

$$W\left(\tfrac{2}{3}R,\ \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \frac{R^2}{15} \tag{27}$$

$$W\left(\tfrac{2}{3}R,\ \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{15}}\right) = \frac{R^2}{10} - \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{5}{3}}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}\sqrt{15},\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \tfrac{1}{3}R\right) = \frac{R^2}{15} - \frac{R}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{15}}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}},\ \operatorname{arctg}\sqrt{5},\ \tfrac{1}{3}R\right) = \frac{R^2}{10} + \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{15}}$$

$$W\left(\tfrac{2}{3}R,\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{5}},\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \frac{R^2}{15} - \frac{R}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{15}}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}},\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \tfrac{1}{3}R\right) = -\frac{R^2}{15} + \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}}$$

wo zu bemerken, dass

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}} = R - \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{5}{3}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{15} = \frac{R}{2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{15}} \tag{28}$$

ist. Ferner

$$W\left(\tfrac{2}{3}R,\ \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{R^2}{1800} \tag{29}$$

$$W\left(\tfrac{2}{3}R,\ \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{191R^2}{1800}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)),\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \tfrac{1}{3}R\right) = \frac{229R^2}{1800} - \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\tfrac{4}{5}R,\ \operatorname{arctg}(\sqrt{5}-2),\ \tfrac{3}{5}R\right) = -\frac{109R^2}{1800} + \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\frac{8-3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\tfrac{2}{5}R,\ \operatorname{arctg}(\sqrt{5}+2),\ \tfrac{1}{5}R\right) = \frac{301R^2}{1800} - \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\frac{8+3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(\sqrt{5}+2)),\ \operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \tfrac{1}{3}R\right) = \frac{59R^2}{1800} - \frac{R}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$$

Hier ist zu bemerken, dass

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{arctg}\frac{8-3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} &= 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}} - 2R\\ \operatorname{arctg}\frac{8+3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} &= 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

ist. Der dritte Cyklus giebt:

$$W\left(\tfrac{2}{5}\mathrm{R},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \tfrac{1}{5}\mathrm{R}\right)=\frac{\mathrm{R}^2}{1800} \tag{31}$$

$$W\left(\tfrac{2}{3}\mathrm{R},\ \operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{59\mathrm{R}^2}{1800}-\frac{\mathrm{R}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)),\ \operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \tfrac{1}{3}\mathrm{R}\right)=\frac{301\mathrm{R}^2}{1800}-\frac{\mathrm{R}}{6}\operatorname{arctg}\frac{8+3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(\sqrt{5}+2)),\ \operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \tfrac{1}{3}\mathrm{R}\right)=-\frac{109\mathrm{R}^2}{1800}+\frac{\mathrm{R}}{6}\operatorname{arctg}\frac{8-3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\tfrac{2}{3}\mathrm{R},\ \operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{229\mathrm{R}^2}{1880}-\frac{\mathrm{R}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$$

$$W\left(\tfrac{4}{5}\mathrm{R},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \tfrac{2}{5}\mathrm{R}\right)=\frac{191\mathrm{R}^2}{1880}$$

§. 7. Innere Polytopwinkel.

Es soll der Winkel bestimmt werden, welchen die in einer Ecke zusammenstossenden Grenzräume eines regelmässigen Polytops (l, m, n) nach innen zu bilden. Derselbe besteht aus $2kf$ gleichen Elementar-Tetratopen, für welche die Werte der α, β, γ zu suchen sind. Wir schneiden das Polytop durch einen Raum normal zum Radius KE eines Eckpunkts E, welcher die von E ausgehenden Kanten $2a$ in den Punkten A halbirt und KE im Mittelpunkt des Schnitt-Polyeders D trifft. Letzteres ist ein Polyeder (lm) (l $m$ecke um jede Ecke), dessen Kante die halbe Diagonale des $n$ecks

$$2b = 2a\cos\frac{2\mathrm{R}}{n}$$

ist. Bezeichnen wir wie oben das Elementar-Pentatop der 4dehnigen Pyramide $EAA\ldots$ mit $ABCDE$, so ist B die Mitte der Kante AA, C der Mittelpunkt des $m$ecks, D der Mittelpunkt des Polyeders (lm), und man hat, wenn man zur Abkürzung

$$L^2=\sin^2\frac{2\mathrm{R}}{l}-\cos^2\frac{2\mathrm{R}}{m}$$

$$M^2=\sin^2\frac{2\mathrm{R}}{l}\sin^2\frac{2\mathrm{R}}{n}-\cos^2\frac{2\mathrm{R}}{m}$$

setzt:

$$AB=b=a\cos\frac{2\mathrm{R}}{n}$$

$$BC = b \cot \frac{2R}{m} = a \cot \frac{2R}{m} \cos \frac{2R}{n}$$

$$CD = \frac{b}{L} \cos \frac{2R}{l} \cot \frac{2R}{m} = \frac{a}{L} \cos \frac{2R}{l} \cot \frac{2R}{m} \cos \frac{2R}{n}$$

Da ferner Dreieck KEA rechtwinklig in A, und AD senkrecht auf KE ist, so ergiebt sich:

$$DE = \frac{a^2}{KE} = \frac{aM}{L}$$

Der Wert des Eckradius $KE = r$ ist aus Gl. (12) Seite 35 im Art. II entnommen; wo $m_1 = l$, $n_1 = m$.

Durch Division erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{AB}{BC} = \operatorname{tg}\frac{2R}{m}; \qquad \alpha = \frac{2R}{m} \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{BC}{CD} = \frac{L}{\cos\frac{2R}{l}} \\ \operatorname{tg}\gamma &= \frac{CD}{DE} = \frac{1}{M}\cos\frac{2R}{l}\cot\frac{2R}{m}\cos\frac{2R}{n} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

und in Anwendung auf die 6 regelmässigen Polytope:

(l, m, n)	α	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\gamma$	Anzahl der Elem.-Pentatope
(3, 3, 3)	$\frac{2}{3}$R	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	2.3.4 = 24
(4, 3, 3)	$\frac{2}{3}$R	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	2.3.8 = 48
(5, 3, 3)	$\frac{2}{3}$R	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$	2.3.20 = 120
(3, 4, 3)	$\frac{1}{2}$R	1	1	2.4.6 = 48
(3, 3, 4)	$\frac{2}{3}$R	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	2.3.4 = 24
(3, 3, 5)	$\frac{2}{3}$R	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$	2.3.4 = 24

Es zeigt sich, dass die innern Winkel aller regelmsäsigen Polytope, mit Ausnahme des ersten, welches von 5 Tetraedern begrenzt ist, bereits bekannte Werte haben. Zunächst sind identisch die neben einander stehenden:

(33)

Eckwinkel	Centriwinkel	α	β	γ	Grösse
(4, 3, 3)	(3, 4, 3)	$\frac{2}{3}$R	$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{3}$R	$\frac{1}{3}$R^2
(3, 3, 4)	(4, 3, 3)	$\frac{2}{3}$R	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$R	$\frac{1}{2}$R^2
(3, 4, 3)	(3, 3, 4)	$\frac{1}{2}$R	$\frac{1}{2}$R	$\frac{1}{2}$R	R^2

Die Angabe der Grösse bezieht sich auf den ganzen Eckwinkel, welcher ebensoviel Elementar-Tetratope enthält als der auf dem Polyeder stehende Centriwinkel.

Die Eckwinkel (5, 3, 3) und (3, 3, 5) sind zwar keinen Centriwinkeln congruent, doch bilden ihre Elementar-Tetratope das zweite Glied bzhw. im dritten und zweiten Cyklus. Man hat daher: Eckwinkel für

$$(5,\ 3,\ 3) = 120\,W\left(\tfrac{2}{3}\mathrm{R},\ \operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$\frac{59}{15}\mathrm{R}^2 - 20\mathrm{R}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$$

$$(3,\ 3,\ 5) = 24\,W\left(\tfrac{2}{3}\mathrm{R},\ \ \operatorname{arctg}\sqrt{2},\ \ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{191}{75}\mathrm{R}^2$$

Aus den obigen 3 Congruenzen, die ebenso vom Complex der zusammengelegten Elementar-Tetratope wie von diesen einzeln gelten, geht hervor, dass sich 24 Polytope (4, 3, 3), 16 Polytope (3, 3, 4) und 8 Polytope (3, 4, 3) einander berührend mit einer Ecke zusammen legen lassen, dass also in einer regelmässigen linear begrenzten Figur von 5 Dimensionen nur höchstens bzhw. 23, 15 und 7 der genannten Polytope um eine Ecke liegen können.

§. 8. Resultate für bestimmte Integrale.

Die auf Seite 281—283 aufgestellten Integralwerte werden durch §. 5. 6. beträchtlich vermehrt; man hat nur die Gleichung (13), wo

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta}\right)^2 = 1; \quad \sin\delta = \sin\beta\cos\gamma$$

zu setzen ist, also die Gleichung

$$\int_{\arcsin(\sin\beta\cos\gamma)}^{\beta} \partial\varphi\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\sin\beta\sqrt{1-(\cot\beta\operatorname{tg}\varphi)^2}\right) = 2\,W(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

auf alle daselbst berechneten W anzuwenden. Die Gl. (23) (24) (25) geben:

$$2\int_{\arccos(\sqrt{2}\sin\gamma)}^{\arccos(\operatorname{tg}\gamma)} \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\cot^2\gamma - \frac{1}{\cos^2\varphi}} = R^2 - 2R\gamma - (\arccos(\sqrt{2}\sin\gamma))^2$$

$$2\int_{\gamma}^{\arcsin(\operatorname{tg}\gamma)} \partial\varphi \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1-\cot^2\gamma\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = (\arcsin(\sqrt{2}\sin\gamma))^2 - 2\gamma^2$$

$$2\int_{\arcsin\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}R} \partial\varphi \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\varphi}\right) = R\arcsin(\sin^2\gamma) - \gamma^2$$

Diese 3 Formeln sind ohne Anwendung der Geometrie gefunden. Die 18 Einzelwerte hingegen, welche aus §. 6. hervorgehen, haben sich aus der Geometrie von 4 Dimensionen ergeben.

Bemerkung.

Der aus der Formel (24) resultirende, in Tabelle (33) angegebene Wert $\frac{1}{3}R^2$ für den Eckwinkel von (4, 3, 3) und Centriwinkel von (3, 4, 3), welcher nicht mit der früher gefundenen Grenz-Oktaeder-Zahl 18 stimmt, sondern die Zahl 24 erfordert, führte mich zur Entdeckung eines auf Seite 40 begangenen Fehlers, wo ich 6 einzuschaltende Oktaeder vergessen hatte.

Die Construction des Netzes für Polytop V. ist folgende.

Auf die 8 Dreiecke eines Oktaeders setzen wir 8 Oktaeder. Die Kanten, und mit ihnen 4 Dreiecke jedes neuen Oktaeders verschwinden. Die neue Oberfläche bilden deren 8 Endflächen und 24 Dreiecke, deren je 4 den Raum einer vierkantigen Pyramide lassen. Setzt man in jede dieser 6 Concavitäten ein Oktaeder, so behält die Oberfläche ihre Gestalt, die ferneren Operationen sind daher nur die vorigen in umgekehrter Folge, und die Anzahl der Oktaeder ist

$$N(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}) = 1+8+6+8+1 = 24$$
$$N = 288$$

Infolge dieses Fehlers sind mehrere auf das Polytop (3, 4, 3) bezügliche Zahlenangaben falsch, die ich zu berichtigen bitte.

Seite 42 Zeile 21 muss lauten:

V. 6 Okt. | 24 | 96 | 96 | 24

Seite 43 Zeile 7 muss lauten:

V. $8\sqrt{2} = 11{,}3137085$ | 2

Seite 43 Zeile 6 von unten muss lauten:

V. 6,72717 | 1,12838 | 1,33333R

Seite	281	Zeile	2	v.	unt.	statt	$\frac{1}{54}R^2$	setze	$\frac{1}{72}R^2$
„	282	„	1	„	„	„	$\frac{7}{54}R^2$	„	$\frac{1}{8}R^2$
„	283	„	2	„	„	„	$\frac{1}{54}R^2$	„	$\frac{1}{72}R^2$
„	283	„	1	„	„	„	$\frac{37}{216}R^2$	„	$\frac{1}{6}R^2$

Zu dem betreffenden Aufsatz II. habe ich noch nachträglich die Erklärung zu geben, dass die regelmässigen Figuren von 4. Dimensionen bereits 1880 von W. J. Stringham in einer umfassenderen Arbeit Sylvester, Am. J. III. p. 1 u. f. nach ganz verschiedenen Gesichtspunkten, aber gleichem Resultat behandelt sind, insofern dieselben gleich begrenzten 6 regelmässigen Polytope daraus hervorgehen.

XXV.

Die ersten Formeln für die Rechnung mit trimetrischen Punktcoordinaten.

Von

Emil Hain.

I.

Der Punkt.

ABC sei ein beliebiges Dreieck, seiner Grösse und Lage nach in einer Ebene vollkommen bestimmt. Und zwar sei:

$$BC = a \qquad \text{Winkel } CAB = \alpha$$
$$CA = b \qquad \text{Winkel } ABC = \beta$$
$$AB = c \qquad \text{Winkel } BCA = \gamma$$
$$\text{Dreieck } ABC = F$$

P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene dieses Dreiecks, welches wir das Axen-, Fundamental- oder Urdreieck nennen. $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ seien die normalen Abstände des Punktes P beziehungsweise von den Geraden (den Axen) BC, CA, AB.

Betreffs des Zeichens der Grössen $P(a)$ ist folgendes zu bemerken:

Jede der drei Axen teilt die Ebene in zwei Hälften; eine derselben enthält das Dreieck ABC und werde die positive Seite (Flanke) der Axe genannt, die andere Hälfte heisse die negative. Fällt nun $P(a)$ in die positive Seite von BC, so ist $P(a)$ positiv bezeichnet; das Zeichen — gilt für ein in die negative Seite von BC fallendes $P(a)$. Ebenso verhält es sich mit dem Zeichen von $P(b)$ und $P(c)$.

Daraus erhellt, dass für jeden Punkt innerhalb des Axendreiecks alle drei Grössen

$$P(a),\quad P(b),\quad P(c)$$

positiv bezeichnet sind. Für alle Punkte, welche ausserhalb des Dreiecks liegen, sind diese drei Grössen ungleich bezeichnet. Liegt z. B. P in dem Ebenenteil, der von den Schenkeln des Scheitelwinkels von α begrenzt wird, so ist

$$P(a) \text{ positiv}$$
$$P(b) \text{ negativ}$$
$$P(c) \text{ negativ}$$

Wird P mit den Ecken des Axendreiecks verbunden, so erhält man bei Festhaltung der soeben erwähnten Zeichenregel die fundamentale Beziehung:

$$\text{Dreieck } PBC + \text{Dreieck } PCA + \text{Dreieck } PAB = \text{Dreieck } ABC$$
$$aP(a) + bP(b) + cP(c) = 2F$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\Sigma aP(a) = 2F$$

Es können nun $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ einen gemeinschaftlichen Factor λ besitzen. Dann können wir setzen:

$$P(a) = \lambda p_a$$
$$P(b) = \lambda p_b$$
$$P(c) = \lambda p_c$$

Für λ erhalten wir:

$$a\lambda p_a + b\lambda p_b + c\lambda p_c = 2F$$
$$\lambda \Sigma a p_a = 2F$$
$$\lambda = \frac{2F}{\Sigma a p_a}$$

Die Grössen

$$p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

heissen die trimetrischen Punktcoordinaten des Punktes P. Wir können dies kurz andeuten durch

$$P \equiv p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

Dies kann auch noch ausgedrückt werden, indem man sagt: der Punkt P hat die Form:

$$p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

Während die $P(a)$ an die Relation

$$\Sigma a P(a) = 2F$$

gebunden sind, also für einen Punkt P blos zwei der Grössen $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ willkürlich angenommen werden können, fällt diese Beschränkung für die Coordinaten p_a, p_b, p_c weg und können irgend drei Zahlenwerte die Coordinaten eines Punktes vorstellen. So ist z. B. der Punkt

$$P \equiv 1 \qquad 1 \qquad 1$$

das Inkreiscentrum des Axendreiecks. Es ist dann nämlich:

$$p_a = 1$$

$$p_b = 1 \qquad\qquad \lambda = \frac{2F}{\Sigma a p_a} = \frac{2F}{a+b+c}$$

$$p_c = 1$$

$$P(a) = \lambda p_a = \frac{2F}{a+b+c}$$

$$P(b) = \lambda p_b = \frac{2F}{a+b+c}$$

$$P(c) = \lambda p_c = \frac{2F}{a+b+c}$$

Der Schwerpunkt des Axendreiecks hat die Form:

$$bc \qquad ca \qquad ab$$

Denn für den Schwerpunkt S hat man:

$$S(a) = \frac{2F}{3a} = \frac{2F}{3abc} \cdot bc$$

$$S(b) = \frac{2F}{3b} = \frac{2F}{3abc} \cdot ca$$

$$S(c) = \frac{2F}{3c} = \frac{2F}{3abc} \cdot ab$$

Scheiden wir den gemeinsamen Factor

$$\frac{2F}{3abc}$$

aus, so erhalten wir

$$S \equiv bc \qquad ca \qquad ab$$

Die Seitennormalen von A sind:

$$\frac{2F}{a} \qquad 0 \qquad 0$$

Wir haben also:

$$\begin{array}{lll} A \equiv 1 & 0 & 0 \\ B \equiv 0 & 1 & 0 \\ C \equiv 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Trifft AP ($P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$) die BC in P_a, so gelten (Fig. 1) die Proportionen:

$$P_a(b) : P_a(c) = P(b) : P(c)$$

$$P(b) : P(c) = \frac{2Fp_b}{\Sigma a p_a} : \frac{2Fp_c}{\Sigma a p_a} = p_b : p_c$$

$$P_a(b) : P_a(c) = p_b : p_c$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{lll} P_a \equiv 0 & p_b & p_c \\ P_b \equiv p_a & 0 & p_c \\ P_c \equiv p_a & p_b & 0 \end{array}$$

II.

Die Entfernung zweier Punkte.

Es soll die Entfernung der Punkte

$$\begin{array}{lll} P \equiv p_a & p_b & p_c \\ Q \equiv q_a & q_b & q_c \end{array}$$

mittelst der Grössen a, p_a, q_a ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke stellen wir zuerst eine Formel auf für die Entfernung zweier Punkte, welche auf der Geraden BC liegen. Diese Punkte seien:

$$\begin{array}{lll} A_1 \equiv 0 & 1 & \varepsilon_1 \\ A_2 \equiv 0 & 1 & \varepsilon_2 \end{array}$$

Sonach ist:

$$A_1(a) = 0 \qquad\qquad A_2(a) = 0$$

$$A_1(b) = \frac{2F}{b + c\varepsilon_1} \qquad\qquad A_2(b) = \frac{2F}{b + c\varepsilon_2}$$

$$A_1(c) = \frac{2F\varepsilon_1}{b + c\varepsilon_1} \qquad\qquad A_2(c) = \frac{2F\varepsilon_2}{b + c\varepsilon_2}$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke für $A_1(b)$, $A_2(b)$ in die Gleichungen:

$$A_1C = \frac{A_1(b)}{\sin\gamma}, \qquad A_2C = \frac{A_2(b)}{\sin\gamma}$$

bekommen wir den absoluten Wert von A_1A_2

$$A_1A_2 = \frac{abc(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(b + c\varepsilon_1)(b + c\varepsilon_2)}$$

Die Punkte P, Q seien in beliebiger Lage. Wir ziehen die Normalen von P, Q auf BC; die Fusspunkte seien A_p, A_q. Ziehen wir ferner von Q auf PA_p eine Senkrechte, so gibt das so erhaltene rechtwinklige Dreieck (Fig. 2):

$$\overline{PQ}^2 = d^2 = \overline{A_pA_q}^2 + [P(a) - Q(a)]^2$$

Die Seitennormalen von A_p gewinnen wir (Fig. 3) auf folgende Weise:

Die von A_p auf AC senkrecht gezogene Gerade treffe AC in D. Auf A_pD werde von P ein Lot gezogen, das A_pD in E treffe. Es ist dann:

$$\begin{aligned} A_p(b) &= A_pD = A_pE + ED \\ &= PA_p \cos\gamma + P(b) \\ &= P(a)\cos\gamma + P(b) \\ &= \frac{2F}{\Sigma a p_a}(p_a\cos\gamma + p_b) \end{aligned}$$

Sonach ist:

$$\begin{array}{lll} A_p \equiv 0 & p_a\cos\gamma + p_b & p_a\cos\beta + p_c \\ A_q \equiv 0 & q_a\cos\gamma + q_b & q_a\cos\beta + q_c \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{lll} A_p \equiv 0 & 1 & \dfrac{p_a\cos\beta + p_c}{p_a\cos\gamma + p_b} \\[2ex] A_q \equiv 0 & 1 & \dfrac{q_a\cos\beta + q_c}{q_a\cos\gamma + q_b} \end{array}$$

Indem wir diese Werte in die Formel für A_1A_2 einsetzen, bekommen wir:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{(p_bq_c - p_cq_b) - (p_cq_a - p_aq_c)\cos\gamma - (p_aq_b - p_bq_a)\cos\beta}{(p_a\cos\gamma + p_b)(q_a\cos\gamma + q_b)}$$

$$b + c\varepsilon_1 = \frac{\Sigma a p_a}{p_a\cos\gamma + p_b}$$

$$b + c\varepsilon_2 = \frac{\Sigma a q_a}{q_a\cos\gamma + q_b}$$

$$A_pA_q = \frac{abc[(p_bq_c - p_cq_b) - (p_cq_a - p_aq_c)\cos\gamma - (p_aq_b - p_bq_a)\cos\beta]}{\Sigma a p_a \,.\, \Sigma a q_a}$$

Ferner ist

$$P(a) - Q(a) = \frac{2Fp_a}{\Sigma a p_a} - \frac{2Fq_a}{\Sigma a q_a}$$

$$= \frac{2F}{\Sigma a p_a \,.\, \Sigma a q_a}[b(p_aq_b - p_bq_a) - c(p_cq_a - p_aq_c)]$$

Mit den Abkürzungen:

$$\Sigma a p_a = p, \qquad \Sigma a q_a = q, \qquad p_b q_c - p_c q_b = a_1$$

kann man schreiben:

$$A_p A_q = \frac{abc}{pq}(a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta)$$

$$P(a) - Q(a) = \frac{2F}{pq}(bc_1 - cb_1)$$

Also ist:

$$\overline{PQ}^2 = d^2 = \overline{A_p A_q}^2 + [P(a) - Q(a)]^2$$

$$= \frac{a^2b^2c^2(a_1 - b_1\cos\gamma - c_1\cos\beta)^2 + 4F^2(bc_1 - cb_1)^2}{p^2q^2}$$

Es handelt sich nun darum, diesen Ausdruck symmetrisch zu gestalten. Wir bekommen:

$$(a_1 - b_1\cos\gamma - c_1\cos\beta)^2 =$$
$$a_1^2 + b_1^2\cos^2\gamma + c_1^2\cos\beta^2 + 2b_1c_1\cos\beta\cos\gamma$$
$$- 2c_1a_1\cos\beta - 2a_1b_1\cos\gamma =$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos\alpha - 2c_1a_1\cos\beta - 2a_1b_1\cos\gamma$$
$$+ 2b_1c_1(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) - b_1^2\sin^2\gamma - c_1^2\sin^2\beta$$

Nun ist:

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \frac{F}{ar}$$

$$r = \frac{abc}{4F}$$

also:

$$2b_1c_1(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) = 2b_1c_1bc.\frac{4F^2}{a^2b^2c^2}$$

$$b_1^2\sin\gamma^2 + c_1^2\sin\beta^2 = (b^2c_1^2 + c^2b_1^2).\frac{4F^2}{a^2b^2c^2}$$

Diese Werte geben:

$$d^2 = \frac{a^2b^2c^2}{p^2q^2}(\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1c_1\cos\alpha)$$
$$+ \frac{4F^2(2bcb_1c_1 - b^2c_1^2 - c^2b_1^2) + 4F^2(bc_1 - cb_1)^2}{p^2q^2}$$
$$= \frac{a^2b^2c^2}{p^2q^2}[\Sigma(p_bq_c - p_cq_b)^2 - 2\Sigma(p_cq_a - p_aq_c)(p_aq_b - p_bq_a)\cos\alpha]$$

Wir erhalten:

$$PQ = \frac{abcN}{pq}$$

$$N^2 = \Sigma a_1{}^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha$$

$$p = \Sigma a p_a, \qquad q = \Sigma a q_a, \qquad a_1 = p_b q_c - p_c q_b$$

Drücken wir $\cos\alpha$ durch a, b, c aus, so folgt:

$$\begin{aligned} abcN^2 &= abc(\Sigma a_1{}^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha) \\ &= abc\Sigma a_1{}^2 - \Sigma b_1 c_1 a(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= \Sigma(abca_1{}^2 + a^3 b_1 c_1 - a^2 bc_1 a_1 - a^2 ca_1 b_1) \\ &= \Sigma a(bca_1{}^2 + a^2 b_1 c_1 - abc_1 a_1 - aca_1 b_1) \\ &= -\Sigma a(ca_1 - ac_1)(ab_1 - ba_1) \end{aligned}$$

Also:

$$d^2 = -\frac{abc\Sigma a(ab_1 - ba_1)(ca_1 - ac_1)}{p^2 q^2}$$

Es ist:

$$\begin{aligned} bc_1 - cb_1 &= b(p_a q_b - p_b q_a) - c(p_c q_a - p_a q_c) \\ &= p_a \Sigma a q_a - q_a \Sigma a p_a = p_a q - q_a p \end{aligned}$$

Für die Entfernung d der Punkte

$$\begin{array}{lll} P \equiv p_a & p_b & p_c \\ Q \equiv q_a & q_b & q_c \end{array}$$

gelten demnach die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} d^2 &= -\frac{abc\Sigma a(p_b q - q_b p)(p_c q - q_c p)}{p^2 q^2} \\ &= \frac{abc}{p^2 q^2}[pq\Sigma a(p_b q_c + p_c q_b) - p^2 \Sigma a q_b q_c - q^2 \Sigma a p_b p_c] \end{aligned}$$

$$p = \Sigma a p_a, \qquad q = \Sigma a q_a$$

III.

Die Gleichung der Geraden.

$$\begin{array}{lll} P \equiv p_a & p_b & p_c \\ Q \equiv q_a & q_b & q_c \end{array}$$

seien zwei Punkte in der Ebene des Axendreiecks und X ein solcher Punkt der Geraden PQ, dass

$$XP : XQ = p_1 : q_1$$

Wir ziehen (Fig. 4) von P, Q, X Normalen auf BC. Die Längen dieser Seitennormalen seien

$$P(a), \qquad Q(a), \qquad X(a)$$

Die Gerade PQ treffe BC in A_1. Dann ist:

$$\frac{A_1P}{A_1X} = \frac{P(a)}{X(a)} = \frac{A_1P}{A_1P+PX}$$

$$\frac{A_1P}{A_1Q} = \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{A_1P}{A_1P+PQ}$$

Die Elimination von A_1P ergibt:

$$X(a) = \frac{p_1Q(a)+q_1P(a)}{p_1+q_1}$$

Wir haben somit folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} X(a)(p_1+q_1) - P(a)q_1 - Q(a)p_1 &= 0 \\ X(b)(p_1+q_1) - P(b)q_1 - Q(b)p_1 &= 0 \\ X(c)(p_1+q_1) - P(c)q_1 - Q(c)p_1 &= 0 \end{aligned}$$

Für jeden Punkt X der Geraden PQ gilt sonach die Relation:

$$\begin{vmatrix} X(a) & P(a) & Q(a) \\ X(b) & P(b) & Q(b) \\ X(c) & P(c) & Q(c) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & q_a \\ x_b & p_b & q_b \\ x_c & p_c & q_c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Sigma x_a(p_bq_c - p_cq_b) = 0 = \Sigma a_1x_a$$

wo b_1 und c_1 aus a_1 durch cyklische Vertauschung der Indices a, b, c gebildet werden. Die Gleichung

$$a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$

ist also für constante a_1, b_1, c_1 und variable x_a, x_b, x_c die einer Geraden $\mathfrak{G}$. Wir schreiben dies kurz:

$$\mathfrak{G} \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$

oder deuten dies an durch den Ausdruck: die Form der Geraden $\mathfrak{G}$ ist:

$$a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$

Wir haben dieser Bezeichnung gemäss, da für die Axe BC $x_a = 0$ ist:

$$\begin{aligned} BC &\equiv 1 \qquad 0 \qquad 0 \\ CA &\equiv 0 \qquad 1 \qquad 0 \\ AB &\equiv 0 \qquad 0 \qquad 1 \end{aligned}$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte

$$P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$$
$$Q \equiv q_a \quad q_b \quad q_c$$

hat die Form:

$$\begin{vmatrix} p_b & p_c \\ q_b & q_c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p_c & p_a \\ q_c & q_a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p_a & p_b \\ q_a & q_b \end{vmatrix}$$

So ist also z. B. für $P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$:

$$\begin{array}{llll} AP \equiv & 0 & p_c & -p_b \\ BP \equiv & -p_c & 0 & p_a \\ CP \equiv & p_b & -p_a & 0 \end{array}$$

Für den Schnittpunkt ξ_a, ξ_b, ξ_c zweier Geraden $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1 \quad b_1 \quad c_1$, $\mathfrak{G}_2 \equiv a_2 \quad b_2 \quad c_2$ gelten die Gleichungen:

$$a_1\xi_a + b_1\xi_b + c_1\xi_c = 0$$
$$a_2\xi_a + b_2\xi_b + c_2\xi_c = 0$$

Dieselben bestimmen die Verhältnisse:

$$\xi_a : \xi_c, \qquad \xi_b : \xi_c$$

Der Schnittpunkt zweier Geraden

$$\mathfrak{G}_1 \equiv a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$
$$\mathfrak{G}_2 \equiv a_2x_a + b_2x_b + c_2x_c = 0$$

hat also die Form:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

So erhält man für die Schnittpunkte A_1 einer Geraden $\mathfrak{G}$ mit den Axen BC:

$$\begin{array}{lllll} (BC,\ \mathfrak{G}) \equiv A_1 \equiv & 0 & c_1 & -b_1 \\ (CA,\ \mathfrak{G}) \equiv B_1 \equiv & -c_1 & 0 & a_1 \\ (AB,\ \mathfrak{G}) \equiv C_1 \equiv & b_1 & -a_1 & 0 \end{array}$$

Die Gerade $\mathfrak{G}$, deren Gleichung gegeben ist, kann also construirt werden, indem man zwei der Punkte A_1 durch Zeichnung bestimmt.

IV.

Parallelismus zweier Geraden.

Für einen Punkt X, welcher unendlich fern in der Ebene des Axendreiecks liegt, wird:

$$X(a) = \infty\,, \qquad X(b) = \infty\,, \qquad X(c) = \infty$$

Sind x_a, x_b, x_c, die Coordinatenwerte von X, endliche Zahlenwerte, so ist:

$$\frac{2Fx_a}{\Sigma a x_a} = \infty\,, \quad \frac{2Fx_b}{\Sigma a x_a} = \infty\,, \quad \frac{2Fx_c}{\Sigma a x_a} = \infty$$

Es muss also für alle solche Punkte X, welche unendlich fern liegen, die Beziehung gelten:

$$\Sigma a x_a = 0$$

So ist z. B. für den Punkt

$$X \equiv b-c \qquad c-a \qquad a-b$$
$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = 0$$

X ist also ein unendlich ferner Punkt der Coordinatenebene. Da nun die Gleichung

$$\Sigma a_1 x_a = 0$$

für constante a_1 und variable x_a für alle Punkte einer bestimmten Geraden gilt, so kann analog gesagt werden: alle unendlich fernen Punkte der Coordinatenebene liegen auf der Geraden

$$\Sigma a x_a = 0$$

Dieselbe heisst die unendlich ferne Gerade der Coordinatenebene.

Sind nun zwei Gerade

$$\mathfrak{G}_1 \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$
$$\mathfrak{G}_2 \equiv a_2 \qquad b_2 \qquad c_2$$

parallel, so liegt ihr Schnittpunkt unendlich fern; er liegt auf der Geraden

$$a \qquad b \qquad c$$

Für die Coordinaten ξ_a des diesen drei Geraden gemeinsamen Punktes gelten also die Gleichungen:

$$a_1\xi_a + b_1\xi_b + c_1\xi_c = 0$$
$$a_2\xi_a + b_2\xi_b + c_2\xi_c = 0$$
$$a\,\xi_a + b\,\xi_b + c\,\xi_c = 0$$

Zwei Gerade $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ sind demnach parallel, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Gegeben sei ein Punkt

$$P \equiv p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

und eine Gerade

$$\mathfrak{G} \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$

Es soll die Gleichung derjenigen Geraden gebildet werden, welche durch P zu $\mathfrak{G}$ parallel gezogen werden kann.

Wir suchen den unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{G}$, das ist den Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$
$$a\, x_a + b\, x_b + c\, x_c = 0$$

Er hat die Form:

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv bc_1 - cb_1 \qquad ca_1 - ac_1 \qquad ab_1 - ba_1$$

Die Gerade, welche durch die Punkte

$$bc_1 - cb_1 \qquad ca_1 - ac_1 \qquad ab_1 - ba_1$$
$$p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

geht, hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & bc_1 - cb_1 \\ x_b & p_b & ca_1 - ac_1 \\ x_c & p_c & ab_1 - ba_1 \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist somit die Gleichung der durch $P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$ zu $\mathfrak{G} \equiv a_1 \quad b_1 \quad c_1$ parallel gezogenen Geraden.

V.

Abstand eines Punktes von einer Geraden.

$\mathfrak{G}$ sei eine Gerade, P ein Punkt in der Ebene des Axendreiecks ABC. Es soll der Abstand des Punktes P von der Geraden $\mathfrak{G}$ bestimmt werden, wenn

$$P \equiv p_a \qquad p_b \qquad p_c$$
$$\mathfrak{G} \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$

$A(\mathfrak{G})$, $P(\mathfrak{G})$ seien die Abstände der Punkte A, P von der Geraden $\mathfrak{G}$. Ziehen wir die Normalen von A und P auf $\mathfrak{G}$, verbinden A mit P und verlängern AP, bis diese die $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}_a$ trifft; so haben wir (Fig. 5.):

$$\frac{P(\mathfrak{G})}{A(\mathfrak{G})} = \frac{P\mathfrak{P}_a}{A\mathfrak{P}}$$

Ziehen wir ferner von P und $\mathfrak{P}_a$ die Normalen auf CA, so finden wir:

$$\frac{A\mathfrak{P}_a}{AP} = \frac{\mathfrak{P}_a(b)}{P(b)}$$

$$\frac{P(\mathfrak{G})}{A(\mathfrak{G})} = \frac{A\mathfrak{P}_a - AP}{A\mathfrak{P}_a} = \frac{\mathfrak{P}_a(b) - P(b)}{\mathfrak{P}_a(b)}$$

Es ist:

$$\begin{array}{llll} P & \equiv p_a & p_b & p_c \\ A & \equiv 1 & 0 & 0 \\ AP & \equiv 0 & p_c & -p_b \\ \mathfrak{G} & \equiv a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{P}_a & \equiv b_1 p_b + c_1 p_c & -a_1 p_b & -a_1 p_b \end{array}$$

$$\mathfrak{P}_a(b) = -\frac{2Fa_1 p_b}{a(b_1 p_b + c_1 p_c) - ba_1 p_b - ca_1 p_c}$$

$$P(b) = \frac{2Fp_b}{ap_a + bp_b + cp_c}$$

Also ist:

$$\mathfrak{P}_a(b) - P(b) = -\frac{a\Sigma a_1 p_a}{\Sigma a p_a} \cdot \frac{2Fp_b}{a(b_1 p_b + c_1 p_c) - ba_1 p_b - ca_1 p_c}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P(\mathfrak{G})}{A(\mathfrak{G})} = \frac{\mathfrak{P}_a(b) - P(b)}{\mathfrak{P}_a(b)} = \frac{a\Sigma a_1 p_a}{a_1 \Sigma a p_a}$$

Es handelt sich also darum, $A(\mathfrak{G})$ zu bestimmen.

Es treffe $\mathfrak{G}$ die BC in A_1. Es ist dann:

$$2 \times \text{Dreieck } AB_1C_1 = B_1C_1A(\mathfrak{G}) = AB_1AC_1 \sin\alpha$$

$$A(\mathfrak{G}) = \frac{AB_1AC_1}{B_1C_1} \cdot \frac{2F}{bc}$$

Da

$$\overline{B_1C_1}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{AC_1}^2 - 2AB_1\,AC_1 \cos\alpha,$$

reducirt sich die Aufgabe auf die Bestimmung der Strecken AB_1, AC_1. Die Figur gibt:

$$AB_1 = \frac{B_1(c)}{\sin\alpha}, \quad AC_1 = \frac{C_1(b)}{\sin\alpha}$$

Nun ist:

$$\begin{array}{llll} A_1 & \equiv 0 & c_1 & -b_1 \\ B_1 & \equiv -c_1 & 0 & a_1 \\ C_1 & = b_1 & -a_1 & 0 \end{array}$$

$$B_1(c) = \frac{2Fa_1}{ca_1 - ac_1}, \quad C_1(b) = -\frac{2Fa_1}{ab_1 - ba_1}$$

Also erhalten wir:

$$AB_1 = \frac{a_1bc}{aa_1 - ac_1}, \quad AC_1 = -\frac{a_1bc}{ab_1 - ba_1}$$

$$B_1C_1^2 = \left(\frac{a_1bc}{ab_1 - ba_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1bc}{ca_1 - ac_1}\right)^2 + 2\left(\frac{a_1bc}{ab_1 - ba_1}\right)\left(\frac{a_1bc}{ca_1 - ac_1}\right)\cos\alpha$$

$$= \left[\frac{a_1bc}{(ab_1 - ba_1)(ca_1 - ac_1)}\right]^2$$

$$\times \left[(ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 + 2(ca_1 - ac_1)(ab_1 - ba_1)\cos\alpha\right].$$

Wir erhalten weiter:

$$(ca_1 - ac_1)^2 + ab_1 - ba_1)^2 + 2(ca_1 - ac_1)(ab_1 - ba_1)\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{bc}\left\{\begin{aligned} & a_1^2 . a^2bc \\ & + b_1^2 . a^2bc \\ & + c_1^2 . a^2bc \\ & + b_1c_1(a^4 - a^2b^2 - a^2c^2) \\ & + c_1a_1(ab^3 - a^3b - abc^2) \\ & + a_1b_1(ac^3 - a^3c - ab^2c) \end{aligned}\right.$$

$$= \frac{1}{bc}\left[\begin{aligned} & a^2bc\Sigma a_1^2 \\ & - b_1c_1 . a^2(b^2 + c^2 - a^2) \\ & - c_1a_1 . ab(a^2 + c^2 - b^2) \\ & - a_1b_1 . ac(a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned}\right]$$

$$= a^2(\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1c_1\cos\alpha) = a^2N^2$$

Wir erhalten demnach:

$$B_1C_1 = \frac{abc\,a_1N}{(ab_1 - ba_1)(ca_1 - ac_1)}$$

$$A(\mathfrak{G}) = \frac{AB_1\,AC_1}{B_1C_1} . \frac{2F}{bc} = \frac{2F\,a_1}{aN}$$

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{a\Sigma a_1 p_a}{a_1\Sigma a p_a} . A(\mathfrak{G}) = \frac{2F\,\Sigma a_1 p_a}{N\,\Sigma a p_a}$$

Das gewornene Resultat lautet:

Der Abstand des Punktes

$$P \equiv p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

von der Geraden

$$\mathfrak{G} \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$

ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{2F\Sigma a_1 p_a}{N\,\Sigma a p_a}, \quad N^2 = \Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha$$

VI.

Orthogonalität zweier Geraden.

Es ist die Gleichung der Geraden zu bilden, welche von einem Punkte

$$P \equiv p_a \qquad p_b \qquad p_c$$

auf die Gerade

$$\mathfrak{G} \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad d_1$$

senkrecht gezogen wird.

Um diese Aufgabe zu lösen, ziehen wir durch A eine Parallele zu $\mathfrak{G}$, dieselbe treffe BC in V_a. Der Kürze halber bezeichnen wir vorläufig:

$$V_a \equiv 0 \qquad V_b \qquad V_c$$
$$A V_a \equiv 0 \qquad V_c \qquad -V_b.$$

Die in A auf $A V_a$ errichtete Normale treffe BC in W_a.

Es sei nun: (Fig. 6.)

$$\text{Winkel } B V_a A = \lambda, \quad \text{Winkel } V_a AB = \varepsilon.$$

Dann ist:

$$\text{Winkel } A W_a B = 90^0 - \lambda, \quad \text{Winkel } BA W_a = 90^0 - \varepsilon$$

$$\frac{c}{B V_a} = \frac{\sin\lambda}{\sin\varepsilon}, \quad \frac{c}{B W_a} = \frac{\cos\lambda}{\cos\varepsilon}$$

Oder wegen $\beta + \lambda + \varepsilon = 2R$

$$\frac{c}{B V_a} = \frac{\sin(\varepsilon + \beta)}{\sin\varepsilon} \quad \frac{c}{B W_a} = -\frac{\cos(\varepsilon + \beta)}{\cos\varepsilon}.$$

Isoliren wir ε, so bekommen wir:

$$\frac{c}{B V_a} = \cos\beta + \frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\varepsilon}$$

$$\frac{c}{B W_a} = -\cos\beta + \sin\beta \operatorname{tang}\varepsilon$$

Ferner ist

$$V_a(c) = \frac{2F v_c}{b v_b + c v_c} = B V_a \sin\beta$$

$$B V_a = \frac{a c v_c}{b v_b + c v_c}$$

Wir setzen diesen Wert in die Gleichung für $\frac{c}{B V_a}$ und den hieraus resultirenden Wert für $\operatorname{tang}\varepsilon$ in die Gleichung für $\frac{c}{B W_a}$ ein. Die Rechnung gibt:

$$c : \frac{acv_c}{bv_b + cv_c} = \cos\beta + \frac{\sin\beta}{\tang\varepsilon}$$

$$\tang\varepsilon = \frac{av_c \sin\beta}{bv_b + cv_c - av_c\cos\beta}$$

$$BW_a = \frac{c(bv_b + cv_c - av_c\cos\beta)}{av_c - bv_b\cos\beta - cv_c\cos\beta}$$

Die Substitution dieses Wertes von BW_a in folgende aus der Figur sich ergebende Gleichungen:

$$W_a(b) = (BW_a + a)\sin\gamma$$
$$W_a(c) = -BW_a\sin\beta$$

gibt:

$$BW_a + a = \frac{b^2(v_b\cos\alpha + v_c)}{av_c - bv_b\cos\beta - cv_c\cos\beta}$$

$$W_a \equiv 0 \qquad v_b\cos\alpha + v_c \qquad -(v_b + v_c\cos\alpha)$$

V_a ist der Schnittpunkt der durch A zu $\mathfrak{G}$ parallel gezogenen Geraden mit BC. Der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{G}$ hat die Form:

$$bc_1 - cb_1 \qquad ca_1 - ac_1 \qquad ab_1 - ba_1$$

Also ist:

$$AV_a \equiv 0 \qquad ab_1 - ba_1 \qquad -(ca_1 - ac_1)$$
$$V_a \equiv 0 \qquad ca_1 - ac_1 \qquad ab_1 - ba_1$$

$$v_b = ca_1 - ac_1; \qquad v_c = ab_1 - ba_1.$$

Für die Coordinaten von W_a erhalten wir also:

$$v_b\cos\alpha + v_c = (ca_1 - ac_1)\cos\alpha + ab_1 - ba_1$$
$$= a_1(c\cos\alpha - b) + ab_1 - ac_1\cos\alpha = a(b_1 - c_1\cos\alpha - a_1\cos\gamma)$$

$$v_b + v_c\cos\alpha = -a(c_1 - a_1\cos\beta - b_1\cos\alpha)$$

Setzen wir:

$$a_1 - b_1\cos\gamma - c_1\cos\beta = u_a$$
$$b_1 - c_1\cos\alpha - a_1\cos\gamma = u_b$$
$$c_1 - a_1\cos\beta - b_1\cos\alpha = u_c$$

so ist

$$W_a \equiv 0 \qquad u_b \qquad u_c$$

Die Form der Normalen AW_a von A auf AV_a, also auch auf $\mathfrak{G}$, ist demnach:

$$0 \qquad u_c \qquad -u_b.$$

Wir haben jetzt blos, um die eingangs dieses Paragraphen gestellte Aufgabe zu lösen, durch den Punkt P zu AW_a eine Parallele zu ziehen. Der unendlich ferne Punkt von AW_a ist:

$$bu_b + cu_c \qquad -au_b \qquad -au_c$$

Die Gleichung der durch P zu AW_a parallel gezogenen Geraden, welche zugleich die von P auf $\mathfrak{G}$ gefällte Normale ist, lautet:

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & bu_b + cu_c \\ x_b & p_b & -au_b \\ x_c & p_c & -au_c \end{vmatrix} = 0$$

Nun ist:

$$\Sigma a(a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta) = \Sigma a_1 (a - b\cos\gamma - c\cos\beta)$$

$$\Sigma a u_a = 0$$

$$bu_b + cu_c = -au_a$$

Wir haben also das Resultat:

Die Gleichung der von einem Punkte

auf die Gerade $\begin{matrix} P \equiv p_a & p_b & p_c \\ \mathfrak{G} \equiv a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix}$

gefällten Normale lautet:

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & u_a \\ x_b & p_b & u_b \\ x_c & p_c & u_c \end{vmatrix} = 0$$

$$u_a = a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta$$

VII.

Flächeninhalt des durch drei Punkte oder drei Gerade bestimmten Dreiecks.

$$\begin{matrix} P \equiv p_a & p_b & p_c \\ Q \equiv q_a & q_b & q_c \\ R \equiv r_a & r_b & r_c \end{matrix}$$

seien drei nicht in einer Geraden liegende Punkte. Es soll der Flächeninhalt Φ des Dreiecks PQR bestimmt werden.

$R(PQ)$ bezeichne den Abstand des Punktes R von der Geraden PQ, so dass

$$2 \times \text{Dreieck } PQR = PQ \, . \, R(PQ).$$

Nun drücken wir PQ nach II. aus. Wir erhalten:

$$PQ = \frac{abc\,N}{pq}$$

$$N^2 = \Sigma a_1{}^2 - 2\,\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha$$

$$a_1 = p_b\,q_c - p_c\,q_b, \qquad p = \Sigma a p_a, \qquad q = \Sigma a q_a.$$

Weil

$$PQ \equiv a_1 \qquad b_1 \qquad c_1$$

ist nach V.:

$$R(PQ) = \frac{2F\,\Sigma a_1 r_a}{N\,\Sigma a r_a}$$

Diese Werte für die Längen PQ, $R(PQ)$ geben:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{abc\,N}{pq}\cdot\frac{2F\Sigma a_1 r_a}{N\,\Sigma a r_a} = F\cdot\frac{abc\,\Sigma a_1 r_a}{pq\,\Sigma a r_a}$$

Da nun

$$\Sigma a_1 r_a = \Sigma r_a\,(p_b\,q_c - p_c\,q_b) = \begin{vmatrix} r_a & p_a & q_a \\ r_b & p_b & q_b \\ r_c & p_c & q_c \end{vmatrix},$$

so erhalten wir die Lösung der gestellten Aufgabe:

Der Flächeninhalt Φ des Dreiecks, welches von den Punkten

$$\begin{array}{lll} P \equiv p_a & p_b & p_c \\ Q \equiv q_a & q_b & q_c \\ R \equiv r_a & r_b & r_c \end{array}$$

als Ecken gebildet wird, ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\Phi = F\,.\,\frac{abc}{\Sigma a p_a\,.\,\Sigma a q_a\,.\,\Sigma a r_a}\begin{vmatrix} p_a & q_a & r_a \\ p_b & q_b & r_b \\ p_c & q_c & r_c \end{vmatrix}.$$

Setzen wir in dieser Formel $P \equiv (\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$, als den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$; ebenso

$$Q \equiv (\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_1), \qquad R \equiv (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$$

und ist

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{G}_1 \equiv a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{G}_2 \equiv a_2 & b_2 & c_2 \\ \mathfrak{G}_3 \equiv a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

so wird:

$$p_a = b_2 c_3 - b_3 c_2$$
$$q_a = b_3 c_1 - b_1 c_3$$
$$r_a = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} p_a & q_a & r_a \\ p_b & q_b & r^b \\ p_c & q_c & r_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ r_a & r_b & r_c \end{vmatrix}$$

$$= p_a(q_b r_c - q_c r_b) + q_a(r_b p_c - r_c p_b) + r_a(p_b q_c - p_c q_b)$$

Nun ist:

$$q_b r_c - q_c r_c = (c_3 a_1 - c_1 a_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_3 b_1 - a_1 b_3)(c_1 a_2 - c_2 a_1)$$
$$= a_1^2 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_1 a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$
$$= a_1^2 p_a + a_1 a_2 q_a + a_3 a_1 r_a$$

Also wird:

$$p_a(q_b r_c - q_c r_b) = a_1^2 p_a^2 + a_1 a_2 p_a q_a + a_3 a_1 r_a p_a$$

Ebenso erhält man:

$$q_a(r_b p_c - r_c p_b) = a_2^2 q_a^2 + a_1 a_2 p_a q_a + a_2 a_3 q_a r_a$$
$$r_a(p_b q_c - p_c q_b) = a_3^2 r_a^2 + a_2 a_3 q_a r_a + a_3 a_1 r_a p_a$$

Demnach ist:

$$\begin{vmatrix} p_a & p_b & p_c \\ q_a & q_b & q_c \\ v_a & r_b & r \end{vmatrix}$$

$$= a_1^2 p_a^2 + a_2^2 q_a^2 + a_3^2 r_a^2 + 2 a_1 a_1 p_a q_a + 2 a_2 a_3 q_a r_a + 2 a_3 a_1 r_a p_a$$

$$= (a_1 p_a + a_2 q_a + a_3 r_a)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2,$$

Ferner ist:

$$\Sigma a p_a = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma a q_a = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma a r_a = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Nach Substitution dieser erhaltenen Werte in den Ausdruck für Dreieck PQR bekommen wir:

Das von den Geraden

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{G}_1 \equiv a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{G}_2 \equiv a_2 & b_2 & c_2 \\ \mathfrak{G}_3 \equiv a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

gebildete Dreieck hat zum Flächeninhalte den Ausdruck:

$$\text{Dreieck } (\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_3) \frac{abcF \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

VIII.

Der Winkel zweier Geraden.

Um den Sinus des Winkels zweier Geraden

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{G}_1 \equiv a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{G}_2 \equiv a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

zu bestimmen, fällen wir (Fig. 7.) von A_2, dem Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ und BC, auf $\mathfrak{G}_1$ eine Senkrechte, welche ihren Fusspunkt in A' hat. Die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ treffen sich in D. Ferner sei Winkel $A_2DA' = w$. Dann folgt aus der Figur:

$$A_2A' = A_2D \sin w.$$

Wir bestimmen nun A_2D nach II. und $A_2A' = A_2(\mathfrak{G}_1)$ nach V. Zunächst erhalten wir nach der Formel

$$PQ = \frac{abcN}{pq}$$

$$p = \Sigma a p_a, \quad q = \Sigma a q_a$$

$$N^2 = \Sigma(p_b q_c - p_c q_b)^3 - 2\Sigma(p_c q_a - p_a q_c)(p_a q_b - p_b q_a) \cos\alpha.$$

wenn wir:

$$\begin{array}{llll} P \equiv D \equiv & b_1c_2 - b_2c_1 & c_1a_2 - c_2a_1 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ Q \equiv A_2 \equiv & 0 & c_2 & -b_2 \end{array}$$

setzen:

$$p = \Sigma a(b_1c_2 - b_2c_1), \quad q = bc_2 - cb_2$$

$$p_b q_c - p_c q_b = a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$
$$p_c q_a - p_a q_c = b_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$
$$p_a q_b - p_b q_a = c_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$N^2 = (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 (\Sigma a_2^2 - 2 \Sigma b_2 c_2 \cos\alpha) = (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 N^2_2$$

Also ist:

$$A_2 D = \frac{abc\,(b_1 c_2 - b_2 c_1) N_2}{(bc_2 - cb_2)\,\Sigma a (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

Ferner erhalten wir:

$$A_1 A' = A_2(\mathfrak{G}_1) = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1) 2F}{(bc_2 - cb_2) N}$$

Somit ist:

$$\sin w = \frac{A_2 A'}{A_2 D} = \frac{2F}{abc} \cdot \frac{\Sigma a (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{N_1 N_2}$$

Für den Winkel w der Geraden

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{G}_1 \equiv a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{G}_2 \equiv a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

gilt also der Ausdruck:

$$\sin w = \sin(\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2) = \frac{2F}{abc} \cdot \frac{\Sigma a (b_1 c_2 - b_1 c_1)}{N_1 N_2}$$
$$N_1^2 = \Sigma a_1^2 - 2 \Sigma b_1 c_1 \cos\alpha$$
$$N_2^2 = \Sigma a_2^2 - 2 \Sigma b_2 c_2 \cos\alpha$$

Es ist also:

$$\cos^2 w = 1 - \left[\frac{2F}{abc} \cdot \frac{\Sigma a (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{N_1 N_2}\right]^2 = \frac{N_1^2 N_2^2 - [\Sigma \sin\alpha (b_1 c_2 - b_1 c_1)]}{N_1^2 N_2^2}$$
$$= \frac{N_1^2 N_2^2 - [\Sigma \sin\alpha^2 (b_1 c_2 - b_1 c_1)]^2 - 2 \Sigma \sin\beta \sin\gamma (c_1 a_2 - c_2 a_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{N_1^2 N_2^2}$$

Führen wir nun in diesem Ausdrucke folgende Werte ein:

$$N_1^2 = \Sigma a_1^2 - 2 \Sigma b_1 c_1 \cos\alpha$$
$$N_2^2 = \Sigma a_7^2 - 2 \Sigma b_2 c_2 \cos\alpha$$

$$\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$$

$$\sin\beta \sin\gamma = \frac{F}{ra} = \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma,$$

so erhalten wir für den Zähler von $\cos w^2$ folgenden Ausdruck:

$$(N_1 N_2)^2 \cos w^2 = \Sigma a_1^2 a_2^2 + 2 \Sigma b_1 c_1 b_2 c_2$$
$$- 2 \Sigma \cos\alpha\,(b_1 c_2 + b_2 c_1)(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)$$
$$+ \Sigma \cos\alpha^2 (b_1 c_2 + b_2 c_1)^2 + 2 \Sigma \cos\beta\cos\gamma\,(c_1 a_2 + c_7 a_1)(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
$$= (\Sigma a_1 a_2)^2 - 2 \Sigma a_1 a_2 . \Sigma \cos\alpha (b_1 c_2 + b_2 c_1)$$
$$+ [\Sigma \cos\alpha (b_1 c_2 + b_2 c_1)]^2 = [\Sigma a_1 a_2 - \Sigma \cos\alpha (b_1 c_2 + b_2 c_1)]^2$$

Es ist also:

$$\cos(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2) = \frac{\Sigma a_1 a_2 - \Sigma(b_1 c_2 + b_2 c_1)\cos\alpha}{N_1 N_2}$$

Zwei Gerade

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{G}_1 \equiv a_1 & b_1 & c_1 \\ \mathfrak{G}_2 \equiv a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

sind somit auf einander senkrecht, wenn

$$\Sigma a_1 a_2 = \Sigma(b_1 c_2 + b_2 c_1)\cos\alpha$$

Schliesslich ergibt sich:

$$\operatorname{tang} w = \operatorname{tang}(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2) = \frac{2F}{abc} \cdot \frac{\Sigma a(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{\Sigma a_1 a_2 - \Sigma(b_1 c_2 + b_2 c_1)\cos\alpha}.$$

Wien, Juni 1881.

XXVI.

Miscellen.

1.

Bemerkungen zu der in Teil 55. Seite 426 gegebenen Auflösung der Gleichungen vierten Grades.

Aus No. 13. der genannten Abhandlung ersieht man, dass die Gleichung

1) $$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

ersetzt werden kann durch

2) $$\left(x^2+\frac{a+t}{2}x+p\right)\left(x^2+\frac{a-t}{2}x+q\right)=0.$$

Entwickelt man No. 2., so erhält man durch Vergleichung mit No. 1.

3) $$p+q=\frac{4b-a^2+t^2}{4}$$

4) $$a(p+q)-t(p-q)=2c$$

5) $$pq=d.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$4b-a^2=A \quad \text{und}$$

$$aA-8c=B,$$

so ergiebt sich

6) $$p+q=\frac{A+t^2}{4} \quad \text{und}$$

7) $$p-q=\frac{B+at^2}{4t} \quad \text{und hieraus}$$

8) $$p = \frac{A+t^2}{8} + \frac{B+at^2}{8t}$$

9) $$q = \frac{A+t^2}{8} - \frac{B+at^2}{8t}.$$

Mit Hülfe von No. 4. entsteht:

$$(A+t^2)^2t^2 - (B+at^2)^2 - 64dt^2 = 0 \quad \text{oder}$$

10) $$t^6 + (2A-a^2)t^4 + (A^2-2aB-64d)t^2 - B^2 = 0.$$

Zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung vierten Grades hat man nun:

11) $$x^2 + \frac{a-t}{2}x + \frac{A+t^2}{8} - \frac{B+at^2}{8t} = 0 \quad \text{und}$$

12) $$x^2 + \frac{a+t}{2}x + \frac{A+t^2}{8} + \frac{B+at^2}{8t} = \quad \text{und hieraus:}$$

wie in Teil 55. Seite 428

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\left(\ \ t-a+\sqrt{\ \ \frac{2B}{t}-t^2-(2A-a^2)}\right)$$

$$x_2 = \tfrac{1}{4}\left(\ \ t-a-\sqrt{\ \ \frac{2B}{t}-t^2-(2A-a^2)}\right)$$

$$x_3 = \tfrac{1}{4}\left(-t-a+\sqrt{-\frac{2B}{t}-t^2-(2A-a^2)}\right)$$

$$x_4 = \tfrac{1}{4}\left(-t-a-\sqrt{-\frac{2B}{t}-t^2-(2A-a^2)}\right).$$

Kiel im November 1881. Ligowski.

2.

Zur Tangentenconstruction der Astroide.

Herr Stammer hält es in seinem Aufsatze über Tangentenconstruction der Astroide (Archiv 67, 2. pag. 224.) für zweifelhaft, ob die Aufgabe, auf der beweglichen Geraden in jeder ihrer Lagen den Berührungspunkt zu finden, sich allgemein für jeden Winkel w lösen lasse, und giebt deshalb vorläufig nur die Entwickelung für den besonderen Fall $w = 90^0$. Man hat aber für den allgemeinen Fall mit Anwendung schiefwinkliger Coordinaten, die den Winkel w bilden, die Gleichungen: 1) $p^2+q^2-2pq\cos w - a^2 = 0$ und 2) $py+qx-pq = 0$. Um die Enveloppe der durch die zweite Gleichung ausgedrückten Geraden zu finden, differentiiere man beide Gleichungen, einmal partiell nach p, und dann partiell nach q, und setze die Verhältnisse der Differentialquotienten einander gleich; man erhält so die Bedingung:

$$3)\quad (y-q)(q-p\cos w) = (x-p)(p-q\cos w).$$

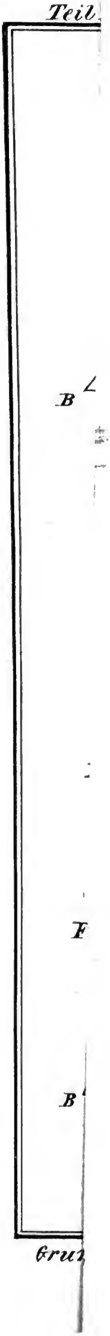
Die Elimination von p und q aus diesen 3 Gleichungen liefert die Gleichung der Enveloppe. Nimmt man aber in Gl. 3) die x und y als laufende Coordinaten an, so bedeutet sie eine Gerade, auf der der Berührungspunkt liegt. Dieselbe steht, wie leicht gezeigt werden kann, auf der durch Gl. 2) dargestellten senkrecht, und geht durch den Punkt $x=p$, $y=q$. Man hat daher, gerade wie in dem speciellen von Herrn St. ausgeführten Fall, von den Endpunkten der Tangente Parallelen mit den Axen zu ziehen und von dem Schnittpunkte derselben eine Senkrechte auf die Tangente zu fällen; der Fusspunkt derselben ist der gesuchte Berührungspunkt.

Dieses Resultat lässt sich auch noch in anderer Weise gewinnen wenn man den Berührungspunkt einer Erzeugenden der Enveloppe als den Durchschnittspunkt zweier unmittelbar aufeinander folgenden Erzeugenden ansieht. Seien AD und BD die beiden gegebenen unter den Winkel w geneigten Geraden, AB und $A'B'$ zwei Erzeugende der Enveloppe, die in T den vorerst als endlich angenommenen Winkel δ bilden und beide die Länge a haben, so hat man, wenn α, β die Winkel zwischen BA und AA', BB' bezeichnen:

$$\frac{BT}{B'T} = \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \frac{BT}{B'T} = \frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin\alpha}.$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination von $B'T$ nach einigen leichten Rechnungen das Verhältniss: $\dfrac{BT}{a} = \dfrac{[\sin\alpha - \sin(\alpha-\delta)]\sin(\beta+\delta)}{\sin\alpha\sin(\beta+\delta) - \sin\beta\sin(\alpha-\delta)}$. Der Zähler auf der rechten Seite geht über in das Product $2\sin\frac{1}{2}\delta\cos\frac{1}{2}(2\alpha-\delta)\sin(\beta+\delta)$, der Nenner durch Entwickelung und Reduction in $\sin\delta\sin(\alpha+\beta)$, und da sich dann $\sin\frac{1}{2}\delta$ weghebt, so ist zuletzt $\dfrac{BT}{a} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(2\alpha-\delta)\sin(\beta+\delta)}{\cos\frac{1}{2}\delta\sin(\alpha+\beta)}$. Dadurch, dass man δ bis zur Null abnehmen lässt, findet man hieraus den Grenzwert des Verhältnisses $\dfrac{BT}{a} = \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Weil aber $a\sin\beta = AD\sin(\alpha+\beta)$, so ist $BT = AD\cos\alpha$ d. h. wenn man von D aus eine Senkrechte auf AB fällt und ihren Fusspunkt F nennt: $BT = AF$, woraus sich unmittelbar die oben gezeigte Construction ergiebt.

Bensheim. Dr. Stoll.


Teil.
B
F
B
Gru

Litterarischer Bericht
CCLXV.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Systematische Entwickelung der gesamten Algebra. I. Teil: Die vier Species. Von Dr. E. Suchsland. Wissenschaftliche Beilage für das Programm des Gymnasiums zu Stolp. Stolp 1881. C. Schrader. 51 S.

Das Buch soll ein Leitfaden für Lehrer und Schüler sein und ist es, hervortretend aber ist gleichzeitig sein Charakter als philosophische Arbeit. Mit ungewöhnlicher Sorgfalt ist der Verfasser bemüht gewesen jeden Punkt, der zur vollständigen Auffassung der Lehrgegenstände gehört, zum Bewusstsein zu bringen. Die hier geübte Logik ist indes eine sachliche, nicht in formellen Bedingungen befangen. Die Definitionen machen nicht den Anspruch die Begriffe zu geben; manchmal würden sie, formell betrachtet, sich als idem per idem enthüllen; dabei aber machen sie auf den Inhalt aufmerksam, und dies scheint ihr eigentlicher Zweck zu sein, dem gemäss ihnen wol keine grosse Wichtigkeit beizulegen ist. Zahlreiche Punkte liessen sich nennen, in denen sich das Lehrbuch durch correcte Bestimmungen hervortut, die sonst häufig fehlen oder ungenügend gegeben werden; doch gehört die Besprechung derselben dahin, wo die Mängel vorkommen. Hier muss vielmehr von denjenigen Punkten die Rede sein, wo im Gegenteil oft gerügte Mängel und Unrichtigkeiten sich auf's neue produciren. Es sind dies die einzelnen folgenden. Der Anfang lautet: „Rechnen heisst, aus zwei oder mehreren gegebenen Zahlen nach bestimmten Regeln neue bilden.“ Solange nur im allgemeinen vom Rechnen und Rechnungsarten die Rede ist, fällt freilich die Unrichtigkeit der Definition nicht auf. Doch wo findet man im Bereich des wirklichen Rechnens einen einzigen Fall, auf den sie passt? Sie ist ein betreffender Beleg des satirischen Ausspruchs eines bekannten Gelehrten: „Allgemein richtig heisst, was auf keinen speciellen Fall angewandt werden kann.“ Aus zwei Zahlen 7 und 8 die neue Zahl 7.8 bilden, das ist im allgemeinen mit der Erfindung der Multiplication, im besondern mit der Aufgabenstellung geschehen, dass ist es nie, was der Schüler lernt und übt. Dessen Tätigkeit besteht, nach allgemeinem Sprachgebrauch — weder die Schüler noch die Lehrbücher, das vorliegende nicht ausgenommen, kennen einen andern — darin die gegebene Zahl 7.8 in dekadischer Form 56, allgemein zu reden, in beabsichtigter Form darzustellen. Beim numerischen Rechnen ist die falsche Definition wirkungslos, man vergisst sie und denkt trotz ihrer das Richtige. Für klare Auffassung der Buchstabenrechnung ist es unerlässlich zu zeigen, dass alles Rechnen ein Transformiren ist. Es entspricht dem sonst so glücklich durchgeführten Gesichtspunkt des Lehrbuchs nicht, dass es diesen Sachverhalt verschweigt und den Begriff im Dunkeln lässt. Der zweite Punkt betrifft die als unrichtig längst verurteilte Definition der Multiplication, die man heutzutage selten hört, und die überflüssigerweise und nicht im Einklang mit der vorausgehenden Erläuterung hier aufgestellt ist. Es brauchte nur das Vorhergesagte zusammengefasst zu werden, dann war die Definition in Ordnung. Drittens wird hier gesagt: um unbestimmte negative Zahlen zu schreiben, setze man ein Minuszeichen vor die positive. Hiernach könnte man unbestimmte Zahlen, von denen auch nicht bestimmt ist, ob sie positiv oder negativ sind, gar nicht schreiben. Es ist aber schon vorher bekannt, dass $a-b$ eine solche Zahl ist, mithin die Lücke in obiger Aufstellung offenbar. Soll es nun nicht erlaubt sein $a-b=c$ zu setzen, d. h. eine Zahl von unbestimmten Vorzeichen mit 1 Buchstaben zu schreiben? Da in der Lehre von den allgebraischen Gleichungen, die in einem spätern Teile folgen soll, und auf die der Verfasser das grösste Gewicht legt, niemand daran denkt die Bedeutung von x auf positive Zahlen zu beschränken, so ist es offenbar incorrect, den Schüler vorher an eine so beschränkte Auffassung zu gewöhnen. Doch schon ehe man soweit kommt, treten oft Collisionsfälle mit der Erklärung auf, die aus Unaufmerksamkeit unbeachtet bleiben. H.

Die trigonometrische Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen bearbeitet von A. P. L. Claussen, Lehrer am Königl. Seminar in Eckernförde. Schleswig 1880. Julius Bergas. 64 S.

Da in Lehrbüchern der Algebra die trigonometrischen Auflösungen oft wenig berücksichtigt sind, so hält der Verfasser eine gesonderte Bearbeitung des Gegenstandes für nützlich. Das Vorliegende ist demnach als Ergänzung der betreffenden Schulbücher zu betrachten. Seinen Zweck erfüllt es reichlich; man findet darin alles zur Sache gehörige, die vorgängige Umformung der Gleichungen, die logarithmische Gestaltung mit Zuziehung von Hülfswinkeln nach den bekannten Methoden in bester Ordnung entwickelt. Der Vortrag geht in hinreichend langsamem Schritt, so dass die Schüler leicht folgen können. Ausgeführte numerische Beispiele sind zur Verdeutlichung jedem Abschnitt beigegeben. H.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor an der Realschule zu Potsdam. Erster Teil. Zweite, verbesserte Auflage. Potsdam 1881. Aug. Stein. 378 S.

Die erste Auflage ist im 231. litt. Bericht besprochen. In der gegenwärtigen haben mancherlei formelle Aenderungen Eingang gefunden. Ausserdem ist der Inhalt vermehrt durch die Aufnahme der Bézout'schen Eliminationsmethode und die specielle Einführung der Determinanten bei Auflösung der linearen Gleichungen für 2 und 3 Unbekannte. Der Verfasser erkennt an, dass gegen letztere Bedenken möglich sind. Hier, wo sie nur als Sache einer leichten Beobachtung auftritt, also kein Anfang einer Theorie sein soll, ist sie wol mindestens unschädlich. Zu erinnern ist nur, dass die Gelegenheit sie vor den Schülern durch einen augenfälligen Nutzen zu motiviren versäumt worden ist. Auf die Fälle der Abhängigkeit der gegebenen Gleichungen, ihrer Unbestimmtheit oder Widerspruchs, wird nämlich ausführlich eingegangen. Bei der Frage hingegen, woran die Fälle zu erkennen seien, bleibt es ganz unerwähnt, dass die Determinante null das Kriterium bildet. Ausser einem Zusatz zu den periodischen Kettenreihen und der independenten Bestimmung des $n$ten Näherungsbruchs eines Kettenbruchs besteht eine bedeutendere Vermehrung in der Aufnahme der quadratischen und kubischen Gleichungen, die eigentlich für den II. Teil vorbehalten waren, weil dessen Ausgabe aber in nächster Zeit nicht zu erwarten ist, zu besserem Abschluss herüber genommen sind. E.

Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor an der Realschule zu Potsdam. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierzehnte, verbesserte Auflage. Potsdam 1879. Aug. Stein. 335 S.

Die 6. Auflage ist im 217ten, die 8te im 222sten, die 13te im 251sten litt. Bericht S. 31 besprochen. Auf das Gesagte hat der Verfasser keine Rücksicht genommen. Auf den falschen Beweis zum Parallelensatz hat er nicht verzichtet. Die Winkelgrösse ist noch undefinirt gelassen, das bekannte Kriterium der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel, welches die Lücke jenes Beweises verraten haben würde, ist verschwiegen; anderes nicht zu erwähnen. H.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und andere Lehranstalten. Von C. Meyer, weiland Professor und Prorektor am Gymnasium zu Potsdam. Herausgegeben von Prof. H. C. E. Martus, Direktor der Sophien-Realschule in Berlin. Erster Teil: Planimetrie. Dreizehnte Auflage. Leipzig 1881. C. A. Koch. 188 S.

Der 2. Teil des Gesammtwerks, enthaltend die Stereometrie, in 6. Auflage, ist im 245. litt. Bericht S. 5 besprochen. Die Sorgfalt der Bearbeitung, welche in jenem Teile anerkannt worden ist, bot sich hier im Anfang der Doctrin noch mehr zu betätigen Gelegenheit. Sie charakterisirt sich durch die erstrebte systematische Vollständigkeit, in welcher zuerst die der Betrachtung unterliegenden Objecte, dann die doctrinären Anordnungen behandelt werden. Die Ausführlichkeit in solchen äusserlichen Punkten geht weit über das gewöhnliche Mass hinaus. Besonders zu nennen ist etwa die Aufstellung und Erklärung der rechnenden Elemente innerhalb der Geometrie, welche sonst nicht erwähnt zu werden pflegen. Sonst ist der Lehrgang der gewöhnliche, die Lehrform die Euklidische. Nur ist der Flächengleichheit kein besonderer Abschnitt gewidmet, der Gesammtumfang der hierhin gehörigen Sätze gering, ohne jedoch Notwendiges vermissen zu lassen. Ein Punkt in der Vorrede des Verfassers, dessen Ansicht der Herausgeber doch gewiss vertreten wird, erfordert eine Antwort. Er betrifft den Parallelensatz, in dessen Deduction das Lehrbuch zwei Schritte zurückgreift. Er wird zurückgeführt auf den Satz, dass jede von einem Punkte innerhalb eines Winkels ($< 2R$) ausgehende Gerade einen der Schenkel schneidet. Da sich dies nicht beweisen lasse, sagt der Verfasser, „habe er sich aus pädagogischen Rücksichten mit einer gewissen Art von Induction zur Anschauung begnügen müssen, welche immer noch besser sei, als ein ganz unerwiesener, eingeschmuggelter Grundsatz.“ Ja wenn das geschehen wäre! Das factische Zuwerkegehen entspricht dem nicht im entferntesten. Es wird nicht auf Annschauung, sondern auf Vermeidung des Einblicks gebaut. Das Verfahren ist eigentümlich, aber die Absicht klar zu machen darin nicht zu erkennen. Der Satz steht nicht wie gewöhnlich vorn an mit nachfolgendem Beweis, sondern als Resultat einer Entwickelung ohne Ueberschrift. Statt dessen geht als Lehrsatz voraus eine Behauptung, die in ihrem zu weitem Umfange nur zum Teil richtig ist, dass nämlich in einem Dreieck nach Wegnahme einer Seite das im vorigen Lehrsatze Gesagte unverändert fortgelte. Das Resultat bleibt freilich gültig, der Grund woraus es hervorgieng hingegen fehlt. Die oben erwähnte, nun folgende Entwickelung, obwol nicht Beweis genannt, unterscheidet sich in nichts von einer Deduction, ausser dass sie eine Lücke enthält. Es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass jeder Punkt innerhalb eines Winkels auch innerhalb eines Dreiecks liegt, das jenen Winkel hat. Was also eingesehen werden muss, wird nicht einmal ausgesprochen, geschweige denn durch nähere Betrachtung zur Auffassung gebracht. Verhüllung des nicht beweisbaren Punktes ist es also, worauf das Manoeuvre ausgeht. Motivirt wird dies durch pädagogische Rücksichten. Ist es pädagogisch, den Schülern die Tatsache zu verschweigen, dass mitten in den Elementen der Geometrie ein Satz existirt, den noch niemand hat beweisen können? Meint man, es werde durch diese Wahrheit die Achtung vor der Wissenschaft geschmälert? Wenn dies Vorurteil noch verbreitet ist, so liegt es daran, dass die meisten Gelehrten keine productiven Forscher sind; denn diese wissen aus eigener Erfahrung, dass die Anerkennung der Tatsachen, begriffen oder nicht, die erste Bedingung ihres Erfolges ist. Es sind nicht die Urheber, sondern die Ausbeuter der wissenschaftlichen Entdeckungen, die gegen die Wahrnehmungen, welche nicht in ihr System passen, die Augen verschliessen. Man stelle nur gegenüber den Wissensdünkel, der, weil ihm schon vor dem Verständniss die Beweisbarkeit aller Sätze garantirt ist, das Einzelne gering schätzt, derjenigen Geistesbildung, die für jede Erweiterung der Fähigkeit dankbar ist, und es kann kein Zweifel sein, dass wir durch offene, wahrheitsgemässe Darlegung des Sachverhalts, die ohnehin als moralische Pflicht gelten sollte, der Geistesentwickelung der Schüler einen besseren Dienst leisten, als durch solche dialektische Künste, durch welche hier der Glaube an die mathematische Unfehlbarkeit gerettet werden soll. Wie der auf die angeführte Stelle der Vorrede folgende Satz sagt, kümmert es den Verfasser nicht, ob die getroffene Auskunft von der Kritik verurteilt wird. Er baut also auf genügende Beistimmung von andrer Seite. Hat er darin Recht, so war es um so mehr geboten, in seinen Aeusserungen das Verborgene ans Licht zu ziehen, die Nicht-Uebereinstimmung der in der Vorrede angegebenen und der im Buche betätigten Grundsätze zu constatiren und die pädagogischen Pflichten, auf die er sich beruft ohne sie zu nennen, näher zu beleuchten. Traf damit zugleich das Lehrbuch ein partieller Tadel, so sollte dessen Brauchbarkeit nicht angegriffen sein: der Lehrer wird leicht die vermisste Aufklärung geben können, wenn gleich die künftige Abänderung des Textes zu wünschen bleibt. Wünschentwert möchte ferner sein der Wegfall der missbräuchlichen Erklärung des Wortes „Figur“, die der Verfasser bei dessen häufiger Wiederkehr fast jedesmal selbst umstösst. Im fast gleichen Falle ist die Definition des Kreises als Fläche: sowol in der vulgären Rede, als auch im grössten Teile der Doctrin versteht man darunter die Linie, was auch logisch das allein correcte ist. H.

Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Von Dr. Jul. Petersen, Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen, Mitglied der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. R. von Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium in Kiel. Kopenhagen 1881. Andr. Fred. Höst u. Sohn. 105 S.

Das Lehrbuch ist vorzüglich, sofern es der Pflege der Anschauung gewidmet ist. Von diesem Zwecke giebt die ganze Bearbeitung Zeugniss durch die praktische Verwertung aller der Betrachtungen, welche dazu führen können; auch werden die Mittel die Sätze klar zu machen nie Beweis genannt, und kein Grund als ein zwingender hingestellt. Dass die Beschränkung des Zweckes auf die Anschauung mit Absehen von den logischen Erfordernissen, welche auf dem Titel nicht ausgesprochen ist, auch in der Vorrede des Uebersetzers verschwiegen bleibt, ist nicht zu billigen. Dieselbe macht erklärtermassen den Anspruch, dass das Buch den Zweck des Unterrichts in der Geometrie überhaupt zu erfüllen geeignet sei, und zwar auf dem Wege, dass der Schüler dadurch die Fähigkeit zur Lösung von Constructions-Aufgaben erlange und hierbei im logischen und consequenten Denken geübt werde. Diesen so allgemein hingestellten Erfolg wollen wir nicht bestreiten, wol aber, dass der Schüler je dadurch begreifen lerne, welche Gründe hinreichend zum Beweise eines Satzes sind. Dazu genügt ein Beispiel. Das Lehrbuch macht fruchtbare Anwendung von der Drehung einer Geraden, aus der sich die Summe der Winkel eines Polygons ergiebt. Dies Verfahren ist höchst geeignet eine übersichtliche, umfassende Anschauung von den Richtungen der Geraden einer Figur zu geben. Wird aber zugleich der Schein erweckt als ob das Resultat bewiesen wäre, so ist dies eine Täuschung. Denn genau dieselben Betrachtungen haben auf der Kugelfläche Platz, und führen zu einem falschen Resultat. In der Ebene nämlich ist der Wechsel des Drehpunkts ohne Einfluss, auf der Kugel hingegen ist die Wirkung der Drehung um verschiedene Punkte verschieden. Da nun von dieser Eigenschaft der Ebene gar nicht die Rede ist, so wird auch der Grund des Erfolges nicht erkannt. Schon die Erklärung des Winkels, die sich gar nicht auf die Frage einlässt, wie sich zwei Winkel der Grösse nach vergleichen lassen, zeigt, dass der Verfasser die logischen Erfordernisse als Nebensache ansieht. Mit einem so einseitigen Unterricht kann sich das Gymnasium, welches auch die Vorbildung für das wissenschaftliche Studium zu geben hat, nicht begnügen. Wohl kann er für Solche, die von den Elementen der Geometrie bloss praktische Anwendung machen wollen, recht nützlich sein. Nur sollte man nicht von einem so beschränkten Standpunkte über das Ganze des geometrischen Unterrichts urteilen, wie es hier in der Vorrede geschieht. Das Lehrbuch handelt nach einander von der Lage der Geraden, hierbei von den Winkeln, Kreisbogen und Parallelen, von den Beziehungen der Länge von Geraden im Dreieck, dann von Constructionen. Congruenz und Symmetrie, den Polygonen, namentlich den regelmässigen, dann von der Aehnlichkeit, insbesondere von den Proportionen am rechtwinkligen Dreieck, von der Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis, hierbei der Lehrsatz des Ptolemäus, dann von der Teilung und Länge des Kreises, dann vom Flächeninhalt. An geeigneten Stellen folgen zugehörige Uebungsaufgaben, im ganzen 228. Die Figuren sind in den Text gedruckt. H.

Geometrie.

Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien. Zweite Abhandlung. Von Alfred Enneper. Aus d. 26. Bd. d. Abhdl. d. Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen 1880. Dieterich. 4°. 139 S.

Die erste Abhandlung untersuchte die Flächen mit planen Krümmungslinien, die jetzt erschienene Fortsetzung gewinnt, zum Teil mit verschiedenem Verfahren, analoge Ergebnisse für die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien. Insbesondere kommt hier der Satz in Anwendung, dass auf zwei sich nach reciproken Radienvectoren entsprechenden Flächen der gemeinsame Radiusvector gleichzeitig Krümmungslinien beschreibt. Weiterhin wird auch der Fall in Betracht gezogen, dass das Product der Radienvectoren nur nach dem einen Parameter constant ist nach dem andern aber zugleich mit dem Ausgangspunkt variirt. Die Ergebnisse davon werden angewandt, wo es sich um die Flächen handelt, die von den Kugeln, auf denen die sphärischen Krümmungslinten liegen, orthogonal geschnitten werden. Von Anfang werden für den Fall eines Systems sphärischer Krümmungslinien die Gleichungen entwickelt und Folgerungen daraus gezogen. Die transformirte Fläche hat dann gleichfalls ein solches System. Ist das eine System concentrisch, so ist das andre plan. Aus den Gleichungen geht die Bedingung hervor, unter der beide Systeme sphärisch sind. Der Fall, wo das eine System Kreise sind, führt zur Betrachtung des Ortes der Mittelpunkte der Kugeln, welche von der Fläche eingehüllt werden; dieser ist eine Curve, auf deren Tangentenfläche die Curve der Mittelpunkte der Kugeln des sphärischen Systems liegen; etwas analoges findet überhaupt bei sphärischen Krümmungslinien statt. Der Satz, dass alle Flächen mit 2 Systemen sphärischer Krümmungslinien Parallelflächen solcher Flächen sind, die durch reciproke Radien einer Fläche von planem System entsprechen, erhält hier zum erstenmal einen vollständigen Beweis. Das Problem der expliciten Darstellung der Flächen mit 1 System sphärischer Krümmungslinien in 2 Parametern wird sodann so allgemein als möglich gelöst, ein Problem das die Bearbeiter Bonnet und Serret unerledigt gelassen haben — und für die verschiedenen Specialfälle, welche die Curve der Kugelmittelpunkte darbieten kann, durchgeführt. Der erste Anhang betrifft die Flächen, deren Krümmungslinien vom einen System geodätische Linien sind, der andre die Krümmungsmittelpunktsflächen, besonders für Flächen mit 1 planen System. Hierbei werden diejenigen Flächen, deren eine Mittelpunktsfläche ein Kegel 2. Grades ist, analytisch dargestellt. H.

An Introduction to the ancient and modern geometry of conics, being a geometrical treatise on the conic sections with a collection of problems and historical notes and prolegomena. By Charles Taylor M. A. Fellow of St. John's College Cambridge. Cambridge 1881. Deighton Bell and Co. London, George Bell and sons. 384 S.

Das Buch ist eine recht reichhaltige und umfassende Bearbeitung der gesammten Theorie der Kegelschnitte nach synthetischem Lehrgang und vorzugsweise constructiver Methode. Der Vortrag hat die Euklidische Form in Lehrsätzen und Beweisen; letztere sind nach Möglichkeit einfach und elegant, die Figuren in den Text gedruckt. Voraus geht die Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten, beginnend mit den ersten Anfängen der Geometrie der Aegypter und Griechen, dann übergehend zu den successiven Entdeckungen in Betreff der Kegelschnitte, mit Angabe der Quellen und Ausführung des Inhalts, dann von der Wiederaufnahme der Wissenschaft durch Kepler bis zur neuesten Gestaltung der Theorie. Die nun folgende sachliche Darlegung geht aus von der Definition der Curve durch das constante

Verhältniss der Abstände vom Brennpunkt und von der Directrix. Das Nächste bezieht sich auf ihre Construction und der Charakterisirung ihrer Gestalt. Es folgen die Sätze über den allgemeinen Kegelschnitt, dann über die Parabel, dann über die centralen Kegelschnitte, über die Asymptoten und insbesondere die gleichseitige Hyperbel. Jetzt wird die Curve aus den Schnitten des Kegels hergeleitet und vorübergehend mit dem Kegel in Beziehung gebracht. Weiter behandelt das Buch: die Krümmung, die orthogonale Projection, das Doppelverhältniss und die Involution, die konische Projection, die Beziehung der Reciproken und Inversion. H.

Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Inaugural-Dissertation von Joh. Heinrich Graf. Bern 1878. Huber u. Comp. 46 S.

Der Verfasser wählt das Beispiel einer sechsblättrigen Riemannschen Fläche mit 20 Verzweigungspunken, um die von Lüroth angebene Verwandlung und Gruppirung durchzuführen. Dies geschieht nachdem er vorher nach Clebsch und Gordan die Relationen zwischen den primären und secundären Kreiswegen aufgestellt hat. Hierzu waren darzulegen: die Verzweigungspunkte und Umgänge, die Fundamentalpunkte, der grosse Umgang, die secundären Kreiswege, die primären Kreiswege, die Transformation der linearen Relationen. Es folgt nun die Ueberführung der Kreiswege in das Normalsystem. Zum Schluss wird die sechsblättrige Fläche in die Oberfläche eines Körpers mit einer bestimmten Anzahl von Durchbohrungen verwandelt. Als Vorbereitung dazu wird gezeigt, wie eine zweiblättrige Fläche mit 2 Uebergangslinien sich in die Fläche eines geschlossenen Ringes verwandeln lässt, und umgekehrt; dann bei 3 Uebergangslinien, worauf dann die Lösung der Aufgabe für die anfängliche Fläche folgt. H.

Ueber eine Fläche vierter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt und ihre Anwendung zur Lösung der Aufgabe: „Drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden.“ Inauguraldissertation. Von Walfried Marx. München 1880. 4°, 21 S.

Die behandelte Fläche wird beschrieben von der dritten Ecke eines sich beständig ähnlich bleibenden Dreiecks, wenn die erste Ecke fest ist, und die zweite auf einer festen Geraden gleitet. Ueber ihre Eigenschaften werden 21 Sätze entwickelt. Mit Hülfe derselben löst der Verfasser dann die genannte Aufgabe. H.

Lehrbuch der ebenen Polygonometrie nebst Beispielen und Uebungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Mit 30 in den Text gedruckten Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Leipzig und Heidelberg 1881. C. F. Winter. 85 S.

Die Behandlung des gewählten Themas ist eine entschieden und ausschliesslich analytische, nicht weil Coordinaten angewandt werden, sondern weil die Gestaltung der Theorie vom allgemeinsten Gesichtspunkt in Angriff genommen wird. Das $n$eck wird aufgefasst als der in seinem Anfang endigende Linienzug, der auf eine der 3. 4. . . . ($n-1$) möglichen Weisen n Punkte der Ebene durch Gerade verbindet. Es werden zuerst über die entstehenden innern und äussern Winkel, die Teildreiecke und die Bestimmungsstücke die nötigen Festsetzungen gemacht, und die allgemeinen Folgen davon entwickelt, dann das schief- und rechtwinklige Coordinatensystem zugezogen, dann die Azimute eingeführt, diese aber nicht mit den Radienvectoren, sondern mit den Polygonseiten und Polygonwinkeln in Relation gebracht, dann der Inhalt des Polygons, dann die restirenden Stücke aus den ausreichend bestimmenden berechnet. Dies ergiebt eine grössere Anzahl von Aufgaben, die als principielle zur Theorie gehören. Ausser ihnen werden am Schluss Uebungsaufgaben gestellt.

H.

Exposition géométrique des propriétés générales des courbes Par Charles Ruchonnet (de Lausanne). Quatrième édition augmentée. Paris 1880. Gauthier-Villars. Lausanne, Georges Bridel. Zurich, Orell, Füssli et C. 174 S.

Das Werk ist in dritter Auflage besprochen im 229. litt Bericht p. 3. In der gegenwärtigen Ausgabe sind die Figuren sehr vermehrt, einige Beweise durch einfachere ersetzt, gewisse Theorien vervollständigt. Wo vorher vom Polygon oder Polyeder die Rede war, welche bzhw. in die Curve oder Fläche als Grenze übergiengen, wird jetzt direct die Curve, Fläche genannt. H.

Die Fundamentalsätze der allgemeinen Flächentheorie, eine neue, selbständige, leichtfassliche Bearbeitung der wichtigsten Sätze der allgemeinen Flächentheorie. Von Dr. Eduard Mahler. Mit 5 Figuren in Holzschnitt. Wien. 1880 und 1881. L. W. Seidel u. Sohn. 1. Heft 28 S. 2. Heft 32 S.

Wesentlich neu ist an dem gegenwärtigen Versuche die Einführung der Fundamentalgrössen 2. Ordnung

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2$$

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}$$

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)^2$$

wo ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Normale bezeichnen. Das Motiv der Einführung ist deutlich; denn sie sind auf der (hier sogenannten) Einheitskugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ das Analoge für die auch hier aufgenommenen Fundamentalgrössen 1. Ordnung D, E, F. Zu ihrer Empfehlung kam es nun auf den Versuch an, ob sie gegenüber den Gauss'schen Fundamentalgrössen 2. Ordnung, die wir mit Ausscheidung des Factors $\triangle = \sqrt{EG - F^2}$ schreiben wollen $E_1 \triangle$, $F_1 \triangle$, $G_1 \triangle$, und in denen sie sich so darstellen

$$\mathfrak{E} = E_1\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - \frac{E}{\varrho_1\varrho_2}; \quad \mathfrak{F} = F_1\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - \frac{F}{\varrho_1\varrho_2}$$

$$\mathfrak{G} = G_1\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - \frac{G}{\varrho_1\varrho_2}$$

irgend welche Vorzüge erkennen lassen. Nun ist aber gleich die erste Anwendung, und infolge dessen die darauf gegründete Theorie der Krümmungen unrichtig. Den begangenen Fehler hat der Verfasser T. LXVII. S. 96. zur Anzeige gebracht und dabei bemerkt, für welchen besondern Fall die Argumentation und das Resultat zutrifft. Zur Berichtigung jedoch reicht dies nicht hin: es ist weiter zu fordern die Angabe, was in Herleitung, Resultat und Folgerungen an die Stelle des Unrichtigen zu setzen ist, und welche Teile der Schrift vielleicht unberührt vom Fehler fortgelten. Von Vergleichung mit andern Bearbeitungen der Flächentheorie ist nirgends die Rede. Es zeigt sich, dass die Parameter der Krümmungslinien ebenso durch $F = \mathfrak{F} = 0$ bedingt sind, wie sonst durch $F = F_1 = 0$. Den Parametern der asymptotischen Linien hingegen entspricht keine so einfache Bedingung wie $E_1 = G_1 = 0$. In der Theorie der parallelen Flächen, würden die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ zur Verwendung kommen, wiewol die E_1, F_1, G_1 nicht ganz ersetzen. Im I. Hefte wird weiter die Differentialgleichung der geodätischen Linien entwickelt; im 2. Hefte die Theorie der Abbildung der Flächen nach Gauss vorgetragen. H.

Mathematische
und physikalische Bibliographie.

CLVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Archimedis opera omnia cum comm. Eutocii. Ed. J. L. Heiberg. Vol. 2. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1876. 32. J. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 16 Mk. 50 Pf.

Heiberg, J. L., philol. Studien zu griech. Mathematikern. III. Leipzig, Teubner. 80 Pf.

Poppe, A., alph.-chron. Uebers. d. Erfindgn. etc. auf d. Geb. der Physik, Chemie etc. 3. Aufl. Frankfurt, Keller. 1 Mk.

Prowe, G., Coppernicus als Arzt. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Methode und Principien.

Döllen, N. E., Perpet. mobile od. Welt, Erde u. Mensch. Riga, Kymel. 2 Mk.

Kloz, F., Widerd. Weltäther. 4. Nacht. z. Entsteh. d. Sonnensystems. Darmstadt, Schlapp. 2 Mk.

Sachse, J. J., die Ausbildung. in. d. Mathematik. 2. Hft. Leipzig, Siegismund & V. 30 Pf.

Schmitz-Dumont, O., d. Einh. d. Naturkräfte u. d. Deutg. ihrer gemeins. Formel. Berlin, C. Duncker. 4 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bremiker, C., logar.-trigon. Tafeln m. 6. Decimalstellen. 8. Ausg. Berlin, Nicolai. 4 Mk. 20 Pf.

Heilermann, H., u. J. Dickmann, Lehr- u. Uebungsb. f. d. Unt. in d. Algebra. 1. Thl. 2. Afl. Essen, Bädeker. 1 Mk. 20 Pf.

Hofmann, F., Sammlg. v. Aufg. a. d. Arithm. u. Algebra. 1. Thl. 8. Afl. Bayreuth, Grau. 2 Mk.

Sammlg. d. wicht. Sätze a. d. Arithm. u. Alg. 4. Afl. Ebd. 40 Pf.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 9. u. 10. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Leitf. d. Elem.-Mathematik. 1. Thl. 3. Aufl. Berlin, Simion. 1 Mk. 50 Pf.

Luke, A., Sammlg. planimetr. Aufg. üb. d. Dreieck. 1. Hft. Halle, Schmidt. 2 Mk. 40 Pf.

Lüling, E., mathemat. Tafeln f. d. prakt. Marktscheider etc. Bonn, Behrendt. 5 Mk.

Ruefli, J., Anh. z. d. Lehrb. d. ebenen Geometrie etc. Bern, Dalp. 1 Mk. 25 Pf.

— Aufgaben z. Anwendg. d. Gleichgn. auf d. geometr. Berechngn. 2. Aufl. Ebd. cart. 80 Pf.

Sachse, J. J., Mathematik f. deutsche Lehrerbild.-Anstalten u. Lehrer. Resultate zu d. Aufg. v. 1. Thl. Ebd. cart. 1 Mk. 70 Pf.

Worpitzky, J., Elemente d. Mathematik. 2. Aufl. 1. Hft. Berlin, Weidmann. 2 Mk. 40 Pf. Leipzig, Siegismund & V.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Fuchs, L., üb. d. Funkt. zweier Variabeln etc. Göttingen, Dieterich. 2 Mk.

Gegenbauer, L., üb. Determinanten höh. Ranges. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Goldschmidt, L., Beitr. z. Theorie d. quadrat. Formen. Göttingen, Akad. Buchh. 80 Pf.

Harnack, A., d. Elemente d. Diff.- u. Integralrechng. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

Lorberg, H., Leitf. f. d. Unt. in d. Elem. d. Algebra. 3. Aufl. Strassburg, Astmann. cart. 80 Pf.

Mocnik, F. de, Trattato di aritmetica. 2. Ed. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Rummer, F., Lehrb. d. Buchstabenrechng. u. d. Gleichgn. 1. Thl. 5. Aufl. Heidelberg, Winter. 6 Mk. 60 Pf.

Schering, E., d. Anschliessen e. Funct. an algebr. Functionen etc. Göttingen, Dieterich. 3 Mk.

Schovrer, F. R., üb. tertiären biquad. Formen. Frauenfeld, Huber. 1 Mk. 60 Pf.

Schlömilch, O., Handb. d. algebr. Analysis. 6. Aufl. Jena, F. Frommann. 9 Mk.

Suchsland, E., syst. Entwickl. d. ges. Algebra. 1. Thl. Stolp, Schrader. geb. 60 Pf.

Zelewski, A., d. Elem. d. gemeinen Arithmetik etc. Breslau, Görlich & C. 1 Mk.

Geometrie.

Ahlborn, A., üb. Berechng. v. Summen v. grössten Ganzen auf geomet. W. etc. Hamburg, Nolte. 2 Mk. 50 Pf.

Dronke, A., d. Kegelschnitte in synthet. Behandlungsw. f. d Prima höh. Lehranst. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Enneper, A., Unters. üb. d Flächen m. planen u. sphär. Krümmungslinien. 2. Abhandlg. Göttingen, Dieterich. 5 Mk. 60 Pf.

Gandtner, J. O., Elem. d. analyt. Geometrie f. d. Schulunt bearb. 5. Aufl. Hrsg. v. E. Gruhl. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Genau, A., Leitf. d. elem. Geometrie, zunächst f. Lehrer-Seminare. 3. Aufl. Büren, Hagen. 2 Mk.; Resultate 75 Pf.

Hamilton, W. R., Elem. d. Quaternionen. Dtsch. v. P. Glan. 1. Bd. 1. Thl. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Hoffmann, J. C. V., Vorschule d. Geometrie. 2. (Schluss)-Lfg. Halle, Nebert. 2 Mk.

Meyer, C., Lehrb. d. Geometrie. Hrsg. v. H. C. E. Martus. 1. Thl. 13. Aufl. Leipzig, Koch. 1 Mk. 80 Pf.

Spitz, C., Lehrb. d. elem. Polygonometrie. 2. Aufl. Leipzig. C. F. Winter. 1 Mk. 80 Pf.

Steinbach, J. J., die 2 Neigungs-Verhältn.-Tab. 1:30 bis 1:1000 etc. 2. Ausg. Leipzig, Scholtze. 1 Mk. 60 Pf.

Unverzagt, W., üb. d. Grundl. d. Rechng. m. Quaternionen. Wiesbaden, Kreidel. 1 Mk. 20 Pf.

Vogt, H., das Tetraeder m. Höhenschnittpunkt. Breslau, Maruschke & B. 1 Mk.

Weinmeister, J. Ph., die Flächen 2. Grades. Leipzig, Hinrichs. 1 Mk.

Weyr, E., üb. biquadrat. Involut. erster Stufe. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Trigonometrie.

Bussler, F., Elem. d. eb. u. sphär. Trigonometrie. Berlin, Enslin. 1 Mk. 60 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Klotz, R., de numero dochmiaco observat. Leipzig, Teubner 1 Mk.

Mechanik.

Jackwitz, E., die unendl. kleinen Schwingungen e. a. zwei Massenp. best. Pendels. Posen, Jolowicz. 1 Mk.

Undeutsch, H., Einführg. in d. Mechanik. Freiberg, Craz & Gerlach. 12 Mk.

Technik.

Brennecke, L., üb. d. Methode d. pneumat. Fundirungen. St. Petersburg, Kranz. 3 Mk. 50 Pf.

Chwolson, O., allg. Theorie d. magnet. Dämpfer. Leipzig, Voss' S. 3 Mk. 20 Pf.

Jolly, P. v., d. Anwendg. d. Waage auf Probl. d. Gravitation. 2. Abth. München, Franz. 50 Pf.

Nickl, J., Anl. z. Gebr. d. Rechen-Apparates. Wr.-Neustadt, Leutner. 1 Mk. 50 Pf.

Weisbach's, J., Lehrb. d. Ingen.- u. Maschinen-Mechanik. 2. Aufl. 3. Thl. Bearb. v. G. Herrmann. 2. Abth. 7. u. 8. Lfg Braunschweig, Vieweg & S. à 2 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Verdet, E., Vorl. üb. d. Wellenth. d. Lichtes. Dtsche. Ausg. Bearb. v. K. Exner. 1. Bd. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg & S 8 Mk. 40 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen d k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge. 29. Bd. J. 1879. Wien, Wallishausser. 11 Mk.

Bergel, J., der Himmel u. s. Wunder. Leipzig, Friedrich. 1 Mk. 80 Pf.

Bredichin, Th., Rech. sur les queues des comètes. Leipzig, Voss' S. 4 Mk.

Cuvier, G., Discours sur les révol. de la surface du globe. Erkl. v. P. Wossidlo. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 50 Pf.

Hann, J., üb. d. tägl. Gang. e. meteorol. Elemente. in Wien. Wien, Gerold's S. 45 Pf.

Jahrbuch, Berl. astronomisches, f. 1883. Red. v. W. Foerster & F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Israel, C., Reduction e. beob. Monddistanz etc. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Nachrichten, astronomische. Hrsg. v. A. Krüger. 100. Bd. Nr. 1. (Nr. 2377). Hamburg, Mauke. preplt. 15 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, red. v. H. Wild. 7. Bd. 1. Hft. Leipzig, Voss' S. 10 Mk. 30 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astrom. Gesellsch. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 15. J. 4. Hft. Leipzig, Engelmann, 2 Mk.

Nautik.

Dabovich, P. E., nautisch-techn. Wörterb. d. Marine. Deutsch, ital., franz. u. engl. 1. Bd. 7. Lfg. Wien, Gerold & C. 2 Mk.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. d. J. 1882. 21. J. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Physik.

Krebs, G., Leitf. d. Experim.-Physik f. Gymn. u. z. Selbstb. Wiesbaden, Bergmann. 4 Mk. 60 Pf.; geb. 5 Mk.

Müller, J., Lehrb. d. Physik u. Meteorologie. 8. Aufl. v. L. Pfaundler. 3. Bd. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk.

Repertorium f. Experiment.-Physik, f. physikal. Technik etc. Hrsg. v. Ph. Carl. General-Register zu Band I—XV. München. Oldenbourg. 2 Mk.

Ule's, O., Warum u. Weil. Physik. Thl. 5. Aufl. v. F. Langhoff. Berlin, Klemann. 3 Mk. 50 Pf.; cart. 4 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. math.-physik. Cl. d. b. Akad. d. Wiss. 14. Bd. 1. Abth. München, Franz. 7 Mk.

Annalen, mathemat. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 18. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Teubner. preplt. 20 Mk.

Berichte üb. d. Verhandlgn. d. k. sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig. Math.-phys. Classe. 1880. II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Journal f. d. reine u. angew. Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker u. K. Weierstrass. 91. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Berlin, G. Reimer. preplt. 12 Mk.

Schmeisser, K., d. Analysis f. Jünger u. Freunde der Mathematik. Querfurt, Rötscher. 1 Mk. 75 Pf.; geb. 2 Mk.

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 1. Abth. 83. Bd. 1. u. 2. Hft. Wien, Gerold's S. 4 Mk.

— dass. 2. Abth. 83. Bd. 1. u. 2. Hft. Ebd. 6 Mk.

— dass. 3. Abth. 83. Bd. 1. u. 2. Hft. Ebd. 3 Mk.

Wolf's naturwissensch.-mathemat. Vademecum. Leipzig, Kössling. 50 Pf.

Litterarischer Bericht

CCLXVI.

Methode und Principien.

Die Einheit der Naturkräfte und die Deutung ihrer gemeinsamen Formel. Mit fünf Figurentafeln. Von O. Schmitz-Dumont. Berlin 1881. Carl Duncker. 168 S.

Der Verfasser verspricht, durch blosse Abstossung nach (—2)ter Potenz der Entfernung, ausgeübt von Massenpunkten, mit Unterscheidung von Körper- und Aetheratomen, beide für sich aber unterschiedslos, die Grundlagen aller physikalischen Theorien herzuleiten. Die Aufgabe wird analytisch in Angriff genommen, und zwar soll zuerst die Existenz unveränderlicher Gruppirungen von solchen Massenpunkten, d. i. starrer ausgedehnter Molecüle, dann deren Attraction nach (—2)ter Potenz der Entfernung, u. s. f. als Resultat der Rechnung auf Grund jener Hypothese erscheinen. Aber nur ein einziges mal, S. 11, wird ein Deductionsglied in einer entwickelten Formel dargestellt, und diese Formel ist falsch; im übrigen wird der angebliche Rechnungsgang nur durch Zeichen, aus denen sich nichts entnehmen lässt, angedeutet. Dass der Verfasser die fehlende Verbindung in Gedanken durchgeführt habe, lässt sich hiernach nicht wol annehmen; wir wollen ihn deshalb nicht auffordern davon Rechenschaft zu geben. H.

Das Quadrat der Bildung. Mathematisch-philosophische Erwägungen von G. M. Schultzky. Mit einer lithographirten Tafel. Berlin 1881. Theobald Grieben. 382 S.

Der Verfasser ordnet die ethischen Begriffe in ein Quadrat und deutet deren Stellungen und Combinationen, indem er ihnen Werte und Kräfte zuschreibt, wie eine Kartenlegerin, bezüglich auf die Elemente des Menschenlebens. H.

Sta, sol, ne moveare. Von August Tischner, Arzt und Naturforscher. I. Leipzig (1881). Gustav Fock. 31 S.

Der Verfasser eifert aus Unkenntniss dafür, dass die Astronomie, nachdem die Bewegung der Sonne erwiesen sei, sich entschliesse, ihr ganzes auf der Coppernicanischen Annahme einer fixen Sonne erbautes System als unnütze Arbeit fortzuwerfen und ein neues zu begründen, das von der später entdeckten Tatsache ausgehe. Auf die Einwürfe eines Laien kann man sehr wol eingehen, wenn derselbe nur die Fähigkeit hat sein Urteil auf das zu beschränken, was er aus seinem beschränkten Wissen folgern kann. Da die Schrift vielfach vom Gegenteil zeugt, so muss es hier genügen, mit Uebergehung aller nebensächlichen Irrtümer, nur diejenigen zu nennen, mit denen allein schon das ganze Räsonnement hinfällt. Der Verfasser weiss nicht und würde es als Nichtmathematiker auch schwerlich verstehen, dass und in welcher Weise die Bewegung der Sonne, soweit sie durch Anziehung der Planeten bedingt ist, bei der Bestimmung der Planetenbewegung vollständig in Rechnung kommt. Er hat irgendwie in Erfahrung gebracht, dass die heutige Astronomie noch auf demselben Boden steht wie die des Coppernicus, was ja in gewissem Sinne richtig ist, sogar in Betreff der Kreisbahnen, nämlich wenn vom Ausgangspunkt der Betrachtung die Rede ist. Dies scheint ihm aber mit der Lehre von der Bewegung der Sonne im unlöslichen Widerspruch zu stehen. Sagt man vielleicht, dieser Irrtum sei natürlich, wo das Verständniss einer Rechnung durch Correction fehlt, so ist dagegen zu erinnern, dass der Unkundige im Specialfach, wenn er nur entwickelten Verstand besitzt, über die durch die Wahl des Ausgangspunkts einer Rechnung, die er nicht versteht, bedingten Folgen keine Behauptung aufstellen wird. Dass der Verfasser von der Relativität aller Bewegung nichts weiss, und es für widersprechend hält, die Bewegung der Sonne zu lehren und sie doch als ruhend zu betrachten, teilt er gewiss mit Manchem; auch mag es wol vorkommen, dass in der Schule und in populären Schriften dieser Unkenntniss Vorschub geleistet wird. Bei andern relativen Begriffen wird die Abhängigkeit durch den Genitiv hinzugefügt. Bei der Bewegung wird sie gewöhnlich nicht ausgedrückt. Dann sollte wenigstens der, welcher Anfänger belehren will, auf die Fälle Acht haben, wo der Ausdruck der Relativität zum Verständniss erforderlich wird.

H.

Elemente der Quaternionen von William Rowan Hamilton, Mitglied der königlichen astronomischen Gesellschaft zu London, correspondirendes Mitglied der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, der kaiserlich-königlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien etc., Professor der Astronomie an der Universität zu Dublin und königlicher Astronom von Irland. Herausgegeben von seinem Sohne William Edwin Hamilton. Deutsch von Paul Glan, Privatdocent für Physik an der Universität zu Berlin. Ersten Bandes erster Theil. Leipzig 1881. Johann Ambrosius Barth. 132 S.

Nach dem Urteile des Uebersetzers kann die Quaternionenlehre nur soweit von Nutzen sein, als sie uns eine einfache Zeichensprache bietet, durch die wir Beziehungen zwischen Grössen ausdrücken und ohne logische Ueberlegungen neue Beziehungen ableiten können, und zwar hat er nur den Nutzen für Anwendungen der Mathematik, also weder für elementare Schulbildung noch für wissenschaftliche Forschung im Auge. Er setzt diesem Teile der Lehre einen andern, schwierigeren entgegen, dem er keinen Nutzen zuerkennt. In der Tat enthält der jetzt erschienene Teil nichts, was der Auffassung irgend Schwierigkeiten darböte; auf ihn passt das Gesagte augenfällig vollkommen. Dass die Methode sachlich neu wäre, wird man schwerlich behaupten wollen; sie ist vollständig in der analytischen Geometrie enthalten: die Projectionen der Gebilde auf eine willkürliche Axe ergeben ganz denselben Additionsalgorithmus wie die Vectoren; es bedarf dazu keiner besondern Einführungen. Im Gedanken des Einzelnen vollzieht sich von selbst diejenige Abkürzung, welche in der Vectorentheorie gelehrt wird. Einen oft wiederholten Gedankengang fangen wir mit der Zeit an kürzer zu durchlaufen, indem wir von denjenigen Bestimmungen, die für den momentanen Zweck gleichgültig sind, keine Notiz nehmen. Nur um die Abkürzungen auch für den Verkehr nutzbar zu machen, war es nötig sie systematisch zu gestalten; in diesem Sinne hat die elementare Quaternionenlehre etwa die Bedeutung einer Stenographie. Der Inhalt des Gegenwärtigen ist folgender. Nach einer sehr ausführlichen Auseinandersetzung des Wesens der Vectoren werden Anwendungen gemacht erst auf Punkte und Linien in der Ebene und zwar gehandelt von linearen Gleichungen zwischen 2 und zwischen 3 coinitialen Vectoren, von Netzen, von anharmonischen Coordinaten und Gleichungen von Punkten und Linien, von anharmonischen Gleichungen und Vector-Ausdrücken für Curven. In den Anwendungen auf Vectoren im Raume wird dann gesprochen von linearen Gleichungen zwischen nicht complanaren Vectoren, von fünfzahligen Symbolen für Punkte und Ebenen, von anharmonischen Coordinaten, von Netzen, von Schwerpunkten von Punktsystemen und einfachen und zusammengesetzten

Mitteln von Vectoren, von anharmonischen Gleichungen und Vector-Ausdrücken von Flächen und Curven, schliesslich von Differentialen von Vectoren. H.

Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. J. Worpitzky, Professor an der Königl. Kriegs-Akademie und am Friedrichs-Werderschen Gymnasium zu Berlin. Zweite, umgearbeitete Auflage. Erstes Heft: Die Arithmetik. Mit 6 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1881. Weidmann. 156 S.

Die 1. Auflage ist im 217. litt. Bericht S. 2. besprochen. In Betreff der Aenderungen in der gegenwärtigen betont das Vorwort solche, die das unverändert aufrecht gehaltene Princip verschärfen sollen. Jedenfalls sind es hier die Principien, die in der Begriffserklärung geübte Logik, was sich uns zur Besprechung darbietet. Gehen wir zuerst auf die Aeusserungen im Vorwort ein. Der Verfasser vermisst im mathematischen Schulunterricht sowol wie in den Vorlesungen an Universitäten die Sorge für die Klarheit über das System der Grundbegriffe. In letzteren werde vorausgesetzt, was der erstere sich nicht zur Aufgabe gemacht habe. Einzelne Punkte sind nicht genannt; auch über die Art und Weise der Forderung gerecht zu werden, die der Verfasser vielleicht für selbstverständlich halten mag, findet sich kein Wort. Er verlangt erklärtermassen nur, dass diese Klarheit nicht durch die Gewöhnung an schiefe Auffassung gehindert werde. Diese Mahnung ist gewiss nicht ohne Grund. In der Tat werden noch öfters Begriffsentstellungen durch pädagogische Rücksichten, nämlich bald durch die niedere Verstandesstufe der Schüler, bald durch den ausschliesslich technischen Zweck zu rechtfertigen versucht. Zwischen solchen Vorkommnissen und dem Zweck ihrer Anführung an dieser Stelle liegen aber gar manche Fragen, die der Verfasser mit Stillschweigen übergeht. Um Unterlassung bewusster Fälschungen handelt es sich für ihn gar nicht, sondern um die Sorge für die positive Beschaffung der richtigen Begriffe. Wie dies zu geschehen habe, lässt der Verfasser unerörtert, obgleich doch sein factisches Zuwerkegehen in doppelter Hinsicht vom gewöhnlichen stark abweicht: erstens soll ein vorbereitender Abschnitt enthaltend die Bestimmung der Grundbegriffe in grösster Allgemeinheit die Klarheit ein für allemal geben, während die gewöhnliche Praxis der Ansicht entspricht, dass diese Klarheit nur durch exacten Ausdruck und exacte Behandlung am Orte der jedesmaligen Einführung und Anwendung zu erreichen sei; zweitens ist auch die in den Definitionen kund gegebene Auffassung der Begriffe von der gewöhnlichen sehr verschieden und hätte daher einer Rechtfertigung bedurft. Der Verfasser setzt voraus, dass, wer nicht zu seiner Auffassung gelangt ist, die Sache nicht gehörig überlegt hat; denn er sagt im Vorwort: „Um das Gewicht dieses vorbereitenden Abschnittes richtig zu würdigen, muss man „„eben bedenken““ (statt: mit mir einverstanden sein), dass die Arithmetik füglich nicht anders definirt werden kann als: die Discussion des allgemeinen Grössenbegriffs nebst seinen statthaften und zweckentsprechenden formalen Erweiterungen und denjenigen der Zahl.“ Hiernach hätten alle diejenigen gedankenlos an einem Irrtum gehangen, welche die Arithmetik die Lehre von der discreten Zahl nannten und sie zur Geometrie in das Verhältniss setzten, dass beide von den zwei, dem Verstande am nächsten liegenden verschiedenen Seiten aus, vom Zählen und räumlichen Anschauen, zu der, nur in seiner Beschränkung exacten Auffassung des Grössenbegriffs hinführen. Uebungsbeispiele machen Anwendung davon auf Zeit, Gewicht u. s. w. Die Fälle sind zu einfach, als dass die Analogie fehlgehen könnte; in andern Fällen führt die Uebertragung zu Täuschungen, welche wol die Meinung widerlegen können, als sei nur der allgemeine klare Begriff speciell angewandt worden. Der Verfasser stellt sich eine grosse Aufgabe, wenn er es unternimmt den Grössenbegriff allseitig umfassend in einem Schulbuch festzustellen. Sehen wir zu, wodurch dieselbe gelöst sein soll. Es werden in der bestimmten Folge definirt die Begriffe „verschieden unabhängig von Raum und Zeit, congruent, Ganze, Teile, Zahl (oder Anzahl), zählen, Grösse, gleich, kleiner, grösser, Qualität, Quantum, Null.“ Dem sonstigen Gebrauch nicht entsprechend sind die Bestimmungen von „Ganzes“ und von „Grösse“. Nach gewöhnlicher Auffassung setzt die Bezeichnung als ein Ganzes den Gedanken möglicher Teilung voraus, selbst wo die Teilbarkeit negirt wird. Ihr kann also auch nur eine Definition entsprechen, welche auf den Teilbegriff Bezug nimmt. Die Abweichung möchte unerheblich scheinen, doch die dadurch erzeugte Undeutlichkeit pflanzt sich fort und macht sich bei Definition der Grösse recht fühlbar. In letztere hat der Verfasser die Bedingung unbeschränkter Teilbarkeit aufgenommen; diese gehört nach gewöhnlichem Gebrauch nicht zum Begriff, sondern kann höchstens Resultat der Beobachtung und der theoretischen Einführungen sein. Kann es nun auch dem Autor nicht verwehrt sein den Wortgebrauch abzuändern, so liegt es ihm doch ob, den beigelegten Wortsinn mit genügender Deutlichkeit darzulegen; er ist dann nicht berechtigt, Bekanntes und Geläufiges unausgesprochen zu übergehen, namentlich hier, wo die Abweichung nicht erklärt und auf bestimmte Begriffe beschränkt ist, wo man also nicht wissen kann, ob er das Geläufige anerkennt. Die erstere in Rede stehende Definition lautet: „Man nennt jedes Ding, wenn man es für sich allein betrachtet, ein Ganzes.“ Wenn man es also in Verbindung mit seinen Teilen, seinen

Attributen u. s. w. betrachtet, ist es kein Ganzes? Das würde §. 3. widersprechen. Wenn man es in Verbindung mit andern Dingen betrachtet, ist es kein Ganzes? Dann würde man nicht von mehreren Ganzen reden können. Die einzige Angabe also, die den Sinn klar machen soll, trifft nicht zu. Zur Erklärung von „Teil“ heisst es: „Lässt sich die Vorstellung eines Ganzen dadurch erzeugen, dass man andere Ganze nur ihrer Folge nach mit einander verknüpft, so heissen die letzteren die Teile des ersteren.“ Nun ist aber die Folge gerade das Gleichgültige am Teilverhältniss. Ihre Zuziehung leitet daher den Gedanken von dem, was zu beachten ist, ab. Auch das Verknüpfen ist in dem Falle; denn meistens tritt das Teilverhältniss beim Abtrennen ein. Ferner ist das Vorstellen des Ganzen nicht notwendig: die Erde ist ein Teil der Welt, wenn wir auch nur einen Körper ausser ihr kennen. Die bisherigen Ausstellungen bestreiten noch nicht die formelle Richtigkeit der Definition. Was diese betrifft, so widerspricht es im W.'schen Sinne der vorhergehenden Bestimmung, dass mehrere Ganze im Gedanken verknüpft werden; nach natürlichem Sinne aber ist es incorrect, Ganze unmittelbar Teile zu nennen; wir können nur sagen, dass dieselben Dinge in Hinsicht auf ein anderes Ding Teile, in Hinsicht auf noch andere Dinge jedes ein Ganzes sind, aber als Ganze sind sie nicht Teile. Der Hauptfehler aber ist ein principieller, der in ziemlich allen genannten Definitionen wiederkehrt; er liegt in der Wahl ungeeigneter, ohnmächtiger Mittel den in der Anmerkung ganz richtig angegebenen Zweck der Definition zu erreichen. Die in Rede stehenden Definitionen begnügen sich damit, Bedingungen aufzustellen, welche ausschliesslich der gemeinte Begriff erfüllen soll. Damit wird aber der Sinn des Wortes nicht bezeichnet, sondern ein Rätsel aufgegeben, sogar zur Classe der schlechten Rätsel gehörig, über deren Auflösung, selbst wenn sie uns einfällt, man in Zweifel bleibt, ob sie die richtige ist. Wird z. B. jemand, wenn in der citirten Definition statt des Namens „Teile“ die Frage nach dem Namen stünde, und das Wort „Ganze“, das wir freilich schon relativ zum Teilbegriff zu verstehen pflegen, gemäss dem Vorhergehenden durch „Dinge für sich allein betrachtet“ ersetzt würde, daraus entnehmen und gewiss sein, dass der Verfasser Teile gemeint hat? Eine unerlässliche Forderung, die als selbstverständlich erscheint, und die sonst fast jedes Lehrbuch erfüllt, setzt der Verfasser in seinem ideellen Streben ganz ausser Augen: dass alle zur Bestimmung dienenden Angaben den Begriff charakterisiren, d. h. directen Bezug auf das haben, was zu seinem Inhalt gehört und notwendig mit ihm gedacht werden muss. Bei W. beziehen sie sich auf Prüfungsapparate, die dem Begriffe fremd sind. Mit Erfüllung dieses Erfordernisses ist nicht alles geleistet; mag W. an gewöhnlichen Definitionen Mängel entdecken; selbst wo sie im Grunde Tautologien sind, können sie durch sachgemässe Nebenordnung zur Klarheit der Begriffe beitragen, während jene Rätsel auch nicht einen Anfang dazu repräsentiren. Dasselbe gilt nun auch von der Definition der Grösse, auf die hier alles ankommt: „Ein Ganzes heisst eine Grösse, wenn es 1) unbeschränkt teilbar ist; 2) ein Merkmal besitzt, welches sich bei keiner Veränderung der Einteilung oder der Folge der Teile ändert und bei einer gewissen Einteilung auch von der Wiederholung eines Teils für einen andern unberührt bleibt." Sie ist ein Rätsel, das an Unbestimmtheit alle andern übertrifft. An welches Merkmal soll man denken? An Qualitäten: elastisch, schwarz, unbrauchbar, sinnlos? Gar manche würden wol zutreffen bei Dingen, die der Verfasser nicht gemeint hat. Vermutlich soll das Merkmal die Grösse im eigentlichen Sinne, die Eigenschaft so oder so gross zu sein, ausdrücken, während der Terminus „Grösse" für das Ding, welches gross ist und welches ein abkürzender Gebrauch gleichfalls Grösse nennt, vorbehalten bleibt. In der Tat sagt man dann und wann „das Dreieck" statt „die Grösse des Dreiecks", bezeichnet somit das abstracte Merkmal durch das Concretum, dem es zukommt. W. will nun, wahrscheinlich weil er meint, dass das Concretum für den Schüler fassbarer ist als das Abstractum, diesen gelegentlichen Gebrauch zum ersten und definitiven Gebrauch machen; er will unter Grösse stets das grosse Ding verstehen. Ob dies durchführbar ist, wieviel durch diese Abweichung wieder in Frage gestellt wird, bleibe unerörtert. Jedenfalls musste über den Sinn nach allen Seiten hin genaue Rechenschaft gegeben werden. Ist also mit dem „Merkmal" die Grösse gemeint, ist also factisch Grösse durch Grösse definirt, so durfte dieser Umstand dem Leser nicht verschwiegen werden. Beeinträchtigt die Collision des Namens die Deutlichkeit, so wird das Uebel durch die Namenlosigkeit auf der einen Seite nicht gehoben, sondern verschlimmert. Offenbar sind in §. 3. I. die Bestimmungen zweier Begriffe in einander geschoben, und 1 Satz daraus gemacht. Der Verfasser will die Grösse als Grosses definiren, kann aber dazu die Grösse als Merkmal nicht entbehren und zeigt damit, er mag wollen oder nicht, dass in der natürlichen Folge exacter Auffassung das Abstractum das Erste, das Concretum das Zweite ist. Dem entsprechend hätten auch müssen zwei Definitionen aufgestellt werden, wenn Klarheit das Ziel war. Diejenige, auf welche alles ankam, ist nun die Definition der Grösse als Merkmal. Sie wird schwer verständlich durch den ungebräuchlichen Ausdruck „Wiederholung eines Teils für einen andern", bei dem man in Gefahr kommt den Sinn zu verfehlen. Im übrigen könnten wir nur wiederholen, was über die Definition von „Teil" gesagt ist. Wie durch solche Definitionen die Klarheit der Begriffe gefördert werden soll, ist nicht abzusehen. Wir machen an dieselben keine unerfüllbaren Ansprüche: Definitionen können den Inhalt von Grundbegriffen nicht geben. Letztere werden auf praktischem Wege gewonnen, und die Definition soll sie nur für die wissenschaftliche Verwertung scharf genug bestimmen. Das ist aber nicht möglich ohne Anwendung und Einschränkung auf das Gebiet und die Gegenstände der Mathematik. Das Gegenteil geschieht hier. Der Begriff „congruent“, welcher den Schülern auf dieser Stufe vielleicht schon als geometrischer bekannt ist, wird ohne andre als negirende Bezugnahme auf Mathematik so definirt, als solle er für ganz beliebige Lebensverhältnisse passen. Congruent heisst übereinstimmend; worin übereinstimmend wird nicht gesagt, das Wesen des Begriffs bleibt im Dunkeln. Das Vorstehende sollte nur nachholen, was in dem citirten frühern Berichte noch nicht berührt worden war. Es ist inzwischen von manchen Seiten geäussert worden, das Lehrbuch eigne sich nicht zur Einführung in Schulen. Bei einer so unmotivirten Abweisung sollte man es aber nicht bewenden lassen, wo ein Werk vorliegt, das mit so grossem Fleisse in consequenter Durchführung eines Gedankens zu dem Zwecke bearbeitet ist, dass es sich für Schulen eignen soll. Ist dieser Zweck nicht erreicht, so hat der Verfasser wol Anspruch darauf, dass ihm die Gründe der Abweisung genannt werden, und er dadurch Gelegenheit findet gegen dieselbe Einspruch zu tun. Unsers Erachtens liegt der Grund nicht in der Form der Bearbeitung des Einzelnen, sondern das Ganze ist im Princip verfehlt; deshalb ist ausschliesslich das Principielle und zwar mit grösserer Ausführlichkeit besprochen worden. H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Zweiter Theil: Stereometrie. Mit 142 Figuren und einer Aufgabensammlung. Hamburg 1881. F. H. Nestler u. Melle. 148 S.

Der erste Teil, enthaltend die Planimetrie, ist im 258. litt. Bericht besprochen. Auch der gegenwärtige zweite Teil ist, wie über jenen bereits bemerkt worden, mit grossem Geschick bearbeitet und zeugt von einer Umsicht, einer Beherrschung des Lehrstoffs und einem durchgehends klaren Festhalten am pädagogischen Ziele, wie es nur bei hoher Begabung möglich ist. Hervortretend ist auch hier das ausführliche Eingehen auf alle Fragen, die zu einer vollständigen Auffassung und einem gründlichen Verständniss gestellt werden müssen. Mit Recht legt der Verfasser dem Abschnitt über die Lage der

Geraden und Ebenen die grösste Wichtigkeit bei und behandelt sämmtliche hier sich darbietende Fälle erschöpfend und in solcher Ordnung, dass dem Schüler nach einmaliger Durchnahme leicht das Ganze gegenwärtig sein kann. Er beginnt mit der Bestimmung der Ebenen und ihren Durchschnitten. Dann folgt die senkrechte und schiefe Lage von Geraden und Ebenen, dann die parallele Lage, dann beides besonders in Betreff zweier Ebenen. Alle erdenklichen nähern Umstände werden durch hinzugefügte Fragen zum Bewusstsein gebracht. Hieran schliesst sich ein Abschnitt über den prismatischen und den pyramidalen Raum (Ecke), in welchen alle sonst dem Prisma und der Pyramide zugeordneten Sätze gehören, die mit den Endflächen nichts zu tun haben. In dieser Aussonderung giebt sich am ganz geeigneten Orte das wissenschaftliche Princip der Isolirung kund. Der II. Abschnitt, von den Körpern, zeichnet sich durch grosse Reichhaltigkeit unter dem Gesichtspunkt praktischer Verwertung aus. Die Zahl der in Betracht gezogenen ebenflächigen Körper ist etwas grösser als gewöhnlich. Mehr noch zeigt sich die Reichhaltigkeit in den instructiven Seiten der Betrachtung eines jeden. Das Zugezogene hat sichtlich den Praktiker im Auge, kommt aber den wissenschaftlichen Erfordernissen im vollen Masse nach. Eine Bemerkuug ist jedoch daran zu machen. Schon bei der Gleichheit der Pyramiden wird Anwendung von der unendlich kleinen Differenz gemacht. Alles ist sorgfältig und zweckentsprechend vorbereitet; auf sinnreiche Art ist die Differenz der einschliessenden Grenzen auf die unendlich kleine letzte Schicht reducirt. Es bleibt nur der definitive Schluss zu ziehen, und — hier fehlt die Pointe, statt ihrer findet man überflüssige, nicht einmal zutreffende Worte, die sich kaum anders erklären lassen, als dass der Verfasser die einfache, exacte Schlussweise doch nicht verstanden hat; denn da in der Ueberschrift der Beweis indirect genannt wird, so kann nicht die Absicht gewesen sein ihn als directen erscheinen zu lassen. Der exacte Schluss ist folgender. Die Differenz der Pyramiden ist unveränderlich, folglich entweder null oder endlich. Letzteres ist unmöglich, weil sie kleiner ist als die unendlich kleine letzte Schicht; folglich ist sie null. Nach den Textworten würde sie nur so klein sein, dass sie sich nicht mehr angeben lässt; die Mathematik kann aber jede noch so kleine Grösse angeben. Eine so unklare Aeusserung hätte man in diesem Buche nicht erwartet. — Der Behandlung der krummflächig begrenzten Körper, Walze, Kegel, Kugel, die jetzt folgen soll, geht in logisch correcter Folge voraus die Theorie der sie begrenzenden krummen Flächen. Dann erst werden die Oberflächen und der Rauminhalt der genannten Körper sowie ihrer Teile nach Grösse berechnet. Aus dem Kegel wird dann die Theorie der Kegelschnitte hergeleitet und zwar deren Aufnahme durch die Wichtigkeit der Ellipse auch für den Praktiker motivirt. Es ist, soviel dem Ref. bekannt, unter den Schulbüchern das gegenwärtige das erste, welches von der vortrefflich einfachen Steiner'schen Herleitung der Focaleigenschaften aus dem Kegel mittelst zweier die Schnittebene und den (geraden) Kegel berührender Kugeln Anwendung macht. Die Hyperbel geht voraus; bei ihr nämlich genügte die Betrachtung des Specialfalls, wo die Schnittebene der Axe parallel, die Kugeln einander gleich sind. Bei der Ellipse bot sich keine solche Erleichterung dar; der Schnitt ist beliebig schräg genommen. Ein Anhang behandelt die regelmässigen Polyeder, ein zweiter enthält 212 Uebungssätze und Aufgaben.

H.

Elemente der analytischen Geometrie für den Schulunterricht bearbeitet von Dr. J. O. Gandtner, Geh. Ober-Regierungs-Rat und vortragenden Rat im Königl. preuss. Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten. Fünfte Auflage. Herausgegeben von E. Gruhl, Direktor der Realschule I. O. zu Barmen. Mit 49 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1881. Weidmann. 92 S.

Der Verfasser hält den Unterricht in der analytischen Geometrie nur dann für fruchtbringend, wenn er sich auf die ersten Elemente beschränkt. Darf man nach der wirklichen Bedeutung der analytischen Geometrie urteilen, so liegen die Gründe für die entgegengesetzte Ansicht sehr nahe, für die nämlich dass nur durch Vollständigkeit innerhalb natürlicher Grenzen irgend ein Gewinn zu erzielen ist. Das gegenwärtige Lehrbuch giebt die Einführung der Coordinaten, die Gleichung der Geraden, die Discussion für beide und einige ausgewählte Elementaraufgaben, bei deren Lösung die Figurbetrachtung einschliesslich der construirten Coordinatenlinien nirgends erspart wird, dann die geometrische Definition und einige Eigenschaften der einzelnen Kegelschnitte, die hernach in Beziehung gebracht und aus dem Kegel abgeleitet werden, zuletzt eine Reihe leicht lösbarer Aufgaben. Durchweg erscheinen hier die Coordinaten als willkürliche Vermehrung der Figur, die Aufgaben als bloss hervorgerufen durch die Zuziehung jener Linien. Dasselbe gilt von der anfänglichen Erweiterung des Coordinatenbegriffs, indem derselbe mit Einschluss schiefwinkliger Coordinaten definirt wird, ohne dass eine nennenswerte Anwendung davon vorkommt. Einen Zweck der Coordinateneinführung können die Schüler daraus nicht entnehmen, die Bedeutung des analytischen Verfahrens dadurch nicht erkennen; dazu ist nicht das mindeste gegeben: denn zur synthetischen Geometrie kommt nur eine neue Synthese hinzu Sollen wir also in der

Aufnahme der hier behandelten Doctrin als Unterrichtsgegenstand einen Zweck finden, so würde es etwa der sein, ein neues Feld für Beschäftigung zu eröffnen, den Primanern, welche die elementare Planimetrie für abgetan ansehen mögen, durch Vorführung in neuer Gestalt neuen Reiz zum ferneren Betreiben derselben zu erteilen und diesen durch den Hinblick darauf, dass sie mit dem Erlernten einen Gegenstand künftigen, höheren Studiums im voraus kennen lernen, zu erhöhen. Der Erfahrung des Verfassers wollen wir es gern glauben, dass sich der darauf bezügliche Unterricht in dem Sinne fruchtbringend gezeigt hat, sofern die Schüler mit Lust und Gelingen dem gezeigten Wege gefolgt sind. Auch spricht die tadellos correcte Abfassung, der leichtfassliche Vortrag und die Wahl der Aufgaben, welche wol auch Minderbegabte nicht zu schwierig finden werden, für einen solchen Erfolg. Nur möchte statt des Titels „analytische Geometrie“ der Titel „Coordinatenlehre“ zutreffender sein, da ja die Geometrie hier nicht analytisch getrieben wird.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1877. Red. v. B. Schwalbe. 23. J. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Mittheilungen d. Coppernicus-Vereins f. Wissensch. u. Kunst zu Thorn. 3. Hft. Thorn, Lambeck. 4 Mk.

Methode und Principien.

Grassmann, R., das Weltleben od. d. Metaphysik. Stettin, Grassmann. 6 Mk.

Scheffler, H., die Naturges. u. ihr Zusammenh. m. d. Prinz. d. abstr. Wissensch. 4. (Schluss-) Thl. Leipzig, Förster. 9 Mk.

Tischner, A., Sta, sol, ne moveare. I. Leipzig, Fock. 80 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Brenner, A., 300 algebr. Aufgaben. 2. Aufl. Freising, Datterer. 60 Pf.

Greve, Lehrb. d. Mathematik. 1. Kurs. 1. u. 2. Thl. Berlin, Stubenrauch. à 60 Pf.

Hirsch, M., Sammlg. v. Beispielen, Formeln u. Aufg. aus d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 18. Aufl. v. H. Bertram. Altenburg, Pierer. 3 Mk.

Luke, A., Sammlg. planimetr. Aufg. üb. d. Dreieck. 2. Hft. Halle, Schmidt. 2 Mk. 60 Pf.

Schmidt, O. E., planimetr. Aufg. Hamburg, Behre. 1 Mk. 20 Pf.

Sinram, Th., Aufg. aus d. Arithm. u. Algebra nebst Auflösgn. 3. Thl. Hamburg, Meissner. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bruno, F. Faà di, Einl. in die Theorie d. binären Formen. Deutsch bearb. v. Th. Walter. Leipzig, Teubner. 10 Mk. 80 Pf.

Ehrhorn, M., üb. die v. Challis vorgeschl. Integration v. gew. Differentialgl. etc. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 60 Pf.

Haluschka, F., e. Beitrag z. Theorie d. Maxima u. Minima v. Functionen. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Heine, E., Handb. d. Kugelfunctionen, Theorie u. Anwendngn. 2. Aufl. 2. (Schluss-) Bd. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Piccioli, Ritter F., Anfangsgr. d. endl. Differenzen. Uebers. v. E. Meeraus u. A. Lunardoni. Wien, Gerold's S. 2 Mk. 80 Pf.

Spieker, Th., Lehrb. d. Arithm. u. Algebra. 1. Thl. 2. Aufl. Potsdam, Stein. 3 Mk.

Ungar, M., zur Reduction Abel'scher auf ellipt. Integrale. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Geometrie.

Ameseder, A., üb. ein Nullsystem zweiten Grades. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

— über die e. rationale Plancurve vierter Ordnung vierf. berührenden Kegelschn. etc. Ebd. 1 Mk.

Beyda, H. F. Th., die imaginären Grössen u. ihre Auflösung. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 60 Pf.

Binder, W., das Problem der 4 Punkte im Sinne d. n. Geometrie. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Bobek, K., üb. metr. Beziehungen, die in e. Congruenz lin. Complexe stattf. Ebd. 40 Pf.

Durège, H., üb. Körper v. 4 Dimensionen. Ebd. 30 Pf.

Fuhrmann, W., Einleit. in die neuere Geometrie. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Gegenbauer, L., e. Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel. Wien, Gerold's S. 25 Pf.

Henrici, J., u. P. Treutlein, Lehrb. d. Element.-Geometrie. 1. Thl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Klein, B., Theorie d. trilinear-symmetr. Elementargebilde. Marburg, Elwert. 1 Mk.

Kroes, F., Unters. d. Syst. unter einander ähnl. Kegelschn. etc. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk. 40 Pf.

Lippich, F., zur Theorie der Polyeder. Wien, Gerold's S. 25 Pf.

Menger, J., Grundlehren der Geometrie. 2. Aufl. Wien, Hölder. 2 Mk.

Pelz, C., zur wissensch. Behandl. d. orthogon. Axonometrie. 2. Mittheilg. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Putsche, H., perspekt. Konstruktionen. 1. Serie. Fol. Dresden, Gilbers' V. In Mappe 28 Mk.; Texthft. 2 Mk.

Sattler, A., Leitf. d. Geometrie. 3 Kurse. Braunschweig, Bruhn. 1 Mk.

Weyr, E., üb. Ausartungen biquadr. Involut. etc. Wien, Gerold's S. 45 Pf.

Trigonometrie.

Suchsland, E., Goniometrie u. ebene Trigonometrie. Stolp, Schrader. Cart. 60 Pf.

Mechanik.

Gylden, H., üb. d. Bahn e. materiellen Punktes etc. Berlin, Friedländer & S. 3 Mk. 60 Pf.

Jürgenssen, E., üb. e. Art Beweggn. e. Punktes auf e. Kugelfläche. Berlin, H. R. Mecklenburg. 2 Mk.

Miething, E., d. Bewegung e. Körpers in e. aus 2 homogenen Ellipsoiden geb. Schale etc. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk.

Mischer, R., üb. d. 2. Lagrange'sche Form d. d'Alembert'schen Princips. Berlin, Neuenhahn. 80 Pf.

Walberer, J. Ch., Anfangsgr. d. Mechanik fester Körper. 4. Aufl. München, Th. Ackermann. 2 Mk. 40 Pf.

Wittenbauer, F., üb. Momente höh. Ordnung. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Technik.

Weisbach's, J., Lehrb. d. Ingen.- u. Maschinen-Mechanik. 2. Aufl. 3. Thl. Bearb. v. G. Herrmann. 2. Abth. 9. u. 10. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 40 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen d. meteorolog. Stationen im Königr. Bayern. Herausg. d. W. v. Bezold u. C. Lang. 3. Jahrg. 1881. Nr. 1. München, Th. Ackermann. procplt. 18 Mk.

Beobachtungen, angest. am astrophys. Observ. in OGyalla. Hrsg. v. N. v. Konkoly. 3. Bd. Halle, Schmidt. 12 Mk.

Drechsler, A., illustr. Lexikon der Astronomie u. der Chronologie. Leipzig, Weber. Geb. 6 Mk.

Hoernes, R., die Erdbeben-Theorie Rud. Falb's u. ihre wissenschaftl. Grundl. Wien, Brockhausen & B. 2 Mk. 40 Pf.

Pfeil, L., Graf v., Komet. Strömungen auf d. Erdoberfläche. 2. Ausg. Berlin, Hempel. 6 Mk.

Thilo, A. v., Karte m. Linien gleicher magn. Declin. f. d. Epoche 1880, o. Fol. Leipzig, Voss' S. 2 Mk.

Nautik.

Dabowich, P. E., nautisch-techn. Wörterb. d. Marine. Deutsch, ital., franz. u. engl. 1. Bd. 8. Lfg. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Physik.

Baeblich, H., das Buch d. Physik. Berlin, Burmester & St. 7 Mk.

Dronke, F., physik. Schul-Atlas. Fol. Trier, Lintz. 3 Mk.

Hirschberg, A., zur Lehre v. d. spastischen Spinalparalysen. Breslau, Köhler. 1 Mk.

Kastner, F., Theorie der Schwingungen u. Betracht. üb. d. Elektrizität. Strassburg, Trübner. 1 Mk.

Niaudet, A., die galvan. Elemente v. Volta bis heute. Deutsch bearb. v. W. Ph. Hauck. Braunschweig, Vieweg & S. 7 Mk.

Puluj, J., strahlende Elektrodenmaterie. 2. u. 3. Abhandlg. Wien, Gerold's S. 55 Pf.

Reitlinger, W., u. F. Wächter, üb. Disgregation d. Elektroden etc. Ebd. 40 Pf.

Simon, M., Physik f. Elementar- u. Mittelsch. 3. Aufl. Berin, Klemann. Cart. 80 Pf.

Vermischte Schriften.

Lambrecht, W., e. Nimbus u. sein Werth etc. Göttingen, Spielmeyer. 50 Pf.

Litterarischer Bericht
CCLXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XIII. Roma 1880. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der 6 letzten Hefte ist folgender.

M. Steinschneider: Notiz über die, Peter III. von Aragon zugeschriebenen, astronomischen Tafeln.

C. Henry: Ergänzung zu der Arbeit (T. XII. p. 477) „Untersuchungen über die Manuscripte von Pierre de Fermat nebst ungedruckten Fragmenten von Bachet und Malebranche“.

G. Govi: Neues Document in Bezug auf die Erfindung des Binocular-Fernglases mit Abbildung.

A. Favaro: Die englischen Vorläufer Newton's. Uebersetzung aus Edinburgh Review.

A. Marre: Notiz über Nicolas Chuquet und seine Dreiteilung in der Zahlenlehre. Es folgt der Text des Werkes nach dem Manuscript.

B. Boncompagni: Michel Chasles.

Michel Chasles geboren in Éperon (Eure et Loire) den 15. November 1793 war Zögling der Polytechnischen Schule zu Paris zugleich mit Gaetano Giorgini, ward an derselben nach Savary's Tode am 6. November 1841 zum Professor ernannt, gab 1851 diese Stellung wegen einer von ihm gemisbilligten Aenderung an der Schule auf, 1846 ward er Professor an der soeben gegründeten Facultät der Wissenschaften zu Paris, 1851 Mitglied der Akademie der Wissenschaften des Institut de France, später Mitglied des Conseil de perfectionnement der Polytechnischen Schule, 1860 Präsident der Akademie, starb den 18. November 1880. Ueber seine Schriften und seine Lehrthätigkeit enthält der Nekrolog viele Angaben.

H.

Testamento inedito di Nicolo Tartaglia pubblicato da B. Boncompagni. Milano 1881. Ulrico Hoepli. 48 S.

In dieser Schrift wird zum Schluss mitgeteilt der gedruckte Wortlaut des, im Notar-Archiv zu Venedig befindlichen, vom Notar Rocho di Benedetti aufgesetzten Testaments, ferner einer nicht ganz übereinstimmenden Copie und ein Facsimile des Originals. Nach dem beigefügten Zeugniss des Notars ist N. Tartaglia (Tartalea), gebürtig aus Brescia, gestorben am 13. December 1557. Zu Anfang werden zusammengestellt die Angaben seines Todesjahrs von G. Libri (Hist. des sciences math. en Italie), J. C. Poggendorff (Biogr. litt. Handwörterbuch), O. Merlieux (Nouv. biogr. gén.), H. Hankel (Zur Gesch. d. Math. im Alt. u. Mitt.), sämmtlich auf 1559, O. Terquem (Bull. de bibl., d'hist. et de biogr.) auf 1556, N. C. Papadopoli (Hist. gymn. Patavini) und C. Saxe (Onomasticon literarium) auf 1560, G. M. König (Tartalea) auf 1566, G. B. Chiaramonti (in einem Briefe von 1784) auf Anfang des 17. Jahrhunderts — welche hiermit als irrig nachgewiesen sind. Das richtige Jahr 1857 findet sich angegeben von Joh. Jak. Hoffmann, Joh. Bapt. Ladvocat, J. St. Montucla, G. Tiraboschi, F. S. De Feller, P. L. Ginguené, P. de Angelis, G. B. Corniani, J. G. Th. Graesse u. A. Andere aus Licht gezogene Documente haben Bezug auf N. Tartaglia's Vater Michele und Bruder Zampiero (d. i. Giampietro).

H.

Biographische Skizzen aus der Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik. Von A. Krüger, Realschul-Direktor. Berlin. 1881. W. Weber. 38 S.

Das Buch ist ein nach den Namen der Autoren geordnetes Lexikon der wissenschaftlichen Entdeckungen, mit gesonderter Behandlung der 4 Zweige: I. Physik und Astronomie, II. Chemie, III. Naturgeschichte, IV. Mathematik. Von den einzelnen Autoren sind angegeben: Geburts-Jahr und -Ort, mehr oder weniger biographische Notizen und ihre namhaften Entdeckungen. Es scheint nicht Grundsatz des Verfassers gewesen zu sein die wichtigsten Entdeckungen aufzunehmen, sondern nur die, welche ihm zufällig bekannt waren; zu letztern gehören nicht die Entdeckungen von Legendre, Abel, Jacobi, deren Namen im Abschnitt von der Mathematik gar nicht erwähnt sind, während ein Herausgeber einer Aufgabensammlung durch diese Leistung allein einen Platz in dem Buche erworben hat.

H.

Methode und Principien.

Die Rückläufigkeit des Raumes ein Irrthum und Ursache weiterer Irrthümer. Von Rudolf Otto Consentius. Karlsruhe und Leipzig 1881. H. Reuther. 34 S.

Was der Verfasser für Irrtum erklärt, ist die Behauptung, dass die unendlich fernen Punkte einer Geraden in beiden Richtungen zusammenfallen. Er nennt sich Dichter, Schauspieler, Laie in der Mathematik, sagt, dass er als Laie sonst freundliche Belehrung erfahren habe, dass aber ein so principieller Angriff wie hier doch hinter der Grenze freundlicher Aufnahme liege. Zunächst ist dazu zu bemerken, dass der Verfasser durch Arbeiten wie die im 243. litt. Ber. besprochene anerkennenswertes Geschick in der elementaren Geometrie bewiesen hat, dass also seine Selbstbezeichnung als Laie nicht recht zutrifft. Auch zeugt die gegenwärtige Schrift zum grossen Teil von klarer exacter Logik. Sollte derselbe, wie er erwartet, das Schicksal haben ignorirt zu werden, so liegt das wol nicht an der Misachtung seiner Befähigung; ebenso unbegründet ist seine Besorgniss, dass zur Abwehr seines tötlichen Angriffs das Ignoriren als einzige Waffe in Anwendung kommen würde; vielmehr wird der Angriff vielleicht deshalb unbeachtet bleiben, weil er so ganz und gar nicht neu und wol schon zu oft beantwortet worden ist. Der Verfasser führt durch, dass, wenn man aus der Gleichheit des Doppelverhältnisses zwischen 3 festen Punkten einer Geraden und einem unendlich entfernten nach der einen und andern Seite ($Q + \infty$ und $Q - \infty$) auf die Einheit des letztern schliessen könnte, man mit gleichem Rechte das Zusammenfallen aller Punkte des Raumes folgern dürfte. Diese zu allen Zeiten häufig angewandte Art der Widerlegung ist keine exacte: zwischen Unsinn und Unsinn einen strengen Zusammenhang statuiren ist überhaupt unlogisch. Dennoch kann dadurch der Gegner, wenn er Rede steht, dazu geführt werden, seine persönliche Incompetenz einzuräumen. Objectiv wird die Widerlegung erst durch Einsetzung haltbarer Begriffe. Der Fehler in dem angegriffenen Schlusse ist kein verborgener. Die genannten Doppelverhältnisse sind nicht gleich, sondern nur ihre Grenzwerte; aus dem unendlich kleinen Fehler, den man durch die Unterschiebung begeht, ergiebt sich aber ein unendlich grosser Fehler im Resultat, wie eine leichte Rechnung zeigt. Bekanntlich muss der durch jenen Trugschluss hergeleitete Satz symbolisch gedeutet werden. In gleichem Falle sind die zahlreichen „Irrtümer“, die der Verfasser als verursacht durch jenen falschen Satz aufführt. Bemerkenswert ist, dass er einmal die Nützlichkeit eines solchen einräumt. Nun ist aber der Verfasser, indem er dem Fehlschluss auf den Grund gehen wollte, selbst auf einen Irrweg geraten. Er sagt, eine unendliche Grösse ist keine bestimmte, ein unendlich ferner Punkt kein bestimmter, daher sind sie ideell. Den Gegensatz zwischen variabel und constant verwechselt er jetzt mit dem zwischen ideell und wirklich, und bildet sich eine Theorie der Beziehungen beider, in welcher ihn die sonstige Klarheit verlässt, und die ihn in Verwickelungen und Irrtümer führt. Zu letztern gehört z. B. die Behauptung, dass zwei unendlich ferne Punkte nicht einander unendlich nahe sein könnten. Indem er sich den Fehler in jenem Schlusse zu erklären sucht, kommt er zwar der Entdeckung nahe, doch sind hier seine Aeusserungen zu undeutlich; hätte er den Fehler erkannt, so würde er ihn einfacher ausgesprochen haben.

H.

Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme. Von Dr. Oscar Simony, a. ö. Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur, Privatdocent an der Wiener Universität. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 42 Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. Wien 1881. Gerold u. Comp. 56 S.

Die Tendenz der Schrift ist offenbar, das Interesse des Publicums an gewissen in neuster Zeit vorgeführten und viel besprochenen Zauberkunststücken durch Erläuterung der darin enthaltenen geometrischen Fragen zu erhöhen. Der Titel scheint Unmögliches zu versprechen, doch nur sofern er eine nähere Bestimmung verschweigt. Von einer Lösung im empirischen Raume ist nicht die Rede, sondern nur mit Zuhülfenahme vierter Dimension, und auch von dieser nur ganz kurz am Schlusse; eine solche eingehend zu erklären mag der Verfasser doch für zu schwierig gehalten haben. Es werden zuerst einige Anfänge einer Theorie der Knoten ausführlich und mit Abbildungen gegeben, dann die Wirkungen der Längsschlitzungen eines im tordirten Zustande geschlossenen Papierstreifens besprochen, dann einiges aus den Elementen der Vier-Dimensionen-Geometrie behandelt.

Dann folgen, bezüglich auf einzelne Stellen, zahlreiche historisch litterarische Noten, welche u. a. die ersten Urheber der betreffenden Fragen ans Licht ziehen. Zu erwähnen ist daraus der Bericht des Prof. Zöllner über die von ihm und einigen Gelehrten angestellte Prüfung der vom Zauberer Slade unter ihren Augen vollzogenen Knüpfung von 4 Knoten in einen geschlossenen Bindfaden, worin jedoch nur von ihren Vorsichtsmassregeln, nichts hingegen vom Ergebniss und von dem was sie gesehen zu lesen ist. Ferner findet sich darunter ein Abdruck einer deutschen Uebersetzung des Dialogs zwischen Sokrates und Glaukon, welcher die Deutung nahe legt, dass darin Platon die Möglichkeit der Existenz eines Mehr-Dimensionen-Raumes und einer entsprechenden Dingwelt, von welcher der Mensch nur die Projectionen auf den 3dehnigen Raum wahrnimmt, begreiflich macht. Aus Aeusserungen des Verfassers lässt sich entnehmen, dass derselbe nicht nur von dieser Existenz überzeugt ist und in diesem Sinne die oben genannte Lösung der Aufgabe für eine wirkliche ausgiebt, sondern auch Slade für das Analogon jenes Entfesselten hält, von dem Sokrates spricht, der nämlich in seine beschränkte Welt zurückversetzt kein Verständniss für seine erweiterten Begriffe bei seinen Genossen findet.

H.

Die imaginären Grössen und ihre Auflösung. Von Heinrich Friedrich Theodor Beyda. Stuttgart 1881. J. B. Metzler. 60 S.

Der Verfasser entwickelt über die Bedeutung der imaginären Grössen seine Gedanken, in denen jedoch sehr elementare Fehler vorkommen. Er hat sich überzeugt, dass die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen reell sind, und schreibt Gauss diese Entdeckung zu, das ist ungefähr das gleiche, wie wenn jemand sagte, Thales habe die Namen der Planeten entdeckt. Existiren solche Wurzeln nicht, so ist der Name disponibel und kann in neuen Theorien mit reeller Bedeutung zur Verwendung kommen, nur darf kein Widerspruch herbeigeführt werden: jedes reelle Rechnungsresultat muss stimmen. Letzteres nachzuweisen hat der Verfasser bei seinen Aufstellungen sich gar nicht zur Aufgabe gemacht. Er sagt, entgegengesetzte Grössen spalteten sich zum zweitenmal in plus und minus; denn eine nach oben positive, nach unten negative Linie habe ausserdem links und rechts eine positive und negative Seite, $+4$ und -4 könnten wieder jedes als Vermögen und als Schulden betrachtet werden. Dass letzteres in anderem Falle ist, wo nämlich die Gegensätze sich decken, und nur einer übrig bleibt, entgeht ihm. Von beiden Fällen macht er die Anwendung in folgender Weise: ein Quadrat links und rechts, oben und unten habe eine reelle Seite, die sich in allen 4 Richtungen deuten lasse; die Quadratwurzel aus 4 könne man ebensowol als aus 4 Einheiten Schulden wie aus 4 Einheiten Vermögen auffassen. Er hat also aus der Rechenschule nicht behalten, welche Operationen mit benannten Zahlen allein gestattet sind. Es würde nicht lohnen auf das Weitere einzugehen, und mag nur zur Erklärung des Titels bemerkt sein, dass der Verfasser unter Auflösung die Operation ohne Rücksicht auf das Vorzeichen versteht.

H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Neue Integrations-Wege. Von Prof. Dr. P. Helmling (an der Kaiserl. Universität Dorpat). (Aus den Memoiren der Kaiserl. Academie der Wissenschaften in St. Petersburg.) Dorpat 1881. Verlag Leipzig, C. A. Koch. 4^0. 39 S.

Die Schrift handelt von der approximativen numerischen Berechnung der Integrale

$$\int_0 e^{\varphi}\,\partial x, \quad \int e^{-\varphi}\,\partial x$$

wo φ eine beständig positive mit x wachsende ganze Function ist. Durch wiederholte teilweise Integration wird ersteres in der Form entwickelt

$$\int_0 e^{\varphi}\,\partial x = \frac{e^{\varphi}}{\varphi_1}\left(1+\frac{\mathfrak{a}_1}{\varphi_1{}^2}+\frac{\mathfrak{a}_2}{\varphi_1{}^4}+\ldots\frac{\mathfrak{a}_{\nu-1}}{\varphi_1{}^{2\nu-2}}\right)+\int_0 \frac{e^{\varphi}\,\mathfrak{a}_\nu}{\varphi_1{}^{2\nu}}\,\partial x$$

wo $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\mathfrak{a}_1$ etc. ganze Functionen von x sind. Sie werden recurrent bestimmt und durch eine Determinante, übereinstimmend mit der von Hess gefundenen, dargestellt, in welcher von der Diagonalreihe nach einer Seite hin alle ihr parallelen Reihen von der zweiten an null sind. Diese lässt sich leicht so transformiren, dass auch die erste parallele Reihe verschwindet, und nur das Product der Diagonalreihe übrig bleibt. Da von letzterem aber wieder alle Factoren bis auf das letzte Element sich auf beiden Seiten der Gleichung heben, so drückt das letzte Element das gesuchte $\mathfrak{a}$ aus. Bei entwickelter Darstellung zeigt sich, dass dessen numerische Hauptmasse in dem Term

$$1.3.5\ldots(2\nu-1)\varphi_2{}^{\nu}$$

liegt. Es wird nun über den in Integralform gebliebenen Rest eine längere Untersuchung geführt, in Betreff deren wir auf die Schrift selbst verweisen müssen. Hierauf wendet sich der Verfasser zu dem Thema seiner frühern Schrift, s. d. 264. litt. Ber. S. 43, nämlich der Riccati'schen Gleichung. Diese wird in der Form dargestellt:

$$\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\xi^2+X$$

Für $X=0$ ist die allgemeine Lösung auf Grund des ersten Particularintegrals ξ sogleich vorhanden. Es wird nun gezeigt, dass man die rechte Seite stets so transformiren kann, dass X klein wird. Die approximative numerische Lösung geht dann vom so erhaltenen Hauptwert ξ aus und corrigirt denselben. Im allgemeinen Integral ist im Nenner ein Integral von der vorher behandelten Form enthalten und giebt dadurch Gelegenheit von der approximativen Berechnung desselben Anwendung zu machen. Zur Erläuterung wird schliesslich ein Beispiel gerechnet.

H.

Handbuch der algebraischen Analysis. Von Dr. Oskar Schlömilch, Geh. Schulrath im K. S. Cultusministerium. Sechste Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Jena 1881. Friedrich Frommann. 413 S.

Das Buch behandelt, mit durchgehender Vermeidung des Differentialbegriffs, zuerst die Elemente der Functionstheorie, Functionen als Grenzwerte von andern, einiges von der Stetigkeit, die Integration einiger Functionen, dann die Theorie der unendlichen Reihen, die binomische Reihe, die Reihen für Exponentialfunctionen und Logarithmen, für Kreisfunctionen und deren Inverse, dann die Functionen complexer Variabeln und die Reihen für solche, dann die Kettenbrüche und die Verwandlung von Reihen in solche, schliesslich in einem Anhange die Theorie der höhern und transcendenten Gleichungen. Die Principien der Theorien werden ausführlich und sorgfältig erörtert. Da das Buch in weitem Kreise bekannt ist, so bleibt nur in Betreff der neuen Auflage zu erwähnen, dass darin das Nötigste über die Grenzwerte der Functionen zweier Variabeln, ein neuer Fall von simultaner Convergenz und Divergenz zweier Reihen und mehrere neue, dem Theorem von Cotes analoge Sätze hinzugekommen sind, dagegen die Auflösung der Geichungen 3. und 4. Grades weggelassen worden ist.

H.

Herleiding van eenige integralen met den wortelvorm

$$\sqrt{1+p\sin^2 x\cos^2 x}$$

tot elliptische en andere integralen. Door D. Bierens de Haan.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Amsterdam 1881. Johannes Müller. 4⁰. 50 S.

Es wird erst eine grössere Anzahl von Formeln entwickelt, die, wenn wir obige Quadratwurzel mit $\varDelta$ bezeichnen, Integrale der Form $\int \frac{\varphi(x)}{\varDelta} \partial x$, unter $\varphi(x)$ eine ganze Function von $\sin^2 x$ verstanden, in der Grundform 1. und 2. Gattung darstellen, die Fälle positiver und negativer p gesondert behandelt. Eine Differentiation nach p bildet den Uebergang zu Integralen der Form $\int \frac{\varphi(x)}{\varDelta^3} \partial x$. Die Wiederholung führt zu einer linearen Relation zwischen einer Reihe höherer Differentialquotienten nach p, die dann in symbolischer Form sehr einfach ausgedrückt wird. Weiterhin kommt auch die Substitution

$$1 + p \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 + \frac{1}{4} p}{1 + p \sin^2 y \cos^2 y}$$

in Anwendung. Im ganzen ist wol das Ziel der Arbeit neue Uebergänge von einer Formel zur andern zu gewinnen.

H.

Vermischte Schriften.

In memoriam Dominici Chelini Collectanea Mathematica nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami. (Neapoli) Mediolani (Pisis) 1881. Ulrich Hoepli. 424 S.

Nach einer Anrede an die Leser, aus der wir ersehen, dass die von C. W. Borchardt gelieferte Arbeit unmittelbar vor seinem Tode abgesandt ist, enthält die Denkschrift folgende Aufsätze.

E. Beltrami: Ueber das Leben und die Werke von Domenico Chelini.

C. Hermite: Ueber Jacobi's Functionen $\Theta(x)$ und $H(x)$.

F. Siacci: Das Centralhyperboloid bei der Rotation der Körper.

A. Cayley: Ueber eine Differentialgleichung.

G. Battaglini: Ueber die kubischen ternären syzygetischen Functionen.

T. A. Hirst: Ueber die von 2 entsprechenden Ebenen erzeugten Complexe.

E. D'Ovidio: Note über einige an die kubische Raumcurve geknüpfte Hyperboloide.

A. Mannheim: Ebene Constructionen der Krümmungselemente der Wellenfläche.

E. Padova: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

H. J. S. Smith: Ueber gewisse Kettenbrüche.

E. Caporali: Ueber die linearen dreifach unendlichen Systeme algebraischer ebener Curven.

V. Cerruti: Ueber eine Verallgemeinerung einiger Sätze der Mechanik.

G. Bardelli: Ueber die Gleichgewichtsaxen.

G. Darboux: Ueber die Riccati'sche Gleichung.

C. W. Borchardt: Ueber 2 Algorithmen analog dem des arithmetisch-geometrischen Mittels zweier Elemente.

F. Brioschi: Ueber eine binäre Form 8. Ordnung.

F. Brioschi: Die Resultante zweier binärer Formen 3. und 4. Grades.

L. Kronecker: Ueber Potentiale $n$facher Mannichfaltigkeiten.

E. Betti: Ueber die Fortpflanzung der Wärme.

T. Reye: Ueber quadratische Kugelcomplexe und confocale Cykliden.

U. Dini: Einige Sätze über Functionen einer complexen Variabeln.

J. Schläfli: Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen.

R. Wolf: Ueber die Abspiegelung der Sonnenfleckenperiode in den zu Rom beobachteten magnetischen Variationen.

C. F. Geiser: Ueber die dreifachen Secanten einer algebraischen Raumcurve.

F. Casorati: Eine Fundamentalformel betreffend die Discriminanten der Differentialgleichungen und ihrer vollständigen Primitiven.

E. Bertini: Ueber die rationalen Raumcurven 5. Ordnung.

G. Jung: Ueber die schiefen Momente eines Systems von Punkten und über Hesse's imaginäres Bild.

E. Beltrami: Ueber die Theorie der Rotationsaxen.

B. Boncompagni: Ueber ein ungedrucktes Testament von Nicolo Tartaglia.

L. Cremona: Ueber eine gewisse Fläche 4. Ordnung.

H.

Wolf's naturwissenschaftlich-mathematisches Vademecum. Alphabetische und systematische Zusammenstellung der neueren und besseren Literatur-Erscheinungen auf dem Gebiete der Naturwissenschaften und Mathematik. Mit Vorwort von Dr. Luerssen, Privat-Docent in Leipzig. Nebst Verzeichniss von Antiquaria, z. Th. die Bibliothek des † Dr. A. B. Reichenbach in Leipzig enthaltend. Leipzig 1881. Kössling (Gustav Wolf).

Das Vorliegende ist ein alphabetisches Verzeichniss der deutschen Litteratur jener Fächer, aus den letzten 6 Jahren so vollständig als möglich war, aus den früheren Jahren zurück bis 1850 das Gangbare enthaltend — und zwar Namen der Verfasser mit Gegenständen, allgemeinen und speciellen, in eine alphabetische Reihe gestellt, bei letztern aber auf erstere verwiesen. Die Ladenpreise sind angegeben. Das Verzeichniss der Antiquaria folgt gesondert.

H.

Litterarischer Bericht
CCLXVIII.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und der Gleichungen mit einer Sammlung von Aufgaben. Von F. Kummer, Professor a. D. am Gymnasium und a. o. Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg. Erster Theil. Die Buchstabenrechnung bis zur Lehre von den niederen Reihen (einschliesslich) und die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade enthaltend. Fünfte Auflage. Heidelberg 1881. Carl Winter. 408 S.

Das Buch ist für den Zweck eingerichtet nicht sowol Mathematiker als vielmehr algebraische und numerische Rechner auszubilden. Der Verfasser hebt im Vorwort, wo von Forderungen der Logik, wo von Theorie und Beweis nicht das mindeste steht, als unterscheidende Eigenschaft hervor, dass zu jeder Regel eine genügende Menge Uebungsbeispiele (ohne Lösung, mit Resultat) hinzugegeben sind um jede andere Beispielsammlung entbehrlich zu machen. Die Aufgaben sind fast sämmtlich neu, wenigstens was die Zahlenwerte betrifft; auch sind einige über die Anwendung der allgemeinen Arithmetik auf Geometrie und Naturlehre unter denselben. Die zur Lösung nötigen Sätze sind kurz aufgeführt, bei den geometrischen Aufgaben ist auf das Lehrbuch des Verfassers (Heidelberg. J. C. B. Mohr) verwiesen. Die Wortfassung der Sätze ist stets correct und verständlich, doch die Begründung fehlt fast gänzlich. Zuerst auffällig ist dies bei der Multiplication der Brüche, die mit einfacher Aufstellung der Regel und Einübung abgetan ist. Beschränkt man den Zweck des Lehrbuchs auf Erzielung praktischer Fertigkeit, so zeichnet es sich durch Vielseitigkeit und Reichhaltigkeit aus. In der neuen Auflage sind mehrere Abschnitte ausführlicher behandelt als in den frühern. H.

zu ersehen, warum überhaupt hier von Unendlichkleinen (ihre Erklärung fehlt gänzlich) die Rede ist, da überall „(Null)" dahinter steht. Wenn der Verfasser beides für dasselbe hielt, so konnte er ja direct Null sagen. Die fernern Gegenstände sind: Zahlentheoretisches, Potenzen und Wurzeln mit ganzen und gebrochenen Exponenten, imaginäre Grössen, Irrationalzahlen, Wurzelausziehen aus Zahlen und Buchstabenausdrücken, Logarithmen, Progressionen, figurirte Zahlen, Zinseszins und Rentenrechnung, Permutationen, Combinationen und Variationen, der binomische Satz für ganze und gebrochene Exponenten (die Bedingung der Convergenz wird ohne Beweis aufgestellt, und zwar ungenau: statt $x < 1$ muss es heissen $-1 < x < 1$, und das Wort „nur" muss wegfallen), ferner Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche, und im 3. Abschnitt: die Gleichungen 1. Grades mit 1 und mehrern Unbekannten, die Proportionen, die Gleichungen 2., 3. und 4. Grades, die diophantischen Gleichungen.

H.

Grundriss der ebenen Geometrie, zum heuristischen Unterrichte für Gymnasien. Von A. Ziegler, Gymnasial-Professor in Freising. Zweite, unveränderte Auflage in neuer Rechtschreibung. Landshut 1881. Ph. Krüll. 60 S.

Der Verfasser verwirft schlechthin alle deutschen Schulbücher für Geometrie mit Ausnahme eines einzigen, das ihm für seine Bestimmung nicht passt, ist dagegen von den französischen sehr befriedigt. Um dieser Bevorzugung Ausdruck zu geben, war wol die involvirte indirecte Behauptung, dass es in Deutschland „für eine Schande gehalten werde ein gutes Schulbuch geschrieben zu haben" — eine Behauptung die er doch gewiss nicht zu verteidigen denkt — nicht nötig. Die Gesichtspunkte, welche seine Anforderungen charakterisiren, sind reichlich dargelegt. Dass die ausgesprochenen Grundsätze richtig seien, hält er für zweifellos, erwartet hingegen die Entscheidung der Kritik, ob ihnen die Ausarbeitung entspricht. Eine weitere Frage an die Kritik liegt uns als innere Angelegenheit eines andern Staats zu fern. Zweifel an der Richtigkeit seiner Grundsätze musste der Verfasser im Gegenteil für wahrscheinlich halten, da wol im allgemeinen jeder der Autoren, über die er sich so ungünstig ausspricht, aus bewusstem Grunde von den hier beliebten französischen Mustern abgewichen ist. Anerkannt ist in der Tat das vorzügliche Geschick der französischen Mathematiker im einfachen Vortrag der Doctrin auf dem Boden des gereiften Verstandes; ein Zurückschauen hingegen auf dessen Entwickelung kommt nie vor; was sie vermissen lassen, ist, dass sie sich die Grundbegriffe nie zur Frage gemacht haben. Das gleiche zeigt sich auch im vorliegenden Lehrbuch. Hier z. B. heisst es: „Mit der gleichzeitigen Vorstellung zweier Punkte ist auch die der Richtung gegeben“. Der Kundige freilich versteht, wie; der Anfänger hingegen kann es nicht verstehen, denn ohne Verschiedenheit der Richtung hat Richtung keinen Sinn. Gleichheit und Verschiedenheit derselben wird erst durch Parallelen und Winkel genügend deutlich, von Winkeln ist erst 10 Sätze später die Rede, und ohne Bezugnahme darauf. Der Winkel ist hier erklärt als eins der 4 Felder zwischen 2 sich schneidenden Geraden; dass er eine Grösse ist, dass Winkel gleich, grösser, kleiner sein können, und wie, bleibt verschwiegen, kommt aber bald in specieller Anwendung vor, als ob es bekannt wäre. Indem wir ein so achtloses Zuwerkegehen als einen Mangel an Gründlichkeit bezeichnen, die nun einmal in französischen Schulbüchern nicht zu finden ist, soll damit nicht das Verfahren derjenigen empfohlen sein, welche die Klarheit in den Grundbegriffen durch philosophisch formulirte Definitionen zu geben meinen, Definitionen die meist dem Verständniss ferner liegen als ihr Ziel. Der Mangel ist ein ganz materieller. Wir haben zu fordern, dass in Betreff der elementarsten Dinge die Gesammtheit der Beobachtungen, welche zur exacten Auffassung notwendig sind, sich vollständig, in guter Ordnung nahe bei einander; explicite ausgesprochen findet, welche Satzform man auch zur Erörterung wählen mag. Der Ausdruck „heuristischer Unterricht“ bezieht sich auf den Grundsatz, die Selbsttätigkeit der Schüler soviel als möglich in Anspruch zu nehmen und ihr, wo es geht, unausgeführt das zu überlassen, was den Kräften der Schüler angemessen ist; eine besondere Entwickelungsmethode scheint damit nicht gemeint zu sein. Der Verfasser schreibt ferner der consequenten Einteilung und übersichtlichen Anordnung eines Schulbuchs Wichtigkeit zu. Diese ist hier einfach so gestaltet, dass die obersten Teile die Gleichheit und Proportionalität bilden, in jedem wieder der Kreis von der geraden Linie vollständig gesondert erscheint, dem entsprechend auch die Constructionsaufgaben in der geradlinigen Geometrie mit Lineal und Winkelhaken, in der Kreislehre mit Zirkel und Transporteur ausgeführt werden sollen. Diese Systematik hat der Ordnung nach dem Deductionsgange nicht im Wege gestanden: es ist das gesammte Gebiet der Sätze, welche unabhängig vom Parallenaxiom bestehen, beendigt, bevor zur Parallentheorie übergegangen wird. Die Beweise sind den Euklid'schen entsprechend, der Beweis für die Proportionalität incommensurabeler Strecken bricht leider da ab, wo die letzte Schlussfolgerung zu ziehen war, als ob diese keine Wichtigkeit hätte. Jedem Abschnitt sind Uebungssätze und -Aufgaben zugeteilt, im ganzen 196. Die Figuren stehen auf lithographirten Tafeln; auch in diesen ist es den Schülern zum Teil überlassen die Hülfslinien hinzuzuziehen. Um auf die obige Frage des Verfassers an die Kritik zu antworten, so haben wir keine Stelle des Buches bemerkt, die nicht seinen ausgesprochenen Grundsätzen angemessen wäre oder sich doch durch deren Deutung motiviren liesse.

H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor an der Realschule zu Potsdam. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Fünfzehnte, verbesserte Auflage. Potsdam 1881. Aug. Stein. 338 S.

Im 217., 222., 251., 265. litt. Ber. sind 4 der frühern Auflagen besprochen. Die gegenwärtige zeichnet sich durch eine neue Behandlungsweise der Lehre von den Winkeln und Parallelen aus, welche allen Anforderungen durch vollständige, wol geordnete Darlegung aller Seiten des Gegenstandes Genüge tut. Ausser der Ausführlichkeit in Aufstellungen, welche das Lehrbuch durchweg charakterisirt, ist zu erwähnen, dass es in einem besondern, nachfolgenden Cursus durch Behandlung der Lehre von den Transversalen, der harmonischen Teilung, den Aehnlichkeitspunkten, Chordalen, dem Tactionsproblem und den Kreispolaren ziemlich weit in die neuere synthetische Geometrie einführt, dann die Anwendung der Algebra auf geometrische Probleme, metrische Relationen am Dreieck und der Figuren am Kreise enthält und zu einzelnen Abschnitten Uebungsaufgaben stellt.

H.

Lehrbuch der Planimetrie mit Rücksicht auf Wöckels Sammlung geometrischer Aufgaben bearbeitet von Th. E. Schroeder, Professor der Mathematik und Physik am königl. Gymnasium zu Nürnberg. Dritte Auflage der Planimetrie von Fischer. Mit 6 Figurentafeln. Nürnberg 1882. Friedr. Korn. 288 S.

Gleich im Anfang des Buches macht sich eine ungewöhnliche Gründlichkeit bemerklich, indem sich die Hypothesen, auf welchen die Geometrie beruht, ausgesprochen finden, und weiterhin alles, was zur richtigen Vorstellung und Begriffsbildung notwendig ist, z. B. die Unterscheidung des zur Versinnlichung dienenden Körpers von dem gedachten Object, ausführlich erörtert wird. Diese Gründlichkeit ist jedoch nicht ohne wesentliche Lücken. Bei der Erklärung des geometrischen Körpers ist die wichtigste Hypothese vergessen, ja sogar durch die Aussage, dass vom Stoff ganz abgesehen werde, ausgeschlossen. Eine Eigenschaft des Stoffes lässt sich nicht entbehren; ein Gummiband kann man nicht zum Messen gebrauchen. Auch kann man die erforderliche Eigenschaft der Starrheit nicht apriori definiren, sondern nur aus der Erfahrung nahezu starrer Körper abstrahiren. Die Hypothese der Starrheit der geometrischen Körper liegt der niedern Geometrie überall zugrunde. Man sagt, zwei Gebilde seien congruent, wenn sie sich zur Deckung bringen liessen. Dies Kriterium würde aber illusorisch sein, wenn sie sich bei der Bewegung verändern könnten; ein Würfel von Brei lässt sich auch mit einer Kugel zur Deckung bringen. Ferner ist der Grundbegriff der Richtung ganz ohne Erklärung gelassen. Im Gegensatz zu solchen einzelnen Lücken kommt auch logisch fehlerhaftes Zuviel vor. Es werden erst 12 Relationen der Winkel an zwei von einer dritten geschnittenen Geraden aufgestellt; ein Lehrsatz sagt, dass, wenn deren eine erfüllt ist, es alle sind, ein zweiter Lehrsatz, dass, wenn eine nicht erfüllt ist, es auch die übrigen nicht sind. Beide Sätze sind offenbar identisch. Es war gestattet, den Satz in beiden Formen auszusprechen, dann hätte die zweite Form Folgerung oder Zusatz heissen können. Hier aber wird der Satz in zweiter Form noch einmal ausführlich bewiesen; der Verfasser scheint also die Identität gar nicht gesehen zu haben. Der Parallelensatz wird ohne nähere Bezeichnung (weder als Lehrsatz noch als Grundsatz) hingestellt, nebst einer Betrachtung („Erklärung" genannt), welche im Anschluss an die Definition der Parallelen als Nichtschneidende — nicht als Gleichgerichtete — eine Vorstellung von einer Parallelbewegung zu geben sucht, jedoch unerklärt lässt, wie das Nichtschneiden die Nichtdrehung bedingt. Ueber diesen Punkt würde noch Auskunft zu geben sein. Vorstehende Ausstellungen sind an der Bearbeitung des Lehrbuchs gemacht worden, um das reichlich betätigte Streben zu würdigen keine wichtige Frage unerörtert zu lassen. Infolge dieses Strebens hat der Vortrag zum grossen Teil eine pragmatische Form angenommen, obgleich die Euklidische Form nicht grundsätzlich verworfen ist, vielmehr überall die Basis bildet. Zu erwähnen ist noch besonders die reichliche Zugabe an althistorischen Notizen. Der Umfang des Ganzen überschreitet die gewöhnlichen Grenzen durch Aufnahme von isoperimetrischen Sätzen; der algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben wird auch hier Beachtung geschenkt. Von Uebungsaufgaben sagt der Titel das Zubemerkende, doch fehlen sie auch im Buche nicht ganz.

H.

Vorschule der Geometrie. Ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre für die untern Klassen der Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, sowie zum Selbstunterricht, besonders für Volksschullehrer. Von J. C. V. Hoffmann. 2. (Schluss)-Lieferung. Zweite Hälfte der Planimetrie nebst

Curvenlehre. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1881. Louis Nebert. Mit der 1. Lief. 241 S.

Die 2. Lieferung lehrt die Verwandlung und das Ausmessen ebener Figuren, vorwaltend unter dem Gesichtspunkt technischer Anwendung. Die Sätze werden mit Fragen, teils die nähern Umstände, teils die Begründung betreffend, begleitet, letztere hauptsächlich in der vorangegangenen Lieferung enthalten. H.

Grundlehren der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen an Realschulen, mit vielen Constructions- und Rechnungsaufgaben. Von Josef Menger, k. k. Professor an der Staats-Oberrealschule in Graz. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 132 Originalholzschnitten. Wien 1881. Alfred Hölder. 163 S.

Das Buch ist für den Lehrplan der österreichischen Realschulen bearbeitet, entspricht dem Zwecke der geometrischen allgemeinen Vorbildung für Techniker auf directem, kürzesten Wege in pragmatischem Vortrag und umfasst die Planimetrie, Stereometrie und die Lehre von den Kegelschnitten. Die Abfassung ist correct und sorgfältig in der Berücksichtigung alles wissens- und beachtenswerten. An die Behandlung jedes Themas schliessen sich Aufgaben.

H.

Mathematische Unterrichts-Briefe. Für das Selbst-Studium Erwachsener. Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner und Gelehrten bearbeitet von W. Burckhardt. Brief 1. Einführung in das Studium der Mathematik. — Historische Einleitung. — Studien-Plan. — Lection 1. und 2. Leipzig 1881. Gressner & Schramm. 32 S.

Zu dem, was der Titel sagt, ist wenig hinzuzufügen. In der Tat ist das Vorliegende für Erwachsene berechnet und zwar für Nichtmathematiker, welche wissen wollen, was die Mathematiker treiben. Dass solche durch die Lectüre für das Studium eingenommen werden, möchte man wol bezweifeln, wenn man das Capitel über die mathematischen Grundsätze liest. Die allgemeine Charakterisirung, welche einen ziemlichen Teil des 1. Briefes ausmacht, ist wol durchdacht und enthält manches vernünftige, auch die Erklärungen können befriedigen. Ob die dann folgende Behandlung der Sätze über Gerade und Winkel nebst ihrer technischen Anwendung belehrendes darbietet, müssen wir dem Urteil der Leser anheim stellen. H.

Die Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von A. Stegmann, kgl. Gymnasialprofessor in München. Kempten 1881. Jos. Kösel. 81 S.

Das Vorliegende entspricht dem Gebrauch als Lehrbuch an Gymnasien. Es schliesst sich an des Verfassers „Grundlehren der Stereometrie" (s. litt. B. 235. S. 28) an, aus welchem beim Beginn der sphärischen Trigonometrie die Lehre von den Dreikanten als bekannt vorausgesetzt wird, so dass sie als deren Fortsetzung erscheint. Die Methode ist die gewöhnliche, weder originell noch elegant, die Systematik zwar leidlich zu durchschauen, doch die Zerspaltung des Inhalts grösser als es wol nötig wäre. Bei dem vorausgesetzten Standpunkt war wol kein ersichtlicher Grund das rechtwinklige Dreieck beidemal vor dem schiefwinkligen zu behandeln, wie es vielleicht in einem Vortrag für Handwerker gut sein mag, noch dazu mit dem Anschein, als ob die Sätze für das letztere keine Geltung für das erstere hätten. Für die Trigonometrie, welche in der Theorie nur die Bedeutung eines erfundenen Hülfsmittels hat, ist es wichtig, den Umfang des zu erlernenden nicht grösser erscheinen zu lassen, als er der Idee nach ist. An Vollständigkeit ist nichts zu vermissen, in Betreff der Correctheit, auf welche gleichfalls Sorgfalt verwandt ist, nur zu erwähnen, dass sich eine Formel $\operatorname{cotg} 0 = \infty$ keinenfalls rechtfertigen lässt. Als Symbol müsste sie lauten $= \pm \infty$ und bedürfte einer Erklärung, die sich leicht geben liess. Wollte der Verfasser darauf nicht eingehen, so brauchte er nur zu schreiben: „cotg0 existirt nicht, der Fall ist durch Umformung zu vermeiden". Zum Schluss folgt eine Zusammenstellung von Formeln, die nicht bloss die einfache Grundlage, sondern auch manches daraus abgeleitete umfasst, dann eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben zur Uebung.

H.

Goniometrie und ebene Trigonometrie. Dargestellt von Dr. E. Suchsland, ordentlichem Lehrer am Gymnasium zu Stolp. Stolp i. P. 1881. C. Schrader. 32 S.

Die Methode ist folgende. Erst wird aus der Bemerkung der Abhängigkeit zwischen Dreieckswinkeln und Seitenverhältnissen die Idee der Trigonometrie entwickelt und realisirt, wobei namentlich die Periodicität ausführlich erörtert ist, dann die resultirenden Formeln mit allen für die Elemente wichtigen daraus abgeleiteten einfach zusammengestellt und nachträglich der Weg der Begründung der einzelnen in der Kürze angegeben, und zwar nacheinander das auf Goniometrie und auf Trigonometrie bezügliche so behandelt. Aus der Sinus-Proportion wird der Projectionssatz, aus diesem durch

Quadrirung der Cosinus-Seiten-Satz (erweiterte Pythagoräer) algebraisch hergeleitet.

H.

Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Amberg. Vierte, durchgesehene Auflage. München 1881. Theodor Ackermann. 166 S.

Die 2. Auflage ist im 228. litt. Bericht S. 34. besprochen. Bemerkenswerte Aenderungen sind nicht zu verzeichnen. Eine correcte Fassung hat das Buch nicht gewonnen. Der falsche Satz, dass 1 Kraft ohne Mitwirkung anderer keine andre als geradlinige Bewegung bewirken könne, ist nicht berichtigt, obgleich das Vorausgehende und Folgende nicht damit stimmen. Der Begriff der Ruhe ist noch ganz im dunkeln; was heisst Ruhe in einer bewegten Welt? Der Aeusserung des Verfassers, er habe Sorge getragen Recensionen . . . soviel als möglich zu berücksichtigen und „den differirenden Meinungen entgegenzukommen“ — ist zu erwidern: Um Meinungen kann es sich in einer exacten Doctrin, wie die Mechanik, nicht handeln, differirende Ansichten verlangen Entscheidung, nicht Concessionen.

H.

Vermischte Schriften.

Mathesis recueil mathématique à l’usage des écoles spéciales et des établissements d’instruction moyenne publié par P. Mansion, Ancien élève de l’École normale des sciences, Professeur ordinaire à l’Université de Gand, Docteur spécial en sciences mathématiques, etc. et J. Neuberg, Ancien élève de l’École normale des sciences, Professeur à l’Athénée royal et à l’École des mines de Liège, avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Tome premier. Gand 1881. Ad. Hoste.

Dies neu gegründete Journal ist die Fortsetzung der, 1874 von Catalan und Mansion gegründeten Nouvelle Correspondance Mathématique, welche von 1876 bis 1880 Catalan allein fortgeführt hat. Das Programm ist dasselbe geblieben. Es erscheint monatlich ein Bogen in gleichem Format wie früher. Der Inhalt des 1. Bandes an Abhandlungen ist folgender.

P. **Mansion**: Elementarer Beweis des Taylorschen Satzes für Functionen einer imaginären Variabeln. — Verallgemeinerung einer Eigenschaft der Fusspunktcurven. — Ueber ein neues Princip der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Ueber die näherungsweise Inhaltsberechnung ebener Flächenstücke. — Eine neue Formel aus der Differentialrechnung; nach Teixeira. — Discussion der Gleichung 3. Grades; nach Liebrecht. — Ueber ein bestimmtes Integral. — Theorie der periodischen Brüche. — Ueber die harmonische Reihe und die Stirling'sche Formel. — Definition des Wortes Grenze.

J. **Neuberg**: Ueber eine Anwendung der Algebra der Richtung. — Ueber den Punkt in der Ebene eines Dreiecks, dessen Abstände von den Seiten sich wie deren Längen verhalten (centre des médianes antiparallèles). — Ueber das gleichseitige, einem Dreieck eingeschriebene Sechseck; nach Jeřábek.

Ch. **Hermite**: Ueber eine Reihe.

Verstraeten: Curve der Berührung eines einem Helikoid umschriebenen Cylinders.

Mister: Dieselbe.

E. **Cesaro**: Ueber die harmonische Reihe.

P. **Ruex** und J. **Neuberg**: Ueber einen geometrischen Ort.

E. **Lucas**: Noten über analytische Geometrie.

S. **Günther**: Note über die Strophoide.

Barbarin: Potenz eines Punktes in Bezug auf einen centrischen Kegelschnitt.

Ph. **Gilbert**: Studien über infinitesimale Geometrie.

E. **Cesaro**: Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einiger Sätze von Berger. — Ueber die harmonische Reihe.

D'Ocagne: Teilung der Vielecke.

E. **Catalan**: Ueber die Summation gewisser Reihen.

S. **Realis**: Ueber eine Summe von Kuben.

Der 1. Band enthält zahlreiche neue Aufgaben und Lösungen solcher.

H.

Erklärungen.

Bezüglich auf zwei Berichte sind mir Erklärungen zugegangen, die ich im folgenden mitteilen und wo nötig mit meiner Erklärung verbinden werde.

I. Biographische Skizzen aus der Geschichte der Naturwiss. u. der Math., von A. Krüger (s. p. 24). Hierzu erklärt der Herr Verfasser, dass das Buch ausschliesslich zum Gebrauche in Schulen bestimmt ist und diejenigen historischen Notizen enthalten sollte, welche den Unterricht zu begleiten pflegen. Diese Angabe, welche weder auf dem Titel noch in einem Vorwort steht, macht das Motiv der Auswahl deutlich, und lässt den Grund erkennen, warum die bedeutendsten Entdeckungen in der Mathematik nicht erwähnt sind. Meine Bemerkung hierüber ist dadurch erledigt.

II. Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen etc. von Dr. O. Simony (s. p. 25). Am Schlusse des Berichts habe ich die Vermutung ausgesprochen, dass der Verfasser von der Existenz des Mehr-Dimensionen-Raumes überzeugt sei. Seiner Erklärung zufolge ist diese, wie die sich daran schliessende Vermutung irrig; in einem Vortrag hat er sich darüber ausgesprochen. Die Vermutung war aus seinen Aeusserungen auf S. 39 geschöpft, wo er die Hypothese eines solchen Raumes rechtfertigt. Auf S. 40 wird die Entscheidung durch Erledigung von Vorfragen bedingt, auf die er nicht eingeht; die obige Annahme war daher mit keinem Worte ausgeschlossen. Ferner giebt seine Erklärung Auskunft darüber, wo die Lösung des Titel-Problems zu finden ist. Den Worten entsprechend wird dieselbe vollzogen durch Längsschlitzung eines um 6R tordirten Bandes. In der Tat ist auf dem Titel die selbstverständlich scheinende Bedingung, dass das Band unverletzt bleibe, nicht ausgesprochen, auch heisst es nicht „knüpfen", sondern „machen". Die Lösung ist daher wörtlich geleistet, wenn der Knoten auch schon vorhanden war und nur herausgeschnitten wird. Dass dies hier der Fall ist, sieht man leicht, wenn man einen Faden 2 mal um einen Cylinder schlingt und die neben einander gehenden 2 Fäden als die 2 Teile des Bandes betrachtet. Soll das Band vor der Schliessung 3 mal gewendet sein, so muss der Faden 1 mal durchgesteckt werden, wodurch ein Knoten entsteht. So interessant der Erfolg dieser Procedur auch ist, so lag mir doch der Gedanke zu fern, dass der Verfasser sie für die Lösung des Hauptproblems ausgeben wollte. Die Besprechung der Vier-Dimensionen-Geometrie hingegen schien mir zu dem auf dem Titel genannten Thema nur dann zu gehören, wenn die darin vorkommende Lösung eine wirkliche sein sollte.

R. Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fischer, E. G., Kepler u. d. unsichtbare Welt. Eine Hieroglyphe. Mit Einleitg. u. Ergänzgn. v. F. Zöllner. Leipzig, Staackmann. 3 Mk.

Holden, E. S., Wilhelm Herschel. Berlin, Besser. 4 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschr. d. Mathematik. Hrsg. v. C. Ohrtmann etc. 11. Bd. J. 1879. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 80 Pf.

Neumann, C., üb. d. nach Kreis-, Kugel- u. Cylinder-Funct. fortschr. Entwickelungen etc. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

Methode und Principien.

Donadt, A., das mathemat. Raumproblem u. die geom. Axiome. Leipzig, Barth. 1 Mk. 60 Pf.

Simony, O., gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösg. d. Aufgabe: „In e. ringförmig geschlossen. Band e. Knoten zu machen" u. verwandter merkw. Probleme. 3. Afl. Wien, Gerold & Co. 2 Mk.

Zimmermann, R., Henry More u. d. 4. Dimension d. Raumes. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch d. Logarithmen. 8. Afl. Wien, Bermann & A. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

August, E. F., vollständ. logarithm. u. trigonom. Tafeln. 13. Afl. Leipzig, Veit & Co. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Burckhardt, W., math. Unterrichtsbriefe. 2. — 17. Lief. Leipzig, Gressner & Sch. à 1 Mk.

Greve, Lehrbuch d. Mathematik. 2. Kurs. I. Thl. Berlin, Stubenrauch. 1 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Samlg. a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 11.—25. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Matthiesen, L., Komment. z. Sammlg. v. Beisp. etc. v. E. Heis. 3. Aufl. Cöln, DuMont-Schauberg. 2 Mk.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik. 11. Afl. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Pahnsch, J., arithm. Aufgaben. 9. Afl. Reval, Kluge. Cart. 2 Mk.; Resultate dazu. 1 Mk. 20 Pf.

Ruefli, J., Auflös. zu d. Aufg. zur Anw. der Gleichungen auf die geom. Berechnungen. 2. Afl. Bern, Dalsp. 1 Mk. 60 Pf.

Sachse, J. J., Mathematik f. d. Lehrerbild.-Anst. u. Lehrer. Result. zu d. Aufg. v. 4. Thl. Leipzig, Siegismund & V. 1 Mk.

Schrön, L., siebenstell. gemeine Logarithmen. 19. Afl. (Taf. I. u. II. d. Gesammtwerkes). Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 20 Pf.

Stampfer, S., logar.-trigon. Tafeln etc. 12. Afl. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Wittstein, Th., Lehrb. d. Elem.-Mathematik. 2. Bd. 2. Abthlg. 6. Aufl. Hannover, Hahn. 2 Mk. 10 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Baltzer, R., Theorie u. Anwendung der Determinanten. 5. Afl. Leipzig, Hirzel. 5 Mk.

Bergold, E., Arithmetik u. Algebra, nebst e. Geschichte dieser Disciplinen f. Gymn. u. Realschulen. Karlsruhe, Reuther. 2 Mk. 25 Pf.

Bussler, F., Elemente d. Arithmetik u. Algebra. Berlin, Enslin. 1 Mk. 80 Pf.

Frischauf, J., Lehrb. d. allg. Arithmetik. 4. Afl. Graz, Leuschner & L. 2 Mk. 40 Pf.

Hamilton, W. R., Elemente d. Quaternionen. Dtsch. v. P. Glan. 1. Bd. 2. Thl. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Helmling, P., neue Integrations-Wege. Leipzig, Voss' S. 1 Mk. 20 Pf.

Löser, J., das Kopfrechnen in d. dtschn. Schulen. 2. Afl. Weinheim, Ackermann. 3 Mk.

Marloh, E., Gesch. d. Restes d. Taylor'schen Reihe. Göttingen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

Pleibel, A. L., Handb. d. Elementar-Arithmetik. 8. Afl. Stuttgart, Schweizerbart. 6 Mk. 40 Pf.

Schmidt, J. P., d. Elemente d. Algebra f. höh. Lehranst. 4. Afl. Trier, Lintz. 3 Mk.

Spitz, C., Lehrb. d. allg. Arithmetik z. Gebr. an höh. Lehranst. 4. Afl. Leipzig, Winter. 7 Mk.

— dass. Anhang. 4. Afl. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Staude, O., üb. lineare Gleichungen zw. ellipt. Coordinaten. Leipzig, Lorentz. 1 Mk. 50 Pf.

Wittenbauer, F., üb. Deviationsmomente. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Geometrie.

Adam, W., ausf. Lehrb. d. Planimetrie etc. Langensalza, Beyer & S. 4 Mk.

Erler, W., d. Elemente d. Kegelschnitte in synthet. Behandlg. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Escherich, G. v., Einl. in die analyt. Geometrie d. Raumes. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 20 Pf.

Flaux, B., Lehrb. d. element. Planimetrie. 6. Afl. Bes. durch A. Luke. Paderborn, Schöningh. 2 Mk. 50 Pf.

Fialkowski, N., geometr. Flächenornamente m. Grundeintheilung. 1. u. 2. Abth. à 2 Hfte. Wien, Klinkhardt. à 60 Pf.

— zeichnende Geometrie. 3. Afl. Ebd. 9 Mk. 60 Pf.

— Die Kegelschnittslinien aus d. Schatten e. Kreises. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— Lehrb. d. Geometrie u. d. Zeichnens u. s. w. 1. Curs. 5. Afl. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— Lehrb. d. Planimetrie f. Unterrealsch. 1. Thl. 5. Afl. Ebd. 60 Pf.

— Lehrb. d. Stereometrie f. Unterrealsch. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Glinzer, E., Lehrb. d. Elem.-Geometrie. 2. Thl. Hamburg, Nestler & M. Cart. 3 Mk.

Hesse, O., Vorles. a. d. analyt. Geomet. d. geraden Linie etc. 3. Afl, rev. v. S. Gundelfinger. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 20 Pf.

Holzmüller, G., vollst. Durchführung e. isogonalen Verwandschaft etc. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Mahler, E., d. Fundamentalsätze d. allg. Flächentheorie. 2. Hft. Wien, Seidel & S. 1 Mk.

Milinowski, A., die Geometrie f. Gymn. u. Realsch. 2. Thl. 1. u. 2. Hft. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 80 Pf.

Mittentzwey's, L., geometr. Figurenspiel. Leipzig, Ehrlich. 1 Mk. 50 Pf.

Mocnik, F., Geometria intuitiva per il ginnasio inf. Parte 2. Ed. 4. Wien, Gerold's S. 1 Mk.

— Lehrb. d. Geometrie f. d. ob. Cl. d. Mittelsch. 16. Afl. Ebd. 3 Mk. 20 Pf.

Mocnik, F., geom. Anschauungslehre f. Unter-Gymnas. 2. Abth. 13. Afl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Noth, H., d. Arithmetik d. Lage. Leipzig, Barth. 2 Mk. 40 Pf.

Schmeisser, K., analyt. Geometrie. Querfurt, Rötscher. Cart. 4 Mk.

Schröder, Th. E., Lehrbuch d. Planimetrie. 3. Afl. d. Planimetrie v. Fischer. Nürnberg, Korn. 3 Mk. 60 Pf.

— dass. Resultate. Ebd. 40 Pf.

Schwarz, A., Lehrb. d. Stereometrie. Leipzig, Gebhardt. 1 Mk. 80 Pf.

— Vorzeichn. zu d. körperl. Beweisfiguren f. d. Unt. in d. Stereometrie. 1. Hft. Fol. Ebd. 2 Mk. 80 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch d. eb. Geometrie m. Uebnngs-Aufg. 15. Afl. Potsdam, Stein. 2 Mk. 50 Pf.

Spitz, C., Lehrb. d. Stereometrie z. Gebr. an höh. Lehranst. 5. Afl. Leipzig, Winter. 2 Mk. 40 Pf.

— dass. Anhang. 5. Afl. Ebd. 60 Pf.

Streissler, J., d. geometr. Formenlehre f. d. 2., 3. u. 4. Realclasse. 5. Afl. Triest, Schimpff. 1 Mk. 60 Pf.

Stritt, S., geometr. Formenlehre f. d. Schüler d. unt. Klassen. Offenburg, Trube. 50 Pf.

Tesař, J., synthet. Untersuch. d. gem. Kegelschnittschaar etc. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Ziegler, A., Grundriss d. eb. Geometrie z. heurist. Unterr. f. Gymnasien. 2. Afl. Landshut, Krüll. 1 Mk.

Trigonometrie.

Götting, A., die Funct. Cosinus u. Sinus belieb. Argumente in elem. Darstellg. Berlin, Wohlgemuth. 1 Mk. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Darstellung topogr. u. takt. Bezeichn. als Hülfsm. f. Croquir-Arbeiten. München, J. A. Finsterlin. 1 Mk.

Maschek, F., d. Kopfzeichnen nach einf. Gesetzen d. räuml. Symmetrie. Fol. Troppau, Gollmann. 3 Mk. 60 Pf.

Möllinger, O., Lehrb. d. wicht. Kartenprojectionen. Zürich, Schmidt. 3 Mk.

Peichl, J., Controlcompass sammt Dromoscop etc. Triest. Schimpff. 1 Mk. 60 Pf.

Reitzner, V. v., Hülfstafeln f. d. Plan- u. Kartenlehre, Recognosc. u. f. d. Terrain-Aufn. Wien, Seidel & S. Geb. 3 Mk. 20 Pf.

Rottok, die Deviationstheorie u. ihre Anwendg. in d. Praxis. Berlin, D. Reimer. 3 Mk.

Schell, A., die Terrain-Aufnahme nach d. tachym. Kippregel v. Tichy u. Starke. Wien, Seidel u. S. 1 Mk. 60 Pf.

Mechanik.

Franke, J. N., üb. geom. Eigenschaften v. Kräfte- u. Rotationssyst. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Schüler, F. W., das Princip d. Erhaltung der Kraft etc. Freising, Datterer. 1 Mk.

Zimmermann, H., das logarithm. Potential e. gleichseitig-dreieck. Platte. Jena, Neuenhahn. 80 Pf.

Technik.

Schulze, R., die physikal. Kräfte im Dienste d. Gewerbe u. s. w. Frei nach Guillemin. Leipzig, Frohberg. 17 Mk.

Templeton's Taschenbuch f. prakt. Mechaniker. 4. Afl. v. F. Kreuter u. J. Otto. Brünn, Winiker. 7 Mk.

Weisbach's, J., Lehrb. d. Ingen.- u. Maschinen-Mechanik. 2. Afl. 3. Thl. Bearb. v. G. Herrmann. 2. Abth. 11. u. 12. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 40 Pf.

Zetzsche, K. E., Handb. d. elektr. Telegraphie. 4. Bd. 5. (Schluss-)Lfg. Berlin, Springer. 6 Mk. 20 Pf.

Elasticität, Akustik und Optik.

Guichard, E., d. Harmonie d. Farben. Dtsche. Asg. m. Text v. G. Krebs. 9. — 11. Lfg. Fol. Frankfurt, Rommel. à 4 Mk.

Hoppe, J. J., psychol.-physiol. Optik in experimentell psychophys. Darst. Leipzig, O. Wigand. 6 Mk.

Kolbe, B., geometr. Darst. d. Farbenblindheit. St. Petersburg. Kranz. 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Backlund, O., z. Theorie d. Encke'schen Cometen. Leipzig, Voss' S. 2 Mk. 30 Pf.

Beiträge, metronomische. Nr. 3. Hrsg. v. W. Foerster. Berlin, Dümmler. 8 Mk.

Gressler, F. G. L., Himmel u. Erde. 17. Afl. Langensalza, Schulbuchh. 2 Mk. 25 Pf.

Kalender, astronom., f. 1882, hrsg. v. d. k. k. Sternwarte. N. F. 1. J. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf., cart. 1 Mk. 60 Pf.

Mélanges mathémat. et astron. tirés du bull. de l'acad. imp. des sciences des St.-Pétersb. Tome 5. Livr. 6. et dernière. Leipzig, Voss' S. 1 Mk. 30 Pf.

Meteorologie, die moderne. 6. Vorlesgn. v. H. J. Mann etc. Dtsche. Orig.-Asg. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 60 Pf.

Oerter, mittlere u. scheinbare, f. d. J. 1882 v. 539 Sternen d Fundam.-Catalogs etc. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Schmick, J. H., Sonne u. Mond als Bildner d. Erdschaale. 2. Asg. Leipzig, Georgi. 5 Mk.

Nautik.

Dabovich, P. E., nautisch-techn. Wörterb. d. Marine. Deutsch., ital., franz. u. engl. 1. Bd. 9. Lfg. Wien, Gerold & Co. 2 Mk.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1884. Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann. Cart. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Ballauff, L., die Grundlehren d. Physik in elementarer Darstellung. 3. Bd. Langensalza, Beyer & S. 2 Mk. 50 Pf.

Brettner, H. A., Leitf. f. d. Unt. in der Physik. 20. Afl., hrsg. v. Ulffers u. Blümel. Stuttgart, Heitz. 3 Mk.

Exner, F., üb. galv. Elemente. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Jochmann, E., Grundriss d. Experimentalphysik. Vermehrt um Elem. d. Astronom. etc. v. O. Hermes. 7. Afl. Berlin, Winckelmann & S. 4 Mk. 60 Pf.

Koppe, K., Anfangsgr. d. Physik. 15. Afl., bearb. v. W. Dahl. Essen, Bädeker. 4 Mk. 20 Pf., geb. 4 Mk. 70 Pf.

Krebs, G., Grundr. d. Physik f. höh. real. Lehranst. Leipzig, Veit & Co. 7 Mk.

Lommel, E., Lexikon d. Physik u. Meteorologie. Leipzig, Bibliogr. Institut. 4 Mk., geb. 4 Mk. 50 Pf.

Mousson, A., d. Physik auf Grundlage der Erfahrung. 3. Bd. 1. Lfg. 3. Afl. Zürich, Schulthess. 6 Mk.

Neumann, F., Vorles. üb. d. Theorie d. Magnetismus etc. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Repertorium d. Experim.-Physik etc. Hrsg. v. Ph. Carl. 18. Bd. 12 Hfte.). 1. Hft. München, Oldenbourg. preplt. 24 Mk.

Weinhold, A. F., physikalische Demonstrationen. 3. (Schluss)-Lfg. Leipzig, Quandt & H. 8 Mk. 50 Pf.; cplt. 22 Mk.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathemat. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 19. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. preplt. 20 Mk.

Helmholtz, H., wissensch. Abhandlungen. 1. Bd. 1. Abth. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Kirchhoff, G., ges. Abhandlungen. 1. Abth. Ebd. 6 Mk.

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Cl. 1. Abth. 83. Bd. 3. u. 4. Hft. Wien, Gerold's S. 5 Mk. 50 Pf.

— dass. 2. Abth. 83. Bd. 3. u. 4. Hft. Ebd. 6 Mk. 50 Pf.

— dass. 3. Abth. 83. Bd. 3—5. Hft. Ebd. 4 Mk. 80 Pf.

[redacted]