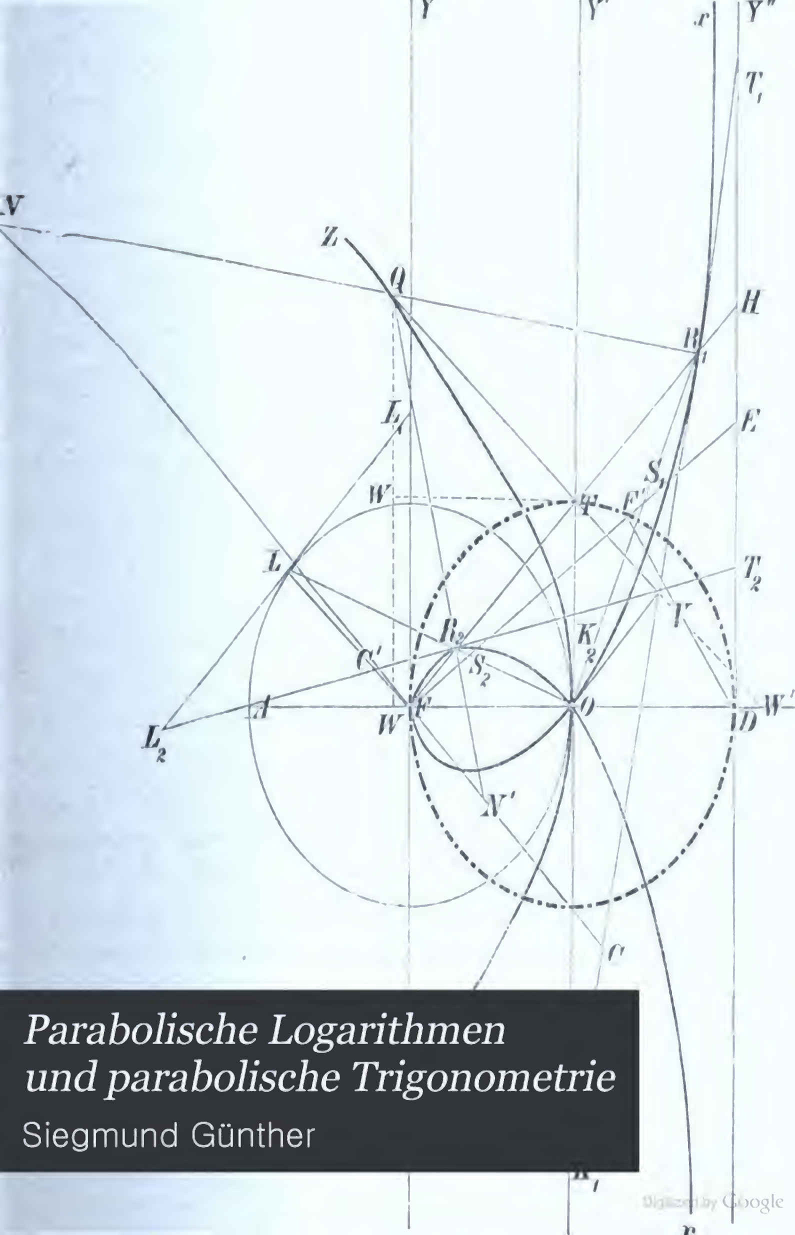


Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie

Siegmund Günther

PARABOLISCHE LOGARITHMEN

UND

PARABOLISCHE TRIGONOMETRIE.

EINE VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNG

VON

DR. SIEGMUND GÜNTHER,
PROFESSOR AM K. GYMNASIUM ZU ANSBACH IN BAYERN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

PARABOLISCHE LOGARITHMEN

UND

PARABOLISCHE TRIGONOMETRIE.

EINE VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNG

VON

DR. SIEGMUND GÜNTHER, 1848–
PROFESSOR AM K. GYMNASIUM ZU ANSBACH IN BAYERN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

W. W. Beman
gt.
6-18-1923

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Die vorliegende kleine Schrift hat einen doppelten Zweck. Sie wünscht dem deutschen Publikum die Arbeiten eines hochverdienten ausländischen Mathematikers näher zu führen, sie will aber zweitens auch zeigen, dass und wie den sogenannten hyperbolischen Funktionen im Gebiete der Kurven zweiter Ordnung ein weit grösserer Wirkungskreis zukommt, als bisher wohl allseitig angenommen ward. Die Lehre von der Parabel ist vollständig auf jene Funktionen begründet worden.

Den Herren Professoren Doetsch in Nürnberg und Neuberg in Lüttich, sowie Herrn J. W. L. Glaisher in Cambridge hält sich der Verfasser für ihre freundliche Unterstützung seiner Arbeit zum besten Danke verbunden. Nicht minder dankt er Herrn Prof. Beman von der Michigan-Universität für die Mitteilung des ihm bis dahin entgangenen Umstandes, dass Darboux' „Bulletin“ von 1873 ein Referat über Booths Hauptwerk enthält.

Ansbach, im Januar 1882.

Dr. S. Günther.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Ältere und neuere Untersuchungen über Kurven-Analogie; Brendels parabolische Logarithmen.

Den Keim zu jenen Betrachtungen, welche uns in diesem Kapitel und zum Teile auch in späteren Abschnitten beschäftigen werden, erblicken wir in gewissen Vergleichungen elementar-geometrischer Natur, welche von Alters her einzelne Mathematiker beschäftigt haben. Die so zahlreichen neuen Sätze, mit welchen Archimedes die Metrik der Raumlehre bereichert hatte, forderten zu solchen Vergleichungen ganz natürlich heraus, und so finden wir denn bald darauf bei einem Pergamenier Nikon, auf welchen zuerst von Ideler[1]) hingewiesen ward, die Thatsache erwähnt, dass, wenn einer Kugel ein Würfel umbeschrieben werde, die Oberflächen beider Körper im gleichen Verhältnisse zu einander stehen, wie ihre Volumina. Buzengeiger, der sich bald darauf mit diesem stereometrischen Satze des Nikon beschäftigte[2]), erweiterte denselben auf alle willkürlichen, einer Kugel umbeschriebenen Polyeder, indem er dabei ausser Acht liess, dass bereits in einer weit älteren Abhandlung von Zanotti[3]) der Lehrsatz ausgesprochen war „*tout solide terminé de toutes parts par des plans, et circonscrit à une sphère, est à la sphère même, comme sa surface à la surface de la sphère*“, und dass auch Kästner in eine weitläufige Untersuchung über diese und ähnliche Fragen eingetreten war.[4]) Mit Leichtigkeit liessen sich noch zahlreiche andere Belege für die Existenz einer solchen „vergleichenden“ Geometrie beibringen; ein wirkliches höheres Interesse gewinnt dieselbe jedoch erst dann, wenn wir zur Kurvenlehre aufsteigen.

Ausdrücklich ward in der Überschrift dieses Kapitels betont, dass wir uns in demselben nur mit der Analogie, nicht aber mit der Verwandtschaft der krummen Linien beschäftigen wollen. Die Frage, durch welchen Modus der Transformation oder Abbildung eine gewisse Kurve in eine andere übergeführt werden kann, bleibt für uns ausser Betracht. Dürften wir uns auf ein entsprechendes Verhältnis in einer anderen Wissenschaft, der Organologie, beziehen, so würden wir sagen, dass unser hier einzuschlagendes Verfahren der Thätigkeit des vergleichenden Anatomen entspricht, während der Entwickelungstheorie im Darwinschen Sinne die höhere Aufgabe zukommt, die von Jenem gelieferten Ergebnisse zu einem allgemeinen Gesamtbilde zu vereinigen. Ganz ebenso ist es auch hier der Fall; wir werden über eine Reihe von Studien zu berichten haben, welche der Aufdeckung gemeinschaftlicher metrischer Eigenschaften bei bestimmten Kurven-Individuen gewidmet sind, Eigenschaften, welche sich einer späteren, unter höheren Gesichtspunkten durchgeführten Untersuchung zweifellos als Unterfälle weit universellerer verwandtschaftlicher Beziehungen darstellen werden. Indessen lassen sich schon aus dem zur Zeit vorliegenden Materiale bemerkenswerte Schlüsse ziehen, und da die den eigentlichen Gegenstand dieser Schrift ausmachende Theorie unmittelbar aus solchen vergleichenden Betrachtungen hervorgegangen ist, so erscheint es zweckmässig, den gesamten Stoff in gedrängter Verarbeitung hier zur Kenntnis zu bringen.

Als der Erste scheint auf derartige Dinge der als scharfsinniger Geometer gefeierte Jesuit Gregorius a St. Vincentio sein Augenmerk gerichtet zu haben. Der Umstand, dass Archimedes, den er sich überhaupt zum Vorbilde für seine eigenen Arbeiten ausersehen hatte, gerade die Parabel und die Spirale in selbständigen Schriften monographisch abhandelte, mag ihn wohl angeregt haben, dem Wechselverhältnis dieser beiden, anscheinend ziemlich verschiedenartigen Linien weiter nachzudenken. So entstand im sechsten Buche seines grossen Werkes[5]), obwohl dasselbe eigentlich von der Hyperbel handelt, ein eigener Abschnitt, „*spiralis et parabolae symbolizatio*“ betitelt. Wie Kästner[6]) mitteilt, glaubte Gregor hierbei dem Gedankengang auf die Spur gekommen zu sein, welcher den grossen Syrakusaner bei seinen Staunen erregenden Entdeckungen geleitet hatte. Die betreffende Abteilung umschliesst im ganzen 28 Theoreme, aufgebaut auf einer kinematischen Erwägung, von welcher der vorgenannte Gewährsmann (s. o.) das Folgende mitteilt: „Der erste Satz soll Ähnlichkeit zwischen Erzeugung der Spirale und der Parabel darthun. Er stellt ein rechtwinklichtes Dreyeck vor, auf einer der Seiten, die den rechten Winkel einschliessen, steht senkrecht durch die Spitze des Winkels, den sie mit der Hypotenuse macht, eine gerade Linie, und bewegt sich selber parallel gleichförmig, so bewegt sich auch eine gerade Linie, der genannten Seite parallel gleichförmig, beyder Linien Durchschnitt ist in einer Parabel.“ Was Gregor durch seine eigentümliche phoronomische Betrachtungsweise zu erreichen suchte, das strebte sein Zeitgenosse Cavalieri mit Hilfe der von ihm erfundenen „Geometrie des Unteilbaren“ an[7]), welche freilich an logischer Schärfe mit den Infinitesimalmethoden des Altertums nicht wetteifern konnte.

Das Volkommenste jedoch, was in diesem Punkte ohne Einführung analytischer Untersuchungsmethoden geleistet ward, entstammt dem glänzenden Geiste Pascals. Chasles spricht sich (a. a. O.) über diese Leistung folgendermassen aus: „Die Gleichheit zweier entsprechender Bögen zweier Kurven, welche auch von Roberval*, aber auf eine schwierigere Manier, durch seine Lehre von der zusammengesetzten Bewegung bewiesen war, wurde späterhin der Gegenstand eines herrlichen Memoires von Pascal, welches das erste Beispiel von der Vergleichung zweier verschiedenartiger Kurven durch die reine Geometrie der Alten ist, durchaus frei von der Betrachtung des Unteilbaren“. Dieses warme Lob verdient die ganz originelle Abhandlung denn auch im vollsten Masse. Unter seinem bekannten Pseudonym Amos Dettonville veröffentlicht Pascal am 10. Dezember 1658 ein Schreiben[9]), worin er angiebt, vor fünfzehn Jahren habe zuerst Hobbes** der Überzeugung Ausdruck gegeben, dass die Parabel rektifiziert werden könne, und dann habe Roberval wahrgenommen,

---

* Derselbe betrachtet bekanntlich den eine Kurve beschreibenden Punkt als von einer Anzahl von Kräften beeinflusst, setzt nach der Regel vom Parallelogramm der Kräfte diese letzteren zu einer Mittelkraft zusammen und identifiziert sodann diese Resultante mit der im bezüglichen Punkte an die Kurve gezogenen Berührungslinie. Speciell über den hier vorliegenden Punkt hat sich Roberval, einem unlängst von Henry aufgefundenen Briefe an Hevelius zufolge, im Jahre 1650 folgendermassen ausgesprochen[8]): *„Lineam parabolam cum helice Archimedis secundum longitudinem compararimus, et per Galliam Italiamque vulgavimus, ubi Geometris omnibus stupendum theorema visum est. Si parabola et helix se habeant ejusmodi ut portio axis parabolae intercepta inter verticem et rectam quampiam a puncto aliquo parabolae ad axem ordinatim applicatam, sit aequalis semicircumferentiae circuli primae revolutionis in helice, at ipsa ordinatim applicata sit aequalis semi-diametro ejusdem circuli, tum quae inter verticem et ordinatim applicatam intercipitur linea parabola aequalis est longitudine helici primae revolutionis. Quod si in eadem parabola sumatur quodvis punctum, a quo ad axem ducatur ordinatim applicata; tum a centro ejusdem helicis ad aliquod ejus punctum ducatur recta praedictae applicatae aequalis: quae inter verticem et assumptum in parabola punctum intercipitur linea parab. aequalis est long. helici interceptae inter initium et punctum a rectae termino notatum in eadem helice.“*

** Bei welcher Gelegenheit Thomas Hobbes sich über die — bis dahin wohl allseitig bezweifelte — Möglichkeit einer geometrisch genauen Rektifikation äusserte, vergisst Pascal anzugeben, was um so mehr zu bedauern ist, da Poggendorff[10]) nicht weniger als zehn mathematisch-physikalische Schriften des grossen Philosophen aufführt. Diese Seite der wissenschaftlichen Thätigkeit des letzteren ist überhaupt noch viel zu wenig aufgeklärt. Vergl. Nachtrag I.

1*

dass sich zu einem beliebigen Parabelbogen stets ein ihm an Länge gleicher Bogen einer archimedischen Spirale finden lasse. Zwar sei des letzteren Untersuchungsgang kein ganz beweiskräftiger, allein die Thatsache selbst stehe nach seinen eigenen Forschungen nunmehr zweifellos fest. Im Anschluss daran entwickelt Pascal, indem er sich streng an das Exhaustionsverfahren des Archimedes hält, einige Eigenschaften des Kreises, der Spirale und der Parabel, welche allerdings manche wunderbare Analogie zu Tage treten lassen. Die Spirale und die Parabel werden stets in ein und derselben gegenseitigen Lage betrachtet, so zwar, dass der Pol der ersteren mit dem Scheitel der letzteren zusammenfällt. Der Schlusssatz lautet[11]): „*Si une parabole et une spirale sont en la condition supposée, je dis que la ligne parabole est égale à la ligne spirale*". Die betreffenden Bögen werden abgegrenzt und mit stets mehr und mehr sich anschmiegenden Sehnen- und Tangentenzügen ausgefüllt resp. umgeben. Nun kann man zeigen, dass je ein Sehnenzug und Tangentenzug des Parabelbogens einem Sehnenzug und Tangentenzug des Spiralenbogens gleich ist, und da bei fortgesetzter Einzeichnung und Umbeschreibung neuer Polygone der Längenunterschied zwischen Sehnen- und Tangentenzug jeder einzelnen Kurve kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine konstante Grösse, so ist die Gleichheit der beiden in Betracht genommenen Kurvenbögen erwiesen.*

---

* Analytisch betrachtet stellt sich diese Wahrheit, deren Feststellung in früherer Zeit einen so gewaltigen Aufwand von Scharfsinn erheischte, sehr leicht und ungezwungen dar. In cartesischen, resp. in gewöhnlichen Polarkoordinaten geschrieben, sind die Gleichungen der apollonischen Parabel und der archimedischen Spirale bekanntlich diese:

$$y^2 = 4px, \quad r = av.$$

Für die Bogenlänge hat man bezüglich die Integrale

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int \sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}}\, dy$$

und

$$\int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2}\, dv = a \int \sqrt{1 + v^2}\, dv.$$

Durch die Substitution $\frac{y}{2p} = v$ geht das erste Integral in dieses

$$2p \int \sqrt{1 + v^2}\, dv$$

über, und es ist ersichtlich, dass die Geradstreckung beider in Rede stehender Kurven auf die Auswertung eines und desselben Integrales hinausläuft.

Über die zwischen Parabel und Spirale obwaltende Analogie besitzen wir endlich auch noch eine Monographie von Brendel, welche sich die Aufgabe gesetzt hat, die von Gregorius a St. Vincentio gefundenen Resultate durch Einkleidung in die algebraische Formelsprache dem Verständnisse der Neuzeit näher zu bringen: sie führt, im Hinblick auf ihr Vorbild, die Aufschrift: „*De analogia spiralis et parabolae.*"[12]) Wenn Rondet[13]) Recht hätte — so beginnt sie —, so hätte die wunderbare Übereinstimmung der beiden Kurven in den wichtigsten Relationen auch dem Archimedes nicht verborgen bleiben können. Einige der augenfälligsten Beispiele mögen hier angezogen werden. Es sei (Fig. 1a) Ax eine beliebige Parabeltangente, eine zweite durch A gehende Gerade Ay wird von der Parabel im Punkt G getroffen. In G werde ein Perpendikel auf Ay errichtet, welches der Ax in B begegnet; zwischen A und B wähle man willkürlich die Punkte H, J, K, fälle von ihnen auf die Ay die Lote HS, JT, KV und verbinde die Punkte M, N, O, in welchen diese Lote von der Parabel geschnitten werden, durch Gerade mit dem Punkt A. Sind D, E, F die Schnittpunkte dieser letzteren Geraden mit der Geraden BG, so besteht die Proportionenkette

Fig. 1a.

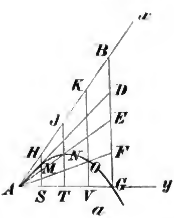
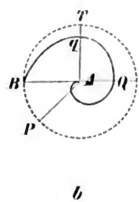


Fig. 1b.



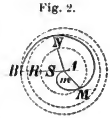
$$AS:AT:AV:\ldots = BD:BE:BF:\ldots$$

Andererseits sei A (Fig. 1b) zugleich Pol einer Spirale und Centrum eines Kreises; beide Kurven schneiden sich in B, und es sei BAQ, sowie AT senkrecht hiezu gezogen; diese Senkrechte treffe die Spirale in q. Alsdann besteht die — mutatis mutandis — analoge Proportion:

$$AQ:Aq = \text{Sect.}\,BPV:\text{Sect.}\,BPVT.$$

Noch charakteristischer tritt die Analogie in den beiden folgenden Sätzen Brendels[14]) hervor, für deren ersten auf Fig. 1a zu verweisen ist, während der andere durch Fig. 2 illustriert wird. Sie haben folgenden Wortlaut: „*Tangens Parabolae* AB *divisa sit in continue proportionales* AH, AJ, AK, AB. *Ducantur diametri* HM, JN, KO, BG: *erunt segmenta parabolica* AM, AMN, $AMNO$,

Fig. 2.



continue proportionalia"; „Si radius genitor spiralis divisus fuerit in continue proportionales AS, AR, AB, iisdemque radiis describantur circuli concentrici, secantes spiralem in M, N, B: Erunt segmenta spiralia AmMA, AmMNA, et spatium integrum AmMNBA, continue proportionalia." Ganz das Nämliche gilt nach Brendel[15]) für die gleichwinklige oder logarithmische Spirale. Auch zwischen dieser letzteren Kurve und der Parabel besteht insofern eine grosse Ähnlichkeit, als, wenn bei der letzteren die Ordinaten in stetiger Proportion fortschreiten, die Logarithmen dieser Ordinaten durch die Abscissen dargestellt werden. Noch ein zweites Mal kommt Brendel auf die vorwürfige Frage zurück, nämlich in einer kleinen Note *„De quadam Guidonis Grandi in Borellum animadversione."*[16]) In seinem berühmten Buche *„De motu animalium"* hatte Borelli einen allerdings unrichtigen Satz über Spiralen formuliert, Grandi hatte den Irrtum erkannt, und der deutsche Geometer verbreitet sich darüber seinerseits nochmals mit grosser Ausführlichkeit. Insbesondere handelt es sich wieder um die Gleichheit zwischen gewissen Bögen einer Spirale und einer Parabel.

Eine diese letztere Relation prinzipiell verallgemeinernde Untersuchung müsste heutzutage etwa Folgendes anstreben: Wie lassen sich alle möglichen Kurvengleichungen von der Beschaffenheit auffinden, dass die Rektifikation all' dieser Kurven auf ein und dasselbe Integral führt? In dieser Allgemeinheit lässt das Problem aus nahe liegenden Gründen keine Lösung zu. Wohl aber sind zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Standpunkten aus einzelne Unterfälle dieser umfassenden Aufgabe in befriedigender Weise in Angriff genommen worden. So gab bereits Nikolaus Fuss[17]) eine ganze Anzahl von Kurven an, deren Rektifikation durch das nämliche Integral bewerkstelligt werden kann, welches die gleichseitige Hyperbel rektifiziert und für den vorliegenden Zweck auf die Form

$$\int \frac{\sqrt{1+v^4}}{v^2}\,dv$$

gebracht wird.* Ganz neuerdings ist diesen Untersuchungen eine erhebliche Ausdehnung zu Teil geworden durch die Untersuchungen von Kiepert und Schwering. Jener studierte zuerst die Frage[19]), ob es Kurven gebe, deren Bogenlänge durch das elliptische Integral erster Gattung

---

* Auf den ersten Blick erscheint diese Umformung des unter anderer Form weit bekannteren Integrales nicht leicht durchführbar, und dieselbe würde auch

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = F(x, k)$$

dargestellt werden könne; eine solche Linie ist z. B. durch die Gleichung

$$4 \cos x = (e^c - e^{-c})(e^y - e^{-y})$$

gegeben, indem jetzt der obige Modul k durch die hyperbolische Sekante von c ersetzt werden muss. Schwering führte den von Kiepert angeregten Gedanken noch weiter aus[20]) und lehrte uns eine ganze Kurvenfamilie kennen, welche in die hier besprochene Kategorie gehört; vorausgesetzt, dass f und φ rationale Funktionen bedeuten, werden diese Kurven unter folgenden allgemeinen Gleichungsformen begriffen:

$$r^n \sin n v = f(r^2), \quad r^n \cos n v = \varphi(r^2).$$

r ist hier der Radiusvektor, v die Amplitude, n eine willkürliche ungerade Zahl. Vergl. Nachtrag II.

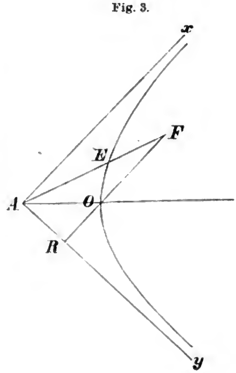
Ungleich einfacher ist natürlich die Aufgabe zu lösen, Kurven von der Beschaffenheit anzugeben, dass analoge Flächenstücke den nämlichen Inhalt besitzen. Sehr kompliziert gestaltet sich hinwiederum die Sache, sobald man diese Forderung mit der vorigen verbindet und verlangt, dass geschlossene Kurven nachgewiesen werden, welche sowohl an Umfang als auch an Flächeninhalt mit einander übereinstimmen. Der interessanteste Fall dieser Art, welchen die Litteratur bis jetzt anscheinend aufzuweisen hat, ist von Durège[21]) aufgedeckt worden.

---

mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein, wenn man rein analytisch zu Werke gehen und von der schönen geometrischen Versinnlichung absehen wollte, deren Spuren Felix Müller[18]) bei Mac Laurin angetroffen und weiter entwickelt hat. Sind Ax, Ay (Fig. 3) die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, O deren einer Scheitel, und wünscht man die Länge des Bogens OE zu kennen, so ziehe man OR senkrecht auf Ay und bezeichne den Schnittpunkt von RO mit dem verlängerten Fahrstrahl AE durch F. Für $AO = 1$, $RF = p' = v^2$, wo p und v als unabhängige Variable angesehen werden, erhält man, übereinstimmend mit Fuss,

$$\text{arc } OE = \tfrac{1}{2} \int_1^p \frac{\sqrt{1 + p^2}}{p \sqrt{p}}\, dp = \int_1^{v^2} \frac{\sqrt{1 + v^4}}{v^2}\, dv.$$

Fig. 3.



Derselbe beschäftigt sich dort mit gewissen Hypocykloiden, die sonach durch einen Punkt eines Kreises (vom Radius r) erzeugt werden, welcher selbst wieder auf einem anderen Kreise (vom Radius $R > r$) rollt, so zwar, dass die Berührung eine innere ist. Die allgemeine Gleichung dieser sternförmigen Kurven ist, wenn wir die obige Bezeichnungsweise beibehalten, durch

$$r = a \cos m v, \quad a = 2(R - r)$$

gegeben. Bestimmt man Inhalt und Umfang einer solchen Hypocykloide, so wird ersterer gleich

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^2 m v \, dv = \frac{a^2 \pi}{4m},$$

während letzterer durch

$$\frac{2a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1 - m^2) \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

bestimmt wird, so dass mithin Durège hierdurch eine der Kiepert-Schweringschen entsprechende Aufgabe gelöst hat, das elliptische Integral der ersten Gattung durch das elliptische Integral der zweiten Gattung ersetzend. Konstruiert man nun aber eine Ellipse aus den Halbaxen $\frac{a}{2m}$ und $\frac{a}{2}$, so ist deren Inhalt ebenfalls gleich $\frac{a^2 \pi}{4m}$, während der Umfang, unter ε die Exentricität verstanden, den Ausdruck

$$\frac{2a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

gleich ist. Da endlich die reciproke Excentricität

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{2m} : \sqrt{\frac{a^2}{4m^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2m} : \frac{a}{2m} \sqrt{1 - m^2} = 1 : \sqrt{1 - m^2}$$

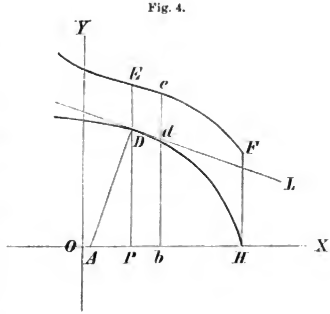
ist, so hat man bewiesen, dass Ellipse und Hypocykloide den nämlichen Inhalt und den nämlichen Umfang haben. Beide, sonst so verschiedene Kurven gehen in einander über für den Fall $m = 1$, denn alsdann wird die Ellipse zu einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a}{2}$, und ein Gleiches gilt von der cyklischen Kurve; die jetzt geltende Gleichung

$$r = a \cos v$$

spricht doch nur den planimetrischen Lehrsatz aus, dass der Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter ist.*

Während bislang die Übereinstimmung der beiden ins Auge gefassten Kurven eine direkte war, so dass dieselben bei sonstiger Verschiedenheit doch in der Bogenlänge oder im Inhalt oder endlich in beiden sich glichen, reicht eine andere, und zwar in gewissem Sinne die umgekehrte Fragestellung in eine noch frühere Zeit hinauf. Man kann nämlich auch versuchen, Kurven aufzufinden, welche in der Art sich entsprechen, dass der Flächeninhalt der einen zu der Bogenlänge der anderen in einem einfachen arithmetischen Verhältnis stehe. Der holländische Mathematiker van Heuraet hat die hiermit angedeutete Frage in einem kurzen, der berühmten „Geometria" von Cartesius einverleibten Schreiben sehr allgemein gelöst und durch seine Lösung die bereits von Hobbes (s. o.) erschütterte Meinung, dass krumme Linien nicht rektifikabel seien, endgiltig beseitigt. Montucla giebt[23]) die folgende Beschreibung von dem Wesen der Methode van Heuraets. Es sei YOX (Fig. 4) ein rechtwinkliges Koordinatensystem, HD eine darauf bezogene Kurve, welche von der Abscissenaxe im Punkt H geschnitten wird. PD sei eine beliebige Ordinate, und in D werde zur Kurve die Normale gezogen, welche OP in A

Fig. 4.



* Der alte eingewurzelte Irrtum, dass man aus der Länge der Begrenzung irgend eines Flächenstückes auf dessen Grösse schliessen könne, beherrschte, wie aus den eingehenden Nachweisungen von M. Cantor[22]) sich ergiebt, grosse Zeiträume. Das oben erörterte Beispiel thut recht schlagend dar, welch' grosse gestaltliche Verschiedenheiten selbst bei Figuren möglich sind, welche centrisch-regelmässig gebildet sind und gleichen Umfang wie auch gleichen Flächeninhalt besitzen. Mathematisch Gebildeten konnte dieses Verhältnis natürlich von vornherein nicht entgehen, allein es erschien um deswillen notwendig, den wahren Sachverhalt mit einigen Worten klarzulegen, weil die vergleichende Erdkunde seit Ritters Zeiten an der irrigen Auffassung festhält, durch blosse Kenntnis der Küstenlänge und des Flächeninhaltes isolierter Erdteile (Inseln) vermöge man zu Anhaltspunkten für die Feststellung des an sich vagen Begriffes der „Küstenentwickelung" zu gelangen.

schneidet. Unter m irgend eine willkürliche Strecke von konstanter Länge verstanden, bestimme man n aus der Proportion

$$PD:AD = m:n$$

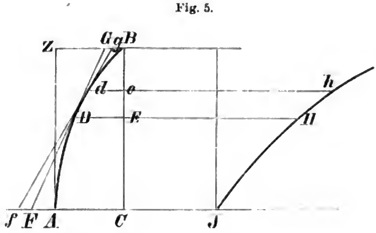
und trage von P aus auf PD eine Strecke PE gleich n ab. Denkt man sich diese Operation für einen jeden Punkt der zuerst gegebenen Kurve durchgeführt, so erfüllen alle die so erhaltenen Punkte E eine neue Kurve, deren Flächeninhalt gleich der Bogenlänge der ersteren, multipliziert mit m, sein wird. Entspricht z. B. in unserer Figur dem Punkt H der Punkt F, so wird das gemischtlinige Trapez $HDEF$ gleich m arc HD. Van Heuraet führte den Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung in der Weise, dass er ein Linienelement Dd der Tangente DL herausgriff und durch d die Gerade be parallel zu BE zog, um das Flächenelement $PEeb$ unmittelbar zu berechnen. Wir würden mit unseren Mitteln die Identität

$$m\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = m\int\frac{AD}{y}\,dx$$

am einfachsten dadurch feststellen, dass wir zur Rechten den bekannten Wert der Normalen AD als Funktion von y und x, resp. von deren Differentialquotienten einsetzten.

Es kommt bei diesem Verfahren ersichtlich besonders darauf an, dass die aus der vorgelegten abgeleitete zweite Kurve eine einfache Quadratur zulässt. Als eine solche Kurve stellt sich bekanntlich die gleichseitige Hyperbel dar; ging man vor ihr aus und legte den gekennzeichneten Weg in umgekehrter Ordnung zurück, so nahm man wahr, dass aus der Quadratur jenes Spezialfalles der Hyperbel mit Notwendigkeit die Rektifikation der Parabel sich ergebe. Guido Grandi hat seinem geometrischen Hauptwerke einen dieses Verhältnis klarlegenden Anhang beigegeben[24]), betitelt: „*De methodo, curvas innumeras, praesertim Parabolas, et Hyperbolas dimetiendi, et rectificandi*“; da seine Auffassung von jener van Heuraets einigermassen abweicht, so wird es sich empfehlen, einen Augenblick bei derselben zu verweilen (Fig. 5). „*Sit una curva quaevis ADB, rectis JCA et BZ ad basim*

Fig. 5.



CB perpendicularibus intercepta, et ex quibuslibet ejus D, d actis DEH, deh basi pariter normalibus, nec non tangentibus FDG, fdg inter extremas perpendiculares terminatis, ponatur ubilibet EH aequalis FG, eh aequalis fg, quousque per puncta H, h, sic determinata transeat curva JHh. Dico, spatium curva JHh, rectisque JC, EB, BZ comprehensum aequari rectangulo ex eadem CB in correspondentem arcum AB." Hiervon wird dann[25]) in sehr ausgedehntem Masse Anwendung gemacht auf die Vergleichung von Parabel und Hyperbel. Bezeichnet man, der Verifizierung halber, den Winkel CFG mit φ, so ist

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{dy}{dx},\quad \sin\varphi=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

und $FG=EH$ wird sonach durch den Ausdruck

$$\frac{BC\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{dy}$$

gegeben sein. Der Flächeninhalt der Kurve JH, die üblichen Grenzen vorausgesetzt, ist gleich

$$\int EH.dy=BC\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

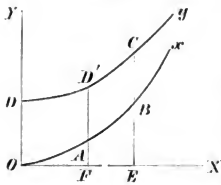
und damit ist die von Grandi dem van Heuraetschen Lehrsatz erteilte Fassung erhärtet.

Man sieht, dass diese Betrachtungen über Kurven-Analogie schon an der Grenze jenes Gebietes stehen, auf welches wir unsere eigenen Nachsuchungen einschränken zu wollen erklärt haben. Wird doch hier bereits darauf hingearbeitet, nach bestimmten und scharf umgrenzten Prinzipien aus einer gegebenen Kurvengattung andere Gattungen heraus zu entwickeln: das weite Feld der Kurven-Transformation ist damit betreten. Jedenfalls verdiente dieser eigenartige Ideenkreis an diesem Orte eine bevorzugte Stelle, und auch sonst wäre er würdig, eingehenderer Berücksichtigung teilhaftig zu werden, wie es denn mit Dank anzuerkennen ist, dass wenigstens einer der hervorragenden neueren Geometer dieses Verfahren wieder zur Ehre zu bringen versucht hat, nämlich Sturm.[26])

Die durch van Heuraet ans Licht gezogene interessante Beziehung zwischen den beiden ins Unendliche verlaufenden Kegelschnitten bot der Betriebsamkeit der nächsten mathematischen Generation reichen

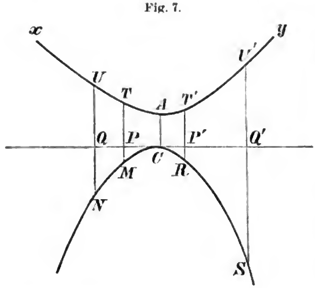
Stoff dar. Konnten auch keine Entdeckungen von grundlegender Bedeutung mehr auf diesem Gebiete gemacht werden, so lag doch die Veranlassung vor, für jene Relation die eleganteste und bequemste Form zu finden und dieselbe, nach Art der Zeit, für eine Menge verschiedenartiger Einzelaufgaben zu verwerten. In diesem Sinne sind vornämlich Johann Bernoulli und sein Schüler L'Hôpital thätig gewesen.

Fig. 6.



Der Erstere stellte den folgenden, für die Anwendung sehr bequemen Satz auf:[27]) Sind auf ein und dasselbe Koordinatensystem YOX (Fig. 6) eine Parabel Ox und eine gleichseitige Hyperbel Dy so bezogen, dass ihre Scheitel O und D auf der Ordinatenaxe liegen und dass zugleich diese letztere beide Kurven halbiert, so hat ein von zwei beliebigen Hyperbel-Ordinaten eingeschlossenes gemischtliniges Trapez $CD'FE$ die Eigenschaft, einem Rechtecke gleich zu sein, dessen eine Seite die reelle Halbaxe OD, dessen andere Seite der in eine Gerade verwandelte parabolische Bogen AB ist, welcher in das Innere jenes Trapezes hineinfällt. Dieses Lehrsatzes, oder doch wenigstens einer unwesentlichen Abänderung desselben bediente sich L'Hôpital bei Lösung der von ihm zuerst gestellten Aufgabe (Fig. 7): „*Une parabole NCS étant donné avec un de ses arcs MN; trouver un autre arc RS qui soit à l'arc MN, en raison donnée de nombre en nombre*".[28]) L'Hôpital verzeichnet nicht den von Bernoulli gewählten, sondern den gegenüberliegenden Hyperbelzweig xAy, unter CA die halbe grosse Axe verstanden, zieht sodann durch M und N Parallele zur grossen Axe, welche die Scheiteltangente der Parabel in P und Q, die Hyperbel in T und U schneiden, und erhält so nach Bernoulli

Fig. 7.



$$\text{Trapez } PQUT = CA\,.\,\text{arc par. } MN.$$

Hierauf konstruiert er ein Trapez $P'Q'U'T'$ von der Beschaffenheit, dass, unter m und n irgendwelche ganze Zahlen verstanden,

$$\text{Trapez } PQUT : \text{Trapez } P'Q'U'T' = m : n$$

wird und verlängert schliesslich die Ordinaten $T'P'$ und $U'Q'$, bis sie die Parabel resp. in R und S schneiden. Da nunmehr auch die Identität

$$\text{Trapez } P'Q'U'T' = CA \,.\, \text{arc par.}\, RS$$

stattfindet, so besteht auch, worauf L'Hôpital eben abzielt, die durch die Proportion

$$\text{arc par.}\, MN : \text{arc par.}\, RS = m : n$$

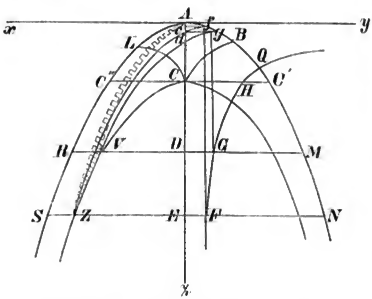
charakterisierte Beziehung zwischen den beiden Parabelbögen.

Hier wäre, wenn wir uns die Berücksichtigung aller in dies Gebiet einschlagenden Untersuchungen zur Pflicht gemacht hätten, Veranlassung gegeben, auf Jacob Bernoullis „parabolische Spirale" näher einzugehen. Dieselbe wurde recht eigentlich als Musterbeispiel für eine Gattung von Kurven erdacht, bei denen sich die beliebig herausgegriffenen Bögen vergleichen und in messende Beziehung setzen lassen, ohne dass es erforderlich wäre, elliptische und hyperbolische Bögen als Zwischenmittel der Vergleichung zu wählen. Da jedoch diese Untersuchungsreihe, in welcher auch der Keim der berühmten Lehrsätze von Fagnano und Euler über das Additionstheorem der elliptischen Integrale gesucht werden kann, in dem grossen Werke von Enneper[29]) eine mustergiltige Schilderung erfahren hat, so begnügen wir uns, auf diese letztere aufmerksam zu machen. Wie der Verfasser aus dem kürzlich publizierten Katalog der von M. Chasles nachgelassenen Bibliothek ersieht, hat auch James Booth die parabolische Spirale in einer besonderen Abhandlung näher untersucht.

Wir gelangen nun zu einer selbständigen und vielfach interessanten Theorie, welche mit der soeben erörterten Analogie zwischen Hyperbel und Parabel in allernächstem Kontakt steht. Jedes Flächenstück, unter dessen Begrenzungslinien irgend ein Bogen einer als gleichseitig vorausgesetzten Hyperbel vorkommt, ist bekanntlich eine logarithmische Funktion der anderen Bestimmungsstücke, und ein Gleiches gilt demgemäss auch für einen jeden Bogen der apollonischen Parabel. Dass die sogenannten natürlichen Logarithmen graphisch durch hyperbolische Flächenräume dargestellt werden können, wusste man seit Mercator oder eigentlich schon seit Gregor von St. Vincent; es musste nun sehr nahe liegen, die hyperbolischen Flächen durch parabolische Längen zu ersetzen, und damit war man zu den parabolischen Logarithmen gelangt. Der uns bereits bekannte Brendel war der Erste, welcher den im Vorstehenden skizzierten Gedanken praktisch zu verwirklichen sich bemühte und in zwei Universitätsprogrammen die neue Lehre systematisch darstellte; es sind dies der Commentariolus I und der Commentariolus II *„de logarithmis para-*

bolicis“.[30]) Der bereits in der Abhandlung über die Analogie von Parabel und Spirale hervortretende Umstand, dass Brendel seine eigenen Darstellungen stets auf das engste an die Behandlungsweise seines Vorbildes anzuknüpfen suchte*, hat nun freilich zur Folge gehabt, dass erstens die Darstellung eine sehr schwerfällige und unklare wurde, und dass zweitens Irrtümer mit unterliefen, welche den angestrebten Zweck der Arbeit nicht erreichen liessen. Die höchst originelle kinematische Exhaustionsmethode Gregors zu handhaben, war eben nicht jedermanns Sache. Dass Brendel zu seinem Vorhaben teilweise auch durch eine verwandten Gegenständen zugewandte Abhandlung von Knutzen** bewogen ward, glauben wir aus dem Umstande schliessen zu sollen, dass in jener ein gewisser Kunstausdruck vorkommt, der anscheinend von Knutzen aufgebracht und von Brendel angenommen ward, in anderen litterarischen Produkten jenes Zeitraumes uns dagegen nicht begegnet ist.

Fig. 8.



Es ist dies der Begriff „asymptotischer“ Parabeln, von welchen im ersten der beiden genannten Programme ausschliesslich die Rede ist. In Fig. 8 sind zwei solche asymptotische Kurven gezeichnet, welche ihre Scheitel resp. in A und C haben. Die Axenrichtung ist für beide Parabeln die gleiche, ebenso der Parameter, so dass

* Selbst bei physiologischen Untersuchungen, z. B. in den Aufsätzen „*Programma Globulorum sanguinis Leeuwenhoekianorum rationes sextuplas expendens*“ und „*De pulsu febrili*“[31]) werden Sätze aus Gregors „*Quadratura circuli etc.*“ von Brendel zu Grunde gelegt, die sich zunächst allerdings auf die Koordinatendarstellung der Pulsfrequenz u. dergl. beziehen.

** Knutzen, der Lehrer Kants, über dessen Leistungen auf dem Gebiete der Astronomie, Physik und Mathematik man die sorgfältige Biographie von Erdmann[32]) vergleichen möge, untersuchte[33]) die von ihm als „*parabolae parametrales*“ bezeichneten und in der Gleichung

$$a^m x^n = y^{m+n}$$

begriffenen algebraischen Kurven, welche man jetzt als Parabeln höherer Ordnung zu bezeichnen pflegt. Indem er die gestaltlichen Verhältnisse dieser Linien mit jenen der apollonischen Parabel verglich, gelangte er eben zu dem oben erwähnten Begriffe asymptotischer Parabeln.

also, wenn wir etwa die Scheiteltangente xy der ersten zur Ordinatenaxe, die gemeinsame Axe zur Abscissenaxe eines rechtwinkligen Systemes nehmen, die beiden Kurven resp. durch eine der beiden folgenden Gleichungen ($AC = b$ gesetzt) ausgedrückt sein würden:

$$\eta^2 = 4p\xi,$$
$$\eta^2 = 4p(\xi - b).$$

Brendel wählt nun auf der Axe willkürlich die Punkte c, d, errichtet in denselben Senkrechte bis zum Durchschnitt mit der Parabel in f, g und konstruiert alsdann Parabeln, welche zu den früheren ähnlich liegen und auch den gleichen Parameter haben, während ihre Scheitelpunkte die soeben erhaltenen Durchschnittspunkte f, g sind. Diese neuen Parabeln schneiden die Parabel des Scheitels C in Z und V; zieht man durch f und g Parallele zur Parabelaxe, durch Z und V dagegen Parallele zur Scheiteltangente xy, so durchschneiden sich diese Parallellinien bezüglich in F und G. Der geometrische Ort dieser Schnittpunkte ist nach Brendel[34]) eine gleichseitige Hyperbel, welche die Geraden AC und xy zu Asymptoten hat. Von dieser Hyperbel und von ihrem Verhalten zu den beiden Parabeln wird nunmehr von Brendel Verschiedentliches ausgesagt, was an sich nicht ohne Interesse ist, an diesem Orte jedoch nicht Gegenstand eingehender Berichterstattung zu sein braucht.

Nunmehr aber schleicht sich in Brendels Untersuchung, sowie er sich beim Beginne des zweiten Programmes zu den parabolischen Logarithmen selbst wendet, ein sonderbarer und für die folgenden Teile verhängnisvoller Fehler ein, der ihm zweifellos nicht begegnet wäre, wenn er seine Sätze auch analytisch geprüft und sich nicht ausschliesslich auf sein rein geometrisches Verfahren verlassen hätte. Die erste Proposition im zweiten Abschnitte hat nämlich den folgenden Wortlaut[35]): „*Si abscissae parabolae inde a vertice, capiantur in serie geometrica: arcus respondentes itidem in serie geometrica erunt.*" Dass dies nicht richtig sein kann, folgt für uns sofort aus dem bekannten Ausdrucke für den parabolischen Scheitelbogen

$$s = p\left[\log\left(\sqrt{\frac{\xi}{p}+1}+\sqrt{\frac{\xi}{p}}\right)+\frac{1}{p}\sqrt{\xi(\xi+p)}\right].$$

Allerdings wird die Behauptung auch durch einen Beweis zu stützen versucht, allein bei diesem wird die noch sonderbarere Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass die Evolute einer Parabel eine zu derselben asymptotisch liegende Parabel sei. Bei rechnerischer Nachuntersuchung hätte sich natürlich herausstellen müssen, dass der geometrische Ort für die Krümmungsmittelpunkte einer Parabel nicht wieder ein Kegelschnitt, sondern eine Kurve dritter Ordnung ist, welcher die Gleichung

$$\eta^2 = \frac{4}{27p}(\xi - 2p)^3$$

zukommt.*[36]

Gestützt auf seine unrichtige Prämisse, zieht nun **Brendel** eine Reihe von richtigen Schlüssen, deren Ergebnis sonach freilich auch nicht anders als falsch ausfallen kann. Unter der Annahme, dass Ac und Ad (Fig. 8) zwei aufeinanderfolgende Glieder in der Reihe der nach geometrischer Progression fortschreitenden Abscissen sind, ohne Rücksicht auf deren Platz in der Reihe, bestimmt er den Flächeninhalt des krummlinigen Viereckes $fgVZ$ und findet, dass derselbe ein konstanter sei. Sodann verbindet er resp. V und Z mit A durch je eine Parabel, welche xy zur Scheiteltangente, AC zur Axe hat (in der Figur ist das durch diese Parabeln gebildete Dreieck schraffiert dargestellt) und beweist die Gleichheit

krumml. Dreieck AVZ = krumml. Viereck $fgVZ$.

Damit ist denn die nach **Brendels** Meinung bestehende Analogie zwischen dem bekannten asymptotischen Raume der gleichseitigen Hyperbel und dem hier definierten asymptotischen Raume der Parabel hergestellt; unter letzterem wird im allgemeinen die ins Unendliche sich erstreckende ringförmige Fläche zwischen den beiden asymptotischen Kurven verstanden. Man weiss, dass, wenn von zwei Punkten einer gleichseitigen Hyperbel Senkrechte auf eine Asymptote gefällt und sodann beide Punkte mit dem Centrum der Kurve verbunden werden, das zuerst entstandene gemischtlinige Trapez dem nachher gezeichneten gemischtlinigen Dreieck gleich ist; ebenso ist bekannt, dass diese Figuren einen konstanten Flächeninhalt besitzen, wenn die auf der Asymptote genommenen Abscissen in einer geometrischen Reihe fortschreiten. Diese Beziehungen suchte nun sämtlich **Brendel** von der Hyperbel auf die Parabel zu übertragen, und man muss zugestehen, dass ihm dies aufs trefflichste gelungen wäre, wenn die oben angeführten Lehrsätze richtig wären. Dies ist nicht der Fall, allein trotzdem darf der Versuch, eine vollständige Analogie zwischen den asymptotischen Räumen von Hyperbel und Doppel-Parabel her-

* Jene Kurve, welche die von unserer Vorlage der Parabel fälschlich zugeschriebene Eigenschaft thatsächlich besitzt, ist ebenfalls bereits Gegenstand der Untersuchung gewesen.[37] Dieselbe ist, wie sich voraussehen lässt, transcendent und erfordert zum wirksamen Studium ihrer Eigenschaften die Hyperbelfunktionen.[38]

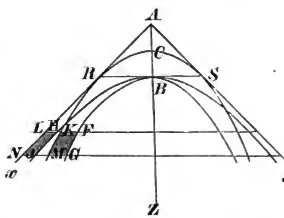
zustellen, als eine beachtenswerte Spezialität jenes Untersuchungsgebietes herausgehoben werden, mit welchem es dieses einleitende Kapitel zu thun hat. Wird jene Parabel der ganzen Schar konstruiert, welche durch C hindurchgeht, und zugleich eine zweite, zu ihr symmetrisch gelegene, auf der anderen Seite, so entsteht ein „parabolisches Parallelogramm" $ABCL$, welches für das von Brendel ausgedachte Logarithmensystem charakteristisch ist. Im Schlusssatze wird nämlich ausgesprochen*[40]): *„His tandem elucescit, parabolas asymptotos ectypum esse posse pleni absolutique systematis logarithmici, spatiaque asymptotica, arcuum parabolicorum exhibere logarithmos. Modulus systematis erit parallelogrammum parabolicum $ABCL$, in usum logarithmorum tum naturalium, tum artificialium."* Je nachdem man also die Scheiteldistanz der beiden Parabeln wählte, könnte man auch ein jedes beliebige logarithmische System graphisch zum Ausdruck bringen.**

Neben dieser Methode, welche sich auf asymptotische Parabeln und die zu diesen gehörige *„hyperbola moderatrix"* gründet, gab Brendel noch eine zweite zur Bestimmung parabolischer Logarithmen an. Er bestimmte zunächst die Länge $CC' = CC''$ (Fig. 8) jener Senkrechten, welche in C auf der Axe bis zur Parabel hin errichtet werden kann; es ist $CC' = CC'' = 2\sqrt{pd}$. Nunmehr dachte er sich in C' und C'' je eine Berührende an die äussere Parabel gezogen; sollen diese beiden Berührenden einen rechten Winkel mit einander einschliessen, so muss

$$2d = 2\sqrt{pd}, \quad d^2 = pd, \quad d = p$$

sein. Diesen Unterfall sehen wir dargestellt in Fig. 9, deren Buchstaben möglichst denen des Originals konform gewählt wurden.

Fig. 9.



* Auf dieses Theorem Brendels ist vom Verfasser bereits früher hingewiesen worden[39]), indess war damals noch nicht eruiert, was durch die Schilderung der letzten Seiten wohl ausser Zweifel gesetzt ist, dass nämlich jener Satz ein unhaltbarer ist. Im Übrigen giebt die a. a. O. gegebene Darstellung ein gedrängtes aber treues Bild vom Inhalte der Brendelschen Theorien.

** Von den zahlreichen Einzelsätzen, die zur Vorbereitung dienen, sei nur einer erwähnt. Zieht man senkrecht zur Axe durch V und Z die Sehnen RM und SN der äusseren Parabel, welche die Axe selbst in D und E treffen, so gilt[41]) die Proportion

$$AD : AE = \overline{SZ}^2 : \overline{RV}^2.$$

Durch dieselbe ist auch ausgesprochen, dass beide Parabeln in der That erst in der Unendlichkeit zusammentreffen.

A ist der Schnittpunkt zweier rechtwinkligen Geraden Ax, Ay, C und B sind die Scheitel zweier asymptotischen Parabeln, und zwar ist $AC = CB$. In diesem Falle berühren Ax und Ay die äussere Parabel in zwei Punkten R und S so, dass die Verbindungslinie RS zugleich Scheiteltangente der inneren Parabel wird. Jetzt endlich wird eine gleichseitige Hyperbel xBy gezogen, welche Ax und Ay zu Asymptoten, den Punkt B dagegen zum Scheitel, eine Strecke $= 2p$ zur halben Axe hat.[42]) Damit ist also die Aufgabe gelöst, welche von Brendel (a. a. O.) mit den Worten formuliert wird: „*Transformandae tandem sunt parabolae asymptoti in hyperbolam intra asymptotos.*" Ist bis hierher alles klar und in Ordnung, so scheint, soweit man bei der Kürze und Dunkelheit der folgenden Darlegung schliessen kann, jetzt abermals ein Irrtum mit untergelaufen zu sein. Es werden zu RS zwei willkürliche Parallelsehnen (Fig. 9) gezogen, welche Asymptote, Hyperbel, äussere und innere Parabel resp. in den vier Punkten L, H, K, F und N, J, M, G schneiden, und dann fährt Brendel fort[43]): „*Posterioris hujus areae asymptoticae $HLNJ$, aequales sunt areis parabolicis $FKMG$.... Rationes igitur in asymptotis hyperbolae proportionales erunt arcubus parabolicis, qui areis illis respondent: adeoque reduci ad logarithmos hyperbolicos, tandemque ad Briggianos parabolici possunt.*" Auch hier trifft die, freilich auch beweislos gelassene Voraussetzung nicht zu, dass die Trapeze $FKMG$ und $HLNJ$ den gleichen Flächeninhalt besitzen. Ersteres kann dargestellt werden als Summe resp. Differenz gewöhnlicher parabolischer Segmente, wie sie bereits von Archimedes quadriert wurden, und ist deshalb unter allen Umständen eine algebraische Funktion, wogegen bei der Berechnung von $HLNJ$ ebenso notwendig Logarithmen auftreten müssen. Es ist mithin auch dieser Versuch als gescheitert zu betrachten, und obwohl demgemäss auf den deutschen Mathematiker das Verdienst zurückzuleiten ist, die Frage nach der Existenz und dem Wesen parabolischer Logarithmen angeregt und die Möglichkeit solcher sehr wahrscheinlich gemacht zu haben, so waren dieselben doch noch weit davon entfernt, als feste mathematische Begriffe gelten zu können.

Vollständiges Bürgerrecht erlangten die parabolischen Logarithmen erst durch einen hervorragenden englischen Forscher der Neuzeit, James Booth, der von seinem deutschen Vorläufer freilich nichts gewusst zu haben scheint, dessen eigene bedeutende Arbeiten jedoch ebenfalls nur sehr wenig bekannt geworden zu sein scheinen, so dass grössere Verbreitung und auch Vervollständigung derselben, wie sie die vorliegende Schrift anstrebt, dringend zu wünschen ist. Es ist nicht ohne Interesse, den Weg geschichtlich zu verfolgen, auf welchem Booth zur selbständigen Konception des Begriffes parabolischer Logarithmensysteme gelangt ist, um so mehr, da Betrachtungen über Kurven-Analogie den eigentlichen Anstoss für ihn gegeben haben. Er stellte sich nämlich die Aufgabe, diejenigen Kurven doppelter Krümmung aufzufinden, welche in allen ihren Eigenschaften als die räumlichen Analoga der ebenen Kegelschnitte angesehen werden könnten. Nachdem er zuerst in den Durchdringungskurven eines Kegels zweiter Ordnung mit einer koncentrischen Kugelfläche das Gewünschte gefunden zu haben glaubte, störte ihn die Thatsache, dass gerade die charakteristischen gestaltlichen Merkmale von Ellipse, Parabel und Hyperbel auf der Sphäre verloren gehen; er forschte also weiter und fand sich endlich betreffs der Ellipse befriedigt durch die Schnittlinie eines elliptischen Cylinders mit einem die nämliche Axe besitzenden Rotationsparaboloid. Diese Erzeugungsweise dehnte er sodann auch auf die Hyperbel aus: „*If a right cylinder*“, sagt er,[44]) „*standing on a plane hyperbola as a base, be substituted for the elliptic cylinder, the curve of intersection may be named the logarithmic hyperbola. It will have four infinite branches, whose asymptots will be the infinite arcs of two egal plane parabolas. These curve, and not the spherical ellipse, is the true analogue of the common hyperbola.*“

In einer zweiten, äusserst umfangreichen Monographie[45]) sucht nun Booth mit Glück den Nachweis zu führen, dass seine neuen Raumkurven, welche er „*hyperconic sections*“ nennt, sich vorzüglich eignen zur geometrischen Darstellung der elliptischen Integrale, ja dass überhaupt sämtliche Gattungen der elliptischen Integrale — noch dazu bei ganz willkürlicher Grösse des Parameters resp. Moduls — durch die Durchdringungskurven zweier Quadriflächen zu repräsentieren sind. In der genannten Abhandlung finden sich nun aber auch die Keime vor zu jenen Untersuchungen, mit welchen wir weiterhin uns eingehend zu beschäftigen haben werden. Die ersten Anklänge an die wirklichen parabolischen Logarithmen erkennen wir da, wo Booth[46]) aus dem Brennpunkt einer gewöhnlichen sphärischen Parabel auf einen berührenden Hauptkreis eine Senkrechte fällt und das zwischen dem Fusspunkt des Lothes und dem Berührungspunkt enthaltene Stück der sphärischen Geraden berechnet. Er bedarf dabei der wichtigen Substitution $\sin\varphi = i \operatorname{tang}\psi$ und gelangt endlich zu einer fundamentalen Relation, welche durch die Identität

$$\int \frac{dv}{\cos v} = \int \frac{dv'}{\cos v'} + \int \frac{d\tau}{\cos\tau}$$

ausgesprochen ist.[47]) Auf diese begründet er sodann jene originelle symbolische Geometrie auf der Parabel, welche genau zu schildern und zugleich auf ihren wahren Charakter zu prüfen dem vierten und fünften Kapitel vorbehalten bleiben soll.

Ehe wir jedoch hierzu übergehen, wird es angezeigt sein, uns mit einem für diese Theorie geradezu unentbehrlichen Instrument der analytischen Forschung vertraut zu machen. Die Lehre von den Hyperbelfunktionen, welche sich dem Principe nach freilich mit der Theorie der cyklischen Funktionen complexen Arguments deckt, ist leider noch viel zu wenig eingebürgert, als dass wir nicht eine kurze Zusammenstellung der für uns wichtigsten Sätze geben sollten. Wir dürfen dies auch um so eher, als die im nächsten Kapitel vorgetragene kurze Theorie in Form und Anlage von den sonst üblichen Methoden der Behandlung durchaus abweicht.

---

1) Ideler, Über eine griechische Inschrift mathematischen Inhaltes, Monatl. Korresp. z. Beförd. d. Erd- und Himmelskunde, 23. Band, S. 257 flgg.

2) Buzengeiger, Anmerkung zu der griechischen Inschrift, ibid. 24. Band, S. 172 flgg.

3) Zanotti, Sur les figures et les solides circonscrits au cercle et à la sphère, Histoire de l'Acad. Royale de Sc., Année 1748, S. 613 flgg.

4) Kästner, Geometrische Abhandlungen, 2. Samml., Göttingen 1791, S. 90 flgg.

5) P. Gregorii a Sto Vincentio opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, decem libris comprehensum, Antverpiae 1647.

6) Kästner, Geschichte der Mathematik, 3. Band, Göttingen 1799, S. 231.

7) Chasles, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Rücksicht auf die neueren Methoden, deutsch von Sohncke, Halle 1839, S. 89.

8) Huygens et Roberval; documents nouveaux par C. Henry, Paris 1879, S. 39.

9) Oeuvres de Blaise Pascal, ed. Lahure, Tome II., Paris 1858, S. 622 flgg.

10) Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch, 1. Band, Leipzig 1862, S. 1116.

11) Oeuvres de Pascal, S. 635.

12) Brendel, Opusculorum mathematici et medici argumenti pars I, Gottingae 1769, S. 1 flgg.

13) Rondet, Preface à la Suite de l'Analise des infiniment Petits, par M. Stone, à Paris 1739, S. 45.

14) Brendel, S. 21.

15) Ibid. S. 22.

16) Ibid. S. 23 flgg.

17) N. Fuss, De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet, Acta Acad. Imp. Petrop., tom XIV, S. 513.

18) F. Müller, Studien über Mac Laurins geometrische Darstellung elliptischer Integrale, Berlin 1875, S. 15.

19) Kiepert, Über Kurven, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Gattung ist, Sitzungsber. d. naturforsch. Gesellsch. z. Freiburg i. B. Jahrg. 1876, S. 1 flgg.

20) Schwering, Über eine Art Kurven, deren Bogen durch ein elliptisches oder hyperelliptisches Integral erster Gattung ausgedrückt wird, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 25. Jahrg. S. 234 flgg.

21) Durège, Über eine besondere Art cyklischer Kurven, ibid. 9. Jahrg. S. 209.

22) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1880, S. 146 flgg.

23) Montucla, Histoire des Mathématiques, tome II., à Paris 1758, S. 137.

24) G. Grandi, Quadratura circuli et hyperbolae, per infinitas hyperbolas, et parabolas quadrabiles geometrice exhibita, Pisis 1710, S. 77 flgg.

25) Ibid. S. 81.

26) Sturm, Cours d'analyse de l'école polytechnique, ed. Prouhet, tome I., Paris 1863, S. 197.

27) Joh. Bernoulli, Opera omnia, ed. Cramer, Genevae 1744, S. 242.

28) L'Hospital, Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les Problèmes tant déterminez, qu'indéterminez, à Paris 1707, S. 382

29) Enneper, Elliptische Funktionen; Theorie und Geschichte. Halle 1876, S. 472 flgg.

30) Brendel, S. 32 flgg. u. 39 flgg. — Ibid. S. 107 flgg.

31) Ibid. S. 136 flgg. u. 144 flgg.

32) Erdmann, Martin Knutzen und seine Zeit. Ein Beitrag zur Geschichte der Wolfischen Schule und insbesondere zur Entwickelungsgeschichte Kants, Leipzig 1876, S. 52 flgg.

33) Knutzen, Theoremata nova de parabolis infinitis eadem parametro et circa eundem axim descriptis, Acta Erudit. Lips. 1737, S. 461 flgg.

34) Brendel, S. 33.

35) Ibid. S. 39.

36) Hoüel, Cours de calcul infinitésimal, tome II., Paris 1879, S. 53.

37) Fischer, Über verschiedene Arten, die Logarithmen geometrisch darzustellen, Abhandl. d. k. Akad. zu Berlin, Math.-phys. Klasse, 1804—11, S. 1 flgg.

38) Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, Halle 1881, S. 240.

39) Ibid. S. 200 flgg.

40) Brendel, S. 43.

41) Ibid. S. 36.

42) Ibid. S. 38.

43) Ibid. S. 44.

44) Booth, The Theory of Elliptic Integrals and the Properties of Surfaces of the Second Ordre, applied to the investigation of the motion of a body round a fixed point, London 1851, S. 159.

45) Id., Researches on the Geometrical Properties of Elliptic Integrals, Philosoph. Transact. of the Royal Society of London, 1852, S. 311 flgg.

46) Ibid. S. 329.

47) Ibid. S. 368.

Zweites Kapitel.

Die Hyperbelfunktionen und ihre Verwendung zur Parameter-Darstellung von Kurven.

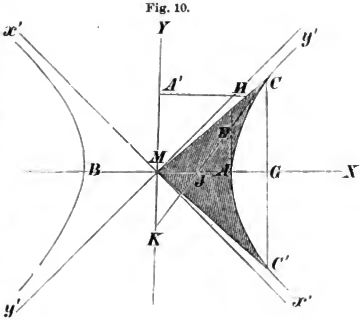
Dieses Kapitel ist wesentlich als eine Einschaltung anzusehen, dazu bestimmt, die Kenntnis eines analytischen Hilfsmittels zu vermitteln, welches im Folgenden sich als unentbehrlich herausstellen wird. Eine eingehende Theorie der unter dem Namen „Hyperbelfunktionen“ selbständig behandelten goniometrischen Funktionen von imaginärem Argumente soll allerdings hier nicht vorgetragen werden, und zwar schon aus dem Grunde nicht, weil betreffs einer solchen auf eine unlängst erschienene ausführliche Arbeit des Verfassers verwiesen werden kann.[1]) Gleichwohl müssen wir auch an dieser Stelle dem Gegenstande näher treten, wenn die nachfolgenden Kapitel ein einheitliches Gepräge erhalten sollen. Denn wenn gegenüber den Hyperbelfunktionen als solchen geltend gemacht werden sollte, man bedürfe solcher neuer Algorithmen nicht, vermöge vielmehr mittelst Kombination von Exponentialfunktionen die gleichen Zwecke zu erreichen, so ist dem zu erwidern, dass bis zu einer gewissen Grenze hin dieser Ersatz allerdings möglich ist, wenn auch auf Kosten der Übersichtlichkeit und Symmetrie der Formeln.* Von dem Augenblicke an jedoch, wo für die Untersuchung eine Verbindung jener Grössen erforderlich wird, welche wir sehr bald als gemeinsamen und transscendenten Winkel kennen lernen werden, von diesem Augenblicke an ist die Gleichberechtigung der Kreisfunktionen mit den Hyperbel-

---

* Eine Ausführung dieses Gedankens ist in des Verfassers Schrift[2]) enthalten. Den dort mitgeteilten Litteraturnachweisen wäre noch hinzuzufügen eine Abhandlung von Wallace[3]), in welcher besonders schlagend die Thatsache hervortritt, dass tüchtige Mathematiker lange mit den Hyperbelfunktionen operieren konnten, ohne deren eigentliche Natur zu erkennen Ja, früher ging der nämliche Wallace selbst schon so weit, den Satz auszusprechen[4]): „*then, in imitation of the notation commonly used in the arithmetic of sines, which we have followed in the former part of this paper, whe shall consider the coordinates as functions of the hyperbolic sector.*“ Wallace führt sogar die selbständige Bezeichnung (Fig 10) $CG =$ ord Sekt. und $MG = ab$ Sekt. ein, nützt dieselbe jedoch lediglich für die Theorie der Hyperbel selbst aus, ohne der koordinierten cyklischen Funktionen zu gedenken.

funktionen eine unabweisbare Notwendigkeit geworden. Das Untersuchungsgebiet dieser Monographie ist nun recht eigentlich ein solches, wie wir es soeben gekennzeichnet haben. Wir werden aus diesem Grunde zunächst die Definition der Hyperbelfunktionen selbst geben, sodann die wichtigsten Grundeigenschaften derselben herleiten und endlich jene Sätze aufstellen, welche die hyperbolischen Linien des gemeinsamen Winkels mit den cyklischen Linien des transscendenten Winkels in die engste verwandtschaftliche Beziehung setzen. Es soll dabei eine neue Methode zur Anwendung gelangen, welche von den in der obgenannten Schrift zu findenden Verfahrungsweisen[5]) durchaus verschieden ist und den Vorteil hat, die sechs Haupttheoreme als einfache Ausflüsse einer elementaren analytisch-geometrischen Relation hervortreten zu lassen.*

Fig. 10.



Eine gleichseitige Hyperbel $x'y'$ (Fig. 10) von der Halbaxe 1 hat, bezogen auf ein Koordinatensystem XMY, dessen Hauptrichtungen auf die Axen der Kurve fallen, die Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1;$$

die Asymptoten $x'M$ und $y'M$ stehen auf einander senkrecht. Verbindet man einen beliebigen Kurvenpunkt C mit M, so entsteht ein hyperbolischer Sektor AMC, dessen Flächeninhalt, wenn $MG = x$ und $CG = y$ die Koordinaten von C sind, durch

$$\tfrac{1}{2} u = \tfrac{1}{2} \log (x + y)$$

gegeben ist. Diese Grösse u ist es nun, welche künftig für uns massgebend wird; ihren Zahlenwert, d. h. also $\log (x + y)$, betrachten wir als eine unabhängige Variable. Verlängern wir CG bis zum nochmaligen Durchschnitt mit der Kurve, und ziehen MC', so ist der Sektor $CMC'AC = u$, und man erkennt, dass diese Grösse, wenn der Punkt C alle zwischen dem Scheitel A und der Unendlichkeit gelegenen Punkte des einen hyperbolischen Halbastes Ay' durchwandert,

* Die Idee zur Verwendung eines Satzes über die Gleichheit zweier hyperbolischer Flächenräume zum vorliegenden Zwecke dankt der Verfasser einer Mitteilung von Herrn Prof. Doetsch in Nürnberg.

alle zwischen 0 und ∞ vorhandenen reellen Werte annimmt. Jede vom Punkt C ausgehende, resp. von seiner Lage nach bestimmten Gesetzen abhängige begrenzte Strecke wird sich nun als Funktion der Veränderlichen u auffassen resp. darstellen lassen. Unter dieser Vielzahl von Strecken greifen wir sechs bestimmte heraus, welche ihrer geometrischen Bestimmung nach vollkommen den sechs trigonometrischen Linien des Kreises analog sind, und wählen zu ihrer Bezeichnung gothische Buchstaben. Die in A an die Hyperbel gelegte Scheiteltangente schneidet den Fahrstrahl MC in E; eine durch den Punkt A' ($MA' = MA = MB = 1$) zur Abscissenaxe parallel gezogene Gerade schneidet den Fahrstrahl MC in H. Endlich wird in C eine Berührende an die Hyperbel gelegt, welche die X-Axe in J, die Y-Axe, d. h. selbstverständlich deren negative Richtung, in K schneidet. Alsdann setzen wir:

$$\begin{aligned} CG &= \mathfrak{sin}\, u, & A'H &= \mathfrak{cotang}\, u, \\ MG &= \mathfrak{cos}\, u, & MJ &= \mathfrak{sec}\, u, \\ AE &= \mathfrak{tang}\, u, & MK &= -\,\mathfrak{cosec}\, u. \end{aligned}$$

Von diesen sechs Grössen lässt sich jede durch irgend eine andere der fünf übrigen ausdrücken; hierzu dient eine Reihe von Gleichungen, von denen wir nachstehend nur die wichtigsten anführen wollen:

$$\mathfrak{cos}^2 u - \mathfrak{sin}^2 u = 1,$$

$$\mathfrak{sin}\, u = -\frac{1}{\mathfrak{cosec}\, u}, \qquad \mathfrak{cos}\, u = \frac{1}{\mathfrak{sec}\, u},$$

$$\mathfrak{tang}\, u = \frac{\mathfrak{sin}\, u}{\mathfrak{cos}\, u}, \qquad \mathfrak{cotang}\, u = \frac{\mathfrak{cos}\, u}{\mathfrak{sin}\, u}.$$

Der Beweis für diese Sätze wird durch ähnliche Dreiecke in einfachster Weise geführt, sobald man noch die durch Differentiierung leicht zu erhärtende Thatsache hinzunimmt, dass (Fig. 10)

$$\triangle CMG \sim \triangle JCG$$

ist. Ferner ist nach obigem

$$u = \log(\mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u), \quad \mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u = e^u, \quad \mathfrak{cos}\, u - \mathfrak{sin}\, u = \frac{1}{e^u} = e^{-u}$$

und infolgedessen

$$\mathfrak{cos}\, u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \dots,$$

$$\mathfrak{sin}\, u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \dots$$

Hieraus folgt aber auch ferner, dass

$$\mathfrak{cos}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad \mathfrak{sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

ist, und mit Hilfe dieser Wahrheiten erkennt man sofort die Richtigkeit der Additionstheoreme

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v,$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \pm \sin u \sin v;$$

Unterfälle dieser Relationen sind

$$\cos u = \cos^2 \tfrac{1}{2} u + \sin^2 \tfrac{1}{2} u, \quad \sin u = 2 \sin \tfrac{1}{2} u \cos \tfrac{1}{2} u.$$

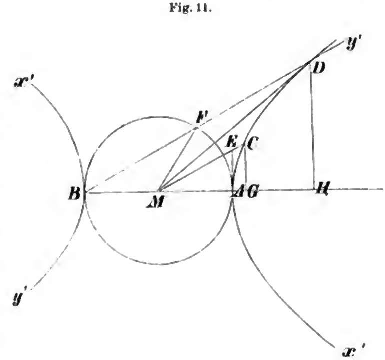
Auch die Additionssätze für Tangens und Cotangens

$$\text{tang}(u \pm v) = \frac{\text{tang}\, u \pm \text{tang}\, v}{1 \pm \text{tang}\, u\, \text{tang}\, v},$$
$$\text{cotang}(u \pm v) = \frac{\text{cotang}\, u\, \text{cotang}\, v \pm 1}{\text{cotang}\, v \pm \text{cotang}\, u}$$

ergeben sich als einfache Folgerung.

Besonders wichtig ist nun das Verwandtschaftsverhältnis, in welchem eine gleichseitige Hyperbel zu jenem Kreise steht, welcher erstere in ihren beiden Scheitelpunkten berührt. Fig. 11 giebt hierüber Aufschluss; A und B sind die beiden Scheitel der Hyperbel $x'y'$, M ist der Mittelpunkt des berührenden Kreises. Die Punkte C, G und E liegen ebenso wie in Fig. 10, ausserdem aber ist durch B zu MC eine Parallele gezogen, welche den Kreis in F, den andern Hyperbelast in D schneidet, und es ist DH senkrecht auf der reellen Axe. Endlich zieht man noch MD und MF. Sodann gilt nach Lambert[6]) folgende Bezeichnung: der doppelte Hyperbelsektor AMC heisst der gemeinsame Winkel, der Kreissektor AMF der transscendente Winkel. Je eine hyperbolisch-goniometrische Funktion des gemeinsamen Winkels ist einer bestimmten cyklisch-goniometrischen Funktion des transscendenten Winkels gleich, und zwar wird behauptet, es sei, den letztern gleich ϑ gesetzt,

Fig. 11.



$$\begin{array}{ll} \sin u = \text{tang}\, \vartheta, & \text{cotang}\, u = \text{cosec}\, \vartheta, \\ \cos u = \sec \vartheta, & \sec u = \cos \vartheta, \\ \text{tang}\, u = \sin \vartheta, & \text{cosec}\, u = -\text{cotang}\, \vartheta. \end{array}$$

Wir treten nunmehr den Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptungen an.

Aus elementar-geometrischen Gründen ist

$$\sphericalangle AMF = \vartheta = 2 . \sphericalangle ABF = 2 . \sphericalangle AMC.$$

Demzufolge kommen den beiden Geraden MC und BD die folgenden beiden Gleichungen zu:

$$y = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} . x, \quad y = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}(x+1).$$

Bringen wir diese beiden Geraden mit der gleichseitigen Hyperbel zum Durchschnitt, so stellen sich als Koordinaten der Schnittpunkte diese heraus:

$$CG = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}}}, \quad MG = \frac{\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}}},$$

$$DH = \frac{1+\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}}, \quad MH = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Bezeichnet man also wie bisher den hyperbolischen Sektor AMC mit $\frac{1}{2}u$, dagegen den hyperbolischen Sektor AMD mit $\frac{1}{2}v$, so ist

$$u = \log(CG+MG) = \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}}} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}},$$

$$v = \log(DH+MH) = \log\frac{\left(1+\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\vartheta}{2}} = \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}.$$

Man erkennt also die Relation

$$u = \tfrac{1}{2}v, \quad \text{Sektor } AMD = 2 . \text{Sektor } AMC = u.$$

AE ist aber unsern Festsetzungen zufolge die hyperbolische Tangente des Sektors $AMC = \frac{1}{2}u$, und ebenso ist AE die cyklische Tangente des Winkels $AMC = \frac{1}{2}\vartheta$; demnach hat man in

$$\mathfrak{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta$$

die zuerst von Laisant[7]) wahrgenommene, jedoch ganz anders bewiesene einfachste Beziehung zwischen gemeinsamem und transscendentem Winkel gewonnen.

Hieraus die vorgenannten sechs Identitäten abzuleiten ist einfach Sache der Rechnung. Wir haben, wenn wir der Kürze halber

$$\mathfrak{tang}\,\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} = t$$

setzen,

$$\mathfrak{tang}\,u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Des Ferneren ist

$$\mathfrak{sin}\,u = \frac{\mathfrak{tang}\,u}{\sqrt{1-\mathfrak{tang}^2 u}} = \frac{2t}{1+t^2} : \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

d. h. also

1) $$\mathfrak{sin}\,u = \operatorname{tang}\vartheta.$$

Es müssen also auch die reciproken Werte einander gleich sein, d. h. bei gehöriger Berücksichtigung des Zeichens ist

2) $$\mathfrak{cosec}\,u = -\operatorname{cotang}\vartheta.$$

Erhebt man 1) ins Quadrat und addiert auf beiden Seiten Eins hinzu, so erhält man

$$\mathfrak{cos}^2 u = 1 + \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

oder, nach Ausziehung der Quadratwurzel,

3) $$\mathfrak{cos}\,u = \sec\vartheta,$$

woraus wiederum sofort folgt

4) $$\mathfrak{sec}\,u = \cos\vartheta.$$

Dividiert man endlich 1) durch 3), so folgt

$$\frac{\mathfrak{sin}\,u}{\mathfrak{cos}\,u} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} : \frac{1}{\cos\vartheta},$$

5) $$\mathfrak{tang}\,u = \sin\vartheta$$

und reciprok

6) $$\mathfrak{cotang}\,u = \operatorname{cosec}\vartheta.$$

Diese sechs Relationen sind es nun, die im weitern Verlaufe unserer Untersuchungen uns allenthalben wiederbegegnen werden. Als eine siebente führen wir noch diejenige an, welche sich uns aus der Differentiierung der Fundamentalgleichung ergiebt. Aus

$$\frac{d\left(\mathfrak{tang}\,\frac{u}{2}\right)}{du}\,du = \frac{d\left(\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}\right)}{d\vartheta}\,d\vartheta$$

folgt nämlich zunächst

$$\mathfrak{sec}^2\,\frac{u}{2}\,du = \sec^2\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta$$

oder, da

$$\mathfrak{cos}\,\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{\mathfrak{cos}\,u+1}{2}},\quad \cos\frac{\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{\cos\vartheta+1}{2}}$$

ist, auch (mit Rücksicht auf 3)

$$du=\frac{\sec\vartheta+1}{\cos\vartheta+1}\,d\vartheta,$$

oder vereinfacht

7) $$du=\sec\vartheta\,d\vartheta.$$

Es giebt, wie sich zeigen wird, nicht eben wenige Fälle, wo diese Gleichung 7), die ja an Einfachheit sicher nichts zu wünschen übrig lässt, noch mit besserm Erfolge rechnerisch verwertet werden kann, als die Fundamentalgleichung selbst, welche ein Integral ersterer darstellt.

Die hier entwickelten Lehren aus der Theorie der Hyperbelfunktionen geben eine vollständig ausreichende Grundlage ab für die Anwendungen der drei folgenden Kapitel. Wir sind somit in der Lage, gleich jetzt zu solchen praktischen Anwendungen überzugehen, und zwar haben wir vor, im Sinne der Überschrift dieses Abschnitts nachzuweisen, dass die Diskussion der Gleichungen gewisser Kurven für manche Zwecke sich erheblich vereinfacht, sobald man erstere mittelst eines den Hyperbelfunktionen angehörigen Parameters zerlegt.

In erster Linie wird man natürlich an die Hyperbel selbst zu denken haben, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

durch Einführung der hyperbolischen Anomalie die simultanen Gleichungen

$$x=a\,\mathfrak{cos}\,u,\quad y=b\,\mathfrak{sin}\,u$$

substituiert werden können. Wenn wir uns enthalten, diesen Gegenstand hier eingehender zu erörtern, so geschieht dies lediglich deshalb, weil sowohl in der früher erwähnten Schrift des Verfassers[8]), als auch in der kleinen Monographie von Roggatz[9]) ziemlich viel Stoff gerade für diese Parameterdarstellung beigebracht worden ist.

Ein anderes Beispiel leiten wir her von der Lemniskate, wenn dieselbe in Fokalkoordinaten ausgedrückt erscheint. Bezeichnet man durch r_1 und r_2 die beiden Fahrstrahlen irgend eines Punktes der Kurve, so ist bekanntlich die Gleichung diese:

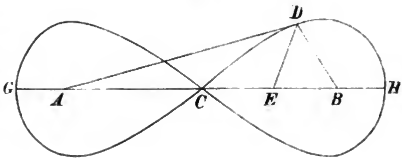
$$r_1 r_2=a^2.$$

Hier liegt es nun gewiss sehr nahe,

$$r_1=ae^u=a\,(\mathfrak{cos}\,u+\mathfrak{sin}\,u),\quad r_2=ae^{-u}=a\,(\mathfrak{cos}\,u-\mathfrak{sin}\,u)$$

zu setzen. Mit Hilfe dieser Umformung soll nun z. B. der folgende, aus der Zusammenstellung von W. Hess[10]) entlehnte Lehrsatz bewiesen werden: die Halbierungslinie des von zwei Brennstrahlen gebildeten Winkels bildet mit dem zugehörigen Mittelstrahl und der Axe ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis der Mittelstrahl darstellt. Die Brennpunkte seien A u. B (Fig. 12), die verlängerte Strecke AB, mit deren Mittelpunkt C der Doppelpunkt der Kurve zusammenfällt, schneidet die Lemniskate in deren Scheiteln G und H. Endlich treffe die Halbierungslinie des $\sphericalangle\, ADB$, unter D einen willkürlichen Kurvenpunkt verstanden, die AB in E. Zur Bestimmung der Segmente AE und EB hat man jetzt die Relationen

Fig. 12.



$$AE + EB = 2a,$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{e^u}{e^{-u}} = \cos 2u + \sin 2u.$$

Hieraus ergiebt sich

$$AE = a \sec u (\cos u + \sin u) = a (1 + \operatorname{tang} u),$$
$$BE = a \sec u (\cos u - \sin u) = a (1 - \operatorname{tang} u).$$

Des Ferneren ist nach einem bekannten Elementarsatze

$$DE = \sqrt{AD.BD - AE.EB} = \sqrt{a^2 - a^2 (1 - \operatorname{tang}^2 u)}, \qquad DE = a \operatorname{tang} u,$$

während auch

$$CE = a - EB = a - a (1 - \operatorname{tang} u) = a \operatorname{tang} u$$

gefunden wird. Sonach ist $DE = CE$, was zu beweisen war.

Auch die Quadratur der Lemniskate vollzieht sich leicht, wenn man von ihrer Gleichung in Polarkoordinaten ausgeht und sodann den Übergang vom transscendenten zum gemeinsamen Winkel vollzieht. Man hat, wenn σ einen von der Polaraxe und einem beliebigen Fahrstrahl eingeschlossenen Lemniskatensektor bedeutet,

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \int r^2 d\vartheta, \quad r^2 = 2a^2 (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Nachdem gemäss der obigen Vorschrift (s. o. 7)

$$\cos\vartheta = \sec u, \quad \sin\vartheta = \operatorname{tang} u, \quad d\vartheta = \sec u \, du \quad .$$

gesetzt worden ist,

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{\cos u}\sqrt{1 - \sin^2 u}$$

und hiernächst

$$\sigma = a^2 \int \frac{1 - \sin^2 u}{\cos^3 u}\, du = a^2 \left(2\int \frac{du}{\cos^3 u} - \int \frac{du}{\cos u}\right).$$

Integriert man nun durch Teile, so erhält man unverzüglich

$$\int \frac{du}{\cos^3 u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \int \frac{du}{\cos u}\right),$$

und setzt man diesen Wert für das erstere Integral oben ein, so folgt weiter

$$\sigma = \frac{a^2 \sin u}{\cos^2 u}.$$

Fällt man andererseits vom nächstgelegenen Brennpunkt ein Lot auf den Mittelstrahl*, der mit der Axe den Winkel ϑ bildet, so bekommt man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Inhalt

$$J = \frac{1}{2} a^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

ist. Vergegenwärtigt man sich aber, dass nach obigem

$$\sin\vartheta = \operatorname{tang} u, \quad \cos\vartheta = \sec u, \quad \operatorname{tang} u \sec u = \frac{\sin u}{\cos^2 u}$$

ist, so ist man zu folgender Relation gelangt:

$$J = \frac{1}{2}\sigma.$$

Diesen Satz hat Hess[11]) folgendermassen ausgedrückt: die Senkrechte von einem Brennpunkt auf einen Mittelstrahl halbiert den von diesem und von der Axe eingeschlossenen Flächensektor.

Niemand wird leugnen, dass bei diesen Anwendungen die Hyperbelfunktionen gute Dienste leisten, denn obschon mit Zugrundelegung eines beliebigen Koordinaten- oder Parametersystems die nämlichen Ergebnisse errechnet werden könnten, so würde doch der aufzuwendende Formelnapparat ein bedeutend umfänglicherer sein müssen. Nun lassen sich aber gewisse krumme Linien denken, welche ihrer eigensten Natur nach die prinzipielle und ausgiebige Anwendung der Exponentialfunktionen, respektive der aus diesen zusammengesetzten Hyperbelfunktionen erheischen. Wir knüpfen, um dies an einem Beispiele recht klar zu machen, nochmals an die oben diskutierte Fokalgleichung der Lemniskate an. Dieselbe stellte sich in der Form

$$r_1 r_2 = a^2$$

* Unter Mittelstrahl wird jede Strecke verstanden, welche den Doppelpunkt der Lemniskate mit irgend einem Kurvenpunkt verbindet. Jener Doppelpunkt ist es auch, der für die zu Grunde gelegte Polargleichung der Lemniskate als Pol angenommen werden muss, um die einfachste Gestalt der Gleichung zu erhalten.

dar; lassen wir nun diese Gleichung völlig intakt bestehen, legen aber den Grössen r_1 und r_2 andere geometrische Bedeutungen unter, so gelangen wir zu neuen Kurvenformen. Von einem Punkt, dem Pol aus, seine Vektoren gezogen, welche eine krumme Linie so schneiden, dass die Entfernungen der Durchschnittspunkte vom Pole, r_1 und r_2, der obigen Forderung genügen. Man weiss, dass der Kreis unter diese Kurven gehört, dass jedoch die obige Gleichung ihren Sinn verliert, wenn der Pol auf der Kurve, d. h. dem Kreise, selbst angenommen wird. Verallgemeinernd kann man also diese Aufgabe so stellen: welche Kurve entspricht in dem vorstehend erweiterten polaren Koordinatensysteme der obigen Bedingungsgleichung, wenn der Pol der Kurve selbst angehört? Dieser Aufgabe, welche, wie man sieht, völlig naturgemäss aus den Betrachtungen dieses Kapitels hervorgeht, wollen wir im nächsten Hauptstück näher treten. Man erkennt auch, dass man es hier mit einem sehr interessanten Fall der früher besprochenen Kurven-Analogie zu thun haben wird, denn ausser der soeben gekennzeichneten Grundeigenschaft haben beide Linien, der Kreis und jene neue Kurve, noch eine Fülle der verschiedensten Eigenschaften mit einander gemein. Ausserdem aber werden wir in der Diskussion die Brücke geschlagen finden zu jenen analytischen Spezialitäten, welche wir als die Lehre von den parabolischen Logarithmen und als parabolische Trigonometrie bezeichnen, Gegenständen, deren eigentliche Stellung im Gesamtgebiete der Wissenschaft einzig und allein mit Hilfe der Hyperbelfunktionen bestimmt werden kann.

---

1) Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, Halle 1881.

2) Ibid. S. 34 flgg.

3) Wallace, Investigation of formulae for finding the logarithms of trigonometrical quantities from another, Transactions of the Edinburgh Society, Vol. X, S. 148 flgg.

4) Id., New Series for the Quadrature of the Conic Sections, and the Computation of Logarithms, ibid. Vol. VI, Part I S. 303.

5) Günther, S. 104 flgg.

6) Lambert, Observations trigonométriques, Hist. de l'académie royale de Berlin, Année 1770, S. 329.

7) Laisant, Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris 1874, S. 10.

8) Günther, S. 203 flgg.

9) Roggatz, Einige Anwendungen der Theorie der hyperbolischen Funktionen, Göttingen 1876, S. 20 flgg.

10) W. Hess, Eigenschaften der Lemniskate, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 26. Jahrgang, S. 143.

11) Ibid., S. 144.

Drittes Kapitel.

Die logocyklische Kurve.

In den beiden Schlusskapiteln dieser Schrift wird mehrfach von einer merkwürdigen krummen Linie Gebrauch gemacht werden, mit deren Studium wir uns deshalb schon jetzt eingehend beschäftigen müssen. Der uns bereits bekannte englische Geometer James Booth hat eine grosse Anzahl von beachtenswerten Eigenschaften an dieser Kurve entdeckt. Die Motive, welche ihn zur Konstruktion derselben hinführten und bei der Untersuchung selbst leiteten, gingen aus der Überzeugung hervor, dass es eine Kurve geben müsse, welche in Bezug auf die Quadratur zum Kreise, in Bezug auf die Rektifikation zur gleichseitigen Hyperbel in nahen Beziehungen stünde. Er war so glücklich, eine Kurve ausfindig zu machen, welche diesen Anforderungen entsprach,* und nannte dieselbe mit Rücksicht auf den bekannten geometrischen Ursprung der Logarithmen die logocyklische Kurve. Wir werden dafür häufig das Wort Logocyklik brauchen.

Eigentlich neu konnte dieselbe jedoch schon zur Zeit Booths nicht mehr genannt werden, obschon dem letztern von Forschungen Anderer über denselben Gegenstand gar nichts bekannt gewesen zu sein scheint. Zuerst dürfte dieselbe von Lehmus[3]) bemerkt worden sein, der die Kurve wegen ihrer Ähnlichkeit mit einem Gurkenkern mit dem Namen Kukumaeide belegen zu sollen glaubte. Später, aber doch immer noch früher als Booth, hat von deutschen Mathematikern Rummer[4]) dieser Kurve eine selbständige Monographie ge-

---

* Diesen Eindruck gewinnt man wenigstens, wenn man Booths einleitende Worte in seinem Hauptwerke liest.[1]) Allein volle siebzehn Jahre früher hatte bereits der nämliche Gelehrte eine Abhandlung[2]) über parabolische Trigonometrie und parabolische Logarithmen erscheinen lassen, und wenn man beide Bearbeitungen mit einander vergleicht, so erkennt man, dass sie in Text und Figur bis aufs kleinste übereinstimmen, nur die von der Logocyklik handelnde Abteilung ist an jenem ersten Orte noch nicht vorhanden. Es wird mithin die Vermutung kaum abzuweisen sein, dass Booths Darstellung vom Jahre 1873 nicht den geschichtlichen Verlauf seiner eigenen Entdeckerarbeit wiedergiebt, dass derselbe vielmehr erst durch seine Studien über die Geometrie auf der Parabel mit der Strophoide bekannt wurde und derselben dann, unbekannt mit den Vorarbeiten, ein Hauptaugenmerk zuwendete.

widmet; der Umstand, dass an ihr mannigfache interessante harmonische Beziehungen hervortreten, veranlasste ihn zu der Wahl des Namens harmonische Kurve. In Frankreich dagegen kannte man für dieselbe ausschliesslich den Namen der Strophoide; Betrachtungen über sie trifft man an in einer Menge französischer Lehrbücher der analytischen Geometrie,* so z. B. in jenen von Briot und Bouquet[5]), von Falisse[6]) und von Painvin[7]); auch de la Gournerie handelt von ihr als von dem Schatten einer gewissen Schraubenfläche in Artikel 1000 seines *„Traité de géométrie déscriptive“* (Paris 1864). Die nächste Veranlassung, diese Kurve zu untersuchen, bestand für diese Gelehrten darin, dass im Jahre 1840 in Frankreich die folgende Preisfrage gestellt war: Ein System homofokaler Kegelschnitte ist gegeben; welches sind die geometrischen Örter 1) für die Berührungspunkte der aus einem festen Punkt an die einzelnen Kegelschnitte gelegten Tangenten, 2) für die Fusspunkte der aus einem gegebenen Punkt an die einzelnen Kegelschnitte gezogenen Normalen, 3) für die Fusspunkte der aus dem Fixpunkt auf jene Sehnen der Kegelschnitte gefällten Lote, welche als Polaren zu dem Fixpunkt als Pol gehören? Diese drei geometrischen Örter sind Strophoiden. Der im Jahre 1861 veranstaltete Konkurs zur Aufnahme in die Pariser Normalschule forderte die Beantwortung der gleichen Fragen. So war es natürlich, dass, abgesehen von jenen Ausführungen in Kompendien, auch Spezialaufsätze über diese vielseitiges Interesse bietende Ortskurve veröffentlicht wurden, namentlich von Montucci[8]) und von Maleyx[9]); ersterer trägt allerdings den Namen Ritts, der jedoch selbst Montucci als eigentlichen Autor bezeichnet und nur die Verwendung der Kurve zu architektonischen Zwecken empfiehlt. d'Ocagne[10]) rechnet sogar die Strophoide nebst der Cissoide und Konchoide zu den klassischen Kurven der dritten Ordnung. Die neueste Bearbeitung, welche die Theorie der Logocyklik erfahren hat, ist wohl in einem ostpreussischen Gymnasialprogramm von Haub[11]) enthalten. Aus diesen Angaben mag erhellen, dass man es hier nicht mit einer gleichgiltigen, sondern mit einer in vielen Beziehungen typischen krummen Linie zu thun hat, deren Diskussion somit auch nicht bloss vom didaktischen, sondern auch von einem allgemeineren wissenschaftlichen Standpunkt aus Interesse zu erwecken geeignet ist.

* Zahlreiche hier verwertete litterarische Nachweisungen sind von Herrn J. Neuberg dem Verfasser mitgeteilt worden, wofür derselbe um so dankbarer sein muss, als die deutsche Litteratur so gut wie gar kein Material für die Geschichte dieser Kurve zu bieten scheint.

Wir wollen, um in organischer Weise mit dem Wesen der Logocyklik vertraut zu werden, im Anschluss an Briot und Bouquet[12]) die oben unter 1) verzeichnete Aufgabe lösen. Die homofokalen Kegelschnitte sind ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Unter x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Fixpunktes verstanden, hat die Polare eben dieses Fixpunktes die Gleichung

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{a^2 - c^2} = 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Komparation eine dritte, welcher wir die Form erteilen können:

$$(x^2 + y^2 - x_1 x - y_1 y)(y_1 x - x_1 y) + c^2 (x - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Verschieben wir das Koordinatensystem parallel mit sich selbst so, dass der Ursprung in den Fixpunkt fällt, so lautet die Gleichung einfacher

$$(x^2 + y^2 + x_1 x + y_1 y)(y_1 x - x_1 y) + c^2 x y = 0.$$

Durch die Substitutionen

$$r \cos \vartheta' = x, \quad r \sin \vartheta' = y$$

wird die erhaltene Kurvengleichung aus dem cartesischen ins polare System transformiert, und man bekommt als neue Gleichung

$$r = \frac{(c^2 + y_1{}^2 - x_1{}^2) \sin 2\vartheta' + 2 x_1 y_1 \cos 2\vartheta'}{2 (x_1 \sin \vartheta' - y_1 \cos \vartheta')}.$$

Für

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tang} \varphi, \quad \frac{2 x_1 y_1}{c^2 + y_1{}^2 - x_1{}^2} = \operatorname{tang} \varphi_1, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(c^2 + y_1{}^2 - x_1)^2 + 4 x_1{}^2 y_1{}^2}}{x_1{}^2 + y_1{}^2} = a'$$

lautet die Gleichung nunmehr so:

$$r = \frac{a' \sin (2\vartheta' + \varphi_1)}{\sin (\vartheta' - \varphi)}.$$

Endlich werde noch $\vartheta' - \varphi = \vartheta''$ gesetzt; das giebt die Gleichung

$$r = \frac{a' \sin (2\vartheta'' + 2\varphi + \varphi_1)}{\sin \vartheta''}.$$

So die allgemeine Kurvengleichung; uns interessiert besonders der Fall, wenn $-(2\varphi + \varphi_1) = 90^0$, $\varphi_1 = -(2\varphi + 90^0)$ geworden ist, denn dann hat die Logocyklik die sehr einfache Gleichung ($\vartheta'' = 90^0 - \vartheta$ gesetzt)

$$r = \frac{a' \sin(180^0 - 2\vartheta - 90^0)}{\sin(90^0 - \vartheta)}$$

oder vereinfacht

$$r = \frac{a' \cos 2\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

In dieser Gestalt werden wir die Gleichung künftighin zum Ausgangspunkt für unsere weiteren Untersuchungen nehmen.

Booth nämlich legt die Gleichung seiner Kurve in einer der beiden folgenden Formen zu Grunde:*

$$y^2(2a - x) = x(x - a)^2, \quad (x^2 + y^2)(2a - x) = a^2 x.$$

Durch Parallelverschiebung des Axensystems lässt sich der Ursprung in jenen Punkt verlegen, welcher bisher die Koordinaten $x = a$, $y = 0$ hatte; alsdann kann man schreiben, wenn x' und y die neuen laufenden Koordinaten bedeuten,

$$y = x' \sqrt{\frac{a - x'}{a + x'}}.$$

In polare Koordinaten umgeformt folgt hieraus

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \frac{a - r\cos\vartheta}{a + r\cos\vartheta}$$

oder wie vorhin

$$r = \frac{a\cos 2\vartheta}{\cos\vartheta}.^{**}$$

---

* Der Accent von a, der nur zur Unterscheidung dieser neuen Hilfsgrösse von der Halbaxe des Kegelschnittes angehängt ward, durfte hier, wo eine ganz neue Aufgabe vorgenommen wird, wieder wegbleiben.

** Auf eine dritte Weise können wir zu dieser Gleichung gelangen, wenn wir die Fusspunktenkurve einer Parabel $y^2 = 4px$ aufsuchen, für welche der Pol mit dem durch die Koordinaten $x = -p$, $y = 0$ charakterisierten Punkt übereinstimmt. Bezeichnet man durch φ den Winkel, welchen die im Punkt x_1, y_1 an die Parabel gelegte Tangente mit der X-Axe bildet, und mit x, y die Koordinaten des Lot-Fusspunktes, so hat man

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy_{(1)}}{dx_{(1)}} = \frac{2p}{y_1}, \quad -x = p + (x_1 - p)\sin^2\varphi, \quad y = (x_1 - p)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Aus diesen drei Gleichungen sind die Grössen x_1 und φ zu eliminieren, wobei $x_1 = y_1{}^2 : 4p$ zu setzen ist. Wir erhalten

$$\sin\varphi = \frac{2p}{\sqrt{4p^2 + y_1{}^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{y_1}{\sqrt{4p^2 + y_1{}^2}}$$

und somit

$$y = \frac{y_1{}^2 - 4p^2}{4p} \cdot \frac{2py_1}{y_1{}^2 + 4p^2} = \frac{y_1}{2} \cdot \frac{y_1{}^2 - 4p^2}{y_1{}^2 + 4p^2}, \quad x = \frac{2py_1{}^2}{y_1{}^2 + 4p^2}.$$

Aus letzterer Gleichung fliesst

Aus den orthogonalen Gleichungen unserer Kurve schliessen wir, dass sie von der dritten Ordnung und symmetrisch zur Abscissenaxe gelegen ist. Behalten wir den von Booth gewählten Anfangspunkt bei, so erkennen wir, dass die Kurve die X-Axe zweimal, im Ursprung und in dem von diesem um a abstehenden Punkt durchschneidet. Letzterer Punkt ist ein Doppelpunkt. Auch sieht man, dass für $y = \pm \infty$

$$2a - x = 0, \quad x = 2a$$

wird, d. h. die durch letztere Gleichung charakterisierte, der Ordinatenaxe parallele Gerade ist eine Asymptote der Kurve. Aus diesem Grunde und nicht minder deshalb, weil sie eine Schleife besitzt, hat die Logocyklik — wie auch in Briots, Bouquets und Painvins Werken (a. a. O.) angemerkt wird — auffallende Ähnlichkeit mit dem sogenannten „Blatt" des Cartesius, über dessen gestaltliche Verhältnisse genaue Nachweise in einer Dissertation von Rechenbach[13]) nachgesehen werden können. Auch sonst noch kommt beiden Kurven eine wichtige gemeinsame Eigentümlichkeit zu, von welcher später bei der Berechnung des Flächeninhaltes die Rede sein soll.

So elegant die obige Polargleichung auch erscheint, so ist es für die Rechnung doch bei weitem zweckmässiger, den Pol auf der Axe bis zu jenem Punkt zu verschieben, welcher von dem Doppelpunkt den Abstand a besitzt. Die Gleichung sieht alsdann zunächst so aus:

$$r^2 (2a - r \cos \vartheta) = a^2 r \cos \vartheta.$$

Wird diese Gleichung nach r aufgelöst, so erhält man die einfachere Form

$$r = a (\sec \vartheta \pm \operatorname{tang} \vartheta).$$

Diese Gleichung hat nun aber das Eigentümliche, dass sie zur Einführung einer Exponentialgrösse, deren Exponent die Dienste eines

---

$$y_1 = 2p \sqrt{\frac{x}{2p - x}},$$

und setzen wir diesen Wert in der für y gefundenen Gleichung ein, so ergiebt sich als Kurvengleichung

$$y = p \sqrt{\frac{x}{2p - x}} \cdot \frac{4p^2 x - 8p^3 + 4p^2 x}{4p^2 x + 8p^3 - 4p^2 x}$$

oder vereinfacht

$$y = -p(p - x) \sqrt{\frac{x}{2p - x}} \cdot \frac{1}{p}.$$

Machen wir durch eine Verschiebung des Axensystems, ohne die Werte von y zu verändern, $p - x = x'$, so wird $x = p - x'$, $2p - x = p + x'$, und wir haben wie oben, nur mit andern Vorzeichen, als Gleichung der Kurve diese:

$$y = - \;{}' \sqrt{\frac{p - x'}{p + x'}}.$$

Parameters zu leisten hat, geradezu hindrängt. Ganz ebenso, wie es im vorigen Kapitel bei der Lemniskate geschah, gehen wir auch hier vom transscendenten Winkel zum gemeinsamen über und setzen

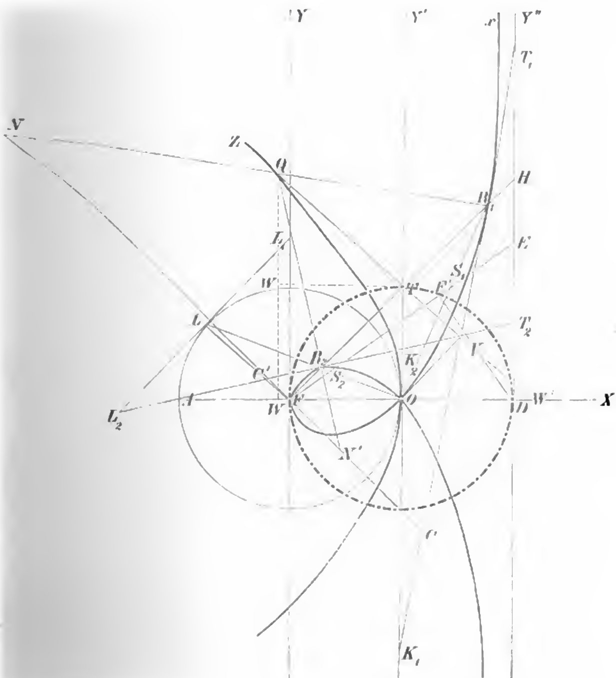
$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}.$$

Alsdann wird $\sec\vartheta = \cos u$, $\operatorname{tang}\vartheta = \sin u$, und wir bekommen

$$r = a(\cos u \pm \sin u).$$

Es ist ersichtlich, dass je eines der beiden Zeichen sich auf einen der beiden kongruent-symmetrischen Zweige bezieht, aus welchen die Kurve besteht. Fig. 13 stellt dieselbe dar. F ist der Ursprung des

Fig. 13.



orthogonalen Koordinatensystems XOY und zugleich Pol, FX die Polaraxe. In O liegt der Doppelpunkt, und wenn $FO = OD = a$, so ist DY'' die Asymptote der Logocyklik FOx. Eine jede von F ausgehende Gerade muss, da die cartesische Kurvengleichung vom dritten Grade ist, die Logocyklik in zwei weitern Punkten R_1 und R_2 durchschneiden, welche selbstverständlich auf verschiedenen Kurvenzweigen gelegen sind. Unterscheiden wir beide Radienvektoren durch Indices, so ist jeder Zweig durch eine der folgenden beiden Gleichungen repräsentiert:

$$r_1 = a(\mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u) = ae^u, \quad r_2 = a(\mathfrak{cos}\, u - \mathfrak{sin}\, u) = ae^{-u}.$$

Nunmehr haben wir eine Parameterdarstellung gewonnen, wie sie einfacher nicht wohl gedacht werden kann. Mit ihr ausgerüstet, werden wir darangehen, eine grössere Anzahl von Sätzen über die logocyklische Kurve abzuleiten, wie sie sich zum weitaus grössten Teile bereits in den Abhandlungen von Booth, sowie in dem Schriftchen von Rummer vorfinden. Wir haben jedoch dabei des Vorteils uns zu erfreuen, dass unsere Beweisführung sich nicht allein einfacher, sondern auch weit einheitlicher gestalten wird, als in jenen Vorlagen, indem daselbst bald cartesische, bald polare Koordinaten zur Verwendung kommen, wogegen wir sämtliche Relationen auf das hyperbolische Hilfsargument u zurückzuführen in der Lage sind. Beziehungen zu andern Kurven werden dabei bloss insofern Berücksichtigung finden, als die letzteren in unmittelbarster Beziehung zu der zu diskutierenden Kurve selbst stehen, denn andernfalls würden wir uns der mit dem Parameter verknüpften Bequemlichkeiten selbst begeben. Unser Zweck aber ist, die Geometrie auf der Logocyklik und nur diese selbst abzuhandeln.*

* Aus diesem Grunde müssen wir auch darauf verzichten, die schiefe Strophoide, welche wesentlich das Untersuchungsobjekt für Maleyx (s. o.) geboten hat, ausführlicher hier zu behandeln. Diese Kurve, betreffs welcher in der citierten Abhandlung viele schöne, zum Teil schwer beweisbare Lehrsätze nachgesehen werden können, ist in gewissem Sinne eine Verzerrung der Logocyklik; die Asymptote bildet mit der Axe einen beliebigen schiefen Winkel und die Symmetrie der beiden Kurvenäste ist verloren gegangen. Auf der Peripherie eines Kreises befinde sich der Pol F, durch den Mittelpunkt O sei eine Gerade OZ unter dem Winkel α gegen die Polaraxe, d. h. den Radius FO gezogen; zieht man dann durch F eine Gerade, welche die OZ in B, die Peripherie in C schneidet, und trägt auf FB ein Stück $FD = BC$ ab, so ist der Ort von D eine schiefe Strophoide. Hieraus nämlich folgt die Gleichung

$$r = 2a\cos\vartheta - \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha - \vartheta)},$$

und daraus wiederum, für $\alpha = 90^0$,

1. Nennen wir die den beiden Argumenten u und $-u$ entsprechenden Kurvenpunkte **zusammengehörige Punkte**,* so gilt der Satz:

Das Produkt der nach zwei zusammengehörigen Punkten gezogenen Polstrahlen ist konstant, der eine Zweig ist die inverse Kurve des andern, d. h. mit dessen Abbildung durch reciproke Radien identisch, die Kurve selbst zählt zu den sogenannten anallagmatischen Kurven.**

Es ist nämlich $r_1 . r_2 = ae^u . ae^{-u} = a^2$. Wie eingangs erwähnt, stimmt die Logocyklik, ihrem Namen entsprechend, in mehreren Beziehungen mit dem Kreise überein, und gerade diese letzterwähnte Eigenschaft hätte zur Auffindung der neuen Kurve leiten können, ja hat vielleicht dazu geleitet.***

2. Die Gerade DY'' ist eine Asymptote der Kurve.

Diese ihre Eigenschaft wird jetzt so dargethan. Verlängert man FR_1 bis zum Durchschnitt mit DY'', den wir H nennen wollen, so ist

$$R_1 H = 2a \sec \vartheta - r_1 = 2a \operatorname{\mathfrak{cos}} u - a(\operatorname{\mathfrak{cos}} u + \operatorname{\mathfrak{sin}} u) = ae^{-u} = FR_2.$$

Diese Strecke wird erst für $u = \infty$ zu Null.

3. Der Winkel ψ, welchen die Tangente der Logocyklik mit dem zugehörigen Radiusvektor einschliesst, ist gegeben durch die einfache Relation†

$$r = \frac{a \cos^2 \vartheta - a(1 - \cos^2 \vartheta)}{\cos \vartheta} = \frac{a \cos^2 \vartheta - a \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{a \cos 2\vartheta}{\cos \vartheta}.$$

Dies ist aber die Gleichung des uns bereits bekannten Spezialfalles, der gewöhnlichen Strophoide oder Logocyklik.

* Booth hat[14]) den Ausdruck *„reciprocal points"*. Der von uns gewählte Ausdruck ist der Terminologie der Lehre von den Hyperbelfunktionen entnommen.

** Vergl. hierzu die lehrreiche Arbeit von Picquet[15]), die sehr allgemein gehalten ist.

*** Vor einigen Jahren gab Ziegler[16]) eine anscheinend sehr sachgemässe Methode an, um den Fundamentalsatz der stereographischen Projektion elementar zu erweisen. Er zog aus dem Mittelpunkt des in der Bildebene gelegenen Kreises Strahlen durch die als Kopie eines beliebigen Kugelkreises sich ergebende Kurve und wies nach, dass das Produkt je zweier solcher Fahrstrahlen, vom Bildcentrum aus gerechnet, ein konstantes sei. Dem gegenüber ward von Stammer[17]) hervorgehoben, so richtig dies auch sei, so dürfe man daraus doch noch nicht folgern, die bezügliche ebene Kurve müsse ein Kreis sein. Wir nehmen jetzt wahr, dass dieser Einwurf seine volle Berechtigung hat: die Kurve könnte ja auch irgend eine andere anallagmatische Linie sein. Die Bedingung, dass das Rechteck aus zwei vom Pol aus nach beliebigen Punkten der Kurve gerichteten und der Richtung nach zusammenfallenden Fahrstrahlen ein stets gleichbleibendes sei, ist zwar notwendig, wenn jene Kurve ein Kreis sein soll, keineswegs aber hinreichend, da vielmehr jener ersten Anforderung auch andere Linien Genüge leisten können.

† Eine dem Prinzip nach mit der hier gegebenen übereinstimmende Lösung des Tangentenproblems für die Logocyklik ist von de Longchamps[18]) veröffent-

$$\operatorname{tang}\psi = \cos\vartheta.$$

Denn es ist

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{r_1 d\vartheta}{dr_1} = \frac{ae^u \sec u\, du}{ae^u\, du} = \sec u = \cos\vartheta.$$

Für den Doppelpunkt O ist $\vartheta = 0$ oder $= \pi$, somit $\operatorname{tang}\psi = \pm 1$, $\psi = \pm 45^0$. Die beiden im Doppelpunkt an die Kurve gelegten Tangenten stehen mithin senkrecht auf einander; beide Kurvenzweige schneiden sich unter einem rechten Winkel.

4. Die grösste Ordinate des Ovals der Logocyklik teilt die Verbindungsstrecke von Anfangs- und Doppelpunkt nach dem goldenen Schnitt (Satz von Falisse).

Hat die Ordinate ihren grössten Wert erreicht, so ist die Tangente in ihrem Endpunkt der X-Axe parallel, die Winkel ψ und ϑ werden gleich und zur Bestimmung des entsprechenden Argumentes u hat man $\sin u = \sec u$, woraus sich ergiebt

$$\cos u = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{2}}, \quad \sec u = \cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}.$$

---

licht worden. Ihm zufolge verbindet man den Punkt R_2, an welchen eine Berührungslinie gezogen werden soll, mit dem Doppelpunkt O und verlängert diese Gerade, bis sie den um F beschriebenen Kreis nochmals in L schneidet. Man zieht LF und darauf in L senkrecht eine Gerade, auf welcher man $LL_2 = LL_1$ macht, unter L_1 den Durchschnittspunkt jener Senkrechten mit der Ordinatenaxe verstanden. Die Gerade $L_2 R_2$ ist dann die gesuchte Berührende. Berechnen wir nämlich nach diesen Daten zuerst $\sphericalangle R_2 OF = \varphi$, so findet sich

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2u}}}, \quad \cos\varphi = \frac{e^u}{\sqrt{1+e^{2u}}}, \quad \operatorname{tang} F_2RL = \operatorname{tang}(\vartheta+\varphi) = e^u,$$

und andererseits

$$\operatorname{tang} LR_2L_2 = \frac{\sin^2 u + \sin u \cos u}{\sin u + 2\cos u}.$$

Bildet man hiernächst

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}(\vartheta + \varphi - LR_2L_2) = \frac{\operatorname{tang}(\vartheta+\varphi) - \operatorname{tang} LR_2L_2}{1 + \operatorname{tang}(\vartheta+\varphi)\operatorname{tang} LR_2L_2},$$

so ergiebt sich nach leichter Umrechnung

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{2\sin u\cos u + 2\cos^2 u}{2\sin u\cos^2 u + 2\cos u + 2\sin^2 u\cos u} = \frac{\sin u + \cos u}{\sin u\cos u + 1 + \sin^2 u},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin u + \cos u}{\cos u(\sin u + \cos u)} = \frac{1}{\cos u} = \sec u = \cos\vartheta,$$

wie auch oben angegeben. — Eine sehr interessante Tangentenkonstruktion, die sich ebenmässig auf die Logocyklik wie auch auf die Cissoide und Konchoide anwenden lässt, rührt ferner von d'Ocagne[19]) her. Dieselbe ist im Geiste der kinematischen Geometrie Mannheims gehalten und macht nur von den einfachsten Sätzen über Kreis und gerade Linie Gebrauch.

Es ist also, wenn x und $(a-x)$ die beiden Stücke von a vorstellen, da ja $x = ae^{-u}\cos\vartheta = a(\cos u - \sin u)\sec u = a(1-\operatorname{tang} u)$ wird,

$$x = a\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}\right) = a(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}), \quad a-x = \frac{a}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}.$$

Nun ist aber, wie sich durch direkte Ausrechnung findet,

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1,$$

oder auch, wenn noch beiderseits mit a^2 multipliziert wird,

$$\frac{a^2}{4}(6-2\sqrt{5}) = a^2(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}).$$

Schreiben wir diese Gleichung als Proportion, so folgt

$$a : \frac{a}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \frac{a}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}} : \left(a - \frac{a}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)$$

oder mit Rücksicht auf die früheren Festsetzungen

$$a:(a-x) = (a-x):x.$$

Damit ist Satz 4) bewiesen.

5. Konstruiert man einen Kreis, welcher durch den Pol geht und die Asymptote berührt, so werden zwei zusammengehörige Kurvenpunkte harmonisch getrennt durch den Pol und jenen Punkt, in welchem der Radiusvektor den erwähnten Kreis trifft.[20])

Man hat identisch

$$\sec u\,(e^u + e^{-u}) = 2, \quad 1 - e^{-u}\sec u = e^u \sec u - 1.$$

In Proportionsform geschrieben folgt hieraus:

$$ae^{-u} : (2a\sec u - ae^{-u}) = ae^u : (ae^u - 2a\sec u).$$

Sind S_1, S_2 (in der nämlichen Figur) die zusammengehörigen Punkte, F' der Schnittpunkt des Radiusvektors mit dem über FD als Diameter konstruierten Kreise, so ist

$$FS_1 = ae^u, \quad FS_2 = ae^{-u}, \quad FF' = 2a\sec u, \quad S_2F' = 2a\sec u - ae^{-u},$$
$$F'S_1 = ae^u - 2a\sec u;$$

man hat also die harmonische Verhältnisgleichung

$$FS_2 : S_2F' = FS_1 : F'S_1.$$

6. Die beiden Komplementarsehnen, welche zwei zusammengehörige Punkte mit dem Doppelpunkt verbinden, stehen auf einander senkrecht.

R_1O und R_2O sind diese Komplementarsehnen. Durch O ziehe man OY' parallel zur Asymptote; diese Parallele schneide den Fahrstrahl in T. Dann hat man

$$TR_1 = FR_1 - FT = ae^u - a\cos u = a\sin u,$$
$$TR_2 = FT - FR_2 = a\cos u - ae^{-u} = a\sin u,$$
$$OT = a\operatorname{tang}\vartheta = a\sin u.$$

Durch die Punkte R_1, R_2, O lässt sich demnach ein Kreis legen, dessen Centrum T ist, und $\sphericalangle R_1OR_2$ ist als Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter.

7. Werden in zwei zusammengehörigen Punkten Tangenten an die Logocyklik gezogen, so wird deren Schnittpunkt mit dem Doppelpunkt durch eine Gerade verbunden, welche der Verbindungslinie der Berührungspunkte parallel läuft.[21])

Man bezeichne einstweilen den $\sphericalangle TVO$ mit τ. Dann hat man

$$\frac{\sin\tau}{\sin(\tau+\vartheta)} = \frac{\sin\tau}{\sin\tau\cos\vartheta + \cos\tau\sin\vartheta} = \frac{TO}{TV},$$
$$\operatorname{cotang}\tau = \frac{TV - TO\cos\vartheta}{TO\sin\vartheta}.$$

Hier ist $TV = \frac{r_1 - r_2}{2}\operatorname{tang}\psi = a\sin u\operatorname{tang}\psi = a\sin u\sec u = a\operatorname{tang} u$ und $TO\cos\vartheta = a\sin u\sec u = a\operatorname{tang} u$, somit

$$\operatorname{cotang}\tau = \frac{\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u}{\sin u\operatorname{tang} u} = 0,$$

$\tau = 90^0$ und $VO \parallel TF$, wie behauptet war.

8. Der geometrische Ort der Schnittpunkte zweier in zusammengehörigen Punkten an die Logocyklik gelegten Tangenten ist eine Cissoide (Booth, a. a. O.).

Wählt man O zum Pol, OX zur Axe eines neuen Polarsystems, so ist nach 7) die Amplitude von V stets $= \vartheta$. Setzt man also $VO = \varrho$, so ist

$$\varrho = TO\sin\vartheta = \frac{a\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta},$$

und dies ist die wohlbekannte Gleichung einer Cissoide, welche zur X-Axe symmetrisch liegt und ihre Spitze in O hat. Auf das entsprechende orthogonale System zurückgeführt, ist

$$y^2(a-x) = x^3$$

die Gleichung dieser Ortskurve.

9. Nennen wir OY' die Leitlinie, T den Leitpunkt der Kurve, so können wir den Satz aussprechen: Die beiden Punkte, in welchen zwei zusammengehörige Tangenten die Leitlinie treffen, werden durch den Doppelpunkt und den Leitpunkt harmonisch getrennt.[22])

Die in R_1 und R_2 an die Kurve gelegten Berührenden begegnen der Leitgeraden in K_1 und K_2. Nach 7) ist klar, dass als korrespondierende respektive als Wechselwinkel

$$\sphericalangle\, OVK_1 = \psi = \sphericalangle\, K_2VO$$

sein müssen. VO halbiert folglich den $\sphericalangle\, K_2VK_1$, und da $\sphericalangle\, TVO$ ein rechter ist, so halbiert VT den Aussenwinkel K_2VR_1 des Dreiecks K_1VK_2. Nun besagt aber ein bekannter Satz der Planimetrie, dass die Proportion

$$OK_1 : K_2O = TK_1 : TK_2$$

besteht.

10. Der geometrische Ort der Schnittpunkte zweier in zusammengehörigen Punkten an die Logocyklik gezogenen Normalen ist eine Parabel, die künftig als „adjungierte" bezeichnet werden soll. Deren Scheitel fällt in den Doppelpunkt, deren Brennpunkt in den Pol der logocyklischen Kurve* (Booth, a. a. O.).

Die beiden Normalen von R_1 und R_2 schneiden sich in Q; da $R_1T = R_2T$ ist, muss die verlängerte VT durch Q hindurchgehen. Dann ist zunächst

$$QT = R_1T \operatorname{cotang} \psi = R_1T \sec \vartheta = R_1T \cos u = \frac{r_1 - r_2}{2} \cos u = \tfrac{1}{2} a \sin 2u.$$

Aus Q fälle man auf die X-Axe das Lot QU und aus T auf QU das Lot TW; die rückwärts verlängerte QV möge der X-Axe in W' begegnen. Jetzt ist

$$TW = QT \sin \vartheta = QT \operatorname{tang} u = \frac{a \sin^2 u \cos u}{\cos u} = a \sin^2 u,$$
$$OW' = OT \operatorname{tang} \vartheta = OT \sin u = a \sin^2 u,$$
$$TW = UO = OW'.$$

---

* Bei Booth vollzieht sich die Einführung dieser Parabel in etwas unklarer Weise, wie denn überhaupt bei Aneinanderreihung der einzelnen Theoreme kein bestimmtes Prinzip befolgt zu sein scheint. Dem gegenüber ward hier daran festgehalten, jeden einzelnen Satz gerade dann zu bringen, wenn alle die Vorbedingungen, von deren Erfüllung der Beweis des Satzes abhängt, durch die früheren Entwickelungen gegeben sind. — Wenn wir von einer der Logocyklik adjungierten Parabel und in übertragenem Sinne später auch von einer der Parabel adjungierten Logocyklik sprechen, so ist allerdings zu bemerken, dass das Wort „adjungierte Kurve" hier nicht mit dem von einigen neueren Geometern angenommenen Sprachgebrauche übereinstimmt, indem eine Kurve A dann einer Kurve B adjungiert genannt wird [23]), wenn A durch die k-fachen Punkte von B $(k-1)$mal hindurchgeht. Nun geht allerdings unsere Parabel einfach durch den Doppelpunkt der Logocyklik hindurch, nicht jedoch durch den Wendepunkt, den die letztere in der Unendlichkeit besitzt.

Diejenige Kurve aber, deren Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist, ist bekanntlich eine Parabel. Die Gleichung derselben würde in unserem System folgende sein:

$$y^2 = 4ax.$$

Der Punkt Q der adjungierten Parabel wird aus Gründen, für welche auf Kapitel V verwiesen werden muss, als der dem Radiusvektor FR_2R_1 entsprechende logarithmische Punkt bezeichnet.

11. Die Ordinaten zweier zusammengehöriger Punkte geben in Summa die Ordinate des entsprechenden logarithmischen Punktes der adjungierten Parabel, die Abscissen der nämlichen Punkte geben addiert den Durchmesser des Grundkreises, welch letzterer durch den Pol geht und die Asymptote berührt.[24])

Die bezüglichen Ordinaten seien y_1, y_2, die bezüglichen Abscissen x_1, x_2. Dann hat man

$$y_1 = r_1 \sin\vartheta = ae^u \operatorname{tang} u, \quad y_2 = r_2 \sin\vartheta = ae^{-u} \operatorname{tang} u,$$

$$y_1 + y_2 = 2a \cdot \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cdot \operatorname{tang} u = 2a \sin u.$$

Zugleich ist die Ordinate des entsprechenden Parabelpunktes

$$y = QU = TO + QW = a \sin u + QT \operatorname{cotang}\vartheta = a \sin u$$

$$+ \frac{r_1 - r_2}{2} \operatorname{cotang}\psi \operatorname{cotang}\vartheta = a \sin u + a \sin u \cos u \sec u = 2a \sin u,$$

sohin, wie behauptet,

$$y_1 + y_2 = y.$$

An zweiter Stelle ist

$$x_1 + x_2 = ae^u \sec u + ae^{-u} \sec u = 2a = AO.$$

Schliesslich erkennt man auch, dass

$$y_1 y_2 + x_1 x_2 = a^2 e^u e^{-u} \operatorname{tang}^2 u + a^2 e^u e^{-u} \sec^2 u$$

$$= a^2 \left(\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + \frac{1}{\cos^2 u}\right) = a^2 = \tfrac{1}{4} \overline{AO}^2$$

sein muss.

12. Die Summe der beiden zusammengehörigen Punkten der Logocyklik entsprechenden polaren Subtangenten ist konstant.

FC und FC' sind die beiden Subtangenten. Aus der Figur folgt unverzüglich

$$FC + FC' = ae^u \cos\vartheta + ae^{-u} \cos\vartheta = 2a \cdot \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cdot \sec u = 2a.$$

13. Die Summe der reciproken Werte der beiden zusammengehörigen Punkten der Logocyklik entsprechenden Polaren Subnormalen ist konstant.

FN und FN' sind die beiden Subnormalen. Nun liefern die rechtwinkligen Dreiecke FNR_1 und $FN'R_2$ die Beziehungen

$$FN = r_1 \operatorname{cotang} \psi = r_1 \sec \vartheta = a e^u \cos u,$$
$$FN' = r_2 \operatorname{cotang} \psi = r_2 \sec \vartheta = a e^{-u} \cos u,$$

und es wird

$$\frac{1}{FN} + \frac{1}{FN'} = \frac{1}{a}\left(\frac{\sec u}{e^u} + \frac{\sec u}{e^{-u}}\right) = \frac{2}{a} \sec u \cos u = \frac{2}{a}.$$

14. Der Ort der Endpunkte der polaren Subtangenten ist eine Kardioide, deren Diameter $2a$ mit der Axe der Logocyklik zusammenfällt, deren Spitze in F liegt.

Der Ort der Endpunkte der polaren Subnormalen ist eine der adjungierten Parabel konfokale Parabel.

Diese beiden Sätze Booths (a. a. O.) über geometrische Örter fliessen unmittelbar aus 12) und 13).

15. Die zwischen den Berührungspunkten und der Asymptote enthaltenen Stücke zusammengehöriger Tangenten sind gleichlang.[25])

In der Figur soll also $R_1 T_1 = R_2 T_2$ sein. Aus dem Dreieck $R_1 T_1 H$ folgt die Proportion

$$R_1 T_1 : R_1 H = \sin(90^0 + \vartheta) : \sin[90^0 - (\psi + \vartheta)],$$

und da, wie aus 2) bekannt, $R_1 H = FR_2 = ae^{-u}$ ist, so ergiebt sich

$$R_1 T_1 = \frac{ae^{-u}\cos\vartheta}{\cos(\psi+\vartheta)}.$$

Ganz ebenso findet man

$$R_2 T_2 = \frac{ae^{u}\cos\vartheta}{\cos(\psi+\vartheta)}.$$

Demzufolge ist

$$\frac{R_1 T_1}{R_2 T_2} = \frac{e^{-u}}{e^u} \cdot \frac{\cos(\psi-\vartheta)}{\cos(\psi+\vartheta)} = \frac{e^{-u}}{e^u} \cdot \frac{1+\operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\vartheta}{1-\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\vartheta} = \frac{e^{-u}}{e^u}\cdot\frac{1+\sin u \sec u}{1-\sin u\sec u}$$
$$= \frac{e^{-u}}{e^u}\cdot\frac{\cos u + \sin u}{\cos u - \sin u} = 1,$$

wie behauptet war.

16. Zwei zusammengehörige Tangenten bestimmen ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis die Subnormalenlinie bildet.

Wir begnügen uns, nachzuweisen, dass $CV = R_1 T_1$ ist. Aus 12) ist uns bekannt, dass CC' den Wert $2a$ besitzt. Es folgt also

$$CV = \frac{a}{\sin\psi}.$$

Ferner ist uns

$$R_1 T_1 = \frac{ae^{-u}\cos\vartheta}{\cos(\psi+\vartheta)} = \frac{ae^{-u}}{\cos\psi - \operatorname{tang}\vartheta\sin\psi}$$

bekannt; da aber

$$\operatorname{tang}\psi = \mathfrak{sec}\, u$$

ist, so ist auch

$$e^{-u}\sin\psi = \cos\psi - \operatorname{tang}\vartheta \sin\psi$$

und

$$R_1 T_1 = \frac{a e^{-u}}{e^{-u}\sin\psi} = \frac{a}{\sin\psi} = CV.$$

Man hat demzufolge $CV = C'V = R_1 T_1 = R_2 T_2$.

17. Fällt man vom Pol Perpendikel p_1 und p_2 auf zusammengehörige Tangenten, wodurch auf letzteren gegen die Berührungspunkte hin die Segmente q_1 und q_2 abgeschnitten werden, so wird

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = a^2.$$

Eine leichte Berechnung liefert

$$p_1 = a(\cos\psi + \sqrt{\cos 2\psi}) = \frac{a e^{-u}}{\sqrt{1 + \mathfrak{cos}^2 u}},$$

$$p_2 = a(\cos\psi - \sqrt{\cos 2\psi}) = \frac{a e^{u}}{\sqrt{1 + \mathfrak{cos}^2 u}},$$

$$q_1 = a \operatorname{cotang}\psi(\cos\psi + \sqrt{\cos 2\psi}) = \frac{a e^{-u}\,\mathfrak{cos}\, u}{\sqrt{1 + \mathfrak{cos}^2 u}},$$

$$q_2 = a \operatorname{cotang}\psi(\cos\psi - \sqrt{\cos 2\psi}) = \frac{a e^{u}\,\mathfrak{cos}\, u}{\sqrt{1 + \mathfrak{cos}^2 u}}.$$

Daraus folgt

$$p_1 p_2 = a^2 \sin^2\psi = \frac{a^2}{1 + \mathfrak{cos}^2 u},$$

$$q_1 q_2 = a^2 \cos^2\psi = \frac{a^2\,\mathfrak{cos}^2 u}{1 + \mathfrak{cos}^2 u},$$

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = a^2.$$

18. Die logocyklische Kurve ist die Enveloppe für sämtliche Kreise, deren Mittelpunkte auf der adjungierten Parabel gelegen und deren Halbmesser durch den Ausdruck $\sqrt{f^2 - a^2}$ gegeben sind, unter f den Abstand des Kreiscentrums vom Brennpunkt der Parabel verstanden.[26])

Sind α und β die rechtwinkligen Koordinaten des Mittelpunktes eines solchen Kreises, so ist dessen Gleichung folgende:

$$G \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (f^2 - a^2) = 0,$$

wobei zu setzen ist

$$\alpha = a(1 - \mathfrak{sin}^2 u), \quad \beta = 2a\,\mathfrak{sin}\, u, \quad f = a\,\mathfrak{cos}^2 u.$$

Dies oben substituiert, giebt

$$G \equiv x^2 + y^2 + 2a(\mathfrak{sin}^2 u - 1)x - 4a\,\mathfrak{sin}\, u \cdot y + a^2 = 0.$$

Nun differentiiere man G partiell nach u; es wird so

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 4ax \sin u \cos u - 4ay \cos u = 0.$$

Da die Gleichungswurzel $\cos u = 0$ keinen Sinn ergeben würde,* so muss

$$\sin u = \frac{y}{x}$$

sein. $\frac{y}{x}$ ist aber auch gleich $\operatorname{tang} \vartheta$; somit sind wir auf die allein für die Logocyklik giltige Gleichheit $\sin u = \operatorname{tang} \vartheta$ gestossen. Würden wir, einen anderen Weg einschlagend, den für $\sin u$ gefundenen Wert oben einsetzen, so ergäbe sich

$$x^2 + y^2 + 2a \cdot \frac{y^2 - x^2 - 2y^2}{x} + a^2 = 0$$

oder einfacher

$$(x^2 + y^2)(2a - x) = a^2 x.$$

Dies ist aber die uns bekannte cartesische Gleichung der logocyklischen Linie.

19. Sind ϱ_1 und ϱ_2 die den Endpunkten der Fahrstrahlen r_1 und r_2 entsprechenden Krümmungshalbmesser der Logocyklik, so gilt die Relation[27])

$$\frac{r_1}{2\varrho_1} + \frac{r_2}{2\varrho_2} = \sin \psi.$$

Der dem Argument u entsprechende Krümmungsradius ϱ_1 ist gleich

$$\frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r \cdot \frac{d^2 r}{d\vartheta^2}}.$$

Da (vergl. Kap. II)

$$r = ae^u, \quad d\vartheta = \sec u \, du, \quad \frac{dr}{d\vartheta} = ae^u \cos u, \quad \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} = ae^{2u} \cos u$$

ist, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{a^3 e^{3u}(1 + \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}{a^2 e^{2u}(1 + \cos^2 u - \sin u \cos u)} = \frac{ae^u (1 + \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}{1 + \cos^2 u - \sin u \cos u}$$

und daraus

$$\frac{r_1}{2\varrho_1} + \frac{r_2}{2\varrho_2} = \frac{1 + \cos^2 u - \sin u \cos u}{(1 + \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 + \cos^2(-u) - \sin(-u)\cos(-u)}{[1 + \cos^2(-u)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun ist aber

$$\cos(-u) = \cos u, \quad \sin(-u) = -\sin u,$$

deshalb auch

* Ein hyperbolischer Cosinus kann nicht kleiner als Eins werden.

$$\frac{r_1}{2\varrho_1} + \frac{r_2}{2\varrho_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathfrak{cos}^2 u}}.$$

Aus der bekannten Identität $\operatorname{tang}\psi = \mathfrak{sec}\,u$ folgt aber gleicherweise

$$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathfrak{cos}^2 u}}.$$

20. Versteht man unter C' und C'' die durch den Neigungswinkel

$$\theta = \vartheta + \operatorname{arctang}\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\vartheta}$$

charakterisierten Krümmungssehnen zweier zusammengehöriger Punkte, so sind C' und C'' mit den entsprechenden Polstrahlen r_1 und r_2 durch die Gleichung

$$\frac{r_1}{C'} + \frac{r_2}{C''} = 1$$

verknüpft (Booth, a. a. O.).

Mit Hilfe der Hyperbelfunktionen lässt sich der Beweis hierfür in folgender Weise führen. Es ist

$$\frac{1}{r_1} = \frac{e^{-u}}{a}, \quad dr_1 = ae^u du, \quad d\vartheta = \mathfrak{sec}\,u\,du,$$

$$\operatorname{tang}(\theta - \vartheta) = \frac{e^u}{a}\cdot ae^{-u}\,\mathfrak{cos}\,u = \mathfrak{cos}\,u,$$

$$\frac{\operatorname{tang}\theta - \mathfrak{sin}\,u}{1+\operatorname{tang}\theta\,\mathfrak{sin}\,u} = \mathfrak{cos}\,u.$$

Wird nun ein neues hyperbolisches Argument v von der Beschaffenheit hinzugenommen, dass

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \mathfrak{tang}\frac{v}{2}, \quad \operatorname{tang}\theta = \mathfrak{sin}\,v$$

wird, so bekommt man

$$\mathfrak{sin}\,v = \frac{e^u}{1-\mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,u},$$

$$\mathfrak{cos}\,v = \frac{\mathfrak{cos}\,u\sqrt{1+\mathfrak{cos}^2 u}}{1-\mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,u},$$

$$e^v = \mathfrak{cos}\,v + \mathfrak{sin}\,v = \frac{e^u + \mathfrak{cos}\,u\sqrt{1+\mathfrak{cos}^2 u}}{1-\mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,u}.$$

Wir haben sonach, wenn wir nur beachten, dass zu r_1 und r_2 jeweils die hyperbolischen Argumente $\pm u$ gehören,

$$r_1 = ae^u, \qquad C' = a\,\frac{\mathfrak{cos}\,u + \mathfrak{sin}\,u + \mathfrak{cos}\,u\sqrt{1+\mathfrak{cos}^2 u}}{1-\mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,u},$$

$$r_2 = ae^{-u}, \qquad C'' = a\,\frac{\mathfrak{cos}\,u - \mathfrak{sin}\,u + \mathfrak{cos}\,u\sqrt{1+\mathfrak{cos}^2 u}}{1+\mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,u}.$$

Dann aber lehrt die direkte Ausrechnung, dass in der That die Identität

$$\frac{r_1}{C'} + \frac{r_2}{C''} = 1$$

besteht.

21. Bedeutet $\mathfrak{r}'$ den Krümmungsradius für jenen Punkt der Parabel, dessen Normale mit der Axe einen durch die Relation

$$\operatorname{tang} \psi = \cos \vartheta$$

gekennzeichneten Winkel bildet, und ist für ϱ_1 und ϱ_2 die Bedeutung die gleiche wie in 18), so ist[28]), wenn auch ψ seinen früheren Wert beibehält,

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{8}{\mathfrak{r}'}.$$

Die Parabelgleichung ist, wie bekannt,

$$y^2 = 4ax,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x^3}},$$

und, unter $\mathfrak{r}$ einen beliebigen Krümmungshalbmesser der Parabel verstanden,

$$\mathfrak{r} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$$

folgt. Die Polargleichung der Parabel hat die Form*

$$r = \frac{4a \cos \vartheta'}{\sin^2 \vartheta'},$$

und, insofern $x = r \cos \vartheta'$, ist auch

$$x = 4a \operatorname{cotang}^2 \vartheta'.$$

Nun soll aber

$$\operatorname{cotang}^2 \psi = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4a^2}{y^2} = \frac{a}{x} = \frac{a}{4a \operatorname{cotang}^2 \vartheta'} = \frac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \vartheta'$$

sein, d. h. es ist

$$\operatorname{tang} \psi = \pm 2 \operatorname{cotang} \vartheta'$$

und weiterhin

$$x = a \cos^2 \vartheta = a \,\mathfrak{sec}^2 u.$$

Substituieren wir diesen Wert von x in dem für $\mathfrak{r}$ gefundenen Ausdruck, so geht $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}'$ über, und wir erhalten letztere Grösse als Funktion von u wie folgt:

* Da die Amplituden für die Logocyklik vom Punkt L, für die adjungierte Parabel dagegen vom Punkt O aus gezählt werden, so mussten für sie auch verschiedene Buchstaben, ϑ und ϑ', zur Bezeichnung dienen.

$$\mathfrak{r}' = -2a\frac{(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3 u}$$

und

$$\frac{8}{\mathfrak{r}'} = -\frac{4\cos^3 u}{a(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nehmen wir jetzt die andere Summe vor, so finden wir

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1+\cos^2 u+\sin u\cos u}{ae^u(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1+\cos^2 u-\sin u\cos u}{ae^{-u}(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\cos u(1+\cos^2 u+\sin^2 u)}{a(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\cos^3 u}{a(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{8}{\mathfrak{r}'},$$

wie behauptet war.

22. Die Quadratur der Logocyklik lässt sich auf die Quadratur gewisser anderer Kurven von der dritten Ordnung zurückführen.[29])

Die Logocyklik hat, wie wir wissen, die Gleichung

$$y=(a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Jener Cissoide, welche (s. die Figur) F zur Spitze, DY'' zur Asymptote hat, kommt, wie ebenfalls schon erwähnt ward, die Gleichung

$$y=x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

zu. Endlich gesellen wir zu diesen beiden noch jene Kurve, welche von der bekannten Maria Gaetana Agnesi in ihren „*Istitutioni analitiche ad uso della gioventù Italiana*" (Mailand 1748) näher untersucht und auch nach ihr benannt ward. Hat diese Kurve F zum Scheitel und gleichfalls DY'' zur Asymptote, so ist ihre Gleichung diese:

$$y=2a\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Bezeichnet man mithin die dem nämlichen x zugehörigen Ordinaten für die Logocyklik die Cissoide und die Agnesi-Kurve durch y_l, y_c, y_a, so ist fürs erste

$$\tfrac{1}{2}y_a = y_c \pm y_l.$$

Integrieren wir aber diese Gleichung nach x zwischen beliebigen Grenzen, so erhellt auch:

Der halbe Inhalt der Agnesi-Kurve ist gleich der algebraischen Summe aus den Inhalten der Cissoide und der Logocyklik.

Hieran möge sich gleich eine andere metrische Relation von eigentümlichem Interesse anreihen. Unter der Bissektrix der Agnesi-Kurve verstehen wir eine krumme Linie, welche sämtliche Ordinaten der ersteren halbiert. Wir konstruieren die Ordinaten y_l und y'_l zu zwei zusammengehörigen Punkten der Logocyklik; diesen Ordinaten entsprechen die Ordinaten y_c und y_c' der Cissoide, y_b und y_b' der Bisektrix. Dann aber wird

$$y_c = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \qquad y'_c = (2a-x)\sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

$$y_b = a\sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \qquad y'_b = a\sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

$$y_l = (a-x)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \quad y'_l = (a-x)\sqrt{\frac{2a-x}{x}}.$$

Hieraus folgt rechnerisch

$$y_b y'_b = y_c y'_c + y_l y'_l,$$

„*a curious relation between the six ordinates of the three curves drawn three by three through any two reciprocal points of the logocyclic curve.*“*

23. Die Logocyklik ist eine quadrierbare Kurve.

Einen sehr einfachen Ausdruck bekommen wir besonders dann, wenn wir mit Rummer[31]) das gemischtlinige Dreieck R_1OR_2 (Fig. 13) quadrieren. Bezeichnen wir dessen Inhalt mit $\triangle$, so wird (C Constans)

$$\triangle - C = \tfrac{1}{2}\left(\int r_1^2\, d\vartheta - \int r_2^2\, d\vartheta\right) = \frac{a^2}{2}\left(\int e^{2u}\, du - \int e^{-2u}\, du\right)$$

$$= a^2 \int \frac{e^{2u} - e^{-2u}}{2}\, du = \frac{a^2}{2} \operatorname{\mathfrak{Cos}} 2u.$$

Nehmen wir dagegen die Aufgabe ganz allgemein in Angriff, so erhält ein Kurvensektor, welcher zwischen der Axe und dem der Amplitude ϑ entsprechenden Fahrstrahle gelegen ist, den Wert

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\int_0^{\vartheta} r^2\, d\vartheta.$$

Nun ist $r = ae^u$, $d\vartheta = \operatorname{\mathfrak{Sec}} u\, du$ und

$$\sigma = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^u e^{2u} \operatorname{\mathfrak{Sec}} u\, du = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^u \frac{\operatorname{\mathfrak{Cos}}^2 u + 2 \operatorname{\mathfrak{Sin}} u \operatorname{\mathfrak{Cos}} u + \operatorname{\mathfrak{Sin}}^2 u}{\operatorname{\mathfrak{Cos}} u}\, du.$$

Wir setzen $\operatorname{\mathfrak{Sin}}^2 u = \operatorname{\mathfrak{Cos}}^2 u - 1$ und finden, da offenbar

---

* Bei Booth[30]) findet sich unsere Gleichung in der nachstehenden Form geschrieben:

$$y_b y'_b = y_c y'_c - y_l y'_l.$$

Man überzeugt sich leicht, dass unsere Darstellung die richtige ist.

$$\int \mathfrak{cos}\, u\, du = \mathfrak{sin}\, u, \quad \int \mathfrak{sin}\, u\, du = \mathfrak{cos}\, u$$

ist,

$$\sigma = a^2(\mathfrak{sin}\, u + \mathfrak{cos}\, u - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^u \mathfrak{sec}\, u\, du).$$

Das letztere Integral brauchen wir gar nicht besonders auszuwerten, indem wir ja bereits wissen, dass ihm der Wert

$$\vartheta = \arccos(\mathfrak{sec}\, u)$$

zukommt. Zum Schlusse ist also

$$\sigma = a^2[e^u - \tfrac{1}{2}\arccos(\mathfrak{sec}\, u)].$$

respektive

$$\sigma = ar - \tfrac{1}{2}a^2\vartheta.$$

Halten wir uns an das erstgenannte Integral, so ist die Frage aufzuwerfen, für welche besonders ausgezeichneten Werte von u sich ein einfaches geschlossenes Resultat erwarten lässt. Solche Werte von u sind, wie eine naheliegende geometrische Betrachtung ersehen lässt, einzig 0 und $-\infty$. Setzen wir diese ein, so findet sich, da $\mathfrak{sec}\,(-\infty) = 1 : \mathfrak{cos}\,(-\infty) = 0$ wird, zunächst

$$\sigma' = a^2 \Big|_{-\infty}^{0} [e^u - \tfrac{1}{2}\arccos(\mathfrak{sec}\, u)] = a^2\left(1 - \frac{\pi}{2} - 0 + \tfrac{1}{2}\arccos 0\right).$$

Nun ist offenbar zweierlei zu unterscheiden, indem ja $\arccos 0$ entweder gleich $\frac{2m+1}{2}\pi$ oder gleich $\frac{2m+3}{2}\pi$ sein kann. Im ersteren Falle ist

$$\sigma'_1 = a^2\left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = a^2 - \tfrac{1}{4}a^2\pi.$$

Alsdann haben wir den halben Ovalinhalt und können sagen:

Das Oval der Logocyklik hat einen Flächeninhalt, dessen Wert gefunden wird, wenn man die Differenz eines Quadrates von der Seite a und eines Kreises von der Seite $\frac{1}{2}a$ mit 2 multipliziert.

Andernfalls ist

$$\sigma'_2 = a^2\left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = a^2 + \tfrac{1}{4}a^2\pi.$$

σ'_2 ist offenbar der Inhalt des erst in der Unendlichkeit geschlossenen Dreiecks, welches die Axe, die Asymptote und die Kurve selbst mit einander bilden. Multiplizieren wir σ'_2 mit 2, so können wir als Analogon des vorigen Satzes den folgenden formulieren:

Der gesamte zwischen Logocyklik und Asymptote enthaltene Flächenraum wird gefunden, wenn man die Summe eines Quadrats von der Seite a und eines Kreises von der Seite $\frac{1}{2}a$ mit 2 multipliziert.

Durch Addition endlich findet sich:

Der Gesamtflächeninhalt der Logocyklik ist einem Quadrate von der Seite $2a$ gleich.

Darin also, dass die anscheinend unermessliche, weil ins Unendliche sich erstreckende Fläche der Kurve exakt ermittelt werden kann, stimmt die logocyklische Kurve mit dem Folium Cartesii (s. o.) überein.[32])

24. Die Rektifikation der Logocyklik lässt sich zurückführen auf diejenige der gleichseitigen Hyperbel respektive der Lemniskate.

Um diese bereits im Eingange dieses Kapitels angedeutete Behauptung zu erhärten, müssen wir zunächst die gleichseitige Hyperbel rektifizieren. Man hat (s. oben Kap. II), unter A die Halbaxe einer solchen verstanden,

$$x^2 - y^2 = A^2, \quad x = A \operatorname{\mathfrak{cos}} u, \quad y = A \operatorname{\mathfrak{sin}} u,$$

und sodann die Bogenlänge, vom Scheitel aus gerechnet,

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = A \int_0^u \sqrt{\operatorname{\mathfrak{cos}}^2 u + \operatorname{\mathfrak{sin}}^2 u}\, du.$$

Um dieses Integral womöglich als ein elliptisches zu erkennen, setzen wir

$$\operatorname{\mathfrak{tang}} u = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2 - \sin^2\psi}},$$

$$\operatorname{\mathfrak{cos}} u = \frac{\sqrt{2 - \sin^2\psi}}{\sqrt{2}\cos\psi},$$

$$\operatorname{\mathfrak{sin}} u = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}\cos\psi}.$$

Dann wird, da

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\psi}{\operatorname{\mathfrak{cos}} u \cos^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\psi}{\cos^2\psi} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos\psi}{\sqrt{2 - \sin^2\psi}} = \frac{d\psi}{\cos\psi\sqrt{2 - \sin^2\psi}}$$

ist, die Bogenlänge

$$s = A \int_0^\psi \sqrt{\frac{2 - \sin^2\psi + \sin^2\psi}{2\cos^2\psi}} \cdot \frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{2 - \sin^2\psi}},$$

$$s = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}}.$$

Dies ist der auch von Booth[33]) angegebene, jedoch ungleich weitläufiger hergeleitete Ausdruck für die Bogenlänge der gleichseitigen Hyperbel; derselbe ist, wenn man Legendres Kategorien beibehält, ein mit einer Konstanten multipliziertes elliptisches Integral der dritten Gattung. Legendre zufolge[34]) ist nämlich die dritte kanonische Form

$$\Pi(n, k, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

und wir haben sonach mit Hilfe geeigneter Verwendung von Kreis- und Hyperbelfunktionen das einstweilige Resultat erhalten:

Der vom Scheitel aus gerechnete Bogen einer gleichseitigen Hyperbel von der Axe $2A$ ist dem mit $\frac{A}{\sqrt{2}}$ multiplizierten elliptischen Integrale dritter Gattung

$$\Pi(-1, \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi)$$

gleich.

Was den $\sphericalangle\, \psi$ anbelangt, so ist er mit jenem $\sphericalangle\, \vartheta$, welcher den transscendenten Winkel zu dem obigen gemeinsamen Winkel u darstellt, durch eine einfache Gleichung verknüpft. Drückt man nämlich $\sin\psi$ durch $\mathfrak{tang}\, u$ aus, so erhält man

$$\mathfrak{sin}\, \psi = \frac{\sqrt{2}\, \mathfrak{tang}\, u}{\sqrt{1 + \mathfrak{tang}^2 u}}.$$

Würde man dagegen den mit u korrespondierenden Winkel berechnen, so würde sich unverzüglich herausstellen: Der als veränderliche Grösse verwendete Winkel ψ steht mit jenem Winkel ϑ, welcher den Richtungsunterschied zwischen der grossen Axe und dem nach dem Endpunkt des betrachteten Bogens gezogenen Radiusvektor angiebt, in einer einfachen, durch

$$\sin^2\psi = 2\sin^2\vartheta$$

gekennzeichneten Beziehung.

Gehen wir nunmehr zu der logocyklischen Kurve selbst zurück. Das Problem, dieselbe zu rektifizieren, hat Booth (a. a. O.) aus Gründen der Kürze nicht in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst. Um dies nachzuholen, setzen wir wiederum

$$r = ae^u, \quad d\vartheta = \mathfrak{sec}\, u\, du, \quad \frac{dr}{d\vartheta} = ae^u \mathfrak{cos}\, u,$$

so dass

$$s = a\int\limits_0^u \sqrt{e^{2u} + e^{2u}\cos^2 u}\,\sec u\,du$$

$$= a\left[\int\limits_0^u \sqrt{1+\cos^2 u}\,du + \int\limits_0^u \frac{\sin u}{\cos u}\sqrt{1+\cos^2 u}\,du\right]$$

wird. Einstweilen seien diese beiden Integrale, als unbestimmte betrachtet, durch J_1 und J_2 bezeichnet, so dass

$$s = a\Big|_0^u (J_1 + J_2)$$

geworden ist. Das Integral J_2 ist in endlicher Form auswertbar, wie aus folgendem erhellt. Man hat

$$J_2 = \int \frac{\sin u\,(1+\cos^2 u)}{\cos u\sqrt{1+\cos^2 u}}\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

$$+ \int \frac{\sin u\cos u\,du}{\sqrt{1+\cos^2 u}} = J'_1 + J'_2.$$

Dass J'_2 unter dem Integralzeichen das vollständige Differential eines einfachen Wurzelausdruckes enthält, liegt am Tage; es ist nämlich

$$J'_2 = \sqrt{1+\cos^2 u}.$$

Um J'_1 zu finden, setze man

$$\cos u = \frac{1-y^2}{2y},\quad \sin u\,du = -\frac{1+y^2}{2y^2},\quad \sqrt{1+\cos^2 u} = \frac{1+y^2}{2y};$$

durch diese Substitutionen geht J'_1 über in

$$-\int \frac{1+y^2}{2y^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}\,dy = -2\int \frac{dy}{1-y^2}.$$

Dieses letztere Integral lässt sich wieder sehr leicht auf Hyperbelfunktionen zurückführen; thut man dies, so wird[35])

$$J'_2 = -2\,\mathrm{arctang}\,y = 2\,\mathrm{arctang}\left(\sqrt{1+\cos^2 u} - \cos u\right).$$

Das obige Integral J_1 ist irreduzibel; wir müssen es also so umzugestalten suchen, dass seine Zugehörigkeit zu den elliptischen Integralen ans Licht trete. Zu dem Ende vollziehen wir den — den bisher zum öfteren vorgekommenen Umformungen entgegengesetzten — Übergang vom gemeinsamen Winkel u zum transscendenten Winkel ϑ, d. h. wir setzen

$$\cos u = \frac{1}{\cos\vartheta},\quad du = \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

So wird denn

$$J_1 = \int \frac{\sqrt{1+\cos^2\vartheta}}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta = \int \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta\sqrt{1+\cos^2\vartheta}} + \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1+\cos^2\vartheta}}.$$

Integriert man zwischen den Grenzen 0 und ϑ, so ergiebt sich

$$\Big|_0^\vartheta J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1-\sin^2\vartheta)\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\vartheta}} + \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\vartheta}}\right].$$

Von diesen beiden Integralen hat das erste die Normalform der elliptischen Integrale dritter Gattung, das zweite die Normalform der elliptischen Integrale erster Gattung, und man kann folglich schreiben:

$$\Big|_0^\vartheta J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Pi\left(-1, \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \vartheta\right) + F\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \vartheta\right)\right].$$

Stellt man J_1 und J_2 zusammen, in letzterem zugleich zwischen den Grenzen 0 und u integrierend und sodann u durch ϑ ersetzend, so nimmt der für die Bogenlänge der Logocyklik berechnete Wert diese Form an:

$$s = a\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Pi\left(-1, \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \vartheta\right) + F\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \vartheta\right)\right) + \sqrt{1+\sec^2\vartheta}\right.$$
$$\left. + 2\,\mathrm{arctang}\left(\sqrt{1+\sec^2\vartheta} - \sec\vartheta\right) - \sqrt{2} - 2\,\mathrm{arctang}\left(\sqrt{2}-1\right)\right].$$

Um die volle geometrische Deutung der hier auftretenden Ausdrücke zu erhalten, erinnern wir uns daran, dass die Polargleichung der Lemniskate (vergl. Kapitel II) durch*

$$r^2 = a^2(\cos^2\vartheta' - \sin^2\vartheta')$$

gegeben ist. Bezeichnen wir durch s' ihre vom Pol (Doppelpunkt) aus gerechnete Bogenlänge, so wird, da

$$\frac{dr}{d\vartheta'} = -\frac{2a\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sqrt{\cos^2\vartheta' - \sin^2\vartheta'}}$$

ist,

$$s = a\int_0^{\vartheta'} \sqrt{\cos^2\vartheta' - \sin^2\vartheta' + \frac{4\sin^2\vartheta'\cos^2\vartheta'}{\cos^2\vartheta' - \sin^2\vartheta'}}\,d\vartheta'$$

$$= a\int_0^{\vartheta'} \sqrt{\frac{\cos^4\vartheta' + 2\cos^2\vartheta'\sin^2\vartheta' + \sin^4\vartheta'}{\cos^2\vartheta' - \sin^2\vartheta'}}\,d\vartheta',$$

* Da man im voraus nicht wissen kann, ob die Amplitude der Lemniskatengleichung mit unserem gewöhnlichen ϑ ihrer geometrischen Bedeutung nach übereinstimmt — in der That stellt sich ja nachher das Gegenteil heraus —, so erschien es angemessen, erstere durch einen Akut kenntlich zu machen.

$$s' = \frac{a}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\vartheta'} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{1 - \sin^2\vartheta' - \sin^2\vartheta'}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\vartheta'} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{1 - 2\sin^2\vartheta'}}.$$

Indem wir $\sin^2\vartheta'$ durch $\frac{1}{2}\sin^2\vartheta$ ersetzen, finden wir endlich

$$s' = \frac{a}{\sqrt{2}} F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \vartheta).$$

Unser Gesamtergebnis können wir deshalb in folgende Worte kleiden:

Die Bogenlänge der logocyklischen Kurve setzt sich zusammen aus: I) einem Bogen einer gleichseitigen Hyperbel von der Axe $2a$, II) einem Bogen einer Lemniskate von der gleichen Axe $2a$, III) einer geraden Linie von bestimmter Länge.*

Diesem Resultat hat Mansion in seinem Zusatz zu einer Arbeit des Verfassers dieser Schrift noch eine neue beachtenswerte Seite abgewonnen.[36]) Indem man

$$s = \int\limits_0^{\vartheta} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\vartheta} + 1} \,.\, r\, d\vartheta, \quad L = a \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + \cos^2\vartheta}},$$

$$T = a \operatorname{tang} \vartheta \sqrt{1 + \cos^2\vartheta}, \qquad E = a \int\limits_0^{\vartheta} \sqrt{1 + \cos^2\vartheta}\, d\vartheta$$

setzt, findet man, s teilweise integrierend,

$$s = 4L + 2T - 2E.$$

Hier bedeutet T jenes Stück der Tangente einer gleichseitigen Hyperbel von der Bogenlänge

$$H = a \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta \sqrt{1 + \cos^2\vartheta}},$$

welches enthalten ist zwischen dem Berührungspunkt und dem Fusspunkt des aus dem Mittelpunkt auf die Tangente gefällten Lotes, und E ist ein Bogen einer durch die Gleichung $2x^2 + y^2 = a^2$, respektive die Parameterdarstellung

* Es mag hier, um Missverständnisse hintanzuhalten, daran erinnert werden, dass die Bezeichnung arctang eine reine Zahl vorstellt, nämlich die Masszahl eines gewissen Doppelsektors in der gleichseitigen Einheitshyperbel. Mit der Rektifikation der Hyperbel hat dieser Ausdruck, den die Mathematiker in nicht völlig logischer Weise dem bekannten arctang nachgebildet haben, selbstverständlich nicht das mindeste zu thun.

$$x = a\cos\vartheta, \quad y = \sqrt{2}\,a\sin\vartheta$$

bestimmten Ellipse. Ersetzt man L durch H, so wird

$$s = 4H - 4T + 2E,$$

in Worten (a. a. O.): „*L'arc de logocyclique peut donc s'exprimer au moyen d'un arc d'ellipse et d'un arc de lemniscate, ou d'un arc d'ellipse et d'un arc d'hyperbole.*"

Nachdem somit alle wichtigeren bei der Diskussion einer Kurve sich ergebenden Fragen erledigt sind, erachten wir unsere Aufgabe, soweit sie sich auf die logocyklische Kurve bezog, gleichfalls für abgeschlossen. Erwähnt möge noch werden, dass noch nach Beendigung dieses Kapitels eine sehr inhaltreiche Abhandlung über unsere Kurve aus der Feder Zahradniks erschienen ist[37]; die Untersuchung gründet sich auf die Zerlegung der cartesischen Gleichung in die beiden Gleichungen

$$x = \frac{au}{(1+u)(1+u^2)}, \quad y = \frac{au^2}{(1+u)(1+u^2)}$$

mit Hilfe des Parameters $u = \operatorname{arctang}\vartheta$.

---

1) Booth, A treatise on some new geometrical methods containing essays on tangential coordinates, pedal coordinates, reciprocal polars, the trigonometry of the parabola, the geometric origin of logarithms, the geometrical properties of elliptic integrals and other kindred subjects, Vol. I., London 1873, S. 292 flgg.

2) Ibid., A memoir on the trigonometry of the parabola and the geometrical origin of logarithms, being the substance of a paper read at Cheltenham before the mathematical section of the british association for the advancement of science, London 1856.

3) Lehmus, Aufgaben aus der höheren Mathematik, Berlin 1842, S. 120.

4) Rummer, Neue Sätze über eine krumme Linie mit vorzugsweise geometrischen Ableitungen, Heidelberg 1868.

5) Briot et Bouquet, Leçons de géométrie analytique, Paris 1863, S. 21 flgg.

6) Falisse, Cours de géométrie analytique, Mons 1873, S. 430 flgg.

7) Painvin, Principes de géométrie analytique, Paris 1866, S. 429 flgg.

8) Ritt-Montucci, La strophoide, Nouv. Ann. de Mathém., 1. sér., tome V, S. 470 flgg.

9) Maleyx, Propriétés de la strophoide, Nouv. Ann. de Mathém., 2. sér., tome XIII, S. 404 flgg., 468 flgg.; tome XIV, S. 193 flgg., 241 flgg.

10) D'Ocagne, Applications de géométrie cinématique plane, ibid. 2. sér., tome XIX, S. 289.

11) Haub, Über die geometrischen Eigenschaften der Kurve, deren Gleichung $y^2(2a - x) - x(a - x)^2 = 0$ lautet, Rössel 1875.

12) Briot et Bouquet, S. 334 flgg.

13) Rechenbach, Diskussion der durch die Gleichung $ay^3 + bx^3 = abxy + c^3(x+y)$ dargestellten krummen Linie, Münster 1872, S. 11 flgg.

14) Booth, A treatise etc., S. 297.

15) Picquet, Mémoire sur les courbes et surfaces anallagmatiques, Association française pour l'avancement scientifique, séance du 27 août 1878.

16) Ziegler, Einfache Theorie der stereographischen Projektion, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 3. Jahrg., S. 151 flgg.

17) Stammer, Bemerkungen über das Prismatoid und über die stereometrischen Beweise von Baltzer und Ziegler, ibid. 6. Jahrg., S. 53 flgg.

18) De Longchamps, Sur les courbes conchoidales, Nouv. Corresp. Math., tome V, S. 147.

19) D'Ocagne, S. 291.

20) Rummer, S. 7.

21) Booth, A treatise etc., S. 297.

22) Rummer, S. 21.

23) Brill und Noether, Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Mathem. Ann., 7. Band, S. 272.

24) Booth, A treatise etc., S. 298.

25) Ibid. S. 299.

26) Ibid. S. 308.

27) Ibid. S. 309.

28) Ibid. S. 312.

29) Ibid. S. 302 flgg.

30) Ibid. S. 303.

31) Rummer, S. 39.

32) Booth, A treatise etc., S. 302.

34) Ibid. S. 305.

34) Enneper, Elliptische Funktionen; Theorie und Geschichte, Halle 1876, S. 159.

35) Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, Halle 1881, S. 129, 167.

36) Günther-Mansion, Note sur la logocyclique, ou strophoide, Mathesis, tome I, S. 83 flgg.

37) Zahradnik, Vlastnosti trojin oskulačnich na strophoidě, Časopis pró pěstování mathematikÿ a fÿsikÿ, 1881, S. 261 flgg.

Viertes Kapitel.

Booths parabolische Trigonometrie und deren Zurückführung auf ihren wahren Charakter.

§ 1. Stehen drei elliptische Integrale von der ersten Legendreschen Normalform in der Beziehung, dass

$$F(\varphi, k) + F(\psi, k) = F(\chi, k)$$

ist, so stehen, wie in der Theorie der elliptischen Funktionen gezeigt wird, die oberen drei Grenzen φ, ψ und χ dieser Integrale ebenfalls in einer sehr einfachen Beziehung; es ist nämlich

$$\cos\chi = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\chi}$$

die an eine bekannte Formel der Raumtrigonometrie gemahnende Bedingungsgleichung.[1]) Für $k = 0$ wird dadurch ausgesagt, dass

$$\cos\chi = \cos(\varphi + \psi),$$

χ also die Summe der beiden Winkel φ und ψ sein muss; für $k = 1$ dagegen erhalten wir

$$\cos\chi = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\chi$$

oder auch

$$\sec\chi = \sec\varphi\sec\psi + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi,$$

indem die erstere Gleichung durch das Produkt $\cos\varphi\cos\psi\cos\chi$ dividiert wurde. Gehen wir zu den obigen Integralen zurück, so können wir der letzten Gleichung offenbar auch die folgende substituieren:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int \frac{d\psi}{\cos\psi} = \int \frac{d\chi}{\cos\chi}.$$

Zu eben diesem Integral führen uns aber auch unsere früheren Betrachtungen über die Rektifikation der logocyklischen Kurve. Jeder Bogen einer solchen wird, wie sich uns ergab, durch die Summe zweier elliptischer Integrale und einer Streckenmasszahl, beides multipliziert mit einer Konstanten, ausgedrückt. Fassen wir diesen letztern Teil einzig und allein ins Auge und bezeichnen ihn mit m, so ist (s. o.)

$$m = \sqrt{1 + \sec^2\vartheta} + 2\,\mathrm{arctang}\,(\sqrt{1 + \sec^2\vartheta} - \sec\vartheta).$$

Die uns bereits geläufige Substitution

$$\sec\vartheta = \operatorname{cotang}\vartheta'$$

führt, da

$$\operatorname{arctang}\omega = \log\sqrt{\frac{1+\omega}{1-\omega}}$$

gesetzt werden darf, zu dem weiteren Ergebnis[2])

$$m = \operatorname{cosec}\vartheta' - \int\frac{d\vartheta'}{\cos\vartheta'}.$$

Damit ist unsere Behauptung von vorhin gerechtfertigt und es fällt zugleich jetzt schon etwas Licht auf die im folgenden immer klarer hervortretende Thatsache, dass dieses vierte und das voraufgehende dritte Kapitel inhaltlich sich auf das engste an einander anschliessen.

An dritter Stelle endlich wird man auf das obige Integral geführt durch die Rektifikation der Parabel. Aus deren Gleichung

$$y^2 = 4px$$

folgt die Bogenlänge, wenn noch $\frac{y}{2p} = \sin u$ gesetzt wird,

$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\sqrt{1 + \left(\frac{y}{2p}\right)^2}\,dy = 2p\int\sqrt{1 + \sin^2 u}\cos u\,du$$

$$= p\int(1 + \cos 2u)\,du = p\,(u + \sin u\cos u).$$

Wird jetzt der transscendente Winkel ϑ eingeführt, so wird weiter

$$\sin u = \operatorname{tang}\vartheta, \quad \cos u = \sec\vartheta, \quad u = \log\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\vartheta\right),$$

oder auch, es wird, wenn wir den letzteren Ausdruck in Form eines Integrals schreiben,

$$s = p\left(\sec\vartheta\operatorname{tang}\vartheta + \int\frac{d\vartheta}{\cos\vartheta}\right).$$

Zu dem Integrale $\int\sec\vartheta\,d\vartheta$ sind wir somit auf dreierlei unter sich völlig verschiedene Weisen gelangt: erstens durch Rektifikation der Logocyklik, zweitens durch Rektifikation der Parabel und endlich drittens durch Spezialisierung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung. Diese Kennzeichnung der Wege, auf welchen man zu der für die Summation parabolischer und logocyklischer Bögen gleich bedeutungsvollen Gleichung

$$\text{I)} \qquad \int\sec\varphi\,d\varphi + \int\sec\psi\,d\psi = \int\sec\chi\,d\chi$$

gelangen kann, war notwendig, um die Berechtigung zu Booths Einführung einer neuen geometrischen Disciplin zu übersehen. Die Vor-bedingung dieser letzteren hatte der Verfasser schon früher mit den folgenden Worten zu kennzeichnen versucht*[4]):

„Je nachdem das Legendre elliptische Integral der ersten Gattung einen der Null oder der Eins gleichen Modul hat, liefert es die Arcus- oder die Gudermannsche Funktion und damit respektive die Rektifikation des Kreises oder der Parabel."

In der That: Auf diese Gleichung I) stützt James Booth[6]) das Prinzip der ihm eigentümlichen symbolischen Trigonometrie der Parabel.

Zunächst geht er allerdings von der Gleichung (s. o.)

$$\text{II)} \qquad \sec\chi = \sec\varphi \sec\psi + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi$$

aus. Aus ihr folgt sofort

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{1 + \sin\varphi \sin\psi},$$

und durch Multiplikation

$$\text{III)} \qquad \operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang}\varphi \sec\psi + \sec\varphi \operatorname{tang}\psi.$$

Differentiiert man Gleichung III) nach allen drei in ihr vorkommenden Veränderlichen, so ergiebt sich

$$\sec^2\chi\, d\chi = \sec\varphi\, d\varphi\, (\sec\varphi \sec\psi + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi) \\ + \sec\psi\, d\psi\, (\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi + \sec\varphi \sec\psi).$$

Berücksichtigt man II), hebt beiderseits mit $\sec\chi$ und integriert, so erhält man wieder wie oben in I)

$$\int \sec\varphi\, d\varphi + \int \sec\psi\, d\psi = \int \sec\chi\, d\chi.$$

Man bemerkt, dass die Relationen II) und III) den bekannten Additionstheoremen der Goniometrie in mancher Hinsicht sehr ähnlich sich verhalten. Um diese Analogie noch deutlicher zum Ausdruck zu bringen, führt Booth eine völlig neue symbolische Bezeichnung ein; er setzt** (a. a. O.) — nachdem er jedoch bereits in seinen Unter-

---

* Cayley ist es eben gewesen, der, den Zusammenhang fraglichen Integrales mit der von Gudermann eingeführten „hyperbolischen Länge" erkennend, den Ausdruck,

$$F(1, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \sec\varphi\, d\varphi$$

mit dem Namen der „Gudermannian function" belegt und einer besondern Beachtung gewürdigt hat.[5])

** Die Zeichen erscheinen hier im Texte gegen das Boothsche Original um deswillen etwas abgeändert, weil das dort gewählte Symbol $\perp$ in deutschen Werken vielfach das Senkrechtstehen zweier Geraden kennzeichnet, Irrungen also nicht ausgeschlossen sein würden.

suchungen über die räumliche Darstellung der elliptischen Integrale[7]) die Grundzüge niedergelegt hatte — die folgenden Symbolisierungen fest:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}(\varphi \perp \psi) &= \operatorname{tang}\varphi \sec\psi + \operatorname{tang}\psi \sec\varphi,\\
\operatorname{tang}(\varphi \top \psi) &= \operatorname{tang}\varphi \sec\psi - \operatorname{tang}\psi \sec\varphi,\\
\sec(\varphi \perp \psi) &= \sec\varphi \sec\psi + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi,\\
\sec(\varphi \top \psi) &= \sec\varphi \sec\psi - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi.
\end{aligned}$$

Was diese neuen Zeichen anlangt, so nennt Booth dieselben[7]) „*logarithmic plus and minus*"; auch fügt er bei, dass durch eine imaginäre Umformung, deren Wesen aber nur ganz kurz skizziert wird, diese Zeichen in das gewöhnliche + und — umgewandelt werden könnten.

Es wird sich zeigen, dass mit Festhaltung dieser symbolischen Darstellungsweise in der That ein vollständig abgeschlossenes System sich konstruieren lässt. Da jedoch in der Wissenschaft neue Symbole und Algorithmen, für welche erst wieder besondere Operationsregeln ausgemittelt werden müssen, am besten ganz vermieden werden, so stellen wir uns zunächst die Aufgabe, den Zusammenhang der Boothschen Symbolik mit anderen, geläufigeren Methoden festzustellen. Hierzu gelangen wir sehr leicht, indem wir die durch die Fundamentalgleichung vorgeschriebenen Integrationsprozesse wirklich ausführen.

Man weiss, dass

$$\int \sec\varphi \, d\varphi = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

ist. Sucht man andererseits aus der uns bekannten Relation

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

unter u den zu φ als transscendentem Winkel gehörigen gemeinsamen Winkel verstanden, u selbst als Funktion von φ darzustellen, so hat man e^u aus der Gleichung

$$\frac{e^u - 1}{e^u + 1} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

zu berechnen. Dies giebt

$$e^u = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = u.$$

Zu den drei Winkeln φ, ψ, χ, welche den Namen konjugierte Amplituden führen, mögen als konjugierte hyperbolische Argumente die drei Sektoren u, v, w hinzutreten; geschieht dies, so sind wir in der Lage, die Boothsche Bedingungsgleichung

$$\int \sec\varphi\, d\varphi + \int \sec\psi\, d\psi = \int \sec\chi\, d\chi$$

oder die ihr äquivalente Gleichung

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)$$

durch die ungleich einfachere zu ersetzen:

$$\text{V)}\qquad u+v=w.$$

Sofort wird jetzt auch der volle Sinn der Boothschen symbolischen Operationszeichen klar. Da nämlich aus V) mit Rücksicht auf die im zweiten Kapitel erörterten Additionssätze der Hyperbelfunktionen sofort die Richtigkeit des Systems

$$\text{VI)}\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{sin}\, w &= \mathfrak{sin}\,(u+v) = \mathfrak{sin}\, u\, \mathfrak{cos}\, v + \mathfrak{cos}\, u\, \mathfrak{sin}\, v,\\ \mathfrak{sin}\, w' &= \mathfrak{sin}\,(u-v) = \mathfrak{sin}\, u\, \mathfrak{cos}\, v - \mathfrak{cos}\, u\, \mathfrak{sin}\, v,\\ \mathfrak{cos}\, w &= \mathfrak{cos}\,(u+v) = \mathfrak{cos}\, u\, \mathfrak{cos}\, v + \mathfrak{sin}\, u\, \mathfrak{sin}\, v,\\ \mathfrak{cos}\, w' &= \mathfrak{cos}\,(u-v) = \mathfrak{cos}\, u\, \mathfrak{cos}\, v - \mathfrak{sin}\, u\, \mathfrak{sin}\, v \end{aligned}\right.$$

folgt, da ferner, ebenfalls nach dem zweiten Kapitel,

$$\operatorname{tang}\varphi = \mathfrak{sin}\, u,\quad \operatorname{tang}\psi = \mathfrak{sin}\, v,$$
$$\sec\varphi = \mathfrak{cos}\, u,\quad \sec\psi = \mathfrak{cos}\, v$$

ist, so sind wir zu einer Reihe von Thatsachen gelangt, deren Gesamtheit wir in nachfolgender These zusammendrängen wollen:

Die von James Booth in Vorschlag gebrachte symbolische Trigonometrie, deren Zusammenhang mit der Parabel sich demnächst herausstellen wird, geht augenblicklich in die gewöhnliche Trigonometrie der gleichseitigen Hyperbel über, sobald man jede der drei konjugierten Amplituden durch das entsprechende konjugierte hyperboliche Argument ersetzt. Die Operationszeichen $\perp$ und $\top$ erweisen sich bei Vornahme dieser Transformation als identisch mit den Rechnungszeichen Plus und Minus.*

---

* Booths Biograph Glaisher bezeichnet, worauf bereits früher[8)] von uns hingewiesen wurde, die neue Bezeichnung als eine sehr eigenartige, welche mit $+$ und $-$ unverkennbare Ähnlichkeit habe.[9)] Warum dies sich so verhält, ja warum diese Ähnlichkeit streng genommen auf eine versteckte Identität hinausläuft, ist oben gezeigt worden. In dem Falle eines Moduls 1 lassen sich die Boothschen Symbole aus der für die elliptischen Funktionen charakteristischen Gleichung

$$\operatorname{tang}\operatorname{am}(u+v) = \operatorname{tang}\operatorname{am} u \sec\operatorname{am} v + \operatorname{tang}\operatorname{am} v \sec\operatorname{am} u$$

in einer anderen Weise, nämlich als Inversionen der inversen Funktionen jener Funktionen *am* (nach Jacobi) darstellen.

Die zunächst zu beantwortende Frage ist nunmehr die: aus welchem Grunde diese Formeln mit der Parabel in Beziehung gesetzt werden müssen. Wie wir gesehen haben, wird die Länge eines vom Scheitel der Parabel ab gerechneten Bogens dieser Kurve, wenn

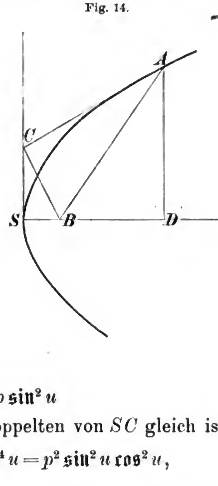
$$y^2 = 4px$$

deren Gleichung und $u = \operatorname{arc\,sin} \frac{y}{2p}$ ist, durch

$$p(u + \sin u \cos u)$$

ausgedrückt. Wir wählen für diesen Ausdruck die der Boothschen[10]) nachgebildete Bezeichnung $P(p, u)$. Wollen wir die einzelnen in P vereinigten Bestandteile geometrisch interpretieren, so wenden wir uns zu Fig. 14, in welcher B den Brennpunkt, S den Scheitel, A einen willkürlichen Punkt einer apollonischen Parabel bedeutet. Konstruiert man deren Scheiteltangente und bezeichnet mit C deren Durchschnitt mit der in A an die Parabel gelegten Berührenden, so ist aus den Elementen der Kegelschnittlehre bekannt, dass, wenn noch BC gezogen wird, $\sphericalangle ACB$ ein rechter sein muss. Setzt man $\sphericalangle SBC = \vartheta$, so ist, unter u den zu ϑ gehörigen gemeinsamen Winkel verstanden,

Fig. 14.



$$-\frac{dy}{dx} = -\frac{2p}{y} = -\operatorname{cotang} \vartheta = \operatorname{cosec} u.$$

Dies liefert, wenn noch AD normal zur Axe der Parabel gezogen wird,

$$AD = 2p \sin u, \quad SD = p \sin^2 u$$

und, da AD aus bekannten Gründen dem Doppelten von SC gleich ist,

$$\overline{AC}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2 = p^2 \sin^2 u + p^2 \sin^4 u = p^2 \sin^2 u \cos^2 u,$$
$$AC = p \sin u \cos u.$$

Das zwischen Tangential- und Fusspunkt des Brennpunktlotes enthaltene Stück der Berührungslinie wird im Sprachgebrauch des polaren Systems als Subtangente bezeichnet. Wir haben also jetzt folgende Wahrheit gewonnen:

> Bezieht man eine Parabel auf ein Polarkoordinatensystem, dessen Pol der Brennpunkt, dessen Axe die Parabelaxe in dem Sinne repräsentiert, dass dem Scheitel die Amplitude Null zukommt, so setzt sich die Länge eines vom Scheitel ab ge-

messenen Kurvenbogens aus zwei Teilen zusammen: nämlich erstens aus der Subtangente des Endpunktes und zweitens aus dem mit dem vierten Teile des Parameters multiplizierten hyperbolischen Argumente, welches mit der halben Amplitude des Endpunktes korrespondiert.

Zieht man, um auch die Richtigkeit dieser letzteren Behauptung zu erweisen, AB, so ist

$$\operatorname{tang}(\sphericalangle ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{p \sin u \cos u}{p \cos u} = \sin u = \operatorname{tang} \vartheta,$$

also auch

$$\sphericalangle ABC = \vartheta, \quad \sphericalangle ABS = 2\vartheta,$$

wie eben behauptet war.

Die Differenz zwischen Bogen und Subtangente, d. h. die Grösse $p\bar{u}$, bezeichnet Booth (a. a. O.) als Restbogen („*residual arc*").

Unsere weitere Aufgabe wird nun eine doppelte sein:

Es handelt sich in erster Linie darum, zu zeigen, wie in der That durch sachgemässe Diskussion der Grösse $P(p, u)$ eine Anzahl wichtiger Sätze über parabolische Bogenlängen begründet, d. h. eine Trigonometrie der Parabel erhalten werden kann; in zweiter Linie soll dargethan werden, dass Booths symbolische Formeln ausnahmslos bei richtiger Interpretation auf wohlbekannte Thatsachen der hyperbolischen Goniometrie führen.*

Der in den bezüglichen Boothschen Schriften eingehaltene Gang wird wesentlich auch für uns im folgenden massgebend sein.

Wir stossen hier zunächst auf eine Tabelle[14]), in welcher die Formeln der parabolischen und cyklischen Trigonometrie in dualistischer Anordnung einander gegenübergestellt werden. Wir reproduzieren dieselbe in ihren wesentlichen Bestandteilen nachstehend, indem wir je-

---

* Man ist wohl berechtigt, die Frage aufzuwerfen, wie es denn gekommen sei, dass ein so äusserst scharfsinniger Geometer wie Booth den eigentlichen Charakter seiner parabolischen Trigonometrie verkennen und somit, statt mit den vorhandenen mathematischen Hilfsmitteln auszureichen, eine neue Gattung von Symbolen und Algorithmen eingeführt habe, während doch — wie erst unlängst von August[11]) sehr mit Recht betont worden ist — ohne die zwingendste Notwendigkeit alle derartigen Rechnungsweisen nicht zur Verwendung gelangen sollten. Die Frage ist um so berechtigter, als Booth mit den Hyperbelfunktionen keineswegs unbekannt, vielmehr von deren Zulässigkeit und Nützlichkeit überzeugt war. Er hebt z. B. hervor[12]), dass die Lehre von den Logarithmen imaginärer Zahlen auf das innigste mit jener von den cyklischen Funktionen verwandt sei, er kennt die Arbeiten eines der hervorragendsten Schriftsteller über die Hyperbelfunktionen, wie u. a. aus folgendem Satze erhellt[13]): „*Indeed it was long ago ob-*

doch zu den vorhandenen zwei Rubriken noch eine dritte, die Ergebnisse der hyperbolischen Goniometrie enthaltend, hinzutreten lassen. Um die Tabelle in dieser Form richtig zu verstehen, ist also nur erforderlich, sich stets die Thatsache gegenwärtig zu halten, dass die von Booth benutzten Winkel φ und ψ als transscendente Winkel zu den von uns eingeführten hyperbolischen Sektoren u und v gehören, so zwar, dass

$$\mathfrak{tang}\,\tfrac{1}{2}\left\}\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right. = \operatorname{tang}\,\tfrac{1}{2}\left\}\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right.,\quad \text{respektive}\left\}\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right. = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\left\}\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right.\right)$$

genommen werden muss. Unter diesen Voraussetzungen stehen sich die drei Formelreihen gegenüber, wie dies auf pag. 68 ersichtlich.

Umstehende Zusammenstellung mag genügen, um erstens einen genügenden Überblick über die Formeln der parabolischen Trigonometrie zu geben, und um zweitens durch den Augenschein nachzuweisen, dass in der That die Formeln der ersten Kolumne in die der dritten sich verwandeln, sobald man sin in $\mathfrak{tang}$, cos in $\mathfrak{sec}$, tang in $\mathfrak{sin}$, sec in $\mathfrak{cos}$, $\perp$ in $+$, $\top$ in $-$ umsetzt. Wir werden noch weiterhin auf einzelne dieser Relationen zurückzukommen und insbesondere auch zu zeigen haben, wie Booth hie und da auf Umwegen zu Resultaten gelangt, welche in Wirklichkeit nur dem einfachen Übergang von der ersten zur dritten Rubrik unserer Tabelle entsprechen.

Sehen wir jetzt zu, wie sich die, sei es in der einen, sei es in der anderen Art geschriebenen Formeln zur Messung parabolischer Bögen benutzen lassen.

Es seien[15]) φ, ψ und χ drei konjugierte Amplituden von der Beschaffenheit, dass

$$\int \sec\varphi\, d\varphi + \int \sec\psi\, d\varphi = \int \sec\chi\, d\chi$$

ist. Die zugehörigen hyperbolischen Argumente u, v, w sind demgemäss, wie man weiss, durch die Gleichung $u + v = w$ verbunden. Man hat sonach

---

served, by **Bernoulli**, **Lambert** *and by others, that the ordinates of an equilateral hyperbola might be expressed by real exponentials whose exponents are sectors of the hyperbola; but the analogy being illusory, never led to any useful results."* Diese Schlussworte charakterisieren den eigentümlichen Irrtum des hochverdienten Mannes und geben den geforderten Aufschluss betreffs der oben gestellten Frage. Booth kannte wohl die Hyperbelfunktionen als solche, nicht dagegen die durch die Theorie des gemeinsamen und transscendenten Winkels hergestellte nahe Beziehung zu Kreisfunktionen reellen Argumentes, indem er sonach die ersteren lediglich auf die — allerdings ziemlich unfruchtbaren — Kreisfunktionen imaginären Argumentes zurückzuführen vermochte. Wir werden noch mehrfach Gelegenheit bekommen, diesem eigentümlichen, anscheinend noch nirgends aufgedeckten Sachverhalt unsere Aufmerksamkeit zu widmen.

$\operatorname{tang}(\varphi \,{}^{\perp}_{\top}\, \psi) = \operatorname{tang}\varphi \sec\psi \pm \operatorname{tang}\psi \sec\varphi,$	$\sin(\varphi \pm \psi) = \sin\varphi\cos\psi \pm \sin\psi\cos\varphi,$	$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \sin v \cos u;$
$\sec(\varphi \,{}^{\perp}_{\top}\, \psi) = \sec\varphi\sec\psi \pm \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi,$	$\cos(\varphi \pm \psi) = \cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi,$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \pm \sin u \sin v;$
$\sin(\varphi \,{}^{\perp}_{\top}\, \psi) = \dfrac{\sin\varphi \pm \sin\psi}{1 \pm \sin\varphi\sin\psi},$	$\operatorname{tang}(\varphi \pm \psi) = \dfrac{\operatorname{tang}\varphi \pm \operatorname{tang}\psi}{1 \mp \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi},$	$\operatorname{tang}(u \pm v) = \dfrac{\operatorname{tang} u \pm \operatorname{tang} v}{1 \pm \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v};$
$\operatorname{tang}(\varphi \perp \varphi) = 2\operatorname{tang}\varphi\sec\varphi,$	$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,$	$\sin 2u = 2\sin u \cos u;$
$\sec\varphi = \dfrac{e^{\int\sec\varphi\,d\varphi} + e^{-\int\sec\varphi\,d\varphi}}{2},$	$\cos\varphi = \dfrac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2},$	$\cos u = \dfrac{e^{u} + e^{-u}}{2};$
$\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{e^{\int\sec\varphi\,d\varphi} - e^{-\int\sec\varphi\,d\varphi}}{2},$	$\sin\varphi = \dfrac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i},$	$\sin u = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{2};$
$1 + i\operatorname{tang}(\varphi\perp\varphi) = (\sec\varphi + i\operatorname{tang}\varphi)^2,$	$1 + \sin 2\varphi = (\cos\varphi + \sin\varphi)^2,$	$1 + i\sin 2u = (\cos u + i\sin u)^2;$
$2\,.\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\\ \sec^2\end{matrix}\right\vert \varphi = \sec(\varphi\perp\varphi) \mp 1,$	$2\,.\left.\begin{matrix}\sin^2\\ \cos^2\end{matrix}\right\} \varphi = 1 \mp \cos 2\varphi,$	$2\,.\left.\begin{matrix}\sin^2\\ \cos^2\end{matrix}\right\vert u = \cos 2u \mp 1;$
$\operatorname{tang}(\varphi\perp\psi)\operatorname{tang}(\varphi\top\psi) = \operatorname{tang}^2\varphi - \operatorname{tang}^2\psi,$	$\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi) = \sin^2\varphi - \sin^2\psi,$	$\sin(u+v)\sin(u-v) = \sin^2 u - \sin^2 v;$
$\sec(\underbrace{\varphi\perp\varphi\perp\cdots}_{n}) + \operatorname{tang}(\underbrace{\varphi\perp\varphi\perp\cdots}_{n}) = (\sec\varphi + \operatorname{tang}\varphi)^n,$	$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n,$	$\cos nu + \sin nu = (\cos u + \sin u)^n;$*
$\sec(\varphi_1\perp\varphi_2\perp\cdots\perp\varphi_n) + \operatorname{tang}(\varphi_1\perp\varphi_2\perp\cdots\perp\varphi_n) = \prod_{k=1}^{k=n}(\sec\varphi_k + \operatorname{tang}\varphi_k),$	$\cos(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n) = \prod_{k=1}^{k=n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),$	$\cos(u_1+u_2+\cdots+u_n) + \sin(u_1+u_2+\cdots+u_n) = \prod_{k=1}^{k=n}(\cos u_k + \sin u_k);$
$\dfrac{1+i\sin\varphi}{1-i\sin\varphi} = \sqrt{\dfrac{1+i\operatorname{tang}(\varphi\perp\varphi)}{1-i\operatorname{tang}(\varphi\perp\varphi)}},$	$\dfrac{1+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}\varphi} = \sqrt{\dfrac{1+\sin 2\varphi}{1-\sin 2\varphi}},$	$\dfrac{1+i\operatorname{tang} u}{1-i\operatorname{tang} u} = \sqrt{\dfrac{1+i\sin 2u}{1-i\sin 2u}};$
$\dfrac{\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}\\ \sin\end{matrix}\right\}\varphi \,{}^{\perp}_{+}\, \psi \quad \left.\begin{matrix}\operatorname{tang}\\ \sin\end{matrix}\right\}\varphi \,{}^{\top}_{-}\, \psi}{\left.\begin{matrix}\sec^2\\ \cos^2\end{matrix}\right\}\varphi \quad \left.\begin{matrix}\sec^2\\ \cos^2\end{matrix}\right\}\psi} = \left.\begin{matrix}\sin^2\\ \operatorname{tang}^2\end{matrix}\right\}\varphi - \left.\begin{matrix}\sin^2\\ \operatorname{tang}^2\end{matrix}\right\}\psi,$		$\dfrac{\sin(u+v)\sin(u-v)}{\cos^2 u\cos^2 v} = \operatorname{tang}^2 u - \operatorname{tang}^2 v;$
$\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{\sec(\varphi\perp\varphi)-1}{\sec(\varphi\perp\varphi)+1}},$	$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}},$	$\operatorname{tang} u = \sqrt{\dfrac{\cos 2u - 1}{\cos 2u - 1}};$

* Diese Formeln repräsentieren ersichtlich den Moivreschen Lehrsatz, beziehungsweise für Parabel, Kreis und gleichseitige Hyperbel, und zwar ist die zuletzt angeschriebene Form auch die dem Theorem von seinem Urheber ursprünglich gegebene[14]), indem derselbe eben von der Hyperbel ausging, Flächenräume derselben zu vervielfachen und zu teilen lehrte und nachher erst die einzelnen Sätze durch eine imaginäre Transformation auf das Gegenstück der rechtwinkligen Hyperbel, den Kreis, übertrug.

$$P(p, u) = p(u + \sin u \cos u), \quad P(p, v) = p(v + \sin v \cos v),$$
$$P(p, w) = p(w + \sin w \cos w).$$

Berücksichtigt man die für u, v, w bestehende Bedingungsgleichung, so findet man durch Subtraktion sofort

$$\begin{aligned} P(p, w) - P(p, u) - P(p, v) &= \frac{p}{2}(\sin 2w - \sin 2u - \sin 2v) \\ &= \frac{p}{2}[\sin 2w - 2\sin(u+v)\cos(u-v)] \\ &= \frac{p}{2}[2\sin w \cos w - 2 \sin w \cos(u-v)]^* \\ &= 2p \sin w \sin \frac{-u+v+w}{2} \sin \frac{u-v+w}{2} \\ &= 2p \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} \chi. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Endpunktordinaten der drei in Frage kommenden Parabelpunkte durch y_1, y_2, y_3, so ist, wie man weiss,

$$y_1 = 2p \sin u, \quad y_2 = 2p \sin v, \quad y_3 = 2p \sin w,$$
$$2p \sin u \sin v \sin w = 2p \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} \chi = \frac{y_1 y_2 y_3}{4p^2},$$

in Worten[17]):

Die algebraische Summe dreier konjugierter Parabelbögen, vom Scheitel aus gerechnet, ist gleich dem Produkt der Ordinaten der drei Endpunkte, dividiert durch das Quadrat des halben Parameters.

Beispiel. Es sei

$$\sin u = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \sin v = \tfrac{1}{2}, \quad \sin w = 2,$$
$$\cos u = \tfrac{3}{2}, \quad \cos v = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \cos w = \sqrt{5};$$

alsdann ist

$$P(p, u) = p\left(\frac{3\sqrt{5}}{4} + \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \quad P(p, v) = p\left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$P(p, w) = p[2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5})],$$
$$P(p, w) - P(p, u) - P(p, v) = 2p \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 = p\sqrt{5}.$$

Verwendet wurde bei Herleitung dieses Resultats der uns bereits bekannte Satz, welchem zufolge $\sin x + \cos x = e^x$, $x = \log(\sin x + \cos x)$ ist.

* Wie man die hier in Rede stehenden Relationen, welche in ihrer Gesamtheit die sogenannten prosthaphaeretischen Regeln der hyperbolischen Goniometrie bilden[16]), aus den im zweiten Kapitel entwickelten Additionstheoremen herleitet, ist wohl ohne nähere Ausführung einleuchtend.

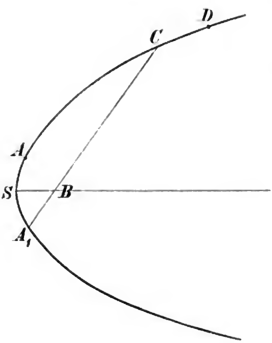
Alle bisher untersuchten Bögen waren, wie man sich kurz ausdrücken kann, Scheitelbögen. Auf diese lassen sich aber beliebige andere Bögen leicht zurückführen, da wir uns jetzt in den Stand gesetzt sehen, jeden beliebigen Bogen als Differenz eines Scheitelbogens und einer Strecke darzustellen. In Fig. 15 sei, wenn S und B die aus Fig. 14 geläufige Bedeutung beibehalten,

$$SD = P(p, w), \quad SA = P(p, v), \quad SC = P(p, u), \quad h = \frac{y_1 y_2 y_3}{4p^2}.$$

Man hat nun

$$\text{arc par}\,(SC + SA) = \text{arc par}\, SD + h,$$
$$\text{arc par}\,(SD - SA) = \text{arc par}\, SC - h.$$

Fig. 15.



Ein merkwürdiger Fall tritt dann ein, wenn $P(p, u)$ und $P(p, v)$ einen Fokalbogen, d. h. einen solchen Bogen in Summa ergeben, dessen Sehne durch den Brennpunkt B geht, wie dies in unserer Figur zur Darstellung gebracht ist, wo $SA_1 = AS$ ist. Dann ist nämlich

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\varphi = \cos\psi,$$
$$\tan u = \sec v,$$
$$\cos w = \cos u \cos v + \sin u \sin u$$
$$= \cos u \cot u + \sin u \csc u$$
$$= 1 + \frac{\cos^2 u}{\sin u},$$

$$\sin^2 u = \frac{1}{\cos^2 v - 1} = \frac{1}{\sin^2 v}, \quad \sin u = \csc v,$$

$$h = \frac{2p \sin u \,.\, 2p \csc u \,.\, 2p \sin w}{4p^2} = 2p \sin w,$$

wo eventuell

$$\sin w = \cot u \sqrt{1 + 3\sin^2 u}$$

zu setzen wäre. Setzt man den für h errechneten Wert oben ein, so erhellt Folgendes[18]):

Ein jeder parabolische Fokalbogen ist gleich dem konjugierten Scheitelbogen minus der Ordinate von dessen Endpunkt.

Wir gelangen nunmehr zu der eleganten geometrischen Konstruktion, mittelst welcher Booth[19]) die Ordinaten dreier konjugierter Parabelbögen darzustellen lehrt. $SB = \frac{p}{4}$ (Fig. 16a) habe wiederum die gewohnte Bedeutung, desgleichen sei auch

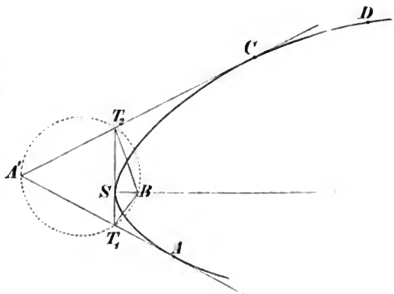
$$SD = SA + SC.$$

In A und C lege man Tangenten an die Parabel, welche sich in A' schneiden; diese Tangenten begegnen der in S gezogenen Scheiteltangente respektive in T_1 und T_2. Zieht man dann noch BT_1 und BT_2, so ist aus bekannten Gründen

$$\sphericalangle CT_2B = \sphericalangle AT_1B = 90^\circ,$$

d. h. um das Viereck $A'T_1BT_2$ lässt sich ein — in der Figur punktierter — Kreis beschreiben. A' und B markieren die Endpunkte eines Durchmessers. Da man ferner aus der Theorie der Parabel weiss, dass das von irgend einer Berührenden auf der Scheiteltangente abgeschnittene Stück halb so gross sein muss als die Ordinate des Berührungspunktes, so hat man, wenn zu den Punkten A, C, D respektive die hyperbolischen Argumente u, v, w gehören,

Fig. 16 a.



$$ST_1 = p\,\mathfrak{sin}\,u,$$
$$ST_2 = p\,\mathfrak{sin}\,v.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke SBT_1 und SBT_2 liefern

$$BT_1 = p\,\mathfrak{cos}\,u, \quad BT_2 = p\,\mathfrak{cos}\,v.$$

Zieht man ferner $A'B$, so ist $\sphericalangle BA'T_1 = \sphericalangle BT_2T_1 = 90^\circ - \psi$, wo ψ den zum gemeinsamen Winkel v gehörigen transscendenten Winkel vorstellt, und man hat somit

$$A'T_1 = BT_1 \operatorname{cotang}(90^\circ - \psi) = BT_1\,\mathfrak{sin}\,v = p\,\mathfrak{sin}\,v\,\mathfrak{cos}\,u.$$

Entspricht ebenso dem u die Amplitude φ, so wird sein

$$A'T_2 = BT_2 \operatorname{cotang}(90^\circ - \varphi) = BT_2\,\mathfrak{sin}\,u = p\,\mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,v.$$

Durch Addition ergiebt sich schliesslich

$$A'T_1 + A'T_2 = p\,(\mathfrak{sin}\,v\,\mathfrak{cos}\,u + \mathfrak{sin}\,u\,\mathfrak{cos}\,v) = p\,\mathfrak{sin}\,(u+v) = p\,\mathfrak{sin}\,w,$$

wo w samt seiner zugehörigen cyklischen Amplitude χ dem Punkt D entspricht.

Sucht man den Kreisdurchmesser $A'B$, so ergiebt der pythagoräische Lehrsatz im Dreieck $A'T_1B$

$$\overline{A'B}^2 = \overline{A'T_1}^2 + \overline{BT_1}^2 = p^2 \sin^2 v \cos^2 u + p^2 \cos^2 u = p^2 \cos^2 u \cos^2 v,$$
$$A'B = p \cos u \cos v = p \sec \varphi \sec \psi.$$

Will man die durch parabolische Trigonometrie gefundenen Sätze zur geometrischen Darstellung von

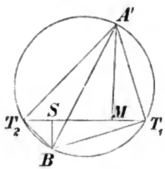
$$\cos(u+v), \quad \sin(u+v)$$

verwerten, so ziehe man eine Strecke $BS = p$ und durch S eine Gerade zu ihr normal. In B lege man an BS zu beiden Seiten respektive

$$\sphericalangle T_1BS = 2 \operatorname{arctang}(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u), \quad \sphericalangle T_2BS = 2 \operatorname{arctang}(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v)$$

an, deren Endschenkel jene Senkrechte eben in T_1 und T_2 (Fig. 16b) schneiden. Um das Dreieck BT_1T_2 werde ein Kreis gezeichnet, und von B aus ein Diameter BA' gezogen; endlich sei noch $A'M \perp T_1T_2$. Nun ist, wie bekannt,

Fig. 16b.



$$BA' = p \cos u \cos v, \quad A'T_1 = p \sin v \cos u,$$
$$A'T_2 = \sin u \cos v$$

und also

$$\sin(u+v) = \frac{1}{p}(A'T_1 + A'T_2).$$

Um analog $\cos(u+v)$ zu finden, bestimmen wir das Lot $A'M$ mittelst der Relation

$$A'M : A'T_2 = A'T_1 : A'B \, (\triangle A'MT_2 \sim \triangle A'T_1B),$$

woraus

$$A'M = \frac{A'T_1 \,.\, A'T_2}{A'B} = \frac{p^2 \sin u \sin v \cos u \cos v}{p \cos u \cos v} = p \sin u \sin v$$

folgt. Durch Addition erhält man also, analog wie oben,

$$\cos(u+v) = \frac{1}{p}(BA' + A'M).$$

Insofern

$$\sin(u+v) + \cos(u+v) = (\sin v + \cos v)(\sin u + \cos u)$$

ist, kann man den soeben erhaltenen beiden Relationen auch noch die folgende Wahrheit entnehmen:*

---

* Es ist von hohem Interesse, wahrzunehmen, dass ein und dieselbe geometrische Figur, je nach verschiedener Auffassung ihrer einzelnen Bestandteile, sowohl für die cyklische, wie für die hyperbolische Goniometrie die geometrische Interpretation der Additionsformeln

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} \alpha + \beta, \quad \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} u + v$$

liefert. Wie sich die Sache für die Hyperbelfunktionen gestaltet, ist oben gezeigt worden. Denken wir uns andererseits in Fig. 16b die Radien T_1C und T_2C

$$p(A'T_1 + A'T_2 + BA' + A'M) = (BT_1 + ST_1)(BT_2 + ST_2).$$

Durch eine Reihe fremdartiger, scheinbar auf ein ganz anderes Ziel gerichteter Betrachtungen ist somit ein ganz interessanter Lehrsatz über das Sehnenviereck gewonnen worden.

Die drei Argumente u, v, w waren bis jetzt, wie wir uns erinnern, stets durch die Bedingungsgleichung

$$u + v = w$$

verknüpft gewesen. Dieser stellen wir nun die neue Gleichung

$$w + x = w_1$$

zur Seite. Aus beiden ergiebt sich

$$u + v + x = w_1,$$

und wenn wir zu den Grössen P übergehen,

$$P(p, w_1) - P(p, u) - P(p, v) - P(p, x)$$
$$= 2p \,\mathfrak{sin}\,(u+v)\,\mathfrak{sin}\,(u+x)\,\mathfrak{sin}\,(v+x).$$

Dies ist die einfachste Beziehung zwischen vier konjugierten Parabelbögen.[20])*

Beispiel. Es sei (a. a. O.)

$$\mathfrak{sin}\, w_1 = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{3}, \quad \mathfrak{sin}\, u = \tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{sin}\, v = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \mathfrak{sin}\, x = \tfrac{4}{3};$$

---

gezogen, und $\sphericalangle T_1CB = 2\alpha$, $\sphericalangle BCT_2 = 2\beta$, also $\sphericalangle T_1CT_2 = 2(\alpha+\beta)$ gesetzt, so ist für den Radius 1 nach dem Lehrsatze des Ptolemaeus

$$2 \,.\, 2 \,.\, \sin(\alpha+\beta) = 2 \,.\, \sin\alpha \sqrt{4 - 4\sin^2\beta} + 2 \,.\, \sin\beta \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha},$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

oder in Buchstaben

$$A'B \,.\, T_1T_2 = BT_1 \,.\, A'T_2 + BT_2 \,.\, A'T_1.$$

Um diese Formel bequem mit der oben für $\mathfrak{sin}(u+v)$ erhaltenen vergleichen zu können, braucht nur in der letzteren der Kreisdurchmesser $A'B = 2$ gesetzt zu werden.

* Wer sich ein besonders deutliches Bild von den Vorteilen verschaffen will, welche unsere Art, mit Hyperbelfunktionen und den diesen entsprechenden hyperbolischen Argumenten zu rechnen, dem Boothschen Originalverfahren gegenüber gewährt, der vergleiche die vorstehende, von eigentlich rechnerischem Apparat völlig absehende Herleitung mit Booths Kalkul, der sehr umfangreich ist und sich über nicht weniger als siebzehn Zeilen erstreckt. Es liegt dies daran, dass bei der symbolischen Verbindung der beiden Fundamentalbeziehungen das unserem w zugeordnete cyklische Argument stets mitgeführt werden muss, wogegen bei uns die Grösse w sofort sich heraushebt und sodann nicht weiter in Betracht fällt. Unser Verfahren bietet zugleich offenbar auch das Angenehme, die gezogenen Schlüsse auf beliebig viele Argumente ausdehnen zu können.

$$\cos w_1 = \frac{\sqrt{9+100+80+80\sqrt{5}}}{3} = \frac{8+5\sqrt{5}}{3}, \quad \cos u = \frac{\sqrt{5}}{2},$$
$$\cos v = \tfrac{3}{2}, \quad \cos x = \tfrac{5}{3},$$

$$w_1 = \log(6+3\sqrt{5}), \quad u = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad v = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \log 3.$$

In diesem Falle hat man also

$$\log(6+3\sqrt{5}) - \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \log\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \log 3$$
$$= \log(6+3\sqrt{5}) - \log\left(3\cdot\frac{8+4\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$= \log(6+3\sqrt{5}) - \log(6+3\sqrt{5}) = 0,$$

wie vorausgesetzt war. Andererseits hat man zuerst

$$P(p, w_1) - P(p, u) - P(p, v) - P(p, x) = \sin w_1 \cos w_1 + w_1$$
$$- \sin u \cos u - u - \sin v \cos v - v - \sin x \cos x - x$$

oder, wenn wieder $p = 1$ gesetzt wird, gleich

$$\frac{180+82\sqrt{5}}{9} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{4} - \frac{20}{9} = \frac{160+82\sqrt{5}}{9} - \sqrt{5} = \frac{160+73\sqrt{5}}{9}.$$

Des weiteren ist

$$2\sin(u+v)\sin(u+x)\sin(v+x) = 2.2.\frac{5+4\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{5\sqrt{5}+12}{6}$$
$$= \frac{25\sqrt{5}+100+60+48\sqrt{5}}{9} = \frac{160+73\sqrt{5}}{9}.$$

Demgemäss ist am speziellen Falle die Wahrheit der allgemeinen Behauptung erhärtet worden.

Setzt man $u = v = x$ voraus, so erhält man die für die Trisektion eines Parabelbogens massgebende Gleichung*

$$\sin w_1 = 4\sin^3 u + 3\sin u,$$

welche, da bekanntlich $\sin m = \frac{e^m - e^{-m}}{2} = -i \sin m i$ ist, sofort in die Trisektionsgleichung des Kreisbogens

$$\sin 3u = -4\sin^3 u + 3\sin u$$

umzusetzen ist. Zur Erläuterung der bei der Dreiteilung parabolischer Bögen sich abspielenden Vorgänge diene uns wiederum ein

* Selbstverständlich ist auch unsere Umformung aus dem Reellen in das Imaginäre, respektive aus den Hyperbel- in Kreisfunktionen eine weit ungezwungenere und natürlichere als diejenige Booths, welcher tang in sin, multipliziert mit der imaginären Einheit, zugleich aber auch sein Zeichen $\perp$ in das gewöhnliche Plus umzuwandeln genötigt ist.

Beispiel. $Y = 4p$, $y = p$ seien die Endordinaten zweier Bögen ein und derselben Parabel $y^2 = 4px$. Unter w_1 und u die zugeordneten hyperbolischen Argumente verstanden, kann man setzen (s. o).

$$Y = 4p = 2p \sin w_1, \quad \sin w_1 = 2, \quad \cos w_1 = \sqrt{5},$$
$$y = p = 2p \sin u, \quad \sin u = \tfrac{1}{2}, \quad \cos u = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Man nimmt wahr, dass die Werte von $\sin w_1$ und $\sin u$ unserer Trisektionsgleichung Genüge leisten. Weiter hat man

$$P(p, \arcsin 2) = p[2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})],$$
$$P(p, \arcsin \tfrac{1}{2}) = p\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

und, da

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 + \sqrt{5}$$

ist,

$$3\,P(p, \arcsin \tfrac{1}{2}) = p[\tfrac{3}{4}\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})].$$

Hieraus fliesst

$$P(p, \arcsin 2) - 3\,P(p, \arcsin \tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{4} p \sqrt{5}.$$

Zugleich ist, unseren Festsetzungen zufolge,

$$p \sin^3 u \cos^3 u = \frac{p}{8} \sin^3 2u = \frac{5\sqrt{5}}{64} p,$$

also gilt auch

$$P(p, \arcsin 2) - 3\,P(p, \arcsin \tfrac{1}{2}) = 16p \sin^3 2u,$$
$$(u = \arcsin \tfrac{1}{2}).$$

Für den Ausdruck $\frac{5}{4} p \sqrt{5}$ lässt sich aber noch eine ganz einfache geometrische Bedeutung ermitteln; er stellt nämlich den Krümmungshalbmesser für jenen Punkt der Parabel dar, dessen Ordinate $4p$ ist. Damit ist der folgende Lehrsatz Booths[21]) gewonnen:

> Zieht man von dem Parabelscheitelbogen, dessen Endordinate dem Parameter gleich ist, den Krümmungsradius des Endpunktes ab, so erhält man den dritten Teil jenes Scheitelbogens, dessen Endordinate dem vierten Teil des Parameters gleich ist.

Bei dieser Gelegenheit wendet Booth[22]) seine Methode auch auf die Auflösung der kubischen Gleichungen an, indem er für die Gleichung

$$x^3 + p_1 x - q_1 = 0$$

den Wert

$$x = \frac{m}{2}\left(\sqrt[3]{\sec\Omega + \operatorname{tang}\Omega} - \sqrt[3]{\sec\Omega - \operatorname{tang}\Omega}\right)$$

berechnet, wo

$$m = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}, \quad \operatorname{tang}\Omega = \frac{3q_1}{2p_1}\sqrt{\frac{3}{p_1}}$$

gesetzt ward. Durch die Einführung des dem Winkel Ω entsprechenden hyperbolischen Argumentes (gemeinsamen Winkels) u wird dieses Resultat sehr wesentlich vereinfacht. Indem nämlich

$$\operatorname{tang}\Omega = \sin u$$

gemacht wird, erhält man

$$x = \frac{m}{2}\left(\sqrt[3]{\cos u + \sin u} - \sqrt[3]{\cos u - \sin u}\right),$$

$$x = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{u}{3}} - e^{-\frac{u}{3}}\right) = m \sin \frac{u}{3}.$$

In dieser Form ist dann aber auch das Ergebnis kein neues, sondern deckt sich vollständig mit jenem, welches bereits vor langer Zeit von Grunert[23]) publiziert worden ist. Dass für ein negatives p_1 cyklische an Stelle der hyperbolischen Funktionen treten müssen, leuchtet ein, denn man hat es alsdann eben nicht mehr mit dem von Booth behandelten reduziblen, sondern mit dem irreduziblen Falle der Cardanschen Regel zu thun.

Das allgemeinere Problem der Vervielfachung und Teilung parabolischer Bögen gestattet eine ganz entsprechende Lösung, wie jenes der Verdreifachung und Dreiteilung. Booth[24]) gelangt etwas umständlich zu der dafür massgebenden Relation

$$P(p, \Phi) - n P(p, v) = \frac{p}{4}\left[e^{2vn} - e^{-2vn} - n\left(e^{2v} - e^{-2v}\right)\right],$$

wo $\Phi = nv$, d. h. gleich dem n-fachen des Argumentes v genommen ist. In unserer Darstellungsweise ist

$$P(p, v) = p \sin v \cos v + pv,$$
$$P(p, \Phi) = p \sin \Phi \cos \Phi + p\Phi,$$

somit

$$P(p, \Phi) - n P(p, v) = p(\sin \Phi \cos \Phi - n \sin v \cos v)$$
$$= p\left(\frac{e^{nv} - e^{-nv}}{2} \cdot \frac{e^{nv} + e^{-nv}}{2} - n \cdot \frac{e^{v} - e^{-v}}{2} \cdot \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}\right),$$

und bei gehöriger Vereinfachung des in Parenthese stehenden Ausdruckes stellt sich sofort die Richtigkeit der Boothschen Behauptung heraus.

Beispiel. Sei

$$\sin v = \tfrac{3}{4}, \quad \cos v = \tfrac{5}{4}, \quad e^{v} = 2;$$

dann ist, für $n = 3$,

$$P(p, \Phi) - 3 P(p, v) = \frac{p}{4} \cdot \frac{3^3 . 5^3}{4^3},$$

ferner, für $n = 4$,

$$P(p, \Phi) - 4 P(p, v) = p . \frac{5 . 3^3 . 457}{2^{10}},$$

endlich, für $n = 10$,

$$P(p, \Phi) - 10\,P(p, v) = p \cdot \frac{2^{40} - 150 \cdot 2^{18} - 1}{2^{22}}.$$

Ein besonderes Gewicht legt der Autor, dessen Spuren wir hier im wesentlichen folgen, auf die Diskussion der Kettenlinie und ihrer Evolute, der Traktorie, mittelst der parabolischen Trigonometrie; er erblickt nicht ohne Grund in diesem, „*on parabolic trigonometry as applied to the investigation of the properties of the Catenary and the Tractrix*" überschriebenen Abschnitt[25]) gewissermassen die Krönung des Gebäudes. Erinnert man sich, dass in der That die Gleichung der Katenoide in der einfachen Form

$$y = \mathfrak{cos}\, x$$

durch Laisant[26]) einer äusserst erfolgreichen Behandlung unterzogen worden ist, so kann der erwähnte Umstand nicht im mindesten Wunder nehmen. Lediglich der Vollständigkeit halber leiten wir einige der Boothschen Sätze über beide Kurven mit Hilfe der Hyperbelfunktionen ab.

Für die vom tiefsten Punkt der Kurve aus gerechnete Bogenlänge der Kettenlinie findet man bekanntlich

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{1 + \mathfrak{sin}^2 x}\, dx = \int_0^x \mathfrak{cos}\, x\, dx = \mathfrak{sin}\, x.$$

Nehmen wir nun die Abscissen $x_1, x_2, x_3 \ldots$, respektive $= 2x, 3x, 4x \ldots$, so haben wir, unter $y_1, y_2, y_3 \ldots$ die zugehörigen Ordinaten verstanden, die Gleichungen

$$y + s = e^x, \quad y_1 + s_1 = e^{2x}, \quad y_2 + s_2 = e^{3x}, \quad y_3 + s_3 = e^{4x} \ldots$$

oder allgemein, wenn s_k den zu x_k und y_k gehörigen Bogen bedeutet,

$$y_k + s_k = e^{x(k+1)}.$$

Dasselbe Resultat tritt zu Tage, wenn man die erste der obigen Gleichungen auf die $(k+1)^{\text{te}}$ Potenz erhebt; d. h. es ist

$$(y + s)^{k+1} = y_k + s_k$$

ein eigentümliches geometrisches Seitenstück zu dem Moivreschen Lehrsatze der Analysis.

Die Kettenlinie bietet nach Booth[27]) auch ein Mittel, die parabolischen Multipla der Winkel, d. h. die Ausdrücke

$$\vartheta, \quad \vartheta \perp \vartheta, \quad \vartheta \perp \vartheta \perp \vartheta \ldots \underbrace{\vartheta \perp \vartheta \perp \vartheta \perp \ldots \perp \vartheta}_{n}$$

einfach geometrisch darzustellen. In unserem Sinne entsprechen diese symbolischen Multipla den wirklichen Vielfachen hyperbolischer Argumente. Da nun der Winkel ϑ, welchen die Berührende der Kettenlinie im Punkt x, y mit der Abscissenaxe einschliesst, durch die Relation

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{dy}{dx} = \mathfrak{sin}\, x$$

gegeben ist, so erhellt Folgendes:

Die Abscissen der Kettenlinie repräsentieren die gemeinsamen Winkel zu jenen transscendenten Winkeln, welche durch die Richtungswinkel der Berührungslinien geboten werden. Legt man demnach diese Berührenden an solche Punkte, deren Ordinaten unter sich äquidistant sind, so stellen die trigonometrischen Tangenten der Richtungswinkel eine Reihe von hyperbolischen Sinus in arithmetischer Progression fortschreitender Hyperbelsektoren dar.

Auf eine weitere, an sich höchst elegante, jedoch der angewandten Mittel halber durchaus nicht übersichtliche Betrachtung gehen wir an dieser Stelle um deswillen nicht ein, weil die Angelegenheit bereits an einem anderen Orte in unserem Sinne erledigt ist. Unser englischer Gewährsmann führt nämlich mittelst seiner Symbolik den Beweis für die Thatsache, dass jene Kurve, deren Tangente, vom Berührungspunkt bis zu einer festen Geraden gerechnet, eine konstante Länge besitzt, die Evolute der Kettenlinie sein muss. Der nämliche Beweis ist aber in ähnlicher Weise und mit unübertroffener Eleganz bereits von Laisant[28]) geleistet worden, aus dessen Darlegung mit zwingender Klarheit hervorgeht, dass der auf die Hyperbelfunktionen sich stützende Kalkul der Idee nach allerdings dem Algorithmus der parabolischen Trigonometrie Booths verwandt, ja sogar äquivalent ist, in Bezug auf Durchsichtigkeit und praktische Verwendbarkeit jedoch ganz entschieden den Vorzug vor jener beanspruchen darf.

---

1) Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1868, S. 117 flgg.

2) Booth, A treatise on some new geometrical methods etc., London 1873, S. 306.

3) Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, Halle a. S. 1881, S. 200.

4) Ibid. S. 201.

5) Cayley, An elementary treatise on elliptic functions, Cambridge 1876, S. 56.

6) Booth, A treatise etc., S. 313 flgg.

Id., A memoir on the trigonometry of the parabola and the geometrical origin of logarithms, London 1856, S. 1 flgg.

7) Id., A treatise etc., S. 314.

Id., A memoir etc., S. 2.

8) Günther, S. 201.

9) Glaisher, Biographical Notice of James Booth, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. XXXIX, Nr. 4.

10) Booth, A treatise etc., S. 318.

Id., A memoir etc., S. 6.

11) August, Recension zu: Schlegel, Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmannschen Ausdehnungslehre, Jahrb. über d. Fortschr. d. Mathem., 3. Band, S. 306.

12) Booth, A treatise etc., S. XVII.

13) Id. S. 342.

14) Günther, S. 13 flgg.

15) Booth, A treatise etc., S. 313.

Id., A memoir etc., S. 1.

16) Günther, S. 123.

17) Booth, A treatise etc., S. 319.

Id., A memoir etc., S. 7.

18) Id., A treatise etc., S. 320.

Id, A memoir etc., S. 7.

19) Id., A treatise etc., S. 322 flgg.

Id., A memoir etc., S. 9 flgg.

20) Id., A treatise etc., S. 324.

Id., A memoir etc., S. 11.

21) Id, A treatise etc., S. 326.

Id., A memoir etc., S. 13.

22) Id., A treatise etc., S. 328.

Id., A memoir etc., S. 14.

23) Grunert, Grundzüge der Theorie der hyperbolischen Funktionen und der Anwendung derselben zur Ausziehung der Wurzeln und zur Auflösung der Gleichungen, Archiv d. Math. u. Phys., 38. Teil, S. 48 flgg.

24) Booth, A treatise etc., S. 327.

Id., A memoir etc., S. 14.

25) Id., A treatise etc., S. 349 flgg.

26) Laisant, Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris 1874, S. 56 flgg.

27) Booth, A treatise etc., S. 352.

28) Laisant, S. 51 flgg.

Fünftes Kapitel.

Graphische Darstellung der Logarithmensysteme durch homofokale Parabeln.

In diesem Kapitel soll der Übergang von der parabolischen Trigonometrie zu den parabolischen Logarithmen vollzogen werden. Wir denken uns hierbei so viel wie möglich und mit Beiseitelassung vieles für uns Überflüssigen an Booths Entwickelungsgang anzuschliessen. Von der Symbolik, die wir im vorigen Kapitel zur Genüge kennen gelernt haben, soll jedoch umsomehr abgesehen werden, als die grundsätzliche Anwendung der Hyperbelfunktionen uns zu beträchtlichen Vereinfachungen der Boothschen Sätze und Beweise verhelfen wird.

Wir greifen zunächst auf Fig. 13 zurück. Indem wir $r_1 = FR_1$, einen beliebigen Radiusvektor der Logocyklik, $= e^u$, die Strecke OF also $= 1$ setzen, können wir offenbar schreiben:

$$u = {}^e\log r_1,$$

wobei das vorgesetzte e den natürlichen Logarithmus kennzeichnet. Für diese Grösse u, welche an der Logocyklik selbst nicht wohl geometrisch zur Darstellung gebracht werden kann, haben wir aber soeben erst eine sehr anschauliche Deutung kennen gelernt. Wir wissen nämlich, dass zu jeder Logocyklik eine, wie wir uns ausdrückten, adjungierte Parabel gehört, so zwar, dass die Gerade, welche den von zwei konjugierten Normalen der Logocyklik gebildeten Winkel halbiert, zugleich eine Tangente der Parabel ist. Q ist in Fig. 13 der Berührungspunkt. Der Bogen OQ ist, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise beibehalten, gleich $P(1, u) = u + \mathfrak{cos}\, u\, \mathfrak{sin}\, u$, und QT ist gleich $\mathfrak{cos}\, u\, \mathfrak{sin}\, u$, so dass also, indem wir in bekannter Weise die bis zur Scheiteltangente gerechnete Berührende vom Bogen abziehen, folgendes Resultat hervortritt[1]):

$$\text{arc par.}\, OQ - QT = u = {}^e\log r_1.$$

Der Fahrstrahl r_1 variiert zwischen 0 und ∞, und da einem jeden Fahrstrahl ein bestimmter Parabelpunkt Q zugeordnet werden kann, so leuchtet ein:

> Mittelst einer Logocyklik und der ihr adjungierten Parabel kann zu jeder willkürlichen positiven Zahl der Logarith-

mus durch eine einfache geometrische Konstruktion gefunden werden.

So lange r_1 zwischen 1 und ∞ liegt, vollzieht sich ersichtlich die ganze Konstruktion oberhalb der X-Axe. Wenn dagegen r_1 zwischen 0 und 1 liegt, gehört der Endpunkt des Fahrstrahls dem unterhalb der X-Axe gelegenen Teile der Schleife der Logocyklik an; dann liegt auch der Punkt Q auf dem unterhalb sich erstreckenden Halbaste der Parabel, sowohl der parabolische Bogen als auch das bezügliche Stück der Tangente sind negativ zu nehmen, und wir haben somit rein geometrisch die arithmetische Elementarwahrheit erhalten:

Der Logarithmus einer positiven Zahl >1 ist selbst positiv, der Logarithmus einer positiven Zahl <1 ist negativ, der Logarithmus von 1 ist Null.

Die r_1 waren bislang ausschliesslich positiv angenommen. Gleichwohl erschöpften, während die Endpunkte dieser Radienvektoren nur den einen Ast der logocyklischen Kurve in Anspruch nahmen, die zugeordneten Punkte Q die gesamte adjungierte Parabel in ihrer unendlichen Ausdehnung, oder anders ausgedrückt:

Negative Zahlen besitzen keine reellen — d. h. in unserem Falle geometrisch darstellbaren — Logarithmen.

Gesetzt, die Vektoren $r_1, r_2, \ldots r_n$ hätten successive die Werte $e^1, e^2, \ldots e^n$ und man würde die aus der Konstruktion sich ergebenden Punkte durch um 1 kleinere Indices bezeichnen, wobei natürlich der Index 0 als gar nicht vorhanden betrachtet werden müsste, so hätte man allgemein

$$\text{arc par. } OQ_{k-1} - Q_{k-1}T_{k-1} = k \; (k = 1, 2, 5 \ldots n).$$

Ebenso liesse sich verfahren, wenn an die Stelle der natürlichen Zahlen deren reciproke Werte treten würden. Allgemein:

Steht eine Reihe von Zahlen in geometrischer Progression, so bilden ihre Logarithmen eine arithmetische Progression.*

Den Nachweis dafür, dass jeder Radiusvektor sich in der Form $(1 + x)$ darstellen lasse, führt Booth[4]), indem er im polaren Systeme

$$r_1 = \sec\vartheta + \tang\vartheta$$

* In ähnlichem Sinne, d. h. als ein Interpolationsproblem, wurde die Berechnung der Logarithmen früher ganz allgemein gefasst. Schon Michael Stifel[2]) hatte eine arithmetische Progression einer geometrischen gegenübergestellt, deren sämtlichen Termen die entsprechenden Glieder ersterer Reihe als Logarithmen (nach modernem Sprachgebrauch) zugeordnet waren. Zum weiteren Belege aber führen wir noch aus Lalande, also einem neueren Schriftsteller, die folgende

setzt und daran erinnert, dass $\sec\vartheta > 1$ sein muss. Wir führen den Beweis mittelst der Relation

$$r_1 = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots,$$

aus welcher die Behauptung unmittelbar folgt. Setzt man $e^u = 1 + x$, so wird

$$x = e^u - 1 = \mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u - 1 = 2\,\mathfrak{sin}\,\tfrac{1}{2}u\,\mathfrak{cos}\,\tfrac{1}{2}u + 2\,\mathfrak{sin}^2\,\tfrac{1}{2}u = 2e^{\frac{1}{2}u}\,\mathfrak{sin}\,\tfrac{1}{2}u$$

$$= \frac{2\,\mathfrak{sin}\,\frac{1}{2}u}{e^{-\frac{1}{2}u}} = \frac{2\,\mathfrak{sin}\,\frac{1}{2}u}{\mathfrak{cos}\,\frac{1}{2}u - \mathfrak{sin}\,\frac{1}{2}u} = \frac{2\,\mathfrak{tang}\,\frac{1}{2}u}{1 - \mathfrak{tang}\,\frac{1}{2}u}.$$

Setzt man andererseits $\sec\vartheta + \operatorname{tang}\vartheta = 1 + x$, so wird

$$x = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Durch Vergleichung ergiebt sich

$$\mathfrak{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Wir haben solchergestalt, gewissermassen als Nebenprodukt unserer Untersuchung, jene wichtige einfachste Beziehung zwischen einem Winkel und dem ihm entsprechenden Hyperbelsektor gefunden, welche wir in Kapitel II selbständig bewiesen und zur Grundlage für die gesamte Theorie der Hyperbelfunktionen genommen hatten.

Dies ist jedoch durchaus nicht etwa ein Ausnahmefall. Wir werden vielmehr im folgenden zu zeigen haben, dass die geometrischen Verhältnisse, welche zwischen einer Logocyklik und der ihr adjungierten Parabel obwalten, ausreichend sind, jeden beliebigen Satz der Lehre von den Hyperbelfunktionen aus sich ableiten zu lassen. Obwohl wir in der zunächst folgenden Darlegung dem Sinne nach auf dem von Booth betretenen Wege verbleiben, so könnten doch, wie man leicht sieht, sämtliche Schlüsse auch in der entgegengesetzten Reihenfolge sich aneinander schliessen.

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ seien n willkürliche Winkel, welche irgendwelche Radienvektoren der Logocyklik mit der Abscissenaxe bilden, $u_1, u_2 \ldots u_n$ seien die zugehörigen hyperbolischen Argumente, so dass also immer

$$\mathfrak{tang}\,\tfrac{1}{2}u_k = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_k \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

Stelle[3]) an: „*Pour avoir les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, on ajoute des fractions décimales ... l'on établit une progression géométrique entre 1 et 10, et une progression arithmétique correspondente entre 0 et 1, et les termes de celle-ci sont les logarithmes des termes de celle-là.*" Und zuvor hiess es schon: „*Nos logarithmes ordinaires ne sont autre chose que la progression arithmétique des nombres naturels 0, 1, 2, 3 ... placés à côté de la progression géométrique décuple 1, 10, 100, 1000 ...*"

wäre. Bezeichnet man die durch ihre Neigungswinkel charakterisierten Radienvektoren selbst durch $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_n}$, so ist, wie uns bekannt,

$$\prod_{k=1}^{k=n} r_{\alpha_k} = e^{\sum_{k=1}^{k=n} u_k},$$

„and the sum of the residual arcs of the parabola corresponding to the former will be equal to the residual arc of the parabola corresponding to the latter.“

Lässt man die α und mithin auch die u unter sich gleich werden, so ist das Produkt zur Linken gleich $\mathfrak{cos}\, nu + \mathfrak{sin}\, nu$, die Potenz zur Rechten gleich $(e^u)^n = (\mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u)^n$, und man hat auf diese Weise den Moivreschen Lehrsatz, und zwar in der vom Erfinder selbst ursprünglich ihm erteilten Form 5) erhalten.

Unsere graphische Darstellung der Logarithmen verhilft uns auch dazu, sehr grosse Zahlen annähernd durch eine Zeichnung wiederzugeben. Für ein grosses U ist $\mathfrak{sin}\, u$ von $\mathfrak{cos}\, u$ nur sehr wenig verschieden, man hat also, wenn das Zeichen $\sim$ „annähernd gleich“ bebedeutet,

$$\mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u = e^u \sim 2\, \mathfrak{sin}\, u.$$

Erinnern wir uns aber daran, dass im vorigen Kapitel jede Parabelordinate durch einen hyperbolischen Sinus dargestellt ward, so kommen wir zu dem Schlusse[6]):

> Eine sehr grosse Zahl kann dargestellt werden durch die doppelte Ordinate einer Parabel vom Parameter 4, für deren Endpunkt die Differenz zwischen Scheitelbogen und Subtangente dem Logarithmus der fraglichen Zahl gleichkommt.

Der letzte Satz, den Booth mit einem ziemlichen Aufwand von Rechnung für eine isolierte Parabel ableitet, ergiebt sich bei unserer Auffassungsweise gleichsam von selbst. Er lautet nach dieser:

> Sind zwei parabolische Punkte A und B respektive durch ihre hyperbolischen Argumente $2u$ und u bestimmt, so ist die Ordinate von A doppelt so gross als die Subtangente von B.

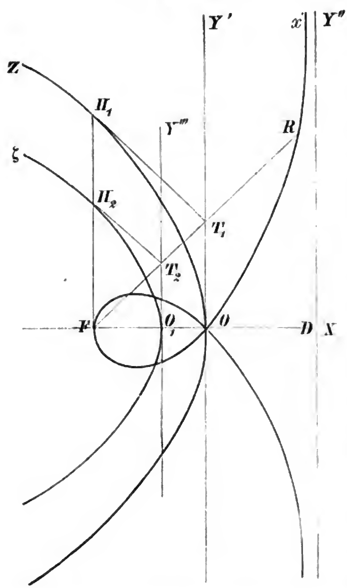
Denn erstere hat den Wert

$$\mathfrak{sin}\, 2u = 2\, \mathfrak{sin}\, u\, \mathfrak{cos}\, u,$$

wogegen die Subtangente durch $\mathfrak{sin}\, u\, \mathfrak{cos}\, u$ gegeben ist. Vergleicht man mit diesem einfachen Beweis die über eine Seite erfüllende Rechnung des Originales, so ergiebt sich unwiderleglich, dass die parabolische Trigonometrie bei aller Eleganz den wahren Sachverhalt doch nur allzuleicht verschleiert oder wenigstens erst nach mühsamen Transformationen erkennen lässt.

Es ist uns im vorstehenden gelungen, mittelst einer gegebenen, ein für allemal gezeichneten Parabel, für welche die Entfernung zwischen Brennpunkt und Scheitel gleich der Einheit gesetzt ward, nicht nur die natürlichen Logarithmen der Zahlen graphisch wiederzugeben, sondern auch für gewisse Grundwahrheiten der Logarithmenlehre eine augenfällige Versinnlichung zu gewinnen. Es fragt sich nun, in welcher Weise diese Gesetze, die zunächst eben doch nur für die logarithmische Basis e gelten, verallgemeinert werden können.

Fig. 17.



Dies geschieht dadurch, dass wir ein System homofokaler Parabeln uns konstruiert denken und je ein Individuum dieses Systemes zum Träger für ein bestimmtes logarithmisches System machen.*

In Fig. 17 ist wieder, wie in Fig. 13, $FO = 1$ der Durchmesser des Ovals einer logocyklischen Kurve, welche die Gerade DY'' zur Direktrix und Asymptote hat. OZ ist die derselben adjungierte Parabel mit der Scheiteltangente OY'. Ausserdem aber ist noch eine

* Man bemerke wohl, dass Booth behufs Repräsentation der wirklichen parabolischen Logarithmen in ähnlicher Art ein System von Parabeln verwendet, wie dies (vergl. Kapitel I) Brendel gethan hatte. Der Unterschied liegt darin, dass die einzelnen Individuen in Brendels Schar asymptotisch vorausgesetzt wurden, d. h. gleiche Axe und gleichen Parameter besassen, während in der von Booth betrachteten Schar Axenrichtung und Brennpunkt als gemeinsam vorausgesetzt werden. Schon an diesem Umstande würde die Durchführung der Idee Brendels gescheitert sein, selbst wenn er die parabolischen Logarithmen richtigerweise durch Gebilde einer einzigen Dimension und nicht, wie er fälschlich that, durch Gebilde von zwei Dimensionen, d. h. durch Flächenstücke, auszudrücken versucht hätte.

zweite konfokale Parabel $O_1\xi$ verzeichnet, deren Brennpunkt sonach ebenfalls in F liegt, während FO_1, also der vierte Teil des zu dieser Parabel gehörigen Parameters, einer willkürlichen Zahl m (< 1) gleich ist. Die Parabel $O_1\xi$ dient jetzt dazu, die Logarithmen aller Zahlen in einem anderen Systeme darzustellen, und zwar in jenem, dessen Basis durch

$$^{m}\log e$$

gegeben ist. Denn nur in diesem Falle geht für $m = e$ die Entfernung zwischen Brennpunkt und Scheitel, wie es sein muss, in den Wert $^{e}\log e = 1$ über. Ein anderer geometrischer Beweis wird sogleich nachfolgen.[7])

Zwei homofokale Parabeln gleicher Axenrichtung sind, wie aus der Kegelschnittlehre als bekannt vorausgesetzt werden darf, nicht bloss ähnliche, sondern auch ähnlichliegende Kurven, und zwar ist der gemeinschaftliche Brennpunkt der Ähnlichkeitspunkt. Es sei nun ein Fahrstrahl FR der Logocyklik gezogen, welcher die OY' in T_1, die DY'' in T_2 schneidet; von T_1 und T_2 seien respektive an die Parabeln OZ und $O_1\xi$ die Berührenden T_1H_1 und T_2H_2 gelegt. T_1 und T_2 sind homologe Punkte; ein Gleiches muss folglich auch für die Berührungspunkte H_1 und H_2 gelten, und eine diese Punkte verbindende Gerade muss in ihrer Verlängerung durch den Ähnlichkeitspunkt F hindurchgehen. Sohin ist aus Symmetriegründen

$$H_1O : H_2O_1 = H_1T_1 : H_2T_2$$

und auch

$$\frac{H_1O - H_1T_1}{H_2O_1 - H_2T_2} = \frac{H_1T_1}{H_2T_2} = \frac{FT_1}{FT_2},$$

$$\frac{H_1O - H_1T_1}{H_2O_1 - H_2T_2} = \frac{FO}{FO_1}.$$

Da nun nach Voraussetzung $FO = 1$ ist und $H_1O - H_1T_1 = \log e = 1$ gemacht werden kann durch entsprechende Wahl von R auf der Logocyklik, so ist auch

$$FO_1 = H_2O_1 - H_2T_2 = {}^{m}\log e.$$

Denn dass die Differenz $(H_2O_1 - H_2T_2)$ den Logarithmus von e darstellt, ist aus der parabolischen Trigonometrie zur Genüge bekannt, natürlich aber nicht im hyperbolischen Systeme, für welches ja die Differenz $(H_1O - H_1T_1) = \log e$ ist, sondern in irgend einem andern Systeme von willkürlicher Basis m. Und damit ist denn unsere obige Behauptung, dass die Fokaldistanz des Scheitels gleich $^{m}\log e$ sein muss, vollständig erhärtet. Daraus folgt aber auch gleich ein weiterer algebraischer Satz:

> Die Logarithmen ein und derselben Zahl in verschiedenen Systemen sind unter einander proportionale Grössen, die sich also unter einander nur durch einen konstanten Faktor, den sogenannten Modulus, unterscheiden. Der Modulus eines Systemes von der Basis m ist gleich dem Logarithmen der Zahl e in eben diesem System.

Der Basis 1 entspricht geometrisch keine Parabel des Systemes, sondern bloss der Doppelpunkt der Logocyklik. Ebensowenig kann eine Parabel der Basis 0 entsprechen. Hierin liegt die geometrische Begründung für die Elementarwahrheit:

> Jede reelle Zahl kann zur Basis eines selbständigen Logarithmensystemes genommen werden, mit Ausnahme von Eins und Null.

Das Gesamtergebnis aber, zu welchem wir gelangt sind, ist in folgendem Satze niedergelegt:

> Eine Schar von unendlich vielen konfokalen und koaxialen Parabeln ist das geometrische Seitenstück der unendlich vielen reellen Logarithmensysteme. Die Fokaldistanz des Scheitels ist für jene Parabel der Einheit gleich, auf welcher die natürlichen Logarithmen zum Ausdruck kommen sollen. Will man also etwa den Logarithmen der Zahl a in einem System von der Basis m graphisch darstellen, so mache man $FO = OD = 1$ und konstruiere eine Logocyklik FOx,* welche O zum Doppelpunkt und eine in D auf FD errichtete Senkrechte DY'' zur Asymptote hat. Alsdann hat man
>
> $$FO_1 = {}^{m}\log e$$
>
> zu machen und eine Parabel zu konstruieren, welche F zum Brennpunkt, O_1 zum Scheitel hat. Um F wird sodann ein

* Es verlohnt sich, auch den Vorteil zu beachten, welcher darin liegt, dass die Logocyklik, die einzige vorkommende Kurve von höherer als der zweiten Ordnung, nur ein einzigesmal gezeichnet zu werden braucht; ein aus Pappe oder Metall gefertigtes Abbild derselben kann sonach in jedem einzelnen Falle der graphischen Bestimmung eines Logarithmen zur Verwendung kommen. In seiner ersten Publikation, die parabolischen Logarithmen betreffend, hatte Booth von der Logocyklik noch nicht Gebrauch gemacht; deshalb ist aber auch der bezügliche Abschnitt[8]) weit weniger klar und übersichtlich, als in dem später erschienenen Buche (s. o. Kap. III).

Kreis mit dem Halbmesser a beschrieben, welcher die Logocyklik in R schneidet; die Gerade FR trifft die Scheiteltangente der Parabel in T_2. Zieht man schliesslich aus T_2 an die Parabel die Tangente $T_2 II_2$, so hat man die gewünschte graphische Darstellung

$$^m\log a = \text{arc par.}\, O_1 II_2 - II_2 T_2$$

erhalten.

Nebenbei liefert diese Darstellung, da dem Punkt O der Logocyklik nur jeweils einer der Parabelscheitel entspricht, das Korollar

In jedem beliebigen Logarithmensystem ist der Logarithmus von Eins der Null gleich.

Der Scheitel O_1 muss unter allen Umständen zwischen F und O zu liegen kommen; FO_1 ist stets kleiner als FO. Anders formuliert

Der Modulus irgend eines logarithmischen Systems ist ein echter Bruch.

Ausserdem haben wir bei dieser Betrachtung die Überzeugung gewonnen, dass alles, was für eine beliebig herausgegriffene Parabel der Schar gilt, für jede andere ganz ebenso zu Recht besteht. Alle eingangs dieses Kapitels für die Parabel des natürlichen Logarithmensystems hergeleiteten Theoreme sind allgemein giltig. Auch diejenigen Sätze, mit welchen wir uns im folgenden zu beschäftigen haben, sind keiner Beschränkung mehr unterworfen.

Es ist unter allen Umständen und für ein beliebiges n

$$\frac{n^1 - n^{-1}}{2} > {}^m\log n.$$

Dies folgt aus dem bekannten, zuerst in Archimedes „Buch von Cylinder und Kugel“[9]) ausgesprochenen Satze, dass die Summe zweier Tangenten grösser als der zwischen den Berührungspunkten enthaltene Bogen ist. Aus Fig. 17 folgt z. B. ($\sphericalangle\, OFR = \vartheta$ gesetzt)

$$O_1T_2 + T_2II_2 > [\text{arc par.}\, O_1II_2 = {}^m\log n + T_2II_2], \quad O_1T_2 > {}^m\log n.$$

Nun ist $O_1T_2 = m \tang \vartheta = m\, \mathfrak{sin}\, u$, also ist auch $m\, \mathfrak{sin}\, u > {}^m\log n$. Weiter ist aber

$$\mathfrak{sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \text{und} \quad e^{\pm u} = \frac{n^{\pm 1}}{m}, \quad u = {}^m\log n.$$

Substituiert man diese Werte, so ergiebt sich

$$m \cdot \frac{\frac{n^1}{m} - \frac{n^{-1}}{m}}{2} > {}^m\log n.$$

Damit ist der Satz bewiesen. Für $m=1$, $n=e^u$ ist der Satz aus der hyperbolischen Goniometrie bekannt; weil nämlich

$$\mathfrak{sin}\, u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots$$

ist, muss natürlich $\mathfrak{sin}\, u > u$ sein.

Die Trigonometrie pflegt stets vom Einheitskreise auszugehen; die gewöhnlichen goniometrischen Funktionen werden als bestimmte Strecken dargestellt, welche von dem Radius des Einheitskreises in ganz bestimmter Weise abhängen. Tritt an die Stelle des letzteren eine gleichseitige Hyperbel von der Halbaxe 1, so lassen sich in ganz ähnlicher Weise die Hyperbelfunktionen zur Anschauung bringen. Will man aber die cyklischen wie die hyperbolischen Linien in einem Kreise vom Radius r oder in einer gleichseitigen Hyperbel von der Halbaxe a darstellen, so hat man die früheren Zahlwerte einfach respektive mit r und a zu multiplizieren. Diesen beiden Systemen von Kreisen und gleichseitigen Hyperbeln stellt sich als völlig gleichberechtigt unser System homofokaler Parabeln an die Seite. Der Modulus der verschiedenen Logarithmensysteme, d. h. die Fokaldistanz der Scheitel der einzelnen Parabeln, ist in seiner Art genau dasselbe wie der Radius der Kreise, wie die Halbaxe der gleichseitigen Hyperbeln. Dass die Hyperbelfunktionen sich mit den entsprechenden Kreisfunktionen bei imaginärem Argumente decken, ist längst bekannt, allein auch die Trigonometrie der Parabel lässt sich als eine komplexe Umformung der cyklischen Trigonometrie auffassen und umgekehrt. Will man den Übergang in der erstgenannten Richtung vollziehen, so hat man

$$\operatorname{tang}\vartheta \text{ in } i\sin\varphi, \quad \cos\vartheta \text{ in } \cos\varphi, \quad e \text{ in } e^i$$

umzuändern.

Hieraus ergiebt sich wieder auf ganz neue Weise jener wichtige Fundamentalsatz der Logarithmenlehre, dessen wahre Bedeutung zuerst von Euler[10]) erkannt worden ist. So lange man sich in der Trigonometrie der Parabel bewegt, hat der Winkel ϑ eine bestimmte Grenze, er kann nicht $>\frac{1}{2}\pi$ werden.* Für $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ wird der Radiusvektor der

---

* Dies folgt, beiläufig bemerkt, auch aus der Identität

$$\mathfrak{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Die hyperbolische Tangente kann ihrer Entstehung zufolge keinen grösseren Wert annehmen als 1; somit kann auch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\vartheta$ höchstens gleich 1, $\frac{1}{2}\vartheta$ höchstens gleich 45^0, ϑ höchstens gleich 90^0 werden. Für $\vartheta > 90^0$ würde man ein imaginäres u bekommen. Für $\frac{1}{2}\vartheta = 45^0$ fällt der Fahrstrahl der Hyperbel natürlich mit der Asymptote zusammen.

Logocyklik parallel zur Asymptote, es findet also der Schnitt mit der Kurve erst in der Unendlichkeit statt. Andererseits ist der im Kreise als Centriwinkel zu veranschaulichende Winkel φ an keine Grenze gebunden; er kann um beliebige Multipla von 2π zu- oder abnehmen. Daraus folgt, dass zu jeder Zahl nur ein einziger sichtbarer, d. h. reeller Logarithmus verzeichnet werden kann, während mit Hilfe eines Kreises, der als das imaginäre Bild der Parabel zu betrachten ist, unzählig viele andere Logarithmen hinzugefunden werden können. Es erhellt also ohne jeden Kalkul die geometrische Thatsache:

> Zu einer jeden Zahl gehören ein einziger reeller Logarithmus und unzählig viele imaginäre Logarithmen. Diese letzteren sind in dem Gesamtausdruck (log re. $\pm 2m\pi i$) enthalten.

Um die eigentümliche Analogie zwischen Kreis und Parabel, auf die wir durch die letzten Überlegungen geführt worden sind, noch mehr ins Licht zu stellen, führen wir hier noch einige weitere Parallelsätze an. In der Theorie der logocyklischen Kurve ward bewiesen, dass $RT = TO = \mathfrak{sin}\, u$ sei; andererseits ist $FT = \sec\vartheta = \mathfrak{cos}\, u$. Andererseits aber ist auch $FR = e^u = \mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u$, und da natürlich auch

$$(FT + RT)^m = \overline{FR}^m$$

ist, so hat man mittelst der Logocyklik eine hübsche geometrische Interpretation für den Moivreschen Lehrsatz geschaffen, welcher, wie schon mehrfach bemerkt, in seiner Anwendung auf die hyperbolische Goniometrie die Form hat:

$$\mathfrak{cos}\, mu + \mathfrak{sin}\, mu = (\mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u)^m.$$

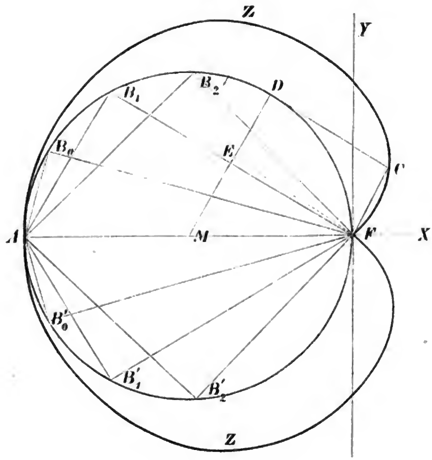
Dieselbe ergiebt sich sofort, wenn wir annehmen, dass die Fahrstrahlen der Logocyklik in geometrischer Progression zunehmen; ist alsdann u das dem ersten Fahrstrahl entsprechende hyperbolische Argument, so entspricht dem zweiten $2u$, dem dritten $3u$ u. s. w. Der m^{te} Fahrstrahl hat somit den Wert ($\mathfrak{cos}\, mu + \mathfrak{sin}\, mu$), und dies ist eben die linke Seite der Moivreschen Gleichung.

Von Interesse ist es nun, zuzusehen, wie für den Moivreschen Lehrsatz in der cyklischen Goniometrie ein ganz ähnliches geometrisches Substrat ermittelt werden kann. M (Fig. 18) ist der Mittelpunkt eines Kreises vom Durchmesser $AF = 2$; auf der Peripherie seien die Punkte B_0, B_1, B_2 ... B_m so angenommen, dass die Bögen AB_0, B_0B_1 ... $B_{m-1}B_m$ durchweg gleich gross werden; jeder sei $= 2\theta$. Zieht man dann noch AB_0, AB_1 ... AB_m, so hat man

$$FB = \cos\theta,\quad FB_1 = \cos 2\theta,\quad FB_2 = \cos 3\theta\ \ldots,$$
$$AB = \sin\theta,\quad AB_1 = \sin 2\theta,\quad AB_2 = \sin 3\theta\ \ldots$$

Will man nicht bloss die Grösse, sondern auch die Lage der einzelnen Strecken berücksichtigen, so muss eine Drehung von 90°, den Grund-

Fig. 18.



sätzen der Grassmannschen Ausdehnungslehre entsprechend*, durch den Richtungskoefficienten $i = \sqrt{-1}$ charakterisiert werden; es ist also

$$FB_0 + AB_0 = \cos\theta + i\sin\theta, \quad FB_1 + AB_1 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta,$$
$$FB_2 + AB_2 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta \ldots$$

und allgemein

$$FB_n + AB_n = \cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

Liegen die Punkte B'_0, $B'_1 \ldots B'_n$ auf dem unteren Halbkreis in der Winkeldistanz 2θ, so ist dies θ negativ zu nehmen. Auf die Cosinus hat diese veränderte Lage natürlich keinen Einfluss, wohl aber auf das Vorzeichen der Sinus, und man kann also setzen:

$$FB'_n - AB'_n = \cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta - i\sin\theta)^n.$$

* Die Einführung des Faktors i vollzieht Booth in etwas unmotivierter Weise [10]), sich einfach darauf berufend, dass das Symbol $\sqrt{-1}$ die Drehung um einen rechten Winkel andeute. Grassmann hatte als Drehfaktor ursprünglich [11]) die Zahl $e^{\alpha i}$ gewählt, Schlegel aber hat [12]) gezeigt, dass man ebensogut mit der Festsetzung zurechtkommen könne: „Eine Gerade mit i^n multiplizieren, bedeutet nichts weiter als: dieselbe Gerade um n rechte Winkel drehen."

Durch Zusammenstellung der letzten Ergebnisse sind wir in die Lage versetzt, den folgenden Doppelsatz auszusprechen:

Um die verschiedenen Potenzen einer reellen und imaginären Exponentialgrösse (e^u und $e^{\theta i}$) graphisch darzustellen, kann man respektive von einer Parabel und von einem Kreise ausgehen. Man konstruiere für den ersten Fall eine Einheitsparabel samt der ihr adjungierten Logocyklik, verschaffe sich in der Einheitshyperbel einen Doppelsektor mu und ziehe jenen Radiusvektor der Logocyklik, welcher mit der Axe einen Winkel

$$2 \operatorname{arctang} (\mathfrak{tang} \tfrac{1}{2} m u)$$

bildet. Durch die Scheiteltangente der Parabel wird dieser Radiusvektor in zwei Teile geteilt, welche respektive gleich $\mathfrak{sin}\, mu$ und gleich $\mathfrak{cos}\, mu$ sind, so dass der Fahrstrahl selbst gleich $\mathfrak{cos}\, mu + \mathfrak{sin}\, mu = e^{mu}$ wird. Für den zweiten Fall konstruiere man einen Einheitskreis und in diesem einen Centriwinkel $2m\theta$; alsdann wird der auf dem Durchmesser stehende rechte Winkel von zwei Seiten eingeschlossen, denen bezüglich die Werte $\cos m\theta$ und $i \sin m\theta$ zukommen, so dass also die Summe der Katheten gleich $\cos m\theta + i \sin m\theta = e^{m\theta i}$ wird.*

Damit stehen folgende von Booth[13]) als Analogien bezeichnete Sätze in Verbindung, die wir grösserer Übersichtlichkeit halber sich dual entsprechen lassen wollen.

Bei der Parabel endigt die aus $\mathfrak{cos}\, mu$ und $\mathfrak{sin}\, mu$ sich zusammensetzende Strecke in der adjungierten Logocyklik.	Beim Kreise endigt die aus $\cos m\theta$ und $i \sin m\theta$ sich zusammensetzende gebrochene Linie stets in einem und demselben Punkt.
Für die Parabel gilt die Relation: $\text{Bogen} - \log (\mathfrak{cos}\, u + \mathfrak{sin}\, u) = \text{Subtangente}.$	Für den Kreis gilt die Relation: $\text{Bogen} + i \log (\cos \theta + i \sin \theta) = \text{Subtangente}.$

* Gerade aus diesem Satze schliesst Booth, dass nicht die gleichseitige Hyperbel, sondern die Parabel dem Kreise als Gegenstück entspreche: „*the true analogy of the circle is the parabola*". Allein die hyperbolischen Sektoren, welche in unserer Fassung vorkommen, sind eben doch nur der Hyperbel, nicht aber der Parabel selbst zu entnehmen, und Booths stets wiederkehrende parabolische Winkelsummen ($\vartheta \perp \vartheta \perp \vartheta \perp \ldots$) lassen sich geometrisch nicht zeichnen, so leicht es auch ist, mit ihnen zu rechnen, sobald man sich einmal die eigenartige Algorithmik des Verfassers eingeprägt hat.

Die vom Berührungspunkt aus gerechnete Subtangente der Parabel endigt auf einer geraden Linie, der Scheiteltangente; anders ausgedrückt: Die Fusspunktlinie der Parabel ist, wenn der Pol mit dem Brennpunkt identifiziert wird, eine Gerade.

Die vom Berührungspunkt aus gerechnete Subtangente des Kreises endigt in einer Kardioide; anders ausgedrückt: Die Fusspunktkurve des Kreises ist, für einen beliebigen Peripheriepunkt als Pol, eine Kardioide.*

Dass Booth in seiner Gegenüberstellung von Kreis und Parabel etwas zu einseitig zu Werke geht, davon haben wir uns bereits überzeugt. Wollen wir unter Berücksichtigung der so höchst verdienstlichen Ergebnisse Booths zu einer nach allen Richtungen hin befriedigenden Formulierung jenes Analogie-Verhältnisses gelangen, so müssen wir in Betracht ziehen, dass der Kreis die einzige ebene Kurve von durchaus gleichem positiven Krümmungsmaasse ist, und dass deshalb seine sämtlichen charakteristischen Eigenschaften sich unmöglich wieder in ein und derselben anderen Kurve vereinigt finden können. Dies bedenkend, können wir den von Booth aufgestellten Analogiesatz in folgender angemessener Weise erweitern:

Der Kreis ist die einzige Kurve, in welcher die Bögen den Centralsektoren proportional sich ändern. Da eine zweite

* Diese Eigenschaft des bewussten geometrischen Ortes soll gleich an der Fig. 18 dargethan werden. FX und FY seien die positiven Richtungen der Axen eines cartesischen Systemes, der Punkt C ist durch seine Orthogonalkoordinaten x und y, respektive durch seine Polarcoordinaten r und ϑ bestimmt, so dass

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\vartheta = x : \sqrt{x^2+y^2}$$

wird. Zieht man dann den Radius $MD = R$ parallel zu FC, so ist

$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DCF = 90^\circ.$$

Wird von F auf MD das Lot FE gefällt, so ist

$$ME = R - r$$

und

$$\cos EMF = \cos\vartheta = \frac{R-r}{R}.$$

Dies ist die Polargleichung der Ortskurve von C. Ersetzt man die polaren durch die rechtwinkligen Koordinaten, so ist vorerst

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{R-\sqrt{x^2+y^2}}{R},$$

oder umgeformt

$$x^2+y^2 = R(\sqrt{x^2+y^2}-x),$$

und dies ist die Gleichung jener geschlossenen Epicykloide AZF, welche von Castillon [14]) mit dem Namen der Herzkurve (Kardioide) belegt worden ist. Im Ursprung F hat die Kurve eine Spitze.

krumme Linie dieser Art nicht existieren kann, so ist a priori zu erwarten, dass eine gewisse Kurve in Bezug auf die Bogenlängen, eine gewisse andere Kurve dagegen in Bezug auf die Flächeninhaltsverhältnisse eine Analogie zum Kreise darbietet. Dass diese zweite Kurve keine andere ist als die gleichseitige Hyperbel, war von jeher bekannt, während es Booths Verdienst ist, die Identität der ersterwähnten Kurve mit der apollonischen Parabel nachgewiesen zu haben. Nur ging derselbe darin zu weit, diese zweite Seite des Analogie-Verhältnisses für die allein massgebende zu erklären. Es darf dies umsoweniger geschehen, als gleichseitige Hyperbel und Parabel durch das im ersten Kapitel näher geschilderte Verwandtschaftsprinzip van Heuraets auf das engste mit einander verknüpft sind.*

1) Booth, A treatise on new geometrical methods etc., London 1873, S. 331.

2) Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877, S. 64.

3) Lalande, Astronomie, tome III, Paris 1771, S. 576.

4) Booth, S. 333.

5) De Moivre, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini 1730, S. 14.

6) Booth, S. 335.

7) Ibid. S. 337 flgg.

8) Booth, A memoir on the trigonometry of the parabola etc., London 1856, S. 16 flgg.

9) Archimedis opera omnia, ed. Heiberg, Vol. I, Lipsiae 1880, S. 13.

10) Booth, A treatise etc., S. 341.

11) H. Grassmann, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1843, S. XI.

12) Schlegel, System der Raumlehre nach den Principien der Grassmannschen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe, 1. Teil, Leipzig 1872, S. 38.

13) Booth, S. 342.

14) Castillon, De curva cardioide, Phil. Transact. of the royal society of London, 1741, S. 778.

15) Booth, S. 343 flgg.

16) Ibid., S. 348 flgg.

17) Günther, Die Lehre von den einfachen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, Halle 1881, S. 154.

* Diese Beziehungen zwischen Hyperbel und Parabel behandelt Booth ausführlich [15]) im Sinne van Heuraets, doch brauchen wir mit Rücksicht auf unser erstes Kapitel hierauf nicht näher einzugehen. Ebensowenig verweilen wir bei der von Booth [16]) gegebenen Lösung der Gleichung $z^{2n} - 2az^n = -1$, da diese Lösung sachlich mit jener übereinstimmt, die von uns an anderem Orte [17]) auf die Hyperbelfunktionen begründet wurde.

Schlusswort.

Wir werfen, nachdem wir mit der Behandlung unseres Themas zu dem angestrebten Ziele gelangt sind, zum Schlusse noch einen kurzen Rückblick auf den Weg, den wir genommen haben, und auf die wichtigsten Ergebnisse, zu welchen uns die Verfolgung dieses Weges geführt hat. Ausgesprochener Hauptzweck der ganzen Arbeit war es, die in Deutschland so gut wie unbekannt* gebliebenen Untersuchungen von James Booth über parabolische Trigonometrie und über die graphische Darstellung der Logarithmen einem grösseren Publikum zugänglich zu machen. Um dies mit Erfolg zu thun, erschien es notwendig, auch von früheren Forschungen auf dem Gebiete der Kurven-Analogie Notiz zu nehmen, und zwar um so mehr, als Booths Arbeiten, wie aus seiner eigenen Darstellung des van Heuraetschen Prinzipes zu schliessen ist, von jenen Vorläufern beeinflusst waren. Gleicherweise erschien es wünschenswert, die wichtigsten Sätze über die Hyperbelfunktionen in gedrängter Übersicht zusammenzustellen; das neue Verfahren, welches zur Begründung dieser Sätze eingeschlagen ward, macht den betreffenden Abschnitt vielleicht auch für Diejenigen lesenswert, welche mit dem denselben Gegenstand abhandelnden Buche des Verfassers bekannt sind. Eine ausführliche Diskussion der logocyklischen Kurve konnte schon aus dem Grunde nicht entbehrt werden, weil im fünften Kapitel mehrfach auf dieselbe zurückgegriffen wird, allein auch an sich ist der Reichtum hübscher Einzelsätze anziehend, zu deren Aufstellung das Studium dieser merkwürdigen krummen Linie hinführt; ältere Resultate, von denen Booth keine Kenntnis hatte, liessen sich mit den von letzterem gefundenen Thatsachen zu einem homogenen Ganzen vereinigen, und durch die konsequente Anwendung der Hyperbelfunktionen ward eine weit grössere Einheitlichkeit in den Beweisen erreicht. Was nun endlich Booths symbolische Trigonometrie der Parabel anlangt, so ward festgestellt — und hierin sehen wir die wichtigste Frucht dieser Untersuchung —, dass dieselbe in der Natur der Sache nicht notwendig begründet sei. Der englische Geometer war mit den Hyperbelfunktionen als solchen allerdings nicht gerade unbekannt, dagegen scheint er nichts von jener ori-

* Nur in Ennepers „elliptischen Funktionen“, die überhaupt nicht leicht erfolglos nachgeschlagen werden, haben wir (S. 223) Booths Forschungen über die elliptischen Integrale der dritten Gattung erwähnt gefunden.

ginellen und erspriesslichen Zuordnung eines hyperbolischen und cyklischen Argumentes, des gemeinsamen und transscendenten Winkels, gewusst zu haben, welche man Lambert verdankt. Legt man diese zu Grunde, so ergiebt sich, dass die von Booth erfundene Symbolik des transscendenten Winkels mit der gewöhnlichen hyperbolischen Goniometrie des gemeinsamen Winkels in allen Einzelheiten sich deckt. Die parabolische Trigonometrie war damit auf ihren wahren Charakter zurückgeführt, der spezielle Algorithmus kam in Wegfall und sämtliche Ergebnisse gewannen ganz erheblich an Einfachheit und innerem Zusammenhang. Diese Vorteile übertrugen sich dann auch noch auf das fünfte Kapitel, in welchem Booths schöne Idee zur Darstellung gelangte, sich zur graphischen Versinnlichung der verschiedenen logarithmischen Systeme einer Schar konfokaler Parabeln zu bedienen. Man wird zugeben müssen, dass dieselben sich hierzu weit besser eignen, als manche andere zum gleichen Zweck vorgeschlagene Kurve, z. B. die logarithmische Linie.

In analytisch-geometrischer Hinsicht ziehen wir aus unseren Studien einen bemerkenswerten und, wie wir glauben, neuen Schluss:

> Der Wirkungskreis der cyklisch-goniometrischen Funktionen erstreckt sich ausschliesslich auf den Kreis, resp. auf die Ellipse,* jener der hyperbolisch-goniometrischen Funktionen dagegen nicht bloss auf die gleichseitige und jede andere Hyperbel, sondern auch auf die Parabel. Der einfache Erklärungsgrund für diese auf den ersten Blick auffallende Erscheinung liegt darin, dass in Bezug auf Flächeninhaltsbeziehungen die Hyperbel, in Bezug auf Bogenlängen dagegen die Parabel als das Analogon des Kreises aufzufassen ist, dass also auch innerhalb des Gebietes der Kegelschnittslehre die hyperbolischen Funktionen eine ausgedehntere Verwendung zulassen müssen, als die cyklischen, jedenfalls aber eine ausgedehntere, als man ihnen gemeiniglich zuzugestehen geneigt ist.

---

* Wir setzen als bekannt voraus, dass nach den hierfür massgebenden Arbeiten von Laisant (Essai sur les fonctions hyperboliques, S. 37 flgg.) zwischen Kreis und Ellipse, gleichseitiger und beliebiger Hyperbel gar kein Unterschied mehr gemacht zu werden braucht. Laisant hat nachgewiesen, dass die trigonometrischen Funktionen, wenn sie auf den allgemeinen, statt bloss auf den speziellen Kegelschnitt bezogen werden, nur um einen konstanten Faktor von den altbekannten Formen des cyklischen und hyperbolischen Sinus, Cosinus u. s. w. abweichen.

Nachträge.

I. Die Frage, ob prinzipiell die Möglichkeit der Rektifikation einer jeden Kurve zugestanden werden müsse, ist durchaus keine so einfache, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheinen mag, und wir dürfen somit Jene nicht tadeln, die vor Hobbes und Roberval eine verneinende Antwort auf jene Frage gegeben haben. Als der Erste trat der Metaphysik des Rektifikationsproblemes der böhmische Mathematiker Bolzano näher, dessen bahnbrechende Schriften Jahrzehnte hindurch fast unbeachtet blieben, heute aber durch Stolz' geschichtlichen Essay, „B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung",* wieder in den Vordergrund gerückt worden sind. Allerdings beging Bolzano, wie dies bei dem ersten Versuche eines tieferen Eindringens in den Gegenstand nicht gut anders sein konnte, noch einige Fehler in der begrifflichen Auffassung; Stolz bemerkt darüber (S. 268): „Wenn Bolzano den Grundsatz aufstellt, es müsse irgend ein für alle Linien gleichlautendes Gesetz geben, nach dem man ihre Längen aus ihren Gleichungen $y = f(x)$ herleiten könne, so heisst dies die Aufgabe der Analysis verkennen, die ja eben ermitteln soll, ob und für welche Arten von Linien ein solches Gesetz besteht." Stolz weist dann (a. a. O.) ferner nach, dass sowohl Euklid als auch Archimedes die in der Fassung der Aufgabe liegenden Schwierigkeiten und Aporien noch verkannten, und dass erst Duhamel in seinem berühmten Methodenwerke** derselben vollkommen Herr zu werden verstand. Der nächste Gedanke wird eben doch immer der sein, der Kurve einen völlig willkürlichen Polygonzug einzubeschreiben und sodann die einzelnen Sehnen kleiner und kleiner werden zu lassen; allein wenn man den Übergang zu der Grenze wirklich vollziehen will, so bedarf man gewisser Hilfssätze der Grenzwertrechnung, welche zuvor klar ausgesprochen und erwiesen sein müssen. Einfacher gelangt man allerdings zum Ziele, wenn man die absolute Willkürlichkeit des Polygonzuges aufgiebt und aus dem erst eingeschriebenen Sehnensystem ein zweites dadurch ableitet, dass man jede Sehne

* Mathem. Annalen XVIII, S. 255 flgg.

** Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement, Paris 1868, tome II, S. 411 flgg.

halbiert und in ihrem Mittelpunkt ein Lot bis zur Kurve errichtet — ganz so, wie es der grosse griechische Geometer beim Kreise gemacht hat. Die neuesten und vollständigsten Aufklärungen über die Bedingungen, unter welchen die Rektifikation einer krummen Linie sich bewerkstelligen lässt, sind von Du Bois-Reymond* gegeben und von Stolz in der bereits citierten Note über Bolzano (S. 272flgg.) zu den Vorarbeiten in die richtige Beziehung gesetzt worden. Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, kann Hobbes' gelegentlichem Geistesblitz und Robervals kinematischer Methode in prinzipieller Hinsicht ein besonderes Verdienst gerade nicht zugesprochen werden; um so mehr aber darf Pascals Vergleichung zweier Kurvenbögen ein solches Verdienst beanspruchen, denn darin liegt bereits eine klare Auffassung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung enthalten. Es würde von Interesse sein, nachzuforschen, ob nicht auch zwischen Pascal und Bolzano einzelne Forscher der Sache eine andere als die rein rechnerische Seite abzugewinnen versucht haben.

II. Während der Ausarbeitung dieser Schrift erschien die mathematische Programmabhandlung der Münchener Realschule, in welcher W. Hess (s. o. Kap. II) die Kurven unter neuen Gesichtspunkten betrachtet, welche man zur besseren Veranschaulichung der Rotation eines Körpers um einen Punkt eingeführt hat. Die Rektifikation der Herpolhodien führt ebenfalls auf elliptische Integrale der ersten und der dritten Gattung.

III. Eine weit allgemeinere Auffassung des Strophoidenproblemes, als sie den englischen und französischen Mathematikern eignet, ist ganz neuerlich von dem Amerikaner Wolsey Johnson in seinem Aufsatze „The Strophoids"** dargelegt worden. Eine solche Strophoide im verallgemeinerten Wortsinne ist danach der geometrische Ort für den Schnittpunkt zweier Geraden, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit um zwei feste Punkte drehen. B und C seien die Drehpunkte, $BC = a$, ϑ und φ die Winkel, welche die von dem Kurvenpunkt A nach B und C gezogenen Geraden mit a einschliessen. Versteht man nun unter m und n zwei ganze Zahlen, welche ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit als zu einander relativ prim angesehen werden dürfen, so wird, unter α eine Konstante verstanden,

* Mathem. Annalen XV, S. 285flgg.

** American Journal of Mathematics, Vol. III. S. 320flgg.

$$n\vartheta \pm m\varphi = \alpha$$

sein müssen, wobei das obere oder untere Vorzeichen genommen werden muss, je nachdem der Drehsinn beider Geraden ein gleicher oder ein entgegengesetzter ist. Nimmt man B als Anfangspunkt, BC als X-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystemes, so ist für A

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos\vartheta, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin\vartheta.$$

Bringen wir den Ausdruck $(x + iy)^n$ auf seine Normalform $X_n + iY_n$, so wird bekanntlich

$$X_n = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos n\vartheta,$$

$$Y_n = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sin n\vartheta,$$

und hieraus ergeben sich u. a. die Reduktionsformeln

$$X_{r+s} = X_r X_s - Y_r Y_s,$$
$$Y_{r+s} = Y_r X_s + X_r Y_s,$$

welche in der Sprache der gewöhnlichen Trigonometrie zu deuten nicht schwer hält. Die allgemeine Kurvengleichung lässt sich nun mit Hilfe dieser Grössen X und Y, wenn noch

$$q = \operatorname{cotang} \alpha$$

gesetzt wird, folgendermassen anschreiben:

$$(x^2 + y^2)^m (X_{n-m} - qY_{n-m}) - ma(x^2 + y^2)^{m-1}(X_{n-m+1} - qY_{n-m+1})$$
$$+ \ldots + (-1)^m a^m (X_n - qY_n) = 0.$$

Je nachdem $\alpha = 90^0$ oder $= 0^0$ ist, nennt Johnson die Kurve eine „right strophoid“ oder eine „substrophoid“. Für $n = m = 1$ haben wir die einen Kreis darstellende Gleichung

$$x^2 + y^2 - a(x - qy) = 0.$$

Die Boothsche Logocyklik, auf welche Johnson ausdrücklich Bezug nimmt, ist mit der „right strophoid“ für den Fall $n = 2$, $m = 1$ identisch.

Eine interessante Verallgemeinerung des Strophoidenbegriffs enthält auch die erst während des Drucks dieser Schrift erschienene analytische Geometrie von Picquet (S. 550 flgg.).

Namen-Index.

Verbesserungen.

S. 33, Z. 4 v. u. ergänze: Nachtrag III. — S. 36, Z. 1. v. u. lies: x'. — S. 47, Z. 7 v. u. lies: $\frac{3}{2}$. — S. 60, Z. 4 v. o. streiche: § 1. — S. 52, Z. 7 v. u. und S. 53, Z. 3 v. o. statt „von der Seite“ lies: „vom Radius“.

et leur convergence". — 19. Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques. — 20. Addition au mémoire précédent. — 21. Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. — 22. Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction rationnelle dont le dégré est un nombre premier donné. — 23. Théorème générale sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. — 24. Note sur quelques formules elliptiques. — 25. Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. — 26. Théorèmes sur les fonctions elliptiques. — 27. Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes. — 28. Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. — 29. Théorèmes et problèmes.

Tome II [IV u. 341 S.]. 1. Les fonctions transcendantes $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$, $\cdots\Sigma\frac{1}{a^n}$ exprimées par des intégral définies. — 2. Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\,\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$. — 3. Sommation de la série $y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\cdots+\varphi(n)x^n$, n étant un nombre entier positif fini ou infini, et $\varphi(n)$ une fonction algébrique rationelle de n. — 4. Sur l'équation différentielle $dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$, où p, q et r sont des fonctions de x seul. — 5. Sur l'équation différentielle $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$. — 6. Détermination d'une fonction au moyeu d'une équation qui ne contient qu'une seule variable. — 7. Propriétés remarquables de la fonction $y=\varphi x$ déterminée par l'équation $fy\,.\,dy-dx\sqrt{(a-y)\,(a_1-y)\,(a_2-y)\cdots(a_m-y)}=0$, fy étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y=a$, a_1, a_2, $\cdots a_m$. — 8. Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes. — 9. Extension de la théorie précédente. — 10. Sur la comparaison des fonctions transcendantes. — 11. Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. — 12. Sur quelques intégrales définies. — 13. Théorie des transcendantes elliptiques. — 15. Note sur la fonction $\psi x=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$. — 15. Démonstration de quelques formules elliptiques. — 16. Sur les séries. — 17. Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme: $\int y\,d\,x$, où y est une fonction algébrique de x. — 18. Sur la résolution algébrique des équations. — 19. Fragmens sur les fonctions elliptiques. — 20. Extraits de quelques lettres à Holmboe. — 21. Extrait d'une lettre à Hansteen. — 22. Extraits de quelques lettres à Crelle. — 23. Lettre à Legendre. Aperçu des manuscrits d'Abel conservés jusqu'à présent. Notes aux mémoires du tome I. Notes aux mémoires du tome II. Table pour faciliter la recherche des citations.

Die unterzeichnete Verlagshandlung hat den Kommissionsdebit des Werkes übernommen. Der Preis für beide Bände, welche nur ungetrennt zu haben sind, ist sehr billig auf ℳ 24.— festgestellt. Da die Auflage nur klein ist, so ist baldige Bestellung zu empfehlen.

Leipzig, im Januar 1882.

B. G. Teubner.