





Mathematics

QA

1

.A67







# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe,**

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

---

**Zweite Reihe.**

**Fünfzehnter Teil.**

---

**Leipzig.**

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.**

(H. Ehlers & Co.)

1897.

2011

gen.

# Inhalts-Verzeichniss

## des fünfzehnten Theils.

---

Nr. der Abhandlung.

Heft. Seite.

### Methode und Principien.

- III.** Strecken- und Punktrechnung insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken. Von Fr. Graefe I 34

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

- XI.** Bemerkungen zu der ausnahmslosen Auflösung des Problems, eine quadratische Form durch eine lineare orthogonale Substitution in eine Summe von Quadraten zu verwandeln. Von Adolf Kneser . . . . . III 225
- XV.** Die Summirung einer Gattung trigonometrischer Reihen. Von Franz Rogel . . . . . III 255
- XVII.** Lineare Relationen zwischen Mengen relativer Primzahlen. Von Franz Rogel . . . . . III 315
- XVII.** Ueber rationale Richtungs-cosinus. Von R. Hoppe III 323
- XVII.** Zum Beweise des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. Von G. Speckmann . . . . III 326

## IV

Nr. der Abhandlung	Heft.	Seite.
XVII. Ueber die Zerlegung der Zahlen in Quadrate. Von G. Speckmann . . . . .	III	328
XVII. Systeme von arithmetischen Reihen $n$ ter Ordnung. Von G. Speckmann . . . . .	III	332
XVII. Ueber Potenzreihen. Von G. Speckmann . . . . .	III	334
XVII. Ueber die Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ . Von G. Speckmann . . . . .	III	335
XVIII. Ueber die pythagoreischen Dreiecke und ihre Anwendung auf die Teilung des Kreisumfangs. Von Graeber . . . . .	IV	337
XXII. Nachtrag dazu . . . . .	IV	439
XXI. Eine besondere Gattung goniometrischer Nulldarstellungen. Von Franz Rogel . . . . .	IV	431

### Geometrie der Ebene.

I. Ueber orthoaxiale Kegelschnitte. Von Alfred Salomon . . . . .	I	1
IV. Ueber Radical-Kreise. Von Juan J. Durán Loriga . . . . .	I	117
XII. Ueber Radical- und Antiradical-Kreise. 2. Teil des Vorigen . . . . .	III	232
VI. Die Secanten und Tangenten des Folium Cartesii. Von A. Himstedt . . . . .	II	129
IX. Relationen bei regulären, dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygonen. Von E. Dolezal . . . . .	II	172
X. Eine approximative Triséctio Anguli. Von C. F. E. Björling . . . . .	II	223

### Geometrie des Raumes.

II. Zur Theorie der Curven in analytischer Behandlungsweise. Von A. zur Kammer . . . . .	I	14
V. Zur analytischen Curventheorie Von R. Hoppe . . . . .	I	124
VII. Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben. Von Ernst Wölffing . . . . .	II	145
VIII. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique. Par V. Sikstel . . . . .	II	159

## V

Nr. der Abhandlung.	Heft.	Seite.
<b>XIX.</b> Suite . . . . .	IV	403
<b>XIII.</b> Ueber die charakteristische Differentialgleichung der Raumcurven. Von R. Hoppe . . . . .	III	244
<b>XIV.</b> Regelfläche, deren Strictionlinie auch Krümmungslinie ist. Von R. Hoppe . . . . .	III	251
<b>XXII.</b> Erweiterung der Curvenklasse von constanter Krümmung. Von R. Hoppe . . . . .	IV	447

### Mechanik.

<b>XVI.</b> Von der elliptischen Bewegung eines frei beweglichen Massenpunktes unter der Wirkung von Attractionskräften. Von Paul Kindel. . . . .	III	262
<b>XX.</b> Herleitung des Gesetzes vom Parallelogramm aus der Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel und Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für dynamische Kraftwirkung. Von Th. Schwartze . . . . .	IV	421

### Litterarische Berichte.

<b>LVII.</b> Wiedemana (Elektr.) Frick (ph. Tech.) Helm (m. Chem.) Frz. Neumann (m. Phys.) Föppel (Elektr.) Windisch (Mol. Gew.) Tesla (Mehrph. Str.) Kayser (Phys.) Heger (Erh. Arb.) Warburg (Exp. Ph.) Wittwer (Mol. Ph.) Bauer (teor. Magn.) Jamin (Phys.) L. Weber (Exp. Ph.) Johnston Cp. (Elestr. World.) Macfarlane (alt. curr.) Wällner (Exp. Ph.)	
<b>LVIII.</b> Schwering (Aufg.) Reidt (Aufg. — Aufl.) Hochheim (Aufg.) Sickenberger (Aufg.) Laska (Frml.) E. R. Müller (Aufg.) Bürklen (Frml.) Fink (Sätz. Aufg.) Bardey (Gleh.) Laisant (Aufg. Alg. — 36). Goursat (Diffgl. 1. O.) Biermann (Vorb. h. M.) G. Scheffers (Grp.) H. Scheffers (Th. Gleh.) Vogt (rés. éq.) Goursat (éb. diff. 2 O.) Picard (sg éq. d.) Laska (Fct. Th.) Tannery u. Molk (ell Fct.) Demartres u. Lamaire (Diff. Gleh.) Laurent (slg.) Bardey (Gleh. 2. Gr.)	

Maclintock (enlarym.) Puchberger (Int.) Niewenglowski (anal. Geom.) Frankenbach (3 eck). Kluyver (Min. Flch.) Overeem (merkw. Pkt. d. Viel.) Schaute (4 dehn. Prism.) Suhle (Curv. auf Flch.) Schegel (S. 4 Dim.) Tarry (géom. im. — géom. gén.)

LIX. Zeuthen (Gesch. d. M.) Hensel (Kronecker W.) Hammer (Euler sph. Tr.) Stäckel (Gesch. Parall.) Schönflies (Plücker). Gino Loria (geom. Th.) Wellisch (Gesch. Wkltris.) Diekmann (Ar. Alg.) Schurig (Alg.) Stegmann (Plan.) Meigen (Geom. — Trig.) Lengauer (Ster.) Bork (Hpts.) Roeder (Coord.) Weber (Alg.) Fuhrmann (Int.) Wölffing (sing. P.) Indra (Ball.) Loessel (Luftwdst.) Appell (Mech.) Wien. astr. Kal. — Bur. Long. Annuaire.

LX. Seeger (Ar.) Koppe (Diekmann) (Ar. Alg.) Sporer (nied. Anal.) Winter (Alg.) Loewenberg (Math.) Jentzen (Trig.) Kröger (Plan.) Küpper (proj. G.) Günther (m. Geogr.) Girndt (Rauml.) Schubert (Aufg. — Ar. Alg.) Gundelfinger (Wurz. trin. Glch.). O. Müller (Taf. Messk.) Sickenberger (4 st. Log.) Schubert (5 st. Log.) E. Schultz (4 st. Taf.) Treutlein (4 st. Log.) Schülke (4 st. Log.) Bendt (Diff. Int.) J. A. Serret (Diff. Int.). Schlesinger (lin. Diffglch.)

---

# Berichtigungen

im 15. Teile.

Seite	37	Zeile	6 v. u.	statt	$U$	setze	$C$
"			1	"	$F_1$	"	$F''$
"	39	"	15	v. o.	$= 0$	"	$T$
"	41	"	21	"	Ord.	"	$O$ oder
"	45	"	4	v. u.	Haukels	"	Hankels
"	47	"	2	v. o.	$q_i$	"	$q_1$
"	48	"	12	"	$\frac{\varepsilon'^{q_1}}{\alpha} = 1$	"	$\frac{\varepsilon'^{q_1}}{\alpha_1'} - 1$
"	54	"	15 u. 16	"	$E_1'$	"	$E_3'$
"	63	"	9	v. u.	$-f_1$	"	$+f_1$
"	65	"	18	v. o.	$l_2 + m_2 t + n_2 t^2$	"	$l_3 + m_3 t + n_3 t^2$
"	66	"	10	v. u.	$\bar{+}$	"	$=$
"	70	"	15	v. o.	$w$	"	$\omega$
			20	"	$w'$	"	$\omega'$
			21	"	$w' 1 = \omega \alpha'$	"	$\omega' = \omega \alpha'$
			5	v. u.	$t$ mit	"	$t_1$
"	71	"	6	"	$w_1 \gamma'$	"	$v_1 \gamma'$
					$u_2 - u_3$	"	$u_2 - u_1$
					$(w_2 - w_1) \gamma'$	"	$(v_2 - v_1) \gamma'$
"	73	"	15	v. o.	die Ebenen	"	drei Ebenen
"	80	"	10	v. u.	$n + \delta$	"	$n + p$
"	81	"	8	v. o.	$rB +$	"	$rB =$
"	86	"	3	v. u.	Bulbin	"	Balbin
"	87	"	5	v. v.	$p_x$	"	$p^n$
"	88	"	17	v. u.	$AC$	"	$AB$
"	90	"	8	"	$\gamma c'$	"	$\gamma_1'$
"	91	"	8	"	$\gamma'$	"	$\gamma_1'$
"	93	"	7	"	$\gamma_1'$	"	$m \gamma_1'$
"	94	"	14	v. o.	$(A; B)^5$	"	$(X; B)^0$
"	96	"	1	"	$A_1 M_1$	"	$AM_1$
			2	"	$P$	"	$P_1$

Seite	96	Zeile	4 v. o.	statt	$B)^{\bar{\alpha}}$	setze	$P)^i$
„	98	„	4	„	$i_2$	„	$i_3$ (2 mal)
			5	„	$B_1$	„	$C_1$
„	100	„	8	„	$\gamma x'$	„	$\kappa'$
			2 v. u.	„	$k'$	„	$\kappa'$
„	102	„	4	„	$\frac{p'}{\alpha'} =$	„	$\frac{\eta'}{\alpha'} =$
„	104	„	5 v. o.	„	$(b+d)r$	„	$r$ (2 mal)
„	105	„	10	„	$br$	„	$bc$
					$cc$	„	$cx$
			10 v. u.	„	$j \sin \varphi$	„	$i \sin \varphi$
			9	„	$(d+y)$	„	$d(x+y)$
					$j$	„	$ij$
„	106	„	16	„	$CC$	„	$CD$
			11	„	$U_1$	„	$U$
					$U_2$	„	$U$
„	107	„	11 v. o.	hier fehlen die 2 Worte: der Quotientvector			
„	108	„	12	„	$(C; S)$	setze	$(C; D)$
				„	$w_1$	„	$w_4$
				„	$y_1$	„	$y_2$
				„	$z_1$	„	$z_3$
„	109	„	1	„	$x_1'x_2$	„	$x_1'x_1$
			2	„	$x_1'$	„	$x_1'w_1$
			11	„	$i_3^2$	„	$i_3^2$
„	110	„	7	„	$\frac{m - m_1}{n - n_1}$	„	$\frac{n - n_1}{m - m_1}$
			15	„	$\varphi$	„	$\psi$
„	112	„	20	„	$e_2 = i_1$	„	$e_1 = i_1$
			6 v. u.	„	$v_2$	„	$e_2$
			3	„	1, 2, 3	„	$n = 1, 2, 3$
„	113	„	1 v. o.	„	$7)e_1$	„	$7)i_1$
			2	„		streiche	$e_4 = e_4 e_3$

Seite 86 Zeile 18 v. ob. nach Ergänzung lautet:

nicht übereinstimmt. Die Grösse  $i$  ist durch die Ebene  $BAC$  bestimmt, umgekehrt . . . etc.

1.

## Ueber orthoaxiale Kegelschnitte.

Von

Dr. Alfred Salomon.

---

Wird eine Parabel von einem Kreise geschnitten, so ist die algebraische Summe der Abstände der Durchschnittspunkte von der Achse der Parabel gleich 0.

B e w e i s.

Die Gleichung der Parabel in Orthogonalcoordinaten sei

$$1) \quad y^2 = 2px$$

die des Kreises

$$2) \quad (y-l)^2 + (x-a)^2 = r^2$$

Die Durchschnittspunkte seien

$$A \equiv x_1, y_1$$

$$B \equiv x_2, y_2 \quad (\text{Fig. 1.})$$

$$C \equiv x_3, y_3$$

$$D \equiv x_4, y_4$$

Setzt man den aus 1) sich ergebenden Wert von  $x$  in 2) ein, so erhält man eine Gleichung vierten Grades für  $y$  von folgender Form

$$y^2 + 0 \cdot y^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

Da nun  $y_1, y_2, y_3, y_4$  die Wurzeln dieser Gleichung sind, so folgt:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

was zu beweisen war.

Es ist leicht ersichtlich, dass auch die Umkehrung dieses Satzes Gültigkeit hat, nämlich dass 4 Parabelpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen, wenn die algebraische Summe ihrer Achsenabstände  $= 0$  ist.

### F o l g e r u n g e n .

1) Wenn zwei der Durchschnittspunkte  $C$  und  $D$  in  $C_1$  (Fig. 2.) zusammenfallen, so wird einerseits

$$y_3 = y_4 \quad \text{also} \quad y_3 = -\frac{y_1 + y_2}{2}$$

andererseits findet in  $C_1$  eine Berührung zwischen Kreis und Parabel statt.

Fallen die Punkte  $A$  und  $D$  in  $A_1$  (Fig. 3.) zusammen, so findet ebenfalls Berührung beider Curven statt. Es ist ohne Weiteres zu übersehen, dass in diesem Falle, wo die beiden Durchschnittspunkte kleinster Ordinaten zusammengeflossen sind, der Kreis die Parabel von aussen berührt, während im vorigen Falle die Berührung von innen statt fand.

2) Wenn  $y_1 = -y_4$  ist, so ist

$$y_2 = -y_3$$

Die Schnittpunkte liegen symmetrisch zur Parabelachse und der Kreismittelpunkt in derselben. (Fig. 4.)

3) Wenn  $y_1 = y_2$  und  $y_3 = y_4$  ist, so ist

$$y_1 = -y_3$$

Der Kreis berührt die Parabel in zwei symmetrisch zur Achse liegenden Punkten von innen. (Fig. 5.)

4) Wenn  $y_4 = 0$  ist, so erhalten wir für den Kreis durch den Scheitel der Parabel folgende Bedingungsgleichung:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

5) Wenn  $y_1 = 0, y_4 = 0$ , so ist

$$y_2 = -y_3$$

Der Kreis berührt die Parabel im Scheitel und sein Mittelpunkt liegt auf der Achse.

6) Wenn  $y_2 = y_3 = y_4$  ist, so ist

$$y_1 = -3y_2$$

Es findet zwischen Kreis und Parabel eine Berührung zweiter Ordnung statt, der Kreis ist daher der Krümmungskreis der Parabel in  $B_1$  (Fig. 6.)

7) Wenn  $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$ , also  $= 0$  ist, so findet zwischen Kreis und Parabel eine Berührung dritter Ordnung statt. Der Kreis ist der Krümmungskreis im Scheitel  $A_1$  der Parabel (Fig. 7.) Also nur dieser Krümmungskreis kann mit der Parabel eine Berührung dritter Ordnung eingehen.

Zieht man durch die 4 Schnittpunkte von Kreis und Parabel an beiden Curven die Normalen (die Kreisnormalen gehen durch den Kreismittelpunkt) und sind die Winkel dieser Normalen mit der positiven Richtung der Abscissenachse  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  (Fig. 8.), so erhält man nach der zu Anfang festgesetzten Bezeichnung:

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_1 - b}{r}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{y_2 - b}{r}$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{y_3 - b}{r}$$

$$\sin \alpha_4 = \frac{y_4 - b}{r}$$

durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4 \\ &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4b}{r} \end{aligned}$$

da

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

ist, so ist

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4 = -\frac{4b}{r}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{y_1}{\operatorname{subn.}} = -\frac{y_1}{p}$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{y_2}{\operatorname{subn.}} = -\frac{y_2}{p}$$

$$\operatorname{tg} \beta_3 = - \frac{y_3}{\operatorname{subn.}} = - \frac{y_3}{p}$$

$$\operatorname{tg} \beta_4 = - \frac{y_4}{\operatorname{subn.}} = - \frac{y_4}{p}$$

daher ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_3 + \operatorname{tg} \beta_4 \\ = - \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{p} \end{aligned}$$

also:

$$\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_3 + \operatorname{tg} \beta_4 = 0$$

Wird eine Parabel

$$y^2 = 2px$$

von einem beliebigen Kegelschnitt

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0$$

geschnitten, so gilt für die Abstände  $y_1, y_2, y_3, y_4$  der Durchschnittspunkte von der Parabelachse folgende Bedingungsgleichung:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = - \frac{2ap}{b}$$

#### Beweis.

Substituiert man den aus der Parabelgleichung sich ergebenden Wert von  $x$  in die Kegelschnittgleichung, so erhält man eine Gleichung vierten Grades für  $y$  von der Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

wo

$$A = \frac{2ap}{b}$$

ist, daher

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = - \frac{2ap}{b}$$

Wenn daher in obiger allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes das Glied mit  $xy$  verschwindet, also  $a = 0$  wird, während

$b \gtrless 0$  ist, so wird

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

die Schnittpunkte liegen dann auf der Peripherie eines Kreises.

Um nun die Bedeutung der Bedingungen  $a = 0$ ,  $b \gtrless 0$  zu erkennen, denken wir uns die Scheitelgleichung eines Kegelschnittes

$$\eta^2 = 2p'\xi + q\xi^2$$

auf die obige allgemeine Form gebracht unter Anwendung der Transformationsgleichungen:

$$\xi = m + x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$\eta = n + x \sin \theta + y \cos \theta$$

In der transformirten Gleichung wird dann der Coefficient von  $xy$

$$a = \sin 2\theta \cdot (1 + q)$$

der Coefficient von  $x^2$  wird

$$b = \sin^2 \theta \cdot (1 + q) - q$$

Nun verschwindet  $a$  für

$$1) \theta = 0, \quad 2) \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad 3) \quad q = -1$$

Für

$$\theta = 0 \quad \text{und} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

ist also eine Symmetrieachse des Kegelschnittes parallel resp. senkrecht zur Parabelachse. Für  $q = -1$  ist der Kegelschnitt ein Kreis, hat also unzählige Symmetrieachsen,  $\theta$  wird daher in diesem Falle unbestimmt.

$a$  und  $b$  verschwinden gleichzeitig, wenn  $\theta = 0$  und  $q = 0$ , d. h. wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, deren Achse der Achse der ersteren Parabel

$$y^2 = 2px$$

parallel ist. In diesem Falle können indessen nicht 4 Schnittpunkte existiren, denn sämtliche Schnittpunkte der Curven

$$C_1 \equiv y^2 - 2px = 0 \quad \text{und} \quad C_2 \equiv y^2 + cy + dx + e = 0$$

sind in

$$C_2 - C_1 \equiv cy + (d + 2p)x + e = 0$$

enthalten. Dieses ist die Gleichung einer geraden Linie, welche also mit jeder der Parabeln höchstens 2 Punkte gemein haben kann.

Unter Berücksichtigung dieser Entwicklungen erhalten wir also den folgenden Satz:

Wird eine Parabel von einem Kegelschnitt so geschnitten, dass eine der Symmetrieachsen desselben senkrecht zur Parabelachse steht, so liegen die Durchschnittspunkte auf der Peripherie eines Kreises.

### F o l g e r u n g e n .

1) Wenn die Winkelhalbierende zweier Geraden zur Achse einer Parabel senkrecht steht, so liegen die Durchschnittspunkte der Geraden mit der Parabel auf der Peripherie eines Kreises.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

2) Je zwei Gegenseiten des einer Parabel und einem Kreise gemeinschaftlichen Sehnenvierecks schneiden die Parabelachse unter entgegengesetzt gleichen Winkeln.

Dieser Satz lässt sich indirect leicht beweisen. Auch der directo Beweis ist sehr einfach.

Wenn  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  (Fig. 9.) die Winkel zweier Gegenseiten des Sehnenvierecks mit der Parabelachse sind, und die obige allgemeine Kegelschnittgleichung als die Gleichung dieser beiden Sehnen angesehen wird, so ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e \\ = (y + \operatorname{tg} \alpha_1 x + m)(y + \operatorname{tg} \alpha_2 x + n) = 0$$

und da  $a = 0$ , so folgt

$$\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 = 0, \text{ also } \alpha_1 = -\alpha_2$$

3) Die gemeinschaftliche Sehne und Tangente einer Parabel und eines Krümmungskreises derselben schneiden die Parabelachse unter entgegengesetzt gleichen Winkeln

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \quad (\text{Fig. 10.})$$

Wenn zwei Kegelschnitte sich so schneiden, dass eine Symmetrieachse des einen zu einer ebensolchen des anderen senkrecht steht <sup>1)</sup>, so liegen die Schnittpunkte auf der Peripherie eines Kreises.

### B e w e i s .

Zwei orthoaxiale Kegelschnitte können den vorangehenden Betrachtungen gemäss stets auf folgende Form gebracht werden:

---

1) Zur Abkürzung bezeichnet Verfasser derartige Kegelschnitte im folgenden als „orthoaxiale“.

$$H_1 \equiv y^2 + b_1 x^2 + d_1 x = 0$$

$$H_2 \equiv y^2 + b_2 x^2 + c_2 y + d_2 x + e_2 = 0$$

Der Kegelschnitt

$$H_2 - H_1 \equiv (b_2 - b_1)x^2 + (d_2 - d_1)x + c_2 y + e_2 = 0$$

geht durch sämtliche Schnittpunkte beider. Der letztere ist aber eine Parabel, deren Achse der Ordinatenachse parallel läuft, die daher  $H_1$  in 4 Punkten schneidet, welche auf der Peripherie eines Kreises liegen. Da diese Punkte mit den Schnittpunkten von  $H_1$  und  $H_2$  identisch sind, so ist der Satz bewiesen.

### U m k e h r u n g.

Liegen die 4 Schnittpunkte zweier Kegelschnitte auf der Peripherie eines Kreises, so sind letztere orthoaxial.

### B e w e i s.

Ist  $H_1 = 0$  die Scheitelgleichung des einen Kegelschnittes,  $H_0 = 0$  die Gleichung des Kreises, so muss die Gleichung des anderen Kegelschnittes  $H_2$  von der Form

$$H_1 + \lambda H_0 = 0 \text{ sein.}$$

$H_2$  kann also kein Glied mit  $xy$  enthalten, muss daher, vorangegangenen Betrachtungen zufolge, zu  $H_1$  orthoaxial sein.

### F o l g e r u n g e n.

1) Zwei Gerade, deren Winkelhalbierende auf der Achse eines Kegelschnittes senkrecht steht, schneiden den Kegelschnitt in vier Punkten, die auf der Peripherie eines Kreises liegen.

2) Zwei Paar gerader Linien, deren Winkelhalbierende auf einander senkrecht stehen, begrenzen ein Kreisviereck.

3) Die gemeinschaftlichen Sehnen zweier orthoaxialen Kegelschnitte schneiden die Achsen unter paarweis entgegengesetzt gleichen Winkeln.

4) Die gemeinsame Sehne und Tangente eines Kegelschnittes und eines Krümmungskreises desselben schneiden die Achse des Kegelschnittes unter entgegengesetzt gleichen Winkeln.

Hieraus folgt eine Construction des Krümmungskreises in einem gegebenen Punkte eines Kegelschnittes <sup>1)</sup>.

5) Wird ein Kegelschnitt von einem System von Kreisen in einem Punkte berührt und in zwei anderen Punkten geschnitten, so sind die Schnittsehnen einander parallel und ihr Winkel mit der Achse des Kegelschnittes ist dem Tangentenwinkel entgegengesetzt gleich.

6) Laufen 2 Sehnen eines Kegelschnittes zweien von einem Punkte der Achse ausgehenden Tangenten parallel, so liegen ihre Endpunkte auf einem Kreise.

### Specialfälle.

a) Beide Sehnen sind Tangenten.

b) Eine Sehne ist Tangente in dem einen Endpunkte der anderen. — Der Kreis ist der Krümmungskreis in diesem Punkte.

c) Beide Sehnen sind Tangenten und die Berührungspunkte fallen zusammen, — dieses ist nur im Scheitel des Kegelschnittes möglich — daher der Satz:

Ein Kegelschnitt kann nur mit dem Krümmungskreise im Scheitel eine Berührung 3. Ordnung eingehen.

Sämtliche Kegelschnitte, welche durch die Ecken eines Kreisvierecks gelegt werden können, haben einander parallele oder orthogonale Achsen.

### Beweis.

Vier Punkte eines Kreises lassen sich stets als Durchschnitt zweier orthoaxialer Kegelschnitte auffassen:

$$H_1 \equiv y^2 + a_1 x^2 + b_1 x = 0$$

$$H_2 \equiv y^2 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2 y + d_2 = 0$$

Sämtliche durch die Schnittpunkte beider gehenden Kegelschnitte werden dann durch

$$H_1 + \lambda H_2 = 0$$

---

1) vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geom. der Kegelsch., 5. Aufl., S. 401.

ausgedrückt, wo  $\lambda$  ein beliebiger Parameter ist. Auch hierin ist der Coefficient von  $xy$  gleich 0. Daher sind die Achsen sämtlicher durch

$$H_1 + \lambda H_2 = 0$$

ausgedrückten Kegelschnitte parallel oder senkrecht zu den Achsen von  $H_1$  und  $H_2$ .

### F o l g e r u n g.

Die Geraden, welche die Winkel je zweier Gegenseiten eines Kreisvierecks halbiren, stehen auf einander senkrecht.

Für die Coordinaten der Schnittpunkte zweier orthoaxialer Kegelschnitte, die auf ein den Achsen paralleles Coordinatensystem bezogen sind:

$$H_1 \equiv y^2 + a_1 x^2 + b_1 x + c_1 y + d_1 = 0$$

$$H_2 \equiv y^2 + a_2 x^2 + b_2 x + c_2 y + d_2 = 0$$

gelten die Relationen:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{2(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{a_1 - a_2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2}$$

### B e w e i s.

In dem System der Kegelschnitte  $H_1 + \lambda H_2$ , welche mit  $H_1$  und  $H_2$  gleiche Schnittpunkte haben, befinden sich zwei Parabeln

$$P_1 \equiv x^2 - \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} x - \frac{c_2 - c_1}{a_1 - a_2} y - \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2} = 0$$

$$P_2 \equiv y^2 - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2} x - \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 - a_2} y - \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 - a_2} = 0$$

Die Achsen dieser Parabeln müssen den Coordinatenachsen parallel sein, ihre Gleichungen sind daher

$$x = C, \quad y = C_1$$

worin  $C$  und  $C_1$  diejenigen Werte von  $x$  resp.  $y$  sind, welche  $y$  in  $P_1$  resp.  $x$  in  $P_2$  zu einem Maximum oder Minimum machen.

Da nun in  $P_1$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial P_1}{\partial x}}{\frac{\partial P_1}{\partial y}} = \frac{2x - \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}}{\frac{c_2 - e_1}{a_1 - a_2}} \text{ ist,}$$

so ist

$$C = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$$

Für  $P_2$  ist

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial P_2}{\partial y}}{\frac{\partial P_2}{\partial x}} = \frac{2y - \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 - a_2}}{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 - a_2}}$$

daher

$$C_1 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 - a_2}$$

Die Abstände der Schnittpunkte von  $H_1$  und  $H_2$  von der Achse der Parabel  $P_1$  sind

$$C - x_1, \quad C - x_2, \quad C - x_3, \quad C - x_4$$

Die Summe dieser Abstände ist dem zu Anfang dieser Arbeit bewiesenen Satze zufolge gleich 0, daher

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4C = \frac{2(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2}$$

Ebenso ist

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4C_1 = \frac{2(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{a_1 - a_2}$$

Die Coordinaten  $(\alpha, \beta)$  des Mittelpunktes des einem Systeme orthoaxialer Kegelschnitte zugehörigen Kreises sind gleich den Parametern der zugehörigen Parabeln, vermehrt um das arithmetische Mittel aus den entsprechenden Coordinaten der Durchschnittspunkte. (Fig. 11.)

### Beweis.

Bezeichnet man die Parameter der beiden Parabeln  $P_1$  und  $P_2$  des Systems  $H_1 + \lambda H_2$  mit  $p_y$  und  $p_x$  und setzt zur Abkürzung die oben bestimmten Coordinaten des Schnittpunktes ihrer Achsen  $C$  und  $C_1$  ein, so lauten die Gleichungen der Parabeln:

$$P_1 \equiv x^2 - 2Cx - 2p_y y + \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2} = 0$$

$$P_2 \equiv y^2 - 2p_x x - 2C_1 y + \frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_2 - a_1} = 0$$

Hieraus erhält man durch Addition die Gleichung des Kreises der Durchschnittspunkte

$$H \equiv P_1 + P_2 \equiv [y - (C_1 + p_y)]^2 + [x - (C + p_x)]^2 + A = 0$$

wo  $A$  die aus der Rechnung sich ergebende Constante bedeutet.

Daher sind die Coordinaten des Kreismittelpunktes:

$$\alpha = C + p_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

$$\beta = C_1 + p_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} + p_y$$

was zu beweisen war.

Wählt man die Achsen der beiden Parabeln zu Coordinatenachsen, so ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

und

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

und man erhält so für die Abstände des Kreismittelpunktes von den Parabelachsen

$$MN = \alpha_1 = p_x$$

$$MR = \beta_1 = p_y$$

Sind die Gleichungen zweier Kegelschnitte in der allgemeinen Form (nach Salmon-Fiedler) gegeben:

$$H \equiv a_{11}y^2 + a_{12}xy + a_{22}x^2 + a_{13}y + a_{23}x + a_{33} = 0$$

$$H' \equiv a_{11}'y^2 + a_{12}'xy + a_{22}'x^2 + a_{13}'y + a_{23}'x + a_{33}' = 0$$

so liegen die Durchschnittspunkte auf einem Kreise, wenn das System

$$H + \lambda H' = 0$$

einen Kreis enthält, d. h. wenn

$$a_{11} + \lambda a_{11}' = a_{22} + \lambda a_{22}'$$

und

$$a_{12} + \lambda a_{12}' = 0$$

oder nach Elimination von  $\lambda$ :

$$\frac{a_{12}}{a_{12}'} = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11}' - a_{22}'}$$

Liegt der Mittelpunkt des Kreises auf der Achse der Parabel mit dem Parameter  $p_x$  (nach obiger Bezeichnung), so ist der Parameter

$$p_y = 0$$

Die Gleichungen der beiden orthoaxialen Parabeln haben dann die Formen:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2p_x x + c_1 \\ x^2 &= 0 \cdot y + c_2 \end{aligned}$$

oder nach entsprechender Transformation:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2p_x x \\ x^2 &= d_1 x + d_2 \end{aligned}$$

Die zweite Parabel geht also für diesen Fall in zwei parallele Gerade über.

Für  $d_2 = 0$  wird die eine dieser Geraden Tangente im Scheitel der Parabel. Für  $\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases}$  fallen beide Gerade mit der Scheiteltangente zusammen, und die Kreisgleichung ist daher

$$y^2 + x^2 = 2p_x x$$

oder

$$y^2 + (x - p_x)^2 = p_x^2$$

Also:

Der Radius des Krümmungskreises im Scheitel einer Parabel ist gleich dem Parameter derselben.

Die 3 Mittellinien eines vollständigen Vierecks schneiden sich in einem Punkte, der sie halbirt.

### B e w e i s .

Die Coordinaten der Ecken seien

$$\begin{aligned} A &\equiv (x_1, y_1), & B &\equiv (x_2, y_2) \\ C &= (x_3, y_3), & D &\equiv (x_4, y_4) \end{aligned}$$

Die Seitenmittelpunkte sind dann:

$$\begin{aligned} M &\equiv \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ N &\equiv \left( \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2} \right) \\ R &\equiv \left( \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$S \equiv \left( \frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 - y_1}{2} \right)$$

$$O \equiv \left( \frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2} \right)$$

$$P \equiv \left( \frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2} \right)$$

Daher ist die Mitte von  $MN$ :

$$Q \equiv \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \right)$$

auch Mitte von  $RS$  und  $OP$ , somit ist der Satz bewiesen.

Die Mittellinien des zwei orthoaxialen Parabeln gemeinsamen Sehenvierecks schneiden sich im Achsenschnittpunkt.

#### B e w e i s.

Die Achsen seien Coordinatenachsen, dann ist

$$Q \equiv (0, 0) \quad (\text{nach obiger Bezeichnung})$$

was zu beweisen war.

#### F o l g e r u n g.

Besitzen zwei orthoaxiale Parabeln einen gemeinsamen Krümmungskreis, so geht die Krümmungssehne durch den Achsenschnittpunkt und wird durch denselben im Verhältniss 1 : 4 geteilt.

## II.

Zur Theorie der Curven in analytischer  
Behandlungsweise.

Von

**A. zur Kammer**, Dr. phil.

in Kiel.

Lange Zeit war von den Evoluten einer ebenen Curve nur die Krümmungsmittelpunktcurve bekannt, und von den Evoluten einer Curve doppelter Krümmung kannte man gar keine oder hielt ihre Krümmungsmittelpunktcurve sogar für eine solche, bis Monge <sup>1)</sup> vor etwa hundert Jahren die Kenntniss dieses Gebietes bedeutend erweiterte, indem er zeigte: dass jede Curve, auch die ebene, unendlich viele Evoluten besitzt, die sämtlich doppelt gekrümmt sind bis auf eine einzige, nämlich die Krümmungsmittelpunktcurve der ebenen Curve, dass dagegen die Krümmungsmittelpunktcurve einer Raumcurve im engeren Sinne niemals zu den Evoluten gehört. Es ist interessant zu bemerken dass sich hierin selbst nachher ein namhafter Mathematiker irrte, nämlich Lagrange, und dass Jacobi <sup>2)</sup> es noch für nötig hielt, diesen Irrtum aufzuklären. In der Folge ist dieser Teil der analytischen Geometrie verhältnissmässig wenig bearbeitet. Neuerdings hat Herr Pirondini <sup>3)</sup>, Molins <sup>4)</sup> die Krümmungsmittelpunktcurve einer näheren Betrachtung unterzogen, allein in syste-

1) Monge, sur les développées, [les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure. Paris. 1785.

2) Jacobi, zur Theorie der Curven. Crelle's Journal, Bd. 14. 1835,

3) Pirondini, sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de'suoi centri di curvatura. Annali di Mat., t. XVII. 1889.

4) Molins, sur quelques nouvelles propriétés du lieu centres de courbure des courbes gauches. Mém. de Toul. Sér. 8, t. X (1888) et sér. 9, t. I.

matischer Weise sind die Fundamentalgrößen dieser wichtigen Begleitcurve noch nicht entwickelt. Und doch ist dieses mit geringen Hilfsmitteln leicht möglich: man gebraucht dazu ausser Differentiationen nur die Serret-Frénet'schen Formeln und einige der 22 Relationen, welche wegen der Orthogonalität der Achsen statt haben, sodass die Lehrbücher bequem von diesen Resultaten Gebrauch machen können.

In der folgenden Abhandlung werden zunächst im ersten Paragraphen Eigenschaften der Evoluten aus ihren Gleichungen analytisch in der Weise abgeleitet, wie solches im § 2. bei der Krümmungsmittelpunktcurve geschieht; § 3. enthält mehrere Curvenklassen unter Bevorzugung der dimensionslosen Invarianten  $i$ , wo  $\rho = R \cos i$ , nebst den Verhältnissen der abgewickelten Evolutfläche; im § 4. ist endlich eine specielle Raumcurve, nämlich die Schraubenlinie auf einem Kreisevolventencylinder, erörtert und dabei eine Verallgemeinerung des Puiseux'schen Satzes gegeben: wenn für eine Curve  $\rho$  eine lineare Function von  $\vartheta$  und von  $\tau$  ist, so ist sie notwendig eine isogonale Trajectorie der geradlinigen Erzeugenden einer Cylindrerfläche, deren Basis eine Kreisevolvente. Am Schlusse finden sich einige Umkehrungen dafür, dass beiden ebenen Curven die Krümmungsmittelpunktcurve zu den Evoluten gehört.

## § 1.

Inbetreff der Bezeichnungsweise beachte man, dass  $f, g, h; f', g', h', l, m, n; l', m', n'$  die Richtungscosinus der Tangente, der Hauptnormale, der Binormale und der rectificierenden Kante bedeuten sollen, ferner ist in üblicher Bezeichnung  $ds$  das Bogenelement der Curve,  $\tau$  und  $\vartheta$  der Krümmungs- und Torsionswinkel

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{d\vartheta}{d\tau}, \quad d\sigma^2 = d\vartheta^2 + d\tau^2, \quad \rho = \frac{ds}{d\tau}, \quad r = \frac{ds}{d\vartheta} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Curvelemente, welche sich auf eine Evolute, auf die Krümmungsmittelpunktcurve und auf die Polcurve der Urcurve beziehen, werden wir mit dem Index  $e, k$  und  $p$  versehen. Für die positive Aufeinanderfolge der begleitenden Achsen treffen wir die Festsetzung: Tangente nach vorn, Hauptnormale zur Linken, Binormale nach oben.

Für die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer Evolute bestehen die Gleichungen, wenn  $c$  eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$\begin{aligned} x_e &= x + \rho \cdot f' - \rho \cdot \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l \\ y_e &= y + \rho \cdot g' - \rho \cdot \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot m \\ z_e &= z + \rho \cdot h' - \rho \cdot \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot n \end{aligned}$$

Durch Differentiation (nach einer unabhängig Veränderlichen) ergibt sich, dass

$$dx_e = [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l] \cdot \rho d\vartheta$$

$$dy_e = [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [g' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot m] \cdot \rho d\vartheta$$

$$dz_e = [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [h' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot n] \cdot \rho d\vartheta$$

ferner dass

$$\begin{aligned} d^2x_e &= \left[ \frac{1}{\cos^2 i} \frac{di}{d\vartheta} + \frac{1}{\cos^2(\vartheta + c)} \right] \cdot [f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l] \cdot \rho d\vartheta^2 \\ &+ [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [-f \cdot \operatorname{cotg} \lambda + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \\ &\quad \cdot (f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l)] \cdot \rho d\vartheta^2 \\ &+ [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot [f' - \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot l] \cdot \operatorname{tgi} \cdot \rho d\vartheta^2 \end{aligned}$$

Durch cyclische Vertauschung der Richtungscosinus erhält man die Werte für  $d^2y_e$  und  $d^2z_e$ . In diesen Gleichungen bedeutet  $i$  den Winkel, um welchen der Radius  $R$  der Schmiegunskugel gegen die Osculationsebene geneigt ist, sodass also

$$\rho = R \cos i \quad \text{oder} \quad \operatorname{tgi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\vartheta}$$

Mit Hilfe obiger Ausdrücke erhält man nun

$$\begin{aligned} A_e &\equiv \begin{vmatrix} dy_e & dz_e \\ d^2y_e & d^2z_e \end{vmatrix} \\ &= [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot [l + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot f'] \cdot \rho^2 \cdot \operatorname{cotg} \lambda d\vartheta^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_e &\equiv \begin{vmatrix} dz_e & dx_e \\ d^2z_e & d^2x_e \end{vmatrix} \\ &= [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot [m + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot g'] \cdot \rho^2 \cdot \operatorname{cotg} \lambda d\vartheta^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_e &\equiv \begin{vmatrix} dx_e & dy_e \\ d^2x_e & d^2y_e \end{vmatrix} \\ &= [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot [n + \operatorname{tg}(\vartheta + c) \cdot h'] \cdot \rho^2 \cdot \operatorname{cotg} \lambda d\vartheta^3 \end{aligned}$$

und

$$D_e \equiv \pm \sqrt{A_e^2 + B_e^2 + C_e^2} = \pm [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)]^2 \cdot \frac{\rho^2 \operatorname{cotg} \lambda d\vartheta^3}{\cos(\vartheta + c)}$$

Nunmehr ist man im Stande, mehrere Elemente einer Evolute in den auf die Urcurve sich beziehenden Grössen auszudrücken.

$$ds_e \equiv \pm \sqrt{dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2} = \pm [\operatorname{tgi} + \operatorname{tg}(\vartheta + c)] \cdot \frac{\rho d\vartheta}{\cos(\vartheta + c)}$$

Infolge der festgesetzten positiven Aufeinanderfolge der positiven Richtungen der begleitenden Achsen ist bei  $ds_e$  und  $D_e$  das positive Vorzeichen zu wählen. Für die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale einer Evolute ergeben sich dann die Werte

$$f_e \equiv \frac{dx_e}{ds_e} = \cos(\vartheta + c) \cdot f' - \sin(\vartheta + c) \cdot l \quad \text{etc.}$$

$$f'_e \equiv \frac{B_e \cdot dx_e - C_e \cdot dy_e}{D_e \cdot ds_e} = -f \quad \text{etc. und}$$

$$l_e \equiv \frac{A_e}{D_e} = \cos(\vartheta + c) \cdot l + \sin(\vartheta + c) \cdot f' \quad \text{etc.}$$

Die begleitenden Achsen einer Evolute haben daher die in Fig. 1. angegebenen Richtungen. Die Tangente  $T_e$  und die Binormale  $B_e$  liegen in der Normalebene der ursprünglichen Curve und bilden mit der Krümmungsachse den Winkel  $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta + c\right)$  resp.  $(\vartheta + c)$ ; die Hauptnormale der Evolute ist entgegengesetzt gleich gerichtet der Tangente der Evolvente, und da die Normalebene der Evolvente Tangentialebene der Evolutfläche, so ist jede Evolute eine geodätische Linie auf der Fläche der Krümmungsachsen.

$$d\tau_e \equiv \frac{D_e}{ds_e^2} = \cos(\vartheta + c) \cdot d\tau$$

$$d\vartheta_e \equiv \pm \sqrt{dl_e^2 + dm_e^2 + dn_e^2} = -\sin(\vartheta + c) \cdot d\tau$$

$$d\sigma_e = d\tau, \quad \lambda_e = -(\vartheta + c)$$

$$l'_e \equiv \frac{d\vartheta_e}{d\sigma_e} \cdot f_e + \frac{d\tau_e}{d\sigma_e} \cdot l_e = l \quad \text{etc.}$$

In Worten: die Krümmungsachsen der Evolvente sind die rectificirenden Geraden einer Evolute, oder die Evolutfläche der Evolvente ist die rectificirende Cylinderfläche der Evoluten.

$$\rho_e \equiv \frac{ds_e}{d\tau_e} = [\text{tgi} + \text{tg}(\vartheta + c)] \cdot \frac{\rho \text{tg} \lambda}{\cos^2(\vartheta + c)}$$

Dieser Ausdruck gestattet eine geometrische Construction des Krümmungsmittelpunktes der Evoluten. Wir unterlassen es, für

$$r_e \equiv \frac{ds_e}{d\vartheta_e}, \quad R_e \equiv \sqrt{\rho_e^2 + \left(\frac{d\rho_e}{d\vartheta_e}\right)^2}$$

u. s. w. die Werte anzugeben, da sie von keiner besonderen Einfachheit sind.

Soll eine der  $\infty^1$  vielen Evoluten eine allgemeine Schraubenlinie sein, so muss für ein bestimmtes  $c$  nach dem Bertrand'schen Satze

$$\frac{d\vartheta_e}{d\tau_e} = \text{Const.}$$

sein, folglich

$$\text{tg}(\vartheta + c) = -\text{Const.} \quad \text{also} \quad \vartheta = \text{const.}$$

d. h. die Evolvente ist eben. Dann sind die sämtlichen Evoluten Schraubenlinien. Ist also eine der unendlich vielen Evoluten eine Schraubenlinie, so sind es auch die übrigen, und die Evolvente ist eine ebene Curve.

In umgekehrter Weise folgt aus den obigen Beziehungen, dass

$$d\tau = d\sigma_e, \quad d\vartheta = -d\lambda_e \quad \text{und}$$

$$f = -f'_e \quad \text{etc.}$$

$$f' = \cos \lambda_e \cdot f_e - \sin \lambda_e \cdot l_e \quad \text{etc.}$$

$$l = \sin \lambda_e \cdot f_e + \cos \lambda_e \cdot l_e \quad \text{etc.}$$

Gleichungen, welche für die Umkehraufgabe in Betracht kommen, zu gegebener Evolute die zugehörigen Evolventen zu finden. Es sind dies orthogonale Trajectorien der Tangenten der Evolute und Krümmungslinien auf ihrer Tangentenfläche. Man erinnere sich dabei der besonderen Verhältnisse einer ebenen Evolute, wo ihre Tangentenfläche die Ebene ist, in der die Curve sich befindet.

## § 2.

Die Gleichungen der Polcurve

$$x_p = x + \varrho \cdot f' + \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot l \quad \text{etc.}$$

in ebensolcher Weise zu behandeln, bietet keinerlei Schwierigkeit und führt natürlich zu den bekannten Eigenschaften dieser Curve. Aus den Gleichungen der Krümmungsmittelpunktcurve

$$x_k = x + \varrho \cdot f'$$

$$y_k = y + \varrho \cdot g'$$

$$z_k = z + \varrho \cdot h'$$

lässt sich ableiten, dass

$$dx_k = \left( \varrho \cdot l + \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot f' \right) \cdot d\vartheta \quad \text{etc.}$$

$$d^2x_k = \left[ -\frac{d\rho}{d\vartheta} \cdot \cotg \lambda \cdot f + \left( \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} - \rho \right) \cdot f' + 2 \frac{d\rho}{d\vartheta} \cdot l \right] d\vartheta^2 \text{ etc.}$$

Hieraus ergibt sich, dass

$$A_k = \left\{ \left[ \rho^2 + 2 \left( \frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} \right] \cdot f - \rho \frac{d\rho}{d\vartheta} \cotg \lambda \cdot f' + \left( \frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 \cotg \lambda \cdot l \right\} d\vartheta^3$$

und durch Einführung des bereits erklärten Winkels  $i$ , dass

$$A_k = R^2 \cdot \left[ \left( 1 - \frac{di}{d\vartheta} \right) \cdot f - \sin i \cos i \cotg \lambda \cdot f' + \sin^2 i \cotg \lambda \cdot l \right] d\vartheta^3 \text{ etc.}$$

$$D_k = \pm R^2 \cdot \sqrt{\left( 1 - \frac{di}{d\vartheta} \right)^2 + \sin^2 i \cotg^2 \lambda} \cdot d\vartheta^3$$

Für das Bogenelement  $ds_k$  der Krümmungsmittelpunktcurve berechnet man zunächst

$$ds_k = \pm R d\vartheta$$

Im Specialfalle der Curven constanter erster Krümmung oder  $i=0$  fällt die Krümmungsmittelpunktcurve mit der Polcurve zusammen, die Tangente der Polcurve hat aber die Richtung der positiven Binormale der Urcurve, aus dem Grunde ist bei  $ds_k$  das positive Vorzeichen zu wählen. Es ist demnach

$$ds_k = R d\vartheta \quad \text{und} \\ f_k = \sin i \cdot f' + \cos i \cdot l \quad \text{etc.}$$

Die Tangente der Krümmungsmittelpunktcurve liegt, was selbstverständlich ist, in der Normalebene der ursprünglichen Curve und bildet mit der Krümmungsachse den Winkel  $i$  und mit der Hauptnormale den Winkel

$$i' = \frac{\pi}{2} - i$$

Daraus folgt die bekannte Construction dieser Tangente, welche mit der Steiner'schen Construction der Tangente einer Fusspunktcurve im Zusammenhange steht: construirt man in der Normalebene der Urcurve um  $M$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser (s. Fig. 2.)

$$\overline{MP} = \overline{MP_k} = \overline{MP_p}$$

den Kreis, so ist die Tangente im Punkte  $P_k$  an den Kreis auch Tangente an die Krümmungsmittelpunktcurve. Aehnlich, wie oben, kommen wir bei der Entscheidung über das Vorzeichen von  $D_k$  zu dem Schlusse, dass der positive Wert zu nehmen ist; dann erhält man

$$l_k = \frac{1 - \frac{di}{d\vartheta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{di}{d\vartheta}\right)^2 + \sin^2 i \cotg^2 \lambda}} \cdot f$$

$$+ \frac{\sin i \cdot \cotg \lambda}{\sqrt{\left(1 - \frac{di}{d\vartheta}\right)^2 + \sin^2 i \cotg^2 \lambda}} (-\cos i \cdot f' + \sin i \cdot l) \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen gestatten eine einfache geometrische Interpretation; denn bezeichnen  $f_1, g_1, h_1$  die Richtungscosinus der Geraden  $\overline{P_k M}$ , so ist

$$f_1 = -\cos i \cdot f' + \sin i \cdot l \text{ etc.}$$

und führt man nun noch einen Hilfswinkel  $\theta$  ein, so dass

$$\cos \theta = \frac{1 - \frac{di}{d\vartheta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{di}{d\vartheta}\right)^2 + \sin^2 i \cotg^2 \lambda}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin i \cdot \cotg \lambda}{\sqrt{\left(1 - \frac{di}{d\vartheta}\right)^2 + \sin^2 i \cotg^2 \lambda}}$$

und mithin

$$\cotg \theta = \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} - \frac{di}{d\tau}\right) \frac{1}{\sin i}$$

so gewinnt man die leicht zu deutenden Beziehungen

$$l_k = \cos \theta \cdot f + \sin \theta \cdot f_1 \text{ etc.}$$

und für die Richtungscosinus der Hauptnormale berechnen sich die Werte

$$f_k' = -\sin \theta \cdot f + \cos \theta \cdot f_1 \text{ etc.}$$

In Worten (s. Fig. 2): die Normalebene der Krümmungsmittelpunktcurve geht durch  $P_k M$ , und es bilden ihre Haupt- und Binormale mit dieser Geraden die Winkel

$$\theta \text{ und } \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

wo  $\theta$  durch die Gleichung bestimmt ist

$$\cotg \theta = \left( \frac{d\vartheta}{d\tau} - \frac{di}{d\tau} \right) \cdot \frac{1}{\sin i}$$

Hierdurch ist das begleitende Achsenkreuz der Krümmungsmittelpunktcurve festgelegt.

Zieht man vom Mittelpunkte der Gauss'schen Einheitskugel parallele Geraden zu der Tangente, Haupt- und Binormale sowohl der ursprünglichen Curve, wie ihrer Krümmungsmittelpunktcurve bis zur Kugeloberfläche, und verbindet man die entstehenden Punkte auf der Einheitskugel durch Bogen grösster Kreise, so entstehen sphärische Dreiecke, welche die Abhängigkeit anderer, die gegenseitige Lage der beweglichen Achsenkreuze bestimmenden Winkel von den eingeführten Hilfswinkeln  $i$  und  $\theta$  erkennen und berechnen lassen. Bezeichnet man mit  $F_k, G_k, H_k; F_k', G_k', H_k'; L_k, M_k, N_k$  die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale der Krümmungsmittelpunktcurve in Bezug auf die beweglichen, begleitenden Achsen der ursprünglichen Curve, so ergibt sich, dass

$$F_k = 0, \quad G_k = \sin i, \quad H_k = \cos i$$

$$F_k' = -\sin \theta, \quad G_k' = -\cos i \cos \theta, \quad H_k' = \sin i \cos \theta$$

$$L_k = \cos \theta, \quad M_k = -\cos i \sin \theta, \quad N_k = \sin i \sin \theta$$

Gleichungen, welche auch durch die Beziehungen

$$f_k = F_k \cdot f + G_k \cdot f' + H_k \cdot l \quad \text{etc.}$$

$$f_k' = F_k' \cdot f + G_k' \cdot f' + H_k' \cdot l \quad \text{etc.}$$

$$l_k = L_k \cdot f + M_k \cdot f' + N_k \cdot l \quad \text{etc}$$

hätten abgeleitet werden können.

Es erübrigt noch,  $d\tau_k, d\vartheta_k$  u. s. w. in den auf die Urcurve sich beziehenden Grössen auszudrücken. Es ist

$$d\tau_k = \frac{\sin i}{\sin \theta} \cdot d\tau$$

Man kann dies Resultat in die Worte kleiden (Molins): eine Raumcurve und ihre Krümmungsmittelpunktcurve stehen in dem Zusammenhange, dass die Cosinus der beiden Winkel, welche die Tangente der einen mit der Osculationsebene der andern bildet, sich verhalten wie ihre Contingenzwinkel (s. Fig. 2).

Es ist allgemein

$$d\vartheta_k \equiv \pm \sqrt{(dl_k)^2 + (dm_k)^2 + (dn_k)^2} \\ \equiv \frac{A_k \cdot d^3x_k + B_k \cdot d^3y_k + C_k \cdot d^3z_k}{D_k^3} \cdot ds_k$$

Bei der Berechnung nach dem letzten Ausdrucke stellen sich recht umständliche Rechnungen ein, einfacher gestaltet sich dieselbe mit Hilfe des ersten; man erhält zunächst

$$dl_k = (-\cos \theta \cdot f_1 + \sin \theta \cdot f) \cdot \left( \cos i \cotg \lambda - \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) d\vartheta \quad \text{etc.}$$

folglich

$$d\vartheta_k = \left( \cos i \cotg \lambda - \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) d\vartheta$$

oder

$$d\vartheta_k = \left( \cos i - \frac{d\theta}{d\tau} \right) d\tau$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass es doppelt gekrümmte Curven mit ebener Krümmungsmittelpunktcurve geben wird, nämlich wenn für dieselben

$$\cos i - \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

Ferner ergibt die Ausrechnung, dass

$$\operatorname{tg} \lambda_k = \frac{\sin \theta}{\sin i} \left( \cos i - \frac{d\theta}{d\tau} \right)$$

$$\varrho_k = \frac{R \operatorname{tg} \lambda \sin \theta}{\sin i}$$

und

$$r_k = \frac{R}{\cos i \cotg \lambda - \frac{d\theta}{d\vartheta}}$$

Sucht man umgekehrt, die Grössen der Urcurve in denen der Krümmungsmittelpunktcurve auszudrücken, so folgt aus den obigen Formeln, dass

$$f = \cos \theta \cdot l_k - \sin \theta \cdot f_k' \quad \text{etc.}$$

$$f' = \sin i \cdot f_k - \cos i (\cos \theta \cdot f_k' + \sin \theta \cdot l_k) \quad \text{etc.}$$

$$l = \cos i \cdot f_k + \sin i (\cos \theta \cdot f_k' + \sin \theta \cdot l_k) \quad \text{etc.}$$

und dass ferner

$$d\vartheta = di + \cos \theta \cdot d\tau_k$$

$$d\tau = \frac{\sin \theta}{\sin i} \cdot d\tau_k$$

$$d\theta = \cotg i \cdot \sin \theta \cdot d\tau_k - d\vartheta_k$$

oder in Grössen, die jedoch mit Dimensionen behaftet

$$\frac{d\theta}{ds_k} = \frac{\cotg i \cdot \sin \theta}{\rho_k} = \frac{1}{r_k}$$

eine Differentialgleichung, welche zur Bestimmung des Winkels  $\theta$  benutzt werden muss. Man beachte, dass auf den rechten Seiten sich ausserdem noch der Winkel  $i$  befindet, der zunächst in Grössen der Urcurve definiert ist. Die vorstehenden Gleichungen lassen die grossen Schwierigkeiten des Umkehrproblems erkennen, zu gegebener Krümmungsmittelpunktcurve die ursprüngliche Curve zu finden.

### § 3.

Der Inclinationswinkel

$$i = \arccos \frac{\rho}{R}$$

ist besonders geeignet, Curvenclassen zu charakterisiren. Es möge zunächst der Specialfall

$$i = \text{const.}$$

betrachtet werden. Aus unsern Formeln folgt, dass die Krümmungsmittelpunktcurve eine isogonale Trajectorie der gradlinigen Erzeugenden der Evolutfläche ist. Welche besondern Verhältnisse treten bei der Abwicklung der Evolutfläche auf? <sup>1)</sup> Die Pol- und Krümmungsmittelpunktcurve transformiren sich in logarithmische Spiralen, deren gemeinsamer Pol der Punkt  $P$  ist, auf den die Raumcurve bei der Abwicklung auf eine ihrer Normalebene sich reducirt; denn die logarithmische Spirale hat die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre Fusspunktcurve in Bezug auf den Ursprung als Pol wiederum eine logarithmische Spirale ist, welche die Tangenten der ersten unter constantem Winkel schneidet. Die abgewickelte Evolutfläche besteht allemal aus zwei übereinander liegenden Blättern, welche längs der transformirten Polcurve mit einander zusammenhängen.

1) Steiner, über einige allgemeine Eigenschaften der Curven von doppelter Krümmung. Ges. Werke, Band II. pag. 161—165.

Die Grenzfälle

$$i = 0 \quad \text{und} \quad i = \frac{\pi}{2}$$

verlangen eine besondere Behandlung. Der Specialfall

$$i = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$R = \infty \quad \text{und} \quad d\vartheta = 0$$

charakterisirt die ebenen Curven. Die Evolutfläche ist eine Cylinderfläche mit der ebenen Krümmungsmittelpunktcurve als Basis. Weil allgemein die Tangentenflächen zweier Evoluten sich längs der Evolvente unter constantem Winkel schneiden, da (cf. Fig. 1.)

$$(\vartheta + c_1) - (\vartheta + c) = \text{const.}$$

so folgt in umgekehrter Weise, dass die Tangenten allgemeiner Schraubenlinien die Ebene der Basis in einer Evolvente der Basis unter ihrem Steigungswinkel durchsetzen. Die bei der Abwicklung der Evolutfläche doppelt gekrümmter Curven geltenden Verhältnisse haben in diesem Falle im eigentlichen Sinne nicht mehr statt.

Der zweite Grenzfall

$$i = 0$$

kennzeichnet die Curven constanter erster Krümmung oder

$$\varrho = C$$

wo dann auch

$$R = C$$

Pol- und Krümmungsmittelpunktcurve sind dieselben. Bei der Abwicklung der Evolutfläche gehen diese zusammenfallenden Begleitcurven in die Peripherie eines Kreises mit dem Radius  $C$  über, dessen Mittelpunkt der Punkt  $P$  ist, auf den die Urcurve sich reducirt. Welche Vereinfachungen erfahren unsere Gleichungen?

$$f_k = l \quad \text{etc.}$$

$$f'_k = -f' \quad \text{etc.}$$

$$l_k = f \quad \text{etc.}$$

$$d\tau_k = d\vartheta$$

$$d\vartheta_k = d\tau$$

Auch die übrigen Formeln beweisen, dass alles in guter Uebereinstimmung ist. Die Curven constanter erster Krümmung haben die ausgezeichnete Eigenschaft, dass volle Reciprocität zwischen Urcurve und Polcurve besteht: sucht man die Polcurve der Polcurve, so gelangt man zur ursprünglichen Curve zurück.

Nicht minder interessant, aber doch weniger beachtet, scheinen uns die allgemeineren Curven zu sein, für welche nur

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = C$$

oder  $\varrho$  eine lineare Function von  $\vartheta$  ist. Für den Inclinationswinkel  $i$  folgt hieraus die Bedingung

$$\cotg i = \vartheta + c$$

oder, da es auf eine additive oder subtractive Constante nicht ankommt,

$$\cotg i = \vartheta$$

Die Einsetzung dieses Wertes in unsere Formeln liefert einige Vereinfachungen. In geometrischer Hinsicht ist klar, dass sämtliche correspondirende Punkte der Pol- und Krümmungsmittelpunktcurve den constanten Abstand  $C$  von einander besitzen. In was für Curven biegen sich dieselben bei der Abwicklung der Evolutfläche um? Die Polcurve wird eine Kreisevolvente, deren Evolutkreis mit dem Mittelpunkt  $P$  den Halbmesser  $C$  hat, denn die Fusspunktencurve einer Kreisevolvente in Bezug auf den Mittelpunkt des Evolutkreises als Pol besitzt, wie leicht einzusehen, die merkwürdige Eigenschaft, dass die Entfernung entsprechender Punkte gleich der constanten Länge des Radius des Evolutkreises ist. Die Curven constanter erster Krümmung sind ein Specialfall dieser, die Constante  $C$  hat dann den Wert null.

Der Bedingung  $R = \text{Const.}$  kann durch die beiden

$$\varrho = \text{const.} \quad \text{und}$$

$$\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = 0$$

genügt werden. Mit der letzten Bedingungsgleichung ist

$$i = -(\vartheta + c)$$

oder

$$i = -\vartheta$$

äquivalent. Bei diesen, den sphärischen Curven, degenerirt die ganze Polcurve in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt der Kugel, auf welcher die Curve sich befindet. Die Schmiegunskugel geht durch die sämtlichen Punkte der Curve, grade so wie bei der ebenen Curve die Osculationsebene alle Curvenpunkte enthält. Die Evolutfläche ist ein Kegel. Bei seiner Ausbreitung, z. B. in eine Normal-

ebene der sphärischen Curve, geht die Krümmungsmittelpunktcurve in die Peripherie eines Kreises über, dessen Durchmesser

$$PP_p = R = \text{Const.}$$

Auf eine ähnliche Bedingungsgleichung führt die Untersuchung der Frage (cf. eine irrtümliche Behauptung bei Steiner, l. c. pag. 161), für welche Curven ist die Krümmungsmittelpunktcurve eine geodätische Linie der Evolutfläche? Dann muss sich dieselbe bei der Abwicklung der Evolutfläche in eine Gerade transformiren, woraus man leicht ableiten wird, dass die transformirte Polcurve eine Parabel ist, für welche die bewusste Gerade Scheiteltangente und deren Brennpunkt der oft erwähnte Punkt  $P$  ist. Aus diesen Verhältnissen lässt sich dann eine Relation zwischen  $\rho$  und  $R$  herleiten, nämlich

$$\rho^2 = R_0 \cdot R$$

wo  $R_0$  eine Constante. Dieser Bedingungsgleichung genügen aber auch noch Curven, welche die verlangte Eigenschaft nicht besitzen, nämlich die Curven constanten erster Krümmung.

Einen einfacheren und besseren Weg zur Lösung der Frage liefern unsere Formeln im vorhergehenden Paragraphen, da wir auf diese Weise mühelos die notwendige und hinreichende Bedingung gewinnen. Soll die Krümmungsmittelpunktcurve eine Geodätische der Evolutfläche sein, so muss in jedem Curvenpunkte ihre Hauptnormale mit der Flächennormalen zusammenfallen, d. h. es muss beständig der Winkel

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

sein; folglich erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$i = \vartheta + c$$

Selbstverständlich haben alle ebenen Curven die geforderte Eigenschaft. Unsere Formeln liefern diese nicht ohne weiteres mit, weil dieselben unter der stillschweigenden Voraussetzung  $d\vartheta \gtrless 0$  abgeleitet sind; man kann dieselben in die Bedingungsgleichung

$$i = \vartheta + c$$

mit einschliessen, wenn

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \epsilon$$

genommen wird.

Wir unterlassen es, weitere Anwendungen obiger Formeln zu geben.

#### § 4.

Die Kreisevolvente und ihre Parallelcurven kann man durch Gleichungen darstellen

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \cos u + (au + c) \sin u \\y &= a \cdot \sin u - (au + c) \cos u\end{aligned}$$

wo  $a$  der Radius des Evolutkreises und  $c$  eine willkürliche Constante ist. Wickelt man ein ebenes, rechtwinkeliges Dreieck auf eine Cylinderfläche mit einer Kreisevolvente als Basis auf in der Art, dass die eine Kathete mit der Basis zusammenfällt, während die andere Kathete die  $x$ -Coordinate wird, so biegt sich die Hypotenuse in eine Schraubenlinie um, welche die Kreiscylinder-Schraubenlinie als Specialfall enthält ( $a = 0$ ). Für die rechtwinkligen Coordinaten dieser verallgemeinerten Schraubenlinie ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= a \cos u + (au + c) \cdot \sin u \\y &= a \sin u - (au + c) \cdot \cos u\end{aligned}$$

$$z = \operatorname{tg} \epsilon \cdot \int_0^u \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du = \left(\frac{a}{2} u + c\right) u \cdot \operatorname{tg} \epsilon$$

wenn die Aufwicklung des Steigungsdreieckes im Punkte

$$(x = a, \quad y = -c)$$

beginnt, und der Steigungswinkel  $\epsilon$  ist.

Es ist keine wesentliche Einschränkung, wenn man anstatt der Äquidistanten Kreisevolventen diese selbst wählt, denn man braucht dann die Abwicklung des Evolutkreises nur in einem andern Punkte beginnen zu lassen; es soll deshalb  $c = 0$  gesetzt werden, wodurch die vorstehenden Gleichungen die einfache Gestalt annehmen

$$\begin{aligned}x &= a(\cos u + u \sin u) \\y &= a(\sin u - u \cos u) \\z &= \frac{a}{2} \operatorname{tg} \epsilon \cdot u^2\end{aligned}$$

Mithin ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{dx}{du} = a u \cos u \quad \frac{d^2x}{du^2} = a(\cos u - u \sin u) \quad \frac{d^3x}{du^3} = -a(2 \sin u + u \cos u)$$

$$\frac{dy}{du} = a u \sin u \quad \frac{d^2y}{du^2} = a(\sin u + u \cos u) \quad \frac{d^3y}{du^3} = a(2 \cos u - u \sin u)$$

$$\frac{dz}{du} = a \operatorname{tg} \varepsilon \cdot u \quad \frac{d^2z}{du^2} = a \operatorname{tg} \varepsilon \quad \frac{d^3z}{du^3} = 0$$

Die für Raumcurven wichtigen Grössen  $A, B, C, D$  haben daher in dem vorliegenden Falle die Werte

$$A = -a^2 \operatorname{tg} \varepsilon \cdot u^2 \cdot \cos u$$

$$B = -a^2 \operatorname{tg} \varepsilon \cdot u^2 \cdot \sin u$$

$$C = a^3 \cdot u^2 \quad \text{und}$$

$$D = \frac{a^3}{\cos \varepsilon} \cdot u^2$$

Hieraus berechnen sich die Elemente der Schraubenlinie, wie folgt:

$$ds = \frac{a}{\cos \varepsilon} \cdot u \, du$$

$$f = \cos \varepsilon \cdot \cos u$$

$$g = \cos \varepsilon \cdot \sin u$$

$$h = \sin \varepsilon$$

$$f' = -\sin u$$

$$g' = \cos u$$

$$h' = 0$$

$$l = -\sin \varepsilon \cdot \cos u$$

$$m = -\sin \varepsilon \cdot \sin u$$

$$n = \cos \varepsilon$$

Die Gleichungen besagen unter anderem, dass die Hauptnormalen parallel den Normalen im entsprechendem Punkte der Basis sind, sie sind daher parallel der Basisebene und berühren den graden Kreiscylinder über dem Evolutkreise. Die Fläche der Hauptnormalen lässt sich durch die folgenden Gleichungen darstellen

$$\xi = a \cos u + (a u + v) \sin u$$

$$\eta = a \sin u - (a u + v) \cos u$$

$$\zeta = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varepsilon \cdot u^2$$

Die analytische Behandlung dieser Gleichungen lässt vorzügliche Eigenschaften dieser verallgemeinerten Schraubenfläche erkennen; es hat den Anschein, dass sie und eine ihr nahe verwandte gradlinige Fläche die gewöhnliche Schraubenfläche in den technischen Fällen mit Vorteil vertreten werden, wenn die Schraubenmutter ein ausweichendes Mittel ist.

Die weitere Ausrechnung der Curvelemente ergibt, dass

$$dr = \cos \varepsilon \cdot du, \quad d\vartheta = \sin \varepsilon \cdot du; \quad \rho = \frac{a}{\cos^2 \varepsilon} \cdot u, \quad r = \frac{a}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} \cdot u$$

u. s. w.

Wie beschaffen ist die Evolutfläche? Für ihre Rückkehrkante oder für die Polcurve bestehen allgemein die Gleichungen

$$x_p = x + \rho \cdot f' + \frac{d\rho}{d\vartheta} \cdot l \quad \text{etc.}$$

mithin hat man in dem vorliegenden Falle:

$$\begin{aligned} - x_p &= a \operatorname{tg}^2 \varepsilon (\cos u + u \sin u) \\ - y_p &= a \operatorname{tg}^2 \varepsilon (\sin u - u \cos u) \\ z_p &= \frac{a}{2} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \cdot \cot \varepsilon \cdot u^2 + \frac{a}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} \end{aligned}$$

Die Polcurve ist ebenfalls eine Schraubenlinie eines Kreisevolventencylinders; der Radius des Evolutkreises hat den Wert  $(a \operatorname{tg}^2 \varepsilon)$  und der Steigungswinkel ist

$$\varepsilon' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

Der Anfangspunkt liegt diametral gegenüber und um  $\frac{a}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}$  oberhalb der  $xy$ -Ebene. Die Polcurve der Polcurve befindet sich mit der Urcurve auf demselben Kreisevolventencylinder und besitzt mit ihr den gleichen Steigungswinkel: sie ist mit der ursprünglichen Curve in entsprechenden Stücken congruent. Die correspondirenden Punkte haben von einander den constanten Abstand  $\frac{a}{\sin \varepsilon \cos^3 \varepsilon}$ . Sucht man die  $n$ te Polcurve der Urcurve, so liegt diese mit ihr auf demselben Kreisevolventencylinder oder auf demjenigen der ersten Polcurve, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade. Erwähnenswert ist noch der specielle Fall

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4}$$

dann sind alle diese Schraubenlinien in entsprechenden Stücken einander congruent, während sie sich sonst in zwei Gruppen teilen. Die Krümmungsmittelpunktcurve der Urcurve hat von der Polcurve in entsprechenden Punkten den constanten Abstand

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{a}{\sin \epsilon \cos^2 \epsilon}$$

Für die betrachtete Schraubenlinie ist sowol  $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ , wie auch  $\frac{d\rho}{d\tau}$  constant. Es lässt sich zeigen, dass diese Eigenschaft den Schraubenlinien eines Kreisevolventencylinders allein zukommt. Aus den beiden Bedingungen

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = c_1 \quad \text{und}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = c_2$$

folgt, von Specialfällen abgesehen, dass

$$\operatorname{tg} \lambda \equiv \frac{d\vartheta}{d\tau} = \text{const.}$$

und daher nach dem Bertrand'schen Satze die zu bestimmenden Raumcurven jedenfalls isogonale Trajectorien der Erzeugenden einer gewissen Cylinderfläche sind. Wählen wir das Coordinatensystem so, dass die  $z$ -Achse mit der festen Richtung der rectificirenden Geraden zusammenfällt, so steht die Cylinderfläche, auf welcher die gesuchten Raumcurven liegen, senkrecht zur  $xy$ -Ebene, und es handelt sich darum, ihre Leiteurve oder Basis zu finden. In der angenommenen Bezeichnungsweise ist nun

$$\arccos h = \frac{\pi}{2} - \lambda \quad \text{und} \quad h \equiv \frac{dz}{ds} = \sin \lambda$$

Ist  $y = f(x)$  die Gleichung der gesuchten Basis, so ist

$$ds \equiv \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{1}{\cos \lambda} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

mithin

$$f' = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

$$g = \frac{\cos \lambda \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

$$h = \sin \lambda$$

Durch Differentiation erhält man

$$df = - \frac{\cos \lambda f'(x) f''(x)}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} dx, \quad dg = \frac{\cos \lambda f''(x)}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} dx, \quad dh = 0$$

folglich

$$d\tau = \cos \lambda \cdot \frac{f''(x)}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Unterscheidet man die Curvelemente der Basis durch den Index  $b$ , so lehren die vorstehenden Gleichungen, dass zwischen den Elementen einer Schraubenlinie und der Basis ihrer Cylinderfläche allgemein folgende Beziehungen stattfinden

$$ds = \frac{ds_b}{\cos \lambda}, \quad d\tau = \frac{\cos \lambda}{\rho_b} ds_b \quad \text{und} \quad \rho = \frac{\rho_b}{\cos^2 \lambda}$$

Jede dieser drei Relationen ist eine Folge der beiden anderen. Der bequemeren Schreibweise wegen werde mit  $\alpha$  der Winkel bezeichnet, den die Tangente der Basis mit der  $x$ -Achse einschliesst, dann ist

$$\rho_b = \frac{ds_b}{d\alpha}$$

Durch Differentiation von

$$\rho_b = \cos^2 \lambda \cdot \rho$$

und unter Berücksichtigung der Voraussetzung

$$\frac{d\rho}{d\tau} = c_2$$

gewinnt man die Gleichung

$$d\rho_b = c_2 \cos^2 \lambda \cdot d\alpha$$

und durch Integration

$$\rho_b = c_2 \cos^2 \lambda \cdot \alpha + C_1$$

folglich ist auch

$$ds_b = (c_2 \cos^2 \lambda \cdot \alpha + C_1) d\alpha$$

und da ferner

$$dx = \cos \alpha \cdot ds_b$$

und

$$dy = \sin \alpha \cdot ds_b$$

so erhält man die Differentialgleichungen

und

$$dx = \cos \alpha (c_2 \cos^3 \lambda \cdot \alpha + C_1) d\alpha$$

$$dy = \sin \alpha (c_2 \cos^3 \lambda \cdot \alpha + C_1) d\alpha$$

Ihre Integralgleichungen lauten

$$x = (c_2 \cos^3 \lambda \cdot \alpha + C_1) \sin \alpha + c_2 \cos^3 \lambda \cdot \cos \alpha + C_2$$

$$y = - (c_2 \cos^3 \lambda \cdot \alpha + C_1) \cos \alpha + c_2 \cos^3 \lambda \cdot \sin \alpha + C_3$$

Betrachten wir nun anstatt der Basis ihre Evolute! Für deren rechtwinklige Coordinaten  $X, Y$  bestehen allgemein die Gleichungen

$$X = x - \rho_b \cdot \sin \alpha$$

$$Y = y + \rho_b \cdot \cos \alpha$$

Die Einsetzung der gefundenen Werte ergibt daher, dass

und

$$X = c_2 \cos^3 \lambda \cdot \cos \alpha + C_2$$

$$Y = c_2 \cos^3 \lambda \cdot \sin \alpha + C_3$$

oder schliesslich

$$(X - C_2)^2 + (Y - C_3)^2 = (c_2 \cos^3 \lambda)^2 \quad \text{q. c. d.}$$

Ist also für eine Raumcurve  $\rho$  eine lineare Function von  $\vartheta$  und von  $\tau$ , so ist sie Schraubenlinie auf einer Cylinderfläche, deren Basis eine Kreisevolvente ist. Hierin ist der Puiseux'sche Satz als Specialfall enthalten, dass die Schraubenlinien mit constantem Krümmungsradius Kreiscylinderschraubenlinien sind.

Beim Beginn unserer Betrachtungen erwähnten wir die Tatsache: bei der ebenen Evolvente giebt es eine ebene Evolute, und diese ist zugleich Krümmungsmittelpunktcurve; hier am Schlusse mögen einige hierauf bezügliche Umkehrungen Platz finden. Ist eine der unendlich vielen Evoluten einer Curve eben, so ist auch die Evolvente eben, und diese Evolute ist auch Krümmungsmittelpunktcurve. Ist die Krümmungsmittelpunktcurve eben, so kann sie zugleich Evolute sein, aber es ist nicht notwendig, denn dieses tritt in zwei Fällen ein:

$$d\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad d\theta = \cos i d\tau$$

Ist die Krümmungsmittelpunktcurve eine Geodätische der Evolutfläche — die Evoluten sind geodätische Linien derselben —, so braucht sie deswegen noch nicht zu den Evoluten zu gehören; denn es giebt ausser den ebenen eine Classe von doppelt gekrümmten Curven, welche diese Eigenschaft besitzt. Ist aber schliesslich die

Krümmungsmittelpunktcurve eben und eine geodätische Linie der Evolutfläche, so gehört sie zu den Evoluten, und die ursprüngliche Curve befindet sich mit ihr in derselben Ebene; denn dann ist die Krümmungsmittelpunktcurve nach einem Satze aus der Flächentheorie eine Krümmungslinie der Evolutfläche und schneidet mithin, da sie zu den gradlinigen Erzeugenden nicht gehören kann, die Krümmungsachsen unter dem Winkel

$$i = \frac{\pi}{2}$$

eine Bedingung, welche die ebenen Curven charakterisirt.

Kiel, im Februar 1896.

## III.

Strecken- und Punktrechnung, insbesondere die  
Rechnung mit parallelen Strecken.

(Quaternionen Hamilton's und Unverzagt's).

Von

Prof. Dr. **Fr. Graefe**, Darmstadt.

---

Die von Unverzagt in Programmen und in seinem Werke: „Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, Wiesbaden 1876“ begründeten Rechnungen mit parallelen Strecken, mit sog. Quotientvektoren habe ich weiter ausgebildet. Die Quotientvektorenrechnung führt zu complexen Zahlensystemen, die u. A. Weierstrass, Schwarz, Dedekind, Hölder, Schur, Study, Scheffers zu dem Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht haben. Die symbolische Schreibweise Hamiltons und seiner Schule ( $Tq, Sq, Vq$  etc.) habe ich nicht angewendet und ebenso die Namen „Tensor“, „Scalar“ (nach dem Wunsche Grassmanns) vermieden. Meine Unterscheidung von „Strecke“ und „Vector“ ergibt sich aus dem Texte. In dem Abschnitte „Anwendung der Gesetze der Addition und Multiplication paralleler Strecken“, (der unbeschadet für die folgenden Abschnitte übergangen werden kann), habe ich u. A. nachgewiesen, dass die von Unverzagt aufgestellten Coordinatensysteme specielle Fälle der bekannten Staudt-Fiedler'schen Systeme sind.

---

### Addition und Subtraction von parallelen Strecken.

Wenn man eine gerade Linie von einem Punkte  $B$ , dem Anfangspunkte, nach dem Punkte  $N$ , dem Endpunkte, zieht, so kommt der geraden Linie  $BN$  ausser der absoluten Länge eine Richtung zu, die durch Bewegung eines Punktes in gerader Linie von  $B$  nach  $N$  bestimmt wird. Wenn man die Linie oder Strecke  $BS$  an Länge gleich der Strecke  $BN$  macht, so unterscheiden sich beide in der Richtung. Die gegenseitige Richtung ist durch den Winkel  $NBS$  bestimmt. Ist der Winkel  $NBS$  gleich zwei Rechte, so fällt  $BS$  mit  $BP$  zusammen und die Strecke  $BP$  ist die Strecke  $BN$  entgegengesetzt gerichtet. Die parallelen Strecken  $AM$  und  $BN$  der Figur 1. nennt man gleichgerichtet und die Strecken  $AM$  und  $NB$  entgegengesetzt gerichtet. Die Strecken bezeichnet man in Bezug auf Grösse und Richtung mit griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma$  und deren absoluten Längen mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben  $a, b, c$ . Der Anfangspunkt der Strecke  $\alpha$  und der Strecke  $\alpha_n$  ist im allgemeinen mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben  $A$  bezeichnet.

„Strecken sind nur dann gleich, wenn sie denselben Anfangs- und Endpunkt besitzen, d. h. wenn sie sich decken. Zwei gleichlange, parallele, gleichgerichtete Strecken, die nicht denselben Anfangspunkt haben, sind also nicht gleich, d. h. die eine Strecke kann nicht statt der andern gesetzt werden“.

Unter einer Strecke  $m\alpha$ , wo  $m$  eine positive oder negative reelle Zahl ist, versteht man ferner eine solche, die mit  $\alpha$  denselben Anfangspunkt, dieselbe oder entgegengesetzte Richtung von  $\alpha$  hat und deren Grössenverhältniss zu der Länge von  $\alpha$  durch denselben Wert von  $m$  bezeichnet wird. „Parallele, gleichgerichtete Strecken haben die gleichen Vorzeichen (+, -), parallele entgegengesetzt gerichtete Strecken verschiedene Vorzeichen“. Die Strecke  $\frac{\alpha}{a}$  heisst Einheitsstrecke.

Liegt ein Punkt  $C$  auf der geraden Linie  $AB$ , so sollen für die Abstände der Punkte die Gleichungen

$$AC + CB = AB, \quad AC = -CA \quad a.$$

bestehen. Liegt  $C$   $\left. \begin{array}{l} \text{zwischen} \\ \text{ausserhalb} \end{array} \right\}$   $A$  und  $B$ , so ist das Teilverhältniss  $\frac{AC}{CB}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv,} \\ \text{negativ,} \end{array} \right.$  und ist das Teilverhältniss  $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv,} \\ \text{negativ,} \end{array} \right.$  so liegt  $C$

{zwischen }  
{ausserhalb}  $A$  und  $B$ . Nimmt man  $AC$ ,  $CB$  als Repräsentanten von Strecken, so gilt die erste der Gleichungen a. nicht.

„Unter der Summe der parallelen, gleichgerichteten Strecken  $\alpha$  und  $\beta$  versteht man die zu ihnen parallele, gleichgerichtete Strecke  $\gamma$ , deren absolute Länge gleich der Summe der absoluten Längen von  $\alpha$  und  $\beta$  ist und deren Anfangspunkt  $C$  den Abstand  $AB$  im umgekehrten Verhältniss der Längen von  $\alpha$  und  $\beta$  teilt“.

Es ist somit

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad \alpha + b = c, \quad \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} \quad 1.$$

Denkt man sich den Punkt  $A$  mit der Masse  $a$  und den Punkt  $B$  mit der Masse  $b$  behaftet, so ist der mit der Masse  $a+b$  behaftete Punkt  $C$  der Schwerpunkt der beiden Punkte  $A$  und  $B$ . Den Punkt  $A(B)$  nennt man den Schwerpunkt der im Punkte  $C$  gelegenen Masse  $(a+b)$  und der im Punkte  $B(A)$  gelegenen Masse  $-b(-a)$ . Man kann also leicht den Schwerpunkt von positiven und negativen Massen bestimmen.

Die Verknüpfung  $\alpha + \beta$  genügt den beiden Gesetzen der Addition, dem commutativen Gesetze

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad 2.$$

und dem associativen Gesetze

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta = \alpha + \beta + \delta \quad 3.$$

wenn  $\delta$  eine Strecke bezeichnet, die den Strecken  $\alpha$ ,  $\beta$  gleichgerichtet parallel ist. Die Formel 2. folgt aus der Erklärung der Verknüpfung und die Formel 3. aus dem Satze, dass drei Punkte nur einen Schwerpunkt haben.

Was die Differenz der beiden parallelen, gleichgerichteten Strecken  $\gamma$ ,  $\beta$  ( $c > b$ ) betrifft, so muss ihrer Definition nach sein

$$\text{also } \left. \begin{aligned} (\gamma - \beta) + \beta &= \gamma \\ \gamma - \beta &= \alpha, \quad c - b = a, \quad AC : CB = b : c - b \end{aligned} \right\} \quad 4.$$

Diese Gleichungen sollen für jeden Wert von  $b$  und  $c$  gelten und die Definitionsgleichungen der Summe der beiden Strecken  $\gamma$ ,  $-\beta$  sein. Man hat also die Erklärung: „die Summe von zwei parallelen Strecken  $m\alpha$  und  $n\beta$ , wo  $m$ ,  $n$  reelle positive oder negative Zahlen sind, und  $m\alpha + n\beta$  von null verschieden ist, ist eine

„zu ihnen parallele Strecke von der absoluten Länge  $ma + nb$ , die „mit der grösseren der beiden Strecken  $ma$  und  $nb$  gleichgerichtet „ist, und deren Anfangspunkt  $C$  auf der geraden Linie  $AB$  so ge- „legen ist, dass

$$AC : CB = nb : ma$$

„oder der Schwerpunkt aus den beiden Anfangspunkten der Sum- „mandenstrecken ist, wenn man diese Punkte  $A, B$  mit den Massen „ $ma, nb$  sich behaftet denkt. Diese Verknüpfung genügt dem com- „mutativen und associativen Gesetze“.

Leicht ersichtlich ist die Identität dieser Streckensummation mit der Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Wenn in den Gl. 4.  $c = b$  ist, so ist  $a = 0$  und  $\alpha$  ist eine im Unendlichen liegende Strecke von der Länge null. Aus der ersten Gleichung 4. folgt, dass die Hinzufügung der Differenz  $\gamma - \beta$  zu  $\beta$  die Strecke  $\beta$  nach  $\gamma$  parallel verschiebt, wobei der Punkt  $B$  die Strecke  $BC$  beschreibt.

Man kann  $\gamma, -\beta, (b = c)$  ein Streckenpaar nennen.

Aber auch durch Addition von  $\gamma - \beta$  zu einer Strecke  $\sigma$ , die parallel, gleichgerichtet und gleich lang der Strecke  $\gamma$  ist, wird die Strecke  $\sigma$  parallel verschoben, wobei der Punkt  $S$  eine Strecke zurücklegt, die parallel, gleichgerichtet und gleich lang der Strecke  $BC$  ist und durch Addition von  $\gamma - \beta$  zu einer Strecke  $-\sigma$  erhält man eine Parallelverschiebung der Strecke  $-\sigma$ , bei der der Punkt  $S$  eine Strecke beschreibt, die parallel, entgegengesetzt gerichtet und gleich lang der Strecke  $BC$  ist. Da das associative Gesetz besteht, so ist

$$\begin{aligned} \sigma + (\gamma - \beta) &= (\sigma + \gamma) - \beta \\ -\sigma + (\gamma - \beta) &= \gamma - (\beta + \sigma) = -[(\beta + \sigma) - \gamma] \\ s &= b = c \end{aligned}$$

Es ist in der Figur 2.

$$\gamma = UC', \quad \beta = BB', \quad \sigma = SS'$$

Der Punkt  $D$  ist der Mittelpunkt von  $CS$  und  $BF$ , der Punkt  $E$  ist der Mittelpunkt von  $BS$  und  $CF''$ ; die Strecken  $BC, SF, F''S$  sind also parallel, gleichgerichtet und gleich lang. Es ist leicht nachzuweisen, dass ist

$$(\sigma + \gamma) - \beta = DL' - BB' = FF' \quad \gamma - (\beta + \sigma) = CC' - EE' = F_1F_1'$$

d. h.  $\gamma - \beta$  ist ein Operator, der eine Verschiebung der Strecke  $SS'$  nach  $FF'$  und der Strecke  $SS_1'$  nach  $F''F_1'$  bewirkt.

Folgende Sätze lassen sich leicht beweisen:

1. Wenn  $C$  ein beliebiger Punkt der geraden Linie  $AB$  ist und  $\alpha, \beta, \gamma$  parallele Strecken mit den Anfangspunkten  $A, B, C$ , so lassen immer zwei Zahlen  $m$  und  $n$ , die nicht beide null sind, so bestimmen, dass

$$\gamma = m\alpha + n\beta, \quad c = ma + nb \quad 5.$$

ist. Es ist

$$m\alpha + n\beta = r\alpha + s\beta, \quad \text{wenn } m = r, \quad n = s \quad \text{ist} \quad 5'.$$

2. Sind  $A, B, C$  drei nicht in einer geraden Linie liegende Anfangspunkte von drei parallelen Strecken  $\alpha, \beta, \gamma$  und ist  $D$  ein Punkt der Ebene  $ABC$  und Anfangspunkt einer den Strecken  $\alpha, \beta, \gamma$  parallelen Strecke  $\delta$ , so kann man drei Zahlen  $m, n, p$  die nicht sämtlich null sind, so bestimmen, dass

$$\delta = m\alpha + n\beta + p\gamma, \quad d = ma + nb + pc \quad 6.$$

ist. Es ist

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = r\alpha + s\beta + t\gamma, \quad \text{wenn } m = r, \quad n = s, \quad p = t \quad \text{ist} \quad 6'.$$

3. Sind  $A, B, C, D$  die Ecken eines Tetraeders und die Anfangspunkte der vier parallelen Strecken  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , und ist  $E$  ein beliebiger Punkt und Anfangspunkt der Strecke  $\epsilon$ , die den Strecken  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  parallel ist, so kann man vier Zahlen  $m, n, p, q$ , so bestimmen, dass

$$\epsilon = m\alpha + n\beta + p\gamma + q\delta, \quad e = ma + nb + pc + qd \quad 7.$$

Es ist

$$m\alpha + n\beta + p\gamma + q\delta = r\alpha + s\beta + t\gamma + u\delta, \quad \text{wenn } m = r, \quad n = s, \quad p = t, \\ q = u \quad 7'.$$

Das Tetraeder  $ABCD$  heisst rechtswendig, wenn ein mit Kopf in  $A$  und den Füßen in  $B$  längs  $AB$  liegender Mensch, der nach der Kante  $CD$  hinsieht, die Ecke  $C$  zur Linken und die Ecke  $D$  zur Rechten hat; sieht dagegen der so liegende Mensch die Ecke  $C$  rechts und die Ecke  $D$  links, so heisst das Tetraeder linkswendig. Zwei Tetraeder haben gleichen Sinn, wenn beide rechtswendig oder beide linkswendig sind, sie haben jedoch entgegengesetzten Sinn, wenn das eine rechtswendig, das andre linkswendig ist.

Unter dem Verhältniss  $\frac{T_n}{T}$  von zwei Tetraedern  $T_n$  und  $T$ , von

denen  $T$  nicht null ist, versteht man die Zahl, die das Verhältniss der beiden Tetraederinhalte misst, mit dem positiven Vorzeichen, wenn sie denselben, mit dem negativen Vorzeichen, wenn sie entgegengesetzten Sinn haben.

Es ist

$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC \quad 8.$$

wenn  $ABCD$  der Inhalt des Tetraders  $ABCD$  ist.

Die Gegenseiten der Ecken  $A, B, C, D$  bezeichne man mit  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ . Der Inhalt des Tetraeders  $ABCD$  sei  $T$ , die Inhalte der Tetraeder, die einen Punkt  $M$  zur Spitze und die vier Seiten von  $T$  zu Grundflächen haben, seien

$$T_1, T_2, T_3, T_4$$

Mit Rücksicht auf den Sinn der Tetraeder gilt allgemein die Gleichung

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0$$

also

$$\frac{T_1}{T} + \frac{T_2}{T} + \frac{T_3}{T} + \frac{T_4}{T} = 1 \quad 9.$$

Es falle der Punkt  $D$  in den Punkt  $C$  und der Punkt  $M$  liege in der Ebene  $ABC$ .

Das Dreieck  $ABC$  heisst rechtswendig, wenn ein von  $A$  nach  $B$  sehender Mensch die Ecke  $C$  zur Linken hat, und linkswendig, wenn der Sehende die Ecke  $C$  zur Rechten hat. Zwei Dreiecke haben gleichen Sinn, wenn beide rechtswendig oder linkswendig sind; sie haben entgegengesetzten Sinn, wenn das eine rechtswendig, das andere linkswendig ist. Unter dem Verhältniss  $\frac{A_n}{A}$  von zwei Dreiecken versteht man die Zahl, die das Verhältniss der beiden Inhaltsdreiecke misst, mit dem positiven Vorzeichen, wenn sie denselben, mit dem negativen Vorzeichen, wenn sie entgegengesetzten Sinn haben. Wenn  $M$  ein Punkt der Ebene  $ABC$  ist, und  $(MBC)$  den Inhalt des Dreiecks  $MEC$  bezeichnet, dann gilt mit Rücksicht auf den Sinn der Dreiecke allgemein die Gleichung

$$\frac{(MBC)}{(ABC)} + \frac{(MCA)}{(ABC)} + \frac{(MAB)}{(ABC)} = 1 \quad 10.$$

oder kürzer

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = 1 \quad 10'.$$

Sind die nicht in einer geraden Linie liegende Punkte  $ABC$  die Anfangspunkte von drei parallelen Einheitsstrecken  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  und der Punkt  $M$  der Ebene  $ABC$  der Anfangspunkt einer den Einheitsstrecken parallelen Strecke  $\mu$ , so ist

$$\mu = m \left( \frac{d_1}{d} \alpha' + \frac{d_2}{d} \beta' + \frac{d_3}{d} \gamma' \right) \quad 11.$$

Sind  $ABCD$  die Ecken eines Tetraeders und die Anfangspunkte der vier parallelen gleichgerichteten Einheitsstrecken  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  und ferner  $M$  der Anfangspunkt einer den Einheitsstrecken parallelen Strecke  $\mu$ , so ist

$$\mu = m \left( \frac{T_1}{T} \alpha' + \frac{T_2}{T} \beta' + \frac{T_3}{T} \gamma' + \frac{T_4}{T} \delta' \right) \quad 12.$$

#### Division und Multiplication von parallelen Strecken.

Der Quotient von zwei parallelen Strecken  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha$  von null verschieden)

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \quad 13.$$

soll eindeutig bestimmt sein. Aus dieser Gleichung folgt zur Erklärung der Multiplication die Gleichung

$$q \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha} \alpha = \beta \quad 14.$$

Der Quotient  $q$  heisst nach Unverzagt eine longimetrische Quaternion<sup>1)</sup>. Da diese Quotienten eindeutig bestimmt sein sollen, so hat die Gleichung

$$\frac{x}{\alpha} = \beta \quad 15.$$

in Bezug auf die Unbekannte  $x$  nur eine Auflösung, die man erhält, wenn man beide Seiten mit  $\alpha$  multiplicirt

$$\frac{x}{\alpha} \alpha = x = \beta \alpha$$

Es ist also

1) Unverzagt: „Theorie der goniometrischen etc. Quaternionen, Wiesbaden 1876“. Unverzagt führte die Rechnung mit parallelen Strecken ein.

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha} \quad 15'$$

Sind die Strecken  $\alpha$  und  $\beta$  a) gleichgerichtet, so folgt aus der Gleichung 14., dass die Strecke  $\alpha$  durch Multiplication mit dem Quotienten  $q$  in die Strecke  $\beta$  übergeführt wird; um dies auszuführen ist erforderlich: 1) dass die Länge  $a$  von  $\alpha$  verwandelt wird in die Länge  $b$  von  $\beta$ , d. h. es muss  $\alpha$  entweder gestreckt oder verkürzt werden, bis es so gross ist wie  $\beta$ , 2) dass  $\alpha$  parallel verschoben wird bis ein Anfangspunkt, der die gerade Linie  $AB$  beschreibt, in den Anfangspunkt  $B$  von  $\beta$  fällt. Sind die Strecken  $\alpha$  und  $\beta$  b) entgegengesetzt gerichtet, so wird die Strecke  $\alpha$  durch Multiplication mit dem Quotienten  $q$  in die Strecke  $\beta$  übergeführt; um dies jedoch auszuführen ist es erforderlich: 1) dass die Strecke  $\alpha$  in einer Ebene, die die Strecke  $\alpha$  enthält, um den Anfangspunkt um  $2R$  gedreht wird, 2) dass die Länge  $a$  von  $\alpha$  verwandelt wird in die Länge  $b$  von  $\beta$ , 3) dass die Strecke  $-\frac{b}{a}\alpha$  parallel verschoben wird bis ihr Anfangspunkt, der die gerade Linie  $AB$  beschreibt, in den Anfangspunkt  $B$  von  $\beta$  fällt.

Gesetzt  $q_1 = \frac{\delta}{\gamma}$ ,  $\delta$  und  $\gamma$  zwei parallele Strecken, wäre ein Quotient, der mit  $\alpha$  multiplicirt, diese Strecke  $\alpha$  nach  $\beta$  überführe. Dazu ist nötig, um kurz zu sprechen, dass  $q_1$  1) die Strecke  $\alpha$  um denselben Winkel (Ord.  $2R$ ) wie  $q$  drehe, 2) in demselben Verhältniss wie  $q$  die Strecke  $\alpha$  an Länge verändere und 3) um dieselbe Länge  $AB$  wie  $q$  die Strecke  $\alpha$  parallel verschiebe. Man kann daher setzen

$$q = q_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

wenn ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad AB \text{ gleich und gleichstimmig parallel mit } CD, \delta, \gamma \text{ gleichgerichtet (entgegengesetzt gerichtet) bei gleichgerichteten (entgegengesetzt gerichteten) } \beta, \alpha.$$

16.

Der Quotient  $\frac{\beta}{\alpha}$  dreht um denselben Winkel ( $0$  oder  $2R$ ), verschiebt parallel und streckt oder verkürzt durch Multiplication nicht nur die Strecke  $\alpha$ , sondern jede Strecke im Raume. Man kann nämlich nach den Gl. 16. machen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

also ist

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \gamma = \delta \quad 17.$$

Nimmt man

$$\gamma = m\alpha, \quad \delta = m\beta$$

so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{m\alpha}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot m\alpha = m\beta = m \left( \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha \right) = \frac{m\beta}{\beta} \cdot \alpha = \frac{m\beta\alpha}{\alpha} = m \frac{\beta\alpha}{\alpha}$$

und man kann setzen

$$m \frac{\beta}{\alpha} = \frac{m\beta}{\alpha} = \frac{\gamma m}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} m \quad 18.$$

Diese Gleichung setzt fest, dass für die Multiplication einer Zahlgrösse  $m$  mit einem Quotienten  $\frac{\beta}{\alpha}$  die Gesetze der Multiplication und Division mit Zahlen gelten.

Aus der Gleichung 16. folgt, dass je zwei parallele Radien zweier excentrischen Kugeln denselben Quotienten und jede Seite eines geraden Cylindermantels mit seiner Axe einen anderen Quotienten bestimmen.

Die Quotienten  $p, q, r, s \dots$  von je zwei parallelen Strecken kann man nach den Gleichungen 16. auf denselben Dividenten oder auf denselben Divisor reduciren. Man kann setzen

$$\left. \begin{array}{l} p = \frac{\beta}{\alpha}, \quad q = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad r = \frac{\varepsilon}{\alpha} \dots \dots \dots \\ p = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad q = \frac{\alpha}{\delta}, \quad r = \frac{\alpha}{\nu} \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad 19.$$

die Strecken  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \nu$  sind parallel, und es ist

$$AB \parallel LA, \quad AC \parallel DA, \quad AE \parallel NA$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{d}, \quad \frac{e}{a} = \frac{a}{n}$$

Es sind die Strecken  $\beta$  und  $\lambda, \gamma$  und  $\delta, \varepsilon$  und  $\nu$  etc. gleichgerichtet.

Es ist

also 
$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{n} = \frac{e}{d} \quad \frac{c}{l} = \frac{b}{d} \quad LC = DB \\ \frac{\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\lambda} \end{aligned} \right\} 19'.$$

Um in Uebereinstimmung mit den Lehren der Arithmetik zu bleiben, nimmt man an, dass ist

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\beta}{\mu} \quad 20.$$

Diese Annahme bedeutet nichts anderes, als dass man in dem Product

$$\frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\mu} \mu \right) = \left( \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\mu} \right) \mu \quad 20'.$$

das associative Gesetz gelten lässt, d. h. die Ueberführung von  $\mu$  in  $\alpha$  und dann von  $\alpha$  in  $\beta$  ist gleich der Ueberführung von  $\mu$  in  $\beta$ .

Nach den Gleichungen 19. ist

$$pq = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\beta}{\delta}, \quad qp = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\gamma}{\lambda}$$

mithin nach den Gleichungen 19'.

$$pq = qp \quad 21.$$

Zieht man  $DM \# bA$  und bestimmt die Zahl  $m$  so, dass ist

$$\frac{e}{a} = \frac{d}{m}$$

so ist

$$r = \frac{\delta}{\mu}$$

Es ist also

$$(pq)r = \frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\mu} = \frac{\beta}{\mu}, \quad p(qr) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\mu} \right) = \frac{\beta}{\mu}$$

mithin

$$(pq)r = p(qr) \quad 22.$$

Aus den Gleichungen 19. erhält man ferner

$$pq + rq = \frac{\beta}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad (p + r)q = \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \cdot \frac{\alpha}{\delta}$$

Nimmt man von „der Summe zweier Quotienten mit denselben „Nennern an, dass sie gleich der Summe der Zähler dividirt durch „den gemeinschaftlichen Nenner ist“, so ist

$$pq + rq = \frac{\beta}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\beta + \varepsilon}{\delta}, \quad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\beta + \varepsilon}{\alpha} \dots \quad 23.$$

und

$$pq + rp = (p + r)q$$

Nach der letzten Gleichung ist

$$\begin{aligned} (p + r)(q + s) &= p(q + s) + r(q + s) = (q + s)p + (q + s)r \\ &= qp + sp + qr + sr = pq + ps + rq + rs \end{aligned} \quad 24.$$

Unter dem Quotienten

$$x = \frac{p}{q} \quad 25.$$

hat man einen solchen Quotienten  $x$  von zwei parallelen Strecken zu verstehen, für den ist

$$xq = p \quad 25'.$$

oder

$$x \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Es besteht somit die Gleichung

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha} \quad 26.$$

„Das Product, die Summe, der Quotient von zwei Quotienten „paralleler Strecken ist wieder ein Quotient von parallelen Strecken. „Für die vier Grundrechnungen der Quotienten von parallelen „Strecken gelten im allgemeinen die Gesetze der Arithmetik (nach „Gl. 20. = 26.)“.

Sind die Strecken  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  gleichgerichtet parallel, und liegt  $A$  so zwischen  $B$  und  $E$ , dass ist

$$EA : AB = b : c$$

so ist

$$\frac{\beta + \varepsilon}{\alpha} = \frac{m\alpha}{\alpha} = m, \quad m\alpha = b + s$$

d. h. der Quotient  $\frac{\beta + \varepsilon}{\alpha}$  ist eine reelle Zahl. Es ist die Summe zweier Quotienten eine reelle Zahl, wenn der gemeinschaftliche Divisor seinen Anfang im Schwerpunkte der Strecken des Dividenten hat.

Sind  $\beta'$ ,  $\varepsilon'$  zwei gleich lange, gleichgerichtete parallele Strecken,

so ist in dem Quotienten  $\frac{\beta' - \varepsilon'}{\alpha'}$  der Dividend eine im Unendlichen liegende Strecke von der Länge null oder ein Operator, der zu einer anderen parallelen Strecke addirt diese parallel verschiebt. Addirt man diesen Quotienten zu einem anderen Quotienten  $\frac{\gamma}{\alpha'}$ , so erhält man einen Quotienten  $\frac{x}{\alpha'}$ , dessen Dividend dieselbe Länge wie  $\gamma$  hat. Liegt ferner  $A$  in der Mitte von  $Bb$  und ist  $\alpha'$  gleichgerichtet und gleichgross den Strecken  $\beta'$ ,  $\varepsilon'$ , so ist

$$\frac{\varepsilon'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\varepsilon'}, \quad \varepsilon' + \beta' = 2\alpha'$$

Es ist  $\frac{\beta'}{\alpha'}$  nicht gleich  $\frac{\varepsilon'}{\alpha'}$ , es besteht also die Gleichung

$$\frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\varepsilon'}{\alpha'} = 0$$

nicht.

Obgleich  $\frac{\beta' - \varepsilon'}{\alpha'}$  nicht null ist, so hat  $\left(\frac{\beta' - \varepsilon'}{\alpha'}\right)^2$  den Wert null. Auf der geraden Linie  $AB$  sei  $E$  der Mittelpunkt von  $DB$  und  $D$  der Anfangspunkt einer Strecke  $\delta'$ , die den Strecken  $\alpha'$ ,  $\beta'$  parallel, gleichgerichtet und an Länge gleich ist.

Es ist also ferner

$$\frac{\varepsilon'}{\delta'} = \frac{\beta'}{\varepsilon'}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta'} = \frac{\delta'}{\varepsilon'}, \quad \beta' + \delta' = 2\varepsilon'$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 &= \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 - 2\frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \\ &= \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} - 2\frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \\ &= \frac{\beta'}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\beta'} - 2 = \frac{\beta'}{\varepsilon'} + \frac{\delta'}{\varepsilon'} - 2 = \frac{2\varepsilon'}{\varepsilon'} - 2 = 0 \end{aligned} \quad 27.$$

Diese Quotienten haben mithin dieselben Eigenschaften wie die alternirenden Zahlen Haukels und das äussere Product Grassmanns, „dass ein Product zu null werden kann, ohne dass die Factoren „null sind“.

Es ist ferner

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha'} - \frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 - 2\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right) = 1 + \frac{\varepsilon'}{\beta'} - 2\frac{\varepsilon'}{\alpha'} = 1 + \frac{\varepsilon'}{\beta'} - 2\frac{\alpha'}{\beta'} = 0$$

also

$$\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 = 2\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right) - 1 \quad 27'.$$

Diese Gleichung kann man auch wie folgt ableiten. Man hat

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\varepsilon'}{\alpha'}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta'} = \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2, \quad \alpha' = \frac{\varepsilon'}{\alpha'}\beta', \quad \varepsilon' = \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2\beta'$$

und

$$\frac{\varepsilon' + \beta'}{\beta'} = \frac{2\alpha'}{\beta'} = \frac{2\varepsilon'}{\alpha'}$$

$$\frac{\varepsilon' + \beta'}{\beta'} = \frac{\varepsilon'}{\beta'} + 1 = \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 + 1$$

daher

$$2\frac{\varepsilon'}{\alpha'} = \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 + 1$$

Ferner ist noch

$$\varepsilon' + \beta' = \frac{\varepsilon' + \beta'}{\beta'}\beta' = \frac{\varepsilon'}{\beta'}\beta' + \frac{\beta'}{\beta'}\beta' = \left(\frac{\varepsilon'}{\beta'} + \frac{\beta'}{\beta'}\right)\beta'$$

$$\frac{\varepsilon' + \beta'}{\beta'}\beta' = \frac{2\varepsilon'}{\alpha'}\beta'$$

mithin

$$\left\{\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2 + 1\right\}\beta' = \left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^2\beta' + \beta' = \frac{2\varepsilon'}{\alpha'}\alpha'$$

Allgemein erhält man, wenn  $n$  eine positive ganze Zahl ist

$$\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right)^n = n\left(\frac{\varepsilon'}{\alpha'}\right) - (n-1) \quad 27''.$$

Diese Gleichung kann als Definitionsgleichung gelten, wenn  $n$  eine beliebige reelle Zahl ist.

Es seien  $A, B, C, D$  die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Diagonalen  $AC, BD$  sich im Punkte  $E$  schneiden. Die Strecken  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$  seien parallel, gleichgerichtet und gleichgross. Es ist

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\gamma'}{\delta'}, & q_2 &= \frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{\delta'}{\alpha'}, & q_1^2 &= 2q_1 - 1, & q_2^2 &= 2q_2 - 1 \\ \beta' + \delta' &= 2\varepsilon', & \alpha' + \gamma' &= 2\varepsilon' \\ \text{also} \\ \beta' + \delta' - \alpha' &= \gamma' \end{aligned} \right\} \quad 28'.$$

Man hat

$$(q_1 - 1)(q_1 + 1) = 2(q_1 - 1), \quad (q_2 - 1)(q_2 + 1) = 2(q_2 - 1) \quad 2S''.$$

Aus dieser Gleichung folgt nicht

$$q_1 = +1 (q_2 = +1)$$

Ferner ist

$$q_1 q_2 = \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{\beta' + \delta' - \alpha'}{\alpha'} = \frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\delta'}{\alpha'} - 1 = q_1 + q_2 - 1$$

$$(q_1 q_2)^2 = 2q_1 q_2 - 1$$

Bezeichnet man mit  $q_3, q_4, q_5 \dots q_p \dots$  die Quotienten von je gleich zwei gleichgerichteten parallelen Strecken, die dieselben absoluten Längen wie die Strecken  $\alpha', \beta', \gamma'$  haben, so bestehen die Gleichungen

$$q^n_p = nq_p - (n - 1), \quad q_m q_p = q_m + q_p - 1, \quad (q_m - q_p)^2 = 0$$

Es ist also

$$q_1 q_2 q_3 = (q_1 q_2) q_3 = (q_1 + q_2 - 1) q_3 = q_1 q_3 + q_2 q_3 - q_3$$

$$= q_1 + q_2 + q_3 - 2$$

und allgemein

$$q_1 q_2 q_3 q_4 \dots q_p = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_p - p + 1 \quad 28.$$

Es ist  $q_1$  ein Factor, der eine jede Strecke im Raume durch Multiplication um die Länge  $AB$  in einer Richtung verschiebt, die parallel und gleichstimmig mit  $AB$  ist oder, der Quotient aus zwei parallelen gleichgerichteten Einheitsstrecken ist gleich dem durch sie bestimmten Verschiebungsfactor. Bezeichnet man daher  $q_1$  mit  $(A, B)$ , so ist

$$q_1 = (B, C), \quad q_1 q_2 = (A, B)(B, C) \quad \text{und} \quad (B, C)(A, B) = (A, C) \quad 28''.$$

Diese Formel sagt aus, dass die Folge von zwei Translationen verschiedener Richtung äquivalent einer einzigen Translation ist, die nach Grösse, Richtung durch die dritte Seite eines Dreiecks bestimmt ist, dessen andre Seiten aus den gegebenen Translationen nach Grösse und Richtung construiert werden können; die Ordnung der Translationsfolgen ist beliebig.

---

Die Einheitsstrecken  $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \dots$  seien gleichgerichtet parallel. Es ist dann

$$\frac{\beta}{\alpha} = (-1)^n \frac{b \beta'}{a \alpha'}, \quad a \text{ und } b \text{ positive Zahlen} \quad 29.$$

wo  $n$  eine gerade Zahl bedeutet, wenn die Strecken  $\beta$ ,  $\alpha$  gleichgerichtet, und  $n$  eine ungerade Zahl ist, wenn dieselben Strecken entgegengesetzt parallel sind.

Die Anfangspunkte  $A, B, C, D, E$  der Einheitsstrecken  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$  sollen in einer geraden Linie liegen, und es sei der Punkt  $A$  der Mittelpunkt von  $DB$  und von  $EC$ . Es ist dann

$$\beta' = m\alpha' + p\gamma', \quad m + p = 1, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{p}{m}$$

also

$$(-1)^n \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b \beta'}{a \alpha'} = \frac{b}{a} \frac{m\alpha' + p\gamma'}{\alpha'} = \frac{b}{a} \left( m + p \frac{\gamma'}{\alpha'} \right) \quad 30$$

Da ferner

$$\delta' = m\alpha' + p\varepsilon', \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\delta'}{\alpha'}, \quad \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \cdot \frac{\gamma'}{\alpha'} = 1 = \frac{\gamma'}{\alpha'} + \frac{\varepsilon'}{\alpha'} = 1$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{a \alpha'}{b \beta'} = \frac{a \delta'}{b \alpha'} = \frac{a}{b} \left( m + p \frac{\varepsilon'}{\alpha'} \right) \quad 30' \\ &= \frac{a}{b} \left\{ m + p - p \left( \frac{\gamma'}{\alpha'} - 1 \right) \right\} = \frac{a}{b} \left( p + 1 - p \frac{\gamma'}{\alpha'} \right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln 11. und 12. kann man dem Quotienten  $\frac{\mu}{\alpha}$  die Formen

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m}{a} \left( \frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\gamma'}{\alpha'} \right), \quad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta \quad 30''$$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m}{a} \left( \frac{T_1}{T} + \frac{T_2}{T} \frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{T_3}{T} \frac{\gamma'}{\alpha'} + \frac{T_4}{T} \frac{\delta'}{\alpha'} \right), \quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T \quad 30'''$$

geben. In der Gleichung 30'' ist zu beachten, dass die Anfangspunkte der Strecken  $\mu, \alpha, \beta, \gamma$  in einer Ebene liegen und die Anfangspunkte der Strecken  $\alpha, \beta, \gamma$  die Eckpunkte eines Dreiecks sind; die Anfangspunkte der Strecken  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  der Formel 30''' sind die Ecken eines Tetraeders.

Um das Product zweier parallelen Strecken durch den Quotienten dieser Strecken auszudrücken nimmt man an, dass die Gleichung

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right) = \beta\alpha = \frac{\beta}{\alpha}\alpha^2 \quad 31'$$

besteht, und dass abgesehen vom Vorzeichen  $\alpha^2$  gleich  $a^2$  ist. Hamilton setzt

$$\alpha^2 = -a^2$$

ich setze

$$\alpha^2 = (-1)^s a^2$$

wo  $s$  eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Nach den Gleichungen 30. ist

$$\left. \begin{aligned} \beta\alpha &= (-1)^{n+s} ab \frac{\beta'}{\alpha'} & \alpha\beta &= (-1)^{n+s} ab \frac{\alpha'}{\beta'} & (-\beta)\alpha &= \beta(-\alpha) \\ \beta'\alpha' &= (-1)^s \frac{\beta'}{\alpha'} \end{aligned} \right\} \quad 32.$$

„Das Product von zwei parallelen Strecken ist nicht commutativ, d. h. es ist  $\beta\alpha$  nicht gleich  $\alpha\beta$ .“

Setzt man in den Gleichungen 30.

$$AC = 1$$

so ist

$$\beta\alpha = (-1)^{n+s} ab \frac{\beta'}{\alpha'} = (-1)^{n+s} ab \left(1 - AB + AB \frac{\gamma'}{\alpha'}\right) \quad 32'$$

Man setzt

$$\{\beta\alpha\} = (-1)^{n+s} ab \cdot (1 - AB), \quad [\beta\alpha] = (-1)^{n+s} ab \cdot AB \frac{\gamma'}{\alpha'} \quad 32''$$

Das Product  $\{\beta\alpha\}$  heisst Scalar und das Product  $[\beta\alpha]$  Vector des Productes  $\beta\alpha$ .

Liegen die Punkte  $DK$  auf der geraden Linie  $AB$ , so ist

$$\alpha\delta = (-1)^{m+s} dk \left(1 - DK + DK \frac{\gamma'}{\alpha'}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \beta\alpha + \alpha\delta &= (-1)^{n+s} ab (1 - AB) + (-1)^{m+s} dk (1 - DK) \\ &+ \left((-1)^{n+s} \cdot AB + (-1)^{m+s} DK\right) \frac{\gamma'}{\alpha'} \end{aligned} \quad 32'''$$

Der Scalar dieses Productes ist

$$\left. \begin{aligned} \{\beta\alpha + \kappa\delta\} &= (-1)^{n+s} ab(1 - AB) + (-1)^{m+t} dk(1 - DK) \\ &= \{\beta\alpha\} + \{\kappa\delta\} \\ \text{und der Vector des Productes ist} \\ [\beta\alpha + \kappa\delta] &= \left( (-1)^{n+s} AB + (-1)^{n+t} (-1)^{m+t} DK \right) \frac{\gamma'}{\alpha'} \\ &= [\beta\alpha] + [\kappa\delta] \end{aligned} \right\} 32''''.$$

Wenn

$$\beta\alpha = \kappa\delta$$

so ist

$$\{\beta\alpha\} = \{\kappa\delta\}, \quad [\beta\alpha] = [\kappa\delta] \quad 32^V.$$

Der Scalar ist eine reelle Zahl. Es ist

$$\{\beta\}^2 = (-1)^s b^2, \quad \{n\beta\alpha\} = n\{\beta\alpha\}, \quad [\beta^2] = 0, \quad [n\beta\alpha] = n[\beta\alpha] \quad 32^VI.$$

wenn  $n$  ein Zahlfactor ist.

„Das Product  $[\beta\alpha]$  ändert seinen Wert nicht, wenn man einen „Factor um ein Vielfaches des andern vermehrt;“ es gilt die Gleichung

$$[\beta(\alpha + n\beta)] = [(\beta + m\alpha)\alpha] = [\beta\alpha] \quad 32^VII.$$

Um diese Formel zu beweisen, muss man nachweisen, dass die Gleichungen

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad 33.$$

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta \quad 34.$$

bestehen. Aus der Gleichung 30. ergibt sich

$$\alpha\beta + \beta\alpha = (-1)^{n+t} 2ab \quad 35.$$

und die Gleichung 31. giebt

$$\begin{aligned} \alpha\gamma + \beta\gamma &= (-1)^s \frac{\alpha}{\gamma} c^2 + (-1)^s \frac{\beta}{\gamma} c^2 - (-1)^s \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \gamma^2 \\ &= (\alpha + \beta)\gamma \end{aligned} \quad 33.$$

Sind die parallelen Strecken  $\alpha, \beta, \gamma$  gleichgerichtet, so ist

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)\gamma &= (-1)^s 2c(a + b) = (-1)^s 2ac + (-1)^s 2bc \\ &= \alpha\gamma + \gamma\alpha + \beta\gamma + \gamma\beta \end{aligned}$$

also

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta \quad 34.$$

Setzt man in dieser Gleichung  $\alpha + \beta = \varepsilon$ , so ist

$$\gamma\varepsilon = \gamma\alpha + \gamma(\varepsilon - \alpha)$$

also

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon - \alpha) &= \gamma\varepsilon - \gamma\alpha \\ -\gamma(\varepsilon - \alpha) &= \gamma(\alpha - \varepsilon) = \gamma\alpha - \gamma\varepsilon \end{aligned}$$

Die Gleichung 34. gilt mithin für gleichgerichtete und entgegengesetztgerichtete parallele Strecken. Aus den Gleichungen 33. und 34. erhält man

$$\beta(\alpha + n\beta) = \beta\alpha + (-1)^s nb^2, \quad (\beta + m\alpha)\alpha = \beta\alpha + (-1)^s ma^2$$

und hieraus die Gleichung 32<sup>VII</sup>.

Aus den Gleichungen 33. und 34. folgt, dass das „distributive Gesetz für Producte von parallelen Strecken in der Form

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta \quad 36.$$

„gültig ist.“ Für drei Factoren kann man leicht die Gleichung

$$(\alpha\beta)(\gamma + \delta) = (\alpha\beta)\gamma + (\alpha\beta)\delta \quad 37.$$

beweisen. Die Anfangspunkte  $K, D, C, E$  der gleichlangen, gleichgerichteten, parallelen Strecken  $\kappa', \delta', \gamma', \varepsilon'$  seien die Ecken eines Parallelogramms, der Anfangspunkt einer den Strecken  $\kappa', \delta'$  parallelen, gleichlangen und gleichgerichteten Strecke  $\alpha'$  liege in der Mitte von  $EK$  und ebenso der Anfangspunkt  $B$  einer Strecke  $\beta'$ , die parallel, gleichlang und gleichgerichtet den Strecken  $\kappa', \delta'$  ist, sei der Mittelpunkt der Seite  $DC$ . Es ist also

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{\beta'} &= \frac{\varepsilon'}{\gamma'} = \frac{\kappa'}{\delta'}, & \frac{\gamma'}{\varepsilon'} &= \frac{\delta'}{\gamma'} \\ \frac{\varepsilon' + \kappa'}{\gamma' + \delta'} &= \frac{\alpha'}{\beta'} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\gamma + \frac{\alpha'}{\beta'}\delta' = \varepsilon' + \kappa' = \frac{\varepsilon' + \kappa'}{\gamma' + \delta'}(\gamma' + \delta') = \frac{\alpha'}{\beta'}(\gamma' + \delta')$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\gamma' = \varepsilon' = \frac{\gamma'}{\beta'}\alpha' \quad \text{oder} \quad (\alpha'\beta')\gamma' = (\gamma'\beta')\alpha'$$

also

$$(\alpha'\beta')\gamma' + (\alpha'\beta')\delta' = (\alpha'\beta')(\gamma' + \delta') = ((\gamma' + \delta')\beta')\alpha' \quad 37'.$$

Sind  $a, b, c, d$  positive oder negative Zahlen, und setzt man

$$\alpha = a\alpha', \quad \beta = b\beta', \quad \gamma = c\gamma', \quad \delta = d\delta'$$

so ist

$$\frac{a}{b}\gamma + \frac{a}{b}\delta = \frac{a}{b}(c\varepsilon' + d\kappa')$$

Ferner ist

$$\frac{c\varepsilon'}{\alpha'} = \frac{cy'}{\beta'}, \quad \frac{d\kappa'}{\alpha'} = \frac{d\delta'}{\beta'}$$

also

$$c\varepsilon' + d\kappa' = \frac{cy' + d\delta'}{\beta'} \alpha' = \frac{b}{a} \frac{\gamma + \delta}{\beta} \alpha$$

und

$$\frac{\alpha}{\beta} \gamma + \frac{\alpha}{\beta} \delta = \frac{\gamma + \delta}{\beta} \alpha \quad 37''.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \gamma' = \frac{\gamma'}{\beta'} \alpha' \quad \text{oder} \quad (\alpha' \beta') \gamma' = (\gamma' \beta') \alpha'$$

folgt

$$(\alpha \beta) \gamma = (\gamma \beta) \alpha \quad 38.$$

es ist mithin auch

$$\frac{\gamma + \delta}{\beta} \alpha = \frac{\alpha}{\beta} (\gamma + \delta) \quad \text{oder} \quad ((\gamma + \delta) \beta) \alpha = (\alpha \beta) (\gamma + \delta)$$

und daher besteht die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\beta} \gamma + \frac{\alpha}{\beta} \delta = \frac{\alpha}{\beta} (\gamma + \delta)$$

der man die Form 37. geben kann. Aus dieser Gleichung kann man noch die Formel

$$\gamma(\alpha\beta + \beta\alpha) = (\gamma\alpha)\beta + (\gamma\beta)\alpha = (-1)^s 2\gamma abc \quad 39.$$

ableiten. Man hat

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \gamma' + \frac{\beta'}{\alpha'} \gamma' = 2\gamma'$$

oder

$$(\alpha' \beta') \gamma' + (\beta' \alpha') \gamma' = (-1)^s 2\gamma'$$

also

$$(\alpha \beta) \gamma + (\beta \alpha) \gamma = (-1)^s 2\gamma' abc$$

nach der Formel 35. ist

$$(\alpha \beta + \beta \alpha) \gamma = \gamma(\alpha \beta + \beta \alpha) = (-1)^s 2\gamma' abc$$

mithin ist

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\alpha \beta + \beta \alpha) &= (\alpha \beta) \gamma + (\beta \alpha) \gamma \\ &= (\gamma \beta) \alpha + (\gamma \alpha) \beta \end{aligned} \right\} \quad 39'.$$

Lässt man noch das associative Gesetz

$$\alpha(\beta \gamma) = (\alpha \beta) \gamma = \alpha \beta \gamma \quad 40.$$

gelten, so kann man in der Formel 39'. nach dem distributiven Gesetz multipliciren. Es gilt für das Product  $\gamma(\alpha\beta + \beta\alpha)$  das distributive

Gesetz auch dann, wenn man annimmt, dass das Product  $\alpha'(\alpha'\varepsilon')$  gleich einer Strecke  $(-1)^s(m\varepsilon' + (1-m)\alpha')$  ist, wo  $m$  entweder gleich der Längeneinheit oder kleiner als die Längeneinheit ist nimmt man  $m = 1$ , so gilt das associative Gesetz.

Ich nehme das associative Gesetz an; es ist daher

also

$$\left. \begin{aligned} \alpha'(\beta\gamma') &= (\alpha'\beta')\gamma' = (\gamma'\beta')\alpha' = \gamma'(\beta'\alpha') \\ \alpha' \frac{\beta'}{\gamma'} &= \frac{\alpha'}{\beta'} \gamma' = \frac{\varepsilon'}{\gamma'} \gamma' = \varepsilon' \quad \text{und} \\ \gamma' \frac{\varepsilon'}{\gamma'} &= \frac{\gamma'}{\varepsilon'} \gamma' = \frac{\vartheta'}{\gamma'} \gamma' = \vartheta' \end{aligned} \right\} 40'.$$

Man hat also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= (\gamma\beta)\alpha = \alpha(\beta\gamma) = \gamma(\beta\alpha) = (-1)^{s+n} abc \varepsilon' \\ (\beta\gamma)\alpha &= (\alpha\gamma)\beta = \beta(\gamma\alpha) = \alpha(\gamma\beta) = (-1)^{s+n} abc \zeta' \\ (\gamma\alpha)\beta &= (\beta\alpha)\gamma = \gamma(\alpha\beta) = \beta(\alpha\gamma) = (-1)^{s+n} abc \xi' \end{aligned} \right\} 40.$$

Die Seiten des Dreiecks  $EZX$  gehen durch die Punkte  $ABC$  und sind den Seiten des Dreiecks  $ABC$  parallel; die Punkte  $ABC$  sind die Mittelpunkte der Seiten  $EZ$ ,  $ZX$  und  $XE$ .

„Das Product paralleler Strecken ist wieder eine Strecke, wenn die Anzahl der Factoren ungerade ist.“

### Anwendung der Gesetze der Addition und Multiplication paralleler Strecken.

Im Folgenden soll kurz gezeigt werden, wie man mit Hilfe der gegebenen Sätze über die Verknüpfungen von parallelen Strecken, in der Ebene Punkte, gerade Linien und Curven und im Raume Punkte, Ebenen, Flächen und Curven bestimmen kann.

Die (für die Ebene und den Raum) zu Grunde gelegten Coordinatensysteme bilden specielle Fälle der bekannten Staudt-Fiedlerschen Systeme.

Die Ecken des Coordinatendreiecks seien  $A_1, A_2, A_3$  und die der Ecke  $A_n$  gegenüberliegende Seite sei  $a_n$ . Der Einheitspunkt  $E$  hat die Entfernung  $e_n$  von der Seite  $a_n$ . Wenn die Abstände eines beliebigen Punktes  $P$  von den Seiten  $a_n$  mit  $p_n$  bezeichnet werden, so definiert die Gleichung

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3} \quad 41.$$

die Coordinaten des Punktes  $P : x_1, x_2, x_3$ .

Fällt der Punkt  $A_3$  mit dem unendlich fernen Punkte zusammen, so sind die beiden geraden Linien  $A_1A_3, A_2A_3$ , die Axen des Systems, parallel. Zieht man  $PP_3'$  und  $EE_3'$  parallel den Axen und nimmt man an, dass ist

$$A_1E_3' = E_3'A_2 = E_3'E$$

so ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = P_3'A_2 : A_1P_3' : P_3'P \quad 41'.$$

Man kann als Coordinaten eines Punktes  $P$  den axen-Parallelen Abstand  $P_3'P$  desselben von der Mittellinie  $A_1A_2$  betrachten in Verbindung mit dem Verhältniss, (in dem der Fusspunkt  $P_3'$  die Strecke  $A_1A_2$  teilt<sup>1)</sup>)  $A_1P_3' : P_3'A_2$ .

Auf der geraden Linie  $A_1A_2$  soll die Richtung von  $A_1$  nach  $A_2$  als die positive gelten, und auf den geraden Linien parallel  $E', E$  soll die Richtung  $E', E$  positiv genommen werden.

Die von der Ecke  $A_n$  des Dreiecks gezogene Höhe sei mit  $h_n$  und der Abstand der Ecke  $A_n$  von der Linie  $LM$  sei mit  $\pi_n$  bezeichnet. Die „Coordinaten der geraden Linie“  $LM : u_1, u_2, u_3$  genügen der Gleichung<sup>2)</sup>

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{e_1\pi_1}{h_1} : \frac{e_2\pi_2}{h_2} : \frac{e_3\pi_3}{h_3} \quad 42.$$

Geht diese gerade Linie durch den Punkt  $P$ , so ist

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \quad 42'.$$

Die gerade Linie  $LM$  schneidet die Seite  $A_1A_3$  im Punkte  $M$  und die Seite  $A_2A_3$  im Punkte  $N$ . Fällt der Punkt  $A_3$  mit dem unendlich fernen Punkte zusammen und ferner der Punkt  $P$  auf den Punkt  $M$ , so ist nach den Gleichungen 41', 42':

1) Dieses Coordinatensystem behandelt Unverzagt im Jahresbericht über das Realgymnasium zu Wiesbaden 1871: „Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden.“ Unverzagt bemerkte nicht, dass es, wie auch das entsprechende räumliche Coordinatensystem, einen speciellen Fall des Staudt-Fiedler'schen Systems bildet.

2) Vgl. u. A.: Gundelfinger: „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.“ Leipzig, B. G. Teubner. 1895. p. 5.

$$-\frac{u_1}{u_3} = \frac{A_1 M}{A_1 A_2}$$

lässt man den Punkt  $P$  mit den Punkten  $N$  zusammenfallen, so erhält man

$$-\frac{u_2}{u_3} = \frac{A_2 N}{A_1 A_2}$$

Die Coordinaten der geraden Linie genügen daher der Relation

$$u_1 : u_2 : u_3 = A_1 M : A_2 N : A_2 A_1 \quad 42''.$$

Die von der geraden Linie  $LM$  auf den Axen bestimmten Längen  $A_1 M$  und  $A_2 N$  kann man als die Coordinaten der geraden Linie  $LM$  nehmen (s. Fig.).

Die Coordinaten eines Punktes  $P$  in Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Axen  $A_1 P_2'$ ,  $A_2 P_1'$  sind, und dessen Mittellinie  $A_1 A_2$  ist, bezeichnet man mit  $x$ ,  $y$ , so dass ist

$$x_3 = \frac{A_1 P_3'}{P_3' A_2}, \quad y = P_3 P, \quad A_1 A_2 = 1 \quad 43.$$

Die Coordinaten einer geraden Linie  $LM$  in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem, bezeichnet man mit  $u$ ,  $v$ ; es ist

$$u = A_1 M, \quad v = A_2 N \quad 44.$$

Liegt der Punkt  $P$  auf der geraden Linie  $LM$ , so ist

$$y = \frac{u + vx}{1 + x} \quad 45.$$

Nimmt man die Grössen  $u$ ,  $v$  als gegeben an, so liegen alle Punkte, deren Coordinaten  $x$ ,  $y$  der Gleichung 45. genügen, in einer geraden Linie, deren Coordinaten die gegebenen Werte  $u$ ,  $v$  haben. Wenn dagegen die Grössen  $x$ ,  $y$  gegeben sind, so gehen alle geraden Linien, deren Coordinaten  $u$ ,  $v$  die Gleichung 45. erfüllen, durch den Punkt, dessen Coordinaten die gegebenen Werte  $x$ ,  $y$  haben. Im ersten Falle ist 45. die „Gleichung der geraden Linie, deren Coordinaten  $u$ ,  $v$  sind“, und im zweiten Falle ist 45. „die Gleichung des Punktes, dessen Coordinaten  $x$ ,  $y$  sind“. Die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen  $u$  und  $v$ ,

$$Au + Bv + C = 0 \quad 46.$$

stellt einen Punkt dar, dessen Coordinaten sind

$$x = \frac{B}{A}, \quad y = -\frac{C}{A + B} \quad 46'.$$

Die zwei geraden Linien, die die Coordinaten  $u_1, v_1; u_2, v_2$  haben, schneiden sich in dem Punkte, dessen Coordinaten

$$x = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}, \quad y = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 - v_1 + u_2 - v_2} \quad \left. \vphantom{x} \right\} 47.$$

sind, und dessen Gleichung

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$$

ist; durch diesen Punkt gehen die geraden Linien, die die Coordinaten

$$u = u_1 (1 - t) + u_2 t, \quad v = v_1 (1 - t) + v_2 t \quad 47'.$$

haben; der Parameter  $t$  kann alle möglichen reellen Werte haben.

Die beiden geraden Linien bestimmen einen Winkel, dessen geometrische Tangente abgesehen vom Vorzeichen und unter der Voraussetzung, dass die Axen senkrecht auf  $A_1 A_2$  sind,

$$\operatorname{tg}(u_1, u_2) = \frac{u_1 - v_1 - (u_2 - v_2)}{1 + (u_1 - v_1)(u_2 - v_2)} \quad 48.$$

Die beiden geraden Linien sind mithin senkrecht aufeinander, wenn

$$(u_2 - v_2)(u_1 - v_1) = -1 \quad 48'.$$

und parallel, wenn

$$u_2 - u_1 = v_2 - v_1 \quad 48''.$$

Die gerade Linie, deren Coordinaten  $u, v$  sind, schneidet die Mittellinie im Punkte  $L$ ; es ist dann

$$\frac{u}{v} = \frac{A_1 L}{A_2 L}$$

Bestimmt man zu den drei Punkten  $A_1, A_2, L$  den vierten, harmonisch zu derselben gelegenen Punkt  $L'$ , der dem Punkte  $L$  zugeordnet ist, so hat man

$$\frac{A_1 L}{L A_2} : \frac{A_1 L'}{L' A_2} = -1$$

und

$$\frac{u}{v} = \frac{A_1 L}{A_2 L} = \frac{A_1 L'}{L' A_2} \quad 49.$$

Man kann also setzen <sup>1)</sup>, wenn  $l$  ein Parameter ist,

1) Unverzagt bestimmt einen Punkt  $L''$  auf der Mittellinie so, dass

$$\frac{A_0 L}{A_2 L} = \frac{L'' A_2}{A_1 L''}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= l \cdot A_1 L' \\ v &= l \cdot L' A_2 \end{aligned} \right\} u + v = l \quad 50.$$

Wenn  $A_1 L' : L' A_2$  und die Grösse  $l$  gegeben sind, so sind auch die Coordinaten  $u, v$  bekannt, also die gerade Linie, deren Coordinaten  $u, v$  sind, bestimmt. Da  $A_1 L' : L' A_2$  gegeben ist, so kann man den Punkt  $L$  construiren; die Grösse  $l$  trägt man von  $A_2$  auf der Axe ab ( $A_2 T = l$ ), verbindet den Endpunkt dieser Strecke mit dem Punkte  $A_1$ , so schneidet diese Verbindungsgerade  $A_1 T$  die durch  $L'$  zu den Axen parallel gezogene gerade Linie in einem Punkte  $R$  und es ist

$$u = L'R, \quad v = A_2 T - L'R$$

Wenn  $A_1 L' : L' A_2$  gegeben ist, und die Zahl  $l$  alle möglichen reellen Werte annimmt, so gehen die geraden Linien, deren Coordinaten  $l A_1 L', l L' A_2$  sind, durch einen Punkt  $L$ , und wenn  $A_1 L : L A_2$  bekannt ist, so gehen die geraden Linien, deren Coordinaten  $l A_1 L, l L A_2$  sind, durch einen Punkt  $L'$ .

Auf der Mittellinie liegen vier Punkte  $L, K, Z, Z_1$  so, dass ist

$$\frac{LZ}{ZK} = \frac{l}{l'}, \quad \frac{LZ_1}{Z_1 K} = \frac{l_1}{l'}$$

Es ist dann

$$(l + l') \cdot ZK = (l + l_1) \cdot Z_1 K = l \cdot LK$$

und

$$\begin{aligned} (l + l_1) Z_1 A_2 - (l + l) Z A_2 &= (l + l_1) (Z_1 K + K A_2) \\ &- (l + l) (ZK + K A_2) = (l_1 - l) K A_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l + l) Z A_2 - l K A_2 &= (l + l) ZK + (l + l) K A_2 - l \cdot K A_2 \\ &= l \cdot L A_2 \end{aligned}$$

Durch die vier Punkte sind die beiden geraden Linien, deren Coordinaten

$$\left\{ \begin{aligned} u &= (l + l) A_1 Z \\ v &= (l + l) Z A_2 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} u &= (l + l_1) A_1 Z_1 \\ v &= (l + l_1) Z_1 A_2 \end{aligned} \right\} \quad 51.$$

sind, bestimmt. Die Gleichung des Schnittpunktes der beiden geraden Linien ist

ist, und setzt die Coordinaten gleich einem Vielfachen von  $L'' A_2$  und  $A_1 L''$ ; es ist

$$A_1 L'' = L' A_2$$

$$\begin{vmatrix} u, & v, & 1 \\ (l+t)A_1Z, & (l+t)ZA_2, & 1 \\ (l+t_1)A_1Z_1, & (l+t_1)Z_1A_2, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Addirt man die zweite Colonne zur ersten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} u+v, & v, & 1 \\ l+t, & (l+t)ZA_2, & 1 \\ l+t_1, & (l+t_1)Z_1A_2, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

subtrahirt man die zweite Zeile von der dritten und dividirt durch  $t_1 - t$ , so ist

$$\begin{vmatrix} u+v, & v, & 1 \\ l+t, & (l+t)ZA_2, & 1 \\ 1, & KA_2, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und hieraus folgt

$$u \cdot KA_2 + v \cdot KA_1 + l \cdot LK = 0 \quad 52$$

Die Coordinaten dieses Punktes sind

$$x = \frac{KA_1}{KA_2} = \frac{A_1K'}{K'A_2}, \quad y = \frac{l \cdot KL}{KA_2 + KA_1} \quad 52'$$

Wenn also die Punkte  $K$ ,  $L$  und die Zahl  $l$  gegeben sind, ferner die Grösse  $t$  alle möglichen reellen Werte annimmt, so schneiden sich die geraden Linien, die die Coordinaten 51. haben, in einem Punkte, der auf der durch den Punkt  $K'$  zu den Axen parallel gezogenen geraden Linie liegt. Die Punkte  $K$  und  $L$  seien die Anfangspunkte der gleichstimmig parallelen Einheitsstrecken  $\alpha'$ ,  $\lambda'$ . Der Punkt  $Z$  ist der Anfangspunkt der Strecke

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= l\lambda + t\alpha', \quad z = l + t \\ \frac{LZ}{ZK} &= \frac{t}{l} \end{aligned} \right\} \quad 53.$$

Diese Gleichung bestimmt, wenn  $l$  und  $t$  gegeben sind, die gerade Linie 51. Nimmt man in dieser Gleichung  $t$  als veränderlich an, so gilt sie für alle durch den Punkt, dessen Gleichung 52. ist, gehenden geraden Linien. Die Gleichung 53. kann man mithin als die Gleichung des Punktes, dessen Gleichung 52. ist, nehmen; man nennt „die Gleichung 53. die Gleichung des Punktes, der die Coordinaten  $\frac{A_1K}{KA_2}, \frac{l \cdot KL}{KA_2 + KA_1}$  hat.“ Dieser Punkt liegt auf der durch die Gleichung

$$\zeta = l\lambda'$$

bestimmten geraden Linie, die mithin nach der Gleichung 51. die Coordinaten  $l \cdot A_1L$ ,  $l \cdot LA_2$  hat.

Die Gleichung

$$\zeta = t\lambda' \tag{54.}$$

stellt daher einen Punkt auf der Mittellinie dar, der zu den drei Punkten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $L$  harmonisch liegt und dem Punkte  $L$  zugeordnet ist.

Die Anfangspunkte  $A_1, A_2, B, D \dots L \dots K \dots$  der den Axen parallelen gleichgerichteten Strecken von der Längeneinheit  $\alpha', \gamma', \beta', \delta' \dots \lambda' \dots \kappa' \dots$  sollen auf der Mittellinie liegen. Fällt der Punkt  $K$  in den Punkt  $A_1$ , so wird Gleichung 53. zu

$$\zeta = l\lambda' + t\alpha' \tag{55.}$$

die einen Punkt darstellt, der auf der durch den Punkt  $A_1$  gehenden Axe liegt; fällt der Punkt  $K$  in den Punkt  $A_2$ , so wird Gleichung 55. zu

$$\zeta = l\lambda' + t\gamma' \tag{56.}$$

die einen Punkt darstellt, der auf der durch den Punkt  $A_2$  gehenden Axe liegt.

Ferner stellen die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda' + t_1\kappa', \quad \zeta = n\nu' + t_2\mu' \tag{57.}$$

zwei Punkte dar, die auf einer den Axen parallelen geraden Linie liegen.

Die Verbindungslinie der zwei Punkte, die die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda' + t_1\kappa', \quad \zeta = n\nu' + t_2\mu' \tag{58.}$$

haben, schneidet die Mittellinie in einem Punkte, der zu den drei Punkten  $A_1, A_2, J$  harmonisch liegt und dem Punkte  $J$  zugeordnet ist. Nach der Gleichung 54. kann man in der Gleichung

$$\zeta = t_3t \tag{58'}$$

$t_3$  so annehmen, dass die gerade Linie mit den Coordinaten  $t_3A_1J$ ,  $t_3JA_2$  auf die Verbindungslinie der beiden Punkte fällt. Man kann ferner  $t_1$  und  $t_2$  solche Werte geben, dass von den durch die Gleichungen 58. festgelegten geraden Linien (s. Gl. 51.) zwei auf die

durch die Gleichung 58'. gegebene gerade Linie fallen. Für diese Werte von  $t_1$  und  $t_2$  ist also

$$\zeta = l\lambda' + t_1\kappa' = n\nu' + t_2u' = t_3t \quad 58''.$$

Hieraus folgt

$$l + t_1 = n + t_2 = t_3 \quad 58'''.$$

Nach den Gleichungen 32. ist

$$\{(l\lambda' + t_1\kappa')\alpha'\} = \{(n\nu' + t_2u')\alpha'\}$$

oder

$$l(1 - A_1L) + t_1(1 - A_1K) = n(1 - A_1N) + t_2(1 - A_1M)$$

und hieraus

$$lA_1L + t_1A_1K = nA_1N + t_2A_1M \quad 58''''.$$

Aus den Gleichungen 58''' kann man  $t_1$  und  $t_2$  berechnen.

Der Punkt, dessen Gleichung

$$\zeta = l(1 - t)\lambda' + tp\delta' \quad 59.$$

ist, ist der Schnittpunkt der zwei geraden Linien, die durch die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda', \quad \zeta = p\delta' \quad 59'.$$

bestimmt sind; diese geraden Linien haben die Coordinaten

$$\begin{aligned} u_1 &= l \cdot A_1L, & u_2 &= p \cdot A_1D \\ v_1 &= l \cdot LA_2, & v_2 &= p \cdot DA_2 \end{aligned}$$

Dieser Punkt fällt in den Einheitspunkt, wenn

$$l = p = 1$$

ist. Die Gleichung des Punktes, der auf den Schnittpunkt der durch die Gleichungen

$$\zeta = l\lambda', \quad \zeta = q\varepsilon' \quad 59''.$$

bestimmten geraden Linien fällt, ist

$$\zeta = l(1 - t_1)\lambda' + t_1q\varepsilon' \quad 59'''.$$

Die Gleichungen 59 und 59''' kann man schreiben

$$\zeta = l\lambda' + t(p\delta' - l\lambda'), \quad \zeta = l\lambda' + t_1(q\varepsilon' - l\lambda')$$

Setzt man

$$p\delta' - l\lambda' = (p - l)\mu', \quad q\varepsilon' - l\lambda' = (q - l)\nu'$$

so sind nach den Gleichungen 52'. die Coordinaten der Punkte,

in denen sich die durch die Gleichungen 59' bestimmten geraden Linien bzw. schneiden

$$- \frac{A_1 M}{MA_2'} \quad l \frac{ML}{MA_2 + MA_1}; \quad - \frac{A_1 N}{NA_2'} \quad l \frac{NL}{NA_2 + NA_1}$$

Fallen diese beiden Punkte zusammen, so ist

$$\frac{A_1 M}{MA_2} = \frac{A_1 N}{NA_2}$$

woraus folgt, dass der Punkt  $M$  auf den Punkt  $N$  fällt. Es ist also

$$(q - l)p\delta' + (l - p)q\varepsilon' + (p - q)l\lambda' = 0 \quad 59''.$$

Der durch die Gleichung 59. gegebene Punkt, ist der Schnittpunkt von den drei geraden Linien, die durch die Gleichungen 59' bestimmt sind, wenn die Gleichung 59'' oder die Gleichung

$$q\varepsilon' = l(1 - t)\lambda' + tp\delta'$$

besteht.

Man kann in der Gleichung 51. die Einheitsstrecken  $\lambda'$ ,  $\varkappa'$  durch die Summe von Strecken, die ihre Anfangspunkte in den festen Punkten  $A_1$  und  $A_2$  haben, ersetzen. Zwei Zahlen  $m$  und  $n$  kann man nach der Gleichung 5. derart bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \lambda' &= (1 - m)\alpha' + m\gamma' \\ \varkappa' &= (1 - n)\alpha' + n\gamma' \end{aligned}$$

ist. Die Gleichung 51. heisst daher ( $kt$  statt  $t$  eingeführt)

$$\zeta = (l(1 - m) + k(1 - n)t)\alpha' + (lm + knt)\gamma' \quad 60.$$

Der Punkt, den diese Gleichung darstellt, ist der Schnittpunkt der zwei geraden Linien, die durch die Gleichungen

$$\zeta = \frac{l}{n}(n - m)\alpha', \quad \zeta = l \frac{m - n}{1 - n}\gamma'$$

festgelegt sind. Die Coefficienten von  $\alpha'$  und  $\beta'$  in der Gleichung 60. sind lineare Functionen in  $t$ . Die „Gleichung eines Punktes ist

$$\zeta = r\alpha' + s\gamma' \quad 61.$$

wenn  $r$ ,  $s$  lineare Functionen von  $t$  sind“. Man kann nämlich setzen

$$\begin{aligned} r &= a_1 + b_1 t = (a_1 + c_1) \left(1 - \frac{c_1}{a_1 + c_1}\right) + (b_1 + d_1) \left(1 - \frac{d_1}{b_1 + d_1}\right) t \\ &= l(1 - m) + k(1 - n)t \end{aligned}$$

$$s = e_1 + d_1 t = (a_1 + c_1) \frac{c_1}{a_1 + c_1} + (b_1 + d_1) \frac{d_1}{b_1 + d_1} t \\ = lm + kn$$

Durch diesen Punkt gehen alle geraden Linien, deren Coordinaten

$$u = s = c_1 + d_1 t \\ v = r = a_1 + b_1 t \quad 62.$$

sind. Setzt man nämlich

$$r\alpha' + sy' = (r + s)\beta'$$

so ist

$$u = (r + s)A_1B, \quad v = (r + s)BA_2, \quad \frac{A_1B}{BA_2} = \frac{u}{v} = \frac{s}{r}$$

mithin gelten die Gleichungen 62. Der Gleichung des Punktes kann man die Form

$$\begin{vmatrix} u - c_1 & v - d_1 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad 62'.$$

geben.

Wenn zwischen  $r$  und  $s$  eine Gleichung beliebigen Grades gegeben ist, so setzt man z. B. für  $r$  irgend einen Wert voraus, und ermittelt durch die Gleichung eine endliche Zahl von Werten von  $s$ , die dem angenommenen Werte von  $r$  entsprechen. Für dieses  $r$  und die entsprechenden  $s$  erhält man durch die Gleichung 61. eine oder mehrere gerade Linien mit den Coordinaten

$$u = s, \quad v = r$$

Nimmt man für  $r$  einen anderen Wert, so findet man in derselben Art andere gerade Linien.

Wenn man so dem  $r$  alle möglichen reellen Werte beilegt, so erhält man eine Folge von geraden Linien, von denen jede den Bedingungen der Gleichung genügt und daher ihr geometrischer Ausdruck ist. Die Gleichung 61. stellt daher irgend einen „Ort“ dar, wenn zwischen  $r$  und  $s$  eine Gleichung

$$\varphi(r, s) = 0$$

besteht.

Statt dieser Gleichung kann man annehmen, dass zwischen  $r$  und einer beliebigen Grösse  $t$  und ebenso zwischen  $s$  und  $t$  eine Gleichung besteht. Löst man diese Gleichungen nach  $s$  und  $r$  auf, so erhält man

$$r = f_1(t), \quad s = f_2(t)$$

Wenn also die Gleichung

$$\xi = f_1(t)\alpha' + f_2(t)\gamma' \quad 63.$$

gegeben ist, so kann man den durch sie dargestellten Ort ermitteln.

Ist umgekehrt irgend ein Ort — Curve — durch irgend eine geometrische Eigenschaft erklärt, so kann man aus dieser Eigenschaft eine Gleichung ableiten, die durch die Werte von  $r$  und  $s$  jeder geraden Linie des Ortes erfüllt wird.

Jede gerade Linie, deren Coordinaten

$$u = f_2(t), \quad v = f_1(t) \quad \text{oder} \quad (-1)^s u = \{\xi\gamma'\}, \quad (-1)^s v = \{\xi\alpha'\} \quad 63'.$$

die Gleichung der Curve (63) genügen, ist Tangente der betr. Curve; die Curve ist umhüllt von den geraden Linien, deren Coordinaten der Gleichung der Curve genügen. Man kann leicht die Gleichung des Berührungspunktes und die Coordinaten desselben bestimmen. Der Schnittpunkt der beiden geraden Linien, die die Coordinaten

$$\begin{aligned} u_1 &= f_2(t), & u_2 &= f_2(t + hdt) \\ v_1 &= f_1(t), & v_2 &= f_1(t + hdt) \end{aligned}$$

haben, hat nach den Gleichungen 47. die Coordinaten

$$\begin{aligned} x &= -\frac{f_2(t + hdt) - f_2(t)}{f_1(t + hdt) - f_1(t)} = \frac{\frac{f_2(t + hdt) - f_2(t)}{h}}{\frac{f_1(t + hdt) - f_1(t)}{h}} \\ y &= \frac{f_2(t)f_1(t + hdt) - f_1(t)f_2(t + hdt)}{f_2(t) - f_1(t) - f_2(t + hdt) - f_1(t + hdt)} \\ &= \frac{f_2(t) \frac{f_1(t + hdt) - f_1(t)}{h} - f_1(t) \frac{f_2(t + hdt) - f_2(t)}{h}}{\frac{f_1(t + hdt) - f_1(t)}{h} - \frac{f_2(t + hdt) - f_2(t)}{h}} \end{aligned}$$

Wird die Grösse  $h$ , die unabhängig von  $t$  ist, unendlich klein, so fällt dieser Schnittpunkt mit dem Berührungspunkt der durch die Gleichungen 63' gegebenen Tangenten zusammen. Der Zähler (und Nenner) von  $x$  wird zum Differential  $df_2(t)$  (und  $df_1(t)$ ). Ist nämlich  $p$  eine Function von  $t$ , so definiert man das Differential  $dp$  mittelst der Gleichung

$$dp = df(t) = \lim_{h=0} \frac{f(t+hd) - f(t)}{h} = \frac{df(t)}{dt} dt = f'(t)dt \quad 64.$$

wo  $h$  eine reelle von  $t$  unabhängige Grösse ist. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind mithin

$$x = -\frac{f_2'(t)}{f_1'(t)}, \quad y = \frac{f_2(t)f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t)}{f_1'(t) - f_2'(t)} \quad 65.$$

Die Gleichung dieses Berührungspunktes ist mithin

$$uf_1'(t) - vf_2'(t) + f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t) = 0 \quad 66.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort, dass durch den Curvenpunkt alle geraden Linien gehen, die die Coordinaten

$$\left. \begin{aligned} u &= f_2(t) + zf_2'(t) \\ v &= f_1(t) + zf_1'(t) \end{aligned} \right\} \quad 66'.$$

haben. In diesen Gleichungen ist natürlich  $t$  gegeben und  $z$  ein Parameter, der alle möglichen reellen Werte haben kann. Nach der Gleichung 61. ist daher die Gleichung des betr. Curvenpunktes

$$\left. \begin{aligned} \xi &= f_1(t)\alpha' + f_2(t)\gamma' + z\{f_1'(t)\alpha' + f_2'(t)\gamma'\} \\ &= \xi_1 + z\xi_1' \end{aligned} \right\} \quad 66''.$$

durch den die geraden Linien gehen, deren Gleichungen sind

$$\xi = \frac{f_2(t)f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t)}{-f_2'(t)} \alpha', \quad \zeta = \frac{f_2(t)f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t)}{f_1'(t)} \gamma'$$

Die Gleichung 63. stellt einen Kegelschnitt dar, wenn  $f_2(t)$  und  $f_1(t)$  die Form haben

$$\begin{aligned} u = f_2(t) &= \frac{l_2 + m_2t + n_2t^2}{l_3 + m_3t + n_3t^2} \\ v = f_1(t) &= \frac{l_1 + m_1t + n_1t^2}{l_3 + m_3t + n_3t^2} \end{aligned}$$

Eliminirt man  $t$  zwischen diesen Gleichungen, so ist die Gleichung des Kegelschnitts von der Form

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0 \quad 67.$$

Auf der geraden Linie  $g$ , die die Coordinaten  $a, b$  hat, liegt ein Punkt  $M$ , dessen Gleichung

$$u - a - t(v - b) = 0$$

ist, und auf einer anderen geraden Linie  $g'$ , die die Coordinate  $a'$ ,  $b'$  hat, liegt ein Punkt  $M$ , dessen Gleichung

$$u - a' + \frac{b_1 t + d_1}{a_1 t + c_1} (v - b') = 0$$

oder

$$u c_1 + v d_1 - (a' c_1 + b' d_1) + t(u a_1 + v b_1 - (a' a_1 + b' b_1)) = 0$$

ist. Eliminirt man  $t$  zwischen diesen Gl., so erhält man eine Gleichung von der Form 67.

Wenn man in diesen Gleichungen der Grösse  $t$  alle möglichen reellen Werte gibt, so erhält man die Gleichungen von allen Punkten  $M$  der geraden Linie  $g$  und die Gleichungen von allen Punkten  $M'$  der geraden Linie  $g'$ ; die durch ein und denselben Wert von  $t$  bestimmten Punkte  $M$ ,  $M'$  nennt man bekanntlich entsprechende Punkte der zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger die geraden Linien  $g$  und  $g'$  sind. Die gerade Verbindungslinie der entsprechenden Punkte  $M$ ,  $M'$  hat die Coordinaten

$$\begin{aligned} u &= a + \frac{d_1(b' - b) + c_1(a' - a) + (b_1(b' - b) + a_1(a' - a))t}{d_1 + (c_1 - b_1)t + a_1 t^2} \\ &= \frac{l_2 + m_2 t + n_2 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2} \\ v &= \frac{b' d_1 + c_1(a' - a) + (b c_1 + a_1(a' - a) + b_1 b')t + a_1 b t^2}{l_2 + m_2 t + n_2 t^2} \\ &= \frac{l_1 + m_1 t + n_1 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2} \end{aligned}$$

Die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, der die Träger dieser Reihen berührt. Die Gleichung dieses Kegelschnittes ist mithin

$$\zeta = \frac{l_1 + m_1 t + n_1 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2} \alpha' + \frac{l_2 + m_2 t + n_2 t^2}{l_3 + m_3 t + n_3 t^2} \gamma' \quad 68.$$

Die einfachste Gleichung für die Kegelschnitte, die einen Mittelpunkt besitzen, ist

$$\zeta = t \alpha' + \frac{k}{t} \gamma', \quad \left( u = \frac{k}{t}, \quad v = t \right) \quad 69$$

diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, wenn  $k$  positiv und eine Hyperbel, wenn  $k$  negativ ist. Aus der Gleichung 69. erhält man

$$\{\zeta \alpha'\} \{\zeta \gamma'\} = k$$

Die Coordinaten eines Curvenpunktes sind

$$x = \frac{k}{t^2}, \quad y = \frac{2kt}{t^2 + k}$$

und da

$$\frac{u}{v} = \frac{k}{t^2}$$

ist, so ist

$$x = \frac{u}{v}$$

d. h. der Berührungspunkt teilt das Stück der Tangente, das zwischen den Axen liegt, im Verhältniss der Coordinaten der Tangente. Es ist  $A_1A_2$  ein Durchmesser des Kegelschnittes und die Axen berühren den Kegelschnitt in den Punkten  $A_1, A_2$ .

Wenn die Axen des Coordinatensystems auf der Mittellinie senkrecht stehen, und

$$k = \pm \left( \frac{A_1A_2}{2} \right)^2$$

ist, so stellt die Gleichung 69. einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel dar.

Die Gleichung einer Parabel, die im Punkte  $L_1$  von der Axe berührt wird, ist

$$\zeta = \left( \frac{2p^2}{t} + \frac{t}{2} \right) \alpha' + \frac{t}{2} \gamma' \quad 70.$$

oder

$$\{\zeta\alpha'\} \{\zeta\gamma'\} = p^2 + \{\zeta\alpha'\}^2$$

Die Coordinaten eines Punktes der Parabel sind

$$x = \frac{t^2}{4p^2 - t^2} \quad y = t \mp 2u$$

Durch einen Punkt der Curve, die durch die Gleichung 63. dargestellt ist, gehen die geraden Linien, deren Coordinaten nach den Gleichungen 66'. sind

$$\begin{aligned} u_1 &= f_2(t) + zf_2'(t) = u + zf_2'(t) = u + zu' \\ v_1 &= f_1(t) + zf_1'(t) = v + zf_1'(t) = v + zv' \end{aligned}$$

Es seien die Axen des Coordinatensystems auf der geraden Linie  $A_1A_2$  senkrecht. Die geraden Linien, die die Coordinaten

$$u = f_2(t), \quad v = f_1(t); \quad u_1, v_1$$

haben, sind auf einander senkrecht, wenn ist (nach Gl. 48')

hieraus folgt  $(u_1 - v_1)(u - v) = -1$

$$z = \frac{1 + (u - v)^2}{(v' - u')(u - v)}$$

also

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{u' + (u - v)(uv' - vu')}{(v' - u')(u - v)} \\ v_1 &= \frac{v' + (u - v)(uv' - vu')}{(v' - u')(u - v)} \end{aligned} \right\} 71.$$

Für einen gegebenen Wert von  $t$  ist mithin die Gleichung einer Normalen der Curve

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{f_1'(t) + (f_2(t) - f_1(t))(f_2(t)f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t))}{(f_1'(t) - f_2'(t))(f_2(t) - f_1(t))} \alpha' \\ &+ \frac{f_2'(t) + (f_2(t) - f_1(t))(f_2(t)f_1'(t) - f_1(t)f_2'(t))}{(f_1'(t) - f_2'(t))(f_2(t) - f_1(t))} \gamma' \\ &= r_1 \alpha' + u_1 \gamma' \end{aligned} \quad 72.$$

Jede gerade Linie, deren Coordinaten  $u_1, v_1$  dieser Gleichung genügen, ist Tangente an eine bestimmte Curve, der Evolute der durch die Gleichung 63. gegebenen Curve.

Die Gleichung 72. ist mithin die Gleichung der Evolute der durch die Gleichung 63. gegebenen Curve. Die gerade Linie, die durch die Coordinaten  $u_1, v_1$  bestimmt ist, berührt die Evolute in einem Punkte, dessen Coordinaten nach der Gleichung 65. sind

$$x_1 = -\frac{u_1'}{v_1'}, \quad y_1 = \frac{u_1 v_1' - v_1 u_1'}{v_1' - u_1'} \quad \left( u_1' = \frac{du_1}{dt}, \quad v_1' = \frac{dv_1}{dt} \right) \quad 73.$$

Auf dieser geraden Linie liegt ferner der Punkt der gegebenen Curve, der die Coordinaten

$$x = -\frac{u'}{v'}, \quad y = \frac{uv' - vu'}{v' - u'} \quad 65.$$

hat. Der durch die Gleichungen 73. bestimmte Punkt der Evolute heisst der Krümmungsmittelpunkt des durch die Gleichungen 65. festgelegten Punktes der gegebenen Curve. Die Evolute ist der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve. Umgekehrt nennt man die Curve, die durch die Gleichung 63. bestimmt ist, die Evolvente der Curve, die mittelst der Gleichung 72. dargestellt ist. Ferner ist die Entfernung der beiden Punkte, deren Coordinaten durch die Gleichungen 73., 65. gegeben sind, gleich

$$\sqrt{\left(\frac{x-x_1}{(1+x)(1+x_1)}\right)^2 + (y-y_1)^2} = r \quad 74.$$

die Zahl  $r$  gibt bekanntlich die absolute Länge des Krümmungshalbmessers der durch die Gleichung 63. gegebenen Curve.

Die Ecken des Coordinatentetraeders seien  $A_1 A_2 A_3 A_4$  und die der Ecke  $A_n$  gegenüber liegende Seite sei  $a_n$ . Der Einheitspunkt  $E$  hat die Entfernung  $e_n$  von der Seite  $a_n$ . Wenn die Abstände eines beliebigen Punktes  $P$  von den Seiten  $a_n$  mit  $p_n$  bezeichnet werden, so definiert die Gleichung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3} : \frac{p_4}{e_4} \quad 75.$$

die „Coordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  des Punktes  $P$ .

Fällt der Punkt  $A_4$  mit dem unendlich fernen Punkt zusammen, so sind die geraden Linien  $A_1 A_4, A_2 A_4, A_3 A_4$ , die Axen des Systems, parallel. Der Einfachheit wegen nimmt man an, dass die Axen auf der Ebene  $A_1 A_2 A_3$  senkrecht stehen. Die den Axen parallelen geraden Linien  $PP', EE'$  treffen die Fundamentelebene  $A_1 A_2 A_3$  in den Punkten  $P', E'$  und eine den Punkt  $P$  enthaltende Ebene hat mit den Axen  $A_1 A_4^\infty, A_2 A_4^\infty, A_3 A_4^\infty$  die Punkte  $L, M, N$  gemeinschaftlich. Die geraden Linien  $LM, MN, NL$  treffen bzhw. die Dreiecksseiten  $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$  in drei Punkten  $H, J, K$ , die in einer geraden Linie liegen. Nach der Gleichung 10. ist

$$\begin{aligned} (P' A_2 A_3) + (P' A_3 A_1) + (P' A_1 A_2) &= (A_1 A_2 A_3) \\ (E' A_2 A_3) + (E' A_3 A_1) + (E' A_1 A_2) &= (A_1 A_2 A_3) \end{aligned}$$

Den Punkt  $E$  kann man so festlegen, dass ist

$$(E' A_2 A_3) = (E' A_3 A_1) = (E' A_1 A_2) = \frac{1}{3} (A_1 A_2 A_3), \quad E'E = \frac{1}{3}$$

Es ist

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{(P' A_2 A_3)}{(A_1 A_2 A_3)} : \frac{(P' A_3 A_1)}{(A_1 A_2 A_3)} : \frac{(P' A_1 A_2)}{(A_1 A_2 A_3)} : \frac{P' P}{3E'E} \quad 75'.$$

Die Richtung von  $E'$  nach  $E$  soll als die positive gelten.

Man kann als „Coordinaten eines Punktes  $P$  den axenparallelen Abstand  $P'P$ “ desselben von der Fundamentelebene  $A_1 A_2 A_3$  „in Verbindung mit den Verhältnissen“

$$\frac{(P' A_2 A_3)}{(A_1 A_2 A_3)} : \frac{(P' A_3 A_1)}{(A_1 A_2 A_3)} : \frac{(P' A_1 A_2)}{(A_1 A_2 A_3)}$$

betrachten; die Verhältnisse sind die Dreiecks-Coordinaten des Punktes  $P'$  in Bezug auf das Dreieck  $A_1A_2A_3$ .

Die Coordinaten  $u_1, u_2, u_3, u_4$  einer Ebene, in der der Punkt  $P$  liegt, genügen der Gleichung

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0 \quad 76.$$

Fällt der Punkt  $P$  der Reihe nach auf die Punkte  $A_1, A_2, A_3$ , so ist nach den Gleichungen 75', 76,

$$\frac{u_1}{u_4} = -\frac{A_1L}{3E'E}, \quad \frac{u_2}{u_4} = -\frac{A_2M}{3E'E}, \quad \frac{u_3}{u_4} = \frac{A_3N}{3E'E}$$

Die Coordinaten der Ebene genügen daher der Relation

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = A_1L : A_2M : A_3N : 3EE' \quad 76'.$$

Die von der Ebene auf den Axen bestimmten Längen  $A_1L, A_2M, A_3N$  kann man als die Coordinaten der Ebene  $LMN$  annehmen <sup>1)</sup>. Bezeichnet man die Coordinaten mit  $u, v, w$ , so ist

$$u = A_1L, \quad v = A_2M, \quad w = A_3N \quad 76'',$$

und

$$\frac{u}{v} = \frac{A_1L}{A_2M} = \frac{HA_1}{HA_2}, \quad \frac{v}{w} = \frac{A_2M}{A_3N} = \frac{JA_2}{JA_3}, \quad \frac{w}{u} = \frac{A_3N}{A_1L} = \frac{KA_3}{KA_1}$$

Man kann in der Ebene  $A_1A_2A_3$  einen Punkt  $O$  so bestimmen <sup>2)</sup> dass ist

$$\frac{A_1L}{A_2M} = \frac{(OA_3A_1)}{(OA_1A_2)}, \quad \frac{A_2M}{A_3N} = \frac{(OA_1A_2)}{(OA_2A_3)}$$

Die Coordinaten der Ebene  $LMN$  sind daher

$$\left. \begin{aligned} u &= l \frac{(OA_3A_1)}{(A_1A_2A_3)}, \quad v = l \frac{(OA_1A_2)}{(A_1A_2A_3)}, \quad w = l \frac{(OA_2A_3)}{(A_1A_2A_3)} \\ u + v + w &= l \end{aligned} \right\} \quad 75''.$$

Als Coordinaten des Punktes  $P$  kann man die Zahlen

1) Unverzagt: „Theorie der goniometrischen etc. Quaternionen, Wiesbaden 1876“. S. 94—100.

2) Unverzagt setzt

$$\frac{A_1L}{A_2M} = \frac{(OA_2A_3)}{(OA_3A_1)}, \quad \frac{A_2M}{A_3N} = \frac{(OA_3A_1)}{(OA_1A_2)}$$

$$x = \frac{(F'A_3A_1)}{(P'A_2A_3)}, \quad y = \frac{(P'A_1A_2)}{(P'A_2A_3)}, \quad z = P'P \quad 77.$$

nehmen.

Liegt der Punkt  $P$  in der Ebene  $LMN$ , so ist

$$z = \frac{u + vx + wy}{1 + x + y} \quad 78.$$

Sind in dieser Gleichung die Grössen  $u, v, w$  gegeben, so ist „sie die Gleichung der durch die Coordinaten  $u, v, w$  bestimmten Ebene;“ sind jedoch die Grössen  $x, y, z$  gegeben, so ist „sie die Gleichung des durch die Coordinaten  $x, y, z$  bestimmten Punktes.“ Die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen  $u, v, w$

$$Au + Bv + Cw + D = 0 \quad 79.$$

stellt einen Punkt dar, dessen Coordinaten sind

$$x = \frac{B}{A}, \quad y = \frac{C}{A}, \quad z = -\frac{D}{A + B + C} \quad 79'.$$

Die Axen des Coordinatensystems sollen mit den Einheitsvectors  $\alpha', \beta', \gamma'$  gleiche Anfangspunkte und gleiche Richtung haben. Eine bei den Einheitsstrecken parallele Strecke  $\omega$ , deren Anfangspunkt  $O$  in der Ebene  $A_1A_2A_3$  liegt, ist nach Gleichung 11. äquivalent

$$\omega = l \left( \frac{(O A_2 A_3)}{(A_1 A_2 A_3)} \alpha' + \frac{(O A_3 A_1)}{(A_1 A_2 A_3)} \beta' + \frac{(O A_1 A_2)}{(A_1 A_2 A_3)} \gamma' \right)$$

$$\omega = (w\alpha' + u\beta' + v\gamma') \quad 80.$$

oder wenn  $w'$  die entsprechende Einheitsstrecke ist,

$$(u + v + w)w' = \omega\alpha' + u\beta' + v\gamma' \quad 80'$$

Die Strecke  $\omega$  kann mithin als der Repräsentant der Ebene betrachtet werden, die auf den Axen die Stücke  $u, v, w$  abschneidet. Aus dieser Gleichung folgt leicht die Construction des Punktes  $O$ .

Die Gleichung 80. stellt einen Punkt dar, wenn  $u, v, w$  lineare Functionen von zwei Parametern  $t$  mit  $t_1$  sind. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Ebenen, deren Coordinaten  $u, v, w$  sind. Es sei

$$u = a + bt + ct_1, \quad v = a_1 + b_1t + c_1t_1, \quad w = a_2 + b_2t + c_2t_1 \quad 81.$$

also ist

$$\omega = \alpha_2 \alpha' + a \beta' + a_1 \gamma' + (b_2 \alpha' + b \beta' + b_1 \gamma')t + (c_2 \alpha' + c \beta' + c_1 \gamma')t_1 \quad 81'$$

Die Coordinaten dieses Punktes sind

$$x = \frac{cb_3 - bc_2}{c_2 b_1 - b_2 c_1}, \quad y = \frac{e_1 b - b_1 c}{c_2 b_1 - b_2 c_1}, \quad z = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ b & c & 1 \\ b_1 & c_1 & 1 \\ b_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \quad 81''$$

Wenn  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  drei den Axen parallele Strecken sind, deren Anfangspunkte in der Ebene  $A_1 A_2 A_3$  liegen, so stellt die Gleichung

$$\omega = \delta + \varepsilon t + \kappa t_1 \quad 82.$$

einen Punkt dar. Nach der Gleichung 6) kann man nämlich setzen

$$\begin{aligned} \delta &= a_2 \alpha' + a \beta' + a_1 \gamma', & \varepsilon &= b_2 \alpha' + b \beta' + b_1 \gamma', & \kappa &= c_2 \alpha' + c \beta' + c_1 \gamma' \\ d &= a + a_1 + a_2, & e &= b + b_1 + b_2, & k &= c + c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Die Länge der Strecke  $\omega$  ist gleich  $d + \varepsilon t + \kappa t_1$ . Setzt man diese Ausdrücke für  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  in die Gleichung 82. ein, so erhält man die Gleichung 81'. Die Gleichungen 81 bestimmen alle Ebenen, die sich in dem Punkte schneiden, der durch die Gleichung 82. gegeben ist.

Die Gleichung 80. stellt eine gerade Linie dar, wenn  $u$ ,  $v$ ,  $w$  lineare Functionen eines Parameters sind. Diese gerade Linie fällt auf die Schnittlinie der Ebenen, die die Coordinaten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  haben. Es sei

$$u = u_1 + t(u_2 - u_1), \quad v = v_1 + t(v_2 - v_1), \quad w = w_1 + t(w_2 - w_1) \quad 83.$$

mithin ist

$$\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = t \quad 83'.$$

$$\omega = w_1 \alpha' + u_1 \beta' + v_1 \gamma' + ((w_2 - w_1) \alpha' + (u_2 - u_1) \beta' + (v_2 - v_1) \gamma') t$$

Die Gleichungen 83'. sind die Gleichungen einer geraden Linie, in der sich die Ebenen schneiden, die die Coordinaten  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  und  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  haben. Diese Ebenen sind parallel, wenn ist

$$u_1 - u_2 = v_1 - v_2 = w_1 - w_2 \quad 84.$$

Daher repräsentirt die Gleichung

$$\omega = w_1\alpha' + u_1\beta' + v_1\gamma' + (\alpha' + \beta' + \gamma')t \quad 84'$$

die unendlich ferne gerade Linie.

Die Gleichung

$$\omega = (w_2\alpha' + u_2\beta' + v_2\gamma')t \quad 85.$$

stellt eine gerade Linie dar, die in der Ebene  $A_1A_2A_3$  und in der Ebene, deren Coordinaten  $u_2, v_2, w_2$  sind, liegt.

Als Gleichung einer geraden Linie lässt sich auch die Formel

$$\omega = \delta + \varepsilon t \quad 86$$

geben, wenn die Strecken  $\delta, \varepsilon$  den Axen parallel sind und ihre Anfangspunkte in der Ebene  $A_1A_2A_3$  liegen.

Wenn allgemein  $u, v, w$  Functionen von zwei Parametern  $t, t_1$  sind, so ist die Gleichung 80. der Repräsentant einer Fläche und wenn  $u, v, w$  Functionen eines Parameters  $t$  sind, so stellt die Gleichung 80. eine Curve im Raum dar.

Die Gleichung einer Fläche hat die Form

$$w_1 = f_1(t, t_1)\alpha' + f_2(t, t_1)\beta' + f_3(t, t_1)\gamma' \quad 87.$$

und die einer Curve im Raume hat die Form

$$w = f_1(t)\alpha' + f_2(t)\beta' + f_3(t)\gamma' \quad 88.$$

Die Coordinaten der Ebenen, die diese räumlichen Gebilde einhüllen, sind bzhw.

$$u = f_2(t, t_1), \quad v = f_3(t, t_1), \quad w = f_1(t, t_1) \quad 87'.$$

$$u = f_2(t), \quad v = f_3(t), \quad w = f_1(t) \quad 88'.$$

Aehnlich den Ableitungen der Gleichungen der Tangenten, Normalen für Curven in der Ebene, kann man die Gleichungen der Tangentenebene, Normalen für Flächen und die der Tangenten, Normalebene etc. für Curven im Raume bestimmen.

Es soll die Gleichung eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche abgeleitet werden. Man hat also die Gleichung der Fläche zu bestimmen, die durch eine längs dreier festen geraden Linien sich bewegende gerade Linie erzeugt wird.

Die Gleichung der sich bewegenden geraden Linie sei

$$\omega = w\alpha' + u\beta' + v\gamma' + (w'\alpha' + u'\beta' + v'\gamma')t \quad 83''.$$

und die Gleichung einer anderen geraden Linie sei

$$\omega_1 = w_1\alpha' + u_1\beta' + v_1\gamma' + (w_1\alpha' + u_1\beta' + v_1\gamma')t_1 \quad 83''.$$

Schneiden sich diese geraden Linien in einem Punkte, so entspricht der die beiden geraden Linien enthaltenden Ebene nach Gleichung 83'' eine Strecke  $\omega$  und nach Gleichung 83''' eine Strecke  $\omega_1$ ; diesen Strecken müssen offenbar identisch sein. Es ist mithin nach Gleichung 6'.

$$w + w't = w_1 + w_1't_1$$

$$u + u't = u_1 + u_1't_1$$

$$v + v't = v_1 + v_1't_1$$

Die Bedingung, dass die beiden geraden Linien sich schneiden, ist mithin

$$\begin{vmatrix} u - u_1 & u' & u_1' \\ v - v_1 & v' & v_1' \\ w - w_1 & w' & w_1' \end{vmatrix} = 0 \quad 83''''$$

Man kann die Ebenen so bestimmen, dass sie die drei gegebenen geraden Linien enthalten und einer vierten geraden Linie parallel sind. Die Schnittlinien der Ebenen seien die Strecken  $m\alpha'$ ,  $n\beta'$ ,  $p\gamma'$ . Die Gleichungen der gegebenen geraden Linien sind

$$\omega = c\alpha' + b\gamma' + t\beta'$$

$$\omega = c_1\alpha' + a_1\beta' + t\gamma'$$

$$\omega = a_2\beta' + b_2\gamma' + t\alpha'$$

und die Gleichung 83''' sei die der sich bewegenden geraden Linie. Da die sich bewegende gerade Linie die gegebenen geraden Linien zugleich schneidet, so gelten nach der Gleichung 83'''' die Beziehungen

$$\frac{v-b}{w-c} = \frac{v'}{w'}, \quad \frac{u-a_1}{w-c_1} = \frac{u'}{w'}, \quad \frac{u-a_2}{v-b_2} = \frac{u'}{v'}$$

Wenn mithin zwischen den  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Gleichung

$$(w-c)(u-a_1)(v-b_2) = (v-b)(w-c_1)(u-a_2)$$

besteht, so stellt die Gleichung

$$\omega = w\alpha' + u\beta' + v\gamma'$$

ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche dar. Auf diesem Hyperboloid liegen auch die drei geraden Linien, deren Gleichungen

$$\omega = c_1\alpha' + b_2\gamma' + t\beta', \quad \omega = \alpha\alpha' + \alpha_2\beta' + t\gamma', \quad \omega = a_1\beta' + b\gamma' + t\alpha'$$

Eine gerade Linie, die diese drei geraden Linien zugleich schneidet, liegt auf demselben Hyperboloide.

### Summen, Differenzen, Producte und Quotienten von Punkten, Vektoren und Strecken.

Man kann die Punkte  $A, B, C, \dots$  als Vertreter paralleler, gleichgerichteter Einheitsstrecken  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$  auffassen, die in jenen Punkten ihren Anfang haben. Treten in der Rechnung Punkte auf, die parallele Strecken von gleicher Länge und Richtung darstellen, so nennt man sie gleichwertige Punkte.

Wenn der Punkt  $A$  statt der Strecke  $\alpha'$  genommen wird, so soll der Punkt  $nA$  der Repräsentant der Strecke  $n\alpha'$  sein. Den Punkt  $nA$ , der eine Strecke von  $n$  Längeneinheiten darstellt, nennt man einen  $n$ -fachen oder  $n$ -wertigen Punkt. Aus diesen Erklärungen folgt: „Punkte werden addirt, bzw. subtrahirt wie die parallelen Strecken, deren Repräsentanten die Punkte sind.“ Ferner ergibt sich, dass  $C - B$  einen Punkt von der Grösse null darstellt, der auf der Geraden Linie  $BC$  im Unendlichen liegt.

Addirt man  $C - B$  zu einem beliebigen dritten Punkt  $S$ , der mit  $B$  und  $C$  gleichwertig ist, so erhält man einen Punkt  $F$ , der aus  $S$  entstanden ist, durch Verschiebung des Punktes  $S$  um die Strecke  $SF$ , die parallel, gleichgerichtet und gleich lang der Strecke  $BC$  ist. Es ist nämlich (Fig. 2.)

$$\begin{aligned} S + (C - B) &= (S + C) - B \\ &= 2D - B \\ &= F \end{aligned}$$

Da aber  $D$  in der Mitte von  $CS$  liegt, und

$$BD = DF$$

ist, so ist  $SF$  parallel und gleich  $BC$ . Es ist also  $C - B$  ein Operator, der einen Punkt, zu dem er addirt wird, um eine Strecke verschiebt, die parallel, gleichgerichtet und gleich lang  $BC$  ist. Durch die Strecke  $BC$  ist  $C - B$  als Operator im gegebenen Sinne vollständig bestimmt; umgekehrt ist durch  $C - B$  als Operator die bestimmte Strecke  $BC$  nicht ganz festgelegt.

Nimmt man  $C - B$  als Repräsentant einer Translation parallel, gleichgross und gleichgerichtet  $BC$ , so kann man die Definitionsgleichung

$$C - B = [BC] \quad 89.$$

anstellen. Man muss sich immer bewusst sein, dass  $[BC]$  ein Operator ist, der einen Punkt, zu dem er addirt wird, um eine Strecke verschiebt, die gleichgerichtet, gleich lang und parallel mit  $[BC]$  ist. Diese Differenz  $C - B$ , also  $[BC]$  nennt Möbius und Grassmann „Strecke“, Hamilton hat für diese Differenz den Namen „Vector“ eingeführt und Unverzagt gebraucht den Namen „Differenzvector“.

Die Definitionsgleichung 89. führt zu dem Satze: „Zwei gleich lange, parallele, gleichgerichtete Vektoren sind gleich“. Es ist nämlich (Fig. 2.)

$$C - B = [BC]$$

und

$$B - C = [CB]$$

also das bekannte Resultat

$$[BC] = - [CB] \quad 90$$

Aus

$$C - B = [BC]$$

$$S - B = [BS]$$

folgt

$$C + S - 2B = [BC] + [BS]$$

Es ist also

$$C + S = 2D = F + B, \quad 2D - 2B = F - B$$

$$2D - 2B = 2(D - B) = 2[BD] = [BF]$$

also

$$[BC] + [BS] = [BF]$$

Es ist aber

$$[BC] + [CF] = (C - B) + (F - C) = F - B = [BF]$$

mithin

$$[BC] + [CF] = [BC] + [BS] = [BF] \quad 91.$$

d. h.  $[CF]$  und  $[BS]$  sind gleich, und  $CF$ ,  $BS$  sind als gleichgerichtete Gegenseiten eines Parallelogramms gleich. Die Gleichungen 90. und 91. definiren die Addition und Subtraction von Vektoren.

Der von Unverzagt <sup>1)</sup> eingeführte durch „die vielfachen Punkte  $mA, nB$  festgelegte Quotientvector“  $(mA, nB)$  ist durch den Quotienten

$$\frac{nB}{mA} = (mA, nB) \quad 92.$$

definiert“. Man nennt „ $mA$  den Anfangs- und  $nB$  den Endpunkt des Quotientvectors  $(mA, nB)$ “.

Es ist

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{B}{A} = (A, B) \quad 92'.$$

und da

$$\frac{n\beta'}{m\alpha'} = \frac{n}{m} \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{np}{mp} \frac{\beta'}{\alpha'}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} (A, B) &= (mA, nB) = \left( A, \frac{n}{m} B \right) \quad 92'' \\ &= \left( \frac{m}{n} A, B \right) = (mpA, npB) \end{aligned}$$

Es ist also  $\frac{n}{m}(A, B)$  gleich dem durch die vielfachen Punkte  $mpA, npB$  bestimmten Quotientenvector  $(mpA, npB)$ . „Zwei Quotientenvectoren  $(mA, nB), (m_1C, n_1D)$  sind gleich, wenn

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$$

ist und die Strecken  $AB, CD$  gleich gross, parallel und gleichgerichtet sind“. Die Quotientenvectoren  $(mA, nB); (m_1C, n_1D)$  heissen parallel, wenn die Strecken  $AB, CD$  parallel sind; diese Quotientenvectoren sind gleichgerichtet, wenn die Strecken  $AB, CD$  gleichgerichtet sind.

Nach den Gleichungen 92. ist ferner

$$\left. \begin{aligned} (A, A) &= (mA, mA) = 1, & (mA, nB) (nB, mA) &= 1 \\ & & (A, B) (B, C) &= A, C \end{aligned} \right\} \quad 93.$$

$$(A, B) (B, C) (C, D) \dots (M, N) = (A, N)$$

„Für die vier Grundrechnungen der Quotientenvectoren gelten im allgemeinen die Gesetze der Arithmetik“ (nach den Gl. 20–26).

1) Unverzagt: „Theorie der goniometrischen etc. Functionen 1876“, S. 229.

Wenn  $A, B, C, D$  die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Diagonalen  $AC, BD$  sich im Punkte  $E$  schneiden, sind, so erhält man aus den Gleichungen 28', 28'' die Formeln

$$\frac{B}{A} = \frac{C}{D}, \quad \frac{C}{B} = \frac{D}{A}, \quad B + D = 2E, \quad \frac{B+D}{N} = \frac{B}{N} + \frac{D}{N} = \frac{2E}{N}$$

$$\frac{B}{A} D = C, \quad \frac{C}{B} A = D, \quad A + C = 2E, \quad \frac{A+C}{E} = \frac{A}{E} + \frac{C}{E} = 2 \frac{E}{E}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (A, B) &= (D, C), \quad (B, C) = (A, D) \\ &\quad (N, B) + (N, D) = (N, 2E) \\ (A, B)D &= C, \quad (B, C)A = D, \quad (E, A) + (E, C) = (E, 2E) = 2 \\ \text{und} \\ (A, mB)pD &= pmC, \quad (B, mC)pA = pmD \end{aligned} \right\} 94.$$

Daher ist  $(A, mB)$  ein Factor, der einen  $p$ -fachen Punkt im Raume durch Multiplication um die Länge  $AB$  in einer Richtung verschiebt, die parallel und gleichstimmig mit  $AB$  ist und den verschobenen Punkt zu einem  $pm$ -fachen Punkte macht. Ferner ist die Summe der zwei von einem Punkte  $N$  ausgehenden Quotienten  $(N, B) + (N, D)$  gleich einem Quotientvector, der durch den Punkt  $N$  und den Schwerpunkt der Punkte  $B, D$  bestimmt ist. Allgemein ist

$$\begin{aligned} (N, A) + (N, B) + (N, C) + (N, D) + \dots + (N, M) \\ = (N, mP) \end{aligned} \quad 95.$$

wenn  $P$  der Schwerpunkt der  $m$  Punkte  $A, B, C, D, \dots, M$  ist. Die Formel 95. erhält man aus der Gleichung

$$m\alpha' + r\beta' = (n + r)\gamma'$$

oder

$$nA + rB = (n + r)C$$

daher

$$(N, nA) + (N, rB) = (N, (n + r)C) \quad 96.$$

Der Punkt  $C$  liegt auf der geraden Verbindungslinie  $A, B$ .

Die Formel 96. kann man benutzen, um die Summe von zwei beliebigen Quotientvectors  $(mA, nB), (m_1C, n_1D)$  zu bilden. Man verschiebt  $CD$  parallel, bis der Punkt  $C$  in den Punkt  $B$  und der Punkt  $D$  nach  $F$  fällt. Es ist dann

$$(m_1 C, n_1 D) = (m_1 A, n_1 F) = \left( A, \frac{n_1}{m_1} F \right)$$

$$\frac{n}{m} B + \frac{n_1}{m_1} F = \left( \frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} \right) J$$

und

$$\begin{aligned} (mA, nB) + (m_1 C, n_1 D) &= \left( A, \frac{n}{m} B \right) + \left( A, \frac{n_1}{m_1} F \right) \\ &= \left( A, \left( \frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} \right) J \right) \end{aligned} \quad 96.$$

Ist

$$m = m_1 = n = n_1 = 1$$

und liegt der Punkt  $A$  in der Mitte der Strecke  $BF$ , so ist

$$(A, B) + (B, A) = (A, 2A) = 2$$

Setzt man in der Gleichung 28.

$$q_1 = (A, B) \quad q_2 = (B, C), \quad q_3 = (C, D) \dots q_s = (S, A)$$

so erhält man allgemein

$$\begin{aligned} (A, B) + (B, C) + (C, D) + (D, E) + \dots + (S, A) \\ = (A, sA) = s \end{aligned} \quad 97.$$

und

$$\left. \begin{aligned} (A, B)^n &= n(A, B) - (n-1) = (A, nB) - (A, (n-1)A) \\ (A, B)(C, D) &= (A, B) + (C, D) - 1 \\ &= (A, B) + (C, D) - (A, A) \end{aligned} \right\} \quad 98.$$

Obgleich  $(A, B)$  nicht gleich  $(C, D)$  ist, so ist

$$\{(A, B) - (C, D)\}^2 = 0 \quad 99.$$

Aus den Gleichungen 96. folgt die Formel

$$\begin{aligned} (A, E) + (A, B) - (CD) &= (A, E) + (A, B) - (A, F) \\ &= (A, E + B - F) \\ &= (A, H) \end{aligned}$$

die Strecke  $EH$  ist gleich, parallel und gleichgerichtet der Strecke  $FB$ .

Die Gleichung

$$(A, B)^n = (A, nB) - (A, (n-1)A)$$

kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} (A, B)^n &= (A, nB - (n-1)A) \\ &= (A, C) \end{aligned} \quad 98'$$

wenn

$$AC = nAB$$

ist. Es ist also „ $(A, B)^n$ “ ein Quotientfactor bestimmt durch den Punkt  $A$  und einen Punkt  $C$  der geraden Linie  $AB$ , dessen Entfernung vom Punkte  $A$  gleich der  $n$ -fachen Entfernung des Punktes  $B$  vom Punkte  $A$  ist, oder  $(A, B)^n$  ist ein Factor, der einen Punkt im Raume durch Multiplication um die Länge  $n \cdot AB$  in einer Richtung verschiebt, die parallel und gleichstimmig mit  $AB$  ist.“

Der Quotientvector kann auch durch das Product zweier Punkte dargestellt werden. Es ist nämlich

$$\beta' \cdot \alpha' = (-1)^s \frac{\beta'}{\alpha'}$$

also

$$m\beta' \cdot n\alpha' = mn(\beta' \cdot \alpha') = (-1)^s mn \frac{\beta'}{\alpha'}$$

oder, wenn man statt der Strecken deren Anfangspunkte nimmt,

$$\begin{aligned} mB \cdot nA &= mn(B \cdot A) = (-1)^s mn \frac{B}{A} = (-1)^s mn(A, B) \\ &= (-1)^s (A, mnB) \end{aligned}$$

Der Definition nach gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} mA \cdot nA &= (-1)^s (A, mnA) = (-1)^s mn = mB \cdot nB \\ mA \cdot mB &= (-1)^s (B, mnA) \end{aligned}$$

Ein solches Product  $A \cdot B$  unterscheidet sich sowol von dem durch Grassmann als auch von dem durch Unverzagt eingeführten Product von zwei Punkten. Grassmann setzt

$$A \cdot B = C \cdot D$$

wenn die Strecken  $AB, CD$  gleich lang, gleichgerichtet sind und auf einer geraden Linie liegen. Es bedeutet  $A \cdot B$  die Linie, die  $A$  und  $B$  zu Grenzpunkten hat, aufgefasst als bestimmten Teil der durch  $A$  und  $B$  bestimmten unendlichen geraden Linie. Dies Product  $A \cdot B$  nennt Grassmann der Aeltere „Linienteil“, Hankel und E. Müller gebrauchen den Namen „Geradenstück“, Budde benutzt den Ausdruck „linienflüchtigen Vector“ und H. Grassmann der Jüngere hat dafür das Wort „Stab“ eingeführt. Die Gesetze der Addition und Subtraction solcher Stäbe können hier nicht der Betrachtung unterworfen werden.

Unverzagt versteht unter dem Producte  $A \cdot B$  zweier einfachen Punkte den Punkt  $D^2$ , der mit dem Mittelpunkte der Strecke  $AB$  zusammenfällt. Diese Erklärung erhält man durch folgende Betrachtung. Die Rechnung mit Punkten kann man von der Rechnung mit Strecken frei machen. Man definiert die Addition von Punkten, übereinstimmend mit Moebius, den Quotienten von zwei Punkten durch die Gleichung 92, nimmt die Gesetze der Arithmetik an, ferner fasst man  $A^n$  als einen Punkt auf, der mit dem einfachen Punkt  $A$  zusammenfällt. Ausserdem soll die Gleichung

$$(A, B) = (C, D)$$

nur dann richtig sein, wenn die Strecken  $AB$ ,  $CD$  gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind. Ist der Punkt  $A$  der Mittelpunkt der Strecke  $DB$ , so ist

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{B}{A} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A} \cdot \frac{A}{D} = \frac{B}{D} = \frac{2A - D}{D} = 2\frac{A}{D} - 1 = 2\frac{B}{A} - 1$$

Durch den Schluss von  $n$  auf  $n+1$  folgt die Gleichung

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = n\frac{B}{A} - (n-1) = \frac{C}{A}, \quad AC = nAB \quad 93'$$

Liegen die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  so in einer geraden Linie, dass ist

$$(n-1)A + C = nB, \quad pA + nB = (n+p)D$$

so ist nach der Gleichung 98'

$$(A, B)^n = (A, C), \quad (A, D)^{n+p} = (A, C)$$

also

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = \left(\frac{D}{A}\right)^{n+p}$$

Da die Gesetze der Arithmetik gelten sollen, so hat man

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n}, \quad \frac{B^n}{A^n} A^{n+p} = B^n A^p, \quad (A, B)^n = (A^n, B^n) \quad 101.$$

mithin

$$B^n \cdot A^p = D^{n+p} = A^p \cdot B^n \quad 102.$$

Es ist das „Product von  $n$  einfachen Punkten  $A$  gleich einem Punkte  $n$ ter Ordnung  $A^n$  und es definiert die Gleichung 102, in Verbindung mit der Gleichung

$$nB + pA = (n+p)D \quad 102'.$$

das Product von zwei Punkten  $p$ ter und  $n$ ter Ordnung“. Es ist für

in der Tat 
$$n = p = 1$$

$$A \cdot B = B \cdot A = D^2 \quad 103.$$

Aus der Gleichung 98' erhält man ferner

$$\frac{rB^n + sA^n}{A^n} = \frac{rnB - (n-1)rA + sA}{A} = \frac{(r+s)H}{A}$$

mithin

$$\left. \begin{aligned} sA^n + rB^n &= (s+r)H \cdot A^{n-1} = (s+r)C^n \\ \text{und } sA + rB + (s+r)C & \end{aligned} \right\} \quad 104.$$

Für die Punkte  $A^n, B^n \dots$  gelten also in Bezug auf Addition und Subtraction dieselben Gesetze, die in Bezug auf Addition und Subtraction von einfachen Punkten bestehen. Es stellt also  $B^n - A^n$  entweder einen Punkt  $n$ ter Ordnung im Unendlichen dar, oder es ist ein Operator, der zu einem Punkte  $n$ ter Ordnung addirt diesen um  $AB$ , parallel und gleichgerichtet mit  $AB$  verschiebt.

Mit Hilfe der Gleichungen 102., 103., 104. kann man die Summe von zwei beliebigen Quotientenvectoren  $(mA, nB), (m_1C, n_1D)$  bestimmen. Es ist

$$(mA, nB) + (m_1C, n_1D) = \frac{nB}{mA} + \frac{n_1D}{m_1C} = \frac{nm_1B \cdot C + n_1mA \cdot D}{mm_1A \cdot C}$$

Die Punkte  $E, H, K, L$  seien die Mittelpunkte der Strecken  $AC, BC, AD$  und  $EM$ . Man hat daher nach der Gleichung 104.

$$\frac{nm_1B \cdot C + n_1mA \cdot D}{mm_1A \cdot C} = \frac{nm_1H^2 + n_1mK^2}{mm_1E^2}$$

und

$$nm_1H^2 + n_1mK^2 = (nm_1 + n_1m)L^2$$

also

$$(mA, nB) + (m_1C, n_1D) = \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right) \frac{L^2}{E^2}$$

Es ist aber

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{L}$$

mithin

$$\left(\frac{L}{E}\right)^2 = \frac{L^2}{E^2} = \frac{M}{E}$$

und

$$(mA, nB) + (m_1C, n_1D) = \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right) \frac{M}{E} = \left(E, \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)M\right) \quad 96''.$$

Der Punkt  $M$  ist durch die Gleichung

$$2 \left( \frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1} \right) M = \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n}{m} \right) (A - C) + 2 \frac{n}{m} B + 2 \frac{n_1}{m_1} D \quad 96''.$$

gegeben.

Wenn

$$n = m = n_1 = m_1 = 1$$

und die Strecken  $AB$ ,  $CD$  parallel und gleichgerichtet sind, so ist  $EM$  die Mittellinie des Trapezes  $ABCD$ .

Wenn die Strecken  $AB$ ,  $CD$  parallel, gleichlang und entgegengesetzt gerichtet sind, so ist  $M$  der unendlich ferne Punkt der Mittellinie des Trapezes  $ABCD$ .

Das Product der zwei Quotientvectoren ist

$$\begin{aligned} (mA, nB) (m_1 C, n_1 D) &= \frac{n n_1}{m m_1} (A, B) (C, D) \\ &= \frac{n n_1}{m m_1} \frac{B \cdot D}{A \cdot C} \end{aligned}$$

Wenn  $G$  der Mittelpunkt von  $BD$  und von  $EF$  ist, so hat man

$$\frac{B \cdot D}{A \cdot C} = \frac{G^2}{E^2} = \frac{F}{E}$$

also

$$(mA, nB) (m_1 C, n_1 D) = (mm_1 E, nn_1 F) \quad 93'.$$

Wenn

$$(B, C_1) = (C, D)$$

so erhält man die Gleichung 93.

$$(A, B) (B, C_1) = (A, C_1)$$

Es seien  $AB$ ,  $CD$  und ferner  $AB_1$ ,  $CD_1$ , parallele gleichgerichtete Strecken; die absoluten Längen dieser Strecken seien der Reihe nach  $a$ ,  $b$ ,  $1$ ,  $\dot{1}$ . Man hat also

$$AB = a \cdot AB_1, \quad CD = b \cdot CD_1$$

Gelten die Gleichungen 92., 98., 102., 104. als Definitionsgleichungen auch für den Fall, dass die Zahlenfactoren  $m$ ,  $n$ ,  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $r$ ,  $s$  etc. irrational sind, so hat man

$$\left( \frac{B_1}{A} \right)^a = \frac{B}{A}, \quad \left( \frac{D_1}{C} \right)^b = \frac{D}{C}$$

und

$$\frac{B \cdot D}{A \cdot C} = \frac{B_1^a}{A^a} \cdot \frac{D_1^b}{C^b} = \frac{N^{a+b}}{P^{a+b}} = \frac{R}{P}$$

Die absolute Länge von  $PR$  ist gleich  $a+b$  und die Punkte  $N, P$  sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} aB_1 + bD_1 &= (a+b)N \\ aA + bC &= (a+b)P \end{aligned}$$

bestimmt. Aus den Gleichungen folgt

$$(A, B)(C, D) = (P, R) \quad 93''.$$

Bezeichnet man die Strecken  $AB, CD, PR$  mit  $\alpha_1, \gamma_1, \pi_1$ , so ist

$$\pi_1 = \alpha_1 + \gamma_1 \quad 93''$$

Wenn die Strecken  $AB, CD$  parallel, jedoch entgegengesetzt gerichtet sind, so bestimmen ebenfalls die Gleichungen 93'' das Product der Quotientenvectoren  $(A, B) \cdot (C, D)$ .

Setzt man in den Gleichungen 96'', 98'' und 98' statt der Quotientenvectoren  $(A, B), (C, D), (P, R), (E, M)$  die Quotienten der gleichgerichteten, parallelen Einheitsstrecken  $\frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\delta'}{\gamma'}, \frac{\rho'}{\pi'}, \frac{\mu'}{\varepsilon'}$ , deren Anfangspunkte die Punkte  $A, B, C, D, P, R, E, M$  bzw. sind, so erhält man die richtigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{n\beta'}{m\alpha'} + \frac{m_1\gamma'}{n_1\delta'} &= \left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right) \frac{\mu'}{\varepsilon'} \\ \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\delta'}{\gamma'} = \frac{\rho'}{\pi'} \cdot \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^n &= n \frac{\beta'}{\alpha'} - (n-1) \end{aligned}$$

Ferner kann man in den Gleichungen, die Producte und Potenzen von Punkten nicht enthalten, statt der Punkte  $mA, nB$  etc. und der Quotienten  $\frac{B}{A}, \frac{C}{D}$  etc. die Strecken  $m\alpha', n\beta'$  etc. und die Quotienten  $\frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\delta'}$  etc. nehmen. Hiermit ist nachgewiesen, dass man mittelst der von Unverzagt eingeführten Punktrechnung und aus der Annahme

$$(A, B) = \frac{B}{A} = \frac{\beta'}{\alpha'} \quad 92'$$

die Gesetze der Addition und Multiplication der Quotienten von parallelen Strecken erhält. Es ist selbstverständlich, dass man in dieser Punktrechnung für den Punkt

$$A^{(n-1, 2, \dots)}$$

im allgemeinen nicht die Strecke  $\alpha'_n$  nehmen kann; in den Rech-

nungen mit Strecken kann man  $\frac{\beta'}{\alpha'}$  durch  $\frac{B}{A}$  ersetzen, jedoch die Strecke  $\alpha'$  im allgemeinen nicht durch den Punkt  $A$ . So z. B. kann man statt der Gleichung 40'

$$\text{oder} \quad b\beta'(\beta' \cdot \alpha') = (\alpha' \cdot \beta') b\beta'$$

$$\text{setzen} \quad \beta \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\alpha'}{\beta'} \beta$$

$$\text{aber nicht} \quad \beta(A, B) = (B, A)\beta \quad 105.$$

$$B(A, B) = (B, A)B$$

Man kann ferner die Hamilton'schen Quaternionen mittelst Quotientvectors darstellen. Nach der Gleichung 98' ist für eine reelle Zahl  $n$  der Quotient  $\left(\frac{B}{A}\right)^n$  oder der Quotientvector  $(A, B)^n$  gleich einem Quotientvector  $(A, C)$ , dessen Endpunkt  $C$  auf der geraden Linie  $AC$  liegt; es ist

$$AC = nAB$$

Es seien  $AB, AC$  zwei Strecken, die den Winkel  $\vartheta$  einschliessen, und es sei

$$AC = a \cdot AB$$

Die Strecke  $AC_1$  auf  $AC$  soll dieselbe absolute Länge wie  $AB$  haben. Da  $AC_1$  aus  $AB$  durch Drehung der Strecke  $AB$  um den Winkel  $\vartheta$  entsteht, so kann man setzen

$$(A_2C_1) = (A_1B)^{f(\vartheta)}$$

wenn der Exponent  $f(\vartheta)$  anzeigt, dass man  $AB$  um den Winkel  $\vartheta$  drehen soll. Man hat

$$(A, C) = (A, C_1)^a = ((A, B)^a)^{f(\vartheta)}$$

Es ist dann klar, dass man hat

$$(A, C) = ((A, B)^a)^{f(\vartheta)} = (A, B)^{af(\vartheta)} = ((A, B)^{f(\vartheta)})^a$$

Nimmt man wie in der Arithmetik die Gleichung

$$((A, B)^{f(\vartheta)})^{f(\vartheta_1)} = (A, B)^{f(\vartheta) \cdot f(\vartheta_1)}$$

wo  $f(\vartheta_1)$  ein Exponent ist, der  $AB$  um den Winkel  $\vartheta_1$  in der Ebene  $BAC$  dreht, an; ist die Länge der Strecke  $AE$  der Ebene  $BAC$  gleich der Länge der Strecke  $AB$ , und ist der Winkel  $BAE$  gleich  $\vartheta_1$ , so ist

$$(A, E) = (A, B)^{f(\vartheta + \vartheta_1)}$$

und ebenso

$$(A, E) = (A, C_1)^{f(\vartheta_1)} = ((A, B)^{f(\vartheta)})^{f(\vartheta_1)}$$

also

$$(A, B)^{f(\vartheta + \vartheta_1)} = (A, B)^{f(\vartheta)f(\vartheta_1)}$$

Es ist also

$$f(\vartheta + \vartheta_1) = f(\vartheta)f(\vartheta_1) \quad 106.$$

Nach der Gleichung 93' ist

$$(A, B)(A, C_2) = (A, F)$$

die Länge von  $AF$  ist, wenn  $AB$  gleich der Längeneinheit ist, gleich  $2 \cos \frac{\vartheta}{2}$  und der Winkel  $BAF$  ist gleich  $\frac{\vartheta}{2}$ , mithin ist

$$\begin{aligned} (A, F) &= (A, B)^{2 \cos \frac{\vartheta}{2} f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \\ &= (A, B)(A, B)^{f(\vartheta)} \end{aligned}$$

Setzt man die Gesetze der Arithmetik voraus, so folgt aus dieser Gleichung

$$f(\vartheta) + 1 = 2 \cos \frac{\vartheta}{2} f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad 107.$$

Da die Gleichung 106.

$$f(\vartheta) = f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \left[f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2$$

gibt, so erhält man aus der Gleichung 107. die Gleichung

$$\left[f\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2 - 2 \cos \frac{\vartheta}{2} f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = -1 \quad 108.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) &= \cos \frac{\vartheta}{2} + i \cdot \sin \frac{\vartheta}{2} \\ f\left(\frac{\vartheta}{2}\right) &= \cos \frac{\vartheta}{2} - i \cdot \sin \frac{\vartheta}{2} \end{aligned} \quad i^2 = -1$$

also ist  $f(\vartheta)$  entweder

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad f(\vartheta) &= \cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta \\ 2. \quad f(\vartheta) &= \cos \vartheta - i \cdot \sin \vartheta \end{aligned} \right\} i^2 = -1 \quad 109.$$

Nimmt man für  $f(\vartheta)$  den ersten Wert, so ist

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} (A, C_1) &= (A, B)^{\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta} \\ (A, B) &= (A, C_1)^{\cos \vartheta - i \cdot \sin \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad 109.$$

nimmt man für  $f(\vartheta)$  den zweiten Wert, so ist

$$\left. \begin{aligned} (A, C_1) &= (A, B)^{\cos \vartheta - i \cdot \sin \vartheta} \\ (A, B) &= (A, C_1)^{\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad 109'.$$

Stimmt also die Drehung, die der Exponent  $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$  ( $\cos \vartheta - i \sin \vartheta$ ) anzeigt, mit der Uhrzeigerbewegung überein, so ist die durch den Exponenten  $\cos \vartheta - i \sin \vartheta$ , ( $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ ) bestimmte der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt gerichtet.

Man bezeichnet die Drehung um den Winkel  $\vartheta$ , die mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt mit  $+\vartheta$  und die Drehung um den Winkel  $\vartheta$ , die der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt gerichtet ist mit  $-\vartheta$ . Man kann also setzen

$$(A, C) = (A, B)^{a(\cos \vartheta \pm i \cdot \sin \vartheta)} \quad 110.$$

wo  $\vartheta$  das Zeichen  $+$  oder  $-$  hat, je nachdem die Drehung von  $AB$  in der Ebene  $BAC$  mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt oder nicht übereinstimmt, umgekehrt legt  $i$  alle Ebenen fest, die der Ebene  $BAC$  parallel sind. Nach Hamilton ist, wenn  $AB = l$

$$a(\cos \vartheta \pm i \cdot \sin \vartheta) = \frac{[AC]}{[AB]} = \frac{C - A}{B - A} \quad [AC] \cdot [AB] = -a^2(\cos \vartheta \pm i \cdot \sin \vartheta) \quad 110')$$

dieser Quotient wird Quaternion genannt<sup>1)</sup>. Errichtet man in einem beliebigen Punkte  $M$  der Ebene der Quaternion ( $ABC$  ein Perpendikel  $MN$  von der Längeneinheit, nach der Seite des Raumes, von der aus die Drehung  $\vartheta$  mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmend gesehen wird, so setzt Hamilton

$$i = [MN] = N - M \quad 110''.$$

Diese Annahmen Hamiltons werden im Folgenden nicht benutzt.

1) Vgl. u. A. meine „Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen“. Leipzig 1883. Ich glaube an dieser Stelle darauf hinweisen zu dürfen, dass V. Bulbin in seinen „Elementos de calculo de los cuaterniones“, Buenos Aires 1887 im neunten und zehnten Capitel (Theorie der Curven u. Flächen) die bez. Abschnitte meiner Vorlesungen zum Teil übersetzt habe.

Ist  $A$  der Mittelpunkt der Strecke  $C'B'$ , so ist

$$(A, C') = (A; B)^{\cos\pi + i\sin\pi} = (A; B)^{-1}$$

unabhängig von der Ebene  $ABC$ .

Man ist berechtigt, die Definitionsgleichungen des Logarithmus

$$p^x = q, \quad x = {}^p\log q \quad 111'$$

auf den Fall, dass  $p$  und  $q$  Quotientvektoren sind, auszudehnen so dass man nach der Gleichung 110 setzen kann

$$a(\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta) = (A, B) \log(A, C) \quad 110'$$

Man nennt  $a$  den Modul und  $\vartheta$  das Argument der Quaternion.

Es ist also der „Logarithmus eines Quotientvectors  $(A, C)$  für einen zweiten Quotientvector  $(A, B)$  als Basis gleich der Quaternion aus den zwei Differenzvektoren  $[AC]$  und  $[AB]$ .

Für die Logarithmen der Quotientvektoren kann man alle für die Quaternionen geltenden Sätze beweisen. Man kann die Sätze der Quaternionen beweisen mit Hilfe der Logarithmen von Quotientvektoren, wenn man annimmt, dass diesen Logarithmen die Eigenschaften

$${}^p\log q \cdot {}^r\log p = {}^r\log q, \quad {}^r\log q + {}^r\log p = {}^r\log q \cdot p \quad 111'$$

zukommen, jedoch im allgemeinen die Gleichungen

$${}^p\log q \cdot {}^r\log p = {}^r\log p \cdot {}^p\log q$$

$${}^p\log q \cdot {}^r\log s = {}^r\log s \cdot {}^p\log q$$

nicht gelten; die zwei letzten Gleichungen sind richtig, wenn die die Quotientvektoren  $p, r, q, s$  bestimmenden Punkte in einer Ebene (bzhw. parallelen Ebenen) liegen.

Ganz ähnlich kann man die Quotienten von parallelen Strecken mittelst der sog. parallelen Quotientvektoren darstellen. Nimmt man an, dass „Quotientvektoren nur dann gleich sind, wenn sie denselben Anfangs- und Endpunkt besitzen“, so bedarf es natürlich einer besonderen Erklärung der Addition und Multiplication dieser Quotientvektoren. Für diese Quotientvektoren führt man am besten ein besonderes Zeichen ein; man bezeichnet den durch die Punkte  $mA$  und  $nB$  bestimmten Quotientvector mit  $(mA; nB)$ .

Es ist

$$(mA; nB) = (m_1C; n_1D)$$

wenn  $C$  auf  $A$ ,  $D$  auf  $B$  fällt und

$$\frac{n}{m} = \frac{n_1}{m_1} \text{ ist.}$$

Von den Gleichungen 93'', 96'' ausgehend, erhält man folgende Definitionen:

1) „Unter der Summe von zwei parallelen Quotientvektoren  $(mA; nB)$ ,  $(m_1C; n_1D)$  versteht man einen Quotientvector  $(E; (\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1})M)$ , dessen Anfangs- und Endpunkt durch die Gleichungen

$$2E = A + C, \quad 2\left(\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1}\right)M = \left(\frac{n_1}{m_1} - \frac{n}{m}\right)(A - C) + \frac{2n}{m}B + \frac{2n_1}{m_1}D \quad 96''.$$

bestimmt sind“. Die drei Quotientvektoren  $(mA; nB)$ ,  $(m_1C; n_1D)$ ,  $(E; (\frac{n}{m} + \frac{n_1}{m_1})M)$  sind parallel.

2) „Wenn die Strecke  $PR$  gleich der Summe der zwei parallelen Strecken  $AC$ ,  $CD$  ist, so versteht man unter dem Product der zwei parallelen Quotientvektoren  $(A; B)$ ,  $(C; D)$  den Quotientvector  $(P; R)$ “. Für diese Quotientvektoren gelten also die Gleichungen 93., 93' nicht.

Diese Verknüpfungen genügen dem commutativen und associativen Gesetze.

Man kann leicht nachweisen, dass der Quotientvector  $(A; B)^n$ , wenn  $n$  eine reelle Zahl bezeichnet, gleich einem Quotientvector  $(A; M)$  ist; es ist

$$AM = nAB$$

und der Punkt  $M$  liegt auf der geraden Linie  $AB$ . Es seien  $AB$ ,  $CD$  zwei parallele gleichgerichtete Strecken, und es sei

$$CD = a \cdot AB$$

die Strecke  $CD_1$  auf  $CD$  soll dieselbe absolute Länge  $AB$  haben. Da man  $CD_1$  aus  $AB$  durch Parallelverschiebung der Strecke  $AB$  um die Länge  $AC$  in der Richtung von  $A$  nach  $C$  erhält, so kann man setzen

$$(C; D_1) = (A; B)\varphi(AC)$$

wenn  $\varphi(AC)$  eine Translation anzeigt, die nach Grösse und Richtung durch  $AC$  bestimmt ist.

Man hat

$$(C; D) = ((A; B)^{\varphi(AC)} = ((A; B)\varphi(AC))^{\varphi(AC)}$$

Wenn

$$(A; B)(C; D_1) = (P; R)$$

ist, so ist

$$(P; R) = ((A; B)^2)^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

$$(C; D_1)^2 = (P; R)$$

mithin

$$(A; B)(A; B_1)^{\varphi(AC)} = ((A; B)^2)^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

$$\{(A; B)\varphi(AC)\}^2 = \{[(A; B)]^2\}^{\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

Setzt man für diese Gleichungen die Gesetze der Arithmetik voraus, so erhält man

$$(A; B)^{\varphi(AC)+1} = (A; B)^{2\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)}$$

$$(A; B)^{2\varphi(AC)} = (A; B)^{2\left[\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\right]^2}$$

und hieraus

$$\varphi(AC) + 1 = 2\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)$$

$$\varphi(AC) = \left[\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\right]^2$$

mithin

$$\left[\varphi\left(\frac{AC}{2}\right)\right]^2 = 2\varphi\left(\frac{AC}{2}\right) - 1$$

112.

Bezeichnet man die Strecken  $AB, CD_1$  mit  $\alpha'$  und  $\gamma'$ , so genügen den Gleichungen 112.

$$1) \varphi(AC) = 1, \quad 2) \varphi(AC) = \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{C}{A}$$

$$\varphi\left(\frac{AC}{2}\right) = \frac{\gamma' + \alpha'}{2\alpha'} = \frac{A + C}{2A} = \frac{P}{A}$$

Da die Quotientvectors  $(A; B)$ ,  $(C; D)$  nicht gleich sind, so ist

$$\varphi(AC) = \frac{\gamma'}{\alpha'} \quad 112'$$

und

$$(C; D) = (A; B)^{\frac{\alpha\gamma'}{\alpha'}} = (A; B) \quad 113.$$

Nach der Definitionsgleichung 111. ist mithin

$$\frac{\alpha\gamma'}{\alpha'} = (A; B) \log(C; D) \quad 113'.$$

Man erhält daher den Satz: „Der Logarithmus eines Quotientvectors  $(C; D)$  für einen zweiten parallelen, gleichgerichteten Quotientvector  $(A; B)$  als Basis ist gleich dem Quotienten der parallelen Strecken  $CD$  und  $AB$ “.

Allgemein hat man den Satz: „Wenn die Strecken  $AB$ ,  $CF$  gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind, und ebenso die Strecken  $AE$ ,  $CD$  gleich lang, gleichgerichtet und parallel sind, so ist der Logarithmus des Quotientvectors  $(C; D)$  für den Quotientvector  $(A; B)$  als Basis gleich dem Producte der Quaternionen aus den zwei Vektoren  $[AE]$  und  $[AB]$  und des Quotienten der Strecken  $CD$  und  $AE$  oder gleich dem Producte des Quotienten der Strecken  $CF$  und  $AB$  und der Quaternion aus den zwei Vektoren  $[CD]$  und  $[CF]$ “. Dieses Product nennt Unverzagt Biquaternion.

Es seien  $A$  und  $C$  die Anfangspunkte der parallelen, gleichgerichteten Einheitsstrecken  $\alpha'$ ,  $\gamma_c'$ ; die absoluten Längen von  $AB$ ,  $CD$  seien mit  $a$  und  $c$  bezeichnet: ferner sei in der Ebene

$$ABE: \quad AG' \parallel BE, \quad G'E \parallel AB, \quad AE \text{ skr. } CD, \quad AB \nparallel CF \\ EB' \text{ skr. } AB, \quad AG \text{ skr. } AB, \quad AG \text{ skr. } EG$$

$B'$  ein Punkt der geraden Linie  $AB$ , und in der Ebene  $CDF$

$$DF' \text{ skr. } CF, \quad CH \text{ skr. } CF, \quad DH \text{ skr. } CH$$

$F'$  ein Punkt der geraden Linie  $CF$ ;  $CD$  bilde mit  $AB$  den Winkel  $\mathcal{S}$  und  $AG'$  mit  $AB$  den Winkel  $\mathcal{S}'$ . Es ist

$$(A, G') = (A, B) \frac{c \sin \vartheta}{a \sin \vartheta'} (\cos \vartheta' + i \cdot \sin \vartheta')$$

$$(A, E) = (A, B) \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta)$$

also

$$(A, G') (A, B) = (A, B) \frac{c}{a} \left( \frac{a}{c} + \sin \vartheta \cotg \vartheta' + i \cdot \sin \vartheta \right)$$

$$= (A, B) \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) \quad i^2 = -1$$

mithin

$$(A, G') (A, B) = (A, E)$$

Diese Formel kann als Definitionsgleichung des Products  $(A; G') (A; B)$  dienen, also

„Das Product von zwei Quotientvectors  $(A; G')(A; B)$  ist wieder ein Quotientvector  $(A; E)$ : die Strecke  $AE$  ist die Diagonale des durch die Strecken  $(AG', AB)$  bestimmten Parallelogramms. Es gilt das commutative und associative Gesetz.“

Man hat dann

$$\left. \begin{aligned} (A; E) &= (A; B) \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) = (A; G') (A; B) \\ (C; D) &= (A; E) = \{(A; B) \frac{\gamma_1'}{a'} \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) \frac{\gamma_1'}{a'}\} \end{aligned} \right\} 114.$$

und nach Gleichung 111., und der ersten Gleichung 111'.

$$\left. \begin{aligned} (A; B) \log(C; D) &= \frac{\gamma_1' c}{a' a} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) \\ &= \frac{c \gamma_1'}{a a'} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) \\ \text{oder} \\ (C; D) &= \{(A; B) \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) \frac{\gamma_1'}{a'}\} \\ &= (A; B) \frac{c \gamma_1'}{a a'} (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) \end{aligned} \right\} 115.$$

Ferner ist

$$(C; F) = (A; B)^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}, \quad (C; D) = (C; F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$$

$$= \{(A; B)^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'} \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}\}$$

und nach der Gleichung 111. und der ersten Gleichung 111'.

$$(A; B)\log(C; D) = \frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\frac{\gamma_1'}{\alpha'} = \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad 115'.$$

Für

$$c = a, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

erhält man

$$i\frac{\gamma_1'}{\alpha'} = \frac{\gamma_1'}{\alpha'} i \quad 115''.$$

Die Gleichungen

$$(C; D) = (C; F')(C; H), \quad (C; F') = (A; B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}\cos\vartheta}$$

$$(C; H) = (A; B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}i\sin\vartheta}$$

geben

$$(A; B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = (A; B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}} (A; B)^{\frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}i\sin\vartheta} \quad 116.$$

Da man nach der Definition des Productes von parallelen Quotienten-  
vectoren

$$(C; D)^{m\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\frac{\pi'}{\varrho'}} = (C; D)^{m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} (C; D)^{n\frac{\pi'}{\varrho'}}$$

$$= (C; D)^{n\frac{\pi'}{\varrho'}} (C; D)^{m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}}$$

hat, wo  $\alpha'$ ,  $\gamma_1'$ ,  $\pi'$ ,  $\varrho'$  gleichgerichtete parallele Einheitsstrecken  
sind, so ist

$$(C; F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\left(m\frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n\frac{\pi'}{\varrho'}\right)}$$

$$= (C; F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)m\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} (C; F)^{\frac{c}{a}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)n\frac{\pi'}{\varrho'}} \quad 117.$$

Die Gleichungen 115. — 117. sind mit Hilfe der Definitionen des Productes von parallelen Quotientvectors und von Quotientvectors, die denselben Anfangspunkt haben, und ferner der Gleichung 111. und der ersten Gleichung 111'. abgeleitet worden.

Nimmt man noch an, dass die zweite Gleichung 111'. besteht, wenn  $p, q$ , entweder parallele Quotientvectors oder Quotientvectors mit demselben Anfangspunkte sind, so erhält man aus den Gleichungen 116., 117. die Formeln

$$\begin{aligned}
 (A; B) \log(C; D) &= (A; B) \log(C; F') (C; H) \\
 &= (A; B) \log(C, F') + \log(C; H) \\
 \text{oder} \\
 (A; B) \log \left\{ (A; B)^{\frac{e\gamma'}{a\alpha'} \cos \vartheta} (A; B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'} i \sin \vartheta} \right\} \\
 &= (A; B) \log(A; B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'} \cos \vartheta} + (A; B) \log(A; B)^{\frac{c\gamma'}{a\alpha'} i \sin \vartheta} \\
 \frac{c\gamma'}{a\alpha'} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) &= \frac{c\gamma'}{a\alpha'} \cos \vartheta + \frac{c\gamma'}{a\alpha'} i \sin \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{116'}$$

$$\begin{aligned}
 \text{und} \\
 (C; F) \log(C; F) &= \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \left( m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n \frac{\pi'}{\rho'} \right) \\
 &= (C; F) \log(C; F)^{\frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^m \frac{\gamma_1'}{\alpha'}} \\
 &\quad + (C; F) \log(C; F)^{\frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n \frac{\pi'}{\rho'}} \\
 \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \left( m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n \frac{\pi'}{\rho'} \right) &= \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n \frac{\pi'}{\rho'}
 \end{aligned}
 \tag{117'}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned}
 (A; B) (A; B)^{\frac{\gamma_1'}{\alpha'}} &= (A; B) (A; B)^{1 - \frac{\gamma_1'}{\alpha'}} \\
 &= (A; B)
 \end{aligned}$$

$$(A; B) (A; B)^{\cos\pi + i\sin\pi} = (A; B) (A; B)^{-1} = (A; B)^0$$

$$(\cos\pi + i\sin\pi) \frac{\gamma_1'}{\alpha'}$$

Die Quotienten  $(A; B)$ ,  $(A; B)$  sind entgegengesetzt parallel und das Product derselben ist nach der Definition und der letzten Gleichung ein Quotientvector, dessen Anfangspunkt auf  $AC$  im Unendlichen liegt und dessen Anfangspunkt und Endpunkt die Entfernung null haben. Die Quotientvectors  $(A; B)$ ,  $(A; B)^{\cos\pi + i\sin\pi}$  haben denselben Anfangspunkt, und das Product derselben ist nach der Definition und der letzten Gleichung ein Quotientvector, dessen Anfangs- und Endpunkt mit dem Punkte  $A$  zusammenfallen. Fällt der Punkt  $A$  auf den Punkt  $C$ , so ist

$$\gamma_1' = \alpha'$$

und die beiden letzten Gleichungen stimmen überein.

Da ist

$$(A; B)^{m(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot (A; B)^{m(\cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi))} = (A; B)^0$$

wo  $i_1$  anzeigt, dass die Strecke  $AB$  nicht in der Ebene  $ABC$  gedreht werden soll, so ist das Zeichen  $(A; B)^0$  für sich genommen, unbestimmt.

An einer Figur kann man leicht zeigen, dass für die rechte Seite der zweiten Gleichung 117'. ausser dem commutativen Gesetze das associative Gesetz gilt.

Um in Uebereinstimmung mit allen Lehren der allgemeinen Arithmetik zu bleiben, sollen die Formeln

$$(A; B)^u \cdot (A; B)^v = (A; B)^{u+v} = (A; B)^{v+u} = (A; B)^v \cdot (A; B)^u \quad 116''.$$

$$\{(A; B)^u \cdot (A; B)^v\} \cdot (A; B)^w = (A; B)^u \{(A; B)^v \cdot (A; B)^w\}$$

bestehen. Bei dieser Annahme ist das Product von zwei Quotientvectors, die entweder denselben Anfangspunkt haben oder parallel sind, wieder ein Quotientvector, dagegen ist das Product von zwei Quotientvectors, die weder denselben Anfangspunkt haben, noch parallel sind, nicht einem Quotientvector gleich.

Es seien nun  $AA_1$ ,  $AB_1$ ,  $AC_1$  die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems und

$$\left. \begin{aligned} AA_1 = AB_1 = AC_1 = 1, \quad i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad i_3^2 = -1 \\ (A; B_1) = (A; A_1)^{i_3}, \quad (A; C_1) = (A; B_1)^{i_1} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (A; A_1) = (A; C_1)^{i_2} \end{aligned} \right\} 118.$$

also nach den Gleichungen 109.

$$(A; B_1) = (A; C_1)^{-i_1}, \quad (A; C_1) = (A; A_1)^{-i_2}, \quad (A; A_1) = (A; B_1)^{-i_3}$$

Die Zeichen  $i_1, i_2, i_3$  operiren in den Ebenen  $AB_1C_1, AA_1C_1, AA_1B_1$ .

Hieraus erhält man z. B.

$$[(A; A_1)^{i_3}]^{i_1} = (A; A_1)^{i_3 i_1} = (A; B_1)^{i_1} = (A; C_1) = (A; A_1)^{-i_2}$$

also

$$i_1 i_3 = -i_2$$

ebenso findet man

$$i_2 i_1 = -i_3, \quad i_3 i_2 = -i_1, \quad i_1 i_2 = i_3, \quad i_0 i_1 = i_2 = -i_1 i_3 \\ i_2 i_3 = i_1 \quad 118'$$

Die Coordinaten eines Punktes  $M$  seien  $x_1, y_1, z_1$  und

$$\angle MAC_1 = \varphi$$

Es ist

$$(A; M) = (AC_1)^{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}(\cos \varphi + i_4 \sin \varphi)} \\ = (A; C_1)^{x_1} (A; C_1)^{i_4 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$(A; M) = (A; A_1)^{x_1} (A; B_1)^{y_1} (A; C_1)^{z_1} \\ = (A; C_1)^{i_2 x_1} (A; C_1)^{-i_1 y_1} (A; C_1)^{z_1}$$

mithin

$$(A; C_1)^{x_1} (A; C_1)^{i_4 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = (A; C_1)^{x_1} (A; C_1)^{i_2 x_1} (A; C_1)^{-i_1 y_1}$$

also

$$i_4 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = i_2 x_1 - i_1 y_1 \quad 119.$$

Verbindet man den Punkt  $A$  mit dem Punkte  $R_1$ , dessen Coordinaten  $-y_1, x_1, 0$  sind, so ist

$$(A; R) = (A; C_1)^{i_4 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad 119'$$

Es sei



$$M_1M = y_1, \quad AM_2 = x_1, \quad M_2M_1 = z_1, \quad AP_1 \text{ skr. } AM, \quad AP_1 \text{ skr. } A_1M_1,$$

$$AP = 1, \quad AM_1 = w_1$$

und

$$(A; M) = (A; B) \frac{i}{a} \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$(A; P_1) = (A; B_1)^{i_2}, \quad (A_1; M_1) = (A; P_1)^{w_1 i_1},$$

Es ist dann

$$i \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = i_1 y_1 + i_1 w_1$$

$$i_2 w_1 = i_1 x_1 + i_3 z_1$$

also

$$i \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1$$

Setzt man

$$(A; M) = (A; M') \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}$$

also

$$AM' = 1$$

und sind die Coordinaten von  $M'$  :  $x_1'$ ,  $y_1'$ ,  $z_1'$ , so ist

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = 1$$

$$(A; B)^i = (A; B)^{i_1 x_1' + i_2 y_1' + i_3 z_1'}$$

und

$$(A; E) = (A; B) \frac{c}{a} \cos \vartheta + \frac{c}{a} \sin \vartheta i$$

$$= (A; B) \frac{c}{a} (\cos \vartheta + \sin \vartheta (i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3'))$$

also

$$(A; B) \log (A; E) = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$= \frac{c}{a} (\cos \vartheta + \sin \vartheta (i_1' x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3')) \quad 120$$

Die gerade Linie, die den Ursprung der Coordinaten mit dem Punkte  $(x_1', x_2', x_3')$  verbindet, steht auf der Ebene  $ABE$  senkrecht.

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{a} \cos \vartheta &= w \\ \frac{c}{a} \sin \vartheta \cdot x_1' &= x \\ \frac{c}{a} \sin \vartheta \cdot y_1' &= y \\ \frac{c}{a} \sin \vartheta \cdot z_1' &= z \end{aligned} \right\} 120'.$$

so ist

$$(A; B) \log(A; E) = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z \quad 120'.$$

Die Quaternion ist hiermit auf eine viergliedrige Form, die Normalform, gebracht.

Die Coordinaten der Punkte  $B$  und  $E$  seien  $(x', y', z')$ ,  $(x'', y'', z'')$ . Es ist

$$a^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad c^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

$$\begin{aligned} (A; B) &= (A; A_1)^{x'} (A; B)^{y'} (A; C_1)^{z'} = (A; A_1)^{x' + i_2 y' - i_3 z'} \\ &= (A; B_1)^{-i_2 x' + y' - i_1 z'} = (A; C_1)^{i_2 x' - i_1 y' + z'} + x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A; E) &= (A; A_1)^{x'' + i_2 y'' - i_3 z''} = (A; B_1)^{-i_2 x'' + y'' + i_1 z''} \\ &= (A; C_1)^{i_2 x'' - i_1 y'' + z''} \end{aligned}$$

also

$$x'' + i_2 y'' - i_3 z'' = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (x + i_2 y' - i_3 z')$$

$$i_2 x'' - i_1 y'' + z'' = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (i_2 x' - i_1 y' + z')$$

$$i_3 x'' - y'' - i_1 z'' = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (i_3 x' - y' - i_1 z')$$

Setzt man die durch die Grössen  $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ ,  $i_1, i_2, i_3, w$  ausgerechneten Werte von  $a, c, \cos \vartheta + i \sin \vartheta$  ein, multiplicirt auf den rechten Seiten nach den Multiplicationsregeln der Arithmetik, beachtet die Producte der Grössen  $i_1, i_2, i_3$ , so erhält man die linken Seiten. Es gilt also das distributive Princip für das Product

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z) (m + i_r a + i_s p), \quad r, s = 1, 2, 3$$

Es ist jetzt leicht nachzuweisen, dass das distributive Princip für das Product



$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z) (m + i_1 n + i_2 p + i_3 t)$$

besteht. Der Punkt  $S$  habe die Coordinaten  $n, p, o$ , und der Punkt  $T$  habe die Coordinaten  $-p, n, o$ ; es ist

$$(A; T) = (A; S)^{i_1}, \quad (A; C_1) \sqrt{p^2 + n^2} = (A; T)^{i_1'}$$

$$(A; B_1) i_2' \sqrt{p^2 + n^2} = (A; S)$$

$$i_2 \sqrt{p^2 + n^2} = (i_1' p + i_2' n), \quad i_1 \sqrt{p^2 + n^2} = (i_1' n - i_2' p)$$

Für das Product

$$\left( w + \frac{i_1' n - i_2' p}{\sqrt{p^2 + n^2}} x + \frac{i_1' p + i_2' n}{\sqrt{p^2 + n^2}} y + i_3 z \right) (m + i_1' \sqrt{n^2 + p^2} + i_3 t)$$

gilt das distributive Princip und es ist gleich

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(m + i_3 t) + (w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(i_1 n + i_2 p)$$

da für diese Glieder ebenfalls das distributive Princip besteht, so ist bewiesen, dass es für das Product von zwei Quaternionen Geltung hat. Man hat also

$$\begin{aligned} & (w + i_1 x + i_2 y + i_3 z) (m + i_1 n + i_2 p + i_3 t) \\ & = wm - xn - yp - zt + i_1(xm + wn + yt - zp) \\ & + i_2(y m + w p_2 + zn - yt) + i_3(zm + wt + xp - yn) \quad 121. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relationen 118., den Gleichungen 119. und 120. kann man die formale Theorie der Quaternionen entwickeln. Die Zeichen  $i_1, i_2, i$  etc. kann man jetzt als Differenzvectors oder als Drehungsfactoren auffassen. Nimmt man die Zeichen  $i$  als Differenzvectors, so erhält man mittelst der Formeln geometrische Sätze, betrachtet man dagegen die Zeichen  $i$  als Drehungsfactoren, so kann man mittelst der Formeln geometrisch-phoronomische Sätze ableiten.

Setzt man in der Gleichung

$$m = s \cos \vartheta_1, \quad n = s \sin \vartheta_1 \cdot x_2, \quad p = s \sin \vartheta_1 \cdot y_2, \quad t = s \sin \vartheta_1 \cdot z_2$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$$

so ist

$$s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + t^2}$$

und

$$mi_1 + pi_2 + ri_3 = s \cdot \sin \vartheta_1 (i_1 x_2 + i_2 y_2 + i_3 z_2) = s \cdot \sin \vartheta_1 i'$$

$$i'^2 = -1$$

und mithin

$$\frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) s (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1)$$

$$= \frac{cs}{a} (\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + i \cdot i' \sin \vartheta \sin \vartheta_1$$

$$+ i \sin \vartheta \cos \vartheta_1 + i' \cos \vartheta \sin \vartheta_1) \quad 121'$$

Wenn  $CL$  an Länge gleich  $CD$  ist und mit  $CD$  den Winkel  $\vartheta_1$  und mit  $CF$  den Winkel  $\vartheta_2$  einschliesst, so ist (nach den Gleichungen 115.)

$$(C; L) = (C; D)^{\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1}$$

$$= (A; B) \quad (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) \left\{ (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} \right\}$$

$$(C; L) = (C; F) \quad (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$= (C; F) \quad \frac{c}{a} (\cos \vartheta_2 + i'' \sin \vartheta_2)$$

$$= (A; B) \quad \{ (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \} \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}$$

$$= (A; B) \quad \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} (\cos \vartheta_2 + i'' \sin \vartheta_2)$$

$$i^2 = -1, \quad i'^2 = -1$$

mithin

$$(\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) \left\{ (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} \right\}$$

$$= (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) \left\{ \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \right\}$$

$$= \{ (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \} \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'}$$

$$= \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} \{ (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \}$$

122.



$$\begin{aligned}
&= \cos \vartheta_1 \cos \vartheta \frac{c\gamma_1'}{q\alpha'} + i \sin \vartheta \cos \vartheta_1 \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} \\
&\quad + i' \sin \vartheta_1 \cos \vartheta \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} + i' i \sin \vartheta_1 \sin \vartheta \frac{c\gamma_1'}{a\alpha'} \\
&= A: B \log(C; L)
\end{aligned}$$

und hieraus für

$$c = a, \quad \vartheta = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$i' \left( i \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right) = i' \left( \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right) i = (i' i) \frac{\gamma_1'}{\alpha_1} = \frac{\gamma_1'}{\alpha'} (i' i) \quad 122'$$

Wenn  $KJ'$  an Länge gleich  $CL$  und gleichgerichtet parallel  $CL$  ist und ferner  $K$  der Anfangspunkt einer Einheitsstrecke  $\gamma k'$  ist, die parallel und gleichgerichtet der Einheitsstrecke  $\alpha'$  ist, so ist

$$\begin{aligned}
(K; J') = (C; L) \frac{x'}{\gamma'} &= (C; D) \frac{x'}{\gamma_1} \\
&= (A; B) \left\{ \frac{c}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right\} \frac{x'}{\gamma_1} \\
&= (A; B) \frac{b}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{x'}{\alpha'}
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (K; J') = (C; L) \frac{x'}{\gamma'} \\ = (A; B) \left\{ \frac{c}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right\} \frac{x'}{\gamma_1} \\ = (A; B) \frac{b}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{x'}{\alpha'} \end{aligned}} \right\} 123.$$

mithin

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{c}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right\} \frac{x'}{\gamma_1} \\
&= \frac{c}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{x'}{\alpha'} \\
&= \frac{c}{a} (\cos \vartheta_1 + i' \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \left( \frac{x'}{\gamma'} \cdot \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right) \quad 123'.
\end{aligned}$$

und

$$i \frac{x'}{\gamma_1} = i' \frac{x'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\gamma_1},$$

$$\begin{aligned}
i' \frac{x_1'}{\gamma_1'} &= i' \frac{x'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\gamma_1}, \quad \left( i' i \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \right) \frac{x'}{\gamma_1} = i' i \frac{x'}{\alpha'} = i' i \left( \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \frac{x'}{\gamma_1} \right) \\
&= \left( i' i \frac{x'}{\gamma_1} \right) \frac{\gamma_1'}{\alpha'}
\end{aligned}$$

Nach den Gleichungen 16. kann man setzen

$$\frac{k'}{\gamma_1'} = \frac{\pi'}{\vartheta'}$$

es ist daher



$$\begin{aligned} \left(i' i \frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right) \frac{\pi'}{\rho'} &= \left(i' i \frac{\gamma_1'}{\alpha'}\right) \frac{k'}{\gamma_1'} = \left(i' i \frac{k'}{\gamma_1'}\right) \frac{\gamma_1'}{\sigma'} \\ &= \left(i' i \frac{\pi'}{\rho'}\right) \frac{\gamma_1'}{\alpha'} = \left(i' i\right) \frac{\pi'}{\rho'} \frac{\gamma_1'}{\alpha'} \end{aligned} \quad 123'.$$

Mit Benutzung der Formeln 114. — 123'. kann man die Grundrechnungsarten der Biquaternionen Unverzagt's entwickeln. Nicht jede Verbindung von zwei Biquaternionen Unverzagt's durch eine der Grundrechnungsarten führt zu einer Biquaternion Unverzagt's als Resultat der Rechnung. „Das Product von zwei Biquaternionen Unverzagt's ist wieder eine Biquaternion Unverzagt's“, dagegen führt im allgemeinen die Summe oder die Differenz von zwei Biquaternionen Unverzagt's nicht zu einer Biquaternion derselben Art. Die Summe oder Differenz von zwei Biquaternionen Unverzagt's kann man allgemeine Biquaternionen nennen.

Ferner lässt sich mit Hilfe der Formeln 30. — 30<sup>m</sup>., 120'. jede Biquaternion Unverzagt's auf verschiedene Arten in Summen zerlegen. Nach den Gleichungen 117'. und 120'. ist

$$\begin{aligned} (w + i_1y + i_2y + i_3z) \left(m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n \frac{\pi'}{\rho'}\right) \\ = mw \frac{\pi'}{\rho'} + (i_1x + i_2y + i_3z) \left(m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n \frac{\pi'}{\rho'}\right) \end{aligned}$$

Die Gleichungen 116<sup>m</sup>. und 119. liefern leicht

$$\begin{aligned} (i_1x + i_2y + i_3z) \left(m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n \frac{\pi'}{\rho'}\right) \\ = i_1 \frac{\gamma_1'}{\alpha'} mx + i_2 \frac{\gamma_1'}{\alpha'} my + i_3 \frac{\gamma_1'}{\alpha'} mz + i_1 \frac{\pi'}{\rho'} nx + i_2 \frac{\pi'}{\rho'} ny + i_3 \frac{\pi'}{\rho'} nz \end{aligned}$$

mithin ist

$$\begin{aligned} (w + i_1x + i_2y + i_3z) \left(m \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + n \frac{\pi'}{\rho'}\right) &= mw \frac{\gamma_1'}{\alpha'} + nw \frac{\pi'}{\rho'} \\ &+ i_1 \frac{\gamma_1'}{\alpha'} mx + i_1 \frac{\pi'}{\rho'} nx + i_2 \frac{\gamma_1'}{\alpha'} my + i_2 \frac{\pi'}{\rho'} ny + i_3 \frac{\gamma_1'}{\alpha'} mz \\ &+ i_3 \frac{\pi'}{\rho'} nz \end{aligned} \quad 124.$$

Nimmt man in der Gleichung 123. statt des Winkels  $\vartheta_1$  den Winkel  $\vartheta$ , liegt  $CL$  in der Ebene  $CFD$ , und ist



$$(K; J) = (K; J')^{\frac{c}{a}}$$

so hat man

$$(c: D) \log(K; J) = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{\kappa'}{\gamma_1'} = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{\eta'}{\alpha'} \quad 125.$$

Auf der geraden Linie  $KC$  sei der Anfangspunkt der den Strecken  $\kappa'$ ,  $\alpha'$ ,  $\gamma_1'$  parallelen gleichgerichteten Einheitsstrecke  $\varepsilon'$  gegeben; es ist dann

$$\frac{\kappa'}{\gamma_1'} = \frac{m_0 + m_1 \frac{\varepsilon'}{\gamma_1'}}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 + jm_1}{m_0 + m_1} = p_0 + jp_1, \quad p_0 + p_1 = 1$$

und

$$(c: D) \log(K; J) = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (p_0 + jp_1) \quad 125'$$

Liegen die Anfangspunkte der gleichgerichteten parallelen Einheitsstrecken  $\kappa'$ ,  $\gamma_1'$ ,  $\mu'$ ,  $\nu'$  in einer Ebene und die Anfangspunkte der Strecken  $\mu'$ ,  $\nu'$  nicht auf der geraden Linie  $KC$ , so hat man

$$\frac{\kappa'}{\gamma_1'} = \frac{m_0 + m_1 \frac{\mu'}{\gamma_1'} + m_2 \frac{\nu'}{\gamma_1'}}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_0 + m_1 j' + m_2 j''}{m_0 + m_1 + m_2} = p_0 + p_1 j' + p_2 j''$$

$$(c: D) \log(K; J) = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (p_0 + p_1 j' + p_2 j'') \quad 125''.$$

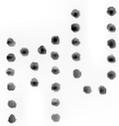
$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

Wenn allgemein die Anfangspunkte der parallelen gleichgerichteten Strecken  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  die Ecken eines Tetraeders sind, so hat man nach den Gleichungen 9., 12.

$$\frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{m_0 + m_1 \frac{\beta'}{\alpha'} + m_2 \frac{\gamma'}{\alpha'} + m_3 \frac{\delta'}{\alpha'}}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_0 + j_1 m_1 + j_2 m_2 + j_3 m_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} = p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_3$$

$$p_n = \frac{m_0 + m_1 + m_2 + m_3}{m_n}$$

und



$$(C; D) \log(K; J) = \frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (p_0 + p_1 j_1 + p_2 j_2 + p_3 j_3) \\ = (w + i_1 x + i_2 y + i_3 z) (p_0 + p_1 j_1 + p_2 j_2 + p_3 j_3) \quad 125''.$$

Für die Producte  $125 - 125''$ . gelten das commutative und distributive Gesetz.

Nach den Gleichungen 28. ist

$$j^2 = 2j - 1, \quad j'^2 = 2j' - 1, \quad j''^2 = 2j'' - 1, \quad j'j'' = j' + j'' - 1 \\ j_n j_m = j_n + j_m - 1, \quad j_1 \cdot j_2 \cdot j_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 2$$

Wenn man im Raume das Coordinatensystem mit den Axen  $AA_1, AB_1, AC_1$  und ein Tetraeder, dessen Ecken die Anfangspunkte der Strecken  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  sind, und ferner eine Strecke  $CD$  gegeben sind, so ist man im Stande jeden beliebigen Quotientvector mit Hilfe des Quotientvectors  $(C; D)$  und den Maasszahlen,  $w, x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3$  auszudrücken. Die geometrische Bedeutung der Zahlen  $w, x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3$  folgt leicht aus den Gleichungen 120., 120', 12. Man kann den Ausdruck

$$(w + i_1 x + i_2 y + i_3 z) (p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_3)$$

wo  $w, x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3$  beliebige Zahlen sind, auf die Form

$$\frac{c}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \frac{\zeta'}{\alpha'}$$

bringen. Man findet

$$\frac{p_0 + j_1 p_1 + j_2 p_2 + j_3 p_3}{p_0 + p_1 + p_2 + p_3} = \frac{\zeta'}{\alpha'}$$

$$w(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = \frac{c}{a} \cos \vartheta_1$$

$$(i_1 x + i_2 y + i_3 z) (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = \frac{c}{a} i \sin \vartheta$$

126.

und hieraus

$$(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

Die Zahl  $\frac{c}{a}$  ist immer positiv zu nehmen.

Der Ausdruck

$$(C; D)^{a+bi+ej+df}$$

stellt einen Quotientvector dar, wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ist; es ist dann

$$\begin{aligned} (C; D)^{a+bi+ej+dj} &= (C; D)^{\frac{c+di}{d} (b+dj)} \\ &= (C; D)^{\frac{b+d}{d} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{b+dj}{b+d}} \end{aligned}$$

$$(b+d)r \cos \varphi = c, \quad (b+d)r \sin \varphi = d$$

Man kann also die Frage aufwerfen: Welche Bedeutung hat der Ausdruck

$$(C; D)^{a+bi+ej+dj}$$

wenn  $a, b, c, d$  beliebige reelle Zahlen sind? Die Hauptsätze der Quaternionentheorie dienen dazu, um diese Frage, die Unverzagt in seinen Untersuchungen offen liess, zu beantworten.

Diese Sätze der Quaternionentheorie heissen:

1. Das Product oder der Quotient zweier parallelen Vektoren ist eine reelle Zahl.

2. Das Product oder der Quotient zweier zu einander senkrechten Vektoren ist ein dritter Vector, der auf der Ebene, die den zwei zu einander senkrechten Vektoren parallel ist, senkrecht steht.

3. Das Product oder der Quotient zweier Vektoren ist eine Quaternion oder nach der Gleichung 110' in Zeichen

$$q = \frac{[AC]}{[AB]} = \frac{b}{a} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \frac{AC}{AB} = \frac{b}{a}, \quad \vartheta = \text{Wkl. } BAC$$

Die Quaternion  $q$  ist ein Operator, der bewirkt, dass ein Vector  $[MN]$  in einer der Ebene  $ABC$  parallelen Ebene durch Multiplication mit  $q$  in einen anderen Vector  $[MR]$  übergeführt wird, der mit  $[MN]$  den Winkel  $\vartheta$  einschliesst und dessen Länge durch die Gleichung

$$MR : MN = b : a$$

gegeben ist. Die Dreiecke  $ACB$  und  $MNR$  sind ähnlich.

Wenn  $MR$  der Strecke  $AC$  gleichgerichtet parallel ist, so ist  $MN$  der Strecke  $AB$  gleichgerichtet parallel. Ist  $b = a$ , so ist die Quaternion ein Drehfactor.

Den beiden ersten Sätzen entsprechen in der Rechnung mit



Quotientvectors die Erklärungen des Products von parallelen Quotientvectors und von Quotientvectors, die denselben Anfangspunkt haben, und dem dritten Satze ist analog der Satz:

„Das Product von zwei Quotientvectors

$$(C; D)^{a+bi} \cdot (C; D)^{(c+di)j} = (C; D)^{a+bi+cj+di} \quad 127.$$

ist ein Operator, der einen Quotientvector

$$(K; J) = (C; D) r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{x + yj}{x + y}$$

$$r = \frac{(x + y)(bc - ad)}{x(d \cos \varphi - c \sin \varphi) - y(b \cos \varphi - a \sin \varphi)} \quad 127'$$

mit dem er multiplicirt wird, in den Quotientvector

$$(U; V) = (C; D) \frac{r}{(x+y)(br-ad)} [cc-ay+(dx-by)i][bc \cos \varphi - a \sin \varphi + (d \cos \varphi - c \sin \varphi)j] \quad 127''.$$

überführt. Es ist  $(C; D)^{a+bi+cj+di}$  ein Drehungs- und Verschiebungsfactor“.

Soll nämlich das Product

$$(C; D)^{a+bi+cj+di} (C; D) r(\cos \varphi + j \sin \varphi) \frac{x + jy}{x + y}$$

$$= (C; D) \frac{a(x+y) + rx \cos \varphi + (b(x+y) + rx \sin \varphi)i + (c(x+y) + ry \cos \varphi)j + (d+y) + ry \sin \varphi}{x+y}$$

einen Quotientvector darstellen, so muss

$$\frac{a(x+y) + rx \cos \varphi}{b(x+y) + rx \sin \varphi} = \frac{c(x+y) + ry \cos \varphi}{d(x+y) + ry \sin \varphi}$$

sein. Hieraus folgt der Wert von  $r$ . Wenn

$$ad - bc = 0, \text{ so ist } r = 0$$

und die Quotienten  $(U, V)$ ,  $(C; D)^{a+bi+cj+di}$  sind identisch. Die Anfangspunkte der beiden Quotientvectors  $(K; J)$  und  $(U; V)$  liegen auf der geraden Linie  $C$ ,  $K$  und zwar ist der Anfangspunkt des Quotientvectors  $(U; V)$  durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
 b \cos \varphi - a \sin \varphi + (d \cos \varphi - c \sin \varphi) \frac{\varepsilon'}{\gamma'} \\
 = \{(b + d) \cos \varphi - (a + c) \sin \varphi\} \frac{\xi'}{\alpha_1}, \quad \frac{\varepsilon'}{\gamma_1} = i
 \end{aligned}$$

gegeben. Die absolute Länge von  $UV$  verhält sich zu der von  $CD$  wie

$$\frac{UV}{CD} = \frac{\{(b + d) \cos \varphi - (a + c) \sin \varphi\} (-1)^n}{x(d \cos \varphi - c \sin \varphi) - y(d \cos \varphi - a \sin \varphi)} \sqrt{(cx - ay)^2 + (dx - by)^2} \quad 128.$$

die Quadratwurzel ist positiv und die Zahl  $n$  muss so gewählt werden, dass die rechte Seite positiv wird. Die grade Linie  $UV$  bildet mit der geraden Linie  $CD$  einen Winkel  $\psi$ , den man mittelst der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}
 cx - ay &= (-1)^n \sqrt{(cx - ay)^2 + (dx - by)^2} \cos \psi \\
 dx - by &= (-1)^n \sqrt{(cx - ay)^2 + (dx - by)^2} \sin \psi
 \end{aligned} \right\} \quad 129.$$

findet. Die gerade Linie  $UV$  liegt in einer Ebene, die den geraden Linien  $KJ$ ,  $CC$  parallel ist oder kürzer  $(U; V)$ ,  $(K; J)$ ,  $(C; D)$  „sind drei einer Ebene parallelen Quotientvectors“.

Ist in der Gleichung 127' der Winkel  $\varphi$  gegeben und lässt man  $\frac{y}{x}$  alle möglichen Werte annehmen, so erhält man eine Reihe von Quotientvectors  $(K; J)$ ,  $(K_1; J_1)$ ,  $(K_2; J_2)$  etc., die parallel sind, und eine Reihe von Quotientvectors  $(U; V)$ ,  $(U_1; V_1)$ ,  $(U_2; V_2)$  etc., die denselben Anfangspunkt haben, mithin entspricht dem Parallelstrahlenbüschel  $KJ$ ,  $K_1 J_1$ ,  $K_2 J_2$  . . . das Strahlenbüschel  $UV$ ,  $UV_1$ ,  $UV_2$ ,  $UV_3$  . . . Wenn  $\frac{y}{x}$  gegeben ist und man dem Winkel  $\varphi$  alle möglichen Werte gibt, so erhält man eine Reihe von Quotientvectors  $(K; J)$ ,  $(K; J^1)$ ,  $(K; J^2)$  . . ., die denselben Anfangspunkt haben, und eine Reihe von Quotientvectors  $(U; V)$ ,  $(U^1; V^1)$ ,  $(U^2; V^2)$ , die parallel sind, mithin entspricht dem Strahlenbüschel  $KJ$ ,  $KJ^1$ ,  $KJ^2$  . . . das Parallelstrahlenbüschel  $UV$ ,  $U^1 V^1$ ,  $U^2 V^2$  . . .

Setzt man  $y = -x$ , so entspricht dem Quotientvector

$$(K \infty; J) = (C; D) \frac{bc - ad}{x} \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{(d + b(\cos \varphi - (a + c) \sin \varphi)) (1 - j)}$$

dessen Anfangspunkt auf  $CK$  im Unendlichen liegt, der Quotientvector

$$(U; V) = (C; D) \frac{(c+a+(d+b)i)x(bc\cos\varphi - a\sin\varphi + (d\cos\varphi - c\sin\varphi)j)}{(d+b)\cos\varphi - (a+c)\sin\varphi}$$

Ist der Quotientvector  $(K; J)$  dem Quotientvector  $(U; V)$  parallel, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dx - by}{cx - ay}$$

also die betr. geraden Linien entsprechen sich selbst, und  $J, V$  liegen im Unendlichen.

Wenn ferner

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b+d}{a+c}$$

ist, so entspricht dem Quotientvector

$$(C; D) \frac{-1}{x+y} \{cx - ay + (dx - by)i\} (1 - j)$$

dessen Anfangspunkt auf  $KC$  im Unendlichen liegt.

Allgemein seien die Quotientvectors

$$\left. \begin{aligned} (P; Q), (R; S) &= (P; Q)_{(w+i_1x+i_2y+i_3z)(p_0+j_1p_1+j_2p_2+j_3p_3)} \\ (M; N) &= (P; Q)_{(w'+i_1x'+i_2y'+i_3z')(p_0'+j_1p_1'+j_2p_2'+j_3p_3')} \end{aligned} \right\} 130.$$

so bestimmt werden, dass das Product

$$(P; Q), (R; S), (M; N)$$

wieder einen Quotientvector darstellt. Es ist dann

$$\frac{wp_n + w'p_n'}{1 + wp_0 + w'p_0'} = \frac{xp_n + x'p_n'}{xp_0 + x'p_0'} = \frac{yp_n + y'p_n'}{yp_0 + y'p_0'} = \frac{zp_n + z'p_n'}{zp_0 + z'p_0'} \quad 131.$$

Hieraus folgt sofort

$$x' = lx, \quad y' = ly, \quad z' = lz \quad 132.$$

Die drei geraden Linien  $PQ, RS, MN$  sind daher ein und derselben Ebene parallel.

Setzt man in die Bedingungsgleichungen

$$p_1' = l'p_1$$

so erhält man die Gleichungen

$$\frac{w' + w'l'}{1 + ll'} = \frac{1 + wp_0 + w_1p_0'}{p_0 + lp_0'} = \frac{wp_2 + w'p_2'}{p_2 + lp_2'} = \frac{wp_3 + w'p_3'}{p_3 + lp_3'}$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} p_2' &= l'p_2, & p_3' &= l'p_3, & p_1' &= l'p_1 \\ w' &= lw + \frac{1 + ll'}{l'p_0 - p_0'} \end{aligned} \right\} 133.$$

Die Punkte  $P, R, M$  liegen mithin in einer geraden Linie.

Nimmt man an, dass

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = p_0' + p_1' + p_2' + p_3' = 1$$

ist, so ist

$$w' = lw + \frac{1 + ll'}{l' - 1}, \quad p_0' = 1 - l' + l'p_0 \quad 133'.$$

Wenn die Quotientvectors  $(P; Q), (R; S)$  durch  $(C; S)$  gegeben sind, also ist

$$\left. \begin{aligned} (P; Q) &= (C; D)(w_1 + i_1x_1 + i_2y_1 + i_3z_1)(r_0 + j_1r_1 + j_2r_2 + j_3r_3) \\ (R; S) &= (C; D)(w_1' + i_1x_1' + i_2y_1' + i_3z_1')(r_0' + j_1r_1' + j_2r_2' + j_3r_3') \end{aligned} \right\} 134.$$

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 = r_0' + r_1' + r_2' + r_3' = 1$$

so kann man die Zahlen  $w, x, y, z; p_0, p_1, p_2, p_3$  derart eindeutig bestimmen, dass ist

$$\left. \begin{aligned} w_1' + i_1x_1' + i_2y_1' + i_3z_1' &= (w_1 + i_1x_1 + i_2y_1 + i_3z_1)(w + i_1x + i_2y + i_3z) \\ r_0' + j_1r_1' + j_2r_2' + j_3r_3' &= (r_0 + j_1r_1 + j_2r_2 + j_3r_3)(p_0 + j_1p_1 + j_2p_2 + j_3p_3) \end{aligned} \right\} 134'.$$

Man findet

$$\left. \begin{aligned} w_1w - x_1x - y_1y - z_1z &= w_1', & r_0p_0 - (p_1 + p_2 + p_3)(r_1 + r_2 + r_3) &= r_0' \\ x_1w + w_1x - z_1y + y_1z &= x_1', & r_1p_0 + (1 + r_1)p_1 + r_1p_2 + r_1p_3 &= r_1' \\ y_1w + z_1x + w_1y - x_1z &= y_1', & r_2p_0 + r_2p_1 + (1 + r_2)p_2 + r_2p_3 &= r_2' \\ z_1w - y_1x + x_1y + w_1z &= z_1', & r_3p_0 + r_3p_1 + r_3p_2 + (1 + r_3)p_3 &= r_3' \end{aligned} \right\} 134''.$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
 N. \quad w &= w_1'w_1 + x_1'x_2 + y_1'y_1 + z_1'z_1, & p_0 &= r_0' - r_0 + 1, \\
 & & p_n &= r_n' - r_n, \quad n=1, 2, 3 \\
 N. \quad x &= x_1' - w_1'x_1 - z_1'y_1 + y_1'z_1', & p_0 + p_1p_2 + p_3 &= 1 \\
 N. \quad y &= y_1'w_1 + z_1'x_1 - w_1'y_1 - x_1'z_1 \\
 N. \quad z &= z_1'w_1 - y_1'x_1 + w_1'z_1 \\
 N &= w_1'^2 + x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} N. \quad w \\ N. \quad x \\ N. \quad y \\ N. \quad z \\ N \end{aligned}} \right\} 134''$$

Der Ausdruck von  $(R; S)$  ist mithin auf die Form 130. gebracht.

Das Product der drei Quotientvectoren  $(P; Q)$ ,  $(R; S)$ ,  $(M; N)$  ist

135.

$$(U; V) = (P; Q) \frac{\{w + w'l + (1+l')(i_1x + i_2y + i_3z)\} (p_0 + p_0'l + (1+l')(j_1p_1 + j_2p_2 + j_3p_3))}{1+l'}$$

Aus dieser Gleichung erhält man leicht die absolute Länge von  $UV$  und den Winkel, den  $UV$  mit  $PQ$  einschliesst.

Wenn der Punkt  $M$  gegeben ist, dann ist  $l'$  bekannt und man kann  $l$  so bestimmen, dass  $MN$  eine gegebene Länge hat, oder dass  $MN$  mit  $PQ$  einen gegebenen Winkel einschliesst. Wenn  $l$  gegeben ist, so kann man  $l'$  so bestimmen, dass  $MN$  eine gegebene Länge hat oder dass  $MN$  mit  $PQ$  einen gegebenen Winkel einschliesst, oder dass der Punkt  $M$  in einen gegebenen Punkt der geraden Linie  $PQ$  fällt.

Wenn der Punkt  $M$  gegeben ist, so beschreibt der Punkt  $N$  eine gerade Linie, oder wenn in den Gleichungen 127. das Verhältniss  $\frac{x}{y}$  gegeben ist, so ist der Punkt  $K$  bestimmt und der Punkt  $J$  liegt auf einer festen geraden Linie. Nach den Gleichungen 127' ist

$$(K; J) = (C; D) \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \frac{x+yj}{x+y}}{r}$$

$$(K; J') = (C; D) \frac{r_1(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \frac{x+yj}{x+y}}{r_1}$$

und

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\cos\varphi' (dx - by) - \sin\varphi' (cx - ay)}{\cos\varphi (dx - by) - \sin\varphi (cx - ay)}$$

Es sei  $KJ^0$ , parallel  $CD$ , die positive Axe der  $x$  eines rechtwinkligen Coordinatensystems; es sind die Coordinaten von  $J$

$$m = CD \cdot r \cos \varphi, \quad n = CD \cdot r \sin \varphi$$

und die Coordinaten von  $J^1$

$$m_1 = CD \cdot r_1 \cos \varphi', \quad n_1 = CD \cdot r_1 \sin \varphi'$$

mithin

$$\frac{m - m_1}{n - n_1} = \frac{dx - by}{cx - ay}$$

Dies ist die Gleichung der geraden Linie, auf der die Punkte  $J^1$ ,  $J^2$ ,  $J^3$  liegen.

Die gerade Linie  $J^1, J^2, \dots$  bildet mit der positiven Axe der  $x$  einen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dx - by}{cx - ay}$$

bestimmten Winkel und ist der sich selbst entsprechenden geraden Linie  $KJ^\infty$  parallel. Führt man in den Gleichungen 127', 127'' den Winkel  $\varphi$  ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} (K; J) = (C; D) & \quad \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\sin(\psi - \varphi)} [b \cos \psi - a \sin \psi + (d \cos \psi - c \sin \psi)j] \\ (U; V) = (C; D) & \quad \frac{\cos \psi + i \sin \psi}{\sin(\psi - \varphi)} [b \cos \varphi - a \sin \varphi + (d \cos \varphi - e \sin \varphi)j] \end{aligned} \right\} 127'''.$$

Setzt man noch

$$a + bi = r'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta'), \quad c + di = r''(\cos \vartheta'' + i \sin \vartheta'')$$

so hat man

$$\left. \begin{aligned} (K; J) = (C; D) & \quad \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\sin(\psi - \varphi)} [r' \sin(\vartheta' - \psi) + r'' j \sin(\vartheta'' - \psi)] \\ (U; V) = (C; D) & \quad \frac{\cos \psi + i \sin \psi}{\sin(\psi - \varphi)} [r' \sin(\vartheta' - \varphi) + r'' j \sin(\vartheta'' - \varphi)] \end{aligned} \right\} 127''''.$$

Vertauscht man in dem Ausdruck für  $(K; J)^{-1}$  die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$ , so erhält man die rechte Seite der letzten Gleichung 127''''.

Wenn das Product von  $n$  Quotientenvektoren oder die Form

$$(C; D) \quad a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + j_1(a_1 + \sum_1^3 b_n i_n) + j_2(a_2 + \sum_1^3 c_n i_n) + j_3(a_3 + \sum_1^3 d_n i_n) = f$$

gegeben ist, so kann man auf verschiedene Arten drei Quotientvectors so bestimmen, dass das Product dieser  $n+3$  Quotientvectors wieder ein Quotientvector ist. Das Product von  $n$  Quotientvectors ist gleich dem Producte der vier Quotientvectors

$$(C; D) \quad a_0 + \sum_1^3 a_n i_n \cdot (C; D) \quad j_1(a_1 + \sum_1^3 b_n i_n) \cdot (C; D) \quad j_2(a_2 + \sum_1^3 c_n i_n) \cdot (C; D) \quad j_3(a_3 + \sum_1^3 d_n i_n)$$

oder gleich dem Producte der vier Quotientvectors

$$(C; D) \quad a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3 \cdot (C; D) \quad i_1(a_1 + b_1 i_1 + c_1 j_2 + d_1 j_3) \cdot (C; D) \quad i_2(a_2 + b_2 j_1 + c_2 j_2 + d_2 j_3) \cdot (C; D) \quad i_3(a_3 + b_3 j_1 + c_3 j_2 + d_3 j_3)$$

Zu je zwei dieser Quotientvectors kann man einen Quotientvector so bestimmen, dass das Product dieser drei Quotientvectors wieder ein Quotientvector ist, und ferner kann man zu drei Quotientvectors immer zwei Quotientvectors so bestimmen, dass das Product dieser fünf Quotientvectors auch ein Quotientvector ist.

Aus den Regeln über die Multiplication von Quotientvectors folgen leicht die über die Quotienten von Quotientvectors.

**Die Quaternionen Hamilton's und Unverzagt's, die Unverzagt'schen und die allgemeinen Biquaternionen als Zahlen.**

Die in der Ueberschrift genannten Grössen haben die Formen:

- 1)  $a_0 + a_1 i$ , 2)  $a_0 + a_1 j$ , 3)  $a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2$ , 4)  $a_0 + a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$ , 5)  $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ , 6)  $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 i j$ , 7)  $a_0 + a_2 i + a_2 j_1 + a_3 j_2 + a_4 i j_1 + a_5 j_2$ , 8)  $a_0 + a_1 i + a_2 j_1 + a_3 j_2 + a_4 j_3 + a_5 j_1 + a_6 j_2 i + a_7 j_3 i$ , 9)  $a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + a_n j + j \sum_1^3 b_n i_n$ , 10)  $a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + a_4 j_1 + a_5 j_2 + a_6 j_1 i_1 + a_7 j_2 i_1 + a_8 j_1 i_2 + a_9 j_2 i_2 + a_{10} j_1 i_3 + a_{11} j_2 i_3$ , 11)  $a_0 + \sum_1^3 a_n i_n + a_4 j_1 + a_5 j_2 + a_6 j_3 + a_7 j_1 i_4 + a_8 j_2 i_1 + a_9 j_0 i_1 + a_{10} j_1 i_2 + a_{11} j_2 i + a_{12} j_3 i_2 + a_{13} j_1 i_3 + a_{14} j_2 i_3 + a_{15} i_6 i_3$ .

Die Factoren  $a_m, b_n$  sind reelle oder auch gewöhnliche complexe Zahlen.

Diese Formen kann man als complexe Zahlen ansehen. Ein System<sup>1)</sup> aller aus denselben Grundzahlen  $e_n$  — Einheiten — linear abgeleiteten extensiven Grössen nennt man unter folgenden Bedingungen ein System von complexen Zahlen:

1) Das Product  $e_i e_k$  von irgend zweien der Grundzahlen  $e_i$  und  $e_k$  muss wieder eine Zahl des Systems  $= \sum e_{i,k} e_s$  sein.

2) Das associative Gesetz der Multiplication

$$(ab)c = a(bc)$$

muss gelten.

3) In dem System muss eine Grösse  $a^0$  vorhanden sein, die den beiden Gleichungen

$$a^0 x = x, \quad x a^0 = x$$

unabhängig von  $x$  genügt.

Diese Forderungen erfüllen die Formeln von 1—11.

Mit Vorteil bedient man sich, um die Multiplicationsregeln aufzustellen, der sog. Multiplicationstafeln. So ist z. B. die Multiplicationstafel für die Hamilton'schen Quaternionen, wenn man

$$e_0 = 1, \quad e_1 = i_1, \quad e_2 = i_2, \quad e_3 = i_3$$

setzt:

	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-e_0$	$e_1$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$

In der Horizontalreihe  $e_n$  und in der Verticalreihe  $e_p$  steht der Wert des Products  $e_n e_p$  z. B.

$$e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_1 = e_3$$

Setzt man in den Formen 1—11

$$e_0 = 1, \quad 1) e_1 = i, \quad 2) e_1 = j-1, \quad 3) e_1 = j_1-1, \quad e_2 = j_2-1, \quad 4) e_n = j_n-1, \quad n = 1, 2, 3, \quad 5) e_n = i_n, \quad 1, 2, 3, \quad 6) e_1 = i, \quad e_2 = j-1,$$

1) E. Study, Ueber Systeme von complexen Zahlen, Nachricht. d. Königl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen. 1894, pag. 237 sq

$e_3 = e_1 e_2$ , 7)  $e_1 = e_1, e_2 = j_1 - 1, e_3 = j_2 - 1$ , 8)  $e_1 e_2 = e_4, e_1 e_3 = e_5$ ,  
 9)  $e_1 = i_1, e_2 = i_2, e_3 = i_3, e_4 = j - 1, e_5 = e_4 e_1, e_6 = e_4 e_2, e_4 = e_4 e_2$ ,  
 $e_7 = e_4 e_3$ , 10)  $e_1 = i_1, e_2 = i_2, e_3 = i_3, e_4 = j_1 - 1, e_5 = j_2 - 1$ ,  
 $e_6 = e_4 e_1, e_7 = e_5 e_1, e_8 = e_4 e_2, e_9 = e_5 e_2, e_{10} = e_4 e_3, e_{11} = e_5 e_3$ , 11)  
 $e_1 = i_1, e_2 = i_2, e_3 = i_3, e_4 = j_1 - 1, e_5 = j_2 - 1, e_6 = j_3 - 1, e_7$   
 $= e_4 e_1, e_8 = e_5 e_1, e_9 = e_6 e_1, e_{10} = e_4 e_2, e_{11} = e_5 e_2, e_{12} = e_6 e_2$ ,  
 $e_{13} = e_4 e_3, e_{14} = e_5 e_3, e_{15} = e_6 e_3$ .

ein, so erhält man folgende Multiplicationstabellen

1)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>-e_0</math></td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_1$	$e_0$	$-e_0$
	$e_0$	$e_1$								
$e_0$	$e_0$	$e_1$								
$e_1$	$e_0$	$-e_0$								

2)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_0</math></td><td>0</td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_1$	$e_0$	0
	$e_0$	$e_1$								
$e_0$	$e_0$	$e_1$								
$e_1$	$e_0$	0								

3)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_1$	$e_1$	0	0	$e_2$	$e_2$	0	0
	$e_0$	$e_1$	$e_2$														
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$														
$e_1$	$e_1$	0	0														
$e_2$	$e_2$	0	0														

4)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_1$	0	0	0	$e_2$	$e_2$	0	0	0	$e_3$	$e_3$	0	0	0
	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$																						
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$																						
$e_1$	$e_1$	0	0	0																						
$e_2$	$e_2$	0	0	0																						
$e_3$	$e_3$	0	0	0																						

5)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>-e_0</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_2</math></td></tr> <tr><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_3</math></td><td><math>-e_0</math></td><td><math>e_1</math></td></tr> <tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_1</math></td><td><math>-e_0</math></td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-e_0$	$e_1$	$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$
	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$																						
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$																						
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$																						
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-e_0$	$e_1$																						
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$																						

6)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>-e_0</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_2</math></td></tr> <tr><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_2$	$e_2$	$e_3$	0	0	$e_3$	$e_3$	$-e_2$	0	0
	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$																						
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$																						
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$																						
$e_2$	$e_2$	$e_3$	0	0																						
$e_3$	$e_3$	$-e_2$	0	0																						

7)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>e_5</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>e_5</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>-e_0</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>-e_2</math></td><td><math>-e_3</math></td></tr> <tr><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_4</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_5</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_4</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_5</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>-e_3</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_0$	$e_0$	$e_2$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_4$	$e_5$	$-e_2$	$-e_3$	$e_2$	$e_2$	$e_4$	0	0	0	0	$e_3$	$e_3$	$e_5$	0	0	0	0	$e_4$	$e_4$	$-e_2$	0	0	0	0	$e_5$	$e_5$	$-e_3$	0	0	0	0
	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$																																												
$e_0$	$e_0$	$e_2$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$																																												
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_4$	$e_5$	$-e_2$	$-e_3$																																												
$e_2$	$e_2$	$e_4$	0	0	0	0																																												
$e_3$	$e_3$	$e_5$	0	0	0	0																																												
$e_4$	$e_4$	$-e_2$	0	0	0	0																																												
$e_5$	$e_5$	$-e_3$	0	0	0	0																																												

9)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>e_7</math></td></tr> <tr><td><math>e_0</math></td><td><math>e_0</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>e_7</math></td></tr> <tr><td><math>e_1</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>-e_0</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_2</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>-e_4</math></td><td><math>e_7</math></td><td><math>-e_6</math></td></tr> <tr><td><math>e_2</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_3</math></td><td><math>-e_5</math></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>-e_7</math></td><td><math>-e_4</math></td><td><math>e_5</math></td></tr> <tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_1</math></td><td><math>-e_0</math></td><td><math>e_7</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>-e_5</math></td><td><math>-e_4</math></td></tr> <tr><td><math>e_4</math></td><td><math>e_4</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>e_7</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_5</math></td><td><math>e_5</math></td><td><math>-e_4</math></td><td><math>e_7</math></td><td><math>-e_6</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_6</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>-e_7</math></td><td><math>-e_4</math></td><td><math>e_5</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td><math>e_7</math></td><td><math>e_7</math></td><td><math>e_6</math></td><td><math>-e_5</math></td><td><math>-e_4</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$e_7$	$-e_6$	$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-e_5$	$e_1$	$e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$e_5$	$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$	$e_7$	$e_6$	$-e_5$	$-e_4$	$e_4$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	0	0	0	0	$e_5$	$e_5$	$-e_4$	$e_7$	$-e_6$	0	0	0	0	$e_6$	$e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$e_5$	0	0	0	0	$e_7$	$e_7$	$e_6$	$-e_5$	$-e_4$	0	0	0	0
	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$																																																																										
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$																																																																										
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$e_7$	$-e_6$																																																																										
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-e_5$	$e_1$	$e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$e_5$																																																																										
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$	$e_7$	$e_6$	$-e_5$	$-e_4$																																																																										
$e_4$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	0	0	0	0																																																																										
$e_5$	$e_5$	$-e_4$	$e_7$	$-e_6$	0	0	0	0																																																																										
$e_6$	$e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$e_5$	0	0	0	0																																																																										
$e_7$	$e_7$	$e_6$	$-e_5$	$-e_4$	0	0	0	0																																																																										

10)

	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$
$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_6$	$e_7$	$-e_4$	$-e_5$	$e_{10}$	$e_{11}$	$-e_8$	$-e_7$	$e_6$
$e_2$	$-e_3$	$-e_0$	$e_1$	$e_3$	$e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	$-e_5$	$e_6$	$-e_7$	$-e_8$
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_3$	$e_9$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_8$
$e_4$	$e_6$	$e_8$	$e_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_5$	$e_7$	$e_9$	$e_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_6$	$-e_4$	$e_{10}$	$-e_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_7$	$-e_5$	$e_{11}$	$-e_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_8$	$-e_{10}$	$-e_4$	$e_6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_9$	$-e_{11}$	$-e_5$	$e_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{10}$	$e_8$	$-e_6$	$-e_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{11}$	$e_9$	$-e_7$	$-e_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

11)

	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$
$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_6$	$e_7$	$-e_4$	$-e_5$	$e_{10}$	$e_{11}$	$-e_8$	$-e_7$	$e_6$	$-e_7$	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$
$e_2$	$-e_3$	$-e_0$	$e_1$	$e_3$	$e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	$-e_5$	$e_6$	$-e_7$	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_3$	$e_9$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$
$e_4$	$e_6$	$e_8$	$e_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_5$	$e_7$	$e_9$	$e_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_6$	$-e_4$	$e_{10}$	$-e_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_7$	$-e_5$	$e_{11}$	$-e_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_8$	$-e_{10}$	$-e_4$	$e_6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_9$	$-e_{11}$	$-e_5$	$e_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{10}$	$e_8$	$-e_6$	$-e_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{11}$	$e_9$	$-e_7$	$-e_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{12}$	$e_6$	$-e_7$	$-e_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{13}$	$e_7$	$-e_8$	$-e_6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{14}$	$e_8$	$-e_9$	$-e_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{15}$	$e_9$	$-e_{10}$	$-e_8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Multiplicationstafel der Form 8) folgt leicht aus der Tafel der Form 6) bzw. 7).

Die Multiplicationstafeln 1) — 4), 6) — 8) ändern sich nicht, wenn man die Horizontalreihen und die Verticalreihen vertauscht. Die Multiplication dieser Systeme ist commutativ. Vertauscht man in den Tafeln 5), 9), 10), 11) die Horizontal- und Verticalreihen, so erhält man Multiplicationstafeln die aus den gegebenen Tafeln durch folgende Substitutionen:

5)  $\bar{e}_0 = e_0, \bar{e}_n = -e_n, n = 1, 2, 3,$  9)  $\bar{e}_0 = e_0, \bar{e}_n = -e_n,$   
 $n = 1, 2, 3, \bar{e}_4 = -e_4, \bar{e}_p = -e_p, p = 5, 6, 7,$  10)  $\bar{e}_0 = e_0, \bar{e}_n = -e_n,$   
 $n = 1, 2, 3, \bar{e}_4 = e_4, \bar{e}_5 = e_5, \bar{e}_p = -e_p, p = 6, 7, 8, 9, 10, 11.$  11)  
 $\bar{e}_0 = e_0, \bar{e}_n = -e_n, n = 1, 2, 3, \bar{e}_r = e_r, r = 4, 5, 6, \bar{e}_p = -e_p$   
 $p = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$

hervorgehen, wenn man in den Tafeln die übersetzten Striche fortlässt. Durch diese Substitutionen geht das System mit den Grundzahlen  $e_n$  in sein reciprokes System mit den Grundzahlen  $\bar{e}_n$  über. Die Systeme 1) — 4), 6) — 8) sind zu sich selbst reciprok.

#### Z u s a t z.

Jede complexe Zahl von den Formen 1) — 11) kann man mit Hilfe von Punkten, Strecken: Vektoren, wie man sagt, darstellen.

Ist z. B.  $i[MN]$  der um einen rechten Winkel gedrehte Vector  $[MN]$ , so stellt  $(a_0 + a_1 i)[MN]$  einen Vector der Ebene der Vektoren  $[MN]$  und  $i[MN]$  dar; derselbe ist gleich der Summe der Vektoren  $a_0[MN]$  und  $a_1 i[MN]$ . Man kann aber auch  $(M; N)^i$  als einen Quotientvector auffassen, dessen Anfangspunkt  $M$  und dessen Endpunkt  $R$  eine gerade Linie festlegen, die mit  $MN$  einen rechten Winkel einschliesst und dieselbe Länge wie  $MN$  hat; es ist dann

$$(M; N)^{a_0 + a_1 i} = (M; S)$$

ebenfalls ein Quotientvector und zwar ist der Vector  $[MS]$  gleich der Summe der Vektoren  $a_0[MN]$  und  $a_1[MR]$ .

Wenn man in der Form  $a_0 + a_1 j$  die Grösse  $j$  als Repräsentant des Quotienten von zwei parallelen Einheitsstrecken  $\frac{\beta'}{\alpha'}$  nimmt, so ist  $a_0 + a_1 \frac{\beta'}{\alpha'}$  der Stellvertreter des Quotienten der parallelen Strecken

$a_0 \alpha' + a_1 \beta'$  und  $\alpha'$ . Ist  $j\alpha'$  die um eine Länge  $AB$  parallel verschobene Strecke  $\beta'$ , so stellt  $(a_0 + a_1 j)\alpha'$  eine Strecke dar, die gleich der Summe der parallelen Strecken  $a_0 \alpha'$  und  $a_1 j\alpha'$  ist. Nimmt man an, dass  $(M; N)^j$  der um eine Länge  $AB$  parallel verschobene Quotientvector  $(M; N)$  ist, so ist  $(M; N)^{a_0 + a_1 j}$  gleich dem Product der Quotientvectoren  $(M; N)^{a_0}$ ,  $(M; N)^{a_1 j}$  und nach den Gleichungen 93) wieder ein Quotientvector.

Darmstadt, im Januar 1896.

## IV.

## Ueber Radical-Kreise.

Von

**Juan J. Durán Loriga,**  
Spanischem Artillerie-Major.

---

Es ist bekannt, dass der geometrische Ort von denjenigen Punkten, deren Potenzen mit Bezug auf zwei feste Kreise das Verhältniss  $m/n$  bewahren, ein Kreis ist; setzt man

$$m = -n$$

so ist diese Linie zu gleicher Zeit der Ort derjenigen Punkte, welche mit Bezug auf zwei andere Kreise gleiche Potenzen und verschiedene Vorzeichen haben; der Analogie wegen wollen wir diese Kreise „Radical-Kreise“<sup>1)</sup> der ersterwähnten nennen; mit Leichtigkeit lässt sich das Centrum und der Radius dieser Kreise bestimmen.

Bezeichnet man die Potenzen eines Punktes  $P$  auf der Ebene mit Bezug auf die Kreise  $O$  und  $O'$  mit  $P_0$  und  $P_0'$  (Fig. 1.), so ist

$$P_0 = -P_0'$$

oder was dasselbe ist, wenn man mit  $l$  und  $l'$  die Abstände des Punktes  $P$  von den Centren und mit  $d$  den Abstand  $OO'$  bezeichnet so erhält man

---

1) Manche Schriftsteller, besonders die englischen, nennen „Radicalcircle“ einen Kreis, welcher rechtwinklig drei andre Kreise schneidet; passender scheint es uns indessen, hierfür die Bezeichnung „orthotomischer Kreis“ zu wählen und für die gegenwärtige Abhandlung die Ueberschrift „Radical-Kreis“ beizubehalten.

$$l^2 - R^2 = R'^2 - l'^2 \quad \text{d. h.} \quad l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2$$

Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist folglich die Mitte von  $OO'$  und sein Radius

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

Um einen Radical-Kreis entstehen zu lassen, ist erforderlich

$$d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Kreise sich berühren (ausserhalb oder innerhalb), wenn sie sich schneiden, oder wenn sie sich einschliessen; wenn sie sich dagegen ausschliessen, kann je nach Umständen ein Radical-Kreis entstehen oder nicht.

Unter der Voraussetzung, dass die Kreise sich schneiden, muss der Radicalkreis notwendigerweise durch die zwei Schnittpunkte (weil diese die Potenz null haben) gehen und lässt sich unmittelbar construiren. Wenn sie sich ausserhalb berühren, wird der Radical-Kreis den grösseren Kreis innerhalb berühren und zwar in dem Berührungspunkte der gegebenen Kreise (da dieser Punkt die Potenz null mit Bezug auf beide Kreise hat), und da sein Centrum in jedem Falle die Mitte der Linie der Centren ist, ist seine Construction gleichfalls unmittelbar gegeben. Will man seinen Radius numerisch bestimmen, ohne auf die eben erwähnten Erwägungen einzugehen, so setzt man

$$d = R + R'$$

in dem Werte von  $\rho$  und erhält demgemäss

$$\rho = \frac{1}{2}(R - R')$$

Wenn die Kreise sich innerhalb berühren, so wird der Radical-Kreis gleichfalls die gegebenen Kreise berühren, und sein Radius ist

$$\rho = \frac{1}{2}(R + R')$$

Wenn die Kreise concentrisch sind, so ist es auch mit Bezug auf sie der Radical-Kreis, und man erhält seinen Radius, wenn man in den Wert von  $\rho$  setzt  $d = 0$ , so dass sich ergibt

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

Für die Construction des Radical-Kreises von zwei Kreisen, die sich ausschliessen (beim Vorhandensein eines solchen Radical-Kreises), oder zwei solchen, die sich einschliessen, sind nachstehende Betrachtungen von Wert. Es seien drei Kreise

0, 0' und 0'' gegeben, deren Radical-Kreise wir mit  $\pi_{00'}$  für 0 und 0' und  $\pi_{00''}$ , für 0 und 0'' bezeichnen wollen; wenn diese Kreise sich schneiden, so ist in den Durchschnittspunkten

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = - P_0' \\ P_0 = - P_0'' \end{array} \right. \text{ folglich } P_0' = P_0''$$

d. h. die Radical-Axe von 0' und 0'' ist zugleich die von  $\pi_{00'}$  und  $\pi_{00''}$ . Wenn die Radical-Kreise sich nicht schneiden, ist der geometrische Beweis gleichfalls leicht, und noch einfacher ist der analytische Beweis, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, ist es leicht, den Radical-Kreis von zwei Kreisen, die sich ausschliessen (beim Vorhandensein eines solchen Radical-Kreises) und zwei solchen, die sich einschliessen 0 und 0' zu finden. Man schneidet beide Kreise durch einen dritten 0'', bestimmt den Radical Kreis von 0 und 0'', sowie die Radical-Axe von 0' und 0'' und erhält so einen oder zwei Punkte des zu bestimmenden Kreises, dessen Centrum bekannt ist. Der Kreis 0'' muss richtig gewählt werden, damit die Radical-Axe und der Radicalkreis sich schneiden. Für den Fall, dass die gegebenen Kreise sich ausschliessen (und dies ist der einzige Fall, wo ein Radical-Kreis unter Umständen nicht existiren kann) kann man vermöge der nachfolgenden Construction ermitteln, ob der Radical-Kreis existirt. Man errichtet auf dem Ende des Radius OA (Fig. 1.) die Perpendicularäre AB gleich dem Radius R' des anderen Kreises, verbindet O mit B, zieht die Perpendicularäre

$$BC = OB$$

und beschreibt mit dem Radius OC einen Kreis: wenn dieser Kreis das Centrum 0' einschliesst, ist der Radical-Kreis vorhanden. Die Einfachheit dieser Construction macht weitere Erörterungen überflüssig.

Wenn zwei Kreise orthogonal sind, so erhellt, dass der Radical-Kreis durch ihre Centren geht, wie sich auch aus dem Werte von  $\rho$  ergibt; denn wenn

$$R^2 + R'^2 = OO'^2, \text{ so ist } \rho = \frac{1}{2}OO'$$

Es ist auch ersichtlich, dass die umgekehrte Schlussfolgerung leicht zu ziehen ist.

Die Betrachtungen über Radical-Kreise führen unmittelbar zur Lösung des nachfolgenden Problems.

Zwei Kreise berühren sich beispielsweise innerhalb  $O$  und  $O'$  (Fig. 2.) mit den Radien  $R$  und  $R'$ ; durch den Berührungspunkt  $p$  zieht man Secanten z. B.  $pam$ , welche man im entgegengesetzten Sinne verlängert

$$am' = am$$

Welches ist der geometrische Ort des Punktes  $m'$ ?

Man zieht den Kreis  $O''$ , der als Radical-Kreis  $O'$  hat mit Bezug auf  $O$ ; dann hat man als absoluten Wert

$$ap \cdot am = ap \cdot am'$$

und deshalb

$$am' = am$$

der gesuchte Ort ist folglich der Kreis  $O''$ ; um seinen Radius  $x$  zu bestimmen, wollen wir bemerken, dass

$$R' = \frac{1}{2}(R - x)$$

woraus sich ergibt

$$x = R - 2R'$$

Der gefundene Kreis berührt den Kreis  $O$  ausser- oder innerhalb, je nachdem  $R - 2R' \gtrless 0$ . Wenn der Kreis  $O'$  durch den Punkt  $O$  geht, so wird der geometrische Ort auf den Punkt  $p$  beschränkt, wie ersichtlich ist.

Hat man drei Kreise  $O$ ,  $O'$  und  $O''$ , und bestimmt man z. B. die Radical-Kreise von zwei Gruppen  $OO'$  und  $OO''$ , so ist, wie oben erwähnt, die Radical-Axe dieser Radical-Kreise dieselbe wie die der Kreise der dritten Gruppe. Hiernach lässt sich mit Leichtigkeit beweisen, dass die Kreise, welche über den Medianen eines Dreiecks als Durchmesser beschrieben sind, paarweise die Höhen des erwähnten Dreiecks zu Radical-Axen haben. Wenn man über den Seiten eines Dreiecks als Durchmesser Kreise beschreibt, so beobachtet man in der Tat, dass die Radical-Kreise derselben die über den Medianen beschriebenen sind (so z. B. ist der Radical-Kreis, der den um  $b$  und  $c$  beschriebenen Kreisen entspricht, derjenige, der als Durchmesser die der Seite  $a$  entsprechende Mediale hat); dementsprechend müssen also die Radical-Axen dieser letzt-erwähnten Radical-Kreise dieselben sein wie diejenigen, die den ersterwähnten Kreisen entsprechen, d. h. sie müssen die Höhen des Dreiecks sein. Man hat also sechs Kreise, die als gemeinsames Radical-Centrum das Orthocentrum des gegebenen Dreiecks haben.

Betrachtet man jetzt die Kreise, die um die Mitten der Dreiecks-Seiten als Centren geschlagen sind mit einem Radius, der den

entsprechenden Medianen gleich ist, — Kreise, die wir Potential-Kreise genannt haben aus gewissen Gründen (vergl. unsere Note in „Progreso Matematico“, Bd. V, Seite 7<sub>0</sub>) — so ist ersichtlich, dass die erwähnten Kreise dieselben sind, wie die, die man beschreibt, wenn man als Durchmesser die Medianen des anticomplementären Dreiecks nimmt; aber andererseits, entsprechend dem vorher Ausgeführten, sind diese Kreise die Radicalen der über den Seiten des letzteren Dreiecks beschriebenen: folglich kann man sagen, „dass die Kreise, die um die Eckpunkte eines Dreiecks als Centren beschrieben werden mit Radien, die den entgegengesetzten Seiten gleich sind, zu Radical-Kreisen die Potential-Kreise dieses Dreiecks haben, und dass folglich ihr Radical-Centrum das Orthocentrum des anticomplementären Dreiecks ist.“

Wir haben also eine zweite Gruppe von sechs Kreisen, welche dasselbe Radical-Centrum besitzen.

Wenn zwei Kreise orthogonal sind, so hat, wie erwähnt, der Radical-Kreis als Durchmesser die Linie der Centren, und da der Longchamp'sche Kreis orthotomisch ist zu denjenigen, welche um die Endpunkte eines Dreiecks mit den entgegengesetzten Seiten als Radien beschrieben werden, so ergibt sich, dass diejenigen Kreise, deren Durchmesser die Geraden sind, welche die Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Orthocentrum des anticomplementären Dreiecks verbinden, die Radicalen des Longchamp'schen Kreises sind und der oben erwähnten drei anderen Kreise.

Dasselbe Kriterium kann auch dazu dienen, die Radical-Kreise einiger andern Kreise des Dreiecks zu finden, unbeschadet des Umstandes, dass man in jedem Falle die analytische Geometrie zu Hilfe nehmen kann; es ist in der Tat ersichtlich, dass, wenn

$$C = 0 \quad \text{und} \quad C' = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise sind, die des Radical-Kreises

$$C + C' = 0$$

sein muss, möge es sich um cartesianische oder trilineare Coordinaten handeln; so ist der Radical-Kreis der Kreise, die durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0$$

dargestellt werden, der folgende:

$$x^2 + y^2 + (A + A')x + (B + B')y + \frac{1}{2}(C + C') = 0$$

und wenn man insbesondere als Axe der  $X$  die Linie der Centren nimmt, und einer dieser Kreise sein Centrum in dem Coordinatenursprung hat (ein rechtwinkliges System angenommen); so ist der Radical-Kreis

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - \alpha^2}{4}$$

ein Resultat, welches unsere früheren Ausführungen bekräftigt, nämlich dass die Distanz der Centren kleiner sein muss als  $\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$ , damit der Radical-Kreis existirt. Wenn die Distanz  $\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$  ist, so beschränkt sich der Kreis auf einen Punkt, welcher auf der Linie der Centren liegt, und zwar innerhalb des Kreises mit dem grösseren Durchmesser und in einer Distanz von seinem Centrum, die der vorher erwähnten radicalen Grösse gleich ist, dividirt durch zwei.

Wenn es sich um barycentrische Coordinaten handelt, und die gegebenen Kreise sind

$$\Sigma \alpha x \Sigma u \alpha - \Sigma \alpha^2 \beta y = 0$$

$$\Sigma \alpha x \Sigma u' \alpha - \Sigma \alpha^2 \beta z = 0$$

so ist der Radical-Kreis

$$\Sigma \alpha \Sigma (u + u') \alpha - 2 \Sigma \alpha^2 \beta y = 0$$

Es ist sehr leicht, analytisch eine Behauptung zu beweisen, wie wir sie oben aufgestellt haben, nämlich dass, wenn man drei Kreise  $O$ ,  $O'$  und  $O''$  hat und sie paarweise gruppirt, die Radical-Axe der Radical-Kreise von zwei Gruppen zugleich die der dritten Gruppe ist. Man hat in der Tat, wenn man

$$C = 0, \quad C' = 0, \quad C'' = 0$$

nennt, die Gleichungen der drei gegebenen Kreise.

$$\text{Der Radical-Kreis von } \begin{cases} C = 0 \\ C' = 0 \end{cases} \text{ ist } C + C' = 0$$

$$\text{Radical-Axe von } \begin{cases} C + C' = 0 \\ C + C'' = 0 \end{cases} \text{ ist } C' - C'' = 0$$

$$\text{Der Radical-Kreis von } \begin{cases} C = 0 \\ C'' = 0 \end{cases} \text{ ist } C + C'' = 0$$

$$\text{Radical-Axe von } \begin{cases} C = 0 \\ C'' = 0 \end{cases} \text{ ist } C' - C'' = 0$$

Wenn man die Radical-Kreise von drei gegebenen Kreisen gefunden hat und fortfährt in derselben Weise (soweit dies möglich ist) zu operiren mit denjenigen, die man nach und nach erhält, so können dreifache Reihen von Kreisen entstehen, die gewissen interessanten Beziehungen unterworfen sind.

Die Betrachtung von Radical-Kreisen in der Geometrie des Dreiecks kann höchst wahrscheinlich neue Resultate herbeiführen, wenn man die Radical-Kreise von bemerkenswerten Kreisen des Dreiecks mit anderen Kreisen, Geraden und Punkten vergleicht, die mit dem Dreieck im Zusammenhang stehen; wir behalten uns vor die Ideen, die wir hier nur angedeutet haben, an andrer Stelle noch ausführlicher zu entwickeln.

Coruña, April 1896.

## V.

## Zur analytischen Curventheorie.

Von

**R. Hoppe.**

Eine Programmarbeit von Huth über die Curven constanter Steigung auf gegebenen Flächen macht es sich zur Aufgabe, diese Curven für einige specielle Flächen (sämtlich 2. Grades) entwickelt darzustellen. Damit ist ein Anfang gemacht, ein zu den Principien der Curventheorie gehöriges Problem in Untersuchung zu nehmen, ein Anfang der sich nach 2 Seiten hin fortsetzen lässt.

Die Bestimmung einer Curve im Raume hängt von 2 Functionen ab, von deren Complication man das Problem ihrer Darstellung befreien kann, indem man das Bogenelement zwischen ihren Gleichungen eliminirt. So nämlich teilt sich das Problem in 2 einfachere, deren jedes nur eine Gleichung zu befriedigen hat. Die Lösung des ersten Teilproblems ergibt eine Classe von Curven, der die gesuchte Curve angehört; das zweite sucht nur den Ausdruck des Bogenelements, nach dessen Ermittlung die Coordinaten schon in Quadraturen bekannt sind. Jede Classe wird nur durch Relationen von Richtungen, unabhängig von den unendlich kleinen Strecken, in welchen die Richtungen verfolgt werden, also unabhängig von allen Lineardehnungen, charakterisirt; ihr Normalausdruck ist das Tangentensystem.

Da Richtungen nur relativ unter sich Bedeutung haben, so können als Urvariable nur solche eingeführt werden, die von der Lage der Curve im Raume unabhängig sind. Es gibt deren 4 von hervorragender Rolle in allen bisher aufgestellten Theoremen. Seien  $\partial\tau$ ,  $\partial\vartheta$ ,  $\partial\sigma$  die Coincidenzwinkel der 3 begleitenden Axen, d. i. der

Tangente, Binormale, Hauptnormale. Dann sind die Integrale,  $\tau$ ,  $\vartheta$ ,  $\sigma$  (von A. Serret die Indicatricen der Tangente, Binormale, Hauptnormale genannt) die ersten 3, und, wenn man  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \lambda$  setzt,  $\lambda$  das vierte jener fundamentalen Variabeln. Sie stehen in folgender geometrischen Beziehung. Durch  $\vartheta$ ,  $\tau$  als rechtwinklige Coordinaten in einer festen Ebene wird ein Punkt bestimmt, der eine ebene Linie, die Torsionslinie  $\sigma$ , erzeugt:  $\tau$  und  $\vartheta$  heissen der Krümmungswinkel und Torsionswinkel,  $\sigma$  der Torsionsbogen,  $\lambda$ , d. i. der Winkel zwischen der Tangente an  $\sigma$  und der  $\tau$  Axe, die Krümmungsbreite.

Eine Gleichung zwischen  $\tau$  und  $\vartheta$  (die spezifische Gleichung) bestimmt dann einerseits die Curvenklasse, andererseits die Torsionslinie. Wir nehmen daher die Torsionslinie zum Merkmal der Curvenklasse. Es ist dann die Aufgabe, die Curvenklasse durch expliziten Ausdruck der Richtungscosinus der Tangente entwickelt darzustellen. Allgemein reducirt sie sich auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Für einige Torsionslinien ist sie gelöst, von denen wir nur die 2 einfachsten in Betracht ziehen wollen.

### I. Gerade Torsionslinie.

Ihre Gleichung lautet:

$$\vartheta = \tau \operatorname{tg} \lambda, \quad \lambda \text{ constant}$$

Die Curven dieser Classe haben die Eigenschaft, dass die Hauptnormale beständig normal zu einer festen Geraden ist. Letztere sei  $x$  Axe und vertical zu denken, die  $yz$  Ebene als Horizont betrachtet. Dann ist jede solche Curve eine Curve constanter Steigung, von der Huth handelt, von manchen Mathematikern „Helix“ genannt. Die Richtungscosinus der Tangente sind:

$$f = \sin \lambda; \quad g = \cos \lambda \cos \sigma; \quad h = \cos \lambda \sin \sigma \quad (1)$$

und  $\lambda$  ihr Steigungswinkel.

### II. Kreis als Torsionslinie.

Die Gleichung lautet:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2 \alpha$$

und zwar ist

$$\tau = \cot \alpha \sin \lambda; \quad \vartheta = \cot \alpha \cos \lambda$$

Die Curven dieser Classe haben die Eigenschaft, dass die Haupt-

normale mit einer festen Geraden (der verticalen  $x$  Axe) einen constanten Winkel  $R - \alpha$  bildet. Die Richtungscosinus der Tangente sind:

$$\begin{aligned} f &= \cos \alpha \sin \lambda; & y &= \cos \lambda \cos \frac{\lambda}{\sin \alpha} + \sin \alpha \sin \lambda \sin \frac{\lambda}{\sin \alpha} \\ z &= \cos \lambda \sin \frac{\lambda}{\sin \alpha} - \sin \alpha \sin \lambda \cos \frac{\lambda}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (2)$$

Zur vollständigen Bestimmung einer Curve, deren Tangentensystem bekannt ist, gehört nun bloss noch der Ausdruck des Bogenelements  $\partial s$ . Ist dieser gegeben, so sind die Gleichungen der Curve:

$$x = f \partial s; \quad y = g \partial s; \quad z = h \partial s \quad (3)$$

Ist  $\partial s$  durch Bedingungen bestimmt, so bleibt eine Gleichung oder ein System solcher zu lösen, worin jedoch  $s$  einzige Unbekannte ist.

Das Bogenelement kann nun u. a. bestimmt werden durch eine, in bestimmter relativer Lage zum Tangentensystem gegebene Fläche, auf welcher die Curve  $s$  liegen soll. Diesen Fall ziehe ich, wie Huth es getan, allein in Betracht. Die Aufgabe, aus dieser Bedingung das Bogenelement zu finden, habe ich in Crelle J. Bd. LXIII. allgemein gelöst. Hier will ich mich auf den Fall beschränken, wo die Fläche eine Kugelfläche vom Radius  $c$  ist. Die Lösung lautet dann:

$$\partial s = c \partial \tau \cos \vartheta \quad (4)$$

Dieser Wert in die Gl. (3) eingesetzt gibt somit die Gleichung aller sphärischen Curven, deren spezifische Gleichung gelöst ist, in Quadraturen.

In Anwendung auf die Curven constanter Steigung I., wo

$$\tau = \vartheta \cot \lambda; \quad \sigma = \frac{\vartheta}{\sin \lambda} \quad (5)$$

erhält man nach den Gl. (1):

$$x = c \cos \lambda \int \partial \vartheta \cos \vartheta = c \cos \lambda \sin \vartheta \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y &= c \cot \lambda \cos \lambda \int \cos \vartheta \cos \frac{\vartheta}{\sin \lambda} \partial \vartheta \\ &= c (\sin \sigma \cos \vartheta - \sin \lambda \cos \sigma \sin \vartheta) \\ z &= c \cot \lambda \cos \lambda \int \cos \vartheta \sin \frac{\vartheta}{\sin \lambda} \partial \vartheta \\ &= -c (\cos \sigma \cos \vartheta + \sin \lambda \sin \sigma \sin \vartheta) \end{aligned} \quad (7)$$

Werte die auch sichtlich die Flächengleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

erfüllen.

Aus geometrischer Betrachtung erhellt sogleich, dass in der Nähe der Pole eine Curve von der Steigung  $\lambda$  unmöglich ist, weil von den Polen aus jede Curve mit der Steigung null beginnt. Dies bestätigt auch die Formel; denn Gl (6) zeigt, dass  $\alpha$  zwischen  $\pm c \cos \lambda$  variiert, dass also die Curve ganz auf der so begrenzten Zone verläuft.

Ferner geht sowol durch Figurbetrachtung als auch aus der Formel hervor, dass an der Grenze der Zone die Curve nur in der Meridianrichtung eine Steigung  $= \lambda$  haben kann; denn hier ist für  $\cos \vartheta = 0$  nach Gl. (1) (7)

$$\frac{h}{g} = \frac{z}{y}$$

folglich berührt die Curve den Meridian und hat hier einen Rückkehrpunkt, von dem an ihre Steigung in eine Senkung übergeht. Nach Gl. (4) ist der Krümmungsradius daselbst  $= 0$ .

Wir wenden nun das Bogenelement (4) auf die Classe II. an, setzen also in Gl. (3) die Werte (4) (2) ein. Die Integration ist für  $x$  ausführbar; denn man hat:

$$\partial \tau = \partial \vartheta \cot \lambda; \quad \cos \lambda = \vartheta \operatorname{tg} \alpha$$

also:

$$\begin{aligned} x &= -c \sin \alpha \int \vartheta \partial \vartheta \cos \vartheta \\ &= -c \sin \alpha (\cos \vartheta + \vartheta \sin \vartheta) \end{aligned} \quad (8)$$

Von den 2 anderen Integrationen ist wenigstens die eine für die Specialwerte

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, 4, 5, \dots) \quad \text{also} \\ \tau^2 + \vartheta^2 &= \alpha^2 - 1 = 3, 8, 15, 24, \dots \end{aligned}$$

ausführbar. Es wird

$$y = -\frac{c}{\sqrt{n^2-1}} \int \vartheta \partial \vartheta \cos \vartheta \left( \cot \lambda \cos n\lambda + \frac{1}{n} \sin n\lambda \right) \quad (9)$$

$$z = -\frac{c}{\sqrt{n^2-1}} \int \vartheta \partial \vartheta \cos \vartheta \left( \cot \lambda \sin n\lambda - \frac{1}{n} \cos n\lambda \right) \quad (10)$$

daher für  $n = 2$

$$\begin{aligned} z &= -c \sqrt{\frac{1}{2}} \int \vartheta \partial \vartheta \cos \vartheta (2 \cos^2 \lambda - \frac{1}{2} \cos 2\lambda) \\ &= -c \sqrt{3} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \vartheta^2 \right) \cos \vartheta + \left( \frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \vartheta^3 \right) \sin \vartheta \right\} \end{aligned}$$

für  $n = 3$

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{c}{48\sqrt{2}} \int \vartheta^5 \hat{\partial} \vartheta \cos \vartheta \\
 &= -\frac{5c}{2\sqrt{2}} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta^2 + \frac{1}{24} \vartheta^4 \right) \cos \vartheta + \left( \vartheta - \frac{1}{6} \vartheta^3 + \frac{1}{120} \vartheta^5 \right) \sin \vartheta \right\}
 \end{aligned}$$

u. s. w.

Nachdem nun  $x$  und  $z$  gefunden sind, ergibt sich auch

$$y = \sqrt{c^2 - x^2 - z^2}$$

Diese Gleichung zeigt zugleich, dass die 2 Integrale in Gl. (9) sich auf einander reduciren lassen, was unmittelbar nicht ersichtlich ist.



## VI.

Die Secanten und Tangenten  
des Folium Cartesii.

(M. 1 Figur.)

Von

Oberlehrer Dr. A. Himstedt.

§ 1. Der Erfinder der analytischen Geometrie, René Descartes (od. Cartesius), führt in seinen Briefen eine Curve III. Ordnung an, welche der Gleichung

$$(1) \dots x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

entspricht und die wegen ihrer blattähnlichen Gestalt den Namen Folium bekommen hat. Die in dieser Gleichung vorkommende Constante  $a$  können wir unbeschadet der Allgemeinheit als positiv voraussetzen; denn wäre  $a < 0$ , so könnten wir durch Vertauschung der positiven Halbachsen mit den negativen die Gleichung so umformen, dass die Constante  $a > 0$  wird.

Setzen wir

$$y = tx$$

so folgt aus obiger Gleichung

$$(2) \dots x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

ein System, welches den Vorzug hat, die Rechnungen in vielen Fällen zu vereinfachen.

§ 2. Um die Lage der Curve zu den Achsen zu bestimmen, theilen wir dem Parameter  $t$  alle Werte von

$$t = -\infty \text{ bis } t = +\infty$$

Wächst derselbe von

$$t = 0 \text{ bis } t = 1$$

so wächst die Abscisse von

$$x = 0 \text{ bis } x = \frac{3}{2}a$$

und ebenso die Ordinate von

$$y = 0 \text{ bis } y = \frac{3}{2}a$$

Wächst der Parameter von

$$t = 1 \text{ bis } t = \infty$$

so nehmen  $x$  und  $y$  gleichzeitig ab von  $\frac{3}{2}a$  bis null. Folglich besitzt die Curve im ersten Quadranten einen geschlossenen Zug, das eigentliche Folium, welches vom Anfangspunkte ausgeht und über den Punkt

$$x = y = \frac{3}{2}a$$

die Spitze des Folium, dorthin zurückkehrt.

Nimmt der Parameter ab von

$$t = 0 \text{ bis } t = -1$$

so ist die Abscisse  $x$  stets negativ und nimmt ab von

$$x = 0 \text{ bis } x = -\infty$$

während die Ordinaten positiv sind und von

$$y = 0 \text{ bis } y = \infty$$

wachsen. Die Curve besitzt also einen unendlichen Ast, welcher ganz im zweiten Quadranten liegt und vom Anfangspunkt sich in's Unendliche erstreckt.

Wenn endlich der Parameter von

$$t = -1 \text{ bis } t = -\infty$$

abnimmt, so ist die Abscisse stets positiv und nimmt von

$$x = +\infty \text{ bis } x = 0$$

ab, während die Ordinaten stets negativ sind und von

$$y = -\infty \text{ bis } y = 0$$

zunehmen, d. h. die Curve hat einen zweiten unendlichen Ast, welcher ganz im vierten Quadranten gelegen ist und aus dem Unendlichen zum Anfangspunkt zurückkehrt. Aus Allem ergibt sich, dass kein Teil der Curve im dritten Quadranten liegt.

§ 3. Da die Gleichung (1) symmetrisch in Bezug auf  $x$  und  $y$  ist, so muss die Halbierungslinie der positiven (od. negativen) Halbachsen eine Symmetrieachse der Curve sein und diese in zwei congruente Hälften teilen. In der Tat, drehen wir das Coordinatensystem um  $45^\circ$ , indem wir

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\xi - \eta), \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\xi + \eta)$$

setzen, so geht (1) über in

$$(3) \dots \xi^3 + 3\xi\eta^2 - 3c(\xi^2 - \eta^2) = 0, \quad c^2 = \frac{1}{2}a^2$$

und da diese Gleichung nur gerade Potenzen von  $\eta$  enthält, so entsprechen jedem  $\xi$  zwei entgegengesetzt gleiche Werte des  $\eta$ .

§ 4. Die Gleichung (1) enthält weder ein absolutes Glied noch Glieder erster Dimension. Daraus folgt, dass die Curve im Anfangspunkte einen Doppelpunkt besitzt. Da nun alle Curven III. O. mit einem Doppelpunkte rationale Curven sind, so ist auch das Folium eine rationale Curve, und in der Tat haben wir gesehen, dass sich die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes rational mit Hilfe eines Parameters darstellen lassen.

Das Tangentenpaar des Doppelpunktes ist durch die Gleichung

$$xy = 0$$

gegeben. Die beiden Tangenten fallen demnach mit den Coordinatenachsen zusammen, und der Doppelpunkt ist ein solcher, in welchem sich zwei verschiedene Zweige der Curve durchschneiden.

§ 5. Das Folium Cartesii hat, wie jede Curve III. O., drei Asymptotenrichtungen, welche wir dadurch bestimmen können, dass wir die Glieder höchster Dimension gleich null setzen und dann die linke Seite dieser Gleichung in lineare Factoren zerlegen. Dies giebt:

$$x^3 + y^3 = 0, \quad \text{oder:}$$

$$(x + y) \cdot [2x - y(1 + i\sqrt{3})] \cdot [2x - y(1 - i\sqrt{3})] = 0$$

Unsere Curve hat demnach eine reelle und zwei imaginäre Asymptotenrichtungen. Um die reelle Asymptote zu finden, setzen wir:

$$x + y + h = 0$$

und bestimmen die Grösse  $h$  derart, dass diese Gerade mit der Curve mindestens zwei Punkte im Unendlichen gemein hat. Durch Elimination von  $y$  aus dieser Gleichung und (1) finden wir:

$$(4) \dots (a - h)x^2 + h(a - h)x - \frac{h^3}{a} = 0$$

Setzen wir also  $h = 0$ , so erniedrigt sich der Grad der Curven-gleichung um 3 Einheiten, d. h. die Gerade

$$(5) \dots x + y + a = 0$$

schneidet die Curve dreimal im Unendlichen und ist also eine Asymptote. Letztere ist zugleich Wendetangente und der im Unendlichen gelegene Berührungspunkt ein Wendepunkt der Curve. Hieraus folgt noch, dass die Curve ihrer ganzen Ausdehnung nach auf einer und derselben Seite ihrer Asymptote liegt.

§ 6. Eine durch den Anfangspunkt gezogene Gerade schneidet die Curve in 3 Punkten, von denen zwei mit dem Anfangspunkte zusammenfallen. Denn eliminirt man aus

$$y = tx$$

und (1) eine Unbekannte. z. B.  $y$ , so folgt:

$$x^2[(1 + t^3)x - 3at] = 0$$

eine Gleichung, welche offenbar zwei gleiche Wurzeln  $x = 0$  hat. Die dritte Wurzel hat den Wert:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}$$

Ist also der Richtungswinkel der Geraden ein spitzer ( $t > 0$ ), so liegt der dritte Schnittpunkt auf dem Folium selbst. (Vergl. § 2.). Ist jener Winkel stumpf ( $t < 0$ ), so liegt der dritte Schnittpunkt auf einem der unendlichen Aeste. Für  $t = 1$  sind die Coordinaten des dritten Schnittpunktes:

$$x = \frac{3}{2}a, \quad y = \frac{3}{2}a$$

Die Gerade fällt dann mit der Symmetrieachse der Curve zusammen. Der Abstand des Anfangspunktes von der Spitze des Folium hat den Wert  $\frac{3}{2}a\sqrt{2}$ .

§ 7. Eine Parallele zur  $y$ -Achse,  $x = h$ , schneidet die Curve in drei Punkten, deren Parameter wir aus der Gleichung

$$h = \frac{3at}{1+t^3}, \text{ oder}$$

$$(6) \dots t^3 - 3\frac{a}{h}t + 1 = 0$$

entnehmen. In dieser Gleichung fehlt das mit  $t^2$  behaftete Glied. Bezeichnen wir demnach die Wurzeln der Gleichung (6) mit  $t_1, t_2$  und  $t_3$ , so haben wir die Relation

$$(7) \dots t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

d. h. schneidet eine zur  $y$ -Achse parallel laufende Gerade die Curve in drei Punkten, so ist die Summe der Parameter dieser Punkte identisch gleich null. Ferner folgt aus (6), dass

$$(8) \dots t_1 t_2 t_3 = -1$$

Demnach sind von den Wurzeln der Gleichung (6) zwei positiv und die dritte negativ, woraus mit Rücksicht auf § 2. folgt, dass von den 3 Schnittpunkten 2 auf dem Folium selbst, der dritte auf einem der unendlichen Aeste liegt.

Um nun die Beschaffenheit der 3 Wurzeln noch genauer zu untersuchen, berechnen wir die Discriminante der Gleichung (6). Dies giebt:

$$(9) \dots \mathcal{D} = \frac{1}{4} - \frac{a^3}{h^3}$$

Nun hat eine reducirte kubische Gleichung drei reelle Wurzeln, wenn ihre Discriminante  $\mathcal{D}$  negativ ist, dagegen eine reelle und zwei imaginäre, wenn  $\mathcal{D}$  positiv ist, und endlich zwei gleiche Wurzeln, wenn  $\mathcal{D} = 0$  ist. Wenden wir dies auf den vorliegenden Fall an, so ergibt sich Folgendes. Ist  $h < 0$ , so ist  $\mathcal{D} > 0$ , d. h. jede Parallele zur  $y$ -Achse, welche links von dieser Achse liegt, schneidet die Curve in einem reellen und zwei imaginären Punkten. Ist ferner  $a\sqrt[3]{4} > h > 0$ , so ist  $\mathcal{D} < 0$ , und die Gerade hat unter dieser Bedingung drei reelle Schnittpunkte mit der Curve gemein. Ist endlich  $h > a\sqrt[3]{4}$ , so ist  $\mathcal{D}$  wieder positiv, so dass die Gerade dann wieder einen reellen und zwei imaginäre Schnittpunkte liefert. In dem Grenzfalle

$$h = a\sqrt[3]{4} \text{ ist } \mathcal{D} = 0$$

d. h. die Gerade

$$(10) \dots x = a\sqrt[3]{4}$$

ist eine Tangente der Curve. Diese Tangente schneidet die Curve in 3 Punkten, deren Parameter sich aus

$$t^3 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + 1 = 0, \text{ oder}$$

$$(11) \dots (t - \sqrt[3]{\frac{1}{2}})^2 \cdot (t + 2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) = 0$$

ergeben. Der Berührungspunkt dieser Tangente entspricht demnach dem Parameter

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

und liegt also auf dem eigentlichen Folium, während der sog. Tangentialpunkt dem Parameter

$$t = -2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

entspricht und folglich auf einem der unendlichen Aeste liegt. — Wir wollen noch den andern Grenzfall  $h = 0$  erwähnen, welcher der  $y$ -Achse selbst entspricht. Hier folgt unmittelbar aus Gleichung (1), dass die Gerade  $x = 0$  drei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein hat. Die  $y$ -Achse ist die Tangente des Doppelpunktes.

Analoge Resultate ergeben sich, wenn wir die Schnittpunkte der Curve mit einer Parallelen zur  $x$ -Achse  $y = h$  untersuchen, deren Parameter offenbar aus der Gleichung

$$t^3 - 3 \frac{a}{h} t^2 + 1 = 0$$

entnommen werden können. Diese Gleichung können wir durch die Substitution

$$t = \frac{1}{\lambda}$$

leicht auf die reducirte Form bringen, und dann gestaltet sich die Discussion genau so wie bei (6).

§ 8. Eine Parallele zur Asymptote der Curve hat die Gleichung:

$$(12) \dots x + y + h = 0$$

Um die Schnittpunkte dieser Geraden zu bestimmen, setzen wir für  $x$  und  $y$  die Werte (2) in vorstehende Gleichung ein und erhalten dann:

$$ht^3 + 3at^2 + 3at + h = 0, \text{ oder} \\ (t + 1)[ht^2 + (3a - h)t + h] = 0$$

Die eine Wurzel dieser Gleichung ist also

$$t = -1$$

für welchen Wert die Coordinaten  $x$  und  $y$  unendlich gross werden, (ctr. § 2.) d. h. jede Parallele zur Asymptote schneidet die Curve, wie vorauszusehen war, einmal im Unendlichen.

Die beiden andern Wurzeln der obigen Gleichung sind:

$$(13) \dots t = \frac{h - 3a \pm \sqrt{3(3a + h)(a - h)}}{2h}$$

Dieselben sind einander gleich, entweder, wenn  $a = h$  ist, welcher Fall der Asymptote selbst entspricht, oder wenn

$$h = -3a$$

ist. Die Gerade

$$x + y - 3a = 0$$

ist demnach eine Tangente der Curve, deren Berührungspunkt, wie leicht zu zeigen ist, mit der Spitze des Folium zusammenfällt. Ferner folgt aus (13), dass die beiden Wurzeln nur dann reell sind, wenn

$$a > h > -3a$$

ist, d. h. wenn die Gerade (12) zwischen der Asymptote und der Tangente in der Spitze des Folium liegt. In jedem andern Falle hat jene Gerade mit der Curve ausser dem unendlich fernen Punkte noch zwei imaginäre Punkte gemein.

§ 9. Wir wollen jetzt auf der Curve einen Punkt  $M_0$  annehmen, etwa

$$x_0 = \frac{3at_0}{1 + t_0^3}, \quad y_0 = \frac{3at_0^2}{1 + t_0^3}$$

und durch ihn eine beliebige Gerade

$$(14) \dots y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

legen. Die Substitution von  $t$  und  $t_0$  ergibt:

$$\frac{3at^2}{1 + t^3} - \frac{3at_0^2}{1 + t_0^3} = \lambda \left( \frac{3at}{1 + t^3} - \frac{3at_0}{1 + t_0^3} \right)$$

woraus nach einigen Umformungen folgt:

$$(t - t_0) [t_0(\lambda - t_0)t^2 + (1 + \lambda t_0^2)t - (\lambda - t_0)] = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist

$$t = t_0$$

wie vorauszusehen war; die beiden andern sind:

$$(15) \dots t = \frac{(1 + \lambda t_0^2) \pm \sqrt{(1 + \lambda t_0^2)^2 + 4t_0(t_0 - \lambda)^2}}{2t_0(t_0 - \lambda)}$$

Wie man sieht, sind diese beide Wurzeln für jedes positive  $t_0$  reell. Folglich hat jede Gerade, welche durch einen auf dem eigentlichen Folium gelegenen Punkt gezogen wird, drei reelle Punkte mit der Curve gemein. Dies lässt sich auch auf geometrischem Wege zeigen. Denn eine Gerade, welche einen geschlossenen Linienzug einmal durchschneidet, muss denselben notwendig nochmals durchschneiden; und eine Gerade, welche eine Curve III. O. in zwei reellen Punkten durchschneidet, hat mit ihr stets noch einen dritten reellen Punkt gemein. Dieser dritte Schnittpunkt muss nun, da er auf dem Folium selbst offenbar nicht liegen kann, notwendig einem der unendlichen Aeste angehören. In der Tat haben die beiden Wurzeln (15) für ein positives  $t_0$  verschiedene Vorzeichen, woraus sich nach § 2. das Gesagte ergibt. — Ist umgekehrt  $t_0 < 0$ , so können die beiden Wurzeln (15) ebenso gut reell wie imaginär sein; d. h. zieht man durch einen Punkt, welcher auf einem der unendlichen Aeste liegt, eine Gerade, so hat dieselbe mit der Curve ausser jenem Punkte noch zwei weitere Punkte gemein, welche entweder reell oder imaginär sind.

§ 10. Es seien zwei Curvenpunkte  $M_0$  und  $M_1$  gegeben: dann ist die Gleichung der Geraden  $M_0 M_1$

$$x(y_0 - y_1) - y(x_0 - x_1) + (x_0 y_1 - x_1 y_0) = 0$$

oder, wenn wir die Parameter  $t_0$  und  $t_1$  der beiden Punkte  $M_0$  und  $M_1$  einführen:

$$x(t_0^2 - t_1^2 + t_0^2 t_1^3 - t_1^2 t_0^3) - y(t_0 - t_1 + t_0 t_1^3 - t_0^3 t_1) - 3a t_0 t_1 (t_0 - t_1) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich durch  $(t_0 - t_1)$  dividiren; es resultirt

$$(16) \dots x(t_0 + t_1 - t_0^2 t_1^2) - y(1 - t_0^2 t_1 - t_0 t_1^2) - 3a t_0 t_1 = 0$$

Dies ist die Gleichung der Secante  $M_0 M_1$ . Um ihre Schnittpunkte mit der Curve zu bestimmen, substituiren wir für  $x$  und  $y$  die Werte (2) und erhalten dann:

$$\text{oder} \quad t_0 t_1 t^3 + (1 - t_0 t_1^2 - t_0^2 t_1) t^2 + (t_0^2 t_1^2 - t_1 - t_0) t + t_0 t_1 = 0$$

$$(17) \dots (t - t_0)(t - t_1)(t_0 t_1 t + 1) = 0$$

Jene Secante durchschneidet also die Curve in drei Punkten, von denen zwei, wie zu erwarten war, mit  $M_0$  und  $M_1$  zusammenfallen, nämlich

$$t = t_0 \quad \text{und} \quad t = t_1$$

Der dritte Schnittpunkt entspricht dem Parameter:

$$(18) \dots t = -\frac{1}{t_0 t_1}$$

Demnach ist dieser Parameter positiv oder negativ, je nachdem  $t_0$  und  $t_1$  ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, d. h. eine Gerade, welche das eigentliche Folium zweimal durchschneidet, hat ihren dritten Schnittpunkt auf einem der unendlichen Aeste, und eine Gerade, welche die unendlichen Aeste 2 mal durchschneidet, schneidet dieselben auch noch zum dritten Male. Dagegen muss eine Gerade, welche einen Punkt des eigentlichen Folium mit einem Punkte der unendlichen Aeste verbindet, ihren dritten Schnittpunkt auf dem eigentlichen Folium haben. Alle diese Sätze sind auch geometrisch evident.

§ 11. Wir wollen jetzt annehmen, dass die beiden Curvenpunkte  $M_0$  und  $M_1$  zusammenfallen, so dass die Secante  $M_0 M_1$  in die Tangente übergeht. Die Gleichung dieser Tangente leiten wir aus (16) ab, indem wir

$$t_1 = t_0$$

setzen. Wir erhalten dann

$$(19) \dots x(2t_0 - t_0^4) - y(1 - 2t_0^3) - 3at_0^2 = 0$$

als Gleichung derjenigen Tangente, welche die Curve im Punkte  $t_0$  berührt. Die Gleichung (17) geht über in

$$(20) \dots (t - t_0)^2 (t_0^2 t + 1) = 0$$

und demnach ist

$$(21) \dots t = -\frac{1}{t_0^2}$$

der Parameter des sog. Tangentialpunktes. Dieser liegt daher stets auf einem der unendlichen Aeste, wo immer auch der Berührungspunkt liegen mag. Auch dieser Satz kann leicht geometrisch bewiesen werden.

Aus (19) erhalten wir den Richtungscoefficienten der Tangente im Punkte  $t_0$ , nämlich

$$(22) \dots p = \frac{2t_0 - t_0^4}{1 - 2t_0^3}$$

den wir in einfacher Weise auch mit Hilfe der Differentialrechnung aus den beiden Gleichungen (2) hätten ableiten können. Aus (22) ergibt sich nun folgendes: Die Tangente ist der  $x$ -Achse parallel, wenn  $p = 0$  ist, d. h. also für

$$t_0 = 0 \quad \text{und für} \quad t_0 = \sqrt[3]{2}$$

Dem ersten Werte entspricht der Anfangspunkt, dem zweiten ein auf dem eigentlichen Folium gelegener Punkt, dessen Coordinaten

$$x = a \sqrt[3]{2}, \quad y = a \sqrt[3]{4}$$

sind. Ferner steht die Tangente senkrecht zur  $x$ -Achse, wenn  $p = \infty$  ist, d. h. also für

$$t_0 = \infty \quad \text{und für} \quad t_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Dem ersten Werte entspricht wieder der Anfangspunkt (cfr. § 2.), dem zweiten ein auf dem eigentlichen Folium gelegener Punkt, dessen Coordinaten

$$x = a \sqrt[3]{4}, \quad y = a \sqrt[3]{2}$$

sind, (cfr. § 7.). Die Tangente ist der Asymptote parallel, wenn

$$p = -1$$

ist, also wenn

$$t_0^4 + 2t_0^3 - 2t_0 - 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(t_0 + 1)^3 (t_0 - 1) = 0$$

Hieraus folgt entweder

$$t_0 = -1$$

in welchem Falle wir die Asymptote selbst haben, oder

$$t_0 = 1$$

und diesem Werte entspricht der Scheitel des Folium, in welchem Punkte die Tangente, wie wir bereits früher gesehen haben (§ 8.), in der Tat der Asymptote parallel läuft. Endlich bestimmen wir die Punkte, wo die Tangente der Symmetrieachse parallel läuft. Dann muss

$$p = +1$$

sein, also

$$t_0^4 - 2t_0^3 - 2t_0 + 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left(t_0^2 + \frac{2t_0}{\sqrt{3}+1} + 1\right) \cdot \left(t_0^2 - \frac{2t_0}{\sqrt{3}-1} + 1\right) = 0$$

Der erste Factor, gleich null gesetzt, liefert für  $t_0$  zwei imaginäre Werte. Dagegen folgt aus

$$t_0^2 - \frac{9t_0}{\sqrt{3}-1} + 1 = 0 \quad \text{der Wert:}$$

$$t_0 = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{2}$$

Es giebt also zwei (reelle) Punkte, in welchen die Tangente parallel der Symmetrieachse ist. Beide Punkte liegen auf dem eigentlichen Folium, da die obigen Wurzelwerte beide positiv sind.

§ 12. Ersetzen wir in der Gleichung der Tangente die laufenden Coordinaten durch  $\xi\eta$  und bezeichnen den Parameter des Berührungspunktes mit  $t$ , so ist

$$(23) \dots \xi(2t - t^4) - \eta(1 - 2t^2) - 3at^2 = 0$$

die Gleichung der Tangente, wofür wir auch, wenn wir die Gleichungen (1) und (2) beachten,

$$(24) \dots (x^2 - ay)\xi + (y^2 - ax)\eta - axy = 0$$

schreiben können. In dieser letztern Gleichung sind dann  $xy$  die Coordinaten des Berührungspunktes. Soll nun diese Tangente durch einen festen Punkt  $x_0y_0$  gehen, so haben wir die Bedingung:

$$(25) \dots (x^2 - ay)x_0 + (y^2 - ax)y_0 - axy = 0$$

Betrachten wir in dieser Gleichung die Coordinaten des Berührungspunktes  $xy$  als veränderlich, so repräsentirt (25) einen Kegelschnitt, den sog. Polarkegelschnitt. Auf ihm müssen die Berührungspunkte aller derjenigen Tangenten liegen, welche sich von dem Pole  $x_0y_0$  an unsere Curve legen lassen. Da diese Berührungspunkte selbstverständlich auch auf dem Folium liegen, so sind es die Durchschnittspunkte der beiden Curven (25) und (1). Nun hat ein Kegelschnitt mit einer Curve III. O. bekanntlich 6 Punkte gemeinschaftlich. Da nun der Kegelschnitt (25) durch den Anfangspunkt geht und dieser ein Doppelpunkt des Folium ist, so fallen zwei jener 6 Schnittpunkte mit dem Anfangspunkte zusammen. Diejenige Gerade aber, welche einen Doppelpunkt der Curve mit dem Pole  $x_0y_0$  verbindet, ist im allgemeinen keine eigentliche Tangente. Daraus folgt, dass sich von einem festen Punkte nur 4 Tangenten an die Curve legen lassen, d. h. das Folium ist eine Curve vierter Classe (wie jede Curve III. O. mit einem Doppelpunkte.). Es lässt sich dies auch noch auf anderm Wege zeigen. Wenn wir in die Gleichung des Polarkegelschnitts für  $x$  und  $y$  die in (2) gegebenen Werte einsetzen, so folgt

$$(26) \dots x_0 t^4 - 2y_0 t^3 + 3at^2 - 2x_0 t + y_0 = 0$$

eine Gleichung vierten Grades in  $t$ , deren 4 Wurzeln die Parameter derjenigen Punkte sind, in welchen die Curve von den durch  $x_0 y_0$  gezogenen Tangenten berührt wird.

§ 13. Liegt der Pol  $x_0 y_0$  auf der Curve selbst, so genügen seine Coordinaten der Gleichung der Curve, und es ist

$$x_0 = \frac{3at_0}{1+t_0^2}, \quad y_0 = \frac{3at_0^2}{1+t_0^2}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (26) ein, so folgt:

$$t_0 t^4 - 2t_0^2 t^3 + (1 + t_0^2)t^2 - 2t_0 t + t_0^2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(t - t_0)^2 \cdot (t_0 t^2 + 1) = 0$$

Zwei Wurzeln dieser Gleichung sind  $= t_0$ , d. h. diejenige Tangente, deren Berührungspunkt der Punkt  $t_0$  ist, ist doppelt zu zählen. Die Berührungspunkte der beiden andern Tangenten sind:

$$t = \pm \sqrt{-\frac{1}{t_0}}$$

Dieselben sind also nur dann reell, wenn  $t_0 < 0$  ist. Wir haben also den Satz: Durch einen Punkt, welcher auf dem eigentlichen Folium liegt, lässt sich nur eine (doppelt zu zählende) Tangente ziehen, deren Berührungspunkt eben jener Pol ist. Liegt aber der Pol auf einem der unendlichen Aeste, so lassen sich 4 reelle Tangenten durch ihn ziehen. Davon fallen zwei zusammen und berühren die Curve im Pol selbst. Die Berührungspunkte der beiden andern entsprechen entgegengesetzt gleichen Parametern, d. h. liegt der eine auf dem Folium selbst, so liegt der andere auf einem der unendlichen Aeste.

§ 14. Wir wollen ferner annehmen, dass der Pol auf der Asymptote liegt. Dann haben wir die Bedingung

$$x_0 + y_0 + a = 0$$

und die Gleichung (26) geht, wenn wir  $y_0$  eliminiren, über in

$$x_0 t^4 + 2(a + x_0)t^3 + 3at^2 - 2x_0 t - (a + x_0) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(t + 1)^2 \cdot (x_0 t^2 + 2at - a - x_0) = 0$$

Wir haben also wieder zwei gleiche Wurzeln

$$t = -1$$

Da diesem Werte des Parameters der unendlich ferne Punkt der Curve entspricht, so folgt, dass zwei der Tangenten mit der Asymptote selbst zusammenfallen. Die beiden andern Wurzeln der obigen Gleichung sind

$$(27) \dots t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + ax_0 + x_0^2}}{x_0} = \frac{-a \pm \sqrt{(a+x_0)^2 - ax_0}}{x_0}$$

Da diese beiden Wurzeln stets reell sind, so lassen sich also von jedem Punkte der Asymptote 4 reelle Tangenten an die Curve legen. Bezeichnen wir ferner die beiden Wurzeln (27) mit  $t_1$  und  $t_2$ , so lassen sich folgende Fälle unterscheiden: Ist  $x_0 > 0$ , so ist  $t_1 > 0$  und  $t_2 < 0$ . Ist aber

$$x_0 = -a\lambda, \quad 1 > \lambda > 0$$

so ist

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda(1 - \lambda)}}{-\lambda} > 0$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \lambda(1 - \lambda)}}{-\lambda} > 0$$

Ist endlich

$$x_0 = -a\lambda, \quad \lambda > 1$$

so folgt:

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 1)}}{-\lambda} < 0$$

$$t_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 1)}}{-\lambda} > 0$$

Wir können somit folgenden Satz aufstellen: Liegt der Pol auf der Asymptote und im III. Quadranten, so lassen sich von ihm 2 Tangenten ziehen, welche beide das eigentliche Folium berühren. Liegt aber der Pol auf der Asymptote und im II. oder IV. Quadranten, so lassen sich von ihm zwei Tangenten ziehen, von denen die eine das Folium selbst, die andere einen der unendlichen Aeste berührt.

§ 15. Liegt der Pol auf einer der Coordinatenachsen, z. B. auf der  $x$ -Achse, so ist  $y_0 = 0$  und die Gleichung (26) geht über in

$$x_0 t^4 + 3at^2 - 2x_0 t = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist  $t = 0$ , d. h. von den 4 Tangenten welche durch den Pol gezogen werden können, berührt eine die Curve im Anfangspunkte und fällt daher mit der  $x$ -Achse zusammen.

Die Berührungspunkte der übrigen 3 Tangenten erhalten wir aus der kubischen Gleichung

$$(28) \dots t^3 + 3 \frac{a}{x_0} t - 2 = 0$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist

$$\Delta = \frac{a^3 + x_0^3}{x_0^3}$$

Ist  $x_0 > 0$ , so ist auch  $\Delta > 0$  und die Gleichung (28) hat dann nur eine reelle Wurzel, welche offenbar positiv sein muss. Daraus folgt der Satz: Liegt der Pol auf der positiven  $x$ -Achse, so lassen sich von ihm 2 Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine mit der  $x$ -Achse zusammenfällt, die andere das eigentliche Folium berührt. — Ist ferner  $0 > x_0 > -a$ , so ist  $\Delta < 0$  und die Gleichung (28) hat dann drei reelle Wurzeln, und zwar eine positive und zwei negative, weil das absolute Glied dieser Gleichung negativ und das mit  $t^2$  behaftete Glied gleich null ist. Es folgt daraus der Satz: Liegt der Pol auf der negativen  $x$ -Achse und zwar zwischen Anfangspunkt und Asymptote, so lassen sich von ihm 4 Tangenten an die Curve ziehen, von denen eine mit der  $x$ -Achse zusammenfällt, die zweite das eigentliche Folium und die beiden andern je einen der unendlichen Aeste berühren. — Ist endlich  $x_0 < -a$ , so ist  $\Delta > 0$ , und die Gleichung (28) hat dann wieder nur eine reelle Wurzel, welche jedenfalls positiv sein muss, da das absolute Glied der Gleichung negativ ist. Also: Liegt der Pol auf der negativen  $x$ -Achse und zwar so, dass die Asymptote zwischen ihm und dem Anfangspunkte liegt, so lassen sich von ihm nur zwei reelle Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine mit der  $x$ -Achse zusammenfällt, die andere das eigentliche Folium berührt. Liegt der Pol auf der  $x$ -Achse, so haben wir genau dieselben Sätze. — Schliesslich können wir noch den Fall betrachten, wo der Pol in den Anfangspunkt fällt. Dann ist

$$x_0 = y_0 = 0$$

Hier ist leicht zu sehen, dass die Gleichung (26) zwei gleiche Wurzeln  $t = 0$  und zwei andere gleiche Wurzeln  $t = \infty$  liefert. Jedem dieser Werte entspricht der Anfangspunkt selbst, und wir schliessen daraus, dass sich durch diesen Punkt 4 reelle Tangenten an die Curve legen lassen, welche paarweise mit den beiden Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen.

§ 16. In dem besondern Falle, wo der Pol auf der Symmetrieachse der Curve liegt, ist

$$x_0 = y_0$$

Die Gleichung (28) geht dann in die reciproke

$$(29) \dots t^4 - 2t^3 + 3 \frac{a}{x_0} t^2 - 2t + 1 = 0$$

über. Dividiren wir diese Gleichung durch  $t^2$  und setzen dann

$$t + \frac{1}{t} = z$$

so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 3 \frac{a}{x_0} - 2 = 0$$

und hieraus folgt:

$$z = 1 \pm p; \quad p = + \sqrt{3 \cdot \frac{x_0 - a}{x_0}}$$

Demnach sind die vier Wurzeln der Gleichung:

$$t_1 = \frac{1}{2}(1 + p + \sqrt{(1+p)^2 - 4}), \quad t_2 = \frac{1}{t_1}$$

$$t_3 = \frac{1}{2}(1 - p + \sqrt{(1-p)^2 - 4}), \quad t_4 = \frac{1}{t_3}$$

Die Discussion dieser Wurzeln gestaltet sich folgendermassen:

- 1) Ist  $x_0 > \frac{3}{2}a$ , so ist  $\sqrt{3} > p > 1$ , folglich sind  $t_1$  und  $t_2$  reell, dagegen  $t_3$  und  $t_4$  imaginär. Ferner sind  $t_1$  und  $t_2$  beide positiv.
- 2) Ist  $\frac{3}{2}a > x_0 > 0$ , so sind alle 4 Wurzeln imaginär.
- 3) Ist  $0 > x_0 > -\frac{a}{2}$ , so ist  $p > 3$ , folglich sind alle 4 Wurzeln reell, und zwar  $t_1$  und  $t_2$  positiv,  $t_3$  und  $t_4$  negativ.
- 4) Ist  $-\frac{a}{2} > x_0$ , so ist  $3 > p > \sqrt{3}$ , folglich sind  $t_1$  und  $t_2$  reell und zwar positiv, dagegen  $t_3$  und  $t_4$  imaginär.

Diese Resultate lassen sich leicht in Worte fassen.

Liegt der Pol auf der Symmetrieachse, so dass die Spitze des Folium zwischen Anfangspunkt und Pol liegt, so lassen sich 2 reelle

Tangenten ziehen, welche das eigentliche Folium berühren. (Dasselbe gilt offenbar von jedem Punkte, welcher im I. Quadranten und ausserhalb des Folium liegt.) Wenn der Pol auf der Symmetrieachse innerhalb des Folium liegt, so lassen sich durch ihn überhaupt keine reellen Tangenten ziehen. (Dasselbe gilt von jedem innerhalb des eigentlichen Folium gelegenen Punkte.) Liegt der Pol auf der Symmetrieachse zwischen Anfangspunkt und Asymptote, so lassen sich 4 reelle Tangenten an die Curve ziehen, von denen 2 das eigentliche Folium, die beiden andern die unendlichen Aeste berühren. (Dasselbe gilt von jedem Punkte innerhalb des von den Coordinatenachsen und der Asymptote gebildeten Dreiecks.) Liegt endlich der Pol auf der Symmetrieachse so, dass die Asymptote zwischen Anfangspunkt und Pol liegt, so lassen sich wieder nur 2 reelle Tangenten durch den Pol ziehen, welche beide das eigentliche Folium berühren. (Dasselbe gilt von jedem Punkte des III. Quadranten, welcher ausserhalb des erwähnten Dreiecks liegt.)

§ 17. Zum Schluss stellen wir die Resultate der letzten 4 Paragraphen zusammen:

- 1) Der Pol liegt im I. Quadranten, innerhalb des Folium. Keine reelle Tangenten.
- 2) Der Pol liegt im I. Quadranten, auf dem Umfange des Folium. Zwei reelle zusammenfallende Tangenten, deren Berührungspunkt der Pol selbst ist.
- 3) Der Pol liegt im I. Quadranten, ausserhalb des Folium. Zwei reelle Tangenten, welche das Folium selbst berühren.
- 4) Der Pol liegt auf der positiven  $y$ -Achse. Zwei reelle Tangenten, von denen die eine das eigentliche Folium berührt, die andere durch den Doppelpunkt geht.
- 5) Der Pol liegt im II. Quadranten und zwar die Curve zwischen Pol und Asymptote. Zwei reelle Tangenten, von denen die eine das Folium selbst, die andere einen unendlichen Ast berührt.
- 6) Der Pol liegt im II. Quadranten auf dem unendlichen Aste. Vier reelle Tangenten. Davon fallen 2 zusammen und berühren die Curve im Pol selbst. Von den beiden andern berührt eine das Folium, die andere den unendlichen Ast (im IV. Quadranten.)
- 7) Der Pol liegt im II. Quadranten zwischen Curve und

Asymptote. Vier reelle Tangenten. Davon berührt eine das Folium, die andern 3 aber die unendlichen Aeste.

- 8) Der Pol liegt im II. Quadranten auf der Asymptote. Vier reelle Tangenten. Davon fallen 2 in der Asymptote zusammen; von den beiden andern berührt eine das Folium, die andere einen unendlichen Ast.
- 9) Der Pol liegt im II. Quadranten, und die Asymptote zwischen Pol und Curve. Zwei reelle Tangenten, von denen die eine das Folium, die andere einen unendlichen Ast berührt.
- 10) Der Pol liegt im III. Quadranten, und zwar die Asymptote zwischen Pol und Curve. Zwei reelle Tangenten, welche beide das Folium berühren.
- 11) Der Pol liegt im III. Quadranten, auf der Asymptote. Vier reelle Tangenten; davon fallen 2 mit der Asymptote zusammen, während die beiden andern das Folium berühren.
- 12) Der Pol liegt im III. Quadranten, zwischen Asymptote und Curve. Vier reelle Tangenten, von denen 2 das Folium, die beiden andern die unendlichen Aeste berühren.

Liegt der Pol im IV. Quadranten, so haben wir dieselben Fälle wie im II. Quadranten.

Aus Allem ersehen wir, dass 4 reelle (nicht zusammenfallende) Tangenten existiren, wenn der Pol zwischen der Asymptote und den unendlichen Aesten liegt, dagegen gar keine, wenn er innerhalb des Folium liegt.

Marienburg, Westpr. December 1895.

## VII.

## Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben.

Von

Dr. Ernst Wölffing,

Privatdocent an der K. Technischen Hochschule in Stuttgart.

Für die Krümmungen der Raumcurven in singulären Punkten derselben existirt bereits eine Tabelle, welche von Schell<sup>1)</sup> herührt. Dieselbe beschränkt sich jedoch auf Singularitäten mit einfachen Rückkehrelementen und mit Combinationen von solchen und gibt auch für diese nur die Radien der absoluten Krümmung, der Torsion und der sog. ganzen Krümmung. Ausserdem ist aus dem Text nicht zu ersehen, wie der Verfasser zu seinen Resultaten gelangt ist.

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, wie für die Werte der Krümmungsradien im wesentlichen die Anfangsexponenten und -coefficienten der Raumcurvenentwicklungen massgebend sind, so dass diese Werte für jede beliebige Singularität leicht berechnet werden können. Dabei wird die Untersuchung auch auf die Radien der sphärischen Krümmung und Torsion ausgedehnt. Um die Verteilung der Anfangsexponenten, welche resp. unendlich kleine, endliche und unendlich grosse Werte der Krümmungsradien liefern, zu

---

1) Schell, W., Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in geometrischer Darstellung. Leipzig 1859. S. 25. Vgl. auch Laska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig 1898—94. S. 544.

übersehen, wird eine geometrische Darstellung benutzt, die namentlich in complicirteren Fällen gute Dienste leistet.

1. Der singuläre Raumcurvenpunkt wird in den Koordinatenursprung verlegt, die Tangente zur  $x$ -Axe und die Schmiegungeebene zur  $z$ -Ebene gewählt. Ist dann

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \varepsilon^\alpha + \lambda' \varepsilon^{\alpha+1} + \dots \\ y = \mu \varepsilon^\beta + \mu' \varepsilon^{\beta+1} + \dots \\ z = \nu \varepsilon^\gamma + \nu' \varepsilon^{\gamma+1} + \dots \end{array} \right. \tag{1}$$

die Parameterdarstellung der Raumcurve in der Nähe des Ursprungs, so gilt für die Anfangsexponenten („Indices“ nach Björling, „Zeichen“ nach Mehmke)  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\alpha < \beta < \gamma \tag{2}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} dx &= (\lambda \alpha \varepsilon^{\alpha-1} + \lambda'(\alpha + 1)\varepsilon^\alpha + \dots) d\varepsilon \\ dy &= (\mu \beta \varepsilon^{\beta-1} + \mu'(\beta + 1)\varepsilon^\beta + \dots) d\varepsilon \\ dz &= (\nu \gamma \varepsilon^{\gamma-1} + \dots) d\varepsilon \end{aligned}$$

daher:

$$ds = \lambda \alpha \varepsilon^{\alpha-1} \left( 1 + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{\alpha+1}{\alpha} \varepsilon + \dots + \frac{\mu^2 \beta^2}{2 \lambda^2 \alpha^2} \varepsilon^{2(\beta-\alpha)} + \dots \right) d\varepsilon$$

$$\frac{dx}{ds} = \left( 1 - \frac{\mu^2 \beta^2}{2 \lambda^2 \alpha^2} \varepsilon^{2\beta-2\alpha} - \dots \right)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\mu \beta}{\lambda \alpha} \varepsilon^{\beta-\alpha} \left( 1 + \left( \frac{\mu'(\beta+1)}{\mu \beta} - \frac{\lambda'(\alpha+1)}{\lambda \alpha} \right) \varepsilon + \dots \right)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\nu \gamma}{\lambda \alpha} \varepsilon^{\gamma-\alpha} + \dots$$

somit:

$$d \frac{dx}{ds} = \left( - \frac{\mu^2 \beta^2}{\lambda^2 \alpha^2} (\beta - \alpha) \varepsilon^{2\beta-2\alpha-1} + \dots \right) d\varepsilon$$

$$d \frac{dy}{ds} = \left( \frac{\mu \beta}{\lambda \alpha} (\beta - \alpha) \varepsilon^{\beta-\alpha-1} + \frac{\mu \beta}{\lambda \alpha} \left( \frac{\mu'(\beta+1)}{\mu \beta} - \frac{\lambda'(\alpha+1)}{\lambda \alpha} \right) \cdot (\beta - \alpha + 1) \varepsilon^{\beta-\alpha} + \dots \right) d\varepsilon$$

$$d \frac{dz}{ds} = \left( \frac{\nu \gamma}{\lambda \alpha} (\gamma - \alpha) \varepsilon^{\gamma-\alpha-1} + \dots \right) d\varepsilon$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{\mu\beta}{\lambda\alpha}(\beta - \alpha)\varepsilon^{\beta-1-1} \cdot \left(1 + \frac{\beta - \alpha + 1}{\beta - \alpha} \left(\frac{\mu(\beta + 1)}{\mu\beta} - \frac{\lambda'(\alpha + 1)}{\lambda\alpha}\right)\varepsilon + \dots\right) d\varepsilon$$

Damit ergibt sich der Radius der absoluten Krümmung<sup>1)</sup>

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}} = \frac{\lambda^2\alpha^2\varepsilon^{2\alpha-\beta}}{\mu\beta(\beta - \alpha)} \cdot \left(1 - \frac{\alpha + 1}{(\beta - \alpha)\alpha} \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{(\beta - \alpha + 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)\beta} \frac{\mu'}{\mu}\right)\varepsilon + \dots d\varepsilon \quad (3)$$

$$\text{Derselbe ist } \left. \begin{array}{l} \text{unendlich klein} \\ \text{endlich} \\ \text{unendlich gross} \end{array} \right\} \text{ je nachdem } 2\alpha \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \beta^2 \quad (4)$$

2. Die Verteilung der unendlich kleinen, endlichen und unendlich grossen Werte von  $\rho$ , wie sie durch (4) gegeben ist, lässt sich in folgender Weise geometrisch veranschaulichen. Man betrachte  $\alpha : \beta : \gamma$  als homogene Coordinaten eines Punktes in einem rechtwinkligen Coordinatensystem, so bilden sich wegen (2) alle zulässigen Wertesysteme der Indices ab im Innern eines Dreiecks, das von den Geraden

$$x = 0; \quad x = y; \quad y = 1$$

begrenzt wird und daher die Ecken

$$A = (0 : 0 : 1); \quad B = (0 : 1 : 1); \quad C = (1 : 1 : 1)$$

besitzt. (Fig. 1). In diesem Dreieck setzen wegen (4) diejenigen Punkte, deren zugehörige Indices auf endliche Werte von  $\rho$  führen, eine unendliche Punktmenge zusammen, welche sich auf der Geraden

$$2x = y$$

befindet und daselbst sich vom Punkt  $A$  bis zum Punkt

$$D = (1 : 2 : 2)$$

erstreckt. Diese Punktmenge ist discret, weil nur diejenigen Punkte der Geraden ihr angehören, welche rationale Coordinaten besitzen; sie ist von der zweiten Gattung im Sinne der Mengen-

1) Salmon-Fiedler, Analytische Raumgeometrie II. S. 160.

2) Diese Formel gilt auch für den Krümmungsradius bei ebenen Curven, vgl. Mehmke „Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in einer Ebene“. Zeitschr. für Math. Physik. Jahrg. 35. S. 5.

lehre<sup>1)</sup> und zwar „überall dicht“, weil sie in jedem ihrer Punkte eine Häufungsstelle besitzt; aus diesem Grunde erscheint die Linie  $AD$  in Fig. 1 ausgezogen. Links unterhalb dieser Linie ist das Gebiet der unendlich grossen ( $\infty$ ) und rechts oberhalb das Gebiet der unendlich kleinen ( $0$ ) Werte von  $\varrho$ . Selbstverständlich kommen auch hier nur die Punkte mit rationalen Coordinaten in Betracht.

3. Zur Berechnung des Torsionsradius  $r$  hat man ferner:

$$d^2x = (\lambda\alpha(\alpha - 1)\varepsilon^{\alpha-2} + \dots)(d\varepsilon)^2 + (\lambda\alpha\varepsilon^{\alpha-1} + \dots)d^2\varepsilon$$

$$d^2y = (\mu\beta(\beta - 1)\varepsilon^{\beta-2} + \dots)(d\varepsilon)^2 + (\mu\beta\varepsilon^{\beta-1} + \dots)d^2\varepsilon$$

$$d^2z = (\nu\gamma(\gamma - 1)\varepsilon^{\gamma-2} + \dots)(d\varepsilon)^2 + (\nu\gamma\varepsilon^{\gamma-1} + \dots)d^2\varepsilon$$

$$X = dy d^2z - dz d^2y = (\mu\nu\beta\gamma(\gamma - \beta)\varepsilon^{\beta+\gamma-3} + \dots)(d\varepsilon)^3$$

$$Y = dz d^2x - dx d^2z = (\nu\lambda\gamma\alpha(\alpha - \gamma)\varepsilon^{\gamma+\alpha-3} + \dots)(d\varepsilon)^3$$

$$Z = dx d^2y - dy d^2x = (\lambda\mu\alpha\beta(\beta - \alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \dots)(d\varepsilon)^3$$

$$d^3x = (\lambda\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\varepsilon^{\alpha-3} + \dots)(d\varepsilon)^3 + (3\lambda\alpha(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-2} + \dots) d^2\varepsilon \cdot d\varepsilon + (\lambda\alpha\varepsilon^{\alpha-1} + \dots)d^3\varepsilon$$

$$d^3y = (\mu\beta(\beta-1)(\beta-2)\varepsilon^{\beta-3} + \dots)(d\varepsilon)^3 + (3\mu\beta(\beta-1)\varepsilon^{\beta-2} + \dots) d^2\varepsilon \cdot d\varepsilon + (\mu\beta\varepsilon^{\beta-1} + \dots)d^3\varepsilon$$

$$d^3z = (\nu\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\varepsilon^{\gamma-3} + \dots)(d\varepsilon)^3 + (3\nu\gamma(\gamma-1)\varepsilon^{\gamma-2} + \dots) d^2\varepsilon \cdot d\varepsilon + (\nu\gamma\varepsilon^{\gamma-1} + \dots)d^3\varepsilon$$

$$M = Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z = (-\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma(\beta - \alpha)(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta)\varepsilon^{\alpha+\beta+\gamma-6} + \dots)(d\varepsilon)^6$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (\lambda^2\mu^2\nu^2\alpha^2\beta^2(\beta - \alpha)^2\varepsilon^{2(\alpha+\beta-3)} + \dots)(d\varepsilon)^6$$

somit der Radius der Torsion<sup>2)</sup>

$$r = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{M} = \frac{\lambda\mu\alpha\beta}{\nu\gamma} \frac{\beta - \alpha}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \varepsilon^{\alpha+\beta-\gamma} + \dots \quad (5)$$

$$\text{Derselbe ist } \begin{cases} \text{unendlich klein} \\ \text{endlich} \\ \text{unendlich gross} \end{cases} \text{ je nachdem } \alpha + \beta \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \gamma \quad (6)$$

1) Dini, U., „Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse“. Deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1892. S. 21–24.

2) Salmon-Fiedler a. a. O. S. 163 f.

Die Punkte, für deren zugehörige Indices  $r$  endlich ist, bilden auf der Geraden

$$x + g = 1$$

zwischen den Punkten  $B$  und

$$D = (1 : 1 : 2)$$

eine discrete Punktmenge zweiter Gattung, welche das Gebiet der unendlich grossen Werte (links oben) von demjenigen der unendlich kleinen (rechts unten) trennt. (Fig. 2.)

4. Der Radius der ganzen Krümmung  $R$  ergibt sich vermittelst des sog. Lancret'schen Theorems aus der Formel<sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \quad (7)$$

es ist also

$$R = \frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} \quad (8)$$

Daher ist  $R$  unendlich klein, wenn  $\rho$  oder  $r$  unendlich klein; endlich, wenn  $\rho$  und  $r$  endlich oder eine dieser Grössen endlich, die andere unendlich gross; unendlich gross, wenn  $\rho$  und  $r$  unendlich gross sind. Die Werteverteilung von  $\lambda$  ergibt sich daher durch Combination der Fig. 1 und 2: die discrete Punktmenge zweiter Gattung, deren zugehörigen Indices endliche Werte von  $R$  entsprechen, liegt auf der gebrochenen Linie von  $B$  über

$$D = (1 : 2 : 3)$$

nach  $A$ ; links ist das Gebiet der unendlich grossen, rechts dasjenige der unendlich kleinen Werte von  $R$ . (Fig. 3).

5. Der Radius der sphärischen Krümmung<sup>2)</sup> ergibt sich aus der Formel

$$R^* = \sqrt{\rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} \quad (9)$$

Es sei zunächst  $2\alpha \gtrless \beta$ ; dann ist

1) Schell a. a. O. S. 23.

2) Salmon-Fiedler a. a. O. S. 172.

$$d\rho = \left( \frac{\lambda^2 \alpha^2 (2\alpha - \beta)}{\mu \beta (\beta - \alpha)} \varepsilon^{2\alpha - \beta - 1} + \dots \right) d\varepsilon$$

also

$$\frac{r d\rho}{ds} = \frac{\lambda^2 \alpha^2 (\lambda \alpha - \beta)}{\alpha \gamma (\gamma - \alpha) (\gamma - \beta)} \varepsilon^{2\alpha - \gamma} + \dots$$

$$\left( \frac{r d\rho}{ds} \right)^2 = \frac{\lambda^4 \alpha^4 (2\alpha - \beta)^2}{\nu^2 \gamma^2 (\gamma - \alpha)^2 (\gamma - \beta)^2} \varepsilon^{4\alpha - 2\gamma} + \dots$$

$$\rho^2 = \frac{\lambda^4 \alpha^4}{\mu^2 \beta^2 (\beta - \alpha)^2} \varepsilon^{4\alpha - 2\beta} + \dots$$

Demgemäss ist in (9) das erste Glied unter dem Wurzelzeichen von höherer Ordnung in  $\varepsilon$  als das zweite, letzteres also massgebend, und man hat:

$$R^* = \frac{\lambda^2 \alpha^2}{\nu \gamma} \frac{2\alpha - \beta}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \varepsilon^{2\alpha - \gamma} + \dots \quad (10)$$

Dabei ist  $R^* \begin{cases} \text{unendlich klein,} \\ \text{endlich} \\ \text{unendlich gross} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right. \text{ je nachdem } 2\alpha \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \gamma \quad (11)$

Die Punkte, deren Indices endliche Werte von  $R^*$  liefern, bilden somit eine discrete Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

$$2x = 1$$

zwischen den Punkten

$$D = (1 : 1 : 2) \quad \text{und} \quad E = (1 : 2 : 2)$$

Links ist das Gebiet der unendlich grossen, rechts das Gebiet der unendlich kleinen Werte von  $R^*$ .

6 Aber die Formeln (10) und (11) sind ungültig, wenn

$$2\alpha = \beta$$

ist. Denn alsdann fällt das erste Glied von  $d\rho$  weg und das zweite Glied ist

$$d\rho = \left\{ \left( -\frac{\alpha + 1}{2\alpha^2} \frac{\lambda \lambda'}{\mu} - \frac{(\alpha + 1)(2\alpha + 1)}{2\alpha^2} \frac{\lambda^2 \mu'}{\mu^2} \right) + \dots \right\} d\varepsilon$$

$$\frac{r d\rho}{ds} = \frac{(\alpha + 1)\lambda}{\nu \gamma (\gamma - \alpha) (\gamma - 2\alpha)} \left\{ \lambda' + \frac{(2\alpha + 1)\lambda \mu'}{\mu} \right\} \varepsilon^{2\alpha - \gamma + 1} + \dots$$

Ist nun  $\gamma > 2\alpha + 1$ , so ist dieses Glied massgebend, und es wird

$$R^* = \frac{(\alpha+1)\lambda}{v\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-2\alpha)} \left\{ \lambda' + \frac{2(\alpha+1)\lambda\mu'}{\mu} \right\} \varepsilon^{2\alpha-\gamma+1} + \dots \quad (12)$$

also unendlich gross.

Ist dagegen

$$\gamma = 2\alpha + 1$$

so sind beide Glieder unter dem Wurzelzeichen von (9) endlich, daher

$$R^* = \sqrt{\frac{\lambda^4}{4\mu^2} + \frac{\lambda^2}{v^2(2\alpha+1)^2} \left\{ \lambda' + (2\alpha+1) \frac{\lambda\mu'}{\mu} \right\}^2} + \dots \quad (13)$$

also endlich.

Es existirt somit noch eine zweite unendliche Punktmenge, deren zugehörige Indices auf endliche Werte von  $R^*$  führen. Dieselbe ist ebenfalls discret, befindet sich auf der Geraden

$$2x = y$$

und umfasst die Punkte

$$F = (1 : 2 : 3); (2 : 4 : 5); (3 : 6 : 7); (4 : 8 : 9) \dots \\ (r : 2r : 2r + 1) \dots \text{(cf. Fig. 4)}$$

Sie besitzt die einzige Häufungsstelle

$$E = (1 : 2 : 2)$$

und ist daher von der ersten Gattung; sie erstreckt sich von der Häufungsstelle ausgehend in das Gebiet der unendlich grossen Werte von  $R^*$ . Die nicht der Punktmenge angehörenden, rationale Coordinaten besitzenden Punkte der Geraden  $FE$  gehören Indices an, welche nach (12) unendliche Werte von  $R^*$  liefern.

7. Für den Radius der sphärischen Torsion  $S$  ergibt sich durch Combination verschiedener von Schell<sup>1)</sup> angegebener Formeln die Gleichung

$$S = \frac{R^*}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho}{r} \frac{dr^*}{d\rho} \right)^2}} \quad (14)$$

Unter dem Wurzelzeichen ist das zweite Glied in  $E$  von der Ordnung  $2(\alpha - \beta)$  also massgebend gegenüber dem ersten, so dass die Ordnung von  $S$  in  $\varepsilon$  von dem Ausdruck  $r \frac{R^* d\rho}{\rho dR^*}$  abhängt. Die

1) a. a. O. S. 45—48.

Wertverteilung zeigt Fig. 5. Die Punkte  $(\alpha : \beta : \gamma)$ , welche endlichen Werten von  $S$  entsprechen, bilden:

a) eine Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

$$x + y = 1$$

zwischen den Punkten  $B$  und

$$D = (1 : 1 : 2)$$

(Links oben ist das Gebiet der unendlich grossen, rechts unten dasjenige der unendlich kleinen Werte).

b) eine Punktmenge erster Gattung auf der Geraden

$$2x = 1$$

welche aus den Punkten

$$E = (2 : 3 : 4); (3 : 4 : 6); (4 : 5 : 8); (5 : 6 : 10) \dots$$

$$(r : r + 1 : 2r) \dots$$

besteht und von der Häufungsstelle

$$D = (1 : 1 : 2)$$

aus in das Gebiet der unendlich kleinen Werte hineindringt.

c) eine Punktmenge erster Gattung auf der Geraden

$$2x = y$$

welche aus den Punkten

$$F = (1 : 2 : 4); (2 : 4 : 7); (3 : 6 : 10); (4 : 8 : 13) \dots$$

$$(r : 2r : 3r + 1) \dots$$

besteht, und von der auf der Geraden  $BD$  gelegenen Häufungsstelle

$$G = (1 : 2 : 3)$$

aus in das Gebiet der unendlich grossen Werte hineinragt.

8. Für die Curve der Schmiegun $g$ s-kugelmittelpunkte ist ferner: der Radius der absoluten Krümmung<sup>1)</sup>

$$\rho_k = \frac{R^* dR^*}{d\varrho} \tag{15}$$

Die Wertverteilung ist in Fig. 6 angegeben. Die endlichen Werte von  $\rho_k$  bilden eine Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

1) Schnell a. a. O. S. 48.

zwischen den Punkten  $2x + y = 2$

$$D = (1 : 2 : 2) \quad \text{und} \quad E = (2 : 2 : 3)$$

ferner zwei Punktmengen erster Gattung, die eine auf der Geraden

$2x = 1$   
bestehend aus den Punkten

$$F = (2 : 3 : 4); (3 : 5 : 6); (4 : 7 : 8); (5 : 9 : 10) \dots$$

$$(r : 2r - 1 : 2r) \dots$$

die andere auf der Geraden

$2r = y$   
bestehend aus den Punkten

$$G = (1 : 2 : 3); (2 : 4 : 5); (3 : 6 : 7); (4 : 8 : 9) \dots$$

$$(r : 2r : 2r + 1) \dots$$

Beide erstrecken sich von der Häufungsstelle  $D$  aus in das Gebiet der unendlich grossen Werte von  $\varrho_k$  hinein

Der Torsionsradius derselben Curve ist

$$r_k = \frac{R^* \varrho}{r} \frac{dR^*}{d\varrho} \quad (16)$$

Die Wertverteilung siehe Fig. 7. Man hat für die endlichen Werte von  $r_k$  eine Punktmenge zweiter Gattung auf der Geraden

$2x = y + 1$   
zwischen den Punkten

$$D = (2 : 3 : 3) \quad \text{und} \quad E = (1 : 1 : 2)$$

ferner eine Punktmenge erster Gattung auf der Geraden

$2x = 1$   
welche aus den Punkten

$$F = (2 : 3 : 4); (3 : 4 : 6); (4 : 5 : 8); (5 : 6 : 10) \dots$$

$$r : r + 1 : 2r \dots$$

besteht und von der Häufungsstelle  $E$  aus in das Gebiet der unendlich grossen Werte hineinragt; endlich den in demselben Gebiet gelegenen discreten Punkt

$$G = (1 : 2 : 3)$$

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen bei Raumcurven vorkommenden Krümmungsradien behandeln. Dabei ist zu beachten,

dass der Punkt (1 : 2 : 3), weil derselbe einem nicht singulären Raumcurvenpunkt entspricht, bei jeder Art von Krümmungsradius dem Gebiet der endlichen Werte angehören muss.

Auch die Raumcurvenpunkte mit den Indices  $r : 2r : 3r$  haben lauter endliche Krümmungsradien.

9. Das angegebene Verfahren eignet sich auch zur Berechnung des sog. Krümmungswinkels, welcher von Mehmke <sup>1)</sup> eingeführt wurde. Derselbe bezeichnet diejenige Ebene durch einen Raumcurvenpunkt, welche mit drei auf einander folgenden Schmiegungebenen denselben Winkel  $k$  bildet, als Krümmungsebene, den Winkel  $k$  selbst als Krümmungswinkel.

Es sei

$$ax + by + cz = 0$$

die Gleichung der Krümmungsebene; dabei sei

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Die Schmiegungebene ist:

$$(\mu\nu\beta\gamma(\beta-\gamma)\varepsilon^{\beta+\gamma-\varepsilon} + \dots)x + (\lambda\nu\alpha\gamma(\alpha-\gamma)\varepsilon^{\alpha+\gamma-3} + \dots)y + (\lambda\mu\alpha\beta(\beta-\alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \dots)z = 0$$

Damit erhält man für den Krümmungswinkel  $k$ :

$$\begin{aligned} \cos k &= \frac{a(\mu\nu\beta\gamma(\gamma-\beta)\varepsilon^{\beta+\gamma-3} + \dots) + b(\lambda\nu\alpha\gamma(\alpha-\gamma)\varepsilon^{\alpha+\gamma-3} + \dots) + c(\lambda\mu\alpha\beta(\beta-\alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \dots)}{\sqrt{(\mu\nu\beta\gamma(\gamma-\beta)\varepsilon^{\beta+\gamma-3} + \dots)^2 + (\lambda\nu\alpha\gamma(\alpha-\gamma)\varepsilon^{\alpha+\gamma-3} + \dots)^2 + (\lambda\mu\alpha\beta(\beta-\alpha)\varepsilon^{\alpha+\beta-3} + \dots)^2}} \\ &= a\left(\frac{\nu\gamma(\gamma-\beta)}{\lambda\alpha(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\alpha} + \dots\right) + b\left(\frac{\nu\gamma(\alpha-\gamma)}{\mu\beta(\beta-\alpha)}\varepsilon^{\gamma-\beta} + \dots\right) \\ &\quad + c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\nu^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}\varepsilon^{2\gamma-2\beta} + \dots\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Soll die Krümmungsebene diesen Winkel auch mit den den nächst folgenden Schmiegungebenen einschliessen, so muss  $\frac{d \cos k}{d\varepsilon}$  und  $\frac{d^2 \cos k}{d\varepsilon^2}$  verschwinden. Hieraus folgt:

1) „Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen“, Zeitschr. für Math. u. Phys. Jahrg. 36, S. 56. Nr. 3.

$$\begin{aligned}
 a:b:c = & \left[ \begin{aligned}
 & \frac{\nu\gamma(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{\lambda\alpha(\beta-\alpha)} \varepsilon^{\gamma-\alpha-1} + \dots; \quad \frac{\nu\gamma(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)}{\mu\beta(\beta-\alpha)} \varepsilon^{\gamma-\beta-1} + \dots \\
 & \frac{-\nu^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2} \varepsilon^{2\gamma-2\beta-1} + \dots \\
 & \frac{\nu\gamma(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1)}{\lambda\alpha(\beta-\alpha)} \varepsilon^{\gamma-\alpha-2} + \dots \\
 & \frac{\nu\gamma(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta-1)}{\mu\beta(\beta-\alpha)} \varepsilon^{\gamma-\beta-2} + \dots \\
 & \frac{-\nu^2\gamma^2(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)(2\gamma-2\beta-1)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2} \varepsilon^{2\gamma-2\beta-2} + \dots \\
 & \frac{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)} \varepsilon^{3\gamma-3\beta-3} + \dots; \\
 & \frac{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)}{\lambda\mu\alpha\beta(\beta-\alpha)} \varepsilon^{3\gamma-2\beta-\alpha-3} + \dots; \\
 & \frac{\beta-\alpha}{\lambda\alpha} \varepsilon^{2\gamma-\alpha-\beta-3} + \dots
 \end{aligned} \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

Nun sind 3 Fälle möglich, je nachdem

$$\gamma + \alpha - 2\beta \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \quad (19)$$

a)  $\gamma + \alpha - 2\beta > 0$ ; dann wird

$$a = \frac{\lambda\nu\alpha\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\mu^2\beta^2(\beta-\alpha)^2} \varepsilon^{\gamma+\alpha-2\beta} + \dots$$

$$b = \frac{\nu\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)}{\mu\beta(\beta-\alpha)^2} \varepsilon^{\gamma-\beta} + \dots; \quad c = 1 + \dots$$

$$\cos k = 1 + \dots; \quad \cos k \Big|_{\varepsilon=0} = 1; \quad \operatorname{tg} k \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Die Krümmungsebene fällt mit der Schmiegungeebene zusammen

b)  $\gamma + \alpha - 2\beta = 0$ ; dann wird

$$a = \frac{2\lambda\nu\alpha(2\beta-\alpha)}{\sqrt{4\lambda^2\nu^2\alpha^2(2\beta-\alpha)^2 + \mu^2\beta^4}} + \dots; \quad b = 0 \cdot \varepsilon^{\beta-\alpha} + \dots$$

$$c = \frac{\mu^2\beta^2}{\sqrt{4\lambda^2\nu^2\alpha^2(2\beta-\alpha)^2 + \mu^4\beta^4}} + \dots$$

$$\cos k = \frac{\mu^2\beta^2}{\sqrt{4\lambda^2\nu^2\alpha^2(2\beta-\alpha)^2 + \mu^4\beta^4}} + \dots$$

(20)

(20)

$$\operatorname{tg} k = \frac{2\lambda\nu\alpha(2\beta-\alpha)}{\mu^2\beta^2} + \dots$$

$$\operatorname{tg} k \Big|_{\epsilon=0} = \frac{2\lambda\nu\alpha(2\beta-\alpha)}{\mu^2\beta^2}$$

die Krümmungsebene bildet mit der Schmiegungebene einen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  und schneidet dieselbe in der Hauptnormale.

c)  $\gamma + \alpha - 2\beta < 0$ ; dann wird

$$a = 1 + \dots; \quad b = \frac{-\mu\beta(2\beta - \gamma - \alpha)}{\lambda\alpha(\gamma - \beta)} \epsilon^{\beta-\alpha} + \dots$$

$$c = \frac{\mu^2\beta^2(\beta - \alpha)^2}{\lambda\nu\alpha\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \epsilon^{2\beta-\gamma-\alpha} + \dots$$

also

$$\cos k = 0 + \dots \quad \cos k \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad \operatorname{tg} k \Big|_{\epsilon=0} = \infty$$

Die Krümmungsebene steht auf der Schmiegungebene senkrecht und fällt mit der Normalebene zusammen.

Der allgemeine Ausdruck für  $\operatorname{tg} k$  (ohne Rücksicht auf (9)) ist:

$$\operatorname{tg} k = \frac{\lambda\nu\alpha\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\mu^2\beta^2(\beta - \alpha)^2} \epsilon^{\gamma+\alpha-2\beta} + \dots \quad (21)$$

Zu dem gegebenen Punkt mit den Indices  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ist ein anderer Raumcurvenpunkt reciprok mit den Indices  $(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma)$ ; derselbe hat nach Björling <sup>1)</sup> die Entwicklungen:

$$x = \frac{\gamma(\alpha - \gamma)\nu}{\beta(\beta - \alpha)\mu} \epsilon^{\gamma-\beta} + \dots$$

$$y = \frac{\gamma(\gamma - \beta)\nu}{\alpha(\beta - \alpha)\lambda} \epsilon^{\gamma-\alpha} + \dots$$

$$z = \frac{(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta)\gamma}{\alpha\beta} \epsilon^\gamma + \dots$$

Berechnet man für diesen Punkt den Radius der absoluten Krümmung mittelst (3), so erhält man denselben Wert, welchen Gleichung (21) für Tangente  $k$  liefert. Hieraus folgt, dass die Tangens des Krümmungswinkels zum Radius der absoluten Krümmung reciprok ist (cf. Mehmke a. a. O.).

1) „Ueber Raumcurvensingularitäten“. Archiv der Math. u. Physik, II. Reihe. Band 8. S. 83.

10. In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $\varrho$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $R^*$ ,  $S$ ,  $\varrho_k$ ,  $r_k$ ,  $tgk$  für einige einfache Indicessysteme zusammengestellt. (Dabei bedeutet 0 unendlich kleine,  $\varepsilon$  endliche,  $\infty$  unendlich grosse Werte).

Indices	$\varrho$	$r$	$R$	$R^*$	$S$	$\varrho_k$	$r_k$	$tgk$
123	$\varepsilon$							
124	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	0
125	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
126	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
127	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
134	$\infty$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
135	$\infty$	$\varepsilon$						
136	$\infty$	0						
137	$\infty$	0						
145	$\infty$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
146	$\infty$							
147	$\infty$	$\varepsilon$						
156	$\infty$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
157	$\infty$							
167	$\infty$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
234	0	0	0	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
235	0	$\varepsilon$	0	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	0
236	0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
237	0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
245	$\varepsilon$	0	0	$\varepsilon$	0	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$
246	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
247	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	0
256	$\infty$	0	0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
257	$\infty$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
267	$\infty$	0	0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
345	0	0	0	0	0	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
346	0	0	0	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\infty$	$\varepsilon$	0
347	0	$\varepsilon$	0	$\infty$	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$	0
356	0	0	0	$\varepsilon$	0	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$
357	0	0	0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\varepsilon$
367	$\varepsilon$	0	0	$\varepsilon$	0	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$
456	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon$
457	0	0	0	0	0	$\infty$	$\varepsilon$	0
467	0	0	0	0	0	$\varepsilon$	$\infty$	$\infty$
567	0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon$

Stuttgart, April 1896.

VIII.

**Théorèmes fondamentaux de la géométrie  
sphérique.**

Par

**V. Sikstel.**

Kasan typographie de l'Université Impériale. 1892.

Traduit du russe, du „Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan“.  
Deuxième série. Tome II. N. 2.

---

Les nombreuses et infructueuses tentatives de prouver l'admission géométrique formulée par le onzième axiome d'Euclide, au premier coup d'oeil indubitable, eurent, comme on le sait, pour conséquence la critique sévère du système d'Euclide.

Mais encore à présent les admissions géométriques d'Euclide provoquent des questions pénibles, qui peuvent émotionner profondément le théoricien, comme elles l'ont fait dans les temps du grand fondateur de la science appelée la géométrie.

J. Bolyai et l'illustre géomètre russe N. J. Lobatchevsky n'admettaient pas le onzième axiome d'Euclide, mais ils considéraient comme indubitable l'admission de la ligne droite et de la surface plane; actuellement on considère aussi l'idée de la ligne droite d'Euclide (de la ligne complètement définie par deux points pris sur elle arbitrairement) comme une idée préconçue, c'est-à-dire admise sans raisons suffisantes. C'est la caractéristique de la thèse principale de la géométrie d'Euclide que nous donne par exemple le professeur Souvoroff dans l'introduction de son ouvrage connu sous le titre: „Des caractéristiques des systèmes des trois dimensions.“

Si l'idée de la ligne droite d'Euclide est admise sans raisons suffisantes, il en est de même de l'idée de la surface plane d'Euclide. Le célèbre Kant considérait ces idées comme intuitives, c'est-à-dire perçues par une mystérieuse vue intérieure qui nous fait comprendre avec justesse la vraie nature des choses. Malgré l'autorité de l'illustre philosophe nous osons croire que la vérité se trouve dans l'opinion du professeur Souvoroff. Et en effet nous pouvons comprendre cette opinion parce qu'il n'est pas difficile d'indiquer les faits qui ont servi de base nécessaire quoique pas assez suffisante pour les axiomes d'Euclide. Il est permis de croire que ces faits ont été donnés par les observations des lignes horizontales. Effectivement — voici ce que les observations nous donnent: sur de petites surfaces horizontales, par exemple sur les surfaces des tables, sur lesquelles nous nous occupons, ainsi que sur les énormes surfaces des mers calmes, — sur des distances mesurées par pouces et par milliers de verstes, — on peut tracer une ligne complètement définie par deux points, c'est-à-dire une telle ligne qui peut être seule tracée entre deux points; cet arc est l'arc du grand cercle du globe terrestre. Il est bien probable que cette observation précisément ait fait naître l'idée de la ligne infinie ne servant pas de borne à l'espace et complètement définie par deux points pris sur elle arbitrairement. Les observations ci-dessus ne sont pas suffisantes pour une pareille conclusion, parce que ce ne sont pas tous les deux points sur l'arc du grand cercle qui définissent la position de cet arc sur la surface de la sphère: par deux points de la surface sphérique diamétralement opposés on peut mener une quantité innombrable d'arcs de grands cercles.

Si c'est l'observation insuffisante qui a fait naître l'idée de la ligne droite d'Euclide, il est bien naturel de considérer cette idée comme préconçue, et par conséquent on peut nous permettre de vouloir la vérifier. C'est ce que nous avons pour but de notre remarque.

Si par rapport à la ligne servant aux constructions géométriques nous faisons une admission qui ne soit pas en contradiction avec la propriété principale de la droite d'Euclide, et qui laisserait irrésolue la question de l'existence de cette dernière, et si prenant en considération cette admission et les autres faites par Euclide, nous trouvons, ayant recours aux procédés appliqués aussi dans la géométrie d'Euclide, que la droite en question n'existe pas, nous serons bien obligés évidemment de nous réconcilier avec cette déduction. Les admissions nécessaires pour notre but doivent être

contenues dans les caractéristiques suivantes de la surface et de la ligne qui se complètent mutuellement.

I. Nous admettons l'existence d'une surface dont chaque partie peut y être superposée jusqu' à une coïncidence complète. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la superposition seront indiquées plus bas.

II. Nous admettons l'existence sur cette surface des lignes ayant les propriétés suivantes:

a) Si nous déplaçons une pareille ligne, prise sur la surface, en y déplaçant deux points pris arbitrairement, à chaque moment du déplacement toute la ligne peut être amenée à coïncider avec la surface et par conséquent peut continuellement dans toutes ses positions coïncider avec la surface.

Ces lignes peuvent être superposées jusqu' à une coïncidence complète; les conditions nécessaires et suffisantes pour la superposition seront indiquées plus bas.

b) Si  $AB$  est une pareille ligne, nous attribuons à chacune de ses portions, par exemple à la ligne  $AC$ , comme propriété nécessaire la faculté d' être superposée sur chaque partie de la ligne  $AB$ , considérant, qu' en dépendance de la place de la superposition ou toute la portion  $AC$ , ou bientôt l'une de ses parties, coïncidera avec la partie  $AB$  et des portions  $AB$  et  $AC$  se formera une ligne ayant les mêmes propriétés que la ligne  $AB$ . De là nous concluons: 1) que la portion de la ligne en question peut être prolongée de ses deux bouts infiniment et 2) les portions de pareilles lignes peuvent être comparées.

Si nous traçons une ligne, qui a les propriétés indiquées, entre  $A$  et  $B$  — deux points pris sur la surface, la possibilité de comparer ses portions nous permet d' y trouver le point qui la partage en deux portions inégales. Soit  $C$  l'un de ces points et soit  $AC < CB$ . La ligne  $AC$  peut être prise comme unité pour mesurer les portions de la ligne  $AB$  et de celles qui sont plus grandes que  $AB$  et qui peuvent être obtenues par le prolongement de  $AB$  des deux côtés. Ayant ainsi choisi l'unité linéaire, nous posons la condition suivante comme nécessaire et suffisante pour la superposition des lignes, dont il est question, prenant cette unité pour échelle dans toutes nos recherches:

c) „Si nous faisons coïncider deux points pris arbitrairement sur la portion de l'une de nos lignes, égale à l'unité linéaire que

„nous avons choisie, avec deux points de l'autre, quand nous dé-  
 „placerons sur la surface l'une de ces lignes ou toutes les deux,  
 „elles coïncideront dans toute leur longueur et formeront une ligne  
 „pareille à celles-ci.“

Il peut arriver que les surfaces et les lignes ayant les propriétés indiquées soient des surfaces planes et des lignes droites d'Euclide, mais il peut arriver aussi, qu'elles ne le soient pas, c'est pourquoi nous avons l'intention de leur donner des noms particuliers, et nous voulons les appeler: surface géométrique et ligne géométrique.

„Maintenant nous pouvons formuler nettement la condition  
 „nécessaire et suffisante pour la superposition des parties d'une  
 „surface géométrique sur la surface elle-même. Si nous déplaçons  
 „une partie d'une surface géométrique de manière, qu'en tout mo-  
 „ment du déplacement trois points de la partie déplacée, qui ne se  
 „trouvent pas sur la même ligne géométrique, soient sur la surface  
 „géométrique, la partie que nous déplaçons aura en tout moment  
 „du déplacement tous ses points sur la surface géométrique.“

III. Nous admettons que les lignes et les figures ne changent pendant le déplacement.

IV. Nous supposons qu'entre tous les deux points on peut tracer une ligne géométrique.

V. Nous admettons que la ligne géométrique peut être prolongée de ses deux bouts dans une seule direction.

En comparant toutes ces admissions avec les admissions faites dans la géométrie d'Euclide, nous trouvons qu'aucune d'elles ne s'oppose aux bases d'Euclide et que par conséquent elles présentent toutes ensemble le total des conditions qui correspondent au but de vérifier la principale géométrique admission d'Euclide au sujet de la ligne droite. Maintenant, nous basant sur ces admissions, nous pouvons chercher la réponse à la question suivante :

„Existe-t-il une ligne géométrique complètement définie par  
 „deux points pris sur elle arbitrairement“.

Les admissions, que nous avons faites, permettent jusqu' à présent de laisser la question irrésolue, ce qui est nécessaire pour la vérification que nous avons en vue.

D'après les thèses admises on démontre comme dans la géométrie d'Euclide, c'est-à-dire avec les mêmes procédés les théorèmes suivants:

e) La ligne géométrique peut être prolongée infiniment des deux côtés.

f) Le théorème au sujet de l'égalité des angles droits, comme il est démontré dans les cours de géométrie, composés dans l'esprit d'Euclide, quoique Euclide lui-même nous donne cette vérité comme axiome.

Corollaires de ce théorème:

g) „Il n'existe pas sur la surface géométrique de lignes géométriques, qui ayant un point commun soient disposées de telle façon que l'une se trouve toute entière d'un seul côté de l'autre.“

Voici la démonstration de ce théorème. Si  $AOB$  et  $COD$  sont des lignes géométriques qui ont ce point commun, nous imaginant  $OM$  perpendiculaire à  $AB$  (voir fig. 1), nous trouverons que la perpendiculaire élevée du point  $O$  vers  $CD$  doit prendre une des trois positions:  $OM$ ,  $OM_1$  ou  $OM_2$ . Toutes ces positions sont également impossibles, parce que, prenant l'une des trois pour réelle, nous trouverons que les angles droits ne sont pas égaux. Par exemple, supposant

$$OM \perp AB \quad \text{et} \quad OM_1 \perp CD$$

nous trouverons que l'angle droit

$$\angle AOM > \angle COM_1$$

— qui est aussi droit. Voyant que ces déductions sont absurdes et admettant la possibilité de tracer une perpendiculaire du point  $O$  vers la ligne  $CD$ , nous devons conclure que „l'absurdité de notre conclusion n'a lieu que parce que nous avons supposé la possibilité de l'existence de lignes géométriques dont il est question dans le théorème.“

h) Autres conséquences du théorème sur l'égalité des angles droits: des angles adjacents, de la somme de tous les angles successifs ayant le même sommet sur la ligne géométrique et disposés d'un côté de cette ligne; de la somme de tous les angles successifs disposés autour du même point et ayant ce point pour sommet, enfin des angles opposés par le sommet.

Tous ces fondements nous permettent de démontrer les théorèmes nécessaires pour la vérification de l'admission principale d'Euclide au sujet de la ligne droite. C'est de ces derniers que nous allons nous occuper maintenant.

*Théorème I. On peut faire tourner la ligne géométrique autour de chacun de ses points, sur la surface géométrique, laissant le centre de la rotation immobile, en commençant par une position quelconque, du côté où l'on veut, jusqu' à sa première position.*

Soit  $AB$  une ligne géométrique infinie sur une surface géométrique. Soit  $OC$  l'unité linéaire. (admission II, (b)). Faisons tourner la portion  $OC$  autour du point  $O$  de manière qu'il soit continuellement sur la surface [admission II, (a)]. Alors d'après l'admission II (c), la portion  $OC$  n'occupera jamais une position pareille à  $OC'$  (v. fig. 2), c'est à dire en aucun moment de la rotation  $OC$  n'aura avec  $AB$  d'autre point coïncidant que  $O$ . Nous pouvons donc affirmer que la portion  $OC$ , étant en rotation, occupera successivement toutes les positions par rapport à  $AB$ , avec le changement de l'angle de son inclinaison vers  $AB$  dans les limites de  $O$  jusqu' à  $4d$ . Rien ne nous empêche d'imaginer que toute la ligne infinie  $AB$  tourne avec la portion  $OC$ , et occupe par rapport à sa direction primitive toutes les positions formant avec elle des angles de  $0$  jusqu' à  $4d$ .

*Théorème II\* . La ligne géométrique représentant une sécante par rapport à une autre pareille ligne donnée, étant en rotation sur la surface géométrique autour de l'un de ses points en tout moment de la rotation a un point commun avec la ligne donnée.*

---

\*) Le second théorème a été examiné sous un point de vue général par le géomètre italien Battaglini (*Giornale di Mat.* vol. A 1867). *Sulla Geometria Immaginarìa.* Dans ce mémoire Battaglini examine la possibilité du retour du point d'intersection de la ligne donnée avec une autre sécante, qui est en rotation autour d'un point pris hors de la première ligne, après un tour complet de la sécante, dans sa position primitive de trois façons: 1) quand la sécante fait un tour complet, le point de l'intersection reste toujours à une distance finie de sa position primitive (géométrie sphérique); 2) le point de l'intersection retrouve sa position primitive passant par un point infiniment éloigné (la géométrie plane d'Euclide) et 3) le point passe à travers deux points infiniment éloignés et à travers une série de points imaginés qui les séparent (la géométrie pseudo-sphérique de Lobatchevsky)

Dans son ouvrage, l'auteur ne distingue pas ces trois cas, il se borne au premier. Cette circonstance d'après moi provient de ce que l'auteur, pour démontrer le théorème qui n'est juste que dans le cas, où les lignes, dont il est question, peuvent être prolongées des deux côtés du point commun, servant de base à la perpendiculaire. Mais si nous avons pour point coïncident un point infiniment éloigné, le prolongement des lignes de l'autre côté du point devient impossible et le théorème (g) n'est d'aucune importance. C'est la même

Soit  $AB$  la ligne géométrique donnée;  $CDE$  — comme sa sécante (v. fig. 3). On peut toujours tracer du point donné une sécante pour la ligne géométrique donnée d'après l'admission IV et le théorème (g).

Quand la sécante  $CDE$  sera en rotation autour du point  $C$ , il peut se faire que les portions de la sécante:  $CD$ ,  $CF$ ,  $CM$ , etc., soient égales entre eux; alors évidemment  $AB$  sera une ligne fermée. Si au contraire ces portions ne sont pas égales, les points différents de la sécante coïncideront avec la ligne  $AB$  et puis passeront de son autre côté.

Il est évident que la sécante ne peut se trouver toute entière du côté de la ligne  $AB$ , où se trouve le centre de la rotation, qu'étant donnée une de ces trois conditions:

1) Si la sécante est finie, nous pouvons admettre enfin pour elle une telle position dans la quelle son dernier point viendra se placer sur la ligne  $AB$  et, en continuant ensuite la rotation, nous pouvons croire que toute la sécante se trouvera du même côté de la ligne  $AB$ , où se trouve le centre de la rotation. 2) Si la sécante occupe la position  $CMB$ , c'est à dire si elle a avec la ligne donnée pour partie commune  $MB$ , on peut de nouveau, en continuant la rotation, admettre la transition complète de la sécante. 3) Si la sécante occupe la position  $CNK$ , c'est-à-dire la position de tangente à la ligne  $AB$ . Mais: 1) La sécante est infinie et par conséquent son dernier point ne sera jamais sur la ligne  $AB$ .

2) La sécante ne peut pas occuper la position  $CMB$ , d'après l'admission V.

3) La sécante ne peut pas occuper la position  $CNK$ , d'après le théorème (g).

Ainsi la transition complète de la sécante (de tous ses points) du côté de la ligne géométrique donnée, où se trouve le centre de la rotation, est impossible, et par conséquent la sécante dans toutes les positions, c'est-à-dire quel angle qu'elle ne forme avec sa première position, se trouvera située de part de la ligne géométrique

---

cas que nous trouvons dans la géométrie d'Euclide. Ainsi les recherches de l'auteur ne manquant jamais d'intérêt, se bornent à la géométrie sphérique. Th. Souvoroff.

donnée et par conséquent aura toujours avec elle un point commun, De là nous concluons :

1) „Sur la surface géométrique, d'un point donné, on ne peut „pas tracer une ligne géométrique parallèle à la ligne donnée.“

2) „Deux perpendiculaires à la même ligne géométrique se „rencontrent“ (toutes les lignes sont prises sur la surface).

Plus bas nous allons toujours prendre des lignes géométriques sur des surfaces géométriques et au lieu des expressions: surface géométrique, ligne géométrique, tout simplement nous dirons souvent surface, ligne.

*Théorème III. Deux lignes perpendiculaires pour la même troisième se rencontrent dans deux points.*

1) Admettant d'après le corollaire II du théorème précédent que les lignes  $AC$  et  $AD$  — perpendiculaires à la ligne  $AB$ , se rencontrent dans le point  $O$  (v. f. 4), superposons  $\triangle ABO$  sur une partie de la surface  $ABD'C'$  (par le glissement du triangle  $ABD$  sur la surface par ses points  $A$ ,  $B$  et  $O$ ), de manière que la ligne  $AB$  coïncide avec  $BA$ ; alors les lignes  $AO$  et  $BO$  prendront respectivement la direction des lignes  $BD'$  et  $AC'$ , puisque

$$\angle BAO = \angle ABD' = d = \angle ABO = \angle BAC'$$

D'ici on voit que le point  $O$ , dans la nouvelle position du  $\triangle ABO$  se trouvera de l'autre côté de la ligne  $AB$ , sur le prolongement des lignes  $CA$  et  $DB$  et occupera la position  $O'$ , par exemple. Ainsi il est évident que les lignes  $CC'$  et  $DD'$  se rencontrent dans deux points étant perpendiculaires à la ligne  $AB$ .

2) „Les points  $O$  et  $O'$  peuvent-ils coïncider?“ Admettant que les points  $O$  et  $O'$  coïncident dans le point  $O$  (v. f. 5), nous trouverons que les lignes  $AC$  et  $BD$  auront respectivement les positions suivantes:  $C''CAC'C''$  et  $D''DBD'D''$ . Faisant tourner la seconde ligne sur la surface autour du point  $O$  (pour quoi il est suffisant de tourner sa portion, égale à l'unité linéaire, autour du point  $O$ ; soit cette portion par exemple  $OD$ ), nous trouverons d'après l'admission III que l'angle  $DOD'$  ne changera pas à cause de cela; également, ne changera pas  $\angle COC'$ ; mais si nous faisons tourner la ligne, par exemple dans la direction indiquée par la flèche,  $\angle DOC$  changera et  $\angle D'OC'$  changera également, mais la somme de ces deux angles, restera toujours la même et égale ( $\angle COC' - \angle DOD'$ ) — à la différence des angles constants pour

le cas donné. Quand le point  $D$  viendra se placer sur la ligne  $OC$ ,  $\angle DOC$  se transformera en 0 (zéro) parce que les lignes coïncideront complètement dans ce cas (admission II, (c)), — et  $\angle D'OC'$  se transformera aussi en zéro, et par conséquent

$$\angle COC' - \angle DOD' = 0$$

c'est-à-dire les lignes  $CAC'$  et  $DBD'$  — coïncident, ce qui est en contradiction avec ce que nous avons proposé. Cette contradiction n'a pu avoir lieu qu' à cause de la supposition que les points  $O$  et  $O'$  coïncident en un seul, et par conséquent ces points sont différents.

Ainsi: „Deux lignes perpendiculaires à une même troisième se rencontrent dans deux points différents.“

*Théorème IV. Deux lignes géométriques prises arbitrairement sur la surface se rencontrent toujours dans deux points (différents).*

Soient  $DD'$  et  $NN'$  (v f. 6) deux lignes prises arbitrairement sur la surface. Abaisant du point  $A$  par exemple, de la ligne  $NN'$  la perpendiculaire  $AB$  sur la ligne  $DD'$  et en menant  $MM'$  perpendiculaire pour  $AB$ , nous trouverons, d'après ce que nous avons démontré que  $MM'$  et  $DD'$  se rencontreront dans deux points  $O$  et  $O'$ . Nous pouvons considérer la ligne  $MAM'$  comme l'une des positions de la sécante  $ABC$  par rapport à la ligne  $DD'$  et, comme nous voyons à présent,  $AM$  et  $AM'$  — deux branches de la sécante ont chacune un point commun ( $O$  et  $O'$ ) avec la ligne  $DD'$ . En faisant tourner la sécante en commençant par la position  $MAM'$  autour du point  $A$ , nous devons conclure, comme lorsque nous avons démontré le théorème II, qu'aucune de ses branches, ni  $AMO$ , ni  $AM'O'$ , comme sécantes de la ligne  $DD'$ , ne peuvent passer avec tous leurs points de l'autre côte de la ligne  $DD'$ , où se trouve le point  $A$  (le centre de la rotation), et par conséquent, la sécante, en tout moment de la rotation, aura la ligne  $DD'$  deux points d'intersection. Comme, en faisant tourner la sécante, on peut toujours parvenir à la coïncidence de  $NAN'$  avec une direction quelconque de la sécante (théorème I), nous avons bien le droit de confirmer que  $NAN'$ , suffisamment continuée, coupera  $DD'$  dans deux points. Ces points doivent être différents, ce que nous pouvons voir, ayant recours aux mêmes raisonnements, que nous avons appliqués dans un pareil cas, voulant démontrer le théorème III.

Pour développer plus loin le nouveau système géométrique, fondé sur les bases indiqués ci-dessus, nous croyons devoir admettre ce sixième „Postulat: Deux lignes géométriques non coïncidentes, „qui se trouvent sur la surface géométrique, ne peuvent pas avoir „plus de deux points communs.“

Remarque. Nous considérons tous les points coïncidents comme un seul.

*Théorème V. Les parties de deux lignes perpendiculaires l'une pour l'autre, comprises entre les points de l'intersection de ces lignes, sont égales (v. f. 7).*

Soit  $ACBM$  une ligne et que  $BDAy$  soit perpendiculaire. Ces lignes outre le point commun donné  $B$ , doivent avoir, d'après ce que nous avons démontré, un autre point commun; soit  $A$  cet autre point. Comme

$$\angle CBD = \angle ABM = d$$

on peut superposer le fuseau  $ACBDA$  sur  $\angle DBM$  de manière que le côté  $BCA$  prenne la direction de la ligne  $BDA$ ; alors  $BDA$  — côté du fuseau prendra la direction  $BM$  — côté de  $\angle DBM$ , à cause de l'égalité des angles au point  $B$ . Alors le sommet  $A$  du fuseau doit évidemment prendre place quelque part sur la ligne  $BDA$ . Ayant admis que  $K$ , nouvelle position du point  $A$ , diffère de la première, nous trouverons que la ligne  $ACBMK$  a avec la ligne  $BDA$  trois points communs:  $A$ ,  $B$  et  $K$ , ce qui est en contradiction avec l'admission VI. Ainsi quand nous superposons  $BCA$  sur la ligne  $BDA$  — en commençant par le point  $B$  — le point  $A$  doit coïncider avec sa première position, et par conséquent la ligne

$$BCA = BDA$$

*Théorème VI. Deux lignes perpendiculaires se rencontrent pour la seconde fois aussi sous un angle droit. (v. f. 8, des. 1, 2, 3 et 4<sup>ème</sup>).*

Soit la ligne  $BDA$  perpendiculaire à la ligne

$$ACBM \text{ et } \angle CBD = d \text{ (v. des. I)}$$

Retournant le fuseau que nous voyons sur le dessin I, le faisant glisser sur la surface, donnons lui la position qu'il a sur le dessin 2. Prenant  $\angle CAD \gtrless a$ , superposons le II (second) fuseau sur le I (premier), de manière que le sommet  $A$  — du II (second) coïncide avec le sommet --  $B$  du I (premier) et que le côté  $ACB$  du (second) II prenne la direction du côté  $BDA$  du I (premier). D'après

cela le sommet  $B$  du II (second) coïncidera avec le sommet  $A$  du I (premier) à cause de l'égalité des lignes  $ACB$  et  $BDA$ , comme

$$\angle CAD \gtrless d \text{ et } \angle CBD = d$$

le côté  $ADB$  du II fuseau coupera absolument  $ACB$  — côté du I (premier) dans quelque point  $K$ , qui se trouve sur la ligne  $ACB$  entre les points  $A$  et  $B$ . (Le dessin 3 se rapporte au cas où  $\angle CAD < d$ . Le dessin 4 se rapporte au cas où  $\angle CAD > d$ ) Mais alors nous trouverons que les lignes  $ACB$  et  $AKB$  se rencontrent tout au moins dans trois points  $A$ ,  $K$  et  $B$ , ce qui ne s'accorde pas avec l'admission VI. Cette contradiction n'a pu avoir lieu qu'à cause de la supposition que  $\angle CAD \gtrless d$ , et par conséquent

$$\angle CAD = d$$

*Théorème VII. Toutes les lignes géométriques sur la surface sont des lignes fermées et par conséquent elles sont toutes égales entre elles.*

Soit la ligne  $CA$  perpendiculaire à la ligne  $BCD$  (v. f. 9).

En continuant la ligne  $BCD$  jusqu'à son second point d'intersection avec la ligne  $CA$  et prenant en considération que  $CB$  coupera  $CA$  une seconde fois dans le point  $A$ , nous démontrerons par la superposition, comme nous avons démontré le théorème V, que le prolongement de  $CD$  passera aussi par le point  $A$ . Maintenant d'après le théorème VI, nous concluons que

$$\angle BAC = \angle CAD = d$$

et par conséquent (d'après le théorème réciproque au théorème des angles adjacents, démontré, comme dans la géométrie d'Euclide), les lignes  $AD$  et  $AB$  forment une seule ligne géométrique. D'ici il est évident que la ligne  $ABCD A$  présente une ligne infinie et par conséquent toute ligne prise toute entière est une ligne fermée. Comme les lignes peuvent être superposées l'une sur l'autre jusqu'à une coïncidence complète, la circonstance qu'elles sont fermées nous prouve qu'elles sont égales. „D'après ce théorème nous concluons „encore que la ligne géométrique est infinie dans le sens que sa portion peut être continuée jusqu'à l'infini et passer par le point de „départ la quantité de fois suffisante.“

*Théorème VIII. Les deux lignes géométriques sur la surface se partagent en deux parties égales.*

Soient  $ACBNA$  et  $ADBMA$  deux lignes qui se rencontrent dans les points  $A$  et  $B$  (v. f. 10). Les angles  $CAD$  et  $NAM$  sont opposés et par conséquent égaux (corollaire du théorème de l'égalité des angles droits). Cela nous permet de superposer le fuseau  $ACBDA$  sur le fuseau  $ANBMA$  en faisant glisser l'un des deux sur la surface et de parvenir à ce que  $ACB$  prenne la direction de  $ANB$  et que  $ADB$  passe sur  $AMB$ . Alors le sommet  $B$  d'un fuseau coïncidera avec le même sommet d'autre, car, si nous supposons que sommet  $B$  du premier fuseau prend place en dehors ou au-dedans de l'autre (pas sur les point  $B$ ), nous trouverons que la ligne peut être prolongée d'un côté dans deux directions (ce qui est en contradiction avec l'admission V). Ainsi en superposant  $ACB$  et  $ADB$  sur  $ANB$  et  $AMB$ , nous trouverons que les derniers points des lignes superposées coïncident, et par conséquent

$$ACB = ANB \quad \text{et} \quad ADB = AMB$$

c'est-à-dire les lignes  $ACBNA$  et  $ADBMA$  se partagent mutuellement en deux parties égales.

Corollaire. Comme par chaque point de la ligne géométrique donnée sur la surface, on peut tracer sur cette surface une quantité infinie d'autres pareilles lignes, nous pouvons affirmer d'après le théorème VIII, qu'elles passeront toutes par un autre point constant sur la surface, qui sera également éloigné du point donné, servant de commencement aux lignes tracées, en prenant ces distances des deux côtés sur chaque ligne géométrique. D'ici nous concluons, que „par deux points sur la surface géométrique, „présentant les milieux de quelques lignes géométriques, on peut „tracer une quantité infinie d'autres lignes géométriques“.

Les corollaires du théorème II, le théorème III et le théorème IV de notre recherche, obtenus au moyen des mêmes principes sur les quels est basé le système géométrique d'Euclide, permettent, il nous semble, d'avoir la conviction que les idées fondamentales de la géométrie d'Euclide sont préconçues, car nous pouvons dire maintenant: 1) il n'y a pas de ligne géométrique complètement définie par deux points pris sur elle arbitrairement et 2) il n'y a pas de surface géométrique, sur laquelle on puisse tracer du point donné une ligne géométrique parallèle à la ligne donnée.

Remarque. Les théorèmes démontrés dans notre recherche peuvent être largement appliqués sur la sphère pour les arcs des grands cercles. Il fallait s'y attendre ayant en considération le caractère des admissions prises pour base de la recherche. En

comparant ces admissions avec les positions géométriques qui caractérisent la surface sphérique, nous trouvons: L'admission I peut être appliquée aussi sur la sphère. L'admission II peut être également appliquée sur la sphère: „deux points de la circonférence d'un grand cercle définissent complètement la position de cette circonférence sur la surface sphérique si la distance entre eux est plus petite que la moitié de la circonférence (ou plus grande que la moitié de la circonférence)<sup>1)</sup>. Dans notre admission II nous avons la possibilité d'une coïncidence complète des lignes géométriques, si l'unité linéaire est choisi ainsi: traçant entre deux points choisis la ligne géométrique  $AB$ , définissons sur elle le point  $C$  de manière à obtenir l'inégalité:  $AC < CB$  et ensuite prenons

$$AC = 1$$

en la prenant pour échelle constante.  $AB$  sera-t-elle pour la surface sphérique plus petite que la circonférence du grand cercle ou égale à elle, nous obtiendrons toujours que  $AC < \frac{1}{2}$  de la circonférence. Si  $AB <$  que la circonférence, il est évident que comme

$$AC + CB = AB$$

et  $AC < CB$ ,  $2AC <$  que la circonférence et  $AC < \frac{1}{2}$  de la circonférence; si  $AB =$  à la circonférence, alors dans les mêmes conditions:  $2AC <$  que la circonférence et  $AC < \frac{1}{2}$  de la circonférence. Tous les autres théorèmes et toutes les autres admissions, qui y sont basés, peuvent être appliqués aussi sur la surface sphérique.

---

1) Si la distance entre deux points de la surface sphérique est plus grande que la moitié de la circonférence du grand cercle, la distance entre les mêmes points, prise dans la direction opposée, est plus petite que la moitié de la circonférence.

Orebourg, 31 mai 1892.

## IX.

## Relationen bei regulären, dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygonen.

Von

Prof. **E. Dolezal**,

Constructeur an der k. k. technischen Hochschule zu Wien.

## E i n l e i t u n g.

Der symbolischen Bezeichnung, wegen, welche in folgender Untersuchung eingehalten wurde, wollen wir vorausschicken:

$$s = \overline{AB}$$

sei die Seite eines dem Kreise mit dem Radius

$$r = \overline{AC} = \overline{BC}$$

einbeschriebenen, regelmässigen  $n$ -Eckes;

$$S = \overline{GH}$$

die Seite des demselben Kreise umschriebenen regulären Polygons mit  $n$  Seiten;

$$t = \overline{AF} = \overline{FB}$$

sei die Länge der Tangente in den Punkten  $A$  resp.  $B$ ;

$$D = \overline{FD}, \quad d = \overline{FE}$$

die Entfernung des Tangentenschnittpunktes  $F$  von den Seiten  $s$  bzw.  $S$ ;

---

1) Die entsprechende Figur kann sich der Leser ohne Schwierigkeit entwerfen.

$$h = \overline{DE}$$

sei die Pfeilhöhe oder der Abstand der Seiten  $s$  und  $S$ ;

$$r = \overline{CD}$$

sei der Radius jenes Kreises, der dem Polygone mit den Seiten  $s$  eingeschrieben ist, hingegen

$$R = \overline{CG}$$

der Radius des dem regulären Polygone mit den Seiten  $S$  umschriebenen Kreises;

$$\omega = \frac{360^\circ}{n}$$

der zum  $n$ -Eck zugehörige Centriwinkel.

Weiters sei

$$\overline{AE} = s_{2n}, \quad \overline{JK} = S_{2n}$$

die zu dem halben Bogen gehörige Sehne bzw. Tangente, welche die Seite des einbeschriebenen resp. umbeschriebenen  $2n$  Eckes darstellen.

Alle Symbole, welche sich auf das  $n$ -Eck beziehen, tragen der Einfachheit halber keinen Index, während die Polygone mit doppelter, vierfacher u. s. w. Seitenzahl die entsprechenden Indices besitzen. So haben wir:

für das  $2n$ -Eck:  $s_{2n}, S_{2n}, t_{2n}, h_{2n}, k_{2n} \dots$

„ „  $2^2n$ -Eck:  $s_{2^2n}, S_{2^2n}, t_{2^2n}, h_{2^2n}, k_{2^2n} \dots$

⋮

für das  $2^m n$ -Eck:  $s_{2^m n}, S_{2^m n}, t_{2^m n}, h_{2^m n}, k_{2^m n} \dots$

### I.

Der Seitenabstand des dem Kreise ein- resp. umschriebenen, regulären  $n$ -Eckes

$$\overline{DD} = h$$

der nach einem terminus technicus Pfeilhöhe bezeichnet werden möge, bildet einen aliquoten Teil des Abstandes

$$\overline{FD} = D$$

der allgemein in der Relation

$$h = \frac{D}{k} \tag{1)}$$

seinen Ausdruck findet. Hierbei bedeutet  $k$  eine Zahl, welche, wie wir später sehen werden, 2 zu ihrem Minimum und 3 als Maximum hat, und welche wir mit dem Namen Teilfactor belegen wollen.

Nun ist

$$\left. \begin{aligned} D &= t \sin \frac{180}{n} = e \frac{\sin^2 \frac{180}{n}}{\cos \frac{180}{n}} \\ \text{und} \\ h &= e \left( 1 - \cos \frac{180}{n} \right) \end{aligned} \right\} 2)$$

Werden diese Werte in die Gleichung 1) eingesetzt, so folgt für den Teilfactor:

$$k = \frac{t \sin \frac{180}{n}}{e \left( 1 - \cos \frac{180}{n} \right)}$$

was entsprechend umgeformt den Ausdruck giebt:

$$k = 1 + \frac{1}{\cos \frac{180}{n}} \quad 3)$$

oder aber nach Einführung des Wertes für die trigonometrische Function:

$$k = 1 + \frac{2t}{s} \quad 4)$$

Mittels des Teilfactors lassen sich alle anderen Längen des Curvenstückes  $AEB$  des Kreises ausdrücken und in einfache, schönen Bau zeigende Formeln kleiden.

Zuerst erhalten wir für die trigonometrischen Functionen des halben Centriwinkels die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{180}{n} &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1} \\ \cos \frac{180}{n} &= \frac{1}{k-1} \\ \operatorname{tg} \frac{180}{n} &= \sqrt{k(k-2)} \\ \operatorname{cotg} \frac{180}{n} &= \frac{1}{\sqrt{k(k-2)}} = \frac{\sqrt{k, k-2}}{k(k-2)} \end{aligned} \right\} 5)$$

Für die folgenden Längen von Strecken stellen wir je drei Formeln auf, jenachdem wir dieselben als Functionen von  $t$ ,  $s$  oder  $\varrho$  betrachten, und erhalten, wie leicht aus der Figur abzulesen ist, und zwar für die Tangente:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{s}{2 \cos \frac{180}{n}} = \frac{k-1}{2} s \\ &= \varrho \operatorname{tg} \frac{180}{n} = \sqrt{k(k-2)} \varrho \end{aligned} \right\} 6)$$

für die Sehne:

$$\left. \begin{aligned} s &= 2t \cos \frac{180}{n} = \frac{2}{k-1} t \\ &= 2\varrho \sin \frac{180}{n} = \frac{2\sqrt{k(k-2)}}{k-1} \varrho \end{aligned} \right\} 7)$$

für den Radius  $t$

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= t \operatorname{cotg} \frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)} t \\ &= \frac{1}{2} s \operatorname{cotg} \frac{180}{n} = \frac{(k-1)\sqrt{k(k-2)}}{2k(k-2)} s \end{aligned} \right\} 8)$$

für die Länge

$$\left. \begin{aligned} D &= t \sin \frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1} t \\ &= \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2} s \\ &= \varrho \operatorname{tg} \frac{180}{n} \sin \frac{180}{n} = \frac{k(k-2)}{k-1} \varrho \end{aligned} \right\} 9)$$

für die Pfeilhöhe:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{D}{k} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2k} s \\ &= \frac{k-2}{k-1} \varrho \end{aligned} \right\} 10)$$

für den Abstand

$$\left. \begin{aligned}
 d = D - h &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k} l \\
 &= \frac{(k-1)\sqrt{k(k-2)}}{2k} s \\
 &= (k-2)\varrho
 \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

Die Länge des Bogens  $l$  über der Sehne  $s$  berechnet sich nach der bekannten Formel:

$$l = 2\varrho \frac{\widehat{180}}{n} \quad 12)$$

wobei

$$\frac{\widehat{180}}{n} = \arcsin \frac{s}{2\varrho} \quad 13)$$

ist, da nämlich

$$m\beta = \frac{s}{2\varrho}$$

gleichkommt.

Setzen wir statt des arcsin die Reihe, so haben wir:

$$\arcsin \frac{s}{2\varrho} = \frac{s}{2\varrho} + \frac{1}{6} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 + \dots$$

Nach Einführung dieses Wertes in 13) geht diese Gleichung über in:

$$l = 2\varrho \left[ \frac{s}{2\varrho} + \frac{1}{6} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 + \dots \right]$$

oder annähernd:

$$l = 2\varrho \left[ \frac{s}{2\varrho} + \frac{1}{6} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^3 \right]$$

was sich reducirt auf

$$l = s + \frac{s}{6} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 + \dots \quad 14)$$

Der hierbei begangene Fehler, entstanden durch Weglassung der nach dem zweiten Summanden der Arcus-Reihe folgenden Glieder, lautet:

$$\begin{aligned}
 f &= 2\varrho \left[ \frac{3}{40} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 + \frac{5}{112} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^7 + \frac{35}{1152} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^9 + \dots \right] \\
 &= \varrho \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^5 \left[ \frac{3}{20} + \frac{5}{56} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 + \frac{35}{576} \left(\frac{s}{2\varrho}\right)^4 + \dots \right] \quad 15)
 \end{aligned}$$

Wird hierin für  $\frac{s}{2\varrho}$  der Wert aus 14) eingeführt, nämlich

$$\left(\frac{s}{2\varrho}\right) = 6 \frac{l-s}{s} = 6\left(\frac{l}{s} - 1\right)$$

wobei  $\frac{l}{s} > 1$  ist, so ergibt sich für den Fehler:

$$f = 6^5 \varrho \left(\frac{l}{s} - 1\right)^5 \left[ \frac{3}{20} + \frac{5}{56} 6^2 \left(\frac{l}{s} - 1\right)^2 + \frac{35}{576} \left(\frac{l}{s} - 1\right)^4 + \dots \right] \quad (16)$$

Nach Formel 15) kann die Grösse des Fehlers jederzeit ermittelt werden, und wir besitzen ein Mittel zu beurteilen, ob der Bestimmung des Bogens jene Genauigkeit innewohnt, deren wir bedürfen.

Formel 14 lässt sich noch vereinfachen; denn es ist:

$$\left(\frac{s}{2\varrho}\right)^2 = 1 - \left(\frac{s}{2t}\right)^2 = \frac{(2t+s)(2t-s)}{4t^2}$$

somit kann auch die Näherungsformel 14) geschrieben werden nach Einführung dieses Wertes:

$$l = s + \frac{2t-s}{3} \frac{s(2t+s)}{8t^2} \quad (17)$$

Selbst dieser Ausdruck lässt noch eine Vereinfachung zu; denn setzen wir, oder wird in einem gegebenen Falle

$$\frac{s(2t+s)}{8t^2} = 1$$

was dann eintritt, wenn

$$s = 2t$$

wird, so erhalten wir für den Bogen den Ausdruck

$$l = s + \frac{2t-s}{3} \quad (18)$$

der eine rasche Berechnung des Bogens gestattet. In diesem Falle erhielten wir für den Centriwinkel auch

$$\cos \frac{180}{n} = \frac{s}{2t} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{180}{n} = 0$$

was dann eintreten würde, wenn  $n = \infty$  wäre, d. h. für ein Polygon mit unendlich vielen Seiten würde die Formel 18) volle Giltigkeit besitzen.

Der Fehler  $f_1$ , den wir begehen, indem wir statt 17) die Formel 18) benutzen, hat den Wert:

$$f_1 = s + \frac{2t-s}{3} \frac{s(2t+s)}{8t^2} - \left[ s + \frac{2t-s}{3} \right] \\ = \frac{2t-s}{3} \frac{s(2t+s) - 8t^2}{8t^2} \quad 12)$$

Dieser Fehler kann auf zweifache Art der Nulle gleich werden und zwar:

- a) wenn  $2t - s = 0$ , oder  
 b) wenn  $s(2t + s) - 8t^2 = 0$  wird.

Der Fall a) ist oben besprochen und tritt ein bei einem Polygon mit unendlich vielen Seiten;

der Fall b) hat zur Bedingung eine quadratische Gleichung, welche nach  $t$  oder  $s$  geordnet werden kann, und lautet:

$$\left. \begin{aligned} t^2 - \frac{s}{4} t &= \frac{s^2}{8} \\ s^2 + 2ts &= 8t^2 \end{aligned} \right\}$$

welche aufgelöst geben:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{s}{2} \\ t_2 &= -\frac{s}{4} \end{aligned} \right\} \text{ resp. } \left\{ \begin{aligned} s_1 &= 2t \\ s_2 &= -4t \end{aligned} \right. \quad \bullet$$

was gleichfalls nie eintreten kann.

Formen wir die Gleichung 18) mit Hilfe der vorher abgeleiteten Ausdrücke um, so erhalten wir für den Bogen:

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{2}{3} \frac{k+1}{k-1} t \\ &= \frac{1}{3} (k+1) s \\ &= \frac{2}{3} \frac{(k+1) \sqrt{k(k-2)}}{k-1} \varrho \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Für die Seite des dem Kreise eingeschriebenen  $2n$ -Eckes gilt die Formel:

$$s_{2n} = \frac{1}{2} \sqrt{s^2 + 4h^2}$$

welche Gleichung nach Einführung der Werte für  $s$  und  $h$  übergeht in

$$\left. \begin{aligned}
 s_{2n} &= \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{k(k-1)} t \\
 &= \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k} s \\
 &= \frac{\sqrt{(k-2)(2k-2)}}{k-1} \rho
 \end{aligned} \right\} 21)$$

der zugehörige Centriwinkel ist  $\frac{180}{n}$  resp.  $\frac{18}{2n}$ ,

Für die Seite des dem Kreise umschriebenen  $n$ -Eckes erhalten wir aus der Proportion:

$$\begin{aligned}
 S : s &= \rho : (\rho - h) \\
 S &= \frac{\rho - h}{\rho} s
 \end{aligned}$$

Da nun

$$\left. \begin{aligned}
 \rho - h &= \frac{1}{k-1} \rho \\
 &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)(k-2)} t \\
 &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2k(k-2)} s
 \end{aligned} \right\}$$

ist, so geht die obige Formel für  $S$  über in

$$\left. \begin{aligned}
 S &= (k-1) s \\
 &= 2 t \\
 &= 2 \sqrt{k(k-2)} \rho
 \end{aligned} \right\} 22)$$

Die Seite des dem Kreise umschriebenen  $2n$ -Eckes ergibt sich einfach; dieselbe ist, wie aus der Figur abzulesen ist:

$$\left. \begin{aligned}
 S_{2n} = 2AJ &= \frac{2}{k} t \\
 &= \frac{k-1}{k} s \\
 &= \frac{2\sqrt{k(k-2)}}{k} \rho
 \end{aligned} \right\} 23)$$

Für das Tangentenstück

$$\overline{JF} = \overline{FK} = \tau$$

lassen sich gleichfalls einfache Formeln aufstellen, welche wir der Vollständigkeit halber anführen wollen. Es ist nämlich

$$2\tau = S - S_{2n}$$

welche Gleichung nach ausgeführter Substitution übergeht in

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{k-1}{k} t \\ &= \frac{(k-1)^2}{2k} s \\ &= \frac{k-1}{k} \sqrt{k(k-2)} \rho \end{aligned} \right\} \quad 24)$$

Die Seite des umschriebenen  $2n$ -Eckes lässt sich ausdrücken durch die Seite des eingeschriebenen  $2n$ -Eckes auf Grund der leicht zu findenden Proportion:

$$S_{2n} : s_{2n} = \rho : (\rho - h_{2n})$$

wobei  $h_{2n}$  den Abstand der Polygonseiten  $S_{2n}$  und  $s_{2n}$  bezeichnet. Dieser Abstand lässt sich, wie folgt, finden: Es ist

$$S_{2n} = \frac{\rho}{\rho - h_{2n}} s_{2n}$$

und nach Formel 23) auch

$$S_{2n} = \frac{k-1}{k} s$$

Drücken wir nun in der ersten Formel  $s_{2n}$  durch  $s$  aus, so erhalten wir:

$$S_{2n} = \frac{\rho}{\rho - h_{2n}} \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k} s$$

und durch Gleichsetzung folgt:

$$\frac{k-1}{k} = \frac{\rho}{\rho - h_{2n}} \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k}$$

woraus die gewünschte Differenz folgt:

$$\left. \begin{aligned} \rho - h_{2n} &= \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2(k-1)} \rho \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2(k-1)(k-2)}}{k-2} s \\ &= \frac{\sqrt{2(k-1)(k-2)}}{2(k-1)(k-2)} t \end{aligned} \right\}$$

welche, in obenstehende Formel für  $S_{2n}$  substituiert, liefert:

$$S_{2n} = \frac{2(k-1)}{\sqrt{k(2k-2)}} s_{2n} \quad 24')$$

Der Abstand  $h_{2n}$ , die Pfeilhöhe des  $2n$ -Eckes, stellt sich dar in der Form:

$$h_{2n} = \rho \left[ 1 - \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}} \right]$$

jener der Polygonseiten  $S$  und  $s$

$$h = \rho \left[ 1 - \frac{1}{k-1} \right]$$

Setzen wir

$$\frac{1}{k-1} = \alpha$$

und conform

$$\sqrt{\frac{k}{2(k-1)}} = \alpha_{2n}$$

so folgt hieraus die Relation:

$$\alpha_{2n}^2 = \frac{k}{2} \alpha$$

und man kann die obigen Ausdrücke für die Pfeilhöhen auch schreiben

$$\left. \begin{aligned} h &= \rho \left[ 1 - \alpha \right] = \rho \left[ 1 - \frac{2}{k} \alpha_{2n}^2 \right] \\ h_{2n} &= \rho \left[ 1 - \alpha_{2n} \right] = \rho \left[ 1 - \sqrt{\frac{k\alpha}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad 25)$$

Der Abstand  $h_{2n}$  lässt sich nun durch  $h$  ausdrücken; die Division obiger Ausdrücke giebt;

$$h_{2n} = \frac{1 - \alpha_{2n}}{1 - \alpha} h = \sqrt{\frac{k-1}{2}} \frac{\sqrt{2(k-1)} - \sqrt{k}}{k-2} h \quad 26)$$

Aus der Figur erhalten wir:

$$\frac{s^2}{4} = h(2\rho - h) = 2\rho h - h^2$$

in welcher Gleichung die Pfeilhöhe  $h$  als Wurzel einer gemischt quadratischen Gleichung auftritt:

$$h^2 - 2\rho h = -\frac{s^2}{4}$$

woraus ist

$$h = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{s^2}{4}}$$

Das obere Zeichen des Wurzelausdruckes hat in vorstehender Auflösung keinen Sinn, da  $h$  nie grösser werden kann als  $\rho$ , es gilt daher bloss das untere Operationszeichen; es wird dann

$$h = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{s^2}{4}} = \rho \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{s}{2\rho} \right)^2 \right]^{1/2} \right]$$

Entwickeln wir den Subtrahenden dieser Differenz nach dem binomischen Lehrsatz in eine Reihe, so folgt:

$$h = \rho \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^4 - \frac{1}{16} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^6 - \frac{5}{128} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^8 \right] \right] - \dots$$

oder reducirt:

$$h = \frac{\rho}{2} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^4 + \dots \right]$$

Indem wir

$$h = \frac{\rho}{2} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^2 = \frac{s^2}{8\rho} = h_n \quad (27)$$

setzen, erhalten wir für die Pfeilhöhe  $h$  nur einen Näherungswert, weshalb wir das Symbol  $h_n$  setzen, und begehen einen Fehler und zwar

$$\delta = \frac{1}{8} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^6 + \frac{5}{128} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^8 + \dots$$

welcher der Summe einer unendlichen Reihe gleichkommt. Lassen wir die Glieder derselben vom zweiten an weg, so hat diese Vernachlässigung einen geringen Einfluss auf die Grösse des Fehlers selbst; derselbe wird hinlänglich genau bestimmt sein durch

$$\delta = \frac{\rho}{8} \left( \frac{s}{2\rho} \right)^4 = \frac{1}{128} \left( \frac{s}{\rho} \right)^4 \rho \quad (28)$$

Substituiren wir in Formel 27) die abgeleiteten Werte für  $s$  und  $\rho$ , so folgt

$$\left. \begin{aligned} h_n &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^2} t \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1} s \\ &= \frac{1}{2} k(k-2) \rho \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

wobei wir nochmals bemerken, dass dies nur Näherungsformeln sind, während die Gleichungen 10) die strengen Werte für  $h$  darstellen. Auch die folgenden Gleichungen für

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{8} \frac{k(k-2) \sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^4} t \\ &= \frac{1}{2} \frac{k(k-2) \sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^3} s \\ &= \frac{1}{8} \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1} \rho \end{aligned} \right\} 30)$$

stellen nur angenähert den Fehler in der Pfeilhöhe dar.

Den wahren Fehler  $\Delta$  in der Pfeilhöhe  $h$  erhielten wir durch Bildung der Differenz aus 10) und 27), nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \Delta = h - h_n &= \frac{1}{2} \frac{(k-2) \sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)^2} t \\ &= \frac{1}{2} \frac{(k-2) \sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)} s \\ &= \frac{1}{2} \frac{(k-2) [2 - k(k-2)]}{k-1} \rho \end{aligned} \right\} 31)$$

Wir haben diese Berechnung von  $h$ , sowie dessen Fehlers hier eingeschaltet, weil in der Ingenieur-Praxis bei der Bogenabsteckung nach gemessene  $s$  und  $t$   $h$  darnach berechnet wird, und weil auf die obige Formel 27), für  $h_n$  nämlich,

$$h_n = \frac{s^2}{8\rho}$$

sich eine Bogenabsteckung stützt, die sogenannte Viertels-Methode.

Die Pfeilhöhe

$$\overline{LK} = h_{2n}$$

der zum  $2n$ -Ecke gehörigen Seite wird bei der praktischen Bogenabsteckung als der vierte Teil von der früheren, der Pfeilhöhe des  $n$ -Eckes, angenommen, also:

$$h_{2n} = \frac{h}{4}$$

Die theoretische Begründung hiefür ist die folgende: die Sehne

$$\overline{AC} = s_{2n}$$

ist fast die Hälfte von  $s_n$ , da in dem mathematischen Ausdrucke derselben

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{s^2}{4} + h^2}$$

$h^2$  seiner Kleinheit wegen vernachlässigt werden kann, somit kann man setzen:

$$s_{2n} = \frac{s}{2}$$

Die Pfeilhöhe  $h_{2n}$  wird nach obiger Näherungsformel

$$h_{2n} = \frac{s_{2n}^2}{8\rho^2}$$

substituieren wir hierin den Wert für  $s_{2n}$  und berücksichtigen die Formel 27), so folgt:

$$h_{2n} = \frac{s_n^2}{32\rho^2} = \frac{1}{4} \frac{s^2}{8\rho^2} = \frac{h}{4} \quad 32)$$

Analog verfährt man weiter in der Berechnung der Pfeilhöhen des  $2^2_n$ ,  $2^3_n$ , . . .  $2^m_n$ -Eckes, wofür sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} h_{2^2_n} &= \frac{h_{2n}}{4} = \frac{h}{4^2} \\ h_{2^3_n} &= \frac{h_{2^2_n}}{4} = \frac{h^3}{4^3} \\ h_{2^m_n} &= \frac{h_{2^{m-1}_n}}{4} = \frac{h}{4^m} \end{aligned} \right\} \quad 33)$$

Indem wir die Gleichung 32) mit 26) vergleichen, erhalten wir die Beziehung:

$$\sqrt{\frac{k-1}{2}} \frac{\sqrt{2(k-2)} - \sqrt{k}}{k-2} = \frac{1}{4}$$

welche nach Befreiung der Wurzeln nachstehende Gleichung vierten Grades liefert:

$$17k^4 - 120k^3 + 312k^2 - 352k + 144 = 0 \quad 34)$$

Diese Gleichung lässt sich unschwer in nachstehende Factoren zerlegen

$$(k-2)^3 (17k-18) = 0$$

Es sind daher

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2$$

drei gleiche und

$$k_4 = \frac{17}{18}$$

die vierte Wurzel der Gleichung 34)

Wie wir später sehen werden, entsprechen die Werte der Teil-  
factoren  $k = 2$  einem Polygon mit unendlich vielen Seiten, während

$$k_4 = \frac{17}{18}$$

keinem reellen Polygone angehören kann, nachdem dieser Teilfactor  
unter das Minimum 2 herabgesunken ist.

Die Näherungswerte der Pfeilhöhen aus den Gleichungen 32)  
und 33) setzen uns in die Lage, die Seiten des  $2^{2n}$ ,  $2^{2n}$ , . . .  $2^{2n}$ -  
Eckes in einfache und einen gesetzmässigen Bau aufweisende Aus-  
drücke umzuformen.

Für die Seite des  $2n$ -Eckes folgt in aller Strenge nach der Formel

$$s_{3n} = \sqrt{\frac{s^2}{4} + h}$$

und ausgeführter Substitution:

$$\left. \begin{aligned} s_{2n} &= \frac{\sqrt{2k(k-1)}}{k(k-1)} t = \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{k(k-1)} t \\ &= \frac{\sqrt{2k(k-1)}}{2k} s = \frac{\sqrt{k(2k-2)}}{2k} s \\ &= \frac{\sqrt{2(k-1)(k-2)}}{k-1} \varrho = \frac{\sqrt{(k-2)(2k-2)}}{k-1} \varrho \end{aligned} \right\} 35)$$

Die Polygonseite  $s_2^{2n}$  bestimmen wir auch der Gleichung

$$k_2^{2n} = \sqrt{s_{2n}^2 + \frac{h_{2n}^2}{4}}$$

wobei  $s_{2n}$  den vorstehenden, streng genauen Wert besitzt, während  
 $k_{2n}$  mit dem Näherungswerte aus 32)

$$h_{2n} = \frac{h}{4}$$

eingesetzt wird. Nach einfacher Rechnung folgt:

$$\left. \begin{aligned} s_2^{2n} &= \frac{\sqrt{k(9k-10)}}{4k(k-1)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(9k-10)}}{8k} s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(9k-10)}}{4(k-1)} \varrho \end{aligned} \right\} 36)$$

Verfährt man in analoger Weise weiter, indem von nun an sowohl für die Polygonseite als die Pfeilhöhe nur die Näherungswerte substituiert werden, so erhalten wir nachstehende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} s_2^3 n &= \frac{\sqrt{k(37k - 42)}}{16k(k - 1)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(37k - 42)}}{32k} s \\ &= \frac{\sqrt{(k - 2)(37k - 42)}}{16k(k - 1)} \varrho \end{aligned} \right\} 37)$$

$$\left. \begin{aligned} s_2^4 n &= \frac{\sqrt{k(149k - 170)}}{64k(k - 1)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(149k - 170)}}{128k} s \\ &= \frac{\sqrt{(k - 2)(149k - 170)}}{64(k - 1)} \varrho \end{aligned} \right\} 38)$$

$$\left. \begin{aligned} s_2^5 n &= \frac{\sqrt{k(597k - 682)}}{256k(k - 1)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(597k - 682)}}{512k} s \\ &= \frac{\sqrt{(k - 2)(597k - 682)}}{256(k - 1)} \varrho \end{aligned} \right\} 39)$$

$$\left. \begin{aligned} s_2^6 n &= \frac{\sqrt{k(2389k - 2730)}}{1024k(k - 1)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(2389k - 2730)}}{2048k} s \\ &= \frac{\sqrt{(k - 2)(2389k - 2730)}}{1024(k - 1)} \varrho \end{aligned} \right\} 40)$$

Das Bildungsgesetz für die Ausdrücke der Seiten der eingeschriebenen Polygone  $s_{2n}$ ,  $s_2^2 n$ ,  $s_2^3 n$ , . . . ist unschwer zu finden.

Die Ausdrücke sind Brüche. Unter dem Wurzelzeichen des Zählers erscheinen die Binome:

$$\begin{array}{l}
 2k - 2 \\
 9k - 10 \\
 37k - 42 \\
 149k - 170 \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2k - 2 \\ 9k - 10 \\ 37k - 42 \\ 149k - 170 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} \text{multipliciert mit } \left\{ \begin{array}{l} k \\ k \\ k - 2 \end{array} \right\}$$

je nachdem, ob der Ausdruck als eine Function von  $t$ ,  $s$  oder  $\rho$  erscheint.

Die Nenner werden erhalten aus:

$$\left. \begin{array}{l} k(k - 1) \\ 2k \\ (k - 1) \end{array} \right\}$$

indem wir successive multipliciren mit 4, wodurch resultirt:

$$\left. \begin{array}{lll} 4k(k - 1), & 16k(k - 1), & 64k(k - 1) \\ 8k & 32k & 128k \\ 4(k - 1) & 16(k - 1) & 64(k - 1) \end{array} \right\} \dots\dots$$

je nachdem dieselben zu  $t$ ,  $s$  oder  $\rho$  gehören.

Die Coefficienten der binomischen Factoren im Radicand haben einen interessanten, gesetzmässigen Bau. Um diesen recht übersichtlich darzustellen, haben wir die Coefficienten, sowie ihre Zerfallung in folgender Tabelle vereinigt.

Polygonseite.	Coefficienten des Binoms.	
	Minuend.	Subtrahend.
$s_{2n}$	2	2
$s_2^2 n$	$9 = 2 \cdot 4 + 1$	$10 = 2 \cdot 4 + 2$
$s_2^3 n$	$37 = 9 \cdot 4 + 1$	$42 = 10 \cdot 4 + 2$
$s_2^4 n$	$149 = 37 \cdot 4 + 1$	$170 = 42 \cdot 4 + 2$
$s_2^5 n$	$597 = 149 \cdot 4 + 1$	$682 = 170 \cdot 4 + 2$
$s_2^6 n$	$2389 = 597 \cdot 4 + 1$	$2730 = 682 \cdot 4 + 2$
$s_2^7 n$	$9557 = 2389 \cdot 4 + 1$	$10 \cdot 922 = 2730 \cdot 4 + 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wir sehen:

- 1) Die Coefficienten beider Summanden des Binoms für  $s_{2n}$  sind einander gleich und betragen 2.
- 2) Die Coefficienten der Binome folgender Polygonseiten sind nach nachstehendem Gesetze gebaut:
  - a) Der Coefficient des ersten Summanden des Binoms (Minuend) wird gebildet, indem man den unmittelbar vorhergehenden, correspondirenden Coefficienten mit 4 multiplicirt und die Einheit hinzu addirt.
  - b) Der Coefficient des zweiten Summanden des Binoms (Subtrahend) wird erhalten, indem man den unmittelbar vorhergehenden, correspondirenden zweiten Coefficienten mit 4 multiplicirt und dann 2 hinzu zählt.

Die so gewonnenen Coefficienten lassen sich unschwer in Summanden zerlegen, die eine geometrische Progression bilden und eine leichte Summirung zulassen, wie die folgende Tabelle zeigt.

Polygon- seite.	Coefficienten des Binoms	
	Minuend.	Subtrahend.
$s_{2n}$	$2 = 2^1$	$2 = 2^1[2^0]$
$s_{2^2n}$	$9 = 2^3 + [2^1]$	$10 = 2[2^2 + 2^0]$
$s_{2^3n}$	$37 = 2^5 + [2^2 + 2^0]$	$42 = 2[2^4 + 2^2 + 2^0]$
$s_{2^4n}$	$149 = 2^7 + [2^4 + 2^2 + 2^0]$	$170 = 2[2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$
$s_{2^5n}$	$547 = 2^9 + [2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$	$682 = 2[2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$
$s_{2^6n}$	$= 2^{11} + [2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$	$= 2[2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$
$s_{2^7n}$	$= 2^{13} + [2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$	$= 2[2^{12} + 2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0]$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$s_{2^m n}$	$x_m = 2^{2m-1} + [2^{2m-4} + 2^{2m-6} + \dots + 2^2 + 2^0]$	$y_m = 2[2^{2m-2} + 2^{2m-4} + \dots + 2^2 + 2^0]$

Wie man sieht, besteht zwischen den Coefficienten des Binoms  $x_m$  und  $y_m$  ein Zusammenhang, der gegeben ist durch

$$\text{oder } \left. \begin{aligned} x_m &= 2^{2m-2} + \frac{1}{2} y_{m-1} \\ 2x^m &= 2^{2m-1} + y_m \end{aligned} \right\} \quad 41)$$

Nachdem die Coefficienten  $x_m$  und  $y_m$  geometrische Progressionen in sich enthalten, so lassen sie sich vereinfachen. Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{3} [3 \cdot 2^{2m-1} + 2^{2(m-1)} + 1] \\ y_m &= \frac{2}{3} [2^{2m} - 1] \end{aligned} \right\} \quad 42)$$

Vor den allgemeinen Factoren im Nenner

$$k(k-1), \quad k, \quad k-1$$

je nachdem sie zu

$$t, \quad s, \quad \rho$$

gehören, erscheinen gewisse Factoren und zwar

für $s_{2n}$	tritt auf	1,	2,	1
$s_2^2 n$	" "	$2^2,$	$2^5,$	$2^4$
$s_2^3 n$	" "	$2^4,$	$2^5,$	$2^4$
$s_2^4 n$	" "	$2^6,$	$2^7,$	$2^6$
⋮				
⋮				
⋮				

durch einen Inductionsschluss erhalten wir:

$$\text{für } s_3^m \quad 2^{2(m-1)}, \quad 2^{2m-1}, \quad 2^{2(m-1)}$$

hiebei sind die zu  $t$  und  $\rho$  zugehörigen Factoren einander gleich.

Indem wir die erhaltenen, allgemeinen Ausdrücke für die Coefficienten verwerthen, können wir für die Seite des eingeschriebenen  $2^n$ -Eckes nachstehende Formeln erhalten:

$$\left. \begin{aligned} s_2^m n &= \frac{\sqrt{k(k x_m - y_m)}}{2^{2(m-1)} k(k-1)} t \\ &= \frac{\sqrt{(k(k \cdot x_m - y_m))}}{2^{2m-1} k} s \\ &= \frac{\sqrt{(k-2)(k \cdot x_m - y_m)}}{2^{2(m-1)} (k-1)} \rho \end{aligned} \right\} \quad 43)$$

oder

$$\begin{aligned}
 s_2^{m_n} &= \frac{\sqrt{k[(k-2)x_m - 2^{2m-1}]}}{2^{2(m-1)}k(k-1)} \quad t \\
 &= \frac{\sqrt{k[(k-2)x_m - 2^{2m-1}]}}{2^{2m-1}k} \quad s \\
 &= \frac{\sqrt{(k-2)[(k-2)x_m - 2^{2m-1}]}}{2^{2(m-1)}(k-1)} \quad e
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} s_2^{m_n} \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 44)$$

weiter auch:

$$\begin{aligned}
 s_2^{m_n} &= \frac{\sqrt{k[2^{2(m-1)}k - \frac{2}{3}y_m]}}{2^{2(m-1)}k(k-1)} \quad t \\
 &= \frac{\sqrt{k[2^{2m-2}k - \frac{2}{3}y_m]}}{2^{2m-1}k} \quad s \\
 &= \frac{\sqrt{(k-2)[2^{2(m-1)}k - \frac{2}{3}y_m]}}{2^{2(m-1)}(k-1)} \quad e
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} s_2^{m_n} \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 45)$$

und schliesslich

$$\begin{aligned}
 s_2^{m_n} &= \frac{\sqrt{\frac{k}{3}[2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)]}}{2^{2(m-1)}k(k-1)} \quad t \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{k}{3}[2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)]}}{2^{2m-1}k} \quad s \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{k-2}{3}[2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)]}}{2^{2(m-1)}(k-1)} \quad e
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} s_2^{m_n} \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 46)$$

## II.

Für den Teilfactor eines  $n$ -Eckes wurde nach Gleichung 3) und 4) des I. Abschnittes erhalten:

$$k_n = 2 + \frac{2t_n}{s_n} = \frac{2 \cos^2 \frac{9}{n}}{\cos \frac{18}{n}} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} k_n \\ &= \end{aligned}} \right\}$$

analog weiter

$$k_{2n} = 1 + \frac{2t_{2n}}{s_{2n}} = \frac{2 \cos^2 \frac{9}{2n}}{\cos \frac{18}{2n}} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} k_{2n} \\ &= \end{aligned}} \right\}$$

1)

$$\left. \begin{aligned}
 k_2^{2n} &= 1 + \frac{2t_2^{2n}}{s_2^{2n}} = \frac{2\cos^2 \frac{90}{2^{2n}}}{\cos \frac{180}{2^{2n}}} \\
 &\vdots \\
 k_2^{m_n} &= 1 + \frac{2t_2^{m_n}}{s_2^{m_n}} = \frac{2\cos^2 \frac{90}{2^{m_n}}}{\cos \frac{180}{2^{m_n}}}
 \end{aligned} \right\} 1)$$

Es ist nicht schwer, den Beweis zu erbringen, dass alle Teil-  
factoren grösser sein müssen als zwei.

Nehmen wir den Radius  $\rho = 1$  an, so werden augenscheinlich

$$\left. \begin{aligned}
 \sin \frac{180}{n} &= s \\
 \operatorname{tg} \frac{180}{n} &= S \\
 \cos \frac{180}{n} &= 1 - h_n \\
 \cos \frac{180}{2n} &= 1 - h_{2n} \\
 &\vdots \\
 \cos \frac{180}{2^{m_n}} &= 1 - h_{2^{m_n}}
 \end{aligned} \right\} 2)$$

Nach Herr „Höhere Mathematik“ Bd. I. pag. 111, besteht die  
trigonometrische Reihe:

$$\sec x = 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + (1 - \cos x)^3 + \dots \quad 3)$$

wobei  $x$  zwischen den Grenzen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$  vorausgesetzt wird und  
unter dieser Supposition auch die Reihe convergirt.

In unserem Falle, wobei der Reihe nach

$$x = \frac{18^\circ}{n} \text{ weiter } \frac{18^\circ}{2n}, \frac{18^\circ}{2^2 n}, \frac{18^\circ}{2^3 n} \dots \frac{18^\circ}{2^{m_n}}$$

ist, wird die erwähnte Bedingung in aller Strenge erfüllt, somit gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \sec \frac{180}{n} &= 1 + \left(1 - \cos \frac{180}{n}\right) + \left(1 - \cos \frac{180}{n}\right)^2 \\
 &\quad + \left(1 - \cos \frac{180}{n}\right)^3 + \dots \\
 \sec \frac{180}{2n} &= 1 + \left(1 - \cos \frac{180}{2n}\right) + \left(1 - \cos \frac{180}{2n}\right)^2 \\
 &\quad + \left(1 - \cos \frac{180}{2n}\right)^3 + \dots \\
 \sec \frac{180}{2^2 n} &= 1 + \left(1 - \cos \frac{180}{2^2 n}\right) + \left(1 - \cos \frac{180}{2^2 n}\right)^2 \\
 &\quad + \left(1 - \cos \frac{180}{2^2 n}\right)^3 + \dots \\
 &\vdots \\
 \sec \frac{180}{2^m n} &= 1 + \left(1 - \cos \frac{180}{2^m n}\right) + \left(1 - \cos \frac{180}{2^m n}\right)^2 \\
 &\quad + \left(1 - \cos \frac{180}{2^m n}\right)^3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3')$$

Führen wir hierin für sec und cos die zugehörigen Werte ein aus 2), so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 k_n - 1 &= 1 + h_n + h_n^2 + h_n^3 + \dots = \frac{1}{1 - h_n} \\
 k_{2n} - 1 &= 1 + h_{2n} + h_{2n}^2 + h_{2n}^3 + \dots = \frac{1}{1 - h_{2n}} \\
 k_{2^2 n} - 1 &= 1 + h_{2^2 n} + h_{2^2 n}^2 + h_{2^2 n}^3 + \dots = \frac{1}{1 - h_{2^2 n}} \\
 &\vdots \\
 k_{2^m n} - 1 &= 1 + h_{2^m n} + h_{2^m n}^2 + h_{2^m n}^3 + \dots = \frac{1}{1 - h_{2^m n}}
 \end{aligned}
 \tag{4)$$

Hieraus bestimmt sich:

$$k_{2^m n} = 2 + h_{2^m n} + h_{2^m n}^2 + h_{2^m n}^3 + \dots = \frac{2 - k_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}}
 \tag{5)$$

da nun die Summe in diesem Ausdrucke

$$h_2^{m_n} + h_2^{m^2_n} + h_2^{m^3_n} + \dots$$

entschieden positiv ist, so ist auch sicherlich  $k > 2$ . In analoger Weise könnte für einen jeden der speciellen Teilfactoren direct erwiesen werden, dass derselbe grösser als 2 sein müsse.

Ein gleichseitiges Dreieck ist das einfachste, regelmässige Polygon, welches einem Kreise ein- resp. umschrieben werden kann; wie wir uns leicht überzeugen, indem wir in die erste Gleichung des Systems 1)  $n = 3$  setzen, wird der Teilfactor  $k = 3$ .

Für ein Polygon mit unendlich vielen Seiten ist  $n = \infty$ , somit  $k = 2$ . Die beiden extremen Werte für den Teilfactor  $k$  sind 2 als Minimum und 3 als dessen Maximum. Der Teilfactor hat daher allgemein einen Wert, der sich ausdrücken lässt durch:

$$2 < k \leq 3 \tag{6}$$

Die Gleichungen 4) lassen sich auch schreiben, wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} (k_n - 1) (1 - h_n) &= 1 \\ (k_{2n} - 1) (1 - h_{2n}) &= 1 \\ (k_{2^2n} - 1) (1 - h_{2^2n}) &= 1 \\ \vdots & \\ (k_{2^m n} - 1) (1 - h_{2^m n}) &= 1 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Aus diesen Gleichungen kann  $k$  durch  $h$  und umgekehrt ausgedrückt werden; es ergeben sich die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} l_n &= \frac{2 - h_n}{1 - h_n} & \text{sowie} & \quad h_n = \frac{2 - k_n}{1 - k_n} \\ k_{2n} &= \frac{2 - h_{2n}}{1 - h_{2n}} & \text{sowie} & \quad h_{2n} = \frac{2 - k_{2n}}{1 - k_{2n}} \\ k_{2^2n} &= \frac{2 - h_{2^2n}}{1 - h_{2^2n}} & \text{sowie} & \quad h_{2^2n} = \frac{2 - k_{2^2n}}{1 - k_{2^2n}} \\ \vdots & & & \\ k_{2^m n} &= \frac{2 - h_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}} & \text{sowie} & \quad k_{2^m n} = \frac{2 - k_{2^m n}}{1 - k_{2^m n}} \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Die vorstehenden Werte für  $h$  und  $k$  können auch in die Form entwickelt werden:

$$\left. \begin{aligned}
 k_n &= 2 + h_n + h_n^2 + h_n^3 + \dots + \text{in inf. und} \\
 h_n &= 2 + k_n + k_n^2 + k_n^3 + \dots \text{ in inf.} \\
 k_{2n} &= 2 + h_{2n} + h_{2n}^2 + h_{2n}^3 + \dots + \text{in inf. und} \\
 h_{2n} &= 2 + k_{2n} + k_{2n}^2 + k_{2n}^3 + \dots \text{ in inf.} \\
 k_{2^2 n} &= 2 + h_{2^2 n} + h_{2^2 n}^2 + h_{2^2 n}^3 + \dots + \text{in inf. und} \\
 h_{2^2 n} &= 2 + k_{2^2 n} + k_{2^2 n}^2 + k_{2^2 n}^3 + \dots \text{ in inf.} \\
 &\vdots \\
 k_{2^m n} &= 2 + h_{2^m n} + h_{2^m n}^2 + h_{2^m n}^3 + \dots + \text{in inf. und} \\
 h_{2^m n} &= 2 + k_{2^m n} + k_{2^m n}^2 + k_{2^m n}^3 + \dots \text{ in inf.}
 \end{aligned} \right\} 9)$$

Bilden wir die Summen der Teilfactoren bzw. der Pfeilhöhen, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{m=0}^m k_{2^m n} &= 2(m+1) + \sum_{m=0}^m \frac{h_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}} \\
 \sum_{m=0}^m h_{2^m n} &= 2(m+1) + \sum_{m=0}^m \frac{k_{2^m n}}{1 - h_{2^m n}}
 \end{aligned} \right\} 10)$$

was auch geschrieben werden kann:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{m=0}^m k_{2^m n} &= 3(m+1) + \sum_{m=0}^m [h_{2^m n} + h_{2^{2m} n} + h_{2^{4m} n} + \dots \\
 &\quad + h_{2^{m^2} n}] \\
 \sum_{m=0}^m h_{2^m n} &= 2(m+1) + \sum_{m=0}^m [k_{2^m n} + k_{2^{2m} n} + k_{2^{4m} n} + \dots]
 \end{aligned} \right\} 11)$$

Verwenden wir die im I. Abschnitte Gl. (36) verwendete Annahme, welche zwischen den Pfeilhöhen der aufeinander folgenden Polygone herrschen soll, nämlich

$$\left. \begin{aligned}
 h_{2n} &= \frac{h_n}{4} = \frac{h_n}{2^2} \\
 h_{2^2 n} &= \frac{h_{2n}}{4} = \frac{h_n}{4^2} = \frac{h_n}{2^4} \\
 h_{2^3 n} &= \frac{h_{2^2 n}}{4} = \frac{h_n}{4^3} = \frac{h_n}{2^6} \\
 &\vdots \\
 h_{2^m n} &= \frac{h_{2^{m-1} n}}{4} = \frac{h_n}{4^m} = \frac{h_n}{2^{2m}}
 \end{aligned} \right\} 12)$$

so erhalten wir für die Teilfactoren nach ausgeführter Substitution:

$$\begin{aligned}
 k_{2^n} &= 2 + \frac{h_n}{4} + \frac{h_n^2}{4^2} + \frac{h_n^3}{4^3} + \dots + \text{in inf.} \\
 &= 2 + \frac{h_n}{2^2 - h_n} = \frac{2^3 - h_n}{2^2 - h_n} \\
 \text{und analog weiter:} \\
 k_{2^{2^n}} &= 2 + \frac{h_n}{2^4} + \frac{h_n^2}{2^8} + \frac{h_n^3}{2^{12}} + \dots + \text{in inf.} = \frac{2^5 - h_n}{2^4 - h_n} \\
 k_{2^{3^n}} &= 1 + \frac{h_n}{2^6} + \frac{h_n^2}{2^{12}} + \frac{h_n^3}{2^{18}} + \dots + \text{in inf.} = \frac{2^7 - h_n}{2^6 - h_n} \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 k_{2^{m^n}} &= 2 + \frac{h_n}{2^{2^m}} + \frac{h_n^2}{2^{4^m}} + \frac{h_n^3}{2^{6^m}} + \dots + \text{in inf.} \\
 &= \frac{2^{2^m+1} - h_n}{2^{2^m} - h_n}
 \end{aligned} \tag{13)$$

Bilden wir die Summe der Teilfactoren, so folgt nach Einführung der Werte:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^m k_{2^{n^n}} &= 2(m+1) + \frac{h_n}{2^4} \left[ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2m}} \right] \\
 &\quad + \frac{h_n^2}{2^8} \left[ 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{4m}} \right] \\
 &\quad + \frac{h_n^3}{2^{12}} \left[ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \dots + \frac{1}{2^{6m}} \right] \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + \frac{h_n^{r.}}{2^{r.4}} \left[ 1 + \frac{1}{2^{r.2}} + \frac{1}{2^{r.4}} + \dots + \frac{1}{2^{r.2m}} \right] \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{14)$$

oder auch:

$$\sum_{n=0}^m k_{2^{n^n}} = 2(m+1) + \frac{h_n}{2^4 - h_n} + \frac{h_n}{2^8 - h_n} + \dots + \frac{h_n}{2^{2^r} - h_n} + \dots \text{in inf.} \tag{15)$$

Nun sollen die Ausdrücke in den obigen Klammern der oberen

Gleichung 14) geometrische Progressionen 1. Ordnung dar; ihre Summierung giebt mit  $\sigma$  und dem entsprechenden Index bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2^{2(m+1)} - 1}{(2^2 - 1)2^{2m}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2m}} [2^{2(m+1)} - 1] \\ \sigma_2 &= \frac{2^{4(m+1)} - 1}{(2^4 - 1)2^{4m}} = \frac{1}{15 \cdot 2^{4m}} [2^{4(m+1)} - 1] \\ \sigma_3 &= \frac{2^{6(m+1)} - 1}{(2^6 - 1)2^{6m}} = \frac{1}{63 \cdot 2^{6m}} [2^{6(m+1)} - 1] \\ &\vdots \\ \sigma_r &= \frac{2^{2r(m+1)} - 1}{(2^{2r} - 1)2^{2rm}} = \frac{1}{(2^{2r} - 1)2^{2rm}} [2^{2r(m+1)} - 1] \end{aligned} \right\} 16)$$

Die Summe der Teilfactoren erscheint dann in der Form:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^m k_2^m n &= 2(m+1) + \frac{h_n}{2^{m+2}} \left[ \frac{2^{2(m+1)} - 1}{3} + \frac{2^{4(m+1)} - 1}{15 \cdot 2^{2(m+2)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^{6(m+1)} - 1}{63 \cdot 2^{4(m+2)}} + \dots + \frac{2^{2r(m+1)} - 1}{(2^{2r} - 1)2^{2(r-1)(m+2)}} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \text{in inf.} \right] \end{aligned} \quad 17)$$

Vergleichen wir die vorstehende Gleichung 17) mit 15), so erhalten wir für die Summe der Brüche:

$$\frac{h_n}{2^4 - h_n} + \frac{h_n}{2^6 - h_n} + \frac{h_n}{2^8 - h_n} + \dots + \frac{h_n}{2^{2r} - h_n} + \dots \text{in inf.}$$

den Wert

$$\begin{aligned} \frac{h_n}{2^{m+2}} \left[ \frac{2^{2(m+1)} - 1}{3} + \frac{2^{4(m+1)} - 1}{15 \cdot 2^{2(m+2)}} + \frac{2^{6(m+2)} - 1}{63 \cdot 2^{4(m+2)}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{2^{2r(m+1)} - 1}{(2^{2r} - 1)2^{2(r-1)(m+2)}} + \dots \text{in inf.} \right] \end{aligned}$$

### III.

Zwischen den Peripherien der untersuchten Polygone bestehen leicht auffindbare Beziehungen.

Bezeichnen wir mit  $u_n, u_{2n}, U_n, U_{2n}$  die Umfänge der Polygone, welche den Seiten  $s_n, s_{2n}, S_n$  und  $S_{2n}$  entsprechen, so sind aus der elementaren Geometrie die Relationen bekannt:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= 2n \sqrt{\rho^2 - a^2}, & u_{2n} &= 2n \sqrt{2\rho(\rho - a)} \\ U_n &= \frac{2n\rho}{a} \sqrt{\rho^2 - a^2}, & U_{2n} &= \frac{4n\rho}{\rho + a} \sqrt{\rho^2 - a^2} \end{aligned} \right\}$$

wobei

$$a = \sqrt{\rho^2 - \frac{s^2}{4}}$$

bedeutet. Drücken wir  $s$  durch den Radius  $\rho$  und den Teilfactor  $k$  aus, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)(k-2)} t \\ &= \frac{\sqrt{k(k-2)}}{2k(k-2)} s \\ &= \sqrt{2 - (k-1)^2} \rho \end{aligned} \right\}$$

und der Wurzelausdruck  $\sqrt{\rho^2 - a^2}$  wird nach eingeführter Substitution der vorhergehenden Gleichung die Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\rho^2 - a^2} &= \frac{1}{k-1} t \\ &= \frac{1}{2} s \\ &= \sqrt{k(k-2)} \rho \end{aligned} \right\}$$

Werden nun diese in den beiden letzten Gleichungsgruppen gewonnenen Werte in die Formeln für die Umfänge substituiert, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{2n}{k-1} t \\ &= n s \\ &= \frac{2a \sqrt{k(k-2)}}{k-1} \rho \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

$$\left. \begin{aligned} U_n &= 2n t \\ &= n(k-1)s \\ &= 2n \sqrt{k(k-2)} \rho \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

weiter für die Peripherien der Polygone mit doppelter Seitenanzahl:

$$\left. \begin{aligned}
 u_{2n} &= \frac{2n}{k} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} t \\
 &= \frac{n}{k} \sqrt{2k(k-1)} s \\
 &= \frac{2n}{k-1} \sqrt{2(k-1)(k-2)} \varrho
 \end{aligned} \right\} 3)$$

und

$$\left. \begin{aligned}
 U_m &= \frac{4n}{k} t \\
 &= 2n \frac{k-1}{k} s \\
 &= \frac{4n}{k} \sqrt{k(k-2)} \varrho
 \end{aligned} \right\} 4)$$

Gestützt auf die soeben aufgestellten Formeln für die Umfänge, erhalten wir nachstehende sechs Formeln:

$$\left. \begin{aligned}
 u_n^2 : u_{2n}^2 &= k : 2(k-1) = \cos^2 \frac{90}{n} : 1 \\
 u_n : U_n &= 1 : (k-1) = \cos \frac{180}{n} : 1 \\
 u_n : U_{2n} &= k : 2(k-1) = \cos^2 \frac{90}{n} : 1 \\
 u_{2n}^2 : U_n^2 &= 2 : k(k-1) = \cos^2 \frac{180}{n} : \cos^2 \frac{90}{n} \\
 u_{2n}^2 : U_{2n}^2 &= k : 2(k-1) = \cos^2 \frac{90}{n} : 1 \\
 U_n : U_{2n} &= k : 2 = \cos^2 \frac{90}{n} : \cos \frac{180}{n}
 \end{aligned} \right\} 5)$$

Die erste dieser Proportionen gibt den Teilfactor in der Form:

$$k = \frac{2u_n^2}{2u_n^2 - u_{2n}^2} \quad 6)$$

welche Gleichung, nach  $u_{2n}$  resp  $u_{2n}^2$  aufgelöst, gibt:

$$\left. \begin{aligned}
 u_n^2 &= \frac{k}{2(k-1)} u_{2n}^2 \\
 &= \cos^2 \frac{90}{n} u_{2n}^2 \\
 &= \frac{4 + 2t}{4t} u_{2n}^2
 \end{aligned} \right\} 7)$$

und

$$\begin{aligned}
 u_{2n}^2 &= 2 \frac{k-1}{k} u_n^2 \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \frac{90}{n}} u_n^2 \\
 &= \frac{4t}{s+2t} u_n^2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} u_{2n}^2 \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 8)$$

Die zweite Proportion des Systems 5) führt auf eine einfache und elegante Beziehung, nämlich:

$$k = 1 + \frac{U_n}{u_n} \tag{9}$$

woraus weiter folgt:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1}{k-1} U_n \\
 &= \cos \frac{180}{n} U_n \\
 &= \frac{s}{2t} U_n
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} u_n \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 10)$$

und

$$\begin{aligned}
 U_n &= (k-1) u_n \\
 &= \frac{1}{\cos \frac{180}{n}} u_n \\
 &= \frac{2t}{s} u_n
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} U_n \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 11)$$

Die dritte der Proportionen in Gleichung 5) liefert:

$$k = \frac{2u_n}{2u_n - U_{2n}} \tag{12}$$

eine Beziehung, welche eine bedeutende Aehnlichkeit mit jener 6) besitzt

Werden aus dieser  $u_n$  resp  $u_{2n}$  bestimmt, so erhalten wir die Formeln:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{k}{2(k-1)} U_{2n} \\
 &= \cos^2 \frac{90}{n} U_{2n} \\
 &= \frac{s+2t}{4t} U_{2n}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} u_n \\ &= \\ &= \end{aligned}} \right\} 13)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 U_{2n} &= \frac{2(k-1)}{k} u_n \\
 &= \frac{n}{\cos^2 \frac{9}{n}} u_n \\
 &= \frac{4t}{s+2t} u_{2n}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} U_{2n} \\ = \\ = \end{aligned}} \right\} 14)$$

Aus der ersten und dritten Proportion folgt sofort die Relation:

$$u_{2n}^2 = u_n U_{2n} \quad 15)$$

Die vierte Proportion in 5) führt auf die Gleichung:

$$U_n^2 = \frac{k(k-1)}{2} u_{2n}^2 \quad 16)$$

welche nach  $k$  geordnet eine gemischt quadratische Gleichung bietet:

$$k^2 - k = 2 \left( \frac{U_n}{u_{2n}} \right)^2$$

aus welcher der Teilfactor die Form annimmt:

$$k = \frac{u_{2n} \pm \sqrt{u_{2n}^2 + (2U_n)^2}}{2u_{3n}}$$

resp.

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{u_{2n}^2 + (2U_n)^2}}{2u_{2n}} \quad 17)$$

Aus den vorhergehenden Untersuchungen wissen wir, dass der Teilfactor eingeschlossen ist zwischen 3 und 2, also  $3 > k > 2$  ist; infolge dessen muss der zweite Summand in 17)

- a) mit dem Vorzeichen plus genommen werden, da das untere Zeichen minus auf einen Widerspruch führen würde, und
- b) es muss derselbe grösser sein als  $\frac{3}{2}$ , hingegen kleiner als  $\frac{5}{2}$ , was in der Formelsprache ausgedrückt wird durch

$$3 > \sqrt{u_{2n}^2 + (2U_n)^2} > 3 \quad 18)$$

Aus der fünften Proportion des Systems 6) folgt:

$$k = \frac{2u_{2n}^2}{2u_{2n}^2 - U_{2n}^2} \quad 18)$$

eine Gleichung, welche ähnlich ist jenen b) und 12) für den Teilfactor. Hieraus ergibt sich weiter:

$$\left. \begin{aligned} u_{2n}^2 &= \frac{k}{2(k-1)} U_{2n}^2 \\ &= \cos^2 \frac{90}{2n} U_{2n}^2 \\ &= \frac{s+2t}{4t} U_{2n}^2 \end{aligned} \right\} 20)$$

und

$$\left. \begin{aligned} U_{2n}^2 &= \frac{2(k-1)}{k} u_{2n}^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{90}{2n}} u_{2n}^2 \\ &= \frac{4t}{s+2t} u_{2n}^2 \end{aligned} \right\} 21)$$

Endlich aus der sechsten Proportion fließt:

$$k = 2 \frac{U_n}{U_{2n}} \quad 22)$$

welcher Ausdruck, nach  $U_{2n}$  resp.  $U_n$  aufgelöst, die Formeln liefert:

$$\left. \begin{aligned} U_{2n} &= \frac{2}{k} U_n \\ U_n &= \frac{k}{2} U_{2n} \end{aligned} \right\} 23)$$

Bringen wir die einzelnen Proportionen durch Division in Verbindung, so gewinnen wir eine ganze Reihe interessanter Relationen zwischen den Peripherien der ein- resp. umschriebenen  $n$ - und  $2n$ -Ecke. Unter den sechs Proportionen sind 15 Combinationen zu zweien möglich; es wären daher im ganzen 15 neue Relationen zu erwarten; es sind jedoch 5 darunter identisch, daher reducirt sich die Anzahl derselben auf 10. Wir wollen symbolisch die Relationen, welche sich ergeben, durch  $R$  und rechts mit einem Zahlen-Index versehen, welcher anzeigt, aus welchen Proportionen jene Beziehung entstanden ist. So z. B.  $R_{\frac{2}{5}}$  heisst: die anbei angegebene Formel resultirt durch Division aus 2 und 5.

Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} R_{\frac{2}{2}}, \quad R_{\frac{1}{4}}, \quad R_{\frac{2}{4}} & \quad \frac{u_{2n}^2}{u_n U_n} = \frac{2}{k} \\ R_{\frac{1}{3}}, \quad R_{\frac{1}{5}}, \quad R_{\frac{2}{3}} & \quad u_{2n}^2 = u_n U_{2n} \end{aligned} \right\} 24)$$

$$\begin{array}{l}
 R_{\frac{1}{6}} \\
 R_{\frac{3}{4}}, R_{\frac{4}{5}} \\
 R_{\frac{2}{3}} \\
 R_{\frac{2}{6}} \\
 R_{\frac{3}{4}} \\
 R_{\frac{3}{8}} \\
 R_{\frac{2}{6}} \\
 R_{\frac{5}{6}}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \frac{u_{2n}^2 U_n}{u_n^2 U_{2n}} = k-1 \\
 \frac{U_{2n}}{u_n} = \frac{k}{2} \\
 \frac{u_{2n}^2 U_n}{u_{2n}^2 u_n} = \frac{k}{2} \\
 \frac{U_n^2}{U_{2n} u_n} = \frac{k(k-1)}{2} \\
 \frac{U_{2n} u_{2n}^2}{U_n^2 u_n} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \\
 \frac{U_n}{u_n} = k-1 \\
 \frac{U_n^2}{U_{2n} u_{2n}^2} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 (k-1) \\
 \frac{U_n U_{3n}}{U_n^2} = k-1
 \end{array}
 \right\} 24)$$

## IV.

Auch die Flächeninhalte betrachteter Polygone bieten so manches Interessante.

Consequenterweise seien mit  $f_n$ ,  $f_{2n}$ ,  $F_n$  und  $F_{2n}$  die Flächeninhalte jener Polygone bezeichnet, welche den Seiten  $s_n$ ,  $s_{2n}$ ,  $S_n$  und  $S_{2n}$  entsprechen; dann erhalten wir für dieselben nachstehende Ausdrücke:

1) für das eingeschriebene  $n$ -Eck:

$$\begin{array}{l}
 f_n = \frac{n}{2} (\rho - h) s \\
 = \frac{n}{4} \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-2)} s^2 \\
 = n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)^2 (k-2)} \rho^2 \\
 = n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{(k-1)^2} \rho^2
 \end{array}
 \left.
 \right\} 1)$$

2) für das eingeschriebene  $2n$ -Eck:

$$f_{2n} = n(\rho - h_{2n}) s_{2n}$$

was nach ausgeführter Substitution übergeht in

$$\left. \begin{aligned}
 f_{2n} &= \frac{n(k-1)\sqrt{k(k-2)}}{4k(k-2)} s^2 \\
 &= n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k(k-1)(k-2)} t^2 \\
 &= n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1} \rho^2
 \end{aligned} \right\} 2)$$

3) Für das umbeschriebene  $n$ -Eck:

$$F_n = \frac{n}{\rho} \rho S_n$$

Werden die Werte für  $\rho$  und  $S_n$  hierin substituirt, so hat man:

$$\left. \begin{aligned}
 F_n &= \frac{n(k-1)^2\sqrt{k(k-2)}}{4k(k-2)} s^2 \\
 &= n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k^2(k-2)} t^2 \\
 &= n \sqrt{k(k-2)} \rho^2
 \end{aligned} \right\} 3)$$

4) Für das umbeschriebene  $2n$ -Eck:

$$F_{2n} = n\rho S_{2n}$$

was durch Einführung der Werte übergeht in

$$\left. \begin{aligned}
 F_{2n} &= 2n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k^2(k-2)} t^2 \\
 &= \frac{n(k-1)^2\sqrt{k(k-2)}}{2k^2(k-2)} s^2 \\
 &= 2n \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k} \rho^2
 \end{aligned} \right\} 4)$$

Bilden wir nun die 6 möglichen Proportionen zwischen den Flächeninhalten, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned}
 f_n : f_{2n} &= 1 : (k-1) = \cos \frac{180}{n} : 1 \\
 f_n : F_n &= 1 : (k-1)^2 = \cos^2 \frac{180}{n} : 1 \\
 f_n : F_{2n} &= k : 2(k-1)^2 = \cos^2 \frac{90}{n} \cos \frac{180}{n} : 1
 \end{aligned} \right\} 5)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{2n} : F_n &= 1 : (k - 1) = \sec \frac{180}{n} : 1 \\ f_{2n} : F_{2n} &= k : 2(k - 1) = \cos^2 \frac{90}{n} : 1 \\ F_n : F_{2n} &= k : 2 = \cos^2 \frac{90}{n} : \cos \frac{180}{n} \end{aligned} \right\} 5)$$

Aus der ersten Proportion folgt:

$$\text{resp.} \quad \left. \begin{aligned} k &= 1 + \frac{f_{2n}}{f_n} \\ f_{2n} &= (k - 1)f_n \end{aligned} \right\} 6)$$

Die zweite Proportion liefert die Beziehung:

$$F_n = (k - 1)^2 f_n^2 \quad 7)$$

welche nach  $k$  aufgelöst für den Teilfactor den Ausdruck giebt:

$$k = 1 \pm \sqrt{\frac{F_n}{f_n}} \quad 8)$$

In dieser Gleichung hat nur das obere Zeichen eine Berechtigung, da  $3 < k > 2$  sein muss, und nie  $k < 1$  sein kann.

Bestimmen wir aus der dritten Proportion des Systems 5)  $F_{2n}$ , so erhalten wir

$$F_{2n} = \frac{2(k - 1)^2}{k} \quad 9)$$

Wird diese Gleichung nach  $k$  geordnet, so ist

$$k^2 - 2 \frac{4f_n + F_{2n}}{4f_n} k + 1 = 0$$

woraus folgt:

$$k = \frac{1}{4f_n} \left[ 4f_n + F_{2n} \pm \sqrt{F_{2n}^2 + 8f_n F_n} \right] \quad 10)$$

Dieser Ausdruck lässt sich in mehrfacher Art umformen, wir benutzen jedoch nur jenen, wobei wir den Wurzel Ausdruck nach dem binomischen Satze entwickeln und erhalten:

$$k = \frac{1}{4f_n} \left[ 4f_n + F_{2n} \pm (F_n + 4f_n - 8F_{2n}^{-1}f_n^2 + 32F_{2n}^{-2}f_n^3 - 160F_{2n}^{-3}f_n^4 + \dots) \right]$$

Nehmen wir das Zeichen  $+$  vor der runden Klammer, so erhalten wir als ersten Wert des Teilfactor:

$$k_1 = 2 + \frac{1}{2} \frac{F_{2n}}{f_n} - 2 \left( \frac{f_n}{F_{2n}} \right) + 8 \left( \frac{f_n}{F_{2n}} \right)^2 - 40 \left( \frac{f_n}{F_{2n}} \right)^3 \dots \quad 11)$$

während für das untere Zeichen — der zweite Wert des Teilfactors die Form annimmt:

$$k_2 = 2 \frac{f_n}{F_{2n}} - 8 \left( \frac{f_n}{F_{2n}} \right)^2 + 40 \left( \frac{f_n}{F_{2n}} \right)^3 - \dots \quad 12)$$

Nachdem  $3 < k > 2$  sein muss, so ist ersichtlich, dass nur  $k_1$  den Wert des Teilfactors darstellen kann, also das Vorzeichen + Giltigkeit hat, während — nicht zu berücksichtigen ist.

Aus der vierten Proportion von 5) resultiert:

$$F_n = (k - 1) f_{2n} \quad 13)$$

woraus der Teilfactor wird:

$$k = 1 + \frac{F_n}{f_{2n}} \dots \quad 14)$$

Aus der fünften der Proportionen in der Gleichung 5) folgt sofort:

$$F_{2n} = \frac{2(k - 1)}{k} f_{2n}$$

was weiter giebt:

$$k = \frac{2 f_{2n}}{2 f_{2n} - F_{2n}} \quad 15)$$

welche Gleichung mit jenen im vorbergehenden Abschnitte für die Peripherien gegebenen 6), 12) und 19) bedeutende Aehnlichkeit besitzt und speciell aus der Gleichung für 19) sich sofort ergibt, wenn man  $f_{2n}$  statt  $u_{2n}$  und  $F_{2n}$  statt  $U_{2n}$  setzt.

Die letzte des wiederholt genannten Proportions-Systems giebt:

$$\text{resp. } \left. \begin{aligned} F_n &= \frac{k}{2} F_{2n} \\ k &= \frac{F_n}{F_{2n}} \end{aligned} \right\} \quad 16)$$

Die Proportionen in 5) gestatten durch eine entsprechende Verbindung eine Reihe neuer Formeln zu bilden. Vor allem können wir eine jede Fläche einfach durch alle andern ausdrücken und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \frac{1}{k-1} f_{2n} \\ &= \frac{1}{(k-1)^2} F_n \\ &= \frac{k}{2(k-1)^2} F_{2n} \end{aligned} \right\} \quad 17)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{2n} &= (k-1) f_n \\ &= \frac{1}{(k-1)} F_n \\ &= \frac{1}{2(k-1)} F_{2n} \end{aligned} \right\} \quad 18)$$

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (k-1)^2 f_n \\ &= (k-1) f_{2n} \\ &= \frac{k}{2} F_{2n} \end{aligned} \right\} \quad 19)$$

und schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} F_{2n} &= \frac{2(k-1)^2}{k} f_n \\ &= \frac{2(k-1)}{k} f_{2n} \\ &= \frac{2}{k} F_n \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

Dividiren wir die genannten Proportionen, und behalten die im vorhergehenden gebrauchten, symbolischen Bezeichnungen, so erhalten wir nachstehende Relationen:

$$\left. \begin{aligned} R_{\frac{1}{2}}, R_{\frac{5}{6}} & & F_n &= (k-1) f_{2n} \\ R_{\frac{1}{3}} & & F_{2n} &= \frac{2(k-1)}{k} f_{2n} \\ R_{\frac{1}{4}} & & f_{2n}^2 &= f_n F_n \\ R_{\frac{1}{5}} & & f_{2n}^2 &= \frac{k}{2} f_n F_{2n} \\ R_{\frac{1}{6}}, R_{\frac{2}{3}} & & \frac{f_{2n} F_n}{f_n F_{2n}} &= \frac{k(k-1)}{2} \\ R_{\frac{2}{3}}, R_{\frac{4}{5}} & & F_{2n} &= \frac{2}{k} F_n \\ R_{\frac{3}{4}}, R_{\frac{3}{8}} & & f_{2n} &= (k-1) f_n \\ R_{\frac{5}{8}} & & \frac{F_n^2}{f_n F_{2n}} &= \frac{k(k-1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

$$\begin{array}{l}
 R_3 \\
 R_3 \\
 R_4
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \frac{f_n F_n}{f_{2n} F_{2n}} = \frac{k}{2(k-1)} \\
 F_n = (k-1)^2 f_n \\
 \frac{f_{2n} F_{2n}}{F_n^2} = \frac{k(k-1)}{2}
 \end{array}
 \right\} 21)$$

Ans diesen Relationen ergeben sich interessante andere und zwar:

$$\left.
 \begin{array}{l}
 \frac{F_n}{f_n} \left( \frac{f_{2n}}{F_{2n}} \right)^2 = \left( \frac{k}{2} \right)^2 \\
 \frac{f_n}{F_{2n}} \left( \frac{F_n}{f_{2n}} \right)^2 = \frac{k}{2} \\
 \frac{F_n^2}{f_n^2 f_{2n}} = (k-1)^3 \\
 \frac{F_n f_{2n}}{f_n^2} = (k-1)^2
 \end{array}
 \right\} 22)$$

V.

Bezeichnet, wie eingangs hervorgehoben wurde,  $\rho$  den Radius eines Kreises, der dem Polygone mit der Seite  $s$  umbeschrieben und einen von derselben Seitenanzahl und der Seite  $S$  eingeschrieben, hingegen  $r$  den Radius des dem ersteren Polygone eingeschriebenen und  $R$  den Radius des dem zweiten Polygone umschriebenen Kreises und analog die weiteren Symbole, so bestehen die Relationen, welche sich aus der Figur sofort ergeben:

$$\left.
 \begin{array}{l}
 r_n = \rho \cos \frac{180}{n} = \frac{\rho}{k-1} \\
 r_{2n} = \rho \cos \frac{180}{2n} = \frac{\rho}{k_{2n}-1} \\
 r_{2^2 n} = \rho \cos \frac{180}{2^2 n} = \frac{\rho}{k_{2^2 n}-1} \\
 \vdots \\
 r_{2^m n} = \rho \cos \frac{180}{2^m n} = \frac{\rho}{k_{2^m n}-1}
 \end{array}
 \right\} 1)$$

weiter

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{\rho}{\cos \frac{180}{n}} = (k - 1)\rho \\
 R_{2n} &= \frac{\rho}{\cos \frac{180}{2n}} = (k_{2n} - 1)\rho \\
 R_{2^2 n} &= \frac{\rho}{\cos \frac{180}{2^2 n}} = (k_{2^2 n} - 1)\rho \\
 &\vdots \\
 R_{2^m n} &= \frac{\rho}{\cos \frac{180}{2^m n}} = (k_{2^m n} - 1)\rho
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Durch Multiplication resp. Division der vorstehenden Gleichungen folgt sofort:

$$r_n R_n = r_{2n} R_{2n} = r_{4n} R_{4n} = \dots \rho^2$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{R_n}{r_n} &= \cos^2 \frac{180}{n} = \frac{1}{(k - 1)^2} \\
 \frac{r_{2n}}{R_{2n}} &= \cos^2 \frac{180}{2n} = \frac{(k_{2n} - 1)^2}{1} \\
 \frac{R_{2^2 n}}{r_{2^2 n}} &= \cos^2 \frac{180}{2^2 n} = \frac{1}{(k_{2^2 n} - 1)^2} \\
 &\vdots \\
 \frac{r_{2^m n}}{R_{2^m n}} &= \cos^2 \frac{180}{2^m n} = \frac{1}{(k_{2^m n} - 1)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Die goniometrische Beziehung

$$\cos \frac{180}{n} = 2 \cos^2 \frac{180}{2n} - 1$$

führt nach Substitution der Werte aus Gleichung 3) sofort auf die Gleichung:

$$\pm \sqrt{\frac{r_n}{R_n}} = 2 \sqrt{\frac{r_{2n}}{R_{2n}}} - 1$$

oder

$$\frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{r_n}{R_n}} \right)$$

und mit Ausdehnung auf die folgenden Polygone:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_{4n}}{R_{4n}} &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{r_{2n}}{R_{2n}}} \right) \\ \frac{r_{2^3 n}}{R_{2^3 n}} &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{r_{2^2 n}}{R_{2^2 n}}} \right) \\ &\vdots \\ \frac{r_{2^m n}}{R_{2^m n}} &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{r_{2^{m-1} n}}{R_{2^{m-1} n}}} \right) \end{aligned} \right\} 4)$$

Aus diesen Gleichungen werden unschwer nachstehende allgemeine Relationen erhalten:

$$\left. \begin{aligned} r_{2^m n} &= \frac{1}{2} \frac{R_{2^{m-1} n}^{\frac{1}{2}} + r_{2^{m-1} n}}{R_{2^{m-1} n}^{\frac{1}{2}}} R_{2^m n} \\ R_{2^m n} &= 2 \frac{R_{2^{m-1} n}^{\frac{1}{2}}}{R_{2^{m-1} n}^{\frac{1}{2}} + r_{2^{m-1} n}} r_{2^m n} \end{aligned} \right\} 5)$$

Bilden wir nun Summe und Differenz der Radien  $r$  und  $R$  und dividiren selbe durcheinander, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_n + r_n}{R_n - r_n} &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{180}{2n}} = \frac{1}{2} (k_{2n} - 1)^2 \\ \frac{R_{2n} + r_{2n}}{R_{2n} - r_{2n}} &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{180}{2^2 n}} = \frac{1}{2} (k_{2^2 n} - 1)^2 \\ &\vdots \\ \frac{R_{2^m n} + r_{2^m n}}{R_{2^m n} - r_{2^m n}} &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{180}{2^{m+1} n}} = \frac{1}{2} (k_{2^{m+1} n} - 1)^2 \end{aligned} \right\} 6)$$

aus welchen Gleichungen die Teilfactoren sich ergeben:

$$\begin{aligned}
 k_{2n} &= 1 \pm \sqrt{2 \frac{R_n + r_n}{R_n - r_n}} \\
 k_{2^2 n} &= 1 \pm \sqrt{2 \frac{R_{2n} + r_{2n}}{R_{2n} - r_{2n}}} \\
 &\vdots \\
 k_{2^m n} &= 1 \pm \sqrt{2 \frac{R_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n}}{R_{2^{m-1}n} - r_{2^{m-1}n}}} \\
 k_{2^{m+1}n} &= 1 \pm \sqrt{2 \frac{R_{2^m n} + r_{2^m n}}{R_{2^m n} - r_{2^m n}}}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} k_{2n} \\ k_{2^2 n} \\ \vdots \\ k_{2^m n} \\ k_{2^{m+1}n} \end{aligned}} \right\} 7)$$

Der zweite Summand rechter Hand des vorstehenden Gleichungssystems muss mit dem Vorzeichen plus genommen werden, falls die Teilfactoren reellen Polygonen zufallen sollen.

Für die Cosinus der Centriwinkel erhalten wir die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{180}{2n} &= \frac{R_n - r_n}{2(R_n + r_n)} \\
 \cos^2 \frac{180}{2^2 n} &= \frac{R_{2n} - r_{2n}}{2(R_{2n} + r_{2n})} \\
 &\vdots \\
 \cos^2 \frac{180}{2^m n} &= \frac{R_{2^{m-1}n} - r_{2^{m-1}n}}{2(R_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n})}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \cos^2 \frac{180}{2n} \\ \cos^2 \frac{180}{2^2 n} \\ \vdots \\ \cos^2 \frac{180}{2^m n} \end{aligned}} \right\} 8)$$

und weiters:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \frac{180}{2^m n} &= \frac{R_{2^{m-1}n} + 3r_{2^{m-1}n}}{2(R_{2^{m-1}n} + r_{2^{m-1}n})} \\
 \operatorname{tg}^2 \frac{180}{2^m n} &= \frac{R_{2^{m-1}n} + 3r_{2^{m-1}n}}{R_{2^{m-1}n} - r_{2^{m-1}n}}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sin^2 \frac{180}{2^m n} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{180}{2^m n} \end{aligned}} \right\} 9)$$

## VI.

Nach den Gleichungen 7) und 36) des I. Abschnittes besteht die Identität:

$$s_{2^2 n} = \frac{2 \sqrt{k_{2^2 n} (k_{2^2 n} - 2)}}{k_{2^2 n} - 1} \varrho = \frac{\sqrt{(k - 2)(9k - 10)}}{4(k - 1)} \varrho \quad 1)$$

woraus sich, nach  $k_2^2 n$  geordnet, eine gemischt quadratische Gleichung ergibt, nämlich:

$$k_2^2 n^2 - 2k_2^2 n = \frac{(k-2)(9k-10)}{55k^2 - 100k + 44}$$

welche aufgelöst für den Teilfactor den Ausdruck giebt:

$$k_2^2 n = 1 \pm \frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}} \quad 2)$$

Nachdem die Teilfactoren der regulären, dem Kreise eingeschriebenen Polygone 2 als Minimum und 3 als Maximum besitzen, so kann nur das obere Zeichen gelten, somit:

$$k_2^2 n = 1 + \frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}}$$

Den zweiten Summanden wollen wir in eine Reihe entwickeln; zu dem Endesetzen wir:

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)^2}{55k^2 - 100k + 44} &= (a + bk + ck^2 + \dots)^2 \\ &= a^2 + 2abk + (2ac + b^2)k^2 + \dots \end{aligned} \quad 3)$$

Hieraus ergibt sich nach Ausführung der Multiplication rechter Hand und Berücksichtigung jener Glieder, welche noch das Quadrat des Teilfactor  $k^2$  enthalten, die Gleichung:

$$\begin{aligned} k^2 - 2k + 1 &= 44a^2 + 4a(22b - 25a)k \\ &+ [55a^2 - 200ab + 44(b^2 + 2ac)]k^2 + \dots \end{aligned} \quad 4)$$

aus welcher nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten folgen zur Bestimmung der nach unbestimmten Grössen  $a, b, c$  die Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 44a^2 &= 1 \\ 4a(22b - 25a) &= -1 \\ 55a^2 - 200ab + 44(b^2 + 2ac) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Die Coefficienten selbst ergeben sich in den folgenden Ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2 \cdot 11} \sqrt{11} \\ b &= \frac{-1 + 50a^2}{2^2 \cdot 11 \cdot a} = \frac{3}{2^2 \cdot 11^2} \sqrt{11} \\ c &= \frac{1 + 200ab - 55a^2 - 44b^2}{2^3 \cdot 11a} = \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} \sqrt{11} \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

Indem wir die soeben gewonnenen Werte der Coefficienten verwenden, so erscheint der Teilfactor in der Form:

$$k_2^{2n} = 1 + (a + bk + ck^2 + \dots) \\ = 1 + 8\sqrt{11} \left[ \frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2} k + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} k^2 + \dots \right] \quad 7)$$

Die Reihe in der eckigen Klammer convergirt wol nicht sehr stark, sie nähert sich aber einer Grenze, welche wir annähernd zu bestimmen im Stande sind. In beigegebener Tabelle sind die Teilfactoren der aufeinander folgenden Polygone berechnet, dieselben können für ein bestimmtes, gegebenes  $n$  hieraus entnommen und in Gleichung 7) substituirt werden. Die Summe der in der eckigen Klammer stehenden Reihe ergibt sich dann einfach.

Wählen wir z. B. ein eingeschriebenes, regelmässiges Dreieck  $n = 3$ , so ist nach der Tafel  $k = 3$  und der Teilfactor für das

$$2^2 \cdot n = 12\text{-Eck}$$

ist hieraus entnommen  $2 \cdot 04030$ . Führen wir nun diese speciellen Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir:

$$2 \cdot 04030 = 1 + 8\sqrt{11} \left[ \frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2} 3 + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} 3^2 + \dots \right] \quad 8)$$

somit für die Reihe

$$\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 11^2} + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} 3^3 + \dots = \frac{1 \cdot 04030}{8 \cdot \sqrt{11}} \quad 9)$$

Die allgemeine Form derselben ist:

$$\frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2} k + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} k^2 + \dots = \frac{k_2^{2n} - 1}{8 \cdot 11} \sqrt{11} \quad 10)$$

Die Gleichung lehrt uns, wie wir einen Teilfactor durch den zweit vorhergehenden auszudrücken vermögen, wir erhalten:

$$k_2^{2n} = 1 + 8\sqrt{11} \left[ \frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^2 \cdot 11^2} k_{2n} + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} k_{2n}^2 + \dots \right] \quad 11)$$

$$\begin{aligned}
 k_2^{4n} &= 1 + 8\sqrt{11} \left[ \frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^3 \cdot 11^3} k_2^{2n} + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} k_2^{2n^2} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right] \\
 &\vdots \\
 k_2^{m_n} &= 1 + 8\sqrt{11} \left[ \frac{1}{2 \cdot 11} + \frac{3}{2^3 \cdot 11^3} k_2^{m-2n} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5 \cdot 17}{2^3 \cdot 11^3} k_2^{m-x_n^2} + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Gleichungen, aus welchen sich die rechts stehenden Reihen ohne Schwierigkeit ermitteln lassen.

Anmerkung.

Für den Teilfactor haben wir erhalten:

$$k_2^{2n} = 1 + \frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}}$$

Gesetzt,  $2^{2n}$  sei unendlich gross, somit  $k_2^{2n}$  der Teilfactor eines Polygons mit unendlich vielen Seiten, so ist derselbe

$$k_2^{2n} = 2$$

In diesem Falle muss der zweite Summand vorstehender Gleichung der Einheit gleich sein, also

$$\frac{8(k-1)}{\sqrt{55k^2 - 100k + 44}} = 1$$

und hieraus folgt:

$$k^2 - \frac{28}{9}k + 20 = 0$$

und

$$k = \frac{14 \pm 4}{9}$$

Das obere Zeichen liefert  $k = 2$ , eine Auflösung, welche zu erwarten war während das untere Zeichen zu einem negativen Werte von  $k$  führt, der kleiner als 2 ist und somit keinem dem Kreise eingeschriebenen Polygone entspricht.

Die im vorhergehenden durchgeführten Untersuchungen für den Teilfactor  $k_n$  dehnen wir auf den allgemeinen Fall aus, wobei wir die Beziehung zwischen den Teilfactoren  $k_2^{m_n}$  und  $k_n$  resp.  $k$  aufstellen werden. Dieselbe wird sich ergeben durch Gleichstellung der Gleichungen 7) und 46) im I. Abschnitte:

$$s_2^{m_n} = \frac{2\sqrt{k_2^{m_n}(k_2^{m_n} - 2)}}{k_2^{m_n} - 1} \varrho$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{k-2}{3} [2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)]}}{2^{2(m-1)}(k-1)} \varrho \quad 12)$$

woraus sich die quadratische Gleichung:

$$k_2^{m_n^2} - 2k_2^{m_n} = \frac{(k-2)[2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)]}{3 \cdot 2^{4(m-1)}(k-1)^2 - (k-2)[2^{2(m-1)}(7k-8) - (k-2)]} \quad 13)$$

zur Bestimmung von  $k_2^{m_n}$  ergibt.

Der Teilfactor selbst wird sein:

$$k_2^{m_n} = 1 \pm \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{2m-1}(k-1)}{\sqrt{[3 \cdot 2^{2(2m-1)} - 7 \cdot 2^{2(m-1)} + 1]k^2 - 2^2[3 \cdot 2^{2m-3} - 11 \cdot 2^{2m-3} + 1]k + 2^2[3 \cdot 2^{4(m-1)} - 1 \cdot 2^{2m} + 1]}} \quad 14)$$

oder auch in der Form

$$k_2^{m_n} = 1 + \frac{2^{2m-1}(k-1)\sqrt{3}}{\sqrt{[3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2]k^2 - 2[3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3]k + [3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4]}} \quad 15)$$

wobei wir aus bekannten Gründen bloss das obere Zeichen beibehalten haben.

Den mit dem Factor  $2^{2m-1}\sqrt{3}$  verbundenen Ausdruck der rechten Seite der obigen Gleichung kann man in eine Reihe entwickeln, indem wir setzen:

$$\frac{k^2 - 2k + 1}{[3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2]k^2 - 2[3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3]k + [3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4]} = [a + bk + ck^2 + \dots]^2 \quad 16)$$

Führen wir die nötigen Operationen in dieser Gleichung aus, so erhalten wir:

$$k^2 - 2k + 1 = \left. \begin{aligned} & [3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4]a^2 + [-2(3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3) \\ & + 2(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)ab]k \end{aligned} \right\} \quad 17)$$

$$\begin{aligned}
 & \hspace{15em} 17) \\
 k^2 - 2k + 1 = & \left\{ \begin{aligned}
 & + [3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2] a^2 - 2^2 (3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot (2^{2m} + 2^3) ab \\
 & \quad + (3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) (b^2 + 2ac)] k^2 \\
 & + [2(3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2) a^2 b - 2(3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3) \\
 & \quad (b^2 + 2ac) + 2(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) (ad + bc)] k^3 \\
 & + [3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2] (b^2 + 2ab) - 2^2 (3 \cdot 2^{4m} \\
 & \quad - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3) (ad + bc) + (3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) \\
 & \quad (c^2 + 2ac + 2bd)] k^4 \\
 & + [2(3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2) (ad + bc) - 2(3 \cdot 2^{4m} \\
 & \quad - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3) (c^2 + 2ac + 2bd) \\
 & \quad + (3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) (af + cd + be)] k^5 + \dots
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die Bestimmungsgleichungen aufstellen zur Ermittlung der Coefficienten  $a, b, c, \dots$ . Zur Berechnung der drei Constanten  $a, b$  und  $c$  dienen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
 & (3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) a^2 = 1 \\
 & -2(3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3) + 2(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) ab = -2 \\
 & (3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2) a^2 - 2^2 (3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3) ab \\
 & \quad + (3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4) (b^2 + 2ac) = 1
 \end{aligned} \right\} \quad 18)$$

und die Coefficienten selbst werden sein:

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \frac{1}{(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)^{1/2}} \\
 b &= \frac{2^{2m+4} - 11 \cdot 2^{2m} - 2^3}{(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)^{3/2}} \\
 c &= \frac{3 \cdot 11 \cdot 2^{6m} - 7 \cdot 2^3 \cdot 2^{4m} + 2^{2m+8} - 2^7}{(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)^{5/2}}
 \end{aligned} \right\} \quad 19)$$

Der Theilfactor erscheint nach Substitution dieser Werte in Gleichung 16) in der Form:

$$\begin{aligned}
 k_2^n = 1 & + \frac{2^{2m} \sqrt{3}}{(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)^{1/2}} \\
 & + \frac{2^{2m} (2^{2m+4} - 11 \cdot 2^{2m} - 2^3) \sqrt{3}}{(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)} k \\
 & + \frac{2^{2m} (3 \cdot 11 \cdot 2^{6m} - 7 \cdot 2^3 \cdot 2^{4m} + 2^{2m+8} - 2^7) \sqrt{3}}{(3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)^{3/2}} k^2 \\
 & \hspace{15em} + \dots 20)
 \end{aligned}$$

Diese Reihe geht in jene 11) über, wenn man darin  $m = 2$  substituirt.

Setzen wir  $m = 3$ , so folgt:

$$k_2^{3n} = 1 + \frac{2^4}{5 \cdot 47} \sqrt{5 \cdot 47} + \frac{2^3 \cdot 13}{5^2 \cdot 47^2} \sqrt{5 \cdot 47} k \\ + \frac{3 \cdot 7 \cdot 331}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 47^3} \sqrt{5 \cdot 47} k^2 + \dots \quad 21)$$

und weiter durch Specialisirung des Wertes  $m$  ergibt sich eine Reihe von Formeln, in welchen überall der Theilfactor der linken Seite der Gleichung rechts durch den dritt-vorhergehenden ausgedrückt erscheint.

Auch lässt sich in rascher Weise die Summirung einer Gruppe von Reihen durchführen; es ist nämlich:

$$\frac{k_2^{m_n} - 1}{5 \cdot 47} = \frac{2^4}{5 \cdot 47} + \frac{2^3 \cdot 13}{5^2 \cdot 47^2} k_2^{m-3_n} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 331}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 47^3} k_2^{2m-3_n^2} + \dots$$

woraus für besondere Fälle von  $m$  und  $n$  eine reiche Fülle von Reihen sich ergibt.

Wird der Exponent  $m = 4$ , so erhalten wir die Theilfactoren durch die viert-vorhergehenden ausgedrückt, es wird dann:

$$k_2^{4n} = 1 + \frac{2^6}{5 \cdot 47} \sqrt{5 \cdot 47} + \frac{2^8 \cdot 19}{3 \cdot 5^2 \cdot 47^2} \sqrt{5 \cdot 47} k \\ + \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 37}{3^2 \cdot 5^3 \cdot 47^3} \sqrt{5 \cdot 47} k^2 + \dots \quad 22)$$

oder allgemein:

$$k_2^{m_n} = 1 + \frac{2^6}{5 \cdot 47} \sqrt{5 \cdot 47} + \frac{2^8 \cdot 19}{3 \cdot 5^2 \cdot 47^2} \sqrt{5 \cdot 47} k_2^{m-4_n} \\ + \frac{2^{12} \cdot 7 \cdot 37}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 47^3} \sqrt{5 \cdot 47} k_2^{m-4_n^2} + \dots \quad 23)$$

Hieraus lässt sich wieder die Summe neuer Reihen ermitteln.

So könnte man in der Specialisirung des Exponenten  $m$  fortschreiten und zu neuen Ausdrücken gelangen.

Anmerkung. Auch hier gilt für den Theilfactor  $k_2^{m_n}$  eine ähnliche Bemerkung, wie dieselbe für  $k_2^{2n}$  angegeben haben. Nachdem für

$$2^{m_n} = \infty, \quad k_2^{m_n} = 2$$

so muss die Relation bestehen:

$$\frac{2^{2m}(k-1)\sqrt{3}}{\sqrt{(3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2)k^2 - 2(3 \cdot 2^{2m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3)k + (3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4)}} = 1$$

woraus die quadratische Gleichung sich ergibt:

$$k^2 - 2 \frac{7 \cdot 2^{2m} - 2^3}{11 \cdot 2^{2m} - 2^3} k = \frac{7 \cdot 2^{2m} - 2^3}{2^4 - 2^{2m+4}}$$

welche zur Wurzel hat

$$k = \frac{11 \cdot 2^{2m} - 2^3 \pm 3 \cdot 2^{2m}}{7 \cdot 2^{2m} - 2}$$

Nachdem nur das untere Zeichen einem realen Werte des Teilfactor zukommen kann, so erhalten wir bei Verwendung desselben für den Teilfactor

$$k = \frac{14 \cdot 2^{2m} - 2^3}{7 \cdot 2^{2m} - 2^2} = 2$$

einen Wert, den wir erwarten konnten.

In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir die Teilfactoren durch die vorhergehenden auszudrücken vermocht, was dadurch möglich wurde, weil  $k_2^{m_n}$  als Function des Teilfactor  $k$  erscheint, desjenigen nämlich, welcher die Grundlage bildete, und weil weiters durch die Substitution von

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

ein ganzes Polygonsystem gewonnen wurde, dessen Seitenzahl  $2n, 2^2n, 2^3n, \dots, 2^m n$  war.

Es dürfte sicherlich nicht ohne Interesse sein, umgekehrt  $k$  allgemein als Function von  $k_2^{m_n}$  auszudrücken.

Wir benutzen die Gleichung:

$$k_2^{m_n} = 1 + \frac{2^{2m}(k-1)\sqrt{3}}{\sqrt{[\alpha]k^2 - 2[\beta]k + [\gamma]}} \tag{24}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2 \\ \beta &= 3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3 \\ \gamma &= 3 \cdot 2^{4m} - 2^{2m+4} + 2^4 \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

als Abkürzungen eingeführt werden; setzen wir weiter der Kürze und Uebersicht wegen

$$a^2 = \left( \frac{k_2^{m_n} - 1}{2^{2m} \sqrt{3}} \right)$$

so erhalten wir:

$$k^2 - 2 \frac{1 - \beta a^2}{1 - \alpha a^2} k + 1 - \gamma a^2 = 0 \quad (26)$$

zur Bestimmung von  $k$ . Dieses selbst ist hieraus:

$$k = \frac{(1 - \beta a^2) \pm \sqrt{(1 - \beta a^2)^2 + (\gamma a^2 - 1)(1 - \alpha a^2)}}{1 - \alpha a^2} \quad (27)$$

was auch gesetzt werden kann:

$$k = \frac{1 - \beta a \pm \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma)a + (\alpha + \gamma - 2\beta)}}{1 - \alpha a} \quad (28)$$

Dieser Ausdruck gestattet eine bedeutende Vereinfachung; denn es ist:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \gamma - 2\beta &= -1 \cdot 2^2(2^{2(m-1)} + 1) \\ \beta^2 - \alpha\gamma &= 3 \cdot 2^{4m}(2^{2m} + 1) \end{aligned} \right\}$$

wobei die Klammerausdrücke beidermal eine ungerade Zahl darstellen.

Substituieren wir diese Werte für die angeführten Abkürzungen in die Gleichung für  $k$ , so ergibt sich nach einfacher Transformation:

$$k = \frac{3 \cdot 2^{4m} - (3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3)(k_2^{m_n} - 1)^2 \pm (k_2^{m_n} - 1) \times \sqrt{(2^{2m} + 1)(k_2^{m_n} - 1)^2 - 2^2(1 + 2^{2(m-1)})}}{3 \cdot 2^{4m} - (3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2)(k_2^{m_n} - 1)^2} \quad (29)$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass dem Teilfactor  $k$

- a) zwei reelle von einander verschiedene
- b) zwei zusammenfallende gleiche oder aber auch
- c) zwei imaginäre Werte zukommen können.

Betrachten wir vorerst den Fall b); hiebei wird

$$k = \frac{3 \cdot 2^{4m} - [3 \cdot 2^{4m} - 11 \cdot 2^{2m} + 2^3](2^{m_n} - 1)^2}{3 \cdot 2^{4m} - [3 \cdot 2^{4m} - 7 \cdot 2^{2m} + 2^2](k_2^{m_n} - 1)^2} \quad (30)$$

was dann eintreten würde, wenn der Ausdruck

$$(k_2^{m_n} - 1) \sqrt{(2^{2m} + 1)(k_2^{m_n} - 1)^2 - 2^2(1 + 2^{2(m-1)})} = 0$$

wird. Dies würde zweimal der Fall sein können und zwar, wenn

$$\text{resp. } \left. \begin{aligned} k_2^{m_n} - 1 &= 0 \\ (2^{2m} + 1)(k_2^{m_n} - 1)^2 &= 2^2(1 + 2^{2(m-1)}) \end{aligned} \right\} 31)$$

wäre. Das erste ist ausgeschlossen, weil

$$k_2^{m_n} = 1$$

nicht sein kann, da streng bewiesen wurde, dass  $k$  innerhalb den Grenzen 2 und 3 sich bewege.

Die zweite Bedingung, wobei

$$(k_2^{m_n} - 1)^2 = \frac{2^2(1 + 2^{2(m-1)})}{2^{2m} + 1} \quad 32)$$

ist, hat eine Berechtigung.

Dieser Fall wird sich ereignen, wenn

$$k_2^{m_n} = 1 \pm 2 \sqrt{\frac{1 + 2^{2(m-1)}}{1 + 2^{2m}}} \quad 33)$$

wird, was in speciellen Fällen liefert und zwar für

$$\left. \begin{aligned} m = 1 & \quad k_{2n} = 1 \pm 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \\ m = 2 & \quad k_2^{2n} = 1 \pm 2 \sqrt{\frac{5}{17}} \\ m = 3 & \quad k_2^{3n} = 1 \pm 2 \sqrt{\frac{17}{63}} \\ m = 4 & \quad k_2^{4n} = 1 \pm 2 \sqrt{\frac{65}{129}} \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \end{aligned} \right\} 34)$$

Selbstredend können aus bekannten Gründen in diesen Formeln bloss die oberen Zeichen Giltigkeit haben.

Die soeben ausgesprochene Berechtigung der Werte für  $k_2^{m_n}$  aus Formel 32) hätte volle Giltigkeit, wenn nach Substitution von  $k_2^{m_n} - 1$  in die Gleichung 30) für  $k$  mögliche Werte resultieren würden. Nach Ausführung der Substitution folgt:

$$k = \frac{2^{4m} + 18 \cdot 2^{2m} - 2^4}{2 \cdot 2^{4m} + 12 \cdot 2^{2m} - 2^3} \quad 35)$$

Für besondere Werte von  $m$  erhält man und zwar:

$$\begin{array}{l}
 m = 1 \quad k = \frac{2^4 + 18 \cdot 2^2 - 2^4}{-2^4 + 12 \cdot 2^2 - 2^3} = 3 \\
 m = 2, 3, 4 \dots \text{ wird } k = -7\frac{1}{3} \quad -1\frac{70}{189} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -1\frac{303}{2599}
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2, 3, 4 \dots \end{array}} \right\} 36)$$

Wie wir sehen, könnte nur der Wert des Teilfactor für  $m = 1$  zu einem reellen Resultate führen. Nachdem in diesem Falle  $k = 3$  ist, so müsste  $n = 3$  sein, also das Polygon ein Dreieck darstellen; da  $m = 1$  ist, so wäre

$$k_2^{m_n} = k_6$$

also der Teilfactor für ein Sechseck. Dieser ist aus der Tabelle

$$k_6 = 2 \cdot 14\,470$$

welcher Wert identisch sein müsste mit jenem, den wir aus Gleichung 34) erhalten, nämlich

$$k_6 = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 63\,294$$

Nachdem auch diese einzige Möglichkeit sich nicht bestätigt, so können wir sagen:

Der Teilfactor  $k$  kann nicht nach Gleichung 30) bestimmt werden, weil die gleichzeitig zu erfüllende Bedingung, welche in Gleichung 32) ihren Ausdruck findet, nicht erfüllt werden kann und ihre Verwendung zu negativen Teilfactoren führt, die nicht bestehen können.

Wir wollen hier die aus Gleichung 30) sich ergebenden Werte von  $k$  anführen, die sich nach Einführung specieller Werte von  $m$  ergeben, falls man die Bedingungsgleichung unberücksichtigt lässt.

Es wird für

$$\begin{array}{l}
 m = 1 \quad k = \frac{2^2 - (k_{2n} - 1)^2}{2^2 - 2(k_{2n} - 1)^2} \\
 m = 2 \quad k = \frac{2^6 - 2 \cdot 5^2 (k_{2^2 n} - 1)^2}{2^6 - 5 \cdot 11 (k_{2^2 n} - 1)^2} \\
 m = 3 \quad k = \frac{2^{10} - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23 (k_{2^3 n} - 1)^2}{2^{10} - 3 \cdot 7 \cdot 47 (k_{2^3 n} - 1)^2} \\
 m = 4 \quad k = \frac{2^{14} - 2 \cdot 5 \cdot 79 (k_{2^4 n} - 1)^2}{2^{14} - 5 \cdot 17 \cdot 121 (k_{2^4 n} - 1)^2} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ m = 4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} 37)$$

Der Fall c), wobei imaginäre Werte sich ergeben würden, betrachten wir nicht näher, wollen jedoch auf den Fall a) etwas eingehen und denselben für verschiedene Werte von  $m$  ausnutzen.

Setzen wir

$m = 1$ , so wird

$$k = \frac{3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2(k_{2n}-1)^2 \pm (k_{2n}-1)\sqrt{5(k_{2n}-1)^2 - 8}}{3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3(k_{2n}-1)^2}$$

$m = 2$ , so wird

$$k = \frac{3 \cdot 2^8 - 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2(k_{2^2n}-1)^2 \pm (k_{2^2n}-1) \times \sqrt{17(k_{2^2n}-1)^2 - 2^2 \cdot 9}}{3 \cdot 2^8 - 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11(k_{2^2n}-1)^2}$$

$m = 3$ , so wird

$$k = \frac{3 \cdot 2^{12} - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23(k_{2^3n}-1) \pm (k_{2^3n}-1) \sqrt{65(k_{2^3n}-1)^2 - 4 \cdot 17}}{3 \cdot 2^{12} - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 47(k_{2^3n}-1)^2}$$

$m = 4$ , so wird

$$k = \frac{3 \cdot 2^{16} - 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79(k_{2^4n}-1)^2 \pm (k_{2^4n}-1) \sqrt{257(k_{2^4n}-1)^2 - 2^2 \cdot 65}}{3 \cdot 2^{16} - 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 191(k_{2^4n}-1)^2}$$

38)

Hiermit beenden wir die in gewisser Richtung zum Abschlusse gebrachten Untersuchungen und behalten uns vor, in nächster Zeit noch weitere Folgerungen zu bringen.

Nachstehend geben wir eine Tabelle, in welcher für die Polygonzahl  $n$  der halbe Centriwinkel  $\frac{\alpha}{2}$  sowie der zugehörige Teilfactor angegeben sind.

$n$	$\frac{\alpha}{2}$	$k$	$n$	$\frac{\alpha}{2}$	$k$	$n$	$\frac{\alpha}{2}$	$k$
3	0	3.00 000	50	0	2.00 198	360	0	2.00 004
4	45	2.41 421	54	3	2.00 169	400	0	2.00 003
5	36	2.23 607	66	3	2.00 137	432	0	2.00 0031
6	30	2.15 470	72	2	2.00 095	450	0	2.00 0026
8	25	2.10 338	75	2	2.00 088	540	0	. . . 24
9	20	2.06 418	80	2	2.00 077	600	0	. . . 17
10	18	2.05 146	90	2	2.00 061	675	0	. . . 14
12	16	2.04 030	100	1	2.00 049	720	0	. . . 11
15	12	2.02 234	108	1	2.00 042	900	0	. . . 09
16	11	2.01 959	120	1	2.00 034	1080	0	. . . 06
18	10	2.01 543	135	1	2.00 027	1200	0	. . . 04
20	9	2.01 546	144	1	2.00 024	1350	0	2.0000 037
24	7	2.00 863	150	1	2.00 022	1800	0	. . . 028
25	6	2.00 795	180	1	2.00 015	2160	0	. . . 016
27	6	2.00 681	200	0	2.00 012	2700	0	. . . 012
30	5	2.00 551	216	0	2.00 011	3600	0	. . . 007
36	4	2.00 382	225	0	2.00 010	5400	0	2.0000 002
40	4	2.00 309	240	0	2.00 009			
45	3	2.00 244	270	0	2.00 008			
48	3	2.00 215	300	0	2.00 006			

## X.

## Eine approximative Trisectio Anguli.

Von

C. F. E. Björling.

Hr. Capitän C. E. Unonius in Malmö hat mir die folgende Construction mitgeteilt.

Ein gegebener Winkel

$$COD (= 2\alpha < 90^\circ, OC = OD = 1)$$

wird halbirt durch die Gerade  $OEK$ , die  $CD$  im Punkte  $E$  trifft  
Die zwei Kreise

- (1) mit Centrum  $O$ , Halbmesser  $OC$
- (2) „ „  $C$ , „  $CE$

schneiden sich im Punkte  $F$  (im Winkel  $COD$ ). Man ziehe  $FH$  parallel mit  $OC$ .  $M$  ist Centrum eines Kreises mit dem Halbmesser  $CE$ , welcher  $FH$  und  $EK$  berührt (ausserhalb des Kreises (1)). Für den Winkel  $COM$  erhält man

$$\cot COM = \cot \alpha + \frac{4}{\sin^3 \alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4}} \right)$$

Beisp. Für  $2\alpha = 30^\circ$  wird  $COM = 9^\circ 59' 55''$ , 1  
 $60^\circ$  „ „  $19^\circ 59' 42''$ , 9  
 $80^\circ$  „ „  $26^\circ 40' 14''$ , 7

Beweis. Mit  $O$  als Anfangspunkt,  $OC$  als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems wird die Ordinate des Punktes  $F$

$$R \sin \alpha, \quad \text{wo} \quad R = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4}}$$

Die beiden Geraden

$$FH . . . y = R \sin \alpha$$

$$OK . . . y = x \operatorname{tg} \alpha$$

bestimmen einen Punkt  $P (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ . Durch denselben ziehe man die Bissectrise des Winkels  $HPK$

$$(3) \quad y = R \sin \alpha = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (x - R \cos \alpha)$$

in derselben liegt das Centrum  $M$ . Seine Ordinate ist

$$= (1 + R) \sin \alpha$$

seine Abscisse also, laut (3)

$$= R \cos \alpha + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (1 + R) \cos \alpha + 1$$

Hieraus ergibt sich der obengenannte Wert des Winkels  $COM$ .

Lund, Schweden, Oct. 1896.

## XI.

Bemerkungen zu der ausnahmslosen Auflösung des Problems, eine quadratische Form durch eine lineare orthogonale Substitution in eine Summe von Quadraten zu verwandeln.

Von

**Adolf Kneser** in Dorpat.

---

In den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1868 (Werke Bd. I. S. 165) hat Kronecker eine kurze aber wichtige Notiz über die gleichzeitige Transformation zweier quadratischen Formen in Summen von Quadraten veröffentlicht, welche gegenüber den früheren Behandlungen desselben Themas zwei Neuerungen enthält. Erstens wird die gesuchte Transformation in mehreren Schritten hergestellt, bei deren jedem das Quadrat einer einzigen Variablen erscheint, welche mit keiner der übrigen multiplicirt ist; zweitens werden nicht die Formen einzeln, sondern die durch sie definirte Formenschar betrachtet. Diese beiden Grundgedanken Kroneckers festhaltend löse ich in den folgenden Zeilen das Problem der Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades und das allgemeinere, eine quadratische Form durch eine orthogonale lineare Substitution in eine Summe von Quadraten überzuführen, nach einer Methode, welche keinerlei Ausnahmen erfordert und an Vorkenntnissen nur die elementarsten Determinantensätze voraussetzt.

I. Sind  $a$  und  $b$  reelle Grössen, welche nicht beide verschwinden, und ist  $c$  einer der Werte von  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , so ergibt sich aus den Gleichungen

$$y_1 = \frac{ax_1 - bx_2}{c}, \quad y_2 = \frac{bx_1 + ax_2}{c}$$

die Folgerung

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$$

im Gebiet von zwei Variablen giebt es also orthogonale Substitutionen, in welchen die Coefficienten einer Gleichung, z. B. der ersten, sich wie zwei beliebig gegebene reelle Grössen verhalten, die nicht beide verschwinden.

II. Der analoge Satz sei für  $n-1$  Variable bewiesen, d. h. es gebe eine reelle Substitution

$$y_v = c_{v1}x_1 + c_{v2}x_2 + \dots + c_{v,n-1}x_{n-1} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1)$$

in welcher sich die Coefficienten der ersten Gleichung  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1,n-1}$  verhalten wie  $n-1$  beliebig gegebene reelle Grössen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , die nicht sämtlich verschwinden; als orthogonal ist die Substitution dadurch charakterisirt, dass die Gleichung

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{n-1} y_r^2 = \sum_{r=1}^{n-1} x_r^2$$

besteht. Dann bilde man die orthogonale Substitution

$$(2) \quad z_1 = \alpha y_1 + \beta y_n, \quad z_2 = \gamma y_1 + \delta y_n$$

und setze

$$z_n = y_n = x_n, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = y_4, \quad \dots, \quad z_{n-1} = y_{n-1}$$

sodass nach (1) die Gleichung

$$\sum_{r=1}^n x_r^2 = \sum_{r=1}^n y_r^2 = \sum_{r=1}^n z_r^2$$

folgt, die Systeme der  $n$  Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , also ebenfalls durch eine orthogonale Substitution verknüpft sind. Die erste Gleichung derselben lautet

$$(3) \quad z_1 = \alpha c_{11}x_1 + \alpha c_{12}x_2 + \dots + \alpha c_{1,n-1}x_{n-1} + \beta x_n$$

und man kann nach Voraussetzung

$$c_{1r} = \lambda a_r, \quad \alpha c_{1r} = \alpha \lambda a_r \quad (v = 1, 2, \dots, n-1)$$

setzen, wobei  $\lambda$  eine von null verschiedene reelle Grösse ist. Bedeutet ferner  $a_n$  eine beliebig gegebene reelle Grösse, so kann man nach I. die Substitution (2) so bestimmt denken, dass

$$\beta : \alpha z \beta = \lambda a_n : 1$$

alsdann verhalten sich in der Gleichung (3) die Coefficienten der Variablen  $x$  wie die reellen Grössen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , welche nur der Beschränkung unterworfen sind, dass die  $n-1$  ersten von ihnen nicht sämtlich verschwinden.

Will man eine orthogonale Substitution für die  $n$  Variablen bestimmen, in welcher die Coefficienten der ersten Gleichung sich verhalten wie

$$0 : 0 : \dots : 0 : a_n$$

wobei  $a_n$  von null verschieden sei, so braucht man nur

$$x_1 = w_n$$

zu setzen und die Variablen  $x_2, x_3, \dots, x_n$  durch eine beliebige orthogonale Substitution aus  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$  hervorgehen zu lassen.

Hiermit ist nach der Methode der vollständigen Induction der folgende Satz erwiesen.

Im Gebiet beliebig vieler Variablen kann eine reelle orthogonale Substitution hergestellt werden, in welcher die Coefficienten einer Gleichung in denselben Verhältnissen zu einander stehen wie beliebig gegebene reelle Grössen von gleicher Anzahl, welche nicht sämtlich verschwinden.

III. Es sei nun

$$f = \sum a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = \sum a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

eine beliebige quadratische Form mit reellen Coefficienten; man setze

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

und versuche eine orthogonale Substitution zu bestimmen, nach welcher man erhält

$$(4) \quad f = \lambda_1 y_1^2 + f_1(y_2, y_3, \dots, y_n)$$

wobei  $\lambda_1$  eine reelle Constante,  $f_1$  eine quadratische Form mit reellen Coefficienten bedeute. Ist die gesuchte Substitution durch die Gleichungen

$$(5) \quad y_\nu = c_{\nu 1} x_1 + c_{\nu 2} x_2 + \dots + c_{\nu n} x_n \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben, so hat man, da sie orthogonal sein soll, die weiteren Gleichungen

$$(6) \quad x_v = c_{1v} y_1 + c_{2v} y_2 + \dots + c_{nv} y_n$$

und die Gleichung (4) ergibt

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 2\lambda_1 y_1 = \sum_{r=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_1}$$

oder nach (5) und (6)

$$(8) \quad 2\lambda_1 \sum_{v=1}^n c_{1v} x_v = 2 \sum_{r=1}^n c_{1v} (a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n)$$

woraus für die  $n$  Grössen  $c_{1r}$  folgende Gleichungen resultiren:

$$(9) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n} &= 0 \\ a_{21}c_{11} + (a_{22} - \lambda_1)c_{12} + \dots + a_{2n}c_{1n} &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{12} + \dots + a_{nn} - \lambda_1)c_{1n} &= 0 \end{aligned}$$

Bezeichnet man ferner durch  $u$  eine Ubestimmte, durch  $D(u)$  die Determinante der Form  $f - u\varphi$ , sodass

$$D(u) = \begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - u \end{vmatrix}$$

so ergeben die Gleichungen (9)

$$D(\lambda_1) = 0$$

Ist umgekehrt  $\lambda_1$  eine dieser Gleichung genügende reelle Grösse, so sind die Gleichungen (9) durch reelle Werte der Unbekannten, welche nicht sämtlich verschwinden, zu befriedigen, und man kann nach II. eine orthogonale Substitution (5) finden, in welcher die Coefficienten  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$  jener Gleichungen genügen. Aus ihnen folgen unmittelbar die Gleichungen (8) und (7), mithin auch (4).

Es sei nun nach einer der vielen möglichen Methoden bewiesen, dass die Gleichung

$$D(x) = 0$$

nur reelle Wurzeln besitzt, etwa nach der von Weierstrass in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1879 gegebenen

welche keine weiteren Hilfsmittel als die hier gebrauchten Determinantensätze benutzt. Dann folgt aus der obigen Entwicklung, dass die Form  $f$  stets durch eine reelle orthogonale Substitution in die Gestalt (4) gebracht werden kann. Setzt man ferner

$$f_1(y_2, y_3, \dots, y_n) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = \sum_{\mu, \nu} b_{\nu\mu} y_\mu y_\nu$$

( $\mu, \nu = 2, 3, \dots, n$ )

$$\varphi_1 = y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2$$

so ist

$$(10) \quad D(u) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} - u & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} - u \end{vmatrix}$$

denn nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten multipliziert sich bei jeder linearen Substitution die Determinante einer quadratischen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante, welches im vorliegenden Falle den Wert  $+1$  hat, und die Form  $\varphi$  geht bei der Substitution (5) in die Summe der Quadrate von  $y_1, y_2, \dots, y_n$  über. Ist daher  $D_1(u)$  die Determinante der Form  $f_1 - u\varphi_1$ , so ergibt sich aus (10)

$$D(u) = (\lambda_1 - u) D_1(u)$$

IV. Allgemein sei  $k$  irgend eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n-1$ , und man habe, was nach III. für  $k = 1$  möglich ist, die Form  $f$  in folgende Gestalt gebracht:

$$(11) \quad f = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_k v_k^2 + f_k(v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n)$$

wobei die Grössen  $v$  durch eine reelle orthogonale Substitution aus den Variablen  $x$  entstanden sind,  $f_k$  eine quadratische Form mit reellen Coefficienten ist, und, wenn  $D_k(u)$  die Determinante der Form

$$f_k - u(v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2 + \dots + v_n^2)$$

bedeutet, die Gleichung

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \dots (\lambda_k - u) D_k(u)$$

besteht. Dann sei  $\lambda_{k+1} - u$  irgend ein Linearfactor von  $D_k(u)$ ; man kann III. durch eine reelle orthogonale Substitution solche Variablen  $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n$  einführen, dass man hat

$$(12) \quad f_k = \lambda_{k+1} w_{k+1}^2 + f_{k+1}(w_{k+2}, w_{k+1}, \dots, w_n)$$

wobei  $f_{k+1}$  eine quadratische Form mit reellen Coefficienten ist, welche für  $k+1 = n$  identisch verschwindet. Setzt man noch

$$(13) \quad w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2, \quad \dots \quad w_k = v_k$$

so sind auch die Variablensysteme  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $w_1, w_2, \dots, w_n$  durch eine orthogonale Substitution verknüpft, und wenn  $D_{k+1}(u)$  die Determinante der Form

$$f_{k+1} - u(w_{k+2}^2 + w_{k+3}^2 + \dots + w_n^2)$$

bedeutet, besteht nach III. die Gleichung

$$D_k(u) = (\lambda_{k+1} - u) D_{k+1}(u)$$

mithin auch

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \dots (\lambda_{k+1} - u) D_{k+1}(u)$$

ferner folgt aus (11), (12) und (13)

$$f = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_{k+1} w_{k+1}^2 + f_{k+1}(w_{k+2}, w_{k+3}, \dots, w_n)$$

Für die Variablen  $w$  gelten also genau die für die Variablen  $v$  eingeführten Voraussetzungen, nur dass die Anzahl der Variablen, welche in der Form  $f$  mit keinen andern multiplicirt sind, um Eins gewachsen ist.

Man kommt daher, indem man den von den Grössen  $v$  zu den Grössen  $w$  führenden Schritt wiederholt, schliesslich zu einem Variablensystem  $t$ , in welchem die Form  $f$  folgendermassen ausgedrückt wird

$$f = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \dots + \lambda_{n-1} t_{n-1}^2 + f_{n-1}(t_n)$$

wobei  $f_{n-1}$  eine quadratische Form ist und, wenn  $D_n(u)$  die Determinante der Form

$$f_{n-1} - u t_n^2$$

ist, die Gleichung

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \dots (\lambda_{n-1} - u) D_n(u)$$

besteht. Nun kann man offenbar setzen

$$f_{n-1} = \lambda_n t_n^2$$

sodass

$$D_n(u) = (\lambda_n - u)$$

wird; man hat daher die beiden Gleichungen

$$f = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \dots + \lambda_n t_n^2$$

$$D(u) = (\lambda_1 - u)(\lambda_2 - u) \dots (\lambda_n - u)$$

wobei die Grössen  $t$  durch eine reelle orthogonale Substitution mit den Grössen  $x$  verknüpft sind. Die Form  $f$  kann also in der Tat durch eine orthogonale Substitution so umgestaltet werden, dass sie nur noch die Quadrate der Variabeln enthält und die Coefficienten derselben die reellen, gleichen oder ungleichen Wurzeln der Gleichung

$$D(x) = 0$$

sind.

Dorpat, Juli 1896.



## XII.

## Ueber Radical- und Antiradical-Kreise.

## Zweiter Teil.

Von

**Juan J. Durán Loriga.**

Fortsetzung von Nr. IV.

In dem ersten Teile haben wir den Radical-Kreis definiert als den geometrischen Ort von denjenigen Punkten, deren Potenzen mit Bezug auf zwei feste Kreise  $(O)$  und  $(O')$  gleich sind und verschiedene Vorzeichen haben; wir haben gesehen, dass der erwähnte Kreis als Mittelpunkt hat die Mitte desjenigen Segments, welches die Centra der gegebenen Kreise vereinigt, dass ferner sein Radius ist, wenn man die bekannten Radien  $R$  und  $R'$  nennt,

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

Man begreift die Möglichkeit das umgekehrte Problem zu lösen, d. h. bei zwei gegebenen Kreisen  $(O)$  und  $(\rho)$  einen dritten zu finden, der mit dem Kreis  $(O)$  vereinigt als Radical-Kreis  $(\rho)$  haben möge, und den wir Antiradical-Kreis von  $(O)$  mit Bezug auf  $(\rho)$  nennen wollen, indessen ehe wir auf diese Untersuchung eingehen, wollen wir das betreffs der Radical-Kreise in dem ersten Teil der Arbeit gesagte etwas erweitern.

Vorläufig ist zu bemerken, dass die beiden gegebenen Kreise und der Radical-Kreis ein Kreis-Büschel bilden, da alle drei zu einem Coaxial-System gehören, dass sie deshalb die vielfachen Eigenschaften dieser Systeme besitzen, und dass aus demselben Grunde ihr Studium aus der projectivischen Geometrie sich ableiten lassen

könnte, obgleich wir vorgezogen haben, ihm eine elementare Form zu geben

Ans der Betrachtung der Radical-Kreise lassen sich die bekannten Beziehungen zwischen den Coefficienten, dergestalt, dass zwei Kreise orthogonal sind, ableiten, wenn man als Grundlage das Factum nimmt, dass, wenn zwei Kreise orthogonal sind, der Radical-Kreis durch ihre Mittelpunkte geht und umgekehrt, aus welchem Grunde in dem Falle der Orthogonalität als notwendige und ausreichende Bedingung erfüllt sein muss, dass die Coordinaten des Centrums eines derselben der Gleichung des Radical-Kreises genügen.

Es seien die Gleichungen der Kreise, deren Eigenschaften wir als orthogonale feststellen wollen, die folgenden:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C &= 0 \\x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' &= 0\end{aligned}$$

Die Gleichung des Radical-Kreises ist

$$2(x^2 + y^2) + 2(A + A')x + 2(B + B')y + C + C' = 0$$

Die Coordinaten des Centrums eines dieser Kreise z. B. des ersten sind  $-A$  und  $-B$ , sie müssen also den Bedingungen genügen:

$$2(A^2 + B^2) - 2(A + A')A - 2(B + B')B + C + C' = 0$$

was sich auf das bekannte Verhältniss zurückführen lässt

$$2(AA' + BB') = C + C'$$

Wenn die Gleichungen der Kreise in barycentrischen Coordinaten gegeben sind, wird dieses Verfahren das geeignete sein, besonders wenn die Coordinaten des Centrums eines derselben a priori bekannt sind. Versuchen wir z. B. zu beweisen, dass der Longchamps'sche Kreis orthogonal ist mit Bezug auf die Potential-Kreise (wir nennen Potential-Kreise solche Kreise, die um die Mitten der Seiten als Centren beschrieben werden mit Radien, die den entsprechenden Medianen gleich sind (man sehe *Progreso Matematico*. Band 5, Seite 7<sub>0</sub>); wir haben:

Gleichung des Longchamps'schen-Kreises ( $P_a$ )

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

Gleichung des Potential-Kreises

$$(P_a) \quad p_a(\alpha + \beta + \gamma)(\beta + \gamma) + a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0$$

Gleichung des Radical-Kreises

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - p_0\beta - p_0\gamma - 2(a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta) = 0$$

Wir haben mit  $p_a$  bezeichnet den Wert  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

Da das Centrum von  $P$  die Mitte der Seite ist, so sind seine barycentrischen Coordinaten  $\alpha = 0$  und  $\beta = \gamma$ , woraus sich ergibt

$$2\beta(b^2\beta + c^2\beta - 2p_a\beta^2 - 2a^2\beta^2) = 0$$

folglich etc.

Wenn einer der Kreise sich auf einen Punkt verringert, so wird der Radical-Kreis zum Radius haben

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - d^2}$$

und wenn beide sich in Punkte verwandeln, so wird der Radical-Kreis immer imaginär sein und als Radius haben

$$e = \frac{d}{2} \sqrt{-1}$$

Wir wollen auch bemerken, dass der Begriff des Radical-Kreises sich verallgemeinern lässt, wenn man das Verhältniss der Potenz = einem Wert  $\frac{m}{n}$  macht. Alle Kreise, die sich dann ergeben, sind Teile eines gemeinsamen Büschels und haben viele Eigenschaften gemein.

Der Lehrsatz, wonach bei drei Kreisen, die zu zwei und zwei combinirt werden, die Radical-Axe der Radical-Kreise von zwei Gruppen auch die der dritten Gruppe ist, trifft auch zu, wenn man den Begriff des Radical-Kreises verallgemeinert; folglich:

Wenn man drei Kreise hat und die Radicalen von zwei Gruppen findet, so bilden alle diese Kreise für irgend welches Verhältniss der Potenz-Teile eines und desselben Büschels.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass der Begriff des Radical-Kreises sich ausdehnen lässt auf Kugeln und ebenso auch auf die Kreise, die auf einer sphärischen Oberfläche beschrieben werden.

## II.

Wir wollen nunmehr auf das Studium der obenerwähnten „Antiradical-Kreise“ eingehen.

Ist ein Kreis (0) und ein Radical-Kreis ( $\rho$ ) gegeben, so lässt sich bestimmen ( $O'$ ), (Antiradical-Kreis von (0) mit Bezug auf ( $\rho$ )), wenn man eine Distanz

$$\rho O' = O\rho$$

annimmt, wodurch man sein Centrum  $O'$  erhält; um seinen Radius zu berechnen, bestimmen wir  $R'$  in der Formel, welche den Wert von  $\rho$  gab

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + d^2) - R^2}$$

wenn man die Distanz  $O\rho d$  nennt.

Damit der Kreis ( $O'$ ) reell ist, muss sich ergeben

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\rho^2}{2}}$$

Wenn

$$2\rho^2 + d^2 - R^2 = 0$$

verkleinert sich der Antiradical-Kreis zu einem Punkte

Wenn die Gleichungen von zwei Kreisen

$$(C) \dots x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

$$(C') \dots x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0$$

gegeben sind, so hat der Antiradical-Kreis von (C) mit Bezug auf (C') als Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2(2A' - A)x + 2(2B' - B)y + 2C' - C = 0$$

wenn es sich um barycentrischen Coordinaten handelt, so hat man ebenfalls

$$(C) \dots (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

$$(C') \dots (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) - a'^2\beta\gamma - b'^2\alpha\gamma - c'^2\alpha\beta = 0$$

Antiradical-Kreis von (C) mit Bezug auf (C')

$$(\alpha + \beta + \gamma)[(2u' - u)\alpha + (2v' - v)\beta + (2w' - w)\gamma] - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

Wenn einer der Kreise sich bis zu einem Punkte verringert, so wird der Radius des Antiradical-Kreises eines Kreises (0) mit Bezug auf einen Punkt  $\rho$  den folgenden Wert haben

$$R' = \sqrt{2d^2 - R^2}$$

worin  $d$  die Distanz  $O\rho$  bedeutet; sein Centrum wird sich über  $O\rho$  in einer Entfernung

$$OO' = 2O\rho$$

befinden.

Der Antiradical-Kreis wird reell, gleich einem Punkte oder imaginär sein, je nachdem

$$d \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} R \sqrt{2}$$

Wenn die Gleichung des Kreises ist

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

und  $a$  und  $b$  die Coordinaten des Punktes sind, so wird man als Gleichung des Radical-Kreises von 0 mit Bezug auf  $\rho$  erhalten

$$x^2 + y^2 - 2(2a + A)x - 2(2b + B)y + 2(b^2 + b^2) - C = 0$$

und wenn der Kreis sein Centrum in dem Coordinatenursprung hat, und der Punkt  $\rho$  über der Axe der  $x$  steht in einer Entfernung  $d$ , so wird die Gleichung sein:

$$x^2 + y^2 - 4dx + 2d^2 + R^2 = 0$$

Aus der Formel, die den Wert des Radius  $R'$  des Antiradical-Kreises giebt, folgern wir

$$2(R^2 + R'^2) = 00'^2$$

woraus sich ergibt, dass die Berührungspunkte der Tangenten, die einem Kreise und dem mit Bezug auf einen Punkt dazu gehörigen Antiradical-Kreise gemeinsam sind, zu vier und vier auf zwei Geraden sich befinden, die die Linie  $00'$  in einem und demselben Punkte schneiden, der von 0 den Abstand  $\frac{R^2}{d}$  hat, d. h. dass dieser Punkt der Fuss der Polare von  $\rho$  ist mit Bezug auf (0): die erwähnten Geraden liegen in einem Neigungswinkel von  $45^\circ$  auf der Linie der Mittelpunkte um die Tangenten, die von irgend welchem Punkte derselben an die Kreise (0) und (0') gezogen werden, bilden ein harmonisches Bündel.

Auch beweist das erwähnte Verhältniss, dass, wenn der Kreis (0) bleibt, und der Punkt  $\rho$  sich auf der Linie  $00'$  bewegt, die Enveloppe der Antiradical-Kreise die äquilaterale Hyperbel

$$x^2 - y^2 = R^2$$

ist.

Es ist klar, dass alle Kreise, die durch die Punkte  $H$  und  $K$  gehen, in welchen der Antiradical-Kreis (0') die Linie der Centren schneidet, auch Antiradical-Kreise des Kreises (0) sind mit Bezug

auf den Punkt  $\rho$ , aber wir verstehen unter Antiradical-Kreis denjenigen, welcher sein Centrum über  $O\rho$  hat.

Wenn wir die Radical-Kreise des Büschels suchen, den man erhalten würde, und der gegebenen  $(O)$ , so werden alle durch den Punkt  $\rho$  gehen, weshalb man die erwähnten Linien erhalten würde, wenn man einen beliebigen Punkt des zu  $HK$  perpendicularären Durchmessers mit dem Centrum  $O$  vereinigt und als Centrum resp. Radius annimmt die Mitte dieser Geraden resp. ihre Entfernung von  $\rho$ .

Wenn der Kreis  $(O)$  sich gleichfalls zu einem Punkte (Kreis-Punkte) verringert, so müssen wir auf den Fall eingehen, wo wir den Antiradical-Kreis eines Punktes  $O$  mit Bezug auf einen anderen Punkt  $\rho$  finden, und es ist leicht zu sehen, dass es genügt, um ihn zu finden,  $O\rho$  um die Strecke

$$\rho O' = O\rho$$

zu verlängern, wodurch man das Centrum  $O'$  bestimmt, und es wird der Radius als Wert

$$R' = d\sqrt{2}$$

haben: es ergibt sich also, dass der Antiradical-Kreis eines Punktes mit Bezug auf einen anderen immer reell ist. Ebenso sieht man, dass die beiden Punkte bezüglich des Kreises invers sind.

Wenn der Punkt  $O$  fest bleibt, und der andre Punkt sich auf der Linie  $O\rho$  bewegt, so verwandelt sich die äquilaterale Hyperbel welche diejenigen Antiradical-Kreise einschliesst, die wir oben als Kreis und Punkt angesehen haben, in zwei Gerade, die als Gleichung haben

$$y = \pm x$$

d. h. Asintoten sind der früheren Hyperbel.

Der Umstand, dass zwei Punkte und der Antiradical-Kreis ein Büschel bilden, in welchem die erwähnten Punkte die Grenz-Punkte sind, gestattet eine Reihe von Eigenschaften zu citiren; wir beschränken uns darauf, die nachfolgenden zu erwähnen, die wir benutzen wollen. Wenn man einen beliebigen Punkt  $A$  der Ebene mit zwei Punkten  $O$  und  $\rho$  verbindet und auf den Enden von  $AO$  und  $A\rho$  Perpendiculare errichtet, so sind diese Geraden und die Polare von  $A$  mit Bezug auf den Antiradical-Kreis von  $O$  und  $\rho$  convergent.

Wenn man den geometrischen Ort der Schnittpunkte dieser Geraden finden will, im Falle dass  $A$  eine beliebige Linie beschreibt, so genügt es, auf die folgenden Umwandlungsformeln zu recurriren, die leicht zu erhalten sind.

$$x = d - X \quad y = \frac{K(X - d)}{Y}$$

wenn man  $d$  den Abstand der Punkte  $O$  und  $\rho$  nennt, und als Cartesianische Axen die Gerade  $O\rho$  und die in  $O$  errichtete Perpendiculare annimmt.

Diese Formeln machen ersichtlich, dass, wenn der Punkt  $A$  eine Gerade beschreibt, welche durch  $O$  geht, auch der andere entsprechende Punkt eine in  $O$  auf der ersten Perpendiculare beschreibt; einer Geraden, die parallel ist zu der Axe der Linien  $y$ , entspricht eine andre gleichfalls parallele Gerade, einer Parallele zu der Axe der Linien  $x$  eine Parabel. Jeder Kreis, der durch  $O\rho$  geht, entspricht sich selbst; einer Parabel, die zur Gleichung hat

$$x^2 = 2py$$

entspricht eine Hyperbel.

Ist ein Kreis  $(O)$  gegeben, so existiren auf einem seiner Durchmesser nur zwei Punkte,  $O$  und  $\rho$  (oder ihre symmetrischen Punkte), die derartig beschaffen sind, dass der Antiradical-Kreis von  $O$  mit Bezug auf  $\rho(O)$  ist; man könnte die Punkte, die derartig an jedem Kreis der Ebene gebunden sind, dem erwähnten Kreise radical associirte Punkte nennen.

Wenn der Durchmesser nicht fixirt ist, dann sind die geometrischen Orte von  $O$  und  $\rho$  zwei Kreise, beide concentrisch mit dem gegebenen Kreise; ausserdem haben sie den doppelten Radius und sind derartig beschaffen, dass der Radius von  $(O')$  das geometrische Mittel ist; diese Kreise könnten wir auch zu  $(O')$  radical-associirte Kreise nennen.

Aus dem Obigen lässt sich das folgende kleine Theorem ableiten:

Man hat einen Kreis mit dem Centrum  $O$  und seine beiden radical-associirten Kreise und zieht einen beliebigen Radius  $Oab$  ( $a$ ,  $b$  und  $c$  sind die Punkte, in denen er nach einander die 3 Kreise schneidet). Verbindet man einen beliebigen Punkt  $A$  der Ebene mit  $a$  und  $c$  und errichtet Perpendiculare auf den erwähnten Punkten der erhaltenen Geraden, so sind diese Perpendiculare und die Polare von  $A$  mit Bezug auf den gegebenen Kreis convergent.

Wenn man speciell den Punkt  $A$  auf dem gegebenen Kreis  $(O)$  betrachtet, so ergibt sich das nachfolgende Theorem:

Die Perpendicularen errichtet auf den Endpunkten der Geraden, welche einen Punkt eines Kreises mit den Endpunkten eines und desselben Radius der radical-associirten Kreise verbinden, convergiren in der Tangente des ursprünglichen Kreises in  $A$ , sodass diese Tangente aus diesem Grunde der geometrische Ort der Schnittpunkte aller Perpendicularen ist, die sich auf den Punkt  $A$  beziehen.

Wenn die Coordinaten zweier Punkte  $A$  und  $A'$ ,  $a$  und  $b$  beziehungsweise  $a'$  und  $b'$  sind, so ist die Gleichung des Antiradical-Kreises von  $A$  mit Bezug auf  $A'$

$$x^2 + y^2 + 2(a - 2a')x + 2(b - 2b')y + 2(a'^2 + b'^2 - (a^2 + b^2)) = 0$$

Die Betrachtung von Radical- und Antiradical-Kreisen in der Geometrie des Dreiecks kann, wie wir schon bei anderer Gelegenheit bemerkt haben, zum Gegenstand interessanter Studien werden, je nachdem man in Betracht zieht, effective Kreise oder solche, die sich zu Punkten verringern und sogar solche, die in das Imaginäre übergehen. Als eine der einfachsten Anwendungen wollen wir hier oberflächlich die Antiradical-Kreise eines Scheitels eines Dreiecks mit Bezug auf einen anderen betrachten. Es sei  $ABC$  das betreffende Dreieck, und nehmen wir an, dass sein Umfang in einem bestimmten Sinne durchlaufen werde, z. B. in alphabetischer Ordnung, so haben wir zu finden den Antiradical-Kreis von  $A$  mit Bezug auf  $B$ , von  $B$  mit Bezug auf  $C$  und von  $C$  mit Bezug auf  $A$ , welche wir beziehungsweise nennen wollen  $(C_1)$ ,  $(A_1)$ ,  $(B_1)$

Wir werden die Centren der Kreise erhalten, wenn wir die Seiten (in dem Sinne der in Betracht kommt) um ihre eigene Länge verlängern, und was die Radien betrifft, so werden wir zu Werten haben  $c\sqrt{2}$ ,  $a\sqrt{2}$  und  $b\sqrt{2}$ .

Wir wollen die Gleichung des Kreises  $A_1$  finden.

Wir wissen, dass in der von Longchamps (J. S. 1886, Seite 57) angedeuteten Form, die Gleichung des ganzen Kreises ist

$$(a + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^3\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^3\alpha\beta = 0$$

worin  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Potenzen der Scheitel des Dreiecks sind mit Bezug auf den Kreis, der in Betracht kommt.

Im gegenwärtigen Falle haben wir

$$u = 2b^2 - c^2 \quad v = 2a^2 \quad w = -a^2$$

folglich ist die Gleichung des Kreises  $(A_1)$

$$(\alpha + \beta + \gamma)[(2b^2 - c^2)\alpha + 2a^2\beta - a^2\gamma] - a^2\beta\gamma - b^2a\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

und auf ähnliche Art oder durch Circular-Permutation erhält man die von  $(B_1)$  und  $(C_1)$ .

Wenn man das Radical-Centrum von  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$  findet, so erhält man

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 p_a : b^2 p_b : c^2 p_c$$

d. h. es fällt zusammen mit dem Centrum des umgeschriebenen Kreises. Berechnen wir den Radius des orthotomischen Kreises.

Die Potenz von  $O$  mit Bezug auf  $(A_1)$  ist

$$\overline{OA_1} = 2a^2$$

aber

$$\overline{OA_1} = R^2 + 2a^2$$

es ergibt sich demgemäss, dass der orthotomische Kreis als Radius hat  $R$  und mit dem umgeschriebenen Kreise zusammenfällt.

Dieses Resultat muss sich notwendigerweise ergeben, denn, da die Scheitel die Grenzpunkte des Bündels sind, den die Antiradical-Kreise bilden, muss der Kreis, der zu gleicher Zeit durch die drei Scheitelpunkte geht, zu jenen Kreisen orthogonal sein, d. h. orthotomisch zu  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$ .

Die Polaren des Centrums des umgeschriebenen Kreises mit Bezug auf die Kreise, die wir betrachten, gehen durch die Scheitel des Tangential-Dreiecks (Lemoine'schen Punkte associirte), da die auf den Geraden  $OB$ ,  $OC$  und  $OA$  errichteten Perpendicularen an ihren Enden sich in den genannten Punkten schneiden. Die erwähnten Polaren teilen die Seiten des fundamentalen Dreiecks im Verhältniss zwei zu eins.

Die Polare des Scheitelpunkts z. B. mit Bezug auf den Kreis  $(A_1)$  geht durch den symmetrischen Punkt von  $A$  mit Bezug auf das Centrum des eingeschriebenen Kreises, weil sich im erwähnten Punkte die in  $B$  und  $C$  auf den Seiten  $AB$  und  $AC$  errichteten Perpendicularen kreuzen.

Da die Punkte  $B$  und  $C$  invers sind mit Bezug auf den Kreis  $(A_1)$ , so folgt, dass wenn wir durch  $C$  in dem erwähnten Kreise eine beliebige Sehne  $mn$  ziehen, die Punkte  $m$ ,  $n$ ,  $B$  und  $A$  concyklich sind.

Da die Punkte  $H$  und  $K$  (Punkte, in welchen die Seite  $\underline{BC}$ ,  $(A_1)$  schneidet harmonisch zugeordnet sind mit Bezug auf  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$ , so haben wir

$$\frac{HB}{HC} = \sqrt{2}$$

und folglich wird in einem beliebigen Punkte  $n$  des Kreises  $(A_1)$  sein:

$$\overline{aB}^2 = 2 \overline{nC}^2$$

d. h. der erwähnte Kreis ist der geometrische Ort derjenigen Punkte deren Abstand von  $\underline{B}$  im Quadrat erhoben doppelt so gross als das Quadrat ihres Abstands von  $\underline{C}$  ist.

Die Polaren eines beliebigen Scheitelpunkts des Dreiecks mit Bezug auf die Kreise  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$  sind convergent und dasselbe ist der Fall mit den Radical-Axen.

Die Polaren eines der Brocard'schen Punkte mit Bezug auf die Kreise, die wir betrachten, gehen durch den diametral entgegengesetzten Punkt des entsprechenden Bei-Kreises.

Ein analoges Factum wird eintreten, wenn man die isogonen Punkte und die Zorricheli'schen Kreise betrachtet.

Wenn man über  $\underline{OA_1}$ ,  $\underline{OB_1}$  und  $\underline{OC_1}$  als Durchmesser Kreise beschreibt, so sind diese Radical-Kreise des umgeschriebenen Kreises, und von  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$  und gemäss bestätigt sich, dass die Radical-Axen dieser letzteren durch  $O$  gehen.

Die Potenzen der Scheitel des Dreiecks mit Bezug auf die Neuberg'schen Kreise und auf die Kreise  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$  sind gleich und haben entgegengesetzte Vorzeichen, z. B. die Potenz von  $C$  mit Bezug auf  $(N_a)$  ist gleich (mit Ausnahme des Vorzeichens) der von  $C$  mit Bezug auf  $(A_1)$ ; so gehen die Radical-Kreise der erwähnten Kreise durch die Scheitel des Fundamental-Dreiecks. Die Gleichung der erwähnten Radical-Kreise z. B. des  $(N_a)$  und  $(A_1)$  entsprechenden ist

$$(\alpha + \beta + \gamma)[(2b^2 - c^2)\alpha + 3a^2\beta] - 2a^2\beta\gamma - 2b^2\alpha\gamma - 2c^2\alpha\beta = 0$$

Wenn wir den Radius des Radical-Kreises finden wollen, dessen Gleichung wir notirt, so genügt es in der Formel

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{2(R^2 + R_1^2) - d^2}$$

die Werte zu ersetzen

$$R = a\sqrt{2} \quad R' = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2 w - 3} \quad d = \frac{a}{2}\sqrt{9 + \cot^2 w}$$

und es ergibt sich für den gesuchten Radius der höchst einfache nachfolgende Ausdruck

$$\rho = \frac{a}{4} \operatorname{cosec} w$$

Dieses Resultat könnte man auch erhalten, wenn man bemerkt, dass die Gerade, die  $C$  mit dem Mittelpunkt des Kreises vereinigt, parallel und gleich ist der Hälfte von  $\underline{BN_a}$ .

Die Radical-Axen der Neuberg'schen Kreise und der Kreise  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$  gehen durch die Scheitel des ersten Brocard'schen Dreiecks (semireciproke Punkte des Lemoniu'schen Punktes) und schneiden die Seiten des Dreiecks im Verhältniss von zwei zu eins; z. B. die Radical-Axe von  $(N_a)$  und  $(A_1)$  geht durch den Scheitel  $A_1$ , dessen Coordinaten sind

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : c^2 : b^2$$

Die Polaren des Zarry'schen Punktes mit Bezug auf die Kreise  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$  schneiden sich in dem Steiner'schen Punkte.

Das Dreieck der Centren  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  ist dreifach homologisch zum Fundamental-Dreieck, und es sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  die Centren der Homologie und die Seiten des ersteren die Axen der Homologie.

Die Seiten des Dreiecks der Centren und des Fundamental-Dreiecks stehen in dem nachfolgenden Verhältniss

$$\overline{A_1 B_1}^2 + \overline{B_1 C_1}^2 + \overline{A_1 C_1}^2 = 7(a^2 + b^2 + c^2)$$

d. h. die Total-Potenz (man sehe Progr. Mat. Band IV, Seite 313) des ersten Dreiecks ist siebenmal grösser als die des zweiten.

Die Polare des Scheitels  $B$  mit Bezug auf den Kreis  $(A_1)$  ist die Perpendiculare errichtet auf  $\underline{BC}$  im Punkte  $C$  und die Radical-Axen im Punkte  $C$ , und die Radical-Axen derselben Elemente sind die Mediatrizen.

In dem besonderen Falle, dass in einem Dreiecke sich ergibt

$$c^3 = 2b^3$$

verwandelt sich der Kreis  $(A_1)$  in den Appollonius'schen.

Wenn man den Umfang des Dreiecks als im entgegengesetzten Sinne durchlaufen annimmt, werden sich andere Kreise  $(A_2)$ ,  $(B_2)$

und  $(C_2)$  ergeben, die analoge Eigenschaften aufweisen wie die von  $(A_1)$ ,  $(B_1)$  und  $(C_1)$ ; dessen ungeachtet lassen sich aus der Combination der einen mit den anderen neue Eigenschaften ableiten, so z. B. sind die Radical-Centren von  $(A_2)$ ,  $(A_4)$ ;  $(N_6)$ ,  $(B_2)$ ,  $(B_1)$  u. s. w. die Scheitel des ersten Brocard'schen Dreiecks.

Verschiedene andre Eigentümlichkeiten könnten wir hier noch anführen; wir reserviren indessen für den dritten Teil unserer Abhandlung die Nutzanwendung (besonders auf die Geometrie des Dreiecks), die sich leicht ergibt aus der Betrachtung und dem Studium der Radical- und Antiradical-Kreise.

La Coruña (Spanien) August 1896.

## XII.

Ueber die charakteristische Differentialgleichung  
der Raumcurven.

Von

**R. Hoppe.**

In meiner analytischen Curventheorie \*) habe ich die allgemeine Bestimmung der Raumcurve nach Elimination des Linielements und der Lage auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgeführt, deren Beziehung zur Curve aber nur, soweit es die Definition erforderte, zum Ausdruck gebracht. Diese Beziehung nach allen Seiten hin zu formuliren, macht sich das Folgende zur Aufgabe.

Eine Curve ist unabhängig vom Linielement, also von den detaillirten Dimensionen, bestimmt, wenn die Richtungscosinus der Tangente  $f, g, h$  gegen die Axen der  $x, y, z$  gegebene Functionen eines Parameters sind; sie ist überdies unabhängig von ihrer Lage bestimmt, wenn statt dessen zwischen dem Krümmungswinkel  $\tau$  und dem Torsionswinkel  $\vartheta$  eine Relation gegeben ist.

Nimmt man, wie hier stets geschehen soll,  $\tau$  zur unabhängigen Variablen, und bezeichnen Accente die Differentiation nach  $\tau$ , so sind  $f', g', h'$  die Richtungscosinus der Hauptnormale. Die der Binormale mögen  $l, m, n$  sein.

Für die allgemeine Untersuchung aber kann eine Axe alle übrigen vertreten. Wir wenden daher zur Bestimmung nur  $f, f', l$

\*) Lehrbuch der analytischen Geometrie, 3. Abschn.

als Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale gegen die  $x$  Axe an. Aus ihnen lassen sich leicht \*) die entsprechenden Grössen für die  $y$  und  $z$  Axe bis auf eine willkürliche Constante entsprechend einer Rotation der Figur um die  $x$  Axe finden.

Zerlegt man die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1 \tag{1}$$

in

$$f \cos \mu + f' \sin \mu = 1$$

$$f \sin \mu - f' \cos \mu = il$$

und setzt

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\mu = \frac{2r'}{r}$$

so ergeben sich für letztere Grösse 2 quadratische Gleichungen und als deren Wurzeln die Werte:

$$\frac{2r'}{r} = \frac{f' \pm il}{1 + f} = \frac{f' + il}{\pm 1 + f}$$

nur vereinbar für

$$\frac{2r'}{r} = \frac{f' + il}{1 + f} \tag{2}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r' - \frac{1}{2} \frac{f' + il}{1 + f} r \right) + \left( i\vartheta' + \frac{1}{2} \frac{f' + il}{1 + f} \right) \left( r' - \frac{1}{2} \frac{f' + il}{1 + f} r \right) = 0$$

das ist:

$$r'' + i\vartheta' r' + \frac{1}{4} r = 0 \tag{3}$$

Diese Gleichung, früher \*\*) auf andern Wege hergeleitet, ist es, die ich oben charakteristische Differentialgleichung genannt habe; es sollen nun die Beziehungen ihrer Lösungen ergänzend aufgestellt werden. Hierbei sei  $r$  diejenige Speciallösung, welche gemäss Gl. (2) der Curve  $(ff'l)$  entspricht. Eine zweite Speciallösung  $q$  ist, wenn  $q_1$  den conjugirten Wert zu  $q$  bezeichnet, bekannt durch die Relation

$$r' = \frac{1}{2} q_1 e^{-i\vartheta} \tag{4}$$

mithin das vollständige Integral

$$(r) = Aq + Br \tag{5}$$

\*) I. c. § 56. Aufgabe 4.

\*\*) I. c. Aufgabe 19

## § 1.

Sei von jeder complexen Grösse  $N$  der conjugirte Wert bezeichnet durch  $N_1$ . Dann ergibt die Differentiation:

$$\begin{aligned} (rr_1 + 4r'r_1')' &= r'r_1 + rr_1' + 4r''r_1' + 4r'r_1'' \\ &= 4r'(r_1'' - i\theta r_1' + 4r_1) + 4r_1'(r'' + i\theta r' + \frac{1}{4}r) = 0 \end{aligned}$$

nach Gl. (3), folglich ist

$$rr_1 + 4r'r_1' = 2c \quad (6)$$

constant und zwar reell;

Ferner sei der Kürze wegen

$$\eta = \frac{1}{2} \int \frac{l\theta\tau}{1+f}$$

dann erhält man durch Integration der Gl. (2):

$$r = (a+ib)\sqrt{1+f}r^{i\eta}; \quad r' = \frac{1}{2}(a+ib)\frac{f' + il}{\sqrt{1+f}}e^{i\eta}$$

für willkürlich constante reelle  $a, b$ , woraus:

$$rr_1 = (a^2 + b^2)(1+f); \quad 4r'r_1' = (a^2 + b^2)(1-f)$$

daher nach Gl. (6):

$$c = a^2 + b^2$$

mithin

$$rr_1 = c(1+f); \quad 4r'r_1' = c(1-f) \quad (7)$$

$$f = \frac{1}{c}(rr_1 - 4r'r_1') = \frac{rr_1}{c} - 1 \quad (8)$$

und nach Differentiation:

$$f' = \frac{1}{c}(rr_1' + r'r_1) \quad (9)$$

Der Wert von  $l$  geht eindeutig aus Gl. (2) hervor, nämlich

$$l = \frac{i}{c}(rr_1' - r'r_1) \quad (10)$$

Durch Substitution einer beliebigen Lösung ( $r$ ) der Gl. (3) mögen  $f, f', l, \theta', c$  übergehen in ( $f$ ) ( $f'$ ) ( $l$ ) ( $\theta'$ ) ( $c$ ); dann ist

$$l = \frac{i}{c} \{(r)(r_1') - (r')(r_1)\}$$

Dies differentirt gibt:

$$-(f')(\vartheta') = \frac{i}{(c)} \{(r)(r_1'') - (r'')(r_1)\}$$

und da  $(r)$  der Gl. (3) bei unverändertem  $\vartheta'$  genügt,

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{(c)} \{(r)[i\vartheta'(r_1') - \frac{1}{4}(r_1)] + (r_1)[i\vartheta'(r') + \frac{1}{4}(r)]\} \\ &= \frac{i}{(c)} i\vartheta' \{(r)(r_1') + (r')(r_1)\} = -\vartheta'(f') \end{aligned}$$

folglich ist

$$(\vartheta') = \vartheta'$$

d. h. alle Lösungen der Gl. (3) ergeben dieselbe Curve nur in verschiedenen Lagen. (Vom Bogenelement, das wir überall gleichbestimmt sein lassen, sehen wir natürlich ab.)

§ 2.

In Betreff der zweiten Lösung erhält man durch Differentiation der Gl. (4):

$$\begin{aligned} r'' &= -i\vartheta' r' - \frac{1}{4}r = \frac{1}{2}(q_1' - i\vartheta' q_1) e^{-i\vartheta} \\ &= \frac{1}{2}q_1' e^{-i\vartheta} - i\vartheta' r' \end{aligned}$$

also

$$r = = 2q_1' e^{-i\vartheta}$$

Demnach hat man:

$$\begin{aligned} q^1 &= 2r' e^{i\vartheta}; \quad q_1' = -\frac{1}{2}r e^{i\vartheta} \\ q &= 2r_1' e^{-i\vartheta}; \quad q' = -\frac{1}{2}r_1 e^{-i\vartheta} \end{aligned} \tag{11}$$

$$qq_1 + 4q, q_1' = 4r'r_1' + rr_1 = 2c$$

und nach den Gl. (7):

$$q = (a - ib) \frac{f' - il}{\sqrt{1 + f}} e^{-i(\vartheta + \nu)} \tag{12}$$

$$q' = -\frac{1}{2}(a - ib \sqrt{1 + f}) e^{-i(\vartheta + \nu)} \tag{13}$$

§ 3.

Da die Curve  $(r) = Aq + Br$  nur durch die Lage von der Curve  $r$  verschieden ist, so bleibt die Frage zu untersuchen, wie durch  $A$  und  $B$  die Lage relativ bestimmt wird. Wir denken beide congruente Curven zur Deckung gebracht, die  $x$  Axe, resp.  $(x)$  Axe, die

vorher zusammenfielen, aber einzeln in fester Verbindung mit der einen und andern Curve bewegt: dann werden beide Axen einen Winkel  $\Theta$  bilden. Dies ist dann derselbe Winkel, der auch ursprünglich die der  $x$  Axe in Curve  $r$  analoge Gerade in Curven ( $r$ ) mit der  $x$  Axe bildet, bestimmt also die relative Lage der 2 congruenten Gebilde bezüglich auf eine Axe und dadurch auch in Bezug auf die beiden andern (der  $y$  und  $z$ ) bis auf deren willkürliche Rotation um die  $x$  Axe.

Nun ist

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= f(f) + f'(f') + l(l) = \\ &= \frac{1}{4c(c)} (rr_1 - 4r'r_1') \{ (Aq + Br)(A_1q_1 + B_1r_1) - 4(Aq' + Br')(A_1q_1' + B_1r_1') \} \\ &+ \frac{1}{c(c)} (rr_1' + r'r_1') \{ (Aq + Br)(A_1q_1' + B_1r_1') + (Aq' + Br')(A_1q_1 + B_1r_1) \} \\ &- \frac{1}{c(c)} (rr_1' - r'r_1) \{ (Aq + Br)(A_1q_1' + B_1r_1') - (Aq' + Br')(A_1q_1 + B_1r_1) \} \\ &- \frac{1}{4c(c)} (rr_1 - 4r'r_1') \{ AA_1(qq_1 - 4q'q_1') + BB_1'(rr_1' - 4r'r_1') \\ &\quad + AB_1(qr_1 - 4q'r_1') + BA_1(rq_1 - 4r'q_1') \} \\ &+ \frac{1}{c(c)} \{ AA_1(rr_1'q'q_1 + r'r_1'qq_1') + BB_1(rr_1'r'r_1 + r'r_1rr_1') \\ &\quad + AB_1(rr_1'q'r_1 + r'r_1qr_1') + BA_1(rr_1'r'q_1 + r'r_1rq_1') \} \\ &= \frac{1}{c(c)} \{ AA_1[-\frac{1}{4}(rr_1 - 4r'r_1')^2 - 4rr'r_1r_1'] \\ &\quad + BB_1[\frac{1}{4}(r'r_1 - 4r'r_1')^2 + 4rr'r_1r_1'] \} \\ &= \frac{4}{4c(c)} (BB_1 - AA_1)(rr_1 + 4r'r_1')^2 = \frac{c}{c} (BB_1 - AA_1) \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} 2(c) &= (Aq + Br)(A_1q_1 + B_1r_1) + 4(Aq' + Br')(A_1q_1' + B_1r_1') \\ &= AA_1(qq_1 + 4q'q_1') + BB_1(rr_1 + 4r'r_1') \\ &\quad + AB_1(qr_1 + 4q'r_1') + BA_1(rq_1 + 4r'q_1') \\ &= 2c(AA_1 + BB_1) \end{aligned}$$

folglich

$$\cos \Theta = \frac{BB_1 - AA_1}{BB_1 + AA_1}; \quad \frac{AA_1}{BB_1} = (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta)^2 \quad (14)$$

Sei nun

$$A = d e^{i\alpha}; \quad B = e e^{i\beta}$$

dann wird

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta = \frac{d}{e} \quad (15)$$

Demnach ist die relative Lage der 2 Curven allein vom Verhältniss der Modula der Coefficienten der Lösung abhängig. Insbesondere liegen sie für  $e = 0$  symmetrisch, für  $d = e$  rechtwinklig zu einander, d. h. bzhw. ist  $\Theta = 2R$  und  $-R$ .

§ 4.

Die Gl. (2) kann dazu dienen, für eine unbegrenzte Anzahl von Functionen  $\vartheta'$  oder  $\vartheta$  von  $\tau$  lösbare Differentialgleichungen (3) zu gewinnen. Seien  $f, f', l$  Functionen eines Parameters, welche die Gleichung (1) erfüllen; dann hat man:

$$\tau = \int \frac{\partial f}{f'}; \quad \vartheta = - \int \frac{\partial l}{f}; \quad \vartheta' = - \frac{\partial l}{\partial f}$$

worin  $f$  als willkürlich zu betrachten ist,  $\vartheta, \vartheta'$  als Functionen von  $\tau$  bestimmt werden. Hiervon 2 Beispiele.

1)  $f = -\cos^2 \kappa; \quad f' = \sin \kappa \cos \kappa; \quad l = \sin \kappa$

Hier wird

$$\tau = 2\kappa; \quad \vartheta = -\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa; \quad \vartheta' = -\frac{1}{\sin \kappa}$$

dann nach Gl. (2) und nach Integration:

$$\frac{\partial r}{r} = \frac{\cos \kappa + i}{\sin \kappa} \partial \kappa; \quad r = \sin \kappa (\operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa)^i$$

$$r' = \frac{\cos \kappa + i}{2} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa)^i$$

woraus nach Gl. (11)

$$q = \cos \kappa - i; \quad q' = -\frac{1}{2} \sin \kappa$$

Demnach hat die Gleichung

$$r'' - \frac{ir'}{\sin \frac{1}{2}\tau} + \frac{1}{4}r = 0$$

zur einfachsten Speciallösung:

$$r = \cos \frac{1}{2}\tau - i$$

2)  $f = -\cos^2 \kappa; \quad f' = \sin \kappa; \quad l = \sin \kappa \cos \kappa$

Hieraus findet man ebenso:

$$\tau = 2\sin \kappa; \quad \vartheta = -2\cos \kappa - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa; \quad \eta' = -\cot 2\kappa$$

$$\frac{\partial r}{r} = (1 + i \cos \kappa) \cot \kappa \partial \kappa; \quad r = \sin \kappa (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \kappa)^i e^{i \cos \kappa x}$$

$$r' = \frac{1 + i \cos \kappa}{2} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} \kappa)^i e^{i \cos \kappa x}$$

$$q = (1 - i \cos \kappa) e^{i \cos \kappa x}; \quad q_1 = -\frac{1}{2} \sin \kappa e^{i \cos \kappa x}$$

und die Gleichung

$$r'' - ir' \frac{2 - \tau^2}{\tau \sqrt{4 - \tau^2}} + \frac{1}{4} r = 0$$

hat zur einfachsten Speciallösung:

$$r = \left(1 - \frac{i}{2} \sqrt{4 - \tau^2}\right) e^{\frac{1}{2} i \sqrt{4 - \tau^2} x}$$

Für  $\tau > 2$  wird die Gleichung nebst ihrer Lösung reell, dagegen die Binormale, mithin die Curve imaginär.

### XIII.

## Regelfläche, deren Strictionslinie auch Krümmungslinie ist.

Von

**R. Hoppe.**

---

Die Aufgabe, die Regelfläche von der genannten Eigenschaft darzustellen, ist bereits von Amigues in *Nouv. Ann.* t. XIV. p. 491, aber mit Beschränkung auf ebene Strictionslinie gelöst. Für diese Specialisirung ist kein Grund ersichtlich; überdies wird bei jener Behandlungsweise die Symmetrie der Raumbestimmungen durchweg preisgegeben; sie bringt keinen Gewinn, sondern nur Verlust an Einfachheit. Jedenfalls hat die Arbeit von Amigues das Verdienst auf die allgemeine Frage und so auf eine gewisse Classe von Regelflächen die Aufmerksamkeit gelenkt zu haben. Indem wir die Aufgabe allgemein in Angriff nehmen, kommt uns zustatten, dass das Linienelement gleich anfangs aus der Rechnung herausfällt, mithin jede Curve auf der Fläche von nur einer Function abhängt, da es sich nur um Richtungsgrößen, nie um Lineargrößen handelt.

Die Gleichungen einer beliebigen Regelfläche sind:

$$x = x_0 + av; \quad y = y_0 + bv; \quad z = z_0 + cv$$

wo  $x_0, y_0, z_0, a, b, c$  Functionen eines Parameters  $u$  sind. Sei  $u$  der Bogen der vom Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$  beschriebenen Curve  $s_0$ , ferner  $a, b, c$  die Richtungscosinus der erzeugenden Geraden der Fläche. Die Curve  $s_0$  ist Strictionslinie, wenn der Drehpunktsabstand der Erzeugenden null, also

$$\partial x_0 \partial a + \partial y_0 \partial b + \partial z_0 \partial c = 0 \tag{1}$$

ist. Diese Gleichung nehmen wir als erfüllt an.

Seien bezeichnet die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale durch  $fgh, f'g'h', lmn$ , ihre Coincidenzwinkel durch  $\partial\tau, \partial\sigma, \partial\vartheta$ , also der Krümmungswinkel, Torsionsbogen, Torsionswinkel bzw. durch  $\tau, \sigma, \vartheta$ , anwendbar auf jede Curve. Wir machen Anwendung auf 2 Curven, die wir durch die Indices 0 und 1 unterscheiden, nämlich 1) die Strictionslinie  $s_0$  und 2) auf eine Curve  $s_1$ , deren Tangente der Erzeugenden parallel ist, setzen also

$$f_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u}, \text{ etc. } f_1 = a, \text{ etc. } f_1' = \frac{\partial a}{\partial \tau_1}, \text{ etc.}$$

Dann lautet Gl (1):

$$f_0 f_1' + \dots = 0$$

Unbekannt ist der Winkel  $\omega$  zwischen den Tangenten beider Curven, und zwar hat man:

$$\begin{aligned} f_0 f_1 &= \dots = \cos \omega \\ f_0 f_1' + \dots &= 0 \\ f_0 l_1 + \dots &= \pm \sin \omega \end{aligned}$$

wo die letzte Gleichung aus den beiden ersten folgt. Daher ist

$$f_0 = f_1 \cos \omega \pm l_1 \sin \omega \tag{2}$$

Hieraus berechnet man:

$$\begin{aligned} f_0' \partial \tau_0 &= (-f_1 \sin \omega \pm l_1 \cos \omega) \partial \omega + f_1' (\cos \omega \partial \tau_1 \mp \sin \omega \partial \vartheta_1) \\ l_0 \partial \tau_0 &= (l_1 \cos \omega \mp f_1 \sin \omega) (\cos \omega \partial \tau_1 \mp \sin \omega \partial \vartheta_1) \mp f_1' \end{aligned}$$

und aus letzterm ergibt sich:

$$(l_0 f_1 + \dots) \partial \tau_0 = \mp \sin \omega (\cos \omega \partial \tau_1 \mp \sin \omega \partial \vartheta_1) \tag{3}$$

Bezeichnen nun  $e, f, g$  (ohne Index) die Fundamentalgrößen erster,  $E, F, G$  zweiter Ordnung der Fläche, so ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} EF \\ ef \end{vmatrix} \partial u^2 - \begin{vmatrix} HE \\ g e \end{vmatrix} \partial u \partial v + \begin{vmatrix} FG' \\ f g \end{vmatrix} \partial v^2 = 0$$

notwendige und hinreichende Bedingung, unter der das Verhältniss  $\partial v : \partial u$  eine Hauptkrümmungsrichtung ausdrückt. Für die Strictionslinie ist aber  $v$  constant null, also auch  $\partial v = 0$ . Folglich ist sie Krümmungslinie, wenn

$$E f - F e = 0 \quad (4)$$

ist, und zwar hat man für  $v = 0$ .

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \dots = f_0^2 + \dots = 1 \quad (5)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \dots = f_0 f_1 + \dots = \cos \omega \quad (6)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \dots = f_1^2 + \dots = 1$$

$$t^2 = e g - f^2 = \sin^2 \omega \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{t} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \begin{vmatrix} l_0 f_1 f_0' \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \frac{\partial \tau_0}{\partial u} \\ &= -\frac{1}{t} (l_0 f_1 + \dots) \frac{\partial \tau_0}{\partial u} \\ &= \pm \cos \omega \frac{\partial \tau_1}{\partial u} - \sin \omega \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{t} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2 \partial v} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \begin{vmatrix} f_0 f_1 f_1' \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \frac{\partial \tau_2}{\partial v} \\ &= \frac{1}{t} (f_0 l_1 + \dots) \frac{\partial \tau_1}{\partial u} = \pm \frac{\partial \tau_1}{\partial u} \end{aligned} \quad (9)$$

Nach Einführung dieser Werte geht Gl. (2) über in

$$\pm \sin \omega \partial \tau_1 + \cos \omega \partial \vartheta_1 = 0$$

oder, wenn man  $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau_1} = \operatorname{tg} \lambda_1$  setzt, so dass

$$\partial \tau_1 = \partial \sigma_1 \cos \lambda_1; \quad \partial \vartheta_1 = \partial \sigma_1 \sin \lambda_1$$

wird, in

$$\omega = \mp \lambda_1$$

Die Tangentengleichung (2) von  $s_0$  lautet nun:

$$f_0 = f_1 \cos \lambda_1 - l_1 \sin \lambda_1 = \frac{f_1 \partial \tau_1 - l_1 \partial \sigma_1}{\partial \sigma_1}$$

Das Doppelzeichen des Wertes von  $t$  nach Gl. (7), welches ich nicht berücksichtigt habe, und das geschriebene heben sich beide in Gl. (2),

Für willkürliches Linienelement  $s$  als Function von  $u$  lautet nun die Coordinatengleichung derselben:

$$x = \int \frac{f_1 \partial \tau_1 - l_1 \partial \vartheta_1}{\partial \sigma_1} ds + f_1 v; \text{ etc.}$$

Zur Construction hat man eine beliebige Curve  $s_1$  anzunehmen, von welcher nur die Richtungen der Tangente und Binormale und die Krümmungsbreite  $\lambda_1$  in Anwendung kommen. Es resultirt der Satz:

„Hat eine Regelfläche die Eigenschaft, dass ihre Strictionlinie zugleich Krümmungslinie ist, so behält sie diese bei jeder stetigen Parallelverschiebung der Erzeugenden, wenn der laufende Punkt der Strictionlinie dabei beständig tangential fortrückt.“



XIV.

Die Summierung einer Gattung trigonometrischer Reihen.

Von  
**Franz Rogel**  
 in Barmen.

Herr Dr. Otto Beau<sup>1)</sup> leitet aus den bekannten trigonometrischen Reihen

$$(1) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda \frac{\cos \lambda \pi y}{x + \lambda \pi} = \frac{\cos xy}{\sin x}, \quad -1 \leq y \leq +1$$

$$(2) \dots \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda \pi y}{\sin x} = \frac{\sin xy}{\sin x}, \quad -1 < y < 1$$

mittelst eines inductiven Verfahrens die Summen der Reihen

$$(3) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x + \lambda \pi)}{x + \lambda \pi}$$

$$(4) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x + \lambda \pi)}{x + \lambda \pi}$$

für die Intervalle  $(2n, 2n+2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ab und erhält sehr einfache Resultate.

Minder umständlich und direct kommt man auf dem folgenden Wege zum Ziele.

1) 1893. Programm Nr. 87 Sorau, Druck v. Karras in Halle a. S.

Schreibt man in obigen Formeln (1) und (2)  $1-y$  statt  $y$ , multiplicirt mit  $i$  und addirt sie zu (1), so entsteht

$$(5) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy(x+\lambda\pi)}}{x+\lambda\pi} = \frac{e^{ix}}{\sin x}, \quad 0 < y < \pi$$

Wird jetzt  $y$  durch  $y-2n$ ,  $n=0$  oder ganzzahlig ersetzt und beiderseits mit  $e^{i2nx}$  multiplicirt, so kommt

$$(6) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy(x+\lambda\pi)}}{x+\lambda\pi} = \frac{e^{i(2n+1)x}}{\sin x}, \quad 2n < y < (2n+2)$$

woraus durch Trennung des Reellen vom Imaginären die gewünschten Summirungen

$$\left. \begin{aligned} (7) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} &= \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \\ (8) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{x+\lambda\pi} &= \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x} \end{aligned} \right\}, \quad 2n < y < 2n+2$$

hervorgehen. Hiebei ist zu bemerken, dass für  $n=0$  die Nulle ein zulässiger Wert ist.

Durch fortgesetzte Integration der letzteren Gleichungen bezüglich  $y$  und Summierung der hiebei auftretenden Constanten in Reihenform findet Herr Dr. O. Beau die Summen von

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \frac{y(x+\lambda\pi)^2}{(x+\lambda\pi)^m}$$

Dieses weitläufige Verfahren lässt sich jedoch durch das einfachere einer  $(m-1)$  fachen Differentiation der Gleichung (6) nach  $x$  vorteilhaft ersetzen, was wegen der für jeden Wert von  $x$  und  $y$  bestehenden unbedingten Convergenz der hierin auftretenden unendlichen Reihe erlaubt ist.

Vor Ausführung derselben ist (6) mit  $e^{-ixy}$  zu multipliciren, so dass auf der rechten Seite die Function  $z \equiv e^{ix(2n+1-y)} \operatorname{cosec} x$  hervorgeht; das Ergebniss ist sodann mit  $e^{ixy}$  zu multipliciren.

Die Gleichstellung der reellen Bestandteile einerseits und der imaginären andererseits liefert schliesslich die im allgemeiuen für  $2n < y < 2n+2$  giltigen Summenformeln:

\*) Jedoch nur für das Intervall  $(0, 2)$  bzw.  $(-2, 2)$ .

$$(9) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(y+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \Im \text{mag.} \{e^{ixy} D_x^{m-1} e^{i\pi(2n+1-y)} \cdot \text{cosec } x\}$$

$$(10) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \Re \text{cell} \{e^{ixy} D_x^{m-1} e^{i\pi(2n+1-y)} \cdot \text{cosec } x\}$$

Um die höheren Ableitungen der Function  $z$  in independenter Weise zu erhalten, betrachte man dieselbe als Function von  $e^x$  und wende die hiefür geltende einfache Formel von Hoppe an.

Ein übersichtlicheres Resultat ergibt die recurrente Berechnung und zwar

$$(11) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy(x+\lambda\pi)}}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1} e^{i(2n+1)x}}{(m-1)! \sin^m x} \times$$

$\sin x,$	$0,$	$0,$	$\dots 1$
$\cos x,$	$\sin x,$	$0,$	$\dots iu$
$-\sin x,$	$\binom{2}{1} \cos x,$	$\binom{2}{2} \sin x,$	$\dots (iu)^2$
$-\cos x,$	$-\binom{3}{1} \sin x,$	$+\binom{3}{2} \cos x,$	$\dots (iu)^3$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots \cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots \cdot$
$\sin\left(x + \overline{m-1} \frac{\pi}{2}\right),$	$\binom{m-1}{1} \sin\left(x + \overline{m-2} \frac{\pi}{2}\right),$		
	$\binom{m-1}{2} \sin\left(x + \overline{m-3} \frac{\pi}{2}\right)$		$\dots (iu)^{m-1}$

woraus

$$2n + 1 - y = 0$$

setzend

$$(12) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m}$$

$\sin x,$	$0,$	$0,$	$\dots \sin 2n+1 x$
$\cos x,$	$\sin x,$	$0,$	$\dots u \cos 2n+1 x$
$-\sin x,$	$\binom{2}{1} \cos x,$	$\binom{2}{2} \sin x,$	$\dots$
$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)! \sin^m x}$			$-\dots u^2 \sin 2n+1 x$

$$\left| \begin{array}{cccc} -\cos x, & -\binom{3}{1} \sin x, & \binom{3}{2} \cos x, & \dots \\ & & & -u^3 \cos 2n+1x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin\left(x + \frac{m-1}{2} \pi\right), & \binom{m-1}{1} \sin\left(x + \frac{m-2}{2} \pi\right) \\ & \binom{m-1}{2} \sin\left(x + \frac{m-3}{2} \pi\right), & \dots & \alpha u^{m-1} \end{array} \right|$$

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cos 2n+1x, \quad m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin 2n+1x, \quad m \text{ ungerade} \end{array} \right.$$

und

$$(13) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x + \lambda\pi)}{(x + \lambda\pi)^m}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)! \sin^m x} \left| \begin{array}{cccc} \sin x, & 0, & 0, & \dots \cos 2n+1x \\ \cos x, & \sin x, & 0, & \dots -u \sin 2n+1x \\ -\sin x, & \binom{2}{1} \cos x, & \binom{2}{2} \sin x, & \dots \\ & & & \dots -u^2 \cos 2n+1x \\ -\cos x, & -\binom{3}{1} \sin x, & \binom{3}{2} \cos x, & \\ & & & \dots +u^3 \sin 2n+1x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin\left(x + \frac{m-1}{2} \pi\right), & \binom{m-1}{1} \sin\left(x + \frac{m-2}{2} \pi\right) \\ & \binom{m-1}{2} \sin\left(x + \frac{m-3}{2} \pi\right), & \dots & \beta u^{m-1} \end{array} \right|$$

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{m}{2}} \sin 2n+1x, \quad m \text{ gerade;} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos 2n-1x, \quad m \text{ ungerade} \end{array} \right.$$

hervorgeht.

Das Bildungsgesetz dieser Determinanten ist ein leicht erkennbares. Die Elemente der Diagonalreihe sind mit Ausnahme des letzten ( $\alpha u^{m-1}$  resp.  $\beta u^{m-1}$ ) gleich  $\sin x$ . Jede Colonne wird durch die aufeinander folgenden, mit gewissen Binomialcoefficienten multiplicirten Ableitungen von  $\sin x$  gebildet und zwar besteht die  $k$ te Colonne ( $k < m$ ) aus  $k-1$  verschwindenden Elementen und aus

$$\binom{k-1}{k-1} \sin x, \binom{k-1}{k-1} \cos x, -\binom{k+1}{k-1} \sin x, \dots$$

$$\binom{m-1}{k-1} \sin\left(x + \overline{m-k} \frac{\pi}{2}\right)$$

während die  $m$ te Colonne die Elemente

$$u^0 \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \overline{2n+1} x, u^1 \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \left( \overline{2n+1} x + \frac{\pi}{2} \right), \dots$$

$$u^1 \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \left( \overline{2n+1} x + \overline{n-1} \frac{\pi}{2} \right), \dots \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} u^{m-1}$$

enthält. Das beliebige Element der  $i$ ten Zeile und  $k$ ten Colonne ( $k < m$ ) ist daher gleich  $\underline{0}$ , wenn  $i < k$ , und gleich

$$\binom{i-1}{k-1} \sin\left(x + \overline{i-k} \frac{\pi}{2}\right), \text{ wenn } i \geq k \text{ ist!}$$

In dem Falle  $n = 0$  nehmen die Formeln (12) und (13) für  $\cotg x = w$  folgende Gestalt an

$$(14) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x+\lambda x)}{(x+\lambda x)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \times$$

1,	,	0,	. . .	1
$w$ ,	1,	0,	. . .	$\overline{1-y} w$
$-1$ ,	$\binom{2}{1} w$ ,	1,	. . .	$-\overline{1-y^2}$
$-w$ ,	$-\binom{3}{1}$ ,	$\binom{3}{2} w$ ,	. . .	$-\overline{1-y^3} w$
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.

$$-2 \leq y \leq +2, \quad m \text{ gerade}$$

$$0 \leq y \leq 2, \quad m \text{ ungerade}$$

$$(15) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \times$$

1,	0,	0	. . .	$w$
$w$ ,	1,	0,	. . .	$-\overline{1-y}$
-1,	$\binom{2}{1}w$ ,	1,	. . .	$-\overline{1-y} w$
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
$-w$ ,	$-\binom{3}{1}$ ,	$\binom{3}{2}w$ ,	. . .	$+\overline{1-y}^3$

$$0 \leq y \leq 2, \quad m \text{ gerade}$$

$$-2 \leq y \leq +2, \quad m \text{ ungerade}$$

Hier kann übrigens die Darstellung in Determinantenform umgangen werden, wenn man die Ableitungen von  $\cot x \equiv w$  einführt und

$$\frac{d^r}{dx^r} \cot x = w_r, \quad w_0 = w$$

setzt. Der in (9) und (10) erscheinende Differentialquotient nimmt nämlich für  $n = 0$  die Form an

$$D_x^{m-1} e^{-ixy} (\cot x - i) = D_x^{m-1} e^{-ixy} w + (-i)^m y^{m-1} e^{-ixy}$$

$$= e^{-ixy} \left[ w_{m-1} - i \binom{m-1}{1} y w_{m-2} - \binom{m-1}{3} y^2 w_{m-3} + i \binom{m-1}{3} y^3 w_{m-4} \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-i)^{m-1} y^{m-1} w_0 + (-i)^m y^{m-1} \right]$$

Multipliziert man nun diesen Ausdruck gemäss der Formeln (9) und (10) mit  $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} e^{+xy}$ , so ist

$$(16) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = (-1)^m \left[ \frac{y}{1!(m-2)!} w_{m-2} \right.$$

$$\left. - \frac{y^3}{3!(m-4)!} w_{m-4} \dots + \xi \eta^{m-1} \right]$$

$$(17) \dots \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y(x+\lambda\pi)}{(x+\lambda\pi)^m} = (-1)^{m-1} \left[ \frac{w_{m-1}}{(m-1)!} \right.$$

$$\left. - \frac{y^2}{2!(m-3)!} w_{m-3} \dots + \eta y^{m-1} \right]$$

wo

$$\xi = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} y^{m-1}, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$
$$\eta = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} y^{m-1}, & m \text{ gerade} \\ 0, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln (31), (32), (39), (40) der oben citirten Programmarbeit.

Barmen, September 1896.

---

XVI.

Von der elliptischen Bewegung eines freibeweglichen Massenpunktes unter der Wirkung von Attractionskräften \*).

Von

**Paul Kindel.**

---

**E i n l e i t u n g.**

Gegenstand der folgenden Abhandlung ist das Problem von der elliptischen Bewegung eines frei beweglichen Massenpunktes, welcher der Wirkung von einer oder von mehreren nach gegebenen festen Centren gerichteten Kräften unterworfen ist.

Im ersten Teile soll eine elementare Theorie der elliptischen Bewegung um ein festes Attractionscentrum gegeben werden, und zwar um einen der Brennpunkte (§§ 1 und 2) und um einen beliebigen Punkt (§ 3). Dieser Teil, aus den praktischen Bedürfnissen des Unterrichts hervorgegangen, beansprucht nur pädagogisch-didaktisches Interesse; überdies ist er freilich auch die Grundlage für die folgenden Untersuchungen.

Im zweiten Teile werden die von Hamilton durch Anwendung von Quaternionen und das von Darboux direct gefundene Theorem durch directe Integrationen abgeleitet und aus denselben neue Lehrsätze über die Natur der Bahnen gefolgert (§§ 4 und 5).

---

\*) Dissertation. Halle 1884.

Im dritten Teile wird die Attraction als Function der Entfernung vorausgesetzt und untersucht, unter welchen Voraussetzungen man auf eines der zwei bekannten Attractionsgesetze schliessen könne, wenn die Stellung des Attractionscentrums unbekannt ist. Bertrand's Voraussetzungen werden als durch die Erfahrung uncontrolirbar ausgeschlossen (§ 6), Hoppe's Resultate werden geometrisch abgeleitet (§ 7), seine Voraussetzungen werden durch neue ersetzt (§§ 8, 9, 10).

Im vierten Teile wird die im vorigen behandelte Aufgabe verallgemeinert, und es wird diejenige Kraft, welche einen Massenpunkt durch eine beliebig gegebene Curve treibt, in zwei oder mehrere Kräfte mit vorgeschriebenen Richtungen zerlegt (§§ 11, 12, 13).

Im letzten Teile wird folgende Frage behandelt: Welches ist die einzig zulässige Verteilung der festen Attractionscentren, wenn unter ihrer Wirkung eine elliptische Bahn möglich sein soll, und wenn die Attractionskräfte ausschliesslich Elasticitäts- und Gravitationsgesetzen folgen? (§§ 14—20).

---

## Erster Teil.

### § 1

Um aus der elliptischen Planetenbewegung das Attractionsgesetz elementar <sup>(1)</sup> abzuleiten, muss man die elliptische Bahn als Projection einer Kreisbahn auffassen und daher zunächst folgende Hilfsaufgabe <sup>(2)</sup> Newton's lösen:

*Gyretur corpus in circumferentia circuli: requiretur lex vis centripetae tendentis ad punctum datum.*

Zur elementaren Lösung dieser Aufgabe dient diese Betrachtung: (3)

Wenn die Geschwindigkeit eines frei beweglichen Massenpunktes in krummliniger Bahn constant ist, so ist die Kraft in jedem Augenblick zu seiner Bewegungsrichtung senkrecht. Wenn dagegen die Geschwindigkeit variabel ist, so ist die Kraft schief gegen die Bewegungsrichtung; ihre tangentielle Componente bewirkt ausschliesslich die Geschwindigkeitsänderung; ihre normale Componente ist von dieser unabhängig, vielmehr nur durch die Grösse der augenblicklichen Geschwindigkeit bestimmt. Wenn also beliebig viele Punkte

dieselbe Curve durchlaufen, und wenn in einem gewissen Punkte ( $A$ ) derselben die Geschwindigkeiten sämtlich übereinstimmen, so liegen die Endpunkte derjenigen geraden Linien, welche die Kräfte darstellen, in einer geraden Linie, welche zur Tangente in  $A$  parallel ist.

Ferner darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass bei einer gleichförmigen Geschwindigkeit ( $c$ ) in einer Kreisbahn, deren Radius  $a$  ist, die nach dem Mittelpunkte ( $M$ ) gerichtete Centrakraft die Grösse  $\frac{c^2}{a}$  habe.

Wenn nun ein frei beweglicher Punkt sich in einem Kreise bewegt, und wenn das Attractionscentrum sich in einem beliebigen Punkte ( $F$ ) der Ebene der Kreisbahn befindet, so wird die nach  $F$  gerichtete Kraft ( $\varphi$ ) in jedem Punkte ( $P$ ) der Bahn dem obigen Hilfstheoreme gemäss durch folgende Proportion bestimmt: (s. Fig. 1)

$$\varphi : \frac{c^2}{a} = \overline{PA} : a$$

wenn  $MA$  skr.  $PM$  ist und  $c$  die Geschwindigkeit in  $P$  bedeutet.

Bezeichnet  $T$  die Umlaufszeit, so ist wegen der Constanz der Flächengeschwindigkeit (<sup>4</sup>) des Radius-Vectors:

$$a^2\pi = \frac{1}{2} \cos T$$

wenn  $s$  die von  $F$  auf die Tangente in  $P$  gefällte Senkrechte bedeutet

Die vorige Proportion ergibt:

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2} \overline{PA} = \frac{4a^2\pi^2}{T^2} \frac{\overline{PA}}{s^2}$$

Endlich entnimmt man der Figur unmittelbar:

$$\frac{\overline{PA}}{a} = \frac{r}{s} = \frac{2a}{PE}$$

folglich erhält man

$$\varphi = \frac{4a^2\pi^2}{T^2} \frac{r}{s^2} = \frac{32a^2\pi^2}{T^2} \frac{1}{r^2 PE^3}$$

Diese Gleichung giebt die Lösung der obigen Newton'schen Hilfsaufgabe in zwei verschiedenen Formen (<sup>5</sup>). Um aber folgende Hauptaufgabe (<sup>6</sup>) Newton's zu lösen:

*Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetae tendentis ad umbilicum Ellipseos,*

muss man die vorher betrachtete Kreisbewegung auf eine Ebene projiciren, welche die Kreisebene längs  $MF$  unter einem Neigungswinkel ( $\alpha$ ) schneidet, der durch die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{e}{a}$$

bestimmt ist (<sup>7</sup>) ( $e = MF$  gesetzt). Die für die Projectionsbewegung erforderliche Kraft ( $\varphi_1$ ) ist ebenfalls nach  $F$  gerichtet und durch die Proportion

$$\varphi : \varphi_1 = r : r_1$$

bestimmt. ( $r_1$  bezeichnet die Projection von  $r$ .)

In dem Beweise endlich (<sup>8</sup>), dass durch die Projection in der That eine Ellipse entsteht, deren Brennpunkte  $F$  und  $F_1$  sind, wird gezeigt, dass  $GF$  oder  $s = r_1$  ist.

Somit ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{4a^2 \pi^2 r_1}{T^2 r_1^3} = \frac{4a^2 \pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

d. h.: Newton's Gravitations-Gesetz und zugleich das dritte Kepler'sche Gesetz.

## § 2.

Die von Newton gestellte Aufgabe: (<sup>1</sup>)

*Posito, quod vis centripeta sit reciproce proportionale quadrato distantiae locorum a centro et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita: requiritur linea, quam corpus describit de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens.*

ist von ihm selbst nicht elementar gelöst worden. Es ist aber für die praktischen Bedürfnisse von grösster Bedeutung, eine elementar zu begründende, einfache und anschauliche Construction zu kennen. Eine solche ergibt sich fast unmittelbar aus der Gleichung: (<sup>2</sup>)

$$v^2 = \frac{g(2a - r)}{ar}$$

in welcher  $r$  die Entfernung des bewegten Punktes vom attrahirenden Brennpunkt,  $v$  die Geschwindigkeit,  $g$  die Beschleunigung in der Entfernungseinheit und  $a$  die halbe grosse Axe bedeutet.

Durch Auflösung dieser Gleichung nach  $a$  ergibt sich

$$2a = \frac{r^2}{r-h}, \quad \text{wobei } h = \frac{v^2}{2g:r^2}$$

gesetzt ist.

$h$  bedeutet denjenigen Weg (<sup>3</sup>), welchen der bewegliche Körper von einem Punkte ( $A$ ) seiner Bahn aus, geradlinig und mit der Anfangsgeschwindigkeit  $= 0$  durchlaufen müsste, um seine Geschwindigkeit  $v$  zu erreichen, wenn die Beschleunigung constant gleich derjenigen ( $g:r^2$ ) ist, welche er in diesem Punkte ( $A$ ) erleidet.

Diese Grösse ( $h$ ) ist für die Anfangsstellung gegeben. Die obige Gleichung für  $2a$  kann auch in folgende umgeformt werden:

$$\frac{2a-r}{r} = \frac{h}{r-h}$$

und alsdann lehrt sie folgende Construction: (s. Fig. 2.)

Das gegebene Attractionscentrum ( $F$ ) wird mit der Anfangsstellung in  $A$  verbunden, und an die über  $A$  verlängerte Bewegungsrichtung ( $AE$ ) d. h. an  $AE_1$  wird der Winkel  $FAE$  angelegt. Ferner wird  $h$  auf der so erhaltenen Richtung  $AL$  von  $A$  aus ( $AD$ ) und auf  $FA$  von  $F$  aus ( $FC$ ) abgetragen. Endlich wird  $C$  mit  $D$  verbunden, und  $FF_1 \parallel CD$  gezogen.  $F_1$  ist der zweite Brennpunkt.

### § 3.

In ganz entsprechender Weise, wie in § 1., kann aus dem für die kreisförmige Bewegung gefundenen Gesetze

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \left(\frac{a}{s}\right)^2$$

das für die elliptische Bewegung um ein beliebiges Attractionscentrum geltende Kraftgesetz elementar abgeleitet werden.

Man muss nur  $\frac{a}{s}$  durch ein Verhältniss zwischen zwei solchen Linien im Kreise ersetzen, dass es gleich demjenigen zwischen den entsprechenden Linien in der durch Projection entstehenden Ellipse ist. Dazu benutzt man die Gleichung

$$1) \quad \frac{a}{s} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \quad (1)$$

in welcher  $\varrho_0$  und  $\varrho$  die resp vom Kreismittelpunkt und vom be

weglichen Punkt ( $P$ ) auf die Polare des Attractionscentrums ( $F$ ) gefällten Lote bedeuten.

Eine zweite Umformung ergibt sich aus der Gleichung

$$\varrho = \sqrt[3]{p_1 p_2} \quad (2)$$

in welcher  $p_1$  und  $p_2$  die Lote vom beweglichen Punkt  $P$  auf die vom Attractionscentrum  $F$  gezogenen Tangenten bedeuten.

Letztere Gleichung kann auch in folgende Form gesetzt werden (s. Fig. 3)

$$2) \quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \sqrt[3]{\frac{p_1 p_2 MF}{p_1^0 p_2^0 MD}}$$

und zwar bedeuten  $p_1^0 p_2^0$  die vom Mittelpunkt auf die obigen Tangenten gefällten Senkrechten (welche beim Kreise mit den Radien  $a$  zusammenfallen), und  $\frac{MF}{MD}$  ist das Verhältniss zwischen der Entfernung vom Mittelpunkt ( $M$ ) und Pol ( $F$ ) zu dem Abschnitte derselben vom Mittelpunkt bis an die Polare von  $V$ .

Sowol  $\frac{\varrho}{\varrho_0}$  als auch die rechte Seite der Gleichung 2) behalten bei der Projection ihre geometrische Bedeutung und ihren Wert unverändert bei, so dass man für die elliptische Bewegung erhält

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \left(\sqrt[3]{\frac{p_1^0 p_2^0 MD}{p_1 p_2 MF}}\right)^3$$

Setzt man noch

$$3) \quad g = \frac{4\pi^2 \varrho_0^2}{T^2} \quad \text{und} \quad g_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\sqrt[3]{\frac{p_1^0 p_2^0 MD}{MF}}\right)^3$$

so erhält man

$$4) \quad \begin{cases} \varphi = g \cdot \frac{r}{\varrho^2} = \frac{g_1 r}{(\sqrt[3]{p_1 p_2})^2} \\ T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \varrho_0^3 = \frac{4\pi^2}{g_1} \left(\sqrt[3]{\frac{p_1^0 p_2^0 MD}{MF}}\right)^3 \end{cases}$$

Die Kraft ( $\varphi$ ) ist also proportional der Entfernung ( $r$ ) des beweglichen Punktes vom Attractionscentrum und umgekehrt proportional der dritten Potenz: entweder der Entfernung ( $\varrho$ ) von der

Polare des Attractionscentrums (Umkehrung des Satzes von Hamilton) <sup>(3)</sup> oder der mittleren Proportional ( $\sqrt{p_1 p_2}$ ) zwischen den Entfernungen von demjenigen Tangenten, welche von Attractionscentrum an die Ellipse gezogen werden, (Umkehrung des Satzes von Darboux). <sup>(4)</sup>

## Zweiter Teil.

### § 4.

Dass aus der in § 3 bewiesenen Umkehrung des Satzes von Hamilton der Satz selbst gefolgert werden könne, ist von Darboux bemerkt worden <sup>(1)</sup>. Interessanter jedoch als diese Methode (der Constantenzählung) ist der directe Beweis, besonders auch darum, weil er weitere Schlüsse über die Art und die Construction der Bahn zulässt.

In dem Lehrsatz von Hamilton wird die Centralkraft

$$\varphi = \frac{g_1 r}{p^2}$$

proportional gesetzt mit der Entfernung ( $r$ ) von  $F$  (dem Attractionscentrum) und der reciproken dritten Potenz der senkrechten Entfernung ( $p$ ) von einer festen Ebene ( $E$ ).

Dass die Bahn zunächst selbst in einer gewissen Ebene ( $E_1$ ) liegt, welche den Punkt  $F$  enthält, folgt schon aus Newton's Theorie der Centralkräfte. Wird der Neigungswinkel beider Ebenen ( $E, E_1$ ) mit  $\alpha$ , ihre Schnittlinie mit  $L$  und die senkrechte Entfernung des bewegten Punktes von der letzteren mit  $\varrho$  bezeichnet, so ist

$$p = \varrho \cos \alpha$$

und also

$$\varphi = g_1 \cos^3 \alpha \frac{r}{\varrho^2}$$

d. h. die Kraft ist in allen Punkten einer Ebene  $E_1$  ausser mit  $s$  auch mit der reciproken dritten Potenz der senkrechten Entfernung ( $\varrho$ ) von einer gegebenen geraden Linie ( $L$ ) proportional. Es genügt somit, den Satz für diesen Fall nachzuweisen.

Man nehme die Ebene ( $E_1$ ) als  $xy$ -Ebene,  $F$  als Anfangspunkt, die von  $F$  auf  $L$  gefällte Senkrechte habe die Länge  $a$ , ihre Richtung werde als die negative  $x$ -Axe, und also eine zu  $L$  durch  $F$

parallel gezogene Gerade als  $y$ -Axe genommen (s. Fig. 2); die nach  $F$  gerichtete Centrakraft sei

$$\varphi = \frac{gr}{(a+x)^2}$$

Wenn  $g$  einen positiven Wert hat, so ist  $\varphi$  eine Attractionskraft auf der positiven Seite von  $K$ , und eine Repulsionskraft auf der negativen.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind:

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-gx}{(a+x)^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-gy}{(a+x)^2}$$

Die erste Integralgleichung derselben drückt die Constanz der Flächengeschwindigkeit ( $c$ ) aus:

$$2) \quad ydx - xdy = e \cdot dt$$

Durch Multiplication der ersten Differentialgleichung mit  $2 \frac{dx}{dx}$  und nachherige Integration erhält man

$$3) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g \frac{(a+2x)}{(a+x)^2} - \frac{g}{b}$$

(worin  $b$  eine Integrationsconstante bedeutet).

Durch Elimination von  $dt$  aus den Gleichungen 2) und 3) ergibt sich

$$4) \quad \frac{dx(a+x)}{\sqrt{a\beta + 2\beta x - x^2}} = \gamma(ydx - xdy)$$

wobei zur Abkürzung

$$\beta = b - a$$

$$\gamma = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{g}{b}}$$

gesetzt ist,  $\gamma$  also reell oder rein imaginär sein kann. Um die Gleichung 4) zu integriren, wird eine neue Variable  $u$  durch die Gleichung

$$y = ux$$

eingeführt. Man erhält dadurch

$$5) \quad \gamma du = \frac{1}{\beta} d \left( \frac{1}{x} \sqrt{a\beta + 2\beta x - x^2} \right)$$

und hieraus ergibt sich die Gleichung der Bahn

$$fx + \beta\gamma y = \sqrt{a\beta + 2\beta x - x^2}$$

( $f$  ist eine Integrationsconstante, welche zugleich mit  $\gamma$  reell oder rein imaginär sein muss), oder

$$6) \quad x^2(1 + f^2) + 2f\beta\gamma xy + \beta^2\gamma^2 y^2 - 2\beta x - a\beta = 0$$

Die Polare des Anfangspunktes hat die Gleichung

$$x = -a$$

(entsprechend dem Lehrsatz von Hamilton).

Der Mittelpunkt des Kegelschnitts hat die Coordinaten

$$x_0 = \beta, \quad y_0 = -\frac{f}{\gamma}$$

Das Product seiner Axen ist

$$= bc \sqrt{\frac{b}{g}}$$

und also erhält man für die Umlaufszeit

$$T = 2\pi b \sqrt{\frac{b}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \varrho_0^{3/2}$$

(in Uebereinstimmung mit § 3).

Endlich ist die Bahn Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$\beta^2 f^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

ist. Die Annahme  $\beta = 0$  kann ausgeschlossen werden, weil sonst die Gleichung der Bahn sich auf

$$x^2(1 + f^2) = 0$$

reduciren würde.

Es ist somit

$$\beta^2 = (b - a)^2$$

positiv, und da ferner

$$\gamma^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{g}{b}$$

ist, so vereinfacht sich das Kriterium über die Art des Kegelschnitts zu folgendem

$$\frac{g}{b} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

oder endlich zu

$$\frac{g(a+2)}{(a+x)^2} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (2)$$

Es werde nun  $g$  als positiv vorausgesetzt. Alsdann gelten folgende Lehrsätze:

Wenn der Anfangspunkt der Bewegung auf der negativen Seite einer geraden Linie ( $L_1$ ) liegt, welche in der Mitte zwischen  $F$  und  $L$  mit  $L$  parallel läuft, d. h. wenn  $a+2x$  negativ ist, so ist die Bahn, wie auch sonst die Anfangsbedingungen sein mögen, hyperbolisch.

Von einem Punkte der Geraden  $L_1$  aus ist die Bahn eine Parabel, wenn die Richtung mit der  $x$ -Axe zusammenfällt, sonst aber eine Hyperbel.

Von einem Punkte auf der positiven Seite von  $L_1$ , ist die Bahn bei hinreichend kleiner  $x$ -Componente der Anfangsgeschwindigkeit elliptisch; bei grösserer wird sie parabolisch und hyperbolisch.

Endlich ist die Art des Kegelschnitts von der Grösse der  $x$ -Componente der Geschwindigkeit und von der  $y$ -Coordinate des Anfangspunktes unabhängig.

Um die Bahn zu construiren (s. Fig. 5), beachte man, dass wenn  $F, L, P$  (der Anfangspunkt der Bewegung)  $PA$  (die Anfangsrichtung) gegeben sind, auch der zweite Schnittpunkt ( $P_1$ ) der Bahn mit der Geraden  $PF$  als der vierte harmonische Punkt zu  $F, B, P$  bekannt ist, dass ferner  $A$  der Pol von  $PP_1$  ist, und dass also der Mittelpunkt des Kegelschnitts in derjenigen geraden Linie liegt, welche  $A$  mit dem Halbirungspunkte  $C$  von  $PP_1$  verbindet. Da endlich durch die Grösse der Anfangsgeschwindigkeit (der Gleichung 3) entsprechend) die Constante

$$b = a + \beta$$

gegeben ist, und da  $a + \beta$  die senkrechte Entfernung des Mittelpunktes von der Geraden  $L$  bedeutet, so ist der Mittelpunkt ( $M$ ) des Kegelschnitts vollständig bestimmt; damit kennt man auch die Schnittpunkte  $QQ_1$  der Bahn auf der Geraden  $MA$  (weil  $MQ^2 = MC \cdot MA$ ) und endlich noch den zu  $R$  symmetrisch gelegenen Punkt  $P_2$ . Die fünf Punkte  $PP_1, QQ_1, P_2$  reichen zur Construction hin.

## § 5.

Der zweite in § 2. aufgestellte Lehrsatz, dass bei elliptischer Bahn die Centrakraft proportional sei mit der Entfernung ( $r$ ) und mit der reciproken dritten Potenz der mittleren Proportionale zwischen den Entfernungen  $p_1, p_2$  von zwei festen geraden Linien  $L_1, L_2$ , welche die vom Attractionscentrum an die Bahn gelegten Tangenten sind, lässt sich ebenso wie der vorige Lehrsatz umkehren. Wieder erscheint die directe Integration nicht überflüssig zu sein. (1)

Die beiden Richtungen, welche die Winkel  $L_1$  und  $L_2$  halbiren, nehme man als die Coordinatenachsen,  $\lambda$  sei die Neigung der Geraden  $L_2$  gegen die  $x$ -Axe. Man findet

$$\begin{aligned} p_1 &= x \sin \lambda - y \cos \lambda \\ p_2 &= x \sin \lambda + y \cos \lambda \end{aligned}$$

In demjenigen Scheitelwinkelraum, in welchem die  $x$ -Axe liegt, haben  $p_1, p_2$  gleiche Vorzeichen, in diesem ist also die mittlere Proportionale zwischen  $p_1$  und  $p_2$

$$p = \sqrt{x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda}$$

reell, und die nach  $F$  gerichtete Attractionskraft hat die Grösse

$$\varphi = \frac{gr}{p^2}$$

Um aber die Integration in grösst möglicher Allgemeinheit auszuführen, werde

$$p^2 = x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda$$

durch

$$q^2 = ax^3 + 2kxy + by^2$$

ersetzt. Alsdann heissen die Bewegungsgleichungen

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{q^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy}{q^3}$$

und ihre erste Integralgleichung

$$2) \quad ydx - xdy = cdt$$

Mit Hilfe dieser Gleichung nehmen die in (1) folgende Form an:

$$d \frac{dx}{dt} = -\frac{gx(ydx - xdy)}{cq^3} = \frac{g}{c(ab - k^2)} d \left[ \frac{by + kx}{q} \right]$$

$$d \frac{dy}{dt} = - \frac{gy(ydx - xdy)}{cq^3} = \frac{-g}{c(ab - k^2)} d \left[ \frac{ax + ky}{q} \right]$$

oder durch Integration:

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{g}{c(ab - k^2)} \left[ \frac{by + kx}{q} - \alpha \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-g}{c(ab - k^2)} \left[ \frac{ax + ky}{q} - \beta \right]$$

und durch Substitution in (2) erhält man die Gleichung der Bahn

$$\gamma + \alpha y + \beta x)^2 = ax^2 + 2kxy + by^2$$

worin

$$\gamma = \frac{c^2}{g} (ab - k^2)$$

gesetzt ist.

Für die nähere Untersuchung der Bahn ist es vorteilhaft, die ursprüngliche Lage der Coordinatenaxen zu nehmen und also  $k = 0$  zu setzen. Alsdann heisst die Gleichung der Bahn

$$4) \quad x^2(\beta^2 - a) + 2\alpha\beta xy + y^2(\alpha^2 - b) + 2\beta\gamma x + 2\alpha\gamma y + \gamma^2 = 0$$

und dieselbe ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$A = (\beta^2 - a)(\alpha^2 - b) - \alpha^2\beta^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \text{ ist.}$$

Zur Elimination von  $\alpha$  und  $\beta$  dienen die Gleichungen (3). Mit Benutzung derselben erhält man:

$$A = \frac{2a^2b^2c^2}{gq} - \frac{a^2b^2c^2}{g^2} \left( b \frac{dy^2}{dt^2} + a \frac{dx^2}{dt^2} \right)$$

Wenn ferner die Geschwindigkeit mit  $v$ , ihre Neigung zur  $x$ -Axe mit  $\mu$  und die zur Erreichung der Geschwindigkeit  $v$  notwendige Fallhöhe mit  $h$  bezeichnet wird, so ist

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \mu, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \mu, \quad h = \frac{v^2}{2gr} q^3$$

und wenn endlich noch zur Abkürzung

$$\delta = b \sin^2 \mu + a \cos^2 \mu$$

gesetzt wird, so erhält man

$$5) \quad A = \frac{2a^2b^2c^2}{gq} \left( 1 - \frac{hr\delta}{q^2} \right)$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$x_0 = \frac{b\beta\gamma}{A}, \quad y_0 = \frac{a\alpha\gamma}{A}$$

und für das Product der Axen des Kegelschnitts findet man:

$$\frac{c}{2\sqrt{2g}} \left( \frac{q}{1 - \frac{hr\delta}{q^2}} \right)^{3/2}$$

so dass die Umlaufszeit

$$6) \quad T = \frac{n}{\sqrt{2g}} \left( \frac{q}{1 - \frac{hr\delta}{q^2}} \right)^{3/2}$$

sich ergibt.

Durch diese Formel ist die Umlaufszeit unmittelbar durch die gegebenen Anfangsbedingungen bestimmt. Eine leichte Umformung ergibt übrigens die Uebereinstimmung mit dem in § 3. angegebenen Resultate.

Für Newton's Centralbewegung hat man

$$a = b = 1, \quad k = 0, \quad q = r, \quad \delta = 1, \quad A = \frac{2c^2}{gr} \left( 1 - \frac{h}{r} \right)$$

$$T = \frac{n}{\sqrt{2g}} \left( \frac{r}{1 - \frac{h}{r}} \right)^{3/2}$$

Wenn die beiden geraden Linien  $L_1, L_2$  reell sind, und wenn

$$q = p = \sqrt{x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda}$$

gesetzt wird, so ist die Kraft

$$\varphi = \frac{gr}{p^2}$$

bei reellem  $g$  nur in demjenigen Scheitelwinkelraum ( $L_1, L_2$ ) reell, in welchem die  $x$ -Axe liegt, und in demselben ist  $\varphi$  eine Attractions- oder eine Repulsionskraft, je nachdem  $g$  und  $p$  gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Es mögen nun im folgenden  $g$  und  $p$  als positiv vorausgesetzt werden. Dann ist die Bahn Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nach-

dem  $\frac{hr\delta}{p^2} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$  ist, und da

$$\delta = b \sin^2 \mu + a \cos^2 \mu = \sin^2 \lambda \cos^2 \mu - \cos^2 \lambda \sin^2 \mu = \sin^2 \lambda - \sin^2 \mu,$$

$$p^2 = x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda$$

$$h = \frac{v^2}{2gr} \cdot p^2$$

zu setzen ist, so kann das Kriterium über die Art der Bahn auch in folgende Form gesetzt werden:

$$\frac{v^2}{2g} \sqrt{x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda} (\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$$

Hieraus folgt:

Diejenigen Anfangsrichtungen, für welche von einem Punkte  $P_0$  aus bei einer gewissen Geschwindigkeit  $v_0$  die Bahn eine Parabel ist, liegen zu den Coordinatenaxen symmetrisch. Dieselben bestimmen zwei Scheitelwinkelräume; in demjenigen, welcher die  $x$ -Axe enthält, sind die Bahnen (cet. par.) hyperbolisch, und in demjenigen, welcher die Richtung der  $y$ -Axe enthält, sind dieselben elliptisch.

Wenn die Anfangsrichtung mit der von  $L_1$  oder  $L_2$  übereinstimmt (d. h. wenn  $\mu = \pm \lambda$ ), oder wenn dieselbe sich noch mehr der Richtung der  $y$ -Axe nähert ( $\sin^2 \mu > \sin^2 \lambda$ ), so ist die Bahn elliptisch, welches auch sonst die Anfangsbedingungen sein mögen.

Wenn bei gewisser Grösse der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  die Richtung derselben für die parabolische Bahn mit derjenigen der  $x$ -Axe übereinstimmt, so sind von demselben Punkte aus bei derselben Geschwindigkeit  $v_0$  nur elliptische Bahnen möglich. Die Lage dieser Grenzpunkte, durch welche für  $v = v_0$  nur eine parabolische Bahn hindurchführt, sind durch die Gleichung

$$x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda = \left( \frac{2g}{v_0^2 \sin^2 \lambda} \right)^2$$

bestimmt, dieselben liegen also auf einer Hyperbel, welche die Geraden  $L_1$ ,  $L_2$  zu Asymptoten hat, und deren Axen mit dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit umgekehrt proportional sind.

Durch diese Hyperbel wird die ganze Ebene in zwei Teile geteilt; in demjenigen Teile, welcher die  $y$ -Axe enthält, liegen die Punkte, von denen aus für  $v = v_0$  nur elliptische Bahnen möglich sind; im anderen Teile ist die Art des Kegelsschnitts erst durch die Anfangsrichtung bedingt.

Endlich ändert sich die Art des Kegelschnitts nicht, wenn (cet. par.) der Anfangspunkt sich auf irgend welcher Hyperbel verschiebt, welche die Geraden  $L_1, L_2$  zu Asymptoten hat (weil auf derselben  $x^2 \sin^2 \lambda - y^2 \cos^2 \lambda = \text{const}$ ).

---

### Dritter Teil.

#### § 6.

Die Frage, ob Newton's Voraussetzungen — elliptische Bahn und constante Flächengeschwindigkeit des von einem Brennpunkt ausgehenden Radius-Vectors — beide durchaus notwendig seien, um den Schluss auf das Gravitationsgesetz zu ermöglichen, ist zuerst von Bertrand gestellt und durch den Satz beantwortet: (1)

Si Kepler n'avait déduit de ses observations qu'une seule de ses lois: Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe le foyer, on aurait pu de ce seul résultat, érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne, est dirigée vers de Soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance.

Der wol nicht ganz correcte Zusatz „ce seul résultat érigé en principe général“ bedeutet die Annahme, dass, welches auch die Anfangsbedingungen der Bewegung hätten sein mögen, stets eine elliptische, parabolische, hyperbolische oder geradlinige Bewegung erfolgt wäre.

Es ist von Interesse zu sehen, dass bei dieser Voraussetzung das Newton'sche Gesetz sich ohne jede Rechnung ergibt.

Zunächst stellt Halphen den Satz auf: (2)

Si une force, dépendant seulement de son point d'application, fait décrire à ce point, quelles que soient les circonstances initiales, une trajectoire plane, cette force passe par un point fixe ou est parallèle à une direction fixe.

Halphen beweist seinen Satz nach den Principien der Variationsrechnung. Dasselbe leistet auch folgende geometrische Betrachtung:

Wenn ein frei beweglicher Punkt sich in einer Curve bewegt, so liegt die Kraft in jedem Augenblick in der Schmiegungeebene

wenn also die Curve eine ebene ist, so werden alle Krafrichtungen in ihrer Ebene liegen. Nach der Annahme von Halphen wird also jede Krafrichtung im ganzen Raume von jeder unendlich nahen geschnitten, und je zwei unendlich nahe Krafrichtungen bestimmen eine Ebene. Denkt man sich nun einen dritten beiden unendlich nahen Punkt ausserhalb der Ebene, so muss die ihm zugehörige Krafrichtung die vorigen beiden schneiden, d. h. auch diese muss durch den vorigen Schnittpunkt hindurchgehen. Dieser Schluss gilt von Punkt zu Punkt durch den ganzen Raum, und somit ist der Satz von Halphen bewiesen.

Mit Hilfe dieses Satzes folgt aus den Voraussetzungen von Bertrand, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt aller elliptischen Bahnen das Attractionscentrum ist; und nun kann man, wie Bertrand selbst (<sup>3</sup>), auf Newton's Rechnung verweisen. Aber man darf nicht übersehen, dass, während bei Newton's Voraussetzung die Rechnung notwendig war, wie sie bei Bertrand's Voraussetzungen überflüssig wird.

Wenn nämlich ein beliebiger Punkt ( $P$ ) im Raume angenommen wird, so würde von diesem aus der Massenpunkt eine gerade Linie beschreiben, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit 0 ist; er würde, wenn ihm eine hinreichend kleine Geschwindigkeit in senkrechter Richtung gegen den Radius-Vector erteilt wird, eine Ellipse beschreiben, in welcher  $P$  das Aphelium ist, und wenn die Geschwindigkeit allmählich wächst, so würde die Bahn in einen Kreis, dann in eine Ellipse, in welcher  $P$  das Perihelium ist, endlich in eine Parabel und zuletzt in eine Hyperbel übergehen. Es ist nämlich der Parameter ( $p$ ) der Curve oder der Krümmungsradius im Perihel oder Aphel durch die Gleichung

$$p = \frac{v^2}{\varphi}$$

bestimmt, in welcher  $\varphi$  die in  $P$  wirkende Kraft bezeichnet; und es wächst also der Parameter wie das Quadrat der Geschwindigkeit.

Wenn nun  $r$  und  $r_1$  beliebige Längen sind, so kann man dieselben also als Perihel- und Apheldistanzen einer der unendlich vielen elliptischen Bahnen ansehen. Im Perihel und Aphel aber verhalten sich die Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeit und also auch — nach dem Flächensatz — umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen  $r$  und  $r_1$ . Somit ist Newton's Satz abgeleitet. (<sup>4</sup>)

Bertrand hat selbst die oben angegebene Voraussetzung modificirt und folgende Aufgabe gestellt:

*En sachant que les planètes décrivent des sections coniques et sans rien supposer de plus: trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, exprimées en fonction des coordonnées de son point d'application.*

Diese Aufgabe ist von Darboux, (5) Halphen, (6) Imchénetsky, (7) Glaisher (8) behandelt und gelöst worden.

Man darf aber trotz des von Bertrand gemachten Zusatzes „sans rien supposer de plus“ nicht übersehen, dass Bertrand an die Stelle von Newton's durch die Beobachtung festgestellten Voraussetzungen unendlich viele andere setzt, die sich der Controle durch die Erfahrung entziehen. Denn so viele elliptische Bahnen auch beobachtet sein mögen, es hindert a priori nichts, den Anfangszustand der Bewegung als eine wesentliche Bedingung für die Möglichkeit der elliptischen Bahn anzusehen.

Im folgenden wird nun die Bertrand'sche Voraussetzung grundsätzlich ausgeschlossen.

### § 7.

Durch den Lehrsatz von Hamilton ist zwar für jede beliebige Stellung des Attractionscentrums in der Ebene der elliptischen Bahn sofort auch das Attractionsgesetz gegeben, aber dasselbe wird im allgemeinen Consequenzen ergeben, die jeglicher Erfahrung widersprechen. Es enthält nämlich der Lehrsatz von Hamilton ausser der Entfernung ( $r$ ) vom Attractionscentrum noch die variable Entfernung ( $\rho$ ) des bewegten Punktes von der festen Polare des Attractionscentrums. Wenn nun dieselbe ( $\rho$ ) nicht eine eindeutige Function der Entfernung ( $r$ ) ist, so ist auch die Kraft nicht eine eindeutige Function der Entfernung ( $r$ ).

Hoppe (1) setzt voraus, dass das Potential der Kraft (und somit diese selbst) durch die Entfernung eindeutig bestimmt sein müsse. Er findet, dass bei dieser Voraussetzung das Attractionscentrum — abgesehen vom Ellipsenmittelpunkt — auf diejenigen Teile der Axen beschränkt ist, welche ausserhalb der Evolutenfläche liegen. Seine Resultate leitet er durch ermüdende Rechnungen aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Centralbewegung her. Aus dem Satze von Hamilton ergeben sie sich unmittelbar:

Wenn nämlich das Attractionscentrum ( $F$ ) (s. Fig 6) zunächst ausserhalb der Axen stünde, so wäre der zu  $MF$  conjugirte Durchmesser ( $MB$ ) schief gegen  $MF$ , also ebenso auch die Polare von  $F$  (d. h.  $GE$ ), und je zwei Ellipsenpunkte ( $A, A_1$ ), welche von der

Polare gleiche Abstände ( $\varrho, \varrho_1$ ) haben, würden von  $P$  verschiedene Entfernungen ( $r, r_1$ ) haben, und umgekehrt. In diesem Falle wäre also die Kraft eine mehrdeutige Function der Entfernung.

Wenn ferner das Attractionscentrum zwar in einer der Axen, aber innerhalb der Evolutenfläche und nicht im Ellipsenmittelpunkte stände, so könnte man von ihm aus eine Normale auf die Ellipse fallen, deren Fusspunkt in keiner der Axen liegt.<sup>(2)</sup> Im Endpunkte dieser Normalen ( $A$ ) (s. Fig. 7) wäre die Bewegungsrichtung schief gegen die Axen und also auch schief gegen die Polare ( $GE$ ) des Centrums ( $F$ ) gerichtet. In je zwei unendlich nahen Punkten ( $B, B_1$ ) zu beiden Seiten des Fusspunktes ( $A$ ), für welche die Entfernungen ( $r, r_1$ ) gleich gross sind, würden also die Entfernungen ( $\varrho, \varrho_1$ ) von der Polare verschieden gross sein.

Das Attractionscentrum ist somit auf solche Punkte der Axen beschränkt, von denen es andere Normalen als die Axenrichtungen nicht giebt, d. h. es ist der Mittelpunkt oder ein Punkt der Axen ausserhalb der Evolutenfläche.

### § 8.

Die Voraussetzungen von Hoppe sind vom physikalischen Standpunkt aus ganz unbedenklich, aber sie führen nicht zur vollständigen Bestimmung des Attractionsgesetzes. Um dies zu erreichen, muss man sie durch andere ersetzen. Zunächst wird man es als selbstverständlich ansehen dürfen, dass nur solche Attractionscentren vorkommen können, für welche sich ein derartiges Attractionsgesetz ergibt, dass für alle reellen Entfernungen ( $r$ ), auch wenn dieselben in der zu Grunde gelegten speciellen Ellipse nicht vorkommen, die Kraft einen reellen Wert besitze. Es soll nun untersucht werden, auf welche Lagen das Attractionscentrum durch diese Annahme beschränkt wird.

Zu diesem Zwecke muss zunächst in der Gleichung (§ 2.)

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^3} \cdot \frac{r}{\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^3}$$

$\frac{\varrho}{\varrho_0}$  als Function der Entfernung ( $r$ ) ausgedrückt werden.

Die Coordinaten des Attractionscentrums ( $F$ ) seien  $f, k$ ; die des beweglichen Punktes  $xy$ ; die irgend eines Punktes der Polare des Attractionscentrums  $\xi\eta$ ; dann gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{f\xi}{a^2} + \frac{k\eta}{b^2} = 1$$

und nach den Regeln der analytischen Geometrie ist

$$1) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{fx}{a^2} - \frac{ky}{b^2}$$

Aus dieser und den beiden folgenden

$$2) \quad 0 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$3) \quad r^2 = (x - f)^2 + (y - k)^2$$

muss  $x$  und  $y$  eliminirt werden. Alsdann findet man  $\frac{\rho}{\rho_0}$  als Function von  $r$  ausgedrückt, und es soll dieselbe für jeden positiven Wert von  $r$  einen reellen Wert besitzen. Es muss also auch

$$\lim_{r=\infty} \left[ \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{r} \right]$$

reell sein.

Nun ergibt sich aber aus der zweiten Gleichung, dass  $y$  und  $x$  gleichzeitig unendlich gross werden, und daher kann man aus der dritten Gleichung schliessen, dass mit  $r$  zugleich sowohl  $x$  als auch  $y$  unendlich werden. Für  $r = \infty$  erhält man demnach:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{-b^2}{a^2}, \quad \frac{r^2}{x^2} = \frac{\rho^2}{a^2}, \quad \frac{e^2}{y^2} = \frac{-e^2}{b^2}$$

und

$$\frac{r}{\rho_0} : r = -\frac{f}{a^2} \frac{x}{r} - \frac{k}{b^2} \frac{x}{r}$$

Da aber  $\frac{x}{r}$  reell und  $\frac{y}{r}$  imaginär sich ergeben hat, so folgt, dass der Grenzwert von  $\frac{\rho}{\rho_0} : r$  reell ist, nur dann, wenn  $k = 0$  genommen wird. Hiermit ist das Attractionscentrum zunächst auf die grosse Axe der Ellipse beschränkt.

Ferner ergeben die beiden letzten Gleichungen durch Elimination von  $y$ :

$$\frac{e^2}{a^2}x^2 - 2fx + b^2 + f^2 - r^2 = 0$$

also ist

$$x = \frac{a^2}{e^2}f \pm \frac{a}{e} \sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}$$

Aus dieser Gleichung kann ferner geschlossen werden, dass das Attractionscentrum nicht zwischen dem Mittelpunkt und einem Brennpunkt stehen darf.

Wäre dieses nämlich der Fall, so wäre

$$0 < f^2 < e^2$$

und für hinreichend kleine Werte von  $r$  würde  $x$  imaginär und mit  $x$  zugleich auch  $\frac{\varrho}{\varrho_0}$  (nach der ersten Gleichung) und endlich also auch die Kraft  $\varphi$ .

Wenn dagegen entweder  $f = 0$  oder  $f^2 = e^2$  oder  $f^2 > e^2$  ist, so hat  $\frac{\varrho}{\varrho_0}$  für alle positiven Werte von  $r$  einen reellen Wert, und hiermit zugleich auch  $\varphi$ .

In dem Falle, dass  $f^2 \geq e^2$  ist, lässt sich auch das Vorzeichen der in dem Ausdruck für  $x$  vorkommenden Wurzel bestimmen. Da nämlich dieselbe niemals durch null hindurchgeht, so tritt kein Zwischenwechsel ein, wie sich auch  $r$  ändern möge. Da nun während der Bewegung auch  $x = 0$  vorkommt, so muss das Zeichen immer dem von  $f$  entgegengesetzt sein. Sieht man also  $f$  als positiv an, so muss

$$x = \frac{a^2}{e^2}f - \frac{a}{e} \sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}$$

gesetzt werden; und alsdann ist

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 - \frac{x f}{a^2}$$

und also auch  $\varphi$  eine eindeutige reelle Function von  $r$ .

Hierdurch ist folgender Lehrsatz bewiesen:

Wenn unter der Wirkung einer nach einem festen Centrum gerichteten Attractionskraft eine elliptische Bewegung erfolgt, so ist die erstere für jede beliebige Entfernung eine

reelle Function nur unter der Bedingung, dass der attrahirende Punkt entweder der Mittelpunkt oder einer der Brennpunkte oder ein Punkt der grossen Axe ausserhalb der Brennweite ist.

## § 9.

Der im vorigen gewonnene Ausdruck:

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{f^2}{e^2} + \frac{f}{ae} \sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}\right)^3}$$

hat für alle Entfernungen  $r$  einen reellen Wert, wenn die absolute Entfernung ( $f$ ) des Attractionscentrums vom Mittelpunkt der Ellipse entweder 0 oder gleich  $e$  oder grösser als  $e$  ist.

Wenn zunächst  $f = 0$  ist, so wird

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

Wenn aber  $f \geq e$  ist, so wird, je grösser  $r$  wird, die Gleichung sich mehr und mehr der Form

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{a^3 e^3}{f^3 v^2}$$

nähern, die freilich nur in dem Falle, dass  $f = e$  ist, das Gesetz genau darstellt. Aber wenigstens für unendlich grosse Werte von  $r$  wird  $\varphi$  verschwinden, sobald  $f \geq e$  vorausgesetzt wird.

Im übrigen ist die Natur des Attractionsgesetzes wesentlich davon abhängig, ob das Attractionscentrum sich ausserhalb oder innerhalb der Ellipsenfläche befindet.

Wenn erstens sich das Attractionscentrum ausserhalb der Ellipse befindet, d. h. wenn  $f > a$  ist, so lassen sich von demselben zwei Tangenten an die Ellipse ziehen. In den Berührungspunkten ist die Geschwindigkeit unendlich gross, weil sie ja der senkrechten Entfernung des Attractionscentrums von der Bewegungsrichtung umgekehrt proportional ist. Mit der Geschwindigkeit wird aber zugleich die Kraft ( $\varphi$ ) unendlich gross, während  $r$  gleich der Tangentenlänge ( $r_0$ ) ist. Für  $r = r_0$  verschwindet also der Nenner des Ausdruckes für  $\varphi$ ; für  $r < r_0$  wird der Nenner negativ, d. h.  $\varphi$  ist nun eine

Repulsionskraft, und dieselbe wird kleiner, je kleiner  $r$  wird, bis dieselbe für  $r = 0$  verschwindet. Dagegen ist der Nenner, in  $\varphi$  für  $r > r_0$  positiv, d. h.  $\varphi$  ist nun eine Attractionskraft und dieselbe wird kleiner, je grösser  $r$  wird, bis dieselbe für  $r = \infty$  verschwindet.

Wenn zwischen sich das Attractionscentrum in einem Endpunkte der grossen Axe befindet, d. h. wenn  $f = a$  ist, so wird die Geschwindigkeit und die Kraft  $\varphi$  in diesem Punkte, also für  $r = 0$ , unendlich gross, bei wachsendem  $r$  findet endliche Attraction statt, die erst für  $r = \infty$  verschwindet.

Wenn drittens sich das Attractionscentrum innerhalb der Ellipsenfläche befindet, wenn also  $e < f < a$  ist, so wird zunächst der in  $\varphi$  enthaltene Nenner für keinen reellen Wert von  $r$  verschwinden.

Denn gesetzt, er wäre null, so müsste

$$\left(\frac{f^2}{e^2} - 1\right)^2 = \frac{f^2}{a^2 e^2} \left[ r^2 + b^2 \left(\frac{f^2}{e^2} - 1\right) \right]$$

und also

$$r = \frac{ae}{f} \sqrt{\left(\frac{ef}{2^2} - 1\right) \left(\frac{f^2}{a^2} - 1\right)}$$

imaginär sein.

Hieraus folgt, dass für  $r = 0$  auch  $\varphi$  verschwindet, dass ferner für wachsende Werte von  $r$  stets endliche Attraction stattfindet, die bis zu einem gewissen Maximum ansteigt, dann aber wieder abnimmt bis dieselbe für  $r = \infty$  verschwindet.

Wenn nun z. B. durch Beobachtung festgestellt ist, dass gewisse Körper in allen Entfernungen eine Anziehung ausüben, die mit wachsender Entfernung fortwährend abnimmt, so sind um dieselben nur derartige elliptische Bewegungen möglich, dass sie in einem der Brennpunkte oder der Endpunkte der grossen Axe stehen, und wenn die Anziehung mit wachsender Entfernung fortwährend zunimmt, so müssen sie im Mittelpunkte der Ellipse stehen.

## § 10

Es werde ferner vorausgesetzt, dass um ein und dasselbe Attractionscentrum zwei verschiedene Bewegungen erfolgen, und dass die aus beiden Bewegungen abgeleiteten Attractionsgesetze für alle reellen Werte der Entfernungen reelle und übereinstimmende Werte für die Kraft ergeben. (1) Es soll untersucht werden, wie durch diese Annahme die Lage der Centren beschränkt wird.

Aus den gemachten Voraussetzungen folgt unmittelbar, dass die Centren in den grossen Axen der elliptischen Bahnen stehen müssen, und während in der einen Bahn  $a, b, e, f, T$  die früheren Bedeutungen haben, mögen  $a_1, b_1, e_1, f_1, T_1$  die entsprechende Bedeutung für die andere elliptische Bahn haben. Ferner folgt aus der Voraussetzung, dass für jeden reellen Wert von  $r$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{f^2}{e^2} + \frac{f}{ae} \sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}\right)^3} \\ &= \frac{4\pi^2}{T_1^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2} + \frac{f_1}{a_1 e_1} \sqrt{r^2 - b_1^2 + \frac{b_1^2 f_1^2}{e_1^2}}\right)} \end{aligned}$$

sein muss, also folgt auch

$$\begin{aligned} 1) \quad T^2 &\left(1 - \frac{f^2}{e^2} + \frac{f}{ae} \sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}}\right) \\ &= T_1^2 \left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2} + \frac{f_1}{a_1 e_1} \sqrt{r^2 - b_1^2 + \frac{b_1^2 f_1^2}{e_1^2}}\right) \end{aligned}$$

also auch (durch Differentiation)

$$T^2 \frac{f}{ae} \sqrt{r^2 - b^2 + \frac{b^2 f^2}{e^2}} = T_1^2 \frac{f_1}{a_1 e_1} \sqrt{r^2 - b_1^2 + \frac{b_1^2 f_1^2}{e_1^2}}$$

und hieraus ergibt sich, wenn  $f$  von 0 verschieden ist,

$$T^2 \frac{f}{ae} = T_1^2 \frac{f_1}{a_1 e_1}$$

$$b^2 \left(1 - \frac{f^2}{e^2}\right) = b_1^2 \left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2}\right)$$

und aus 1)

$$T^2 \left(1 - \frac{f^2}{e^2}\right) = T_1^2 \left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2}\right)$$

Diese Gleichungen sind zunächst für  $f = e$  und  $f_1 = e_1$  erfüllt, wenn

$$\frac{T^2}{a} = \frac{T_1^2}{a_1}$$

(drittes Kepler'sches Gesetz) ist.

Wenn nun aber die bekannten Fälle

$$f = 0, \quad f_1 = 0$$

$$f = e, \quad f_1 = e_1$$

ausgeschlossen werden, so folgt aus den obigen Gleichungen, wenn

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{T_1}{T}}$$

gesetzt wird

$$2) \quad \tau = \frac{b_1}{b}$$

und da ferner

$$\frac{f}{ae} = \tau^2 \frac{f_1}{a_1 e_1}$$

$$b^2 \left(1 - \frac{f^2}{e^2}\right) = b_1^2 \left(1 - \frac{f_1^2}{e_1^2}\right)$$

sein muss, so ergibt sich durch Auflösen beider Gleichungen:

$$3) \quad \begin{cases} \frac{f}{e} = a\tau \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{a^2 \tau^2 - a_1^2}} \\ \frac{f_1}{e_1} = \frac{a_1}{\tau} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{a^2 \tau^2 - a_1^2}} \end{cases}$$

Bei der oben gemachten Annahme können also zwar die Formen der beiden elliptischen Bahnen selbst beliebig angenommen werden, aber alsdann ist das Verhältniss der Umlaufzeiten und die Stellung des Attractionscentrums und somit das Attractionsgesetz selbst durch die Gleichungen 2) und 3) völlig bestimmt.

Eine bemerkenswerte Folgerung ist ferner, dass, wenn der obigen Annahme noch das dritte Keppler'sche Gesetz als Voraussetzung hinzugefügt wird, sich das Newton'sche Gesetz als Folgerung ergibt.

Wenn nämlich

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a_1^3}{a^3}$$

vorausgesetzt wird, so folgt

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{T_1}{T}} = \sqrt[3]{\frac{a_1}{a}}$$

und somit

$$\frac{f}{e} = \sqrt{aa_1} \sqrt{\frac{a - a_1}{aa_1(a - a_1)}} = 1$$

und ebenso

$$\frac{f_1}{e_1} = 1$$

Also muss die Attraction dem Newton'schen Gesetz entsprechen, d. h.:

Wenn um das nämliche Attractionscentrum zwei elliptische Bewegungen erfolgen, und wenn die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen verhalten, so ist das Attractionscentrum notwendig der gemeinschaftliche Brennpunkt, (da sonst die aus beiden Bewegungen abgeleiteten Ausdrücke für die Centrakraft nicht identische reelle Functionen der Entfernung wären).

---

#### Vierter Teil.

##### § 11.

Wenn die Kraft, welche einen frei beweglichen Punkt durch eine gegebene Curve treibt, stets nach einem festen Centrum gerichtet ist, so ist durch den Satz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit des Radius-Vectors auch die Geschwindigkeit eine gegebene Function der Coordinaten, und es ist also die Aufgabe, unter den angegebenen Bedingungen die Kraft zu bestimmen, nur eine Specialisirung der allgemeineren Aufgabe:

*Es soll diejenige Kraft bestimmt werden<sup>1)</sup>, welche einen frei beweglichen Punkt durch eine gegebene Curve treibt und ihm eine beliebig gegebene veränderliche Geschwindigkeit erteilt.*

Diese Aufgabe ist schon durch die von Huyghens<sup>(2)</sup> für die normale und tangentiale Componente angegebener Ausdrücke  $\frac{v^2}{\rho}$  und  $v \frac{dv}{ds}$  gelöst worden.

Es können aber zwei der Richtung und Grösse nach bestimmte Kräfte auf unendlich viele Weisen durch zwei andere ersetzt werden.

Man kann zunächst z. B. die tangentiale<sup>(3)</sup> Richtung für eine der beiden Componenten beibehalten, und um über die zweite Richtung frei zu verfügen, kann man zu der tangentialen Kraft  $v \frac{dv}{ds}$  eine ganz willkürliche Kraft ( $-\psi$ ) addiren, und endlich die tangentiale Kraft ( $+\psi$ ) und die normale Kraft  $\frac{v^2}{\rho}$  zu einer Kraft ( $F_1$ ) zusammensetzen. Durch passende Bestimmung der Kraft ( $\psi$ ) kann man erreichen, dass diese Resultante ( $F_1$ ) durch einen gegebenen festen Punkt geht oder einer gegebenen Richtung parallel ist, oder mit der Tangente einen gegebenen Winkel bildet etc.<sup>(4)</sup>.

Man kann ferner auch die Richtungen beider von Huyghens bestimmten Componenten ändern, so dass die eine Componente ( $F_1$ ) nach einem festen Punkte ( $O$ ) gerichtet ist, die andere ( $F_2$ ) auf derselben senkrecht steht. (5).

Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und dem Radius-Vector ( $r$  oder  $PO$ ), so ist

$$F_1 = \frac{v^2}{\rho} \sin \alpha + v \frac{dv}{ds} \cos \alpha$$

$$F_2 = -\frac{v^2}{\rho} \cos \alpha + v \frac{dv}{ds} \sin \alpha$$

Bezeichnet ferner  $D$  die von  $O$  auf die Bewegungsrichtung gefällte Senkrechte, so ist

$$\sin \alpha = \frac{D}{r}$$

Endlich hat man noch die Gleichungen

$$\cos \alpha = -\frac{dr}{ds}$$

$$r dr = \rho dD \quad (6)$$

Substituiert man diese Werte in die vorigen Ausdrücke, so erhält man nach wenigen Reductionen:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{v^2 r}{\rho D} - \frac{v}{D} \frac{dr}{ds} \frac{d(Dv)}{ds} \\ F_2 &= \frac{v}{r} \frac{d(Dv)}{ds} \end{aligned} \right\}$$

Wenn die gesamte wirkende Kraft nach  $O$  gerichtet ist, so folgt:

$$F_2 = 0, \text{ und also}$$

$$Dv = \text{const.}$$

$$F_1 = \text{const}^2 \frac{r}{\rho D^2}$$

d. h. es gilt der Satz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit und der Satz von Moivre.

Die obigen Formeln enthalten ausserdem folgenden allgemeinen Satz:

Eine beliebige ebene Curve werde mit beliebig veränderlicher Geschwindigkeit von einem frei beweglichen Punkte

durchlaufen. In jedem Punkte ( $P$ ) der Curve ist die Kraft nach solchen Punkten ( $O$ ) gerichtet, für welchen die Flächengeschwindigkeit des Radius-Vectors in  $P$  einen Maximal- oder Minimalwert erreicht.

## § 12.

Anstatt die Richtungen der Componenten dadurch zu bestimmen, dass die eine durch einen festen Punkt geht, die zweite aber auf der ersten senkrecht steht, kann man auch verlangen, dass beide Richtungen je durch einen Punkt ( $O, O_1$ ) hindurchgehen. Die zu lösende Aufgabe ist dann folgende:

*Es sollen diejenigen nach zwei festen Centren ( $O, O_1$ ) gerichteten Attractionskräfte bestimmt werden, welche einen frei beweglichen Massenpunkt durch eine gegebene Curve treiben und ihm eine gegebene veränderliche Geschwindigkeit erteilen.*

Die nach  $O, O_1$  gerichteten Kräfte seien resp.  $P, P_1$ . Mit Anwendung der früheren Beziehungen erhält man:

$$1) \quad \begin{cases} N = \frac{v^2}{\varrho} = P \sin \alpha + P_1 \sin \alpha_1 \\ T = v \frac{dv}{ds} = P \sin \alpha + P_1 \cos \alpha_1 \end{cases}$$

$$\frac{v'}{\varrho} \cos \alpha_1 - v \frac{dv}{ds} \sin \alpha_1 = P \sin(\alpha - \alpha_1)$$

$$\frac{v^2}{\varrho} \cos \alpha - v \frac{dv}{ds} \sin \alpha = P_1 \sin(\alpha_1 - \alpha)$$

oder da

$$\cos \alpha = \frac{-dr}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{D}{r}, \quad r dr = \varrho dD$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{-dr_1}{ds}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{D_1}{r_1}, \quad r_1 dr_1 = \varrho dD_1$$

ist, so folgt:

$$\begin{cases} P \sin(\alpha_1 - \alpha) = \frac{v}{r_1} \frac{d(r D_1)}{ds} \\ P_1 \sin(\alpha_1 - \alpha) = \frac{-v}{r} \frac{d(v D)}{ds} \end{cases}$$

Bezeichnet man endlich den Abstand der beiden Centren mit  $2e$ , so folgt

$$\frac{2e}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} = \frac{r}{\sin(r_1 e)} = \frac{r_1}{\sin(re)}$$

und also

$$2) \quad \begin{cases} P 2e \sin(re) = v \frac{d(vD_1)}{ds} \\ P_1 2v \sin(r_1 e) = v \frac{d(vD)}{ds} \end{cases}$$

$P \sin(re)$  und  $P_1 \sin(r_1 e)$  sind diejenigen Componenten  $Q, Q_1$ , deren Richtungen auf der Verbindungslinie der beiden Attractionscentren senkrecht stehen.

Für diese folgt

$$R : Q_1 = d(vD_1) : - d(vD)$$

d. h. die genannten Componenten stehen im umgekehrten Verhältniss der Flächenbeschleunigungen.

Ferner enthalten die Gleichungen 2) den Lehrsatz:

Wenn in einem Punkte der Bahn, welcher nicht zugleich auf der Verbindungslinie der beiden Attractionscentren liegt, eine der um die beiden Centren vorhandenen Flächen- geschwindigkeiten einen Maximal- oder Minimalwert erreicht, so muss in diesem Punkte die nach dem andern Centrum gerichtete Kraft verschwinden.

Wenn die Gleichungen 2) im besonderen auf eine elliptische Bahn angewendet werden, bei welcher die Brennpunkte die Attractionscentren sind, so erhält man aus ihnen:

$$P = \frac{av^2}{2rr_1} - \frac{v}{2} \frac{dv}{dr}$$

$$P_1 = \frac{av^2}{2rr_1} - \frac{v}{2} \frac{dv}{dr_1}$$

Diese speciellen Formeln erhält man freilich leichter direct in folgender Weise:

Die normale und tangential Componente seien (s. Fig. 8)

$$N = \frac{v^2}{\rho} = \overline{AC}$$

$$T = v \frac{dv}{ds} = \overline{AB}$$

Jede derselben werde in zwei nach den Brennpunkten  $F, F_1$  gerichtete Componenten zerlegt, so dass  $AC$  durch  $AD$  und  $AE$ ,  $AB$  durch  $AG$  und  $AK$  ersetzt werden dürfen.

Dadurch erhält man die gesuchten nach dem Brennpunkte gerichteten Kräfte  $P, P_1$ , nämlich

$$P = AD - AG$$

$$P_1 = AE + AK$$

Da ferner die Kräfteparallelogramme gleichseitige sind, (weil Wkl.  $EAC =$  Wkl.  $CAD = \beta$ ), so folgt

$$AD = AE - \frac{T}{2 \cos \beta}$$

$$AG = AK = \frac{T}{2 \sin \beta}$$

In den für die Ellipse gebräuchlichen Bezeichnungen ist nun:

$$\sin \beta = \frac{dr}{ds} = - \frac{dr_1}{ds}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{rr_1}} = \frac{rr_1}{a\varrho}$$

Durch Substitution dieser Werte erhält man das oben angegebene Resultat.

### § 13.

Die zuletzt behandelte Aufgabe ist wiederum eine Specialisirung von folgender:

*Es werde eine gegebene Curve von einem frei beweglichen Massenpunkte unter der Wirkung beliebig vieler Centralkräfte durchlaufen, die nach gegebenen Punkten gerichtet sind. Es soll die Bedingung angegeben werden, welche diese Centralkräfte erfüllen müssen.*

Diese Aufgabe ist von Curtis <sup>(1)</sup> behandelt worden. In die von ihm gegebene Lösung gehen auch diejenigen Attractionskräfte ( $\Phi$ ) ein, welche einzeln einen frei beweglichen Massenpunkt bei passenden Anfangsbedingungen durch dieselbe Curve treiben würden. Es werden aber häufig diejenigen Kräfte, welche einzeln die gegebene

Bahn zulassen würden, complicirtere Functionen der Entfernung sein, als die, welche bei ihrem Zusammenwirken dieselbe Bahn hervorbringen.

Wenn z. B. beliebig viele Attractionscentren verschiedener Masse ( $m$ ) einen Punkt mit einer der Entfernung ( $L$ ) und der eigenen Masse proportionalen Kraft ( $mL$ ) anziehen, und wenn sie so verteilt sind, dass ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Ellipse fällt, so ist bei passenden Anfangsbedingungen die gegebene elliptische Bahn möglich. <sup>(2)</sup> In diesem Falle sind die Attractionskräfte ( $\Phi$ ) complicirtere Functionen als die Kräfte ( $F$ ), welche bei gemeinsamem Wirken die elliptische Bahn ermöglichen.

Im übrigen findet man die gesuchte Bedingung nach der Methode von Curtis sofort:

Es seien  $xy$  die Coordinaten des bewegten Punktes,

$f_1 k_1, f_1 k_2$  . . . die der Attractionscentren,

$L_1, L_2$  . . . ihre Entfernungen von  $xy$ ,

$d_1, q_2$  . . . ihre senkrechten Entfernungen von den Bewegungsrichtungen,

$P_1, P_2$  . . . die einzelnen Attractionskräfte,

$N_1, N_2$  . . . ihre normalen,

$T_1, T_2$  . . . ihre tangentialen Componenten.

Nach den oft gebrauchten Bewegungsgleichungen ist:

$$\Sigma O = \frac{v^2}{\rho} = \Sigma \frac{Pq}{L} \quad (3)$$

$$\Sigma T = v \frac{pv}{ds} = \Sigma \frac{P dL}{ds}$$

und zwar erstreckt sich die Summation über die verschiedenen Attractionscentren.

Die letzte Gleichung wird integrirt und der für  $v^2$  erhaltene Wert in die erstere eingesetzt. Man erhält alsdann die gesuchte Bedingung:

$$\rho \Sigma \frac{Pb}{L} = 2 \Sigma \int P dB = \text{const.}$$

Wenn im speciellen

$$P = eL^n$$

angenommen wird, so ist

$$\int P dL = \frac{c L^{n+1}}{n+1}$$

zu setzen, und bei dieser Annahme erhält die Bedingungsgleichung die Form:

$$\sum c L^{n-1} \left[ q\varrho + \frac{2L^2}{n+1} \right] = \text{const.}$$

und, wenn diese Gleichung auf eine elliptische Bewegung angewendet werden soll, so muss

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$pq = (a^2 - \varepsilon x^2) \left( 1 - \frac{x f}{a^2} - \frac{y k}{b^2} \right)$$

$$L^2 = b^2 + f^2 + k^2 - 2fx + \varepsilon^2 x^2 - 2ky$$

gesetzt worden.

### Fünfter Teil.

#### § 14.

Im vorigen § ist eine gewisse Verteilung der Attractionscentren erwähnt, unter deren Wirkung eine elliptische Bewegung möglich ist, wenn die Attractionsgesetze sämtlich der Gleichung

$$P = cK$$

entsprechen. Es muss aber noch untersucht werden, ob diese Verteilung die einzig zulässige ist. Zu diesem Zweck wird in der allgemeinen Bedingungsgleichung des vorigen §  $n = 1$  gesetzt. Man erhält somit:

$$\sum c(q\varrho + L^2) = C$$

Zu jedem Werte von  $x$  gehören zwei einander entgegengesetzte Werte  $y$ . Wenn nun die obige Summe einen constanten Wert haben soll, so muss derjenige Teil, welcher mit  $y$  sein Zeichen wechselt, verschwinden, d. h.

$$\sum ck \left[ \frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{b^2} + 2 \right] = 0$$

Hieraus folgt, dass

$$\sum ck = 0$$

sein muss; und da nun auch das Zeichen von  $x$  beliebig geändert werden kann, so ergibt sich in derselben Weise, dass auch

$$\Sigma cf = 0$$

sein muss. Es reducirt sich also die obige Bedingungsgleichung auf

$$C = \Sigma(a^2 + b^2 + f^2 + k^2)$$

wodurch bloss der Wert der Constanten  $C$  bestimmt ist. Die Gleichungen

$$\Sigma cf = 0, \quad \Sigma ck = 0$$

lehren, dass, wenn die Attractionskräfte proportional der Masse und der Entfernung sind, die Centren so verteilt sein müssen, dass der Ellipsenmittelpunkt ihr Schwerpunkt ist.

§ 15.

Es werde ferner vorausgesetzt, dass alle Attractionscentren nach Gravitationsgesetzen anziehen. Die Bedingungsgleichung für elliptische Bewegung reducirt sich dann auf

$$\Sigma g \left[ \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)}{L^2} \left( 1 - \frac{xf}{a^2} - \frac{yk}{b^2} \right) - \frac{2}{L} \right] = C$$

Zunächst soll hieraus der bekannte Satz abgeleitet werden, dass, wenn nur eine Gravitationskraft vorhanden ist, diese nach einem Brennpunkte gerichtet sein muss.

In diesem Falle heisst die obige Gleichung:

$$(a^2 - \varepsilon^2 x^2 \varepsilon) \left( 1 - \frac{xf^2}{a^2} - \frac{yk}{b^2} \right) - 2L^2 = \frac{C}{g} L^3$$

Durch Quadriren der Gleichung, durch Ordnen nach der Irrationalität

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und abermaliges Quadriren erhält man hieraus eine ganze Function von  $x$ , die für alle Werte von  $x$  zwischen  $+a$  und  $-a$  verschwinden muss. Hieraus folgt, dass dieselbe identisch verschwinden muss, dass also auch  $x = \infty$  gesetzt werden darf. Für  $x = \infty$  erhält man aber

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{-b^2}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{K^2}{x^2} = \varepsilon^2$$

und aus der obigen Bedingungsgleichung:

$$\varepsilon^2 \left( \frac{f}{a^2} + \frac{k}{b^2} \frac{y}{x} \right) = \frac{C}{g} \frac{L^2}{x^2}$$

Da nun hierin  $\frac{y}{x}$  der einzige imaginäre Wert ist, so folgt zunächst, dass  $k = 0$  sein muss. Hierdurch vereinfacht sich die Bedingungsgleichung zu:

$$(a^2 - \varepsilon^2 x^2) \left( 1 - \frac{x f}{a^2} \right) - 2L^2 = \frac{C}{g} L^3$$

in welcher

$$L^2 = b^2 + f^2 - 2fx + \varepsilon^2 x^2$$

zu setzen ist.

Nun verschwindet aber  $L$  höchstens für zwei verschiedene Werte von  $x$ , folglich darf auch

$$(a^2 - \varepsilon^2 x^2) \left( 1 - \frac{x f}{a^2} \right)$$

höchstens für zwei verschiedene Werte verschwinden, und daher muss entweder  $f = 0$  oder

$$\frac{a^2}{f} = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

d. h.  $f = \pm e$  sein. Die Annahme  $f = 0$  ist aber nicht statthaft, weil sonst  $L$  nur für imaginäre Werte von  $x$  verschwinden würde, nicht aber für

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

Es bleibt also nur die einzige Annahme  $f = \pm e$ , für welche die Bedingungsgleichung erfüllt ist, wenn

$$C = \frac{-g}{a}$$

gesetzt wird.

## § 16.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Summe der Functionen

$$\Sigma g \left[ \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2) \left(1 - \frac{x f}{a^2} - \frac{y k}{b^2}\right)}{L^2} - \frac{2}{L} \right]$$

constant sein könne.

Man denke sich für irgend einen Anfangswert

$$x = x_0$$

einen der zugehörigen Werte

$$y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$$

berechnet; damit ist auch der Anfangswert für jedes  $L^2$  eindeutig bestimmt. Um nun  $y$  und  $L^2$  in eindeutiger Weise über die ganze Ebene der Variablen  $x$  auszubreiten, denke man sich zunächst eine sich von  $+a$  bis  $-a$  erstreckende Linie ausgeschieden. Wenn  $x$  von  $x_0$  aus sich über die ganze Ebene ausbreitet, ohne jedoch die angegebene Grenze zu überschreiten, so wird  $y$  und damit auch  $L^2$  eindeutig über die ganze Ebene ausgebreitet. Dadurch wird aber noch nicht der ganze Wertvorrat beider Functionen erschöpft. Um auch dieses zu erreichen, denkt man sich unter die erste Ebene noch eine zweite geheftet und ordnet jedem  $x$  der unteren Ebene dasjenige  $y$  zu, welches dem vorigen gerade entgegengesetzt ist. Beide Ebenen werden längs der Grenzlinie kreuzweise aneinander geheftet, und alsdann sind  $y$  und  $L^2$  eindeutig und stetig über die zweiblättrige Fläche ausgebreitet. Im oberen Blatte mögen die Werte mit  $y$  und  $L^2$ , und im unteren mit  $y'$  und  $L'^2$  bezeichnet werden.

Wenn nun  $x$  sich in einem geschlossenen Teile bewegt, der keinen Nullpunkt von  $L^2$  enthält, so ist in demselben auch  $L$  eindeutig, wenn aber in demselben ein Nullpunkt vorkommt, so kann bei der Umkreisung desselben ein Zeichenwechsel eintreten. Im letzteren Falle möge der Nullpunkt als singuläre Stelle bezeichnet werden. Um nun die singulären Stellen von  $L^2$  zu finden, müssen die Nullpunkte von  $L^2$  bestimmt werden. Dieselben mögen mit  $\xi$  bezeichnet werden; sie genügen der biquadratischen Gleichung:

$$(b^2 + f^2 + k^2 - 2f\xi + \varepsilon\xi^2)^2 - \frac{4b^2k^2}{a^2}(a^2 - \xi^2) = 0$$

Diese Gleichung zerfällt nach einigen Reductionen in die beiden quadratischen

$$\begin{cases} b^2 + (f + k\sqrt{-1})^2 - 2\xi(f + k\sqrt{-1}) + \varepsilon^2\xi^2 = 0 \\ b^2 + (f - k)\sqrt{-1}^2 - 2\xi(f - k\sqrt{-1}) + \varepsilon^2\xi^2 = 0 \end{cases}$$

die Function  $L^2$  hat also im allgemeinen vier Nullpunkte  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ .

$\xi_1, \xi_2$  genügen den Gleichungen

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} (f + k\sqrt{-1})$$

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{b^2 + (f + k\sqrt{-1})^2}{\varepsilon^2}$$

und  $\xi_3$  und  $\xi_4$  sind zu  $\xi_1, \xi_2$  conjugirt. Die Nullpunkte  $\xi_1$  und  $\xi_2$  sind von einander verschieden, ausser wenn

$$(f + k\sqrt{-1})^2 - \varepsilon^2 b^2 + \varepsilon^2 (f + k\sqrt{-1})^2$$

d. h. wenn

$$k = 0 \quad \text{und} \quad f^2 = c^2$$

ist; und die Nullpunkte  $\xi_1, \xi_2$  sind auch von  $\xi_3, \xi_4$  verschieden, ausser wenn die obigen beiden quadratischen Gleichungen eine Wurzel gemeinschaftlich haben, wenn dieselbe also auch der Differenz beider Gleichungen

$$4k(f - \xi)\sqrt{-1}$$

zukommt, wenn also entweder  $k = 0$  oder  $f = \xi$  ist.

Wenn aber  $f = \xi$  eine Wurzel der biquadratischen Gleichung sein soll, so muss

$$b^2 + f^2 - k^2 - 2f^2 + \varepsilon^2 f^2 = 0$$

d. h.

$$b^2 f^2 + a^2 k^2 = a^2 b^2$$

sein; es muss also der Punkt  $(fk)$  ein Punkt der Ellipse sein.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  sind also sämtlich von einander verschieden, ausser wenn  $k = 0$ , oder wenn  $(fk)$  ein Punkt der Ellipse ist.

Wenn aber  $(fk)$  ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und innerhalb des Ellipsenumfanges ist, so ist

$$\xi_1 - \xi_2 = f$$

dagegen ist  $\xi_1$  nach der Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} (f + k\sqrt{-1})$$

imaginär und also sowol von  $\xi_1$  wie auch von dem conjugirten Werte  $\xi_4$  verschieden. In diesem Falle sind also zwei Nullpunkte einander gleich, die beiden anderen aber von diesen und unter sich verschieden.

Wenn endlich  $k = 0$  ist, so reducirt sich  $L^2$  auf  $b^2 + f^2 - 2f\xi + \varepsilon^2 \xi^2$ , und diese Function hat zwei Nullpunkte  $\xi_1, \xi_2$ , welche von einander verschieden sind, ausser, wenn  $f^2 = c^2$  ist.

Die obige biquadratische Gleichung hat also:

- 1) vier verschiedene Wurzeln, wenn  $f/k$  ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und ausserhalb der Ellipse ist;
- 2) zwei Wurzeln ( $= f$ ) und zwei verschiedene einander conjugirte, wenn  $(f/k)$  ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und innerhalb des Ellipsenumfanges ist;
- 3) zwei Paare von gleichen Wurzeln, wenn  $f/k$  ein Punkt der grossen Axe ausserhalb der Brennpunkte ist;
- 4) vier einander gleiche Wurzeln, wenn  $f/k$  einer der beiden Brennpunkte ist.

Ferner sind die Wurzeln von  $\pm a$  verschieden, ausser wenn

$$b^4 + f^2 + k^2 \mp 2fa + \varepsilon^2 a^2 = 0$$

d. h.

$$a = \pm f \text{ und } k = 0 \text{ ist.}$$

## § 17.

Es soll nun untersucht werden, welche der Nullpunkte  $\xi$  singuläre Stellen der Function  $L$  sind. Die linke Seite der biquadratischen Gleichung für  $\xi$  ist das Product  $L^2 \cdot L'^2$ . Man hat also nach der Theorie der Gleichungen:

$$LL' = \varepsilon^2 \sqrt{(x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)(x - \xi_4)}$$

Wenn nun  $\xi$  ein Nullpunkt erster Ordnung ist, so wechselt  $\sqrt{x - \xi_1}$  bei der Umkehrung von  $\xi_1$  das Vorzeichen, während  $\sqrt{(x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)}$  zu dem ursprünglichen Werte zurückkehrt; es muss aber auch diejenige der Functionen  $L, L'$  das Vorzeichen wechseln, welcher  $\xi_1$  als Nullpunkt angehört. Jeder Nullpunkt erster Ordnung ist also zugleich ein singulärer Punkt.

Wenn dagegen  $\xi_1$  ein Nullpunkt zweiter Ordnung ist, so tritt bei seiner Umkehrung ein Vorzeichen in

$$\sqrt{(x - \xi_1)(x - \zeta_1)} = x - 1$$

nicht ein, also werden  $L$  und  $L'$  entweder beide das Zeichen wechseln oder beide zum ursprünglichen Werte zurückkehren. Wenn nun  $L$  und  $L'$  von einander verschieden sind, d. h. wenn  $k \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  ist, so gehört  $\xi_1$  nur einer der beiden Functionen, z. B.  $L$  als Nullpunkt an; alsdann muss  $L'$  zu seinem ursprünglichen Werte zurückkehren, somit muss auch  $L$  zum ursprünglichen Werte zurückkehren, und in diesem Falle ist  $\xi_1$  nicht singulärer Punkt.

Wenn dagegen  $k = 0$  und also  $L = L'$  ist, und wenn  $\xi_1$  ein Nullpunkt zweiter Ordnung der biquadratischen Gleichung, also ein Nullpunkt erster Ordnung von

$$L^2 = b^2 + f^2 - 2fx + \varepsilon^2 x^2$$

ist, so ist es zugleich singulärer Punkt von  $L$ , und wenn  $\xi_1$  ein Nullpunkt vierter Ordnung ist, so ist  $L$  eine eindeutige Function ohne singuläre Stellen.

Somit sind folgende Sätze bewiesen:

- 1) Wenn  $fk$  ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und ausserhalb des Ellipsenumfanges ist, so hat  $L$  vier getrennte singuläre Stellen.
- 2) Wenn  $fk$  ein Punkt ausserhalb der grossen Axe und innerhalb des Ellipsenumfanges ist, so hat  $L$  zwei verschiedene singuläre Stellen.
- 3) Wenn  $fk$  ein Punkt der grossen Axe und ausserhalb der Brennpunkte ist, so hat  $L$  verschiedene singuläre Stellen.
- 4) Wenn  $fk$  ein Brennpunkt ist, so hat  $L$  keine singulären Stellen.

Uebrigens sind die singulären Stellen sämtlich von  $\pm a$  verschieden, ausser wenn  $f = \pm a$  und  $k = 0$  ist.

### § 18.

Endlich muss noch folgender Lehrsatz bewiesen werden:

Wenn zwei Functionen  $L$  und  $L_1$ , welche sich auf die Attractionscentren  $fk, f_1k_1$  beziehen, alle singulären Stellen gemeinschaftlich haben, so sind sie identisch.

1)  $L$  und  $L_1$  mögen zunächst vier singuläre Stellen gemeinschaftlich haben; dann müssen die biquadratischen Gleichungen, welche aus ihnen abgeleitet sind, identisch übereinstimmen, also auch die daraus abgeleiteten quadratischen, und also auch

$$f + k\sqrt{-1} = f_1 + k_1\sqrt{-1}$$

Die beiden Punkte  $fk$  und  $f_1k_1$  könnten sich also höchstens im Vorzeichen von  $k$  unterscheiden. Aber auch dieser Unterschied ist nicht möglich, da sonst  $L$  und  $L_1$  durchaus von einander verschieden wären, also die Nullpunkte nicht gemeinschaftlich haben könnten.

2)  $L$  und  $L_1$  mögen ferner ihre beiden singulären Stellen gemein haben.

Unter dieser Voraussetzung liegen die Punkte  $fk$  und  $f_1k_1$  entweder in der grossen Axe oder im Ellipsenumfange.

Liegen sie beide in der grossen Axe, so müssen nach der Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} f = \frac{2}{\varepsilon^2} f_1$$

die Functionen  $L$  und  $L_1$  übereinstimmen; liegen sie beide im Ellipsenumfange, so müssen nach den Gleichungen

$$f + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} (f + k\sqrt{-1})$$

$$f_1 + \xi_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} (f_1 + k_1\sqrt{-1})$$

da, wie schon oben bemerkt, ein Unterschied im Zeichen  $k$  unmöglich ist, die Functionen  $L$  und  $L_1$  ebenfalls übereinstimmen.

Die Annahme endlich, dass einer der Punkte ( $fk$ ) in der grossen Axe, der andre ( $f_1k_1$ ) ausserhalb derselben im Ellipsenumfange liege, ist nicht statthaft, weil wenn  $L^2$  und  $L_1^2$  in einem der beiden Blätter einen Nullpunkt gemeinsam haben, der im andern Blatt entsprechende Punkt ebenfalls Nullpunkt von  $L'^2$  ist, aber nicht von  $L'_1{}^2$  verschieden ist, während  $L^2$  und  $L'^2$  mit einander übereinstimmen.

### § 19.

Mit Hilfe dieser Lehrsätze lassen sich nun die Bedingungen finden, unter denen

$$S = \sum g \left[ \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2) \left(1 - \frac{xf}{a^2} - \frac{yk}{b^2}\right)}{L^2} - \frac{2}{L} \right]$$

constant ist.

Der obige Ausdruck besteht aus so vielen Summanden, als Attractionscentren vorhanden sind. Für jeden Summanden denke man sich die singulären Stellen der in ihm enthaltenen Function  $L$  bestimmt. Nach dem zuletzt bewiesenen Satze haben keine zwei Summanden sämtliche singulären Stellen gemein. Es lässt sich nun zuletzt zeigen, dass Summanden mit je vier singulären Stellen nicht vorkommen können.

Gesetzt nämlich,  $s$  wäre ein solcher Summand mit den singulären Stellen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ , so könnte man die Variable  $x$  von  $x_0$  aus auf irgend einem Wege zuerst in die Nähe von  $\xi_1$  führen. Es hätten dann alle Summanden in  $S$  gewisse bestimmte Werte; würde man  $x$  um  $\xi_1$  herumführen (welches von  $\pm a$  verschieden ist), so würden in  $S$  nur diejenigen Summanden  $s, s_1, \dots$  ihr Zeichen ändern, welche die singuläre Stelle  $\xi_1$  mit  $s$  gemeinsam haben. Es muss also gleichgültig sein, ob die Summanden  $s, s_1, \dots$  mit positivem oder negativem Zeichen genommen werden; in beiden Fällen muss  $S$  denselben Wert annehmen.

In der Umgebung von  $\xi_1$  muss also  $s + s_1 + \dots$  verschwinden. Hieraus folgt, dass diese Summe identisch verschwinden muss.

Jetzt denke man sich die Variable  $x$  auf irgend einem Wege in die Nähe von  $\xi_1$ , dann um  $\xi_2$  herumgeführt und wiederhole für die Summe  $s + s_1 + \dots$  den vorigen Schluss. Man erhält als Resultat, dass die Summe aller derjenigen Functionen verschwinden muss, welche die beiden singulären Stellen  $\xi_1, \xi_2$  gemeinsam haben.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man zuletzt die Folgerung, dass der eine Summand  $s$  mit den vier singulären Stellen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  identisch verschwinden muss.

Es ist aber schon bewiesen worden, dass ein Summand einen constanten Wert nur dann haben kann, wenn

$$f = \pm e, \quad k = 0$$

ist, wenn also singuläre Stellen überhaupt nicht vorkommen.

Hiermit ist zunächst bewiesen, dass Summanden  $s$  mit vier singulären Stellen in  $S$  nicht vorkommen dürfen.

Auf die Summanden mit je zwei singulären Stellen kann man nun genau dieselbe Schlussfolgerung anwenden. Jedesmal, wenn die Variable  $x$  einen singulären Punkt umkreist, tritt im zugehörigen  $L$  ein Zeichenwechsel ein, und damit auch im zugehörigen Summanden  $s$ , auch in dem Falle, dass

$$f = \pm a, \quad k = 0$$

und also  $a$  eine singuläre Stelle ist, weil ja dann  $y$  in dem Summanden nicht mehr vorkommt.

Es dürfen also auch Summanden mit je zwei singulären Stellen nicht vorkommen. Es bleiben somit nur Summanden ohne singuläre Stellen, in denen

$$f = \pm e, \quad k = 0$$

ist; solcher Summanden giebt es aber höchstens zwei. Damit ist der Satz bewiesen:

Unter der Wirkung von Gravitationskräften ist eine elliptische Bewegung nur dann möglich, wenn dieselben nach den Brennpunkten gerichtet sind.

## § 20.

Der Schluss, dass, wenn  $S$  constant sein soll, auch die einzelnen Summanden  $s$  constant sein müssen, kann ohne jede Veränderung gemacht werden, auch wenn zu  $S$  noch  $\Sigma e(q\varrho + L^2)$  hinzugenommen wird. Es folgt also, dass, wenn  $S + \Sigma e(q\varrho + L^2)$  constant sein soll,  $S$  und  $\Sigma e(q\varrho + L^2)$  einzeln constant sein müssen; und hieraus folgt der allgemeinere Satz:

Unter der Wirkung von Gravitationskräften  $\left(\frac{g}{L^2}\right)$  und

Elasticitätskräften ( $mL$ ) ist eine elliptische Bewegung nur dann möglich, wenn die ersteren nach den Brennpunkten gerichtet sind, und wenn die Centren der letzteren so verteilt sind, dass ihr Schwerpunkt der Ellipsenmittelpunkt ist.

**Anmerkungen.**

## § 1.

1) Unter einer elementaren Behandlungsweise ist eine solche verstanden, welche weder die Kenntniss der Kegelschnitte voraussetzt noch auch Verhältnisse unendlich kleiner Grössen benutzt.

In diesem Sinne scheint eine elementare Ableitung des Gravitationsgesetzes noch nicht gegeben zu sein. Die meisten derjenigen Autoren, welche eine solche zu geben beabsichtigen, scheitern an der elementaren Berechnung des Krümmungsradius, so z. B. Schellbach (*Neue Elemente der Mechanik* S. 267), der den Krümmungsradius nach einem Verfahren berechnet, das von dem der Differentialrechnung nur in der Bezeichnungsweise abweicht; Rodet, der wegen des Krümmungsradius auf Salmon verweist (*Nouv. Ann. de math.* XII 1883), und Helm, der zwar ausdrücklich erklärt, den Krümmungsradius vermeiden zu wollen, der aber wenigstens den Begriff desselben nicht entbehren kann. (*Grunert's Archiv* Bd. 63, S. 326. 1879.). Vermieden ist der Krümmungsradius in der eleganten Methode von Resal, die aber nicht elementar ist, weil die Beschleunigung durch einen unendlich kleinen Bogen dargestellt ist, und der Satz benutzt wird, dass die Beschleunigung in der Bahn gleich der Geschwindigkeit im Hodographen ist. (*Resal, traité de cinématique pure.* 1892. S. 31.)

Whitworth endlich (*The messenger of math.* Vol, S. 160. 1871) benutzt die Methode der orthogonalen Projection und legt seiner Betrachtung die von Newton gegebene Lösung des Problemes von der kreisförmigen Bewegung um ein beliebiges Attractionscentrum zu Grunde; aber eine solche kreisförmige Bewegung selbst ist bisher elementar nicht behandelt worden.

Es ist auffallend, dass, während die meisten elementaren Lehrbücher der Physik die elliptische Bewegung um den Mittelpunkt nach der Methode der orthogonalen Projection behandeln, sich die entsprechende Behandlungsweise für die Planetenbewegung in keinem derselben findet.

Newton. Principia. Prop. VII Probl. II.

Dieselbe Aufgabe wird von Jullien gestellt. (*Problèmes de*

mécanique rationnelle 1866. S. 340.) Er giebt aber das Newtonsche Resultat in algebraischer Form. Dass dasselbe auch von Whitworth übernommen wird, ist bereits erwähnt.

3) Dieses Hilfstheorem ersetzt folgendes schwierigere Hilfstheorem Newton's (Prop. VII. Probl. II. Cor. 3):

Vis qua corpus  $P$  in orbe quocunque circum virium centrum  $S$  revolvitur, est ad vim qua corpus idem  $P$  in eodem orbe, eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum  $R$  revolvi potest, ut  $SP \times RP^2$ , contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro  $S$  et quadrato distantiae eius a secundo virium centro  $R$ , ad cubum rectae  $SG$ , quae a primo virium centro  $S$  ad orbis tangentem  $PG$  ducitur et corporis a secundo virium centro distantiae  $RP$  parallela est.

4) Principia. Prop. I. Theor. I.:

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere et esse temporibus proportionales.

5) Die erstere dieser beiden Formen enthält den für die kreisförmige Bewegung specialirten Moivre'schen Satz; die zweite wird — abgesehen von dem constanten Factor — von Newton angegeben.

Dass auch der allgemeine Moivre'sche Satz selbst:

Sit  $MPO$  curva quaecunque data,  $PG$  radius concavitas  
. . . erit vis centripeta ubique proportionalis quantitati

$$\frac{SP}{PG \cdot ST^3} \quad (\text{s Fig. 9.})$$

in derselben Weise für jede beliebige Curve abgeleitet werden kann, wenn man unter dem im Texte angenommenen Kreise den Krümmungskreis einer beliebigen Curve versteht, — ist selbstverständlich. Moivre selbst beweist einen Satz (Moivre Miscellanea analytica. Lib. VIII, 1790) nach zwei Methoden. Die letztere war ihm von Joh. Bernoulli brieflich (1706) mitgeteilt worden. In derselben heisst es: . . . notum est radium concavitatis  $PG$  esse ad  $PQ$  ut  $PQ$  ad  $QL$ . Man wird nicht übersehen, dass an Stelle von  $PG$  stehen müsste  $2PG$ .

Ein anderer — freilich sehr umständlicher — Beweis des Moivre'schen Satzes findet sich bei Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1879, Bd. I, S. S. 375). Uebrigens kann den verschiedenen (z. B. bei Schell l. c. zusammengestellten Ausdrücken

derjenigen Centralkraft, unter deren Wirkung ein frei beweglicher Punkt eine gegebene Curve durchläuft, noch folgender einfache Ausdruck hinzugefügt werden:

$$P = - \frac{e^2}{x^2} \frac{d^2 \left( \frac{1}{x} \right)}{dn^2}$$

in welchem  $n = \frac{y}{x}$  gesetzt ist. Man findet denselben, wenn man aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = xP, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = yP$$

mit Hilfe der Gleichung

$$ydx - xdy = cdt$$

die Zeit eliminirt. Es wird nämlich

$$cd \left[ \frac{dx}{ydx - xdy} \right] = xP \frac{ydx - xdy}{c} \quad \text{oder}$$

$$d \left[ \frac{d \frac{1}{x}}{dn} \right] = - \frac{x^2 P dn}{c^2}, \quad \text{also}$$

$$P = - \frac{c}{x^2} \frac{d^2 \left( \frac{1}{x} \right)}{dn^2}$$

6) Newton. Princ. Prop. XI, Probl. VI

7) Whitworth, welcher (l. c.) ebenfalls die orthogonale Projection anwendet, bestimmt nicht die Lage der Projectionsebene; daher braucht er den Satz

$$AA_1 \cdot PP_1 = DD_1^2 \quad (\text{s. Fig. 10}).$$

8) Führt man die im Text angegebene Projection aus, so erhält man eine bei  $P_1$  rechtwinklige Ecke (s. Fig. 11) ( $F - BP_1P$ ) und also ist ( $\alpha = PBP_1$ )

$$\sin \alpha = \frac{\sin PFP_1}{\sin (PFB)}$$

und da nach Voraussetzung

$$\sin \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\sin (MPF)}{\sin (PFB)}$$

ist, so folgt

$$\sin PFP_1 = \sin MPF$$

und also  $\triangle PFP_1 \cong \triangle PFG$ ; folglich

$$PG = PP_1 \quad \text{und} \quad FG = FP_1 \quad (\text{q. e. d.})$$

§ 2.

1) Principia. Prop. XVII. Probl. IX.

Newton nimmt eine Bahn als gegeben an, und aus dieser lehrt er, bei gegebenen Anfangsbedingungen die gesuchte finden.

Moivre's Construction (Misc. Lib. VIII) ergibt sich leicht aus den im Texte gegebenen Gleichungen. Er nimmt diejenige Geschwindigkeit ( $v_0$ ) als gegeben an, bei welcher der Körper einen Kreis beschreiben würde, und da

$$v_0^2 = \frac{g}{r}$$

ist, so folgt

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{r_1}{a} = \frac{2r_1}{r + r_1}$$

Wenn diese Gleichung auf die Anfangsstellung bezogen wird, so ist  $r_1$  die einzige Unbekannte.

Resal's Construction (Mécanique générale I, S. 67. 1873) enthält zwar in ihrer Begründung alle die Resultate, welche die im Texte gegebene Construction ermöglichen, aber dieselben sind nicht elementar abgeleitet, und die aus ihnen geschlossene Construction ist wenig elegant.

Schellbach's Construction (Crelle Bd. 80, S. 194. 1875) ist ausserordentlich einfach und elegant. Die Begründung derselben ist aber nicht elementar. Ausserdem hat die von ihm benutzte Hilfsgrösse

$$e = \frac{k}{v^1 q^1}$$

keine physikalische Bedeutung.

Schell (l. c. S. 376) zerlegt die nach dem Brennpunkt ( $F$ ) gerichtete Beschleunigung  $\frac{\mu}{r_0^2}$  in zwei Componenten. Die normale Componente: (s. Fig. 12)  $\frac{\mu}{r_0^2} \cos \beta$  ist gegeben, und da sie auch durch  $\frac{v_0^2}{\rho}$  ausgedrückt wird, so kennt man auch  $M_0 C = \rho$ ; und durch zweimalige Projection findet man denjenigen Punkt  $Q$  auf  $M_0 C$ , welcher zugleich der grossen Axe  $FQ$  angehört.

2) Elementar lässt sich diese Formel folgendermassen beweisen; (s. Fig. 11.)

Für die Beschleunigung ( $\alpha$ ) in der kreisförmigen Bewegung hat man die Proportion:

$$1) \quad \varphi : PF = \frac{v^2}{2} : FG. \quad (\S 1.)$$

Bezeichnet man die Projection von  $v$  mit  $v_1$ , so ist

$$2) \quad v : v_1 = PD : P_1D$$

Da nun, wie oben bewiesen

$$PP_1 = PG (= LF)$$

ist, so folgt

$$PP_1 : PD = ML : MP \quad \text{und}$$

$$\triangle PP_1D \sim \triangle MLQ, \quad \text{also}$$

$$3) \quad PD : P_1D = a : LQ$$

also ergibt die Gleichung 2):

$$4) \quad v^2 : v_1^2 = a^2 : FG \cdot F_1G_1$$

und da das Verhältniss  $\varphi : PF$  bei der Projection seinen Wert nicht ändert, so kann es durch  $\frac{g}{r^2}$  ersetzt werden, wenn unter  $r$  der Radius-Vector  $FP_1$  verstanden wird. Endlich ist zu bemerken, dass

$$PG = r (= FP_1) \quad \text{und} \quad F_1G_1 = r_1 (= F_1P_1)$$

gesetzt werden muss. Somit ergibt die Gleichung 1) durch Substitution aus 4):

$$\frac{g}{r^2} = \frac{v_1^2 a}{r^2 r_1} \quad \text{oder}$$

$$v_1^2 = \frac{gr_1}{ar} \quad (q. e. d.)$$

3) Die Wichtigkeit dieser Hilfsgrösse ( $k$ ) scheint Schellbach nach der Veröffentlichung seiner Arbeit erkannt zu haben. Wenigstens findet sie sich in dem Referat über seine Arbeit (Fortschritte der Math. Bd. 7, S. 566), und nach den dort ohne Beweis angegebenen Formeln ergibt sich die im Text angegebene Construction unmittelbar.

### § 3.

1) Diese für den Kreis geltende Gleichung kann nach derselben Methode bewiesen werden, wie sie Glaisher auf die entsprechende für die Ellipse geltende Gleichung anwendet. *Monthly Notices of the royal astron. Soc.* 1878. Bd. 39, S. 79.)

2) Diese Gleichung lässt sich am leichtesten trigonometrisch beweisen: (s. Fig. 3.)

$$PE = \varrho = a(\cos \beta + \cos \varphi) = 2a \operatorname{ces} \frac{1}{2}(\beta + \varphi) \cos \frac{1}{2}(\beta - \varphi)$$

$$PG_1 = p_1 = a(1 + \cos \beta - \varphi) = 2a \cos^2 \frac{1}{2}(\beta - \varphi)$$

$$PG_2 < p_2 = a(1 + \cos \beta - \varphi) = 2a \cos^2 \frac{1}{2}(\beta + \varphi)$$

$$\sqrt{p_1 p_2} = 2a \cos \frac{\beta - \varphi}{2} \cos \frac{\beta + \varphi}{2} = \rho \quad (\text{q. e. d.})$$

Fällt man noch vom Attractionscentrum ( $F$ ) auf die Tangente in  $P$  die Senkrechte  $FC$  (oder  $s$ ) und von  $M$  die Senkrechte  $MH$  auf  $FC$ , so erhält man

$$s = a + FM \cos \varphi \quad \text{oder da} \quad FM = \frac{a}{\cos \beta} \quad \text{ist,}$$

$$s = \frac{a}{\cos \beta} (\cos \beta + \cos \varphi) = \frac{\rho}{\cos \beta}, \quad \text{also} \quad \cos \beta \text{ d. h. } \frac{\rho_0}{a} = \frac{\rho}{s}$$

Dies ist die erste Gleichung des Textes.

3) Proceedings of the royal Irish Academy, vol. III, p. 308 Nov. 1847.

Sir William R. Hamilton stated the following theorems of central forces, which he had proved by his calculus of quaternions, but which, as he remarked, might be also deduced from principles more elementary:

If a body be attracted to a fixed point, with a force which varies directly as the distances from that point, and inversely as the cube of the distance from a fixed plane, the body will describe a conic section, of which the plane intersects the fixed plane in a straight line, which is the polar of the fixed point with respect to the conic section.

Im Text ist die Umkehrung dieses Satzes bewiesen, jedoch unter der Voraussetzung, dass die Bahn auf eine Ebene beschränkt sei. Dieselbe specielle Umkehrung ist geometrisch aber nicht einfach und nicht elementar von Casey bewiesen (Quarterly Journal of math. 1862 p. 233) und von Glaisher (l. c.) mit Anwendung des schon in § 1 unter 3) citirten Satzes von Newton (Prop. VII. Probl. II).

Die von Hamilton angedeuteten „principles more elementary“ finden sich für den directen und allgemeinen Satz selbst in § 4 angegeben.

4) Comptes Rendus. Bd. 84. S. 760.

Darboux legt der Berechnung derjenigen Centrakraft, unter deren Wirkung ein frei beweglicher Punkt einen Kegelschnitt durchläuft, die Formel von Binet

$$F = \frac{C^2}{r^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\omega^2} \right)$$

zu Grunde. Dasjenige seiner zwei Resultate, auf welches im Texte Bezug genommen wird, spricht er in folgender Weise aus:

Nous aurons pour l'expression de la force

$$5) F = \frac{\mu}{r^2(\alpha \cos 2\omega + \beta \sin 2\omega + h)^{3/2}}$$

et pour équation de la trajectoire:

$$\frac{1}{r} = a \cos \omega + h \sin \omega + \mathcal{G} \sqrt{\alpha \cos 2\omega + \beta \sin 2\omega + h}$$

Cette formule, contenant trois constantes arbitraires  $a$ ,  $h$ ,  $\mathcal{G}$ , ne figurant pas dans l'expression de la force, est donc l'équation la plus générale de la trajectoire, quand la force est représentée par l'équation 5).

Dass das im Text angegebene Kraftgesetz auch durch Darboux Gleichung 5) ausgedrückt wird, erkennt man am leichtesten aus den weiteren Entwicklungen, in denen es heisst) S. 938):

Enfin si l'on exprime les deux lois trouvées en introduisant les coordonnées rectilignes au lieu des coordonnées polaires, on obtient les deux formules:

$$8) F = \frac{\mu r}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{3/2}}$$

$$9) F = \frac{\mu r}{(ax + by + c)^2}$$

Eine elementare Ableitung des Satzes von Darboux scheint nirgends versucht worden zu sein. Daher kommt es auch, dass die einfache Formel für die Umlaufzeit sich nirgends findet.

#### § 4.

1) Comptes Rendus. Bd. 84. S. 762.

L'équation:

$$\frac{1}{r} = a \cos \psi + b \sin \omega + \sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H}$$

contenant trois constantes  $A$ ,  $B$ ,  $H$  ne figurant pas dans l'expression de la force

$$F = \frac{\mu}{r^2 \left( \frac{1}{r} - a \cos \omega - b \sin \omega \right)^2}$$

représente la trajectoire la plus générale qu'un point matériel puisse décrire sous l'action de cette force.

2) Battaglini (Giornale di matematiche; vol. XVII. 1879. S. 49) leitet aus der Gleichung des Kegelschnitts:

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 (= P^2)$$

die Kraft

$$F = \frac{Kr}{r^3}$$

ferner die Geschwindigkeitscomponenten  $\xi\eta$  ab; er drückt dann die Constanten des Kegelschnitts  $\mu\nu$  durch die gegebenen Anfangsbedingungen aus und findet als Kriterium für die Art des Kegelschnitts:

$$\frac{\alpha^2 x_0}{\alpha(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) + \gamma\eta_0} + \frac{\beta^2 y_0}{\beta(x_0\eta_0 - y_0\xi_0) - \gamma\xi_0} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{P_0}{(x_0\eta_0 - y_0\xi_0)}$$

Eine Deutung dieses Resultates wird von ihm nicht versucht.

### § 5.

Das in diesem § angegebene Integrationszeichen lässt sich auf Newton's Centralbewegung übertragen und giebt alsdann eine Methode, welche schneller als die sonst übliche zum Ziele führt.

Die Sätze von Hamilton und von Darboux durch directe Integrationen nachzuweisen, und die Art des Kegelschnitts zu bestimmen, welcher unter den von Darboux angegebenen Bedingungen durchlaufen wird, — scheint nirgends versucht zu sein.

### § 6.

1) Comptes Rendus. 1877. Bd. 84. S. 671.

2) Comptes Rendus. 1877. Bd. 84. S. 939.

3) l. c : La solution du problème rentre dès lors dans la théorie classique.

4) Freilich setzt der im Text gegebene Beweis voraus, dass die Attraction eine Function der Entfernung sei. Man braucht aber nur zu berücksichtigen, dass, wie im Texte angegeben ist, unter den Ellipsen sich auch alle die Kreise befinden müssen, deren Mittelpunkt mit dem Attractionscentrum zusammenfällt; und man weiss, dass in solchen Kreisbahnen die Centralkraft constant ist. Folglich ist dieselbe nicht sowol eine Function von den Coordinaten, als vielmehr blos von der Entfernung ( $r$ ). Somit ist auch unter der allgemeinen Voraussetzung, die Bertrand aufstellt, das Gesetz von Newton ohne jede Rechnung nachgewiesen.

5) Comptes Rendus. Bd. 84, S. 760 und 936.

6) Comptes Rendus. Bd. 84, S. 939.

7) Mémoires de la Société des sciences phys. et nat. à Bordeaux IV (2). S. 31—40.

8) Monthly Notices of the royal Astr. Society. Bd. 39. 1878. S. 79.

## § 7.

1) Grunert's Archiv. Bd. 66. S. 107. („Eine weitere Forderung ist, dass  $v$  eindeutige Function von  $r$  sei.) Man wird nicht übersehen, dass der Formel für das Potential ( $v$ ) als Nebenbedingung für ihre Gültigkeit irrtümlicher Weise hinzugefügt ist (in Formel 9):

$$-\frac{e^2}{a} < \alpha < \frac{c^2}{a}$$

Dieser Zusatz sagt gerade das Gegenteil aus von dem, was ausgesagt werden sollte. Es hätte heissen müssen:

$$\alpha^2 > \left(\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Uebrigens ist das Resultat nachher (S. 329) richtig gedeutet.

2) Legendre. Traité des fonctions elliptiques. 1825. Bd. I. p. 349:

D'un point quelconque pris dans l'intérieur de la développée de l'ellipse il est toujours possible de mener quatre normales à la circonférence de l'ellipse; de tout point pris hors de l'aire de cette courbe on n'en pourra mener que deux et d'un point pris sur le contour de cette courbe, on pourra toujours faire passer trois normales.

## § 10.

1) Diese Voraussetzung lässt Hoppe (l. c.) nicht zu. Bei den grossen Planeten z. B. sind die Intervalle, in denen die Entfernungen von der Sonne variiren, von einander getrennt und (S. 329)

obgleich das Anziehungsgesetz wegen Ungleichheit der Constanten in Bezug auf beide verschieden formulirt ist, so lässt sich die eine Function ohne Widerspruch als Fortsetzung der andern ansehen.

Dieser Satz ist nur dann richtig, wenn von zwei Functionen, die in getrennten Intervallen irgend wie definirt sind, stets die eine als Fortsetzung der andern angesehen werden darf, wenn also der Begriff der analytischen Function in physikalischen Untersuchungen nicht zugelassen wird.

Greifen hingegen, wie vielfach bei den kleinen Planeten, die Intervalle für  $r$  über einander, so bildet die Identität der Ausdrücke in den sich deckenden Intervallteilen eine neue Bedingung, an deren Erfüllung, so lange irrationale Wurzeln darin vorkommen, gewiss nicht gedacht werden kann.

Durch diesen Satz scheint eine Schwierigkeit mehr verschleiert als beseitigt zu werden.

Für die im Texte gemachte Voraussetzung kann man sich auf Newton's Autorität berufen, der das aus einer oder mehreren elliptischen Bewegungen abgeleitete Gesetz auch für diejenigen Entfernungen gelten lässt, die sich der Beobachtung entziehen.

### § 11.

1) *Giornale di matematiche.* Bd. XVIII. S, 272.

Dainelli stellt die Aufgabe:

*Conoscendo la trajetoria di un punto mobile. trovare le componenti della forza, che la sollecita espresse in funzione delle coordinate del mobile.*

Diese Aufgabe ist unbestimmt, da noch die Geschwindigkeit beliebig angenommen werden darf. Daher geht in die Lösung derselben eine willkürliche Function ein.

2) Sturm. *Cours de mécanique.* Leçon 20 (256).

3) *Comptes Rendus.* Bd. 88, S. 909—911, oder *Atti di Torino.* Bd. XIV, 1879. S. 750.

Siacci stellt folgenden Satz auf:

Quando un punto percorre una linea piana, se si decompono la forza in due, l'una passante per un punto fisso qualunque, l'altra secondo la tangente della curva etc.

Die tangentielle Richtung für die eine Componente wird auch von Battaglini beibehalten (*Giorn. d. mat.* 1879, Bd. XVII), welcher die von Siacci gestellte Aufgabe für einen Kegelschnitt löst, dessen Gleichung

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \text{ ist.}$$

Siacci, Battaglini und Dainelli scheinen sich die Rechnungen dadurch zu erschweren, dass sie nicht die Geschwindigkeit ( $v$ ) selbst als willkürliche Function annehmen. Freilich muss man sich  $v$  als eine solche Function der Coordinaten denken, die, wenn auch die Coordinaten zu ihren Anfangswerten zurückkehren, nicht

notwendig selbst ihren ursprünglichen Wert wieder erreicht, da ja sonst die Bewegung in einer geschlossenen Curve periodisch sein müsste.

Siacci setzt

$$x dy - y dx = T^2 dt$$

Hier ist  $T$  die willkürliche Function. Die Componenten der Beschleunigung findet er:

$$F_1 = \frac{r}{D^3} \frac{T^3}{\rho} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{T}{D^3} \frac{dT}{ds} \left( v = \frac{T}{D} \right)$$

wo  $F_1$  die nach dem festen Punkte  $O$  gerichtete,  $F_2$  die tangentielle Componente bedeutet.

Dieses bei Battaglini und Dainelli wiederkehrende Resultat kann man fast ohne Rechnung folgendermassen ableiten:

Nach dem in § 1. gegebenen Hilfssatze wird  $F_1$  durch eine Gerade dargestellt, deren Endpunkt mit dem von  $\frac{v^2}{\rho}$  auf einer zur Tangente parallelen Geraden liegt, also ist

$$F_1 : \frac{v^2}{\rho} = r : D, \quad \text{d h} \quad F_1 = \frac{v^2 r}{\rho D}$$

Durch diese Componente  $F_1$  allein würde  $v$  so geändert (um  $d_0 v$ ) dass

$$v dD + D d_0 v = 0$$

wäre. Wenn sich nun die Geschwindigkeit um  $dv$  ändert, so muss der Ueberschuss

$$d_1 v = dv - d_0 v = dv + \frac{v dD}{D}$$

durch eine tangentielle Kraft hervorgebracht werden, deren Grösse (wie in der Huyghen'schen Formel):

$$F_2 = v \frac{d_1 v}{ds} = \frac{v}{D} \frac{d(vD)}{ds}$$

sein muss.

Battaglini setzt für den von ihm behandelten Kegelschnitt:

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad \mu x = P \cos \vartheta, \quad \nu y = P \sin \vartheta$$

und sieht  $\vartheta$  als willkürliche Function der Zeit an. Durch zweimaliges Differentiiren der Coordinaten nach der Zeit findet er die Componenten  $X, Y$ , jede als eine Summe zweier Kräfte ausgedrückt.

Es erscheint also wie ein Zufall, dass sich die Summanden so ergeben haben, dass zwei sich zu einer Kraft zusammensetzen, welche nach dem Coordinatenanfangspunkte gerichtet ist, während die zwei anderen eine tangentielle Kraft ergeben.

Dainelli definiert die willkürliche Function  $f$  durch die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \pm k \frac{d\varphi}{dy} f, \quad \frac{dy}{dt} = \mp k \frac{d\varphi}{dx} f$$

in denen  $\varphi xy = 0$  die Gleichung der Curve ist.

Dass diese Wahl nicht eine glückliche war, scheint sich im Verlaufe der Rechnungen an der Stelle zu zeigen, wo es heisst (Bd. XIX, S. 171)

„Prendiano ora la funzione arbitraria  $f$  della forma seguente:

$$f = \frac{T}{x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy}}$$

dove  $T$  indica una funzione pure arbitraria delle coordinate  $xy$ .“

Da nämlich

$$D = \left( x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} \right) : \sqrt{\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2} \quad \text{und}$$

$$v^2 = k^2 f^2 \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \right]$$

ist, so ergibt sich:

$$v = \frac{kT}{D}$$

und diese Function  $T$  ist dieselbe wie bei Siacci und freilich nicht wesentlich complicirter als die Geschwindigkeit selbst. Aber der lange Umweg wäre vermieden, wenn die Geschwindigkeit selbst von vornherein als die willkürliche Function genommen wäre.

4) Alle diese Aufgaben sind ausführlich von Dainelli (l. c.) behandelt worden. Es tritt aber bei seiner Behandlungsweise nicht hervor, dass dieselben sämtlich darauf hinauslaufen, die normale Kraft  $\frac{v^2}{\rho}$  in gewisse zwei Componenten zu zerlegen. Die von Huyghens gegebenen Componenten findet er nach ziemlich umständlichen Rechnungen (Bd. XIX, S. 179). Nach der im Texte gegebenen Methode lassen sich die Aufgaben von Dainelli sehr leicht behandeln.

5) Diese Aufgabe findet sich bei Schell (l. c. S. 324). Aber das daselbst angegebene Resultat:

$$F_1 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2; \quad F_2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right)$$

ist im Sinne des Textes keine Lösung der Aufgabe, da die Zeit noch nicht eliminirt ist. Uebrigens erhält man aus dem Resultate des Textes die von Schell gegebenen Gleichungen, wenn man

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad D = \frac{r^2 d\vartheta}{ds}, \quad \varrho = \frac{r dr}{dD}$$

setzt

6) Schell. l. c. S. 375.

### § 13.

1) The messenger of mathematics. X. S. 3.

2) Der Beweis dieses Satzes findet sich bei Schell S. 375.

3) Diese Gleichungen bilden auch bei Curtis den Ausgangspunkt. Im übrigen hat seine Methode mit der des Textes nichts gemein. Als Bedingung dafür, dass unter Wirkung der Kräfte  $F$  die gegebene Bahn möglich sei, findet er:

$$\Sigma c \Phi d \left( \frac{F}{\varphi} \right) = 0$$

### §§ 14—20

Die in diesen §§ behandelte Frage scheint nirgends aufgestellt worden zu sein.

XVII.

Miscellen.

---

1.

**Lineare Relationen zwischen Mengen relativer Primzahlen.**

1.

Aus der einfachen Beziehung zwischen den Mengen relativer Primzahlen  $\varphi(t)$

$$\sum \varphi(t) = n$$

oder

$$\frac{1}{n} \sum \varphi(t) = 1 \tag{1}$$

wo sich die Summirung auf alle Teiler  $t = \sum \leq n$  von  $n$  bezieht, lassen sich sehr allgemeine Relationen ableiten, in welchen die Stellenvariable die natürliche Zahlenreihe durchläuft.

Zufolge (1) besteht nämlich die Identität

$$\begin{aligned} & A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_m \\ = & \frac{\varphi(1)}{1} A_1 + \frac{\varphi(1) + \varphi(2)}{2} A_2 + \frac{\varphi(1) + \varphi(3)}{3} A_3 + \dots \\ & \dots + \frac{\sum \varphi(t)}{n} A_n + \dots + \frac{\sum \varphi(t)}{m} A_m \end{aligned}$$

woraus nach Ordnung nach den  $\varphi$  der aufeinander folgenden Zahlen die allgemeine Relation

$$\begin{aligned} & A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_m \\ = & \left( \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} + \dots + \frac{A_m}{m} \right) \varphi(1) \\ + & \left( \frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{4} + \frac{A_6}{6} + \dots \right) \varphi(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{A_3}{3} + \frac{A_6}{6} \dots \right) \varphi(3) \\
& \dots \dots \dots \\
& \left( \frac{A_n}{n} + \frac{A_{2n}}{2n} \dots \right) \varphi(n) \\
& \dots \dots \dots \\
& + \frac{A_m}{m} \varphi(m) \tag{2}
\end{aligned}$$

hervorgeht.

Das Bildungsgesetz der als Factor irgend eines  $\varphi(n)$  auftretenden endlichen Reihe ist ein leicht erkennbares: es erscheinen als Glieder nur solche  $A$ , deren Zeiger Vielfache von  $n$  und  $\leq m$  sind.

Werden den  $A$  bestimmte Werte erteilt, so gehen specielle Relationen hervor, von welchen einige die Eigenschaft der Summirbarkeit der Coefficienten von  $\varphi$  besitzen.

Es zeigt sich unter anderem, dass manche bekannte Beziehung zwischen den  $\varphi$  aus der gemeinsamen Quelle, der Formel Nr. 2. herkommt.

2.

$$A_n = 1.$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{m} \\
& + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right) \frac{\varphi(2)}{2} \\
& + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor} \right) \frac{\varphi(3)}{3} \\
& \dots \dots \dots \\
& + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor} \right) \frac{\varphi(n)}{n} \\
& \dots \dots \dots \\
& + \frac{\varphi(m)}{m} \tag{3}
\end{aligned}$$

wo  $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$  die grösste in  $\frac{m}{n}$  enthaltene ganze Zahl vorstellt.

3.

$$A_n = n.$$

$$\begin{aligned} \frac{m^2 + m}{2} &= m\varphi(1) + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \varphi(2) + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor \varphi(3) \dots \\ &\dots + \varphi(k) + \varphi(k+1) \dots + \varphi(m) \end{aligned} \tag{4}$$

$$k > \frac{m}{2}$$

Wird  $m$  der Reihe nach  $= 1, 2, 3, \dots, r$  genommen, so entsteht ein System von  $r$  Gleichungen, aus welchen sich

$$\varphi(s) = \left| \begin{array}{cccccccc} 1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & \binom{2}{2} \\ 2, & 1, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dots & \binom{3}{2} \\ 3, & \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor, & 1, & \dots & 9, & 0, & \dots & \binom{4}{2} \\ \dots & \dots \\ n, & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, & \dots & 1, & 0, & \dots & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots \\ r, & \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, & \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor, & \dots & \left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor, & \left\lfloor \frac{r}{n+1} \right\rfloor, & \dots & \binom{r+1}{2} \end{array} \right| \tag{5}$$

ergibt, womit die zahlentheoretische Function „ $\varphi$ “ durch die zahlentheoretische Functionen  $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$  ausgedrückt erscheint;  $p \geq q$  durchlaufen hierbei alle Werte von 1 bis  $r$ .

4.

$$A_n = n^r. \quad r > 1 \text{ ganzl. Zahl.}$$

$$\begin{aligned} 1^r + 2^r + 3^r \dots + m^r \\ &= (1^{r-1} + 2^{r-1} \dots + m^{r-1})\varphi(1) \\ &+ (2^{r-1} + 4^{r-1} \dots) \varphi(3) \\ &+ (3^{r-1} + 6^{r-1} \dots) \varphi(3) + \dots \end{aligned}$$

woraus nach Summirung der Potenzen mittelst der Bernoulli'schen Function  $B$

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+1} B_{r+1}(m+1) - B_r(m+1) &= 2^{r-1} B_r\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right) \varphi(2) \\ &+ 3^{r-1} B_r\left(\left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + 1\right) \varphi(3) + 4^{r-1} B_r\left(\left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor + 1\right) \varphi(4) \dots \end{aligned} \quad (6)$$

hervorgeht.

5.

$$A_n = \binom{m}{n-1}.$$

$$\begin{aligned} 2^{m+1} - \frac{2^{m+1} - 1}{m+1} \varphi(1) &+ \left( \frac{1}{2} \binom{m}{2} + \frac{1}{4} \binom{m}{3} \dots \right) \varphi(2) \\ &+ \left( \frac{1}{3} \binom{m}{2} + \frac{1}{6} \binom{m}{5} \dots \right) \varphi(3) \\ &\dots \\ &+ \frac{1}{m+1} \binom{m}{m} \varphi(m) \end{aligned}$$

Beiderseits mit  $m+1$  multiplicirt und  $m-1$  für  $m$  geschrieben, ergibt

$$\begin{aligned} 1 + (n-1)2^m - \left( \binom{m}{2} + \binom{m}{4} \dots \right) \varphi(2) \\ + \left( \binom{m}{3} + \binom{m}{6} \dots \right) \varphi(3) \\ \dots \\ + \binom{m}{m} \varphi(m-1) \end{aligned} \quad (7)$$

Werden die Coefficienten der  $\varphi$  mittels der Formel

$$\binom{m}{r} + \binom{m}{2r} + \binom{m}{3r} \dots = \frac{2^m}{r} \sum_{v=1}^{r-1} \cos^m \frac{v\pi}{r} \cos \frac{v\pi m}{r} + \frac{2^m}{r} - 1$$

summirt, wodurch sie des zahlentheoretischen Charakters entkleidet werden, so findet sich

$$\begin{aligned} (2^{m-1} - 1) \varphi(2) &+ \left[ \frac{2^m}{3} \sum_{v=1}^2 \cos^m \frac{\pi v}{3} \cos \frac{\pi v m}{3} + \frac{2^m}{3} - 1 \right] \varphi(3) \\ &+ \left[ \frac{2^m}{4} \sum_{v=1}^3 \cos^m \frac{\pi v}{4} \cos \frac{\pi v m}{4} + \frac{2^m}{4} - 1 \right] \varphi(4) \\ &\dots \\ &+ \left[ \frac{2^m}{r} \sum_{v=1}^{r-2} \cos^m \frac{\pi v}{r} \cos \frac{\pi v m}{r} + \frac{2^m}{r} - 1 \right] \varphi(r) \\ &\dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left[ \frac{2^m}{m} \sum_{v=1}^{m-1} \cos^m \frac{\pi v}{m} \cos \frac{\pi m v}{m} + \frac{2^m}{m} - 1 \right] \varphi(m) \\
 &= 1 + (m - 1)2^m \dots
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Nimmt man diese Relation für  $m = 2, 3, \dots, r$  in Anspruch, so erhält man  $r - 1$  Gleichungen, woraus sich  $\varphi(r)$  in Form einer aus stetigen Functionen gebildeten Determinante ergibt.

6.

$$A_n = \frac{1}{n^r}, \quad m = \infty, \quad r \text{ ganze Zahl.}$$

$$\sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^r} \equiv S_r = S_{r+1} \varphi(1) + \frac{1}{2^{r+1}} S_{r+1} \varphi(2) + \frac{1}{3^{r+1}} S_{r+1} \varphi(3) \dots,$$

woraus die bekannte Beziehung

$$\sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v^{r-1}} = \frac{S_r}{S_{r+1}} \dots \tag{9}$$

hervorgeht.

7.

$$A_n = z^n, \quad m = \infty, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{z}{1-z} = \log \frac{1}{1-z} \varphi(1) + \log \frac{1}{1-z^2} \varphi(2) \dots,$$

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \varphi(v) \log \frac{1}{1-z^v} \dots \tag{10}$$

$$|z| < 1$$

oder

$$\prod_{v=1,2,\dots}^{\infty} (1-z^v)^{\varphi(v)} = e^{-\frac{z}{1-z}}, \quad |z| < 1, \dots \tag{11}$$

8

$$A_n = n^r z^n, \quad m = \infty, \quad |z| < 1, \quad r > 1 \text{ positiv und ganz.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n \equiv P_r(z)$$

$$= P_{r-1}(z) \varphi(1) + 2^{r-1} P_{r-1}(z^2) \varphi(2) + 3^{r-1} P_{r-1}(z^3) \varphi(3) + \dots$$

oder

$$P_r(x) = \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} v^{r-1} P_{r-1} \varphi(v) \dots \quad (12)$$

$$|z| < 1.$$

Die Reihen  $P_r(z)$  \*) können summirt werden, wenn man sich dieselben als Nullwerte des  $r$ ten Differentialquotienten vor

$$Z = e^{vz} + e^{2vz^2} \dots = \frac{e^{vz}}{1 - e^{vz}}$$

denkt. Für

$$P_r(z) = D_z^r \left\{ \frac{e^{vz}}{1 - e^{vz}} \right\}_{v=0}$$

findet sich mit Benutzung einer bekannten Formel von Hoppe ein Ausdruck, der auf gleichen Nenner gebracht die Form

$$P_r(z) = \frac{C_1 z + C_2 z^2 \dots + C_r z^r}{(1 - z)^{r+1}} \quad (13)$$

annimmt. Schreibt man diese Gleichung

$$(1^r z + 2^r z^2 + 3^r z^3 \dots) (1 - z)^{r+1} = c_1 z + c_2 z^2 \dots + c_r z^r$$

differentiirt  $k$ -mal bezüglich  $z$ , und setzt  $z = 0$ , so findet sich für den beliebigen Coefficienten  $C_k$  der Ausdruck

$$C_{k,r} = \binom{r+1}{0} k^r - \binom{r+1}{1} k^{r-1} + \binom{r+1}{2} k^{r-2} \dots$$

$$\dots + (-1)^{r-1} \binom{r+1}{k-1} 1^r; \quad k \leq r, \dots \quad (14)$$

$$C_{1,r} = 1$$

welcher die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt für  $k > r$  zu verschwinden.

Die Relation erhält jetzt folgende Gestalt

$$\frac{1}{(1-z)^{r+1}} \sum_{k=1}^{k=r} C_{k,r} z^k = \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{v^{r-1} \varphi(v)}{(1-z^v)^r} \sum_{k=1}^{k=r-1} C_{k,r-1} z^{kv}, \dots \quad (15)$$

$$r > 1, \quad |z| < 1.$$

\*) Allgemeinere Reihen dieser Reihen wurden vom Verfasser summirt in der Abhandlung: „Die Nullwerte höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen“. Archiv d. Math. u. Phys. (2). T. XI. p. 60 ff.

9.

$$A_n = \frac{z^n}{n^k}, \quad m = \infty, \quad |z| < 1, \quad k \text{ positive ganze Zahl.}$$

$$\xi_k(z) \equiv \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{z^v}{v^k} - \sum_{\lambda=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{k+1}} \xi_{k+1}(z^\lambda), \quad |z| < 1, \dots \quad (16)$$

10.

$$A_n = \frac{\cos 2\pi nx}{n^k}, \quad m = \infty, \quad k \text{ positive ganze Zahl.}$$

$$\sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi vx}{v^k} = \sum_{\lambda=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{k+1}} \sum_{\alpha=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \lambda \alpha x}{\alpha^{k+1}} \dots \quad (17)$$

Die zweite Summe rechter Hand lässt sich für ungerade  $k$  summieren mittelst der Function  $|x|$ , welche einen echten Bruch (die Nulle inbegriffen) bezeichnet, der entweder zu  $x$  addirt oder von  $x$  subtrahirt werden muss, um eine ganze Zahl zu erhalten

Es ist

$$\sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi vx}{v^{2h}} = (-1)^{h-1} \frac{(2\pi)^{2h}}{2(2h)!} B_{2h}(|x|) - S_{2h}, \dots \quad (18)$$

wo  $B_{2h}$  das Functionszeichen für die Bernoulli'sche Function  $2h$ ter Ordnung bedeutet.

Zufolge (9) ist aber

$$\sum_{\lambda=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} S_{2h} = S_{2h-1}$$

daher

$$\sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi vx}{v^{2h-1}} = (-1)^{h-1} \frac{(2\pi)^{2h}}{2(2h)!} \sum_{\lambda=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} B_{2h}(|\lambda x|) + S_{2h-1}, \dots \quad (19)$$

wo  $h > 1$  sein muss, weil sonst  $S_{2h-1}$  divergirt.

Die linksseitige Reihe kann, wie es der Verfasser in dem Aufsatze: „Ueber harmonische Reihen ungerader Ordnung“ [Archiv, (2) T. VIII. p 320 ff.] zeigte, in eine Potenzreihe umgewandelt werden, wenn

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

ist. Tritt an die Stelle von  $x$  die Function  $[x]$ , welche die kleinste Zahl darstellt, die entweder zu  $x$  addirt oder von  $x$  subtrahirt

werden muss, um eine ganze Zahl zu geben, so gilt diese Transformation für jedes  $x$ ; es ist dann

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^2}{(2h)!} \sum_{\lambda=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} B_{2h}(|\lambda x|) \\ &= (-1)^h \frac{S_{2h-3}}{2! (2\pi)^{2h-4}} [x]^2 \dots + \frac{S_5}{(2h-6)! (2\pi)^4} [x]^{2h-4} \\ & \quad - \frac{S_3}{(2h-4)! (2\pi)^2} [x]^{2h-4} \\ & + \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{2h-2} - \log 2\pi [x] \right) \frac{[x]^{2h-2}}{(2h-2)!} \\ & + \frac{2!}{1} \frac{S_2}{(2h)!} [x]^{2h} + \frac{4!}{2} \frac{S_4}{(2h+2)!} [x]^{2h-2} \dots \end{aligned} \quad (20)$$

## 11.

$$A_n = \frac{\cos 2\pi nx}{n^{2h}}, \quad n \text{ ungerade, } m = \infty.$$

$$\sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \nu x}{\nu^{2h}} = \sum_{\lambda=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h+1}} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \lambda \nu x}{\nu^{2h+1}}$$

Für die linksseitige Reihe erhält man mittelst der vom Verfasser in seiner „Theorie der Euler'schen Functionen“ (Sitzgs.-Ber. d. königl. böhmischen Ges. d. Wiss. 1893) abgeleiteten Formel (120) die Summe

$$(-1)^{h-1} \frac{1}{2(2h-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2h} E_{2h-1}(1-4[x])$$

wo  $[x]$  die obige Bedeutung hat; somit gilt

$$\sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \nu x}{\nu^{2h-1}} = \frac{(-1)^{h-1}}{2(2h-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2h} \sum_{\lambda=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{2h}} \cdot E_{2h-1}(1-4[\lambda x]) \dots \quad (21)$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Für  $h=1$  ist die linksseitige Reihe summierbar und zwar ist

$$\sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \nu x}{\nu} = \frac{1}{2} \log \cot \pi x$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

folglich besteht

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2} (1 - 4\{\lambda x\}) = \frac{8}{\pi^2} \log \cot \pi \{x\} . . . \quad (22)$$

$$0 < x < + \infty$$

wo

$$x = m + \{x\}, \quad m \text{ positive ganze Zahl,}$$

$$0 \leq \{x\} \leq \frac{1}{2}$$

giltig also für alle positiven  $x$ -Werte, welche höchstens um  $\frac{1}{2}$  grösser sind als eine ganze Zahl.

Barmen, December 1896.

Franz Rogel.

## 2.

## Ueber rationale Richtungscosinus.

Sind

$$\frac{x}{u}, \quad \frac{y}{u}, \quad \frac{z}{u}$$

die Richtungscosinus einer Geraden gegen 3 rechtwinklige Axen, so lassen sich (wie in Tl. LXI. S. 438 bewiesen) die ganzen Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  allgemein in 4 ganzen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  wie folgt darstellen:

$$x = 2(ac + bd); \quad y = 2(ad - bc); \quad z = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad (1)$$

$$u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (2)$$

und drücken demnach alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \quad (3)$$

in ganzen Zahlen aus. Hieraus folgt der Satz:

„Kennt man die Zerlegung einer ganzen Zahl  $u$  in die Summe von 4 Quadratzahlen, so ist auch die Zerlegung von  $u^2$  in die Summe von 3 Quadratzahlen bekannt.“

Nun hat Jacobi bewiesen, dass jede ganze Zahl die Summe von 4 Quadratzahlen ist. Folglich ist jede Quadratzahl die Summe von 3 Quadratzahlen; die Zerlegung selbst bleibt noch Problem.

Um indes für gegebene  $u$  alle Lösungen zu erhalten, ist es nicht nötig die geraden  $u$  zu berücksichtigen. Denn da  $x$  und  $y$  gerade

sind, so ist es auch  $z$ , und Gl. (3) lässt sich durch Division reduciren und zwar wiederholt, bis  $u$  ungerade wird.

Steht die Anzahl der Lösungen für ein ungerades  $u$  in Frage, so ist diese zunächst, wenn  $a, b, c, d$  von  $-\sqrt{u}$  bis  $\sqrt{u}$  variiren,

$$< (2\sqrt{u} + 1)^4$$

Da ein Vorzeichenwechsel von  $a, b, c$  oder  $d$  nur einen Vorzeichenwechsel und Vertauschung von  $x, y$  bewirkt, so brauchen deren Werte nur von 0 bis  $\sqrt{u}$  gezählt zu werden.

Weitere Reductionen ergeben sich, wenn man die Combinationen der  $a, b, c, d$  für

$$a \leq b \leq c \leq d$$

bildet und von deren Permutationen alle äquivalenten in  $x, y, z$  ausschliesst. Äquivalent zeigen sich die gleichzeitigen Permutationen je zweier Paare von Elementen, so dass die 24 Permutationen 6 Gruppen zu 4 äquivalenten ergeben. Die dann übrig bleibenden 6 Lösungen aus jeder Combination findet man leicht, indem man ein beliebiges der 4 Elemente unverändert lässt und nur die 3 übrigen permutirt. Die 6 Permutationen fallen pairwise in 3 zusammen, wenn 2 Elemente gleich sind; alle fallen zusammen, wenn 3 Elemente oder 2 Paare von Elementen gleich sind. Andre Reductionen der Anzahl sind speciellen Wertsystemen eigen. Ich lasse eine Tabelle der Lösungen der Gl. (3) folgen, welche aus der Variation der Elemente von 0 bis 4 hervorgehen, und gebrauche dabei die Abkürzung:

$$(\alpha, \beta, \gamma)_s = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2}$$

#### T a b e l l e.

1 = ](0, 0, 1)	27 = (2, 14, 23)
3 = (1, 2, 2)	= (2, 7, 26)
5 = (0, 3, 4)	= (7, 14, 22)
7 = (2, 3, 6)	29 = (3, 16, 24)
9 = (1, 4, 8)	= (11, 12, 24)
= (4, 4, 7)	= (12, 16, 21)
11 = (2, 6, 9)	31 = (5, 6, 30)
= (6, 6, 7)	33 = (1, 8, 32)
13 = (0, 5, 12)	= (8, 8, 31)
= (3, 4, 12)	= (4, 17, 28)

15 = (2, 10, 11)	33 = (7, 16, 28)
17 = (0, 8, 15)	35 = (1, 18, 30)
= (8, 9, 12)	= (15, 18, 26)
19 = (1, 6, 18)	37 = (3, 8, 36)
= (6, 6, 17)	= (3, 24, 28)
= (6, 10, 15)	= (8, 24, 27)
21 = (4, 5, 20)	41 = (9, 24, 32)
= (4, 8, 19)	= (23, 24, 24)
= (4, 13, 16)	43 = (6, 7, 42)
= (8, 11, 16)	45 = (5, 8, 44)
23 = (3, 6, 22)	= (8, 19, 40)
= (3, 14, 18)	49 = (15, 24, 40)
= (6, 13, 18)	57 = (7, 8, 56)!
25 = (0, 7, 24)	

Lösungen, die sich durch Division mit einem Factor von  $u$  reduciren, sind hier nicht aufgenommen, da sie durch Multiplication der Gleichungen leicht hinzugefügt werden können.

Unter den aufgeführten Lösungen tritt eine sehr einfach fortschreitende Reihe bemerklich hervor und führt zur Entdeckung der Formel:

$$(h^2 + h + 1)^2 = h^2 + (h + 1)^2 + \{h(h + 1)\}^2 \quad (4)$$

wo nämlich:

$$h^2 + h + 1 = 1 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + h)$$

ist.

Ferner zeigt die Tabelle, dass die meisten Paare verschiedener Lösung für dasselbe  $u$  eine der 3 Zahlen  $x, y, z$  gemeinsam haben, so dass aus ihrer Verbindung jedesmal eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad (5)$$

hervorgeht.

Nun ist bekanntlich jede Primzahl  $4n + 1$  zerlegbar auf eine und nur eine Art in die Summe zweier Quadrate. Ist daher  $x^2 + y^2$  Primzahl, so ist Gl. (5) unmöglich (wo nicht identisch).

Sind also  $p, q$  zwei Primzahlen, so hat man:

$$pq = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma \pm \beta\delta)^2 + (\alpha\delta \mp \beta\gamma)^2 \quad (6)$$

Demnach erfüllen die 2 Werte der rechten Seite die Gl. (5) einfach. Nach derselben Formel ist, wenn  $r = \varepsilon^2 + \zeta^2$ , weiter  $pqr$  in 4 verschiedenen Darstellungen eine Summe zweier Quadrate, nämlich

$$pqr = \{(\alpha\gamma \pm \beta\delta)\varepsilon \pm (\alpha\delta \mp \beta\gamma)\zeta\}^2 \\ + \{(\alpha\gamma \pm \beta\delta)\zeta \mp (\alpha\delta \mp \beta\gamma)\varepsilon\}^2 \quad (7)$$

u. s. f. allgemein ein Product von  $m$  Primfactoren  $4n+1$  in  $2^{m-1}$  Darstellungen, und man findet aus einer Lösung von Gl. (3) alle auf diesem Wege zu ermittelnden Lösungen in a priori bekannter Anzahl, indem man  $x^2+y^2$ , dann  $x^2+z^2$ , dann  $y^2+z^2$  in Primfactoren zerlegt, dann jeden Primfactor als Summe zweier Quadrate darstellt und die Producte nach Gl. (6), (7) etc. transformirt.

Kommt ein Factor  $4n-1$  in einem der Producte vor, so ist dieses von der Operation auszuschliessen.

Ein Factor 2 hat für die Operation keine Wirkung, da

$$2p = (1^2 + 1^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2$$

nur ein Resultat ergibt.

R. Hoppe.

### 3.

**Zum Beweise des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält.**

In unserem Beweise des oben genannten Satzes (im 12. Teil der 2. Reihe dieses Archivs, Seite 439—441) haben wir behauptet, dass die in einer arithmetischen Reihe mit constanter Differenz, in der das Anfangsglied zur Differenz relativ prim sei, etwa vorkommenden Zahlen von der Form  $6n \mp 1$  nie alle teilbar sein könnten. Diese Behauptung wollen wir hier noch besonders beweisen.

Die Doppelreihe  $6n \mp 1$  enthält, nach Absonderung der mit 5 endigenden teilbaren Zahlen, die folgenden Zahlen:

$$5, 11, 17, 23, 29, \dots \\ 7, 13, 19, \dots, 31, \dots$$

Die in dieser Doppelreihe vorkommenden teilbaren Zahlen lassen sich dadurch ermitteln, dass man für jede Primzahl  $p > 5$  eine mit  $p^2$  anfangende Doppelreihe mit der Differenz  $6p$  bildet und dabei die mit 5 endigenden Zahlen überspringt. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn  $p$  die Form  $6n-1$  hat, die Differenz zwischen einer

oberen und einer unteren Zahl der Doppelreihe  $= 2p$  und die Differenz zwischen einer unteren und der nächstfolgenden oberen Zahl  $= 4p$  ist. Hat  $p$  aber die Form  $6n + 1$ , so ist die Differenz zwischen einer oberen und einer unteren Zahl  $= 4p$  und die Differenz zwischen einer unteren und der nächstfolgenden oberen Zahl  $= 2p$ . Für die Vielfachen der Potenzen von  $p$  sind die Zahlen in den Reihen für die Vielfachen von  $p$  mit enthalten.

Beispiel:

$$\underline{p = 7.}$$

49, 91, 133, . . .

77, 119, 161, . . .

Diese Reihen sind arithmetische Reihen, bei denen das Anfangsglied und die Differenz den gleichen Teiler  $p$  haben. Sie stellen alle teilbaren Zahlen der Reihe  $6n \mp 1$  in gleichmässig fortschreitender Weise dar. — Sollen nun andere Reihen mit bestimmter Differenz dieselben teilbaren Zahlen darstellen, so müssen Anfangsglied oder Differenz derselben entweder Teiler oder Vielfache der Anfangsglieder und der Differenzen der ersteren Reihen sein. Dividirt man Anfangsglied und Differenz, bzw. nur das Anfangsglied oder nur die Differenz einer der ersteren Reihen durch den Teiler  $p$  bzw. durch die Teiler 2 und drei, so trifft man wieder auf aufeinanderfolgende Glieder der Reihe  $6n \mp 1$  oder man erhält Reihen, bei denen Anfangsglied und Differenz den gleichen Teiler haben. Bildet man aber Vielfache vom Anfangsgliede und der Differenz der ersteren Reihen, so kann man damit auch keine Reihen herstellen, bei denen Anfangsglied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Ist also eine Reihe gegeben, in welcher Anfangsglied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, und enthält diese Reihe unendlich viele Zahlen von der Form  $6n \mp 1$ , so müssen diese Zahlen jedenfalls wechselweise aus der Reihe der Primzahlen von der Form  $6n \mp 1$  und aus der Reihe der teilbaren Zahlen von der Form  $6n \mp 1$  entnommen werden, denn ein dauernder Fortlauf einer solchen Reihe in der Reihe der teilbaren Zahlen von der Form  $6n \mp 1$  ist nach den obigen Ausführungen unmöglich. Eine arithmetische Reihe, in welcher Anfangsglied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, wird also, wenn sie in's Unendliche ausgedehnt wird, unendlich oft eine Zahl aus der Reihe der Primzahlen von der Form  $6u \mp 1$  und unendlich oft eine Zahl aus der Reihe der teilbaren Zahlen von der Form  $6n \mp 1$  entnehmen müssen. — Wir können also getrost die Behauptung aufstellen, dass mit dem Nachweise, dass in den Reihen der 7 Reihenarten

	Anfangsglied:	Differenz:
1)	$6n \mp 1$	$2n$
2)	$6n + 3$	$6n \mp 2$
3)	$6n$	$6n \mp 1$
4)	$6n \mp 2$	$6n \mp 1$
5)	$6n \mp 2$	$6n + 3$
6)	$6n \mp 1$	$6n + 3$
7)	$6n + 3$	$6n \mp 1$

denen noch eine 8. Reihenart mit dem Anfangsgliede  $6n \mp 1$  und der Differenz  $6n \pm 1$  hinzuzufügen ist, unendlich viele Zahlen von der Form  $6n \mp 1$  enthalten sind, auch zugleich der Nachweis geführt ist, dass in jeder unendlichen arithmetischen Reihe mit constanter Differenz, in der das Anfangsglied und die Differenz teilerfremde Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthalten sein müssen.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

#### 4.

#### Ueber die Zerlegung der Zahlen in Quadrate.

##### I. Zerlegung der Zahlen von der Form $4n + 1$ in 2 Quadrate.

Diejenigen Zahlen  $Z$  von der Form  $4n + 1$ , die sich in 2 Quadrate zerlegen lassen, kann man in Classen einteilen, innerhalb deren die Zahlen  $Z$  sowol wie die Grundzahlen der Quadrate  $a^2$  und  $b^2$  arithmetische Reihen bilden. Es mögen einige dieser Classen hier folgen.

##### Classe 1.

Z.	Quadrate $a^2 + b^2$
5	$1^2 + 2^2$
13	$2^2 + 3^2$
25	$3^2 + 4^2$
41	$4^2 + 5^2$
61	$5^2 + 6^2$
85	$6^2 + 7^2$
u. s. w.	u. s. w.

Die Zahlen  $Z$  bilden eine arithmetische Reihe 2. Ordnung nach der Formel  $2x^2 + 6x + 5$ . Die Grundzahlen  $a$  sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate  $b^2$  sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 2 an.

Classe 2.

Z.	Quadrate $a^2 + b^2$
17	$1^2 + 4^2$
29	$2^2 + 5^2$
45	$3^2 + 6^2$
65	$4^2 + 7^2$
89	$5^2 + 8^2$
117	$6^2 + 9^2$
u. s. w.	u. s. w.

Die Zahlen  $Z$  bilden eine arithmetische Reihe 2. Ordnung nach der Formel  $2x^2 + 10x + 17$ . Die Grundzahlen der Quadrate  $a^2$  sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate  $b^2$  sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 4 an.

Classe 3.

Z.	Quadrate $a^2 + b^2$
37	$1^2 + 6^2$
53	$2^2 + 7^2$
73	$3^2 + 8^2$
97	$4^2 + 9^2$
125	$5^2 + 10^2$
147	$6^2 + 11^2$
u. s. w.	u. s. w.

Die Zahlen  $Z$  bilden eine arithmetische Reihe nach der Formel  $2x^2 + 14x + 37$ . Die Grundzahlen der Quadrate  $a^2$  sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate  $b^2$  sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 6 an.

Die 1. Classe beginnt mit dem Quadrat der Zahl 1, also  $1^2$  und mit dem Quadrat der ersten geraden Zahl, also  $2^2$ ; die 2. Classe beginnt mit dem Quadrat  $1^2$  und mit dem Quadrat der zweiten geraden Zahl, also  $4^2$ ; . . . ; die  $n$ te Classe beginnt mit dem Quadrat

der  $n$ ten geraden Zahl, also  $(2n)^2$ . Die Formeln für die Reihen der Zahlen  $Z$  zu den jeweiligen Classen sind die folgenden:

Classe.	Formel der Zahlenreihe $Z$ :
1	$2x^2 + 6x + 5$
2	$2x^2 + 10x + 17$
3	$2x^2 + 14x + 37$

u. s. w.

Allgemein lautet die Formel für die Zahlen  $Z$  zur  $n$ ten Classe:

$$2x^2 + (6 + 4m)x + (2n)^2 + 1 \begin{pmatrix} x = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

Die Grundzahlen der Quadrate  $a^2$  zur  $n$ ten Classe sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 an und die Grundzahlen der Quadrate  $b^2$  zur  $n$ ten Classe sind die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von  $2n$  an.

Bei der 1. Classe ist die Differenz zwischen den Grundzahlen der zu einer jeweiligen Zahl  $Z$  gehörigen Quadrate gleich 1, bei der 2. gleich 3, bei der 3. gleich 5, bei der  $n$ ten gleich  $2n - 1$ .

Da innerhalb jeder Classe die Reihe der Grundzahlen der Quadrate  $a$  die natürliche Zahlenreihe von 1 an ist, so kann man aus diesen Classen auch Zahlformen entnehmen, zu denen je ein Quadrat der Zahlen 1, 2, 3, . . . gehört. Solche Formen sind diese:

Zahlformen.	( $s$ = 0, 1, 2, 3, . . .)	Zugehörige Quadrate.
$4x^2 + 8x + 5$		$1^2$
$4x^2 + 12x + 13$		$2^2$
$4x^2 + 16x + 25$		$3^2$

u. s. w.

Die Differenz zwischen diesen Formen ist

$$4x + z \begin{pmatrix} x = 1, 2, 3, \dots \\ z = 8, 12, 16, \dots \end{pmatrix}$$

und die Constanten dieser Formen sind nach einander die Zahlen der Reihe

$$2x^2 + 6x + 5 \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

## II. Zerlegung von Zahlen in die Form $a^2 + pb^2$ .

In ganz ähnlicher Weise, wie oben für diejenigen Zahlen, welche in 2 Quadrate zerlegt werden können, Classen gebildet sind, können auch für diejenigen Zahlen, welche in die Form  $a^2 + pb^2$  ( $p = \text{Primzahl}$ ) zerlegt werden können, Classen gebildet werden, innerhalb deren die Zahlen  $Z$  sowol wie die Grundzahlen der Quadrate  $a^2$  und  $b^2$  arithmetische Reihen sind.

## III. Zerlegung einer einzelnen Zahl in 2 Quadrate oder in 1 Quadrat und ein $p$ faches Quadrat.

Zur Zerlegung einer einzelnen Zahl in 2 Quadrate oder in ein Quadrat und ein  $p$  faches Quadrat werden, nachdem die Wurzel  $r$  der Congruenz  $x^2 \equiv -p \pmod{Z}$  gefunden ist, die reducirten Formen und die Kettenbrüche mit Bildung von Näherungsbrüchen angewandt. Beides ist nicht erforderlich, da sich bei der einfachen Anwendung des Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Teilers auf  $\frac{Z}{r}$  die Grundzahlen der betreffenden Quadrate von selbst ergeben, indem sie in der Reihe der auftretenden Teiler mit vorkommen.

Beispiele:

- 1)  $Z = 653$ . — Die Congruenz  $x^2 \equiv -1 \pmod{653}$  hat die Wurzeln  $\pm 149$ .

$$653 : 149 : 57 : 35 : 22 : 13 : 9 : 4$$

$$Z = 13^2 + 22^2$$

- 2)  $Z = 587$ . — Die Congruenz  $x^2 \equiv -2 \pmod{587}$  hat die Wurzeln  $\pm 207$ .

$$587 : 207 : 173 : 34 : 3 : 1$$

$$Z = 3^2 + 2 \cdot 17^2$$

- 3)  $Z = 829$ . — Die Congruenz  $x^2 \equiv -3 \pmod{829}$  hat die Wurzeln  $\pm 251$ .

$$829 : 251 : 76 : 23 : 7 : 2 : 1$$

$$Z = 23^2 + 3 \cdot 10^2$$

- 4)  $Z = 989$  — Die Congruenz  $x^2 \equiv -5 \pmod{989}$  hat die Wurzeln  $\pm 77, \pm 353$ .

$$989 : 77 : 65 : 12 : 5 : 2$$

$$Z = 12^2 + 5 \cdot 13^2.$$

$$989 : 353 : 283 : 70 : 3 : 1$$

$$Z = 3^2 + 5 \cdot 14^2.$$

G. Speckmann.

### 5.

#### Systeme von arithmetischen Reihen $n$ ter Ordnung.

Durch Aneinanderreihung von Verticalreihen lässt sich die natürliche Zahlenreihe wie folgt in Systeme von Horizontalreihen zerlegen:

$$\begin{array}{l}
 1) \qquad 1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots \\
 \qquad \qquad 3, 5, 8, 12, 17, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad 6, 9, 13, 18, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad 10, 14, 19, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 15, 20, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 21, \dots
 \end{array}$$

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe resp. aus den Zahlen 1, 2, 3, . . . , 2, 3, 4, . . . 3, 4, 5, . . . u. s. w. besteht

$$\begin{array}{l}
 2) \qquad 1, 3, 7, 13, 21, \dots \\
 \qquad \qquad 2, 4, 8, 14, 22, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad 5, 9, 15, 23, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad 6, 10, 16, 24, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 11, 17, 25, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 12, 18, 26, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 19, 27, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 20, 28, \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 29, \dots \\
 \qquad 30, \dots
 \end{array}$$

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe resp. aus den Zahlen 2, 4, 6, . . . 4, 6, 8, . . . besteht.

3)	1, 4, 10, 19, 31, . . . .
	2, 5, 11, 20, 32, . . . .
	3, 6, 12, 21, 33, . . . .
	7, 13, 22, 34, . . . .
	8, 14, 23, 35, . . . .
	9, 15, 24, 36, . . . .
	16, 25, 37, . . . .
	17, 26, 38, . . . .
	18, 27, 39, . . . .
	28, 40, . . . .
	29, 41, . . . .
	30, 42, . . . .
	43, . . . .
	44, . . . .
	45, . . . .

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe resp. aus den Zahlen 3, 6, 9, . . . , 6, 9, 12, . . . u. s. w. besteht.

In ähnlicher Weise kann man fortfahren und unendlich viele Systeme von arithmetischen Reihen bilden.

Richtet man ein solches System so ein, dass in der obersten Horizontalreihe die Quadrate der Zahlen der nat. Zahlenreihe zu stehen kommen, so gestaltet sich dasselbe wie folgt:

4)	1, 4, 9, 16, 25, . . . .
	2, 5, 10, 17, 26, . . . .
	3, 6, 11, 18, 27, . . . .
	7, 12, 19, 28, . . . .
	8, 13, 20, 29, . . . .
	14, 21, 30, . . . .
	15, 22, 31, . . . .
	23, 32, . . . .
	24, 33, . . . .
	34, . . . .
	35, . . . .

Die Horizontalreihen sind arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe aus aufeinander folgenden ungeraden

Zahlen, nämlich resp. aus den Zahlen 3, 5, 7, . . . , 5, 7, 9, . . . u. s. w. besteht.

In ähnlicher Weise lassen sich aus der nat. Zahlenreihe Systeme von arithmetischen Reihen 3ter, 4ter, . . .  $n$ ter Ordnung bilden, in denen die oberste Reihe aus 3ten, 4ten, . . .  $n$ ten Potenzzahlen besteht.

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

### 6.

#### Ueber Potenzreihen.

Aus den 3ten Potenzen der Zahlen  $a$  der natürlichen Zahlenreihe kann man durch Hinzunahme geeigneter Quadratzahlen  $b$  eine Reihe von Quadratzahlen  $c$  bilden. Es mögen die Reihen der betreffenden Zahlen hier folgen.

$\underline{n}$	$\underline{b}$	$\underline{c}$
$2^3$	$+$	$1^2 = 3^2$
$3^3$	$+$	$3^2 = 6^2$
$4^3$	$+$	$6^2 = 10^2$
$5^3$	$+$	$10^2 = 15^2$
u. s. w.		

Die Reihe der Wurzeln  $a$  ist die natürliche Zahlenreihe von 2 an, die Reihe der Wurzeln  $b$  ergibt sich aus der Formel

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 1 \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Die Reihe der Wurzeln  $c$  ergibt sich aus der Formel

$$\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + 3 \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Aus den vorstehenden Reihen für die dritte und zweite Potenz lassen sich dadurch, dass man die Wurzelzahlen  $b$  resp. mit 2, 3, 4, . . . ,  $2^x, 3^x, 4^x, \dots$  multiplicirt und die Quadrate der so entstandenen Zahlen zu den Potenzen von der Form  $a^{2x-1}$  hinzunimmt, Quadratzahlen von der Form

$$a^{2x-1} + b^2 = c^2$$

bilden. Alle Wurzelzahlen  $c$  erhält man auch dadurch, dass man die oben für  $c$  angegebenen Zahlen resp. mit  $2^x$ ,  $3^x$ ,  $4^x$ , . . . multiplicirt.

So ist z. B.

$$2^5 + 2^2 = 6^2$$

$$3^5 + 9^2 = 18^2$$

$$4^5 + 24^2 = 40^2$$

u. s. w.

$$2^7 + 4^2 = 12^2$$

$$3^7 + 27^2 = 54^2$$

$$4^7 + 96^2 = 160^2$$

u. s. w.

G. Speckmann.

## 7.

### Ueber die Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ .

Auf Seite 446–448, Teil 14, 2. Reihe dieses Archivs haben wir eine Auflösungsmethode für die Congruenz  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  bekannt gegeben. Diese Auflösungsmethode gilt natürlich auch allgemein für jede ungerade Modulzahl. — Jetzt möchten wir noch mittheilen, dass das angegebene Verfahren noch bedeutend dadurch verkürzt werden kann, dass man in die Formel  $pn + a - r$  für  $u$  nicht alle Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$  einsetzt, sondern nur einige besonders ausgewählte Zahlen. Setzt man nämlich in  $z^2 + z$  für  $z$  nach einander die Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  ein, so entstehen die folgenden Summen:  $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, \dots$ . Die Endziffern dieser Summe wiederholen sich von 10 zu 10 Summen und können nur gleich 2, 6 oder 0 sein. Dieser Umstand führt zu einer grossen Abkürzung der Rechnung. Es sei z. B. die Congruenz  $x^2 \equiv 300 \pmod{897}$  gegeben.

$\left(\frac{897-1}{2}\right)^2 \equiv 673 \pmod{897}$ . Es ist also die Formel  $897n - 373$

zu benutzen. Setzt man in diese Formel die Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  ein, so entstehen Summen mit den Endziffern  $4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, \dots$ . Da nur diejenigen Summen, welche die Endung 2, 6 oder 0 haben, Zahlen von der Form  $x^2 + z$  sind, so brauchen wir hier auch nur solche Summen zu benutzen, nämlich  $5 \cdot 897 - 373, 7 \cdot 897 - 373, 9 \cdot 897 - 373$  u. s. w. Die Rechnung stellt sich dann wie folgt dar:

$$897n - 373$$

$$\begin{aligned} n = 5. & \quad 5 \cdot 897 - 373 = 4112 = 64^2 + 16 \\ n = 7. & \quad 7 \cdot 897 - 373 = 5906 = 76^2 + 130 \\ n = 9. & \quad 9 \cdot 897 - 373 = 7700 = 87^2 + 131 \\ a = 25. & \quad 4112 + 8970 = 13082 = 114^2 + 86 \\ \pi = 17. & \quad 5905 + 8970 = 14876 = 121^2 + 235 \\ n = 19. & \quad 7700 + 8970 = 16670 = 129^2 + 29 \\ n = 25. & \quad 13082 + 8970 = 22052 = 148^2 + 148 \end{aligned}$$

$\frac{897-1}{2} - 148$  und  $\frac{897+1}{2} + 148$ , d. i. 300 und 596 sind Wurzeln der Congruenz  $x^2 \equiv 300 \pmod{897}$

Oldenburg i. Gr.

G. Speckmann.

## XVIII.

Ueber die pythagoreischen Dreiecke und ihre  
Anwendung auf die Teilung des Kreisumfangs.

Von

**Graeber,**

Seminarlehrer in Aurich.

Pythagoreische Dreiecke heissen diejenigen Dreiecke, deren Hypotenuse und Katheten pythagoreische Zahlen zu Längeneinheiten haben. Die Zahlen  $a, b, c$  heissen pythagoreische Zahlen, wenn

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ist.  $\triangle_{a,b,c}$  bezeichnet ein pythagoreisches Dreieck mit den pythagoreischen Zahlen  $a, b, c$ .

Die Hypotenusenwinkel sind  $\beta$  und  $\gamma$ ;  $\beta$  liegt der Kathete  $b$  und  $\gamma$  der Kathete  $c$  gegenüber,  $\triangle_5^3$  bezeichnet z. B. das pythagoreische Dreieck, dessen Hypotenuse 5 und dessen Katheten  $b$  und  $c$  3 beziehungsweise 4 Längeneinheiten haben.  $\beta_3^b$  liegt der Kathete  $b = 3$  und  $\gamma_4^c$  der Kathete  $c = 4$  gegenüber. Ein pythagoreisches Dreieck, dessen Hypotenuse eine Primzahl ist, heisst ein ursprüngliches und hat die Bezeichnung  $\triangle_a$ , ein solches, dessen Hypotenuse ein Product aus zwei oder mehreren Primzahlen ist, heisst ein zusammengesetztes pythagoreisches Dreieck, dessen Bezeichnung  $\triangle_{a_1 a_2 \dots a_n}$ .

ist. Alle anderen pythagoreischen Dreiecke heissen abgeleitete und zwar einfach abgeleitete, wenn die Hypotenuse eine Potenz einer primzahligen Hypotenuse ist und zusammengesetzt abgeleitete py-

thagoreische Dreiecke, wenn die Hypotenuse ein Product aus Potenzen von primzahligen Hypotenusen ist. Jene werden mit  $\triangle_{a^p}$ ,

diese mit  $\triangle_{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n}}$  bezeichnet.

Alle pythagoreischen Dreiecke lassen sich aus dem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck construiren. Dieses Dreieck ist  $\triangle ABC$  mit  $AB$  als Hypotenuse und mit  $AC = BC$  als Katheten. Figur 1.

## § 1.

Um  ${}^4\triangle^3$  zu construiren, verbindet man  $A$  mit  $D$ , der Mitte von  $CB$  dann ist

$$2 \text{ Wkl. } DAE = \beta_5^3$$

und

$$2 \text{ Wkl. } CAD = \gamma_5^4$$

Es ist

$$\overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

oder da

$$AC = 2CD \text{ ist,}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + 4\overline{CD}^2 = 5\overline{CD}^2$$

und

$$AD = CD \sqrt{5}$$

Ferner ist:

$$CD \sqrt{5} : DB = \sin B : \sin DAB$$

und da

$$\sin B = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ und } DB = CD$$

ist:

$$\sin DAB = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0,1}$$

$$\log \sin DAB = \frac{1}{2} \log 0,1 = 0,5000000 - 1$$

$$\text{Wkl. } DAB = 18^\circ 26' 5 \frac{515''}{631}$$

Da

$$\text{Wkl. } CAD = 45^\circ = \text{Wkl. } DAB \text{ ist,}$$

ist

$$\text{Wkl. } CAD = 26^\circ 33' 54 \frac{116''}{631}$$

mithin ist

$$2 \text{ Wkl. } DAB = 36^\circ 52' 11 \frac{349''}{631} \text{ und}$$

$$2 \text{ Wkl. } CAD = 53^\circ 7' 48 \frac{232''}{631}$$

In  ${}^4\triangle^3$  ist

$$\sin \beta_5^3 = \frac{3}{5}$$

$$\log 3 = 0,477\,1213$$

$$\log 5 = 0,698\,9700$$

$$\log \frac{3}{5} = 0,778\,1513 - 1;$$

$$\beta_5^3 = 36^\circ 52' 11 \frac{9''}{14}$$

$$2 \text{ Wkl. } DAB = \beta_5^3$$

Der Beweis ohne Logarithmen ist: Da

$$\sin CAD = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \cos CAD = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ist, so ist

$$\sin 2CAD = 2 \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

Nun ist

$$\sin \gamma_5^4 = \frac{4}{5}, \quad \text{also ist} \quad \sin 2CAD = \sin \gamma_5^4$$

oder

$$2 \cdot CAD = \gamma_5$$

2 Wkl.  $DAB$  und 2 Wkl.  $CAD$  sind die Hypotenusenwinkel von  ${}^4\Delta^3$ .

Wird  $CB$  in drei gleiche Teile geteilt, und werden die Teilpunkte mit  $A$  verbunden, so bilden die Transversalen mit der Hypotenuse die halben Hypotenusenwinkel von  ${}^4\Delta^3$  und  ${}^{12}\Delta^5$ .

Bei der Teilung in vier gleiche Teile erhält man die Hypotenusenwinkel von  ${}^4\Delta^3$ ,  ${}^{15}\Delta^8$ ,  ${}^{28}\Delta^4$ .

Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Transversalen nach den Teilpunkten des einen Schenkels im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecke gezogen, bilden mit der Hypotenuse halbe Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken.

Eine nach § 18. berechnete Tabelle für Teilungen in 2 bis 8 gleiche Teile wird diesen Satz bestätigen

## § 2.

Der Unterschied der beiden Hypotenusenwinkel von  $\frac{4}{5}\Delta^3$  ist ein Hypotenusenwinkel von  $\frac{24}{25}\Delta^7$ .

$$I. \quad \gamma_5^4 - \beta_5^3 = \beta_{25}^{73}$$

Es ist:

$$\sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \sin \gamma_5^4 \cdot \cos \beta_5^3 - \sin \beta_5^3 \cdot \cos \gamma_5^4$$

Setzt man

$$\sin \gamma_5^4 = \cos \epsilon_5^3, \quad \sin \beta_5^3 = \cos \epsilon_5^4$$

so erhält man

$$\sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \sin^2 \gamma_5^4 - \sin^2 \beta_5^3 = \cos^2 \beta_5^3 - \cos^2 \gamma_5^4$$

oder

$$I. \quad \sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \cos 2\beta_5^3$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} II. \quad \cos(\gamma_5^4 - \beta_5^3) &= \cos \gamma_5^4 \cdot \cos \beta_5^3 + \sin \gamma_5^4 \cdot \sin \beta_5^3 \\ &= \sin \beta_5^3 \cdot \sin \gamma_5^4 + \sin \gamma_5^4 \cdot \sin \beta_5^3 \\ &= 2 \sin \beta_5^3 \cdot \sin \gamma_5^4 = 2 \sin \beta_5^3 \cdot \cos \beta_5^3 \\ &= 2 \sin 2\beta_5^3 \end{aligned}$$

Für

$$\sin \beta_5^3 = \frac{3}{5} = \cos \gamma_5^4 \quad \text{und} \quad \sin \gamma_5^4 = \frac{4}{5} = \cos \beta_5^3$$

wird

$$\sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \frac{7}{25} \quad \text{und} \quad \cos(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \frac{24}{25}$$

Da

$$\sin^2(\gamma_5^4 - \beta_5^3) + \cos^2(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = 1$$

oder

$$25^2 = 7^2 + 24^2$$

ist, so ist  $\gamma_5^4 - \beta_5^3$  ein Hypotenusenwinkel von  $\frac{24}{25}\Delta^7$ .

Es ist nun

$$III. \quad \sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \frac{4}{25} = \sin \beta_{25}^{74}$$

also ist

$$a) \quad \gamma_5^4 - \beta_5^3 = \beta_{25}^{75}$$

Der andere Hypotenusenwinkel ist, da

$$IV. \quad \cos(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = 2\beta_{25}^{76} = \frac{24}{25} = \sin \gamma_{25}^{77} \text{ ist,}$$

$$b) \quad 2\beta_5^3 = \gamma_{25}^{78}$$

$$2. \gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7 = \gamma_5^4.$$

Folgende Gleichungen, die sich aus (I, II., III., IV) ergeben,

$$\text{IIIa. } \sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \cos 2\beta_5^3 = \sin \beta_{25}^7 = \cos \gamma_{25}^{24} = \frac{7}{25}$$

$$\cos(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = \sin 2\beta_5^3 = \sin \gamma_{25}^{24} = \cos \beta_{25}^7 = \frac{24}{25}$$

formen die Gleichungen

$$\sin(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) = \sin \gamma_{25}^{24} \cdot \cos \beta_{25}^7 - \cos \gamma_{25}^{24} \cdot \sin \beta_{25}^7$$

$$\cos(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) = \cos \gamma_{25}^{24} \cdot \cos \beta_{25}^7 + \sin \gamma_{25}^{24} \cdot \sin \beta_{25}^7$$

um in:

$$\begin{aligned} \text{V. } \sin(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) &= \sin 2\beta_5^3 \cdot \sin 2\beta_5^3 - \cos 2\beta_5^3 \cdot \cos 2\beta_5^3 \\ &= -\cos 4\beta_5^3 = +\frac{527}{625} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VI. } \cos(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) &= \cos 2\beta_5^3 \cdot \sin 2\beta_5^3 + \cos 2\beta_5^3 \cdot \sin 2\beta_5^3 \\ &= 2\sin 2\beta_5^3 \cdot \cos 2\beta_5^3 = \sin 4\beta_5^3 = \frac{336}{625} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sin^2(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) + \cos^2(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) &= 1 \quad \text{und} \\ 625^2 &= 336^2 + 527^2 \end{aligned}$$

folglich ist  $\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7$  ein Hypotenusenwinkel von  $\frac{527}{625} \triangle \frac{336}{625}$ .

Es ist

$$\sin \beta_5^4 = \cos \gamma_5^4 = \frac{336}{625}$$

mithin ist

$$\cos(\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7) = \frac{336}{625} = \cos \gamma_5^4 \quad \text{und}$$

$$\gamma_{25}^{24} - \beta_{25}^7 = \gamma_5^4$$

Der andere Hypotenusenwinkel ist

$$90^\circ - \gamma_{25}^{24} + \beta_{25}^7 = 2\beta_{25}^7 = 2(\gamma_5^4 - \beta_5^3) = 2\beta_5^4$$

Da man ebenso erhält:

$$\sin(\gamma_5^4 - \beta_5^4) = \cos 8\beta_5^3$$

$$\cos(\gamma_5^3 - \beta_5^4) = -\sin 8\beta_5^4$$

so ergibt sich der Satz:

A. Der Unterschied der beiden Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^n}$  ist ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{2n}}$

Mittels der Gleichungen

$$\sin 2\beta_5^3 = \sin 2\gamma_5^4 \quad \text{und} \quad \cos 2\beta_5^3 = -\cos 2\gamma_5^4$$

erhält man aus V. und VI.:

$$\begin{aligned} \sin(\gamma_5^4 - \beta_5^3) &= 2\sin 2\beta_5^3 \cdot \sin 2\gamma_5^4 + \cos 2\beta_5^3 \cdot \sin 2\gamma_5^4 \\ &= \cos 2\gamma_5^4 - \beta_5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_5^4 - \beta_5^3) &= \sin 2\gamma_5^4 \cdot \cos 2\beta_5^3 - \cos 2\gamma_5^4 \cdot \sin 2\beta_5^3 \\ &= \sin 2(\gamma_5^4 - \beta_5^3) \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

B. Der doppelte Unterschiedswinkel der beiden Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^n}$  ist ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{4n}}$ , wenn derselbe Wkl. 1 R ist.

### § 3.

$$1. \quad \beta_5^3 - \beta_{25}^7 = \beta_{125}^{44}.$$

Mit Zuhilfenahme der Gleichungen § 2. IIIa., IVa. erhält man nach der Sinus- und Cosinusformel für die Differenz zweier Winkel:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \sin(\beta_5^3 - \beta_{25}^7) &= \sin \beta_5^3 \cdot \sin 2\beta_5^3 - \cos 2\beta_5^3 \cdot \cos \beta_5^3 \\ &= -\cos 3\beta_5^3 = \frac{44}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad \cos(\beta_5^3 - \beta_{25}^7) &= \cos \beta_5^3 \cdot \sin 2\beta_5^3 + \sin \beta_5^3 \cdot \cos 2\beta_5^3 \\ &= \sin 3\beta_5^3 = \frac{117}{125} \end{aligned}$$

Da

$$\cos^2 3\beta_5^3 + \sin^2 3\beta_5^3 = \frac{44^2}{125^2} + \frac{117^2}{125^2} = 1$$

ist, so folgt daraus, dass  $\beta_5^3 - \beta_{25}^7$  ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{5^3}$  ist. Da

$$\sin(\beta_5^3 - \beta_{25}^7) = \frac{44}{125} = \sin \beta_{125}^{44}$$

ist, so ist

$$\text{a) } \beta_5^3 - \beta_{25}^7 = \beta_{125}^{44}$$

Ist  $\beta_5^3 - \beta_{25}^7$  der eine Hypotenusenwinkel, so ist

$$b) \quad 90^\circ - \beta \frac{3}{5} + \beta \frac{7}{25} = \gamma \frac{4}{5} + \beta \frac{7}{25}$$

der andere Hypotenusenwinkel von  $\frac{117}{125}\Delta^{44}$ .

$$2) \quad \beta \frac{3}{5} - \beta \frac{336}{5^4} = \beta \frac{237}{3125}$$

Es ist

$$\text{III a.} \quad \sin 4\beta \frac{3}{5} = \frac{336}{625} = \sin \beta_5^4 - \cos \gamma_5^4$$

$$\text{IV a.} \quad -\cos 4\beta \frac{3}{5} = \frac{527}{625} = \sin \gamma_5^4 - \cos \beta_5^4$$

Mittels dieser Gleichungen erhält man aus den Formeln für  $\sin(\beta_5^3 - \gamma_5^4)$  und  $\cos(\beta_5^3 - \beta_5^4)$ :

$$\begin{aligned} \text{III.} \quad \sin(\beta_5^3 - \beta_5^4) &= -\sin \beta \frac{3}{5} \cdot \cos 4\beta \frac{3}{5} - \cos \beta \frac{3}{5} \cdot \sin 4\beta \frac{3}{5} \\ &= -\sin 5\beta \frac{3}{5} - \frac{237}{3125} = \sin(\gamma_5^4 - \gamma_5^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV.} \quad \cos(\beta_5^3 - \beta_5^4) &= -\cos \beta \frac{3}{5} \cdot \cos 4\beta \frac{3}{5} + \sin \beta \frac{3}{5} \cdot \sin 4\beta \frac{3}{5} \\ &= -\cos 5\beta \frac{3}{5} - \frac{3116}{3125} = \cos(\gamma_5^4 - \gamma_5^4) \end{aligned}$$

Da  $3125^2 = 237^2 + 3116^2$  ist, so ist

$$\sin(\beta_5^3 - \beta_5^4) = \sin \beta_5^4 - \sin(\gamma_5^4 - \gamma_5^4)$$

und

$$a) \quad \beta_5^3 - \beta_5^4 = \beta_5^4 - \gamma_5^4 - \gamma_5^4$$

der eine Hypotenusenwinkel, der andere ist

$$90^\circ - \beta \frac{3}{5} + \beta_5^4 = \gamma \frac{4}{5} + \beta_5^4 \quad \text{oder}$$

$$b) \quad 90 - \gamma_5^4 + \gamma \frac{4}{5} = \beta_5^4 + \gamma \frac{4}{5} = \gamma_5^5$$

$$3) \quad \beta \frac{7}{27} - \beta \frac{44}{125} = -\beta \frac{237}{3125}$$

Mit Benutzung § 2. III a., IV a. und der Gleichungen

$$\sin 3\beta \frac{3}{5} = \frac{117}{125} = \cos \beta \frac{44}{125} \quad \text{und}$$

$$- \cos 3\beta \frac{3}{5} = \frac{44}{125} = \sin \beta \frac{44}{125} \quad \text{ist}$$

$$\begin{aligned} \text{V. } \sin \left( \beta \frac{7}{25} - \beta \frac{44}{125} \right) &= \cos 2\beta \frac{3}{5} \cdot \sin \beta \frac{3}{5} + \sin 2\beta \frac{3}{5} \cdot \cos 3\beta \frac{3}{5} \\ &= \sin 5\beta \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \left( \beta \frac{7}{25} - \beta \frac{44}{125} \right) &= \sin 2\beta \frac{3}{5} \cdot \sin 3\beta \frac{3}{5} - \cos 2\beta \frac{3}{5} \cdot \cos 3\beta \frac{3}{5} \\ &= - \cos 5\beta \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 2) III. folgt, dass  $\beta \frac{44}{125} - \beta \frac{7}{25}$  ein Hypotenusenwinkel ist. Da  $5\beta$  im dritten Quadranten liegt, so ist der Sinus negativ, also ist

$$- \sin \left( \beta \frac{7}{25} - \beta \frac{44}{125} \right) = - \sin 5\beta \frac{3}{5} + \sin \left( \beta \frac{44}{125} - \beta \frac{7}{25} \right) \quad \text{und}$$

$$\beta \frac{44}{125} - \beta \frac{7}{25} = \beta \frac{237}{3125}$$

Der andere Hypotenusenwinkel ist dann:

$$90^\circ - \beta \frac{44}{125} + \beta \frac{7}{25} = \gamma \frac{117}{125} + \beta \frac{7}{25} = \gamma \frac{3116}{3125}$$

Auf ebendieselbe Weise lassen sich die Hypotenusenwinkel zum  $\triangle$  durch Combination zweier Hypotenusenwinkel aus Dreiecken von derselben primzahligen Hypotenuse niederer Potenz finden.

Man erhält:

$$\text{VII. } 1. \quad \gamma \frac{4}{5} - \beta \frac{237}{3125} = \gamma \frac{11753}{15625}$$

$$\beta \frac{3}{5} + \beta \frac{237}{3125} = \beta \frac{10296}{15625}$$

$$2. \quad \gamma \frac{24}{25} - \beta \frac{336}{625} = \beta \frac{10296}{15625}$$

$$\beta \frac{7}{25} + \beta \frac{336}{625} = \gamma \frac{11753}{15625}$$

$$\begin{aligned} \text{VII.} \quad 3. \quad & \gamma_{125}^{117} - \beta_{125}^{44} = \gamma_{15625}^{11753} \\ & \beta_{126}^{44} + \beta_{125}^{44} = \beta_{15625}^{10296} \end{aligned}$$

Heissen die Winkel  $\beta$  oder  $\gamma$  unter sich gleichnamige und  $\beta$  und  $\gamma$  mit einander ungleichnamige Hypotenusenwinkel, so lassen sich die Sätze, die sich aus den Gleichungen 1. 2. 3 ( $a, b$ ) und aus VII. ergeben, folgendermassen ausdrücken:

A. Die Summe oder der Unterschied zweier gleichnamigen Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^n}$  und  $\triangle_{a^{n_1}}$  ist ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n+n_1}}$ .

B. Die Summe oder der Unterschied zweier ungleichnamigen Hypotenusenwinkel von je einem aus  $\triangle_{a^n}$  und  $\triangle_{a^{n_1}}$  ist ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n+n_1}}$ .

C. Ist die Summe oder der Unterschied zweier gleichnamigen Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^n}$  und  $\triangle_{a^{n_1}}$  ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{n^{n+n_1}}$ , so ist der Unterschied oder die Summe zweier ungleichnamigen Hypotenusenwinkel von je einem aus denselben Dreiecken der andere Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n+n_1}}$  und umgekehrt.

D. Der doppelte  $\beta$ -Winkel im  $\triangle_{a^n}$  ist ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{2n}}$ .

Hierbei ist vorausgesetzt worden, dass die Summe der Winkel  $< 1R$  ist. Beträgt dieselbe mehr als  $1R$ , so ist der Supplementwinkel ein Hypotenusenwinkel.

Aus den Gleichungen I–IV. folgt der Satz:

E. Der Sinus und Cosinus eines  $n$ -fachen Hypotenusenwinkels von  $\triangle_a$  geben die Sinusse oder Cosinusse der Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^n}$ .

## § 4.

Kehrt man in den Sinus- und Cosinusformeln § 3. (1—4) die Vorzeichen um, so erhält man die Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken von niederer Potenz derselben primzahligen Hypotenuse. Nämlich:

$$\begin{aligned} \text{I. } \sin\left(\beta^3_5 + \beta^7_{5^2}\right) &= \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = \sin\gamma^4_5 = \cos\beta^3_5 \\ \cos\left(\beta^3_5 + \beta^7_{5^2}\right) &= \frac{75}{125} = \frac{3}{5} = \sin\beta^3_5 = \cos\gamma^4_5 \\ \sin\left(\beta^3_5 + \beta^4_{5^2}\right) &= \frac{2925}{3125} = \frac{117}{125} = \sin\gamma^3_5 = \cos\beta^3_5 \\ \cos\left(\beta^3_5 + \beta^4_{5^2}\right) &= \frac{1100}{3125} = \frac{44}{125} = \sin\beta^3_5 = \cos\gamma^3_5 \\ \sin\left(\beta^2_{5^2} + \beta^4_{5^2}\right) &= \frac{1875}{3125} = \frac{3}{5} = \sin\beta^3_5 = \cos\gamma^4_5 \\ \cos\left(\beta^2_{5^2} + \beta^4_{5^2}\right) &= \frac{2500}{3125} = \frac{4}{5} = \sin\gamma^4_5 = \cos\beta^3_5 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Winkelgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{II. } \beta^3_5 + \beta^2_{5^2} &= \gamma^4_5 \\ \beta^3_5 + \beta^4_{5^2} &= \gamma^3_5 \\ \beta^2_{5^2} + \beta^3_{5^2} &= \beta^3_5 \end{aligned}$$

Ebenso erhält man aus 1, 2, 3 b:

$$\begin{aligned} \text{III. } \gamma^4_5 - \beta^2_{5^2} &= \beta^3_5 \\ \gamma^4_5 - \beta^4_{5^2} &= \beta^3_{5^2} \\ \gamma^3_5 - \beta^2_{5^2} &= \gamma^4_5 \end{aligned}$$

und aus VII., 1, 2, 3:

$$\gamma^4_5 + \beta^5_{5^2} = \gamma^4_5$$

oder gleich  $\pi - \gamma^4_5$ , wenn  $\gamma^4_5 + \beta^5_{5^2} > 1R$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \beta^3_5 - \beta^5_{5^2} &= \beta^4_{5^2} \\ \gamma^2_{5^2} + \beta^4_{5^2} &= \pi - \gamma^3_5 \\ \beta^4_{5^2} - \beta^2_{5^2} &= \beta^3_5 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit den Gleichungen aus § 3. die Sätze:

A. Ist die Summe zweier Hypotenusenwinkel von je einem aus  $\triangle_{a^n}$  und  $\triangle_{a^{n_1}}$  ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n+n_1}}$ , so ist ihr Unterschied ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n-n_1}}$ .

B. Ist der Unterschied zweier Hypotenusenwinkel von je einem aus  $\triangle_{a^n}$  und  $\triangle_{a^{n_1}}$  ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n-n_1}}$ , so ist ihre Summe oder der Supplementwinkel zu derselben ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^{n+n_1}}$ .

Aus den Gleichungen II., III., IV. lassen sich der Reihe nach folgende Gleichungen ableiten:

$$\begin{array}{ll}
 \gamma_5^4 - \beta_5^3 = \beta_5^2, & \gamma_5^4 + \beta_5^3 = 1R \\
 \gamma_5^3 - \beta_5^1 = \beta_5^4, & \gamma_5^3 + \beta_5^1 = \pi - \gamma_2 \\
 \beta_5^3 - \beta_5^2 = \beta_5^3, & \beta_5^3 + \beta_5^2 = \gamma_5^4 \\
 \gamma_5^4 - \beta_5^3 = \beta_5^2, & \gamma_5^4 + \beta_5^3 = 1B \\
 \\ 
 \gamma_5^4 - \beta_5^3 = \beta_5^3, & \gamma_5^4 + \beta_5^3 = \gamma_5^7 \\
 \gamma_5^3 - \gamma_5^1 = \beta_5^2, & \gamma_5^3 + \gamma_5^1 = \pi - \gamma_5^4 \\
 \gamma_5^4 - \beta_5^5 = \gamma_5^1, & \gamma_5^4 + \beta_5^5 = \gamma_5^4 \\
 \beta_5^4 + \beta_5^5 = \beta_5^1, & \beta_5^4 - \beta_5^5 = \beta_5^9 \\
 \pi - \gamma_5^2 - \beta_5^4 = \gamma_5^2, & \pi - \gamma_5^2 + \beta_5^4 = \pi - \beta_5^6 \\
 \beta_5^2 + \beta_5^2 = \beta_5^4 *). & 
 \end{array}$$

Ein Vergleich mit den in nachstehender Tabelle berechneten Winkeln wird diese Gleichungen bestätigen.

---

\*) Zur Abkürzung ist statt der pythagoreischen Zahlen nur die Potenzhypotenuse gesetzt.

$\beta_5^3 = 36^\circ 52' 11 \frac{9''}{14}$	$\gamma_5^4 = 53^\circ 7' 48 \frac{5''}{14}$
$\beta_5^2 = 16^\circ 15' 36 \frac{9''}{14}$	$\gamma_5^2 = 73^\circ 44' 23 \frac{5''}{14}$
$\beta_5^3 = 20^\circ 36' 34 \frac{64''}{79}$	$\gamma_5^3 = 69^\circ 23' 25 \frac{15''}{79}$
$\beta_5^4 = 32^\circ 31' 13 \frac{6''}{14}$	$\gamma_5^4 = 57^\circ 28' 46 \frac{8''}{14}$
$\beta_5^5 = 4' 20' 58 \frac{1''}{8}$	$\gamma_5^5 = 85' 39' 1 \frac{7''}{8}$
$\beta_5^6 = 41^\circ 13' 9 \frac{147''}{192}$	$\gamma_5^6 = 48^\circ 46' 50 \frac{45''}{142}$
$\beta_5^7 = 11^\circ 54' 38 \frac{2''}{3}$	$\gamma_5^7 = 78^\circ 5' 21 \frac{1''}{3}$
$\beta_5^8 = 24^\circ 57' 33 \frac{2''}{14}$	$\gamma_5^8 = 65^\circ 2' 26 \frac{12''}{14}$
$\beta_5^9 = 28^\circ 10' 15 \frac{1''}{3}$	$\gamma_5^9 = 61^\circ 49' 44 \frac{2''}{3}$
$\beta_5^{10} = 8^\circ 41' 56 \frac{1''}{3}$	$\gamma_5^{10} = 81^\circ 18' 3 \frac{2''}{3}$
$\beta_5^{11} = 44^\circ 25' 52''$	$\gamma_5^{11} = 45^\circ 34' 8''$

Die Sätze A. und B. gelten auch bei Zusammenstellung von zwei Winkeln. Folgende Gleichungen, die unmittelbar aus der Tabelle sich ergeben, mögen als Beweis dienen.

$$\begin{array}{ll}
 \beta_5^1 + \beta_5^2 + \beta_5^3 = \gamma_5^0 & \beta_5^1 - \beta_5^2 + \beta_5^3 = \beta_5^6 \\
 \beta_5^2 + \beta_5^3 + \beta_5^4 = \gamma_5^1 & \beta_5^2 - \beta_5^3 + \beta_5^4 = \beta_5^9 \\
 \beta_5^3 + \beta_5^4 + \beta_5^5 = \gamma_5^2 & -\beta_5^3 + \beta_5^4 - \beta_5^5 = \beta_5^{12} \\
 \beta_5^4 + \beta_5^5 + \beta_5^6 = \beta_5^7 & -\beta_5^4 + \beta_5^5 + \beta_5^6 = \beta_5^{15} \\
 \beta_5^5 + \beta_5^6 + \beta_5^7 = \gamma_5^3 & \beta_5^5 + \beta_5^6 - \beta_5^7 = \beta_5^{18} \\
 \beta_5^6 + \beta_5^7 + \beta_5^8 = \gamma_5^4 & \beta_5^6 - \beta_5^7 + \beta_5^8 = \gamma_5^{21} \\
 \beta_5^7 + \beta_5^8 + \beta_5^9 = \gamma_5^5 & \beta_5^7 - \beta_5^8 + \beta_5^9 = \beta_5^{24} \\
 \beta_5^8 + \beta_5^9 + \beta_5^{10} = \gamma_5^6 & \beta_5^8 - \beta_5^9 + \beta_5^{10} = \beta_5^{27} \\
 \beta_5^9 + \beta_5^{10} + \beta_5^{11} = \gamma_5^7 & \beta_5^9 - \beta_5^{10} + \beta_5^{11} = \beta_5^{30}
 \end{array}$$

Ferner ist:

$$\beta_5^1 + \beta_5^3 + \beta_5^4 = 90^\circ = \beta_5^0$$

$$\beta_5^1 + \beta_5^{10} + \beta_5^{11} = 90^\circ = \beta_5^0$$

$$\beta_5^3 + \beta_5^8 + \beta_5^{11} = 90^\circ = \beta_5^0$$

Aus diesen Gleichungen kann man den Satz aufstellen.

C. Alle möglichen Zusammenstellungen von Hypotenusenwinkeln, die zu derselben primzahligen Hypotenuse von verschiedener Potenz gehören, geben Hypotenusenwinkel von derselben primzahligen Hypotenuse zu einer Potenz, deren Exponent entweder die Summe aller Exponenten oder die Differenz aus einem Exponenten oder der Summe mehrerer Exponenten und der Summe der andern ist. Hier- von sind ausgenommen diejenigen Zusammenstellungen, die einen oder mehrere rechte Winkel oder  $0^\circ$  ergeben.

#### § 5.

Nach § 2. B. ist:

$$2(\gamma - \beta) = \delta_4$$

wo  $\delta_4$  ein Hypotenusenwinkel eines einfach abgeleiteten Dreiecks von einer Hypotenuse zur vierten Potenz und  $\gamma$  und  $\beta$  die Hypotenusenwinkel des ursprünglichen Dreiecks bezeichnen.

Subtrahirt man auf beiden Seiten  $\gamma$ , so ist

$$\gamma - 2\beta = \delta_4 - \gamma$$

Nach § 4. A. und B. ist  $\gamma - 2\beta$  entweder ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{a^3}$  oder von  $\triangle_{a^4}$ , also  $\delta_4 - \gamma$  muss ein Winkel von  $\triangle_{a^3}$  und  $\delta_4 + \gamma$  ein Winkel von  $\triangle_{a^5}$  sein.

Es ist also

$$\delta_4 + \gamma = \delta_5$$

oder für  $\delta_4$  den Wert eingesetzt:

$$2(\gamma - \beta) + \gamma = \delta_5 \quad \text{oder}$$

$$\text{I.} \quad \delta_5 = 3\gamma - 2\beta$$

Ebenso ergibt sich aus

$$2\gamma - \beta = \delta_4 + \beta$$

$$\text{II.} \quad \delta_5' = 2\gamma - 3\beta = 2(\gamma - \beta) - \beta$$

Da  $\delta_5$  und  $\delta_5'$  nicht gleich sein können, so muss, wenn sie ein Hypotenusenwinkelpaar bilden sollen,

$$\delta_5 + \delta_5' = 0$$

sein. Hieraus folgt, wenn  $3\gamma - 2\beta < 1R$  ist:

$$\delta_5' = -[2(\gamma - \beta) - \beta]$$

Ist  $3\gamma - 2\beta > 1R$  und  $2\gamma - 3\beta < 1R$ , so ist

$$\delta_5 = \pi - [2(\gamma - \beta) + \gamma] \quad \text{und}$$

$$\delta_5' = 2(\gamma - \beta) - \beta$$

Aus I. folgt dann weiter:

$$\delta_5 + \beta = 3\gamma - \beta \quad \text{also}$$

$$\delta_6 = \delta_5 - \beta \quad \text{oder}$$

$$\text{III.} \quad \delta_6 = 3(\gamma - \beta)$$

Denselben Wert erhält man auch für  $\delta_6'$ . Da  $\delta_6$  und  $\delta_6'$  nicht einander gleich sein können, so ist, wenn

$$\text{IV.} \quad 3(\gamma - \beta) < 1R \text{ ist,} \quad \delta_6' = 1R - 3(\gamma - \beta)$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$\delta_7 = 4\gamma - 3\beta \quad \text{oder gleich} \quad \pi - [3(\gamma - \beta) + \gamma]$$

$$\delta_7' = -(3\gamma - 4\beta) \quad \text{oder gleich} \quad 3\gamma - 4\beta$$

Ist  $3\gamma - 4\beta > 1R$  aber  $< 2R$ , so muss  $3(\gamma - \beta) + \gamma > 2R$  sein.

Es ist dann

$$\text{V.} \quad \delta_7 = 3(\gamma - \beta) + \gamma - 2\pi$$

$$\text{VI.} \quad \delta_7' = 2\pi - [3(\gamma - \beta) - \beta]$$

Berechnet man  $\delta_7$  und  $\delta_7'$  nach Tabelle in § 4., so ist

$$\delta_7 = \gamma_5^7 = 78^\circ 5' 21\frac{1}{2}''.$$

$$\delta_7' = \beta_5^7 = 11^\circ 54' 38\frac{1}{2}''$$

Folgende allgemeine Formeln ergeben sich aus III. und IV.

$$\delta_{2n} = \frac{n' + 1}{2} \pi - n(\gamma - \beta)$$

VII.

$$\delta'_{2n} = \frac{\pi}{2} - [(n' + 1) \frac{\pi}{2} - n(\gamma - \beta)] - n(\gamma - \beta) - \frac{n'}{2} \pi$$

und aus V. und VI.:

$$\delta_{2n+1} = n(\gamma - \beta) + \gamma - \frac{n'+1}{2}\pi$$

VII.

$$\delta'_{2n+1} = \frac{n'+1}{2}\pi - [n(\gamma - \beta) - \beta]$$

wo  $n$  und  $n'$  ganze Zahlen bedeuten und  $n'$  so gross gewählt werden muss, dass  $\delta_{2n}, \delta'_{2n}, \delta_{2n+1}, \delta'_{2n+1} < 1R$  ist.

Für die trigonometrische Berechnung der Winkel erhält man aus den Gleichungen III. bis VI. die Formeln:

$$\sin \delta_{2n} = \sin n(\gamma - \beta) \qquad \cos \delta_{2n} = \cos n(\gamma - \beta) = \sin \delta'_{2n}$$

$$\begin{aligned} \sin \delta_{2n+1} &= \sin [(n+1)\beta - n\beta] & \sin \delta'_{2n+1} &= [(n+1)\beta - n\gamma] \\ &= \cos [(n+1)\beta] - n\gamma & &= \cos [(n+1)\gamma - n\beta] \end{aligned}$$

§ 6.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die in Figur 1. nach dem Teilpunkt des einen Schenkels gezogene Transversale mit dem andern Schenkel bildet mit  $\eta_b$ , so erhält man das Kathetenpaar nach § 1. aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin 2\eta_b &= 2 \sin \eta_b \cdot \cos \eta_b \\ \cos 2\eta_b &= 2 \cos^2 \eta_b - 1 \end{aligned}$$

Ist z. B. die Hypotenuse  $17 = 4^2 + 1$ , so ist

$$\sin \eta_b = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \eta_b = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

und

$$\sin 2\eta_b = \frac{8}{17} = \sin \beta \frac{8}{17}$$

$$\cos 2\eta_b = \frac{15}{17} = \sin \gamma \frac{15}{17}$$

Die pythagoreischen Zahlen heissen:

$$17 \quad 8 \quad 15$$

Stellt  $a = m^2 + n^2$ , wo  $m > n$  ist, eine Hypotenuse dar, so werden, wie man auch die Grundzahlen  $m$  und  $n$  wählen mag, ob grade oder ungrade,  $\sin 2\eta_b$  und  $\cos 2\eta_b$  ein Kathetenpaar, das aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist, geben.

Angenommen,  $m$  und  $n$  sind grade Zahlen, also

$$m = 2m' \quad \text{und} \quad n = 2n'$$

dann ist:

$$\text{I.} \quad \sin \eta_b = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos \eta_b = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\text{II.} \quad \sin 2\eta_b = \frac{2 \cdot m \cdot n}{m^2 + n^2} = \frac{2m' \cdot n'}{m'^2 + n'^2}$$

$$\cos 2\eta_b = \frac{2m^2}{m^2 + n^2} - 1 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \frac{m'^2 - n'^2}{m'^2 + n'^2}$$

Nun kann der Fall eintreten, dass  $m'$  und  $n'$  noch grade sind, dann wird man die Brüche wieder mit 4 kürzen können, bis schliesslich  $m'$  und  $n'$  beide ungrade Zahlen sind oder nur eine grade Zahl ist. Sind  $m'$  und  $n'$  verwandte Zahlen, also

$$m' = m''p \quad \text{und} \quad n' = n''p$$

so ist

$$\sin 2\eta_b = \frac{2m''p \cdot n''p}{m''^2 p^2 + n''^2 p^2}$$

$$\cos 2\eta_b = \frac{m''^2 p^2 - n''^2 p^2}{m''^2 p^2 + n''^2 p^2} = \frac{m''^2 - n''^2}{m''^2 + n''^2}$$

wo nunmehr  $m''$  und  $n''$  relative Primzahlen sind.

Sind  $m''$  und  $n''$  beide ungrade, so geben  $2m'' \cdot n''$ ,  $m''^2 - n''^2$ ,  $m''^2 + n''^2$  drei grade Zahlen, da sowol die Differenz, also auch die Summe der Quadrate zweier ungeraden Zahlen grade Zahlen geben. Kürzt man die Brüche mit 2 und setzt

$$\text{III.} \quad \sin 2\eta_b = \frac{r}{t}$$

$$\cos 2\eta_b = \frac{s}{t}$$

dann ist  $m'' \cdot n'' = r$  eine ungerade Zahl und

$$\frac{m''^2 - n''^2}{2} = s = \frac{(m'' + n'')(m'' - n'')}{2}$$

eine grade Zahl, da sowol die Summe als auch die Differenz zweier ungerader Zahlen grade Zahlen geben und sowol

$$\frac{m'' + n''}{2} (m'' - n'') \quad \text{als auch} \quad (m'' + n'') \frac{m'' - n''}{2}$$

gerade Zahlen sind.

Ist von den beiden relativen Primzahlen  $m''$  und  $n''$  nur  $n''$  ungerade, dann ist

$$(m''^2 - n''^2) = (m'' + n'')(m'' - n'')$$

ungerade, da sowol die Summe als auch die Differenz zweier Zahlen, von denen die eine ungerade ist, stets eine ungerade Zahl giebt.

Man erhält hieraus den Satz:

A. In welchem Verhältniss man auch immer den einen Schenkél im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck teilen mag, stets ist das Kathetenpaar aus zwei relativen Primzahlen zusammengesetzt, von denen eine ungerade ist.

Aus III. ergibt sich die Gleichung:

$$\sin^2 \eta_b + \cos^2 \eta_b = \frac{r^2}{t^2} + \frac{s^2}{t^2} = 1$$

oder

$$t^2 = r^2 + s^2$$

Nach Satz A. sind  $r$  und  $s$  als relative Primzahlen zu betrachten, von denen eine ungerade ist. Es ist mithin auch  $t^2$  eine ungerade Zahl, da die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen eine ungerade ist, stets ungerade ist. Also hat man den Satz:

B. Die Hypotenuse ist stets eine ungerade Zahl.

## § 7.

1. Sind in den Gleichungen § 6. I.  $m$  und  $n$  relative Primzahlen, von denen nur eine gerade ist, so ist

$$t = m^2 + n^2$$

eine Hypotenuse.

Die Gleichungen II. § 6. geben:

$$\sin^2 \eta_b + \cos^2 \eta_b = \frac{(2 \cdot m \cdot n)^2}{(m^2 + n^2)^2} + \frac{(m^2 - n^2)^2}{(m^2 + n^2)^2} = 1$$

Da  $m$  und  $n$  relative Primzahlen sind, von denen eine gerade ist, so müssen auch  $(2m \cdot n)$  und  $(m^2 - n^2)$  relative Primzahlen sein;

denn wären sie dies nicht, so müssten sie einen gemeinsamen Factor haben; also müssten dann auch  $m$  und  $n$  verwandte Zahlen sein; dies aber widerspricht der Voraussetzung. Nun ist  $2m \cdot n$  eine gerade und  $m^2 - n^2$  eine ungerade Zahl, also bilden beide das Kathetenpaar zu der Hypotenuse

$$t = m^2 + n^2$$

2. Sind  $m$  und  $n$  gerade Zahlen, also

$$m = 2m' \quad \text{und} \quad n = 2n'$$

so ist

$$\sin \eta_b = \frac{2n'}{2\sqrt{m'^2 + n'^2}} = \frac{n'}{\sqrt{m'^2 + n'^2}}$$

$$\cos \eta_b = \frac{2m'}{2\sqrt{m'^2 + n'^2}} = \frac{m'}{\sqrt{m'^2 + n'^2}}$$

Erfüllen  $m'$  und  $n'$  die Fall 1) gestellte Bedingung, so ist

$$t = m'^2 + n'^2$$

eine Hypotenuse.

3. Sind  $m'$  und  $n'$  verwandte Zahlen, ist also

$$m' = pm'' \quad \text{und} \quad n' = p \cdot n''$$

wo  $m''$  und  $n''$  relative Primzahlen sind, von denen eine gerade ist, dann ist

$$t = m''^2 + n''^2$$

4. Sind  $m'$  und  $n'$  ungerade Zahlen, also

$$m' = 2m'' + 1 \quad \text{und} \quad n' = 2n'' + 1$$

dann ist, wenn  $m' > n'$  ist,

$$\sin \eta_b = \frac{2n'' + 1}{\sqrt{(2m'' + 1)^2 + (2n'' + 1)^2}} = \frac{2n'' + 1}{\sqrt{4m''^2 + 4m'' + 4n''^2 + 4n'' + 2}}$$

$$= \frac{2n'' + 1}{N\sqrt{2}}, \quad \text{wo } N = \sqrt{2m''^2 + 2m'' + 2n''^2 + 2n'' + 1}$$

ist und

$$\cos \eta_b = \frac{2m'' + 1}{N\sqrt{2}}$$

Ferner ist, wenn in Figur 1

$$AC = 2m'' + 1, \quad CD = 2n'' + 1 \quad \text{ist:}$$

$$AD = \sqrt{(2m'' + 1)^2 + (2n'' + 1)^2} = N\sqrt{2}$$

und

$$BD = 2(m'' - n'')$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Transversale mit der Hypotenuse bildet, mit  $\eta_b$ , so ist nach dem Sinussatze, wenn

$$\sin ABC = \sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{2} \cdot N : 2(m'' - n'') = \sqrt{\frac{1}{2}} : \sin \eta_a \quad \text{oder}$$

$$\text{I.} \quad \sin \eta_a = \frac{m'' - n''}{N}$$

Nun ist  $\eta_a + \eta_b = 45^\circ$ . also ist

$$\sin(\eta_a + \eta_b) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin \eta_a \cdot \cos \eta_b + \cos \eta_a \cdot \sin \eta_b$$

Werden die Werte für  $\sin \eta_b$ ,  $\cos \eta_b$  und  $\sin \eta_b$  eingesetzt und wird die Gleichung in Bezug auf  $\cos \eta_b$  aufgelöst, so erhält man:

$$\cos \eta_a = \frac{N^2 - (m'' - n'')(2m'' + 1)}{N(2n'' + 1)}$$

Nun ist

$$[N^2 - (m'' - n'')(2m'' + 1)] = (m'' + n'' + 1)(2n'' + 1)$$

folglich ist

$$\text{II.} \quad \cos \eta_a = \frac{m'' + n'' + 1}{N}$$

Da  $2m''$  und  $2n''$  gerade Zahlen sind, so können  $m''$  und  $n''$  gerade oder ungerade Zahlen sein. Nimmt man an, dass beide gleichzeitig gerade oder ungerade sind, dann ist immer  $(m'' - n'')$  gerade und  $(m'' + n'' + 1)$  ungerade. Ist  $m''$  gerade und  $n''$  ungerade oder umgekehrt  $m''$  ungerade und  $n''$  gerade, so ist  $(m'' - n'')$  stets ungerade  $(m'' + n'' + 1)$  gerade. Von den beiden Zahlen  $(m'' - n'')$  und  $(m'' + n'' + 1)$  ist in jedem Falle die eine ungerade und die andere gerade.

Aus den Gleichungen I. und II. folgt

$$\sin^2 \eta_a + \cos^2 \eta_a = \frac{(m'' - n'')^2}{N^2} + \frac{(m'' + n'' + 1)^2}{N^2} = 1$$

oder

$$N^2 = (m'' - n'')^2 + (m'' + n'' + 1)^2$$

Nun könnte noch der Fall eintreten, dass beide Zahlen  $(m'' - n'')$  und  $(m'' + n'' + 1)$  verwandte Zahlen sind, dann muss auch  $N$  denselben Factor mit ihnen gemein haben. Da dieser in  $N^2$  eine Quadratzahl sein muss, so wird stets, wenn man die Gleichung III. durch diese teilt und

$$\frac{N^2}{d^2} = N'^2, \quad \frac{(m'' - n'')^2}{d^2} = m''^2, \quad \frac{(m'' + n'' + 1)^2}{d^2} = n''^2$$

setzt, wo  $d^2$  den gemeinsamen Factor bedeutet,

$$N'^2 = m''^2 + n''^2$$

sein. Da nun  $m''$  und  $n''$  relative Zahlen sind, von denen eine ungerade ist, so ist

$$N'^2 = m''^2 + n''^2 = t$$

eine Hypotenuse.

Aus den vier Fällen ergibt sich der Satz:

Jede Hypotenuse lässt sich in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen eine ungerade ist, zerlegen.

### § 8.

Da jede ungerade Zahl von 1er Form  $4p \pm 1$  ist, so kann man

$$m = 4p \pm 1 \quad \text{und} \quad n = 2l$$

setzen. Alsdann ist:

$$t = m^2 + n^2 = 4(4p^2 \pm 2p + l^2) + 1$$

Nun ist

$$4p^2 \pm 2p = 2p(2p \pm 1)$$

gleich oder grösser als null, also muss  $(4p^2 \pm 2p + l^2)$  positiv sein.

Folglich ist für

$$4p^2 \pm 2p + l^2 = k$$

$$t = 4k + 1$$

Also hat man den Satz:

A. Jede Hypotenuse ist von der Form  $4k + 1$ .

Nun lassen sich, wie in der Zahlentheorie gezeigt wird, nur Primzahlen von der Form  $4k + 1$  oder ihre Producte in der Form der Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, darstellen. Also gilt der Satz:

B. Alle Hypotenusen sind Primzahlen von der Form  $4k + 1$  oder Producte aus Primzahlen von der Form  $4k + 1$ .

### § 9.

Da nach dem Fermat'schen Satze eine Primzahl von der Form  $4k + 1$  nur eine Zerlegung in die Summe zweier Quadrate zulässt,

so giebt es auch nur ein Teilverhältniss, nach welchem man den Schenkel  $CB$  teilen muss, um das Kathetenpaar zu erhalten. Man erhält somit nur ein Hypotenusenwinkelpaar  $\beta$  und  $\gamma$ , und da  $\sin \beta$  und  $\cos \beta$  eindeutig bestimmt sind, so giebt es auch nur ein Kathetenpaar.

Für eine Hypotenuse, die eine Potenz einer primzahligen Hypotenuse ist, geben die Gleichungen § 5. IX. ebenfalls nur ein Kathetenpaar.

Aus den Gleichungen § 4. I. geht hervor, dass zu einer Potenzhypotenuse noch andere Kathetenpaare gehören. Für die Hypotenuse  $5^5$  heissen diese zum Beispiel, wie sich aus § 3. (3 a, b) und § 4., 1. ergibt:

- 1)  $5^4$  237 3116
- 2)  $5^3$  1100 2925 oder  $5^2 \cdot 5^3$   $5^2 \cdot 44$   $5^3 \cdot 117$
- 3)  $5^5$  1875 2500 oder  $5^4 \cdot 5^1$   $5^4 \cdot 3$   $5^4 \cdot 4$

Hierzu kommen noch zwei Kathetenpaare, die durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\sin\left(\beta \frac{336}{5^4} + 90'\right) = \cos \beta \frac{336}{5^4} = \frac{527}{5^4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2635}{5^5}$$

$$\cos\left(\beta \frac{336}{5^4} + 90'\right) = -\sin \beta \frac{336}{5^4} = -\frac{336}{5^4} \cdot \frac{5}{5} = -\frac{1680}{5^5}$$

und

$$\sin\left(\beta \frac{7}{25} + 90'\right) = \cos \beta \frac{7}{25} = \frac{24}{25} \cdot \frac{5^3}{5^3} = \frac{3000}{5^5}$$

$$\cos\left(\beta \frac{7}{25} + 90'\right) = -\sin \beta \frac{7}{25} = -\frac{7}{25} \cdot \frac{5^3}{5^3} = -\frac{875}{5^5}$$

also:

- 4)  $5^5$  1680 2635 oder  $5^4 \cdot 5^1$   $336 \cdot 5^6$   $527 \cdot 5^1$
- 5)  $5^5$  875 3000 oder  $5^2 \cdot 5^3$   $7 \cdot 5^3$   $24 \cdot 5^3$

Die Hypotenuse lässt somit 5 Kathetenpaare zu, von denen nur 1) aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist. Alle anderen Kathetenpaare bestehen aus verwandten Zahlen, von denen jede sich zu  $5^5$  verhält wie beziehungsweise jede Kathete zu der Hypotenuse in  $\frac{\triangle}{5}$ ,  $\frac{\triangle}{5^2}$ ,  $\frac{\triangle}{5^3}$ ,  $\frac{\triangle}{5^4}$ . Um zu beweisen, dass zu einer Hypotenuse  $a^n$

$n$  Kathetenpaare gehören, geht man aus von dem Satze E § 3. Nach diesem geben die Formeln:

$$\sin n\beta = \sin \beta \left[ (2 \cos \beta)^{n-1} - \frac{n-2}{1} (2 \cos \beta)^{n-3} \right. \\ \text{I.} \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} (2 \cos \beta)^{n-5} - + \dots \right]$$

$$\cos n\beta = \frac{1}{2} \left[ (2 \cos \beta)^n - \frac{n}{1} (2 \cos \beta)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2} (2 \cos \beta)^{n-4} - + \dots \right]$$

das Kathetenpaar zu  $\triangle_{a^n}$ , das aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist. Um die andern  $(n-1)$  Kathetenpaare zu finden, setzt man in I. für  $p\beta = \pm 90^\circ$ , dann ist

$$\text{II.} \qquad \sin [(n-p)\beta \pm 90^\circ] = \sin (n-p)\beta \\ \cos [(n-p)\beta \pm 90^\circ] = \cos (n-p)\beta$$

Die Formeln für  $\sin(n-p)\beta \cdot \frac{n^p}{a^p}$  und  $\cos(n-p)\beta \cdot \frac{a^p}{a^p}$  bestimmen dann für  $p = 0$  bis  $p = n-1$   $n$  verschiedene Kathetenpaare.

Setzt man in I.  $p\beta = p\gamma$ , so ist

$$\sin [(n-p)\beta + p\gamma] = \sin [(n-2p)\beta + p\beta + p\gamma]$$

und da  $p\beta + p\gamma = p90^\circ$  ist

$$\sin [(n-p)\beta + p\gamma] = \sin(n-2p)\beta \cos(p90^\circ) + \cos(n-2p)\beta \sin p90^\circ$$

Ebenso ist:

$$\cos [(n-p)\beta + p\gamma] = \cos(n-2p)\beta \cos(p90^\circ) - \sin(n-2p)\beta \sin(p90^\circ)$$

Ist  $p$  ungerade, so ist  $\cos(p90^\circ) = 0$  und  $\sin(p90^\circ) = \pm 1$  und man erhält:

$$\text{III.} \qquad \sin [(n-p)\beta + p\gamma] = \pm \cos(n-2p)\beta \\ \cos [(n-p)\beta + p\gamma] = \mp \sin(n-2p)\beta$$

Ist  $p$  eine gerade Zahl, so ist, da  $\cos(p90^\circ) = \mp 1$  und  $\sin(p90^\circ) = 0$  ist,

$$\text{III a.} \qquad \sin [(n-p)\beta + p\gamma] = \mp \sin(n-2p)\beta \\ \cos [(n-p)\beta + p\gamma] = \mp \cos(n-2p)\beta$$

Diese Gleichungen II. und IIIa. geben dieselben Kathetenpaare wie II, wenn in II für  $p$  alle geraden Zahlen von 2 bis  $n$  gesetzt werden.

Ferner ist, wenn  $p\beta = -p\gamma$  ist,

$$\begin{aligned}\sin[(n-p)\beta - p\gamma] &= \sin(n-p)\beta \cos p\gamma - \cos(n-p)\beta \sin p\gamma \\ \cos[(n-p)\beta - p\gamma] &= \cos(n-p)\beta \cos p\gamma + \sin(n-p)\beta \sin p\gamma\end{aligned}$$

Ist  $p$  eine gerade Zahl, so ist:

$$\begin{aligned}\cos p\gamma &= \cos p(90^\circ - \beta) = \mp \cos p\beta \\ \sin p\gamma &= \sin p(90^\circ - \beta) = \pm \sin p\beta\end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}\sin[(n-p)\beta - p\gamma] &= \mp \sin(n-p)\beta \cos p\beta \mp \cos(n-p)\beta \cdot \sin p\beta \\ &= \mp \sin n\beta\end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned}\cos[(n-p)\beta - p\gamma] &= \mp \cos(n-p)\beta \cdot \cos p\beta \pm \sin(n-p)\beta \sin p\beta \\ &= \mp \cos n\beta\end{aligned}$$

Ist  $p$  eine ungerade Zahl, so ist, da  $\cos p\gamma = \pm \sin p\beta$  und  $\sin p\gamma = \pm \cos p\beta$  ist,

$$\begin{aligned}\sin[(n-p)\beta - p\gamma] &= \pm \sin(n-p)\beta \cdot \sin p\beta \mp \cos(n-p)\beta \cdot \cos p\beta \\ &= \mp \cos n\beta\end{aligned}$$

IV a.

$$\begin{aligned}\cos[(n-p)\beta - p\gamma] &= \pm \cos(n-p)\beta \cdot \sin p\beta \pm \sin(n-p)\beta \cdot \cos p\beta \\ &= \pm \sin n\beta\end{aligned}$$

Die Gleichungen III. und IV. geben den allgemeinen Beweis für die Sätze *A* und *B* in § 4.

Somit sind alle möglichen Zusammenstellungen von Winkeln, die zu Hypotenusen niedriger Potenz gehören, erschöpft, und der Beweis erbracht, dass zu einer Hypotenuse  $a^n$   $n$  verschiedene Kathetenpaare gehören, von denen nur das eine, das aus den Gleichungen I. sich ergibt, aus relativen Primzahlen zusammengesetzt ist.

## § 10.

Sind für eine primzahlige Hypotenuse die Werte von  $\sin \eta_b$  und  $\cos \eta_b$  bekannt, so lassen sich aus den Formeln für  $\sin n\eta_b$  und  $\cos n\eta_b$  die Grundzahlen bestimmen, deren Quadratzahlen als Summe gesetzt die Hypotenuse  $a^n$  geben.

Ist z. B. die Hypotenuse  $5^5$  in die Summe zweier Quadrat-

zahlen zu zerlegen, so erhält man aus den Gleichungen § 9. I. für  $\sin \eta_b = \frac{1}{\sqrt{5}}$  und  $\cos \eta_b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ :

$$\text{I. } \sin 5\eta_b = \frac{41}{\sqrt{3125}} \quad \text{und} \quad \cos 5\eta_b = -\frac{38}{\sqrt{3125}}$$

Hieraus folgt:

$$\sin^2 5\eta_b + \cos^2 5\eta_b = \frac{41^2}{3125} + \frac{38^2}{3125} = 1 \quad \text{oder}$$

$$1) \quad 5^5 = 41^2 + 38^2$$

Die Formeln für  $\sin n\eta_b$  und  $\cos n\eta_b$  geben nur eine Zerlegung der Hypotenuse  $a^n$  in die Summe zweier Quadratzahlen, deren Grundzahlen relative Primzahlen sind. Ausser dieser Zerlegung gibt es bei einer Potenzhypotenuse noch andere, bei welchen die Grundzahlen verwandte Zahlen sind. Diese lassen sich bestimmen aus den Formeln III. § 9., wenn man  $\beta = \eta_b$  setzt. Es ist:

$$\begin{aligned} \sin(n-2p)\eta_b &= \sin[(n-p)\eta_b - p\eta_b] \\ &= \sin(n-p)\eta_b \cos p\eta_b - \cos(n-p)\eta_b \sin p\eta_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \cos(n-2p)\eta_b &= \cos[(n-p)\eta_b - p\eta_b] \\ &= \cos(n-p)\eta_b \cos p\eta_b + \sin(n-p)\eta_b \cdot \sin p\eta_b \end{aligned}$$

Für die Hypotenuse  $5^5$  ist  $n = 5$ , für  $p = 0$  erhält man die Gleichungen I., für  $p = 1$  ist:

$$\begin{aligned} \sin 3\eta_b &= \sin 4\eta_b \cdot \cos \eta_b - \cos 4\eta_b \cdot \sin \eta_b \\ \cos 3\eta_b &= \cos 4\eta_b \cdot \cos \eta_b + \sin 4\eta_b \cdot \sin \eta_b \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\sin \eta_b = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \eta_b = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 4\eta_b = \frac{24}{\sqrt{625}}, \quad \cos 4\eta_b = -\frac{7}{\sqrt{625}}$$

folglich

$$\sin 3\eta_b = \frac{55}{\sqrt{3125}}, \quad \cos 3\eta_b = \frac{10}{\sqrt{3125}}$$

Es ergibt sich

$$2) \quad 5^5 = 55^2 + 10^2$$

Für  $p = 2$  ist:

$$\begin{aligned} \sin \eta_b &= \sin 3\eta_b \cdot \cos 2\eta_b - \cos 3\eta_b \cdot \sin 2\eta_b \\ \cos \eta_b &= \cos 3\eta_b \cdot \cos 2\eta_b + \sin 3\eta_b \cdot \sin 2\eta_b \end{aligned}$$

Nun ist aus III.:

$$\sin 3\eta_b = \frac{11}{\sqrt{125}}, \quad \cos 3\eta_b = \frac{2}{\sqrt{125}}$$

ferner ist:

$$\sin 2\eta_b = \frac{4}{\sqrt{25}}, \quad \cos 2\eta_b = \frac{3}{\sqrt{25}}$$

also ist:

$$\sin \eta_b = \frac{25}{\sqrt{3125}}, \quad \cos \eta_b = \frac{50}{\sqrt{3125}} \quad \text{und}$$

$$3) \quad 5^5 = 25^2 + 50^2$$

Für  $p = 3, 4, 5$  ergeben sich dieselben Zerlegungen wie 3), 2), 1)

Um zu beweisen, dass es für eine gerade Zahl  $n$   $p = \frac{n}{2}$  und für eine ungerade Zahl  $n$   $p = \frac{n+1}{2}$  Zerlegungen giebt, setzt man in den Formeln II. § 9.  $\beta = \eta_b$  und  $a = \sqrt{a}$ . Es sei

$$\sin(n-p)\eta_b \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{l_{n-p}}} = \frac{l_{n-p}}{\sqrt{a_{n-p}}} \cdot \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{a^p}}$$

$$\cos(n-p)\eta_b \cdot \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{a^p}} = \frac{h_{n-p}}{\sqrt{a_{n-p}}} \cdot \frac{\sqrt{a^p}}{\sqrt{a^p}}$$

dann ist:

$$\sin^2(n-p)\eta_b \cdot \frac{a^p}{a^p} + \cos^2(n-p)\eta_b \cdot \frac{a^p}{a^p} = \frac{l_{n-p}^2 \cdot a^p + h_{n-p}^2 \cdot a^p}{a_{n-p}^2 \cdot a^p} = 1$$

oder

$$\text{III.} \quad a_{n-p}^2 \cdot a^p = a^n = l_{n-p}^2 \cdot a^p + h_{n-p}^2 \cdot a^p$$

Sollen nun die Glieder rechts in III. Quadratzahlen sein, so muss  $a^p$ , da die Factoren Quadratzahlen sind, eine Quadratzahl sein; dies ist nur möglich, wenn  $p$  eine gerade Zahl ist. Hieraus folgt, dass die Gleichungen II. alle Zerlegungen darstellen. Ist nun  $n$  eine gerade Zahl, so geben die Gleichungen II. für  $p = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$ , also  $\frac{n}{2}$  Zerlegungen; für eine ungerade Zahl  $n$  geben alle Zahlen für  $p$  von  $0, 1, 2$  bis  $\frac{n-1}{2}$ , also  $\frac{n+1}{2}$  Zerlegungen von  $a^n$  in die Summe zweier Quadrate.

### § 11.

Teilt man im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  den Schenkel  $CB$  harmonisch im Verhältniss  $2 : 1$ , so dass

$$BC : CD = BE : ED = 2 : 1$$

ist, dann ist

$$BC = 3 \cdot EB, \quad CD = \frac{3}{2} EB, \quad DE = \frac{1}{2} \cdot EB, \quad CE = 2 \cdot EB$$

Nach dem Pythagoras ist

$$9 EB^2 + 4 EB^2 = AE^2$$

folglich ist

$$AE = EB \sqrt{13}$$

Ferner ist

$$\sin EAB : \sqrt{\frac{1}{2}} = EB : EB \cdot \sqrt{13} \quad \text{oder}$$

$$\text{I.} \quad \sin EAB = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{13}}$$

Da  $\sin CAE = \frac{2}{\sqrt{13}}$  und  $\cos CAE = \frac{3}{\sqrt{13}}$  ist, so ist

$$\begin{aligned} \sin(\text{Wkl. } CAE + \text{Wkl. } EAB) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \cos EAB + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$\text{II.} \quad \cos EAB = \frac{5 \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{13}}$$

Es ist dann:

$$\sin 2 \text{ Wkl } EAB = \frac{5}{13}, \quad \cos 2 \text{ Wkl } EAB = \frac{12}{13}$$

Da  $13^2 = 5^2 + 12^2$  ist, so ist 2 Wkl.  $EAB$  ein Hypotenusenwinkel von  $\triangle_{13}^b$ ; der andere Hypotenusenwinkel ist demnach 2 Wkl.  $CAE$ .

Um zu untersuchen, ob auch Wkl.  $DAE$  die Hälfte eines Hypotenusenwinkels ist, setzt man:

$$\begin{aligned} \text{III.} \quad \sin DAE &= \sin(\text{Wkl. } DAB - \text{Wkl. } EAB) \\ \cos DAE &= \cos(\text{Wkl. } DAB - \text{Wkl. } EAB) \end{aligned}$$

Nun ist nach § 1.:

$$\text{IV.} \quad \sin DAB = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und}$$

$$\sin CAD = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos CAD = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

also erhält man aus der Formel

$$\begin{aligned} \sin(\text{Wkl. } CAD + \text{Wkl. } DAB) &= \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cos DAB \\ + 2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &\text{ die Gleich. V.} \quad \cos DAB = 3 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}. \end{aligned}$$

Mittels der Gleichungen I., II., IV., V. werden die Gleichungen III. umgerechnet in

$$\text{VI.} \quad \sin DAE = \frac{1}{\sqrt{65}} \quad \text{und} \quad \cos DAE = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

hieraus folgt:

$$\text{VII.} \quad \sin 2 DAB = \frac{16}{65} \quad \text{und} \quad \cos 2 DAE = \frac{63}{65}$$

Nun ist

$$65^2 = 16^2 + 63^2$$

also ist auch  $2 DAE$  ein Hypotenusenwinkel.

Hieraus ergibt sich der Satz:

A. Die Transversalen nach den Teilpunkten eines harmonisch geteilten Schenkels im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck bilden unter sich und mit den Seiten des Dreiecks halbe Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken.

Ein in § 18 aufgestellte Tabelle wird diesen Satz bestätigen.

### § 12.

Wie die Differenz, so ist auch die Summe der beiden Winkel  $DAD$  und  $BAE$  die Hälfte eines Hypotenusenwinkels von  $\triangle_{65}$ . Es ist

$$\text{I.} \quad \sin(DAB + BAE) = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

I.

$$\cos(DAB + BAE) = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

und

$$\text{II.} \quad \sin 2(DAB + BAE) = \frac{56}{65}$$

II.

$$\cos 2(DAB + BAE) = \frac{33}{65}$$

Die Gleichungen II. geben:

$$65^2 = 33^2 + 56^2$$

mithin ist  $2(DAB + BAE)$  ein Hypotenusenwinkel von  $\frac{56}{65}\triangle^{33}$ .

Die Hypotenuse 65 ist ein Product von den primzahligen Hypotenusen  $a_1 = 5$  und  $a_2 = 16$ . Zu ihr gehören die beiden zusammengesetzten pythagoreischen Dreiecke, wie aus II. und § 11. VII. sich ergibt,  $\frac{63}{65}\triangle^{33}$  und  $\frac{13}{65}\triangle^{16}$ . Hieraus lassen sich folgende Sätze aufstellen:

A. Das Product zweier primzahligen Hypotenusen  $a_1$  und  $a_2$  ist eine Hypotenuse eines zusammengesetzten pythagoreischen Dreiecks.

B. Zu jeder Hypotenuse, die ein Product zweier verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, gehören zwei Kathetenpaare.

Ferner ergibt sich aus I. und § 11. VI.:

$$65 = 4^2 + 7^2 \quad \text{und} \quad 65 = 1^2 + 8^2$$

es folgt hieraus der Satz:

C. Jede Hypotenuse, die ein Product zweier verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, lässt sich zweifach in der Form der Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen darstellen.

### § 13.

Um die pythagoreischen Dreieckszahlen von  $\triangle_{a_1 \cdot a_2}$  aufzusuchen, sind, wie aus § 11. III. und § 12 II. hervorgeht, folgende Formeln anzuwenden:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \sin(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) &= \sin \beta_{a_1} \cdot \cos \beta_{a_2} \pm \cos \beta_{a_1} \cdot \sin \beta_{a_2} \\ \cos(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) &= \cos \beta_{a_1} \cdot \cos \beta_{a_2} \mp \sin \beta_{a_1} \cdot \sin \beta_{a_2} \end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned} \sin(\beta_{a_1} \pm \gamma_{a_2}) &= \sin \beta_{a_1} \cdot \cos \gamma_{a_2} \pm \cos \beta_{a_1} \cdot \sin \gamma_{a_2} \\ \cos(\beta_{a_1} \pm \gamma_{a_2}) &= \cos \beta_{a_1} \cdot \cos \gamma_{a_2} \mp \sin \beta_{a_1} \cdot \sin \gamma_{a_2} \end{aligned}$$

oder  $\sin(\gamma_{\alpha_1} \pm \beta_{\alpha_2})$  und  $\cos(\gamma_{\alpha_1} \pm \beta_{\alpha_2})$

Für  $\triangle$  ist  
5 . 13

$$\sin \beta_5 = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta_{13} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \beta_5 = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta_{13} = \frac{12}{13}$$

in I. einzusetzen, und man erhält:

$$\sin(\beta_5 + \beta_{13}) = \frac{56}{65}, \quad \cos(\beta_5 + \beta_{13}) = \frac{33}{65}$$

$$1) \quad \frac{56}{5} \triangle \frac{33}{13} : 65 \quad 33 \quad 56$$

und

$$\sin(\beta_5 - \beta_{13}) = \frac{16}{65}, \quad \cos(\beta_5 - \beta_{13}) = \frac{63}{65}$$

$$2) \quad \frac{63}{65} \triangle \frac{16}{65} : 65 \quad 16 \quad 63$$

Hierzu kommen noch aus den Gleichungen:

$$\sin(\beta_5 + 90^\circ) = \cos \beta_5 \cdot \frac{13}{13} = \frac{52}{65}$$

$$\cos(\beta_5 + 90^\circ) = \sin \beta_5 \cdot \frac{13}{13} = \frac{39}{65}$$

und aus:

$$\sin(\beta_{13} + 90^\circ) = \cos \beta_{13} \cdot \frac{5}{5} = \frac{60}{65}$$

$$\cos(\beta_{13} + 90^\circ) = -\sin \beta_{13} \cdot \frac{5}{5} = \frac{25}{65}$$

die pythagoreischen Zahlen:

$$3) \quad \frac{52}{5} \triangle \frac{39}{13} : 65 \quad 39 \quad 52, \quad 13 \cdot 5 \quad 13 \cdot 3 \quad 13 \cdot 4$$

$$4) \quad \frac{63}{5} \triangle \frac{16}{13} : 65 \quad 25 \quad 60, \quad 5 \cdot 13 \quad 5 \cdot 5 \quad 5 \cdot 12$$

#### § 14.

Ist die Hypotenuse ein Product aus drei verschiedenen primzahligen Hypotenusen, so wird durch folgende trigonometrische Ausdrücke die Anzahl der Paare der Katheten, die relative Primzahlen sind, dargestellt:

- I.
- 1)  $\sin[(\beta_{a_1} + \beta_{a_2}) + \beta_{a_3}]$  und  $\cos[(\beta_{a_1} + \beta_{a_2}) + \beta_{a_3}]$
  - 2)  $\sin[(\beta_{a_1} + \beta_{a_2}) - \beta_{a_3}]$  und  $\cos[(\beta_{a_1} + \beta_{a_2}) - \beta_{a_3}]$
  - 3)  $\sin[(\beta_{a_1} - \beta_{a_2}) + \beta_{a_3}]$  und  $\cos[(\beta_{a_1} - \beta_{a_2}) + \beta_{a_3}]$
  - 4)  $\sin[(\beta_{a_1} - \beta_{a_2}) - \beta_{a_3}]$  und  $\cos[(\beta_{a_1} - \beta_{a_2}) - \beta_{a_3}]$

Dies sind  $2^2$  Kathetenpaare.

Ist das Product aus vier verschiedenen primzahligen Hypotenusen zusammengesetzt, so ist  $\beta_{a_4}$  zu diesen vier verschiedenen Winkelzusammensetzungen je einmal mit  $+$  und je einmal mit  $-$  hinzuzufügen; man erhält  $2^3 = 2^{4-1}$  Kathetenpaare. Bei einem Product aus fünf verschiedenen primzahligen Hypotenusen werden  $2^4 = 2^{5-1}$  Kathetenpaare vorhanden sein. Es ergibt sich der Satz:

A. Eine Hypotenuse, die ein Product aus  $p$  verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, lässt  $2^{p-1}$  verschiedene Paare von Katheten, die relative Primzahlen sind, zu.

Hierzu kommen noch andere Kathetenpaare, bei welchen die Katheten verwandte Zahlen sind. Bei einem Product von zwei primzahligen Hypotenusen giebt es nach § 13. ausserdem noch zwei Kathetenpaare. Bilden vier primzahlige Hypotenusen das Product, so stellen folgende Ausdrücke die noch fehlenden Kathetenpaare dar:

II.

$$\begin{aligned} & \sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_4}{a_4} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_4}{a_4} \\ & \sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_3}{a_3} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_3}{a_3} \\ & \sin[(\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}) \pm \beta_{a_1}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}) \pm \beta_{a_1}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \\ & \sin[(\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}) \pm \beta_{a_2}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}) \pm \beta_{a_2}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \\ & = 2^2(1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1) = 2^2 \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}] \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \quad \text{und} \quad \cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}] \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \\ & \sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_4} \quad \text{und} \quad \cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_4} \\ & \sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \quad \text{und} \quad \cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \end{aligned}$$

III.

III.

$$\begin{aligned} & \sin[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_4}{a_4} \quad \text{und} \quad \cos[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_4}{a_4} \\ & \sin[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3} \quad \text{und} \quad \cos[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3} \\ & \sin[\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \quad \text{und} \quad \cos[\beta_{a_3} \pm \beta_{a_4}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \\ & = 2^1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1) = 2^1 \cdot 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin(\beta_{a_1}) \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \quad \text{und} \quad \cos(\beta_{a_1}) \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \\ & \sin(\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \quad \text{und} \quad \cos(\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_3}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} & \sin(\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \quad \text{und} \quad \cos(\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_4}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \\ & \sin(\beta_{a_4}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \quad \text{und} \quad \cos(\beta_{a_4}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \\ & = 2^0(1 + 1 + 1 + 1) = 2^0 \cdot 4 \end{aligned}$$

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dass die Anzahl der Kathetenpaare in II., III., IV. gleich ist der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung von 4 Elementen beziehungsweise zur 3ten, 2ten und ersten Classe. Wird nach Heis die Anzahl der Combinationen von  $p$  Elementen zur  $r$ ten Classe ohne Wiederholung durch  $C_r(p)$  bezeichnet, so kann die Anzahl der Kathetenpaare auf folgende Weise angegeben werden.

Zu  $\triangle$  gehören:

$$\frac{a_1}{a_1} \frac{a_2}{a_2} \frac{a_3}{a_3} \frac{a_4}{a_4}$$

$$(2^0 \cdot C_1(4) + 2^1 \cdot C_2(4) + 2^2 \cdot C_3(4) + 2^3 \cdot C_4(4)) \text{ Kathetenpaare.}$$

Nach demselben Bildungsgesetz giebt ein Product von fünf primzahligen Hypotenusen:

$$2^0 \cdot C_1(5) + 2^1 \cdot C_2(5) + 2^2 \cdot C_3(5) + 2^3 \cdot C_4(5) + 2^4 \cdot C_5(5) \text{ Kathetenpaare}$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

B. Zu jeder Hypotenuse, die aus einem Producte von  $p$  verschiedenen primzahligen Hypotenusen besteht, gehören:

$$V, \quad 2^0 C_1(p) + 2^1 C_2(p) + 2^2 C_3(p) + \dots + 2^{p-2} \cdot C_{p-1}(p) + 2^{p-1}$$

Kathetenpaare. Die Katheten von  $2^{p-1}$  Paaren sind relative Primzahlen, die der übrigen nicht.

Setzt man in I. bis IV.  $\beta_{a_1} = \eta_{b_1}$ ,  $\beta_{a_2} = \eta_{b_2}$ ,  $\beta_{a_3} = \eta_{b_3}$ ,  $\beta_{a_4} = \eta_{b_4}$  und  $a_1 = \sqrt{a_1}$ ,  $a_2 = \sqrt{a_2}$ ,  $a_3 = \sqrt{a_3}$ ,  $a_4 = \sqrt{a_4}$ , so lässt sich auf dieselbe Weise, wie in § 10. der Satz beweisen.

C. Eine Hypotenuse, die ein Product aus  $p$  verschiedenen primzahligen Hypotenusen ist, lässt  $2^{p-1}$  verschiedene Zerlegungen in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen zu.

Mehr als  $2^{p-1}$  Zerlegungen sind nicht vorhanden, da ein Product aus reinen Primzahlen niemals eine Quadratzahl giebt.

### § 15.

Um die Anzahl der Kathetenpaare von  $a_1^m \cdot a_2^n \cdot a_3^o \cdot \dots \cdot a_t^n$  zu bestimmen, ist es zweckmässig, wieder von einem einfachen Beispiel auszugehen, um aus diesem dann den allgemeinen Satz abzuleiten.

Angenommen, es sei die Anzahl aller Kathetenpaare von  $a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3$  zu suchen. Nach § 14. stellen folgende Ausdrücke:

$$\text{a) } \sin[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 3\beta_{a_3}] \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 3\beta_{a_3}]$$

die vier Kathetenpaare dar, in denen die Katheten eines jeden Paares relative Primzahlen sind. Ferner werden folgende Zusammenstellungen je vier Kathetenpaare geben.

$$\text{b) } \sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2}$$

$$\text{c) } \sin[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_3}{a_3} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_3}{a_3}$$

I.

$$\text{d) } \sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm 2\beta_{a_3}]$$

$$\cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$$

$$\text{e) } \sin[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \quad \text{und} \quad \cos[(\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$$

I.

$$f) \sin[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos[(\beta_{a_1} \pm \beta_{a_2}) \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$$

Dies sind alle Zusammenstellungen von den drei Winkeln  $(\beta_{a_1}, \beta_{a_2}, \beta_{a_3})$ . Es ergeben sich hieraus:

$2^2(1 \cdot 2 \cdot 3)$  Kathetenpaare.

Stellt man nur zwei Winkel  $(\beta_{a_1}, \beta_{a_2}), (\beta_{a_1}, \beta_{a_3}), (\beta_{a_2}, \beta_{a_3})$  zusammen, so geben folgende Ausdrücke:

$$a) \sin[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}] \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3} \text{ und } \cos[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_2}] \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3}$$

$$b) \sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3} \text{ und } \cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3^3}{a_3^3} \\ = 2^1(1 \cdot 2)$$

$$c) \sin[\beta_{a_1} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \text{ und } \cos[\beta_{a_1} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2}$$

$$d) \sin[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos[\beta_{a_1} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$$

$$e) \sin[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos[\beta_{a_1} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \\ = 2^1(1 \cdot 3)$$

II.

$$f) \sin[2\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \text{ und } \cos[2\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1}$$

$$g) \sin[\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \text{ und } \cos[\beta_{a_2} \pm 3\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2}$$

$$h) \sin[2\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos[2\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_3}$$

$$i) \sin[\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos[\beta_{a_2} \pm 2\beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_3}$$

$$k) \sin(2\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos[2\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2}$$

$$l) \sin[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos[\beta_{a_2} \pm \beta_{a_3}] \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \\ = 2^1(2 \cdot 3)$$

also im ganzen  $= 2^1(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)$  Kathetenpaare. Es bleiben noch übrig:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sin(\beta_{a_1}) \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos(\beta_{a_1}) \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \\ \text{b) } & \sin(2\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos(2\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \\ \text{c) } & \sin(\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos(\beta_{a_2}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} \text{d) } & \sin(3\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \text{ und } \cos(3\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \\ \text{e) } & \sin(2\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \text{ und } \cos(2\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3}{a_3} \\ \text{f) } & \sin(\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \text{ und } \cos(\beta_{a_3}) \cdot \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{a_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{a_3^2}{a_3^2} \\ & = 2^0(1 + 2 + 3) \text{ Kathetenpaare.} \end{aligned}$$

Man erhält also für  $\triangle_{a_1 a_2^2 a_3^2}$ :

$$2^0(1 + 2 + 3) + 2^1(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) + 2^2(1 \cdot 2 \cdot 3) = 52$$

Kathetenpaare und allgemein für  $\triangle_{a^m_1 a^n_2 a^o_3}$

$$2^0(m + n + o) + 2^1(m \cdot n + m \cdot o + n \cdot o) + 2^2(m \cdot n \cdot o)$$

Kathetenpaare. Man sieht hieraus, dass die Klammerausdrücke Combinationen ohne Wiederholung der Exponenten zur ersten, zweiten und dritten Classe sind. Bezeichnet man die Summe der Producte, die man erhält, wenn man die  $r$ te Classe der Combinationen ohne Wiederholung von  $p$  Elementen bildet, mit  $\Sigma C(p)_r$ , so kann

die Anzahl der Kathetenpaare zu  $\triangle_{a^m_1 a^n_2 a^o_3}$  folgendermassen dargestellt werden:

$$2^0 \Sigma C(3)_1 + 2^1 \Sigma C(3)_2 + 2^2 \Sigma C(3)_3$$

Nach demselben Bildungsgesetz erhält man nun zu einer Hypotenuse, die ein Product aus vier verschiedenen Hypotenusen ist,

$$2^0 \Sigma C(4)_1 + 2^1 \Sigma C(4)_2 + 2^2 \Sigma C(4)_3 + 2^3 \Sigma C(4)_4$$

Kathetenpaare. Hieraus folgt der Satz:

A. Zu jeder Hypotenuse, die aus einem Product von  $p$  verschiedenen Potenzhypotenusen besteht, gehören

$$2^0 \sum_1 C(p) + 2^1 \sum_2 C(p) + 2^2 \sum_3 C(p) + \dots + 2^{p-2} \sum_{p-1} C(p) + 2^{p-1} \sum_p C(p)$$

verschiedene Kathetenpaare. Die Katheten von  $2^{p-1}$ , wie aus Ia. hervorgeht, sind relative Primzahlen, die der übrigen nicht.

Ist die Hypotenuse ein Product aus primzahligen Hypotenusen, so sind sämtliche Exponenten gleich 1 zu setzen. Dadurch werden auch sämtliche Producte gleich 1, ihre Summen also gleich ihrer Anzahl  $C(p)$ . Es ergibt sich daraus der schon in § 14. bewiesene Satz A.

Die Zusammenstellung der Sinusse und Cosinusse in I., II., III. zeigt nach der Beweisführung in § 10., dass nur Ia., wenn

$$\beta_{a_1} = \eta_b, \quad 2\beta_{a_2} = 2\eta_{b_2}, \quad 3\beta_{a_3} = 3\eta_{b_3} \text{ ist,}$$

die Anzahl der Zerlegungen der Hypotenuse in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen liefert. Hierzu kommen noch, wie aus Ie., IIc., IIe. ersichtlich ist, Zerlegungen, von denen eine jede aus verwandten Zahlen zusammengesetzt ist. Mithin hat man den Satz:

B. Jede Hypotenuse, die ein Product aus  $p$  verschiedenen Potenzhypotenusen ist, lässt ausser den  $2^{p-1}$  verschiedenen Zerlegungen in die Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen noch andere Zerlegungen zu, von denen eine jede aus verwandten Zahlen zusammengesetzt ist.

### § 16.

Im allgemeinen lassen sich aus den Grundzahlen der Zerlegungen der Hypotenuse alle zu ihr gehörigen Kathetenpaare finden. Von dieser Regel macht die Hypotenuse  $a^3$  eine Ausnahme; sie hat zwei Kathetenpaare z. B.:  $(25^2 - 7^2 + 24^2 - 15^2 + 20^2)$ , aber nur eine Zerlegung  $(5^2 - 3^2 + 4^2)$ , aus der auch nur ein Kathetenpaar, nämlich  $(25^2 - 7^2 + 24^2)$  gebildet werden kann. Um das andere für  $5^2$  aufzustellen, hat man die Quadratzahlen der Zerlegung mit  $5^2$  zu multipliciren, also:

$$5^2 \cdot 5^2 = 3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 15^2 + 20^2$$

Dass die vorstehende Regel sonst allgemeine Gültigkeit hat, soll an den beiden Beispielen 1)  $a = 5 \cdot 13 \cdot 17$ , 2)  $a = 5^2 \cdot 13$  gezeigt werden.

1. Für  $5 \cdot 13$  heissen nach § 12. die Zerlegungen  $5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$ . Die Hypotenuse 17. hat die Zerlegung  $17 = 1^2 + 4^2$ . Setzt man

$$\begin{aligned} \sin \eta_b &= \frac{4}{\sqrt{65}} & \cos \eta_b &= \frac{7}{\sqrt{65}} \\ \sin \eta_{b'} &= \frac{1}{\sqrt{65}} & \cos \eta_{b'} &= \frac{8}{\sqrt{65}} \\ \sin \eta_{b''} &= \frac{1}{\sqrt{17}} & \cos \eta_{b''} &= \frac{4}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

in den Formeln für

$$\begin{aligned} \sin(\eta_b \pm \eta_{b''}) \quad \text{und} \quad \cos(\eta_b \pm \eta_{b''}) \\ \sin(\eta_{b'} \pm \eta_{b''}) \quad \text{und} \quad \cos(\eta_{b'} \pm \eta_{b''}) \end{aligned}$$

so erhält man die vier Zerlegungen von  $a = 5 \cdot 13 \cdot 17$ ; nämlich es ist:

$$\begin{aligned} \sin(\eta_b + \eta_{b''}) &= \frac{23}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} & \cos(\eta_b + \eta_{b''}) &= \frac{24}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} \\ \sin(\eta_b - \eta_{b''}) &= \frac{9}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} & \cos(\eta_b - \eta_{b''}) &= \frac{32}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} \\ \sin(\eta_{b'} + \eta_{b''}) &= \frac{12}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} & \cos(\eta_{b'} + \eta_{b''}) &= \frac{31}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} \\ \sin(\eta_{b'} - \eta_{b''}) &= \frac{-4}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} & \cos(\eta_{b'} - \eta_{b''}) &= \frac{33}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17}} \end{aligned}$$

und aus der Formel

$$\sin^2(\eta_b + \eta_{b''}) + \cos^2(\eta_b + \eta_{b''}) = 1$$

folgt

$$a^2 = 23^2 + 24^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 4^2 + 33^2$$

Zur Abkürzung dienen folgende Bezeichnungen:

$$\eta_b + \eta_{b''} = \varrho', \quad \eta_b - \eta_{b''} = \varrho'', \quad \eta_{b'} + \eta_{b''} = \varrho''', \quad \eta_{b'} - \eta_{b''} = \varrho''''$$

$\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 17} = N$ . Es ist dann:

$$\sin 2\varrho' = 2\sin \varrho' \cos \varrho' = \frac{1104}{N^2}$$

I.

$$\cos 2\varrho' = 2\cos \varrho'^2 - 1 = \frac{47}{N^2}$$

ebenso ist

$$\sin 2\varrho'' = \frac{576}{N^2}, \quad \sin 2\varrho''' = \frac{744}{N^2}, \quad \sin 2\varrho'''' = \frac{264}{N^2}$$

Ia.

$$\cos 2\varrho'' = \frac{943}{N^2}, \quad \cos 2\varrho''' = \frac{817}{N^2}, \quad \cos 2\varrho'''' = \frac{1073}{N^2}$$

Um die andern Kathetenpaare zu finden, combinirt man  $\varrho'\varrho''$   $\varrho''\varrho''''$  in folgender Weise:

$$\sin(\varrho' \pm \varrho'') = \sin\varrho' \cos\varrho'' \pm \cos\varrho' \sin\varrho'' = \frac{952}{N^2}, \quad = \frac{520}{N^2}$$

II.

$$\cos(\varrho' \pm \varrho'') = \cos\varrho' \cos\varrho'' \pm \sin\varrho' \sin\varrho'' = \frac{561}{N^2}, \quad = \frac{975}{N^2}$$

wo der zweite Wert für das untere Zeichen gilt.

Ebenso ist:

$$\sin(\varrho' \pm \varrho''') = \frac{1001}{N^2}, \quad = \frac{425}{N^2}, \quad \cos(\varrho' \pm \varrho''') = \frac{468}{N^2}, \quad = \frac{1020}{N^2}$$

$$\sin(\varrho' \pm \varrho''''') = \frac{855}{N^2}, \quad = \frac{663}{N^2}, \quad \cos(\varrho' \pm \varrho''''') = \frac{700}{N^2}, \quad = \frac{884}{N^2}$$

IIa.

$$\sin(\varrho'' \pm \varrho''') = \frac{663}{N^2}, \quad = \frac{105}{N^2}, \quad \cos(\varrho'' \pm \varrho''') = \frac{884}{N^2}, \quad = \frac{1100}{N^2}$$

$$\sin(\varrho'' \pm \varrho''''') = \frac{169}{N^2}, \quad = \frac{468}{N^2}, \quad \cos(\varrho'' \pm \varrho''''') = \frac{1042}{N^2}, \quad = \frac{1020}{N^2}$$

$$\sin(\varrho''' \pm \varrho''''') = \frac{272}{N^2}, \quad = \frac{520}{N^2}, \quad \cos(\varrho''' \pm \varrho''''') = \frac{1071}{N^2}, \quad = \frac{975}{N^2}$$

Die Gleichungen I. und Ia. geben vier Paare, deren Katheten relative Primzahlen sind, II. und IIa, geben zwölf Paare, von denen nur neun verschiedene sind. Die Kathetenpaare zur Hypotenuse  $a = 5 \cdot 13 \cdot 17$  sind demnach:

$$1105^2 = (5 \cdot 13 \cdot 17)^2$$

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1) = $47^2 + 1104^2$   | 2) = $576^2 + 943^2$   |
| 3) = $744^2 + 817^2$   | 4) = $264^2 + 1073^2$  |
| 5) = $952^2 + 561^2$   | 6) = $520^2 + 975^2$   |
| 7) = $1001^2 + 468^2$  | 8) = $425^2 + 1020^2$  |
| 9) = $855^2 + 700^2$   | 10) = $663^2 + 884^2$  |
| 11) = wie 10)          | 12) = $105^2 + 1100^2$ |
| 13) = $169^2 + 1092^2$ | 14) = wie 8)           |
| 15) = $272^2 + 1071^2$ | 16) = wie 6)           |

also dreizehn verschiedene Paare, wie viel nach § 14. III. vorhanden sein sollen.

2) Um die Zerlegungen zu  $a = 5^2 \cdot 13$  zu erhalten, benutzt man diese von  $5 \cdot 13$  und  $5$ . Man setzt wieder wie oben:

$$\sin \eta_b = \frac{4}{\sqrt{65}} \quad \cos \eta_b = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\sin \eta_{b'} = \frac{1}{\sqrt{65}} \quad \cos \eta_{b'} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$$\sin \eta_{b''} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos \eta_{b''} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

in den Formeln für

$$\sin(\eta_b \pm \eta_{b''}) \quad \text{und} \quad \cos(\eta_b \pm \eta_{b''})$$

$$\sin(\eta_{b''} \pm \eta_{b'}) \quad \text{und} \quad \cos(\eta_{b''} \pm \eta_{b'})$$

und erhält:

$$\sin(\eta_b + \eta_{b''}) = \sin \varrho' = \frac{15}{\sqrt{325}}$$

$$\cos(\eta_b + \eta_{b''}) = \cos \varrho' = \frac{10}{\sqrt{325}}$$

$$\sin(\eta_b - \eta_{b''}) = \sin \varrho'' = \frac{1}{\sqrt{325}}$$

$$\cos(\eta_b - \eta_{b''}) = \cos \varrho'' = \frac{18}{\sqrt{325}}$$

$$\sin(\eta_{b''} + \eta_{b'}) = \cos \varrho', \quad \cos(\eta_{b''} + \eta_{b'}) = \sin \varrho'$$

$$\sin(\eta_{b''} - \eta_{b'}) = \sin \varrho''' = \frac{6}{\sqrt{325}} \quad \cos(\eta_{b''} - \eta_{b'}) = \cos \varrho''' = \frac{17}{\sqrt{325}}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Zerlegungen:

$$a^2 = 5^2 \cdot 13 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 15^2 + 10^2 = (5^2(3^2 + 2^2))$$

Nun ist:

$$\sin 2\varrho' = \frac{300}{N^2} \quad \sin 2\varrho'' = \frac{36}{N^2} \quad \sin 2\varrho''' = \frac{204}{N^2}$$

$$\cos 2\varrho' = -\frac{125}{N^2} \quad \cos 2\varrho'' = \frac{323}{N^2} \quad \cos 2\varrho''' = \frac{253}{N^2}$$

$$\sin(e' \pm e'') = \frac{280}{N^{2'}} - \frac{260}{N^2} \quad \cos(e' \pm e'') = \frac{165}{N^{2'}} - \frac{195}{N^2}$$

$$\sin(e' \pm e''') = \frac{315}{N^{2'}} - \frac{195}{N^2} \quad \cos(e' \pm e''') = \frac{80}{N^{2'}} - \frac{260}{N^2}$$

$$\sin(e'' \pm e''') = \frac{125}{N^2} - \frac{91}{N^2} \quad \cos(e'' \pm e''') = \frac{300}{N^{2'}} - \frac{312}{N^2}$$

Man erhält im ganzen acht, aber nur sieben verschiedene Paare. Die Katheten von zwei Paaren, nämlich:

$$(5^2 \cdot 13)^2 = 36^2 + 323^2 = 204^2 + 253^2$$

sind relative Primzahlen; die Katheten der anderen verschiedenen Paare, nämlich:

$$(5^2 \cdot 13)^2 = 125^2 + 300^2 = 165^2 + 280^2 = 260^2 + 195^2 = 80^2 + 315^2 = 91^2 + 312^2$$

sind verwandte Zahlen; dies sind alle Kathetenpaare, welche der Satz A. § 15. verlangt.

§ 17.

Um zur Bildung der Paare, in denen die Katheten verwandte Zahlen sind, nach Regeln aufzustellen, sollen im nachstehenden die Paare nochmals übersichtlicher aufgezählt werden. Links von einem jeden Paare steht der gemeinsame Factor desselben und rechts stehen die nicht gemeinsamen Factoren, die Katheten eines andern pythagoreischen Dreiecks, dessen Hypotenuse, die daneben rechts in Klammern angegeben ist, aus einer geringeren Anzahl derselben primzahligen Hypotenusen gebildet ist als die Hypotenuse  $N$ . Neben einem jeden aus der Summe der Winkel gebildeten Kathetenpaare steht rechts das aus ihrer Differenz gebildete Kathetenpaar.

		$e' + e''$				$e' - e''$	
1)	17	952	56		65	520	8
				(65)			(17)
		561	33			975	15
	13	1001	77		85	425	5
				(85)			(13)
		468	36			1020	12
	5	855	171		221	663	3
				(221)			(5)
		700	140			884	4
	221	663	3		5	105	21
				(5)			(221)
		884	4			1100	220

	13	169	13		85	425	5	
				(85)				(13)
		1092	84			1020	12	
	17	272	16		65	520	8	
				(65)				(17)
		1071	63			975	15	
2)	5	280	56		65	260	4	
				(65)				(5)
		165	33			195	3	
	5	315	63			195	3	
				(65)				(5)
		80	26			260	4	
	5 <sup>2</sup>	125	5		13	91	7	
				(13)				(5 <sup>2</sup> )
		300	12			312	24	

Die Sätze, die sich aus dieser Zusammenstellung ergeben, sind:

A. Der gemeinsame Factor eines Kathetenpaares ist entweder eine primzahlige Hypotenuse oder ein Product aus zwei oder mehreren primzahligen Hypotenusen; die nicht gemeinsamen Factoren bilden ein Kathetenpaar zu einer Hypotenuse aus den noch übrigen primzahligen Hypotenusen.

B. Das Product aus dem einen in dem andern gemeinsamen Factor der aus der Summe und der Differenz der Winkel gebildeten Kathetenpaare ist gleich der Hypotenuse der Kathetenpaare.

C. Die nicht gemeinsamen Factoren von je einem aus der Summe und der Differenz der Winkel gebildeten Kathetenpaare zur Hypotenuse  $N$  geben die Paare zur Hypotenuse  $N$ , deren Katheten relative Primzahlen sind, wieder. Wählt man z. B. die Katheten 56 und 33, 8 und 15, so erhält man nach den Formeln für

$$\sin(\beta_{65} \pm \beta_{17}) \quad \text{und} \quad \cos(\beta_{65} \pm \beta_{17}):$$

$$\sin(\beta_{65} + \beta_{17}) = \frac{1104}{17 \cdot 65} \quad \cos(\beta_{65} + \beta_{17}) = \frac{47}{17 \cdot 65}$$

$$\sin(\beta_{65} - \beta_{17}) = \frac{576}{17 \cdot 65} \quad \cos(\beta_{65} - \beta_{17}) = \frac{943}{17 \cdot 65}$$

also

$$(17 \cdot 65)^2 = 1104^2 + 47^2 = 576^2 + 943^2$$

Auf diese Weise werden alle Paare gefunden, die sich sonst aus den Formeln für  $\sin 2\varphi$  und  $\cos 2\varphi$  ergeben.

§ 18.

Unter Zugrundelegung der Figur 2 ist im nachstehenden (I) eine tabellarische Uebersicht derjenigen halben Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken trigonometrisch berechnet, welche die Transversalen nach den Teilpunkten des in 2 bis 8 gleiche Teile getheilten Schenkels  $BC$  mit dem Schenkel  $AC$  bilden, und (II) eine andere derjenigen halben Hypotenusenwinkel, welche die Transversalen nach den Teilpunkten des im Verhältniss 2 : 1 bis 8 : 7 harmonisch getheilten Schenkels  $BC$  mit  $AC$  bilden. Neben jedem halben Hypotenusenwinkel steht der Sinus des ganzen und daneben rechts die Bezeichnung des entsprechenden pythagoreischen Dreiecks.

Die trigonometrische Berechnung der Winkel ist ausgeführt nach der siebenstelligen Logarithmentafel von Vega.

		I.				
$CB:AD$	$BD^2$	$\sin \eta_a$	$\eta_b$	$\sin \eta_b$	$\Delta$	
2 : 1	$2^2 + 1 = 5$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^\circ 33' 54 \frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\triangle_5^3$
3 : 1	$9^2 + 2^2 = 13$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$33^\circ 41' 24 \frac{19''}{79}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\triangle_{13}^5$
3 : 2	$3^2 + 1^2 = 10$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^\circ 26' 5 \frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\triangle_5^3$
4 : 1	$4^2 + 3^2 = 25$	$\frac{3}{5}$	$36^\circ 52' 11 \frac{9''}{14}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\triangle_{25}^4$
4 : 2	$4^2 + 2^2 = 20$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^\circ 33' 54 \frac{76''}{425}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\triangle_5^2$
4 : 3	$4^2 + 1^2 = 17$	$\sqrt{\frac{1}{17}}$	$14^\circ 2' 10 \frac{405''}{842}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{17}$	$\triangle_{17}^8$
5 : 1	$5^2 + 4^2 = 41$	$\frac{4}{\sqrt{41}}$	$38^\circ 39' 35 \frac{80''}{263}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{40}{41}$	$\triangle_{41}^9$
5 : 2	$5^2 + 3^2 = 34$	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	$30^\circ 57' 49 \frac{61''}{117}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{15}{17}$	$\triangle_{17}^8$
5 : 3	$5^2 + 2^2 = 29$	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	$21^\circ 48' 5 \frac{20''}{263}$	$\frac{20}{29}$	$\frac{20}{29}$	$\triangle_{29}^{20}$
5 : 4	$5^2 + 1^2 = 26$	$\sqrt{\frac{1}{26}}$	$11^\circ 18' 35 \frac{795''}{1053}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\triangle_{13}^5$

6 : 1	$3^2 + 5^2 = 61$	$\frac{5}{\sqrt{61}}$	$39^\circ 48' 20''$	$\frac{20''}{253}$	$\frac{60}{61}$	$60 \triangle_{61}^{11}$
6 : 2	$6^2 + 4^2 = 52$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$33^\circ 41' 24''$	$\frac{19''}{79}$	$\frac{12}{13}$	$12 \triangle_{13}^5$
6 : 3	$6^2 + 3^2 = 45$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^\circ 33' 54''$	$\frac{76''}{721}$	$\frac{4}{5}$	$4 \triangle_5^3$
6 : 4	$6^2 + 2^2 = 40$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^\circ 26' 5''$	$\frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$4 \triangle_5^3$
6 : 5	$6^2 + 1^2 = 37$	$\sqrt{\frac{1}{37}}$	$9^\circ 27' 44''$	$\frac{151''}{421}$	$\frac{12}{47}$	$35 \triangle_{37}^{12}$
7 : 1	$7^2 + 6^2 = 85$	$\frac{6}{\sqrt{85}}$	$40^\circ 36' 4''$	$\frac{171''}{246}$	$\frac{84}{85}$	$82 \triangle_{85}^{13}$
7 : 2	$7^2 + 5^2 = 74$	$\frac{5}{\sqrt{74}}$	$35^\circ 32' 15''$	$\frac{38''}{59}$	$\frac{35}{37}$	$35 \triangle_{37}^{12}$
7 : 3	$7^2 + 4^2 = 65$	$\frac{4}{\sqrt{65}}$	$29^\circ 44' 41''$	$\frac{211''}{369}$	$\frac{56}{65}$	$56 \triangle_{65}^{33}$
7 : 4	$7^2 + 3^2 = 58$	$\frac{3}{\sqrt{58}}$	$23^\circ 11' 54''$	$\frac{456''}{491}$	$\frac{21}{29}$	$21 \triangle_{29}^{20}$
7 : 5	$7^2 + 2^2 = 53$	$\frac{2}{\sqrt{53}}$	$15^\circ 56' 43''$	$\frac{314''}{737}$	$\frac{28}{53}$	$45 \triangle_{53}^{23}$
7 : 6	$7^2 + 1^2 = 50$	$\sqrt{\frac{1}{50}}$	$8^\circ 7' 48''$	$\frac{274''}{737}$	$\frac{7}{25}$	$24 \triangle_{25}^7$
8 : 1	$8^2 + 7^2 = 113$	$\frac{7}{\sqrt{113}}$	$41^\circ 11' 9''$	$\frac{1''}{3}$	$\frac{112}{113}$	$112 \triangle_{113}^{15}$
8 : 2	$8^2 + 6^2 = 100$	$\frac{3}{5}$	$36^\circ 52' 11''$	$\frac{9''}{14}$	$\frac{24}{25}$	$24 \triangle_{25}^7$
8 : 3	$8^2 + 5^2 = 89$	$\frac{5}{\sqrt{89}}$	$32^\circ 0' 19''$	$\frac{127''}{331}$	$\frac{80}{89}$	$80 \triangle_{89}^{39}$
8 : 4	$8^2 + 4^2 = 80$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^\circ 33' 54''$	$\frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	$4 \triangle_5^3$

8 : 5	$8^2 + 3^2 = 73 \frac{3}{\sqrt{73}}$	$20^\circ 33' 21 \frac{433''}{562} \frac{48}{73}$	$55 \triangle_{73}^{48}$
8 : 6	$8^2 + 2^2 = 68 \frac{1}{\sqrt{17}}$	$14^\circ 2' 10 \frac{405''}{842} \frac{8}{17}$	$15 \triangle_{17}^8$
8 : 7	$8^2 + 1^2 = 65 \frac{1}{\sqrt{65}}$	$7^\circ 7' 30 \frac{25''}{421} \frac{16}{75}$	$63 \triangle_{65}^{16}$

(II)

$CB : EB = CE : ED$	$AE^2 \sin \eta_b$	$\eta_b$	$\sin 2\eta_b$	$\triangle$
6 : 3 = 2 : 1	4 . 10 $\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^\circ 26' 5 \frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$4 \triangle_5^3$
6 : 2 = 3 : 1	9 . 5 $\sqrt{\frac{1}{5}}$	$26^\circ 33' 54 \frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	$4 \triangle_5^3$
15 : 10 = 3 : 2	9 . 26 $\sqrt{\frac{1}{26}}$	$11^\circ 18' 35 \frac{795''}{1053}$	$\frac{5}{13}$	$13 \triangle_{13}^6$
20 : 15 = 12 : 3	16 . 34 $\frac{3}{\sqrt{34}}$	$30^\circ 57' 49 \frac{61''}{117}$	$\frac{15}{17}$	$15 \triangle_{17}^8$
6 : 3 = 2 : 1	4 . 10 $\sqrt{\frac{1}{10}}$	$18^\circ 26' 5 \frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$4 \triangle_5^3$
28 : 21 = 4 : 3	16 . 50 $\sqrt{\frac{1}{50}}$	$8^\circ 7' 48 \frac{274''}{737}$	$\frac{7}{25}$	$24 \triangle_{25}^7$
15 : 3 = 10 : 2	25 . 13 $\frac{2}{\sqrt{13}}$	$33^\circ 41' 24 \frac{19''}{79}$	$\frac{12}{13}$	$13 \triangle_{13}^6$
35 : 14 = 15 : 6	25 . 58 $\frac{3}{\sqrt{58}}$	$23^\circ 11' 54 \frac{456''}{491}$	$\frac{21}{29}$	$21 \triangle_{29}^{20}$
20 : 12 = 5 : 3	25 . 17 $\sqrt{\frac{1}{17}}$	$14^\circ 2' 10 \frac{405''}{842}$	$\frac{8}{17}$	$15 \triangle_{17}^8$
45 : 36 = 5 : 4	25 . 82 $\sqrt{\frac{1}{82}}$	$6^\circ 20' 24 \frac{261''}{379}$	$\frac{9}{41}$	$40 \triangle_{41}^9$
42 : 7 = 30 : 5	36 . 74 $\frac{5}{\sqrt{74}}$	$35^\circ 32' 15 \frac{38''}{59}$	$\frac{35}{37}$	$35 \triangle_{37}^{12}$

6: 2 = 3: 1 9 . 5	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	26° 33' 54	$\frac{76''}{421}$	$\frac{4}{5}$	$4\triangle_5^3$
6: 3 = 2: 1 4 . 10	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	18° 26' 5	$\frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$4\triangle_5^3$
15: 10 = 3: 2 9 . 26	$\sqrt{\frac{1}{26}}$	11° 18' 35	$\frac{795''}{1053}$	$\frac{5}{13}$	$12\triangle_{13}^5$
66: 55 = 6: 5 36 . 122	$\sqrt{\frac{1}{122}}$	5° 11' 29	$\frac{2187''}{2317}$	$\frac{11}{61}$	$60\triangle_{61}^{11}$
28: 4 = 21: 3 49 . 25	$\frac{3}{5}$	36° 52' 11	$\frac{9''}{14}$	$\frac{24}{25}$	$24\triangle_{25}^7$
63: 18 = 35: 10 49 . 106	$\frac{5}{\sqrt{106}}$	29° 3' 16	$\frac{211''}{379}$	$\frac{45}{53}$	$45\triangle_{53}^{28}$
35: 15 = 14: 6 49 . 29	$\frac{2}{\sqrt{29}}$	21° 48' 5	$\frac{20''}{263}$	$\frac{20}{29}$	$21\triangle_{29}^{30}$
77: 44 = 21: 12 49 . 130	$\frac{3}{\sqrt{130}}$	15° 15' 18	$\frac{167''}{386}$	$\frac{33}{65}$	$56\triangle_{65}^{33}$
42: 30 = 7: 5 49 . 37	$\sqrt{\frac{1}{37}}$	9° 27' 44	$\frac{151''}{421}$	$\frac{12}{37}$	$35\triangle_{37}^{12}$
91: 78 = 7: 6 49 . 170	$\sqrt{\frac{1}{170}}$	4° 23' 55	$\frac{930''}{2737}$	$\frac{13}{85}$	$84\triangle_{85}^{13}$
72: 9 = 56: 7 64 . 130	$\frac{7}{\sqrt{130}}$	37° 52' 29	$\frac{25''}{27}$	$\frac{63}{65}$	$53\triangle_{65}^{16}$
20: 5 = 12: 3 16 . 34	$\frac{3}{\sqrt{34}}$	30° 57' 49	$\frac{61''}{117}$	$\frac{15}{17}$	$15\triangle_{17}^8$
88: 33 = 40: 15 64 . 116	$\frac{5}{\sqrt{146}}$	24° 26' 38''	$\frac{111''}{463}$	$\frac{55}{73}$	$55\triangle_{73}^{48}$
6: 3 = 2: 1 4 . 10	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	18° 26' 5	$\frac{515''}{631}$	$\frac{3}{5}$	$4\triangle_5^3$
104: 65 = 24: 15 64 . 178	$\frac{3}{\sqrt{178}}$	12° 59' 40	$\frac{571''}{912}$	$\frac{39}{89}$	$50\triangle_{89}^{39}$

$$28:21 = 4:3 \quad 16 \cdot 50 \sqrt{\frac{1}{50}} \quad 8^\circ 7' 48 \quad \frac{274''}{737} \frac{7}{25} \quad \overset{24}{\triangle}_{25}^7$$

$$120:105 = 8:7 \quad 64 \cdot 226 \sqrt{\frac{1}{226}} \quad 3^\circ 48' 50 \quad \frac{2''}{3} \frac{15}{113} \quad \overset{112}{\triangle}_{113}^{15}$$

Vergleicht man den Hypotenusenwinkel, den der einfachen Teiler 7:1 oder 8:1 oder 8:3 oder allgemein  $m:n$  mit demjenigen, welcher der harmonischen Teilung 7:6 oder 8:7 oder 8:5 oder  $m:m-n$  entspricht, so ergibt sich, dass der eine Winkel das Complement zu dem andern ist, also dass die durch einfache Teilung gewonnenen Hypotenusenwinkel die Complementary sind beziehungsweise zu den Winkeln, die man durch die in der oben angegebenen Weise ausgeführten harmonischen Teilung erhält. Wird die Linie  $BC$  in der Weise wie in § 11. harmonisch geteilt, so findet die eben ausgesprochene Beziehung nicht statt.

Stellt man aus der Tabelle I. die dem einfachen Verhältnisse  $n:1$  entsprechenden Dreieckszahlen der Reihe nach von  $n=2$  bis  $n=8$  untereinander, so erkennt man leicht das Bildungsgesetz, das diesen Reihen zu Grunde liegt. Ein anderes ergibt sich aus den pythagoreischen Dreieckszahlen, die dem Verhältniss  $2n:2n-1$  entsprechen. Zu den Verhältnissen 5:3, 7:5, 9:7 u. s. w. gehören die Dreieckszahlen:

	$b$	$c$	$a$
	20	21	29
I.	28	45	53
	36	77	85 u. s. w.

Die Reihen  $b, c, a$  stellen arithmetische Progressionen dar; die Differenz der Reihe  $b$  ist 8. Die Reihen  $c$  und  $a$  haben ein gemeinsames Bildungsgesetz. Die erste Differenz ist 24, die zweite  $24+8$  und die dritte  $32+8=40$  u. s. w. Für das Verhältniss 11:9 erhält man demnach die Dreieckszahlen: 44, 117, 125,

### § 19.

Die Gesetze, auf welchem die Bildung der Reihen beruht, können durch drei Formeln dargestellt werden. Um diese zu ermitteln, geht man von den Gleichungen II. in § 6. aus und setzt  $2mn = b$ ,  $m^2 - n^2 = c$  und  $m^2 + n^2 = a$ . Es ergibt sich die Gleichung:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

mithin stellen:

$$b = 2m \cdot n$$

I  $c = m^2 - n^2$  die Katheten und

$$a = m^2 + n^2 \text{ die Hypotenuse dar.}$$

Setzt man in I  $m-n$  statt  $n$ , so erhält man die Gleichungen für die Katheten und die Hypotenuse, wie sie die in der Tabelle § 18 (I) angewandte Teilung verlangt. Also es ist:

$$\text{II} \quad b = 2m(m-n)$$

$$\text{III} \quad c = m^2 - (m-n)^2$$

$$\text{IV} \quad a = m^2 + (m-n)^2$$

Sind  $m$  und  $n$  durch ganze Zahlen bestimmt, so ist zu  $m$  und  $n$  noch je eine veränderliche Grösse als Summand hinzuzufügen. Setzt man also  $m+x$  für  $m$  und  $n+y$  für  $n$  in II, III, IV ein, so erhält man:

$$b = 2(m+x)(m-n+x-y) \text{ oder}$$

$$\text{IIb} \quad = 2m(m-n) + 2[x(m-n) + (x-y)(m+x)]:$$

$$c = (m+x)^2 - (m-n+x-y)^2 \text{ oder}$$

$$\text{IIIc} \quad = m^2 - (m-n)^2 - [x(2m+x) - (x-y)(2(m-n) + x - y)],$$

$$a = (m+x)^2 + (m-n+x-y)^2 \text{ oder}$$

$$\text{IVa} \quad = m^2 + (m-n)^2 + [x(2m+x) + (x-y)(2(m-n) + x - y)].$$

Die Klammerausdrücke  $[\ ]$  in den drei Gleichungen geben die Gesetze für die Reihenbildung. Da  $m > n$  angenommen ist, so muss auch  $x \geq y$  sein; denn sonst könnte der Fall eintreten, dass, wenn  $m+x = n+y$  würde, die Teilung der Linie  $BC$  nicht stattfände und somit die Reihe unterbrochen würde. Für  $x$  und  $y$  sind in steigender Aufeinanderfolge die Glieder einer arithmetischen Progression, die aus ganzen Zahlen besteht, zu setzen. Es soll angenommen werden, dass für  $x$  und  $y$  nur Glieder aus Progressionen erster Ordnung gesetzt werden. Hierbei werden vier Fälle unterschieden: 1)  $x-y$  ist gleich null, 2)  $x-y$  ist gleich einer constanten Zahl, 3)  $y$  ist gleich null und 4) die Zahlen  $(x-y)$  bilden die Glieder einer arithmetischen Progression erster Ordnung.

1) Ist  $x-y = 0$ , so fällt in den drei Gleichungen das zweite Glied in den Klammerausdrücken  $[\ ]$  fort. Das erste Glied in der Klammer  $[\ ]$  IIIc ist identisch mit dem ersten Gliede in der Klammer  $[\ ]$  IVa. Hieraus folgt, dass die Reihen  $c$  und  $a$  nach einem gemeinsamen Gesetze gebildet werden. Ferner ergibt sich aus dem

ersten Gliede in den Klammern, dass  $c$  und  $a$  arithmetische Reihen zweiter Ordnung und  $b$  eine arithmetische Reihe erster Ordnung darstellen.

2) Dieselben Gesetze erhält man auch, wenn  $x - y$  gleich einer constanten Zahl ist. Ein Beispiel zu dem ersten Falle liefert die Reihe I § 18, wo  $m = 5$ ,  $n = 3$ ,  $x = 2, 4, 6$  und  $y = 2, 4, 6 \dots$  ist. Um ein Beispiel für den zweiten Fall zu haben, setze man  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $x = 2, 3, 4 \dots$   $y = 1, 2, 3 \dots$ . Es ist:

$b$	$c$	$a$	
16	12	20	
20	21	29	
24	32	40	
28	45	53	u. s. w.

Bildet man die Differenzen-Reihen zu  $b$ ,  $c$  und  $a$ , so erhält man für  $b$ :

4	4	4	4,	und für $c$ und $a$
9	11	13	15	
2	2	2		

3) Ist  $y = 0$ , so geben die Klammerausdrücke

$$Vb \quad 2[x(m - n) + xm + x^2] = 2(2mx - xv + x^2)$$

eine Reihe zweiter Ordnung,

$$VIc \quad 2mx + x^2 - 2(m - n)x - y^2 = 2mx - 2(m - n)x$$

eine Reihe erster Ordnung,

$$VIIa \quad 2mx + x^2 + 2(m - n)x + x^2 = 2(2mx - nx + x^2)$$

eine Reihe zweiter Ordnung. Aus VIIa und Vb folgt, dass die aus ihnen gebildeten Reihen einem gemeinsamen Gesetze zu Grunde liegen.

Ein Beispiel hierzu geben die Verhältnisse 2:1, 3:1, 4:1 u. s. w. (Siehe Tabelle § 18 (I)). Ein anderes Beispiel ist:  $m = 5$ ,  $n = 3$ ,  $x = 2, 5, 8$  und  $y = 0$ , also:

$b$	$c$	$a$
56	33	65
140	51	149
260	69	269
416	87	425

a)	65	149	269	425
1. Diff.-R.	84	120	156	
2. Diff.-R.	36		36	
b)	56	140	260	416
1. Diff.-R.	84	125	156	
2. Diff.-R.	36		36	
c)	33	51	69	87
1. Diff.-R.	18		18	18

4) Bildet  $x - y$  eine arithmetische Reihe erster Ordnung, so geben II b, III c, IV a. Reihen, von denen eine jede auf einem besonderen Bildungsgesetz beruht. Die Producte  $x \cdot x$ ,  $(x - y)(x - y)$  und  $x(x - y)$  deuten an, dass die Reihen arithmetische Progressionen zweiter Ordnung sind.

Beispiel:  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $x = 4, 6, 8, 10 \dots$  und  $y = 1, 2, 3, 4 \dots$

	$b$	$c$	$a$	
	48	20	52	
	80	39	89	
	120	64	136	
	168	95	193	
a)	52	89	136	193
1. Diff.-R.	37	47	57	
2. Diff.-R.	10		10	
b)	48	80	120	168
1. Diff.-R.	32	40	48	
2. Diff.-R.	8		8	
c)	29	39	64	95
1. Diff.-R.	19	25	31	
2. Diff.-R.	6		6	

Bezeichnet man die Glieder der zweiten Differenzen-Reihe von  $a$  mit  $\Delta^2(a)$ , von  $b$  mit  $\Delta^2(b)$  und von  $c$  mit  $\Delta^2(c)$ , so ergibt sich:

$$\text{VIII} \quad (\Delta^2(a))^2 = (\Delta^2(b))^2 + (\Delta^2(c))^2$$

Noch ein zweites Beispiel soll dieses Gesetz bestätigen:  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $x = 3, 7, 11, 15 \dots$   $y = 1, 2, 4$

	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	
	30	16	34	
	108	45	117	
	234	88	250	
	408	145	433	
a)	34	117	250	433
1. Diff.-R.	83	133	183	
2. Diff.-R.	50	50		
b)	30	108	234	408
1. Diff.-R.	78	126	174	
2. Diff.-R.	48	48		
c)	16	45	88	145
1. Diff.-R.	29	43	57	
2. Diff.-R.	14	14		

$$50^2 = 48^2 + 14^2$$

Also ergibt sich wieder aus den zweiten Differenzen die Gleichung VIII. Hieraus folgt der Satz:

Stellt  $(x - y)$  eine arithmetische Reihe erster Ordnung dar, so ist

$$(\Delta^2(a))^2 = (\Delta^2(b))^2 + (\Delta^2(c))^2$$

Werden für  $x$  und  $y$  der Reihe nach die Glieder einer arithmetischen Progression höherer Ordnung eingesetzt, so erhält man ganz analoge Gesetze für die Reihenbildung wie oben. Zwei Beispiele mögen dies bestätigen. 1(  $x = 1, 4, 9, 16, 25$ ) stellt eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung dar,  $m = 2$ ,  $n = 1$ . Die Gleichungen IIa, IIIc, IV b geben folgende Reihen:

<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
12	5	13
60	11	61
220	21	221
612	35	613
1404	53	1405
2812	75	2813

a)	13	61	221	613	1405	2813
1. Diff.-R.	48	160	392	792	1408	
2. Diff.-R.		112	232	400	616	
3. Diff.-R.			120	168	216	
4. Diff.-R.				48	48	

Die gleichen Differenz-Reihen ergeben sich auch für  $b$ .

c)	5	11	21	35	53	75
1. Diff.-R.	6	10	14	18	22	
2. Diff.-R.		4	4	4	4	

Dieses Beispiel entspricht dem früheren dritten Falle.

Für  $x$  und  $y$  werden Glieder arithmetischer Reihen zweiter Ordnung eingesetzt, z. B.  $x = 1, 4, 9, 16, 25, 36 \dots$ ,  $y = 0, 1, 5, 12, 22, 35 \dots$ .  $x - y$  ist dann

1	3	4	4	3	1
	2	1	0	-1	-2
		-1	-1	-1	-1

eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. Es ergibt sich für  $m = 2, n = 1$ :

$b$	$c$	$a$
12	5	13
48	20	52
110	96	146
180	299	349
216	713	745
152	1440	1448

a)	13	52	146	349	745	1448
1. Diff.-R.	39	94	203	396	703	
2. Diff.-R.		55	109	193	307	
3. Diff.-R.			54	84	114	
4. Diff.-R.				30	30	
b)	12	48	110	180	216	152
1. Diff.-R.	36	62	70	36	-64	
2. Diff.-R.		26	8	-34	-100	
3. Diff.-R.			-18	-42	-66	
4. Diff.-R.				-24	-24	

c)	5	20	96	299	713	1440
1. Diff.-R.	15	76	203	414	727	
2. Diff.-R.		61	127	211	313	
3. Diff.-R.			66	84	102	
4. Diff.-R.				18	18	

Aus den constanten vierten Differenzen-Reihen ergibt sich die Gleichung:

$$30^2 = 24^2 + 18^2$$

also ist

$$(\Delta^4(a))^2 = (\Delta^4(b))^2 + (\Delta^4(c))^2$$

Dies ist ein Beispiel zum früheren vierten Falle, wenn die Werte von  $(x - y)$  eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung geben. Aus diesem und jenen andern Beispielen zum vierten Falle lässt sich der allgemeine Satz ableiten:

Bilden die Werte von  $(x - y)$  in den Gleichungen II b, III c, IV a eine arithmetische Progression  $n$ ter Ordnung, so sind die Reihen  $a, b, c$  arithmetische Progressionen  $2n$ ter Ordnung. Das Quadrat der constanten  $2n$ ten Differenz der Reihe  $a$  ist gleich der Summe der Quadrate der constanten  $2n$ ten Differenzen der Reihen  $b$  und  $c$ , also

$$(\Delta^{2n}(a))^2 = (\Delta^{2n}(b))^2 + (\Delta^{2n}(c))^2$$

wo  $\Delta^{2n}(a), \Delta^{2n}(b), \Delta^{2n}(c)$  die constanten  $2n$ ten Differenzen der drei Reihen  $a, b, c$  bezeichnen.

## § 20.

Bildet man die Summe aus drei pythagoreischen Dreieckszahlen, so giebt diese die Kathete eines andern pythagoreischen Dreiecks. Z. B.  ${}^4\Delta_5^3, 5 + 4 + 3 = 12$  oder  ${}^{12}\Delta_{13}^5, 12 + 13 + 5 = 30$  oder  $30 + 34 + 16 = 80$  oder  ${}^{80}\Delta_{89}^{39}, 80 + 89 + 39 = 208$  u. s. w. Addirt man die Gleichungen I § 19, so ist:

$$a + b + c = 2m^2 + 2m \cdot n = 2m(m + n)$$

die Kathete eines pythagoreischen Dreiecks. Um die andern Dreieckszahlen dieses Dreiecks zu finden, setzt man

$$(2m \cdot (m + n))^2 = x^2 - y^2$$

wo  $x$  die Hypotenuse und  $y$  die andere Kathete bezeichnet. Es ist dann

$$2m^2 \cdot 2(m + n)^2 = (x + y)(x - y)$$

Man setze

$$x + y = 2(m + n)^2, \quad x - y = 2m^2$$

woraus sich durch Addition und Subtraction ergibt

$$x = (m + n)^2 + m^2$$

$$y = (m + n)^2 - m^2$$

Beispiel:  $m = 4, n = 1$ . Es ist  $a = 17, b = 8, c = 15$ , also

$$a + b + c = 40$$

$$x = 5^2 + 4^2 = 41$$

$$y = 5^2 - 4^2 = 9$$

Es ergibt sich der Satz:

Die Summe der drei pythagoreischen Zahlen giebt die Kathete eines andern pythagoreischen Dreiecks.

Sucht man zu  $b + c + a$  aus den Reihen  $b, c, a$  die beiden andern Dreieckszahlen, so geben diese wieder Reihen  $b', c', a'$ , die denselben Gesetzen zu Grunde liegen wie die Reihen  $b, c, a$ . Als Beispiel dienen die Reihen (Seite 384 A.)

	$b + c + a$	$b'$	$c'$	$a'$
	$48 + 20 + 52 = 120$	64	136	
	$80 + 39 + 89 = 208$	105	233	
	$120 + 136 + 64 = 320$	156	356	
		<u><math>a'</math></u>	<u><math>c'</math></u>	
	$163 + 95 + 143 = 456$	505	217	
a')	136	233	356	505
1. Diff.-R.	97	123	149	
2. Diff.-R.		26	26	
b')	120	208	320	456
1. Diff.-R.	88	112	136	
2. Diff.-R.		24	24	
c')	64	105	156	217
1. Diff.-R.	41	51	61	
2. Diff.-R.		10	10	

$$26^2 = 24^2 + 10^2 \quad \text{oder} \quad (\Delta^2(a'))^2 = (\Delta^2(b'))^2 + (\Delta^2(c')(c))^2$$

Man erhält die Reihen  $b'$ ,  $c'$ ,  $a'$  unmittelbar aus den Gleichungen IIb, IIIc, IVa § 19, wenn  $m = 2$ ,  $n = 1$  und  $x = 8, 11, 14, 17, \dots$ ,  $y = 3, 4, 5, 6, \dots$  ist.

§ 21.

Eine Anwendung von den in der Tabelle Seite 377 berechneten pythagoreischen Hypotenusenwinkeln auf die Teilung der Kreisperipherie soll den Schluss dieser Untersuchungen bilden. Da auf der Construction der Centriwinkel des regulären 25- und 9-Ecks die Construction des 7-, 11-, 13-Ecks und so weiter beruht, so soll jene zunächst angegeben werden.

1) Der Centriwinkel vom regulären 25-Eck ist

$$\xi_{25} = 14^\circ 24'$$

Die Construction von  $\xi_{25}$  beruht auf der Construction von

a. 
$$\gamma \frac{4}{5} = 53^\circ 7' 48 \frac{152''}{431}$$

Es ist:

$$2\gamma \frac{4}{5} = 106^\circ 15' 36 \frac{304''}{421}$$

$$2\gamma \frac{4}{5} - 90^\circ = 16^\circ 15' 36 \frac{304''}{421}$$

$$5 \left( 2\gamma \frac{4}{5} - 90^\circ \right) \equiv 81^\circ 18' + 5\delta, \text{ wo } \delta = \frac{304''}{421} \text{ ist,}$$

$$2\xi_{25} = 28^\circ 48'$$

---


$$5 \left( 2\gamma \frac{4}{5} - 90^\circ \right) - 2\xi_{25} = 52^\circ 30' + 5\delta = 2\psi + 5\delta$$

$\psi = 4^\circ + 7^\circ 30'$  ist bekannt; denn  $45^\circ$  ist der Centriwinkel vom regulären 8-Eck und  $7^\circ 30'$  der Centriwinkel vom regulären 48-Eck; beide sind construierbar. Nun ist

I 
$$5 \left( 2\gamma \frac{4}{5} - 90^\circ \right) - 2\psi = 2\xi_{25} + 5\delta = 2\xi_{25}^I$$

hieraus folgt

$$2(\xi_{25}^I - \xi_{25}) = 5\delta$$

oder

$$\xi_{25}^I - \xi_{25} = \frac{5}{2}\delta = 1 \frac{339''}{420}$$

Die Abweichung vom wahren Werte beträgt also  $1 \frac{330''}{421}$ ; dies macht für  $25(\xi_{25}^I - \xi_{25}) = 45''$ .  $\xi_{25}^I$  lässt sich construiren aus  $\psi$  und  $\gamma \frac{4}{5}$ .

Eine andere Construction erhält man durch

$$b. \quad \beta \frac{5}{13} = 22^\circ 37' 11,5''$$

Es ist

$$5\beta \frac{5}{13} = 113^\circ 6' - 5\delta_1, \text{ wo } \delta_1 = \frac{1}{2}'' \text{ ist,}$$

$$II \quad \frac{4\xi_{25} - 57^\circ 36'}{5\beta \frac{5}{13} - 4\xi_{25} = 55^\circ 30' - 5\delta_1 = \psi_1 - 5\delta_1}$$

Da  $\psi_1$  aus  $48^\circ + 7^\circ 30'$  zu construiren ist, so ist auch  $\xi_{25}^{II}$  aus  $\beta \frac{5}{13}$  und  $\psi_1$  bestimmt. Aus II folgt:

$$III \quad 5\beta \frac{5}{13} - \beta_1 = 4\xi_{25} - 5\delta_1 = 4\xi_{25}^{II} \text{ oder}$$

$$4(\xi_{25} - \xi_{25}^{II}) = \frac{4\delta_1}{4} = \frac{5''}{8}$$

Die Abweichung vom wahren Werte beträgt  $2\beta_1$ . Um eine noch geringere Abweichung zu erhalten, addire man folgende aus I und III sich ergebenden Winkel:

$$\begin{aligned} \xi_{25}^I &= 14^\circ 24' + 1 \frac{339''}{421} \\ 3\xi_{25}^{II} &= 43^\circ 12' - 1 \frac{7''}{3} \\ \hline \xi_{25} + 3\xi_{25}^{II} &= 57^\circ 36' + \frac{7''}{100} \end{aligned}$$

und dividire mit 4, dann ist

$$\frac{1}{4}(\xi_{25}^I + 3\xi_{25}^{II}) = \xi_{25}^{III} = 44^\circ 24' + \frac{7''}{400}$$

Die Abweichung vom wahren Werte ist für  $25\xi_{25}^{III}$  nur  $0,40''$ .

2) Der Centriwinkel für das 9-Eck ist

$$\xi_9 = 40^\circ$$

Es ist

$$\beta \frac{11}{61} = 10^\circ 23' 19,88''$$

$$18\beta \frac{11}{61} = 187^\circ - 18\delta, \text{ wo } \delta = 0,12'' \text{ ist}$$

$$\frac{4\xi_9 = 160^\circ}{18\beta \frac{11}{61} - 4\xi_9 = 27^\circ - 18\delta}$$

Da der Winkel von  $27^\circ$  konstruirbar ist, so ist auch  $\xi_9^I$  aus  $\beta \frac{11}{61}$  und  $27^\circ$  zu construiren. Es ist

$$\xi_9^I = 40^\circ - \frac{9}{2}\delta = 40^\circ - 0,54''$$

also ist die Abweichung vom wahren Wert:

$$\xi_9 - \xi_9^I = 0,54''$$

Der Centriwinkel  $\xi_{45} = 8^\circ$  lässt sich unmittelbar aus  $2\xi_9^I - 72^\circ - 8^\circ - 9\delta$  bestimmen; einen noch genaueren Wert aber erhält man aus

$$18\gamma \frac{11''}{61} = 187^\circ - 18\delta - 64^\circ = 123^\circ - 18\delta$$

Da Wkl.  $130^\circ$  sich aus den Winkeln  $90^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $15^\circ$  construiren lässt, so ist auch  $\xi_{45}$  konstruirbar. Es ist

$$8\gamma_{45}^I = 64^\circ - 18\delta$$

also ist

$$\xi_{45}^I = 8^\circ - \frac{9}{4}\delta = 8^\circ - 0,27''$$

Die Abweichung beträgt demnach

$$\xi_{45} - \xi_{45}^I = \frac{9}{4}\delta = 0,27''$$

3) Für das reguläre 7-Eck ist

$$\xi_7 = 51^\circ 25' 42 \frac{6''}{7}$$

a) Benutzt man als Constructionswinkel

$$\beta \frac{9}{41} = 12^\circ 40' 49,38''$$

so ist

$$4 \left( 4\beta \frac{9}{41} + \xi_7 - 90^\circ \right) = 48^\circ 36' + 1,52''$$

Nun ist nach II

$$\xi_{25}^{\text{II}} = 14^\circ 24' - 0,62''$$

also ist

$$\text{IV} \quad 4 \left( 4\beta \frac{9}{41} + \xi_7 - 90^\circ \right) + \xi_{25}^{\text{II}} = 63^\circ + 0,9''$$

Der Winkel von  $63^\circ$  lässt sich construiren aus  $45^\circ + 18^\circ$ . Um die Abweichung vom wahren Werte zu bestimmen, löst man IV inbezug auf  $\xi_7$  auf. Es ist

$$63^\circ - \xi_{25}^{\text{II}} = 48^\circ 36' + 0,62'' = 4 \left( 4\beta \frac{9}{41} + \xi_7 - 90^\circ \right)$$

hieraus folgt

$$12^\circ 9' + 0,15'' = 4\beta \frac{9}{41} + \xi_7 - 90^\circ$$

und endlich

$$\xi_7^{\text{I}} = 102^\circ 9' + 0,15'' - 4\beta \frac{9}{41}$$

Nun ist

$$4\beta \frac{9}{41} = 50^\circ 43' 17,52''$$

also ist

$$\xi_7^{\text{I}} = 51^\circ 25' 42,63''$$

Die Abweichung ist  $\xi_7 - \xi_7^{\text{I}} = 0,23''$ .

b) Eine ziemlich genaue Lösung der Siebenteilung erhält man auch auf folgende Weise. Man teilt den Schenkel  $BC$  im gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  (Fig. 6) zunächst in drei gleiche Teile

$$CD = DE = EB$$

und verbindet  $A$  mit  $D$ , dann ist

$$\text{Wkl. } DAB = \frac{1}{2} \gamma \frac{4}{5} = 26^\circ 33' 54 \frac{76''}{421}$$

Nun teilt man  $CD$  in 10 gleiche Teile und macht

$$DF = \frac{1}{10} CD$$

dann ist

$$CF = CD + \frac{1}{10} CD = CD \frac{10}{11} \quad \text{und}$$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 = 9 \overline{CD}^2 + \frac{121}{100} \overline{CD}^2 = \frac{1021}{100} \overline{CD}^2$$

also ist

$$AF = \frac{CD}{10} \sqrt{1021}$$

Ferner ist nach dem Sinussatze:

$$AF : FB = \sin B + \sin FAB$$

Nun ist

$$\sin \text{Wkl. } B = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$FB = DB - DF = 2CD - \frac{1}{10} CD = \frac{19}{10} CD$$

$$AF = \frac{CD}{10} \sqrt{1021}$$

also ist:

$$\frac{CD}{10} \sqrt{1021} : \frac{19}{10} CD = \sqrt{\frac{1}{2}} : \sin FAB$$

und hieraus

$$\sin FAB = \frac{19 \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1021}} = \frac{Z}{N}$$

$$\log 0,5 = 0,6989700 - 1$$

$$\log \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,8494850 - 1$$

$$\log 19 = 1,2787396$$

---


$$\log Z = 0,1282386$$

$$\log 1021 = 3,0090257$$

$$\log \sqrt{1021} = 1,50451285$$

---


$$\log \frac{Z}{N} = 0,62372575 - 1 = \log \sin FAB$$

$$FAB = 24^\circ 51' 49,308''$$

$$\frac{1}{2}\gamma_5^4 = 26^\circ 33' 54,181''$$

---


$$\text{Wkl. } FAB + \frac{1}{2}\gamma_5^4 = 51^\circ 25' 43,489'' = \xi_7''$$

$$\xi = 51^\circ 25' 42,857''$$

---


$$\xi_7'' - \xi = \frac{632''}{1000}$$

c) Eine sehr genaue Lösung der Siebenteilung geben folgende Winkel

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\beta_{65}^{16} &= 7^\circ 7' 30,059'' \\
 \gamma_5^{10} &= 81^\circ 18' 3,667'' \\
 \frac{1}{2}\beta_{25}^{7} &= 8^\circ 7' 48,370'' \\
 \hline
 2\beta &= 177^\circ 51' 25,763'' \\
 2\beta - 75^\circ &= 102^\circ 51' 25,763 = 2\xi_7^{III} \\
 \hline
 \xi_7^{III} &= 51^\circ 25' 42,58'' \\
 \xi_7^{III} - \xi_7 &= 0,024''
 \end{aligned}$$

d) Kommt es auf grosse Genauigkeit nicht an, so genügt die Construction des Winkels

$$\frac{1}{2}\gamma_5^3 + 33^\circ = 51^\circ 26' 5 \frac{515''}{631}$$

Die Abweichung beträgt ungefähr 23''.

4) Für das reguläre 11-Eck ist:

$$\xi_{11} = 32^\circ 43' 38 \frac{2''}{11}$$

Addirt man

$$\beta_{25}^7 = 16^\circ 15' 36 \frac{55''}{74}$$

so ist

$$\xi_{11} + \beta_{25}^7 = 48^\circ 59' 15'' - \delta, \text{ wo } \delta = 0,08'' \text{ ist.}$$

Es ist

$$2 \left[ 4 \left( \xi_{11} + \beta_{25}^7 \right) - 180^\circ \right] = 31^\circ 54' - 8\delta$$

zieht man hiervon

$$\xi_{25} = 14^\circ 24',$$

ab und multiplicirt mit 4, so ist:

$$4 \left[ 2 \left[ 4 \left( \xi_{11} + \beta_{25}^7 \right) - 180^\circ \right] - \xi_{25} \right] = 70^\circ$$

Dieser Winkel ist zu construiren aus  $30^\circ + \xi_9$ ; damit ist auch  $\xi_{111}$  gefunden, denn

$$30^\circ + \xi_9^1 = 70^\circ - 0,54''$$

$$2 \left[ 4 \left( \xi_{11} + \beta_{25}^7 \right) - 180^\circ \right] = 17^\circ 30' - 0,135'' + \xi_{25}^I$$

$$\xi_{25}^I = 14^\circ 24' + 1,835''$$


---

$$\begin{aligned}
 2[4(\xi_{11} + \beta_{25}^7) - 180^\circ] &= 31^\circ 54' + 0,67'' \\
 4(\xi_{11} + \beta_{25}^7) - 180^\circ &= 15^\circ 57' + 0,835'' \\
 4(\xi_{11} + \beta_{25}^7) &= 195^\circ 57' + 0,835'' \\
 \xi_{11} + \beta_{25}^7 &= 48^\circ 59' 14,209'' \\
 \beta_{25}^7 &= 16^\circ 15' 36,743'' \\
 \hline
 \xi_{11}^9 &= 32^\circ 43' 38,463'' \\
 \xi_{11} &= 32^\circ 43' 38,182'' \\
 \hline
 \xi_{11}^I - \xi_{11} &= 0,281''
 \end{aligned}$$

Wählt man für  $\xi_{25}^I$  als Constructionswinkel  $\xi_{25}^{III}$ , so beträgt die Abweichung nur 0,06''.

b) ein ziemlich genauer Wert für  $\xi_{11}$  ergibt sich aus

$$\frac{1}{2}\gamma \frac{84}{85} + \frac{1}{2}\beta \frac{16}{65} = \frac{1}{2}\gamma \frac{12}{13} + \frac{1}{2}\beta \frac{8}{17} = 47^\circ 43' 34,721'' \quad (\text{vgl. § 9.})$$

vermindert um  $14^\circ$ . Die Abweichung beträgt 3,461''.

c) Eine dritte Lösung geben die Winkel

$$\beta_{5^9} \quad (\text{vgl. § 3.}) = 28^\circ 10' 15\frac{1}{2}'' \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}\gamma \frac{48}{73} = 20^\circ 33' 21\frac{433}{562}''$$

Addirt man diese beiden Winkel und subtrahirt

$$2\xi_{45}^I = 16^\circ - 0,54''$$

so erhält man

$$\xi_{11}^{II} = 32^\circ 43' 37,64''$$

Die Abweichung beträgt  $\frac{1}{2}''$ .

5) Für das reguläre 13-Eck ist

$$\xi_{13} = 27^\circ 41' 32\frac{4}{13}''$$

a) Wählt man als Constructionswinkel

$$\gamma \frac{20}{29} = 43^\circ 36' 10\frac{1}{7}''$$

so erhält man aus

$$3\gamma \frac{20}{29} + \xi_{13} = 158^\circ 30' + \delta$$

einen Winkel, der zu construiren ist aus  $120^\circ$ ,  $22^\circ 30'$  und  $2\xi_{45}$ . Ist

$$2\xi_{45}^I = 16^\circ - 0,54''$$

so ergibt sich

$$3\gamma \frac{20}{29} + \xi_{13} = 158^\circ 30' - 0,54'' \quad \text{und}$$

$$3\gamma \frac{20}{29} = 13^\circ 48' 30,43''$$

durch Subtraction

$$\xi_{13}^I = 27^\circ 41' 29''$$

Die Abweichung vom wahren Wert beträgt  $4 \frac{4''}{13}$ .

b) Eine andere Lösung giebt

$$\frac{1}{2}\beta_5^3 \text{ (conf. § 4.)} = 10^\circ 18' 17 \frac{64}{1538}$$

V. Man erhält

$$8[4(\xi_{13} - \frac{1}{2}\beta_5^3 - 60^\circ)] = 76^\circ 24' + \delta$$

Dieser Winkel lässt sich construiren aus  $30^\circ$ ,  $\xi_{25}^I$  und  $4\xi_{45}^I$ . Es ist

$$\begin{aligned} 30^\circ + \xi_{25}^I + 4\xi_{45}^I &= 76^\circ 24' + 0,725'' \quad \text{und aus V.} \\ 4(\xi_{13} - \frac{1}{2}\beta_5^3) - 60^\circ &= 9^\circ 23' + 0,09'' \\ \xi_{13} - \frac{1}{2}\beta_5^3 &= 17^\circ 23' 15,0225'' \\ \frac{1}{2}\beta_5^3 &= 10^\circ 18' 17,405'' \end{aligned}$$

---


$$\xi_{13}^{II} = 27^\circ 41' 32,4275''$$

$$\xi_{13} = 27^\circ 41' 32,3077''$$


---

$$\xi_{13}^{9I} - \xi_{13} = 0,1198''$$

c) Weniger genau ist der Wert für  $\xi_{13}^{III}$ , welchen man aus

$$\gamma \frac{12}{13} - 6^\circ = 27^\circ 41' 24 \frac{19''}{74} \quad \text{erhält.}$$

d) Auch § 4. liefert eine Lösung. Es ist

$$\begin{aligned} \beta_5^9 + \beta_5^4 &= \beta_5^5 + 2\beta_5^9 = 60^\circ 41' 28,7'', \quad \text{also ist} \\ \beta_5^9 + \beta_5^4 - 33^\circ &= 27^\circ 41' 28,7'' = \xi^{IV} \\ \xi_{13} - \xi_{13}^{IV} &= 3,6'' \end{aligned}$$

6) Für das reguläre 19-Eck ist

$$\xi_{19} = 18^{\circ} 56' 50 \frac{10''}{19}$$

a) Als Constructionswinkel wählt man

$$\frac{1}{4}\beta \frac{39}{89} = 12^{\circ} 59' 40 \frac{59''}{547}$$

$$\frac{1}{4}\beta \frac{34}{84} = 12^{\circ} 59' 40 \frac{204}{331}. \text{ Es ist dann}$$

$$4 \left( \xi_{19} - \frac{1}{4}\beta \frac{39}{89} \right) = 49^{\circ} 48' + \delta. \text{ Hiervon zieht man ab}$$

$$2\xi_{25}^I = 28^{\circ} 48' + 3,6''; \text{ also ist}$$

$$4 \left( \xi_{19} - \frac{1}{4}\beta \frac{39}{89} \right) - 2\xi_{25}^I = 21^{\circ}$$

Nun ist  $\xi_{19}^I$  zu construiren. Die Abweichung von  $\xi_{19}^I$  beträgt  $\frac{7''}{10}$ .

b) Sehr gering ist auch die Abweichung bei der Construction aus

$$\beta \frac{8}{17} = 28^{\circ} 4' 20,956''$$

$$+ \frac{1}{2}\beta \frac{63}{65} = 37^{\circ} 52' 29,926''$$

$$+ \frac{1}{4}\beta \frac{8}{17} = 14^{\circ} 2' 10,478''$$

$$+ \beta \frac{5}{7} = 11^{\circ} 54' 38,666''$$

$$\psi = 91^{\circ} 53' 40,026''$$

Hiervon zieht man ab

$$2\xi_{19} = 37^{\circ} 53' 41,053''$$

$$\psi - 2\xi_{19} = 54^{\circ} - \delta : \psi - 2\xi_{19}$$

lässt sich construiren. Die Abweichung beträgt  $\frac{1}{2}''$ .

c) Aus der Construction von

$$(30^{\circ} + \beta \frac{28}{53} - \xi_{19}) - 27^{\circ} - \delta$$

erhält man  $\xi_{14}$  mit einer Abweichung von circa  $7''$ .

7) Für das reguläre 21-Eck ist

$$\xi_{21} = 17^{\circ} 8' 34 \frac{2''}{7}$$

a) Aus dem Centriwinkel des regulären 7- und 3-Eck lässt sich  $\xi_{21}$  berechnen. Man stelle die Diophantische Gleichung auf:

$$\frac{y \cdot P}{3} - \frac{x \cdot P}{7} = \frac{P}{21}$$

wo  $P$  die Peripherie des Kreises bedeutet. Es ist

$$7y - 3x = 1$$

hieraus folgt:

$$7y \equiv 1 \pmod{3}$$

ferner ist

$$6y \equiv 0 \pmod{3}$$

---


$$y \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{d. h.}$$

$$x = 1 + 3n$$

Für  $n = 0$  ist  $y = 1$  und  $x = 2$ ; also ist

$$\frac{P}{3} - \frac{2P}{7} = \frac{P}{21}$$

b) Ein ziemlich genaues Resultat erhält man aus:

$$90^{\circ} + \frac{1}{2}\gamma \frac{55}{73} = 114^{\circ} 26' 38,24''$$

$$- \gamma^5^{10} = 81^{\circ} 18' 3,67''$$

---


$$90 + \frac{1}{2}\gamma \frac{55}{73} - \gamma^5^{10} - \xi_{21} = 33^{\circ} 8' 34,57'' - \xi_{21}$$

$$= 16^{\circ} + 0,28'' = 2\xi_{45}^I + 0,82^{IV}$$

Die Abweichung vom wahren Wert beträgt  $0,82''$ .

8) Für das reguläre 23-Eck ist

$$\xi_{23} = 15^{\circ} 39' 7 \frac{19''}{23}$$

Man addire

$$\frac{1}{2}\gamma \frac{12}{13} = -33^{\circ} 41' 24,24''$$

$$- \frac{1}{2}\beta \frac{8}{17} = -14^{\circ} 2' 16,48''$$

und subtrahire

$$\xi_{23} = 15^{\circ} 39' 7,83''$$

---


$$\frac{1}{2} \left( \gamma \frac{12}{13} - \beta \frac{8}{17} \right) - \xi_{23} = 4^{\circ} - 0,07'' = \frac{1}{2} \xi_{45}^0 + 0,06''$$

Die Abweichung beträgt 0,06''.

9) Für das reguläre 29-Eck ist

$$\xi_{29} = 12^{\circ} 24' 49 \frac{19''}{29}$$

Der Constructionswinkel ist

$$\beta \frac{20}{29} = 43^{\circ} 36' 10,152''$$

Man addire:

$$4\beta \frac{29}{29} = 174^{\circ} 24' 40,608''$$

$$\xi_{29} = 12^{\circ} 24' 49,655''$$

---


$$4\beta \frac{20}{29} + \xi_{29} = 186^{\circ} 49' 30,263''$$

Nun ist

$$4 \left( 4\beta \frac{20}{29} + \xi_{29} - 180^{\circ} \right) = 27^{\circ} 18' + \delta$$

$$3\xi_{25}^{\text{II}} = 43^{\circ} 12' - 1,875''$$

---


$$4 \left( 4\beta \frac{20}{29} + \xi_{29} - 180^{\circ} \right) + 3\xi_{25}^{\text{II}} = 70^{\circ} 30' - 0,823'' = 48^{\circ} + 22^{\circ} 30' + \delta$$

Die Abweichung ist  $\xi_{29}^{\text{I}} - \xi_{29} = 0,206''$ .

9a) Für das reguläre 31-Eck ist

$$\xi_{31} = 11^{\circ} 36' 46 \frac{14''}{31}$$

a) Nimmt man zum Constructionswinkel  $\beta \frac{12}{37}$ , so erhält man

$$3\beta \frac{12}{37} + 2\xi_{31} = 80^{\circ} - \delta = 2\xi_{19}^{\text{I}}; \text{ also ist}$$

$$\xi_{31}^{\text{I}} = \xi_{19}^{\text{I}} - \frac{3}{2} \beta \frac{12}{37}$$

b) Berechnet man  $\beta \frac{8}{89} + \frac{1}{4} \gamma \frac{80}{89} - (9^{\circ} + 2\xi_{45}^{\text{I}})$ , so ergibt sich für  $\xi_{31}$  eine Abweichung von  $\frac{1}{2}''$ .

10) Für das reguläre 37-Eck ist

$$\xi_{37} = 9^{\circ} 43' 48 \frac{1''}{37}$$

Man addire:

$$3\beta \frac{12}{37} = 56^{\circ} 46' 26,05''$$

$$16\xi_{37} = 155^{\circ} 40' 32 \frac{16''}{37}$$

und subtrahire  $180^{\circ}$ ; es ist

$$3\beta \frac{12}{37} + 16\xi_{37} - 180^{\circ} = 32^{\circ} 27' - \delta = 2\beta$$

mithin ist

$$\begin{aligned} 4\psi &= 129^{\circ} 48' - 4\delta \\ 2\xi_{25}^I &= 28^{\circ} 48' - 3\delta \end{aligned}$$

Es ist

$$4\psi - 2\xi_{25}^I = 101^{\circ} = 2\xi_9^I + 21^{\circ}$$

$$2\xi_9^I = 80^{\circ} - 1,03''; \text{ also ist}$$

$$\frac{1}{2}(2\xi_9^I + 21^{\circ} = 50^{\circ} 30' - 0,54'') \text{ und}$$

$$\xi_9^I + \frac{21^{\circ}}{2} + \xi_{25}^I = 64^{\circ} 54' - 2,415''$$

$$\left(\xi_9^I + \frac{21}{2} + \xi_{25}^I\right) \frac{1}{2} + 180^{\circ} = 212^{\circ} 27' - 1,2075''$$

hiervon subtrahire man

$$3\beta \frac{12}{37} = 56^{\circ} 46' 24,05''$$

$$16\xi_{37}^I = 155^{\circ} 40' 32,74'', \text{ also ist}$$

$$\xi_{37}^I = 9^{\circ} 43' 47,95''$$

Die Abweichung vom wahren Werte beträgt  $0,02''$ .

Sehr gering ist auch die Abweichung für

$$\xi_{37}^{II} = \beta \frac{33}{65} + \beta^{56} - (4\xi_{45} + 30^{\circ}) = 9^{\circ} 43' 47,673''$$

## § 22.

Die Construction des 25-Ecks. (Nach § 21. 1. b) Figur 3 Man teilt den Durchmesser  $AB$  in 13 gleiche Teile und trägt  $\frac{5}{2} \cdot (B8) = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} AB$  bis  $E$  ab, oder man teilt  $BC$  in drei gleiche Teile und

zieht durch den Teilpunkt  $D$  Sehne  $AP$ , dann ist  $\widehat{BP} = BE = 113^{\circ} 6'$ . Dann bestimmt man  $\widehat{BF} = 36^{\circ}$ ,  $\widehat{BG} = 60^{\circ}$ ,  $\widehat{BH} = 45^{\circ}$  und macht  $\widehat{BK} = \widehat{KL} = \widehat{BG} - \widehat{BF} = \widehat{GF} = 24^{\circ}$  und  $LN = HJ = \frac{1}{2}\widehat{GH} = 7\frac{1}{2}^{\circ}$ . Teilt man nun  $\widehat{NE} = 57^{\circ} 36'$  in vier gleiche Teile, dann ist  $\widehat{EQ} = \frac{1}{4}\widehat{EN} = 14^{\circ} 21'$  und  $EQ$  Seite des einbeschriebenen 25-Ecks.

Die Construction des 9-Ecks. Figur 4. Man zeichnet über  $AB$  als Hypotenuse das pythagoreische Dreieck  $AEB$  ( $60^{\circ}\triangle_{11}^{11}$ ), trägt dann

$\widehat{BE}$  von  $B$  aus neunmal auf der Peripherie ( $ab$ ) bis  $F$  ab und macht  $\widehat{FG} = 27^{\circ}$ . Es ist nun  $\widehat{GB} = 160^{\circ}$ . Teilt man  $\widehat{GB}$  in vier gleiche Teile, so dass  $\widehat{GH} = \frac{1}{4}\widehat{BG}$  ist, dann ist Sehne  $GH$  eine Seite des eingeschriebenen regelmässigen 9 Ecks. — Die Construction von  $\triangle AEB$  ergibt sich am leichtesten, wenn man  $BC$  in sechs gleiche Teile teilt, durch den fünften Teilpunkt  $D$  Sehne  $AL$  zieht und  $\widehat{BL} = \widehat{LE}$  macht.

Da  $\widehat{BF} = 187^{\circ}$  und  $\widehat{FG} = 27^{\circ}$  ist, so ist  $\widehat{AG} = 20^{\circ}$ . Ist nun  $\widehat{AK} = 36^{\circ}$ , so ist  $\widehat{GK} = \widehat{AK} - \widehat{AG} = 16^{\circ}$  und  $\widehat{GJ} = \frac{1}{2}\widehat{GK} = 8^{\circ}$ . Sehne  $GJ$  Seite des einbeschriebenen regelmässigen 40-Ecks.

Die Construction des 7-Ecks. (Nach § 21. 3a) Figur 5. Man trägt auf der Peripherie  $\widehat{BG} = \widehat{BF} + \widehat{FG} = 45^{\circ} + 18^{\circ}$  ab und macht  $\widehat{GH} = 14^{\circ} 24' = \xi_{25}$  und teilt  $\widehat{BH} = 48^{\circ} 36'$  in vier gleiche Teile.  $\widehat{BJ} = \frac{1}{4}\widehat{BH}$  trägt man von  $C$  aus auf der Peripherie ab bis  $K$ ; dann ist  $BK = 102'' 9' + 0,6'$ . Zeichnet man nun  $\triangle AEB = 40^{\circ}\triangle_{41}^9$ , dann

ist  $\widehat{BE} = 25^{\circ} 21' 38,76''$  und  $\widehat{BL} = 2\widehat{BE} = 50^{\circ} 43' 17,52''$ ; folglich ist  $\widehat{BK} - \widehat{BL} = \widehat{KL} = 51^{\circ} 25' 42,63''$  und  $KL$  ist Seite des einbeschriebenen regelmässigen 7-Ecks. Figur 6 ist nach § 21, 3b) gezeichnet.

Construction des 11-Ecks. (Nach § 21, 4c) Figur 7. Man halbirt  $BC$  in  $D$  und zieht durch  $D$  Sehne  $AF$ , teilt dann  $BC$  in acht gleiche Teile und zieht durch den dritten Teilpunkt  $E$  von  $C$  Sehne  $AG$ . Auf der Peripherie trägt man dann  $\widehat{BF}$  von  $B$  aus neunmal ab bis  $K$ , dann ist  $BK = 28^{\circ} 10' 15\frac{1}{2}''$ ; halbirt man  $\widehat{CG}$  in  $H$  und macht  $\widehat{KL} = \widehat{CH}$ , dann ist  $\widehat{BL} = 48^{\circ} 43' 37,10''$ . Trägt man nun auf  $\widehat{BL}$  von  $B$  aus  $\widehat{BJ} = 2\xi_{15}^1$  ab, dann ist  $\widehat{JL} = \xi_{11}$  und  $JL$  Seite des einbeschriebenen regelmässigen 11-Ecks.

Construction des 13-Ecks. (Nach § 21, 5 d). Figur 8. Man halbirt  $BC$  in  $D$  und zieht durch  $D$  Sehne  $AE$ . Trägt man  $\widehat{BE}$  neunmal auf der Peripherie ab bis  $K$ , dann ist  $2\pi - 9\widehat{BE} = \widehat{BK} = \beta_5^9$  und  $\widehat{AL} = \pi - \widehat{BL} = \pi - 4\widehat{BE} = \beta_5^4$ . Macht man  $\widehat{LM} = 2\pi - 9\widehat{BE}$  dann ist  $\widehat{AM} = \beta_5^9 + \beta_5^4$ . Nun construirt man  $\widehat{CF} = 2\widehat{CG} = 30^\circ$  und  $\widehat{HB} = 2\widehat{JB} = 36^\circ$  und  $\widehat{JO} = \widehat{JB} = \widehat{CG} = 33^\circ = \widehat{MN}$ , dann ist  $\widehat{AN} = \xi_{13}$  und Sehne  $AN$  Seite des einbeschriebenen 13-Ecks.

Wie Gauss 1796 bewiesen hat, ist ausser dem 3, 6, 12 . . . , dem  $4, \frac{1}{2}, 8, 16$  . . . , dem 5, 10, 20 . . . und dem 15, 30, 60 . . . Eck noch die Herstellung eines  $n$ -Ecks möglich, wenn  $n$  eine Primzahl und wenn zugleich  $(n-1)$  eine Potenz von 2 ist, also z. B. das 17, 257, 65537 Eck. Alle anderen regelmässigen Vielecke müssen durch Annäherungsverfahren constuirt werden. Ein solches ist im § 21 angegeben worden; die Constructionen im § 22 zeigen, dass sehr genaue Resultate bei diesem Teilverfahren erzielt werden. Auch das 17-Eck lässt sich danach leicht construiren. Zu Constructionswinkeln nehme man

$$\beta_5^9 = 28^\circ 10' 15\frac{1}{2}'' \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\gamma_{89}^{80} = 32^\circ 0' 19\frac{127''}{334}$$

Um diese zu finden, teilt man zunächst (Figur 9)  $BC$  in zwei und dann in acht gleiche Teile, zieht durch den Halbierungspunkt  $D$  von  $BC$  Sehne  $AE$  und durch den fünften Teilpunkt  $F$  von  $C$  aus Sehne  $AG$ . Es ist dann wie oben beim 13-Eck  $2\pi - 9\widehat{BE} = \widehat{BK} = \beta_5^9$  und  $\frac{1}{2}\widehat{CG} = \widehat{CH} = \frac{1}{2}\gamma_{89}^{80}$ . Macht man  $\widehat{KJ} = \widehat{CH}$ , dann ist  $\widehat{BK} + \widehat{KJ} = \beta_5^6 + \frac{1}{2}\gamma_{89}^{80}$ . An  $\widehat{MP} = 30^\circ$  trägt man  $PQ = \widehat{BN} - \widehat{BO} = 45^\circ - 36^\circ = 9^\circ$  an macht  $JL = MQ = 39^\circ$ ; es ist dann  $\widehat{BJ} - \widehat{JL} = \widehat{BL} = 21^\circ 10' 34,727'' = \xi_{17}^1$  und  $BL$  eine Seite des einbeschriebenen regelmässigen 17-Ecks.

Der Unterschied vom wahren Wert beträgt  $\frac{1}{2}''$ .

Eine andere leicht auszuführende Construction des regelmässigen 17-Ecks giebt  $(45^\circ + \gamma_5^4 - \gamma_5^{10}) = 21^\circ 10' 43''$ . Der Unterschied beträgt  $8''$ .

Ann. Beweis in § 8. nach Gauss „Ueber die pyth Zahlen“ § 8. Bunzlau 1894.

## XIX.

Théorèmes fondamentaux de la géométrie  
sphérique.

Suite\*)

Par

**V. Sikstel.**

Il a été déjà démontré que toutes les lignes géométriques sur la surface que nous nommerons actuellement sphérique, étant fermées, sont égales entre elles (théorème 7). C'est pourquoi pour unité linéaire nécessaire pour la mesure on peut prendre une partie définie de toute la ligne géométrique, comme d'une quantité constante pour la surface donnée. La ligne géométrique entière sera dans ce cas une unité de plus haute catégorie à laquelle nous donnerons plus bas le nom d'unité pour la simplification de notre exposition.

*Théorème 9. Les perpendiculaires à la même ligne géométrique se coupent non pas d'un de ses côtés, mais des deux.*

Soient  $EDCA$  et  $FDCB$  (fig. 1) perpendiculaires à la ligne  $EFBA$  et admettons qu'elles se coupent, comme il est montré sur la figure, dans les points  $D$  et  $C$  d'un côté de la ligne  $EFBA$ . Alors d'après le théorème 8 nous obtenons  $DMC = \frac{1}{2}$  et  $CDMCA = \frac{1}{2}$ ; par conséquent  $DMC = EDMCA$ .

L'absurdité obtenue nous montre que les perpendiculaires  $DCA$  et  $FDCB$  se coupent de deux côtés de la ligne  $EFBA$ .

\*) Bulletin de la Société Physico-mathématique de Kasan. Deuxième série. Tome II Nr. 2, 1892.

*Théorème 10.* La somme de deux perpendiculaires élevées sur la ligne géométrique d'un de ses côtés, en prenant la longueur de chacune de son pied jusqu'au point de l'intersection avec l'autre, est égale à  $\frac{1}{2}$ .

Il est donné:  $AB$  et  $AC$  sont perpendiculaires à  $BC$  (fig. 2).  
Il faut démontrer que  $AB + AC = \frac{1}{2}$ .

En prolongeant  $AB$  et  $AC$  jusqu'à la seconde intersection qui, comme il est démontré, doit avoir lieu de l'autre côté de la ligne  $BC$  en quelque point  $D$ , nous trouverons que  $\triangle ABC$  par le déplacement sur la surface peut être complètement superposé sur  $\triangle BDC$ , alors nous verrons, [que  $AC = BD$  et  $AB = CD$ . Mais  $AB + BD = \frac{1}{2}$ ; donc  $AB + AC = \frac{1}{2}$ .

*Théorème 11.* Si la longueur d'une portion de la ligne géométrique est égale à  $\frac{1}{4}$ , la longueur de chaque perpendiculaire élevée sur la portion à son extrémité, en la prenant du pied de la perpendiculaire jusqu'au point commun d'intersection, est égale à  $\frac{1}{4}$  (fig. 3)

Soient  $AB = \frac{1}{4}$  et  $AD$  et  $BD$  perpendiculaires à  $AB$ .

En prolongeant  $BD$  et  $BA$  jusqu'à la seconde intersection dans le point  $C$ , nous trouverons que  $\angle C = d$  (théorème 6). Il est évident que  $\triangle CDA$  par le déplacement sur la surface peut être complètement superposé sur  $\triangle ADB$ ; alors  $AD$  coïncidera complètement avec  $BD$  et, par conséquent,  $AD = BD$ . Mais, d'après le dernier théorème,  $AD + BD = \frac{1}{2}$  ou  $2AD = 2BD = \frac{1}{2}$ , c'est à dire  $AD = BD = \frac{1}{4}$ .

*Théorème 12.* Si la longueur de la portion de la ligne géométrique est plus grande ou plus petite que  $\frac{1}{4}$ , chacune des perpendiculaires élevées sur la portion à ses extrémités, en prenant la longueur de la perpendiculaire comme dans le cas précédent, est égale à  $\frac{1}{4}$  (fig. 4).

Il est donné:  $BC = \frac{1}{4}$  et  $AC$  et  $AB$  sont perpendiculaires à  $BC$ . Alors, d'après ce que nous avons déjà dit,  $AC = AB = \frac{1}{4}$ .

Prenons pour exemple la portion  $CM < \frac{1}{4}$  et menant  $MN$  perpendiculairement à  $BC$ , admettons que la ligne obtenue par le prolongement de  $MN$  ne passera pas par le point  $A$  par le point d'intersection de  $AB$  et  $AC$  mais elle rencontrera ces lignes dans les points  $D$  et  $N$ . Alors  $NC + NM = \frac{1}{2}$ , mais  $NC < \frac{1}{4}$ ; par conséquent  $MN > \frac{1}{4}$  et d'autant plus  $MD > \frac{1}{4}$ ; mais  $BD$  est aussi  $> \frac{1}{4}$ ; alors  $BD + MD > \frac{1}{2}$ , ce qui est en contradiction avec le théorème 10. Cette absurdité provient évidemment de la supposition que  $MN$  ne passe pas par le point  $A$ ; par conséquent,  $MN$  passera absolument par le point  $A$  et occupera quelque position  $AM$ . Maintenant nous obtiendrons:  $AM + AC = AM + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ; par conséquent,  $AM = \frac{1}{4}$ .

De la même manière nous démontrerons le théorème pour le cas, où  $CM > \frac{1}{2}$ .

**C o r o l l a i r e s.**

1) Toutes les perpendiculaires élevées sur la ligne géométrique d'un de ses côtés passent par un point constant et la longueur de chacune d'elles, en la prenant du pied jusqu' au point commu d'intersection, est égale à  $\frac{1}{2}$ .

2) Les perpendiculaires à la ligne géométrique donnée se divisent par cette ligne en deux parties égales entre les points de leur intersection.

3) Si du sommet d'un angle droit nous prenons sur un de ses côtés une ligne égale à  $\frac{1}{2}$  et si nous joignons le point obtenu avec quelque point sur l'autre côté de l'angle, la ligne géométrique obtenue (joignante) sera perpendiculaire à l'autre côté de l'angle et sa longueur sera à  $\frac{1}{2}$  (fig. 5.)

Soit  $AB$  perpendiculaire à  $CB$  et égale à  $\frac{1}{2}$ . Démontrons que toute ligne  $AC$  prise dans le théorème est aussi perpendiculaire à  $CB$  et, par conséquent, est égale à  $\frac{1}{2}$ .

En supposant que  $AC$  n'est pas perpendiculaire à  $CB$ , faisons passer du point  $C$  la ligne  $CD$ , perpendiculaire à  $CB$ . Cette ligne, d'après ce qui a été dit, passera par le point  $A$  et sera égale à  $\frac{1}{2}$ . Mais comme, d'après le théorème 8, les lignes  $CDA$  et  $CA$  doivent avoir encore un point commun à la distance du point  $A$  égale à  $\frac{1}{2}$ , nous obtenons que  $CDA$  et  $CA$  ont trois points communs. Cette absurdité ne provient évidemment, que de la supposition que  $AC$  n'est pas perpendiculaire à  $CB$ , donc  $AC$  est perpendiculaire à  $CB$  et, conséquemment, la longueur de  $AC$  est égale à  $\frac{1}{2}$ .

4) La ligne géométrique qui divise en deux parties égales les portions de deux autres lignes géométriques prises entre les points de leur intersection, est perpendiculaire à ces lignes.

5) Si la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une ligne géométrique donné est plus longue du plus courte que  $\frac{1}{2}$ , on ne peut faire passer de ce point aucune autre ligne perpendiculaire à ligne donnée.

6) Les angles du fuseau sphérique sont égaux.

7) La perpendiculaire élevée sur le côté du fuseau pas en son milieu forme avec l'autre côté des angles inégaux: un angle obtus qui sera opposé à la plus grande des portions donnée et un angle aigu opposé à la plus petite d'entre elles (fig. 6.)

Si  $AD > DC$  et  $DB$  est perpendiculaire à  $AC$  nous avons: 1)  $\angle DBC$  ne peut pas être égal à un angle droit. Admettons que  $\angle DBC = d$ , nous trouverons  $BC = DC = \frac{1}{2}$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. 2)  $\angle DBC$  ne peut pas être obtus. En supposant  $\angle DBC > d$ , il faut admettre que  $BM$ , perpendiculaire à  $BD$  doit prendre sa direction en dedans de  $\angle BDC$  et, par conséquent, doit couper  $DC$  dans quelque point  $M$ . Alors  $BM = DM = \frac{1}{2}$ , ce qui est de nouveau en contradiction avec l'hypothèse.

Si angle  $DBC$  ne peut pas être égal à un angle droit et ne peut pas être plus grand que lui il est, conséquemment, aigu et  $\angle DBA =$  obtus.

**Remarque.** Comme toutes deux lignes géométriques, menées sur la surface sphérique, se coupent, en construisant un angle quelconque au point quelconque de la ligne géométrique donnée et en le déplaçant sur la surface de façon à ce qu'un de ses côtés reste sur la ligne donnée, nous trouverons que la position primitive et la nouvelle position de l'autre côté de l'angle donnée, étant prolongées jusqu'à l'intersection, formeront avec ligne donnée un triangle qui aura un angle égal à un angle intérieur non adjacent.

*Théorème 13.* Si dans un triangle un angle extérieur est égal à un angle intérieur non adjacent, la ligne géométrique qui joint le milieu du côté adjacent à ces angles, avec le sommet de l'angle opposé est égale à  $\frac{1}{2}$ ; elle est deux fois plus petite que la somme des deux autres côtés du triangle et divise l'angle formé par eux en deux parties égales.

Il est donné:  $\triangle ABC$ ;  $\angle B = \angle C$ ;  $BO = CO$  (fig. 7.)

Il faut démontrer:  $AO = \frac{1}{2} AB + AC = \frac{1}{2}$ ;  $\angle BAO = \angle CAO$ .

En prolongeant  $AO$  et  $AC$  jusqu'à l'intersection dans le point  $D$ , nous obtiendrons  $\triangle COD$  qui, évidemment, par le déplacement sur la surface peut être complètement superposé sur  $\triangle BOA$ . Avec cela nous obtiendrons: 1)  $AO = DO$ ; mais  $AO + DO = 2AO = \frac{1}{2}$ , par conséquent:  $AO = \frac{1}{4}$ ; 2)  $CD = AB$ ; mais  $AC + CD = \frac{1}{2}$ , donc  $AB + AC = \frac{1}{2}$ . 3)  $\angle BAO = \angle CDO$ ; mais  $\angle CDO = \angle CAO$  comme angles d'un fuseau, donc  $\angle BAO = \angle CAO$ .

Il est facile de voir que  $AO$  qui divise l'angle  $BAC$  en deux parties égales et qui est égale à  $\frac{1}{4}$  divisera aussi le côté  $BC$  — ( $\triangle ABC$ ) — en deux parties égales.

**Corollaires** 1) Si l'angle du fuseau est plus petit que l'angle droit, la ligne géométrique qui joint les milieux des côtés du fuseau

est la plus longue des perpendiculaires abaissées des points d'un côté du fuseau sur l'autre (fig. 8)

Remarque. Le troisième corollaire du théorème 12 nous montre que si dans un triangle deux angles sont droits et le côté compris entre eux est égale à  $\frac{1}{2}$ , le troisième angle du triangle est aussi droit.

Il en suit, d'après les théorèmes démontrés, que, si dans un triangle deux angles sont droits, le troisième angle est équivalent avec son côté opposé, c'est à dire: si le troisième angle est plus grand ou plus petit que l'angle droit, son côté opposé est plus grand ou plus petit que  $\frac{1}{2}$  et réciproquement.

Qu' on nous donne à présent le fuseau  $AMBNA$  et que son  $\angle A < d$ . Alors  $MN$  qui joint les milieux des côtés du fuseau est plus petite que  $\frac{1}{2}$ . D'après cela  $DC$ , perpendiculaire à  $AB$ , coupera le prolongement  $NM$  en quelque point  $O$  et formera avec  $AB$  l'angle  $ACD < D$ .

Il en suit que, prenant d'abord  $CD = MN$  et menant  $CQ$  perpendiculaire à  $CD$ , nous obtiendrons  $\triangle CQD$  égal  $\triangle MBN$  avec quoi  $\angle CQA = \angle B = A$ . Maintenant, d'après le théorème 13,  $CQ + CA = \frac{1}{2}$ , mais  $CQ = \frac{1}{2}$ , donc  $CA = \frac{1}{2}$ , ce qui est absurde. L'absurdité n'est provenu, évidemment, que de la supposition que  $CD = MN$ . Ainsi  $CD$  ne peut pas être égale à  $MN$ .

Posant ensuite que  $CD > MN$  prenons  $C'D = MN$  et menons  $C'Q$  perpendiculairement à  $C'D$ . Alors il sera de nouveau évident que  $\angle C'QA = \angle CAD$  et nous obtiendrons  $\triangle AOQ$  qui aura  $AO + QO = \frac{1}{2}$ , ce qui est de nouveau absurde parce que  $AO$  ainsi que  $QO$  est plus petite que  $\frac{1}{2}$ . De cette manière nous obtenons que  $CD$  ne peut pas être plus grand que  $MN$  ni lui être égale, donc  $CD < MN$

2) Si un angle du fuseau est plus grand que l'angle droit, la ligne géométrique qui joint les milieux de ses côtés est la plus petite des perpendiculaires abaissées des points d'un côté du fuseau sur l'autre.

Ce corollaire sera démontré de la même manière que le précédent.

*Théorème 14.* Si un angle du fuseau est plus petit que l'angle droit, les perpendiculaires égales entre elles abaissées des points d'un côté du fuseau sur l'autre sont également éloignées des sommets du fuseau et, conséquemment, de la perpendiculaire du milieu.

Il est donné le fuseau  $MN$  (fig. 9) et  $\angle M < d$ .  $AB$  est la perpendiculaire du milieu,  $CD$  et  $C'D'$  sont des lignes égales entre elles et perpendiculaires à  $MBN$ . Il faut démontrer que  $DN = D'M$  ou que  $BD = BD'$ .

Comme  $CD < AB$  (corollaire premier du théorème 12) en déplaçant  $\triangle CDN$  sur la surface, nous pouvons parvenir enfin à ce que  $CD$  coïncide avec  $C'D'$ . La 10<sup>ème</sup> figure montre cette nouvelle position où  $C'N' = CN$ ,  $D'N' = DN$  et  $C'M'$  qui est le prolongement de  $N'C'$  est égale à  $CM$ . Dans le triangle  $MC'M'$  l'angle extérieur  $M$  est à l'angle  $M'$  — intérieur et non adjacent; c'est pourquoi, d'après le théorème 13,  $C'P$  qui joint le sommet  $C'$  avec le milieu du côté opposé est égale à  $\frac{1}{4}$ . En prolongement  $P'C'$  jusqu'à l'intersection avec  $MN$ , nous trouverons que  $C'P$  est égale à  $\frac{1}{4}$  et divise  $\angle NC'N'$  en deux parties égales, ce qui fait que  $N'P$  est aussi  $= PN$ . Sachant que  $C'D' < \frac{1}{4}$ , que  $PC' = C'P' = \frac{1}{4}$  et que  $C'D'$  est perpendiculaire à  $PP'$ , il est facile de voir que  $\angle P'C' = \angle PC'D' = d$  et par conséquent,  $PD' = P'D' = \frac{1}{4}$ . Ensuite,  $MN + MM' = \frac{1}{2} = MN' + N'V'$ . par conséquent,  $MM' = N'V'$  d'où  $\frac{MM'}{2} = P'M = \frac{N'V'}{2}$ ; mais nous souvenant que  $PD' = P'D'$ , nous concluons que  $MD' = D'N'$  ou  $MD' = DN$  (fig. 9) en conséquence de quoi  $BD$  est aussi  $= BD'$ , ce qu'il fallait démontrer.

*Théorème 15.* Si un angle du triangle est moindre que  $2n$ , le côté qui lui est opposé est plus petit que  $\frac{1}{2}$ .

Soit dans  $\triangle ABC$  (fig. 11)  $\angle ABC < 2d$ . En prolongeant  $AB$  nous trouverons qu'elle peut couper  $AC$  entre les points  $A$  et  $C$  en quelque point  $N$  ou bien en quelque point  $D$  sur le prolongement de  $AC$ . En faisant la première supposition, nous devons conclure que le prolongement  $AB$  coupera absolument  $BC$  en quelque point  $E$ . Alors  $ABMEN = \frac{1}{2}$  et  $BME = \frac{1}{2}$ , d'où nous obtiendrons une absurdité évidente:  $ABMEN = BME$ . Il en suit que la seconde supposition doit être juste, et dans ce cas:  $AD = \frac{1}{2}$  et  $AC < AD$ , donc  $AC < \frac{1}{2}$ .

*Théorème 16.* Si un angle du triangle est plus grand que  $2d$ , le côté qui lui est opposé est plus grand que  $\frac{1}{2}$ .

En admettant que dans  $\triangle ABC$  (fig. 12), dont les côtés sont  $AB$ ,  $BC$  et  $ADC$ ,  $\angle ABC > 2d$  et en prolongeant par exemple le côté  $AB$  de l'angle donné nous trouverons que ce prolongement doit prendre sa direction en dedans du  $\triangle ABC$ , donc il doit couper  $AC$  en quelque point  $D$  entre les points  $A$  et  $C$ . Dès lors  $AC > AMD$ , mais  $AMD = \frac{1}{2}$ , donc  $AC > \frac{1}{2}$ .

Remarque. Les conclusions réciproques aux théorèmes 15 et 16 seront également justes et seront démontrées d'une manière également simple.

*Théorème 17.* Si dans un triangle isocèle l'angle au sommet est moindre que  $2d$  et les côtés égaux sont moindres que  $\frac{1}{2}$ , la ligne qui divise l'angle au sommet en deux parties égales est perpendiculaire à la base (fig. 13)

Il est donné:  $\angle BAC < 2d$ ,  $AB = AC < \frac{1}{2}$ ,  $\angle BAO = \angle CAO$ .

Il faut démontrer:  $AO \perp BC$ .

Prolongeons  $AB$  et  $AC$  — côtés du  $\triangle ABC$  — jusqu' à la seconde intersection dans le point  $F$  et divisons  $ABF$  et  $ACF$  en deux parties égales dans les points  $M$  et  $N$ . Puis, en menant  $MA$  et en prolongeant  $BC$  et  $MN$  jusqu' à l'intersection, nous obtenons les points  $D$  et  $E$ .

Dès lors, d'après le corollaire 4 du théorème 12,  $AM = AQ = AN = \frac{1}{2}$  et, comme  $\angle MAQ = \angle NAQ$ , par la superposition des triangles  $MAQ$  et  $NAQ$  nous arriverons à la conviction que  $MQ = NQ$ ,  $AQ = \frac{1}{2}$  et d'après cela  $OO < \frac{1}{2}$ , par suite  $\angle D < d$ ; cela donne le droit, d'après le théorème 14, de conclure que  $NE = DM$ . Mais, en ajoutant à  $NE$  et  $DM$  à chacune une ligne égale  $NQ$  et  $MQ$ , nous trouverons:  $QE = QD = \frac{1}{2}$ ; et, comme  $\angle AQM = d$ ,  $\angle AOB$  est aussi  $= d$ , c'est à dire  $AO$  est perpendiculaire à  $BC$ , ce qu' il fallait démontrer.

*Théorème 18.* Si dans un triangle un côté quelconque pris pour base est moindre que  $\frac{1}{2}$  et la perpendiculaire du sommet à la base divise l'angle au sommet en deux parties égales, ce triangle est isocèle (fig 14.)

Remarque. Par l'hypothèse, indiquée par le théorème, l'angle au sommet ne peut être ni égal à  $2d$  ni plus grand que  $2d$ . Si l'angle au sommet est égal à  $2d$ , la figure donnée n'est pas un triangle, mais un fuseau.

Mais, si l'angle au sommet est plus grand que  $2d$ , le côté qui lui est opposé est plus grand que  $\frac{1}{2}$ , ce qui est en contradiction avec les données.

Il est donné:  $BQ \perp AC$ ,  $\angle ABQ = \angle CBQ$ .

Il faut démontrer que  $AB = CB$ .

En supposant que  $AB$  et  $CB$  ne sont pas égales et par exemple,  $AB > CB$ , prenons  $DB = CD$  et joignons les points  $D$  et  $C$ .

Nous aurons le triangle isocèle  $DBC$  dont le côté  $BO$  divise l'angle au sommet en deux parties égales. D'après le théorème précédent  $\angle COQ = d$ , mais  $\angle CQO$  est aussi  $= d$ , par conséquent  $CQ = \frac{1}{2}$ , ce qui est en contradiction avec la supposition. Ainsi  $AB$  et  $CB$  ne peuvent pas être inégales et par suite  $\triangle ABC$  est isocèle.

*Théorème 19.* Si dans un triangle isocèle l'angle au sommet est moindre que  $2d$  et les côtés égaux sont moindres que  $\frac{1}{2}$ , la ligne que divise l'angle au sommet en deux parties égales, divise aussi la base en deux parties égales (fig. 13)

Soit  $\triangle ABC$  le triangle donné. Faisons les mêmes constructions que celles que nous avons faites pour démontrer le théorème 17 et plaçons le  $\triangle CNE$  sur le  $\triangle BMD$  de manière que  $EN$  coïncide avec  $DM$  et le côté  $NC$  prenne sa direction sur  $MF$ . On peut y parvenir par suite de l'égalité des angles  $ENC$  et  $DMF$  — des angles droits. Des lors  $\triangle CNE$  prendra la position  $PMD$  et il se formera le nouveau  $\triangle BDP'$  qui ne peut être qu'isocèle par le théorème 18, c'est à dire  $DP = DB$ ; mais  $DP = CE$ ; par conséquent,  $DB = CE$ , mais  $DO$  est aussi  $= EO$ , conséquemment,  $BO = CO$ , ce qu'il fallait démontrer.

Sachant que d'un point on ne peut élever sur la ligne géométrique qu'une seule perpendiculaire, nous pouvons faire encore la déduction suivante: „si dans un triangle isocèle l'angle au sommet „est moindre que  $2d$  et les côtés égaux sont moindres que  $\frac{1}{2}$ ; la „perpendiculaire élevée sur la base de son milieu divisera aussi „l'angle au sommet en deux parties égales“.

Les théorèmes 17, 18, 19 et la dernière conclusion sont également justes pour chaque triangle isocèle dont l'angle au sommet est moindre que  $2d$ .

Soit dans le  $\triangle BAC$  l'angle  $A < 2d$  et  $AB = AC > \frac{1}{2}$ . En prolongeant  $AB$  et  $AC$  jusqu'à la seconde intersection dans le point  $D$ , nous trouverons que  $\triangle DBC$  est aussi isocèle et que  $DB = DC < \frac{1}{2}$  et  $\angle D = \angle A < 2d$ . En divisant  $\angle D$  en deux parties égales au moyen de la ligne  $DO$ , nous conclurons que  $DO$  passera par le point  $A$  (les deux  $AD = \frac{1}{2}$ ) et divisera  $\angle A$  en deux parties égales; on peut en acquérir la conviction par la superposition des fuseaux. Sachant plus loin que  $DO$  est perpendiculaire à  $BC$  et  $BO = CO$ , nous trouverons que la supposition est juste (fig. 15).

Les théorèmes 17, 18, 19 et la conclusion que nous venons de faire se rapportent à chaque triangle isocèle (fig. 16).

Prenons le triangle isocèle  $ABC$  dans lequel  $AC = BC$  et au

sommet  $\angle ACB > 2d$ . En prolongeant sa base des deux côtés nous obtiendrons une ligne géométrique entière  $ADBCA$  et un triangle isocèle  $ACB$  dont l'angle au sommet est moindre que  $2d$ .

En menant dans le  $\triangle ACBEA$  la ligne  $CE$  qui divise l'angle au sommet en deux parties égales, nous trouverons qu'elle sera perpendiculaire à  $AB$  et la divisera en deux parties égales. Mais la ligne  $CD$  qui est le prolongement de  $EC$  divise aussi évidemment l'angle au sommet du triangle donné en deux parties égales.

Puis, d'après le théorème 6,  $CD$  est perpendiculaire à  $ADB$ . En outre:  $EAD = EBD = \frac{1}{2}$ , mais  $EA = EB$ , par conséquent,  $AD$  est aussi  $= BD$ . Ainsi on peut appliquer au triangle donné les théorèmes 17 et 19.

Nous apercevant que  $CD$  qui est perpendiculaire à  $ADB$  et qui divise  $\angle ACB > 2d$  en deux parties égales est aussi perpendiculaire à  $AB$  et divisera aussi  $\angle ACB < 2d$  en deux parties égales, nous trouverons que le  $\triangle ACBEA$  et, par conséquent, le triangle  $ADBCA$  ont les côtés  $AC$  et  $BC$  égaux, c'est à dire que le dernier triangle est isocèle, c'est à dire que le théorème 18 peut lui être appliqué. La conclusion dont il est question dans la proposition est aussi évidemment juste pour le triangle donné.

*Théorème 20.* Dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux (fig. 17).

Il est donné:  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$ .

Il faut démontrer:  $\angle ABC = \angle ACB$ .

En menant  $AO$  perpendiculairement à  $BC$ , nous trouverons que  $BO = CO$ . En prolongeant  $AO$  et en prenant  $A'O = AO$ , joignons les points  $A'$  et  $B$   $\triangle A'OB$ , par le déplacement sur la surface, peut être complètement superposé sur  $\triangle AOC$ , d'où il suit que  $A'B = AC = AB$  et  $\angle A'BO = \angle ACO$ . Il en résulte que  $\triangle ABA'$  est isocèle et que sa ligne  $OB$  est la perpendiculaire à la base élevée sur son milieu et alors, d'après ce que nous venons de dire,  $\angle ABO = \angle A'BO$ ; mais  $\angle A'BO = \angle ACO$ , par conséquent:  $\angle ABO = \angle ACO$  ou  $\angle ABC = \angle ACB$ .

Donc, si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles qui leur sont opposés sont aussi égaux.

*Théorème 21.* Si la base d'un triangle isocèle est moindre que  $\frac{1}{2}$  et la ligne géométrique qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette dernière, elle divise aussi l'angle au sommet en deux parties égales (fig. 18.)

Il est donné:  $\triangle ABC$ ;  $AC < \frac{1}{2}$ ;  $AD = DC$ ,  $BD \perp AC$ .

Il faut démontrer:  $\angle ABD = \angle CBD$ .

Admettant que les angles  $ABD$  et  $CBD$  ne sont pas égaux et que, par exemple,  $\angle ABD > \angle CBD$ , menons  $BF$  de manière que  $\angle FBD = \angle CBD$ . Alors, d'après le théorème 18, nous trouverons que  $BF = BC$ , d'où nous concluons que  $FD = DC$ , ce qui est en contradiction avec les données.

Ainsi nous devons nécessairement conclure que  $\angle ABD = \angle CBD$ . Il est évident que nous arriverons à la même conclusion dans le cas où la base du triangle est plus grande que  $\frac{1}{2}$ : nous n'avons qu'à compléter le triangle jusqu'à la demi-sphère et à considérer d'abord le triangle complétant le triangle donné jusqu'à la demi-sphère.

**Corollaire.** Les lignes obliques à la ligne géométrique donnée qui partent d'un même point et qui ont sur cette ligne des projections égales sont égales.

*Théorème 22.* Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux.

Il est donné;  $\triangle ABC$  (fig. 19)

$$\angle BAC = \angle BCA$$

Il faut démontrer:  $AB = BC$ .

En supposant que  $AB$  n'est pas égale à  $BC$ , nous trouverons que  $OD$ , perpendiculaire à  $AC$  et menée de son milieu ne passera pas par le point  $B$  et, par conséquent, coupera un des autres côtés, par exemple  $BC$ , dans quelque point  $D$ . Alors, d'après ce qui a été dit,  $AD = DC$ , mais, d'après le théorème 20,  $\angle DAB = \angle DCA$ , ce qui est en contradiction avec les données. Ainsi nous voyons que  $AB$  doit être nécessairement  $= BC$ .

*Théorème 23.* Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que  $2d$  et les côtés égaux sont moindres que  $\frac{1}{4}$ , les angles à sa base sont aigus (fig. 20).

Il est donné:  $AB = AC < \frac{1}{4}$ ;  $\angle A < 2d$ ;  $AO \perp BC$ .

Il faut démontrer:  $\angle B < d$ .

L'angle  $B$  ne peut pas être droit car, si nous le supposons égal à un angle droit, nous verrons que  $AO = AB = \frac{1}{4}$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Admettons que  $\angle B > d$  et me-

nous  $BM$  perpendiculairement à  $BC$ , nous trouverons que  $BM=QM=\frac{1}{4}$ . Mais, d'après les donnés,  $AO < \frac{1}{4}$  1) et, par conséquent, d'autant plus  $OM$  doit être plus petite que  $\frac{1}{4}$ .

L'absurdité obtenue montre que  $\angle B$  ne peut non plus être obtus, c'est pourquoi il doit être nécessairement aigu.

*Théorème 24.* Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que  $2d$  et les côtés égaux sont plus grands que  $\frac{1}{4}$ , les angles à sa base sont obtus.

Pour démontrer le théorème on n'a qu'à prolonger les côtés égaux du triangle donné jusqu'à la seconde intersection alors nous obtiendrons le triangle indiqué par le théorème précédent et les angles à sa base seront aigus et, par conséquent, les angles à la base du triangle donné, comme angles supplémentaires jusqu'à  $2d$  aux angles du nouveau triangle, seront obtus. Nous trouverons en outre que la perpendiculaire abaissée dans le triangle isocèle donné du sommet sur base sera plus grande que  $\frac{1}{2}$  et plus grande que chacun des côtés égaux.

*Théorème 25.* Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que  $2d$  et les angles à la base sont aigus, les côtés égaux du triangle sont moindres que  $\frac{1}{4}$  (fig. 22).

Il est donné:  $\triangle ABC$ ;  $\angle A < 2d$

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C < d$$

Il faut démontrer:  $AB < \frac{1}{4}$ .

Les côtés égaux du triangle donné ne peuvent pas être égaux à  $\frac{1}{4}$  car dans ce cas  $\angle B = \angle C = d$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

1) Soit  $AM = AN = \frac{1}{4}$  (fig. 21),  $AB = AC < \frac{1}{4}$ ,  $\angle A < 2d$  et  $AO \perp BC$ . Si l'angle  $A < 2d$ ,  $MN < \frac{3}{4}$ . Il en résulte que  $BC$  ne peut pas rencontrer  $MN$  entre les points  $M$  et  $N$  et dans ce cas  $BC$  coupe la ligne géométrique  $AOQ$  entre les points  $A$  et  $Q$  et par suite  $AO < \frac{1}{4}$ . Puis nous voyons:  $OQ$  est perpendiculaire à deux lignes  $BC$  et  $MN$  et elle est moindre que  $\frac{1}{4}$ , c'est pourquoi  $OQ$  est la plus grande des perpendiculaires abaissées des points de la ligne  $BC$  sur la ligne  $MN$  (corollaire 1 du théorème 13) donc  $OQ > BM$  et par suite  $AO < AB$ . Nous en concluons: „si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que  $2d$  et les côtés égaux sont moindres que  $\frac{1}{4}$ , la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est plus petite que chacun des autres côtés.“

Supposant  $AB = AC > \frac{1}{2}$ , nous pouvons prendre  $AM = AN = \frac{1}{2}$ ; alors nous aurons dans le triangle  $DBC$ :  $\angle DBC < d$ ; et, par conséquent, la somme des angles adjacents  $\angle ABC + \angle DBC < 2d$ . On voit par là que  $AB$  est nécessairement moindre que  $\frac{1}{2}$ .

*Théorème 26.* Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est moindre que  $2d$  et les angles à la base sont obtus, les côtés égaux du triangle sont plus grands que  $\frac{1}{2}$ .

La vérité de ce que vient d'être énoncé est facile à voir par le supplément du triangle donné jusqu' au fuseau, en prolongeant les côtés égaux donnés jusqu' à la seconde intersection.

Corollaires des théorèmes précédents sur les triangles isocèles.

1) Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est plus grand que  $2d$  et les côtés égaux sont moindre que  $\frac{1}{2}$ , les angles à la base sont obtus et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est plus grande que  $\frac{1}{2}$ .

2) Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est plus grand que  $2d$  et les côtés égaux sont plus grands que  $\frac{1}{2}$ , les angles à la base sont aigus et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est plus petite que  $\frac{1}{2}$ .

3) Si l'angle au sommet d'un triangle à sa base sont aigus, les côtés égaux du triangle sont plus grands que  $\frac{1}{2}$ .

4) Si l'angle au sommet d'un triangle isocèle est plus grand que  $2d$  et les angles à la base sont obtus, les côtés égaux du triangle sont plus petits que  $\frac{1}{2}$ .

5) Les perpendiculaires élevées des milieux de tous les côtés d'un triangle quelconque passent par un même point.

6) Les bissectrices des angles de tout triangle passent par un même point.

*Théorème 27.* Si dans un triangle la somme de deux côtés est égale au troisième, l'angle opposé au troisième côté est égal à  $2d$ .

Il est donné:  $\triangle ABC$ ;  $AB + BC = AC$  (fig. 23.)

Il faut démontrer que  $\angle ABC = 2d$ .

En faisant  $AO = AB$ , nous trouverons que  $CO = CB$ . En joignant les points  $B$  et  $O$ , nous obtiendrons

$$\begin{array}{l} \text{du triangle } ABO \dots\dots\dots \angle ABO = \angle AOB \\ \text{du triangle } CBO \dots\dots\dots \angle CBO = \angle COB \\ \hline \angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = 2d \end{array}$$

Remarque. On voit sans difficulté que si dans un triangle un seul angle est égal à  $2d$ , la somme des deux côtés formant cet angle est égale au troisième; un pareil triangle peut avoir les deux autres angles: 1) égaux à zéro et, par conséquent il représente une certaine partie d'une ligne géométrique entière ou 2) non égaux à zéro, c'est à dire il se transforme en fuseau.

*Théorème 28.* Si dans un triangle la somme de deux côtés est plus petite que le troisième, l'angle opposé au troisième côté est plus grand que  $2d$ .

Cas 1<sup>er</sup>:  $AB$  ainsi que  $CB$  est plus petit que  $\frac{1}{2}$  (fig. 24.)

Il est donné:  $\triangle ABC. AB + CB < AC.$

$\angle BAC$  ainsi que  $\angle BCA$  différent de  $2d$ ,

Il faut démontrer que  $\angle ABC < 2d$ .

Le théorème proposé n' a évidemment besoin d'être démonté que dans ce cas où  $\angle BAC$  et  $\angle BCA$  sont chacun à chacun moindre que  $2d$ ; en admettant qu' un de ces angles est plus grand que  $2d$ , nous trouverons que le côté qui lui est opposé est plus grand que  $\frac{1}{2}$  et, par conséquent, d'autant plus  $AC > \frac{1}{2}$ , d' où  $\angle ABC > 2d$ .

Si nous prenons  $AM = AB$  et  $CN = CB$ , d'après les donnés, nous aurons  $AM + CN < AC$  En joignant le point  $B$  avec les points  $M$  et  $N$ , nous obtiendrons deux triangles isocèles:  $\triangle ABM$  et  $\triangle CBN$  dont les angles aux sommets sont moindres que  $2d$  et les côtés égaux sont moindres que  $\frac{1}{2}$ ; c'est pourquoi les angles à leurs bases sont aigus (théorème 23). D'après cela  $\angle BMN$  ainsi que  $\angle BNM$  sont plus grands que  $d$ .

Si maintenant nous abaissons la perpendiculaire du sommet  $B$  sur le côté  $AC$  et si, prenant  $OD = OB$ , nous joignons le point  $D$  aux points  $A, M, N$  et  $C$ , nous obtiendrons les triangles isocèles  $ABD$   $MBD$ ,  $NBD$  et  $CBD$ .

Comme dans  $\triangle BMD$  et  $\triangle BND$  les angles  $M$  et  $N$  sont chacun plus grands que  $2d$ , leur base commune  $BD$  doit être plus grande que  $\frac{1}{2}$ ; donc  $BD$  doit couper  $AC$  entre les points  $M$  et  $N$ ; en supposant le contraire nous aurions trouvé que  $BD$  est en même temps plus grande que  $\frac{1}{2}$  et plus petite que  $\frac{1}{2}$ . Si  $BD > \frac{1}{2}$ , dans

les triangles isocèles  $BAD$  et  $BCD$  dont les côtés égaux sont, d'après l'hypothèse, plus petits que  $\frac{1}{2}$ , les angles aux sommets sont plus grands que  $2d$ . Dans ce cas, d'après ce qui précède, les angles aux bases de ces triangles sont obtus, c'est à dire  $\angle ABO > d$  et  $\angle CBO > d$ , d'où  $\angle ABC > 2d$ , ce qu'il fallait démontrer.

Cas 2<sup>ème</sup> du théorème 28, quand  $BC > \frac{1}{2}$  et, par conséquent,  $AB < \frac{1}{2}$  (fig. 25)

Il est donné:  $\triangle ABC$

$$AB + BC < AC$$

$$\angle A \text{ et } \angle C$$

différent de  $2d$ , autrement sont moindres que  $2d$ .

Il faut démontrer:  $\angle ABC > 2d$ .

En construisant  $\triangle ABM$  et  $\triangle CBN$  de même que dans le cas précédent, nous devons conclure, d'après les données et les théorèmes sur les triangles isocèles, que  $\angle CBN$  égal à  $\angle CNB$  est plus grand qu'un angle droit. Si nous admettons maintenant que  $\angle ABC < 2d$ , la ligne  $BK$  qui divise  $\angle ABC$  en deux parties égales doit tomber à l'intérieur de  $\angle CBN$ . Mais, sachant que les bissectrices des angles du triangle passent par un même point, nous devons arriver à la conviction que les bissectrices  $BK$ ,  $AK$  et  $CK$  se rencontrent nécessairement à l'intérieur du  $\triangle CNB$  dans quelque point  $K$ . Mais comme  $AK$  et  $CK$ , étant bissectrices des angles aux sommets isocèles, servent de perpendiculaires élevées sur les deux côtés  $BM$  et  $BN$  de leurs milieux dans  $\triangle BMN$ , et comme les perpendiculaires des milieux des côtés du triangle se rencontrent toutes les trois dans un même point, le point  $K$  sert de point commun d'intersection — des bissectrices des angles  $\triangle ABC$  et des perpendiculaires des milieux des côtés dans  $\triangle BMN$ . D'après la supposition  $\angle ABK < d$ , donc  $\angle AMK$  qui lui est égal  $< d$  et par suite  $\angle KMN$ , égal à  $\angle KNM$ , est plus grand que  $d$ . En abaissant maintenant dans le triangle isocèle  $KMN$  la perpendiculaire  $KO$  du sommet sur la base et en la prolongeant d'une longueur  $OK' = OK$ , joignons le point  $K'$  aux points  $A$ ,  $M$ ,  $N$  et  $C$ . Après avoir considéré les triangles  $KMK'$  et  $KNK'$  dont les angles aux sommets  $M$  et  $N$  sont plus grands que  $2d$ , nous trouverons que  $KK' > \frac{1}{2}$  et, par conséquent,  $\angle KAK' > 2d$ , mais  $\angle KAK' = \angle BAC$ , donc  $\angle BAC > 2d$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. La contradiction ne vient que de la supposition que  $\angle ABC < 2d$ , donc  $\angle ABC > 2d$ , ce qu'il fallait démontrer.

*Théorème 29.* Si la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième, l'angle opposé au troisième côté est plus petit que  $2d$  (fig. 26)

Il est donné:  $\triangle ANCB, AB + BC > AMC.$

Il faut démontrer:  $\angle ABC < 2d.$

En admettant que  $\angle ABC > 2d$ , nous trouverons que le prolongement  $AB$  doit rencontrer le côté  $AMC$  à l'intérieur du triangle en quelque point  $M$ . Alors:

$$AB + BM = ANM$$

Mais d'après l'hypothèse  $AB + BC > ANM + MC.$

Ou  $BC > BM + MC$

$$BM + MC < BC, \text{ d'où } \angle BMC > 2d,$$

ce qui est absurde.

Il faut en conclure que  $\angle ABC < 2d.$

*Théorème 30.* Si l'angle d'un triangle est moindre que  $2d$ , la somme des côtés qui forment cet angle est plus grande que le troisième côté.

On ne peut pas admettre que la somme de deux côtés qui forment un angle moindre que  $2d$  — dans le triangle donné, soit égale au troisième côté car dans ce cas l'angle compris entre eux serait égal à  $2d$ . De même on ne peut pas admettre que la somme de ces deux côtés soit moindre que le troisième côté car alors l'angle compris entre eux serait plus grand que  $2d$ . C'est pourquoi nous devons nécessairement conclure que la somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté.

*Théorème 31.* Si l'angle d'un triangle est plus grand que  $2d$ , la somme des côtés qui le forment est moindre que le troisième côté (fig. 27.)

Il est donné:  $\triangle ACB; \angle ACB > 2d.$

Il faut démontrer:  $AC + BC < AQB.$

D'après les données le prolongement du côté  $AC$  passera à l'intérieur du triangle et rencontrera  $AB$  — le troisième côté — en quelque point  $Q$  — entre les points  $A$  et  $B$ . Alors  $\angle CQB < 2d$

$$BC < CQ + QB$$

mais

$$AC + CQ = AQ$$

donc

$$AC + BC < AQ + QB$$

ou

$$AC + BC < AQB$$

**Corollaire** „Si chacun des angles d'un triangle est moindre que  $2d$ , la somme de tous les côtés du triangle est moindre qu'une unité“ (fig. 28.)

Supposons que  $\triangle ABC$  (fig. 28.) satisfait à la proposition. En prolongeant les côtés  $AB$  et  $AC$  jusqu'à la seconde intersection, admettons que

$$AB + AC + BC \geq 1$$

Mais aussi

$$AB + AC + BD + CD = 1$$

Donc

$$BC - (BD + CD) \geq 0 \quad \text{ou} \quad BC \geq BD + CD$$

et par suite  $\angle D$  égal à  $\angle A$  est plus grand ou égal à  $2d$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

**Théorème 32.** Si chacun des angles d'un triangle est moindre que  $2d$ , dans un pareil triangle du plus grand angle est opposé le plus grand côté (fig. 29.)

Il est donné: Chacun des angles du  $\triangle ABC$  est moindre que  $2d$   $\angle C > \angle B$ .

Il faut démontrer:  $AB > AC$ .

En construisant  $\angle DCB = \angle B$ , nous trouverons que  $CD$  coupera  $AB$  entre les points  $A$  et  $B$  car  $\angle A$  ainsi que  $\angle B$  est moindre que  $2d$ . Dès lors  $BD = CD$ . Dans  $\triangle ADC$  chacun des angles est moindre que  $2d$  et ainsi  $CD + DA > AC$  ou  $AB > AC$ .

Le théorème réciproque est aussi vrai.

**Corollaires.** En ajoutant aux deux derniers théorèmes les propriétés des côtés du triangle ayant un angle plus grand que  $2d$  et de même — les propriétés des côtés du triangle ayant un côté plus grand que  $\frac{1}{2}$ , nous pouvons faire encore les conclusions suivantes:

1) Dans tout triangle au plus grand des trois angles est opposé le plus grand côté.

2) Dans tout triangle au plus grand des trois côtés est opposé le plus grand angle.

3) Si un angle du triangle est obtus mais moindre que  $2d$  et l'autre aigu, la perpendiculaire abaissée du sommet du troisième angle sur le côté opposé passera à l'extérieur du triangle et sera

divisée par ce sommet en parties inégales: la plus grande partie sera opposée à l'angle obtus donné et la plus petite à l'angle aigu.

4) Si nous avons dans un triangle deux angles obtus, la perpendiculaire du sommet du troisième angle sur le côté opposé tombera à l'intérieur du triangle.

5) Si nous avons dans un triangle deux angles aigus, la perpendiculaire du sommet du troisième angle sur le côté opposé passera aussi à l'intérieur du triangle.

6) Si les lignes obliques à la ligne donnée sont issues d'un même point et forment avec elle un triangle dont les angles intérieurs adjacents à la ligne donnée sont aigus, la ligne oblique dont la projection sur la ligne donnée est plus grande sera plus grande.

7) Le théorème réciproque est aussi vrai et sera démontré par la méthode de réduction à l'absurde.

8) Si les lignes obliques à la ligne donnée sont issues d'un même point et forment un triangle dont les angles adjacents à la ligne donnée sont obtus, la ligne oblique dont la projection sur la ligne donnée est plus petite sera plus grande.

9) Le théorème réciproque sera démontré par „la méthode de réduction à l'absurde.“

Les propriétés 6, 7, 8, 9, 4 et 5 sont également vraies pour le triangle qui a un angle plus grand que  $2d$ . La propriété 3 pour le triangle ayant un angle plus grand que  $2d$  ne diffère de celle que nous venons de citer qu'en ce que la perpendiculaire passe à l'intérieur du triangle.

Comme nous n' avons pas pour but d'écrire un cours détaillé de géométrie sphérique, nous ne dirons que quelques mots à propos de la circonférence.

On appelle circonférence une ligne non interrompue sur la surface sphérique dont chaque point est également distant d'un point qui se trouve aussi sur cette surface. Le point également distant de tous les points de la circonférence s'appelle centre de la circonférence. Il est évident que si le rayon de la circonférence est moindre que  $\frac{1}{2}$ , pour la même circonférence il se trouvera un autre centre et un autre rayon plus grand que  $\frac{1}{2}$ . Il est aussi facile à comprendre que la circonférence dont le rayon est égal à  $\frac{1}{2}$  a un autre centre et représente une ligne géométrique entière. On appelle cercle la partie de la surface sphérique limitée par la circonférence. Chaque circonférence limite deux cercles.

Convenons de ne prendre en considération qu'un seul centre de la circonférence et un seul rayon, par exemple le moindre et citons quelques théorèmes sans démonstrations:

1) Les circonférences et les cercles des rayons égaux sont égaux entre eux.

2) Par trois points donnés qui se trouvent ou qui ne se trouvent pas sur la même ligne géométrique on peut mener une circonférence et on n'en peut mener qu'une seule.

3) Si le rayon de la circonférence n'est pas égal à  $\frac{1}{2}$ , aucune de ses parties ne peut être prise pour ligne géométrique.

4) La ligne géométrique ne peut pas avoir avec la circonférence plus de deux points communs si le rayon n'est pas égal à  $\frac{1}{2}$ .

5) Dans la même circonférence ou dans les circonférences des rayons égaux — les angles au centre sont proportionnels à leurs arcs correspondants de même qu'aux aires des secteurs qui leur répondent.

Imprimé selon la décision du Conseil de la Société Physico-mathématique de l'Université Impériale de Kasan.

Signé: Président de la société

A. Vassilief.

Kasan. Typo-lithographie de l'Université Impériale 1894.

---

XX.

Herleitung des Gesetzes  
vom Kräfteparallelogramm aus der Bewegung  
eines Körpers im widerstehenden Mittel und  
Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für  
dynamische Kraftwirkung.

Von

**Th. Schwartz.**

---

I.

Lagrange begründete seine allgemeine Kräftegleichung auf das virtuelle Princip. Es scheint, dass man dasselbe als ein Axiom betrachten muss, um einen Ausgangspunkt für einen systematischen Aufbau der Mechanik zu gewinnen. Dieses Princip ist daher auch den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt. Mit Bezug auf Fig. 1 ist angenommen, dass ein materieller Punkt  $P$  sich mit einer gewissen Geschwindigkeit durch ein widerstehendes Mittel bewegt, wobei schliesslich ein Ausgleich zwischen der lebendigen Kraft der beweglichen Masseneinheit  $P$  und dem Widerstande des Mittels eintreten muss. So lange der Ausgleich noch nicht eingetreten ist, wird vor dem bewegten Punkte eine Verdichtung, hinter dem bewegten Punkte eine entsprechende Verdünnung des Mittels vorhanden sein.

In Fig. 1 ist  $AB$  die Bewegungsrichtung des gedachten Punktes  $P$ . Als Resultanten der Wirkung des ringsum gegen den bewegten Punkt andrängenden Mittels sind zwei von einander dynamisch unabhängige Kraftstrahlenkegel angenommen, deren in eine Ebene mit der Bewegungsrichtung des gedachten Punktes fallende Strahlen

gegen einander rechtwinklig gerichtet sind. Die diesen Kraftstrahlen bezüglich der Masseneinheit zukommenden Bewegungsgrößen bezeichnen wir mit  $u_1$  bzw.  $u_2$ . Der Winkel, welchen der mit der Bewegungsgröße  $u_1$  seiner Strahlen gegen den bewegten Punkt wirkende Kraftkegel bildet, sei  $\alpha$ , so dass also jede Kraftlinie dieses unter dem Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  gegen die Bewegungsrichtung des Punktes wirkt. Der hinter dem bewegten Punkte wirksame Kraftkegel bildet also mit seinen Strahlen gegen die Bewegungsrichtung des Punktes  $P$  den Winkel  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Die virtuellen Momente

$$Pa = u_1 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad Pb = u_2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

sind mit Berücksichtigung des Principes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung einander gleich zu setzen. Da nun in einer durch die Bewegungsrichtung des vom Widerstande des Mittels beeinflussten Punkte auf jeder Seiten die Kraftstrahlen paarweis wirken, so ist zu setzen

$$4u_1^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4u_2^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Im allgemeinen ist der hierdurch angedeutete Gleichgewichtszustand ein dynamischer, weil die Winkelfunctionen Sinus und Cosinus ungleiches Wachstum besitzen. Der statische Gleichgewichtszustand tritt ein für  $\alpha = 90^\circ$ . Dann besteht die Gleichheit der lebendigen Kräfte:

Wir bezeichnen die beiden Gleichungsglieder mit  $R_1^2$  und  $R_2^2$  und setzen:

$$R_1^2 = 4u_1^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2u_1^2 (1 + \cos \alpha) = u_1^2 + u_1^2 + 2u_1 u_1 \cos \alpha$$

$$R_2^2 = 4u_2^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2u_2^2 (1 - \cos \alpha) = u_2^2 + u_2^2 - 2u_2 u_2 \cos \alpha$$

Es ist dann  $R_1 = R_2$  für  $u_1 = u_2$  und  $\alpha = 90^\circ$

Hiernach sind aber auch für den dynamischen Zustand eines dualen Kräftesystems die Gleichungen zu bilden:

$$R_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$R_2^2 = u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (2)$$

Es lässt sich jedoch auch auf einem anderen Wege eine Kraft-

gleichung entwickeln. Wir benutzen dazu den sogenannten separirten Tangentensatz.

In dem Dreieck  $ABC$  (Fig. 2) sind die als Kraftstrecken zu betrachtenden Linien

$$AD = \frac{1}{2}R_1 \quad \text{und} \quad BD = DC = \frac{1}{2}R_2$$

zu setzen, wobei wir  $R_1$  als die Combinationsresultante bezeichnen. Wir setzen ferner Winkel  $BAD = \alpha_1$  und Winkel  $CAD = \alpha_2$ , so dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

ist. Ferner sei Winkel  $ADB$  als Resultantenwinkel  $= \gamma$ . Es gelten nun die Gleichungen:

$$\text{tang } \alpha_1 = \frac{R_1 \sin \gamma}{R_2 - R_1 \cos \gamma}$$

$$\text{tang } \alpha_2 = \frac{R_1 \sin \gamma}{R_2 + R_1 \cos \gamma}$$

Daraus folgt:

$$\text{tang}(\alpha_1 + \alpha_2) = \text{tang } \alpha = \frac{\frac{R_1 \sin \gamma}{R_2 + R_1 \cos \gamma} + \frac{R_1 \sin \gamma}{R_2 - R_1 \cos \gamma}}{1 - \frac{R_1^2 \sin^2 \gamma}{R_2^2 - R_1^2 \cos^2 \gamma}}$$

oder

$$\text{tang } \alpha = \frac{2R_1 R_2 \sin \gamma}{R_2^2 - R_1^2}$$

Für  $\gamma$  setzen wir den Complementswinkel  $\varphi$  unter der Bezeichnung „Compensationswinkel“ und erhalten somit

$$R_1^2 - R_2^2 = -2R_1 R_2 \text{cotang } \alpha \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (3)$$

Diese Gleichung sehen wir als die allgemeinste Gleichung der Zusammensetzung zweier dynamisch wirksamer dualer Kräfte an, die als Wirkung und Gegenwirkung mit teilweiser Combination und teilweiser Compensation zur Wirkung kommen. Diese beiden Kräfte haben aber die Bedeutung der Resultanten zweier Elementarkräfte, welche Bedeutung durch die Gleichungen (1) und (2) zum Ausdruck gebracht wird.

In dieser Beziehung lässt sich aber die Gleichung (3) mit Benutzung der virtuellen Momente auch auf geometrisch-algebraischem Wege entwickeln.

In Fig. 3 und 4 entsprechen die Strecken  $ab$  und  $ac$  den Elementarkräften  $v_1$  und  $v_2$ , indem die auf die Masseneinheit wirken-

den Bewegungsgrößen in der Bedeutung von Kräften zur Geltung kommen. Die Phasendifferenz dieser Wirkungsgrößen ist durch den Zusammensetzungswinkel  $bac = \alpha$  symbolisirt, wobei in Fig. 3  $\alpha < 90^\circ$  und in Fig. 4  $\alpha > 90^\circ$  angenommen ist.

Die beiden Elementarkräfte  $v_1$  und  $v_2$  beeinflussen sich gegenseitig in ihren Richtungen durch die virtuellen Momente:

$$\alpha e = v_2 \cos \alpha \quad \text{und} \quad \alpha f = v_1 \sin \alpha$$

Ausserdem entwickeln diese Elementarkräfte in normaler Richtung gegenseitig relativ freie Wirkungen in den virtuellen Wirkungen:

$$\alpha h = v_2 \sin \alpha \quad \text{und} \quad \alpha i = v_1 \cos \alpha$$

Mit Bezug auf die Combinationsresultante  $ad = R_1$  und die Compensationsresultante  $bc = R_2$  gelten die Anfangs entwickelten Gleichungen (1) und (2). Durch Einführung der beiden obigen virtuellen Momentenpaare erhält man

$$R_1^2 \cos^2 \alpha = v_1^2 \cos^2 \alpha + v_2^2 \cos^2 \alpha + 2v_1 v_2 \cos^3 \alpha \dots \dots \dots (4)$$

$$R_2^2 \sin^2 \alpha = v_1^2 \sin^2 \alpha + v_2^2 \sin^2 \alpha - 2v_1 v_2 \cos \alpha \sin \alpha \dots \dots \dots (5)$$

Mit Rücksicht darauf, dass man dieselbe Entwicklung der virtuellen Momente auch für den andern Endpunkt der Combinationsresultante  $ad = R_1$  wiederholen kann, indem man die zum Ausgleich der Kräfte des Systems eingeführt gedachten Gegenkräfte zu  $v_1$  und  $v_2$  parallel zu sich selbst mit ihrem Angriffspunkte in der Richtung der Resultante  $ad = R_1$  verschoben sich denkt, ergibt sich, dass die Combinationsresultante der resultirenden virtuellen Momente

$$R_1 \cos \alpha = Q_1 \quad \text{und} \quad R_2 \sin \alpha = Q_2$$

mit der Combinationsresultante der Elementarkräfte  $v_1$  und  $v_2$  zusammenfällt; demnach gilt auch die Gleichung:

$$R_1^2 = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1 Q_2 \cos \varphi \dots \dots \dots (7)$$

Durch Einsetzen der Werte für  $Q_1$  und  $Q_2$  erhält man:

$$R_1^2 - R_2^2 = 2R_1 R_2 \cotang \alpha \cos \varphi$$

wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen den Vektoren  $R_1 \cos \alpha$  und  $R_2 \sin \alpha$  bezeichnet. In Fig. 3 und 4 sind diese Vektoren durch  $ag$  und  $ak$  dargestellt.

Zur Bestimmung des Compensationswinkels, welchen wir als den Complementswinkel des Resultantenwinkels bereits gekennzeichnet haben, gelten die folgenden Gleichungen:

$$\cos \varphi = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

Mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen (1) und (2) ergibt sich daraus unter Bezugnahme auf den Resultantenwinkel  $\gamma - 90^\circ - \varphi$ :

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma = \cos^2 \varphi &= \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 2v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha} \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma = \sin^2 \varphi &= \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 2v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha} \dots (9) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten, wie sich leicht nachweisen lässt, als Ausdruck des Wirkungsgrades des Systems. Entsprechend dem Gesetze der Erhaltung der Kraft ist die Summe der unter einander stehenden Ausdrücke gleich eins.

Für  $v_1 = v_2 = v$  wird der Compensationswinkel  $\varphi = 0$  und der Resultantenwinkel  $\gamma = 90^\circ$ . Durch die Gleichheit der Elementarkräfte wird der Gleichgewichtszustand des inneren Kraftfeldes des dualen, auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden Systems ausgedrückt, denn die Wirkung des äusseren Kraftfeldes ist dann relativ gleich null. Es ergibt sich dafür die Gleichung

$$R_1^2 - R_2^2 = 2R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha$$

welche für  $\alpha = 45^\circ$  in die Formel der absoluten Statik

$$R_1^2 - R_2^2 = 2R_1 R_2$$

übergeht. Eine Discussion dieser Gleichungen erfolgt in einem zweiten Artikel

## II

Von den zur Bestimmung des Compensationswinkels  $\varphi$  der allgemeinen Kräftegleichung

$$R_1^2 - R_2^2 = 2R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi \dots (10)$$

dienenden, aus den Elementarkräften mit Benutzung der Formeln für die Combinationsresultante  $R_1$  und Compensationsresultante  $R_2$ ,

$$R_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha \dots \dots \dots (11)$$

$$F_2^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha \dots \dots \dots (12)$$

gebildeten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{4v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha} \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4v_1^2 v_2^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4v_1^2 v_2^2 \sin^2 \alpha} \dots \dots (14) \end{aligned}$$

entsprechen die oberen dem Wirkungsgrade des inneren Kraftfeldes, die unteren dem Wirkungsgrade des äusseren Kraftfeldes eines dualen, auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden Systems. Die Zähler sind als Ausdruck der Nutzarbeit (Bildungsarbeit bzw. Erhaltungsarbeit), die Nenner als Ausdruck der Gesamtarbeit des Systems zu betrachten.

Für  $v_1 = v_2 = v$  folgt aus den Gleichungen (13) und (14)

$$\cos \varphi = 1 \quad \text{und} \quad \sin \varphi = 0$$

das heisst, im Ausschluss der Elementarkräfte verschwindet der Phasenunterschied der Compensation. Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt dann:

$$R_1^2 = 4v^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad R_2^2 = 4v^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

wodurch der Schwingungszustand des kinetischen Drucks für den statischen Gleichgewichtszustand gekennzeichnet ist, wie aus Fig. 5. hervorgeht. Für  $\alpha = 90^\circ$  erhält man

$$R_1 = R_2 = R$$

und es ist

$$R^2 = 2v^2 \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{R^2}{2}$$

als lebendige Kraft.

Die Hauptgleichung (10) nimmt für  $\cos \varphi = 1$  die einfachere Form an:

$$R_1^2 - R_2^2 = - 2R_1 R_2 \cotang \alpha$$

oder

$$\left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}\right) \sin \alpha = - 2R_1 R_2 \cos \alpha \dots \dots \dots (15)$$

Der Factor  $\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}$  entspricht einer Differenz lebendiger Kräfte bzw. einer motorischen Kraft. Die Winkelfunctionen  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  sind im allgemeinen als Kraftstreckenverhältnisse anzusehen und daher durch  $\frac{L}{L'}$ , oder für  $L' = 1$  durch  $L$  auszudrücken. Die Kräfte  $R_1$  und  $R_2$  sind ihren Beschleunigungen proportional. Fügt man ihnen den Wertigkeitscoefficienten der Masse bei, so sind ihre Dimensionen im allgemeinen  $MLT^{-2}$ . Unter das Zeichen der Quadratwurzel gesetzt ergeben sich demnach für  $\left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}\right) \sin \alpha = R^2 \sin \alpha$  und  $R_1 R_2 \cos \alpha$  die Ausdrücke

$$M^1, L^1, T^{-2} = M^1, LT^{-1} \cdot LT^{-1}$$

Dies ist aber die auf die Dimensionen von elektromotorischer Kraft, Stromstärke und Widerstand zurückgeführte Formel des Ohm'schen Gesetzes.

Da angenommen wird, dass der elektrische Strom auf Aetherschwingungen beruht, so gilt die aus dem Parallelogrammgesetz abgeleitete Grundgleichung der Dynamik für den allgemeinen Vorgang des Ausgleichs von Wirkung und Gegenwirkung zwischen zwei Kräftfeldern.

Wird in der Gleichung des kinetischen Druckes

$$\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} = - R_1 R_2 \cotang \alpha$$

$\alpha = 45^\circ$  gesetzt, so erhält man die Formel der absoluten Statik:

$$R_1^2 - R_2^2 = - 2R_1 R_2$$

$$R_2 = R_1(\sqrt{2} + 1)$$

$$R_1 = R_2(\sqrt{2} - 1)$$

oder

$$R_1 R_2 = R_1^2(\sqrt{2} + 1)$$

$$R_1 R_2 = R_2^2(\sqrt{2} - 1)$$

Hieraus folgt

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

Die Ausdrücke  $\sqrt{2} - 1$  und  $\sqrt{2} + 1$  sind leicht geometrisch darstellbar. Schneidet man in Fig. 6 von der Hypotenuse des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks  $ABC$  vom Punkte  $A$  mit der Kathete  $AB$  als Halbmesser das Stück  $AD$  und von der Verlängerung der Hypotenuse das Stück  $AE$  ab und setzt man  $AB = 1$ , so bestehen die Verhältnissgleichungen:

$$AD : DC = 1 : \sqrt{2} - 1$$

$$AD : CE = 1 : \sqrt{2} + 1$$

Folglich hat man:

$$AD = DC(\sqrt{2} + 1) = R_1^2(\sqrt{2} + 1) \dots \dots \dots (16)$$

$$AD = EC(\sqrt{2} - 1) = R_2^2(\sqrt{2} - 1) \dots \dots \dots (17)$$

Mit Bezug auf Fig. 6 ist daher

$$DC = R_1^2 \quad \text{und} \quad EC = R_2^2$$

zu setzen.

In Fig. 7 ist vom Punkte  $A$  aus, als Mittelpunkt eines Systems zweier als Wirkung und Gegenwirkung auftretenden, weil von einerseits von innen nach aussen und andererseits von aussen nach innen sich betätigenden Centrakraft, ein Kreis mit dem Halbmesser  $AD = 1$  geschlagen. Dieser Kreis mag den Durchschnitt eines sphärischen Weltkörpers darstellen, der im Raume als inneres Kraftfeld wirksam wird. In den Kreis ist ein Secantenquadrat als Durchschnitt des Compressions- oder Combinationskubus, und um den Kreis ein Tangentenquadrat als Durchschnitt des Expansions- oder Compensationskubus gelegt. Hierbei denke man sich die Kugel in drei Paar diametraler vierseitig pyramidalen, den drei Raumachsen entsprechender Sektoren zerlegt, wobei Druck und Gegendruck der beiden Kraftfelder mit ihren Resultanten in der Richtung der drei Hauptträgheitsachsen sich auf die Mitten der gedachten Würfelseiten projiciren.

Der innere Kreis entspricht demnach der positiven minimalen Sphäre des inneren Kraftfeldes; der äussere Kreis der negativen minimalen Sphäre (Hohlsphäre) des äusseren Kraftfeldes. Nach den Gleichungen (16) und (17) ist demnach mit Bezug auf Fig. 6 zu setzen:

$$DC(\sqrt{2}+1) = EC(\sqrt{2}-1)$$

wobei wiederum

$$DC = R_1^2 \quad \text{und} \quad EC = R_2^2$$

ist, welche Grössen als die dualen Potentiale der Elementarkräfte  $v_1$  und  $v_2$  zu gelten haben, wie aus den Gleichungen (1) und (2) bzw. (11) und (12) hervorgeht. Diese Potentiale sind aber gleichwertig den zweiten Potenzen der Entfernungen, aus denen die Elementarkräfte als Wirkung und Gegenwirkung in's Spiel treten, wie leicht zu finden ist, wenn man in den Grundgleichungen (11) und (12)

$$v_1 = v_2 = v \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

für  $\alpha = 45^\circ$  setzt. Man erhält dann

$$R_1^2 = v^2(\sqrt{2}+1) \quad \text{und} \quad R_2^2 = v^2(\sqrt{2}-1)$$

Demnach lässt sich aus der allgemeinen Formel der Statik

$$R_1^2 - R_2^2 = -R_1 R_2$$

das Gravitationsgesetz ableiten.

In Fig. 8 ist nach dem Verfahren, welches zum Aufzeichnen der Diagramme (3) und (4) benutzt wurde ein Kräftesystem mit einem Zusammensetzungswinkel  $\alpha < 90^\circ$  im Gleichgewichtszustande der Elementarkräfte

$$ab = ac = v$$

dargestellt. Da für diesen Fall der Compensationswinkel  $\varphi=0$ , also der Resultantenwinkel  $\gamma = 90^\circ$  ist, so fallen die Resultanten des Parallelogramms der inneren Arbeit  $acgf$ , des Parallelogramms der äusseren Arbeit  $ahki$  und des Parallelogramms der Gesamtarbeit  $abdc$  in der Combinationsresultante  $ad$  zu einer Kraftstrecke zusammen. Die Fläche des Parallelogramms  $acgf$  ist bestimmt durch den Ausdruck  $v^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha$  und die Fläche des Parallelogramms der äusseren Arbeit  $ahki$  ist bestimmt durch den Ausdruck  $v^2 \sin^2 \alpha$ . Hieraus folgt für die Flächensumme

$$v^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \sin \alpha = v^2 \sin \alpha$$

Dieser Ausdruck entspricht aber der Fläche des Parallelogramms der Gesamtarbeit  $abdc$  und somit ist dem Gesetz der Erhaltung der Kraft genügt.

Dieselben Beziehungen gelten für Fig. 9, wo der Zusammensetzungswinkel der im Ausgleich befindlichen Elementarkräfte

$$ab = ac = v$$

grösser als  $90^\circ$  angenommen ist.

Bemerkenswert ist noch, dass der Ausdruck

$$\sqrt{2} - 1 = \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2} = \operatorname{tang} 22^\circ 30'$$

ist; dieser Winkel entspricht nahezu dem Winkel der Ekliptik.

Wir behalten uns vor die Grundsätze für die Bewegung zusammengesetzter Systeme, sowie die allgemeine Strahlungsformel aus der Grundformel der Dynamik

abzuleiten.

$$R_1^2 - R_0^2 = - 2R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi$$

XXI.

Eine besondere Gattung goniometrischer  
Nulldarstellungen.

Von

**Franz Rogel**

in Barmen.

1.

Werden in

$$f(u) \equiv B_n(u) + a_1 B_n(2u) + a_2 B_n(3u) \dots + a_{k-1} B_n(ku), \quad n > 1 \quad (1)$$

wo  $B_n$  das Functionszeichen für die Bernoulli'sche Function  $n$ ter Ordnung ist, die  $k-1$  Constanten  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  so bestimmt, dass  $k-1$  von den in  $B_n(u)$  auftretenden Potenzen, worunter sich  $u^{n-1}$  befinden soll, ausfallen, so ist dann  $f(u)$  mit  $n$  zugleich gerade oder ungerade und lässt sich nach

$$B_m(u + \frac{1}{2}) = (-1)^m B_m(-u + \frac{1}{2}), \quad m = 1$$

entwickeln, wofür sehr einfache goniometrische Reihen mit dem Geltungsintervalle  $-\frac{1}{2} \leq u \leq +\frac{1}{2}$  bekannt sind. Wird nun auch in (1) jedes  $B_n$  durch die gleichwertige goniometrische Reihe mit den bezüglichen Geltungsbereichen

$$(0, 1), \quad (0, \frac{1}{2}), \quad (0, \frac{1}{3}) \dots, \quad (0, \frac{1}{k})$$

ersetzt, so sind dann für dieselbe Function  $f(u)$  zwei gleichwertige goniometrische Reihen gegeben, deren Differenz, geordnet nach den

Cosinus resp. Sinus der Vielfachen von  $2\pi u$  eine goniometrische Nulldarstellung  $\mathfrak{N}$  mit dem Geltungsbezirk

$$\left( \pm r, \pm r \pm \frac{1}{k} \right), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

wo die Grenzen zulässige Werte sind, ergibt.

Aus diesen  $\mathfrak{N}$  entsteht durch Vertauschung von  $u$  mit  $u - \frac{1}{2}$  ein neues  $\mathfrak{N}'$  mit Zeichenwechsel und dem Geltungsbereiche

$$\left( \pm r \pm \frac{1}{2}, \pm r \pm \frac{k+2}{2k} \right), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

In beiden Fällen ist das Geltungsintervall, wie bei jeder goniometrischen Nulldarstellung, kein zusammenhängendes Gebiet, sondern besteht aus einer unendlichen Reihe gleich grosser um die Einheit von einander absteher Einzelgebiete, welche graphisch wie folgt versinnbildlicht werden können:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underline{-2, -\frac{1}{k} - 2} & \underline{-1 - \frac{1}{k}, -\frac{1}{k} \quad 0 \quad \frac{1}{k}} & \underline{1, 1 + \frac{1}{k}} & \underline{2 \quad 2 + \frac{1}{k}} & & & & & & & \\ \underline{-\frac{5}{2} - \frac{1}{k} - \frac{5}{2}} & \underline{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}} & \underline{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{k}, -\frac{1}{2}} & \underline{0} & & & & & & & \\ & & & & \underline{\frac{1}{2}} & \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{k}} & \underline{\frac{3}{2}} & \underline{\frac{3}{2} + \frac{1}{k}} & \underline{\frac{5}{2}} & \underline{\frac{5}{2} + 1} & \end{array}$$

Die Entwicklung der ganzen Function  $f(u)$ , welche zufolge der über  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  gemachten Voraussetzung, gerade oder ungerade ist, nach den  $B(u + \frac{1}{2})$ , kann mittelst des vom Verfasser gefundenen Satzes \*)

$$F(u+k) = F(k) + \frac{\Delta_0}{1!} B_1(u) + \frac{\Delta_1}{2!} B_2(u) + \frac{\Delta_2}{3!} B_3(u) \dots \quad (2)$$

wo

$$\Delta_r = F^{(k)}(k+1) - F^{(r)}(k)$$

ist, nun leicht vor sich gehen.

Wird zu diesem Behufe in (2)  $f(u)$  für  $F(u) \mu + \frac{1}{2}$  für  $\mu$  gesetzt,  $k = -\frac{1}{2}$  und  $n$  ungerade genommen, so gilt wegen

\*) Siehe „Entwicklung nach Bernoulli'schen Functionen“. Sitzber. d. königl. böhmischen Ges. d. Wiss. XXXI, 1896.

$$f(u) = -f(-u) = f(u + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$$

$$f_n = f^{(n)}(\frac{1}{2}) - f^{(n)}(-\frac{1}{2}) = 2f^{(n)}(\frac{1}{2})$$

die Gleichung

$$f(u) = -f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{1!} f'(\frac{1}{2}) B_1(u + \frac{1}{2}) + \frac{2}{3!} f'''(\frac{1}{2}) B_3(u + \frac{1}{2})$$

$$\dots + \frac{2}{(n-2)!} f^{(n-2)}(\frac{1}{2}) B_{n-2}(u + \frac{1}{2}) \quad n \text{ ungerade}$$

$$\dots \dots \dots (3)$$

Mit Rücksicht auf die später vorzunehmende Ersetzung der  $B$  durch goniometrische Reihen ist es vorteilhaft derselben mittels Differentiation bezüglich  $u$  die Form zu geben

$$\frac{1}{2} f'(u) = \frac{1}{1!} f'(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f'''(\frac{1}{2}) (B_2(u + \frac{1}{2}) + B_1)$$

$$+ \frac{1}{4} f^{(5)}(\frac{1}{2}) (B_4(u + \frac{1}{2}) - B_2) \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-3)}(\frac{1}{2}) \left( B_{n-3}(u + \frac{1}{2}) + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{B_{n-3}}{2} \right) \dots (4)$$

Hierin bestimmen sich die  $f^{(r)}(\frac{1}{2})$  mit Hilfe von

$$B_n'(u) = n \left( B_{n-1}(u) + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{B_{n-1}}{2} \right), \quad n > 1$$

$$B_n^{(r)}(u) = r! \binom{n}{r} B_{n-r}(u), \quad r \text{ gerade}$$

$$B_2'(a) = 2u - 1$$

$$B_m(\frac{1}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{2^m - 1}{2^{m-1}} B_m, & m \text{ gerade} \\ 0, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$B_m(1) = 0$$

$$B_m\left(\frac{3}{2}\right) = B_m(\frac{1}{2}) + m 2^{-m+1}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} B_m + m 2^{-m+1}, & m \text{ gerade} \\ m 2^{-m+1}, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nach Einsetzung der für  $f^{(r)}(\frac{1}{2})$  gefundenen Werte in (4) und nach einmaliger Differentiation des Resultates bezüglich  $u$  findet sich dann eine der Formel (4) analoge für gerade  $n$

2.

Die einfachst gebauten und das grösste Geltungsbereich  $(\tau, \pm \tau \pm \frac{1}{2})$  besitzenden Nulldarstellungen entsprechen dem kleinsten zulässigen Wert  $k = 3$ , wofür

$$a_1 = -2^{-n+2}, \quad a_2 = +3^{-n+1}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} f'(u) &= \frac{1}{2}(B_{n-1}(u) - 2^{-n+3} B_{n-1}(2u) + 3^{-n+2} B_{n-1}(3u)) \\ &+ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2}(1 - 2^{-n+3} + 3^{-n+2}) B_{\frac{n-1}{2}} \\ &= 6^{-n+1} + \binom{n-1}{2} 6^{-n+3} (B_2(u + \frac{1}{2}) + B_1) + \binom{n-1}{4} \cdot \dots \\ &\quad \dots -^{n+5} (B_4(u + \frac{1}{2}) - B_2) \end{aligned}$$

$$\dots + \binom{n-1}{n-3} 6^{-2} \left( B_{n-3}(u + \frac{1}{2}) + (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_{\frac{n-3}{2}} \right), \quad n > 2; \quad \dots (5)$$

$$\frac{1}{2}(B_{n-2}(u) - 2^{-n+3} B_{n-2}(2u) + 3^{-n+2} B_{n-2}(3u))$$

$$= \binom{n-2}{1} 6^{-n+3} u + \binom{n-2}{3} 6^{-n+5} B_3(u + \frac{1}{2}) \dots$$

$$\dots + \binom{n-2}{n-4} 6^{-2} B_{n-4}(u + \frac{1}{2}), \quad n > 3 \quad \dots (6)$$

gefunden wird

Wird jetzt  $u = \frac{x}{2\pi}$ , in (5)  $2n$  für  $n-1$  und in (6)  $2n-1$  für  $n-2$  gesetzt, jedes  $B$  mittels

$$B_{2n} \left( \frac{x}{2\pi} \right) = (-1)^n B_n + (-1)^{n-1} 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{v=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\cos vx}{v^{2n}} \quad n > 0 \quad \dots (7)$$

$$B_{2n-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = (-1)^n 2 \frac{(2\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} \sum_{\nu=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^{2n-1}}, \quad n > 1$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad \dots (8)$$

wo für  $B_1\left(\frac{x}{2\pi}\right)$

$$\frac{\pi - x}{2} \equiv \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin \nu \pi}{\nu}, \quad 0 < x < 2\pi$$

zu stehen kommt,

$$B_{2n}\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right) + (-1)^{n-1} B_{\nu} = (-1)^{n-1} 2 \frac{(2!)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\cos \nu \pi}{\nu^{2n}}$$

. . . (9)

$$B_{2n-1}\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right) = (-1)^n 2 \frac{(2n-1)!}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin \nu \pi}{\nu^{2n-1}}$$

$$-\pi \leq x \leq +\pi \quad \dots (10)$$

in Reihen umgewandelt. Alles auf eine Seite gebracht, durch  $(2n)!$  bzw.  $(2n-1)!$  dividirt und reducirt, so ergibt sich

$$\frac{1}{6^{2n}(2n)!} + \frac{2}{6^{2n-2}(2n-2)!(2\pi)^2} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\cos \nu x}{\nu^2}$$

$$- \frac{2}{6^{2n-4}(2n-4)!(2\pi)^4} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\cos \nu x}{\nu^4}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \left( \sum_1^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^{2n}} - \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2\nu x}{\nu^{2n}} + \frac{1}{3^{2n-1}} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 3\nu x}{\nu^{2n}} - \dots \right)$$

$$2\pi\left(r - \frac{1}{2}\right) \leq |x| \leq 2\pi\left(r + \frac{1}{2}\right) \quad \dots (11)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{6^{2n-2}(2n-2)! 2\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin \nu x}{\nu} - \frac{1}{6^{2n-4}(2n-4)!(2\pi)^3} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin \nu x}{3}$$

$$+ \frac{1}{6^{2n-6}(2n-6)!(2\pi)^5} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin \nu x}{\nu^5} \dots + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{6^{2n} (2\pi)^{2n-3}} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin \nu x}{\nu^{2n-3}} + \frac{(-1)^n}{2(2\pi)^{2n-1}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^{2n-1}}$$

$$- \frac{1}{2^{2n-3}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2\nu x}{\nu^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-2}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin 3\nu x}{\nu^{2n-1}} = 0$$

$$2\pi(r - \frac{1}{2}) \leq |x| \leq 2\pi(r + \frac{1}{2}) \tag{12}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

ausserdem noch gültig für  $|x| = \overline{2r + 1} \pi$ .

Schliesslich sind diese Reihen nach den  $\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\}$  der Vielfachen von  $x$  zu ordnen.

Hieraus gehen durch Vertauschung von  $x$  mit  $\pi - x$  dann noch zwei neue für

$$\pi(2r + \frac{1}{2}) \leq |x| \leq \pi(2r + \frac{3}{2})$$

geltende Nulldarstellungen hervor.

3.

Aus einem  $\mathfrak{N}$  obiger Art, welches allgemein von der Form

$$\mathfrak{N} \equiv \sum c_v \varphi(vx) \dots (13)$$

$$\pi(2r - a) \leq x \leq \pi(2r + a)$$

ist, wo  $\varphi$  entweder Cosinus oder Sinus vorstellt, können weitere  $\mathfrak{N}$  abgeleitet werden, indem man zuerst  $x = v + h\pi$ , dann  $x = v - h\pi$  setzt, wo  $h$  eine beliebige positive Zahl bedeutet, und die beiden Substitutionsresultate durch Addition und Subtraction mit einander verbindet, wodurch

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\infty} c_v \cos vv \cos vh\pi &= 0 \\ \sum_{\infty} c_v \sin vv \sin vh\pi &= 0 \end{aligned} \right\} \varphi = \text{cosinus}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\infty} c_v \sin vv \cos vh\pi &= 0 \\ \sum_{\infty} c_v \cos vv \sin vh\pi &= 0 \end{aligned} \right\} \varphi = \text{sinus}$$

hervorgeht. Das Geltungsgebiet ist in beiden Fällen

$$\pi(2r - a + h) \leq |v| \leq \pi(2r + a - h)$$

$$h < a$$

4.

Wird ein unbedingt convergentes  $\mathfrak{N}$  gliedweise mit

$$P_r = \sin m_1 x \cdot \sin m_2 x \cdot \dots \cdot \sin m_r x \cdot \cos m_{r+1} x \cos m_{r+2} x \cdot \dots \cdot \cos m_p x$$

wo die  $m$  ganze Zahlen bedeuten, multiplicirt, so lässt sich jedes der Producte  $P_r \varphi(\nu x)$  durch eine Summe von  $\frac{p+2}{2}$  ( $p$  gerade) oder  $\frac{p+3}{2}$  ( $p$  ungerade) Glieder

$$\sum_x \eta_x \psi [(\varepsilon_{x,1} m_1 + \varepsilon_{x,2} m_2 \cdot \dots + \varepsilon_{x,p} m_p + \varepsilon_{x,p+1} \nu)x] \quad *)$$

ausdrücken, worin die  $\varepsilon$  und  $\eta$  Vorzeichen bedeuten, auf welche sich die Summation bezieht und  $\psi$  entweder Cosinus oder Sinus vorstellt, jenachdem in  $P_r \varphi(\nu x)$  die Anzahl der Sinusfactoren gerade oder ungerade ist.

$\mathfrak{N} \cdot P_r$  kann somit als eine unendliche Reihe von in Klammern stehenden endlichen Reihen aufgefasst werden. Da aber  $\mathfrak{N}$  convergent, demnach

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} c_\nu = 0$$

ist, so können die Klammern in Wegfall kommen, und da die so hervorgehende Reihe als die Summe von  $\frac{p+2}{2}$  bzw.  $\frac{p+3}{2}$  unbedingt convergenten Reihen selbst unbedingt convergirt daher commutativ ist, so darf dieselbe nach den Cosinus resp. Sinus der Vielfachen von  $x$  geordnet werden, wodurch ein neues  $\mathfrak{N}_0$  mit denselben Giltigkeitsgrenzen wie das ursprüngliche  $\mathfrak{N}$  hervorgeht

---

\*) Das Bildungsgesetz dieser Summen ist Gegenstand einer eingehenden Untersuchung in des Verfassers „Reihensummirungen mittels bestimmter Integrale“ (Sitzg.-Ber. d. königl. böhmischen Ges. d. Wiss. XXXIX, Prag, 1895.)

438 *Rogel: Eine besondere Gattung gonionometrischer Nulldarstellungen.*

In dem einfachsten speciellen Falle

$$P_r = \sin mx$$

entsteht aus einer Nulldarstellung in den Sinus eine solche in den Cosinus und umgekehrt.

Barmen, 11. Januar 1897.

Franz Rogel.

---

XXII.  
Miscellen.

1.

Nachtrag zu Nr. XVIII, Ueber die pythagoreischen Dreiecke.

§ 23.

Die pythagoreischen Dreiecke geben ausser den Hypotenusenwinkeln noch andere Constructionswinkel zur Theilung des Kreisumfangs. Diese werden aus den von der Höhe gebildeten Abschnitten der Hypotenuse gewonnen, indem man dieselben zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks macht. Es ist nämlich, wenn der der Kathete  $b$  anliegende Abschnitt mit  $p$  und der andere mit  $q$  bezeichnet werden,

$$b^2 = a \cdot p \quad \text{und} \quad c^2 = aq$$

Setzt man nun

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{a \cdot p}{a \cdot q} = \frac{p}{q} = \text{tang } \varphi,$$

so ergibt sich folgende Tabelle für  $\varphi$ :

$\frac{b^2}{c^2} =$	$\varphi$	$90 - \varphi$
$\frac{\triangle}{5} \quad \frac{3^2}{4^2} \quad \varphi_5$	$= 29^\circ 21' 27 \frac{459''}{493}$	$60^\circ 38' 32 \frac{34''}{493}$
$\frac{\triangle}{13} \quad \frac{5^2}{12^2} \quad \varphi_{13}$	$= 9^\circ 50' 56 \frac{536''}{1249}$	$80^\circ 9' 3 \frac{713''}{1249}$
$\frac{\triangle}{17} \quad \frac{8^2}{15^2} \quad \varphi_{17}$	$= 15^\circ 52' 41 \frac{149''}{801}$	$74^\circ 7' 18 \frac{652''}{801}$
$\frac{\triangle}{25} \quad \frac{7^2}{24^2} \quad \varphi_{25}$	$= 4^\circ 51' 44 \frac{171''}{249}$	$85^\circ 8' 15 \frac{78''}{249}$
$\frac{\triangle}{29} \quad \frac{20^2}{21^2} \quad \varphi_{29}$	$= 42^\circ 12' 32 \frac{104''}{423}$	$47^\circ 47' 27 \frac{319''}{423}$
$\frac{\triangle}{37} \quad \frac{12^2}{35^2} \quad \varphi_{37}$	$= 6^\circ 42' 15,875''$	$83^\circ 17' 44,125''$
$\frac{\triangle}{41} \quad \frac{9^2}{40^2} \quad \varphi_{41}$	$= 2^\circ 53' 53 \frac{103''}{417}$	$87^\circ 6' 6 \frac{314''}{417}$
$\frac{\triangle}{53} \quad \frac{28^2}{45^2} \quad \varphi_{53}$	$= 21^\circ 9' 51,965''$	$68^\circ 50' 8,035''$

$$\begin{aligned} \triangle_{61} \frac{11^2}{60^2} \varphi_{61} &= 1^\circ 55' 30 \frac{60''}{376} & 88^\circ 4' 29 \frac{316''}{376} \\ \triangle_{65} \frac{33^2}{56^2} \varphi_{65}^I &= 19^\circ 9' \frac{11''}{41} & 70^\circ 50' 59 \frac{30''}{41} \\ \triangle_{65} \frac{16^2}{63^2} \varphi_{65}^{II} &= 3^\circ 41' 25 \frac{215''}{318} & 86^\circ 18' 34 \frac{113''}{328} \end{aligned}$$

Die Winkel  $\varphi$  sind hier wieder halbe Hypotenusenwinkel von pythagoreischen Dreiecken. Es sind, da  $b$  und  $c$  relative Primzahlen sind, auch die Quadratzahlen  $b^2$  und  $c^2$  relativprim; mithin giebt die Summe  $b^2 + c^2$  eine Hypotenuse.

So ist z. B.  $9^2 + 16^2 = 337$  eine Hypotenuse, deren Katheten nach § 19. I. 288 und 175 sind. Nun ist

$$\begin{aligned} \gamma \frac{288}{337} &= 58^\circ 42' 55 \frac{425''}{493} = 2\varphi_5 \quad \text{und} \\ \beta \frac{175}{337} &= 31^\circ 17' 4 \frac{68''}{493} \end{aligned}$$

Mittels dieser  $\varphi$ -Winkel und der Tabelle in § 18. ergeben sich folgende Bestimmungswinkel:

1) Für das 7-Eck:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{288}{337} - \beta \frac{175}{337} &= 27^\circ 25' 41 \frac{357''}{493} \\ \xi_7^I &= \gamma \frac{288}{337} - \beta \frac{175}{337} + 24^\circ = 51^\circ 25' 51 \frac{357''}{413} \\ \xi_7^I - \xi_7 &= 9'' \quad \text{oder} \\ \xi_7^{II} &= 2\varphi_{29} + \frac{1}{4} \left( \beta \frac{175}{337} + \gamma \frac{288}{337} \right) - 3^\circ = 2\varphi_{29} + \frac{1}{4} \gamma \frac{364}{365} - 3^\circ \\ &= 129^\circ 51' 25,520'' \\ \xi_7^{II} &= \frac{1}{2} \left( 2\varphi_{29} + \frac{1}{4} \gamma \frac{364}{365} - 3^\circ \right) = 51^\circ 25' 42,760'' \\ \xi_7 - \xi_7^{II} &= 0,097'' = \frac{1''}{10} \quad \text{oder} \\ \xi_7^{III} &= 60^\circ + 22^\circ 30' + \frac{1}{2} \varphi_{41} - \beta_{54} = 51^\circ 25' 43,194'' \\ \xi_7^{III} - \xi_7 &= 0,337'' \end{aligned}$$

2) Für das 9-Eck:

$$\begin{aligned} \xi_9^I &= 10\varphi_{65}^I - \frac{1}{4}R - 129^\circ = 40^\circ 0' 2 \frac{28''}{41} \\ \xi_9^I - \xi_9 &= 2 \frac{28''}{41} \quad \text{oder} \\ \xi_9^{II} &= \frac{5}{4} \left( \varphi_{25} + 75^\circ - \frac{1}{2} \beta \frac{12}{37} \right) - 48^\circ = 40^\circ 0' 0,41'' \end{aligned}$$

$$\xi_9^{\text{II}} - \xi_9 = \frac{41''}{100}$$

3) Für das 11-Eck:

$$\xi_{11}^{\text{I}} = 48^\circ - (\varphi_5 - \frac{1}{4}\beta_5^9) = 32^\circ 43' 39,735''$$

$$\xi_{11}^{\text{I}} - \xi_{11} = 1,553'' \quad \text{oder}$$

$$\xi_{11}^{\text{II}} = \varphi_{17} + 20^\circ 15' - \frac{1}{4}\beta_{29}^{20} = 32^\circ 43' 38,648''$$

$$\xi_{11}^{\text{II}} - \xi_{11} = 0,466 = \frac{1}{2}''$$

4) Für das 13-Eck:

$$\xi_{13}^{\text{I}} = \frac{1}{4}(\varphi_{37} + 126^\circ - \gamma \frac{40}{41}) = 27^\circ 41' 32,6333''$$

$$\xi_{13}^{\text{I}} - \xi_{13} = 0,3256''$$

5) Für das 19-Eck:

$$\xi_{19}^{\text{I}} = 78^\circ + \frac{1}{2}\beta_5^9 - \varphi_5^9 - \varphi_5 - \xi_9^{\text{II}} = 18^\circ 56' 49,064''$$

$$\xi_{19} - \xi_{19}^{\text{I}} = 1,462'' = 1\frac{1}{4}'' \quad \text{oder}$$

$$\xi_{19}^{\text{II}} = \varphi_{25} + \frac{1}{2}\beta_5^9 = 18^\circ 56' 52,453$$

$$\xi_{19}^{\text{II}} - \xi_{19} = 1,827''$$

6) Für das 21-Eck:

$$\xi_{21}^{\text{I}} = \frac{1}{4}(93^\circ - 2\varphi_5) = 17^\circ 8' 32,069''$$

$$\xi_{21} - \xi_{21}^{\text{I}} = 2,218'' = 2\frac{1}{5}''$$

7) Für das 23-Eck:

$$\xi_{23}^{\text{I}} = \varphi_{65}^{\text{I}} + \frac{1}{4}\left(\gamma \frac{80}{89} - 78^\circ\right) = 15^\circ 39' 9,8''$$

$$\xi_{23}^{\text{I}} - \xi_{23} = 2''$$

8) Für das 25-Eck:

$$\xi_{25}^{\text{I}} = 6\varphi_{65}^{\text{I}} - 100^\circ 30' = 14^\circ 24' + 1,6''$$

$$\xi_{25}^{\text{I}} - \xi_{25} = 1,6''$$

9) Für das 29-Eck:

$$\xi_{29}^{\text{I}} = \varphi_{13} + 21 - \frac{1}{4}\beta \frac{3}{5} = 12^\circ 24' 50,613''$$

$$\xi_{29}^{\text{I}} - \xi_{29} = 0,958'' = 1'' \quad \text{oder}$$

$$\xi_{29}^{\text{II}} = 2\varphi_{37} + \frac{80}{1789} - 33^\circ = 12^\circ 24' 51,133''$$

$$\xi_{29}^{\text{II}} - \xi_{29} = 1,478'' = 1\frac{1}{2}''$$

10) Für das 31-Eck:

$$\xi_{31}^I = \varphi_5 + \frac{1}{2}\beta \frac{33}{65} - 93^\circ = 11^\circ 36' 46,415''$$

$$\xi_{31} - \xi_{31}^I = 0,037'' \quad \text{oder:}$$

$$\xi_{31}^{II} = \frac{1}{2}\beta \frac{12}{37} + 12^\circ - \varphi_{13} = 11^\circ 36' 47,930''$$

$$\xi_{31}^{II} - \xi_{31} = 1,478'' = 1\frac{1}{2}''$$

11) Für das 37-Eck:

$$\xi_{37}^I = \varphi_{29} + \frac{1}{8}\beta_5^9 - 36^\circ = 9^\circ 43' 49,163''$$

$$\xi_{37}^I - \xi_{37} = 2,134''$$

12) Für das 41-Eck:

$$\xi_{41}^I = 2\varphi_{41} + 9^\circ - \frac{3}{2}\gamma \frac{80}{89} = 8^\circ 46' 48,273''$$

$$\xi_{41} - \xi_{41}^I = 1,483'' = 1\frac{1}{2}'' \quad \text{oder:}$$

$$\xi_{41}^{II} = \varphi_{61} + \frac{1}{2}\gamma \frac{80}{89} - \varphi_{65}^I - 6^\circ = 8^\circ 46' 49,544''$$

$$\xi_{41} - \xi_{41}^{II} = 0,212''$$

13) Für das 43-Eck:

$$\xi_{43}^I = 3\varphi_{65}^{II} + \gamma_5^{10} - 84^\circ = 8^\circ 22' 20,63''$$

$$\xi_{43}^I - \xi_{43} = 1,1''$$

14) Für das 47-Eck:

$$\xi_{47}^I = \varphi_5 + 18^\circ - 2\varphi_{13} - \frac{1}{2}\xi_9^{II} = 7^\circ 39' 34,867''$$

$$\xi_{47}^I - \xi_{47} = 0,4'' \quad \text{oder:}$$

$$\xi_{47}^{II} = \varphi_{65} + \frac{1}{2}\beta \frac{33}{65} - 42^\circ = 7^\circ 39' 37,133''$$

$$\xi_{47}^{II} - \xi_{47} = 2,665''$$

15) Für das 53-Eck:

$$\xi_{53}^I = \varphi_{65}^{II} + 6^\circ - \varphi_{41} = 6^\circ 47' 32,408''$$

$$\xi_{53} - \xi_{53}^I = 0,422''$$

16) Für das 59-Eck:

$$\xi_{59} = 4\varphi_{53} - \frac{1}{2}\beta \frac{48}{73} - \xi_9^{II} - 18^\circ = 6^\circ 6' 5,68''$$

$$\xi_{59} - \xi_{59}^I = 0,422''$$

## §. 24.

Es ist

$$(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = \sin^4\gamma + \cos^4\gamma + 2\sin^2\gamma\cos^2\gamma - 1 \quad \text{und}$$

$$\sin^4\gamma + \cos^4\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma\cos^2\gamma$$

Ist nun

$$\sin\gamma_5^4 = \frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \cos\gamma_5^4 = \frac{3}{5}$$

so ist

$$\sin^4\gamma_5 + \cos^4\gamma_5 = \frac{4^4}{625} + \frac{3^4}{625} = 1 - 2 \cdot \frac{4^2 \cdot 3^2}{625}$$

$$\text{und} \quad 337 = 625 - 288$$

$$\text{oder} \quad 337 + 288 = 625$$

Hieraus folgt allgemein:

$$a_n^4 = a_n^4(\sin^4\gamma_n + \cos^4\gamma_n) + 2a_n^4 \cdot \sin^2\gamma_n \cdot \cos^2\gamma_n$$

wo  $a_n$  eine Hypotenuse und  $\gamma_n$  ein zu  $a_n$  gehöriger Hypotenusenwinkel bedeutet, oder der Satz:

Jede Hypotenuse  $a_n^4$  lässt sich in die Summe einer Hypotenuse

$$a_p = a_n^4(\sin^4\gamma_n + \cos^4\gamma_n)$$

und einer zu dieser gehörigen Kathete

$$2a_n^4 \cdot \sin^2\gamma_n \cdot \cos^2\gamma_n$$

zerlegen; die andere Kathete ist

$$a_n^4(\sin^4\gamma_n - \cos^4\gamma_n)$$

Das Verhältniss  $\frac{a_p}{a_n^4}$  lässt sich auch auf die Teilung des Kreisumfangs anwenden. Einige bemerkenswerte Lösungen sollen noch zum Schluss angegeben werden.

Es sei

$$1) \quad \text{tang } \tau_5 = \frac{337}{625} = (\sin^4\gamma_5 + \cos^4\gamma_5)$$

wo der Index 5 in  $\tau_5$  auf das Ausgangsdreieck  ${}^4\Delta_5^3$  hinweist.

Dann ist

$$\log 337 = 2,5276299$$

$$\log 625 = 2,7958800$$

$$\log \text{tang } \tau_5 = 0,7317499$$

$$\tau_5 = 28^\circ 20' 0,77''$$

Nun ist

$$\xi_9^1 = 3\tau_5 - 45^\circ = 85^\circ 0' 2,31'' - 45^\circ = 40^\circ 0' 2,31''$$

also ist der wahre Unterschied

$$\xi_9^1 - \xi_9 = 2,31''$$

Um diesen Centriwinkel zu construiren, zeichne man das rechtwinklige Dreieck  $ABC$  ( ${}^4\Delta_5^3$ ), ziehe die Höhe  $AD$  und trage auf der Verlängerung  $DE = DB$  ab. Man verbinde  $E$  mit  $C$ , zeichne

$$\angle CEF = \angle DEC$$

und verlängere den freien Schenkel, bis er die Verlängerung von  $DC$  in  $F$  schneidet, dann ist  $\triangle FDE$  das pythagoreische Dreieck  ${}^{175}\Delta_{337}^{238}$ . Zeichnet man das rechtwinklige Dreieck  $GFH$ , in welchem die Katheten

$$GF = FD + DG = FD + FE = 288 + 337 \quad \text{und}$$

$$FH = FE = 337 \quad \text{ist, dann ist}$$

$$\angle FGH = \tau_5 = 28^\circ 20' 0,77''$$

Beschreibt man jetzt um  $G$  einen Kreis, trägt  $\widehat{JK} = \tau_5$  auf der Peripherie ab, bis  $\widehat{JL} = 3JK$  ist, und construirt  $\widehat{JM} = 45^\circ$ , dann ist  $\widehat{ML} = 3JK - \widehat{JM} = \xi_9^1$ . S. Fig. 10.

Setzt man ferner

$$2) \quad \sin \sigma_5 = \frac{337}{625}$$

so ist

$$\sigma_5 = 32^\circ 37' 45,111''$$

Es ist dann

$$\xi_7^1 = 2\sigma_5 + \beta_5^9 - 42^\circ = 51^\circ 25' 45,555''$$

$$\xi_7^1 - \xi_7 = 2,698'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{13}^1 = 4\sigma_5 + \frac{1}{2}\beta_5^5 - 105^\circ = 27^\circ 41' 29,5065''$$

$$\xi_{13} - \xi_{13}^1 = 2,8''$$

3) Setzt man ferner

$$\text{tang } \tau_{13} = \sin^4 \gamma_{15} + \cos^4 \gamma_{13}$$

so ist

$$\text{tang } \tau_{13} = \frac{21361}{28561}$$

$$\log 21361 = 4,3299216$$

$$\log 28561 = 4,4557734$$

---


$$\log \text{tang } \tau_{13} = 0,5738482 - 1$$

$$\tau_{13} = 36^\circ 47' 35,194''$$

Es ist dann

$$\xi_{53} = \tau_{13} - 30^\circ = 6^\circ 47' 35,194'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{53}^1 - \xi_{53} = 2,364'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{11}^1 = \tau_{13} - \frac{1}{2}\gamma_5^4 + 22\frac{1}{2}^\circ = 32^\circ 43' 41,013''$$

$$\xi_{11}^1 - \xi_{11} = 2,831'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{13}^I = \tau_{13} + \varphi_{41} - 12^\circ = 27^\circ 41' 28,444''$$

$$\xi_{13} - \xi_{13}^I = 3,864''$$

4) Setzt man

$$\sin \sigma_{13} = \frac{21361}{28561}$$

so ist

$$\sigma_{13} = 48^\circ 24' 34,171''$$

Man erhält:

$$\xi_7^I = 2\sigma_{13} - \gamma_5^3 + 24^\circ = 51^\circ 25' 43,152''$$

$$\xi_7^I - \xi_7 = 0,295'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{19}^I = \sigma_{13} - \frac{1}{2}\varphi_{61} - 28\frac{1}{2}^\circ = 18^\circ 56' 49,09''$$

$$\xi_{19} - \xi_{19}^I = 1,436''$$

Die Construction von  $\tau_{13}$  und  $\sigma_{13}$  ist der in 1) analog.

Um die Werte für die Bestimmungswinkel bis auf Bruchteile von Secunden genau zu erhalten, construire man sich den Constructionswinkel

$$\omega = (\varphi_{29} + 2\varphi_{41}) = 48^\circ 0' 18,741''$$

So erhält man z. B. für

$$\xi_{11}^I = \tau_{13} - \frac{1}{2}\gamma_5^4 - \frac{\omega}{8} + 28\frac{1}{2}^\circ = 32^\circ 43' 38,670'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{11} - \xi_{11}^I = 0,512''$$

und für

$$\xi_{13}^I = \tau_{13} + \varphi_{41} + \frac{\omega}{4} - 24^\circ = 27^\circ 41' 33,129'' \quad \text{und}$$

$$\xi_{13}^I - \xi_{13} = 0,821''$$

wendet man als Correctionswinkel

$$\omega = (\varphi_{29} + 2\varphi_{41}) = 48^\circ 0' 18,741''$$

an. Dieser ist leicht zu construiren.

Man erhält z. B. für  $\xi_7^I$  in 3):

$$\xi_7^I = \tau_{13} - \varphi_{13} + \frac{5}{16}\omega + 3^\circ = 51^\circ 25' 42,986''$$

$$\xi_7^I - \xi_7 = 0,129''$$

und für  $\xi_{19}^I$  in 4):

$$\xi_{19}^I = 3 \cdot \sigma_{13} + \frac{5}{16} \cdot \omega - 177^\circ = 18^\circ 56' 51,054''$$

$$\xi_{19}^I - \xi_{19} = 0,528''$$

Mittels des Correctionswinkels  $\omega$  erhält man folgende Tabelle für die Bestimmungswinkel:

$$\xi - \xi^1$$

$$\xi_7^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{3}{5} - \frac{5}{4} \cdot \omega + 93^\circ = 51^\circ 25' 42.409'' + 0,448''$$

$$\xi_{91}^1 = -\frac{1}{2}\gamma \frac{80}{89} + \frac{17}{16} \cdot \omega + 21^\circ = 40^\circ 0' 0,171'' - 0,171''$$

$$\xi_{11}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{63}{65} + \frac{13}{8} \cdot \omega + 54^\circ = 32^\circ 43' 37.935'' + 0,247''$$

$$\xi_{13}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{12}{13} + \frac{7}{16} \cdot \omega - 27^\circ = 27^\circ 41' 32,387'' + 0,079''$$

$$\xi_{19}^1 = \frac{1}{2}\beta \frac{28}{53} + \frac{3}{8} \cdot \omega - 15^\circ = 18^\circ 56' 50,453'' + 0,073''$$

$$\xi_{23}^1 = \frac{1}{2}\beta \frac{3}{5} - \frac{\omega}{16} + 134^\circ = 15^\circ 39' 7,531'' + 0,295''$$

$$\xi_{25}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{10}{8} - \frac{\omega}{8} - 201^\circ = 14^\circ 24' 0,509'' - 0,509''$$

$$\xi_{29}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{60}{61} + \frac{17}{8} \cdot \omega - 109^\circ = 12^\circ 24' 49,869'' - 0,209''$$

$$\xi_{31}^1 = \beta \frac{5}{8} + \frac{\omega}{8} - 39^\circ = 11^\circ 36' 46,523'' + 0,058''$$

$$\xi_{37}^1 = \beta \frac{6}{5} + 2 \cdot \omega - 127^\circ = 9^\circ 43' 47,248'' - 0,221''$$

$$\xi_{41}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{35}{37} + \frac{9}{4} \cdot \omega - 117^\circ = 8^\circ 46' 49,989'' - 0,223''$$

$$\xi_{43}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{3}{5} + \frac{7}{16} \cdot \omega - 49^\circ = 8^\circ 22' 19,878'' + 0,343''$$

$$\xi_{47}^1 = \gamma \frac{5}{4} + \frac{7}{4} \cdot \omega - 162^\circ = 7^\circ 39' 34,672'' - 0,204''$$

$$\xi_{53}^1 = \frac{1}{2}\beta \frac{20}{29} - \frac{27}{16} \cdot \omega + 66^\circ = 6^\circ 47' 33,051'' - 0,221''$$

$$\xi_{59}^1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{84}{85} + \frac{\omega}{16} - 37^\circ = 6^\circ 6' 5,866'' + 0,236''$$

$$\xi_{61}^I = \beta s^2 - \frac{7}{4} \cdot \omega + 78^\circ = 5^\circ 54' 5,869 + 0,033''$$

$$\xi_{67}^I = \frac{1}{2} \gamma s^2 + \frac{5}{8} \cdot \omega - 61\frac{1}{2}^\circ = 5^\circ 22' 23454'' - 0,150''$$

Graeber.

## 2.

**Erweiterung der Curvenklasse von constanter Krümmung.**

Sind die Richtungscosinus der Tangente einer Curve  $f, g, h$  gegebene Functionen eines Parameters  $\pi$ , so lässt sich der Curvenbogen  $s$  noch als beliebige Function von  $\pi$  annehmen. Die Curve gehört einer speciellen Classe an, wenn  $s$  proportional  $\pi$ , also

$$s = c\pi \quad (1)$$

gesetzt wird. Nur für den besondern Fall, wo  $\pi$  dem Krümmungswinkel (d. h.  $\partial\pi$  dem Contingenzwinkel der Tangente) proportional ist, hat die Curve constante Krümmung. Diese neue Beschränkung lassen wir hier fallen und suchen für beliebiges  $\pi$  Eigenschaften der Curve (1), namentlich Beziehungen zwischen Krümmungswinkel  $\tau$ , Torsionswinkel  $\vartheta$ , Bogen  $s$  und Parameter  $\pi$ .

Da keine algebraische Curve von constanter Krümmung bekannt ist (vom Kreise abgesehen), so wollen wir hier sogleich den Fall einführen, dass die Curve algebraisch sei. Dies findet offenbar statt, wenn man für ungleiche rationale Zahlen  $a, b$  setzt

$$f = \cos a\pi \cos b\pi; \quad g = \cos a\pi \sin b\pi; \quad h = \sin a\pi$$

Hieraus berechnet man:

$$\partial\tau = (a^2 + b^2 \cos^2 a\pi) \partial\pi^2$$

$$\partial\vartheta = \frac{b^2}{a} \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2 \cos^2 a\pi} + 1 \right) \frac{\partial \cos a\pi}{\sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 a\pi}}$$

Sei der elliptische Modul

$$x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und  $a\pi = amu$  die Amplitude, ferner

$$\cos a\pi = \operatorname{cn} u = \frac{a}{b} \cot \varphi$$

dann werden die Integrale der vorstehenden Gleichungen:

$$\tau = \frac{e|u}{\kappa|}; \quad \vartheta = b(\cos \varphi - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi)$$

Die Coordinatengleichungen der Curve sind:

$$x = \frac{c}{a^2 + b^2} (a \sin a\pi \cos b\pi - b \cos a\pi \sin b\pi)$$

$$y = \frac{c}{a^2 - b^2} (a \sin a\pi \sin b\pi + b \cos a\pi \cos b\pi)$$

$$z = -\frac{c}{a} \cos a\pi$$

Die Curve umläuft also spiralisches ein Rotationsellipsoid (resp. Hyperboloid)

$$(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + a^2 z^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 - b^2}$$

während ihre Höhe  $z$  nach  $\frac{a}{b}$  maligem Umlauf periodisch wiederkehrt. Ihr Krümmungswinkel  $\tau$  stellt sich als Ellipsenbogen dar; die ganze Ellipse entspricht der Periode der  $z$ ; die Exentricität ist  $= k$  für grosse Halbaxe  $= 1$ . Mittelst des Torsionswinkels  $\vartheta$  ist die Gleichung der Evolute bekannt:

$$x_1 = x + \frac{\partial e}{\partial \tau} (l + f' \operatorname{tg} \vartheta); \quad \text{etc.}$$

R. Hoppe.

# Litterarischer Bericht

LVII.

---

## P h y s i k.

Die Lehre von der Elektrizität. Von Gustav Wiedemann. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Zweiter Band mit 163 — Dritter Band mit 32 ) eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1895. Friedrich Vieweg u. Sohn. 1126 + 1139 S.

Der 1. Band des Werkes unter anfänglichem Titel ist im 222. litt. Ber. S. 12, der 1. Band der „Lehre von der Elektrizität“ in 2. Reihe, 49. litt. Ber. S. 10 besprochen. Die im 2. und 3. Bande hinzukommenden Lehrgegenstände sind: Dielektrische Ladung der Körper; Töne beim Elektrisieren, Aenderung des Volumens, der Gestalt, der Elasticität und des optischen Verhaltens. Beziehungen zwischen Elektrizität und Wärme, und zwar thermische und mechanische Wirkungen des elektrischen Stromes, Thermoelektricität, Temperaturänderungen der Contactstellen heterogener Leiter; Elektrizitätserregung in Krystallen durch Temperaturänderungen und Druck; Elektrochemie, u. zw. Elektrolyse; ihr Einfluss auf den Leitungswiderstand und die elektromotorische Kraft im Schliessungskreise; Veränderungen der elektromotorischen Kraft der Metalle durch Einwirkung der sie umgebenden Flüssigkeiten; Theorie der Elektrolyse und Leitfähigkeit der Elektrolyte; Theorie der Elektrizitätserregung beim Contact heterogener Körper; Arbeitsleistungen und Wärmewirkungen bei den elektrolytischen Processen; Elektro-

dynamik, und zwar Anziehung und Abstossung elektrischer Ströme; Verhalten der elektrischen Ströme gegen die Erde. Elektromagnetismus, u. zw. allgemeine Theorie der Magnetisirung; Verhalten der Magnete gegen elektrische Ströme; magnetische und elektromagnetische Messmethode; Gesetze der Magnete und Elektromagnete; Wechselbeziehungen zwischen dem Magnetismus und dem mechanischen Verhalten der Körper; Beziehungen des Magnetismus zur Wärme. Magnetisches Verhalten schwach magnetischer und diamagnetischer Körper, u. zw. Diamagnetismus; Einfluss des Magnetismus auf das dielektrische Verhalten, die Länge, die Leitfähigkeit und das thermoelektrische Verhalten diamagnetischer Stoffe; Beziehungen des galvanischen Stromes und des Magnetismus zum Licht und zur strahlenden Wärme; Beziehungen des Magnetismus zur dielektrischen Polarisation, zur chemischen Verwandtschaftskraft, zur Krystallisation, Cohäsion und Gravitation. H.

Dr. J. Frick's Physikalische Technik, speciell Anleitung zur Ausführung physikalischer Demonstrationen und zur Herstellung von physikalischen Demonstrations-Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Von Dr. Otto Lehmann, Professor der Physik an der technischen Hochschule in Karlsruhe. In zwei Bänden. Zweiter Band. Mit 1016 eingedruckten Holzstichen und 3 Tafeln. Braunschweig 1895. Friedrich Vieweg u. Sohn. 1054 S.

Der 1. Band, in 6. Auflage erschienen 1890, ist im 36. litt. Ber. besprochen. Der 2. Band, welcher die Experimente für Elektrizität, Magnetismus, Optik und Akustik behandelt, ist verschieden vom ersten bearbeitet. Wegen der schnellen Folge neuer Entdeckungen und neuer Methoden in der Elektrizitätslehre konnte nämlich der Herausgeber den Anschluss an theoretische Lehrbücher nicht beibehalten und liess überhaupt alle pädagogischen Gesichtspunkte fallen. Das Ganze ist jetzt ein wissenschaftliches Universum, in welchem die Anfertigung der Demonstrationsmittel und die Ausführung der Versuche gelehrt wird. Da nun die Vertrautheit mit der Theorie Zweck der Experimente ist, so kann sie nicht deren vorausgehende Bedingung sein. Zum Gebrauch in jeder Schule ist es also erforderlich, dass der Lehrer die ganze Theorie, welche das Buch als bekannt voraussetzt, nach eigenem Ermessen hinzufügt. Die Vorrede spricht vom Gebrauche in technischen Hochschulen und Mittelschulen, d. i. in Fachschulen. Die Teile der Doctrin, denen die Versuche gelten, sind der Reihe nach, in betreff der Elektrizität: ihre Erzeugung durch Reibung; Verteilung und

Bindung der Elektricitäten, Condensatoren; Mittheilung an und von Isolatoren, Elektrisirmaschinen; Erzeugung durch chemische Prozesse; chemische Wirkung der Elektricität; Elektrodynamik; Magnetismus, Elektromagnetismus; Wechselwirkung von Magneten und Stromleitern; Induction; Erzeugung der Wärme durch Elektricität; elektrische und magnetische Grössen; Durchgang durch schlechte Leiter; Staub- und Lichtfiguren; Anlagen für Demonstrationen — in betreff strahlender Energie: ihre Ergänzung; Absorption; chemische Wirkung, Phosphorescenz, Fluorescenz; Fortpflanzung; Zurückwerfung; Brechung; Interferenz; Beugung; Polarisation; doppelte Brechung — in betreff optischer Instrumente und Lichtempfindung: Sehen: Täuschungen; Fernrohre; Mikroskop — in betreff der Tonempfindungen und der Musikinstrumente: Erzeugung des Schalles durch Schwingungen; Resonanz, musikalische Instrumente; Ausbreitung des Schalles; zu dessen Analyse; Uebertragung; Harmonie.

H.

Grundzüge der mathematischen Chemie. Energetik der chemischen Erscheinungen. Von Dr. Georg Helm, o. Professor an der K. technischen Hochschule zu Dresden. Mit 17 Figuren im Text Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 138 S.

Das Buch würde ein sehr willkommenes und verdienstliches Werk sein, wenn es nicht in so unklarer Sprache abgefasst wäre. Im Anfang ist vom Energieprincip die Rede, und soll Folgendes dessen Erklärung sein. „Parameter heissen die Grössen — wie Coordinaten, Geschwindigkeit, Temperatur, elektrische Ladung u. s. w. — welche den augenblicklichen Zustand eines Körpers bestimmen.“ Eigenenergie eines Körpers wird nun eine Function aller jener Parameter genannt und von dieser Function gesagt, dass bei allen Veränderungen ihr Gesamtbetrag in der Natur unverändert bleibe. „Das so gefasste Energieprincip sei offenbar nicht schlechthin beweisbar, sondern sage eine Betrachtungsweise der Naturerscheinungen aus, die ihre Berechtigung durch den Erfolg nachzuweisen hat.“ Dies soll nun eine Erklärung des Begriffs der Energie sein! Allem Ausgesagten fehlt offenbar das Object. Die Energie soll eine Function sein; die Function bleibt unbekannt, auch von ihren Argumenten werden nur einige genannt, sie ist daher als Attribut schlechthin inhaltslos in Ermangelung der Grössen, von denen sie nicht abhängen soll. Demnach ist auch die Aussage, dass sie die genaunte Eigenschaft habe, als unbeweisbare Behauptung sinnlos; es konnte nur von dem Problem, die Function und ihre Argumente für die Chemie zu finden, die Rede sein, wie solche von Leibniz und Huygens für die reine

Bewegung gefunden worden ist. Wenn schliesslich das Energieprincip eine Betrachtungsweise von Erfolg genannt wird, so vermisst man leider bei der hier dargebotenen Betrachtungsweise jede Hinweisung auf den resultirenden Erfolg. Dass die gesuchte Function von vorn herein als algebraische Summe von Effecten betrachtet werde, wird nirgends ausgesprochen. Es werden vielmehr immer nur die partiellen Effecte einzelner Parameter in Betracht gezogen und der anfänglichen Erklärung zuwider Eigenenergien genannt. Nach jener Erklärung bezieht sich der Name auf einen Körperteil bei voller Mitwirkung aller Parameter, wo offenbar das „Eigen“ ganz überflüssig steht, nachher auf den Anteil des einzelnen Parameters. Für den Kundigen gleicht sich freilich der Unterschied im Gesamtbetrage, der leider nicht einmal am Schlusse formulirt wird, aus. So ist dann der ganze Vortrag mehr ein Monolog als eine Lehre.

Hoppe.

Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg von Dr. Franz Neumann, Professor der Physik und Mineralogie. Siebentes Heft. Vorlesungen über die Theorie der Capillarität. Herausgegeben von Dr. A. Wangerin, Professor der Mathematik an der Universität Halle. Mit Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 234 S.

In der Einleitung werden die Fundamentalsätze der Laplace'schen Capillaritätstheorie aufgestellt, und vom Herausgeber die Verhältnisse der spätern Bearbeitungen von Poisson, Stahl, Boltzmann, Weinstein, Mensbrugge dargelegt, nachdem die von Gauss, der jene Sätze zum erstenmal vollständig begründet hat, schon vorher besprochen war. Der Vortrag selbst leitet, wie Gauss, die Theorie aus mechanischem Princip ab. Die Gegenstände der folgenden Capitel sind: Ansteigen oder Sinken der Flüssigkeiten an ebenen Platten und in Capillarröhren; Druck der Flüssigkeit auf das umgebende Gefäss oder auf eingetauchte Körper, Adhäsionsplatten; die Gestalten von Flüssigkeitstropfen; allgemeine Sätze über das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, welche sich in einer andern von demselben specifischen Gewicht befindet; Zusammenhang zwischen der Gauss'schen und Laplace'schen Ableitung der Grundgleichungen der Capillaritätstheorie.

H.

Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vectorgrössen in der Physik. Von Dr. A. Föppel, Professor an der

Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 413 S.

Den ersten Abschnitt des Buches bildet: die Algebra und Analysis der Vektoren. Zu welchem Zwecke der Verfasser durch Gebrauch dieser symbolischen Rechnungsweise, entsprechend den Methoden von Hamilton und Grassmann, durch welche bekanntlich nichts gewonnen wird, einer Rechnungsweise, von der auch er selbst nicht behauptet, dass sie notwendig oder förderlich sei, das Verständniss der physikalischen Theorie erschwert, ist nicht zu ersehen. Die folgenden Abschnitte sind betitelt: die Grundlinien der Maxwell'schen Elektrizitätslehre; weiterer Ausbau des Systems; die Energiebeziehungen im elektromagnetischen Felde zwischen ruhenden Leitern; die Elektrodynamik bewegter Leiter; Uebersicht über die übrigen Teile der Maxwell'schen Theorie. H.

Die Bestimmung des Molekulargewichts in theoretischer und praktischer Beziehung. Von Dr. Karl Windisch. Mit einem Vorwort von Professor Dr. Eugen Sell. Mit in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1892. Julius Springer. 542 S.

Nachdem die in vielen Zeitschriften zerstreuten Original-Abhandlungen der Forscher, welche zur Gewinnung des heutigen Standpunktes der theoretischen Chemie geführt haben, bereits gesammelt und herausgegeben worden sind, hat der Verfasser das sehr verdienstliche Unternehmen in Ausführung gebracht, die bis jetzt bekannt gewordenen Methoden der Bestimmung der Molekulargewichte in einem Werke zusammenzustellen. Im Vorwort wird ihm das Zeugnis ausgestellt, dass er vermöge seiner chemischen, physikalischen und mathematischen Kenntnisse durchaus seiner Aufgabe gewachsen sei. Voraus geht die Entwicklungsgeschichte der Doctrin.

H.

Nikola Tesla's Untersuchungen über Mehrphasenströme und über Wechselströme hoher Spannung und Frequenz. Mit besonderer Berücksichtigung seiner Arbeiten auf den Gebieten der Mehrphasenstrommotoren und Hochspannungsbeleuchtung zusammengestellt von Thomas Commerford Martin. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit 313 Abbildungen. Halle a. S. 1895. Wilhelm Knapp. 508 S.

Nikola Tesla, geboren 1857 in Smilja im Komitat Lika (Grenzland von Oesterreich-Ungarn) bildete sich zum Lehrer der Mathe-

matik und Physik aus, vertauschte aber diesen Beruf mit der Elektrotechnik, begann seine Tätigkeit in Paris, setzte sie in Amerika erst unter Edison, dann selbständig fort. Er gelangte zu neuen, hervorragenden Erfindungen, indem er die Wirkungen in verschiedenen, bisher noch nicht angewandten Verhältnissen gründlich durchforschte. Diese werden nun von Martin in 4 Abschnitten: Mehrphasenströme; Erscheinungen bei Strömen von hoher Frequenz und hoher Spannung, verschiedene Erfindungen und Schriften, Tesla's erste Phasentmotoren und sein mechanischer und elektrischer Oscillator — dargelegt, einzeln I. ein neues System von Wechselstrommotoren und Transformatoren; das Tesla'sche rotirende magnetische Feld, Motoren mit geschlossenen Leitern, synchrone Motoren, Drehfeldtransformatoren; Abänderungen und Erweiterungen der Tesla'schen Mehrphasensysteme; Verwertung der gewöhnlichen Typen von Gleichstrommaschinen; Verfahren zur Erzielung einer gewünschten Geschwindigkeit des Motors oder Generators; Regulator für Drehstrommotoren; von selbst angehende synchrone Motoren mit nur einem Stromkreise; Verwandlung eines Motors mit doppeltem Stromkreis in einen solchen mit einfachem Stromkreis; Motor mit künstlich erzeugter Verspätung; andere Methode zur Verwandlung eines von selbst angehenden Motors in einen synchronen Motor; durch magnetische Remanenz wirkender Motor; Methode zur Erzielung der Phasendifferenz mittels magnetischer Schirmwirkung; Type des Tesla'schen Einphasenmotors; Motoren mit Stromkreisen von verschiedenem Widerstande; Motor mit gleicher magnetischer Energie im Felde und Anker; Motoren, bei denen die Maxima der magnetischen Wirkung im Anker und Feld zusammenfallen; Motor, welcher auf der Phasendifferenz in der Magnetisirung der innern und äussern Teile eines Eisenkerns beruht; eine andre Type des Tesla'schen Inductionsmotors; Verbindungen eines synchronen und eines selbst angehenden Motors; Motor mit einem Condensator im Ankerstromkreise; in einem der Feldmagnetstromkreise; Tesla's Mehrphasentransformator; Transformator für constanten Strom mit magnetischem Schirm zwischen den Spulen des primären und secundären Stromkreises. II. Versuche mit Wechselströmen von sehr hoher Frequenz und deren Anwendung auf Methoden der künstlichen Beleuchtung; Versuche mit Wechselströmen von hoher Frequenz und hoher Spannung; über Licht und andre Erscheinungen hoher Frequenz; Ausführlicheres über Tesla's Wechselstromgeneratoren für hohe Frequenz; Apparate zur Erzeugung von Wechselströmen mittels elektrostatischer Induction; Massage mit Strömen von hoher Frequenz; elektrische Entladung in Vacuumröhren. III. Methode zur Umwandlung von Wechselströmen in Gleichströme; Condensatoren mit in Oel tauchenden Platten; registrierender elektrolytischer

Zähler; thermomagnetische Motoren und pyromagnetische Generatoren; funkenlose Dynamobürsten und Commutatoren; Regulirung der Gleichstromdynamomaschinen mittels einer Hilfsbürste; Verbesserung in der Construction von Dynamomaschinen und Motoren; Tesla's Gleichstrom-Bogenlicht-System; Verbesserung an Unipolarmaschinen. IV. Tesla's Ausstellung auf der Chicagoer Weltausstellung; sein mechanischer und elektrischer Oscillator. H.

Lehrbuch der Physik für Studierende. Von Dr. H. Kayser, Professor an der Universität Bonn. Zweite, verbesserte Auflage Mit 384 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart 1894.. Ferdinand Enke. 564 S.

Obgleich die Durchführung und Handhabung der Lehren im einzelnen eine durchaus correcte ist, so schliesst sich seltsamerweise die allgemeine Aufstellung und Einführung noch ganz der irrigen und unklaren Auffassung des ungebildeten Laien an, ohne die Irrtümer mit einem Worte zu berichtigen. So wird z. B. der Satz aufgestellt: Alle Körper besitzen Trägheit, d. h. sie haben das Bestreben, ihren Zustand der Ruhe oder Bewegung unverändert beizubehalten, solange keine Kräfte auf sie wirken. Der wahre Sachverhalt ist im Gegenteil: Sie besitzen Trägheit, d. h. — nach Wort-sinn und der Wirklichkeit entsprechend — sie haben kein Bestreben, ihren Bewegungszustand zu verändern, wie überhaupt keiner Substanz ein reflexives Vermögen zukommt; jede solche Veränderung ist Wirkung äusserer Kräfte, d. i. von Kräften anderer Körper. Erstens ist es offenbar unsinnig, ein Bestreben Trägheit zu nennen; zweitens ist es unsinnig die Beibehaltung eines unangefochtenen Besitztums zum Ziel eines Strebens zu machen; nur wo äussere Kräfte auf Aenderung wirken, hätte das Streben als ein bekämpfendes einen Sinn, und gerade für diesen Fall wird es nicht behauptet, findet auch wirklich nicht statt. Nach Allem würde kein Anlass sein, einen Satz über die Trägheit der Körper aufzustellen, wenn es nicht gälte einer irrigen Meinung entgegenzutreten. In der Tat begünstigt die unüberlegte Beobachtung überwiegend die Auffassung, als begegneten die äusseren Kräfte einem Widerstande in der Beharrung. Es ist also allerdings Grund, durch entschiedene Aussage eine Täuschung fern zu halten, nämlich durch die Aussage: Die Bewegung ist ein Zustand eines Körpers; auf diesen wirken äussere Kräfte stots mit ihrem vollen von der Bewegung ganz unabhängigen Werte. Der Verfasser tut das Gegenteil: er adoptirt die Täuschung und macht dadurch seine Lehre populär — jedoch in so unklarer Rede, dass

es für das Folgende so gut ist, als wenn der Unsinn nicht gesagt worden wäre. Das Lehrbuch behandelt nach einander: die Mechanik, die Aggregatzustände, die Akustik, den Magnetismus, die Elektrizität und die Optik. Die Lehrweise ist beschreibend und mitteilend. Auf Erklärung geht sie nicht eben tief ein, stellenweis kaum hinreichend zum Verständniss; auch wird dazu keine Rechnung, weder algebraische noch analytische verwandt, geometrische Kenntnisse nur, soviel zur Beschreibung nötig, beansprucht. Dagegen ist besonderer Fleiss der Bearbeitung darauf gerichtet, für alle Lehren die quantitativen Bestimmungen in numerischen Angaben und Formeln zu liefern, und die Wege ihrer Ermittlung nebst den dazu geeigneten Apparaten zu zeigen. Hoppe.

Die Erhaltung der Arbeit. Von Dr. Richard Heger, a. o. Honorarprofessor a. der Königl. Sächs. Technischen Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer in Dresden Hannover 1896. Helwing. 305 S.

Die Lehrmethode ist ein originelles Kunstwerk. Sie nimmt die geläufigen Begriffe ohne weiteres auf und geht von den Erfahrungen aus, welche sich ohne Experiment in einem Punkte der Erde, diesen als fest betrachtet, darbieten. Der Begriff der Arbeit wird gleich anfangs eingeführt, ihre Uebertragung und Verwandlung, einschliesslich der thermischen Gestalt, erläutert. Hierbei und hiernach wird ausführlich auf die Mechanik eingegangen. Letztere erscheint indes stets als notwendige Basis der Theorie der Arbeit, nicht als hergeleitet aus ihr, wie ein- oder mehrmal versucht worden ist das Verhältniss darzustellen. Die Wahl der Methode und der Reihenfolge der Themata zeigt sich darin ausserordentlich glücklich, dass, obgleich die Präcision und Idealität nur stufenweis gewonnen wird, doch nie ein Mangel verhüllt oder verschwiegen vorkommt. „Masse“ und „Kraft“ werden anfänglich durch „Gewicht“ vertreten, „lebendige Kraft“, unter dem Namen „Wucht“ eingeführt, aber erst später beim „Stosse“ vollständig bestimmt. Die Relativität der „Geschwindigkeit“ wird durchgängig ignoriert; dagegen lässt sich nichts sagen, da der doctrinäre Begriff der Arbeit selbst nur absolute Geschwindigkeit kennt. Die so entwickelte Lehre wird für alle Fälle der Mechanik, bezüglich auf starre, elastische, flüssige Körper und Gase, mit Eingehen auf technische Verwendung ausgeführt, dann die elektrische Arbeit behandelt. H.

Lehrbuch der Experimentalphysik für Studirende. Von Dr. Emil Warburg, Professor an der Universität Freiburg. Mit

408 Original-Abbildungen im Text. Freiburg i. B. und Leipzig 1893. J. C. B. Mohr. 381 S.

Es werden nach einander behandelt: die mechanischen Grundbegriffe; die Mechanik starrer Körper; flüssiger Körper; Elasticität, Viscosität, Oberflächenspannung, Diffusion, Absorption; Schall; Wärme; Strahlung, insbesondere des Lichts; Elektrizität und Magnetismus. Jeder dieser Hauptteile ist wieder in Unterabteilungen geordnet, entsprechend den vielen zu erforschenden Fragen und Seiten der Betrachtung, und jede Unterabteilung zeigt eine Reihe von Lehren durch Experiment dargetan, dann in Sätzen formulirt. Obwol nun für Ordnung der Lehren nach theoretischem Gesichtspunkt das Mögliche getan ist, so hat das Ganze doch noch mehr die Gestalt einer Sammlung von Gesetzen ohne theoretisches Band innerhalb eines Bezirks zusammengehöriger Vorgänge als einer Theorie derselben. In der Tat ist es durch die Natur einer Erfahrungswissenschaft von so grossem Umfang geboten, die Schwierigkeiten der Feststellung der einzelnen Gesetze von denen der speculativen Arbeit getrennt zu erhalten, damit sie sich nicht häufen und vergrössern. Da indes stets Erforschung und Erfindung Hand in Hand gehen müssen, so kann im engern Bezirke der Vorgänge die Trennung nicht stattfinden, zeigt sich aber in neuster Zeit unabweislich. Einwände sind im vorliegenden Buche nur gegen einige sehr seltsame Aeusserungen des Verfassers zu machen. Gleich im Anfang lehrt er: die Naturwissenschaften knüpfen an einen vorgefundenen Trieb des Menschen, zwischen den von der Natur dargebotenen Tatsachen den Zusammenhang aufzusuchen, an; dem Triebe zu genügen wäre ihre Aufgabe. Erst am Schlusse fügt er hinzu: der eingepflanzte Trieb führt auch zu dem Ziele die Naturkräfte zu beherrschen und sie in den Dienst menschlicher Zwecke zu stellen. Natürlich verhält es sich umgekehrt: der letztgenannte, niemandem unbekannt Gewinn ist es eben, was jenen Trieb hervorruft. Die Beherrschung der Tatsachen vermöge der Kenntniss ihres gesetzlichen Zusammenhangs kennen und üben wir von Kindheit an; sie auszudehnen strebt bewusstermassen die Wissenschaft. Der Verfasser spricht hier vom Forschungstribe wie ein Dilettant, dem es um Curiositäten zu tun ist. Weiterhin nennt er Kräfte, die in die Ferne wirken, „scheinbare“ Fernkräfte. Er hat aber nirgends Kräfte denken gelehrt, die nicht in der Ferne wirken, da doch zwischen zusammenfallenden Punkten keine bewegende Kraftwirkung denkbar ist. Statt dessen hätte vielmehr das am Seile hangende Gewicht eine scheinbare Nichtfernkraft genannt werden müssen. Der Verfasser aber bezeichnet allein die kosmische Attraction (Schwerkraft ohne Seil) als „scheinbare“ Fernkraft und gibt — in respectvoller Berücksichtigung der

Menge in Amerika und England erschienener Schriften müssiger Grübler — ihre Erklärung für ein noch nicht gelöstes Problem aus. Diese Aeusserung, die mit seiner ganzen Lehre in keiner Verbindung steht, möchte wol schwerlich aus seinem Gedauken entspringen. Drittens wird in § 81. der Trägheit eines bewegten Körpers ein Widerstand gegen Beschleunigung durch äussere Kräfte zugeschrieben, eine Aussage, die dem Princip der Dynamik direct widerspricht. Ausserdem ist dieser § 81. überschrieben: „Das d’Alembert’sche Princip“; von diesem Princip ist aber weder hier noch sonst im Buche eine Spur zu finden. Wie die genannten Stellen, die wie Tintenkleckse in einer ganz vernünftigen Schrift erscheinen, in das Buch gekommen sind, mag begreifen wer will. Hoppe.

Grundzüge der Molecular-Physik und der mathematischen Chemie, dargestellt von Dr. W. C. Wittwer, o. Professor der Physik am k. Bayr. Lyceum zu Regensburg. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Stuttgart 1893. Konrad Wittwer. 304 S.

Die nach einander behandelten Themata sind: der Aether; die Constitution der Körper nebst den Beziehungen des Aethers zu ihnen; die Grundzüge der Chemie; die Wärme; die Elektrizität. In der Einleitung bespricht der Verfasser die Frage über die Existenz von Fernwirkungen, constatirt, dass der grösste Teil der Physik sich auf Fernwirkungen gründet, hält daher ganz entschieden die Frage für bedeutungslos. Dennoch räumt er ihre Berechtigung ein und lässt den logischen Fehler der Gegner unbeachtet. Offenbar kann man nicht die Lösung einer Frage anstreben, ehe man ihren Sinn versteht und anzugeben vermag, was sie sucht. Der Verfasser spricht die Frage mit den Worten aus: Wie macht es die Erde, dass der losgelassene Stein sich ihr zu nähern strebt? Die Beantwortung ist leicht genug: Die Erde ist da, ihr Dasein ist hinreichende Bedingung für die bestimmte Bewegung des Steins. Eine Causalfrage wird aus gutem Grunde nicht aufgeworfen. Die Physik hat die Ursachen aller Naturveränderungen zu erforschen. Das Attractionsgesetz verändert sich nicht, bietet folglich nichts dar, dessen Ursache zu suchen wäre. Solange demnach die Gegner keine andre Frage klar und deutlich gestellt haben, ist kein Problem aufgewiesen. Wie man hier liest, soll die Anzahl der Gegner eine bedeutende geworden sein; es ist aber nicht gesagt, welcherlei Geister zu ihnen gehören; ihr Zuwerkegehen spricht nicht dafür, dass ihre Menge eine achtunggebietende wäre. In der Abhandlung selbst handelt es sich zunächst um Correction des newtonschen Attractionsgesetzes **rücksichtlich**

kleiner Entfernungen. Zur Ermittlung der umfassenden Attractionsfunction werden mehr directe Schlüsse und Betrachtungen als Rechnung angewandt. Das Verfahren ist selbständig gewählt, die Resultate zumteil abweichend von denen anderer Autoren. Eine Zusammenstellung hat der Verfasser bereits 1870 in einer Schrift: „Die Molekulargesetze“ — gegeben. In der vorliegenden 2. Auflage sind Anwendungen neuer Beobachtungen hinzugekommen. Die Vorrede sagt, dass deren Ergebnisse vielfach mit den herrschenden Ansichten in Collision sich befänden, doch nur in Punkten, die auch bisher ohnedies streitig waren.

Hoppe.

Terrestrial Magnetism. An international quarterly journal. Published under the auspices of the Ryerson physical laboratory A. A. Michelson, Director. Edited by L. A. Bauer. With the cooperation the following Associates: C. Abbe, B. Baracchi, W. von Bezold, E. Biese, F. H. Biegelow, C. Bürgen, C. Chistoni, W. Doberck, M. Eschenhagen, J. Hann, G. Hellmann, S. C. Hepites, D. A. Goldhammer, A. Lancaster, C. Lagrange, S. Lemström, G. W. Littlehales, J. Liznar, T. C. Mendenhall, Th. Moureaux, F. E. Nipher, L. Palazzo, van Rijckevorsel, A. W. Rücker, E. Schering, A. Schmidt (Gotha), C. A. Schott, A. Schuster, M. Snellen E. Solander, J. P. van der Stok, R. F. Stupart, A. de Tillo, H. Wild. „Magnus magnes est ipse globus terrestris“ (Gilbert, „de Magnete.“) Vol. I. No. 1. Chicago, Januar 1896. The University of Chicago Press. 54 S.

Die 1: Numer dieser neuen Zeitschrift enthält folgende Abhandlungen:

A. Schuster: Elektrische Ströme erzeugt durch rotirende Magnete.

Ad. Schmidt (Gotha): Die Verteilung des erdmagnetischen Potentials in Bezug auf beliebige Durchmesser der Erde.

L. A. Bauer: Halley's neueste Karte gleicher Variation.

Dann folgen Briefe an den Herausgeber, Noten und litterarische Berichte.

H.

Cours de physique de l'École Polytechnique. Par M. J. Jamin, Premier supplément. Par M. Bouty, Professeur à la Faculté des

Sciences de Paris. Chaleur, Acoustique. Optique. Paris 1896  
Gauthier Villars et fils. 183 S.

Die Reihe der in der Entwicklung der Wärmetheorie behandelten Gegenstände sind folgende: Messung der Temperaturen; Principien der Thermodynamik; Compressibilität, Dilatationen, Zustandsveränderungen; Theorie der Dissociation nach Gibbs; osmotische Pression nach van t'Hoff; kritischer Punkt, capillare Phänomene In der Akustik und Optik: Fortpflanzung der vibratorischen Bewegung; Fortpflanzung des Schalles; Untersuchung der Vibrationen; Fortpflanzung des Lichtes; Diffraction; Interferenzerscheinungen und ihre Anwendungen. H.

Repetitorium der Experimentalphysik für Studierende auf Hochschulen. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Mediciner und Pharmaceuten. Von Dr. L. Weber, Professor der Physik an der Universität Kiel. Mit 12 in den Text gedruckten Abbildungen München und Leipzig 1895. Dr. E. Wolff. 256 S.

Das Buch enthält die Grundlagen der Experimentalphysik ungefähr in dem Umfange, wie sie in den einleitenden Uebersichten eines Praktikums für Mediciner und Pharmaceuten vorgetragen zu werden pflegen. Ein allgemeines Anschauungsbild der bekannteren Apparate und Experimente wird dabei vorausgesetzt und vorzugsweise die grundlegenden Deductionen und leitenden Iden der einzelnen Disciplinen in präciser Form zur Darstellung gebracht. Die mathematischen Hilfsmittel sind vereinfacht, das Detail der Experimentalphysik mit ihren vielseitigen Anwendungen nur angedeutet und nur insoweit berücksichtigt, als neue, grundlegende Gesichtspunkte darin enthalten sind. H.

The Electrical World. Published every saturday by the W. J. Johnston Company, limited. Vol. XXIV. nr. 15. New York. 1894. 4°. 24 S.

Die seit 1874 bestehende Zeitschrift bringt eine grosse Anzahl kurzer Mitteilungen sehr mannigfaltigen, grösstenteils technisch-physikalischen Inhalts. In vorliegender Numer findet sich eine Biographie des durch zahlreiche philosophisch-mathematische Schriften bekannten Alexander Macfarlane, geboren 1851 zu Blaitgowria in Schottland, nebst Nachrichten über seine Werke. H.

On the analytical treatment of alternating currents. (With discussion.) By Prof. A. Macfarlane, University of Texas, Austin, Texas. New York, American Institute of Electrical Engineering. 8 S.

Der Verfasser spricht die Ansicht aus, dass die analytische Behandlung der alternirenden Ströme die Algebra der Ebene (mit Complexen) erfordere, so jedoch, dass sie mit der Algebra des Raumes (Quaternionen) harmonire, und führt es aus. Es folgt eine Debatte. H.

Lehrbuch der Experimentalphysik. Von Adolph Wüllner. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 1000 S.

Das sehr bekannte Buch gibt seiner Bestimmung gemäss unter dem steten Hinweis auf die Originalarbeiten eine Uebersicht über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLX.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, Mor., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-)Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1759. 2. Abtlg. Die Zeit von 1700—1726. gr. 8°. (S. 253—472 mit 30 Fig.) Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1889. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 45. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (XLIX, 821 S.) 3. Abth. Physik der Erde. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8°. (LVII, 793 S.) Braunschweig, Vieweg. à 30 Mk.

— dass. i. J. 1894. 50. Jahrg. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein gr. 8°. (LXXIV, 600 S.). Ebd. 22 Mk. 50 Pf. 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8°. (LI, 716 S.) Ebd. 25 Mk.

Grassmann's, Herm., gesammelte mathemat. u. physikal. Werke. Hrsg. v. Frdr. Engel. 1. Bd. 2. Thl. Die Ausdehnungslehre v. 1862. In Gemeinschaft mit Herm. Grassmann d. J. hrsg. v. Frdr. Engel. gr. 8°. (VIII, 511 S. m. 37 Fig.) Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Matthiessen, Ludw., Grundzüge der antiken u. modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 2. wohlf. (Titel-)Ausg. gr. 8°. (XVI, 1001 S.) Ebd. 8 Mk.

Rosenberger, Ferd., Jsaac Newton und seine physikalischen Principien. Ein Hauptstück aus der Entwicklungsgeschichte der modernen Physik. gr. 8°. (VI, 536 S. m. 25 Abbildgn.) Leipzig, Barth. 13 Mk. 50 Pf.

Volkmann, P., Franz Neumann. \* 11. Sept. 1798, † 23. Mai 1895. Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft. Dem Andenken an den Altmeister der mathemat. Physik gewidmete Blätter, unter Benutzung e. Reihe von authent. Quellen gesammelt u. hrsg. gr. 8°. (VII, 68 S. m. Biduis). Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Wassiljef, A., Nikolaj Jwanowitsch Lobatschewskij. Rede. Aus dem Russ. übersetzt v. Frd. Engel. gr. 8°. (38 S.) Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

### **Methode und Principien.**

Bräutigam, Herm., Methodik des Rechenunterrichts auf der Stufe des Kopfrechnens m. Hilfe v. Tillich's Rechenkasten. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 136 S.) Wien, Pichler. 2 Mk.

Esmarch, Bernh., die Kunst des Stabrechnens. Gemein-fassliche u. vollständige Anleitg. zum Gebrauche des Rechenstabes auf allen Gebieten des praktischen Rechnens. Mit 2 Taf. 148 Textfiguren u. vielen ausgerechneten Beispielen u. Aufgaben. gr. 8°. (192 S.) Leipzig, Günther. Geb. 4 Mk.

Koenigsberger, Leo, Herm. v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik u. Mechanik. gr. 8°. (III, 58 S. m. 1 Bildn.) Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Neumann, C., allgemeine Untersuchungen üb. das Newton'sche Princip der Fernwirkungen m. besond. Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. gr. 8°. (XXI, 292 S.) Ebd. 10 Mk.

Sachse, J. J., der praktische, geistbildende u. erziehl. Unterricht im Rechnen u. in der Raumlehre. II. Thl. Verfahrenskunde des Rechenunterrichts. 2. Aufl. gr. 8°. (X, 290 S.) Osna-brück, Wehberg. 4 Mk.

Wellisch, Sigism., das 2000jähr. Problem der Trisection des Winkels. gr. 8°. (19 S. m. 11 Fig.) Wien, Spielhagen & Schurich. 1 Mk.

### **Sammlungen.**

Bengel, Joh., angewandte Aufgaben im Zahlenkreise v. 1—100. Eine Sammlung von mehr als 600 Aufgaben. 8°. (57 S.) Aachen, Barth. 50 Pf.

Hartmann, Berth., Rechenbuch f. die allgem. Fortbildungsschule. Methodisch geordn. Aufgabensammlg. m. gleichmäss. Berücksichtigung der Rechenoperationen u. Sachgebiete. Ausg. f. Lehrer. Enth. die Aufgaben des Schülerheftes, zahlreiche sachl. u. method. Bemerkgn., viele Ansätze u. Ausrechngn., dazu sämtl. Ergebnisse. gr. 8°. (VIII, 184 S.) Frankfurt a./M., Kesselring. 2 Mk. 75 Pf.

Heuer, Ferd., Rechenbuch für Stadt- u. Landschulen. Anhang zum Lehrerhefte der Ausg. A. u. B., 3. Tl., bearb. v. K. H. L. Magnus. gr. 8°. (S. 201—220) Hannover, Meyer. 30 Pf.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlung. 1351. — 1361. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Klunzinger, K., Rechen-Aufgaben für die Fortbildungsschulen. Schüler-Ausg. 2. Aufl. 8°. (54 S.) Esslingen, Lung. 30 Pf.

— dass. Lehrer-Ausg. 2. Aufl. 8°. (80 S.) Ebd. 1 Mk.

Kopetzky, Frz., Rechenbuch für Mädchen-Fortbildungsschulen, höhere Töchterschulen u. verwandte Anstalten. 2. Aufl. gr. 8°. (III, 130 S.) Wien, Pichler. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Mangler, G., Rechenbuch für allgem. Fortbildungsschulen. Lehrerausg. 12°. (96 S. m. Fig.) Stuttgart, Bonz & Co. 1 Mk.

Sammlung arithmetischer u. geometrischer Aufgaben zur Vorbereitung auf die Lehrerinnen-Prüfung. Auf Grund der Prüfungs-Ordng. v. 24. Apr. 1874 bearb. v. e. ehemaligen Mitglieder zweier preuss. Prüfungs-Kommissionen für Lehrerinnen an Volks-, mittleren u. höheren Mädchenschulen. 8. Aufl. 12°. (IV, 68 S.) Frankfurt a./M., Jäger's Verl. 1 Mk.

Schmid, L., Übungsaufgaben zum Kopfrechnen für den Schul- u. Privat-Unterricht. Im Anschluss an die von Lehrern in Chur hrsg. „Übungsaufgaben fürs Rechnen“ bearb. u. hrsg. 1. Tl. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 144 S.) Chur, Rich. 2 Mk.

Steuer, W., Rechenbuch f. obere Klassen der Knabenschulen. gr. 8°. (V, 102 S.) Breslau, Woywod. Kart. 50 Pf.

— Sammlung angewandter Aufgaben für das Kopfrechnen, nebst ausführl. Lehrgang für Kopf- u. schriftl. Rechnen. (In 2 Hftn.) Im Einklang mit der Methodik des Rechenunterrichts und dem Rechenbuch für Stadt- u. Landschulen bearb. 5. Aufl. 1. Hft. gr. 8°. (89 S.) Ebd. 1 Mk.

### Tabellen.

Jordan, W., barometrische Höhentafeln f. Tiefland u. grosse Höhen. gr. 8°. (VIII, 48 S.) Hannover, Helwing. 2 Mk.

Pitz, H., vierstellige Logarithmentafel. 2. Aufl. 12°. (18 u. 2 S.) Giessen, Roth. 40 Pf.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Gauby, Jos., das Rechnen im ersten Schuljahre (Zahlenraum 1—20) 8°. (119 S.) Graz, Wagner. 2 Mk.

Grass, J., die Veranschaulichung beim grundlegenden Rechnen. Erweiterte Ausg. des Schriftchens üb. Gruppen-Zahlbilder. gr. 8<sup>o</sup>. (120 S.) München, Kellerer. 1 Mk. 50 Pf.

Koppe's, K., Arithmetik u. Algebra zum Gebrauche an höheren Unterrichts-Anstalten, neu bearb. v. Jos. Diekmann. 13. Aufl., m. zahlreichen Uebungen u. Aufgaben. 1. Tl. Die 4 Grundrechnungen. — Die linearen Gleichungen. — Die Prozentrechnungen. — Die einfachen quadratischen Gleichungen. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 176 S.) Essen, Baedeker. Geb. 2 Mk.

Loewy, Alfr., über die Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst, mit Anwendungen auf Linien und Kugel-Geometrie. gr. 4<sup>o</sup>. (66 S.) Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Mertens, F., üb. Dirichlet'sche Reihen. gr. 8<sup>o</sup>. (61 S.) Wien, Gerold's Sohn. 1 Mk. 2 Pf.

— üb. das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern. gr. 8<sup>o</sup>. (9 S.) Ebd. 30 Pf.

Metzger, Conr., Lehrbuch der Gleichungen des II. Grades (quadratische Gleichungen) m. 2 u. mehreren Unbekannten. Bearb. nach System Kleyer. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, 160 S. m. 8 Fig.) Stuttgart, Maier. 4 Mk.

Puchberger, Eman., e. allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. 3. Hft. gr. 8<sup>o</sup>. (V, 51 S.) Wien, Gerold. 1 Mk. 6 Pf.

Rogel, Frz., ein neues Recursionsgesetz der Bernoulli'schen Zahlen gr. 8<sup>o</sup>. (4 S.) Prag, Rivnáč. 10 Pf.

Zistl, M., die Gesetze der vier Grund-Rechnungsarten für Mittelschulen u. zum Selbstunterricht. gr. 8<sup>o</sup>. (48 S.) Straubing, Attenkofer. 80 Pf.

### Geometrie.

Behse, W. H., die darstellende Geometrie für Real-, Gewerbe- u. Werkmeisterschulen, sowie zum Selbstunterrichte für Bautechniker u. Mechaniker. Bearb. v. P. Berthold. 1. Tl. Die Projektionslehre. Konstruktion der Durchschnittsfiguren. Windschiefe Flächen. Spirallinien u. Spiralfächen. Schräge Projektion. 5. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 150 S. m. 257 Fig.) Leipzig, Arnd. 3 Mk.

Diesener, H., die Stereometrie. Praktisches Unterrichtsbuch zur leichten Erlernung der Körperberechnung und der Verhältnisse der Linien und Flächen im Raum. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, 87 S. m. 93 Holzschn.) Halle, Hofstetter. 2 Mk

Fischer, J. G., Leitfaden zum Unterricht in der Elementargeometrie. 2. Kurs. 12. Aufl. durchgesehen v. Chr. Vogel. gr. 8<sup>o</sup>. (44 S.) Halle, Gesenius. Kart. 60 Pf.

Kohn, Gust., die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten. gr. 8°. (4 S.) Wien, Gerold's Sohn, 10 Pf.

Küpper, C., über  $K$ -gonale Curven  $C^p_n$  ter Ordnung vom Geschlecht  $p$ . gr. 8°. (16 S.) Prag, Rivnáč. 30 Pf.

Lehrhefte, technische. Mathematik. 4. Hft. Lehrbuch der Geometrie. Hrsg. v. Fritz Meigen. gr. 8°. (IV, 82 S. m. 150 Fig.) Hildburghausen, Pezoldt. 2 Mk.

Lengauer, Jos., die Grundlehren der Stereometrie. Ein Leitfaden f. den Unterricht m. Uebungsaufgaben. gr. 8°. (III, 111 S. m. Fig.) Kempten, Kösel. 1 Mk. 50 Pf.

Milinowski, A., elemtar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. — Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. 2. wohlf. (Titel) Ausg. gr. 8°. (XII, 411 u. X, 135 S. m. 274 Fig.) Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Schultz, E., Leitfaden der Planimetrie für Werkmeisterschulen u. gewerbliche Fortbildungsschulen. II. Tl. gr. 8°. (IV, 65 S. u. 90 Fig.) Essen, Baedeker. Kart. 75 Pf.

Weiler, A., neue Behandlung der Parallelprojektionen u. d. Axonometrie. 2. (Titel) Ausg. gr. 8°. (VII, 210 S. m. 109 Fig.) Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

### Trigonometrie.

Diesener, H., die ebene Trigonometrie und Goniometrie. Praktisches Unterrichtsbuch zur leichtern Erlernung der Benennung der trigometr. Funktionen. 2. Aufl. gr. 8°. (III, 118 S. m. 103 Holzschn.) Halle, Hofstetter. 2 Mk.

Lehrhefte, technische, Mathematik. 5. Hft. Lehrbuch d. Trigonometrie. Hrsg. v. Fritz Meigen. gr. 8°. (III, 59 S.) Hildburghausen, Petzoldt. 1 Mk. 30 Pf.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 73. Zwei Abhandlungen üb. sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphär. Trigonometrie u. Allgemeine sphär. Trigonometrie. 1753 u. 1779. Von Leonh. Euler. Aus dem Französ. u. Lat. übers. u. hrsg. v. E. Hammer. Mit 6 Fig. i. Text. 8°. (65 S.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Bestimmungen über den Anschluss des Nivellements an den preuss. Landeshorizont. Laut Beschluss des Centraldirectoriums der Vermessungen im preuss. Staate v. 12. Jan. 1895. gr. 8°. (8 S. m. 1 Fig.) Berlin, Decker. 75 Pf.

Geometrie, praktische, für gewerbliche Fortbildungs- u. Handwerkerschulen, sowie zum Selbstunterrichte. Bearb. v. e. chemal. Mitglieder mehrerer Prüfungs-Kommissionen. Hierzu e. Schlüssel mit ausführlicher Ausrechnung. Planimetrie. 12<sup>o</sup>. (VIII, 119 S. m. Fig.) Frankfurt a./M., Jäger's Verl. 1 Mk.

Hacksen, W., das preussische Kataster u. seine Verbindung m. dem Grundbuch. Ein Beitrag zum deutschen Vermessungs-, Kataster- u. Grundbuchwesen. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 156 S. m. 12 Abbildgn.) Dessau, Baumann. 5 Mk.

### Mechanik.

Procházka, Frdr., ein Beitrag zur Translations-Bewegung. gr. 8<sup>o</sup>. (13 S. m. 1 Tafel.) Prag, Rivnác. 50 Pf.

Weyer, Ed., Zusatz zur Abhandlung des Hrn. F. Procházka. Ein Beitrag zur Translations-Bewegung. gr. 8<sup>o</sup>. (3 S.) Ebd. 10 Pf.

### Technik.

Abbildungen, mit Prof. Röntgens X-Strahlen aufgenommene u. in Lichtdr. ausgeführte. 14. Blatt. Leipzig, Renger. 7 Mk.; einzeln 60 Pf.

Arnold, E., die Ankerwicklungen u. Ankerkonstruktionen der Gleichstrom-Dynamomaschinen. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XIV, 312 S. m. 335 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 12 Mk.

Bach, C., die Maschinen-Elemente. Ihre Berechnung u. Konstruktion m. Rücksicht auf die neueren Versuche. 5. Aufl. 2 Bde. Lex. 8<sup>o</sup>. (XVIII, 622 S. m. Abbild. u. 53 Taf.) Stuttgart, Cotta. 28 Mk.

Biscan, Wilh., die Dynamo-Maschine. Zum Selbststudium für Mechaniker etc., sowie als Anleitung zur Selbstanfertigung von Dynamomaschinen leicht fasslich dargestellt. Mit 115 Abbildgn und Konstruktionszeichnungen. 4. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (V, 131 S.) Leipzig, Leiner. 2 Mk.

Degen, E., Anleitung zur billigen Verfertigung der nötigsten Apparate des Magnetismus. gr. 8<sup>o</sup>. (18 S.) Bruchsal Ott. 30 Pf.

Eder, Jos. Maria, ausführliches Handbuch der Photographie. (Mit etwa 2000 Holzschn. u. 9 Taf. 2. Aufl. 7. Hft. (2. Bd. 2. Hft.) Das nasse Collodionverfahren, die Ferrotypie u. verwandte Prozesse, sowie Herstellung v. Rasternegativen f. Zwecke d. Autotypie. gr. 8<sup>o</sup>. (VII u. S. 163—365 m. 54 Holzschn.) Halle, Knapp 4 Mk.

Encyklopaedie der Photographie. 18. u. 19. Hft. gr. 8°. Halle, Knapp. 18. Der Silberdruck auf Salzpapier v. A. v. Hubl. (VIII, 88 S.) 3 Mk. — 19. Die Anwendung der Photographie zu militär. Zwecken. Bearb. v. Kiesling. Mit 21 Fig. im Text. (VII, 100 S.) 3 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. 7. Jahrg. 2/3. Hft. Berlin, Springer. à 6 Mk.

Grundsätze für die Berechnung der Materialstärken neuer Dampfkessel (Hamburger Normen 1892) u. Grundsätze für die Prüfung der Materialien zum Bau von Dampfkesseln (Würzburger Normen.) 5. Aufl. gr. 16°. (40 S. m. Fig.) Hamburg, Boysen & Maasch. 50 Pf.

Holzt, Alfr., die Schule des Elektrotechnikers. Lehrhefte für angewandte Elektrizitätslehre. Hrsg. im Vereine mit H. Vieweger u. H. Stapelfeldt. 1. Bd. Lex. 8°. (VIII, 424 S. m. Fig. u. 3 z. Tl. farb. Taf.) Leipzig, Schäfer. 8 Mk. 25 Pf.

—, dass. 11.—13. Hft. Ebd. à 75 Pf.

Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage f. das Bau- u. Maschinenwesen. 1. Thl.: Mechanik starrer Körper. gr. 8°. (VII, 317 S. m. 389 Holzschn.) Hannover, Helwing. 10 Mk.

König, Walth., 14 Photographien m. Röntgen-Strahlen, aufgenommen im physikal. Verein zu Frankfurt a./M. gr. 4°. (10 Taf. m. 4 S. Text. Leipzig, Barth. 8 Mk.

Koppe, Karl, Photogrammetrie u. internationale Wolkenmessung. gr. 8°. (IX, 108 S. m. Abbild. u. 5 Taf.) Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.

Krämer, J., Wechselströme. 2.—4. Lfg. Jena, Costenoble. à 3 Mk.

Lehrhefte, technische. Maschinenbau. 9. Hft. Berechnung u. Konstruktion der Turbinen. Eine kurzgefasste Theorie in elementarer Darstellung mit erläut. Rechnungsbeispielen v. Jos. Kessler. gr. 8°. (III, 48 S. m. 45 Abbildn.) Hildburghausen, Pezoldt. 1 Mk. 70 Pf.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 6.—10. Lfg. Jena, Costenoble. à 3 Mk.

Morwitz, Joach., die Photographie mit Röntgen'schen Strahlen. Mit Einleitung zum Experimentieren auch f. Laien. Nach neuesten wissenschaftl. Versuchen gemeinverständl. dargestellt. gr. 8°. (41 S. m. Abbildg. u. 1 Taf.) Berlin, Dressel. 60 Pf.

Obermayer, A. v., über die Wirkung des Windes auf schwach gewölbte Flächen. Lex. 8°. (13 S. m. 8 Fig.) Wien, Gerold. 70 Pf.

Olbrich, E., das kleine ABC der Photographie. Ein Leit-

faden für Anfänger. Mit 30 Abbildgn. u. 1 Sachregister. 8°. (VII, 113 S.) Düsseldorf, Andrischock. 1 Mk. 20 Pf.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. 5. Aufl. 2. Hft. Halle, Knapp. 2 Mk.

Wunschmann, E., die Röntgen'schen X-Strahlen. Gemeinverständlich dargestellt. 1.—5. Taus. gr. 8°. (31 S. m. 13 Abbilgn.) Berlin, Schneider & Co. 60 Pf.

### Optik, Akustik und Elasticität.

Eder, J. M., u. Ed. Valenta, üb. die Spektren v. Kupfer Silber u. Gold. Imp-4°. (47 S.) Wien, Gerold's Sohn. 3 Mk. 20 Pf.

Exner, Frz. u. E. Haschek, über die ultravioletten Funken-spektra der Elemente. (1. Mitthlg.) (enth. die Spectra v. *Ag, Cu, Mn, Wo, Mo, St, Pd, Ir, Rh.*) Lex. 8°. (54 S.) Ebd. 1 Mk.

Helmholtz, Herm. v., die Lehre v. der Tonempfindung als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. 5. Ausg. gr. 8°. (XXII, 675 S. m. Bildnis u. 66 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 12 Mk.

Landauer, John, die Spektralanalyse. gr. 8°. (VIII, 174 S. m. 4 Holzst. u. 1 Spektral.) Ebd. 4 Mk.

Oberbeck, Ant., üb. Licht u. Leuchten. Antritts-Rede. gr. 8°. (31 S.) Tübingen, Pietscher. 80 Pf.

Röntgen, W. C., über eine neue Art von Strahlen. (Vorläufige Mittheilg.) gr. 8°. (10 S.) Würzburg, Stahel. 60 Pf.

### Erd- und Himmelskunde.

Annalen der schweizerischen meteorologischen Centralanstalt 1893. Der „schweizer. meteorolog. Beobachtungen“ 30. Jahrg. gr. 4°. (X, 251, 52, 40, 8, 11 u. 6 S. m. 9 Kartentaf.) Zürich, Fäsi & Beer. Kart. 18 Mk.

Beobachtungsergebnisse des Repsold'schen Meridiankreises der k. Sternwarte zu München. 1. Tl. Untersuchungen üb. die astronomische Refraction mit e. Bestimmung der Polhöhe v. München u. ihrer Schwankungen von Nov. 1891 bis Oct. 1893 u. e. Katalog der absoluten Declinationen v. 116 Fundamentalsternen v. Jul. Bauschinger. gr. 4°. (S. 42—229.) München, Franz' Verl. 12 Mk.

Bericht des internationalen meteorolog. Comité's u. der internationalen Commission für Wolkenforschung. Versammlung zu Upsala.

1894. Hrsg. v. kgl. preuss. meteorolog. Institut. Lex. 8°. (III, 45 S.) Berlin, Asher & Co. 1 Mk. 50 Pf.

Berndt, Gust., der Föhn. Ein Beitrag zur orograph. Meteorologie u. comparativen Klimatologie. Mit 10 Taf. u. Karten. 2. wohlf. (Titel-) Ausg. Mit e. Vorwort v. Stef. Wanner. gr. 8°. (II, VIII, 346 S.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 6 Mk.

Bronsky, M. et A. Stebnitzky, les positions des étoiles de  $\lambda$  et  $\gamma$  Persei et de leurs environs, déduites de mesures sur deux clichés photographiques. gr. 4°. (133 S.) Leipzig, Voss. 5 Mk.

Dunker, Ed., üb. die Wärme im Inneren der Erde u. ihre möglichst fehlerfreie Ermittlung. (Hrsg. v. Rhard. Brauns). gr. 8°. (X, 242 S. m. 2 Taf.) Stuttgart, Schweizerbart. 5 Mk.

Falb's, Rud., neue Wetterprognosen u. Kalender der kritischen Tage f. 1896. Jan. — Juni. 16°. (61 S.) Berlin, Steinitz. 1 Mk.

Foerster, W., u. P. Lehmann, die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Theils des kgl. preuss. Normalkalenders f. 1897. Nebst e. allgem. statist. Beitrage v. E. Blenck. gr. 8°. (V, 163 S.) Berlin, statist. Bureau. 5 Mk.

Gockei, Alb., das Gewitter. gr. 8°. (120 S.) Köln, Bachem. 1 Mk. 80 Pf.

Halm, J., Versuch einer theoretischen Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur. gr. 4°. (53 S.) Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 2. u. 3. Lfg. Breslau, Trewendt. à 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch d. Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik. Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 6. Jahrg. 1895. Mit 5 Lichtdr.- u. Chromotafeln. gr. 8°. (IX, 376 S.) Leipzig, Mayer. Kart. 7 Mk.

-- , Berliner astronomisches für 1898 m. Angaben f. die Opposition der Planeten (1) — (401) f. 1896. Hrs. v. Rechen-Institute der kgl. Sternwarte zu Berlin unter stellvertr. Verantwortlichkeit v. P. Lehmann. gr. 8°. (VIII, 480; 34, 8 u. 9 S.) Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

— , deutsches meteorologisches f. 1894. Beobachtungs-System der deutschen Seewarte. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. an 10 Stationen II. Ordng. u. an 45 Signalstellen, sowie stündl. Aufzeichnungen an 2 Normal-Beobachtungs-Stationen. XVII. Jahrg. Hrsg. v. d. Direktion der Seewarte. Imp.-4°. (VIII, 142 S.) Hamburg, Friederichsen & Co. 13 M.

— , dass. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mittheilungen der mit dem kgl. statist. Landes-Amte verbundenen

meteorolog. Centralstation. Bearb. v. L. Mack u. L. Mayer. gr. 4°. (74 S. m. 2 Karten.) Stuttgart, Metzler. 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch für die neuen Wetterregeln. Beobachtgn. u. Prognosen f. d. Jahr . . . 1. u. 2. Semester. 2. Aufl. gr. 4°. (68 u. 64 S.) Göttingen, Lambrecht. 2 Mk.

Kayser, E., Wolkenhöhenmessungen. gr. 8°. (68 S. m. 5 Taf.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Lambrecht, Wilh., Wetter-Regeln beim Gebrauche des Lambrecht'schen Barometers. schmal Fol. (1 Bl.) Göttingen, Lambrecht. 50 Pf.

Littrow, Wunder des Himmels. 8. Aufl. 15. — 27. Lfg. Berlin, Dümmler's Vlg. à 40 Pf.

Mazelle, Ed., Beitrag zur Bestimmung des tägl. Ganges der Veränderlichkeit der Lufttemperatur. gr. 8°. (68 S.) Wien, Gerold's Sohn. 1 Mk. 20 Pf.

Oerter, mittlere v. 622 Sternen u. scheinbare Oerter v. 450 Sternen nebst Reduktions-Tafeln f. d. J. 1898 u. e. Anh., enth. mittlere Oerter v. 303 südl. Sternen. f. 1898, O. gr. 8°. (183 u. 8 S.) Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Peter, Bruno, Beobachtungen am sechszölligen Repsold'schen Heliumeter der Leipziger Sternwarte. Lex.-8°. (140 S. m. 4 Fig. u. 1 Doppeltaf.) Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Plassmann, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne. 4. Tl. Progr. gr. 8°. (52 S. m. 1 Taf.) Warendorf, Schnell. 1 Mk.

Riem, Joh., über die Bahn des grossen Kometen 1881 III (Telbut). Imp.-4°. (207 S.) Leipzig, Engelmann. 15 Mk.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. d. Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 35—37. gr. 8°. Berlin, H. Paetel. — 35. Wie der Zwölfzöller der Urania entstand. Von H. Homann. (51 S. m. Abbildgn.) 80 Pf. — 36. Wissenschaftliche Ballonfahrten. Von R. Süring. (27 S. m. Abbildgn. u. 1 Taf.) 60 Pf. — 37. Die Milchstrasse. Ein opt. Phänomen u. ein kosm. Problem. Von Heinr. Samter. (48 S. m. Abbildgn.) 1 Mk.

Schmidt, Adf., Mitteilungen über e. neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. gr. 4°. (66 S.) München, Franz' Verl. 2 Mk.

Schönrock, A., die Bewölkung des russischen Reiches. gr. 4°. (III, II, 74 u. CCXXI S. m. 1 Taf. u. 7 Karten.) Leipzig, Voss. 11 Mk. 25 Pf.

Schreiber, Paul, das Klima des Königr. Sachsen. Amtliche Publication des kgl. sächs. meteorol. Instituts. III. Hft. Monats- u. Jahresmittel der wichtigsten klimatischen Elemente für den Zeitraum 1864—1890. (Vieljährige Mittel, Extreme, Schwankgn. u. Genauigkeit.) Ergebnisse der Verdunstungsbeobachtgn. f. den Zeitraum

1883–1893. Ergebnisse der Beobachtgn. auf Thürmen f. den Zeitraum 1888–1893. Imp.-4°. (III, 65 S.) Chemnitz, Bülz. 4 Mk.

Sresnewskij, B., Cyclonenbahnen in Russland f. d. J. 1887 bis 1889. gr. 4°. (78 S. m. 1 Taf. u. 12 Karten.) Leipzig, Voss. 6 Mk.

Veröffentlichungen der kgl. Sternwarte zu Bonn. Hrsg. v. Frdr. Küstner. Nr. 1. Beobachtungen von Nebelflecken, angestellt am 6zöll. Refractor der Bonner Sternwarte v. C. Mönningmeyer. gr. 8°. (97 S.) Bonn, Cohen. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 30. Jahrg. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Wild, H., das Konstantinow'sche meteorologische u. magnetische Observatorium in Pawlowsk. Mit dem Portrait des Grossfürsten Konstantin Nikolajewitsch, 12 Taf. u. 7 Holzschn. gr. 4°. (133 S.) Leipzig, Voss. 7 Mk. 50 Pf.

#### Nautik.

Jahrbuch des k. k. hydrographischen Central-Bureau. Hydrographischer Dienst in Oesterreich. 1. Jahrg. 1893. Fol. (VIII, 562 S. m. 1 Karte.) Wien, Braumüller. 10 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale d. Erde. 1896. 25. Jahrg. 8. Aufl. gr. 8°. (XXIII, 400 S u. Nachträge 16 Bl.) Bremen, Heinsius. Geb. 7 Mk. 50 Pf.; Nachträge allein 50 Pf.

—, dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 25. Jahrg. 8. Aufl. gr. 8°. (XI, 128 S. u. Nachträge 9 Bl.) Ebd. 3 Mk.; Nachträge allein 50 Pf.

Müller, W., die Schiffsmaschinen, ihre Konstruktionsprinzipien, sowie ihre Entwicklung u. Anordnung. Nebst e. Anh.: Die Indikatoren u. Indikatordiagramme u. gesetzl. Bestimmungen, betr. Anlage, Betrieb u. Untersuchg. v. Schiffsdampfkesseln. (Auszug). 2. Aufl. 8°. (X, 359 S. m. 150 Abbildgn.) Braunschweig, Vieweg. 5 Mk.

Verzeichniss der Leuchtfeuer aller Meere. Hrsg. v. Reichs-Marine-Amt. 1. – 8. Hft. Abgeschlossen am 1. Dez. 1895. (Mit je 1 farb. Taf.) hoch 4°. Berlin, Mittler & Sohn. 6 Mk.

— der Zeitsignal-Stationen aller Meere. Hrsg. v. dems. gr. 8°. (40 S.) Ebd. 50 Pf.

Von See nach Lübeck. Ein Wegweiser für Seeschiffer und Steuerleute, mit einer Entfernungstabelle u. 3 Kartenblättern. Hrsg. auf Veranlassung der Handelskammer. gr. 8°. (V, 80 S.) Lübeck, Schmersahl. 1 Mk. 80 Pf.

## Physik.

Boltzmann, Ludw., Vorlesungen über Gastheorie. 1. Thl. Theorie der Gase mit einatomigen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglängen verschwinden. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 204 S.) Leipzig, Barth. 6 Mk.

Borchardt, B., die Röntgen'sche Entdeckung. Allgemein verständlich dargestellt. Mit 10 Illustr. u. e. nach dem Röntgen'schen Verfahren aufgenommenen Photographie. 12<sup>o</sup>. (62 S.) Berlin, Baake. 30 Pf.

Drude, P., üb. die anomale elektrische Dispersion von Flüssigkeiten. Lex.-8<sup>o</sup>. (58 S. m. 2 Fig. u. 1 Taf.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Forschungen in der Agrikulturphysik. 18. Bd. 3.—5. Hft. Heidelberg, Winter. 15 Mk.

Geitler, Jos., Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen. (II. Mitthlg.) gr. 8<sup>o</sup>. (20 S. m. 10 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 60 Pf.

Glajebrook, R. T., Grundriss der Wärme für Studierende u. Schüler. Deutsch v. Otto Schönrock. 8<sup>o</sup>. (II, 280 S. m. 88 Fig.) Berlin, Calvary & Co. Geb. 3 Mk. 60 Pf.

Handbuch d. Physik. 27.—29. Lfg. Breslau, Trewendt. à 3 Mk. 60 Pf.

Hoppe, Osc., merkwürdige Wege u. Wirkungen des Blitzstrahles welcher am 20. Juni 1895 die Grube „Silbersegen“ bei Clausthal traf. Imp.-4<sup>o</sup>. (7 S. m. 3 Fig.) Leipzig, Engelmann. 50 Pf.

Kaiser, Ludw., über die internationalen absoluten, insbesondere die magnetischen und die elektrischen Maasse. Vorträge. gr. 8<sup>o</sup>. (57 S.) Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk. 60 Pf.

Käuffer, Paul, Energie. — Arbeit. — Schnelles Arbeiten ist teurer als langsames Arbeiten. — Die Kräfte-diagramme. — Die spezif. Wärme der Luft (der Gase). — Der Vorgang, wenn Luft in Folge v. Erwärmg. sich auf grösseres Volumen ausdehnt. — „Energie“ im Allgemeinen. Lex.-8<sup>o</sup>. (50 S. m. Fig.) Mainz, Zabern. 1 Mk.

Krämer, Jos., die einfachen u. mehrphasigen elektrischen Wechselströme, beziehungsweise: Der Drehstrom, seine Erzeugung u. Anwendung in der Praxis. Mit ca. 800 Abbildgn. im Text u. 9 Tafeln. (In 5 Lfrgn.) 1. Lfg. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII u. S. 1—80.) Jena, Costenoble. 3 Mk.

Lang, Vikt., Interferenzversuch m. elektr. Wellen. gr. 8<sup>o</sup>, (14 S. m. 3 Fig.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Marcuse, Adf., die atmosphärische Luft. Eine allgemeine

Darstellung ihres Wesens, ihrer Eigenschaften u. ihrer Bedeutung. gr. 8°. (77 S.) Berlin, Friedländer. 2 Mk.

Mewes, Rud., Licht-, Elektrizitäts- u. X-Strahlen. Ein Beitrag zur Erklärg. der Röntgenschen Strahlen. gr. 8°. (52 S. m. Fig.) Berlin, Fischer's technol. Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Müller, Hugo, Roentgen's X-Strahlen. Gemeinverständlich dargestellt. Mit 4 Taf. aufgenommen im elektrotechn. Laboratorium der kgl. techn. Hochschule zu Berlin v. Slaby u. Klingenberg u. 5 Fig. im Text. 1. — 4. Aufl. gr. 8. (32 S.) Berlin, Sigismund. 75 Pf.

Richter, Ign., Lehrbuch der Physik für höhere Handelslehranstalten. gr. 8°. (X, 226 S. m. 281 Holzsch. u. 3 Taf.). Wien, Hölder. Geb. 3 Mk. 40 Pf.

Riecke, Ed., Lehrbuch der Experimentalphysik zu eigenem Studium u. zum Gebrauche bei Vorlesungen. (In 2 Bdn.). 1. Bd. Mechanik, Akustik, Optik. gr. 8°. (XVI, 418 S. mit 368 Fig.) Leipzig, Veit & Co. 8 Mk.

Schwartze, Th., Grundgesetze der Molekularphysik. gr. 8°. (XIV, 209 S. m. 25 Abb.) Leipzig, Weber. 4 Mk.

Warburg, Emil, Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studierende. Mit 104 Orig.-Abbildgn. im Texte. 2. Aufl. gr. 8°. (1. Hälfte. XX, 208 S.) Freiburg i. B., Mohr. 7 Mk.

Weber, L., Repetitorium der Experimentalphysik f. Studierende auf Hochschulen. Mit besond. Berücksichtigung der Mediziner und Pharmaceuten. gr. 8°. (VIII, 256 S. m. 121 Abbildgn.) München, Wolff. 4 Mk. 20 Pf.

Wüllner, Adph., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Bd.: Die Lehre v. der Wärme. 5. Aufl. gr. 8°. (XI, 935 S. m. 131 Fig.) Leipzig, Teubner. 12 Mk.

#### Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 37. Bd. (Mathemat.-physik. Classe. 22. Bd.). Lex.-8°. (VII, 430 S. m. 32 Abbilgn. u. 12 Taf.) Leipzig, Hirzel. 20 Mk.

Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 40. Bd. Vom J. 1894 u. 1895. 1. Abtlg. Mathematisch-physikalische Classe. gr. 4°. (III, 39; 37 u. 68 S. m. 5 Fig. u. 8 Taf.) Göttingen, Dieterich. 18 Mk. 60 Pf.

Berichte der sächs. Gesellschaft d. Wiss. Math.-phys. Classe. 1895. IV. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 6. Hft. Red. v. Ahlborn, Sieveking u. Schröder. gr. 8°. (S. 223—272.) Leipzig, Teubner. 80 Pf.

Ostwald's, Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 67, 69–71. 8°. Leipzig, Engelmann. Kart. 67. Entwurf e. Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordng. v. A. Göpel. (1847). Hrsg. v. A. Weber. Aus dem Latein. übers. v. A. Witting. (60 S.) 1 Mk. — 69. Ueber Faraday's Kraftlinien. Von James Clerk Maxwell. (1855/56. Maxw. scient. pap. vol. 1 p. 155) Hrsg. v. L. Boltzmann. (130 S.) 2 Mk. — 70. Magnetische Polarisation der Metalle u. Erze durch Temperatur-Differenz. Von Th. J. Seebeck. (1822–23) Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. 120 S. m. 33 Textfig. 2 Mk. — 71. Untersuchungen üb. die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 \cdot \dots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 \cdot \dots + \dots$$

Von N. H. Abel. (1826.) Hrsg. v. A. Wangerin. (46 S.) 1 Mk.

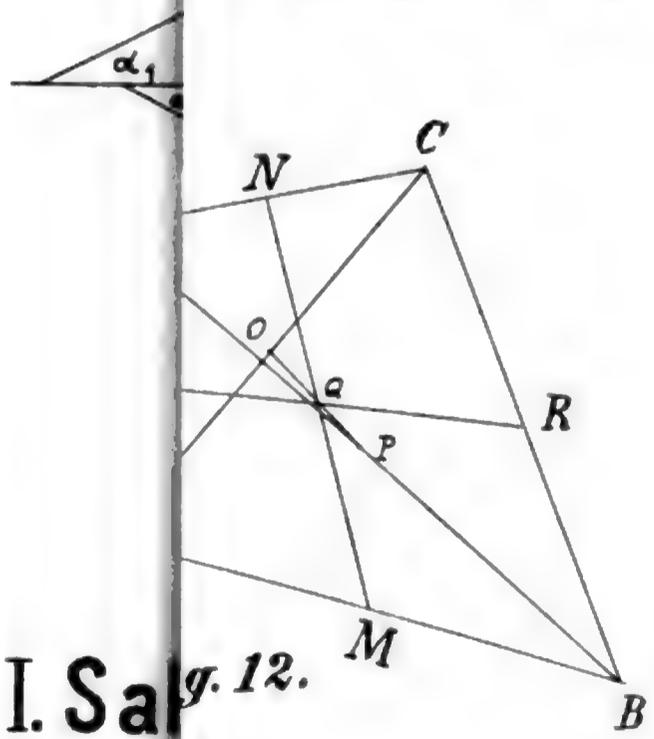
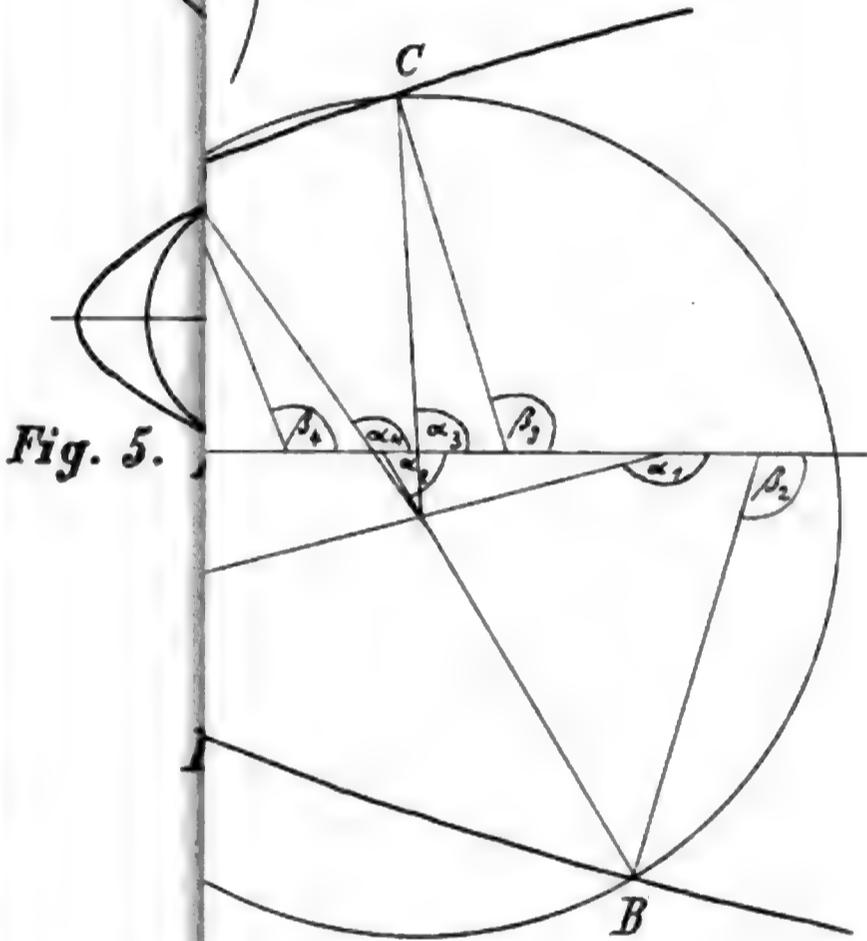
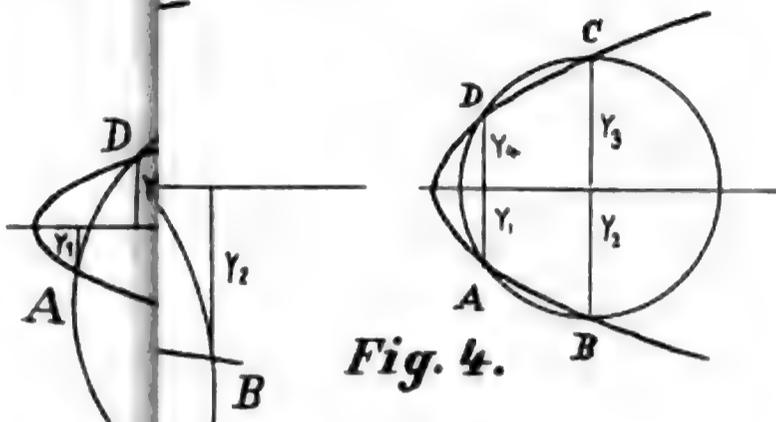
Pflücker's, Jul., gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen hrsg. v. A. Schoenflies u. Fr. Pockels. (In 2 Bdn.) 2. Bd. Physikalische Abhandlgn. Hrsg. v. Fr. Pockels. gr. 8°. (XVIII, 834 S. m. 78 Fig. u. 9 Taf.) Leipzig, Teubner. 30 Mk.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1896. ca. 30 Nrn. Lex.-8°. Wien, Gerold's Sohn. 3 Mk.

Sitzungsberichte, Münchener. Mathemat. Classe. 1895. 2. Hft. München, Franz' Verl. 1 Mk. 20 Pf.

— Wiener. Mathem.-naturw. Classe. Wien, Gerold's Sohn. Abth. I 104. Bd. 3 u. 4. Hft. 4 Mk. 50 Pf. — Abth. IIa. 104. Bd. 3.–6. Hft. 7 Mk. — Abth. IIb 104. Bd. 5.–7. Hft. 3 Mk. 20 Pf. — Abth. III 104. Bd. 1.–5. Hft. 2 Mk. 60 Pf.

Wolf, R., Taschenbuch f. Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie. 6., durch A. Wolfer vollend. Aufl. Mit 32 Tab. u. vielen Holzschn. 4. u. 5. Lfg. 12°. (XI–XXIX u. S. 241–388.) Zürich, Schulthess. à 1 Mk 20 Pf. kplt geb. 7 Mk.



I. Sa. g. 12.

# Litterarischer Bericht

LVIII.

---

## Sammlungen.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. Erster — zweiter — dritter Lehrgang. Freiburg i. Br. 1896. Herder. 242 S.

Durch Uebungen, Ausrechnung von Zahlenbeispielen und Beantwortung von Fragen, werden die Schüler, mit Voraussetzung der 4 Species in dekadischen Zahlen, ohne direct ausgesprochene Belehrung zum Verständniss und zur Aneignung der elementarsten für die Arithmetik notwendigen Begriffe geführt, der Brüche, der Potenzen, des Gebrauchs der Buchstaben, der Gleichungen u. s. w. so dass die Reihenfolge der Aufgaben einer beständig fortschreitenden Höhe des Standpunktes der Entwicklung entspricht. Ausgeschlossen sind: Negative, Irrationale, Potenzwurzeln, höhere Gleichungen. Die numerischen Resultate sind stets angegeben. H.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. Von Dr. Friedrich Reidt, Professor am Gymnasium in Hamm. I. Teil: Trigonometrie. Vierte Auflage. Neu bearbeitet von A. Mach, Professor am Gymnasium in Kreuznach. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 250 S.

Auflösungen und Aufgaben in der Sammlung (s. vorstehenden Titel) 88 S.

Die Aufgaben sind zum Teil numerische in ganzen Zahlen, zum Teil algebraische in Buchstaben, zum Teil bestimmt für den Gebrauch siebenstelliger Tafeln, der Folge nach gehörig zur Goniometrie, zur ebenen, dann zur sphärischen Trigonometrie, und zwar erst am rechtwinkligen, dann am beliebigen Dreieck. H.

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. Adolf Hochheim, Professor. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. A. Aufgaben. — B. Auflösungen. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 86 + 106 S.

Die Aufgaben dieses 1. Hefts sind darauf gerichtet, die gebräuchlichen Rechnungsformen, als gegebene Doctrin, einzuüben. Die analytische Bedeutung und Bestimmung dieser Rechnungsformen für Untersuchung von Problemen konnte hier nicht wol zutage treten. Da letzterer Gesichtspunkt hier nicht in Betracht kam, so sind auch die aus der neuern synthetischen Geometrie stammenden Rechnungsformen berücksichtigt worden, was namentlich da, wo das Buch für die Schule in Anwendung kommt, zweckmässig sei mag. Viel Sorgfalt ist darauf verwandt, das Erlernen zu erleichtern. Die „Auflösungen“ geben nicht nur Resultate, sondern auch die Weg der Ausführung der Forderungen. H.

Uebungsbuch zur Algebra. Von Adolf Sickenberger, k. Gymnasialprofessor und Director der Luitpold-Kreisrealschule zu München. Erste Abteilung. Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten einschliesslich der linearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Zweite Auflage. München 1894. Theodor Ackermann. 106 S.

Die 1. Auflage ist im 35. litterarischen Bericht Seite 31 besprochen; in der 2ten ist die Zahl der Uebungsbeispiele etwas vermehrt worden. H.

Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Von Dr. W. Láska. Mit drei Tafeln. Braunschweig 1894. Vieweg und Sohn. 1671 S.

Eine so umfassende Formelsammlung ist gewiss noch nie herausgegeben worden. Glücklicherweise tritt auch gleich dieser erste Versuch der Bearbeitung eines solchen Werkes mit guter Wahl der

Form und Einrichtung, die bei der Heterogenität der Teile nicht überall leicht war, auf. Sehr zu billigen ist es, dass es die Grenzen des Theoretisch-wissenschaftlichen nicht überschreitet, namentlich die Technik, wie auch andererseits die Schulmathematik und das grenzenlose Gebiet der Configurationen, erstere mit Hinweis auf die reichlich vorhandenen Sammlungen, ausschliesst. Numerische Tabellen sind in geringer Ausdehnung mit aufgenommen; diese hätten, da der Titel des Buchs sie nicht verspricht, auch wegfallen können. Auf Einzelnes einzugehen lässt die Mannigfaltigkeit des Stoffes nicht wol zu. H.

Planimetrische Constructionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet von E. R. Müller. Dritte Auflage. Oldenburg 1894. Gerhard Stalling. 68 S.

Die erste Auflage ist im 13. litt. Bericht, Seite 10, die zweite im 26. l. B. Seite 15 besprochen. Sichtlich ist das Bestreben, den minder begabten Schülern den Anfang, wo nur Ausführung, nicht Ueberlegung verlangt wird, leicht und ihren Abstand von der Begabteren weniger fühlbar zu machen, um sie alsdann allmählich durch Angabe der Analysis zum Suchen der Lösung zu ermutigen.

H.

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, niederen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der höheren Analysis. Von O. Th. Bürklen, Professor am Realllyceum in Schw. Gmünd. Mit 20 Figuren. Leipzig 1896. G. J. Göschen. 211 S.

Die formulirten Resultate der Principien der genannten Doctrinen werden in befriedigender Vollständigkeit in natürlicher Ordnung zusammengestellt. H.

Sammlung von Sätzen und Aufgaben der systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Curs für die Hand des Schülers bearbeitet von Dr. K. Fink, Rector an der Realanstalt zu Tübingen. Mit 10 Figurentafeln und 84 Blättern für die darstellend-geometrischen Uebungen gezeichnet vom Reallehrer Auer in Tübingen. Tübingen 1896. H. Laupp. 108 S.

Die Aufgaben sind sehr mannigfaltiger Art, stets nur darauf bedacht, die Schüler zum Denken und Beobachten zu bringen, ohne Sorge darum, ob sie jede Frage definitiv beantworten können. Diese Fragen sind manchmal ziemlich unbestimmt und verlangen nur Aeusserung oder beliebige Bemerkung. Namentlich aber werden dadurch alle Eigenschaften und Beziehungen der betrachteten einfachen Gebilde erschöpfend zum Bewusstsein gebracht. H.

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von Dr. Ernst Bardey. Vierte Auflage. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 378 S.

Das Vorliegende ist eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben zur Uebung im algebraischen Rechnen, Aufgaben, die auf Gleichungen 2. Grades führen. Gegeben sind Gleichungen der mannigfaltigsten algebraischen Form; die Arbeit besteht in der Reduction auf die Normalform, die sich nicht immer direct im 2. Grade ergibt, aber entweder durch Ausscheidung einer leicht erkennbaren Wurzel auf 2. Grad erniedrigt oder in eine Succession quadratischer Gleichungen zerlegt werden kann. Die Aufgaben dieser Art bilden zwei besondere Abschnitte. Für Erwerbung aller zustatten kommenden Kenntnisse ist durch vorausgehende ausführliche Belehrung in bester Weise gesorgt. Die Resultate stehen hinter den einzelnen Aufgaben.

H.

Recueil de problèmes de mathématiques. Algèbre, théorie des nombres, probabilités, géométrie de situation. — Géométrie du triangle. A' l'étude des classes de mathématiques spéciales. Par C. A. Laisant, Docteur ès sciences, Répétiteur à l'École Polytechnique. Paris 1895. Gauthier-Villars et fils. 264 S.

Es werden hier die französisch geschriebenen Bearbeitungen der Probleme aus den genannten Zweigen der Mathematik mit Angabe des Autors und der Zeitschrift zusammen gestellt, welche seit 1842, d. i. seit der Gründung der *Nouvelles Annales de Mathématiques* erschienen sind.

H.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gehalten an der Faculté

des sciences zu Paris. Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 416 S.

Das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung wird schrittweise, auch entsprechend dem geschichtlichen Entwicklungsgang, in folgenden Abschnitten zur allgemeinen und vollständigen Lösung geführt: Allgemeine Sätze über die Existenz der Integrale; lineare Gleichungen, vollständige Systeme; lineare totale Differentialgleichungen; Gleichungen von beliebiger Form, Allgemeines, Methode von Lagrange und Charpit; Methode von Cauchy, Charakteristiken; Definition der Ausdrücke  $(\psi, \varphi)$  und  $[\psi, \varphi]$ , erste Methode von Jacobi; Methode von Jacobi und Mayer; Methode von Lie; geometrische Untersuchung der Gleichungen mit 3 Variablen, Integralcurven, singuläre Lösungen; allgemeine Theorie von Lie; Berührungstransformationen; Theorie der Gruppe, allgemeine Integrationsmethode. H.

Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialgleichung, Algebra und Functionentheorie. Von Dr. Otto Biermann, o. ö. Professor an der technischen Hochschule zu Brünn. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 381 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende: Grundlagen der Arithmetik; über Functionen reeller Variablen; Arithmetik complexer Grössen; Theorie der algebraischen Gleichungen; die rationalen Functionen; Potenzreihen; die elementaren Functionen. Durch diese also soll das Studium der höheren Mathematik vorbereitet werden. Schon öfter ist in der Tat neuerdings die unvernünftige Behauptung laut geworden, zwischen der Schulmathematik und den Vorträgen der höhern Mathematik wäre infolge der Fortschritte (!) der Wissenschaft eine Kluft entstanden. Offenbar würde dann allein die Vortragenden ein Tadel treffen; der Fortschritt kann den Anfang nicht beeinflussen. Die Differentialgleichung fusst, bei strengster Begründung ihrer Principien nur auf ganz elementare Lehren, und sie ist wieder in hohem Grade förderlich für die höhere Algebra und Functionslehre. Lässt hier der Vortrag Schwierigkeiten bestehen, so ist die Methode unvernünftig oder mangelhaft: zu den Mängeln gehört gewöhnlich, dass über Begriff und Theorie des Unendlichen keine Auskunft erteilt wird, was auch vom gegenwärtigen Buche gilt. Nimmt man nun aber auch an, dass wirklich eine Lücke vorhanden ist, die den Studirenden das Verständniss erschwert, und fragt, ob das Dargebotene ihnen die vermisste Auf-

klärung geben wird, so mögen diejenigen entscheiden, die das Buch zu eigener Belehrung gebrauchen wollen. U. E. ist es nicht der Fall. An Stelle dessen, was von Natur einfach ist, werden complirte neue Begriffe geschaffen (wahrscheinlich nicht vom Verfasser, sondern gestützt auf gewisse Autoritäten) und dem Leser so vorgeführt, als wäre es zur Gründlichkeit notwendig. Das Ganze in seinem grossen Umfang, wenn wirklich der Leser glaubt, dass er alles dies lernen müsste, ehe er mit der höheren Mathematik anfangen könnte, ist so abschreckend vom Studium als möglich.

Hoppe.

Sophus Lie, Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Mit geometrischer und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers, Privatdocent an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. Leipzig 1893. B. G. Teubner. 310 S.

Die Abteilungen des Buchs haben einzeln folgenden Inhalt: Die allgemeine projective Gruppe der Ebene und einige ihrer Untergruppen; Theorie der projectiven Gruppen in der Ebene; die Gruppen der Ebene; die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie; lineare homogene Gruppen und complexe Zahlen; einige Anwendungen der Gruppentheorie. Erklärung der Begriffe wird genügend gegeben.

H.

Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1891. Friedrich Foerster. 133 S.

Die Schrift handelt über folgende Themata: Symmetrische Functionen; Form der Wurzel; Reduction der Gleichung; Auflösung der Gleichung 2ten, 3ten, 4ten Grades; Gleichung 5. Grades; die 2te Bedingung der Lösbarkeit; Unlösbarkeit der Gleichung 5ten und höheren Grades; die unvollständigen Gleichungen; die trinomischen Gleichungen; die binomischen Gleichungen; Identität und Gleichheit; die Vielwertigkeit der Wurzel als Folge der Unbestimmtheit der Coefficienten; Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten; die identische Erfüllung einer Gleichung; der vollständige Ausdruck der Wurzel; Auflösung der Gleichung durch convergente Reihen; die algebraische Irrationalzahl; die transcendente Irrationalzahl; Nachweis der  $n$  Wurzeln einer Gleichung  $n$ ten Grades. H.

Leçons sur la résolution algébrique des équations. Par H. Vogt, ancien élève de l'École Normale supérieure, Professeur adjoint à la Faculté des sciences de Nancy. Avec une préface de M. Jules Tannery, Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure. Paris 1895. Nony et Cie. 201 S.

Die Gegenstände des Werks sind folgende: Substitutionsgruppen; Untergruppen, einfache und zusammengesetzte Gruppen; rationale Functionen mehrerer unabhängigen Variablen; algebraische Relationen zwischen ihnen; cyklische und metacyklische Functionen mehrerer Variablen; Rationalitätsbereich, Reducirbarkeit der ganzen Functionen; rationale Functionen der Wurzeln einer Gleichung, Resolventen, Gruppe einer algebraischen Gleichung; Gleichungen 2., 3. und 4. Grades, Lagrange's Untersuchungen; über die algebraische Auflösung der Gleichungen; über die abel'schen Gleichungen; über die Gleichungen der Kreisteilung; über die nicht reducibaren auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad; über die Gruppen einer Gleichung. H.

Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre de deux variables indépendantes. Par E. Goursat, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. Tome I. Problème de Cauchy. — Caractéristiques. — Intégrales intermédiaires. Paris 1896. A. Hermann. 226 S.

Es wird zuerst eine besondere Classe von Gleichungen untersucht; dann folgt ein Problem von Cauchy, dann die Gleichungen von Mouge und Ampère, dann verschiedene Anwendungen, dann die allgemeine Theorie der Charakteristiken. H.

Traité d'analyse. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome III. Des singularités des intégrales des équations différentielles, étude du cas où la variable reste réelle, des courbes définies par des équations différentielles, équations linéaires, analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 568 S.

Der I. Band ist besprochen im 43 litt. Bericht S. 31, der II. B. im 47. I. B. 29. Der III. Band enthält: Allgemeines über die Singularitäten der Differentialgleichungen; gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung zu 2 Variablen; singuläre Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen; gewisse Classen von Differentialgleichungen; verschiedene Methoden successiver Näherung; ge-

wisse lineare Gleichungen 2. Ordnung; Untersuchung einiger nicht linearer Gleichungen; periodische und asymptotische Lösungen gewisser Differentialgleichungen; singuläre Punkte der reellen Integrale der Gleichungen 1. Ordnung; Form der Curven, welche eine Differentialgleichung 1. Ordnung und 1. Grades befriedigen; Allgemeines über die singulären Punkte der linearen Differentialgleichungen; hypergeometrische Functionen; einförmige, aus der hypergeometrischen Differentialgleichung abgeleiteten Transcendenten; gewisse lineare, im Unendlichen irreguläre Differentialgleichungen; einige Classen integrierbarer linearer Differentialgleichungen; Theorie der Substitutionen und der algebraischen Gleichungen; Analogien zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Theorie der algebraischen Gleichungen. H.

Einführung in die Functionentheorie. Eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet von Dr. W. Láska. Stuttgart 1894. Julius Maier. 55 S.

Die Teile des Werkes sind folgende: Grundbegriffe, namentlich der Irrationalzahl nach Dedekind; die geschichtliche Entwicklung des Functionsbegriffs; Riemann-Cauchy's Functionentheorie; Theorie der complexen Integrale; Fortsetzung der Functionentheorie nach Riemann's Anschauung; rationale Functionen; Theorie der Reihen; die Reihenfortsetzung; Begriff der Functionen nach Weierstrass, die Differentiation; Darstellung der eindeutigen Functionen. H.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery, Sous-Directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure, Jules Molk, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome II. Calcul différentiel (II<sup>e</sup> partie). Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 299 S.

Der I. Band ist im 47. litt. Bericht S. 28 besprochen. Der II. Band handelt von den Jacobi'schen Functionen  $\wp$  und Weierstrass'schen Functionen  $\sigma$  in der Reihenform, dann deren Quotienten, welche die Inversen elliptischer Integrale ergeben. Hierauf folgt eine Zusammenstellung von Formeln. H.

Faculté des Sciences de Lille. Cours d'analyse. Professe par M. Demartres et rédigé par M. E. Lemaire. Troisième partie. Équations différentielles et aux dérivées partielles. Paris 1896. A. Hermann. 4<sup>o</sup>. 156 S.

Der 3. Teil des Werkes handelt von der Integration der Differentialgleichungen. Er enthält nach einander: Allgemeines über die Systeme der Differentialgleichungen; Integrationsverfahren; Gleichungen höherer Ordnung, System von Differentialgleichungen; Gleichungen mit partiellen Derivirten; Variationsrechnung H.

Traité d'algèbre. Compléments. Par H. Laurent, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Quatrième partie: Théorie des polynomes à plusieurs variables. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils. 53 S.

Die in diesem 4. Teile behandelten Sätze über Polynome in mehreren Variabeln sind nicht einfach genug, um sie anzuführen oder zu charakterisiren. Wir müssen daher auf die Schrift selbst verweisen. H.

Zur Formation quadratischer Gleichungen. Von Dr. Ernst Bardey. Zweite, unveränderte Ausgabe. Leipzig 1894. B. G. Teubner. 390 S.

Aus dem unbegrenzten Bereiche möglicher Transformationen algebraischer Gleichungen in äquivalente finden sich hier in reichlicher Anzahl solche ausgesucht, die für sich Interesse bieten. An die Transformationen einer Gleichung schliessen sich auch sogleich Verbindungen mehrerer nach dem Princip: Gleiche Operationen an Gleichem vollzogen geben Gleiches — mit dem Ergebniss im erstern Falle einfach einander identischer, im letztern zerlegbarer Gleichungen. Jedes solche Ergebniss wird dann als Lehrsatz ausgesprochen, ohne Zweifel zu dem Zwecke, dass der Schüler die Beziehungen der Gleichungen im Gedächtniss behalten und dadurch einen freieren Ueberblick erwerben soll. Im Grunde wird keine neue Kenntniss gewonnen; denn dieselben Identitäten und Zerlegungen findet man auch, wo die Auflösung das Ziel ist, nämlich auf dem gesicherten analytischen Wege von der Vielheit zur Einheit, d. i. zur normalen Gleichungsform. Hier ist der umgekehrte Weg gewählt, der synthetische von der Einheit zur Vielheit; man geht in dieselbe Erkenntniss, nur zur andern Tür, mit anderer Perspective hinein.

Hoppe.

Theorems in the calculus of enlargement. A method for calculating simultaneously all the roots of an equation. By Emory Maclintock. Amer. Journ. XVII. 1. 2.

Der Verfasser ist im Besitz einer Methode, alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung gleichzeitig zu finden, wie es scheint, entwickelt in unendliche Reihen. Er teilt sie aber nicht mit; denn in der ganzen Schrift ist nirgends ausgesprochen, worin sie besteht. Vielmehr zieht er, wie er sagt, das „praktische“ Verfahren vor, dem Leser die Auflösung mehrerer specieller Gleichungen vorzurechnen. In jedem solchen Beispiel findet man eine Reihe Gleichungen mit wenigen Begleitworten, die mancherlei sagen, nur nicht, wie sie gewonnen sind, und was sie bedeuten. Die Methode soll also Geheimniss des Autors bleiben.

Hoppe.

---

## G e o m e t r i e.

Cours de géométrie analytique. A l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement. Par B. Niewenglowski, Docteur ès Sciences, Ancien Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Inspecteur de l'Académie de Paris. Tome III. Géométrie dans l'espace. Avec une note sur les transformations en géométrie. Par Émile Borel, Maître de Conférences à la Faculté de Lille. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 572 S.

Obgleich sich das Hauptgewicht auf Specialien und Uebungen gelegt findet, so sind doch die allgemeinen Principien der analytischen Geometrie nicht ganz ohne Berücksichtigung übergangen, sondern bilden den Anfang. Von der linearen Geometrie und der Curventheorie, welcher letztern unter den 31 Capiteln wenigstens eins gewidmet ist, sind die meisten Elementarbegriffe und Relationen hergeleitet; was namentlich fehlt, sind die Variationen der Elemente. Die Flächentheorie dagegen ist sehr kärglich bedacht; sie erstreckt sich bloss auf die Berührungsebene und Normale. Von den Krümmungen ist kein Wort gesagt; die Linien auf den Flächen kommen nur als Erzeugende vor, die zahlreichen Probleme über sie bleiben unerwähnt. Von speciellen Flächenarten werden cylindrische, konische, Rotations- und Regelflächen in Betracht gezogen. Mehr als die Hälfte des Buchs aber handelt von den Flächen 2. Grades.

Hoppe.

Die Harmonikalen der Mittelpunkte der Berührungskreise eines Dreiecks in Bezug auf dasselbe. Von Dr. Fr. W. Frankenbach,

Realschul-Director. Jahresbericht der städtischen Wilhelms-Real-  
schule in Liegnitz. Liegnitz 1895. Programm. 31 S.

Es werden mehrere Sätze und Formeln über symmetrische Con-  
figurationen im allgemeinen Dreieck hergeleitet. H.

Over een minimaloppervlak van tweevoudigen samenhang. Door  
L. C. Kluyver. Verhandlungen der koninglijke Akademie van Weten-  
schappen te Amsterdam, eerste sectie, Deel III. no. 9. Met 2 platen.  
Amsterdam 1896. Johannes Müller. 42 S.

Es wird zwischen den Umfängen zweier rechteckiger Gegenseiten  
eines rechtwinkligen Parallelepipeds die kleinste verbindende Fläche  
berechnet. H.

De merkwaardige punten van den ingeschreven veelhoek. Door  
M. van Overeem jr. Verhandlungen der koninklijke Akademie  
van Wetenschappen te Amsterdam, eerste sectie, dl. III. no. 7. Met  
een plaat. Amsterdam 1896. Johannes Müller. 29 S.

Von den 4 sog. merkwürdigen Punkten des Dreiecks sind nur 2  
an beliebigen dem Kreise einbeschriebenen Vieleck von selbst deut-  
lich wiederzufinden, der Mittelpunkt  $O$  dieses Kreises und der Schwer-  
punkt des Vielecks  $Z$ . Mit beiden liegt beim Dreieck der Höhen-  
schnittpunkt  $H$  auf gerader Linie, und zwar ist  $OH = 3OZ$ . Die  
Mitte der Geraden  $OH$  wird unter dem Namen „Mittelpunkt des  
Euler'schen Kreises  $N$ “ jenen Punkten zugezählt. Um nun die  
Analogie am einbeschriebenen  $n$  eck zu ergänzen lässt der Verfasser  
auf der verlängerten Geraden  $OH = n \cdot OZ$  von  $O$  aus  $n$  Strecken  
im Verhältniss

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \cdot \cdot \cdot : \frac{1}{n}$$

abschneiden, betrachtet deren  $n+1$  Endpunkte, die jedenfalls Sym-  
metriepunkte des Vielecks sind, als dessen „merkwürdige Punkte“  
und entwickelt im Laufe der Abhandlung ihre Bedeutung und Eigen-  
schaften. H.

Het vierdimensionale prismatoïde. Door P. H. Schoute. Ver-  
handlungen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Am-  
sterdam, eerste sectie, deel V. no 2. Met een plaat. Amsterdam  
1896. Johannes Müller. 20 S.

Das hier betrachtete vierdimensionale Prisma-  
toid ist begrenzt von 2 Körpern in parallelen Räumen. Die  $m$  und  $n$  Ecken des einen und des andern Körpers bilden zusammen sämtliche Ecken des Prisma-  
toids und lassen sich stets, aber in mannigfaltiger Combi-  
nation, verbunden denken durch Tetraeder, deren Grundflächen in die Seiten theils des einen, theils des andern fallen, während die Spitzen bzw. Ecken des zweiten oder des ersten sind, jedenfalls verschieden gewählt werden können. Der Inhalt des Prisma-  
toids wird berechnet. H.

Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function  $n$ ten Grades für complexe Variable. Von Prof. Dr. Suhle, Director. Programm. Dessau 1896. 4<sup>o</sup>. 16 S.

Setzt man  $z = f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ , und betrachtet  $x, y, z$  als rechtwinklige Coordinaten, so erhält man für  $V = 0$  die Gleichung einer reellen Fläche  $z = U$  und hat auf dieser die Curve  $V = 0$ . Diese Curve wird hier für den Fall, wo  $f$  eine beliebige ganze Function ausdrückt, untersucht und mehrere Sätze über sie gefunden. H.

Schlegel, Professeur à l'École-polytechnique de Hagen. Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions. Association Française. Congrès de 1887. Paris. 18 S.

Es wird bewiesen, dass, wie bekanntermassen für  $n = 2$  und 3, auch für  $n = 4$  ein  $n$ seitiges  $n$  dimensionales Prisma-  
toid sich durch lineare Schnitte in  $n$  Plasmen (nach Sylvester so genannt) d. h.  $n$  dimensionale  $(n + 1)$ ecke von gleichem Inhalt zerlegen lässt. E.

Gaston Tarry, Contrôleur de distributions diversers à Alger. Nouvel essai sur la géométrie imaginaire. — Géométrie [générale. Association Française. Congrès d'Ovan 1888. — Congrès de Paris 1889, de Limoge 1890, de Marseille 1891. Paris. 22 + 90 S.

Die erstere Schrift behandelt den imaginären Punkt, die imagi-  
näre Gerade und den imaginären Winkel. Die „allgemeine Geome-  
trie“ führt manche neue Begriffe ein; jede Erklärung aber stützt sich auf ebenso erklärungsbedürftige Begriffe. Hoppe.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

XLXI.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Bericht über die Feier des fünfzigjährigen Bestehens der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 4. Jan. 1896. gr 8°. (40 S. m. Abbild. u. 1 Heliograv.) Leipzig, Barth. 1 Mk. 50 Pf.

Fortschritte der Physik i. J. 1890. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 46. Jahrg. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8°. (LXVII, 523 S.) Braunschweig, Vieweg. 20 Mk.

— dass. i. J. 1894. 50. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8°. (XLV, 853 S.) Ebd. 3 OMk.

Helmholtz, Herm., Vorträge u. Reden. 4. Aufl. 1. u. 2. Bd. gr.8°. (XVI, 422 S. m. 51 Holzst. u. Bildnis u. XII, 434 S. m. 20 Holzst.) Ebd. à 8 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Hrsg. v. Emil Lampe. 25. Bd. Jahrg. 1893 u. 94. (In 3 Hftn.) 1. u. 2. Hft. gr.8°. Berlin, G. Reimer. 21 Mk. u. 11 Mk.

Schlegel, V., die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten 50 Jahren. gr.8°. (44 S.) Leipzig, Teubner. 2 Mk.

## Methode und Principien.

Baumgarten, L. v., freie Betrachtungen über Natur u. Wesen der Lichtsubstanz. gr.8°. (53 S.) Regensburg, Bauhof. 1 Mk.

Fährmann, K. Emil, zur Ausgestaltung der psychologisch berechtigten Rechenmethode. Das rythm. Zählen, der Konzentrationspunkt des elementaren Rechnens. gr.8°. (VII, 144 S.) Plauen, Kell. 1 Mk. 60 Pf.

Friedlaender, Bened. u. Imman. Friedlaender, absolute od. relative Bewegung? (1. Tl.: Die Frage nach der Wirklichkeit einer absoluten Bewegung u. ein Weg zur experimentellen Lösung. 2. Tl.: Ueber das Problem der Bewegung u. die Umkehrbarkeit der Centrifugalerscheinungen auf Grund der relativen Trägheit.) gr.8°. (35 S.) Berlin, Simion 1 Mk.

Hartmann, Edm., Anleitung zur Behandlung des Rechnens mit benannten Zahlen in fragendentwickelnder Lehrform, für Seminaristen, Lehrer u. Lehrerinnen bearb. 2. Aufl. gr.8°. (131 S.) Giessen, Ricker. 1 Mk. 60 Pf.

Holzmüller, über die Beziehungen des mathematischen Unterrichts zum Ingenieur-Wesen u zur Ingenieur-Erziehung. gr 8°. (28 S. m. Fig.) Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Huyghens, Chr n., Abhandlungen über die Ursache der Schwere. Deutsch v. Rud. Mewes. (Neue [Titel-]Ausg.) gr.8°. (X. 47 S. m. Fig.) Berlin, Fischer's technol. Verlag. 1 Mk. 50 Pf.

Johannesson, Paul, das Beharrungsgesetz. 4°. (26 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Rethwisch, Ernst, die Bewegung im Weltraum. Kritik der Gravitation u. Analyse der Axendrehung. 2. Aufl. gr 8°. [(IV, 179 S.) Berlin, Schneider & Co. 4 Mk. 50 Pf

Streng, Karl, u. Jos. Zuckersdorfer, praktische Anleitung zur Behandlung des Rechenunterrichtes in der Volksschule 1. Bd. Das Rechnen im Zahlenraum bis 1000 u. bis zu den Tausendteln gr.8°. (VIII, 510 S) Wien, Pichler. 5 Mk. 20 Pf.

Tischer, Ernst, über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibnitz. 4°. (46 S m. Fig.) Leipzig, Hinrich's Sort. 1 Mk.

Weltkörper-Hypothese, eine neue. Von G. M. S. 8°. (20 S.) Königsberg, Braun & Weber. 50 Pf

Wilby, K F, der Dualismus in der Materie. Eine neue Theorie der physikalischen Erscheinungen gr 8°. (111 S) Zürich, Speidel. 2 Mk 50 Pf.

#### Lehrbücher.

Holzmüller, Gust., method. Lehrbuch der Elementar-Mathematik Gymnasial-Ausg 1 Tl im Anschluss an die preuss. Lehrpläne v 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Untersekunda reichend. gr 8°. (VIII. 228 S. m. 138 Fig.) Leipzig, Teubner Geb 2 Mk. 40 Pf

Holz Müller, Gust, method. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Gymnasial-Ausg. 2. Tl, im Anschluss an die preuss. Lehrpläne v. 1892 nach Jahrgängen geordnet u bis zur Entlassungsprüfung reichend. gr.8°. (VIII, 279 S. m 196 Fig.) Ebd. Geb 3 Mk.

### Sammlungen.

Bork, Heinr., mathematische Hauptsätze f. Gymnasien. Methodisch zusammengestellt 2 Tle. 2. Aufl. gr.8°. (167 u 235 S.) Leipzig, Dürr'sche B. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Dorn's Aufgaben für mündliches u. schriftliches Rechnen. Ausg C. für höhere Mädchenschulen. Nach den minister. Bestimmungen v. 31. Mai 94 bearb. v. A. Elsner u. R. Sandler. 1—6 Hft. gr.8°. Breslau, Handel. 1 Mk. 45 Pf.

Fechner, Heinr., Aufgaben für den ersten Unterricht in der Buchstabenrechnung (Algebra) 3. Aufl. gr.8°. (IV, 124 S.) Berlin, Wilh. Schultze 1 Mk 20 Pf.

Fuss, Konr., Sammlung v. Konstruktions- u. Rechenaufgaben. aus der Planimetrie Für den Schul- u. Selbstunterricht. bearb. 2. Aufl. gr 8°. (VIII, 184 S m Fig.) Nürnberg, Korn. 2 Mk. 40 Pf.

Hartmann, Edm., Rechenbuch. 8 Hfte. gr 8°. Giessen, Ricker. 2 Mk 30 Pf

Heinze u. Max Hübner, Rechenbuch f. Stadt u. Landschulen. Ausg. A. (in 7 Hftn.) Ausg. f. Schüler. 2.—5. Hft. u. Anh. z. 4. Hft. gr.8°. Breslau, Goerlich. 1 Mk. 25 Pf.

— dass. Ausg. B. in 3 Hftn. 4. Aufl. (10.—12. Taus.) gr.8°. Ebd. 75 Pf.

— dass. Ausg. D. in 1 Hfte. (1.—5. Taus.) gr.8°. Ebd. 30 Pf.

Herrigel, G. u. A. Mang, Rechenbuch für die Oberstufe 2klassiger Schulen. Für die Bedürfnisse des prakt. Lebens nach method. Grundsätzen bearb. gr.8°. (96 S.) Heidelberg, Weiss' Sort. 50 Pf.; Lehrerheft (109 S.) 75 Pf.

Jung, W., Übungsbuch für den Rechenunterricht an den Mittelklassen der Volks- und Mittelschulen. Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen (dezimal durchgeführt), gemeinen Brüchen u. Dezimalbrüchen. Lehrer-Ausg. 2. Aufl. 8°. (145 S.) Reutlingen, Kocher. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Köster, T. E., Aufgaben aus dem Gebiete der Arithmetik u. Algebra für Mittelschulen. 1. Tl. 2. Aufl. gr.8°. (IV, 96 S.) Oldenburg, Schulze 80 Pf.

Küffner, E., u. Alois J. Ruckert, Rechenbuch für die Volksschule. Unter Mitwirkung erfahrener Schulmänner 1. Lehrerheft 8°. (III. 108 S. m. Abbild.) Würzburg, Bucher. 80 Pf.

Ohlenburger, A., u. J. Würsdorfer, Rechenbuch für mündliches u. schriftliches Rechnen in 4 Hftn. 2.—4. Hft. gr.8°. Wiesbaden, Limbarth. à 40 Pf.

Sachse, J. J., Uebungsbuch für einen praktischen, geistbildenden u. erziehlchen Unterricht in der Raumlehre. 2. Aufl. 8°. (62 S. m. Fig.) Osnabrück, Wehberg. 50 Pf.

—, Uebungsbuch für einen praktischen, geistbildenden u. erziehlchen Rechenunterricht. Hft 1—3 u. 5. A. 8°. Ebd. 1 Mk. 21 Pf.

—, dass. Ausg. in 3 Hefen für einfache Schulverhältnisse. 2. u. 3. Hft. 8°. Ebd. 80 Pf.

Sammlung v. Lehrmitteln f. höhere Unterrichtsanstalten. VIII. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Lyceen, Lateinschulen u. verwandten Anstalten v. G. Mahler. gr.8°. (VIII, 126 S.) Stuttgart, Neff. 1 Mk. 20 Pf.

Schiller, Rud., Aufgaben-Sammlung f. kaufm. Arithmetik. 4. Aufl. gr.8°. (VI, 198 S.) Wien, Pichler. Kart. 2 Mk.; Suppl. 4. Aufl. (IV, 84 S.) 1 Mk. 20 Pf.

Schmid, Konr., 100 ausführlich gelöste geometrische Aufgaben bayerischer Lehrer-Anstellungs-Prüfungen nebst e. Sammlung von Uebungsbeispielen. gr.8°. (VII, 180 S. m. Fig.) München, Kellner. 2 Mk. 20 Pf.

Schwering, Karl, Sammlung v. Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehraustalten. 3 Lehrgänge. gr.8°. Freiburg i. Br., Herder. 3 Mk.

Steuer, W., Rechenbuch für obere Klassen der Knabenschulen. Auflösungen. gr.8°. (31 S.) Breslau, Woywod. 40 Pf.

—, Rechenbuch für Stadtschulen. Ausg. i. 7 Hftn. Auflösungen z. 5. u. 6. Hft. 2. Aufl. gr.8°. (31 u. 25 S.) Ebd. à 25 Pf.

Wekwerth, Max, Sammlung v. Aufgaben aus der niederen Mathematik. Lösungen zu den Zahlenbeispielen. 8°. (IV, 68 S.) Leipzig, Seemann. Kart. 1 Mk.

### Tabellen.

Ebsen, Jul., Azimuth-Tabellen, enth. die wahren Richtungen der Sonne für Intervalle v. 10 Zeitminuten zwischen den Breitenparallelen von 70° Nord und 70° Süd. gr.8°. (VIII, 141 S.) Hamburg, Eckardt & Messtorff. Geb. 7 Mk. 50 Pf.

Hartenstein, H., fünfstellige Briggische Logarithmen der Zahlen von 1—10000 nebst den sechsstelligen Logarithmen der Zahlen von 10000—10800 f. Realschulen u. verwandte Anstalten, namentlich zu Bardey's arithmet. Aufgaben u. Lehrbuch der Arithmetik hrsg. gr.8°. (32 S.) Leipzig, Teubner. 30 Pf.

Thannabaur, Jos., Amortisations-Tafeln. Ein Hilfsbuch zur Berechnung der Zeit, der Tilgungsraten, der Zinsen und des Capitalrestes bei Darlehen rückzahlbar in halbjähr. Anuitäten, nebst e. leicht fasslichen Anleitung zum selbstständigen Entwerfe solcher Tafeln. Zum prakt. Gebrauche für Sparcassa- u. Bankbeamte. gr.8°. (152 S.) Wien, Graeser. Kart. 3 Mk. 60 Pf.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bardey's, E., arithmetische Aufgaben, nebst Lehrbuch der Arithmetik vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen u. verwandte Anstalten, neu bearb. u. m. e. Logarithmentafel versehen v. H. Hartenstein. gr.8°. (IV, 202 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 2 Mk.

Boehm, K., allgemeine Untersuchungen über die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Mit einer Anwendung auf die Theorie der Potentialgleichungen. gr.8°. (III, 58 S.) Ebd. 2 Mk.

Hermes, Oswald, Verzeichnis der einfachsten Vielfache. 4°. (24 S. m. 1 Taf.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Minkowski, Herm, Geometrie der Zahlen. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. gr.8°. (240 S.) Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Pfliger, W., Elemente der Arithmetik für die mittleren u. oberen Klassen höherer Lehranstalten. gr.8°. (IV, 128 S.) Strassburg, Bull. 1 Mk. 80 Pf.

Rogel, Frz., Reihensummierungen mittelst bestimmter Integrale. gr.8°. 33 S. Prag, Rivnáč. 6 Pf.

Speckmann, G., arithmetische Studien. gr.8°. (III, 22 S.) Dresden, Koch. 1 Mk.

Stolz, Otto, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung 2. (Schluss-)Thl.: Complexe Veränderliche u. Funktionen. gr.8°. (VII, 338 S. m. 33 Fig.) Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Studnička, F. J., neuer Beitrag zur Theorie der Determinanten. Ueber eine neue Eigenschaft von Zahlen in  $2n$  ziffrigen Systemen. gr.8°. (10 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Weber, Heinr., Lehrbuch d. Algebra. (In 2 Bdn.) 2. Bd. gr.8°. (XIV, 796 S.) Braunschweig, Vieweg. 20 Mk

### Geometrie.

Blasendorff, Max, über die Teilung des Kreisbogens gr.4°. (29 S. m. 1 Taf.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Bochow, Karl, e. einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke. Allgemeine Untersuchungen nebst Berechnungen der Seiten, Diagonalen u. Flächen der im elementaren Unterricht verwendbaren regelmässigen Vielecke aus den Reihen 2, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 225. 4°. (34 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Fock. 1 Mk.

Bosse, L., u. H. Müller, Geometrie der Ebene für Landwirtschaftsschulen. 8°. (IV, 118 S. m. 200 Abbildgn.) Berlin, Parey. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Fenkner, Hugo, Lehrbuch der Geometrie f. den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. (In 2 Tln.) 2. Tl.: Raumgeometrie. Nebst e. Aufgaben-Sammlung, bearb. mit besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Abschlussprüfung. 2. Aufl. gr.8°. (IV, 109 S. m. Fig.) Braunschweig, Salle. 1 Mk. 40 Pf.

Fink, K., die elementare systematische u. darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. 1. u. 2. Kurs. für die Hand des Lehrers bearb. gr.8°. (XVII, 151 S.) Tübingen, Laupp. 2 Mk.; 10 Fig.-Taf. u. 84 Blatt dazu für die darstell. geometr. Uebungen, im Futteral 2 Mk. 80 Pf.

—, Sammlung v. Sätzen u. Aufgaben zur systematischen u. darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. 1. u. 2. Kurs., für die Hand der Schüler bearb. gr.8°. (IV, 108 S.) Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. (In 3 Tle.) 2. Tl. Abbildung: in verändertem Masse. Berechnung der Grössen der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Mit 188 Fig. in Holzschn. u. 1 Kärtchen. gr.8°. (IX, 248 S.) Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Hercher, B., Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien. Nach den neuen Lehrplänen bearb. 3. Hfte. 3. Aufl. gr.8° Leipzig, Jacobsen. 3 Mk. 20 Pf.

Hertter, C. F., zeichnende Geometrie. Für die planimetr. Repetition mit besonderer Berücksichtigung des geometrischen Zeichnens. 1. Abtlg. Enth.: Drei- u. Viereck. Kreislehre mit Ausschluss der Proportionen. Gradlinige Ornamente. 2. Aufl. gr.8°. (VI, 28 S.) Stuttgart, Metzler. 50 Pf.

Kambly u. Roeder, Stereometrie u. sphärische Trigonometrie. Vollständig nach den preuss. Lehrplänen v. 1892 umgearb. Ausg. der Stereometrie u. der sphärischen Trigonometrie v. Kambly. Lehraufgabe der Prima. Mit Ubungsaufgaben u. e. Anhang: Der Koordinatenbegriff u. einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. 1. Aufl. (25. der Kambly'schen Stereometrie.) gr.8°. 194 S. m. Fig. Breslau, Hirt. 1 Mk. 70 Pf.

Kültzsch, A., Grundzüge der Raumlehre. Ein Lern- und Übungsbuch, zum Gebrauche in Volksschulen, Fortbildungsschulen, Präparanden-Anstalten u. Mittelschulen. 1. Hft. Mit 84

Textfig. u. mehr als 400 verschied. Übungsaufgaben. 2. Aufl. 8°. (VI, 69 S.) Leipzig, Merseburger. 60 Pf.

König, Max, die geometrische Theilung des Winkels. 2. Hft. Mit 11 Abbildgn. auf 1 lithogr. Tafel. gr.8°. (S. 33—43) Berlin, Siemens. 75 Pf.

Küpper, Carl, projective Erzeugung der Curven  $m$ ter Ordnung  $C^m$ . gr.8°. (16 S.) Prag, Rivnáč. 32 Pf.

—, über Beziehungen zwischen Polygonal- u. Raumcurven. gr.8°. (11 S.) Ebd. 20 Pf.

Längst, Herm., Kegelschnitte. (2. Tl.), analytisches Repetitorium mit geometr. Anhang, im Anschluss an den „vorbereit. Kurs“ bearb. 8°. (XII, 180 S. m. 5 Taf.) Stuttgart, Kohlhammer. 3 Mk.

Lie, Sophus, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt v. L. u. Geo. Scheffers. (In 2 Bdn.) 1. Bd. gr.8°. (XI, 694 S. m. Fig.) Leipzig, Teubner. 24 Mk.

Močnik, Frz. v., geometrische Anschauungslehre f. Unter-Gymnasien. 2. Abth. 19. Aufl. v. Frz. Wallentin. gr.8°. Prag, Tempsky. 1 Mk.

Rohn, Karl u. Erwin Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. (In 2 Bdn.). 2. Bd. gr.8°. (XVI, 528 S. m. Fig.) Leipzig, Veit & Co. 14 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV. Tl. Projektivische Geometrie. gr.8°. (V, 177 S. m. 223 Fig.) Dresden, Kühnemann. 4 Mk. 80 Pf.

Schmehl, Chr., Lehrbuch der Geometrie. Für gewerbl. Schulen bearb. Mit 290 in den Text eingedruckten Figuren u. einer Aufgabensammlung. gr.8°. (VIII, 179 S.) Giessen, Roth. 1 Mk. 50 Pf.

Sickenberger, Adf., Leitfaden der elementaren Mathematik, 2. Tl. Planimetrie. 3. Aufl. gr.8°. (VI, 123 S. m. Fig.) München, Th. Ackermann. 1 Mk. 50 Pf.

Sobotka, J., einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven v. Umdrehungsflächen m. Ebenen. gr.8°. (18 S. m. 2 Fig.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Sporer, Benedikt, über den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischer Kurven. Diss. gr.8°. (40 S.) Tübingen, Fues. 1 Mk.

Traub, K., der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik u. absoluten Geometrie. gr.8°. (IV, 12 S. m. 1 Taf.) Lahr, Schauenburg. 50 Pf.

Wolf, Fr. Chr., methodischer Lehrgang für den geometrischen Unterricht in der ein- und mehrklassigen Volksschule u. in der Fortbildungsschule. Nach den Grundsätzen der Anschauung u. Konzentration in genet. Stufenfolge aufgebaut u. unter besonderer Berücksichtigung der praktischen Bedürfnisse bearb. gr.8°. (VIII, 148 S. m. 100 Fig.) Leipzig, O. Klemm's Sort. 1 Mk. 60 Pf.

Zindler, Konr., Methode aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten. Wien, Gerold. 20 Pf.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Arbeiten, astronomische, des k. k. Gradmessungs-Bureau, ausgeführt unter Leitung v. Thdr. v. Oppolzer. Hrsg. v. Edm. Weiss u. Rob. Schram. 7. Bd. Längenbestimmungen. Imp. 4<sup>o</sup>. (III, 190 S.) Leipzig, Freytag. 16 Mk.

Harzer, P., über geographische Ortsbestimmungen ohne astronomische Instrumente. gr. 8<sup>o</sup>. (51 S. m. 1 Taf.) Berlin, Dümmler's Vlg. 1 Mk. 20 Pf.

Kerp, Pet., Feldmessen, Nivelliren u. Zeichnen. Ein Unterrichtsbuch für landwirtschaftl. Lehranstalten. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 99 S. m. 109 Abbild. u. 8 Taf.) Stuttgart, Ulmer. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Koordinaten und Höhen sämtlicher von der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme bestimmten Punkte im Reg.-Bez.-Potsdam. gr. 8<sup>o</sup>. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 2 Mk. 50 Pf.

Landes-Triangulation, die kgl. preussische. Abrisse, Koordinaten u. Höhen sämtl. v. der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme bestimmten Punkte. 13. Thl. Reg.-Bez.-Potsdam. Mit 17 Beilagen. gr. 8<sup>o</sup>. (IX, 946 S.) Ebd. Kart. 12 Mk.

Nivellements-Ergebnisse, die der trigonometrischen Abtheilung der kgl. preuss. Landes-Aufnahme. 1.—3. u. 6. Hft. 1. Ostpreussen. — 2. Westpreussen. — 3. Pommern. — 6. Posen. — 12<sup>o</sup>. Ebd. Kart. à 1 Mk.

Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landes-Aufnahme. Formeln u. Tafeln zur Berechnung der geograph. Koordinaten aus den Richtungen u. Längen der Dreiecksseiten 2. Ordnung. 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (24 S.) Ebd. 80 Pf.

### Mechanik.

Hettwer, Otto, zur Bewegung eines schweren Punktes auf e. krummen Linie v. d. Gleichung:  $r^m = a^m \cos m\vartheta$ . 4<sup>o</sup>. (32 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Hollender, Herm. Jos., über eine neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften u. ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Inhalten, Schwerpunkten, statischen Momenten u. Trägheitsmomenten ebener Gebilde. Mit 4 lith. Tafeln. gr. 8<sup>o</sup>. (VI, 44 S.) Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Korn, Arth., eine Theorie der Gravitation u. der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. 2. Aufl. 1. Tl.

Die Grundlagen der Hydrodynamik u. der Theorie der Gravitation. gr. 8°. (117 S.) Berlin, Dümmler's Vlg. 3 Mk.

Lauenstein, R., Leitfaden der Mechanik. Elementares Lehrbuch für techn. Mittelschulen u. zum Unterricht. 2. Aufl. gr. 8°. (VI, 177 S. m. 169 Abbilgn.) Stuttgart, Cotta. 3 Mk.

Loessl, Frdr. v., die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft u. der Vogelflug. Mathematisch-mechan. Klärung, auf experimenteller Grundlage entwickelt. gr. 8°. (304 S. m. Fig.) Wien, Hoelder. 7 Mk. 20 Pf.

Mewes, Rud., die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen u. deren Wirkungsgesetze. gr. 8°. (92 S. m. Abbild.) Berlin, Fischer's technol. Verl. 2 Mk.

Seidemann, Carl, ein mechanisches Doppel-Problem. Ein Muster zur Lösung aller Probleme, welche auf ellipt. Functionen führen. Für Studierende auf Universität u. Polytechnicum bearb. Mit 4 Taf. (IV, 95 S.) Halle, Kaemmerer & Co. 3 Mk.

#### Technik.

Benischke, Gust., Magnetismus u. Elektrizität mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis. gr. 8°. (XIII, 272 S. m. 202 Fig.) Berlin, Springer. 6 Mk.

Bibliothek, elektro-technische. 9. Bd. Die Grundlehren der Elektrizität mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Praxis. Von W. Ph. Hauck. 3. Aufl. 8°. (XVI, 301 S. m. 82 Abbild.) Wien, Hartleben. 3 Mk.

Eichmann, Paul, photographische Belichtungs-Tabellen zur genauen Ermittlung der für photographische Aufnahmen erforderlichen Expositionszeit. 12°. (IV, 67 S.) Düsseldorf, Schmitz & Olbertz. 1 Mk. 50 Pf.

Encyklopaedie der Photographie. 20. — 23. Hft. gr. 8°. Halle, Knapp. 20. Valenta, Behandlg. der f. den Auscopir-Prozess bestimmten Emulsionspapiere. 6 Mk. — 21. Mercator, die fotogr. Retouche. 2 Mk. 50 Pf. — 22. Dolezal, die Anwendung der Photographie in der praktischen Messkunst. 4 Mk. — 23. Verfasser, der Halbtonprozess. 4 Mk.

Franklin, E., „Blitzlicht“. Kurze u. allgemein verständl. Anleitung zum Photographiren mit Magnesium, Aluminium u. elektr. Licht unter Berücksichtigung von combinirtem Tages- u. künstl. Licht. 8°. (IV, 30 S. m. Fig.) Frankfurt a/M., Brönnner. 1 Mk.

Fuhrmann, Arwed, die Theodolite, ihre Einrichtung, Anwendung, Prüfung u. Berichtigung. Eine Unterweisung für Architekten, Bautechniker, Landmesser u. s. w. gr. 8°. (VIII, 136 S. m. Abbild.) Leipzig, Seemann. 3 Mk.

Geometrie, praktische, f. gewerbliche Fortbildungs- u. Handwerkerschulen, sowie zum Selbstunterrichte. Bearb. v. einem ehemaligen Mitgliede mehrerer Prüfungs-Kommissionen. Planimetrie. gr. 8°. (VIII, 119 S. m. Fig.) Frankfurt a/M., Jäger's-Vlg. 1 Mk.; ausführlicher Schlüssel. (144 S.) 2 Mk.

Klein, F., die Anforderung der Ingenieure u. die Ausbildung der mathemat. Lehramtskandidaten. Vortrag. gr. 8°. Leipzig, Teubner. 30 Pf.

Koch, Gust., die Lösung des Flugproblems in physikalischer und maschinentechnischer Hinsicht.. Mit e. Anhang: Nutzen u. Folgen praktischer Luftschiffahrt. gr. 8°. (72 S. m. Abbildgn. u. 8 Taf.) München, Lukaschik. 3 Mk.

Kosak, Geo., Einrichtung u. Betrieb der Elektromotoren nach Mittheilgn. aus der Praxis leichtfasslich dargestellt. Mit Abdruck der Sicherheitsvorschriften des elektrotechnischen Vereines in Wien u. 24 Abbild. gr. 8°. (VIII. 84 S.) Wien, Spielhagen & Schurich. 2 Mk.

Lehrhefte, technische. Mathematik. 1. u. 3. Hft. gr. 8°. Hildburghausen, Pezoldt. 1. Lehrbuch d. Elementar-Arithmetik. 1. Tl. Hrsg. v. Karl Kuhn. (IV, 48 S. mit 3 Fig.) 1 Mk. 50 Pf. — 3. Lehrbuch der Stereometrie. Hrsg. v. Karl Kuhn. (III, 24 S. m. 36 Fig.) 90 Pf.

—, dass. Maschinenbau. Hft. 6<sup>b</sup>. Berechnung der Schwungräder u. Centrifugalregulatoren. Elementare Darstellung m. erläut. Rechnungsbeispielen. v. Jos. Kessler. gr. 8°. (IV. 37 S. m. 33 Abbildgn.). Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

May, Osc., Anweisung für den elektrischen Licht- u. Kraftbetrieb. Für Inhaber elektrischer Beleuchtungsanlagen und deren Maschinisten. 3. Aufl. 8°. (VIII, 64 S. m. 5 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 2 Mk.

Schnauss, Herm., die Blitzlicht-Photographie. Anleitung zum Photographiren bei Magnesiumlicht. 2. Aufl. gr. 8°. (IV, 150 S. m. 57 Fig. u. 8 Taf.) Düsseldorf, Liesegang. 2 Mk.

--, Photographischer Zeitvertreib. 5. Aufl. gr. 8°. (V, 60 S. m. 15 Fig.) Ebd. 2 Mk.

Wilke, Arth., üb. die gegenseitige Beeinflussungen der Fernsprechleitungen nach Müller's Theorie. gr. 8°. (XIII, 69 S.) m. Abbild. Leipzig, Leiner. 1 Mk.

#### Optik, Akustik und Elasticität.

Kerber, Arth., Beiträge zur Dioptrik. 2. Hft. gr. 8°. (16 S. m. 5 Fig.) Leipzig, Fock. 50 Pf.

Kümmell, G., über Fresnelsche Beugungserscheinungen bei Röntgenstrahlen. Nebst e. Nachtrag von K. Schmidt. gr. 8°. (11 u. 2 S. m. 1 Abbild. u. 1 Taf.) Halle, Niemeyer. 1 Mk.

Oekinghaus, E., über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss. gr. 8°. (15 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 50 Pf.

### Erd- und Himmelskunde.

Annalen des (russischen) Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1894. 2 Thle. Imp. 4°. Leipzig, Voss' Sort. — I. Meteorologische u. magnetische Beobachtungen v. Stationen 1. Ordng. u. ausserordentliche Beobachtungen v. Stationen 2. u. 3. Ordng. 10 Mk. 20 Pf. — II. Meteorologische Beobachtungen der Stationen 2. Ordng. in Russland nach dem internationalen Schema. 15 Mk. 40 Pf.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Hrsg. v. der Direktion. XVIII. Jahrg.: 1895. gr. 4°. Hamburg, Friederichsen & Co. 15 Mk.

Beobachtungen des Tiflisser physikalischen Observatoriums i. J. 1894. Hrsg. v. Ed. Stelling. (Russisch u. deutsch.) gr. 4°. (IV, XXXII, 198 S.) Petersburg, Eggers & Co. 10 Mk.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. 1 Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördlicher u. 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 11. Stück. Catalog von 9789 Sternen zwischen 14° 50' u. 20° 10' nördlicher Declination 1855 u. Catalog v. 372 grösstenteils der nördlichen Berliner Zone angehörigen Sternen für das Aequinoctium 1875. Nach Zonen-Beobachtungen aus Pistor'schen Meridiankreise der kgl. Sternwarte zu Berlin in den J. 1869—74 v. A. Auwers. Hrsg. v. d. astronom. Gesellschaft. gr. 4°. (161 u. 367 S.) Leipzig, Engelmann. 30 Mk.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen der Landesstationen in Bosnien-Herzegowina i. J. 1894. Hrsg. v. der bosn.-herzegow. Landesregierung. gr. 4°. (XII, 112 S. m. 16 Taf. u. 1 Karte.) Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. 15 Mk.

Falb, Rud., neue Wetter-Prognosen u. Kalender der kritischen Tage f. 1896 Juli—Dezember. 16°. (85 S.) Berlin, Steinitz. 1 Mk.

Foerster, W., u. Blenck, populäre Mittheilungen zum astronomischen u. chronologischen Theile des preussischen Normalkalenders f. 1897. gr. 8°. (29 S.) Berlin, Statist. Bureau. 1 Mk.

Franz, Jul., die täglichen Schwankungen der Temperatur im Erdboden. Nach der Bodenthermometer-Station der physikalisch-ökonom. Gesellschaft. gr. 4°. (16 S.) Königsberg, Koch. 60 Pf.

Gezeitentafeln f. d. J. 1897. Hrsg. vom Reichs-Marine-Amt. Red.: Observatorium zu Wilhelmshaven. Mit 14 Blättern in Steindr., enth. Darstellungen der Gezeitenströmungen in der Nordsee, im

engl. Kanal u. der Irischen See. 8°. (VIII, 253 S.) Berlin, Mittler & Sohn. 1 Mk. 50 Pf.

Goldscheider, Frz., die Gauss'sche Osterformel. 1. Tl. 4°. (29 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Grossmann, 4 Sternkarten. Zum Gebrauch in den tropischen Gebieten für geogr. Ortsbestimmungen u. die Schule. 3 Blatt à  $36 \times 38$  cm, 1 Blatt  $27,5 \times 27,5$  cm. Mit Vorwort u. Anleitung. gr.8°. (4 S.) Berlin, D. Reimer. 4 Mk.

Günther, Siegm., Grundlehren der mathematischen Geographie u. elementaren Astronomie, f. den Unterricht bearb. 4. Aufl. Mit 47 Fig. u. 2 Sternkarten. gr.8°. (X, 143 S.) München, Th. Ackermann. 2 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 4. Lfg. Breslau, Trendt. 3 Mk. 60 Pf.

Haerdtl, E. v., Notiz betr. die Säcularacceleration des Mondes. gr.8°. (7 S.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Huber, G., die kleinen Planeten des Asteroidenringes. gr.8°. (27 S.) Bern, Wyss. 60 Pf.

Jahrbuch des kgl. sächs. meteorologischen Institutes. gr.4°. Chemnitz, Bülbz. 1894. XII. Jahrg. 2. Hälfte od. 3. Abth. 10 Mk. — 1895. XIII. Jahrg. 3 Abthlgn. 20 Mk.

Jenkner, Hans, Leitfaden der Himmelskunde. Für den Schulgebrauch, insbesondere an höheren Mädchenschulen, sowie f. den Selbstunterricht. Mit 18 Fig. i. Text u. 1 Sternkarte des nördl. Himmels. gr.8°. (IV, 76 S.) Berlin, Gärtner. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Láska, V., über eine neue Methode zur Bestimmung der Polhöhe durch Photographie. Prag, Rivnáč. 12 Pf.

Neudrucke von Schriften und Karten über Meteorologie u. Erdmagnetismus. Hrsg. v. G. Hellmann. Nr. 5 u. 6. gr.4°. Berlin, Asher & Co. 5. Die Bauern-Praktik. 1508. Fcsm. Druck m. e. Einleitg. (72 S. m. 1 Holzschn. u. 6 Bl.) 7 Mk. — 6. George Hadley, Concerning the cause of the General Trade Winds. London, 1735. Fcsm. Druck m. e. Einleitg. (16 S. u. 3 Bl.) 2 Mk.

Niessl, G. v., Bahnbestimmung der grossen Meteore am 16. u. 25. Jänner 1895. gr.8°. (74 S.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Pernter, J. M., die allgemeine Luftdruckvertheilung u. die Gradienten bei Föhn. gr.8°. (21 S. m. 1 Fig. u. 1 Taf.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 34. (XI. Bd. 1. Stück.) Beobachtungen des südl. Polarflecks des Mars u. Bestimmung der Elemente des Marsäquators aus Beobachtungen seiner Polarflecken v. O. Lohse. gr.4°. (25 S. m. 1 Fig.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Rechenberg, Geo., definitive Bahnbestimmung des Cometen 1835. I. 4°. (25 S.) Breslau, Schletter. 1 Mk.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. d. Gesellschaft Urania zu Berlin. Nr. 39. Ueber Roentgen'sche Strahlen. Populärer Experimentalvortrag v. Paul Spies. gr.8°. (13 S. m. 4 Fig. u. 1 Taf.) Berlin, H. Paetel. 80 Pf.

Studnicka, F. J., bis ans Ende der Welt! Astronomische Causerien. 2. Aufl. 8°. (216 S. m. Abbild.) Prag, Rivnáč. 3 Mk

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorol. Instituts Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung i. J. 1895, zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch f. 1895. Beobachtungssystem des Königr. Preussen u. benachb. Staaten. 1. u. 2. Hft. gr.4°. (98 S.) Berlin, Asher & Co. 2 Mk. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft 29. Jahrg. Suppl.-Hft. Generalregister der Jahrgänge 1—25 von Alexis v. Tillo. gr 8°. (III, 103 S.) Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

—, dass. 30. Jahrg 4. Hft. u 31. Jahrg. 1. Hft. Ebd. à 2 Mk.

Weighardt, E., mathematische Geographie. Leitfaden für den Unterricht in der Obertertia der Mittelschulen gr.8°. (44 S. m. Fig.) Bühl, Konkordia. 60 Pf.

Wiesner, J., Beiträge zur Kenntnis des tropischen Regens. gr.8°. (38 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Wilsdorf, E. M., Sternkarte für den Unterricht in der Himmelskunde. Mit Erläuterg. 2. Aufl. 17,5 × 22 cm Mit Text am Fusse. Chemnit, Bülz. 20 Pf

Wolf, J., 3 Wandtafeln zur Himmelskunde. à 56,5 × 89 cm. Farbendr. Esslingen, Lung. à 1 Mk. 50 Pf

Ziesomer, Johs., kleine mathemat. Geographie. 3. Aufl. gr.8°, 64 S. m. 34 Fig.) Breslau, Hirt. 80 Pf.

### Nautik.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1899 Hrsg. v. Reichsamt d. Innern. Unter Red. v. Schrader. Berlin, C. Heymann. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

### Physik.

Börner, H., physikalisches Unterrichtswerk f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neuern Physik. In 2 Stufen 1. Stufe. Vorschule der Experimentalphysik für den

Anfangsunterricht an Gymnasien u. Realgymnasien. 2. Aufl. gr.8°. (XII, 119 S. m. 114 Abbildgn.) Berlin, Weidmann. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Caroli, Carl, Elektrographie. Eine besondere Methode für Induktionswirkungen. (System Jodko.) 12°. (14 S.) Berlin, Hayn, 30 Pf.

Dorn, E., Mittheilungen über Röntgen-Strahlen. gr.8°. (10 S. m. 1 Taf u 1 Bl. Erklärgn.) Halle, Niemeyer. 1 Mk.

—, über die Schwingungsrichtung der Röntgen-Strahlen, gr.8°. (7 S.) Ebd. 50 Pf.

Ebert, H., magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus u. der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinienbegriffes. 1. Tl. Mit 93 Abbildgn. im Text. u. auf 2 Taf. gr.8°. (XVIII, 223 S.) Leipzig, Barth. 8 Mk.

Galitzin, B., u. A. v. Karnojitzky, über die Ausgangspunkte u. Polarisation der X-Strahlen. Imp.-4°. (13 S. m. 14 phototyp. Taf.) Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk.

Grimsehl, Einleitung in die Physik. Ein Beitrag zur Methodik des physikal. Anfangsunterrichts. gr.4°. (24 S.) Hamburg, Herold. 1 Mk. 60 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. Mit 128 Abbildgn., e. Inhaltsübersicht u. e. Namenregister für das ganze Werk. 29. u. 30. (Schluss-)Lieferg. gr.8°. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

— dass., 2. Bd. 2. Abth. Ebd. 28 Mk. (kplt. 3 Bde. i. 5 Thln. 105 Mk.)

Jaumann, G., elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen. (1. Mittheilg.) gr.8°. (16 S. m. 2 Fig.) Wien, Gerold. 70 Pf.

Keiter, Alwin, über die Tragkraft stabförmiger Elektromagnete. gr.8°. (26 S. m. 4 Fig. u 2 Taf.) Ebd. 1 Mk.

Krämer, Jos., die einfachen u. mehrphasigen elektrischen Wechselströme, beziehungsweise: Der Drehstrom, eine Erzeugung u. Anwendung in der Praxis. gr.8°. (X, 392 S. m. 293 Abbildgn. u. 9 Taf.) Jena, Costenoble. 15 Mk.

Kreuschmer, Rob., Kathoden- u. Röntgen-Strahlen. 28 Wandtaf. auf e. photograph. Karton v. 31—34 cm nach öffentlichen Experimentalvorträgen. Mit Text (4 S.) Bielefeld, Helmich. 2 Mk. 50 Pf.

Krumme, Wilh., Lehrbuch der Physik f. höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearb. v. Hugo Fenkner. 1. Stufe: Pensum der Ober-Tertia u. Unter-Sekunda. 3. Aufl. gr.8°. (VIII, 247 S. m. 160 Fig.) Berlin. Grote. 2 Mk.

Lang, Vikt. v., Interferenzversuch mit elektrischen Wellen. (II. Mitthlg.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Lampa, Ant., über die Bestimmung der Dielektricitätsconstante eines anisotropen Stoffes nach e. beliebigen Richtung aus den

Dielektricitätsconstanten nach den Hauptrichtungen. gr.8°. (37 S.)  
Wien, Gerold. 80 Pf.

Liebetanz, Frz., Röntgens X-Strahlen nebst allen jetzt bekannten Strahlenarten u. Anh. die Selle'sche Farbenphotographie. gr.8°. (32 S. m. Abbild.) Düsseldorf, Gerlach. 60 Pf.

Liebisch, Thdr., Grundriss der physikalischen Krystallographie. gr.8°. (VIII, 506 S. m. 898 Fig.) Leipzig, Veit & Co 13 Mk. 40 Pf.

Lommel, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 3. Aufl. gr.8°. (XI, 556 S. m. 430 Fig. u. 1 Spektraltaf.) Leipzig, Barth. 6 Mk. 40 Pf.

Meyer, Stef., über den Sitz der Potentialdifferenzen in Tropfelektroden u. im Capillarelektrometer. gr.8°. (22 S. m. 5 Fig.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Pfaundler, L., Beitrag zur Kenntniss u. Anwendung der Röntgen'schen Strahlen. gr.8°. (5 S. m. 1 Fig. u. 1 Taf.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Puluj, J., über die Entstehung der Röntgen'schen Strahlen u. ihre photographische Wirkung. gr.8°. (11 S. m. 5 Fig. u. 1 Taf.) Ebd. 60 Pf.; Nachtrag (3 S. m. 3 Taf.) 70 Pf.

Riecke, Ed., Lehrbuch der Experimentalphysik zu eigenem Studium u. zum Gebrauch bei Vorlesungen. 2. Bd. Magnetismus. Elektrizität, Wärme. gr.8°. (XII, 492 S. m. 247 Fig.) Leipzig, Veit & Co. 10 Mk.

Röntgen, Wilh. Konr., eine neue Art von Strahlen. II. Mittheilg. gr.8°. (9 S.) Würzburg, Stahel. 60 Pf.

Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Hrsg. v. Ernst Voit 1. Bd. 1. Hft. Der elektrische Lichtbogen v. Ernst Voit. gr.8°. (74 S. m. 44 Abbild.) Stuttgart, Enke. 1 Mk.

Schmidt, K. E. F., die Röntgen-Strahlen. gr.8°. (16 S.) Leipzig, Pfeffer. 30 Pf.

Schröder, Conr., 20 Lektionen aus der Physik. Für die einfachsten Schulverhältnisse mit Berücksichtigung der zu verwertenden Anschauungsmittel zusammengestellt. 3. Aufl. gr.8°. (63 S. m. 50 Holzschn.) Leipzig, Siegismund & Volkening. 60 Pf.

Schurig, Ewald, die Elektrizität. Das Wissenwürdigste aus dem Gebiete der Elektrizität, für jedermann leichtverständlich dargestellt. gr.8°. (III, 55 S. m. 30 Fig.) Leipzig, Moeschke. Kart. 1 Mk. 30 Pf.

Singer, Osc., über die wechselseitige Induction zweier auf e. Kugelschale gleichmässig gewickelter Windungslagen. Wien, Gerold 30 Pf.

Thompson, Silvanus, P., mehrphasige elektrische Ströme u. Wechselstrommotoren. Uebers. v. K. Strecker. gr.8°. (V, 250 S. m. 171 Abbildgn. u. 2 Taf.) Halle, Knapp. 12 Mk.

Voigt, Wold., Kompendium der theoretischen Physik. 2. Bd. Elektrizität u. Magnetismus, Optik. gr.8°. (XIV, 810 S.) Leipzig, Veit & Co. 18 Mk.

Wesely, Jos., Grundzüge der allgemeinen u. technischen Physik. Grundlehren der Meteorologie. Repetitorium für den I. u. II. Jahreskurs der mechanisch-technischen, bau- u. chemisch-technischen Abtheilung an höheren Staats-Gewerbeschulen. gr.8°. (VII, 587 S. m. 518 Abbild.) Pilsen, Steinhauser. 7 Mk. 20 Pf.

Wichert, E., die Theorie der Elektrodynamik u. die Röntgen'sche Entdeckung. gr.4°. (48 S. m. Fig.). Königsberg, Koch. 1 Mk. 80 Pf.

Winkelmann, A. u. R. Straubel, über einige Eigenschaften der Röntgen'schen X-Strahlen. (Vorläufige Mittheilg.) 2. durch einen Nachtrag vermehrte Aufl. gr.8°. (18 S. u. 2 Lichtdr.-Taf.) Jena, Fischer. 1 Mk. 20 Pf.

Winter, Wilh., Grundriss der Mechanik u. Physik f. Gymnasien bearb. 2. Aufl. gr.8°. (VI, 349 S. m. 233 Abbild.) München, Th. Ackermann. 3 Mk. 20 Pf.

Zepf, K., Einführung in die Grundlehren vom elekt. Strom m. Hilfe einiger aus einzelnen Teilen aufzubauenden Apparate. gr. 8°. (XIV, 118 S. m. 20 Taf.) Freiburg, Ragoczy. 3 Mk.

#### Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-physikal. Classe. 19. Bd. München, Franz. 12 Mk.

—, physikalische, der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1895. gr.4°. Berlin, Georg Reimer. Kart. 24 Mk. 50 Pf.

Berichte der sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Classe. 1895. V. u. VI. u. 1896 I. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Mach, E., populär-wissenschaftliche Vorlesungen. 8°. (VII, 355 S. m. 46 Abbildgn.) Leipzig, Barth. 5 Mk.

Sitzungsberichte, Münchener. Mathematische Classe. 1895. 3. Hft. u. 1896 1. Hft. München, Franz. à 1 Mk. 20 Pf.

—, Wiener. Mathematisch naturwiss. Classe. Wien, Gerold. I. Abth. 104. Bd. 9. u. 10. Hft. 7 Mk. 20 Pf. — Abth. IIa. 104. Bd. 8. — 10. Hft. 8 Mk. 105. Bd. 1. Hft. 3 Mk. 80 Pf. — Abth. IIb. 104. Bd. 9. u. 10. Hft. 1 Mk. 40 Pf. 105. Bd. 1. u. 2. Hft. 1 Mk. 50 Pf. — Abth. III. 104. Bd. 6—10. Hft. 4 Mk. 60 Pf.

—, der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1895. 2 Tle. Prag, Rivnáč. 18 Mk.

# Litterarischer Bericht

## LIX.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen von H. G. Zeuthen, Professor an der Universität Kopenhagen. Kopenhagen 1896. Andr. Fred. Höst u. Sön.

Das Buch schliesst sich der Reihe derjenigen Autoren an, die nach langer Unterbrechung erst in neuerer Zeit wieder angefangen haben, die Geschichte der Mathematik zu bearbeiten, nämlich Chasles, Bretschneider, Hankel, Cantor, Tannery, Heiberg, Allmann, benutzt deren Werke und stützt sich auf sie. Die eigene Leistung charakterisirt sich durch Hervorhebung einer Seite der Geschichtschreibung, die man früher als unwichtig, vielleicht sogar als ungehörige Einmischung verworfen hat. Um die Geschichte einer Wissenschaft wie der Mathematik und Physik richtig zu beurteilen, ist es durchaus unzureichend ihre Productionen als Zeiterscheinungen zu behandeln. Die Entdecker und Förderer sind meistens ihrer Zeit voraus und finden bei ihren Zeitgenossen zu geringes Verständniss. Namentlich ist in hohem Grade auffällig, dass die physikalischen Kenntnisse der Alten viel umfangreicher erscheinen, nachdem man angefangen hat, die Ueberlieferungen vom heutigen Standpunkt aus zu betrachten. Letzteres macht nun der Verfasser auch zum Princip für seine Charakterisirung der Mathematik der Alten und spricht es auch als solches, was vielleicht hier zum erstenmal geschieht, offen aus. Was indes das Buch nicht gibt, ist die nähere Bekanntschaft mit den Quellen der Geschichte. Ersatz für dieselbe hat der Verfasser in

keiner Weise gewährt, auch dem Leser keinen Rat erteilt um Auskunft über die Quellen zu erlangen. Mögen dann die Urteile über die Productionen und Kenntnisse noch so treffend und unbestritten sein, so bleiben sie doch als bloss wörtlich acceptirte ziemlich unfruchtbar. Vorausgehende Lecture der Quellen scheint der Verfasser nicht angenommen zu haben, auch sind sie ausser Euklid nicht leicht zugänglich. Vielleicht ist in dieser Beziehung schon von den Vorgängern hinreichend gesorgt, dass der Verfasser es nicht für nötig hielt mehr dafür zu tun. Das Buch beginnt mit einer Vorgeschichte der Mathematik, welche die ersten Antriebe zur Untersuchung mathematischer Fragen aus einzelnen Beschäftigungen herleitet. Am meisten eingehend werden die Lehren der Pythagoräer und der Inhalt von Euklids Elementen behandelt. H.

Leopold Kronecker's Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. Erster Band. Mit L. Kronecker's Bildniss. Leipzig 1895 B. G. Teubner. 4<sup>o</sup>. 483 S.

Die Werke sind vom Herausgeber nach ihrem Inhalt in 3 Abteilungen zusammen geordnet. Die erste, welche in mehreren Bänden erscheinen wird, enthält die „allgemeine Arithmetik“. Darunter versteht der Verfasser „die Anwendung der Begriffe und Methoden der Zahlentheorie auf die Untersuchung der rationalen Functionen beliebig vieler Variabeln. Im vorliegenden I Bande stehen folgende 12 Abhandlungen: Beweis, dass für jede Primzahl  $p$  die Gleichung  $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = 0$  irreductibel ist. — De unitatibus complexis. — Mémoire sur les facteurs irreductibles de l'expression  $x^n - 1$ . — Démonstration d'un théorème de M. Kummer. — Démonstration de l'irréductibilité de l'équation  $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = 0$ , où  $n$  désigne un nombre premier. — Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. — Ueber complexe Einheiten. — Ueber kubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten. — Ueber die Classenanzahl der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. — Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrer Variabeln. — Ueber bilineare Formen — Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. 2 Abhandlungen. — Sur le théorème de Sturm. — Bemerkungen zur Determinantentheorie. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Classenzahl idealer complexer Zahlen — Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. — Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen. — Sur les faisceaux de formes quadratiques et

bilinéaires. — Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. — Von diesen Abhandlungen stehen 6 in Crelle J., 3 in Lionville J., 11 in den Monatsb. d. Akad., 2 in Comptes rendus.

H.

Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie, Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und Allgemeine sphärische Trigonometrie 1753 und 1779. Von Leonhard Euler. Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. Leipzig 1896. Wilhelm Engelmann. 65 S.

In der ersten Abhandlung bestimmt Euler die Seiten des sphärischen Dreiecks als kürzeste Verbindungen der Ecken längs der Kugelfläche durch Integration der Bedingungsgleichung, geht also von der Aufgabe der sphäroidischen Trigonometrie aus. In der zweiten leitet er die Formeln durch Betrachtung der Pyramide zwischen den Ecken und dem Mittelpunkte der Kugel her. Die Ausgabe schliesst mit einer kurzen Biographie von Euler und Verweisung auf die ausführliche, enthalten in R. Wolf, Handbuch der Astronomie. Zürich 1890.

H.

Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. In Gemeinschaft mit Friedrich Engel herausgegeben von Paul Stäckel. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauss. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 325 S.

Die Verfasser haben mit grossem Erfolge nach den Vorgängern der für Gründer der nichteuklidischen Geometrie geltenden Lobatschefskij und Bolyai geforscht und teilen im Vorliegenden die gefundenen Urkunden chronologisch mit. Es sind die folgenden: John Wallis 1616—1703. — Girolamo Saccheri 1667—1733. — Johann Heinrich Lambert 1728—1777. — Carl Friedrich Gauss 1777—1855. — Ferdinand Karl Schweikart 1780—1857. — Franz Adolf Taurinus 1794—1874.

H.

Julius Plückers gesammelte mathematische Abhandlungen. Herausgegeben von A. Schoenflies. Mit einem Bildniss Plücker's und 73 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 620 S.

Das Vorliegende ist der erste Band des Gesamtwerks: „Julius Plücker's gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und F. R. Pockels in zwei Bänden“. Er enthält 39 bereits in Zeitschriften erschienene Abhandlungen, während 5 selbständige Bücher noch ausserdem käuflich, daher nicht aufgenommen sind. Der Herausgeber bezeichnet Plücker's productive Wirksamkeit als notwendige Ergänzung der Entwicklung der modernen Geometrie in analytischer und formentheoretischer Richtung neben der von Poncelet, Möbius und Steiner, als ihm eigene fundamentale Gedanken die Methode der abgekürzten Bezeichnung, die Bedeutung der Constantenzahl, den allgemeinen Coordinatenbegriff, die Einführung der Linien- und Ebenencoordinaten, die homogene Schreibweise, die Benutzung überzähliger Coordinaten, den Zusammenhang der Singularitäten und die Liniengeometrie.

H.

Gino Loria, Professore ordinario dell' Università di Genova. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino 1896. Carlo Clausen. 316 S.

Das Vorliegende ist die Geschichte der Zweige der Geometrie, nämlich der folgenden. Nach einem Blicke auf Ursprung und Entwicklung der Geometrie überhaupt vom Altertum bis gegen 1850 wird einzeln behandelt: die Theorie der ebenen algebraischen Curven; der algebraischen Flächen; der algebraischen doppelt gekrümmten Linien; die Differentialgeometrie (so nennt der Verfasser die Untersuchung der Natur der Curven und Flächen in einem Punkte); Untersuchungen über die Form der Curven, Flächen und andern Gebilde, Analysis situs, Configurationen; die Geometrie der Geraden im Raume, Correspondenzen, Darstellungen, Transformationen; die abzählende Geometrie; die Mehrdimensionengeometrie. Manche Theorien sind erklärtermassen ausgeschlossen. Die Erklärungen und Charakterisirungen sind kurz, den Hauptinhalt bildet der Litteraturnachweis.

H.

Das 2000jährige Problem der Trisection des Winkels. Von Ingenieur Sigismund Wellisch. Mit 11 Textfiguren. Wien 1896. Spielhagen u. Schurig. 18 S.

Die Schrift ist eine historisch litterarische freie Besprechung des Problems.

H.

## L e h r b ü c h e r.

K. Koppe's Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höhern Unterrichtsanstalten neu bearbeitet von Prof. Dr. Jos. Diekmann, Director des Progymnasiums mit Realabteilung in Viersen, Dreizehnte Auflage. Mit zahlreichen Uebungen und Aufgaben. I. Teil. Die 10 Grundrechnungen — Die linearen Gleichungen. — Die Potenzrechnungen. Die einfachen quadratischen Gleichungen. Essen 1896. G. D. Bädeker. 176 S.

Im 56. litterarischen Bericht S. 46 ist des Verfassers Lehrbuch der Geometrie besprochen. Zu dem auf dem Titel stehenden Inhalte beider sehr bekannten und verbreiteten Lehrbücher ist wol kaum weiteres hinzuzufügen. II.

Katechismus der Algebra. Vierte Auflage. Vollständig neu bearbeitet von Richard Schurig. Leipzig 1895 J. J. Weber. 236 S.

Im 279. litterarischen Bericht S. 24. ist der 1. Teil von des Verfassers „Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten und beim Selbststudium“ besprochen. Das Vorliegende, obwol Katechismus genannt, stimmt in Lehrweise und didaktischen Gedanken ganz damit überein, so dass alles Gesagte auch hier zutrifft. Es wird hier als 4. Auflage eines Werkes von Herrmann und Heym herausgegeben mit dem Bemerkten, dass der Bearbeiter von der katechetischen Form darin absehen zu müssen geglaubt hat. In der Tat hat auch der Verfasser, indem er vorzugsweise in doctrinären Gebrauch und Benennung einführt, mit grossem Geschick zugleich das geleistet, dass Schüler, die das Erlernen als opus operatum ansehen, leicht und ohne tieferes Eindringen stets den Gedankenzusammenhang gerade hinreichend begreifen. Insofern würde das Buch, als zwischen Katechismus und Lehrbuch die Mitte haltend erscheinen und von manchen Schulen, wo die Mathematik für ein Nebenfach gilt, gern angenommen werden. Allein der Verfasser hat darin die ganz misverstandene Lehre von Null und Unendlich, welche er in seinem Lehrbuche vorgetragen hatte, und deren Unrichtigkeit in jenem Berichte reichlich dargetan worden ist, erneuert. Demnach muss das Buch wegen Verbreitung von Irrtümern für untauglich zur Einführung in Schulen erklärt werden.

Hoppe.

Die Grundlehren der Ebenen Geometrie. Ein Leitfaden für den

Unterricht mit Uebungsaufgaben. Von Jos. Lengauer, Professor am k. alten Gymnasium zu Würzburg. Vierte, umgearbeitete Auflage der Ebenen Geometrie Von A. Stegmann. Kempten 1893. Jos. Kösel. 180 S.

In 2. Auflage ist das Buch im 231. litt. Bericht, S. 30 besprochen worden. Aenderungen fanden am meisten in der 3. Auflage statt. In der 4ten wurden die Fundamentalconstructionen dem Lehrsystem eingereiht. Die Congruenzsätze werden hier nicht mehr auf Euklidische Weise begründet, sondern aus der eindeutigen Construction des Dreiecks gefolgert. II.

Lehrbuch der Geometrie. Herausgegeben von Dr. Fritz Meigen. Mit 150 in den Text gedruckten Figuren. Hildburghausen 1896. Otto Pezoldt. 82 S.

Der Vortrag zeichnet sich durch eine kindlich populäre Darstellungsweise aus, die es den Schwächsten fast unmöglich macht, etwas nicht zu verstehen. Auf den ersten 7 Seiten ist diese auch durchaus exact. Dann aber wird über den Begriffen des Winkels und der Richtung das nötige Dunkel verbreitet, um einen trügerischen Scheinbeweis des Parallelsatzes erschleichen zu können. Aufklärung über das zur Orientirung Notwendige, hier Verschwiegene wird auch später nicht gegeben. Pflege der Unkenntniss ist also das würdige Ziel des Buches. Hoppe.

Lehrbuch der Trigonometrie. Herausgegeben von Dr. Fritz Meigen. Mit 41 in den Text gedruckten Figuren. Hildburghausen 1896. Otto Pezoldt. 59 S.

Das Buch ist hinsichtlich guter Ordnung, klaren Ausdrucks und reichlich dargebotener Mittel mit der Lehre vertraut zu machen musterhaft. Der Lehrgang ist der gewöhnliche und empfehlenswerteste: die Goniometrie ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck nebst Ergänzung durch graphische Darstellung und mit der Addition der Winkel schliessend, dann die Dreiecksberechnung, die Aufgaben über das rechtwinklige vorausschickend. Auf Gebrauch trigonometrischer Tafeln mit logarithmischer Rechnung geht das Lehrbuch nicht ein; eine kleine dreistellige Tabelle reicht für die Uebungsbeispiele gerade hin. Gar nicht erwähnt werden Winkel über  $180^\circ$ , obgleich die graphische Darstellung die Frage nach ihnen nahelegt, und die Addition der Winkel leicht auf solche führen kann. Doch

ist es immer erfreulich, dass das vorliegende Lehrbuch das Schulpensum der Trigonometrie nicht grösser erscheinen lässt, als es wirklich ist, wie es leider oft geschieht. H.

**Die Grundlagen der Stereometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Übungsaufgaben.** Von Jos. Lengauer, Prof. am k. alten Gymnasium zu Würzburg. Kempten 1896. Jos. Kösel. 110 S.

In 3 Abschnitten werden die Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden, die sphärische Geometrie und Trigonometrie in Verbindung mit dem Dreikant, die Lehre vom Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel und Kugel behandelt und Übungsaufgaben dazu gestellt. Die Polyeder, namentlich die regelmässigen, werden nur allgemein definiert, aber in keiner Weise näher in Betracht gezogen. H.

**Mathematische Hauptsätze für Gymnasien. Methodisch zusammengestellt von Dr. Heinrich Bork, Professor am Königl. Prinz Heinrichs-Gymnasium zu Schöneberg bei Berlin. Zweiter Teil: Pensum des Obergymnasiums (bis zur Reifeprüfung).** Leipzig 1896. Dürr. 235 S.

Die Sätze sind vereinigt zu ausgewählten Partien der Planimetrie, Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie. Das Princip der Auswahl ist nicht ausgesprochen. Nun wird aber in diesen Zweigen eine Vorbildung vorausgesetzt, die bereits Bekanntschaft mit der Mathematik in ziemlichem Umfang erteilt hat. Jene Partien scheinen dazu bestimmt zu sein, gewisse Lücken in der Vorbildung auszufüllen, auch wie, sie auszudehnen und ihren Standpunkt zu erhöhen. Besonders bemerkenswert ist die Lehre vom Unendlichen, welche gegenüber einer herrschenden und von Lehrbüchern noch fort und fort gepflegten Unklarheit einmal berichtend und einfach entscheidend auftritt. Hier ist der Lehrsatz (14), welcher die Gleichheit zweier Constanten aus infinitesimaler Bestimmung folgert, in vollem Sinne ein Hauptsatz; er ist es für die gesamte Infinitesimaltheorie. H.

**Der Coordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte** Zunächst eine Ergänzung der Neubearbeitung der Planimetrie von Kambly Zum Gebrauche an Gymnasien nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Hermann Roeder, Oberlehrer am Lyceum I zu Hannover. Mit 36 Figuren Breslau 1893 Ferdinand Hirt. 55 S.

Es werden die ebenen rechtwinkligen Coordinaten erklärt und auf Punkt, Gerade, Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel, letztere nur in einfachster Lage zum Axensystem, angewandt. Didaktischer Gesichtspunkt ist, die räumliche Vorstellung beständig im Auge zu behalten. Daher erscheint die Rechnungsform weniger als Deductions-mittel, vielmehr als Ziel aller Operationen. Am Schlusse werden die genannten Curven ohne Gebrauch von Coordinaten als ebene Schnitte des geraden Kegels hergeleitet. H.

---

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. In zwei Bänden. Erster Band. — Zweiter Band. Mit 28 eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1895. Friedrich Vieweg u. Sohn. 633 S.

Das Buch enthält das gesamte Gebiet der Algebra auf neuestem Standpunkt, der erste Band: die Grundlagen, die Wurzeln und algebraische Grössen. Deren Abschnitte behandeln: rationale Functionen, Determinanten, die Wurzeln algebraischer Gleichungen, symmetrische Functionen, lineare Transformation, Invarianten, Tschirnhausen-Transformation; Realität der Wurzeln, den Sturm'schen Lehrsatz, Abschätzung der Wurzeln, genäherte Berechnung, Kettenbrüche, Theorie der Einheitswurzeln; die Galois'sche Theorie, Anwendung der Permutationsgruppen auf Gleichungen, cyklische Gleichungen, Kreisteilung, algebraische Auflösung von Gleichungen, Wurzeln metacyklischer Gleichungen.

Der 2. Band enthält: Gruppen, lineare Gruppen, Anwendungen der Gruppentheorie, algebraische Zahlen. H.

Naturwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Verfasst von Arwed Fuhrmann, ordentl. Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Dresden. Teil II, der Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Berlin 1890. Ernst u. Kohn. 261 S.

Der Verfasser hat schon bei Herausgabe des I. Teils viel Glück und Erfolg davon geerntet, dass er denjenigen, welche ohne vorausgehendes Studium der höhern Analysis naturwissenschaftliche oder

technische Fächer betrieben, die Kenntniss gerade derjenigen besondern Lehren verschaffte, welche ihnen dabei von Nutzen waren. Es ist nur eine Fortsetzung seines Werkes, dass er jetzt jene Lehren auf die Integralrechnung ausdehnt. Die partiellen Differentialgleichungen bleiben auch diesmal noch ausgeschlossen, daher offen für eine weitere Fortsetzung. Offenbar ist das Unternehmen ein Schritt dazu, dass der Wert des mathematischen Studiums für einen weiten Kreis wissenschaftlicher Forschung mehr und mehr einleuchtet, obgleich es zunächst von der Mühe der Aneignung einer umfangreichen Doctrin zu entbinden und deren Früchte fertig in die Hand zu liefern scheint; denn der Weg durch die allgemeinen Principien der Doctrin führt meist kürzer und leichter zu den Resultaten als das Ausgehen auf specielles Ziel, und Früchte, die man genossen hat, wird man auch gern selbst pflücken wollen — Die Anordnung des Lehrstoffs ist nicht nach Fächern und Verwendungen, sondern nach den Teilen der Theorie getroffen. Die Abschnitte sind: einfache, dann mehrfache Integrationen, Differentialgleichungen erster, dann zweiter Ordnung. H.

## G e o m e t r i e.

Die singulären Punkte der Flächen. Habilitationsschrift zur Erlangung der *venia legendi* an der Königl Technischen Hochschule in Stuttgart vorgelegt von Dr. Ernst Wölffing aus Stuttgart. Dresden 1896 B. G. Teubner. 25 S.

Es wird die Gestalt der Fläche in der Umgebung eines singulären Punktes untersucht. Die Entwicklung der Coordinaten bis auf ersten Term ergibt ein Polyeder, dieses auf eine Ebene projicirt ein Netz. Die Abschnitte der Schrift sind: das analytische Polyeder, die Flächencurven in einem singulären Punkte, das analytische Netz, die Durchdringungscurve zweier Punkte, das Tangentialgebilde, bildliche Darstellung einer Fläche in der Nähe eines singulären Punktes, die Näherungs- und Hilfsflächen, Untersuchung einer Fläche in der Nähe eines singulären Punktes. H.

## M e c h a n i k.

Ballistische Theorien. Beiträge zum Studium neuer Probleme der innern und äussern Ballistik I. Analytische Theorie der Wärmeleitung in Geschützrohren. Von Alois Indra, k. u. k. Major im Festungs-Artillerie-Regimente Graf Colloredo-Mels No. 1. Pola 1893. E. Scharff. 178 S.

Das Gesamtwerk bestimmt der Verfasser für Lösung dreier Probleme betreffend die Wärmeleitung im Geschützrohr, die Stosswirkung der Pulvergase und den Luftwiderstand Für das erste lag die Differentialgleichung schon integrirt von Fourier vor; es ist im gegenwärtigen I. Teile danach bearbeitet. Die auf das zweite bezügliche bisher für unlöslich gehaltene Differentialgleichung ist ihm, wie er sagt, gelungen zu integriren, und es wird dieses Problem die Grundlage einer neuen Theorie der Construction beängter Geschützröhre bilden. Auch die analytische Theorie des Luftwiderstandes rotirender Geschosse hofft er in vollständig neuer und umfassender Weise darzustellen. Die Abschnitte der vorliegenden Bearbeitung sind folgende. Untersuchungen über die Wärmeleitung im Rohre unter blosser Voraussetzung einer innern constanten Wärmequelle. Wärmebewegung im Rohre unter Voraussetzung einer von Schuss zu Schuss unterbrochenen Wärmequelle. Die Temperaturverteilung im unendlichen Kreiscylinder als geometrisches Mittel der Temperaturverteilung im unendlichen Stabe und in der unendlichen Kugel. Temperaturverteilung im unendlichen Cylinder von bogrenzter Länge, wenn die anfängliche Temperatur eine willkürliche gegebene Länge ist. Schlussfolgerungen. Allgemeines Problem der Fortpflanzung der Wärme bei gegebenem innern und äussern Wärmezustande. Anwendung des Problems der Wärmeleitung zur Bestimmung der Stossintensität der Pulvergase. Wärmemitteilung bei Voraussetzung einer als Function der Zeit continuirlich wirkenden Wärmequelle Es folgt zum Schluss eine Tafel des Integrallogarithmus H.

Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug. Mathematisch-mechanische Klärung auf experimenteller Grundlage entwickelt von Friedrich Ritter von Loessl, Oberingenieur. Wien 1896. Alfred Hölder. 304 S.

Der Verfasser äussert sich in allen Stücken befriedigt von dem Erfolge seiner Untersuchungen in Betreff der 3 genannten Probleme, deren Lösung er in den zunächst geforderten Hauptpunkten überzeugt ist, dauernd festgestellt zu haben Die Schuld des bisherigen Mislingen's schreibt er gewissen, hier nicht näher bezeichnuten irrigen

Vorstellungen zu. Auch er geht von vereinfachenden Vorstellungen aus, die er aber durch sorgfältige und vielseitige Experimente soweit gerechtfertigt hat, dass alles darin Vernachlässigte keinen merklichen Einfluss haben kann. Namentlich ist es die Vorstellung, dass eine ebene (oder concave) Platte normal gegen die Luft geführt einen pyramidalen Lufthügel unverändert vor sich her treibt, der fest verbunden mit ihr den Widerstand zum Minimum macht. Letzterer erweist sich dann der Basis bei jeder Gestalt proportional. Ueberall handelt es sich natürlich nur um summarische Hauptgrößen, deren allgemeine Ausdrücke stets sehr einfach ausfallen; detaillirte Bestimmung von Druck in einzelnen Punkten, Luftbewegung u. s. w. bleibt ausgeschlossen. Von den Experimenten und Apparaten wird wenig mitgeteilt. Auch in Betreff des Fluges von Tauben, wo der Verfasser beansprucht, alles Fragliche aus der vorhergehenden Theorie genügend erklärt zu haben, erfährt man nicht, wie die Beobachtung angestellt worden ist.

H.

Traité de mécanique rationnelle Par Paul Appell, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des sciences. Tome premier; Statique, dynamique du point. — Tome deuxième: Dynamique des systèmes, mécanique analytique. Paris 1893 1896 Gauthier-Villars et fils. 549 + 538 S.

Der Verfasser setzt die Eigenheit seines Werkes allein darin, dass die analytische Mechanik schon in den Anfang eingeführt werde. Gerade in diesem Punkte lässt sich indes am wenigsten Verschiedenheit von andern Lehrbüchern erkennen. So ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, obwol es das allgemeinste der Statik ist, doch wie gewöhnlich nicht in den Anfang gestellt. Dagegen finden sich sonst genug charakteristische Verschiedenheiten im Lehrgang. Z. B. bildet hier die Lehre von den Kräftepaaren kein Glied der Statik. Die Themata der Abschnitte sind der Reihe nach folgende: Theorie der Vektoren, Kinematik, Principe der Mechanik (Kräfte, Massen), Arbeit; Gleichgewicht eines Punktes und eines starren Körpers, deformirbare Systeme, Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, Begriff der Reibung; geradlinige Bewegung, Centrakräfte insbesondere elliptische Bewegung der Planeten, Bewegung eines Punkts auf fester oder beweglicher Curve und Fläche, Lagrange's Gleichungen für einen freien Punkt, Alembert'sches, Hamilton'sches Princip und Princip der kleinsten Wirkung — Kanonische Gleichung, Jacobi'scher Satz, Anwendungen, Trägheitsmomente, allgemeine Sätze über die Bewegung der Systeme, Dynamik des starren Körpers, Bewegungen parallel einer Ebene, Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt,

freier starrer Körper relative Bewegung, Alombert'sches Princip, Lagrange's Gleichungen, kanonische Gleichungen, Sätze von Jacobi und Poisson, Princip von Hamilton und kleinster Wirkung, Stoss, Maschinen. H.

---

### Erd- und Himmelskunde.

Astronomischer Kalender für 1897. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien. Jahrg. LIX der ganzen Reihe, XVI. der neuen Folge. Wien, Gerold's Sohn. 159 S

Die Beilagen geben: ein Fixsternverzeichniss, Verzeichniss veränderlicher Sterne, von Nebelflecken und Sternhaufen, Constanten, Uebersicht des Sonnensystems, nämlich Bahnelemente der grossen Planeten, der Satelliten, Verzeichniss der Asteroiden, berechneten Kometen, Sternschnuppenradianten, geographische Positionen, Elemente des Erdmagnetismus, neue Planeten und Kometen. H.

Annuaire pour l'an 1896 — pour l'an 1897. Publié par le Bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Comme tous les ans à pareille époque l'Annuaire du Bureau des Longitudes vient de paraître. L'Annuaire pour 1896 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travailleurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc, enfin les notices suivantes: Les Forces à distance et les ondulations; par M. A. Cornu — Les Travaux de Fresnel en Optique; par M. A. Cornu. — Sur la construction des nouvelles Cartes magnétiques du globe, entreprises sous la direction du Bureau des Longitudes; par M. de Bernardières — Sur une troisième ascension à l'observatoire du sommet du mont Blanc et les travaux exécutés pendant l'été de 1895 dans le massif de cette montagne; par M. J. Jansen. — Notice sur la vie et les travaux du contre-amiral Fleuriais; par M. de Bernardières — Allocutions prononcées aux funérailles de M. E. Bruner; par MM. J. Jansen et F. Tisserand. In-18 de IV-894 pages, avec 2 Cartes magnétiques.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1897 renferme des ar-

ticles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: Notice sur le mouvement propre du système solaire; par M. F. Tisserand — Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen; par M. H. Poincaré — Les époques dans l'Histoire astronomique des planètes; par M. J. Jansen — Notice sur la quatrième Réunion du Comité international pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel; par M. F. Tisserand. — Notice sur les travaux de la Commission internationale des étoiles fondamentales; par M. F. Tisserand. — Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau; par M. A. Cornu. — Discours prononcés aux funérailles de M. Tisserand; par MM. H. Poincaré, J. Jansen et M. Löwy. — Travaux au mont Blanc en 1896; par M. J. Jansen. In-18 de V-918 pages, avec 2 Cartes magnétiques.

Paris.

Gauthier-Villars et fils.



# Mathematische und physikalische Bibliographie.

LII.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Bernhardt, Philipp Melancton als Mathematiker u. Physiker. gr. 8°. (VI, 74 S.) Wittenberg, Wunschmann. 1 Mk.

Epstein, S. S., Hermann v. Helmholtz als Mensch u. Gelehrter. 8°. (92 S.) Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt. 1 Mk.

Ernst, Adf., James Watt u. die Grundlagen des modernen Dampfmaschinenbaues. Eine geschichtl. Studie. Mit dem Bildnis v. James Watt u. 27 Textfig. gr. 8°. (V, 106 S.) Berlin, Springer. 2 Mk.

Fortschritte der Physik im J. 1890. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 46. Jahrg. 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann gr. 8°. (LIV, 780 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 30 Mk.

— dass. im J. 1895. 51. Jahrg. Ebd. — 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (LXXII, 510 S.) 20 Mk. — 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. gr. 8°. (LIV, 686 S.) 25 Mk.

— der Elektrotechnik. 8. Jahrg. 1. u. 5. Hft. Berlin, Springer. à 5 Mk.

Gay-Lussac, premier essai pour déterminer les variations de température qu'éprouvent les gaz en changeant de densité et considérations sur leur capacité pour la calorique. gr. 8°. (14 S.) Leipzig, Barth. 1 Mk.

Hagen, Joa. G., index operum Leonardi Euleri. gr. 8°. (VIII, 90 S.) Berlin, Dames. 2 Mk.

Müller, Chr. Frdr., Henricus Grammateus u. sein Algorismus de integris. gr. 4°. (33 S.) Zwickau, Thost. 1 Mk.

Poggendorff's Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. 3. Bd. 2.—6. Lfg. Leipzig, Barth. à 3 Mk.

Wertheim, Gust., die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. 2. Aufl. gr.8°. (VII, 68 S.) Braunschweig, Vieweg. 3 Mk.

### **Methode und Principien.**

Altmanspöcher, Otto, die Grundlagen unserer Herrschaft über die Zahlen. gr.8°. (III, 52 S.) Leipzig, Dürr'sche B. 1 Mk.

Daneck, Gust., das Rechnen im ersten Schuljahr, zugleich ein Beitrag zur Frage nach dem Wesen u. der Entstehung der Zahl. gr.8°. (III, 173 S.) Leipzig, Klinkhardt. 2 Mk.

Goebel, Karl, die Zahl und das Unendlichkleine. gr.8°. (47 S.) Leipzig, Fock. 1 Mk. 20 Pf.

Lodge, Oliver J., neueste Anschauungen über Elektrizität. Uebers. v. Anna v. Helmholtz u. Estelle du Bois-Reymond. Hrsg. durch Rich. Wachsmuth. 8°. (XV, 539 S. m. Fig.) Leipzig, Barth. 10 Mk.

Scheffler, Herm., das Wesen der Mathematik u. der Aufbau der Welterkenntnis auf mathematischer Grundlage. 2 Bde. gr.8°. I. Die Mathematik. (VI, 409 S. m. 1 Taf.) — II. Das Welt-system. (V, 462 S. m. 2 Taf.) Braunschweig, Wagner. 10 Mk.

Sinram, A., Kritik d. Formel der Newton'schen Gravitations-theorie. gr.8°. (44 S.) Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk.

Steiger, Joh., der geometrische Unterricht in der Volksschule. Zum Gebrauche in Seminarien u. für die Hand des Lehrers methodisch dargestellt. 2. Aufl. gr.8°. (IX, VI, 71 S. m. Fig.) Bühl, Konkordia. Kart. 1 Mk.

### **Lehrbücher.**

Löwenberg, Geo., Lehrbuch der Mathematik. Zum Selbststudium u. für den Unterricht in Prima der höheren Lehranstalten, vermittelnd den Uebergang vom Schulpensum zum Universitätsstudium. gr.8°. (191 u. 8 S. m. Fig.) Leipzig, Arnd. 4 Mk. 50 Pf.

### **Sammlungen.**

Elsner, A., u. R. Sandler, Rechenbuch für Lehrerseminare. Im Anschluss an Dorn's Rechenhefte bearb. I. Tl. Für die Unterstufe der Seminare, sowie für Praeparandenanstalten. 2. Aufl. gr.8°. (II, 223 S.) Breslau, Handel. 2 Mk. 20 Pf.

Fechner, Heinr., Aufgaben für den ersten Rechenunterricht in der Buchstabenrechnung. Resultate. 3. Aufl. gr.8°. (25 S.) Berlin, W. Schulze. 75 Pf.

Funcke, H., methodisch geordnete Aufgaben zu Mehler's Hauptsätzen der Elementar-Mathematik. gr.8°. (IV, 96 S.) Berlin, G. Reimer. 60 Pf.

Groh, Herm., Aufgaben für den Rechenunterricht an Klasse IV höherer Lehranstalten. Nebst einem Anhang zum Kopfrechnen. 8°. (IV, 88 S.) Stuttgart, Kohlhammer. Kart. 90 Pf.

Hegemann, E., Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. gr.8°. (IV, 156 S. m. 37 Abbild.) Berlin, Parey. Geb. 5 Mk.

Hügemeyer, G., u. F. Riethmüller, Rechenbuch f. höhere Mädchenschulen in 9 Hftn. Bearb. nach den Bestimmgn. des preuss. Unterrichtsministers v. 31. Mai 1894. 9 Hfte. gr.8°. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk. 45 Pf.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlung. 1362.—1367. Heft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Knak, P., Rechenbuch für Ackerbauschulen u. landwirtschaftliche Winterschulen. 2. Aufl. 8°. (VIII, 111 S.). Berlin, Parey. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Küffner, Ed. u. Al. J. Ruckert, Rechenbuch für die Volksschule, unter Mitwirkung erfahrener Schulmänner hrsg. 2. u. 3. Lehrheft. 8°. — 2. Der Zahlenraum v. 1—100. (120 S. m Fig.) — 3. Der Zahlenraum v. 1—1000 bzw. bis 10000. (68 S.) Bamberg, Buchner. à 80 Pf.

Lindner, J., 550 Kopfrechnungen, grösstentheils Aufgaben von Anstellungsprüfungen. 2. Aufl. gr.8°. (52 S.) Regensburg, Bauhof. 80 Pf.; Resultate (8 S.) 20 Pf.

Löwe, M., Aufgaben für das kaufmännische Kopfrechnen mit beigefügten Beispielen u. Resultaten. gr.8°. (55 S.) Leipzig, Klinkhardt. 1 Mk. 20 Pf.

Maier, K. G., Sammlung v. Kopfrechnungsaufgaben aus dem Gebiete der Elementar-Arithmetik zum Gebrauch in Schulen, Lehrerbildungsanstalten u. beim Selbstunterricht. 2. Tl. 2. Aufl. 8°. (96 S u Resultate S. 97—112). Stuttgart, Gundert. 1 Mk. 50 Pf.

Rosenberg, Karl, methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra f. Lehrer- u. Lehrerinnen-Bildungs-Anstalten, sowie für andere gleichgestellte Lehranstalten. gr.8° (IV, 247 S.) Wien, Hölder. Geb. 2 Mk. 60 Pf.

Villicus, Frz., Beispiele u. Aufgaben für das kaufmännische Rechnen zum Gebrauche an der Gremial-Handelsfachschule der Wiener

Kaufmannschaft. Für die Vorbereitungsclassen u. I. Classe. gr.8°. (IV, 81 S.) Wien, Pichler. Kart. 1 Mk.

Weisbach's Ingenieur. Sammlung von Tafeln, Formeln u. Regeln der Arithmetik, der theoretischen u. praktischen Geometrie, sowie der Mechanik u. des Ingenieurwesens. 7. Aufl. v. F. Reuleaux. schmal 8°. (XX, 1058 S. m. 746 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 10 Mk.

### Tabellen.

Breusing, Arth., nautische Hülftabellen. 6. Aufl. Hrsg. v. C. Schilling. gr.8°. (325 S. m. 2 Karten.) Bremen, Heinsius. 6 Mk.

Kewitsch, Geo., vierstellige Logarithmen für den Schulgebrauch. gr.8°. (40 S.) Leipzig, Reisland. 80 Pf.

Ligowski, W., Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer u. nautischer Tafeln, nebst Erklärung u. Formeln der Astronomie. (Nautische Tafeln.) 3. Aufl. gr.8°. (XXIII, 252 S.) Kiel, Universitäts-Buchh. 7 Mk.

Schultz, E., vierstellige mathematische Tabellen im engen Anschluss an die mathematischen Tabellen der technischen Kalender. gr.8°. (IV, 80 S.) Essen, Baedeker. Kart. 80 Pf.

Sickenberger, Adf., vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch. 3. Aufl. 12°. (20 S.) München, Th. Ackermann. 40 Pf.

Treutlein, P., vierstellige logarithmische u. goniometrische Tafeln, nebst den nötigen Hülftafeln. 12°. (IV, 73 S.) Braunschweig, Vieweg. 60 Pf.

Zimmermann, Ludw., die gemeinen oder briggschen Logarithmen der natürlichen Zahlen 1—10009 auf 4 Dezimalstellen, nebst einer Produktentafel einer Quadrattafel u. einer Tafel zur Berechnung der Kathete u. Hypotenuse u. zur Bestimmung der Wurzeln aus quadratischen Gleichungen. Zum Gebrauche für Schule u. Praxis. gr.8°. (40 S.) Liebenwerda, Reiss. 50 Pf.

—, Rechentafeln, welche die Produkte aller Zahlen unter Zehntausend in alle Zahlen bis Hundert enthalten u. daher die Multiplikation u. Division mit diesen Zahlen ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber zur Erleichterung u. Sicherung der Rechnung dienen. Grosse Ausg. 4°. (XVI, 205 S.) Ebd. Geb. 5 Mk.

—, Tafeln für die Teilung der Dreiecke, Vierecke u. Polygone. 2. Aufl. gr.8°. (64 S. m. Fig.) Ebd. Geb. 4 Mk.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bendt, Frz., Katechismus der Differential- u. Integralrechnung. 12°. (XVI, 268 S. m. 39 Fig.) Leipzig, Weber. Geb. 3 Mk.

Dedoff, Thdr., Untersuchungen über quadratische Formen. gr.4<sup>o</sup>. (39 S.). Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Hauck, H., u. A. Fr. Hauck, Lehrbuch der Arithmetik für Real-, Gewerbe- u. Handelsschulen. Mit zahlreichen Beispielen u. Übungsaufgaben. (In 3 Tln.) 2. Tl. 2. Abtlg. 5. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (III, 249 S.) Nürnberg, Korn. Geb. 3 Mk.

Koppe's, K., Arithmetik u. Algebra zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, neu bearb. v. Jos. Dickmann. 13. Aufl. 2. Tl. gr.8<sup>o</sup>. Essen, Baedeker. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Kreibig, Jos. Clem., Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik für höhere Handels-Lehranstalten. 3 Tle. gr.8<sup>o</sup>. (IV, 178 — IV, 229 — IV, 238 S.) Wien, Hölder. Geb. 9 Mk. 20 Pf.

Lindenthal, Ernest, Rechenlehre. Leitfaden für den Rechenunterricht in den zwei untersten Klassen der Realschulen u. rangs-gleicher Anstalten. gr.8<sup>o</sup>. (160 S.) Ebd. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Markoff, A. A., Differenzenrechnung. Uebers. v. Theoph. Friesendorff u. Erich Prümm. gr.8<sup>o</sup>. (VI, 194 S.) Leipzig, Teubner. 7 Mk.

Netto, Eugen, Vorlesungen über Algebra. (In 2 Bdn.) 1. Bd. gr.8<sup>o</sup>. (X, 388 S. m. Holzschn.) Ebd. 12 Mk.

Puchberger, Eman., allgemeine Integration der Differentialgleichungen. 4. (Suppl.)-Heft. gr.8<sup>o</sup>. (XV, 29 S.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Rogel, Frz., Theorie der Euler'schen Functionen. gr.8<sup>o</sup>. (45 S.) Prag, Rivnác. 72 Pf.

Servus, H., Regeln der Arithmetik u. Algebra zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. I. Tl. Unter-Tertia, Ober-Tertia u. Unter-Secunda. gr.8<sup>o</sup>. (VI, 180 S.) Berlin, Salle. 1 Mk. 40 Pf.

Stahl, Herm., Theorie der Abel'schen Functionen. gr.8<sup>o</sup>. (X, 354 S.) Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Studnička, F. J., über Potenzdeterminanten u. deren wichtigste Eigenschaften. gr.8<sup>o</sup>. (8 S.) Prag, Rivnác. 16 Pf.

Wallentin, Frz., Lehr- u. Übungsbuch der Arithmetik für die 3. u. 4. Klasse der Realschulen u. anderen gleichstehenden Lehranstalten. 3. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (IV, 101 S.) Wien, Gerold. Geb. 1 Mk. 40 Pf.

### Geometrie.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch v. Max Lukat. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. gr.8<sup>o</sup>. (IV u. S. 1—336). Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Binder, Wilh., Theorie der unicursalen Plancurven 4. bis 3. Ordng. in synthetischer Behandlung. Mit 65 Fig. im Text u. auf 2 Tafeln. gr.8° (XI, 396 S.) Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Bolte, F., Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie zum Gebrauche an Navigationsschulen. gr.8° (48 S. m. Fig.) Hamburg, Peuser. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Carda, Karl, elementare Bestimmungen der Punkttransformationen des Raumes, welche Flächeninhalte invariant lassen. gr.8° (4 S.) Wien, Gerold. 10 Pf.

Hartl, Hans, Lehrbuch der Planimetrie. Für den Unterrichtsgebrauch u. für das Selbststudium verfasst. Mit 216 in den Text gedruckten Figuren, einer Tabelle u. zahlreichen Uebungsbeispielen. gr.8° (VII, 135 S.) Wien, Deuticke. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Hürten, Karl, Anfangsgründe der Raumlehre, planmässig dargestellt. 1. Hft. gr.8° (63 S. m. Fig.) Münstereifel, Schulte. Kart. 1 Mk.

Jentzen, Ed., darstellende Geometrie für technische Lehranstalten u. Handwerkerschulen. 2. Aufl. Mit 22 Taf. in 4°. gr.8° (VIII, 36 S.) Rostock, Werther. In Mappe 5 Mk

Kleinschmidt, Emerich, Leitfaden der Geometrie u. des geometrischen Zeichnens f. Knaben-Bürgerschulen. Mit 345 in den Text gedr. Abbildgn., 6 Fig.-Taf. u. über 600 Uebungsaufgaben. gr.8° (II, 218 S.) Wien, Hölder. Geb. 2 Mk. 64 Pf.

Kröger, M., die Planimetrie in ausführlicher Darstellung u. mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorieen. Nebst einem Anhang über Kegelschnitte. Mit ungefähr 800 Figuren im Text u. mehr als 1200 Uebungssätzen u. Konstruktionsaufgaben. Für den Handgebrauch des Lehrers u. für den Selbstunterricht bearb. gr.8° (VIII, 511 S.) Hamburg, Meissner. 8 Mk.

Küpper, Carl, Nachtrag zu den „*k*-gonal. Curven“. gr.8° (9 S.) Prag, Rivnác. 20 Pf.

Lilienthal, E. v., Grundlagen e. Krümmungslehre der Curvenscharen. gr.8° (VII, 114 S.) Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Močnik's geometrische Formenlehre für Lehrerinnen-Bildungsanstalten. 3. Aufl. bearb. v. Ed. Sykora. gr.8° (IV, 140 S. m. 150 Holzschn.) Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

—, Lehrbuch der Geometrie für Lehrerbildungsanstalten. 4. Aufl. bearb. v. Ed. Sykora. gr.8° (IV, 18) S. m. 214 Holzschn. Ebd. 1 Mk. 60 Pf.

Staudé, Otto, die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung. Ein neues Capitel zu den Lehrbüchern der analyt. Geometrie des Raumes. gr.8° (VIII, 185 S. m. 49 Fig.) Leipzig, Teubner, 7 Mk.

Sturm, Rud., die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. 3.(Schuss)-Thl. Die Strahlencomplexe 2. Grades. gr.8°. (XXIV, 518 S.) Leipzig, Teubner 18 Mk.

Waelsch, Emil, über die Lamé'schen Polynome 2. Ordng. einer Form 5. Ordng. gr.8°. (8 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

### Trigonometrie.

Servus, H., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie Zum Gebrauche an höh. Lehranstalten, sowie zum Studium. gr.8°. (IV, 94 S.) Berlin, Friedberg & Mode. 1 Mk. 50 Pf.

— trigonometrisches Nachschlagebuch. Eine Sammlung trigonometrischer Formeln. gr.8°. (IV, 106 S.) Ebd. 2 Mk.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Arbeiten, astronomisch-geodätische. Veröffentlicht v. der kgl. bayer. Commission für die internationale Erdmessung. 1. Hft. Polhöhen u. Azimutbestimmungen auf der Station Altenburg bei Bamberg. 2. Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Stationen München u Bamberg auf telegraphischem Wege. gr.4°. (V, 136 S.) München, Franz. 7 Mk.

Fuhrmann, Arwed, die Kippregel, deren Verwendung, Prüfung u. Berichtigung. Ein Leitfaden für Architekten, Bautechniker Landmesser etc. gr.8°. (VI, 38 S. m. Fig.) Leipzig, Seemann. 1 Mk. 25 Pf.

Landes-Triangulation, die kgl. preussische. Hauptdreiecke. 8. Thl. A Die Hannov. Dreieckskette. B. Das Basisnetz b. Meppen. C Das Wesernetz. Gemessen u. bearb. v. der trigonometr. Abtheilg. der Landesaufnahme. Mit 1 Uebersichtskarte u. 24 Skizzen. Lex. 8°. (XII, 500 S.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 15 Mk.

Verhandlungen der 11. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung und deren permanenten Commissionen. Red. v. A. Hirsch. I. Thl. Sitzungsberichte. II. Thl. Spezialberichte über die Fortschritte der Erdmessung u. Landesberichte über die Arbeiten in den einzelnen Staaten. (Deutsch u. Französ.) gr.4°. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Vermessungswesen, das, der kgl. Haupt- u. Residenzstadt Dresden. Die Triangulationen I., II., III. Ordng. Im Auftrage des Raths zu Dresden bearb. v. Stadt-Vermessungsamt. 1. Bd. gr.4°. (XI, 191 S. m. 36 Fig. u. 3 Taf.) Dresden, Baensch. 8 Mk.

### Mechanik.

Cranz, Carl, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. gr. 8°. (XII, 511 S. m. 110 Fig.) Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Wirtinger, W., über eine Eigenschaft der Potentiale unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes. gr. 8°. (12 S.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Zimmermann, H., die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Lex. 8°. (VII, 46 S. m. 9 Holzschn., 4 Tab. u. 4 Taf.) Berlin, Ernst & Sohn. 6 Mk.

### Technik.

Canter, O., die Technik des Fernsprechwesens in der deutschen Reichs-, Post- u. Telegraphen-Verwaltung. 2. Aufl. gr. 8°. (XII, 158 S. mit 119 Abbild.) Breslau, Kera. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

David, Ludw. u. Charles Scolik, photographisches Notiz- u. Nachschlagebuch für die Praxis. Mit 5 Kunstbeilagen. 5. Aufl. 12°. (XII, 254 S. m. Abbild.) Halle, Knapp. Geb. 4 Mk.

Eder, Jos. Maria, ausführliches Handbuch der Photographie. Mit etwa 200 Holzschn. u. 19 Taf. 14. Hft. (4. Bd. 3. Hft.) Das Pigmentverfahren u. die Heliogravure. gr. 8°. (XI, S. 307 — 555 u. XIV S.) Ebd. 6 Mk.

—, Recepte u. Tabellen f. Photographie u. Reproduktionstechnik, welche an der k. k. Lehr- u. Versuchsanstalt für Photographie u. Reproduktionsverfahren in Wien angewendet werden. 4. Aufl. 8°. (XII, 132 S. m. 1 Tab.) Ebd. 2 Mk.

—, indirecte Methoden zur Wiedergabe der Farben in der Photographie. Vortrag. 8°. (20 S. m. 3 Abbild.) Wien, Braumüller. 50 Pf.

Elbs, Karl, die Akkumulatoren. Eine gemeinfassliche Darstellung ihrer Wirkungsweise, Leistung u. Behandlung. 2. Aufl. gr. 8°. (46 S. m. 3 Fig.) Leipzig, Barth. 1 Mk.

Erfurth, C., Haustelegaphie, Telephonie, Blitz-Ableiter, Feuertelegaphen u. Einrichtung elektrischer Lichtanlagen in Theorie u. Praxis. Mit alleiniger Berücksichtigung der Bedürfnisse, derjenigen, die sich mit Einrichtung solcher Anlagen beschäftigen wollen zusammengestellt u. mit über 260 Abbildgn. ausgestattet. 3. Aufl. gr. 8°. (X, 306 S.) Langenberg, Joost. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Ferraris, Galileo u. Ricardo Arnö, ein neues System zur elektrischen Vertheilung der Energie mittelst Wechselströmen. Uebers. von Carl Heim. gr. 8°. (31 S. m. 14 Abbild.) Weimar, Steinert. 1 Mk. 35 Pf.

Gaisberg, S. v., Taschenbuch für Monteure elektrischer Be-

leuchtungsanlagen. 12. Aufl. 12°. (VIII, 188 S. m. 131 Fig.) München, Oldenbourg. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Holst, A., Elektrotechniker. 14.—19. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Hoyer, Egbert v., kurzes Handbuch der Maschinenkunde. 9. Lfg. gr. 8°. (S. 769—864.) München, Th. Ackermann 2 Mk. 40 Pf.

Kraftübertragung u. Kraftverteilung, elektrische. Nach Ausführungen durch die allgemeine Elektrizitätsgesellschaft Berlin. 2. Ausg. 8°. (326 S. m. 170 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 4 Mk.

Kretschmann, Hans, die Photographie eine Kunst? Unter besonderer Berücksichtigung der künstlerischen Selbsterziehung des Liebhaberphotographen speciell für Landschaftsphotographie. Mit 2 Kunstbeilagen u. Heliogravuren. gr. 8°. (IV, 108 S.) Halle, Peter. 2 Mk.

Kröhnke, G. H. A., Handbuch zum Abstecken v. Curven auf Eisenbahn- u. Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel u. Radien auf's Sorgfältigste berechnet u. hrsg. 13. Aufl. 12°. (VII, 164 S. m. 1 Taf.) Leipzig, Teubner. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

Lechner's photographische Bibliothek. I. u. IV. gr. 8°. Wien. Lechner. — I. Anleitung zum Photographiren v. Lud. David. I. Für Anfänger. 7. Aufl. Mit 2 Lichtdr.-Beilagen u. 71 Textbildern. (V, 105 S. 2 Mk. — IV. Die theoretische Grundlage für die Herstellung der Stereoskopbilder auf dem Wege der Photographie u. deren sachgemässe Betrachtung durch Stereoskopie v. Ant. Steinhäuser. (VI, 149 S. m. 42 Fig.) 4 Mk.

Liebetanz, Frz., die Elektrotechnik aus der Praxis — für die Praxis. In ihrem gesamten Umfange auf Grund der neuesten Erfahrungen gemeinverständlich geschildert. 2. Aufl. Mit 181 Abbildgn. u. den Porträts Edison, Schuckert, Siemens u. Volta. gr 8° (XVI, 288 S.) Düsseldorf, Gerlach. 3 Mk.

Lueger, O., Lexicon der Technik. 16.—19. Abtlg. Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt. à 5 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 14.—17. Lfg. Jena, Costenoble. à 3 Mk.

Müller-Berlossa, J. Aug., Anleitung zum Rechnen mit dem logarithmischen Rechenschieber, durch Beispiele erläutert u. mit 2 lithogr. Tafeln versehen. 2. Aufl. gr. 8°. (IV, 60 S.) Zürich, Rausstein. 1 Mk. 80 Pf.

Ritter, Aug., Lehrbuch der technischen Mechanik. 7. Aufl. gr. 8°. (XV, 793 S. m. 861 Fig.) Leipzig, Baumgärtner. 18 Mk.

Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Hrsg. v. Ernst Voit. 1. Bd. 2. Hft. Grundlagen für die Berechnung u. den Bau der elektrischen Bahnen u. deren praktische Benutzung. Von Max Corsepius. gr. 8°. (S. 75—114.) Stuttgart, Enke. 1 Mk.

Scholz's, E. F., Führer des Maschinisten. Unter Mitwirkung v. F. Reuleaux bearb. v. Ernst A. Brauer. 11. Aufl. 3. Abdr. 8°. (XXII, 730 S. m. 434 Holzschn.) Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Schwartze, Thdr., Katechismus der Elektrotechnik. Ein Lehrbuch für Praktiker, Chemiker u. Industrielle. 6. Aufl. 12°. (XV, 426 S. m. 256 Abbild.) Leipzig, Weber. Geb. 4 Mk. 50 Pf.

Schutz, E., Anleitung zum Gebrauche der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. gr. 16°. (30 S. m. Fig.) Essen, Baedeker. 40 Pf.

Sennewald, F., 18 Wandtafeln für den Unterricht in der Elektrotechnik. (à 90 × 66 cm.) Hamburg, Griese. 21 Mk. 60 Pf.

Thompson, Sylvanus P., die dynamoelektrischen Maschinen. Ein Handbuch für Studierende der Elektrotechnik. 5. Aufl. Uebers. v. C. Grawinkel. Besorgt v. K. Strecker u. F. Vesper. Mit 520 in den Text gedruckten Abbildgn. u. 19 grossen Fig.-Tafeln. 1. Thl. gr. 8°. (VII, 374 S.) Halle, Knapp. 12 Mk.

—, dass. 5.—7. Hft. Ebd. à 2 Mk.

Vogler, A., Jedermann Elektrotechniker. Anleitung zur Herstellung der hauptsächlichsten elektrischen Apparate u. elektrischen Leitungen. 2 Bdehn. 8°. Leipzig, Schäfer. 2 Mk. 70 Pf.

#### Optik, Akustik und Elasticität.

Helmholtz, H. v., Handbuch der physiologischen Optik. 2. Aufl. Mit 254 Abbildgn. im Text u. 8 Tafeln. 13. -17. Lfg. gr. 8°. (XIX u. S. 961—1334.) Hamburg, Voss. 15 Mk.

Meyer, Paul, die Doppelkraft des Lichtes u. ihre Metamorphose. Ein monistisch-antimaterialistisches Natursystem. gr. 8°. (IV, 273 S.) Leipzig, Mutze. 4 Mk.

Schollmeyer, G., das Licht. Das Wissenswerteste aus der Lehre vom Lichte mit besonderer Berücksichtigung der neuesten Entdeckungen auf diesem Gebiete (Röntgen-Strahlen, Tesla-Licht) gr. 8°. (III, 88 S. m. 44 Abbild.) Neuwied, Heuser. 1 Mk. 50 Pf.

#### Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen aus dem magnet. Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. Ausgeführt i. Auftr. des Reichs-Marine-Amts unter Leitung v. C. Börgen. 4. Thl. Stündliche Variations-Beobachtgn. der Deklination während d. J. 1889—1895. gr. 4°. (IV, 53 S.) Berlin, Mittler & Sohn. 2 Mk. 50 Pf.

—, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt u. hrsg. v. der deutschen Seewarte. VII. Hft. Die Beobachtungen von I. Labrador,

4 Stationen. Jahrg. 1890. II. Walfischbai, Jahrg. 1892. III. Apia, Jahrg. 1892. IV. Apia, Jahrg. 1893. V. Bukoba u. Tabora, Jahrg. 1893. VI. Bagamoyo, Jan.-Nov 1893. VII. Kilwa, Jahrg. 1893. VIII Lindi, Jan., Febr. u. Juni-Dec. 1893. IX. Tanga, Jahrg. 1893. gr. 4<sup>o</sup>. (VII, 71 S.) Hamburg, Friderichsen. 7 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie, hrsg. v. W. Valentiner. 1. Bd. Mit 241 Abbild. u. 3 Taf. gr. 8<sup>o</sup>. (XIV, 839 S.) Breslau, Trewendt. 24 Mk.

Hartmann, Johs., die Beobachtung der Mondfinsternisse. Lex. 8<sup>o</sup>. (III, 98 S. m. 4 Fig.) Leipzig, Hirzel. 5 Mk.

Holetschek, Joh., Untersuchungen über die Grösse u. Helligkeit der Kometen u. ihrer Schweife. I. Die Kometen bis zum J. 1760. gr. 4<sup>o</sup>. (258 S.) Wien, Gerold. 7 Mk. 2) Pf.

Jahresbericht des Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogthum Baden mit den Ergebnissen der meteorolog. Beobachtungen u. der Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein u. seinen grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1895 u. mit den Mittelwerten für den fünfjährigen Zeitraum 1891—1895. gr. 4<sup>o</sup>. (IV, 111 S. m. 10 Taf.) Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

König, Helmuth, Dauer des Sonnenscheins in Europa. Eine meteorolog. Studie. gr. 4<sup>o</sup>. (89 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Littrow, Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. 8. Aufl. v. Edm. Weiss. Mit 14 Taf. u. 155 Holzschn. Illusr. gr. 8<sup>o</sup>. (XXIII, 1090 S.) Berlin, Dümmler. 14 Mk.

—, dass. 34. u. 35. Lfg. Ebd. à 40 Pf.

Luksch, Jos., vorläufiger Bericht über die physikalisch-oceanographischen Untersuchungen im Rothen Meere. Oktob. 1895 — Mai 1896. gr. 8<sup>o</sup>. (32 S. m. 2 Kartenskizz.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Polis, P., über wissenschaftliche Ballonfahrten u. deren Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Vortrag. gr. 8<sup>o</sup>. (27 S. m. Abbild.) Aachen, Meteorolog. Station. 1 Mk. 40 Pf.

Rüfli, J., Grundlinien der mathematischen Geographie. Für Sekundarschulen bearb. gr. 8<sup>o</sup>. (40 S. m. 14 Fig.) Bern, Schmid & Francke. 50 Pf.

Seeliger, H., die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. gr 4<sup>o</sup>. (66 S. m. 1 Taf.) München, Franz. 2 Mk. 20 Pf.

Spitaler, R., Bahnbestimmung des Cometen 1890. VII. (Spitaler). gr. 4<sup>o</sup>. (22 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

Unterweger, Johs., über zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken, Kometen u. Klimaschwankungen. Vorläufige Mittheilg. Imp. 4<sup>o</sup>. (7 S. m. 1 Taf.) Ebd. 90 Pf

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorolog. Instituts. Hrsg. durch Wilhelm v. Bezold. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung i. J. 1892, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1892. Beobachtungssystem im Königreich Preussen u. benachbarten Staaten. 3. Hft. gr. 4<sup>o</sup>. (XVIII u. S. 99—289 u. 1 farb. Karte) Berlin, Asher & Co. 9 Mk.

—, dass. 1896. 1. Hft. gr. 4<sup>o</sup>. (56 S.) Ebd. 3 Mk.

Wolf, J., kleine gemeinverständliche Himmelskunde. (Mathematische Geographie.) Zugleich Begleitwort zu dessen Wandtafeln zur Himmelskunde. gr. 4<sup>o</sup>. (32 S. m. Fig.) Esslingen, Lung. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift der oesterr. Gesellschaft für Meteorologie. Namen- u. Sachregister zu den Bdn. I—XX, 1866—1885. Bearb. v. St. Kostlivy. Lex. 8<sup>o</sup>. (152 S.) Wien, Hölzel. 4 Mk. 50 Pf.

Ziegler, Jul., u. Walt. König, das Klima v. Frankfurt a/M. Eine Zusammenstellung der wichtigsten meteorologischen Verhältnisse v. Frankfurt a/M. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, LXXXIV, 51 S. mit Diagrammen u. 10 Taf.) Frankfurt a/M. Koenitzer's Buchh. 6 Mk.

### Nautik.

Segel-Handbuch für die Nordsee. Hrsg. v. Reichs-Marineamt. 1. Thl. 4. Hft. Die Hoofden. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XIII, 396 S. m. 28 Holzsch. u. 2 Taf.) Berlin, Reimer. Geb. 4 Mk.

### Physik.

Beck, W., die Elektrizität. 6.—38. Hft. Leipzig, Wiest. à 10 Pf.

Benndorf, Hans, Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Gastheorie. gr. 8<sup>o</sup>. (21 S.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Börner, H., physikalisches Unterrichtswerk f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik in 2 Stufen. 2. Stufe. III. Grundriss der Physik für die drei oberen Klassen der Gymnasien. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 371 S. mit 267 Abbild.) Berlin, Weidmann. Geb. 4 Mk. 80 Pf.

Brandt, G., Schulphysik für Gymnasien nach Jahrgängen geordnet. 1. Tl. Obertertia: Mechanik u. Wärmelehre. Untersekunda: Magnetismus, Elektrizität, Akustik u. Optik. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VI, 93 S. m. Abbild.) Berlin, Simion. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Busch, Fr., 100 Versuche zur Ableitung elektrischer Grundgesetze. gr 8°. (34 S. m. 18 Fig.) Münster, Aschendorf. 75 Pf.

Drude, P., zur Theorie stehender elektrischer Drahtwellen Lex. 8°. (110 S. m. 1 Taf.) Leipzig, Hirzel. 5 Mk.

Erben, Fritz, Ueber die Abhängigkeit der Polarisation v. Platinelektroden von der Temperatur. gr. 8°. (19 S. m. 3 Fig.) Wien, Gerold. 70 Pf.

Exner, Frz., u. E. Haschek, üb. die ultravioletten Funken-spektra der Elemente. II. Mittheilg. gr. 8°. (48 S. u. 5 Taf.) Wien, Gerold. 2 Mk.

—, dass. III. u. IV. Mittheilg. Ebd. 3 Mk. 40 Pf.

Forbes, Geo., elektrische Wechselströme u. unterbrochene Ströme. Nach 3 Vorträgen. Deutsch v. J. Kollert. 8°. (VI, 100 S. m. 38 Fig.) Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch der Erfindungen u. Fortschritte auf dem Gebiete der Physik, Chemie u. chemischen Technologie, der Astronomie u. Meteorologie. Begründet v. H. Gretschel u. H. Hirzel. Hrsg. v. A. Berberich, G. Bornemann u. Otto Müller. 32. Jahrg. 8°. (VI, 380 S. m. 14 Holzschn.) Ebd. 6 Mk.

Kerntler, Frz., die elektrodynamischen Grundgesetze u. das eigentliche Elementargesetz. gr. 8°. (VII, 68 S.) Budapest, Selbstverl. 2 Mk.

Klemenčič, Ign., über permanente Magnete aus steirischem Wolframstahl. gr. 8°. (11 S.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Kolářek, Frz., über Berechnung der Inductionscoefficienten langer Spulen. gr. 8°. (35 S.) Prag, Rivnáč. 72 Pf.

Koppe's, K., Anfangsgründe der Physik mit Einschluss der Chemie u. mathematischen Geographie. 22. Aufl. Ausg. B. in 2 Lehrgängen. Für höhere Lehranstalten nach den preuss Lehrplänen von 1891 bearb. v. A. Husmann. I. Tl. Vorbereitender Lehrgang. gr. 8°. (IX, 213 S. m. 173 Holzschnitten.) Essen, Baedeker. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Körner, Frz., Lehrbuch der Physik f. höhere Lehranstalten zum Selbstunterricht. gr. 8°. (V, 432 S. m. 642 Abbild. u. 2 Farbentaf.) Wien, Deuticke. 6 Mk 60 Pf.

Lampa, Ant., üb. die Brechungsquotienten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen. gr. 8°. (14 S. m. 2 Fig.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Mach, E., die Principien der Wärmelehre: Historisch-kritisch entwickelt. gr 8°. (VIII, 472 S. m. 105 Fig. u. 6 Porträts. Leipzig, Barth. 10 Mk.

Müller's, Joh., Grundriss der Physik mit besond. Berücksichtigung von Molekularphysik, Elektrotechnik u. Meteorologie,

bearb. v. O. Lehmann. 14. Aufl. gr. 8°. (XXIV, 820 S m. 810  
Abbild. u. 2 Taf.) Braunschweig, Vieweg. 7 Mk. 50 Pf.

Mützel, K., über Röntgen-Strahlen. gr. 8°. (28 S.) Breslau,  
Preuss & Jünger. 60 Pf.

Panesch, Karl Geo., Röntgen-Strahlen. Skotographie u. Od.  
Nach den neuesten Forschungen leichtfasslich dargestellt gr. 8°.  
(VII, 65 S. m. 19 Abbild.) Neuwied, Heuser. 1 Mk. 50 Pf.

Reiff, R., Theorie molekular-elektrischer Vorgänge. gr. 8°.  
(IX, 493 S.) Freiburg i. Br., Mohr. 6 Mk.

Schweiger-Lerchenfeld, A. v., das Buch der Experimente.  
Physikalische Apparate u. Versuche. — Mechanische Operationen.  
— Naturwissenschaftliche Liebhabereien. Mit 425 Abbildgn. u. Fig.  
im Texte u. 1 Beilage. gr. 8°. (VIII, 392 S.) Wien, Hartleben.  
Geb. 6 Mk.

Tannert, A., der Sonnenstoff als Zukunftslicht u. Kraftquelle.  
Eine physikalische Entdeckung. gr. 8°. (VI, 47 S. m. 1 Abbild.)  
Neisse, Tannert. 2 Mk.

Voller, A., Mittheilungen über einige im Hamburger physika-  
lischen Staats-Laboratorium ausgeführten Versuche mit Röntgen-  
strahlen. Lex. 8°. (17 S. m. 7 Taf.) Hamburg, Gräfe & Sillem.  
3 Mk.

#### Vermischte Schriften.

Abhandlungen des kgl. sächs. meteorologischen Institutes  
1. Hft. Vier Abhandlungen über Periodizität des Niederschlages,  
heoretische Meteorologie u. Gewitterregen. Von Paul Schreiber.  
Hrsg. v. der Direktion des kgl. sächs. meteorolog. Institutes in Chem-  
nitz. gr. 4°. (XV S. u. 148 Sp. m. 5 Fig. u. 4 Taf.) Leipzig, Felix  
4 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn  
Hrsg. v. Roland Baron Eötvös, Jul. König, Karl v. Than. Red. v.  
J. Fröhlich. 13. Bd. (Jan.-Dec. 95.) 1. Hälfte. (192 S. m. 3 Taf.)  
Budapest, Akademie d. Wissensch. 4 Mk.

— der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathe-  
mat.-physikalische Classe. 1896. II u. III. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Lurtz, Frz Ed., Rechenschule. 3. Tl. 6. Aufl. (Kronen-  
währung.) 8°. (248 S.) Kronstadt, Zeidner. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Ostwald's, W., Klassiker der exakten Wissenschaften. 76—79.  
8°. Leipzig, Engelmann. Kart. — 76. Theorie der doppelten  
Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik v.  
F. E. Neumann. (1832). Hrsg. v. A. Wangerin. (52 S.) 80 Pf. —  
77. Ueber die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten.

Von C. G. J. Jacobi. (1841). Hrsg. v. P. Stäckel. (73 S.) 1 Mk. 20 Pf. — 78. Ueber die Functionaldeterminanten. Von C. G. J. Jacobi. (1841). Hrsg. v. P. Stäckel. (72 S.) 1 Mk. 20 Pf. — 79. Zwei hydrodynamische Abhandlungen v. H. Helmholtz. I. Ueber Wirbelbewegungen. (1858). II. Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen (1868.) Hrsg. v. A. Wangerin. (80 S.) 1 Mk. 20 Pf.

Repetitions-Bibliothek. Nr. 51—60. 128°. Halberstadt, A. Bange. à 30 Pf. — 51. Molekularphysik u. Akustik. (89 S.) — 52. 53. Mechanik (89 u. 87 S.) — 54. 55. Wärmelehre (84 u. 84 S.) — 56. 57. Optik. (94 u. 86 S.) — 58. Statische Elektrik. (100 S.) — 59. 60. Dynamische Elektrik. (88 u. 83 S.)

Sammlung Göschen. 48 u. 54. Bdchn. 12°. — 48. Beispiel-Sammlung zur Arithmetik u. Algebra. v. Herm. Schubert. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet. (144 S.) — 54. Meteorologie v. Wilh. Trabert. (149 S. m. 49 Abbild. u. 7 Taf.). Leipzig, Göschen. à 80 Pf.

Schollmeyer, G., Was muss der Gebildete von der Elektrizität wissen. Gemeinverständliche Belehrung über die Kraft der Zukunft. 5. Aufl. gr. 8°. (III, 96 S. m. 39 Fig.) Neuwied, Heuser. 1 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte, Münchener. Mathematische Classe. 1896. 2. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf

—, Wiener. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien, Gerold. — Abth. I. 105. Bd. 1.—7. Hft. 12 Mk. 70 Pf. — Abth. IIa 105. Bd. 2.—6. Hft. 8 Mk. 60 Pf. — Abth. IIb. 105. Bd. 3.—7. Hft. 7 Mk. 40 Pf. — Abth. III. 105. Bd. 1.—5. Hft. 5 Mk. 30 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 31. Jahrg. 2. Hft. Leipzig, Engelmann 2 Mk.

---

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung** (H. Ehlers & Co.)  
*Leipzig u. Dresden.*

## **Lehrbuch** der **analytischen Geometrie.**

**I. Teil: Lehrbuch der analytischen Curventheorie**, nebst 2 vorausgehenden Abschnitten, enthaltend die Theorie der linearen Raumgebilde und die Kinetik.

**II. Teil: Principien der Flächentheorie. 2. Auflage.**

Von

**Dr. R. Hoppe,**

Professor an der Universität Berlin.

Geh. Preis à 1 Mk 80 Pf.

Fig. 1.

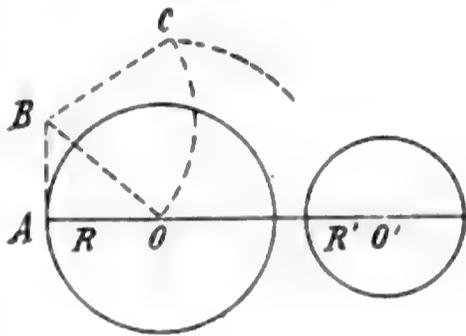
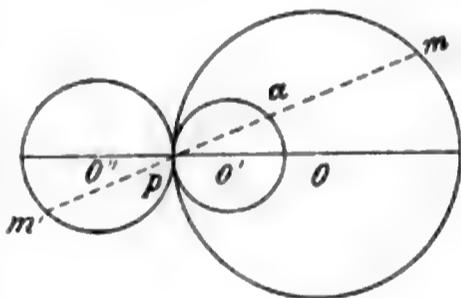


Fig. 2.



**a:** Radical - Kreise.



# Litterarischer Bericht

## LX.

### L e h r b ü c h e r.

Die Elemente der Arithmetik. Für den Schulunterricht bearbeitet von H. Seeger, Director des Realgymnasiums zu Güstrow. Erster Teil. Buch I. Pensum der Quarta. Buch II. Pensum der Untertertia. Zweiter Teil. Buch III. Pensum der Obertertia. Buch IV. Pensum der Untersecunda. Buch V. Pensum der Obersecunda. Zweite Auflage. Güstrow 1897. Opitz u. Co. 112 + 159 S.

Das Buch ist in 1. Auflage im 223. litterarischen Bericht, S. 25 besprochen worden. Das Gesagte ist hinreichend auch das gegenwärtige zu charakterisiren. H.

K. Koppe's Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höhern Lehranstalten neu bearbeitet von Prof. Dr. Jos. Diekmann, Director des Progymnasiums mit Realabteilung in Viersen. Dreizehnte Auflage mit zahlreichen Uebungen und Aufgaben. II. Teil. Essen 1897. G. D. Bädeker. 204 S.

Der I Teil, bearbeitet von Dahl in 12. Auflage, ist im 274. litterarischen Bericht besprochen. Im II. Teile kommen folgende Lehrgegenstände hinzu: Lösbare Gleichungen höhern Grades mit 1 Unbekannten; Gleichungen höhern Grades mit mehreren Unbekannten; geometrische Reihen; arithmetische Reihen; der binomische Lehrsatz; Exponentialreihe; complexe Zahlen; logarithmische Reihe;

combinatorische Rechnungen; Kettenbrüche; diophantische Gleichungen; Auflösung der Gleichungen 3. u. 4. Grades; numerische Gleichungen höhern Grades, Maxima und Minima. H.

**Niedere Analysis.** Von Dr. B. Sporer. Mit 6 Figuren. Leipzig 1897. G. J. Göschen. 173 S.

Unter dieser Bezeichnung werden behandelt: die Kettenbrüche, die Combinationslehre, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, arithmetische Reihen höherer Ordnung, Interpolation, unendliche Reihen, die Theorie der Gleichungen. H.

**Algebra.** Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen, bearbeitet von Wilhelm Winter, Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium zu Regensburg. Zweite Auflage. München 1895. Theodor Ackermann. 318 S.

Die erste Auflage dieses Lehrbuchs ist im 40. litterarischen Bericht, Seite 36 besprochen. In der zweiten ist, ausser dem Wegfall des Abschnitts über Combinatorik, nichts wesentlich geändert. Entgegen der Aussage des Verfassers, dass er bemüht war, die der ersten Auflage noch anhaftenden Mängel sorgfältig zu verbessern, ist vielmehr zu bemerken, dass die Erklärung der Gleichheit, deren Unrichtigkeit nach jeder Seite hin in jenem Berichte ausführlich dargetan war, unverändert in die 2. Auflage übergegangen ist.

Hoppe.

**Lehrbuch der Mathematik.** Zum Selbststudium und für den Unterricht in Prima der höheren Lehranstalten vermittelnd den Uebergang vom Schulpensum zum Universitätsstudium. Von Dr. Georg Loewenberg, Director der Oeffentlichen Conditionir-Ausstatt in Berlin. Leipzig 1897. J. J. Arnd. 189 + 8 S.

Die in dem Buche behandelten Lehrgegenstände werden unter den Titeln ausgeführt: sphärische Trigonometrie, Grundzüge der Astronomie, analytische Geometrie, Rechentheorie, Gleichungen höhern Grades, Einführung in die Differential- und Integralrechnung, Einleitung in die Determinantentheorie und Anwendung derselben zur Auflösung linearer Gleichungen. Ob die hier dargebotene Vermittelung des genannten Uebergangs jemandem von Nutzen sein kann, mögen diejenigen beurteilen, welche das Buch gebraucht haben. Die Lehrweise von Anfang bis zu Ende zeigt im Gegenteile, dass, wenn nach vollendetem Gymnasialcursus der Anfang des Studiums der höhern Mathematik Schwierigkeit bieten sollte, diese im Vor-

liegenden sehr vermehrt auftritt. Hier gibt es nicht bloss zu erlernen, sondern auch zu erraten, was der Verfasser meint; denn fast alle Aussagen sind unvollständig bestimmt und lassen Zweifel, in welchem Sinne man sie verstehen soll. Allerdings hat auch die hier beabsichtigte Unterweisung von Natur als Einschiebung zwischen zwei Disciplinen eine recht ungünstige Stellung für das Verständniss, weil die Basis ihres Standpunktes immer nur eine mutmassliche sein kann. Ebendeshalb ist überhaupt von dem Unternehmen wenig zu hoffen.

Hoppe.

Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren Lehranstalten. Von Jentzen, Director des Thüringischen Technikums zu Ilmenau. Mit 36 Figuren, 2. Auflage. Dresden 1897. Gerhard Kühtmann 55 S.

Das Buch gibt in kurzen Sätzen und Formeln die Erklärung der goniometrischen Functionen, deren Relationen, die Dreiecksrelationen, jede mit zahlreichen ausgeführten Beispielen, und am Schlusse eine Tafel der goniometrischen Functionen (ohne Anwendung von Logarithmen), 7, 6 und von  $10^0$  an 5stellig durch die Sechstelgrade.

H.

Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung und mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorien nebst einem Anlange über Kegelschnitte. Mit ungefähr 800 Figuren im Text und mehr als 1200 Uebungssätzen und Constructionsaufgaben für den Hausgebrauch des Lehrers und für den Selbstunterricht bearbeitet von M. Kröger. Hamburg 196. Otto Meisner. 511 S.

Die Lehrform und Methode sind vom Verfasser frei und ohne Anschluss an Vorgänger gewählt; auch scheint sich die Wahl nicht an einfach definirbare Gesichtspunkte zu binden, vielmehr in allen Zielen Mass zu halten und im einzelnen den grössten ersichtlichen Nutzen entscheiden zu lassen. Selbst der Umfang des Ganzen ist durch das Vorhaben, die neuere Methode in den Lehrkursus zuzuziehen, nicht übermässig ausgedehnt, sondern beschränkt sich auf ein ziemlich elementares Gebiet. Die Hauptabschnitte sind nämlich: Gerade und Winkel; Entstehung und allgemeine Eigenschaften geradliniger Flächen; symmetrische Eigenschaften geradliniger Figuren; die geometrische Constructionsaufgabe; Inhalt geradliniger Flächen; der Kreis; Proportionalität der Strecken und harmonische Streckenteilung; Aehnlichkeit geschlossener Figuren; Metrische Relationen bei Kreispolygonen; Cyklometrie; Maxima und Minima; algebraische

Analysis bei geometrischen Relationen; Polarität der Kreise; die Kegelschnitte. Hieraus sieht man, dass die geringen Elemente neuerer Geometrie, von denen hier Gebrauch gemacht wird, weit entfernt sind dem Leser durch Einführung in eine Menge neuer, sogar mit dem gewöhnlichen Gebrauche collidirender Terminologie abzuschrecken. Erklärtermassen ist Hauptzweck und Hauptgesichtspunkt der Lehre von allen in Betracht gezogenen Gebilden und deren Beziehungen eine klare Anschauung zu geben. Neben diesem werden die logischen Anforderungen an den geometrischen Unterricht in der Ausführung nicht berührt, im Vorwort nur mit folgenden Aeusserungen bedacht: man könne nicht alle Sätze beweisen und brauche nicht Schlussweisen bei neuer Anwendung zu wiederholen. Hierauf ist zu erwidern: Axiome können nicht bewiesen werden, weil sie keine Consequenzen, sondern Voraussetzungen sind; alle Sätze der Geometrie aber, die Consequenzen sind, können bewiesen werden. Die bisher stets anerkannte Pflicht der mathematischen Doctrin, diese Beweise zu liefern, d. h. den exact logischen Zusammenhang des Systems der Geometrie zum Bewusstsein zu führen, kann durch jene Aeusserungen nicht bestritten werden. Man kann nur fragen, ob dazu die euklidische Form gerade notwendig wäre. Die hier gewählte Form weicht davon ab, indem sie die Sätze nicht vorher aufstellt, dann beweist, sondern als Resultat vorhergehender Betrachtungen ausspricht. Ob letztere zur Begründung hinreichen, werden Schüler schwerlich zu überlegen geneigt sein: die Lehrweise stellt sich von Anfang an und dann beständig als eine beschreibende dar, zur Prüfung hat der Schüler nie Anlass, er wird als selbstverständlich zum Lehrer das Vertrauen haben, dass alles Mitgeteilte richtig ist. Dass die zahlreichen Uebungen zu der Fähigkeit sichere Schlüsse zu machen führen müssten, fehlt jeder Grund. Auch mögen vielleicht die Elemente aller notwendigen Begründungen, wenn man sie zusammensuchen und verbinden wollte, vollständig im Buche zu finden sein. So ist z. B. der ausreichende Grundsatz für die Parallelen-theorie als Grundsatz ausgesprochen; es wäre also leicht gewesen alle zugehörigen Winkelsätze zu beweisen, nur hätte die Winkelgrösse erst erklärt werden müssen. Statt dessen ist erst irreführend von der Bedeutung des Winkels als Mass einer Drehung die Rede, als wäre dadurch seine Grösse bestimmt. Addition und Messung der Winkel kommt nun freilich nachher in gar manchen Sätzen und Aufgaben vor. Soll sich aber daraus ein Schüler den allgemeinen Begriff der Winkelgrösse bilden, so muss er mehr Verstand besitzen als der Lehrer, der es unbeachtet lässt, dass eben diese constructive Messung den Winkel erst zur Grösse macht. Dies Beispiel zeigt wol zur Genüge, dass die logische Seite des geometrischen Unterrichts nicht gehörig gewürdigt worden ist, und dass deren Zurück-

setzung einen wesentlichen Mangel an Klarheit der Begriffe bestehen lässt. Hoppe.

Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearbeitet von Dr. Karl Bobek. Mit 96 Textfiguren. Zweite, wohlfeile Ausgabe. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 210 S.

Der äusserst kurze und präzise Ausdruck der Lehre eignet sich vorzüglich den dem Gegenstande fremden Leser in kurzer Zeit ohne Umstände mit ihr bekannt zu machen. Es folgen der Reihe nach die Abschnitte: Projectivität und Involution; Collination; Kegelschnitte, Pol und Polare; imaginäre Bestimmungsstücke, adjungirte Involution; Steinersche Verwandtschaft; Kegelschnittbüschel; Projectivität im Kegelschnittbüschel; Erzeugung der Curve 3. Ordnung. H.

Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie für den Unterricht bearbeitet von Dr. Siegmund Günther, Professor der technischen Hochschule München. Vierte, durchgesehene Auflage mit 47 eingedruckten Figuren und 2 Sternkarten. München 1896. Theodor Ackermann 142 S.

Die 2. Auflage ist im 14. litterarischen Bericht, Seite 22 besprochen; die dritte, welche Vieles berichtigt hat, im 52sten, Seite 47. H.

Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. Von Martin Girndt, königl. Baugewerksschullehrer. Zweiter Teil: Körperlehre. Mit 64 Figuren im Text. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 55 S.

Der erste Teil (von ebenen Gebilden handelnd) soll nächstens erscheinen. Der Körperlehre voraus geht die Lehre von den verschiedenen Projectionsweisen zum Behufe der Darstellung der Gebilde auf Ebenen und, soweit es die exacte Behandlung derselben fordert, die Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen. Die in Betracht gezogenen Gebilde sind prismatische, pyramidale und Umdrehungskörper, ferner einige einfache Gewölbeformen. Dabei sind Uebungsbeispiele, Formeln und eine numerische Tafel. H.

## Sammlungen.

Beispiel-Sammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet. Leipzig 1896. G. J. Göschen 134 S.

Die Beispielsammlung zeichnet sich durch ungemeine Vielseitigkeit der erstrebten Vertrautheit des Schülers mit allem Gebrauch der Zahl in Schuldoctrin und Leben aus. Man ersieht daraus, dass eine genügende Ausbildung zu mannigfaltige Aufgaben stellt, um sie mit Einübung einiger Algorithmen abschliessen zu können. Der Fortschritt der 3 Rechnungsstufen vertritt nur den kleinsten Teil des Ordnungsprincips der Aufgaben. Die Aufgaben beginnen mit blossem Schreiben und Lesen, weiterhin kommen mehr und mehr neue Elemente und neue Fragen und solche, die Ueberlegung und Erfindung erfordern, hinzu. Selbst die Auflösung der Gleichungen bildet keinen gesonderten Abschnitt, sondern wird schon frühzeitig bei Fragen in Anwendung gebracht. — Die Beispielsammlung schliesst sich an das Lehrbuch an:

Arithmetik und Algebra. Von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1896. G. J. Göschen. 171 S.

Die Hauptabschnitte des Buchs sind betitelt: Uebergang vom Rechnen zur Arithmetik; Rechnungsarten erster; zweiter Stufe; Anwendungen beider Arten; Quadratisches; Rechnungsarten 3. Stufe; Anhang, worin u. A. arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins, Moivre'sches Theorem, kubische Gleichungen. H.

---

## T a b e l l e n.

Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen, hinzugefügt sind vierstellige Additions, Subtractions und briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter hundert. Von Prof. Dr. B. Gundelfinger. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 4°. 15 S.

Die gegebene Gleichung

$$x^{m+n} \pm cx^m \pm f = 0$$

wird erst in der Form dargestellt:

$$10^A + 1 = 10^B$$

(z. B. für die Zeichenfolge  $++-$  durch die Substitutionen  $A = \log \frac{x^m}{e}$ ;  $B = \log \frac{f}{ex^n}$ ) Die Elimination von  $x$  hieraus ergibt eine zweite, und zwar lineare Relation zwischen  $A$  und  $B$ . Die Verbindung beider Relationen ermöglicht eine Tafel mit einfachem Entree für  $A$  (und  $E$ ), woraus dann der Wert von  $x$  folgt. In Betreff des Rechnungsverfahrens, welches vielerlei Ueberlegung, Abschätzung und Correctionen beansprucht, müssen wir auf die „Erläuterungen“ zu den 2 Tafeln verweisen. Die erste stellt auf 3 Seiten gemäss der transcendenten, von  $e, f$  unabhängigen Relation  $B$  als Function von  $A$  dar, die andre ist auf 4 Seiten die genannte. H.

Hilfstafeln für praktische Messkunde [nebst logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Zusammengestellt von O. Müller. Zürich 1897. F. Schulthess. 144 S.

Ausser grössern Tafeln der Logarithmen der Zahlen, goniometrischen Functionen, Summen und Differenzen enthält das Buch Unterweisung und Formeln nebst kleinen Tabellen in astronomischen, geodätischen, vielerlei technischen und physikalischen Messungen und ist productiv in Vereinfachung der Methoden. H.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt von Adolf Sickenberger, K. Gymnasial-Professor und Rektor der Luitpold-Kreis-Realschule in München. Dritte Auflage. München 1897. Theodor Ackermann. 20 S.

Die 2. Auflage ist im 38. litterarischen Bericht S. 16 besprochen. In gegenwärtiger Ausgabe ist das Intervall  $0^0$  bis  $1^0$  in kleinerer Teilung ausgeführt, im übrigen die Teilung in Sechstelgrade beibehalten worden. H.

Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen herausgegeben von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig, B. G. Teubner. 157 S.

Im Vergleich mit den gewöhnlichen Tafeln erscheinen die gegenwärtigen um eine vermehrt, nämlich ausser der Tafel der Logarithmen der trigonometrischen<sup>d</sup> Functionen auch eine der Functionen selbst,

die nicht selten in Anwendung kommt, um ein zweimaliges Aufschlagen zu ersparen, wo es sich um den Wert nur einer Function handelt. Formelle Eigenheiten aber unterscheiden das Buch noch folgende zwei: Erstens sind, mit Wegfall der Complementarfunctionen die Sinus und Tangens durch den ganzen Quadranten fortgeführt. Den Nutzen der gewöhnlichen Anordnung mag der Verfasser übersehen oder für zu gering gehalten haben; jedenfalls bessert die Abänderung nichts. Zweitens ist zur Tafel jeder der 5 Functionen die Tafel der inversen Function (hier genannt Gegentafel) hinzugegeben. Der Zweck ist durchaus unverständlich. Dass jede Tafel für eine Function zugleich als Tafel für die inverse dient, wird nicht bestritten; das Vorwort sagt nur, sie sei in letzterer Anwendung nicht tabellarisch geordnet, damit kann nur gemeint sein, die Argumente haben keine constante Differenz, denn zur tabellarischen Ordnung genügt beständiges Steigen und Sinken, und dieses fehlt bei jenen Tafeln nicht. Hierauf stützt nun das Vorwort die Behauptung: wer beim Rechnen auf die in Deutschland üblichen Tafeln (ohne Gegentafeln) angewiesen sei, vergeude viel Zeit, sagt aber nicht, welche Mehrarbeit diese Zeit erfordern soll. Eine Tafel über eine beständig steigende Function  $y$  von  $x$  gibt unmittelbar eine steigende Reihe von Zahlen  $x$ , unter denen eine  $x$  die nächst kleinere von einer gegebenen Zahl  $x + \delta$  und eine  $x + \delta_0$  die nächst grössere sofort kenntlich ist. Ihnen entsprechen die daneben stehenden Functionswerte  $y$  und  $y + \varepsilon_0$ . Zwischen diesen liegt der gesuchte Functionswert  $y + \varepsilon$  entsprechend  $x + \delta$ , bestimmt durch die Proportion:

$$\delta : \delta_0 = \varepsilon : \varepsilon_0$$

Alles dies gilt auch für die inverse Abhängigkeit, wo  $y + \varepsilon$  gegeben und  $x + \delta$  gesucht ist. Auch die Erleichterung der Interpolationsrechnung durch den Umstand, dass  $\delta_0$  als Einheit letzter Decimalstelle keine Rechnung verursacht, ist dieselbe. Es ist daher gar nicht zu verstehen, wie die Hamburger Gelehrtenschule die Lehre vom Gebrauch der Logarithmentafeln so geben kann, dass die umgekehrte Anwendung derselben Tafel mehr Arbeit verlangt als die Anwendung einer neuen Tafel. Bei verdoppeltem Aufwand von Hilfsmitteln ist die Leistung höchstens eine gleiche. Hoppe.

Vierstellige mathematische Tabellen im engen Anschluss an die mathematischen Tabellen der technischen Kalender. Von E. Schultz, wissenschaftl. Lehrer an der Königl. Maschinenbau- und Hütteneschule zu Duisburg. In zwei Ausgaben a) mit Anleitung, b) ohne Anleitung. Essen 1896. G. D. Baedeker.

Zur Motivirung der erneuerten Herausgabe der in den technischen Kalendern bereits enthaltenen Tabellen wird im Vorwort angegeben, dass zur Schonung der Augen der Schüler ein grösserer Druck notwendig geworden sei. Dies, sowie der Titel, lässt annehmen, dass die Einrichtung der Tabellen beibehalten ist. Sie geben die Quadrate, Kuben und Logarithmen der natürlichen Zahlen, die  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  und  $\operatorname{cot}$  für die Minuten, dann deren Logarithmen, ausserdem viele in der Technik, besonders im Maschinenbau oft vorkommende Grössen. Mancher Ueberfluss, insbesondere die Hinzufügung der inversen Tabellen, lässt erkennen, dass auf mathematische Einsicht wenig gerechnet ist, dass vielmehr die Tabellen ganz gewohnheitsmässig gebraucht werden sollen. H.

Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln nebst den nötigen Hilfstafeln. Herausgegeben von P. Treutlein, Director des Realgymnasiums Karlsruhe. Braunschweig 1896. Vieweg und Sohn. 72 S.

Die Einrichtung der Haupttafeln, umfassend ausser den Logarithmen der Zahlen und den Logarithmen der goniometrischen Functionen auch die Functionen selbst in grössern Argumentsdifferenzen, ist im wesentlichen die gewöhnliche. Der Verfasser hat die Vereinfachungen, welche sich schon in frühern Ausgaben vierstelliger Tafeln fanden, zu vereinigen gesucht. Was hier Hilfstafeln genannt wird, sind Tafeln, die zu einander und zu den Haupttafeln in keiner Beziehung stehen, sondern jede für sich anderweite Bestimmung haben. Der Verfasser eifert nun sehr für den ausschliesslichen Gebrauch vierstelliger Tafeln in den Mittelschulen und für Ersparung des Interpolirens, soweit es möglich sei. In Verteidigung seiner Ansicht spricht sich aber eine Verwechslung des Zieles der Schule mit dem des Rechners aus. Letzteres ist das Resultat jeder Aufgabe, ersteres die Vertrautheit des Schülers mit den Mitteln der Lösung. Durch Unterlassung lernt niemand etwas. Da also der Verfasser das Interpoliren nicht ganz für entbehrlich hält, so ist es offenbar geradezu zweckwidrig, es soviel als möglich zu vermeiden. Bieten vierstellige Tafeln zu wenig Gelegenheit Begriff und Methode des Interpolirens kennen zu lernen, so ist dies kein Vorzug, sondern ein Mangel solcher Tafeln hinsichtlich des Schulgebrauchs. Es gibt indes noch andre Punkte, welche der Empfehlung vierstelliger Logarithmentafeln entgegenstehen. Von den Gründen, weshalb bisher fast nur 7- und 5stellige zur Verbreitung gelangt sind, spricht das Vorwort gar nicht. Es ist bekannt und fällt in die Augen, dass durch Verzicht auf die 7te, resp. die 5te Stelle, der nötige Umfang

der Tafel sich nicht merklich vermindert. Mit Einführung vierstelliger Tafeln wird also den Schülern ein Mittel in die Hand gegeben, das auf verfehlter, unkluger Speculation beruht, und das sie, wenn sie zur Einsicht gelangen, gegen bessere Hilfsmittel vertauschen werden.

Hoppe

Vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen. Für den Schulgebrauch zusammengestellt von Dr. A. Schülke. Leipzig 1895. B. G. Teubner. 18 S.

Die Tafeln sind für vielerlei Anwendungen bestimmt. Ausser den rein mathematischen sind besonders noch physikalische und astronomische Angaben tabellarisch aufgeführt. Die mathematischen Haupttafeln geben die Logarithmen der Zahlen (ausser den briggschen die natürlichen bis 100) und der trigonometrischen Functionen. In Betreff der letztern ist hervorzuheben, dass die Winkel ausschliesslich in Graden angegeben werden, und die Teilung in Minuten und Secunden unterbleibt. Hiermit ist wenigstens eine ausschliessliche Einheit für Rechnung mit Winkeln gewonnen; nur ist diese noch eine willkürliche. Warum mit der Sexagesimalteilung nicht auch die Nonagesimalteilung beseitigt ist, fehlt aller Grund. Was das Vorwort sagt, verrät zwei Vorurteile. Erstens wird darin die Centesimalteilung des rechten Winkels, welche in neuester Zeit von mehr und mehr Herausgebern von Tafeln angenommen wird, die „neue“ Teilung genannt, als ob man statt einer Zahl 90 eine andre Zahl 100 gewählt hätte. In der That nennen jene Tafeln unpassenderweise das Hundertteil Rechte einen Grad und führen so einen Doppelsinn des Wortes Grad ein. Wer die Bedeutung eines Decimalbruchs kennt, wird nach Verwerfung des Nonagesimalgrads den Wert jedes Winkels durch eine (decimal geschriebene) Anzahl Rechte ausdrücken. Der Name „neue Kreisteilung“ beruht also auf einem Reste von Unklarheit und Befangenheit. Der rechte Winkel ist kein neuer Begriff. Zweitens wird der Meinung unbestrittene Geltung eingeräumt, die Astronomen wären durch Rücksicht auf die kostbaren Instrumente gezwungen, bei Minuten und Secunden zu bleiben. Die Form der Beobachtungsergebnisse kann offenbar ihrer Ausdrucksform in der Rechnung keinen Zwang auferlegen. Ebenso wie bei physikalischen Untersuchungen, wo die Scalen der Apparate für den Zweck der Beobachtung eingerichtet sind, daher die erhaltenen Zahlen zum Zweck der Rechnung öfters reducirt werden müssen, ist auch nach Himmelsbeobachtung schon wegen Refraction u. a. m. manche Reduction der Zahlen nötig, und kann die hier verlangte Reductions-

arbeit der Winkelteilung gegen den grossen Gewinn an Kürze der Rechnungen nicht in Betracht kommen. Die im Vorwort genannte Verbindung der Astronomen am Uebergang zur Decimaltheilung des Winkels durch ihre Instrumente erweist sich somit als völlig nichtig und leerer Vorwand. Was den Astronomen den Zwang auferlegt, ist vielmehr der Beschluss des Pariser Einheitscongresses, an den die Sternwarten aller Länder in ihrem Verkehr und ihren Publicationen gebunden sind, und der keine rationale Verbesserung von Seiten der einzelnen mehr zulässt. Der Beschluss ist, wenn nicht als Folge, doch vermutlich sehr beeinflusst durch den derzeitigen Mangel an den nötigen litterarischen Hilfsmitteln gefasst worden. Dies kann und möge für diejenigen, welche in der Lage sind für rationale Ordnung der Winkelausdrücke zu wirken, ein Antrieb sein, dem alten Schlendrian nicht zögernd schrittweise zu entsagen, sondern sogleich den bekannten Standpunkt einzunehmen, auf den wir doch schliesslich kommen müssen.

Hoppe.

---

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Katechismus der Differential- und Integralrechnung. Von Franz Bendt, Mit 29 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1896. J. J. Weber. 267 S.

Die Bearbeitung scheint mehr auf geordnete Zusammenstellung der Doctrin, fertig zur Anwendung, als auf principielle Entwicklung derselben gerichtet. Daher begnügt sie sich damit, von den Elementen der Infinitesimalrechnung in geometrischer Gestalt eine Anschauung zu geben. Leicht wäre es gewesen, damit die analytische Form zu verbinden und die nötigen Definitionen und Sätze als allgemeine Grundlage der Rechnung aufzustellen, was in diesem Gebiete, wenn die Lehre zu richtigen Schlüssen befähigen soll, gewiss nicht überflüssig, und doch für Anfänger der Arithmetik verständlich ist. Die Lehrgegenstände sind: die algebraische Analysis, die Differentiation der Functionen, die Reihen von Taylor und Mac Laurin, Bestimmung gewisser Ausdrücke, Maxima und Minima, Curventheorie, Differentiation der Functionen mehrerer Variabeln, Integration der Functionen, bestimmte Integrale, Quadratur, Rectification, Complanation, Kubatur, vielfache Integrale, Differentialgleichungen, die complexen Zahlen, alles dies in mässigem Umfang.

Hoppe.

J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite, durchgesehene Auflage von G. Bohlmann. Erster Band: Differentialrechnung. Mit in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 570 S.

In der ersten Auflage der Uebersetzung waren die Fortschritte der Doctrin seit dem Erscheinen des Werks nur in Noten bemerkt. Der Herausgeber der zweiten Auflagen hat nun diese und alle fernern Fortschritte ausführlich bearbeitet. Während nun beide für die extensive Bereicherung tätig gewesen sind, ist die Grundlegung des Ganzen auf dem Standpunkte geblieben, auf den der Verfasser das Werk gestellt hatte. Dieser ist so niedrig wie kaum in einem andern Lehrbuche; entweder sind die Principien sehr ungeschickt oder geflissentlich zu dem Zwecke bearbeitet das Wesen der Hauptgegenstände der Lehre zu verhüllen und ihr den Anschein einer unbegreiflichen zu geben. Eine Definition des Grenzwerts wird zwar aufgestellt, bleibt aber von da an unbeachtet. Der Grenzwert wird der Function stets schlechthin in einem Punkte zugeschrieben, seine Abhängigkeit vom Variationsweg verschwiegen und, wo sie sich durch Abweichung bemerklich macht, mit Redensarten abgetan. Dementsprechend werden die unendlichkleinen Grössen nie erwähnt, die Infinitesimalschlüsse ignorirt, und die Infinitesimaltheorie bleibt ein dunkles Gebiet. Das Zeichen  $\infty$  wird sogar ausdrücklich ein Grenzwert genannt. — Die Capitel des Buchs sind folgende: Einleitende Begriffe; der erste Differentialquotient der Functionen 1 unabhängigen Variablen; höhere Differentialquotienten von Functionen 1 Veränderlichen, partielle Differentialquotienten von Functionen mehrerer Veränderlichen; totale Differentiale und partielle Differentialquotienten; Entwicklung der Functionen in Potenzreihen; Theorie der Maxima und Minima; Theorie der ebenen Curven; Theorie der Raumcurven und krummen Flächen; die Curven auf Flächen und die Flächenfamilien; über Functionen einer complexen Variablen; Zerlegung der rationalen Functionen in Partialbrüche.

Hoppe.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. Ludwig Schlesinger, Privatdocenten an der Universität zu Berlin. In zwei Bänden. Zweiten Bandes erster Teil. Mit Figuren im Text. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 532 S.

Der jetzt erschienene erste Teil des 2. Bandes umfasst die Abschnitte: Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen

auf tretenden Gruppen. Specielle Probleme der Gruppentheorie. Formulirung und allgemeine Discussion der Umkehrprobleme. Theorie und Anwendungen der Euler'schen Transformirten. Die angegebenen Originalarbeiten sind von Galois, Cauchy, Jordan, Poincaré, Cayley, Dyck, Weber, Cantor, Weierstrass, Lie, Biermann, Klein, Picard, Vessiot, Appell, Jacobi, Clebsch, Koenigsberger, Kronecker, Fuchs, Gino Fano, Beke, Halphén, Borel, Forsyth, Veronese-Schepp, Franke, Vnklčević, Lionville, Heffter, Engel, Schwarz, Laguerre, Briochi, Cockle, Goursat, Wallenberg, Rosenkranz, Lipsmann Schlesinger, M. Meyer, Gordan u. Nöther, Hermite, Abel, Casorati, Ritter, Riemann, C. Neumann, Poisson, Schottky, Vogt, Mellin, Frobenius, Euler, Pincherle, Pochhammer, Nekrasseff, Hossenfelder, Kummer, Schläfli, Broecker, Legendre. H.

---

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

LIII.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Du Bois-Reymond, Emil, Gedächtnissrede auf Herm. v. Helmholtz. gr.4<sup>o</sup>. (50 S.) Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Fortschritte, die der Physik i. J. 1890. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 46. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8<sup>o</sup>. (XLIV, 781 S.) Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

— dass. 1891. 47. Jahrg. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8<sup>o</sup>. (LXIV, 418 S.) Ebd. 18 Mk.

— dass. i. J. 1895. 51. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8<sup>o</sup>. (XLVII, 843 S.) Ebd. 30 Mk.

Hesse's, Ludw. Otto, gesammelte Werke. Hrsg. v. der mathemat.-physikal. Classe der bayer. Akademie der Wissenschaften. gr.4<sup>o</sup>. (VIII, 732 S. m. Bildnis.) München, Franz. 24 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. 25. Bd. Jahrg. 1893 u. 1894. 3. (Schluss-)Heft. gr.8<sup>o</sup>. (XCII u. S. 1317–1996.) Berlin, G. Reimer. 19 Mk.

Lampe, Emil, Karl Weierstrass. Gedächtnissrede. gr.8<sup>o</sup>. (24 S.) Leipzig, Barth. 60 Pf.

Poggendorff's Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Bd. 7. Lfg. Ebd. 3 Mk.

Villicus, Frz., die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthum bis zum XVIII. Jahrh. Mit Illustr., Zahlzeichen, Zahlensystemen u. Rechenmethoden der alten Culturvölker u. altamerikan. Völkerstämme, nebst e. tabellar. Darstellung v. Zahlwörtern des Zehnersystems aus 72 Sprachen. 3. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (VIII, 114 S.) Wien, Gerold. 3 Mk. 20 Pf.

### Methoden und Prinzipien.

Cronauer, Johs., der heutige Stand der Methodik des Rechenunterrichts. gr.8°. (81 S.) Ludwigshafen, Hofmann. 1 Mk.

Deussen, Paul, über die Notwendigkeit, beim mathematisch-naturwissenschaftlichen Doktorexamen die obligatorische Prüfung in der Philosophie beizubehalten. gr.8°. (15 S.) Kiel, Lipsius & Tischer. 50 Pf.

Knilling, Rud., die naturgemässe Methode des Rechen-Unterrichts in der deutschen Volksschule. Ein neues theoretisch-praktisches Handbuch. I. Tl.: die psychologischen Grundlagen der naturgemässen Rechenmethode. gr.8°. (XII, 372 S. m. Fig.) München, Oldenbourg. 6 Mk.

### Lehrbücher.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Leitfaden der Elementar-Mathematik. 1. u. 3. Tl. gr.8°. Berlin, Simion. — 1. Planimetrie, Einführung in die Trigonometrie, Körperberechnungen. (Lehraufgabe der Quarta bis Untersekunda.) 12. Aufl. (V, 87 S. m. 4 Taf.) 1 Mk. 50 Pf. — 3. Erweiterung der Planimetrie, ebene Trigonometrie, Grundlehren von den Koordinaten u. Kegelschnitten. (Lehraufgabe der Obersekunda u. Prima.) 8. Aufl. (VI, 139 S. m. 6 Taf.) 1 Mk. 80 Pf.

### Sammlungen.

Brenner, Ant., Rechenschule. Aufgaben zum mündl. u. schriftlichen Rechnen. Mit Berücksichtigung des oberbayerischen Lehrplanes bearb. Ausg. B. In 4 Hftn. Ausg. f. Lehrer. 3. u. 4. Hft. 3. Aufl. 8°. (III, 111 u. III, 96 S.) Freising, Datterer. à 1 Mk.

Genau, A., Rechenbuch für Lehrerseminare. Verb. v. A. Genau u. P. A. Tüffers. 2. Bd.: Für die Mittel- u. Oberstufe der Seminare. 4. Aufl. gr.8°. (IV, 160 u. XXIV S.) Gotha, Thienemann. 1 Mk. 60 Pf.

Groissl, J., die Absolutorial-Aufgaben aus der Mathematik u. Physik an den humanistischen Gymnasien Bayerns 1854 — 1888. I. Tl. Anleitung zur Lösung u. Resultate, nebst 4 Fig.-Taf. II. Tl.: (Als Anhang die Aufgaben v. 1889—1896 nebst Lösugn.) gr.8°. (IV, 19, 67 u. 9 S.) München, Zipperer. 2 Mk.

Hartmann, Berthold, Rechenbuch für höhere u. mittlere Mädchenschulen. Methodisch geordnete Aufgabensammlung mit gleichmässiger Berücksichtigung der Rechenoperationen u. Sachgebiete. 1. u. 2. Hft. Für das 1. u. 2. bzw. 3. u. 4. Schuljahr. gr.8°. (à IV, 96 S.) Frankfurt a./M., Kesselring. à 50 Pf.

Köster, T. E., Aufgaben aus dem Gebiete der Arithmetik u. Algebra f. Mittelschulen. II. Tl.: Das Rechnen mit Potenzen u. Wurzelgrössen, Wurzelausziehung, quadrat. Gleichungen, diophant. Gleichungen, Logarithmen, Progressionen u. Zinseszinsen-Rechnungen. 2. Aufl. gr.8°. (80 S.) Oldenburg, Schulze. 80 Pf.

— dass. Resultate zum I. u. II. Tl. 2. Aufl. gr.8°. (39 S.) Ebd. 40 Pf.

Rosenberg, Karl, methodisch geordnete Sammlung v. Aufgaben aus der Planimetrie u. Stereometrie f. Lehrer- u. Lehrerinnen-Bildungs-Anstalten, sowie für andere gleichgestellte Lehranstalten. gr.8°. (III, 159 S. m. 107 Fig.) Wien, Hölder. Geb. 1 Mk. 90 Pf.

Wallentin, Frz., Maturitätsfragen aus der Mathematik. Zum Gebrauche für die obersten Classen der Gymnasien u. Realschulen zusammengestellt. Auflösungen. 3. Aufl. gr.8°. (VI, 208 S. m. Fig.) Wien, Gerold. Geb. 4 Mk.

Wenzel, Karl, Rechenbuch für kaufmännische Fortbildungsschulen. (In 3 Tln) 1. u. 2. Tl. gr.8°. (67 u. 54 S.) Hannover, Meyer. à 60 Pf.

### Tabellen.

Gundelfinger, S. Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trigonometrischer Gleichungen. Hinzugefügt sind 4stellige Additions-, Subtractions- u. Briggische Logarithmen, sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter 100. gr.4°. (IV, 15 S.) Leipzig, Teubner. 1 Mk. 40 Pf.

Henselin, Adf., Rechentafel, enth. das grosse Einmaleins bis 999 mal 999 mit einer Einrichtung, die es ermöglicht, jedes gesuchte Resultat, sowohl für die Multiplication, als auch für die Division blitzschnell zu finden, nebst einer Kreisberechnungstabelle. quadr. schmal Fol. (III, 223 S.) Berlin, O. Elsner. Geb. 6 Mk.

Kiepert, Ludw., Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung. gr.8°. (38 S.) Hannover, Helwing. 5) Pf.

Močnik, Frz. v., fünfstellige Logarithmen-Tafeln. gr.8°. (XII, 71 S.) Leipzig, Freitag. 1 Mk. 20 Pf.

—, logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 5. Aufl. gr.8°. (XII, 77 S.) Ebd. 1 Mk. 30 Pf.

Müller, O., Hülftafeln für praktische Messkunde, nebst logarithmisch trigonometrischen Tafeln. 8°. (141 S.) Zürich, Schult-hess. 2 Mk. 40 Pf.

Riem, J., Rechentabellen f. Multiplikation u. Division, mit e. Vorworte v. H. Kinkelin.) Lex.-8°. (XII, 179 S.) Basel, Verlags-Druckerei. 10 Mk.

Schubert, Herm., fünfstellige Tafeln u. Gegentafeln f. logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen. gr.8°. (VI, 157 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 4 Mk.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Biermann, O., zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische. gr.8°. (8 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Bolte, F., Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik zum Gebrauche an Navigationsschulen bearb. gr.8°. (64 S.) Hamburg, Peuser. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Daublebsky v. Sterneek, R., zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen. gr.8°. (25 S.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Fricke, Rob., Hauptsätze der Differential- u. Integral Rechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 1. Thl. gr.8°. (IX, 80 S. m. 45 Fig.) Braunschweig, Vieweg. 2 Mk.

Furtwängler, Phlpp., zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären cubischen Formen. Diss. gr.8°. (63 S.) Göttingen, Vandenhoeck u Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Gillner, Elemente der Algebra od. praktische Anleitung zur rationellen Erlernung des Auflösens d. Gleichungen vom 1. bis 3. Grade. gr.8°. (VII, 279 S. m. Fig.) Ilmenau, Schröter. Geb. 6 Mk.

Herrmann, Osk., über algebraische Kurven, die sich beliebig eng an gegebene Kurvenpolygone anschliessen. Ein Beitrag zur Lehre von der Gestalt algebraischer Kurven. Progr. 4°. (26 S. m. 18 Fig.) Leipzig, Hinrichs. 1 Mk.

Junker, Fr., die symmetrischen Funktionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare ternärer Formen. Tafeln der ternären symmetrischen Funktionen vom Gewicht 1–6. gr 4°. (104 S.) Wien, Gerold. 5 Mk. 80 Pf.

Kiepert, Ludw., Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung. II. Thl.: Integral-Rechnung. 6. Aufl. des gleichnam. Leitfadens von Max Stegemann. gr.8°. (XVIII, 599 S. m. 139 Fig.) Hannover, Helwing. 11 Mk. 50 Pf.

Mertens, F., über die Transcendenz der Zahlen  $e$  u.  $\pi$ . gr.8°. (17 S.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Schlesinger, Ludw., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. (In 2 Bdn.) 2. Bd. 1. Thl. gr.8°. (XVIII, 532 S. m. Fig.) Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Seeger, H., die Elemente der Arithmetik. gr.8°. Güstrow, Opitz & Co. 1. Tl. Buch I: Pensum der Quarta. Buch II: Pensum der U.-Tertia. 2. Aufl. (III, 112 S.) 1 Mk. 40 Pf. — 2. Tl. Buch III: Pensum der Ober-Tertia. Buch IV: Pensum der Untersekunda. Buch V: Pensum der Ober-Sekunda. (IV, 159 S.) 2 Mk.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Deutsch bearb. v. Axel Harnack. 2. Aufl. v. G. Bohlmann. 1. Bd. Differentialrechnung. gr. 8<sup>o</sup>. (XVI, 570 S. m. 85 Fig.) Leipzig, Teubner. 10 Mk.

### Geometrie.

Bobek, Karl, Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten u. für den Selbstunterricht. Nach den Vorträgen des Herrn C. Küpper bearb. 2. Ausg. gr. 8<sup>o</sup>. (VI, 210 S. m. 96 Fig.) Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Böttger, Adf., die Stereometrie. Für den Unterricht an der Realschule bearb. gr. 8<sup>o</sup>. (III, 43 S. m. 37 Fig.) Leipzig, Dürrsche B. Kart. 60 Pf.

Gauss, F. G., die Teilung der Grundstücke insbesondere unter Zugrundelegung rechtwinkliger Koordinaten. Nebst vierstelligen logarithmischen u. trigonometrischen Tafeln u. einer Quadrattafel. 3. Aufl. 8<sup>o</sup>. (148 u. 60 S. m. Fig.) Berlin, Decker. Geb. 6 Mk.

Girndt, Mart., Raumlehre f. Baugewerbeschulen u. verwandte gewerbliche Lehranstalten. 2. Tl.: Körperlehre. Mit 64 Fig. i. Text. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 55 S.) Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk.

Jentzen, Ed., Flächen- u. Körperberechnungen nebst vielen Beispielen zum praktischen Gebrauch für Bau- u. Maschinen-Techniker. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 110 S. m. 116 Fig.). Weimar, Voigt. 2 Mk. 25 Pf.

Kohn, Gust., über die cubischen Raumcurven, welche die Tangenten-Fläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve in 4, 5 oder 6 Punkten berühren. gr. 8<sup>o</sup>. (5 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Naprawnik, Frz., geometrische Formenlehre für Mädchen-Bürgerschulen. 3 Thle. gr. 8<sup>o</sup>. 1. I. Classe. 7. Aufl. (IV, 58 S. m. 79 Holzschn. u. 2 Taf.) — 2. II. Classe. 6. Aufl. (IV, 54 S. m. 50 Holzschn. u. 2 Taf.) — 3. III. Classe. (IV, 58 S. m. 51 Holzschn. u. 2 Taf.) Prag, Tempsky. Geb. à 80 Pf.

Reidt, Frdr., Einleitung in die Trigonometrie u. Stereometrie f. die Untersekunda höherer Lehranstalten (nach den preuss. Lehrplänen.) 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (32 S.) Berlin, Grote. 30 Pf.

Traub, K., Berechnung der Radien der acht Berührungskreise beim Apollonischen Problem. gr. 8<sup>o</sup>. (III, 18 S.) Lahr, Schauenburg. 50 Pf.

### Trigonometrie.

Jentzen, Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch f. Unterrichtszwecke an mittleren technischen Lehranstalten. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (55 S. m. 36 Fig.) Dresden, Kühmann. 1 Mk.

### **Praktische Geometrie, Geodäsie.**

Arbeiten, astronomische des k. k. Gradmessungs-Bureau, ausgeführt unter der Leitung v. Thdr. v. Oppolzer. Hrsg. v. Edm. Weiss u. Rob. Schram. 8. Bd. Breiten-, Azimuth- u. Winkelbestimmungen. Publicationen für die internationale Erdmessung. gr.4°. (III, 211 S.) Prag, Tempsky. 16 Mk.

Résultats, les, de la triangulation de la Suisse. Publication du bureau topographique fédéral. 1. Livr. Canton de Genève 1896. 4°. (27 S. m. Fig. u. 1 Karte.) Bern, Schmid u. Francke. 1 Mk

### **Mechanik.**

Kirchhoff, Gust, Vorlesungen über mathematische Physik. 1. Bd. Mechanik. 4. Aufl. Hrsg. v. W. Wien. gr.8°. (X, 464 S. m. 18 Fig.) Leipzig, Teubner. 13 Mk.

Weyrauch, J., die elastischen Bogenträger, ihre Theorie u. Berechnung entsprechend den Bedürfnissen der Praxis, mit Berücksichtigung von Gewölben u. Bogen Fachwerken. 2. Aufl. gr.8°. (X, 313 S. m. Fig. u. 1 Taf.) München, Th. Ackermann. 9 Mk.

### **Technik.**

Alpers, Geo., Führer durch die praktische Photographie. 3. Aufl. v. Haugks Repetitorium der praktischen Photographie. gr.8° (VIII, 108 S. m. 31 Abbild.) Weimar, Voigt. 2 Mk. 50 Pf.

Beck, W., die Elektrizität u. ihre Technik. 48. – 55. (Schluss)-Heft. gr.8°. Leipzig, Wiest. à 10 Pf.

Bernoulli's Vademecum des Mechanikers od. prakt. Handbuch f. Mechaniker, Techniker, Gewerbsleute u. technische Lehranstalten. 21. Aufl. 8°. (XII, 528 S. m. Fig.) Stuttgart, Cotta. Geb. 6 Mk.

Bibliothek, elektrotechnische. 47. Bd. Peters, Frz., angewandte Elektrochemie. 1. Bd. Die Primär- u. Secundär-Elemente. 8°. (XIV, 333 S. m. 73 Abbild.) Wien, Hartleben. 3 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. 8. Jahrg. 1894. 3. Hft. u. 9. Jahrg 1895. 1. Hft. Berlin, Springer. 4 Mk. 40 Pf. u. 5 Mk. 60 Pf.

Gaisberg, S. Frhr. v, Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen. 13. Aufl. 12°. (VIII, 188 S. m. 131 Fig.) München, Oldenbourg. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Grünwald, F., der Bau, Betrieb u. die Reparaturen der elektrischen Beleuchtungsanlagen 6. Aufl. 12°. (X, 308 S. m. 302 Holzschn.) Halle, Knapp. 3 Mk.

Heim, Carl, die Accumulatoren für stationäre elektrische Anlagen. 2. Aufl. gr.8°. (VI, 138 S. m. 83 Abbild.) Leipzig, Leiner. 3 Mk.

Holzt, A., der Elektrotechniker. 20. u. 21. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Liesegang, F. Paul, die Fernphotographie. gr.8°. (134 S. m. Abbild. u. 3 Taf.) Düsseldorf, Liesegang. 3 Mk.

Lueger's, O., Lexicon der Technik. 20. u. 21. Abtlg. Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt. à 5 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 18. u. 19. Lfg. Jena, Costenoble. à 3 Mk.

Orostini, Belichtungstabelle für photographische Aufnahmen. gr.8°. (3 S.) Halle, Peter. 40 Pf.

Pizzighelli, G., Anleitung zur Photographie. 8. Aufl. 12°. (X, 332 S. m. 153 Holzsch.) Halle, Knapp. Geb. 3 Mk.

Riha, Joh., die Aufstellung v. Projekten u. Kostenvoranschlägen für elektrische Beleuchtungs- u. Kraftübertragungs-Anlagen. gr.8°. (VIII, 438 S. m. 198 Fig.) Leipzig, Veit. Geb. 8 Mk.

Schmidt, F., Compendium der praktischen Photographie. 4. Aufl. gr.8°. (XVI, 426 S. m. Abbild.) Karlsruhe, Nemnich. 5 Mk.

Seibt, Wilh., der selbstthätige Druckluft Pegel, System Seibt-Fuess. Veröffentlichungen des Bureaus für die Hauptnivellements u. Wasserstandsbeobachtungen im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Lex.-8°. (16 S. m. 6 Fig.) Berlin, Ernst & Sohn. 1 Mk.

Wallon, E., die kleinen Rechenaufgaben des Photographen beim Vergrössern, Reproduziren, bei Berechnung der Objektiv-Konstanten u. s. w., sowie deren Auflösung in durchaus elementarer Form. Aus dem Franz. v. Herm. Schnauss. 8°. (VIII, 56 S.) Dresden, Verlag des „Apollo“. 1 Mk 20 Pf.

Wild, H., verbesserte Construction magnetischer Unifilar-Theodolithe. gr.4°. (31 S. m. 5 Taf.) Leipzig, Voss. 11 Mk.

Wilke, Arth., die Elektrizität, ihre Erzeugung u. ihre Anwendung in Industrie u. Gewerbe. 3. Aufl. (In 17 Lfgn.) 1. Lfg. gr.8°. Leipzig, Spamer. 50 Pf.

Zamboni, Carl v., Anleitung zur Positiv- u. Negativ-Retouche. Hrsg. u. durch praktische Beispiele erläutert. Mit 11 Taf. 2. Aufl. gr.8°. (VI, 44 S.) Halle, Knapp. 5 Mk.

#### Optik, Akustik und Elasticität.

Exner, Frz., u. E. Haschek, über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. V. u. VI. Mittheilg. Wien, Gerold. 1 Mk. 40 Pf.

Jäger, Gust., über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft. gr.8°. (7 S. u. 2 Fig.) Ebd. 30 Pf.

Lohse, O., Untersuchung des violetten Theils einiger linienreicher Metallspectra. gr.8°. (19 S.) Berlin, G. Reimer. 1 Mk.

Mandl, Jul., Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (directe Construction der Isophengen). gr.8°. (16 S. m. 2 Fig. u. 1 Taf.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Meyer, Stef., über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines mechanischen Impulses in gespannten Drähten. gr.8°. (9 S.) Ebd. 60 Pf.

Wächter, Frdr., über die Grenzen des telestereoskopischen Sehens. gr.8°. (19 S. m. 5 Fig.) Ebd. 50 Pf.

#### **Erd- und Himmelskunde.**

Arbeiten, die astronomisch-geodätischen des k. u. k. militärgeographischen Institutes in Wien. (Publicationen f. internationale Erdmessung.) VIII. Bd. Das Präcisions-Nivellement in der oesterr.-ungar. Monarchie. II. Westlicher Thl. gr 4°. (IX, 357 S. m. 1 Kte.) Wien, Lechner's Sort. 16 Mk.

— dass. IX Bd. Trigonometrische Arbeiten. 5. Die Beobachtungen im Dreiecksnetze von Nieder- u. Ober-Oesterreich u. in den angrenzenden Theilen v Mähren, Ungarn u. Steiermark. gr.4°. (VIII, 385 S m. 3 Taf.) Ebd. 16 Mk.

Beau, Otto, die Berechnung der Sonnen u. Mondfinsternisse. Für den Selbstunterricht entwickelt u. mit Rechnungsergebnissen. Progr. 4°. (16 S.) Sorau, Zeidler. 75 Pf.

—, dass. II. Thl. Tafeln u. Rechnungsergebnisse. 8°. (S. 17—29 mit 1 Taf.) Ebd. 75 Pf.

Braun, Carl, die Gravitations-Constante, die Masse u. mittlere Dichte der Erde nach e. neuen experimentellen Bestimmung. gr.4°. (74 u. 3 S. m. 8 Fig. u. 3 Taf.) Wien, Gerold. 5 Mk. 60 Pf.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien u. der Hercegovina i. J. 1895. Hrsg. v. der bosnisch-hercegovin. Landesregierung. gr.4°. (X, 157 S. m. 3 Taf.) Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. 12 Mk.

Falb's, Rud., neue Wetter-Prognosen u. Kalender der kritischen Tage f. 1897. Jan.-Juni 16°. (81 S.) Berlin, Steinitz. 1 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 6.—8. Lfg. Breslau, Trewendt. à 3 Mk. 60 Pf.

Hillebrand, Carl, über den Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe. gr.4°. (28 S.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Hochwasserzeiten der Unter- u. Aussen Weser f. 1897. 12°. (25 S.) Bremen, Heinsius. 80 Pf.

Jäger, G., Wetter- u. Mondkalender f. 1897. 3. Jahrg. gr.8°. (6 u. Belehrg. 4 S.) Stuttgart, Kohlhammer. 30 Pf.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 7. Jahrg. 1896. Mit 5 Taf. gr.8°. (X, 400 S.) Leipzig, E. H. Meyer. Kart. 7 Mk.

—, Berliner astronomisches, f. 1899 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1) — (411) f. 1897. Hrsg. v. astronom. Rechen Institut unter Leitung v. J. Bauschinger. gr.8°. (VIII, 514, 8 u. 8 S.) Berlin, Dümmler. 12 Mk.

—, deutsches meteorologisches f. 1895. Meteorologische Station I. Ordng. in Aachen. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Stündliche Aufzeichnungen der Registrierapparate. Dreimal tägliche Beobachtungen in Aachen u. am Aussichtsturm, Waldstation — sowie Niederschlagsmessungen an der Gasanstalt Hrsg. i. Auftr. der Stadtverwaltung v. P. Polis. I. Jahrg. gr.4°. (V, 59 S. m. 14 Abbildgn.) Aachen, Müller. 7 Mk.

Krümmel, Otto, über Gezeitenwellen. Rektoratsrede. gr.8°. (18 S.) Kiel, Universitätsbuchhandlung. 1 Mk. 40 Pf.

Neudrucke von Schriften u. Karten über Meteorologie u. Erdmagnetismus, hrsg. v. G. Hellmann. No. 7–9. 4°. — 7. Evangelista Torricelli, Esperianza dell' argento vivo. Accademia del Cimento. Instrumenti per conoscer l'alterazioni dell' aria. Mit e. Einleitung. (22 u. 17 S. m. Abbild.) — 8. E. Halley, A. v. Humboldt, E. Loomis, U. J. Le Verrier, E. Renou, Meteorologische Karten 1688, 1817, 1846, 1863, 1864. 6 Taf. m. e. Einleitg. (13 S.) — 9. Henry Gellibrand, a discourse mathematical on the variation of the magnetical needle. London 1635. Fesm. Druck m. e. Einleitg. (7 u. 22 S. m. Fig.) Berlin, Asher. à 3 Mk.

Niederschlags-Karte des Oderstromgebietes. 1:150 000. Linien gleicher Niederschlagshöhe entworfen v. V. Kremser. 43,5 × 34 cm. Berlin, D. Reimer. 1 Mk.

Oerter, mittlere, v 622 Sternen u. scheinbare Oerter v. 450 Sternen nebst Reductions-Tafeln f. d. J. 1899 u. einem Anhang, enth. mittlere Oerter von 303 südlichen Sternen f. d. J. 1899,0. gr.8°. (S. 181 — 363 u. 8 S.) Berlin, Dümmler's Vlg. 6 Mk.

Publications de l'observatoire central Nicolas sous la direction de O. Backlund. Série II. Vol. II. Nyrén, M., observations faites au cercle verticale. Imp. 4°. (V, 110, 656 S.) Leipzig, Voss. 48 Mk.

Sammlung populärer Schriften, hrsg. v. der Gesellschaft Urania zu Berlin. No. 44. Witt, G., der Planet Saturn. gr.8°. (42 S. m. Illustr.) 80 Pf.

Schweiger-Lerchenfeld, A. v., Atlas der Himmelskunde auf Grundlage der Ergebnisse der coelestischen Photographie. 62 Kartenseiten (m. 135 Einzeldarstellungen) 62 Foliobogen Text u. ca. 500 Abbildgn. (In 30 Lfgn.) 1. Lfg. Fol. (12 S. m. 3 Taf.) Wien, Hartleben. 1 Mk.

Veröffentlichungen des kgl. astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin. No. 4. Bauschinger, J., genäherte Oppositions-Ephemeriden v. 62 kleinen Planeten f. 1897. Jan.-Aug. Unter Mitwirkg. v. A. Berberich u. P. Neugebauer hrsg. 4<sup>o</sup>. (22 S.) Berlin, Dümmler. 1 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 31. Jahrg. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Wetter, das. Meteorologische Monatsschrift für Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 14. Jahrg. 1897. 12 Hfte. gr. 8<sup>o</sup>. Berlin, Salle. 6 Mk.

Zenger, K. W., die Meteorologie der Sonne u. das Wetter im J. 1887, zugleich Wetterprognose f. d. J. 1897. gr. 8<sup>o</sup>. (XI, 40 S. m. 1 Taf.) Prag, Rivnáč. 1 Mk. 44 Pf.

#### Nautik.

Döring, W., der wetterkundige Navigator. — Die Orkane. — Eine ausführliche Anweisung über die Windverhältnisse u. über das Wetter, sowie über das Manövriren in Stürmen u. Wirbelstürmen für die Segelrouten der ganzen Erde. 3. Aufl. Mit 13 erläut. meteorologischen Karten u. Skizzen. 8<sup>o</sup>. (IV, 203 u. III, 58 S.) Oldenburg, Schulze. 4 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde. 1897. 26 Jahrg. 8. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XXIII, 400 S. u. Ergänz.-Hft. 1896 u. 97: 29 Bl.) Bremen, Heinsius. Geb. 7 Mk. 50 Pf.

—, dasselbe in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 26. Jahrg. 8. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XI, 128 S. u. Ergänz. Hft. 1896 u. 97: 16 Bl.) Ebd. 3 Mk.

Verzeichniss der Leuchtfeuer aller Meere. Hrsg. v. Reichs-Marine-Amt. 8 Hfte. Abgeschlossen am 1. Dez. 1896. (Mit je 1 Tafel) hoch 4<sup>o</sup>. Berlin, Mittler. 6 Mk.

#### Physik.

Abendroth, William, Leitfaden der Physik mit Einschluss der einfachsten Lehren der mathematischen Geographie nach der Lehr u. Prüfungsordnung v. 1893 für Gymnasien. II. Bd. Kursus der Unter- u. Oberprima. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, 289 S. m. 172 Holzschn. u. 1 Farbentafel.) Leipzig, Hirzel. 4 Mk.

Börner, H., physikalisches Unterrichtswerk f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung in das Studium der neuern Physik in 2 Stufen. 1. Stufe. II. Leitfaden der Experimentalphysik f. Realschulen, zugleich für Oberrealschulen: 1. Stufe des Lehrbuches der Physik für höhere Lehranstalten. 3. Aufl. gr.8°. (XII, 181 S. m. 173 Abbild.) Berlin, Weidmann. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Bucherer, Alfr. H., Grundzüge einer thermodynamischen Theorie elektrochemischer Kräfte. gr.8°. (VI, 144 S.) Freiberg Craz & Gerlach. 4 Mk.

Föppl, A., die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verf. über die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität u. zu dessen Ergänzung. gr.8°. (X, 108 S.) Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Graetz, L., die Elektrizität u. ihre Anwendungen. Ein Lehr- u. Lesebuch. 6. Aufl. gr.8°. (XII, 556 S. m. 443 Abbildg.) Stuttgart, Engelhorn. 7 Mk.

Grau, Aug. u. Rich. Hiecke, Magnetisirung nach zwei Dimensionen u. Hysteresis im Drehfelde. gr.8°. (55 S. m. 12 Fig. u. 7 Taf.) Wien, Gerold. 1 Mk. 90 Pf.

Hasenoehrl, Fritz, e. mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme. gr.8°. (7 S. m. 1. Fig.) Ebd. 40 Pf.

Helmholtz, H. v., Vorlesungen über theoretische Physik. Hrsg. v. Arth. König, Otto Krigar-Menzel, Carl Runge. V. Bd. Vorlesungen üb. die elektromagnet. Theorie des Lichts. Hrsg. v. Arth. König u. Carl Runge. Lex.-8°. (XII, 370 S. m. 54 Fig.) Hamburg, Voss. 14 Mk.

Indra, Alois, über die Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit. gr.8°. (16 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Kahlbaum, Geo. W. A., Studien über Dampfspannkraftmessungen. In Gemeinschaft mit C. G. v. Wirkner u. anderen Mitarbeitern. II. Abtlg. 1. Hlfte. Mit 1 Taf., 3 Holzschn. im Text u. 4 Kurventaf. gr.8°. (XII, 221 S.) Basel, Schwabe. 8 Mk.

Kapp, Gisbert, elektrische Wechselströme. Deutsche Ausg. v. Herm. Kaufmann. 2. Aufl. gr.8°. (V, 92 S. m. Fig.) Leipzig, Leiner. 2 Mk.

Korn, Arth., eine Theorie der Gravitation u. der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. 2. Aufl. 2. Tl. Theorie der elektr. Erscheinungen. 1. Absch.: Ponderomotorische Wirkgn. gr.8°. (S. 119—208 m. Fig.) Berlin. Dümmler's Vlg. 2 Mk. 50 Pf.

Lampa, Ant., über die Brechungsquotienten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen. (2. Mitthlg.) gr.8°. (10 S.) Wien, Gerold, 20 Pf.

Lautenschläger, Lehrbuch der Physik in methodischer Bearbeitung f. Landwirtschaftsschulen. 8°. (X, 330 S. m. 402 Abbildgn. u. 1 farb. Spektraltaf.) Berlin, Parey. Geb. 2 Mk. 80 Pf.

Müller, P. A., über die Temperatur u. Verdunstung der Schneefläche u. die Feuchtigkeit in ihrer Nähe. gr.4°. (38 S.) Leipzig, Voss. 11 Mk.

Pünig, H., Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Im Anschluss an desselben Verfassers Grundzüge der Physik bearb. gr.8°. (VIII, 270 S. m. 286 Fig.) Münster, Aschendorff. Geb. 2 Mk. 80 Pf.

Planck, Max, über irreversible Strahlungsvorgänge. 1 Mittheilg. gr.8°. (12 S.) Berlin, Reimer. 50 Pf.

Tumlirz, O., die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze. gr.8°. (12 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Vogt, J. G., das Wesen der Elektrizität u. des Magnetismus auf Grund eines einheitlichen Substanzbegriffes. gr.8°. (135 S.) Leipzig, Wiest. 2 Mk. 50 Pf.

Warburg, E., über die Verzögerung bei der Funkenentladung gr.8°. (9 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Weinhold, Adf. F., Vorschule der Experimentalphysik. Naturlehre in elementarer Darstellung nebst Anleitung zum Experimentieren u. zur Anfertigung der Apparate. 4. Aufl. gr.8°. (VIII, 572 S. m. 440 Holzsch. u. 2 Farbentaf.) Leipzig, Quandt & Händel, 10 Mk.

Winter, Wilh., Lehrbuch der Physik zum Schulgebrauche. 4. Aufl. gr.8°. (VIII, 521 S. m. 345 Abbild.) München. Th. Ackermann. 4 Mk. 80 Pf.

#### Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 40. Bd. (Mathemat.-physikal. Classe. 23. Bd. Lex.-8°. (V, 558 S. m. 55 Abbildgn. u. 13 Taf.) Leipzig, Hirzel. 29 Mk.

Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg. 1897. Ca. 27 Nummern. Lex. 8°. Wien, Gerold. 3 Mk.

Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Classe. 1896. 4-6. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 80-83. 8°. Leipzig, Engelmann. Kart. — 80. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Von H. Helmholtz (1859). Hrsg. v. A. Wangerin. (132 S.) 2 Mk. — 81. Experimental-Untersuchungen über Elektrizität v. Mich. Faraday (1832). Hrsg. v. A. J. v. Oetting-

gen. (96 S. m. 41 Fig.) 1 Mk. 50 Pf. — 82. 83. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter u. neuer Geometer über Porismen, Projectionsmethoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität u. Reciprocität etc. v. Jac. Steiner. Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. 2 Thle. I. (126 S. m. 14 Fig. u. 2 Taf.) 2 Mk.; II. (162 S. m. 2 Fig. u. 2 Taf.) 2 Mk. 40 Pf.

Schriften der physikalisch-oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 37. Jahrg. 1896. gr.4°. (XIV, 173 u. 57 S. m. 4 Taf.) Königsberg, Koch. 6 Mk.

Sitzungsberichte, Münchener. Mathematische Classe. 1896 3. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

he  
r,  
er  
n,  
t-  
S.

u  
a.

16

an'  
I -

Fig. 1.

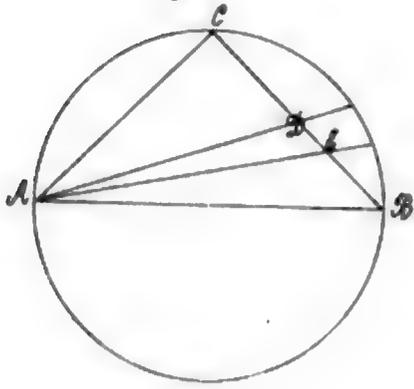


Fig. 2.

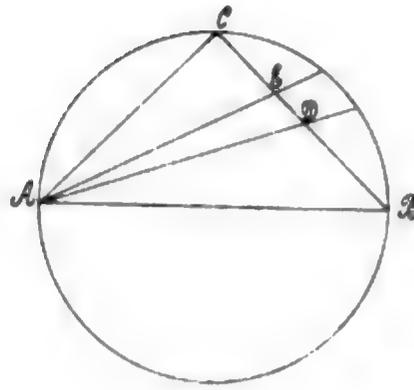


Fig.

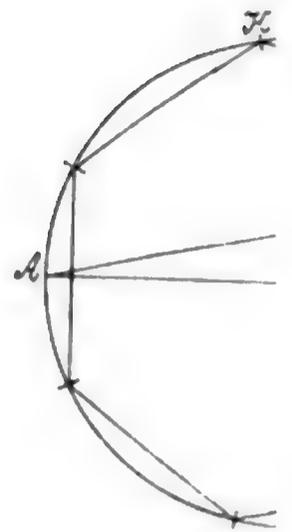


Fig. 3.

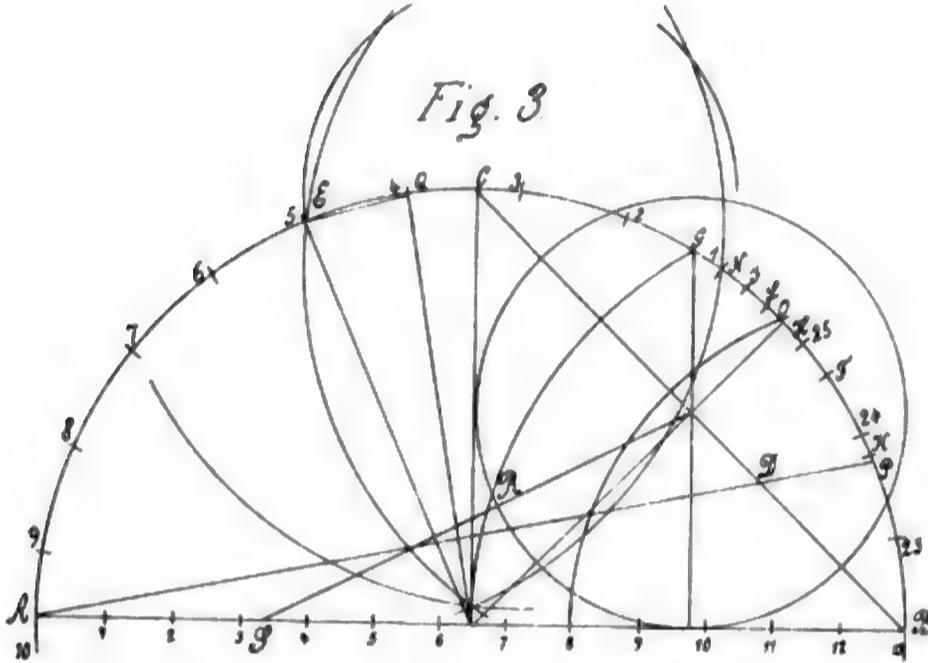


Fig.

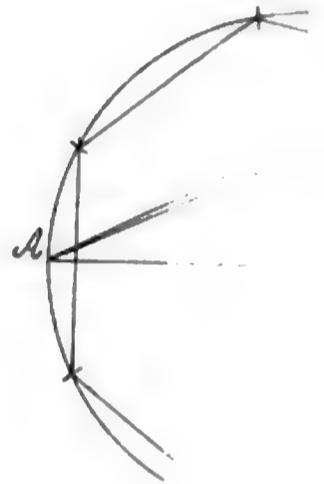


Fig. 4.

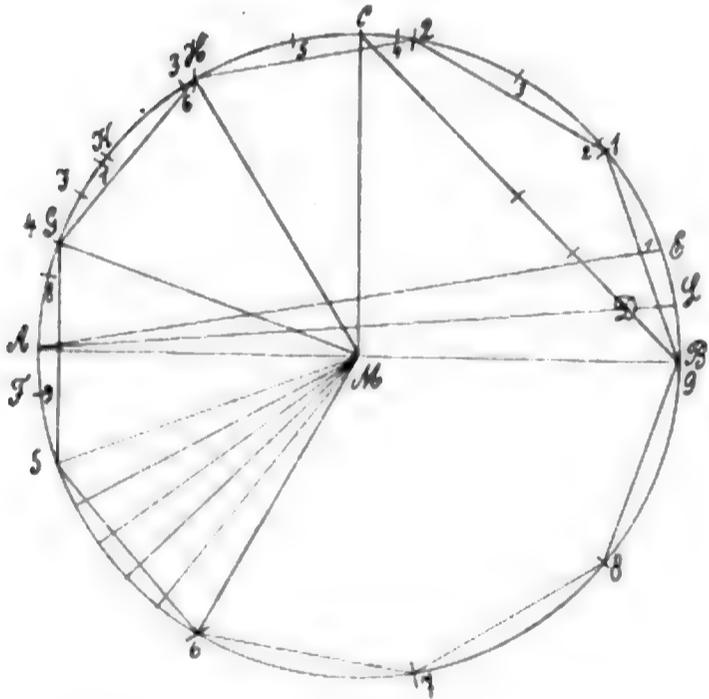
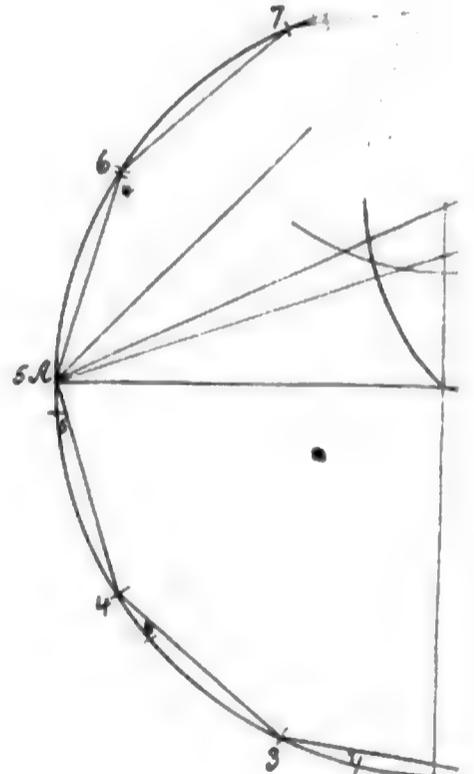


Fig.



**XVIII. Graeber: Pythagoreische Dreiecke.**

Fig. 8.

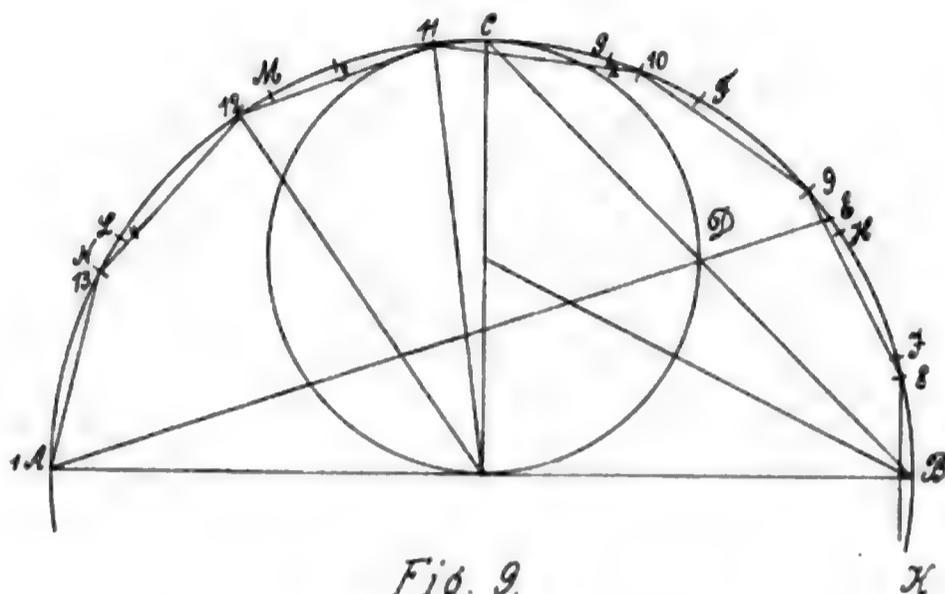


Fig. 9.

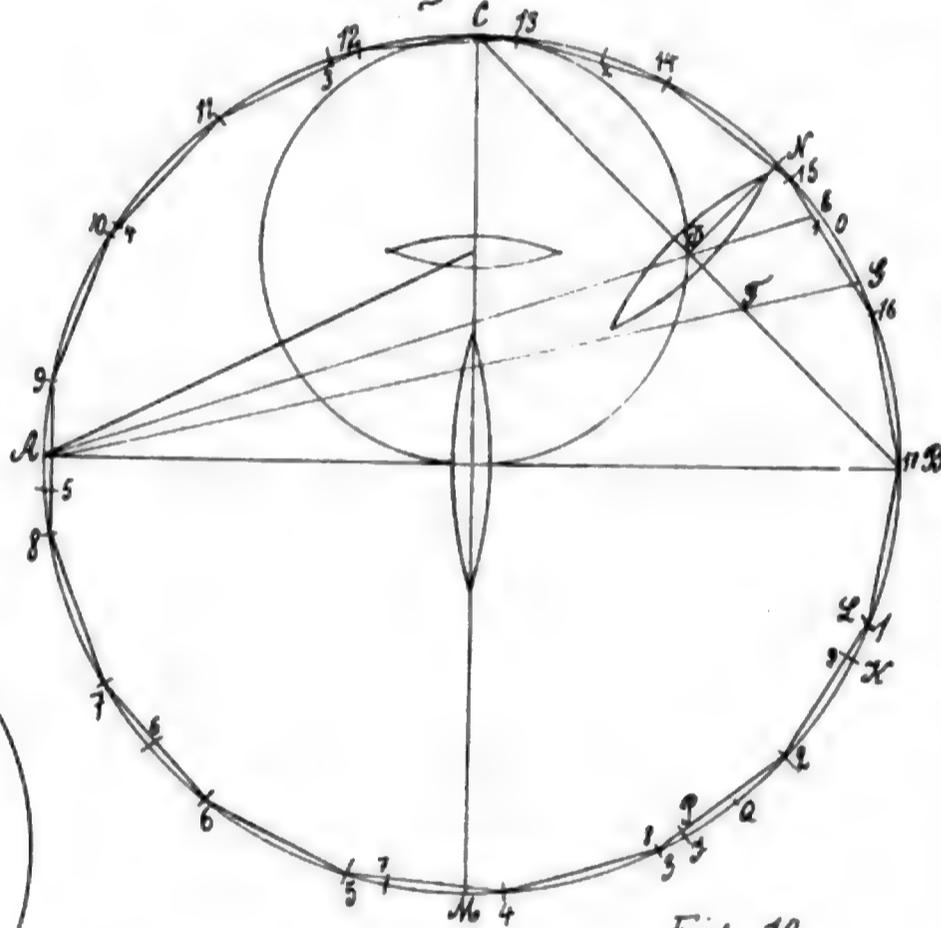
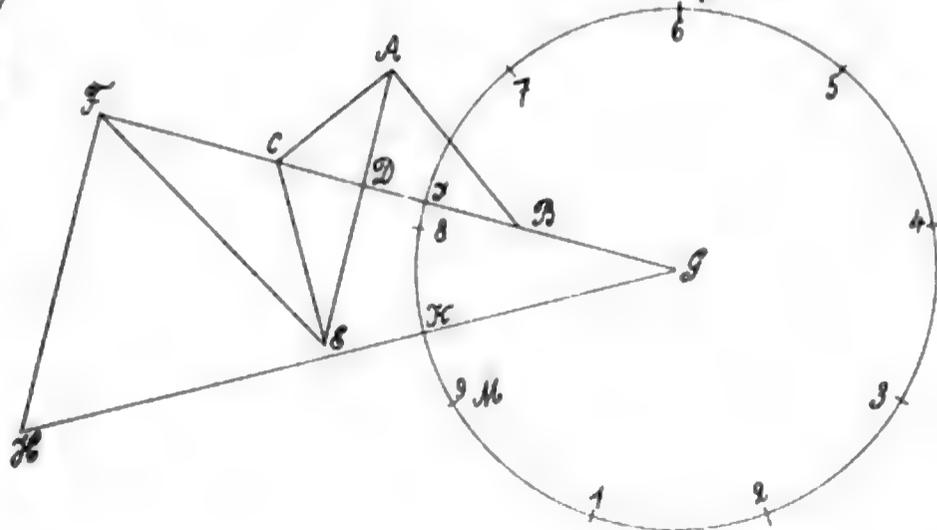


Fig. 10.







# Teil XV.

Fig. 1.

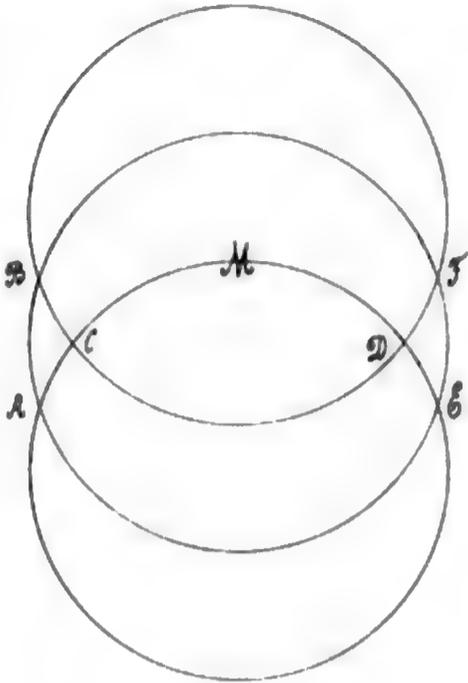


Fig. 2.

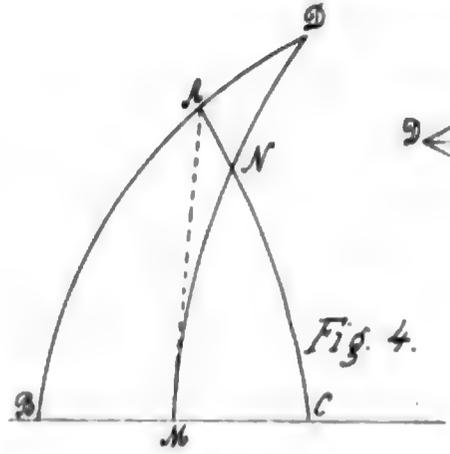
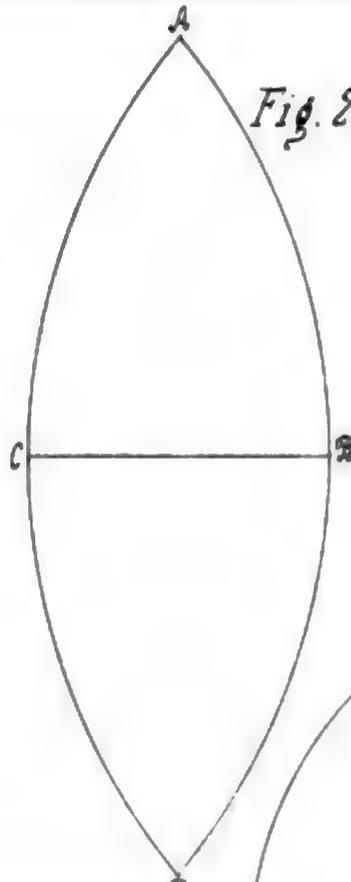


Fig. 4.

Fig. 3.

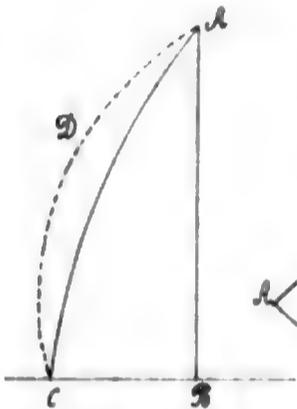
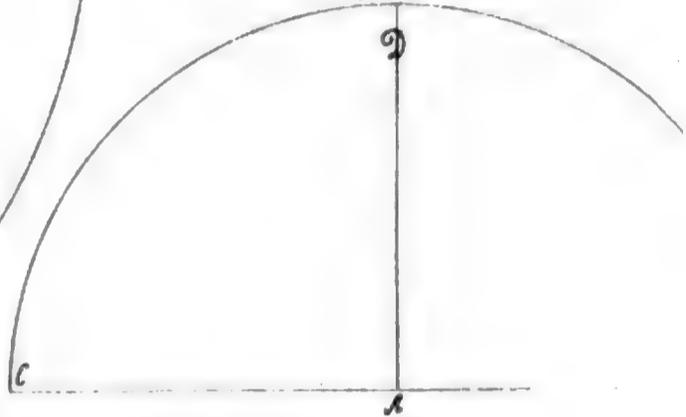


Fig. 5.

Fig. 6.

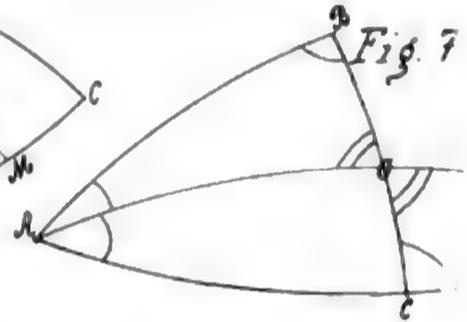
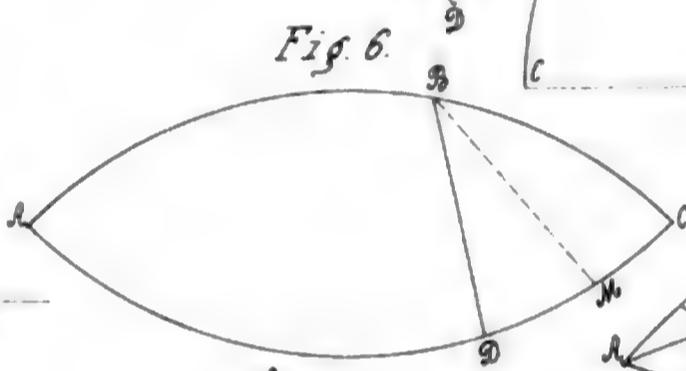


Fig. 7.

Fig. 8.

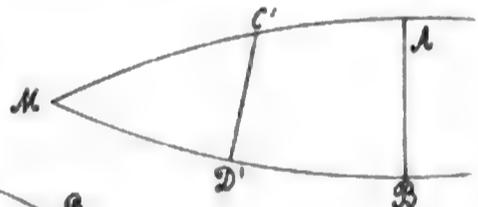
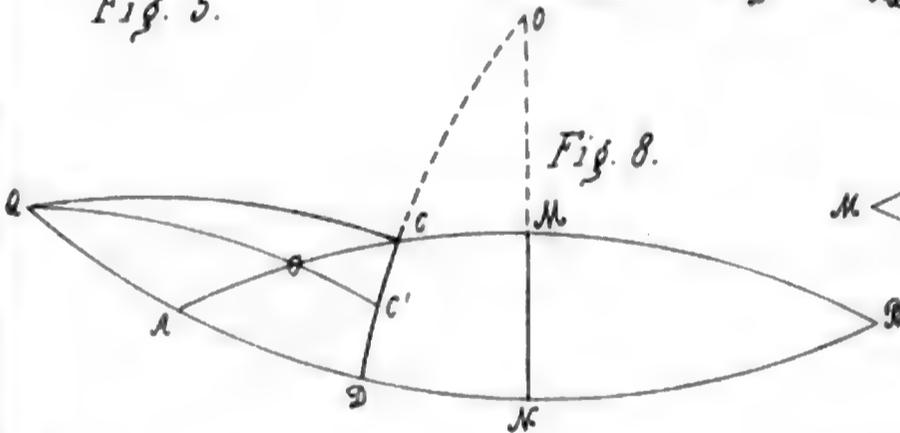


Fig. 9.

Fig. 10.

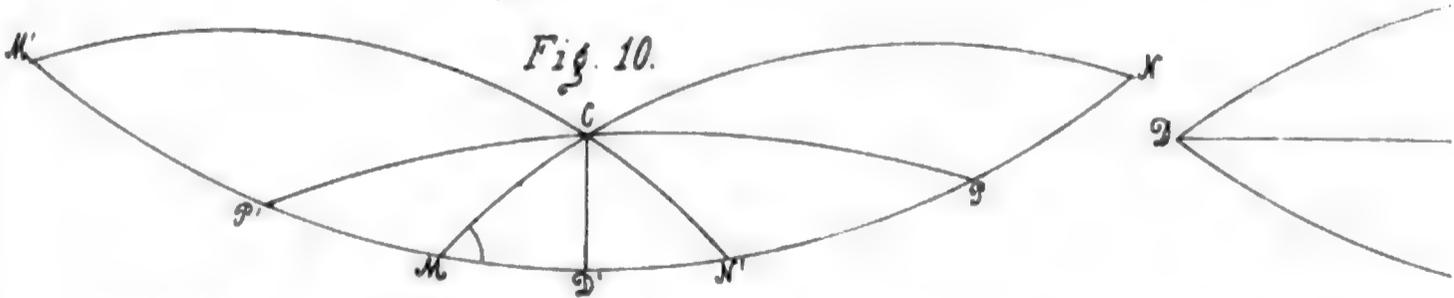


Fig. 11.

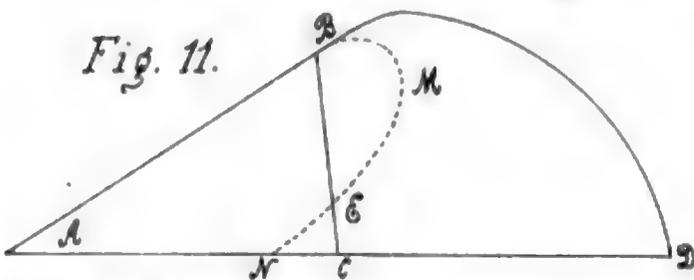


Fig. 12.

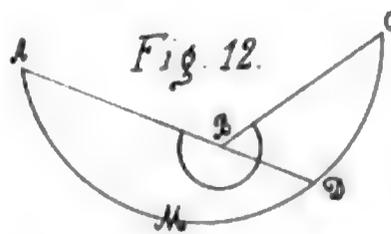
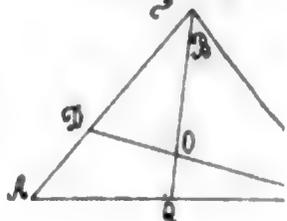


Fig. 14.



## XIX. Sikstel: Géométrie sphérique.

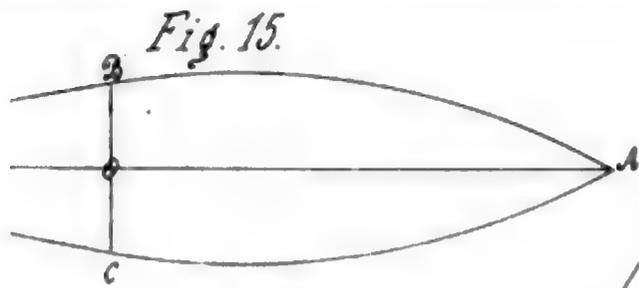


Fig. 15.

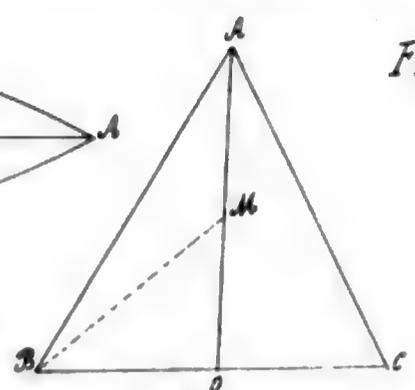


Fig. 20.

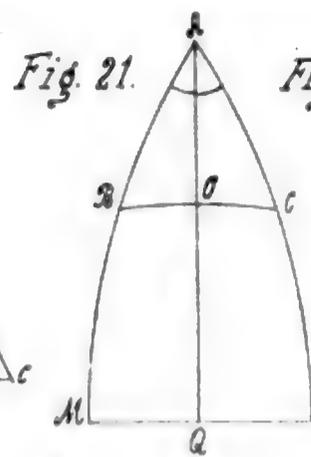


Fig. 21.

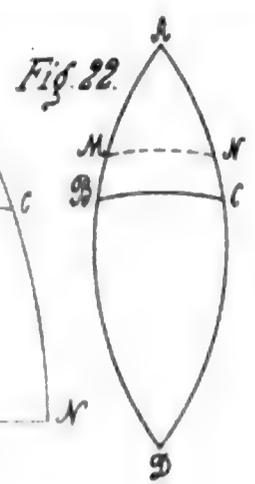


Fig. 22.

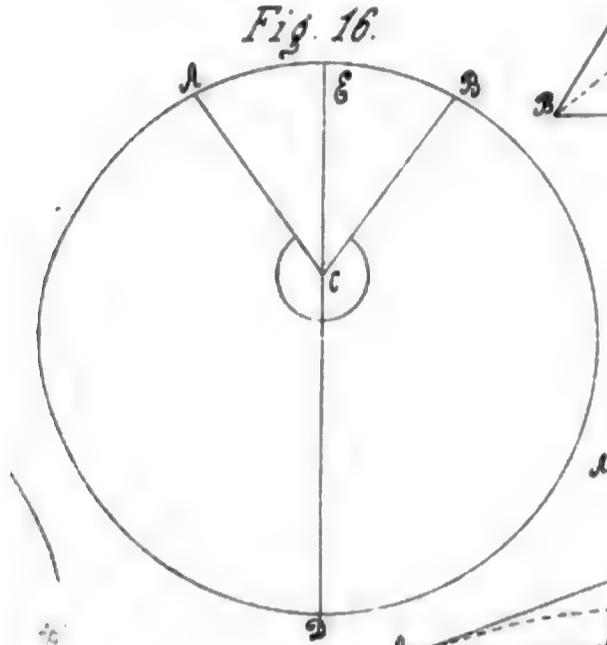


Fig. 16.

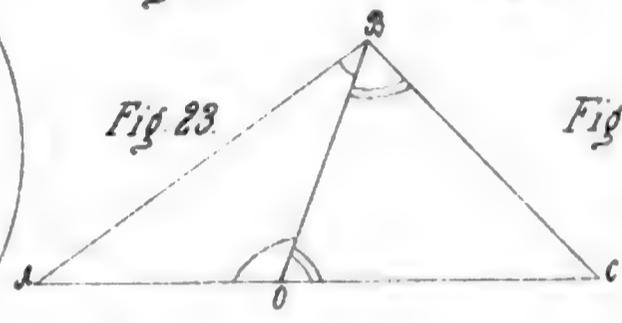


Fig. 23.

Fig. 28.

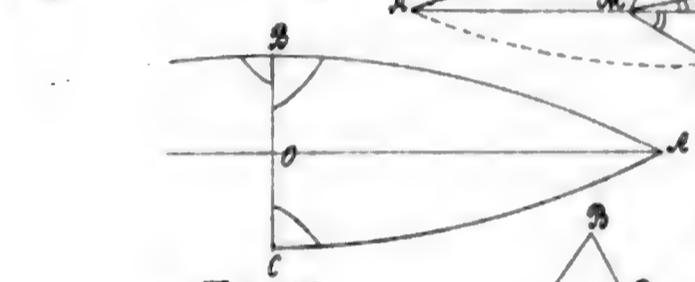
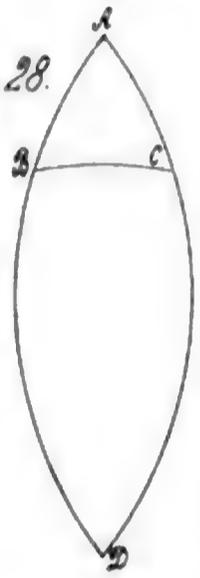


Fig. 17.

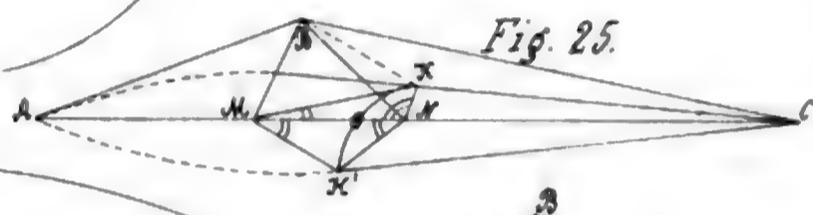


Fig. 25.

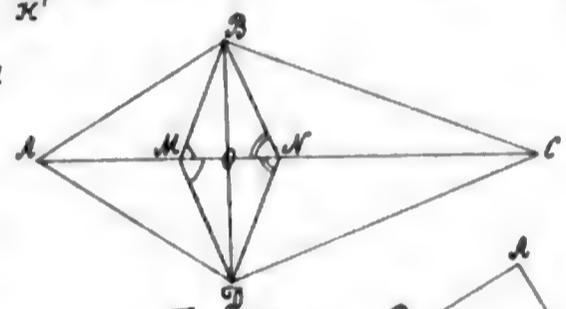


Fig. 24.

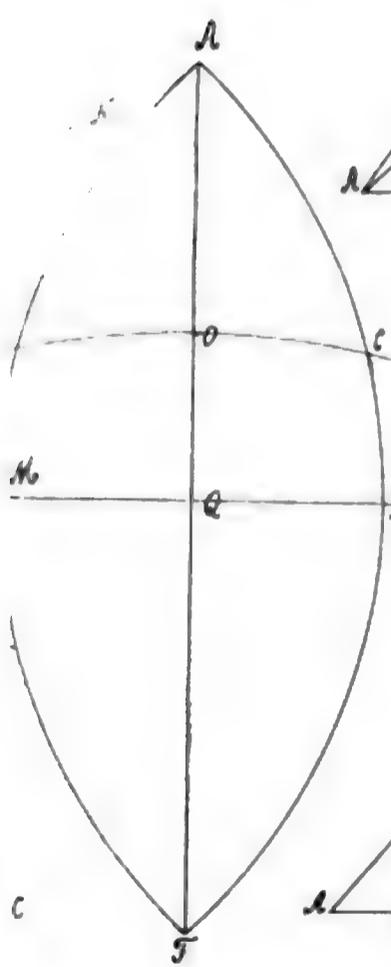


Fig. 18.

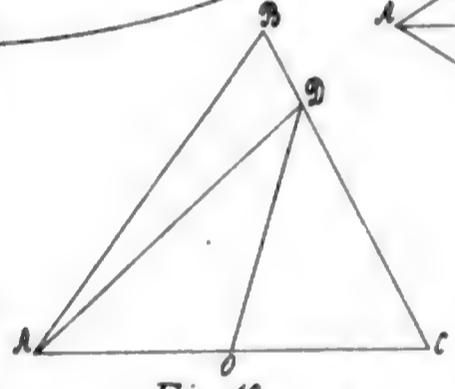


Fig. 19.

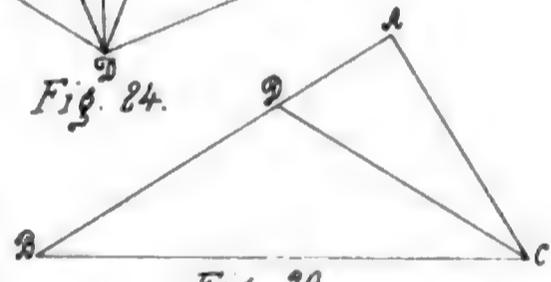


Fig. 29.

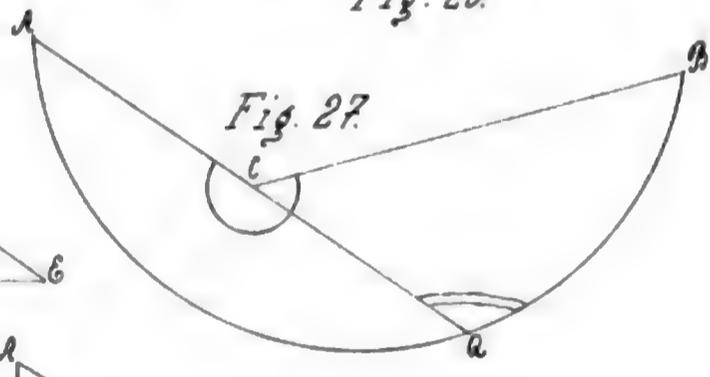


Fig. 27.

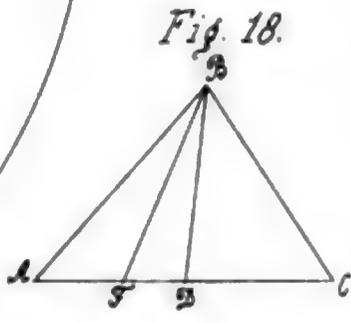


Fig. 18.

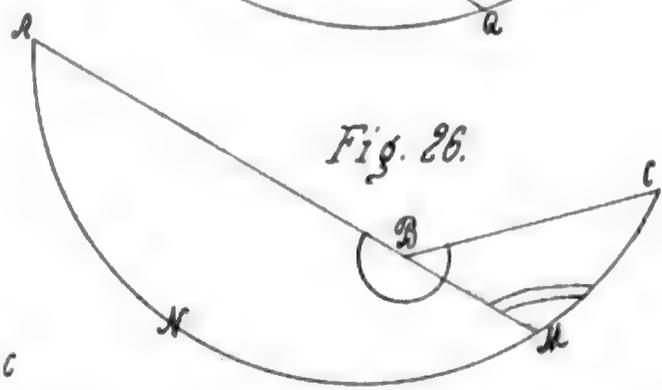
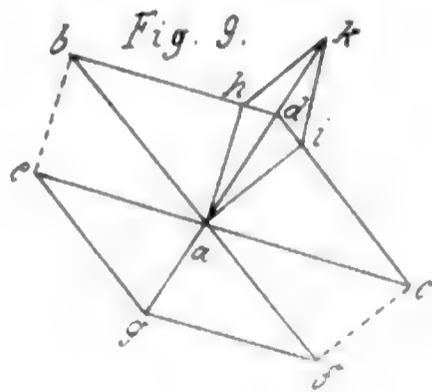
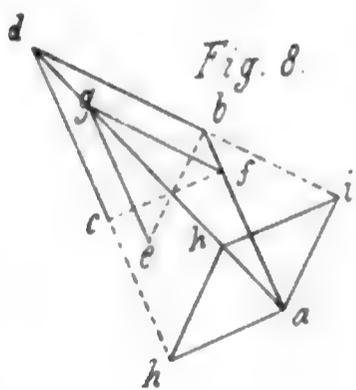
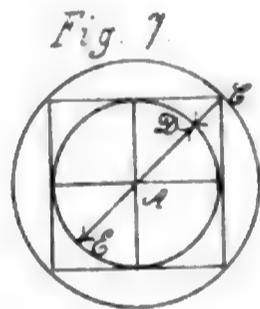
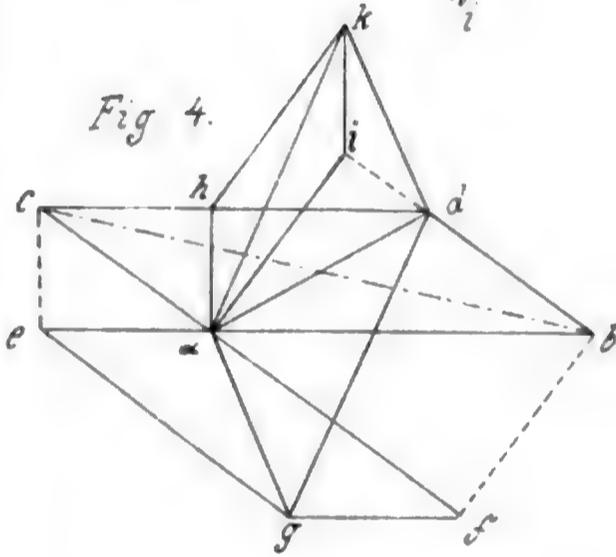
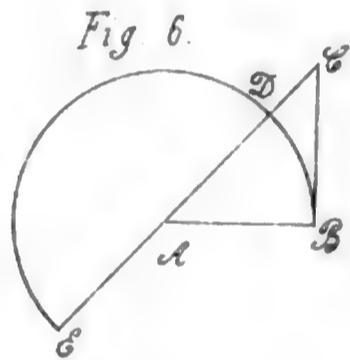
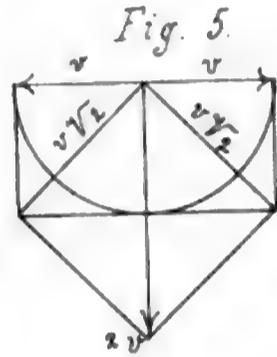
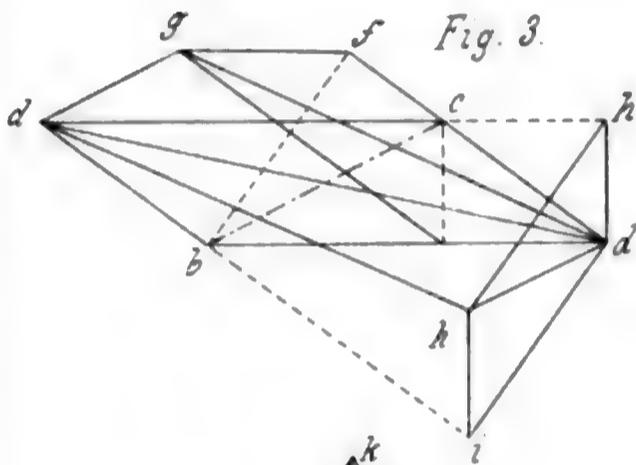
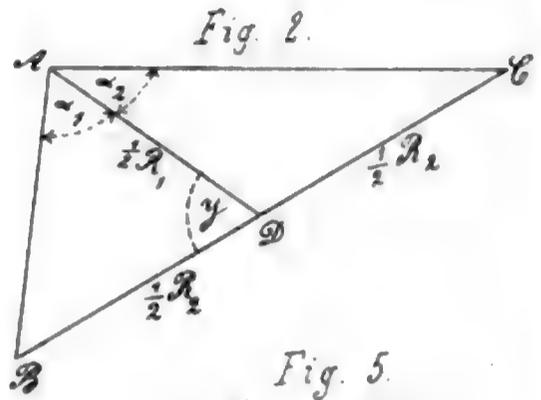
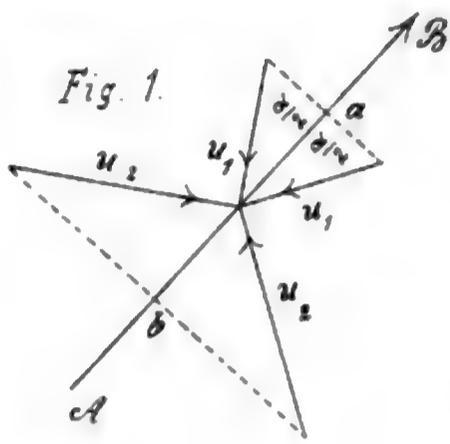


Fig. 26.



**XX. Schwartz:** Gesetz vom Parallelogramm.

# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe,**

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

---

**Zweite Reihe.**

**Sechzehnter Teil.**

---

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.  
(M. Ehlers & Co.)

1898.



510.5  
A67  
M4

# ARCHIV

der

## MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

Zweite Reihe.

Sechszehnter Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
(H. Ehlert & Co.)

1898.

Barnan - J. M.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch jede Buchhandlung zu beziehen:

## Die Geometrie der Lage.

Vorträge von Prof. Dr. Th. Reye, ord. Professor an der  
Universität Strassburg

*Abt. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Broch. 9 Mk., in  
Halbfranz gebunden 11 Mk.*

*Abt. III (neu). Broch. 6 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.*

Bereits früher erschien:

*Abt. I (3. Aufl.) Mit 92 Textfiguren. Broch. 7 Mk., in Halb-  
franz gebunden 9 Mk.*

Aus einer Besprechung von Guido Hauck: „Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Dezennien eine überaus fruchtbare Weiterentwicklung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise beteiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen. . . . Das auch bereits ins Französische und Italienische und jetzt auch ins Englische übersetzte Werk stellt in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar.“

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung (H. Ehlers & Co.)  
Leipzig u. Dresden.

## Mathematische Aufgaben

zum Gebrauche  
in den

obersten Klassen höherer Lehranstalten.

Aus den

bei Reifeprüfungen

an preussischen Gymnasien und Realgymnasien  
gestellten Aufgaben ausgewählt

und

mit Hinzufügung der Ergebnisse (II. Teil)

zu einem Übungsbuche vereint

von

**Prof. H. C. E. Martus,**

Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

- I. Teil: Aufgaben. 10. Doppel-Auflage. Geh. 3,60 M., geb. 4 M.  
II. Teil: Ergebnisse. 9. u. 10. Auflage. Geh. 4,80 M., geb. 5,20 M.

Soeben erschienen.

# Inhalts-Verzeichniss des sechzehnten Teils.

---

Nr. der Abhandlung.	Heft.	Seite
<b>Geschichte der Mathematik und Physik.</b>		
VI. Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie. Von Stanislaus Chraszczewski . . . . .	II	119
XVI. Schleiermacher als Mathematiker. Von H. Borkowski . . . . .	IV	337
<b>Methode und Principien.</b>		
IX. Anwendungen von Dühring's Begriff der Wertigkeit. Von K. Wessely. Forts. v. Nr. XX. im IX. Teile . . . . .	III	225
<b>Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.</b>		
VIII. Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen. Von Theodor Lange . . . . .	II	220
VIII. Facultätencongruenzen. Von G. Speckmann . . . . .	II	223
XV. Ueber Primzahlen. Von G. Speckmann . . . . .	III	335
XIX. Ueber die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer bestimmten Grenze. Von G. Speckmann . . . . .	IV	447
XIX. Ueber Primzahlmengen. Von G. Speckmann . . . . .	IV	447
XIX. Formeln für Primzahlen. Von G. Speckmann . . . . .	IV	448

## IV

Nr. der Abhandlung

Heft. Seite.

### Integralrechnung.

- I. Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges. Von Th. Christen . . . . . I 1

### Geometrie der Ebene.

- V. Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen eines Dreiecks. Von Konstantin Karamata . . . . . II 113
- VII. Untersuchungen und Lehrsätze über Begrenzungscurven. Von C. W. Meyer . . . . . II 150
- XII. Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks; als besonderen Fall die Steiner'sche Curve des Dreiecks. Von Bücking . . . . . III 271
- XIII. Ueber eine Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck. Von Dziobek . . . . . III 320
- XIV. Zur Theorie der Lemniskate. Von K. Zahradnik . . . . . III 327

### Geometrie des Raumes.

- IV. Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen von Curven und Flächen. Von R. Hoppe . . . . . I 112
- XI. Ueber das gleichseitige und das Höhenschnitt-Tetraeder. Von R. Hoppe . . . . . III 257
- XV. Nachtrag . . . . . III 333
- XVII. Drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden. Von E. Salfner . . . . . IV 347

### Trigonometrie.

- III. Ueber goniometrische Relationen, die bei der Kreisteilung auftreten. Von B. Sporer . . . . . I 68

### Mechanik.

- II. Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern. Von E. Rehfeld . . . . . I 36

## V

Nr. der Abhandlung.	Heft.	Seite.
XVIII. Die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einfluss einer Centrakraft. Von Ulrich Bigler . . . . .	IV	358

### Erd- und Himmelskunde.

X. Der Ring des Saturn. Von A. Niemann . . .	III	241
--	-----	-----

### Litterarische Berichte.

- LXI. D. E. Smith (hist. mod. math.) J. Hagen (Euler op.) von Braumühl (Gesch. Trig — Nassir Eddin Tusi u Regiomontan.) Wangerin (Neumann). Wertheim (Misrachi). Mortet (Epaphrodit. u. Vitruv) Engel (H. Grassmann). Engel u Study (Ausdehnungsl. 1844 u. 1862). Sinram (Newton Grav.) Frolov (Dém. ax. XI.) Gimler (Festp. d. Denk.) Astl-Leonhard (Nat. Org.) Johannesson (Beharr.) C. Neumann (Fernwvk.) Schmitz-Dumont (Nat.-Ph.) Streckler (log. Ueb.)
- LXII. Heath (Archimedes). Graf (Steiner) Obenrauch (darst. u. proj. G.) Goldschmidt (Wahrscheinl.) Traub (Mag. Math.) Koenigsberger (Helmholtz) Goebel (Zahl u. Unendl.) Ego (exact. F.) Forti (Grassmann). Russell (fonnd. geom.) Pringsheim (D. Bernoulli Wertl.) Poincaré (méc. cél.) Bureau des Long. (Ann. 1896–8). Observ. de Montsouris (Ann. 1896–8)
- LXIII. Bussler (El. M.) Schwering u Krimphoff (eb. G.) Köstler (Geom.) Sickenberger (el. M.). Recknagel (eb. G.) Hammer (Trig.) Bürklen (eb. Trig.) Brandt (Phys.) Lieber u. Müsebeck (Aufg.) Sailer (Aufg.) Pasca (mat. sup.) Weber (Alg.) Picard u. Simart (fct. alg. 2 var.) Frischauf (Kr. u. Kugfct.) Burkhardt (Fct. Compl.) Fricke (Diff. u. Int.) Grohmann (Gl. 3. Gr.) Scheffler (Th. Glch.) Lamb (inf. c.) Burnside (groups.) Baker (Abel thm.) Tannery u. Molk (fct. ell.) E. Schultz (Ham. Diffglch.) Méray (an. inf.) Speckmann (Zahl.) Teixeira (Mem. Madrid). Hermes (Vielfl.). Schlotke (Darst. G.)

I.XIV. Mansion (g. eucl. et non e.) Korn (Grav. elektr. E.) Dellingshausen (kin. Naturl.) Frolov (dém. th. par.) Fink (Geom. d. Eb.) Schüller (Ar. Alg.) Ganter (an. Geom.) Doehlemann (proj. G.) Korteweg (trill. hoog. o.) Bäcklund (sol. kr. rör.) Schouten (versnell. h. o.) Klimpert (Hydrod.) Moleabroek (quat. mech.) Nédélec (c. vect.) Schroeder (phot. opt.) Schlemüller (Schall.) Jssaly, (opt. géom.) Wind (magn. opt.)

---

## Berichtigungen

im 16. Teile.

---

- Seite 274 Zeile 7 v. o. statt  $p_3 = \pm p_1$  setze  $p_2 = \pm p_3$   
12 „  $c_3$  „  $x_3$   
14 „ Geraden setze Gerade  
5 v. u. statt  $p_1 \xi_3 \xi_2$  setze  $p_2 \xi_3 \xi_1$
- Seite 275 Zeile 3 v. u. statt des  $\mathfrak{R} . . .$  setze eingeschriebenen  
 $\mathfrak{R} . . .$   
statt des  $\mathfrak{S} . . .$  setze die Strahlen  
des  $\mathfrak{S} . . .$
- Seite 276 Zeile 5 v. u. statt dem setze den
- Seite 278 Zeile 4 v. o. statt  $x_5$  setze  $x_3$
- Seite 278 Zeile 16 v. n. statt  $x_7$  setze  $x_1$
- Seite 279 Zeile 5 v. o. statt  $\mathfrak{S}gg$  setze  $\mathfrak{S}fg$   
Zeile 8 v. o. statt diejenige setze derjenige
- Seite 280 Zeile 5 v. u. statt  $p\varepsilon$  setze  $p_i$
- Seite 281 Zeile 10 v. o. statt 7—8 setze 277
- Seite 282 Zeile 13 statt  $A_1 A_2$  setze  $A_2 A_3$
- Seite 282 Zeile 22 statt  $T$  setze  $\Gamma$
- Seite 282 Zeile 22 statt punkt setze büschel
- Seite 283 Zeile 18 statt  $z$  setze  $x$
- Seite 283 Zeile 26 statt (11) setze  $(11)_3$
- Seite 286 Zeile 6 statt  $C$  setze  $E$

Seite 287 Seite 4 v. o. lautet:  $\frac{s_2^2 - s_3^2}{\xi_1} + \frac{s_3^2 - s_1^2}{\xi_2} + \frac{s_1^2 - s_2^2}{\xi_3} = 0$

Seite 287 Zeile 6 v. o. statt  $\frac{1}{s_3 - s_3^2}$  setze  $\frac{1}{s_1^2 - s_2^2}$

Seite 287 Zeile 4 v. u. statt  $\xi_2$  setze  $\xi_1$

Seite 288 Zeile 5 v. o. statt Sig setze Sgp.

Seite 288 Zeile 7 v. o. statt 1 : 2 setze 2 : 1

Seite 288 Zeile 10 v. u. statt innere Aehnlichkeit setze innern  
Aehnlichkeitspunkt.

Seite 288 Zeile 4 v. u. statt laufender setze laufenden

Seite 289 Zeile 15 v. u. statt  $a_4$  setze  $a'_4$

Seite 289 Zeile 1 v. u. statt  $A_{13}$  setze  $A_{12}$

Seite 291 Zeile 4 v. ob. statt  $-p_3 \xi_3$  setze  $p_3 \xi_3$

Seite 291 Zeile 7 v. o. hinzuzufügen = 0

Seite 291 Zeile 11 v. u. statt  $+p_3$  setze  $: p_3$

Seite 292 Zeile 1 v. ob. statt  $\frac{q_3}{q_1}$  setze  $\frac{q_3}{q_1}$

Seite 292 Zeile 3 v. o. statt  $+$  setze  $:(2\text{mal})$

Seite 292 Zeile 9 v. u. statt  $\cos A_1$  setze  $\sin A_1$

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt  $\hat{2}(4$  setze 17)

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt  $x_2 x_1$  setze  $x_3 x_1$

Seite 293 Zeile 4 v. u. statt  $x_1 x_3$  setze  $x_1 x_2$

Seite 294 Zeile 17 v. ob. statt  $p_2^4$  setze  $p_2^2$

Seite 294 Zeile 3 v. u. statt einem bei  $A_4$  setze einem

Seite 296 Zeile 18 v. ob., die letzteren statt letzteren

Seite 296 Zeile 10 v. u. statt  $U$  und  $V$  setze  $x$  und  $y$

Seite 296 Zeile 2 v. u. statt 45 setze 15

Seite 297 Zeile 3 v. ob. statt Die in 2 setze Je 2

Seite 300 Zeile 1 v. ob. statt  $P$  setze  $P'$

Seite 300 Zeile 15 v. o. statt  $+R'S$  setze  $\pm R'S$

Seite 300 Zeile 17 v. o. statt  $QQ$  setze  $QQ'$

Seite 301 Zeile 12 v. ob. statt  $\xi_3 = 0$  setze  $\xi_2 = 0$

Seite 302 Zeile 4 v. u. hinzuzufügen (s. S. 277)

Seite 303 Zeile 9 v. o. vor  $\frac{x_3}{n_1}$  setze  $+\frac{x_3}{n_2} (x_1 - x_2 + x_3)$

Seite 304 Zeile 2 v. ob. hinzuzufügen = 0

Seite 306 Zeile 2 v. u. statt die variablen setze und variablen

Seite 307 Zeile 15 v. u. statt Leitcurve setze Leitcurve zerfallen.

I.

Beiträge zur Verwendung des freien Integrationsweges.

Von

**Th. Christen**

in Basel.

---

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, den Cauchy'schen Satz vom freien Integrationsweg, der sich schon lange als enorm fruchtbar erwiesen hat, noch weiter zu verwerten. Die zur Anwendung gelangenden Methoden machen es möglich, entweder die Resultate auf kürzerem und eleganterem Wege abzuleiten, als dies bisher geschehen ist, oder eine Gruppe verwandter Integrale, die sich in verschiedenen Werken zerstreut finden, unter einem einheitlichen Gesichtspunkte zu behandeln, oder endlich neue Integrale zu berechnen und solche, für welche in andern Arbeiten falsche Werte angegeben sind, zu berichtigen.

Den Satz von Cauchy <sup>1)</sup> setze ich in der folgenden Form als bewiesen voraus:

---

1) Zur Entwicklungsgeschichte dieses Theorems vergleiche man folgende Abhandlungen Cauchy's: „Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal“. Oeuv. compl. série 2 tome VI. pag. 23 „De l'influence que peut avoir sur la valeur d'une intégrale définie l'ordre dans lequel on effectue les intégrations.“ Oeuv. série 2 tome VI page 112. „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires,“ Separatdruck erschienen 1825.

Ist  $z = x + iy$  und besteht zwischen  $x$  und  $y$  irgend eine Relation, nach welcher ein Punkt mit den Coordinaten  $x$  und  $y$  auf einer geschlossenen Curve liegt, so ist das Integral

$$\int u(z) dz$$

ausgedehnt über den ganzen Umlauf der geschlossenen Curve gleich dem Product von  $i2\pi$  in die Summe aller „Résidus“ der Function  $u(z)$ , soweit sich dieselben auf Pole beziehen, die vom dem Integrationsweg umschlossen werden.

$$\int u(z) dz = i2\pi \sum_{h=1}^{h=n} c_h$$

$$c_h = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \delta^{p-1}} \{ \delta^p \cdot u(z_h + \delta) \}$$

Die Werte  $z_h (h = 1, 2 \dots n)$  sind die vom Integrationsweg umschlossenen Pole von  $u(z)$  und  $p$  ist bestimmt durch die Bedingung

$$0 < \text{mod} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^p u(z_h + \delta) < \infty$$

wobei selbstverständlich für  $p = 1$

$$c_h = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot u(z_h + \delta)$$

zu setzen ist.

Es sei noch daran erinnert, dass Cauchy unter

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} ((u(z)))$$

die Summe aller Résidus versteht, deren Pole innerhalb der Grenzen

$$x_1 < x < x_2$$

$$y_1 < y < y_2$$

liegen.

Schliesst der Integrationsweg keinen Pol der Function  $u(z)$  ein, so ist das Integral gleich null.

### I. Ableitung einiger Integrale, die mit dem Exponentialintegral verwandt sind.

Die Berechnung des Exponentialintegrales

$$\varphi(a) = \int_a^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \tag{1}$$

geschieht durch Reihenentwicklung. Durch Differentiation der Gleichung (1) nach  $a$  kommt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = - \frac{e^{-a}}{a} = - \sum_0^{\infty} (-1)^h \frac{a^{h-1}}{h!}$$

woraus durch Integration

$$\varphi(a) = \gamma + \log \left( \frac{1}{a} \right) - \sum_1^{\infty} \frac{(-a)^h}{a \cdot h!} \quad (2)$$

Für den Wert von  $\varphi(a)$  habe ich absichtlich den sonst gebräuchlichen Ausdruck

$$\varphi(a) = - \mathfrak{E}(-a)$$

wobei

$$\mathfrak{E}(z) = C^1 + \frac{1}{2} \lg(z^2) + \sum_1^{\infty} \frac{z^h}{h \cdot h!}$$

vermieden, weil  $Ei(z)$  für positive und negative Werte von  $z$  eine eindeutig definierte Function ist, während das Glied  $\lg \left( \frac{1}{a} \right)$  in Gleichung (2) andeuten soll, dass die Function  $\varphi(a)$  für negative Werte von  $a$  jegliche Bedeutung verliert, wenn sie, wie hier, durch das bestimmte Integral (1) definiert ist (man müsste dann schon durchaus an dem unglücklichen Begriff der „Valeur principale“ festhalten wollen!).

Dass die Constante  $\gamma$  dem negativen Wert der Mascheroni'schen Constante gleich ist, geht aus der folgenden Transformation hervor:

Die Mascheroni'sche Constante<sup>2)</sup> ist definiert als

$$C = \int_0^1 \lg \left( \lg \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{\infty} e^{-y} \log y dy$$

woraus durch partielle Integration

$$C = - \lim_{\delta=0} \left\{ e^{-\delta} \lg \delta + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \right\}$$

und nach (1)

1) Unter  $C$  sei durchweg die Mascheronische Constante

$$C = 0,577\ 215\ 665 \dots$$

verstanden; über deren genauen Wert vergl. Crelles Journ, XLIX pag. 375.

2) Mascheroni: Adnotationes ad calc. integ. Euleri (1790) pag. 13.

$$C = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \log \delta + \varphi(\delta) \} = - \gamma$$

sodass

$$\varphi(a) = \int_a^{\infty} e^{-x} dx = -C + \lg \left( \frac{1}{a} \right) - \sum_1^{\infty} \frac{(-a)^h}{h \cdot h!} \quad (4)$$

Man setze jetzt

$$u(z) = \frac{e^{-az}}{1+z} \quad (5)$$

und nehme als Integrationsweg das unendliche grosse Rechteck  $OABC$  (Fig. 1). Innerhalb desselben liegt kein Pol von  $u(z)$ ; das Integral über das Rechteck ist daher gleich null. Die einzelnen Teilintegrale ergeben sich als

$$\int_0^A u dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x} dx = e^a \varphi(a)$$

$$\int_A^B u dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a(k+iy)}}{1+k+iy} d(iy) = 0$$

$$\int_B^C u dz = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-a(x+ik)}}{1+x+ih} dx = 0$$

$$\int_C^0 u dz = -i \int_0^{\infty} \frac{e^{-iay}}{1+iy} dy$$

und durch Addition kommt

$$0 = e^a \varphi(a) - i \int_0^{\infty} \frac{e^{-iay}}{1+iy} dy \quad (6)$$

Setzt man

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ay}{1+y^2} dy, \quad G(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ay}{1+y^2} dy \quad (7)$$

so ergibt Gleichung (6) nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$G + \frac{\partial G}{\partial a} = e^a \varphi(a) \quad (8)$$

$$F + \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad (9)$$

Die Integration von (9) liefert die längst bekannte Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ay}{1+y^2} dy - \int_0^{\infty} \frac{y \sin ay}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

Von mehr Interesse ist die Differentialgleichung (8), deren Integration <sup>1)</sup>, wie man leicht ersieht, auf die Gleichungen

$$G(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ay}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \{e^{-a} \mathfrak{E}(a) - e^a \mathfrak{E}(-a)\} \quad (10)$$

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \int_0^{\infty} \frac{y \cos ay}{1+y^2} dy = -\frac{1}{2} \{e^{-a} \mathfrak{E}(a) + e^a \mathfrak{E}(-a)\} \quad (11)$$

führt. Die Gleichungen (10) und (11) bleiben für negative Werte von  $a$  bestehen, überhaupt sind beide Integrale für alle reellen Werte von  $a$  durchaus bestimmt, und deshalb ist die Verwendung der Function  $\mathfrak{E}$  die einzig gegebene. Beide Gleichungen sind von mehreren Mathematikern gefunden worden, so von Schlömilch <sup>2)</sup>, Arndt <sup>3)</sup>, Meyer <sup>4)</sup>, doch sind die von ihnen angewandten Methoden nicht so einfach.

Im Folgenden kommen die mit  $Ei(z)$  verwandten Reihen

$$\mathfrak{E}(z) = C + \frac{1}{2} \lg(z^2) + \sum_1^{\infty} \frac{(-z^2)^h}{2h \cdot (2h)!}$$

$$\mathfrak{E}(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^h z^{2h+1}}{(2h+1) \cdot (2h+1)!}$$

zur Verwendung. Sie dienen zur Berechnung des Sinus- und des Cosinusintegrals. Man beweist leicht, dass

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = -Ci(a) \quad a > 0 \quad (12)$$

und

1) Das vollständige Integral ist

$$G = \gamma \cdot e^{-a} + \frac{1}{2} \{e^{-a} \mathfrak{E}(a) - e^a \mathfrak{E}(-a)\}$$

und für  $a = 0$  wird  $\gamma = 0$ .

2) Crelles J. V pag. 204.

3) Ibid. XI pag. 70.

4) Ibid. XLIII pag. 72.

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - Li(a) \quad (13)$$

Die Identität der Constanten des Cosinus- und des Exponential-integrales hat zuerst Arndt <sup>1)</sup> nachgewiesen, indem er die beiden Integrale von einander subtrahirte und zeigte, dass die Differenz verschwindet, wenn  $a$  gleich null gesetzt wird.

Auf die Integrale (12) und (13) lässt sich nun durch eine kurze Rechnung die Function

$$\psi(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \quad (14)$$

zurückführen. Man setze

$$u(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z} \quad (15)$$

und führe das Integral  $\int u dz$  um das Rechteck  $OABC$  (Fig. 1.) Es ergibt sich

$$\int_0^A u dz = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax + i \sin ax}{1+x} dx$$

$$\int_A^B u dz = 0, \quad \int_B^C u dz = 0$$

$$\int_C^O u dz = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ay}(y+i)}{1+y^2} dy = -i\psi(a) + \frac{\partial \psi(a)}{\partial a}$$

und durch Addition

$$0 = \psi(a) - \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x} dx$$

$$0 = \frac{\partial \psi(a)}{\partial a} + \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{i+x} dx$$

Setzt man in beiden Gleichungen

---

1) Grunert's Archiv X pag 225.

$$x = \frac{y}{a} - 1$$

so erhält man mit Hilfe von (12) und (13)

$$\psi(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ay}}{1+y^2} dy = \cos a \left\{ \frac{\pi}{2} - Li(a) \right\} + \sin a \mathfrak{C}(a) \quad (16)$$

$$-\frac{\partial \psi(a)}{\partial a} = \int_0^{\infty} \frac{y e^{-ay}}{1+y^2} dy = -\cos a \mathfrak{C}(a) + \sin a \left\{ \frac{\pi}{2} - \mathfrak{C}(a) \right\} \quad (17)$$

$a > 0$

Zu gleichen Resultaten kommt Schlömilch <sup>1)</sup> auf folgende Art: Man liest direct aus Gleichung (14) ab, dass

$$\frac{\partial^2 \psi(a)}{\partial a^2} + \psi(a) = \frac{1}{a}$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist

$$\psi(a) = \{A - \mathfrak{C}(a)\} \cos a + \{B + \mathfrak{C}(a)\} \sin a$$

Nun stösst aber der exacte Beweis dafür, dass

$$B = 0$$

auf erhebliche Schwierigkeiten, sodass diese anscheinend sehr einfache Ableitung schliesslich doch bedeutend complicirter ausfällt, als die oben angeführte.

## II. Integrale von 0 bis $\infty$ über algebraisch-trigonometrische Functionen.

Es soll zuerst eine allgemeine Integrationsformel abgeleitet werden, umfassend alle Functionen  $u(z)$  welche der Bedingung

$$\lim_{k=\infty} k \cdot e^{i\vartheta} \cdot u(ke^{i\vartheta}) = A \quad (18)$$

genügen, wobei  $A$  endlich und von  $\vartheta$  unabhängig sein muss, solange  $\vartheta$  zwischen den Grenzen 0 und  $\pi$  bleibt. Ferner darf  $u(z)$  für keinen reellen Wert des Argumentes  $z$  unendlich gross werden. Führt man unter diesen Voraussetzungen das Integral  $\int u dz$  um das unendlich grosse Rechteck  $ABCD$ , so wird

1) Crelles J. XXXIII pag. 325.

$$\int u dz = i2\pi \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\mathfrak{C}}}_0^{\infty} ((u(z))) \quad (19)$$

Die Längen  $OB$  und  $BC$  sind beliebig verschieden, beide aber unendlich gross; sie seien  $k$  und  $\kappa$ ; dagegen ist vorausgesetzt, dass

$$AO = CB = DP = PC = k$$

Dann wird

$$\int_A^B = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx, \quad \int_B^C = i \int_0^k u(k+iy) dy$$

$$\int_C^D = - \int_{-k}^k u(x+ik) dx, \quad \int_D^A = -i \int_0^k u(-k+ly) dy$$

und nach (18)

$$\int_B^C + \int_D^A = iA \int_0^k \left\{ \frac{1}{k+iy} + \frac{1}{k-iy} \right\} dy$$

$$\int_C^D = -A \int_0^k \left\{ \frac{1}{x+i\kappa} - \frac{1}{x-i\kappa} \right\} dx$$

woraus durch Addition

$$\int_B^C + \int_C^D + \int_D^A = i2A \left\{ \pi - \operatorname{arctg} \frac{k}{\kappa} - \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{k} \right\}$$

bekanntlich gilt aber für positive  $x$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

sodass

$$\int u dz = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx + i\pi A$$

woraus man mit Hilfe von (19) erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = i\pi \left\{ 2 \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\mathfrak{C}}}_0^{\infty} ((u(z))) - A \right\} \quad (20)$$

Stellt man ferner an die Function  $u$  die Forderung

$$u(-x) = u(x) \tag{18a}$$

so kommt aus (20)

$$\int_0^{\infty} u(x) dx = i\pi \left\{ E_0^{\infty} (u(x)) - \frac{1}{2}A \right\} \tag{21}$$

Eine grosse Zahl algebraisch-trigonometrischer Integrale lassen sich aus dieser Gleichung (21) ableiten. Es sei vorausgeschickt, dass die hier zur Behandlung kommenden Integrale sämtlich den Nenner

$$e^q + e^{-q} - 2 \cos px$$

enthalten. Setzt man an dessen Stelle den anderen

$$1 - 2\alpha \cos px + \alpha^2$$

so liegt darin keine principielle Aenderung. Dagegen wird sich zeigen, dass bei Anwendung der zweiten Form die Integrale durch zwei verschiedene analytische Ausdrücke dargestellt werden müssen, jenachdem  $\alpha^2 > 1$  ist. Diejenigen unter ihnen, die bereits von Anderen gefunden worden sind, werden auch überall doppelt aufgeführt für  $\alpha^2 > 1$  und für  $\alpha^2 < 1$ . Um beide Fälle zugleich behandeln zu können, wähle ich die erste Form des Nenners, aus welcher die zweite dadurch hergestellt wird, dass man die Gleichung mit  $e^{\pm q}$  multiplicirt, jenachdem  $\alpha^2 > 1$  sein soll. Es mögen endlich in diesem Abschnitt zur Vereinfachung die folgenden Bezeichnungen festgehalten werden

$$p = 2\pi a > 0, \quad q = 2\pi b > 0, \quad r = e^q + e^{-q}$$

1. Die Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2}$$

wird summirt durch Auswertung des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{r - 2 \cos x} \cdot \frac{dx}{x}$$

---

1) Diese Relation hat auf andere Art bereits Cauchy nachgewiesen; er bringt sie in seiner Abhandlung „Sur quelques relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.“ Oeuvres compl. série 2 tome VI pag. 124.

Die Pole der Function

$$u(z) = \frac{\sin z}{r - 2 \cos z} \cdot \frac{1}{z} \quad (22)$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$r - 2 \cos z = 0$$

Da nur die Pole mit positivem imaginärem Teil in Betracht kommen, so sind dieselben enthalten in

$$z_x = 2\pi(x + ib)$$

worin  $x$  alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft. Dann wird

$$c_x = \frac{\sin z_x}{z_x} \cdot \lim_{z=z_x} \frac{z - z_x}{r - 2 \cos z} = \frac{1}{2z_x}$$

$$c_0 = \frac{-i}{4\pi b}, \quad c_x = \frac{1}{4\pi(x + ib)}, \quad c_{-x} = \frac{-1}{4\pi(x - ib)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{C}_0^{\infty}((u)) = \frac{-i}{4\pi} \left\{ \frac{1}{b} + 2b \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} \right\}$$

Ferner ist

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(k \cdot e^{i\theta})}{r - 2 \cos(ke^{i\theta})} = -\frac{i}{2}$$

und nach (21), wenn  $x = py$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin py}{e^q + e^{-q} - 2 \cos py} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{1}{4} \left\{ -\pi + \frac{1}{b} + 2b \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} \right\} \quad (23)$$

Dieses Integral hat Plana<sup>1)</sup> nach einer anderen Methode berechnet, die ich kurz andeuten will. Es ist

$$x \cdot u(x) = \frac{e^{-q} \sin x}{(1 - e^{-q+ix})(1 - e^{-q-ix})} = \sum_1^{\infty} e^{-xq} \sin \pi x$$

$$\int_0^{\infty} u(x) dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{e^q - 1} \quad (23a)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (23), so erhält man

1) Mem. della reale acad. della science di Torino 1818 pag. 30.

$$\frac{1}{b} + 2b \sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} = \pi \frac{e^{\pi b} + e^{-\pi b}}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \quad (24)$$

Diese ist eine bekannte Reihe, sie entspricht für imaginäre Werte von  $b$  der Reihe für die Cotangente

$$b = ia$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi a = \frac{1}{a} - 2a \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (24a)$$

Aus (24) leitet man leicht die verwandte Reihe

$$\frac{1}{b} + 2b \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^x}{x^2 + b^2} = \frac{2\pi}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \quad (25)$$

ab, die später Verwendung finden wird.

2. Es sei

$$u(z) = \frac{\sin pz}{r - 2\cos pz} \cdot \frac{z}{1 + z^2}$$

Die Pole, deren Résidus unter die Summe  $\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_0^{\infty} ((u))$  fallen, sind

$$ax_x = x + cb$$

und

$$z' = i$$

Sind die entsprechenden Résidus  $c_x$  und  $c'$ , so ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_0^{\infty} ((u)) = c' + c_0 + \sum_1^{\infty} (c_x + c_{-x})$$

Berechnet man die einzelnen Résidus und definiert

$$F(x, b, a) = \frac{x^2 + b^2 - a^2}{x^4 + 2(b^2 + a^2)x^2 + (b^2 - a^2)^2} \quad (26)$$

so geht (25) über in

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_0^{\infty} ((u)) = -\frac{i}{4\pi} \left\{ \pi \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} + \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^{\infty} F(x, b, a) \right\}$$

endlich ist

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(pk e^{i\vartheta})}{r - 2\cos(pk e^{i\vartheta})} = -\frac{i}{2}$$

sodass nach (21)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2\cos px} \cdot \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{4} \left\{ \pi \frac{e^q + e^{-q} - 2e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} + \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^{\infty} F(x, b, a) \right\} \quad (27)$$

Ueberträgt man die von Plana benutzte Methode auf dieses Integral, so kommt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{\pi/2}{e^p + e^{-p} - 1} \quad (27a)$$

Diese Gleichung liefert mit (27) zusammen die Summe der Reihe:

$$\frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^{\infty} F(\kappa, b, a) = \pi \frac{e^q - e^{-q}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}} \quad (28)$$

Die Entwicklungen der Paragraphen 1. und 2. dienen dazu, die Summenformeln (24) und (28) abzuleiten; in den folgenden Abschnitten werden auf Grund der genannten Formeln weitere Integrale berechnet. Aus (28) erhält man für  $b = 0$  (nachdem man vorerst durch  $b$  dividirt hat.)

$$\sum_1^{\infty} \frac{\kappa^2 - a^2}{(\kappa^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{a} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \right)^2 \right\} \quad (28a)$$

und mit Hilfe von (24)

$$\sum_1^{\infty} \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + a^2)^2} = \left( \frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a} - 1 \right\} \quad (29)$$

und

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(\kappa^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \left\{ \left( \frac{\pi}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{4\pi a} \right) - \frac{1}{2a^2} \right\} \quad (30)$$

Für das hier berechnete Integral (27a) giebt die Láska'sche Sammlung<sup>1)</sup> einen falschen Wert an, indem dort steht

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin rx}{1 - 2p \cos rx + p^2} \cdot \frac{x dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{rq}}{(1+p)(e^{2qv} - p)} \quad p < 1$$

mit Angabe der Quelle „Legendre Exerc. 4, 132“. Ebenso ist der Fall  $p > 1$  nach Ohm<sup>2)</sup> falsch citirt. Die beiden angeführten Stellen enthalten das Integral so, wie es sich aus meiner Formel (27a) ergibt, wenn man dieselbe mit  $e \pm q$  multiplicirt und die Substitution

1) Dr. O. Láska, Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik pag. 254, 111.

2) Ohm, Auswertungsmethoden bestimmter Integrale pag. 161.

$$x = \frac{y}{s}$$

$$p = s \cdot p'$$

einführt. Ebenso muss die Formel 101 auf pag 253. des genannten Buches corrigirt werden, indem für den Fall  $p > 1$  in den Nenner nicht  $1 - p$ , sondern  $p - 1$  zu stehen kommt. Man vergleiche meine Formel (23a), indem man in derselben beiderseits im Nenner mit  $e^y$  multiplicirt.

Ueber die Summen (29) und (30) sei noch bemerkt, dass aus ihnen durch Differentiation nach  $a$  die Summen

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2 + a^2)^n} \quad m < n$$

bis zu beliebig hohen Werten von  $m$  und  $n$  berechnet werden können.

### 3. Die drei Functionen

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r - 2 \cos ps} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \\ u_2 &= \frac{\cos ps}{r - 2 \cos ps} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \\ u_3 &= \frac{1 - e^{\gamma s} \cos ps}{r - 2 \cos ps} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \quad \gamma = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

liefern die Integrale

$$J_1 = \int_0^{\infty} u_1(x) dx, \quad J_2 = \int_0^{\infty} u_2(x) dx, \quad J_3 = \int_0^{\infty} u_3(x) dx$$

von denen das dritte leicht nach der Plana'schen Methode berechnet wird, zugleich aber auch direct aus  $J_1$  und  $J_2$  sich ergibt und daher für diese eine Controle liefert.

Alle drei Functionen haben die nämlichen Pole:

$$s' = i$$

$$as_x = x + ib \quad -\infty < x < \infty$$

Eine weitere gemeinsame Eigenschaft ist

$$A = 0$$

Für alle drei gilt daher

$$J = i\pi \left\{ c' + c_0 + \sum_1^{\infty} (c_x + c_{-x}) \right\}$$

Für  $u_1$  erhält man

$$c' = \frac{i}{2} \frac{1}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^{\infty} (c_x + c_{-x}) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} F(x, a, b) \right\}$$

man vergleiche die Definition (26) und berechne die Summe über  $F(x, a, b)$  nach (28), indem dort  $a$  und  $b$  und dementsprechend  $p$  mit  $q$  zu vertauschen ist.

Für  $u_2$  berechnet man

$$c' = \frac{i}{4} \frac{e^p + e^{-p}}{e^p + e^{-p} - e^q - e^{-q}}$$

$$c_0 + \sum_1^{\infty} (c_x + c_{-x}) = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} F(x, a, b) \right\}$$

und mit Hilfe von (28) wird jetzt

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{p+q} + 1}{e^{p+q} - 1}$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^p + e^q}{e^{p+q}}$$

$$J_3 = J_1 - e^{\gamma q} J_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma(p+q)}}$$

Alle drei Integrale lassen sich noch etwas verallgemeinern, wenn man  $\frac{x}{s}$  an Stelle von  $x$  und  $p \cdot s$  an Stelle von  $p$  setzt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps+q} + 1}{e^{ps+q} - 1} \quad (32)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps} + e^q}{e^{ps+q} - 1} \quad (33)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{\gamma q} \cos px}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{\gamma q}}{1 - e^{\gamma(ps+q)}}, \quad \gamma = \pm 1 \quad (34)$$

Das Integral (32) hat bereits Bigler<sup>1)</sup> berechnet und zwar eben-

1) Grunert's Archiv, 2. Reihe IX pag. 81.

falls nach den Methoden der Veränderung des Integrationsweges, wengleich auf etwas andere Art. Gleichung (34) indessen stimmt überein mit einem Resultate, welches viel früher schon Boncompagni<sup>1)</sup> gefunden hat nach der Plana'schen Methode: Man beweist leicht, dass

$$\frac{1 - \alpha \cos px}{1 - 2\alpha \cos px + \alpha^2} = \sum_1^{\infty} \alpha^x \cos xpx$$

wonach

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \alpha \cos px}{1 - 2\alpha \cos px + \alpha^2} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \sum \alpha^x e^{-xps} = \frac{\pi}{2s} \frac{1}{1 - \alpha e^{-ps}}$$

Dieses Resultat unterliegt jedoch der Beschränkung

$$\alpha^2 < 1$$

weil die Reihe  $\sum \alpha^x \cos xpx$  divergirt, sobald  $\alpha^2$  die Grenze 1 erreicht. Dagegen hätte Boncompagni leicht auch den Wert des Integrals für  $\alpha^2 > 1$  finden können, wenn er an Stelle seiner Reihe die andere

$$\frac{1 - \alpha \cos px}{1 - 2\alpha \cos px + \alpha^2} = - \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x \cos xpx \quad \alpha^2 > 1$$

verwendet hätte; man erhält mit deren Hilfe<sup>2)</sup>

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \alpha \cos px}{1 - 2\alpha \cos px + \alpha^2} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = - \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{1}{\alpha e^{ps} - 1} \quad \alpha^2 > 1$$

Ein anderes bekanntes Integral leitet man aus (34) ab, indem man dort  $e^{\gamma s} = \frac{1}{\sigma}$  setzt und nach  $\sigma$  integrirt:

$$\int_0^{\infty} \log\{1 - 2\sigma \cos px + \sigma^2\} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{s} \lg\{C \cdot (\sigma - e^{\gamma ps})\},$$

$$\gamma = \pm 1 \text{ jenachdem } \sigma^2 \lesseqgtr 1$$

Es ist zu erwarten, dass  $C$  zwei verschiedene Werte hat, jenachdem  $\sigma \gtrless 1$ . Es sei  $\sigma < 1$ ,  $\gamma = 1$ , so findet man für

$$\sigma = 0$$

1) Crelle's J. XXV, pag, 93.

2) Ohm, Auswertungsmethoden etc. § 26.

$$0 = \frac{\pi}{s} \lg\{-C e^{ps}\}, \quad C = -\sigma^{-ps}$$

$$\int_0^{\infty} \lg\{1 - 2\sigma \cos px + \sigma^2\} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{s} \lg(1 - \sigma e^{-ps}), \quad \sigma^2 < 1 \quad (35)$$

Von dieser Gleichung subtrahiere man die Identität

$$\int_0^{\infty} \lg(\sigma^2) \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{s} \lg \sigma$$

so ergibt sich, wenn man  $\frac{1}{\sigma}$  durch  $\tau$  ersetzt,

$$\int_0^{\infty} \lg\{1 - 2\tau \cos px + \tau^2\} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{s} \lg(\tau - e^{-ps}), \quad \tau^2 > 1 \quad (35a)$$

Eine ganze Serie weiterer Integrale lässt sich aus den Gleichungen (32) und (33) ableiten. Es wurde schon einmal die bekannte Reihe

$$\frac{\sin px}{e^s + e^{-s} - 2 \cos px} = \sum_1^{\infty} e^{-xs} \sin xpx \quad (36)$$

citirt. Nach dieser Reihe entwickle man die linken Seiten der Gleichungen (32) und (33), die rechten dagegen nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^x \quad x^2 < 1$$

beide nach Potenzen von  $e^{-s}$ . Man überzeugt sich leicht, dass beide Reihen unbedingt convergent sind; die Coefficienten gleicher Potenzen von  $e^{-s}$  müssen daher alle links und rechts übereinstimmen.

Die Berechnung der Coefficienten führt auf die Gleichungen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x+1)px}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps} + e^{-ps} - 2e^{-(2x+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (37)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2xpx}{\sin px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - 2e^{-2xps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (38)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(2x+1)px \cdot \operatorname{ctg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{2 - (e^{ps} + e^{-ps})e^{-(2x+1)ps}}{e^{ps} - e^{-ps}} \quad (39)$$

$$\int_0^{\infty} \sin 2\pi p x \operatorname{ctg} p x \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}+e^{-ps}}{e^{ps}-e^{-ps}} \{1-e^{-2xps}\} \quad (40)$$

Von diesen Gleichungen finden sich (37) und (38) bei Legendre <sup>1)</sup> und Cauchy <sup>2)</sup>.

Zwei weitere bemerkenswerte Integrale liefert die Addition resp. Subtraction der Gleichungen (32) und (33):

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1-e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}+1}{e^{ps+q}-1} \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{4s} \cdot \frac{1}{1+e^{-q}} \cdot \frac{e^{ps}-1}{e^{ps+q}-1} \quad (42)$$

Anstatt aus diesen Gleichungen durch Reihenentwicklung, wie aus (32) und (33), neue abzuleiten, kann man einfacher verfahren, indem man unter den Gleichungen (37) – (40) die entsprechenden addirt oder subtrahirt.

Die Additionen (37) + (39) und (38) + (40) ergeben keine neuen Gleichungen, sondern bloss Specialfälle der Gleichung (40). Dagegen erhält man durch die Subtractionen (37) – (39) und (38) – (40), nachdem man noch  $2p$  an Stelle von  $p$  gesetzt hat,

$$\int_0^{\infty} \sin(4\pi + 2)px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1+e^{-(4\pi+2)ps}\} \quad (43)$$

$$\int_0^{\infty} \sin 4\pi p x \cdot \operatorname{tg} p x \cdot \frac{dx}{s^2+x^2} = -\frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps}-e^{-ps}}{e^{ps}+e^{-ps}} \cdot \{1-e^{-4xps}\} \quad (44)$$

Die Natur des Integrals (42) gestattet (im Gegensatz zu den anderen Integralen dieses Abschnittes)  $s = 0$  zu setzen:

1) Exerc. 5. 36.

2) Sav. Etr. 1827 pag. 1; vergl. auch Liebrecht „Ueber einige best. Int.“ Grunert's Archiv LIX pag. 218.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p}{e^q - e^{-q}} \quad (45)$$

Doch scheint es mir aus verschiedenen Gründen wünschenswert, dass für die Formel (45) noch ein besonderer Beweis erbracht werde.

Es sei daher

4.

$$u(z) = \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{r - 2 \cos z} \cdot \frac{1}{z^2}$$

Hier ist

$$A = 0$$

Die Pole sind

$$z_k = 2\pi(x + ib), \quad -\infty < x < \infty$$

$$i\pi \int_{-\infty}^{\infty} E_0^{\infty}((u)) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^q - 1}{e^q + 1} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{b^2} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{(x^2 + b^2)^2}{x^2 - b^2} \right\}$$

und nach (28a)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{e^q + e^{-q} - 2 \cos x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{e^q - e^{-q}}$$

woraus man (45) erhält, indem man  $px$  an Stelle von  $x$  setzt.

Entwickelt man jetzt auch Gleichung (45) links in die Reihe (36) und rechts in die geometrische Reihe und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von  $e$ , so kommt

$$\int_0^{\infty} \sin(4x + 2)px \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{x^2} = \pi \cdot p \quad (46)$$

$$\int_0^{\infty} \sin 4xpx \cdot \operatorname{tg} px \cdot \frac{dx}{x^2} = 0 \quad (47)$$

Wie zu erwarten war, erweisen sich diese Gleichungen als übereinstimmend mit (43) und (44).

Für  $x = 0$  liefert Gleichung (46)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 px}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} p \quad (48)$$

Aus (47) kommt für  $\kappa = 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 px}{x^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2} dx = 0$$

dazu giebt (48)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 px}{x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot p$$

sodass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 px}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 px \cos^2 px}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} p \quad (49)$$

Jetzt setze man  $\kappa = 1$  in (46) und löse  $\sin 6px$  auf nach Potenzen von  $\sin px$  und  $\cos px$ . Benützt man dazu die beiden Gleichungen (49), so kommt

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^6 px}{x^2} dx &= \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 px \cos^4 px}{x^2} dx = \frac{3\pi}{16} \cdot p \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 px \cos^2 px}{x^2} dx &= \frac{\pi}{16} \cdot p \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Analog findet man weiter

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^8 px}{x^2} dx = \frac{5\pi}{16} \cdot p, \text{ etc. etc.} \quad (51)$$

Nach dieser Methode berechnet man successive eine beliebige Anzahl Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} \sin^{2m} px \cdot \cos^{2n} px \cdot \frac{dx}{x^2} \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3 \dots \\ n = 0, 1, 2 \dots \end{array} \quad (52)$$

5. Durchaus analoge Relationen bestehen für die Function

$$u(z) = \frac{\sin \frac{z}{2}}{r - 2 \cos z} \cdot \frac{z}{2} \quad (53)$$

Es wird

$$A = 0$$

die Pole sind

$$z_k = 2\pi(k + ib)$$

$$\Sigma c_k = -\frac{i}{4\pi} \frac{1}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}} \left\{ \frac{1}{b} + 2b \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + b^2} \right\}$$

und nach (25), wenn man noch  $x$  durch  $p \cdot x$  ersetzt,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{px}{2}}{e^q + |e^{-q} - 2 \cos px|} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{e^q - e^{-q}} \quad (54)$$

Hieraus ist weiter

$$\sum_1^{\infty} e^{-kq} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2kpx}{\cos px} \cdot \frac{dx}{x} = \pi \sum_1^{\infty} e^{-(2k+1)q}$$

und, weil beide Reihen unbedingt convergiren,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(4x + 2)px}{\cos px} \cdot \frac{dx}{x} = \pi \quad (55)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 4xpx}{\cos px} \cdot \frac{dx}{x} = 0 \quad (56)$$

Vergleicht man die beiden letzten Gleichungen mit (46) und (47), so sieht man leicht ein, dass allgemein gelten muss

$$\int_0^{\infty} \sin^{2m+1} px \cdot \cos^{2n} px \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \sin^{2m+2} px \cos^{2n} px \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (57)$$

$$6. \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u(z) = \frac{\cos \frac{pz}{2}}{z - 2 \cos pz} \cdot \frac{1}{1 + z^2} \quad (58)$$

$$A = 0$$

Der Integrationsweg umschliesst zweierlei Pole

$$z' = i$$

und

$$az_k = k + ib$$

$$c' = \frac{i}{4} \cdot e^p \cdot \frac{e^{p/2} + e^{-p/2}}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_x = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^x}{e^{q/2} - e^{-q/2}} \cdot \frac{a}{a^2 + (x + ib)^2}$$

$$\sum c_x = -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{e^{q/2} - e^{-q/2}} \left\{ \frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} (-1)^x F(x, a, b) \right\}$$

Nun ist nach 28)

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} F(x, a, b) = \pi \frac{e^{2p} - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

Beachtet man ferner, dass

$$F\left(x, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 4 F(2x, a, b)$$

so erhält man, wenn für  $a$  und  $b$  (und dem entsprechend für  $p$  und  $q$ ) ihre halben Werte gesetzt werden,

$$\frac{2a}{a^2 - b^2} + 4a \sum_1^{\infty} F(2x, a, b) = \pi \frac{e^p - 1}{(e^{p/2} - e^{q/2})(e^{p/2} - e^{-q/2})}$$

Subtrahirt man die erste dieser beiden Summengleichungen von der zweiten, so kommt

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + 2a \sum_1^{\infty} (-1)^x F(x, a, b) = \pi \cdot e^p \frac{(e^{p/2} - e^{-p/2})(e^{q/2} + e^{-q/2})}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})} \quad (59)$$

Es wird somit

$$i\pi \sum_{-\infty}^{\infty} E_0^{\infty}((u)) = \frac{\pi}{4} e^{p/2} \frac{(e^p - 1)(e^q + 1) - (e^p + 1)(e^q - 1)}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})(e^q - 1)}$$

und, wenn man noch  $x$  ersetzt durch  $\frac{x}{2}$  und  $p$  durch  $2ps$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{e^q + e^{-q} - 2 \cos 2px} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s} \cdot \frac{e^{ps+q}}{(e^{2ps+q} - 1)(e^q - 1)} \quad (60)$$

Die Reihenentwicklung liefert hier nichts neues, es ergibt sich die Legendre'sche Formel (38). Man hätte also, nachdem einmal (38) gefunden war, das Integral (60) nach der Reihe (36) entwickeln und mit Hilfe der genannten Formel auf den analytischen Ausdruck

(60) bringen können; doch habe ich die directe Berechnung wiedergegeben wegen der Analogie mit dem nächstfolgenden Integral, welches sich auf dem angedeuteten Wege nicht berechnen lässt.

7.

$$u(z) = \frac{\sin \frac{pz}{2}}{r - 2 \cos pz} \cdot \frac{z}{1 + z^2}$$

$$A = 0$$

Pole:

$$z' = i, \quad az_\kappa = \kappa + ib$$

$$c' = -\frac{i}{4} e^{p \cdot 2} \frac{e^p - 1}{(e^p - e^q)(e^p - e^{-q})}$$

$$c_\kappa = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{(-1)^\kappa}{e^{\pi b} + e^{-\pi b}} \cdot \frac{-b + i\kappa}{a^2 + (\kappa + ib)^2}$$

$$\Sigma c_\kappa = \frac{1/4}{e^{\pi b} - e^{-\pi b}} \left\{ \frac{b}{b^2 - a^2} + 2b \sum_1^\infty (-1)^\kappa F(\kappa, b, a) \right\}$$

und nach (59), wenn man wieder  $x$  durch  $\frac{x}{s}$  und  $p$  durch  $p \cdot s$  ersetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \frac{px}{2}}{e^q + e^{-q} - 2 \cos px} \cdot \frac{x dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{1/2 p s + q}}{(e^q + 1)(e^{ps} + q - 1)} \quad (61)$$

Die bei den anderen Integralen angewandte Reihenentwicklung liefert die Gleichungen

$$\int_a^\infty \frac{\sin(4\kappa + 2)px}{\cos px} \cdot \frac{x dx}{s^2 + x^2} = \pi \cdot \frac{1 + e^{-(4\kappa + 2)ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \quad (62)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4\kappa px}{\cos px} \cdot \frac{x dx}{s^2 + x^2} = -\pi \cdot \frac{1 - e^{-4\kappa ps}}{e^{ps} + e^{-ps}} \quad (63)$$

Der Fall  $s = 0$  ist zwar durch diese letzte Entwicklung nicht streng bewiesen, doch bleiben die Gleichungen (61) — (63) für diesen Grenzwert bestehen, wie aus der besonderen Behandlung desselben unter 5. ersichtlich ist. Die Gleichungen (45) — (47) stellen sich in der Tat dar als Specialfälle der Gleichungen (61) — (63).

Endlich können nicht nur aus (62) und (63), sondern auch aus den Gleichungen (37) — (40), (43) und (44) nach dem auf (46) und (47)

angewandten Verfahren die entsprechenden Integrale abgeleitet werden, welche anstatt sin und cos der Vielfachen von  $px$  die Potenzen von sin und cos enthalten.

8. Setzt man allgemein

$$u(z) = \frac{\left. \begin{matrix} \sin^n \\ \cos^n \end{matrix} \right\} (tx)}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos pz} \cdot \frac{\varphi^l(x)}{f^m(z)} \quad (64)$$

wobei  $\varphi^l(z)$  eine algebraische Function vom  $l$ ten Grade  $f^m(z)$  eine solche vom  $m$ ten Grade bedeutet, so kann, wenn alle Nullwerte von  $f^m(z)$  bekannt sind, das Integral

$$\int_0^{\infty} u(x) dx$$

immer in eine convergente Reihe entwickelt werden, vorausgesetzt, dass für reelle Werte von  $x$

$$u(-x) = u(x)$$

$$u \cdot s \leq 1 \quad \text{und} \quad l < m - 1$$

oder

$$n \cdot s < 1 \quad \text{und} \quad l = m - 1$$

und dass, solange  $\vartheta$  innerhalb der Grenzen 0 und  $\pi$  bleibt,

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot e^{i\vartheta} \cdot u(k \cdot e^{i\vartheta})$$

einen bestimmten, endlichen oder verschwindenden, von  $\vartheta$  unabhängigen Wert besitze.

Aus demselben berechnet man weiter die Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa pz \cdot \left\{ \begin{matrix} \sin^n \\ \cos^n \end{matrix} \right\} (tx)}{\sin px} \cdot \frac{\varphi^l(x)}{f^m(x)} dx \quad (64a)$$

mit Hilfe der Reihenentwicklung (36).

### III. Summierung einer Gruppe von trigonometrischen Reihen.

Im folgenden Abschnitte bedeute

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{N} dx, & U &= \int_0^{\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{N} dx \\
 U &= \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{N} dx, & W &= \int_0^{\infty} \frac{e^x \cos \alpha x}{N} dx
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

$$N = e^{2x} - 2e^x \cos y + 1 = (e^x - e^{iy})(e^x - e^{-iy})$$

Alle vier Integrale lassen sich in trigonometrische Reihen entwickeln, wie folgt

$$\begin{aligned}
 U - e^{-iy} T &= \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - e^{iy}} dx = \sum_1^{\infty} e^{i(x-1)y} \int_0^{\infty} e^{-x\alpha} \sin \alpha x dx \\
 W - e^{-iy} V &= \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{e^x - e^{iy}} dx = \sum_1^{\infty} e^{i(x-1)y} \int_0^{\infty} e^{-x\alpha} \cos \alpha x dx
 \end{aligned}$$

Die unter der Summe stehenden Integrale sind nach der Formel

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (qx) dx = \frac{\begin{cases} q \\ p \end{cases}}{p^2 + q^2}$$

zu berechnen. Die erste der beiden Gleichungen ergibt nach Trennung des reellen Teiles vom imaginären

$$\begin{aligned}
 U - T \cos y &= \alpha \sum_1^{\infty} \frac{\cos(x-1)y}{x^2 + \alpha^2} \\
 T \sin y &= \alpha \sum_1^{\infty} \frac{\sin(x-1)y}{x^2 + \alpha^2} \\
 \text{oder} \\
 U \cos y - T &= \alpha \sum_1^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + \alpha^2} \\
 U \sin y &= \alpha \sum_1^{\infty} \frac{\sin xy}{x^2 + \alpha^2}
 \end{aligned}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$C = \sum_1^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + \alpha^2}, \quad S = \sum_1^{\infty} \frac{\sin xy}{x^2 + \alpha^2}
 \tag{66}$$

so wird

$$U \cos y - T = \alpha C, \quad U \sin y = \alpha S$$

und, wie sich durch analoge Rechnung ergibt,

$$W \cos y - V = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad W \sin y = -\frac{\partial C}{\partial y} \quad (67)$$

Setzt man jetzt

$$u(z) = \frac{\sin \alpha z}{e^z - 1} \quad (68)$$

und führe das Integral  $\int u dz$  um das unendlich lange Rechteck  $OABC$  (Fig. 3), worin

$$OA = CB = \infty$$

$$OC = AB = y$$

$$2n\pi < y < 2(n+2)\pi$$

so wird

$$\int_0^A u dz = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} dx = \alpha \sum_1^\infty \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \quad (68a)$$

$$\int_A^B u dz = i \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{\sin \alpha(k + iy)}{e^{k+iy} - 1} dy = 0 \quad (68b)$$

$$\begin{aligned} \int_B^C u \cdot dz &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \{ \sin \alpha x (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + i \cos \alpha x (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \} \\ &\quad \cdot (e^x \cos y - 1 - i e^x \sin y) \cdot \frac{dx}{N} \\ &= -\frac{1}{4} \{ (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})(U \cos y - T) + (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) W \sin y \} \\ &\quad + \frac{i}{2} \{ (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) U \sin y - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) (W \cos y - V) \} \end{aligned}$$

und nach (66) und (67)

$$\begin{aligned} \int_B^C u dz &= -\frac{1}{2} \left\{ (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \cdot \alpha C - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \frac{\partial C}{\partial y} \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2} \left\{ (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \cdot \alpha S - (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \frac{\partial S}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (68c)$$

Das Integral  $\int_C^0 u(z) dz$  zerfällt in zwei Gruppen von Teilintegralen: solche auf Halbkreisen mit dem Radius  $\delta$  um die Pole

$$z_h = i2h\pi \quad h = 1, 2, 3, \dots, n$$

im negativen Sinn der Drehung — ihre Summe sei  $\frac{\pi}{2} \cdot D_{2n}$  — und solche zwischen den Polen auf der  $Y$  Achse — ihre Summe sei  $R + iS$  —, so dass

$$\int_C^0 u dz = R + iS + \frac{\pi}{2} \cdot D_{2n} \tag{68d}$$

Die Radien  $\delta$  sollen gegen null convergirende Grössen sein.

Nun ist

$$D_{2n} = -i\delta \sum_1^n h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(z_h + \delta e^{i\vartheta}) e^{i\vartheta} d\vartheta$$

wird aber  $\delta$  verschwindend klein, so geht  $D_{2n}$  über in

$$D_{2n} = \sum_1^n (e^{2h\pi\alpha} - e^{-2h\pi\alpha}) = \frac{e^{(2n+1)\pi\alpha} + e^{-(2n+1)\pi\alpha} - e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \tag{69}$$

Sollte  $y$  eine der Grenzen erreichen, so wäre der Integrationsweg noch um einen Viertelskreis zu vermindern resp. zu vergrössern. Es soll aber später bewiesen werden, dass die auf diese Weise bestimmten Grenzwerte

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= \frac{1}{2}(D_{2n-2} + D_{2n}) & y &= 2n\pi \\ D_{2n+2} &= \frac{1}{2}(D_{2n} + D_{2n+2}) & y &= (2n + 2)\pi \end{aligned} \tag{69a}$$

vollständig zwecklos sind.

Weiter findet man

$$\left. \begin{aligned} R &= -\frac{1}{4} \int_0^y (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) dy = -\frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y} - 2}{2\alpha} \\ S &= -\frac{1}{4} \left\{ \int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \dots + \int_{2n\pi+\delta}^y (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \operatorname{ctg} \frac{y}{2} dy \right\} \end{aligned} \right\} \tag{70}$$

Die Pole der Function (68) sind alle durch den Integrationsweg ausgeschlossen, daher ist

$$\int u \, dz = 0$$

woraus die Trennung des reellen Teiles vom imaginären mit Hilfe der Gleichungen (68) — (70) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})C - \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y} - 2}{4\alpha^2} \\ \equiv \frac{\pi}{2\alpha} D_{2n} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})S - \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \cdot \frac{\partial S}{\partial y} \\ = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi+\delta}^{4\pi-\delta} + \dots + \int_{2n\pi+\delta}^y \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2\alpha} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} \cdot dy \right\} \end{aligned} \quad (72)$$

NB. Gleichung (72) gilt nur für verschwindend kleine Werte von  $\delta$  [wäre  $\delta$  endlich, so wäre die Summe  $D_{2n}$  nicht reell, sondern enthielte, wie man sich überzeugen kann, imaginäre Glieder, die in (72) auftreten müssten!] Nichtsdestoweniger bleibt das Integral in (72) endlich und bestimmt, da die Pole auf Kreisen umgangen wurden und daher die  $\delta$  an den Teilstellen gleich sind.

Unter  $C$  und  $S$  hat man sich nicht die Reihen (66), sondern den analytischen Ausdruck für deren Summe vorzustellen. Dann kann man  $C$  und  $S$  nach Belieben differentiieren, während die Reihen selbst schon durch die zweite Differentiation divergent werden.

Man differentiire Gleichung (71) nach  $y$ ; dann nimmt dieselbe folgende einfache Gestalt an

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \alpha^2 C - \frac{1}{2} = 0$$

woraus

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha C = \pi \frac{A_{2n} e^{\alpha y} + B_{2n} e^{-\alpha y}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} \quad (73)$$

Die Constanten  $A$  und  $B$  wurden von vornherein mit einem Index versehen, da sie von  $D_{2n}$  abhängig und also Functionen von  $n$  sein müssen. Aus (73) ist

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_{2n} e^{\alpha y} - B_{2n} e^{-\alpha y}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}}$$

Setzt man diese Werte von  $C$  und  $\frac{\partial C}{\partial y}$  ein in (72), so kommt

!

$$\frac{A_{2n} + B_{2n}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = D_{2n} + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \right\}$$

und mit Hilfe von (24)

$$A_{2n} + B_{2n} = e^{(n+1)\alpha\pi} + e^{-(2n+2)\alpha\pi}$$

Setzt man ferner in (73)  $y = (2n + 1)\pi$

so kommt

$$\frac{A_{2n} e^{(2n+1)\alpha\pi} + B_{2n} e^{-(2n+1)\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^x}{x^2 + \alpha^2} \right\}$$

und nach (25)

$$A_{2n} e^{(2n+1)\alpha\pi} + B_{2n} e^{-(2n+1)\alpha\pi} = 2$$

sodass endlich

$$A_{2n} = e^{-(2n+1)\alpha\pi}, \quad B_{2n} = e^{(2n+1)\alpha\pi}$$

wonach (73) übergeht in<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_1^{\infty} x \frac{\cos xy}{x^2 + \alpha^2} = \pi \cdot \frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi - y]} + e^{-\alpha[(2n+1)\pi - y]}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} \quad (74)$$

Die Differentiation nach  $y$  ergibt

$$\sum_1^{\infty} x \frac{\sin xy}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha[(2n+1)\pi - y]} - e^{-\alpha[(2n+1)\pi - y]}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} \quad (75)$$

$$2n\pi < y < (2n + 2)\pi$$

Für diese Gleichungen sind die Grenzwerte  $D_{2n}'$  und  $D_{2n}''$  ohne Bedeutung; ihnen zufolge wäre

$$A'_{2n} = \frac{1}{2}(A_{2n-2} + A_{2n}), \quad B_{2n}' = \frac{1}{2}(B_{2n-2} + B_{2n})$$

$$A''_{2n} = \frac{1}{2}(A_{2n} + A_{2n+2}), \quad B_{2n}'' = \frac{1}{2}(B_{2n} + B_{2n+2})$$

Nun erkennt man aber leicht, dass (74) an den Grenzen gilt, wenn man allgemein

$$A'_{2n} = \frac{pA_{2n-2} + qA_{2n}}{p + q} \text{ etc.}$$

setzt, wobei  $p$  und  $q$  beliebige Zahlen sind. Allerdings gilt dann die Gleichung nicht mehr streng, d. h. sie gilt unter Umständen nicht mehr an den Grenzen, nachdem man sie differentiirt hat. Es wäre demnach zu erwarten, dass (75) an den Grenzen nur dann bestehen bliebe, wenn

1) Vgl. Schlömilch, „Neue Methode zur Summirung etc.“ Grunert's Archiv XII, pag 131.

$$p = q = 1$$

Doch ist eine weitere Untersuchung darüber gegenstandslos, da die Summe (75) für die Werte

$$y = m\pi$$

so wie so ihre Bedeutung verliert, wie im Folgenden kurz bewiesen werden soll.

$$S(m\pi) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \sum_1^k \frac{x \sin x(m\pi \pm \delta)}{x^2 + \alpha^2}$$

Es besteht zwischen den unendlich kleinen Grössen  $\delta$  und  $\frac{1}{k}$  keine Relation, so dass

$$\beta = \delta \cdot k$$

eine willkürliche positive Grösse ist

$$S(m\pi) = \pm (-1)^m \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k \frac{x \sin \frac{x}{k} \beta}{x^2 + \alpha^2} = \pm (-1)^m \int_0^\beta \frac{\sin x}{x} dx$$

$S(m\pi)$  hat also einen unbestimmten Wert, welcher entweder zwischen  $-S'$  und 0 oder zwischen 0 und  $S'$  liegt, jenachdem  $m$  gerade oder ungerade ist und  $y$  gegen die Grenze wächst oder abnimmt. Für

$$p = q = 1$$

erhält man bloss den Specialwert, welchen  $S(m\pi)$  annimmt, wenn man willkürlich festsetzt, dass, während  $y$  gegen die Grenze  $m\pi$  wächst,  $\beta = \alpha$ , d. h., dass  $k$  von einer höheren Ordnung unendlich werden soll, als  $\frac{1}{\delta}$ , was aber absolut keinen Sinn hat. —

Für die folgende Ableitung nehme man

$$0 < y < 2\pi$$

(worin weiter keine Beschränkung liegt) und integriere Gleichung (74), nachdem man dieselbe durch die Substitution

$$\alpha = 0, \quad n = 0$$

auf die Form

$$\sum_1^\infty \frac{\cos xy}{x^2} = \frac{y^2}{4} - \frac{\pi}{2} y + \frac{\pi^2}{6} \tag{74a}$$

1) Wobei  $S'$  das Maximum der Function  $\mathfrak{S}(x)$  bedeutet [vergl. Abschnitt I] nämlich  $S(\pi) = 1,851\ 936$ .

gebracht hat, wiederholt nach  $y$  zwischen den Grenzen 0 und  $y$  und führe nach der Gleichung

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi^{2n}} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n}$$

die Bernoulli'schen Zahlen ein. Setzt man endlich noch

$$y = 2\pi x$$

so erhält man allgemein <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{\pi^{2n}} &= B_{2n} - \binom{2n}{2} B_{2n-2} x^2 \\ &+ \binom{2n}{4} B_{2n-4} x^4 - \dots + (-1)^{n+1} \binom{2n}{2} B_2 x^{2n-2} \\ &+ (-1)^n x^{2n-1} \{n - x\} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot (2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2\pi x}{\pi^{2n+1}} &= \binom{2n+1}{1} B_{2n} x - \binom{2n+1}{3} B_{2n-2} x^3 \\ &+ \binom{2n+1}{5} B_{2n-4} x^5 - \dots + (-1)^{n+1} \binom{2n+1}{2} B_2 x^{2n-1} \\ &+ (-1)^n x^{2n} \left\{ \frac{2n+1}{2} - x \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

$$0 < x < 1$$

Setzt man in (76)  $x = \frac{1}{2}$ , so geht die linke Seite über in die Summe

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^x}{\pi^{2n}}$$

welche, wie man leicht beweist, den Wert

$$= B_{2n} \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-1}}$$

hat, man erhält somit aus (76) die folgende Recursionsformel für die Bernoulli'schen Zahlen

$$\begin{aligned} 2(2^{2n} - 1) B_{2n} &= \binom{2n}{2} 2^{2n-2} B_{2n-2} - \binom{2n}{4} 2^{2n-4} B_{2n-4} + \binom{2n}{6} 2^{2n-6} B_{2n-6} \\ &- \dots + (-1)^n \binom{2n}{2} 2^2 B_2 + (-1)^{n+1} \{2n - 1\} \end{aligned} \quad (78)$$

Es lassen sich ferner für die Reihen

<sup>1)</sup> cf. Raabe, Crelle's J. XLII, pag. 348.

$$C_n = \sum_1^{\infty} \frac{\cos \kappa y}{\kappa^n}, \quad S_n = \sum_1^{\infty} \frac{\sin \kappa y}{\kappa^n} \quad (79)$$

eine Serie von Recursionsformeln aufstellen durch Integration der Function

$$u(z) = \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} \quad (80)$$

über den Umfang des Rechteckes  $OABC$  (Fig. 3.)

Da, wie schon bemerkt, in der Bedingung

$$0 < y < 2\pi$$

keine wesentliche Beschränkung liegt, so soll dieselbe im Folgenden gelten; es ist übrigens nach den für die Function (68) angestellten Betrachtungen nicht schwer, zu dem allgemeinen Fall  $2n\pi < y < (2n+2)\pi$  überzugehen.

Die Teilintegrale stellen sich dar als

$$\int_0^A u dz = \sum_1^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\kappa x} x^{2n-1} = (2n-1)! \sum_1^{\infty} \frac{1}{\kappa^{2n}} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n}$$

$$\int_A^B u dz = 0$$

$$\int_B^C u dz = - \int_0^{\infty} \frac{(x+iy)^{2n-1} (e^x - 1)}{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1} dx$$

$$\int_C^0 u dz = - \frac{i}{2} \int_0^y \frac{(iy)^{2n-1} (e^{-iy} - 1)}{1 - \cos y} dy$$

und, weil der Integrationsweg keinen Pol umschliesst,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2n} &= \int_0^{\infty} (x+iy)^{2n-1} (e^x \cos y - 1 - 2e^x \sin y) \frac{dx}{N} \\ &+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{y^{2n}}{2n} + i \int_0^y y^{2n-1} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} dy \right\} \end{aligned}$$

wobei

$$N = e^{2x} - 2e^x \cos y + 1$$

Zur Ausführung des Integrals  $\int_0^\infty$  setze man

$$F_m = \int_0^\infty \frac{x^m dx}{N}, \quad G_m = \int_0^\infty \frac{e^x x^m dx}{N}$$

Dann erhält man analog der am Anfang dieses Abschnittes für die Integrale  $T$  und  $U$  ausgeführten Rechnung

$$G_m \cos y - F = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\cos \kappa y}{\kappa^{m+1}}$$

$$G_m \sin y = \frac{m!}{\pi^{m+1}} \sum_1^\infty \frac{\sin \kappa y}{\kappa^{m+1}}$$

wonach schliesslich

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n} + (-1)^n y^{2n}}{(2n)!} &= \sum_1^\infty \frac{\cos \kappa y}{\kappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!} \sum_1^\infty \frac{\cos \kappa y}{\kappa^{2n-2}} + \dots \\ &+ y \sum_1^\infty \frac{\sin \kappa y}{\kappa^{2n-1}} - \frac{y^3}{3!} \sum_1^\infty \frac{\sin \kappa y}{\kappa^{2n-3}} + \dots \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{ \frac{y^{2h}}{(2h)!} C_{2n-2h} + \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} S_{2n-2h-1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \int_1^y t^{2n-1} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt &= \sum_1^\infty \frac{\sin \kappa y}{\kappa^{2n}} - \frac{y^2}{2!} \sum_1^\infty \frac{\sin \kappa y}{\kappa^{2n-2}} \\ &+ \dots - y \sum_1^\infty \frac{\cos \kappa y}{\kappa^{2n-1}} + \frac{y^3}{3!} \sum_1^\infty \frac{\cos \kappa y}{\kappa^{2n-3}} - \dots \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \left\{ \frac{y^{2h}}{(2h)!} S_{2n-2h} - \frac{y^{2h+1}}{(2h+1)!} C_{2n-2h-1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Will man zu dem allgemeinen Fall  $2m\pi < y < (2m+2)\pi$  übergehen, so ist der Integrationsweg, wie im letzten Beispiel, um die entsprechenden Halbkreise (Fig. 3) zu vergrössern. Es ist dann in (81) rechts das Glied

$$E_{2m} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{h=1}^m h^{2n-1}$$

$$2m\pi < y < (2m + 2)\pi$$

hinzuzufügen. Eine Bestimmung von Grenzwerten für  $E_{2m}$  wäre auch hier völlig zwecklos, da (81) immer das Glied  $\sum_1^{\infty} \frac{\sin \kappa y}{\kappa}$  enthält, welches an den Grenzen unbestimmt wird. In (82) hat diese Erweiterung nicht viel Sinn, da, wie in (72) ein unbequemer Grenzwert auftritt.

Die Recursionsformeln (81) und (82) können zugleich als Differentialgleichungen der Functionen  $C_n$  und  $S_n$  angegeben werden, deren Lösungen in der Hälfte der Fälle, nämlich für  $C_{2n}$  und  $S_{2n+1}$  durch die Gleichungen (76) und (77) gegeben sind.

Transcendente höherer Ordnung sind die Functionen  $S_{2n}$  und  $C_{2n+1}$ . Einzig  $C_1$  wird durch eine verhältnissmässig einfache Function dargestellt. Es ergibt sich aus (82) für  $n = 1$

$$\frac{1}{2} \int_0^x t \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt = \sum_1^{\infty} \frac{\sin \kappa x}{\kappa^2} - x \sum_1^{\infty} \frac{\cos \kappa x}{\kappa} = \int C_1 dx - x C_1 + \text{const}$$

Man differentiirt nach  $x$ :

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = - \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad C = \gamma - \lg \left( \sin \frac{x}{2} \right)$$

für  $x = \pi$  wird

$$\gamma = - \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \right\} = \lg \frac{1}{2}$$

$$C_1 = \sum_1^{\infty} \frac{\cos \kappa x}{\kappa} = - \lg \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \quad 0 < x < 2\pi$$

Die Beschränkung  $0 < x < 2\pi$  fällt weg, wenn man schreibt

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos \kappa x}{\kappa} = - \frac{1}{2} \lg \left( 4 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \quad (83)$$

Hieraus kommt durch Integration von 0 bis  $x$

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin \kappa x}{\kappa^2} = - \frac{x}{2} \lg \left( 4 \sin^2 \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_0^x t \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt \quad (84)$$

Es ist also bereits  $S_2$  nicht mehr durch einfache analytische Functionen auszudrücken. Die numerische Berechnung geschieht

wohl am besten mit Hilfe der Kinkelin'schen Function  $G(x)$  <sup>1)</sup>, welche für ganzzahlige Argumente der Function

$$G(n+1) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot n^n$$

entspricht. Es wird

$$\pi \int_0^x t \operatorname{ctg} \pi t \cdot dt = x \lg(2 \sin \pi x) - \lg \frac{G(1-x)}{Gx} \quad (84a)$$

Diese Formel empfiehlt sich zur Berechnung von  $S_2$ , da für den Logarithmus der Function  $G$  rasch convergente Reihen existiren, welche denjenigen für  $\lg \Gamma$  sehr ähnlich sind. Die Berechnung kann mit sehr grosser Genauigkeit ausgeführt werden, da die Constanten dieser Reihen

$$S_k = \sum_1^{\infty} \frac{1}{x^k}$$

bis zu  $S_{70}$  auf 30 Decimalen berechnet worden sind <sup>2)</sup>.

In Gleichung (87) giebt die Substitution  $y = \pi$

$$(2^{2n} - 1) B_{2n} - \binom{2n}{2} (2^{2n-3} - 1) B_{2n-2} + \binom{2n}{4} (2^{2n-5} - 1) B_{2n-4} - \dots \\ + (-1)^{n+1} \binom{n}{2} B_2 + \frac{(-1)^n}{2} = 0 \quad (81a)$$

Dividirt man jetzt Gleichung (78) durch 2 und subtrahirt sie von (81a), so kommt, wenn man noch  $n+1$  an Stelle von  $n$  setzt,

$$\binom{2n+2}{2} B_{2n} - \binom{2n+2}{4} B_{2n-2} + \dots - + (-1)^n \cdot n = 0 \quad (85)$$

Diese Formel ist der einfachste Specialfall einer allgemeineren, von Arndt <sup>3)</sup> gefundenen Formel

$$\frac{x-1}{2} - \binom{x+1}{2} B_2 - \binom{x+1}{4} B_4 + \dots + (-1)^{\frac{x-\mu-1}{2}} \cdot \binom{x+1}{x-\mu+1} B_{x-\mu+1}$$

für

$$x = 2n+1, \quad \mu = 2$$

1) Kinkelin, Ueber eine neue mit der  $\Gamma$  Function verwandte Transcendente etc. Crelles J. LVII, pag. 122.

2) Stieljes, Tables des valeurs des sommes  $S_k$ . Acta math. IX, 299.

3) Crelles J. XXXI, pag. 249.

Es ist dies die einfachste aller bis jetzt gefundenen Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen, soviel deren von Schlömilch <sup>1)</sup>, Göpel <sup>2)</sup>, Dienger <sup>3)</sup>, Malmsten <sup>4)</sup>, Worpitzky <sup>5)</sup> und Anderen aufgestellt worden sind.

Ganz anderer Natur, als die Lösung der Differentialgleichung (71), an welche sich die vorstehenden Betrachtungen anknüpfen, ist diejenige von (72), deren vollständiges Integral

$$4\alpha S = -e^{\alpha y} \int_p^y e^{-\alpha t} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt + e^{-\alpha y} \int_q^y e^{\alpha t} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \quad (86)$$

ist, wobei  $p$  und  $q$  die zwei willkürlichen Constanten sind. Dieselben lassen sich auf zwei verschiedene Arten bestimmen. Man erhält entweder

$$4\alpha \sum_1^{\infty} \frac{\sin \pi y}{\pi^2 + \alpha^2} = \int_y^{\pi} \{e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}\} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt \\ + 2 \{e^{\alpha(\pi-y)} - e^{-\alpha(\pi-y)}\} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \pi}{\pi^2 + \alpha^2} \quad (86a)$$

oder man schreibt den folgenden Grenzwert

$$4\alpha \sum_1^{\infty} \frac{\sin \pi y}{\pi^2 + \alpha^2} = \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ - \int_d^p [e^{\alpha(y-t)} - e^{-\alpha(y-t)}] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt \right. \\ \left. + \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} \cdot \int_d^{\pi} [e^{\alpha(\pi-t)} - e^{-\alpha(\pi-t)}] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot dt \right\} \quad (86b)$$

Für beide Formeln ergibt sich die Ableitung aus (86) mit Leichtigkeit. Jedoch muss ich an dieser Stelle von einer Behandlung der Function

$$S = \sum_1^{\infty} \frac{\sin \pi y}{\pi^2 + \alpha^2}$$

in extenso absehen, da sie zu weit vom eigentlichen Thema dieses Aufsatzes ablenken würde.

1) Grunert's Archiv III., pag. 9.

2) ibid. III, pag. 64.

3) Crelle's J. XXXIV, pag. 75.

4) ibid. XXXV, pag. 59.

5) ibid. XCIV, pag. 203.

## II.

## Elementare Berechnung der Trägheitsmomente von Linien, Flächen und Körpern.

Von

**Dr. E. Rehfeld**

in Elberfeld.

Als Huyghens sich mit der Aufgabe beschäftigte die Schwingungszeit eines physischen Pendels zu berechnen, wurde er auf den Begriff des Trägheitsmomentes, auf den Ausdruck  $\Sigma mr^2$  geführt. Ihm verdankt man auch den wichtigen Satz, dass das Trägheitsmoment irgend eines geometrischen Systems (Strecke, Fläche, Körper) für eine Drehachse gleich ist dem Trägheitsmoment des Systems für die parallele Schwerpunktsachse, vermehrt um das Product der Gesamtmasse des Systems in das Quadrat der Abstände der beiden Achsen. Erst Euler führt für den Ausdruck  $\Sigma mr^2$  den Namen Moment der Trägheit — ein. Da das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf irgend eine Achse als die Summe unendlich vieler Producte aus den einzelnen Massenteilchen und das Quadrat der Abstände dieser Massenpunkte von der Momentenachse angegeben wird, so kann dasselbe im allgemeinen nur unter Anwendung der Infinitesimalrechnung gefunden werden. Das in vielen elementaren Lehrbüchern der Physik angewandte Verfahren zur Berechnung der Trägheitsmomente etwa von Strecken, rechteckigen und quadratischen Platten, Dreiecks- und Kreisflächen, rechtwinkligen Parallelepipeda, geraden Cylindern und Kegeln, und welches darin besteht, dass man das vorliegende System in  $n$  Teile teilt, die bei der einen Entwicklung gleich, bei der andern ungleich sind, und für jeden Teil das Trägheitsmoment durch zwei Grenzen einschliesst,

führt streng genommen doch zur Integration, denn man benutzt schliesslich ein Additionsverfahren, bei welchem der Quotient  $\frac{\sum_1^n n^k}{n^{k+1}}$  bei constantem ganzen positiven  $k$  und unendlich wachsendem  $n$  gegen die Grenze  $\frac{1}{k+1}$  convergirt.

Dass aber eine ganz elementare Behandlung der Trägheitsmomente vieler homogener Systeme möglich ist, soll diese kleine Arbeit zeigen: sie soll den Beweis erbringen, dass in vielen Fällen die geometrische Verwandtschaft von Systemen zur Bestimmung benutzt werden kann. Das Wesen dieser neuen Bestimmungsart besteht darin, dass man die gegebenen Systeme in unter sich und dem ganzen ähnliche Elemente zerlegt, und mit Hilfe der bestehenden Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten der Teile und des ganzen Systems, das letztere berechnet. Besonders ist bei diesem Verfahren noch hervorzuheben, dass die gefundenen Resultate in der allgemeinsten Form auftreten, d. h. für alle Momentenachsen gültig sind. Dieses wird dadurch erreicht, dass bei der Bestimmung der Trägheitsmomente keine Grössen verwandt werden, die dem System direct entnommen sind, es werden Projectionen von Strecken auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene benutzt; und diese Projectionen nehmen eben für jede neue Achse neue Werte an. Behandelt werden die Trägheitsmomente der Strecke, des Dreiecks, Parallelogramms, der Ellipse, des dreiseitigen schiefen Prismas, schiefen Parallelepipedons, elliptischen Cylinders, der dreiseitigen Pyramide, des elliptischen Kegels und des Ellipsoids.

---

**Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten von ähnlichen homogenen geometrischen Systemen bezogen auf ähnlich liegende Achsen.**

Werden ähnliche geometrische Systeme (Linien, Flächen, Körper) von gleicher Dichtigkeit in gleich viel ähnliche Elemente geteilt, und sind die Massen von entsprechenden Elementen  $m$  und  $\mu$ , die Abstände dieser Elemente von ähnlich liegenden Achsen  $r$  und  $\rho$ , so stehen die Trägheitsmomente dieser Elemente  $mr^2$  und  $\mu\rho^2$ , sowie die Trägheitsmomente der ganzen homogenen Systeme  $\sum mr^2$  und  $\sum \mu\rho^2$  für ähnlich liegende Achsen in einem constanten Verhältniss.

Ist  $\lambda$  das Verhältniss von zwei entsprechenden Strecken in dem ähnlichen homogenen Systeme, so ist

$$m : \mu = 1 : \lambda^m$$

und zwar ist  $m = 1$  für Systeme von einer Dimension (Linien),  $m = 2$  für Systeme von zwei Dimensionen (Flächen),  $m = 3$  für Systeme mit drei Dimensionen (Körper). Und da ferner

$$\begin{aligned} r : \rho &= 1 : \lambda \\ r^2 : \rho^2 &= 1 : \lambda^2 \end{aligned}$$

so verhalten sich

$$\begin{aligned} mr^2 : \mu\rho^2 &= 1 : \lambda^n \\ \Sigma mr^2 : \Sigma \mu\rho^2 &= 1 : \lambda^n \end{aligned}$$

Für Linien ist  $n = 3$ , für Flächen  $n = 4$ , für Körper  $n = 5$ .

Bezeichnet man die Trägheitsmomente ähnlicher homogener Systeme bezogen auf ähnlich liegende Achsen mit  $T$  und  $\tau$ , so gilt allgemein

$$\tau = \lambda^n T$$

#### Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Strecke.

Enthalte die homogene Strecke  $AB$  (Fig. 1) bei gleichmässiger Verteilung die Masse  $m$ , und werde das Trägheitsmoment derselben bezogen auf eine durch den Schwerpunkt  $S$  gehende Momentenachse  $h_s$  mit  $T_s$ , bezogen auf eine durch den Eckpunkt  $A$  zu  $h_s$  parallele Momentenachse  $h_a$  mit  $T_a$  bezeichnet, so besteht nach dem Huyghensschen Satze die Beziehung

$$T_s = T_a + m \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

wenn  $l$  den Abstand des zweiten Endpunkts  $B$  der Strecke von der Achse  $h_a$  oder die Projection der Strecke  $AB$  auf eine  $h_s$  oder  $h_a$  senkrechte Ebene angiebt. Das Trägheitsmoment  $T_s$  ist aber gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Hälften  $SA$  und  $SB$ . Da aber entsprechende Punkte dieser Teile von  $h_s$  gleiche Abstände haben, so sind die Trägheitsmomente von  $SA$  und  $SB$  bezogen auf  $h_s$  gleich und halb so gross als  $T_s$  selbst. Das Trägheitsmoment von  $AS$  bezogen auf  $h_a$  hat denselben Wert wie das Trägheitsmoment von  $SB$  bezogen auf  $h_s$ , nämlich  $\frac{1}{2}T_s$ . Nun sind aber  $AB$  und  $AS$  ähnlich liegende Systeme für das Aehnlichkeitsverhältniss  $\lambda = 2$  bezogen auf dieselbe Achse  $h_a$ , es ist deshalb

$$T_a = 2^3 \cdot \frac{1}{2}T_s = 4T_s$$

Aus den beiden Gleichungen von  $T_a$  leitet man schliesslich ab

$$T_s = \frac{1}{12} ml^2$$

Belastet man die Projection um  $AB$  auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene, nämlich  $A_0B_0$ , gleichmässig mit der Masse  $m$  von  $AB$ , so kann auch

$$T_s = \frac{1}{12} ml^2$$

gedeutet werden als das Trägheitsmoment der Projection  $A_0B_0$  bezogen auf die im Schwerpunkt  $S_0$  senkrecht stehende Momentachse. Es kann mithin das Trägheitsmoment einer Strecke für eine schiefe Schwerpunktsachse ersetzt werden durch das Trägheitsmoment der Projection der Strecke auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn nur die Projection die Masse der gegebenen Strecke gleichmässig auf die Länge verteilt in sich birgt.

Geht die Achse durch den Endpunkt  $A$  der Strecke, so ist der Wert des zugehörigen Trägheitsmomentes

$$T_a = 4T_s = \frac{1}{3} ml^2$$

Für die durch den beliebigen Punkt  $P$  parallel zu  $h_s$  verlaufende Achse  $h_p$ , welche von  $h_s$  den Abstand  $u$  hat, wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$T_p = T_s + mu^2$$

und liegt der Punkt  $P$  auf der Strecke  $AB$  selbst, und heissen die Projectionen der Teile auf die zu  $h_p$  senkrechte Ebene  $l_1$  und  $l_2$  ( $l_2 > l_1$ ), so ist

$$l = l_1 + l_2, \quad u = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

und es wird

$$T_p = \frac{1}{12} m(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2)$$

### Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Dreiecksfläche.

Enthalte das homogene materielle Dreieck  $ABC$  bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse  $m$ . Seien  $DEF$  die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks (Fig. 2). Das Trägheitsmoment des Dreiecks bezogen auf eine durch den Schwerpunkt  $S$  gehende Momentenachse  $h_s$ , nämlich  $T_s$ , ist für dieselbe Achse gleich der Summe der Trägheitsmomente der vier Unterdreiecke, welche unter sich congruent und dem ganzen Dreieck nach dem Verhältniss  $\lambda = \frac{1}{4}$  ähnlich sind. Die um das mittlere Unter-

dreieck herumliegenden Dreiecke haben für die durch die Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  parallel zu  $h_s$  verlaufenden Achsen  $h_a h_b h_c$  dieselben Trägheitsmomente wie für  $h_s$ .

Wird nämlich das Trägheitsmoment des Dreiecks  $AEF$  mit dem Schwerpunkt  $G$  für die zu  $h_s$  parallele Schwerpunktsachse  $h_g$  mit  $t_g$  bezeichnet, während das Trägheitsmoment dieses Dreiecks für  $h_s$  durch  $t_{gs}$  angegeben wird, so ist das Trägheitsmoment des Unterdreiecks, wenn der Abstand der Achsen  $h_s$  und  $h_g$  noch  $u$  heisst

$$t_{gs} = t_g + \frac{m}{4} u^2$$

Andererseits ist für die Achse  $h_a$  das Moment desselben Dreiecks, wenn  $v$  den Abstand der Achsen  $h_a$  und  $h_g$  ergibt

$$t_{ga} = t_g + \frac{m}{4} v^2$$

Nun ist aber  $AG = GS$ , woraus folgt  $u = v$ ; es ist mithin

$$t_{gs} = t_{ga}$$

Ebenso besteht

$$t_{hs} = t_{hb}$$

$$t_{ks} = t_{kc}$$

Heisst das Trägheitsmoment des Dreiecks  $DEF$  für die Achse  $h_s$ :  $t_s$ , so ist das Trägheitsmoment des ganzen Dreiecks für  $h_s$

$$T_s = t_{ga} + t_{hb} + t_{kc} + t_s$$

Werden die Trägheitsmomente des ganzen Dreiecks für die Achsen  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  mit  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  bezeichnet, so liefert die Ähnlichkeit der Teildreiecke mit dem ganzen die Beziehungen

$$T_a = 2^4 t_{ga}$$

$$T_b = 2^4 t_{hb}$$

$$T_c = 2^4 t_{kc}$$

$$T_s = 2^4 t_s$$

Nach dem Huygens'schen Satze ist aber, wenn die Abstände der Achse  $h_s$  von  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  einzeln mit  $p$ ,  $q$ ,  $r$  bezeichnet werden.

$$T_a = T_s + mp^2$$

$$T_b = T_s + mq^2$$

$$T_c = T_s + mr^2$$

Aus den letzten Gleichungen folgt aber

$$T_s = \frac{1}{16} (T_a + T_b + T_c + T_s) = \frac{1}{12} m(p^2 + q^2 + r^2)$$

Fällt  $h_s$  in die Ebene des gegebenen Dreiecks, so bezeichnen  $p$ ,  $q$ , und  $r$  die Abstände der Ecken des Dreiecks von der Achse  $h_s$ . Steht die Achse geneigt zur Ebene des Dreiecks und heisst seine Projection auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene  $A_0B_0C_0$ , so sind  $p$ ,  $q$ ,  $r$  d. h. die Abstände der Ecken  $ABC$  von  $h_s$ , gleich den Verbindungslinien des Schwerpunktes  $S_0$  des projecirten Dreiecks mit den Ecken dieses Dreiecks selbst. Heissen die Schwerpunkts transversalen des projecirten Dreiecks  $t_a t_b t_c$ , so besteht zwischen diesen und den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  der Projection die bekannte Beziehung

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

und weil

$$p = \frac{2}{3} t_a, \quad q = \frac{2}{3} t_b, \quad r = \frac{2}{3} t_c$$

also

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ist, so findet man auch für  $T_s$  die Ausdrücke

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{27} m(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

Steht die Achse  $h_s$  zur Ebene des Dreiecks  $ABC$  senkrecht, so nehmen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  sowie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ihre grössten Werte  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$  an. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks wird daher ein Maximum für eine zur Ebene des Dreiecks senkrechte Achse.

Da  $h_s$  zur Ebene der Projection senkrecht steht, so kann

$$\frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2)$$

auch als das Trägheitsmoment dieser Projection aufgefasst werden.

Das Trägheitsmoment eines homogenen materiellen Dreiecks für eine beliebige zur Ebene des Dreiecks schief stehende Schwerpunktsachse ist demnach für dieselbe Achse gleich dem Trägheitsmoment der Projection des Dreiecks auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn die Masse des gegebenen Dreiecks gleichmässig über die Projection verteilt gedacht wird.

Mit Hülfe der gefundenen Werte für das Trägheitsmoment eines Dreiecks bezogen auf eine Schwerpunktsachse kann das Trägheitsmoment für jede andere Achse nach dem Satze von Huyghens leicht abgeleitet werden.

Für die zu  $h_s$  parallel laufende Achse  $h_a$  durch den Eckpunkt

$A$  wird das zugehörige Trägheitsmoment  $T_a$ , gleichviel ob  $h_a$  in der Ebene des Dreiecks liegt, oder dazu geneigt ist, angegeben durch

$$T_a = T_s + mp^2$$

oder da

$$p^2 = \frac{4}{9} t_a^2 = \frac{4}{36} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

durch

$$T_a = \frac{1}{12} m(3b^2 + 3c^2 - a^2) = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + 4t_a^2)$$

Geht die Achse durch die Mitte  $D$  der Seite  $BC$ , so ist für die Achse  $h_d$  das Trägheitsmoment

$$T_d = T_s + m\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

Wird die Seite  $BC$  Momentenachse, so wird  $b = c = h$ , und das gesuchte Trägheitsmoment hat den Wert  $\frac{1}{6}mh^2$ .

Fällt die Momentenachse mit der Transversalen  $AD$  zusammen, so wird

$$b = c = \frac{a}{2}$$

und man erhält für das zugehörige Trägheitsmoment den Ausdruck

$$\frac{1}{6}mb^2 = \frac{1}{24}ma^2$$

#### Das Trägheitsmoment eines homogenen materiellen Parallelogramms.

Enthalte das homogene materielle Parallelogramm  $ABCD$  (Fig. 3) bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse  $m$ . Man zerlege das Parallelogramm durch Parallele zu den Seiten in den mittleren Abständen der Gegenseiten in vier congruente Parallelogramme, die dem ganzen nach dem Verhältniss  $\lambda = \frac{1}{2}$  ähnlich sind. Die über Kreuz liegenden Unterparallelogramme  $AS$  und  $CS$ , sowie  $BS$  und  $DS$  haben in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt  $S$  des gegebenen Parallelogramms gehende Achse  $h_s$  dasselbe Trägheitsmoment, weil entsprechende Punkte von der Momentenachse gleichen Abstand haben. Wird bezogen auf  $h_s$  das Trägheitsmoment des ganzen Parallelogramms, sowie der Unterparallelogramme  $AS$  und  $BS$  einzeln mit  $T_s$ ,  $t_{sa}$ ,  $t_{sb}$  bezeichnet, so ist

$$T_s = 2(t_{sa} + t_{sb})$$

Heissen nun die Trägheitsmomente des ganzen Parallelogramms für die zu  $h_s$  durch die Eckpunkte  $C$  und  $D$  parallel laufenden Achsen  $h_c$  und  $h_d$  beziehungsweise  $T_c$  und  $T_d$ , so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Parallelogramme  $AS$  und  $AC$ , sowie  $BS$  und  $BD$  für die ähnlich liegenden Achsen  $h_s$  und  $h_c$ , sowie  $h_s$  und  $h_d$ , die Beziehungen

$$T_c = 2^4 t_{sa}, \quad T_d = 2^4 t_{sb}$$

Andererseits besteht aber nach dem Satze von Huyghens, wenn  $e$  und  $f$  die Abstände der Achse  $h_s$  von  $h_c$  und  $h_d$  bezeichnen,

$$T_c = T_s + m e^2, \quad T_d = T_s + m f^2$$

Aus den letzten Gleichungen leitet man ab

$$T_s = \frac{1}{8} (T_c + T_d) = \frac{1}{6} m (e^2 + f^2)$$

Liegt  $h_s$  in der Ebene des Parallelogramms, so geben  $e$  und  $f$  die Abstände der Eckpunkte  $C$  und  $D$  von  $h_s$  an. Für eine zur Ebene des Parallelogramms geneigte Achse  $h_s$  können  $e$  und  $f$  nicht grösser werden als die halben Diagonalen des gegebenen Parallelogramms, deren Projectionen auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene eben  $e$  und  $f$  sind. Es ist deshalb  $T_s$  für eine zur Ebene des Parallelogramms senkrechte Ebene ein Maximum.

Werden die Projectionen der Seiten des Parallelogramms auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene mit  $a, b, c, d$  bezeichnet, so ist, gleich viel ob  $h_s$  in der Ebene des Parallelogramms liegt oder zu derselben geneigt ist,

$$4(e^2 + f^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{24} m (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Hieraus folgt:

Das Trägheitsmoment eines Parallelogramms für eine beliebige zur Ebene der Fläche geneigte Schwerpunktsachse ist für dieselbe Achse gleich dem Trägheitsmoment der Projection des Parallelogramms auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene, wenn die Masse des gegebenen Parallelogramms gleichmässig über die Projection verteilt gedacht wird.

Die Berechnung des Trägheitsmomentes eines Parallelogramms für eine schiefe Achse ist mithin auf das Trägheitsmoment der Projection der Fläche für eine senkrechte Achse zurückführbar.

Das obige numerische Ergebniss hätte auch sofort aus dem

Werte des Trägheitsmomentes eines Dreiecks für die Schwerpunktsachse einer Seite gefunden werden können.

$$T_s = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) + \frac{1}{12} m (c^2 + d^2) = \frac{1}{24} m (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Auch hätte man aus dem Werte für das Trägheitsmoment des Parallelogramms, welcher verhältnissmässig leichter gefunden wird als der Wert des Trägheitsmomentes des Dreiecks, auf letzteren schliessen können. Doch sind, wie auch später noch einige Male, an dieser Stelle die Ableitungen getrennt durchgeführt, um die Fruchtbarkeit des Principes, welches die Trägheitsmomente von homogenen ähnlichen Systemen in Bezug auf ähnlich liegende Achsen in einfache Beziehung setzt, ausführlicher darzutun.

Mit Hilfe des gefundenen Wertes für das Trägheitsmoment eines Parallelogramms bezogen auf eine Schwerpunktsachse, kann das Moment für jede andere Achse nun leicht berechnet werden.

Für die Eckenachse  $h_c$  ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$T_c = \frac{1}{6} m (7c^2 + f^2) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2 + 12c^2)$$

Geht diese Achse durch den Schwerpunkt parallel der Seite  $BC$ , ist also  $b = d = 0$ , so ist

$$T_s = \frac{1}{12} m a^2$$

Fällt die Achse mit  $BC$  zusammen, so ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$\frac{1}{12} m a^2 + m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m a^2$$

Für die Diagonale  $AC$  als Achse ist  $a = b = c = d$ , und es wird

$$T_s = \frac{1}{3} m a^2$$

#### Das Trägheitsmoment einer homogenen materiellen Ellipsenfläche.

Die Ellipse enthalte bei gleichmässiger Verteilung der Masse über die ganze Fläche die Masse  $m$ .

Man teile die Fläche (Fig. 4) durch Radienvectoren in eine grade Anzahl gleicher Ellipsenausschnitte, einer Forderung, der dadurch genügt wird, dass man den Hauptkreis der Ellipse in die ge-

forderte Anzahl gleicher Teile teilt und die Schnittpunkte der Ordinaten dieser Teilpunkte und der Ellipse mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbindet. Für eine durch den Schwerpunkt der Fläche  $S$  gehende Momentenachse  $h_s$  ist dann das Trägheitsmoment der Ellipsenfläche gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ausschnitte.

Nun ist aber nach dem Früheren S. 42 das Trägheitsmoment eines Dreiecks für eine beliebige Eckenachse  $h_a$  (Fig. 2)

$$T_a = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + 4t_a^2)$$

wenn  $b, c, t_a$  die Projectionen der Seiten und der Transversale, die von der Ecke  $A$  ausgehen, bezeichnen.

Wird die Anzahl der Ellipsenausschnitte aber gross, so kann man jedem Ellipsenausschnitt als ein schmales Dreieck auffassen, dessen Masse  $\frac{m}{n}$  ist und für den Fall, dass  $n = \infty$  wird, erhält man als Wert für das Trägheitsmoment des ersten Ellipsenausschnittes  $SAB$  für die Momentenachse  $h_s$

$$t_{s1} = \frac{1}{12} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_1^2 + 4r_1^2) = \frac{1}{3} \frac{m}{n} r_1^2$$

weil  $b, c, t_a$  für die Grenze  $n = \infty$  den Wert  $r_1$  des Radiusvector der Projection des Halbmessers des ersten Ellipsenausschnittes auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene annimmt.

Für die folgenden Ellipsenausschnitte findet man entsprechend

$$t_{s2} = \frac{1}{3} \frac{m}{n} r_2^2$$

·  
·  
·

$$t_{sn} = \frac{1}{3} \frac{m}{n} r_n^2$$

woraus durch Addition hervorgeht

$$T_s = \frac{1}{3} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)$$

Nun lässt sich aber für die Projection der Ellipse, welche im allgemeinen selbst wieder eine Ellipse ist, die Summe der Quadrate der Radienvectoren zu Paaren so ordnen, dass man  $\frac{1}{2}n$  Summen

von Quadraten conjugirter Halbmesser der projecirten Ellipse erhält. Heissen ein Paar conjugirte Halbmesser der Projection  $\rho$  und  $\tau$ , so ist

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = \frac{1}{2}n(\rho^2 + \tau^2)$$

und es hat  $T_s$  den Wert

$$T_s = \frac{1}{4}m(\rho^2 + \tau^2)$$

Es ist demnach das Trägheitsmoment einer Ellipse für eine beliebige Schwerpunktsachse gleich dem Product aus der Masse der Ellipse in den vierten Teil der Quadratensumme der Abstände der Endpunkte conjugirter Halbmesser von dieser Achse, oder gleich dem Product aus der Masse der Ellipse in den vierten Teil der Quadratensumme der Projectionen von zwei conjugirten Halbmessern der Ellipse auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Der gefundene Wert

$$T_s = \frac{1}{4}m(\rho^2 + \tau^2)$$

kann auch für die projecirte Ellipse (Grundellipse) gedeutet werden, und man findet dann, dass das Trägheitsmoment einer Ellipse für eine schiefe Schwerpunktsachse immer auf das Trägheitsmoment der Grundellipse mit senkrechter Schwerpunktsachse zurückgeführt werden kann, nur muss dabei der Grundellipse die Masse der gegebenen Ellipse zuerteilt werden.

Aus dem gewonnenen Resultat ergeben sich leicht die Werte der Trägheitsmomente für bestimmte Fälle.

Steht die Achse im Schwerpunkt der Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  senkrecht, so ist das Trägheitsmoment

$$T_s = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$$

Für den Kreis hat man für diesen speciellen Fall

$$T_s = \frac{1}{4}mr^2$$

Fällt die Achse mit einem Durchmesser  $\lambda$  der Ellipse zusammen, so gilt auch

$$T_s = \frac{1}{4}m(\rho^2 + \tau^2)$$

es geben aber in diesem Falle  $\rho$  und  $\tau$  die senkrechten Abstände der Endpunkte von zwei conjugirten Halbmessern der Ellipse von der Achse  $\lambda$  an. Nun ist aber, wie am Schlusse dieser Betrachtung bewiesen werden soll, in jeder Ellipse die Quadratensumme der Projectionen aus den Endpunkten von zwei conjugirten Halbmessern

auf irgend einem Durchmesser  $\lambda$  eine constante Grösse, gleich dem Quadrate des Projectionslotes aus dem Endpunkte des zu  $\lambda$  conjugirten Durchmessers  $r$  auf den Durchmesser  $\lambda$  selbst. Hat dieses Projectionslot die Länge  $d$ , so ist

$$T_s = \frac{1}{4} m d^2$$

Für die Hauptachsen  $a$  und  $b$  als Rotationsachsen erhält man die zugehörigen Trägheitsmomente

$$T_a = \frac{1}{4} m b^2$$

$$T_b = \frac{1}{4} m a^2$$

und für den Kreis hat man das specielle Resultat

$$T_s = \frac{1}{4} m r^2$$

**Lehrsatz.** In jeder Ellipse ist die Quadratsumme der Projectionslote aus den Endpunkten conjugirter Halbmesser auf irgend eine Mittelpunktsachse eine constante Grösse, nämlich gleich dem Quadrate des Projectionslotes aus dem Endpunkte des Halbmessers, der der Projectionsachse conjugirt ist.

Haben die Endpunkte  $E$  und  $F$  (Fig. 4) von zwei conjugirten Halbachsen  $OE = \alpha$ , und  $OF = \beta$  auf das schiefwinklige Coordinatensystem der conjugirten Halbachsen  $OC = \gamma$ ,  $OD = \delta$  bezogen, die Coordinaten  $x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$ . Es bestehen dann die Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = \alpha^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 = \beta^2$$

$$\frac{x_1^2}{\gamma^2} + \frac{y_1^2}{\delta^2} = 1$$

$$\frac{x_2^2}{\gamma^2} + \frac{y_2^2}{\delta^2} = 1$$

woraus bei Beachtung der Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$$

folgt

$$x_1^2 + x_2^2 = \gamma^2$$

Wird der spitze Coordinatenwinkel  $COD$  mit  $\varrho$  bezeichnet, so ist

$$x_1^2 \sin^2 \varrho + x_2^2 \sin^2 \varrho = \gamma^2 \sin^2 \varrho$$

$$EE_1^2 + FF_1^2 = CC_1^2$$

**Das Trägheitsmoment eines homogenen dreiseitigen schiefen Prismas mit parallelen Grundflächen.**

Man zerlege das dreiseitige Prisma, welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse  $m$  haben möge, durch drei durch die Mitten der Grundkanten geführte Schnitte und durch einen Schnitt parallel der Grundfläche in der mittleren Höhe in acht unter sich congruente Teilprismen, welche dem ganzen Prisma im Verhältniss  $\lambda = \frac{1}{8}$  ähnlich sind (Fig 5).

Das Trägheitsmoment des Prismas für irgend eine Schwerpunktsachse  $h_s$  wird gleich sein dem Trägheitsmoment der 8 Teilprismen für dieselbe Achse.

Bezogen auf die Momentenachse  $h_s$  sei das Trägheitsmoment des ganzen Prismas  $T_s$ , das Trägheitsmoment des der Kante  $AH$  auliegenden Prismas für dieselbe Achse  $h_s$  werde mit  $t_{sa}$  bezeichnet, die Bezeichnungen für die anderen Teilprismen seien entsprechend  $t_{sb}$ ,  $t_{sc}$ ,  $t_{sd}$ ,  $t_{se}$ ,  $t_{sf}$ . Die beiden mittleren Teilprismen liegen für  $h_s$  so, dass sich immer je zwei entsprechende Punkte bestimmen lassen, welche von  $h_s$  gleichen Abstand haben, diese Prismen haben deshalb gleiches Trägheitsmoment, welches mit  $t_s$  bezeichnet werden soll. Es besteht demnach

$$T_{sa} = t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd} + t_{se} + t_{sf} + 2t_s$$

Die um die mittleren Prismen herumliegenden sechs Teilprismen haben für die durch die Ecken  $ABCDEF$  parallel zu  $h_s$  verlaufenden Achsen  $h_a \dots h_f$  dasselbe Moment wie für  $h_s$ ; heissen die Trägheitsmomente für die neuen Achsen  $t_a \dots t_f$ , so ist beispielsweise  $t_{sa} = t_a$ , d. h. das Trägheitsmoment des Teilprismas an der Kante  $AH$  hat für die Achsen  $h_s$  und  $h_a$  denselben Wert.

Liegt der Schwerpunkt des Teilprismas an der Kante  $AH$  in  $S_1$  und heisst die durch  $S_1$  parallel zu  $h_s$  und  $h_a$  verlaufende Achse  $h_1$  und das Trägheitsmoment des Teilprismas für diese Schwerpunktsachse  $t_1$ , so bestehen, wenn die Abstände der Achsen  $h_s$  und  $h_1$ , sowie  $h_1$  und  $h_a$  durch  $u$  und  $v$  angegeben werden, die Gleichungen

$$t_{sa} = t_1 + \frac{m}{8} u^2$$

$$t_a = t_1 + \frac{m}{8} v^2$$

Nun liegt aber  $S_1$  auf der Verbindungslinie von  $A$  nach  $S$  und halbirt dieselbe, denn ist  $G$  der Schwerpunkt der unteren Grund-

fläche des Teilprismas, so ist einmal, wie beim Dreieck gezeigt wurde,

$$GS = GH$$

zum andern liegt  $S_1$  auf der durch  $G$  zu  $HA$  parallelen Achse in halber Höhe, d. h. es ist:

$$GS_1 = \frac{1}{2} HA$$

woraus hervorgeht, dass die Punkte  $AS_1S$  in gerader Linie liegen und

$$AS_1 = S_1S$$

ist. Sind aber diese Strecken gleich, so sind es auch ihre Projectionen  $u$  und  $v$  auf eine zu  $h_1$  senkrechte Ebene. Hieraus geht aber hervor

$$t_{sa} = t_a$$

Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass

$$t_{sb} = t_b$$

es ist deshalb auch

$$T_s = t_a + t_b + t_c + t_d + t_e + t_f + 2t_s$$

Führt man für die Trägheitsmomente des ganzen Prismas bezogen auf die Eckenachsen  $h_a . . . h_f$  die Bezeichnungen  $T_a . . . T_f$  ein, so liegen für jede Eckenachse je ein Teilprisma und das ganze Prisma ähnlich, und es liefert die Aehnlichkeit der Prismen für ähnlich liegende Achsen die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} T_a = 2^5 t_a & T_d = 2^5 t_d \\ T_b = 2^5 t_b & T_e = 2^5 t_e \\ T_c = 2^5 t_c & T_f = 2^5 t_f \end{array}$$

In Bezug auf  $h_s$  liegt das ganze Prisma zu den beiden mittleren Teilprismen nicht ähnlich. Zieht man aber durch die Schwerpunkte der Grundflächen des ganzen Prismas  $O$  und  $N$  zu  $h_s$  parallele Achsen, welche von  $h_s$  den Abstand  $\frac{1}{2}d$  haben mögen, so liegen für diese neuen Achsen und für  $h_s$  die Teilprismen und das ganze Prisma ähnlich, es besteht deshalb die Beziehung

$$T_s + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2^5 t_s$$

Unter Benutzung der sieben letzten Gleichungen findet man

$$\frac{15}{16} T_s = \frac{1}{32} (T_a + T_b + T_c + T_d + T_e + T_f) + \frac{1}{64} m s^2$$

Andererseits bestehen aber nach dem Huyghens'schen Satze,

wenn die Abstände der Achsen  $h_a h_b \dots h_f$  von  $h_s$  mit  $r_a \dots r_f$  genannt werden, die Gleichungen

$$\begin{aligned} T_a &= T_s + mr_a^2 & T_d &= T_s + mr_d^2 \\ T_b &= T_s + mr_b^2 & T_e &= T_s + mr_e^2 \\ T_c &= T_s + mr_c^2 & T_f &= T_s + mr_f^2 \end{aligned}$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{24} m(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 + r_e^2 + r_f^2) + \frac{1}{48} m d^2$$

In dieser Form können die Grössen  $r_a \dots r_f$  noch durch die Projectionen der Kanten des gegebenen Prismas auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene ersetzt werden.

Heissen die Abstände des Schwerpunktes  $S$  von den sechs Ecken  $R_a \dots R_f$  die Grundkanten  $A, B, C$ , die Seitenkante  $D$ , so folgt aus dem Dreieck  $ASD$

$$AS^2 + DS^2 = AH^2 + DH^2 + 2SH^2$$

oder

$$R_a^2 + R_d^2 = \frac{1}{2} D^2 + 2SH^2$$

ebenso bestehen

$$R_b^2 + R_e^2 = \frac{1}{2} D^2 + 2SK^2$$

$$R_c^2 + R_f^2 = \frac{1}{2} D^2 + 2SL^2$$

Durch Addition findet man hieraus

$$\begin{aligned} R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 + R_d^2 + R_e^2 + R_f^2 &= \frac{3}{2} D^2 + 2(SH + SK + SL)^2 \\ &= \frac{3}{2} D^2 + \frac{3}{2} (A^2 + B^2 + C^2) \end{aligned}$$

Diese Beziehung geht bei der Projection auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene über in

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r_d^2 + r_e^2 + r_f^2 = \frac{3}{2} d^2 + \frac{3}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2)$$

Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas für eine beliebige Schwerpunktsachse ist demnach gleich dem Product aus der Masse des Prismas und dem 36ten Teil der Quadratensumme der Projectionen der drei Grund- und drei Seitenkanten auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Stellt man  $T_s$  dar durch

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{12} m d^2$$

und beachtet, dass  $\frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2)$  das Trägheitsmoment eines Schnittes  $HKL$  (Mitteldreieck) parallel zu den Grundflächen durch den Schwerpunkt des Prismas,  $\frac{1}{12} md^2$  das Trägheitsmoment der Achse  $ON$  des gegebenen Prismas bezeichnet, so ergibt sich der Satz:

Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen schiefen homogenen Prismas ist für eine beliebige Schwerpunktsachse gleich dem Trägheitsmoment des Mitteldreiecks und der Achse, wenn sowol das Mitteldreieck als auch die Achse mit der Masse des Prismas belastet werden.

Heissen die Schwerpunktstransversalen des Mitteldreiecks  $t_a, t_b, t_c$ , so kann man, wie beim Dreieck  $T_s$  auf die Form bringen

$$T_s = \frac{1}{27} m(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) + \frac{1}{12} md^2$$

Es sollen noch einige specielle Werte für das Trägheitsmoment angegeben werden.

Ist  $h_s$  der Seitenkante parallel, fällt also  $h_s$  mit der Achse zusammen, so ist  $d = 0$ , und es wird das Trägheitsmoment des Prismas gleich dem Trägheitsmoment der Grundfläche, wenn dieselbe die Masse des Prismas enthält

$$T_s = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2)$$

Ist  $AH$  Momentenachse, so ist das Trägheitsmoment

$$T_a = \frac{1}{12} m(3b^2 + 3c^2 - a^2) = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2 + t_a^2)$$

Das Trägheitsmoment für die Schwerpunktstransversale  $HT$  des Mitteldreiecks ist, weil  $b = c = \frac{a}{2}$

$$\frac{1}{24} ma^2 + \frac{1}{12} md^2 = \frac{1}{24} m(a^2 + 2d^2)$$

Läuft  $h_s$  parallel  $KL$  durch  $S$ , so ist  $a = 0, b = c$  und das Moment wird angegeben durch

$$\frac{1}{36} m(2b^2 + 3d^2)$$

Für die Momentenachse  $KL$  wird das Trägheitsmoment

$$\frac{1}{36} m(2b^2 + 3a^2) + m \left(\frac{t_a}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} w(2b^2 + d^2)$$

Geht die Momentenachse durch die Ecke  $L$  des Mitteldreiecks  $HKL$ , so ist, da der Abstand der parallelen Achsen  $h_s$  und  $h_l$  gleich  $\frac{2}{3}t_c$  ist,

$$T_l = T_s + \frac{4}{3}t_c^2$$

welcher Ausdruck wegen der Relation

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

auch in die Form gebracht werden kann

$$T_l = \frac{1}{36} m(3a^2 + 3b^2 + 12t_c^2 + 3d^2)$$

### Das Trägheitsmoment eines homogen schiefwinkligen Parallelepipeds.

Man zerlege das Parallelepipeton, welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse  $m$  enthalten möge, durch drei durch die Mitten von je vier parallelen Kanten geführte Schnitte in acht congruente Teile, welche dem gegebenen Körper nach dem Verhältniss  $h = \frac{1}{2}$  ähnlich sind (Fig. 6).

Inbezug auf eine durch den Schwerpunkt  $S$  des ganzen Parallelepipeds gehende Momentenachse  $h_s$  haben je zwei über Kreuz liegende Teilparallelepipeda, so  $SA$  und  $SG$  etc. dasselbe Moment, weil die Elemente dieser Körper einander so zugeordnet werden können, dass dieselben von der Achse  $h_s$  gleichen Abstand besitzen. Die Trägheitsmomente der Teilparallelepipeda für die Achse  $h_s$  mögen heissen  $t_{sa} \dots t_{sh}$ , dann wird das Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipeds für die Achse  $h_s$  angegeben durch

$$T_s = 2(t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd})$$

Heissen nun die Trägheitsmomente des ganzen Parallelepipeds für die zu  $h_s$  durch die Eckpunkte  $EEGH$  parallel laufenden Achsen  $h_e \dots h_h$  beziehungsweise  $T_e \dots T_h$ , so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Parallelepipeda  $SC$  und  $EC$ , für die zu den Körpern ähnlich liegenden Achsen  $h_s$  und  $h_e$ ;  $SD$  und  $FD$  für  $h_s$  und  $h_f$ ;  $SA$  und  $GA$  für  $h_s$  und  $h_g$ ;  $SB$  und  $HB$  für  $h_s$  und  $h_h$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} T_e &= 2^3 t_{sc} & T_g &= 2^3 t_{sa} \\ T_f &= 2^3 t_{sd} & T_h &= 2^3 t_{sb} \end{aligned}$$

Werden die Abstände der Ecken  $EFGH$  von  $h_s$ , oder die Projectionen der halben Diagonalen des Parallelepipedons auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene mit  $r_e r_f r_g r_h$  bezeichnet, so bestehen auch nach dem Satze von Huyghens die Gleichungen

$$\begin{aligned} T_e &= T_s + m r_e^2 & T_g &= T_s + m r_g^2 \\ T_f &= T_s + m r_f^2 & T_h &= T_s + m r_h^2 \end{aligned}$$

woraus man ableitet

$$T_s = \frac{1}{12} m(r_e^2 + r_f^2 + r_g^2 + r_h^2)$$

Zwischen den halben Diagonalen des Parallelepipedons  $R_e, R_f, R_g, R_h$  und den Kanten desselben  $A, B, C$  besteht aber, wie durch einfache Rechnung gefunden wird, die Beziehung

$$R_e^2 + R_f^2 + R_g^2 + R_h^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

welche für die Projection auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene übergeht in

$$r_e^2 + r_f^2 + r_g^2 + r_h^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

so dass

$$T_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2 + c^2)$$

wird, wenn  $abc$  die Projectionen von drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene bedeuten.

Das Trägheitsmoment eines schiefen Parallelepipedons ist demnach gleich dem Producte aus der Masse in den zwölften Teil der Quadratensumme aus den Projectionen der vier halben Diagonalen oder der drei Kanten, die eine Ecke bilden.

Bringt man  $T_s$  in die Form

$$T_s = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) + \frac{1}{12} m c^2$$

und beachtet, dass  $\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$  des Trägheitsmoment eines Schnittes  $KLMN$  (Mittelparallelogramm) parallel den Grundflächen durch den Schwerpunkt,  $\frac{1}{12} m c^2$  das Trägheitsmoment der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen  $OP$  d. h. der Achse bezeichnen, so kommt man zu dem Satze:

Das Trägheitsmoment eines schiefen Parallelepipedons für eine beliebige Schwerpunktsachse ist gleich dem Trägheitsmoment des

Mittelparallelogramms und der Achse, wenn Mittelparallelogramm und Achse einzeln mit der Masse des Parallelepipedons belastet werden.

Ist  $h_s$  der Kante  $AE$  parallel, so ist  $r_e = r_g$  und  $r_f = r_h$  und ferner  $c = 0$ , man erhält die bei dem Parallelogramm gefundenen Werte

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{1}{6} m(r_e^2 + r_f^2) = \frac{1}{6} m(p^2 + q^2) \\ &= \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Fällt  $h_s$  mit  $AE$  zusammen, so ist

$$T_a = T_s + mr_e^2 = \frac{1}{6} m(7r_e^2 + r_f^2)$$

#### Das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Cylinders mit parallelen Grundflächen.

Man zerlege den Cylinder, dessen Masse bei gleicher Dichtigkeit  $m$  sein möge, durch Achsenschnitte in eine gerade Anzahl ( $n$ ) gleicher Ausschnitte von der Masse  $\frac{m}{n}$ . Legt man durch den Schwerpunkt  $S$  des Cylinders, der im Mittelpunkt der Achse  $AD$  liegt, eine Momentenachse  $h_s$ , so ist bezogen auf diese Achse, das Trägheitsmoment des Cylinders gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzeln Cylinderausschnitte (Fig. 7.)

Nach dem Früheren ist aber das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas für eine Achse durch die Mitte einer Kante (Fig. 5)

$$T_l = \frac{1}{36} m(3a^2 + 3b^2 + 12t_e + 3d^2)$$

wenn  $a, b, t_e$  die Projectionen der Seiten und der Transversale des Mitteldreiecks von der Ecke  $L$  aus und  $d$  die Projection der Seitenkante des Prismas auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene bezeichnet.

Wird die Anzahl der Cylinderausschnitte sehr gross, so kann man jeden Ausschnitt als ein schmales dreiseitiges Prisma von der Masse  $\frac{m}{n}$  betrachten, und für den Fall  $n = \infty$  wird das Trägheitsmoment des ersten Ausschnittes für die Achse

$$s_1 = \frac{1}{36} \frac{m}{n} (3r_1^2 + 3s_1^2 + 12v_1^2 + 3d^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_1^2 + \frac{1}{12} \frac{m}{n} d^2$$

weil für  $n = \infty$ ,  $a = b = t_2 = r_1$  gleich dem Radiusvector der Projection des Halbmessers des ersten Ellipsenausschnittes wird, der in der Mittelellipse des Cylinders liegt.

Für die folgenden Cylinderausschnitte erhält man die entsprechenden Werte für die Trägheitsmomente

$$t_{s_2} = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_2^2 + \frac{1}{12} \frac{m}{n} d^2$$

$$\vdots$$

$$t_{s_n} = \frac{1}{2} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) + \frac{1}{12} m d^2$$

Durch Addition findet man das Trägheitsmoment des Cylinders für eine beliebige Schwerpunktsachse

$$T_s = \frac{1}{2} \frac{m}{n} r_n^2 + \frac{1}{12} m d^2$$

Die Summe der Quadrate der  $n$  Radienvectoren der Projection der Mittelellipse, lassen sich aber zu Paaren so anordnen, dass man  $\frac{1}{2}n$  Summen von Quadraten conjugirter Halbmesser der projecirten Ellipse bekommt. Heissen demnach ein Paar conjugirte Halbmesser der Projection  $\rho$  und  $\tau$ , so ist

$$T_s = \frac{1}{2} m (\rho^2 + \tau^2) + \frac{1}{12} m d^2$$

Für die Achse  $h_s$  kann  $\frac{1}{2}m(\rho^2 + \tau^2)$  gedeutet werden als das Trägheitsmoment des elliptischen Schnittes (Mittelellipse), der parallel einer Grundfläche durch den Schwerpunkt des Cylinders gelegt ist, ebenso kann  $\frac{1}{12} m d^2$  als das Trägheitsmoment der Cylinder-Achse  $AD$  angesehen werden. Man kann demnach für die Schwerpunktsache den Satz aufstellen:

Das Trägheitsmoment eines elliptischen Cylinders ist gleich dem Trägheitsmoment der Mittel-Ellipse und der Achse, wenn die Mittel-Ellipse sowol wie die Achse mit der Masse des Cylinders belastet werden.

Wird die Achse des Cylinders zur Momentenachse, so ist  $d = 0$  und

$$T_5 = \frac{1}{4}m(\rho^2 + T^2)$$

Fällt die Achse mit einem Durchmesser der Mittel-Ellipse zusammen, so ist nach dem bei der Ellipse angestellten Betrachtungen

$$T_6 = \frac{1}{4}m(l^2 + n^2) + \frac{1}{12}ml^2 - \frac{1}{4}m\rho^2 + \frac{1}{12}md^2$$

wenn  $l$  und  $n$  die Abstände der Endpunkte conjugirter Durchmesser von der Momentenachse bezeichnen, und  $\rho$  den Abstand des Endpunktes des zur Momentenachse conjugirten Durchmesser von der Drehachse angiebt.

Für die mit den Hauptachsen  $2p$  und  $2q$  der Mittel-Ellipse zusammenfallenden Momentenachsen sind die Trägheitsmomente

$$T_p = \frac{1}{4}mq^2 + \frac{1}{12}md^2$$

$$T_q = \frac{1}{4}mp^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Wird der Cylinder zu einem Rotationcylinder, so ist das Trägheitsmoment für eine im Schwerpunkt auf der Achse senkrechte Momentenachse

$$T_r = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}md^2$$

Für die geometrische Achse des Rotationcylinders erhält man das Trägheitsmoment

$$T' = \frac{1}{2}mr^2$$

### Das Trägheitsmoment einer homogenen dreiseitigen Pyramide.

Es sollen zunächst einige allgemeine Betrachtungen über die Lage des Schwerpunktes, und überdies Beziehungen, die zwischen den Kantenlängen und den Verbindungsstrecken des Schwerpunktes mit den Ecken und den Kantenmitten bestehen, abgeleitet werden. (Fig. 8).

Drei durch die Mittender Kanten geführte Ebenen  $EFG$ ,  $FJK$ ,  $FGHJ$ , zerlegen die Pyramide in zwei congruente Pyramiden (gleiche Grundfläche und Höhe), welche der gegebenen Pyramide nach dem Verhältniss  $\lambda = \frac{1}{2}$  ähnlich sind und in zwei dreiseitige inhaltsgleiche Prismen

( $\frac{1}{4}$  Grundfläche  $\times \frac{1}{3}$  zugehörig. Höhe =  $\frac{3}{4}$  geb. Pyramide). Es teilt demnach das Parallelogramm  $FGHS$  ( $FG$  und  $JH$  parallel und gleich  $\frac{1}{2} BC$ ) die gegebene Pyramide in zwei inhaltsgleiche Hälften, es enthält deshalb das Parallelogramm den Schwerpunkt der Pyramide. Für die Parallelogramme  $EFHK$  und  $EGKJ$  gilt dasselbe, es liegt mithin der Schwerpunkt der Pyramide im Schnitte der drei Parallelogramme, d. h. im Schnitte  $S$  der Diagonalen des Parallelogramms  $FGHJ$ . Beachtet man, dass  $EFGHJK$  Halbirungspunkte der Kanten sind, so findet man, dass der Schwerpunkt auf den Verbindungslinien der Mitten gegenüber liegender Kanten liegt, und dass diese Verbindungslinien im Schwerpunkt halbirt werden. Zerlegt man andererseits die gegebene Pyramide durch Schnitte parallel der Fläche  $ABC$  in viele dünne Platten, so liegt der Schwerpunkt jeder Platte und mithin auch der Schwerpunkt  $S$  der Pyramide auf der Verbindungslinie der Spitze  $D$  mit dem Schwerpunkt  $O$  der Grundfläche. Ist  $L$  der Schnitt der Transversale  $DO$  mit der Ebene  $EFG$ , so ist  $DL = LO$ , es ist aber auch  $LS = SO$  weil  $FS = SH$  ist, woraus hervorgeht  $SO' = \frac{1}{4} DO$ . Es teilt mithin der Schwerpunkt einer Pyramide die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Schwerpunkt der Gegenfläche nach dem Verhältniss 1:3.

Ist  $N$  der Schwerpunkt der Teilpyramide  $DEFG$ , so halbirt  $N$  die Strecke  $DS$ , denn

$$DN = \frac{3}{4} DL = \frac{3}{8} DO$$

$$NS = NL + LS = \frac{1}{4} DO + SO = \frac{1}{8} DO + \frac{1}{4} DO = \frac{3}{8} DO$$

Aus den Dreiecken  $DAK$ ,  $DBH$  und  $DCJ$  leitet man ab

$$\begin{aligned} 2DO^2 &= DA^2 + DK^2 - AO^2 - OK^2 = DA^2 + DK^2 - 3OK^2 \\ &= DB^2 + DH^2 - BO^2 - OH^2 = DB^2 + DH^2 - 3OH^2 \\ &= DC^2 + DJ^2 - CO^2 - OJ^2 = DC^2 + DJ^2 - 6OJ^2 \end{aligned}$$

Für die Begrenzungsflächen bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4DK^2 &= 2DB^2 + 2DC^2 - BC^2 \\ 4DH^2 &= 2DC^2 + 2DA^2 - AC^2 \\ 4DJ^2 &= 2DA^2 + 2DB^2 - AB^2 \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 4(DK^2 + DH^2 + DJ^2) &= 4(DA^2 + DB^2 + DC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) \\ 4(AK^2 + BH^2 + CJ^2) &= 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) \end{aligned}$$

$$OK^2 + OH^2 + OJ^2 = \frac{1}{12} (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Bei Bemerkung dieser Formeln findet man

$$DO^2 = \frac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

und weil  $DS = \frac{3}{4}DO$

$$DS^2 = \frac{3}{16} (DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{16} (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

In ähnlicher Weise leitet man ab

$$CS^2 = \frac{3}{16} (CA^2 + CB^2 + CD^2) - \frac{1}{16} (AD^2 + DB^2 + BA^2)$$

$$BS^2 = \frac{3}{16} (BA^2 + BC^2 + BD^2) - \frac{1}{16} (AD^2 + DC^2 + CA^2)$$

$$AS^2 = \frac{3}{16} (AB^2 + AC^2 + AD^2) - \frac{1}{16} (BC^2 + CD^2 + DB^2)$$

hieraus geht hervor:

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 = \frac{1}{4}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Es ist also die vierfache Quadratensumme der Verbindungslinien des Schwerpunktes mit den Ecken gleich der Quadratensumme über den Kanten.

Es bestehen ferner die Gleichungen

$$2SE^2 = SA^2 + SD^2 - DE^2 - AE^2 = SA^2 + SD^2 - \frac{1}{2}DA^2$$

$$2SF^2 = SD^2 + SB^2 - \frac{1}{2}DB^2$$

$$2SG^2 = SD^2 + SC^2 - \frac{1}{2}DC^2$$

$$2SJ^2 = SB^2 + SA^2 - \frac{1}{2}AB^2$$

$$2SH^2 = SA^2 + SC^2 - \frac{1}{2}AC^2$$

$$2SK^2 = SB^2 + SC^2 - \frac{1}{2}BC^2$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 2(SE^2 + SF^2 + SG^2 + SH^2 + SJ^2 + SK^2) &= 3(SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2) \\ &= SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 \\ &= \frac{1}{4}(DA^2 + DB^2 + DC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2) \end{aligned}$$

Die achtfache Quadratensumme der Verbindungslinien des Schwer-

punktes mit den Kantenmitten ist gleich der Summe der Quadrate über den Kanten.

Es bedarf wol kaum einer Erwähnung, dass die abgeleiteten Beziehungen auch für die Projectionen der Strecken auf dieselbe Ebene richtig bleiben.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen soll nun die eigentliche Aufgabe die Berechnung des Trägheitsmomentes einer dreiseitigen Pyramide in Angriff genommen werden. Enthalte die Pyramide bei gleicher Dichtigkeit die Masse  $m$ .

Das Trägheitsmoment der Pyramide bezogen auf eine durch den Schwerpunkt  $S$  gehende Achse  $h_s$  wird gleich dem Trägheitsmoment der beiden Teilpyramiden und der beiden Prismen sein, in die eingangs die Pyramide zerlegt wurde.

Heisst in Bezug auf  $h_s$  das Moment der gegebenen Pyramide  $T_s$ , und wird für dieselbe Achse das Trägheitsmoment der den Ecken  $ABCD$  anliegenden Teilkörper entsprechend  $t_{sa}$ ,  $t_{sb}$ ,  $t_{sc}$ ,  $t_{sd}$  genannt, so besteht

$$T_s = t_{sa} + t_{sb} + t_{sc} + t_{sd}$$

Die Trägheitsmomente  $t_{sa}$  und  $t_{sc}$  sind als Trägheitsmomente von halben Parallelepipeda für Achsen, die durch den Schwerpunkt  $S$  der ganzen Parallelepipeda gehen, sofort ihrem Werte nach anzugeben.

Wird durch  $sa$  die Projection der Strecke  $SA$  auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene bezeichnet, und haben die Strecken die durch kleine Buchstaben angegeben werden, entsprechende Bedeutung, so ist

$$t_{sa} = \frac{\frac{3}{8}m}{12} (se^2 + sf^2 + sg^2 + sa^2)$$

$$t_{sb} = \frac{\frac{3}{8}m}{12} (sh^3 + si^2 + sk^2 + sc^2)$$

Die Trägheitsmomente der Teilpyramiden an den Ecken  $B$  und  $D$  bezogen auf  $h_s$  nämlich  $t_{sb}$  und  $t_{sd}$  sind gleich den Trägheitsmomenten  $t_b$  und  $t_d$  dieser Pyramiden für die durch  $B$  und  $D$  parallel zu  $h_s$  gezogenen Achsen  $h_b$  und  $h_d$ . Heisst nämlich das Moment der Teilpyramide  $DEFG$  für die an  $h_s$  parallele Achse  $h_n$  durch den Schwerpunkt  $N$  dieser kleinen Pyramide  $t_n$ , so haben die Achsen  $h_b$  und  $h_d$  von  $h_n$  gleichen Abstand  $u$ , weil  $ND = NS$  ist, und es wird

$$t_{sd} = t_d = t_n + \frac{1}{2} mu^2$$

Analog zeigt man die Gleichheit von  $t_{sb}$  und  $t_b$ .

Die Teilpyramiden an den Ecken  $B$  und  $D$  liegen zu der ganzen Pyramide in Bezug auf die Ecken Achsen  $h_b$  und  $h_d$  ähnlich, und da die Pyramide ebenfalls ähnlich sind, so besteht, wenn die Trägheitsmomente der ganzen Pyramide für  $h_b$  und  $h_d$  mit  $T_b$  und  $T_d$  bezeichnet werden

$$T_b = 2^5 t_b \quad T_d = 2^5 t_d$$

und da nach dem Huyghens'schen Satze

$$T_b = T_s + m s b^2$$

$$T_d = T_s + m s d^2$$

so findet man für das Trägheitsmoment der ganzen Pyramide

$$T_s^* = \frac{1}{32} m (s e^2 + s f^2 + s g^2 + s h^2 + s i^2 + s k^2 + s a^2 + s c^2) \\ + \frac{1}{16} T_s + \frac{1}{32} m (s b^2 + s d^2)$$

$$T_s = \frac{1}{30} m (s e^2 + s f^2 + s g^2 + s h^2 + s i^2 + s k^2 + s a^2 + s b^2 + s c^2 + s d^2)$$

und weil

$$2(s e^2 + s f^2 + s g^2 + s h^2 + s i^2 + s k^2) = s a^2 + s b^2 + s c^2 + s d^2 \\ = \frac{1}{4} (d a^2 + d b^2 + d c^2 + a b^2 + b c^2 + c a^2)$$

$$T_s = \frac{1}{10} m (s e^2 + s f^2 + s g^2 + s h^2 + s i^2 + s k^2) \\ = \frac{1}{20} m (s a^2 + s b^2 + s c^2 + s d^2) \\ = \frac{1}{80} m (d a^2 + d b^2 + d c^2 + a b^2 + b c^2 + c a^2)$$

Hieraus gehen die Sätze hervor:

Das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide für eine beliebige Schwerpunktsachse ist gleich

1) dem Producte aus der Masse in den 10ten Teil der Quadratsumme der Projectionen der Transversalen vom Schwerpunkt nach den Mitten der Kanten,

2) dem Producte aus der Masse in den 20ten Teil der Quadratsumme der Projectionen der Transversalen vom Schwerpunkte nach den Ecken,

3) dem Producte aus der Masse in den 80ten Teil der Quadratsumme der Projectionen der Kanten,

wenn die Projectionen erfolgen auf eine zu der Momentenachse senkrechte Ebene.

Wegen der Relation

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 3do^2 + \frac{1}{3}(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

kann man auch schreiben

$$T_s = \frac{1}{60} m(ab^2 + bc^2 + ca^2) + \frac{3}{80} m do^2$$

Ist  $h_s$  der Kante  $DA$  parallel, so ist

$$da = 0, \quad dc = ac, \quad db = ab$$

und es wird

$$T_s = \frac{1}{80} m(2 db^2 + 2 dc^2 + bc^2) = \frac{1}{40} m(2 dk^2 + bc^2)$$

Wird  $DA$  zur Momentenachse, so ist das zugehörige Trägheitsmoment

$$T_s + m \left(\frac{dk}{2}\right)^2 = \frac{1}{40} m(12 dk^2 + bc^2) = \frac{1}{20} m(3db^2 + 3dc^2 - bc^2)$$

Für die Schwerpunkstransversale  $DO$  wird das Trägheitsmoment, da  $sd = 0$  und  $sa^2 + sb^2 + sc^2 = \frac{1}{3}(ab^2 + bc^2 + ca^2)$  ist

$$T_s = \frac{1}{60} m(ab^2 + bc^2 + ca^2) = \frac{1}{3} m(oh^2 + bi^2 + ok^2)$$

Fällt die Achse mit der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten mit  $FH$  zusammen, so ist das Moment

$$\frac{1}{10} m(se^2 + sg^2 + si^2 + sk^2) = \frac{1}{5} m(se + cg^2)$$

Wird die Schwerpunkstransversale einer Begrenzungsfläche  $DK$  Momentenachse, so ist das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} & \frac{1}{40} m(3ak^2 + 3ck^2 - ac^2 + 3ak^2 + 3bk^2 - ab^2) \\ &= \frac{1}{40} m \left( 6 ak + \frac{6}{4} bc^2 - ac^2 - ab^2 \right) = \frac{1}{40} m \left[ \frac{3}{2} (2ac^2 + 2ab^2 - bc^2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{2} bc^2 - ac^2 - ab^2 \right] = \frac{1}{20} m(ac^2 + ab^2) \end{aligned}$$

Für die zu  $h_s$  parallele Eckenachse durch  $D$  findet man

$$T_s = \frac{1}{80} m(da^2 + db^2 + dc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2) + m s d^2$$

und weil

$$16 s d^2 = 3(da^2 + db^2 + dc^2) - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{20} m(da^2 + db^2 + dc^2) + \frac{4}{5} m s d^2 \\ &= \frac{1}{20} m(da^2 + db^2 + dc^2 + 9 d o^2) \end{aligned}$$

### Das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Kegels.

Man zerlege den Kegel, der bei gleicher Dichtigkeit die Masse  $m$  enthalte, durch Achsenschnitte in eine gerade Anzahl ( $n = 2p$ ) gleicher Ausschnitte von der Masse  $\frac{m}{n}$  (Fig. 9).

Legt man durch den Schwerpunkt  $S$  des Kegels, der die Achse nach dem Verhältniss  $1 : 3$  teilt, eine beliebige Momentenachse, so ist für diese Achse das Trägheitsmoment des Kegels gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ausschnitte. Heissen die Schwerpunkte von zwei sich diametral gegenüberliegenden Ausschnitten  $AB_1C_1D$ ,  $AB_2C_2D$  bezüglich  $P_1$  und  $P_2$ , so sind die Trägheitsmomente dieser Ausschnitte, welche bei grossem  $n$  als schmale dreiseitige Pyramiden aufgefasst werden können, für die durch  $P_1$  und  $P_2$  zu  $h_s$  parallelen Achsen  $h_{p_1}$  und  $h_{p_2}$ , wenn die Projectionen der Kanten auf eine zu  $h_s$  senkrechte Ebene mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden

$$t_{p_1} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} (ab_1^2 + ac_1^2 + ad^2 + b_1c_1^2 + c_1d^2 + db_1^2)$$

$$t_{p_2} = \frac{1}{80} \frac{m}{n} (ab_2^2 + ac_2^2 + ad^2 + b_2c_2^2 + c_2d^2 + db_2^2)$$

Bezogen auf die Achse  $h_s$  wird die Summe der Trägheitsmomente der beiden Ausschnitte, deren Grundflächen  $B_1C_1D$  und  $B_2C_2D$  congruent sind, angegeben durch

$$\begin{aligned} t_{s_1} &= \frac{1}{80} \frac{m}{n} [(ab_1^2 + ab_2^2) + (ac_1^2 + ac_2^2) + 2ad^2 + 2b_1c_1^2 + 2c_1d^2 + 2db_1^2] \\ &\quad + \frac{m}{n} (p_1 s^2 + p_2 s^2) \end{aligned}$$

wenn  $p_1 s$  und  $p_2 s$  die Abstände der Achsen  $h_{p_1}$  und  $h_{p_2}$  von  $h_s$  bezeichnen.

Heissen  $O_1$  und  $O_2$  die Schwerpunkte der congruenten Flächen  $B_1 C_1 D$  und  $B_2 C_2 D$ , so teilen  $P_1$  und  $P_2$  die Strecken  $AO_1$  und  $AO_2$  nach dem Verhältniss  $1 : 3$ , und weil auch  $DS = \frac{1}{3} AS$  ist, so wird

$$P_1 S = \frac{2}{3} O_1 D \quad \text{und} \quad P_2 S = \frac{2}{3} O_2 D$$

sein. Nun teilen aber  $O_1$  und  $O_2$  die gleichen Schwerpunktstransversalen  $DG_1$ ,  $DG_2$  der congruenten Flächen  $B_1 C_1 D$  und  $B_2 C_2 D$  nach dem Verhältniss  $1 : 2$ , so dass

$$O_1 D = \frac{2}{3} DG_1 \quad \text{und} \quad P_1 S = P_2 S = \frac{1}{3} DG_1$$

ist. Für die Dreiecke  $B_1 C_1 D$ ;  $C_1 A C_2$  und  $B_1 A B_2$  bestehen ferner die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4DG_1^2 &= 2B_1 D^2 + 2C_1 D^2 - B_1 C_1^2 \\ AC_1^2 + AC_2^2 &= 2C_1 D^2 + 2AD^2 \\ AB_1^2 + AB_2^2 &= 2B_1 D^2 + 2AD^2 \end{aligned}$$

Beachtet man, dass die letzten vier Gleichungen auch für die Projectionen bestehen bleiben, dass also die Relationen gelten

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p_2^2 = \frac{1}{3} dg_1 \\ 4ad_1^2 &= 2b_1 d^2 + 2c_1 d^2 - b_1 c_1 \\ ac_1^2 + ac_2^2 &= 2c_1 d^2 + 2ad^2 \\ ab_1^2 + ab_2^2 &= 2b_1 d^2 + 2ad^2 \end{aligned}$$

so kann nunmehr der Ausdruck für  $t_{s_1}$  in die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} t_{s_1} &= \frac{1}{80} \frac{m}{n} (2b_1 c_1^2 + 4b_1 d^2 + 4dc_1^2 + 6ad^2) + \frac{1}{2} \frac{m}{n} dg_1^2 \\ &= \frac{1}{80} \frac{m}{n} (8b_1 d^2 + 8dc_1^2 + 32dg_1^2 + 6ad^2) \end{aligned}$$

Für den Grenzfall  $n = \infty$  wird

$$b_1 d = dc_1 = dg_1$$

gleich dem Radiusvector  $r_1$  der Projection des Halbmessers des Ellipsenausschnittes, der als Grundfläche zu dem betrachteten Kegelausschnitt gehört; die Projection erfolgt hierbei auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Es nimmt für diesen Grenzfall  $t_{s_1}$  den Wert an

$$t_{s_1} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_1^2 + \frac{3}{40} \frac{m}{n} ad^2$$

Für die folgenden Paare von Kegelausschnitten erhält man die entsprechenden Werte für die Trägheitsmomente

$$t_{s_2} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_2^2 + \frac{3}{40} \frac{m}{n} ad^2$$

·  
·  
·

$$t_{s_n} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_n^2 + \frac{3}{40} \frac{m}{n} ad^2$$

Durch Summation dieser Gleichungen findet man das doppelte Trägheitsmoment des Kegels für eine beliebige Schwerpunktsachse  $h_s$

$$2T_s = \frac{3}{5} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) + \frac{3}{40} m \cdot ad^2$$

und da auch hier wie bei der Ellipse und dem Cylinder

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = \frac{1}{2} n (\varrho^2 + \tau^2)$$

so hat man, wenn noch  $ad = d$  gesetzt wird

$$T_s = \frac{3}{20} m (\varrho^2 + \tau^2) + \frac{3}{80} m \cdot d^2;$$

$\varrho$  und  $\tau$  bezeichnen in dieser Formel die Projectionen von zwei conjugirten Halbachsen der Grundfläche,  $d$  die Projection der Achse des Kegels auf ein zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Geht die Achse durch den Schwerpunkt  $D$  der Grundfläche, so ist

$$T_d = \frac{3}{20} m (\varrho^2 + \tau^2) + \frac{1}{10} m \cdot d^2$$

Für eine Achse durch die Spitze  $A$  ist das Trägheitsmoment

$$T_a = \frac{3}{20} m (\varrho^2 + \tau^2) + \frac{3}{5} m d^2$$

Wird die Achse des Kegels  $AD$  zur Momentenachse, so wird das Moment angegeben durch

$$T_{ad} = \frac{3}{20} m (\varrho^2 + \tau^2)$$

welches für den Rotationskegel ( $r =$  Radius des Grundkreises) übergeht in

$$T_{ad} = \frac{3}{20} mr^2$$

Für einen Durchmesser der Grundfläche als Achse findet man den Wert des Trägheitsmomentes

$$T = \frac{3}{20} m(l^2 + n^2) + \frac{1}{10} md^2$$

wenn  $l$  und  $n$  die Abstände der Endpunkte conjugirter Durchmesser der Grundfläche von der Momentenachse angeben.

Für die Hauptachsen ( $p$  und  $q$  Hauptachsen) hat man die Werte

$$T_p = \frac{3}{20} mq^2 + \frac{1}{10} md^2, \quad T_q = \frac{3}{20} mp^2 + \frac{1}{10} md^2$$

ist  $p = q = r$ , so geht der elliptische Kegel zum Rotationskegel über, dessen Trägheitsmoment in diesem Falle angegeben wird durch

$$T_r = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{1}{10} md^2$$

### Das Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoides

Man denke sich das Ellipsoid (Fig. 10), welches bei gleicher Dichtigkeit die Masse  $m$  enthalten möge, durch Ebenen durch den Mittelpunkt in  $n = 3p$  (d. h. durch 3 teilbar) unter sich gleiche Ausschnitte von der Masse  $\frac{m}{n}$  geteilt.

Für eine durch den Mittelpunkt (Schwerpunkt  $S$  des Ellipsoides gehende Achse, wird das Trägheitsmoment des Ellipsoides gleich der Summe der Trägheitsmomente der  $n$  einzelnen Ausschnitte sein. Wird die Anzahl dieser Ausschnitte aber gross genommen, so kann jeder als eine schmale dreiseitige Pyramide mit kleiner Grundfläche angesehen werden. Nach dem Früheren wird aber das Trägheitsmoment einer dreiseitigen Pyramide  $SABC$  für die Eckenachse  $h_s$ , wenn  $sa, sb, sc, so$  die Abstände der drei Eckpunkte  $ABC$  und des Schwerpunktes  $O$  der Grundfläche  $ABC$  von der Momentenachse bezeichnen, oder wenn  $sa, sb, sc, so$  die Projectionen von  $SA, SB, SC$  und  $SO$  sind, angegeben durch

$$t_s = \frac{1}{20} m(sa^2 + sb^2 + sc^2 + 9s_0^2)$$

Wird die Anzahl der Ausschnitte des Ellipsoides unendlich gross, so ist das Trägheitsmoment des ersten Ausschnittes

$$t_{s_1} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_1^2$$

weil für die Grenze  $n = \infty$  die Abstände

$$sa = sb = sc = s_0$$

gleich sind der Projection  $r_1$  des Radiusvector nach dem Oberflächen-Element, welches die Grundfläche der ersten Teilpyramide bildet, auf eine zur Momentenachse senkrechte Ebene.

Für die folgenden Ellipsoidenausschnitte erhält man in Bezug auf dieselbe Achse  $h_s$  entsprechende Werte

$$t_{s_2} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_2^2$$

.

.

.

$$t_{s_n} = \frac{3}{5} \frac{m}{n} r_n^2$$

woraus man durch Addition das Trägheitsmoment  $T_s$  des Ellipsoides findet

$$T_s = \frac{3}{5} \frac{m}{n} (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)$$

Nun lassen sich die  $n$  Quadrate der Projectionen der Radiusvectors des Ellipsoides so anordnen, dass jedesmal die Projectionen von drei conjugirten Halbachsen zusammenstehen, und da die Quadratensumme der Projectionen von drei conjugirten Halbachsen nach Salmon-Fiedler 3. Auflage 1879 Art. 99, auf eine beliebige Ebene constant \*) ist, so hat man

---

\*) Für das Ellipsoid ist ein ganz elementarer Beweis wol kaum zu erbringen. Hier möge der Satz für die Kugel bewiesen werden. Es stehen bei der Kugel die conjugirten Halbachsen (Radien) senkrecht zu einander. Bildet die Momentenachse  $h_s$  mit einem beliebigen System conjugirter Radien die Winkel  $\alpha\beta\gamma$ , so ist

$$\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = r^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 3r^2 - r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = \frac{1}{2}n(\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2)$$

wenn  $\rho, \sigma, \tau$  die Projectionen von drei beliebigen conjugirten Halbachsen des gegebenen Ellipsoides auf eine zu der Momentenachse  $h_s$  senkrechte Ebene bezeichnen, und es wird

$$T_s = \frac{1}{2}m(\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2)$$

Für die Hauptachsen  $a, b, c$  des Ellipsoides hat man die Trägheitsmomente

$$T_a = \frac{1}{2}m(b^2 + c^2)$$

$$T_b = \frac{1}{2}m(c^2 + a^2)$$

$$T_c = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$$

Das Trägheitsmoment für einen Durchmesser der Kugel hat den speciellen Wert

$$T_r = \frac{2}{5}mr^2$$

Fällt man um den beliebigen Punkt  $P$  der Momentenachse auf die Ebene durch je zwei Radien die Lote  $PP_1, PP_2, PP_3$  so besteht, wenn  $S$  der Mittelpunkt der Kugel ist,

$$SP^2 = SP_1^2 + SP_2^2 + SP_3^2$$

woraus folgt

$$\frac{SP_1^2 + SP_2^2 + SP_3^2}{SP^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

so dass

$$\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 2r^2$$

ist und  $T_s$  den Wert annimmt

$$T_s = \frac{2}{5}mr^2$$

## III.

Ueber goniometrische Relationen, die bei der  
Kreisteilung auftreten.

Von

Prof. Dr. **B. Sporer** in Ebingen (Württemberg.)

## I. Ueber gewisse Functionen.

Durch den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems sei eine „ungerade Anzahl von  $n$  Geraden gelegt, die den Vollwinkel in  $2n$  gleiche Teile zerlegen.“ Deren Gleichungen mögen sein:

$$\begin{array}{ll}
 L_1 = x \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1 = 0 & \text{wo } \alpha_1 = \alpha \\
 L_2 = x \sin \alpha_2 - y \cos \alpha_2 = 0 & \alpha_2 = \alpha + \frac{2\pi}{n} \\
 L_3 = x \sin \alpha_3 - y \cos \alpha_3 = 0 & \alpha_3 = \alpha + \frac{4\pi}{n} \\
 \dots & \dots \\
 L_n = x \sin \alpha_n - y \cos \alpha_n = 0 & \alpha_n = \alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}
 \end{array} \quad (1)$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes ein, so stellen die sich ergebenden Werte  $L_1', L_2', L_3' \dots L_n'$  die Entfernungen dieses Punktes von den Geraden  $L$  dar, und zwar haben alle Punkte auf der einen Seite einer dieser Geraden positive Entfernungen und alle auf der andern Seite negative solche Entfernungen, und wir können gewissermassen von einer positiven und einer negativen Seite dieser Geraden reden. Beschreiben wir

um den Ursprung einen Kreis und bezeichnen die verschiedenen Seiten die Geraden  $L$  längs dieses Kreises durch die Zeichen  $+$  und  $-$ , so erhalten wir die durch die Figur 1 ersichtliche Anordnung und es tritt also in Bezug auf diese Zeichen längs des Kreises eine gewisse Symmetrie auf, die wir als cyclische Symmetrie bezeichnen wollen.

Es möge nun etwa die Function

$$\left. \begin{aligned} F(L) &= L_1^p + L_2^p + L_3^p + \dots + L_n^p \\ &= \Sigma L^p = \Sigma(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^p \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gegeben sein. Setzen wir hier den Wert der Function gleich einer Constanten  $A$ , so erhalten wir die Gleichung

$$F(L) = A$$

die im allgemeinen eine Curve des  $p$ ten Grades darstellt, etwa eine Curve  $C^p$ . Diese letztere Curve hat aber offenbar die Halbirungslinien der Winkel, die je zwei aufeinanderfolgende Geraden  $L$  mit einander bilden, zu Symmetrieachsen. Seien nämlich  $P_1$  und  $P_2$  zwei zu einer dieser Halbirungslinien symmetrische Punkte, so sind die zu diesen Punkten gehörigen Werte  $F(L)$  dieselben, indem die Entfernungen dieser Punkte von den Geraden  $L$ , abgesehen von einer Vertauschung unter denselben, gleich sind und auch mit den Vorzeichen übereinstimmen. Ist  $p$  zudem gerade, so sind auch die Geraden  $L$  selbst solche Symmetrieachsen, indem je zwei einer Geraden  $L$  symmetrisch gelegene Punkte  $P_1$  und  $P_3$  von den Geraden  $L$  ebenfalls entsprechend gleiche Entfernungen haben, die Verschiedenheit einzelner Vorzeichen aber ohne Einfluss ist.

Diese Eigenschaft beschränkt sich aber keineswegs auf das oben gewählte Beispiel einer solchen Function, sondern wir werden vielmehr eine beliebig grosse Menge solcher, in den Werten  $L$  homogener Functionen aufstellen können, die alle gleich Constanten gesetzt im allgemeinen Curven darstellen, die  $n$  oder  $2n$  Symmetrieachsen haben, je nachdem die Function von ungerader oder von gerader Ordnung ist. Eine solche Function, die auf diese Eigenschaften führt, möge kurz eine cyclisch-symmetrische Function der  $L$  genannt sein. In Bezug auf den Wert  $p$  haben wir weiter verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Fall:  $p$  ungerade und  $< n$ .

Bleiben wir bei dem obigen Beispiel. Die Gleichung

$$F(L) = 0$$

ist dann von ungeradem Grade und muss also notwendig einen reellen Factor  $ax + by$  enthalten. Da das durch die Gleichung dargestellte System von Geraden aber  $n$  Symmetrieachsen besitzt, liefert die Gerade  $ax + by = 0$  wenigstens weitere  $n - 1$  Geraden, die gleichfalls in  $F(L) = 0$  als Factoren enthalten sein müssten. Dies ist aber nicht möglich, da  $F(L)$  nur vom Grade  $p$  ist. Hieraus folgt aber, dass die Function  $F(L)$  identisch verschwinden muss; oder:

„Jede cyklisch-symmetrische Function von ungerader Ordnung „kleiner als  $n$  verschwindet stets identisch.“

### II. Fall: $n = p$ .

Ist dagegen  $n = p$ , so wird es möglich sein solche  $n$  lineare Factoren zu erhalten, die  $n$  Gerade mit  $n$  Symmetrieachsen darstellen. Aber auch jetzt noch werden diese Geraden mit den Geraden  $L$  oder aber den Symmetrieachsen selbst zusammenfallen müssen, indem für eine andere Annahme einer solchen Geraden, unmittelbar  $2n$  solcher Geraden aus den obigen Symmetrien sich ergeben. Kehren wir jetzt zu unserer Figur zurück und nehmen an, die Geraden

$$ax + by = 0$$

fallen auf die Symmetrieachsen, so wären diese Geraden aber Asymptoten der Curven  $F(L) = A$ , und aus ihrer Eigenschaft als Symmetrieachsen würde unmittelbar folgen, dass sie zugleich Rückkehrtangenten für Rückkehrpunkte auf der unendlich fernen Geraden wären. Auf dieser letzteren müssten also  $n$  solche Rückkehrpunkte liegen, und das ist unmöglich. Die Geraden

$$ax + by = 0$$

müssen also notwendig auf die Geraden  $L$  selbst fallen, oder:

„Jede cyklisch-symmetrische Function vom Grade  $n$  zerfällt in „das mit einem constanten Factor multiplicirte Product der Geraden  $L$ .“

### III. Fall: $p$ gerade und $< 2n$ .

Setzen wir auch hier die Function  $F(L) = 0$ , so muss dieselbe in  $p/2$  Factoren  $ax^2 + bxy + cy^2$  fallen. Aus den  $2n$  Symmetrien folgt aber, dass diese Factoren mindestens in die Zahl  $n$  auftreten müssten, wenn sie nicht die Form  $x^2 + y^2$  haben. Da das erstere nicht sein kann ist nur das zweite möglich, aber dann ist die Gleichung

$$F(L) = a(x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}$$

gültig und wir erhalten:

„Für gerade  $p < 2n$  ist jede cyclisch-symmetrische Function „der Ordnung  $p$  gleich einer mit einer Constanten multiplicirten „Potenz von  $x^2 + y^2$ , und dieselbe gleich einer Constanten gesetzt „stellt  $p_2$  concentrische Kreise dar.“

IV Fall:  $p$  ungerade und  $> n$  oder  $p$  gerade und  $> 2n$ .

Ganz gleicherweise finden wir für ungerade  $p > n$ , dass die gleich null gesetzte Function, wenn  $p < 2n$  ist, in die Geraden  $L$  und eine Potenz von  $x^2 + y^2$  zerfällt. In allen andern Fällen aber wird  $F(L) = 0$  nur aus den Factoren  $L$ , aus Gruppen von  $2n$  Factoren  $ax + by$  und aus Factoren  $x^2 + y^2$  bestehen können. Wir werden uns jedoch auf die drei ersten Fälle beschränken.

Ist  $n$  gerade, so fallen je zwei Geraden  $L$  aufeinander, für ungerade  $p$  tritt keine Symmetrie auf, aber wir werden doch auch hier von  $F(L)$  behaupten können, dass es oft verschwindet, indem die Glieder sich dann paarweise aufheben. Ist dagegen  $p$  gerade, so ist die Zahl der Symmetrieachsen gleich  $n$  und wir erhalten für die Gültigkeit des Satzes in Fall III. die Bedingung  $p < n$ .

## II. Goniometrische Gleichungen.

1) Möge das Zeichen  $\equiv$  identisch gleich null bedeuten. Aus dem Satze im ersten Fall in I. folgt aber für  $p = 2q + 1$  unmittelbar die Gleichung

$$\Sigma(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^{2q+1} \equiv 0, \text{ für } 2q + 1 < n \quad (3)$$

Geben wir hier  $q$  nach einander die Werte 0, 1, 2, 3 . . . und setzen die Coefficienten gleich null, so erhalten wir aber:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \sin \alpha &= \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \dots + \sin \alpha_n = 0 \\ \Sigma \sin^3 \alpha &= \sin^3 \alpha_1 + \sin^3 \alpha_2 + \sin^3 \alpha_3 + \dots + \sin^3 \alpha_n = 0 \\ \Sigma \sin^5 \alpha &= \sin^5 \alpha_1 + \sin^5 \alpha_2 + \sin^5 \alpha_3 + \dots + \sin^5 \alpha_n = 0 \\ \Sigma \sin^7 \alpha &= \sin^7 \alpha_1 + \sin^7 \alpha_2 + \sin^7 \alpha_3 + \dots + \sin^7 \alpha_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

u. s. w. für Exponenten  $< n$ . Ebenso ist

•

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \cos \alpha &= \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n = 0 \\ \Sigma \cos^3 \alpha &= \cos^3 \alpha_1 + \cos^3 \alpha_2 + \dots + \cos^3 \alpha_n = 0 \\ \Sigma \cos^5 \alpha &= \cos^5 \alpha_1 + \cos^5 \alpha_2 + \dots + \cos^5 \alpha_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

u. s. w. für Exponenten  $< n$ .

Ausser diesen Relationen erhalten wir aus der Gleichung z. B. noch:

$$\Sigma \sin^r \alpha \cos^s \alpha = \cos^r \alpha_1 \sin^s \alpha_1 + \cos^r \alpha_2 \sin^s \alpha_2 + \dots + \cos^r \alpha_n \sin^s \alpha_n = 0$$

wo  $r + s = 2q + 1$

also eine ungerade Zahl  $< n$  ist. Ueberhaupt können wir aus dem in Fall I. Bemerkten schliessen, dass jeder solche cyklisch-symmetrische Ausdruck, der in den Werten  $\cos \alpha$  vom Grade  $r$  und in den Werten  $\sin \alpha$  vom Grade  $s$  ist, gleich null wird, wenn  $r + s$  ungerade und  $< n$  ist.

2) Ist  $p$  gerade  $= 2q$  und  $< 2n$ , so sehen wir, dass z. B. die Gleichung

$$\Sigma (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^{2q} \equiv a(x^2 + y^2)^q$$

gültig ist, wobei  $a$  eine bestimmte Constante ist. Entwickeln wir beiderseits nach dem binomischen Satze, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x^{2q} \Sigma \sin^{2q} \alpha - \binom{2q}{1} x^{2q-1} \Sigma \sin^{2q-1} \alpha \cdot \cos \alpha + \binom{2q}{2} \Sigma \sin^{2q-2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ - \dots \equiv a \left( x^{2q} + \binom{q}{1} x^{2q-2} y^2 + \binom{q}{2} x^{2q-4} y^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

und hieraus durch Gleichsetzung der Coefficienten rechts und links:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \sin^{2q} \alpha &= a \\ \Sigma \sin^{2q-1} \alpha \cdot \cos \alpha &= 0 \\ \Sigma \sin^{2q-2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha &= \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{2}} \cdot a \\ \Sigma \sin^{2q-3} \alpha \cdot \cos^3 \alpha &= 0 \\ \Sigma \sin^{2q-4} \alpha \cdot \cos^4 \alpha &= \frac{\binom{q}{2}}{\binom{2q}{4}} \cdot a \quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nun ist aber auch

$$\Sigma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^q = n$$

oder entwickelt:

$$\Sigma \sin^{2q}\alpha + \binom{q}{1} \Sigma \sin^{2q-2}\alpha \cdot \cos^2\alpha + \binom{q}{2} \Sigma \sin^{2q-4}\alpha \cdot \cos^4\alpha + \dots = n$$

Setzen wir aber hierin die in Gl. (6) erhaltenen Werte ein, so finden wir für  $\alpha$  den Wert

$$\alpha = \frac{n}{\binom{q}{0}^2 + \binom{q}{1}^2 + \binom{q}{2}^2 + \dots + \binom{q}{q}^2} = n \cdot \varphi(q)! \quad (7)$$

Nach den Gleichungen (6) ist aber auch

$$\Sigma \sin^{2q-2} \cdot \cos^2\alpha = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{2}} \cdot \varphi(q) \cdot n$$

Setzen wir hierin für  $\cos^2\alpha$  aber  $1 - \sin^2\alpha$ , so erhalten wir

$$\Sigma \sin^{2q-2}\alpha^0 - \Sigma \sin^{2q} = n \cdot \varphi(q-1) - n \cdot \varphi(q) = \frac{\binom{q}{1}}{\binom{2q}{1}} \cdot n \cdot \varphi(q)$$

und also:

$$\varphi(q) = \frac{2q-1}{2q} \cdot \varphi(q-1)$$

Es ist aber unmittelbar:

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}$$

also

$$\varphi(2) = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad \varphi(3) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

und allgemein

$$\varphi(q) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2q-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2q} \quad (8)$$

Geben wir jetzt  $q$  nach einander den Wert 1, 2, 3, 4, 5 . . . , so finden wir ferner

$$\sin^2\alpha = \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 + \dots + \sin^2\alpha_n = \frac{1}{2} \cdot n \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \sin^4 \alpha &= \sin^4 \alpha_1 + \sin^4 \alpha_2 + \sin^4 \alpha_3 + \dots + \sin^4 \alpha_n \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot n \\ \sum \sin^6 \alpha &= \sin^6 \alpha_1 + \sin^6 \alpha_2 + \sin^6 \alpha_3 + \dots + \sin^6 \alpha_n \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

u. s. w. Ebenso wird

$$\left. \begin{aligned} \sum \cos^2 \alpha &= \sum \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot n, \quad \sum \cos^4 \alpha = \sum \sin^4 \alpha = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot n \\ \sum \cos^6 \alpha &= \sum \sin^6 \alpha = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

u. s. w. für Exponenten  $< 2n$ .

3) Es ist auch

$$\begin{aligned} \cos^{n-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha &= \cos^{n-2} \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^{n-2} \alpha - \cos^n \alpha \\ \cos^{n-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha &= \cos^{n-4} \alpha - \binom{2}{1} \cos^{n-2} \alpha + \cos^n \alpha \\ \cos^{n-6} \alpha \cdot \sin^6 \alpha &= \cos^{n-6} \alpha - \binom{3}{1} \cos^{n-4} \alpha + \binom{3}{2} \cos^{n-2} \alpha - \cos^n \alpha \end{aligned}$$

und allgemein

$$\begin{aligned} \cos \alpha^{n-2q} \cdot \sin^{2q} \alpha &= \cos^{n-2q} \alpha - \binom{q}{1} \cos^{n-2q+2} \alpha + \binom{q}{2} \cos^{n-2q+4} \alpha \\ &\quad - \dots + (-1)^q \cdot \cos^n \alpha \end{aligned}$$

Ist  $n$  ungerade, und geben wir  $\alpha$  nach einander die Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  und addiren, so folgt aus der letzten Gleichung, da alle Werte  $\sum \cos^{n-2p}$  verschwinden (Gl. 4):

$$\left. \begin{aligned} \sum \cos^{n-2q} \alpha \cdot \sin^{2q} \alpha &= (-1)^q \cdot \sum \cos^n \alpha \\ \text{Ganz ebenso finden wir} & \\ \sum \sin^{n-4q} \alpha \cdot \cos^{2q} \alpha &= (-1)^q \cdot \sum \sin^n \alpha \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Weiterhin ist aber

$$\cos^n \alpha = \cos^n - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \dots$$

Ist auch hier  $n$  ungerade und setzen wir wieder für  $\alpha$  nacheinander die Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  und addiren, so folgt aber, da  $\cos^n \alpha_1 = \cos^n \alpha_2 = \dots$  ist, mittelst der Gleichungen (11):

$$n \cos n\alpha = \left\{ 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots \right\} \Sigma \cos n\alpha$$

oder da der Ausdruck in der Klammer  $\frac{1}{2}(1+1)^n = 2^{n-1}$  ist:

$$n \cdot \cos n\alpha = 2^{n-1} \cdot \Sigma \cos n\alpha$$

Oder wir halten

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \cos^n \alpha &= \cos^n \alpha_1 + \cos^n \alpha_2 + \dots + \cos^n \alpha_n = \frac{n \cdot \cos n\alpha}{2^{n-1}} \\ \text{und ebenso:} \\ \Sigma \sin^n \alpha &= \sin^n \alpha_1 + \sin^n \alpha_2 + \dots + \sin^n \alpha_n \\ &= \frac{n \cdot \sin n\alpha}{2^{n-1}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Kehren wir jetzt zu der Gleichung

$$\Sigma L^n = \Sigma (\alpha \sin \alpha - y \cos \alpha)^n = k$$

zurück, wo  $k$  eine Constante ist, und entwickeln, so erhalten wir aber

$$\begin{aligned} x^n \Sigma \sin^n \alpha - \binom{n}{1} x^{n-1} y \Sigma \sin^{n-1} \alpha \cdot \cos \alpha \\ + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 \Sigma \sin^{n-2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \dots = k \end{aligned}$$

und hieraus durch Benutzung der Gleichungen (11) und (12):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^n &\equiv \left\{ x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{4} x^{n-4} \cdot y^4 - \dots \right\} \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \cdot n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ &- \left\{ y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} \cdot x^2 + \binom{n}{4} \cdot y^{n-4} \cdot x^4 - \dots \right\} \\ &\quad \cdot \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}} \cdot n = k \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nach dem Fall III. in I. fanden wir aber, dass  $\Sigma L^n$  in das mit einer Constanten  $\varepsilon$  multiplicirte Product  $\Pi L$  der Geraden  $L$  zerfallen muss, und wir haben also:

$$\Sigma L^n \equiv \varepsilon \cdot \Pi L \quad (14)$$

Hieraus folgt aber zur Bestimmung der Constanten  $\varepsilon$ , wenn wir auch die Producte aus den Werten  $\sin \alpha$  resp.  $\cos \alpha$  mit  $\Pi \sin \alpha$  und  $\Pi \cos$  bezeichnen:

$$\Sigma \sin^n \alpha = \varepsilon \cdot \Pi \sin \alpha \quad \text{und} \quad \Sigma \cos^n \alpha = \varepsilon \cdot \Sigma \cos \alpha$$

Aus Gl. (13) erhalten wir nun weiter

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \cdot \Pi \sin \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n \cdot \sin n\alpha}{2^{n-1}} \\ \varepsilon \cdot \Pi \cos \alpha &= \frac{n \cdot \cos n\alpha}{2^{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Nun ist aber auch

$$\varepsilon \cdot \Pi \sin 2\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n \cdot \sin 2n\alpha}{2^{n-1}} \quad (16)$$

indem die Werte  $2\alpha$  gleichfalls eine Reihe von  $\alpha$  Winkeln bilden, welche sich mit den einer Reihe

$$\beta, \quad \beta + \frac{2\pi}{n}, \quad \beta + \frac{4\pi}{n}, \quad \dots \quad \beta + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

decken, wenn wir für Winkel  $> 2\pi$  den um  $2\pi$  verkleinerten setzen

Durch Multiplication der Gleichungen (15) erhalten wir ferner

$$2^n \cdot \varepsilon^2 \cdot \Pi \sin \alpha \cdot \Pi \cos \alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n^2 \cdot \sin 2n\alpha}{2^{n-1}} \quad (17)$$

$\varepsilon = n$ , also mittelst Gl. (16):

$$\Sigma L^n \equiv n \Pi L$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi \sin \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\sin n\alpha}{n-1} \\ \Pi \cos \alpha &= + \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}} \\ \Pi \tan \alpha &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \tan n\alpha \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ausserdem erhalten wir noch die interessanten Relationen:

$$\left. \begin{aligned} 1 \quad \Sigma \sin^n \alpha - n \cdot \Pi \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma \cos^n \alpha - n \cdot \Pi \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

So ist z. B. für  $n = 3$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin^3 \alpha + \sin^3 \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^3 \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) - 3 \sin \alpha \cdot \sin \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cdot \sin \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0 \\ \cos^3 \alpha + \cos^3 \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos^3 \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) - 3 \cos \alpha \cdot \cos \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cdot \cos \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

Die Gleichung  $\Sigma L^n \equiv n \Pi L$  können wir aber auch schreiben:

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4} \cdot y^4 - \dots \right\} \frac{n \cdot \sin n\alpha}{2^{n-1}} \\ - \left\{ y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} \cdot x^2 + \binom{n}{4} y^{n-4} \cdot x^4 - \dots \right\} \frac{n \cdot \cos n\alpha}{2^{n-1}} \equiv \\ n \cdot \Pi \sin \alpha (x - y \cot \alpha) \equiv n \cdot \Pi \cos \alpha (x \tan \alpha - y) \\ \equiv \frac{(-1)^{n-1} n \cdot \sin n\alpha}{2^{n-1}} (x^n - G_1 x^{n-1} \cdot y + G_2 x^{n-3} \cdot y^2 - G_3 x^{n-5} \\ \cdot y^3 + \dots) \\ \equiv - \frac{n \cdot \cos n\alpha}{2^{n-1}} (y^n - H_1 x y^{n-1} + H_2 x^2 y^{n-2} - H_3 x^3 y^{n-3} + \dots) \end{aligned}$$

wobei  $G_1, G_2, G_3 \dots$  die Summen der Combinationen der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Classe der Werte  $\cot \alpha$  und ebenso  $H_1, H_2, H_3$  die der Werte  $\tan \alpha$  sind. Durch Gleichsetzung der Coefficienten rechts und links erhalten wir aber daraus:

$$\left. \begin{aligned} G_1 = + \binom{n}{1} \cot n\alpha \quad \text{und} \quad H_1 = \pm \binom{n}{1} \tan n\alpha \\ G_2 = - \binom{n}{2} \quad \quad \quad H_2 = \mp \binom{n}{2} \\ G_3 = - \binom{n}{3} \cot n\alpha \quad \quad H_3 = \mp \binom{n}{3} \tan n\alpha \\ G_4 = + \binom{n}{4} \quad \quad \quad H_4 = \pm \binom{n}{4} \\ G_5 = + \binom{n}{5} \cot n\alpha \text{ u. s. w. } H_5 = \pm \binom{n}{5} \tan n\alpha \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right\} (20)$$

4) Die so gefundenen Gleichungen gestatten es uns wieder eine Menge neuer aufzustellen. Auf solche führen uns z. B. die Beziehungen zwischen den Coefficienten einer Gleichung und den

Potenzsummen der Wurzeln der Gleichungen. Bezeichnen wir so die Summen der Combinationen der ersten Classe der Werte  $\sin \alpha$  oder  $\cos \alpha$  mit  $C_p$ , so erhalten wir aus den Gleichungen (4) und (9):

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0, & C_2 &= -\frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot n \\ C_3 &= 0, & C_4 &= -\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot n(n-3) \\ C_5 &= 0, & C_7 &= -\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^6} \cdot n(n-4)(n-5) \\ C_7 &= 0, & C_8 &= +\frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^8} \cdot n(n-5)(n-6)(n-7) \\ C_9 &= 0, & C_{10} &= -\frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^{10}} \cdot n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

u. s. w. oder auch umgekehrt geordnet:

$$\left. \begin{aligned} C_{n-2} &= \pm \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \\ C_{n-3} &= \mp \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \cdot (n^2 - 1) \\ C_{n-5} &= \pm \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 9) \\ C_{n-7} &= \mp \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 9)(n^2 - 25) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

u. s. w.

Ebenso erhalten wir, wenn wir die Summen der Combinationen aus den Werten  $\sin^2 \alpha$  oder  $\cos^2 \alpha$  der einzelnen Classen durch  $D_1, D_2, \dots$  bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot n \\ D_2 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot n(2n-3) \\ D_3 &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot n(2n-4)(2n-5) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_4 &= \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot n(2n-5)(2n-6)(2n-7) \\
 D_5 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^9} \cdot n(2n-6)(2n-7)(2n-8)(2n-9) \\
 &\quad \text{u. s. w.}
 \end{aligned} \right\} (23)$$

Insbesondere ist

$$D_{n-1} = \frac{n^2}{2^{2n-2}} \quad (24)$$

5) Bezeichnen wir ebenso die Summen der Combinationen der einzelnen Classen aus den Werten  $\frac{1}{\sin \alpha}$  und  $\frac{1}{\cos \alpha}$  mit  $E_1, E_2, E_3 \dots$  resp.  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , so erhalten wir weiter:

$$\left. \begin{aligned}
 E_1 &= \pm \frac{C_{n-1}}{\Pi \sin \alpha} = \frac{n}{\sin n\alpha} \quad \text{und} \quad F_1 = \pm \frac{n}{\cos n\alpha} \\
 E_2 &= \frac{C_{n-2}}{\Pi \sin \alpha} = 0 \quad \quad \quad F_2 = 0 \\
 E_3 &= \frac{C_{n-3}}{\Pi \sin \alpha} = -\frac{n}{3!} \frac{n^2-1}{\sin n\alpha} \quad \quad F_3 = \pm \frac{n}{3!} \cdot \frac{n^2-1}{\cos n\alpha} \\
 E_4 &= \frac{C_{n-4}}{\Pi \sin \alpha} = 0 \quad \quad \quad F_4 = 0 \\
 E_5 &= \frac{C_{n-5}}{\Pi \sin \alpha} = \frac{n}{5!} \cdot \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{\sin n\alpha} \quad \text{und} \\
 &\quad \quad \quad F_5 = \pm \frac{n}{5!} \cdot \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{\cos n\alpha} \\
 E_6 &= \frac{C_{n-6}}{\Pi \sin \alpha} = 0 \quad \text{und} \quad F_6 = 0 \quad \text{u. s. f.}
 \end{aligned} \right\} (25)$$

6) Die Gleichungen (20) ermöglichen uns es auch Formeln für die Summen der Potenzen der Tangenten und Cotangenten der Winkel  $\alpha$  aufzustellen. Durch die oben erwähnten Newton'schen Beziehungen erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= \Sigma \tan \alpha = \binom{n}{1} \tan \alpha = \pm n \cdot \tan \alpha \quad (\text{Euler}) \\
 J_2 &= \Sigma \tan^2 \alpha = \binom{n}{2}^2 \tan^2 \alpha + 2 \binom{n}{2} = n^2 \tan^2 \alpha \\
 &\quad \quad \quad + n(n-1)
 \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \Sigma \operatorname{tang}^3 \alpha = \pm \binom{n}{1}^3 \operatorname{tang}^3 n\alpha \pm 3 \binom{n}{1} \binom{n}{2} \operatorname{tang} n\alpha \\
 &\quad + 3 \binom{n}{3} \operatorname{tang} n\alpha \\
 &= \pm n^3 \operatorname{tang}^3 n\alpha \pm n(n^2 - 1) \operatorname{tang} n\alpha \\
 J_4 &= \Sigma \operatorname{tang}^4 \alpha = \binom{n}{1}^4 \operatorname{tang}^4 n\alpha + 4 \binom{n}{1}^2 \binom{n}{2} \operatorname{tang}^2 n\alpha \\
 &\quad - 4 \binom{n}{1} \binom{n}{3} \operatorname{tang}^2 n\alpha + 2 \binom{n}{2}^2 - 4 \binom{n}{4} \\
 &= n^4 \operatorname{tang}^4 n\alpha + \frac{4}{3} n^2 (n^2 - 1) \operatorname{tang}^2 n\alpha \\
 &\quad + \frac{1}{3} n (n - 1) (n^3 + n - 3)
 \end{aligned} \tag{26}$$

und so weiter. Ebenso:

$$\begin{aligned}
 K &= \Sigma \cot \alpha = + n \cot n\alpha \quad (\text{Euler}) \\
 K_2 &= \Sigma \cot^2 \alpha = n^2 \cot^2 n\alpha + n(n-1) \\
 K_3 &= \Sigma \cot^3 \alpha = n^3 \cot^3 n\alpha + n(n^2 - 1) \cot n\alpha \\
 K_4 &= \Sigma \cot^4 \alpha = \cot^4 n\alpha + \frac{4}{3} n^2 (n^2 - 1) \cot^2 n\alpha + \frac{1}{3} n (n - 1) \\
 &\quad \cdot (n^2 + n - 3) \\
 &\quad \text{u. s. f.}
 \end{aligned} \tag{27}$$

7) Desgleichen finden wir mittelst der Gleichungen (25) die Relationen:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \Sigma \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{n}{\sin n\alpha} \quad (\text{Euler}) \\
 M_2 &= \Sigma \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{n^2}{\sin^2 n\alpha} \\
 M_3 &= \Sigma \frac{1}{\sin^3 \alpha} = \frac{n^3}{\sin^3 n\alpha} - \frac{1}{2} \frac{n(n^2 - 1)}{\sin n\alpha} \\
 M_4 &= \Sigma \frac{1}{\sin^4 \alpha} = \frac{n^4}{\sin^4 n\alpha} - \frac{2}{3} \frac{n^2(n^2 - 1)}{\sin^2 n\alpha} \\
 M_5 &= \Sigma \frac{n^5}{\sin^5 n\alpha} - \frac{5}{6} \frac{n^3(n^3 - 1)}{\sin^3 n\alpha} + \frac{1}{24} \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{\sin n\alpha} \\
 &\quad \text{etc.}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Und dann

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \Sigma \frac{1}{\cos \alpha} = \pm \frac{n}{\cos n\alpha} \quad (\text{Euler}) \\
 N_2 &= \Sigma \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{n^2}{\cos^2 n\alpha} \\
 N_3 &= \Sigma \frac{1}{\cos^3 \alpha} = \pm \frac{n^3}{\cos^3 n\alpha} \mp \frac{n}{2} \frac{(n^2-1)}{\cos n\alpha} \\
 N_4 &= \Sigma \frac{1}{\cos^4 \alpha} = \frac{n^4}{\cos^4 n\alpha} - \frac{2}{3} \frac{n^2(n^2-1)}{\cos^2 n\alpha} \quad \text{u. s. w.}
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Die in den Gleichungen (20), (22), (25), (26) und (29) enthaltenen doppelten Vorzeichen beziehen sich auf die Fälle, in denen  $\mu = 4p + 1$  oder  $= 4p - 1$  ist.

8) Zum Schlusse wollen wir hier noch die Werte ableiten, die wir für die Summen des Producte von je zwei aufeinander folgenden Werten  $\sin \alpha$  oder  $\cos \alpha$  aufstellen.

Wir haben:

$$\sin \alpha_p \cdot \sin \alpha_{p+1} = \sin \alpha_p \left( \sin \alpha_p \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \alpha_p \right)$$

also:

$$\Sigma \sin \alpha_p \cdot \sin \alpha_{p+1} = \Sigma \sin^2 \alpha_p \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \Sigma \sin \alpha_p \cdot \cos \alpha_p$$

Nun finden wir aber aus unserem allgemeinen Satze, dass

$$\Sigma \sin \alpha_p \cos \alpha_p = 0$$

und

$$\Sigma \sin^2 \alpha_p = \frac{n}{2}$$

ist, und erhalten also :

$$\begin{aligned}
 P &= \Sigma \sin \alpha_p \cdot \sin \alpha_{p+1} = \frac{n}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \\
 \text{und ebenso} \\
 Q &= \Sigma \cos \alpha_p \cdot \cos \alpha_{p+1} = \frac{n}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{n}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

### III. Goniometrische Relationen für gerade $n$ .

1) Wir haben bisher immer  $n$  als ungerade vorausgesetzt. Ist  $n$  gerade, so gelten eine Reihe der entwickelten Relationen entweder überhaupt nicht oder nicht mehr bis zu denselben Grenzen  $n - 1$  resp.  $2n - 2$ , jenachdem die Functionen von ungerader oder gerader

Ordnung sind. Die Werte  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  resp. ihre Verbindungen treten zudem jetzt paarweise auf, und es sind für Functionen ungerader Ordnung diese Paare von entgegengesetzten Vorzeichen, und wir werden aber, wie bereits oben in einem besondern Falle bemerkt wurde, die Gleichungen als gültig ansehen dürfen. Ist der Grad der Function gerade, so werden wir um Constanten zu erhalten diesen nicht grösser als  $n-2$  annehmen dürfen, da die Zahl der Symmetrien in diesem Falle nur gleich  $n$  ist. Es bietet auch keine Schwierigkeit in jedem besondern Falle diese Fragen zu erledigen. Anders ist es aber, wenn der Grad der Function der Werte  $\sin \alpha$  oder  $\cos \alpha$  gleich  $n$  ist.

2) Wir fanden z. B. für  $n = 7$ :

$$\prod \sin \alpha = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_7 = -\frac{\sin 7\alpha}{2^6}$$

Ist  $n = 14$ , so zerlegen wir die 14 Werte  $\sin \alpha$  in zwei Gruppen und erhalten

$$\prod \sin \alpha' = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_5 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_{13} = -\frac{\sin 7\alpha_1}{2^6}$$

und

$$\prod \sin \alpha'' = \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_4 \cdot \sin \alpha_6 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_{14} = -\frac{\sin 7\alpha_2}{2^6} + \frac{\sin 7\alpha_1}{2^6}$$

Hieraus folgt aber:

$$\prod \sin \alpha = -\frac{\sin^2 7\alpha}{2^{12}}$$

und dann:

$$\prod \cos \alpha = -\frac{\cos^2 7\alpha}{2^{12}}$$

und es ist leicht die Frage für den Fall, dass  $n$  nur durch den geraden Factor 2 teilbar ist, also die Form  $4p+2$  hat, das Resultat zu geben.

Ist  $n$  durch 4 teilbar, so gehen wir von der Zahl 4 selbst aus. Es ist dann leicht zu zeigen, dass

$$\prod \sin \alpha = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4 = \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\alpha$$

Hieraus erhalten wir durch Zerlegung in drei Teile z. B. für  $n = 12$  die Relation:

$$\prod \sin \alpha = \frac{1}{64} \cdot \sin^2 2\alpha_1 \cdot \sin^2 2\alpha_2 \cdot \sin^2 2\alpha_3 = \frac{1}{2^{10}} \cdot \sin^2 6\alpha$$

Ist  $n$  durch 8 teilbar, so führt eine analoge Rechnung zum Ziel, es ist dann für  $n = 8$  selbst:

$$H \sin \alpha = \frac{1}{2^6} \cdot \sin^2 3\alpha \quad \text{u. s. f.}$$

Analoge Betrachtungen führen bei den andern Gleichungen auf entsprechende Relationen.

## Anwendungen.

### IV. Aufstellung weiterer goniometrischer Gleichungen.

1) Die bisher gegebenen Entwicklungen gestatten uns ausser den bereits gegebenen noch eine Menge anderer goniometrischer Relationen anzugehen. Um solche zu erhalten, können wir wie folgt verfahren. Wie wir sahen, stellt eine cyklisch symmetrische Function der Geraden  $L$  von gerader Ordnung  $< 2n$  immer eine mit einer Constanten multiplicirte Potenz von  $x^2 + y^2$  dar und verschwindet für ungerade Ordnungen  $< n$  identisch. Um diese Constante zu erhalten, genügt es jeweils einen einzigen Coefficienten in der Function  $F(L)$  zu bestimmen. Ist dieser bekannt, so resultiren dann von selbst für die andern Coefficienten solche goniometrische Gleichungen. So erhalten wir z. B. für die Summe der Combinationen der  $L$  die identischen Gleichungen:

$$C^2(L) = - \frac{1}{2^2} \cdot n(x^2 + y^2)$$

$$C^3(L) = + 0$$

$$C^4(L) = + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot n(n-3)(x^2 + y^2)^2$$

$$C^5(L) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Ebenso erhalten wir für die Summen der Combinationen aus den Werten  $L^2$  die Relationen

$$C^2(L^2) \equiv \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot n(2n-3)(x^2 + y^2)^2$$

$$C^3(L^2) \equiv \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot n(2n-4)(2n-5)(x^2 + y^2)^3$$

$$C^2(L^2) \equiv \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot n(2n-5)(2n-6)(2n-7)(x^2+y^2)^4$$

u. s. f.

2) Weit wichtiger als die hier angedeuteten Relationen sind aber diejenigen, die wir erhalten, wenn wir für  $\alpha$  in den bereits gefundenen besondere Werte einsetzen. So gehen die Gleichungen (5), (9) und (10) für  $\alpha_1 = 0$  ohne Schwierigkeiten in die folgenden über:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} - \cos \frac{4\pi}{n} + \dots \pm \cos \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1}{2} \\ \cos^3 \frac{\pi}{n} - \cos^3 \frac{2\pi}{n} + \cos^3 \frac{3\pi}{n} - \cos^3 \frac{4\pi}{n} + \dots \pm \cos^3 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1}{2} \\ \cos^5 \frac{\pi}{n} - \cos^5 \frac{2\pi}{n} + \cos^5 \frac{3\pi}{n} - \cos^5 \frac{4\pi}{n} + \dots \pm \cos^5 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

u. s. w.

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{2\pi}{n} + \sin^2 \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin^2 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \\ \sin^4 \frac{\pi}{n} + \sin^4 \frac{2\pi}{n} + \sin^4 \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin^4 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n}{2} \\ \sin^6 \frac{\pi}{n} + \sin^6 \frac{2\pi}{n} + \sin^6 \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin^6 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n}{2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

u. s. f.

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \\ \cos^4 \frac{\pi}{n} + \cos^4 \frac{2\pi}{n} + \cos^4 \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos^4 \frac{n-1}{2n} \pi &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^6 \frac{\pi}{6} + \cos^6 \frac{2\pi}{n} + \cos^6 \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos^6 \frac{n-1}{n} \pi \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} (33)$$

etc., wobei die Exponenten nicht  $n$  resp.  $2n$  erreichen dürfen.

3) Ist ebenso  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , so finden wir:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3n} + \sin \frac{2\pi}{3n} + \sin \frac{4\pi}{3n} - \sin \frac{5\pi}{3n} + \sin \frac{7\pi}{3n} + \dots \\ \pm \sin \frac{3n-1}{6n} \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{3n} + \sin^2 \frac{2\pi}{3n} + \sin^2 \frac{4\pi}{3n} + \sin^2 \frac{5\pi}{3n} + \sin^2 \frac{7\pi}{3n} + \dots \\ + \sin^2 \frac{3n-1}{6n} \pi = \frac{1}{2} n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 \frac{\pi}{3n} + \sin^3 \frac{2\pi}{3n} - \sin^3 \frac{4\pi}{3n} - \sin^3 \frac{5\pi}{3n} + \sin^3 \frac{7\pi}{3n} + \dots \\ \pm \sin^3 \frac{3n-1}{6n} \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \frac{\pi}{3n} + \sin^4 \frac{2\pi}{3n} + \sin^4 \frac{4\pi}{3n} + \sin^4 \frac{5\pi}{3n} + \sin^4 \frac{7\pi}{3n} + \dots \\ + \sin^4 \frac{3n-1}{6n} \pi = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot n \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3n} - \cos \frac{2\pi}{3n} - \cos \frac{4\pi}{3n} + \cos \frac{5\pi}{3n} + \cos \frac{7\pi}{3n} - \dots \\ \pm \cos \frac{3n-1}{6n} \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{3n} + \cos^2 \frac{2\pi}{3n} + \cos^2 \frac{4\pi}{3n} + \cos^2 \frac{5\pi}{3n} + \cos^2 \frac{7\pi}{3n} + \dots \\ + \cos^2 \frac{3n-1}{6n} \pi = \frac{1}{2} n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^3 \frac{\pi}{3n} - \cos^3 \frac{2\pi}{3n} - \cos^3 \frac{4\pi}{3n} + \cos^3 \frac{5\pi}{3n} + \cos^3 \frac{7\pi}{3n} - \dots \\ \pm \cos^3 \frac{3n-1}{6n} \pi = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{3n} + \cos^2 \frac{2\pi}{3n} + \cos^4 \frac{4\pi}{3n} + \cos^4 \frac{5\pi}{3n} + \cos^4 \frac{7\pi}{3n} + \dots \\ + \cos^4 \frac{3n-1}{6n} \pi = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot n \end{aligned} \quad (34)$$

u. s. f. Die in den Zählern auftretenden Zahlen sind alle von der Form  $3p \pm 1$ .

Gleicher Art erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{4}: \\ \sin \frac{\pi}{4n} + \sin \frac{5\pi}{4n} - \sin \frac{5\pi}{4n} - \sin \frac{7\pi}{4n} + \sin \frac{9\pi}{4n} + \dots \\ \pm \sin \frac{2n-1}{4n} \pi = 0 \\ \cos \frac{\pi}{4n} - \cos \frac{3\pi}{4n} - \cos \frac{5\pi}{4n} + \cos \frac{7\pi}{4n} + \cos \frac{9\pi}{4n} - \dots \\ \pm \cos \frac{2n-1}{4n} \pi = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{5}: \\ \sin \frac{\pi}{5n} + \sin \frac{4\pi}{5n} - \sin \frac{6\pi}{5n} - \sin \frac{9\pi}{5n} + \sin \frac{11\pi}{5n} + \dots \\ \pm \sin \frac{5n-3}{10n} \pi = 0 \\ \cos \frac{\pi}{5n} - \cos \frac{4\pi}{5n} - \cos \frac{6\pi}{5n} + \cos \frac{9\pi}{5n} + \cos \frac{11\pi}{5n} - \dots \\ \pm \cos \frac{5n-3}{10n} \pi = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{5}: \\ \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{12\pi}{5} + \dots \\ \pm \sin \frac{5n-1}{10n} \pi = 0 \\ \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5} - \cos \frac{7\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + \cos \frac{12\pi}{5} - \dots \\ \pm \cos \frac{5n-1}{10n} \pi = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

u. s. f. Wir haben uns dabei auf die ersten Potenzen der Werte beschränkt; die auftretenden Zähler haben die Form  $4p \pm 1$ ,  $5p \pm 1$  und  $5p \pm 2$ .

Ist  $n$  gerade so erhalten wie ganz analoge Gleichungen, so finden wir z. B.

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{16} + \sin^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{5\pi}{16} - \sin^2 \frac{7\pi}{16} &= 2 \\ \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3) Ganz gleicher Art lassen sich aus den Summenreihen für die Potenzen der Werte  $\frac{1}{\sin \alpha}$ ,  $\frac{1}{\cos \alpha}$ ,  $\operatorname{tang} \alpha$  und  $\cos \alpha$ , solche Gleichungen ableiten. Wir finden so, wenn wir uns auch hier auf den Wert  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  beschränken:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{3n}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{3n-1}{6n} \pi} \\ - \frac{n}{\sin \frac{\pi}{5}} - \frac{2n}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{3n}} + \dots \\ + \frac{1}{\sin^2 \frac{3n-1}{6n}} - \frac{n^2}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} - \frac{4n^2}{3} \\ \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^3 \frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin^3 \frac{4\pi}{3n}} - \frac{1}{\sin^3 \frac{5\pi}{3n}} + \dots \\ + \frac{1}{\sin^3 \frac{3n-1}{6n}} - \frac{5n^3+3n}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{2\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{5\pi}{3n}} + \dots \\ + \frac{1}{\sin^4 \frac{3n-1}{5n} \pi} - \frac{8n^4+8n^2}{9} \end{aligned} \tag{36}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{3n}} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{\cos \frac{3n-1}{6n} \pi} = 2n \\
 & \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{5\pi}{3n}} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{\cos^2 \frac{3n-1}{6n} \pi} = 4n^2 \\
 & \frac{1}{\cos^3 \frac{\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos^3 \frac{2\pi}{3n}} - \frac{1}{\cos^3 \frac{4\pi}{3n}} + \frac{1}{\cos^3 \frac{5\pi}{3n}} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \pm \frac{1}{\cos^3 \frac{3n-1}{6n} \pi} = 7n^3 + n \\
 & \text{u. s. f.}
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tang} \frac{\pi}{3n} - \operatorname{tang} \frac{2\pi}{3n} + \operatorname{tang} \frac{4\pi}{3n} - \operatorname{tang} \frac{5\pi}{3n} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \pm \operatorname{tang} \frac{3n-1}{6n} \pi = n \sqrt{3} \\
 & \operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{3n} + \operatorname{tang}^2 \frac{2\pi}{3n} + \operatorname{tang}^2 \frac{4\pi}{3n} + \operatorname{tang}^2 \frac{5\pi}{3n} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + \operatorname{tang}^2 \frac{3n-1}{6n} \pi = 4n^2 - n \\
 & \operatorname{tang}^3 \frac{\pi}{3n} - \operatorname{tang}^3 \frac{2\pi}{3n} + \operatorname{tang}^3 \frac{4\pi}{3n} - \operatorname{tang}^3 \frac{5\pi}{3n} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \pm \operatorname{tang}^3 \frac{3n-1}{6n} \pi = (4n^3 - n) \sqrt{3} \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 & \cot \frac{\pi}{3n} - \cot \frac{2\pi}{3n} + \cot \frac{4\pi}{3n} - \cot \frac{5\pi}{3n} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \pm \cot \frac{3n-1}{6n} \pi = \frac{n}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \cot^2 \frac{\pi}{3n} + \cot^2 \frac{2\pi}{3n} + \cot^2 \frac{4\pi}{3n} + \cot^2 \frac{5\pi}{3n} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + \cot^2 \frac{3u-1}{6n} \pi = \frac{4n^2}{5} - n \\
 & \cot^2 \frac{\pi}{3n} - \cot^2 \frac{2\pi}{3n} + \cot^2 \frac{4\pi}{3n} - \cot^2 \frac{5\pi}{3n} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \pm \cot^2 \frac{3u-1}{6n} \pi = (-n) \sqrt{3}
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

u. s. f.

Eine Schwierigkeit bei Aufstellung dieser Relationen tritt nur dann ein, wenn je eines der Glieder rechts und links die Form  $\infty$  annimmt. Dies ist z. B. der Fall für  $\Sigma \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , wenn  $\alpha_1 = 1$  ist. Wir erhalten dann aber

$$\Sigma \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{n^2}{\sin^2 n\alpha_1} - \frac{1}{\sin^2 \alpha_1^2}$$

Ersetzen wir hier  $\alpha$  und  $n\alpha$  durch die Werte  $\alpha = \frac{\nu^3}{3!}$  und  $n\alpha = \frac{n^3 \alpha^3}{3!}$ , so erhalten wir ohne Schwierigkeit

$$\Sigma \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{n^2 - 1}{3}$$

Da in  $\Sigma \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  mit Ausnahme der ausgeschiedenen Glieder aber alle andern paarweise gleich sind, so folgt daraus wieder:

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{n}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{n-1}{2n} \pi} = \frac{n^2 - 1}{6}$$

(Euler) (40)

Ganz ebenso finden wir noch z. B.

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{3\pi}{n}} + \dots + \frac{1}{\sin^4 \frac{n-1}{2n} \pi} \\
 & \qquad \qquad \qquad = \frac{n^4 + 10n^2 - 11}{90}
 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{3\pi}{n}} + \dots + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{n-1}{2n} \pi} \\
 & \qquad \qquad \qquad = \frac{n^2 - 3n + 2}{6} \\
 & \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{3\pi}{n}} + \dots + \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \frac{n-1}{2n} \pi} \\
 & \qquad \qquad \qquad = \frac{n^4 - 20n^2 + 45n - 26}{90}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Die Bestimmung der Werte, die zu den Exponenten, 6, 8, 10 u. s. w. gehören führt auf mehr umständliche als schwierige Rechnungen.

Ist  $n$  gerade, so erhalten wir ganz ebenso:

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{n}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{n-1}{2n}} = \frac{n^2 - 1}{6} \tag{Euler}$$

4) Wie wir weiterhin sehen ist:

$$\prod \sin \alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}} \quad \text{und} \quad \prod \cos \alpha = \frac{\cos n\alpha}{2^{n-1}}$$

Geben wir auch hier  $\alpha$  verschiedene Werte, so resultiren entsprechende Werte. Ist  $\alpha = 0$ , so wird, da  $\frac{\sin n\alpha_1}{\sin \alpha_1} = n$  ist:

$$\sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{n-1}{2n} \pi = \frac{n}{2^{n-1}} \tag{Euler} \tag{42}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{n} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{n} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{n} \cdot \dots \cdot \cos^2 \frac{n-1}{2n} \pi = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ist  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , so erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \cdot \sin \frac{5\pi}{3} \cdot \sin \frac{7\pi}{3} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots \sin \frac{3n-1}{6n} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2^n}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{3} + \dots \\ \dots \cos \frac{3n-1}{6n} \pi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} \\ \text{u. s. f.} \end{aligned} \right\} (43)$$

V. Summierung reziproker Potenzreihen.

Durch die Gleichungen (27) und (28) ist es uns möglich gemacht, eine Menge von Summenformeln für Reihen aufzustellen, deren Glieder reziproke Potenzen ganzer Zahlen sind. Gehen wir etwa von der Reihe

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{n}} - \frac{4}{\sin \frac{4\pi}{n}} - \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{n}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{7\pi}{n}} + \dots \\ \dots \pm \frac{1}{\sin \frac{3n-1}{6n} \pi} = \frac{2n}{\sqrt{3}}$$

aus, so erhalten wir aus dieser

$$\frac{\pi}{3n} + \frac{2\pi}{3n} - \frac{\pi}{3n} - \dots \pm \frac{\pi}{\frac{3n-1}{6n} \pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Lassen wir jetzt  $n$  in's Unendliche wachsen, so dürfen wir an Stelle der Sinusse die Winkel setzen und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \dots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \text{ (Euler)} \\ \text{und ebenso:} \\ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots = \frac{4\pi^2}{27} \\ \text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{10^3} - \dots = \frac{5\pi^3}{87\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{7}{7^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \dots &= \frac{8\pi^4}{729} \\ &\text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{4^6} - \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{8^6} - \frac{1}{10^6} - \dots &= \frac{17\pi^6}{2906\sqrt{3}} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Ganz ebenso können wir von den Reihen für  $\Sigma \frac{1}{\tan \alpha^p}$  ausgehen und erhalten dann für die ungeraden Exponenten die weiteren Reihen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{19^3} - \dots &= \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} \\ &\text{(Euler)} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

u. s. f.

Weiter erhalten wir z. B. noch für  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ :

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots &= \frac{\pi}{4} \quad \text{(Leibnitz)} \\ 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{3} \quad \text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots &= \frac{\pi^3}{32} \quad \text{(Euler)} \\ \frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \dots &= \\ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \dots &= \frac{\pi^4}{96} \quad \text{(Euler)} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Desgleichen erhalten wir solche Reihen, wenn wir für  $\alpha$  die Werte  $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{8}$  etc. setzen. Dieses Verfahren versagt

aber für den Wert  $\alpha = 0$ . In diesem Falle müssen wir die bereits oben gefundenen Grenzwerte benutzen oder aber können wir die sich ergebenden Reihen von der Form

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \dots$$

etwa aus den Reihen

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \dots$$

bestimmen. So folgt z. B. für

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

aus der Reihe:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{4\pi^2}{27}$$

$$\frac{4}{27} \pi^2 + \frac{1}{9} S = S, \quad S = \frac{\pi^2}{6}$$

### VI. Reihen in denen Binomialcoefficienten auftreten.

1) Wir sind bereits oben auf die merkwürdige Relation gestossen:

$$\frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{3}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \dots + \frac{\binom{p}{p}^2}{\binom{2p}{2p}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \dots (2p-1)}$$

Ausser dieser lassen sich aber noch eine Menge anderer solcher Beziehungen zwischen Binomialcoefficienten durch die oben gegebenen goniometrischen Formeln ableiten. Um die obige Relation zu erhalten, gingen wir von der Gleichung

$$\Sigma (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^p = n$$

aus. Gehen wir ebenso von der Gleichung

$$\Sigma (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^p \cdot \sin^{2q} \alpha = \Sigma \sin^{2q} \alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2q-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} \cdot n$$

aus, so finden wir, da wir  $n$  jedenfalls grösser als  $2p + 2q$  wählen können, aus der entwickelten Gleichung

$$\Sigma \sin^{2p+2q} + \binom{p}{1} \Sigma \sin^{2p+2q-2} \cdot \cos^2 \alpha + \binom{p}{2} \Sigma \sin^{2p+2q-4} \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \dots$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2q - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2p} \cdot u$$

durch Einsetzen der aus den Gl. (16) und den folgenden sich ergebenden Werten:

$$\Sigma \sin^{2p+2q} = \frac{\binom{p+q}{0}}{\binom{2p+2q}{0}} \cdot \varphi(p+q)$$

$$\Sigma \sin^{2p+2q-2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{\binom{p+q}{1}}{\binom{2p+2q}{2}} \cdot \varphi(p+q)$$

$$\Sigma \sin^{2p+2q-4} \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \frac{\binom{p+q}{2}}{\binom{2p+2q}{4}} \cdot \varphi(p+q) \text{ etc.}$$

$$\varphi(p+q) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p+2q-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2p+2q)}$$

$$\frac{\binom{p}{0} \binom{p+q}{0}}{\binom{2p+2q}{0}} + \frac{\binom{p}{1} \binom{p+q}{1}}{\binom{2p+2q}{2}} + \frac{\binom{p}{2} \binom{p+q}{2}}{\binom{2p+2q}{4}} + \dots$$

$$= \frac{(2q+2)(2q+4) \cdot \dots \cdot (2q+2p)}{(2q+1)(2q+3) \cdot \dots \cdot (2q+2p-1)} \quad (47)$$

Wird insbesondere  $p = q$  genommen, so ist

$$\frac{\binom{p}{0} \binom{2p}{0}}{\binom{4p}{0}} + \frac{\binom{p}{1} \binom{2p}{1}}{\binom{4p}{2}} + \frac{\binom{p}{2} \binom{2p}{2}}{\binom{4p}{4}} + \dots$$

$$= \frac{(2p+2)(2p+4) \cdot \dots \cdot (4p)}{(2p+1)(2p+3) \cdot \dots \cdot (4p-1)} \quad (48)$$

2) Wählen wir dagegen die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

so haben wir

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^p$$

oder

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma \cos^{2p} \alpha - \binom{p}{1} \Sigma \cos^{2p-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \binom{p}{2} \Sigma \cos^{2p-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \dots$$

Ist hier  $p$  ungerade, so ergibt sich eine Reihe, deren Glieder sich paarweise aufheben, ist dagegen  $p$  gerade, so finden wir, wenn wir anstatt  $p$  den Wert  $2q$  setzen:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2q}{0}^2}{\binom{4q}{6}} - \frac{\binom{2q}{1}^2}{\binom{4q}{2}} + \frac{\binom{2q}{2}^2}{\binom{4q}{4}} + \dots \\ = \frac{\varphi(2q)}{\varphi(4q)} = \frac{(2q+2)(2q+4) \dots (4q)}{(2q+1)(2q+3) \dots (4q-1)} \end{aligned} \quad (49)$$

3) Es ist ferner

$$2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sin^4 \alpha$$

also:

$$\Sigma \sin^{2p} \alpha = 4^p \Sigma \sin^p \alpha \cos^p \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^p$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2p}} \cdot \Sigma \sin^{2p} 4\alpha = \Sigma \sin \alpha \cdot \cos^{2p} \alpha - \binom{p}{1} \cdot \Sigma \sin^{p+2} \alpha \cdot \cos^{2p-2} \alpha \\ + \binom{p}{2} \cdot \Sigma \sin^4 \alpha \cdot \cos^{2p-4} \alpha - \dots \end{aligned}$$

und hieraus für  $p = 2q$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\binom{4q}{4} \binom{2q}{0}}{\binom{8q}{2q}} - \frac{\binom{4q}{q+1} \binom{2q}{1}}{\binom{2q+2}{8q}} + \frac{\binom{4q}{q+2} \binom{2q}{2}}{\binom{8q}{2q+4}} + \dots \\ = \frac{\varphi(8q)}{\varphi(2q)} \cdot \frac{1}{1^{4q}} = \frac{(2q+2)(2q+4)(2q+6) \dots (8q)}{(2q+1)(2q+3)(2q+5) \dots (8q-1)} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

4) Aus

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

folgt desgleichen:

$$\Sigma (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)^p = \Sigma \cos^p 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \Sigma \cos^{4p} \alpha - \binom{p}{1} \Sigma \cos^{4p-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \binom{p}{2} \Sigma \cos^{4p-8} \alpha \cdot \sin^8 \alpha - \dots \\ = \Sigma \cos^p 2\alpha \end{aligned}$$

oder für  $p = 2q$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\binom{4q}{0} \binom{2q}{0}}{\binom{8q}{6}} - \frac{\binom{4q}{2} \binom{2q}{1}}{\binom{8q}{4}} + \frac{\binom{4q}{4} \binom{2q}{2}}{\binom{8q}{8}} - \dots \\ = \frac{(4q+2)(4q+4) \dots (8q)}{(4q+1)(4q+3) \dots (8q-1)} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

5) Da

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

folgt weiter aus

$$\Sigma \cos^{2p} \alpha = \Sigma (1 - \sin^2 \alpha)^p$$

$$\Sigma \cos^{2p} \alpha = n - \binom{p}{1} \Sigma \sin^2 \alpha + \binom{p}{2} \Sigma \sin^4 \alpha - \binom{p}{3} \Sigma \sin^6 \alpha + \dots$$

oder:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \cdot \binom{p}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{p}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{p}{3} + \dots \\ \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \end{aligned}$$

Ist  $p$  gerade  $= 2q$ , so erhalten wir daraus:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{1}{2} \cdot \binom{2q}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{2q}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{2q}{3} + \dots \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2q-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (4q-2)} \cdot \binom{2q}{2q-1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Ist dagegen  $p = 2q+1$ , so wird

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \cdot \binom{2q+1}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \binom{2q+1}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ \cdot \binom{2q+1}{3} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (4q)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4q-1)} \cdot \binom{2q+1}{2q} \\ = 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4q+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 4q+2} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

6) Aus

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

folgt analoger Weise

$$\Sigma (1 + \cos 2\alpha)^p = 2^p \Sigma \cos^{2p} \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \binom{p}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{p}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{p}{6} + \dots \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{p!} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

7) Desgleichen giebt  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

$$\Sigma \cos^p 2\alpha = \Sigma (1 - 2 \sin^2 \alpha)^p$$

oder wenn wir das eine mal  $p = 2q$ , das andre mal  $p = 2q + 1$  setzen:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{1!} \binom{2q}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2!} \binom{2q}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \binom{2q}{3} + \dots \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4q-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (4q)} \\ 1 - \frac{1}{1!} \binom{2q+1}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2!} \binom{2q+1}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \binom{2q+1}{3} \\ + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

8) Multipliciren wir  $\cos 2\alpha$  mit  $(1 - \cos 2\alpha)^p$  und ebenso  $(-2 \sin^2 \alpha$  mit  $2^p \sin^{2p} \alpha$ , so erhalten wir

$$\cos 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)^p = 2^p \sin^{2p} \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \binom{p}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{p}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{p}{5} + \dots \\ - 2^p \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p)} \cdot 2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \right\} \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{p!} \cdot \frac{p}{p+1} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

9) Weitere solche Relationen ergeben sich noch aus

$$a + b \cos^2 \alpha = a \sin^2 \alpha + (a+b) \cos^2 \alpha$$

So ist z. B.

$$1 + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$$

also:

$$\Sigma (1 + \cos^2 \alpha)^p = \Sigma (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)^p$$

und hieraus:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \cdot \binom{p}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{p}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{p}{3} + \dots \\ \left\{ \frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} \cdot 2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} \cdot 2^2 + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}} \cdot 2^3 + \dots \right\} \\ \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Ebenso aus

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\
 & 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^1 \cdot \binom{p}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 2^2 \cdot \binom{p}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 2^3 \cdot \binom{p}{3} + \dots \\
 & - \left\{ \frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} \cdot 3^0 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} \cdot 3^1 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} \cdot 3^2 + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}} \cdot 3^3 + \dots \right\} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p)} \quad (58)
 \end{aligned}$$

10) Eine weitere Formel liefert uns auch

$$\begin{aligned}
 \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
 &= \frac{1}{2}(2 - \sin^2 2\alpha) = \frac{1}{2}(\sin^2 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha)
 \end{aligned}$$

Potenzieren wir mit  $p$ , so erhalten wir hieraus:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\binom{2p}{0} \binom{p}{0}}{\binom{4p}{1}} + \frac{\binom{2p}{2} \binom{p}{1}}{\binom{4p}{4}} + \frac{\binom{2p}{4} \binom{p}{2}}{\binom{4p}{8}} + \dots \right\} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (4p)} \\
 & = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{p}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \binom{p}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \binom{p}{3} + \dots \\
 & - \left\{ \frac{\binom{p}{0}^2}{\binom{2p}{0}} + 2 \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + 2^2 \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + 2^3 \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}} + \dots \right\} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{p!} \quad (59)
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \binom{p}{1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \binom{p}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \binom{p}{3} + \dots \right\} \cdot \frac{1}{2^p} \quad (\text{Gl. 57})$$

11) Zum Schlusse wollen wir noch eine Formel ableiten, die zwar keine Binomialcoefficienten enthält, aber sonst von Interesse ist.

Wie wir sahen, gelten die Gleichungen:

$$\Pi(1 - \cos 2\alpha) = 2^n \Pi \sin^2 \alpha = \frac{\sin^{2n} \alpha}{2^{n-2}}$$

$$\Pi(1 + \cos 2\alpha) = 2^n \Pi \cos^2 \alpha = \frac{\cos^{2n} \alpha}{2^{n-2}}$$

Hieraus folgt aber durch Addition:

$$\Pi(1 - \cos 2\alpha) + \Pi(1 + \cos 2\alpha) = \frac{1}{2^{n-2}}$$

oder:

$$1 + C_2 + C_4 + C_6 + \dots + C_{n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot n + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot n(n-3) - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^6} \cdot n(n-4)(n-5) \\ + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^8} \cdot n(n-5)(n-6)(n-7) - \dots \pm \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

### VII. Anwendungen auf die Ellipse.

1) Eine Ellipse möge durch die Gleichungen

$$x = a \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha$$

gegeben sein. Geben wir hierin dem Winkel  $\alpha$  nach und nach die Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , wo

$$\alpha_p = \alpha_1 + \frac{2(p-1)}{n} \pi$$

ist, so erhalten wir auf der Ellipse die Ecken eines flächengrößten  $n$ -Ecks, das ihr eingeschrieben ist. Bezeichnen wir weiter mit  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  die Entfernungen eines Punktes  $P$  von den Ecken dieses  $n$ -Ecks  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ , so erhalten wir, wenn  $p$  und  $q$  die Coordinaten des Punktes  $P$  sind, die Gleichung

$$r^2 = (p - a \cos \alpha)^2 + (q - b \sin \alpha)^2$$

und hieraus:

$$= p^2 + q^2 + a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - 2ap \cos \alpha - 2bq \sin \alpha$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma r^2 &= n(p^2 + q^2) + \Sigma (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - 2ap \cos \alpha - 2bq \sin \alpha) \\ &= n(p^2 + q^2) + \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot n \end{aligned} \quad (61)$$

Dies giebt uns aber den Satz:

„Ziehen wir nach den Ecken eines beliebigen flächengrössten „einer Ellipse eingeschriebenen  $n$ -Ecks  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  von einem „beliebigen Punkte  $P$  die Strahlen  $PA_1, PA_2 \dots PA_n$ , so ist die „Summe der Quadrate dieser Strahlen

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + \dots + PA_n^2$$

„constant, wenn das  $n$ -Eck sich ändert oder aber der Punkt  $P$  auf „einem Kreise um den Mittelpunkt der Ellipse sich bewegt. Diese „Summe wird zudem ein Minimum, wenn der Punkt  $P$  in den Mittel- „punkt der Ellipse zu liegen kommt und zwar ist sie dann immer

$$= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) *$$

\*) Ausserdem finden wir z. B. für flächengrösste der Ellipse eingeschriebene Dreiecke noch:

„Die Summe der reciproken Höhenquadrate ist constant, nämlich gleich

$$\frac{2}{3} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

„und ebenso ist die Summe der reciproken Biquadrate der Höhen constant, „nämlich gleich

$$\frac{2}{27} \left( \frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right)$$

Ebenso finden wir für die Summe der Quadrate der Ecktransversalen eines solchen Dreiecks nach den Seitenmitten die constante Summe

$$\frac{27}{8} (a^2 + b^2)$$

und für die Summe der Biquadrate dergleichen

$$\frac{243}{128} (a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4)$$

und hieraus, wenn wir diese Summe mit

$$\Sigma \frac{1}{h^2}, \Sigma \frac{1}{h^4}, \Sigma t^2 \text{ und } \Sigma t^4$$

bezeichnen. In jedem Dreieck ist

$$\left( \frac{\Sigma t^2}{\Sigma \frac{1}{h^2}} \right)^2 = \frac{\Sigma t^4}{\Sigma \frac{1}{h^4}}$$

Für  $n = 4$  erhalten wir den bekannten Satz für die Quadratsumme conjugirter Halbmesser, für  $n = 3$  gab die Erweiterung Jakob Steiner. Es ist weiterhin klar, dass wir ausser der Summe der Quadrate irgend welche cyklisch-symmetrische Functionen der Werte  $r^2$ , für gerade  $n$  bis zum Grade  $\frac{n-2}{2}$  und für ungerade  $n$  bis zur Ordnung  $n-1$  nehmen dürfen. Wir werden dann immer Constanten erhalten. Für einen beliebigen Punkt  $P$  werden aber die sich ergebenden Summen keine einfachen mehr und wir wollen uns deshalb darauf beschränken einzelne Fälle für den besondern Umstand, dass  $P$  Mittelpunkt der Ellipse ist, zu erörtern.

2) Bilden wir für den letztgenannten Fall die Summe der  $2p$ ten Potenzen der  $r$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Sigma PA^{2p} - \Sigma r^{2p} &= \Sigma (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)^p \\ &= a^{2p} \Sigma \cos^{2p} \alpha + \binom{p}{1} a^{2p-2} b^2 \Sigma \cos^{2p-2} \alpha \sin^2 \alpha + \dots \end{aligned}$$

Setzen wir hierin für  $\Sigma \cos^{2p} \alpha$  etc. die früher gefundenen Werte und für  $\varphi(p)$  zudem den Wert aus Gl. (7) ein, so haben wir aber:

„Ziehen wir von dem Mittelpunkt einer Ellipse nach den Ecken „eines einbeschriebenen flächengrössten  $n$ -Ecks Strahlen, so ist die „Summe der  $2p$ ten Potenzen dieser Strahlen für  $2p < n$  oder „ $2p < 2n$ , je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist, constant, nämlich es ist diese Summe gleich:

$$\frac{a^{2p} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} a^{2p-2} \cdot b^2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} a^{2p-4} \cdot b^4 + \dots}{1 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \frac{\binom{p}{3}^2}{\binom{2p}{6}} + \dots}$$

3) Sei gleicherweise eine Ellipse gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und ziehen wir durch den Mittelpunkt dieser Ellipse Strahlen, welche mit der  $x$ -Achse die oft genannten Winkel  $\alpha$  bilden, so erhalten wir, wenn wir  $x = \rho \cdot \cos \alpha$ ,  $y = \rho \cdot \sin \alpha$  setzten:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}$$

Hieraus erhalten wir ebenso:

$$\Sigma \frac{1}{\rho^{2p}} = \Sigma \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right)^p$$

und wie oben:

„Ziehen wir desgleichen durch den Mittelpunkt einer Ellipse  $n$  „Strahlen, die den Vollwinkel in  $2n$  gleiche Teile zerlegen, so ist „auch die Summe der  $2p$ ten reciproken Potenzen der  $n$  Halbmesser „constant, wenn  $p$  die obigen Bedingungen erfüllt, und zwar ist diese „Summe gleich:

$$\frac{1}{a^{2p} b^{2p}} \left( a^{2p} + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} a^{2p-2} \cdot b^2 + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} a^{2p-4} \cdot b^4 + \dots \right)$$

$$1 + \frac{\binom{p}{1}^2}{\binom{2p}{2}} + \frac{\binom{p}{2}^2}{\binom{2p}{4}} + \dots$$

Ist  $n = 4$ , so resultirt daraus der bekannte Satz über die Summe der reciproken Quadrate zweier senkrechten Ellipsenhalbmesser.

Wir brauchen auch hier kaum zu erwähnen, dass wir uns hierbei nicht auf die genannten Potenzsummen zu beschränken brauchen.

4) Die zuletzt erwähnte Eigenschaft lässt sich auch auf die Hyperbel ausdehnen; sie gestattet aber noch eine Erweiterung, die sich auf Kegelschnitte überhaupt bezieht. Sei die Gleichung irgend eines Kegelschnitts gegeben durch

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$$

und legen wir durch den Coordinatenursprung eine Gerade, welche mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  bildet, so erhalten wir für die Abschnitte  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , die auf dieser durch den Kegelschnitt bestimmt sind, die Gleichung:

$$(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) \rho^2 + 2(C \cos \alpha + D \sin \alpha) \rho + E = 0$$

und somit

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = -2 \frac{C \cos \alpha + D \sin \alpha}{E}$$

$$\frac{1}{e_1 \cdot e_2} = \frac{A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha}{E}$$

Nun ist z. B.

$$\frac{1}{e_1^3} + \frac{1}{e_2^3} = \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)^3 - \frac{3}{e_1 e_2} \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)$$

Ebenso ist allgemein

$$\frac{1}{e_1^p} + \frac{1}{e_2^p} = \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)^p + \frac{a_1}{e_1 \cdot e_2} \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)^{p-2}$$

$$+ \frac{a_2}{e_1^2 \cdot e_2^2} \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)^{p-4} + \dots$$

wo  $a_1, a_2, \dots$  gewisse constante Grössen sind.

Berücksichtigen wir aber das Allgemeine über die cyklisch-symmetrischen Verbindungen der Werte  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  Gesagte und geben wir jetzt  $\alpha$  die vielgenannten Werte und addiren, so folgt unmittelbar, dass für

$$\sum \left(\frac{1}{e_1^p} + \frac{1}{e_2^p}\right)$$

entweder lauter solche cyklisch-symmetrische Functionen ungeraden oder aber lauter von geradem Grade auftreten.

Daraus erhalten aber z. B.:

„Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt  $P$  in der Ebene eines „Kegelschnitts  $n$  Strahlen, welche den Vollwinkel in  $2n$  gleiche Teile „zerlegen, und bestimmt der Kegelschnitt auf diesen Strahlen der „Reihe nach die Punkte  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$ , so ist für  $p > n$  und „ $p$  ungerade alle mal

$$\frac{1}{PA_1^p} - \frac{1}{PA_2^p} + \frac{1}{PA_3^p} - \frac{1}{PA_4^p} + \dots = 0$$

und für  $p$  gerade

$$\frac{1}{PA_1^p} + \frac{1}{PA_2^p} + \frac{1}{PA_3^p} + \frac{1}{PA_4^p} + \dots = \text{const.}^*)$$

\*) Ausser diesen Sätzen lassen sich eine Reihe andere Beziehungen bei den Kegelschnitten ableiten; so z. B.:

## VIII. Anwendungen auf den Kreis.

1) Ist einem Kreise ein reguläres Vieleck  $A_1 A_2 \dots A_n$  (Fig. 2) einbeschrieben und ziehen wir von einem beliebigen Punkte  $P$  nach den Ecken dieses Vielecks Sehnen, und ziehen wir ebenso von dem  $P$  auf dem Kreise diametral gegenüber liegenden Punkte  $P_1$  solche Sehnen, so teilen diese letzteren den Vollwinkel in  $2n$  gleiche Teile und bilden also mit einem festen durch  $P_1$  gezogenen Strahl Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Ist  $PP_1 = 2r$ , so werden aber die Werte  $PA_1, PA_2, PA_3, \dots$  gleich  $2r \sin \alpha_1, 2r \sin \alpha_2, 2r \sin \alpha_3, \dots$  und wir erhalten, wenn wir das reguläre Polygon sich auf dem Kreise bewegen lassen z. B. aus den goniometrischen Relationen:

„Ziehen wir von einem beliebigen Punkte  $P$  eines Kreises nach „den Ecken eines ihm einbeschriebenen  $n$  Ecks Strahlen  $PA_1, PA_2, \dots$ , so ist die Summe der Potenzen dieser Strahlen mit ab- „wechs. Vorzeichen gleich null, wenn der Potenzexponent  $< n$  un- „gerade, und die Summe dieser Potenzen gleich einer Constanten, „wenn dieser Exponent gerade und kleiner als  $2n$  ist. So ist z. B.

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 - PA_4 + \dots \pm PA_n = 0$$

$$PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - PA_4^3 + \dots + PA_n^3 = 0$$

$$PA_1^5 - PA_2^5 + PA_3^5 - PA_4^5 + \dots + PA_n^5 = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + \dots + PA_n^2 = \frac{1}{2} n \cdot 4r^2 = 2nr^2$$

$$PA_1^4 + PA_2^4 + PA_3^4 + \dots + PA_n^4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot n \cdot 16r^4 = 6nr^4$$

$$PA_1^6 + PA_2^6 + PA_3^6 + \dots + PA_n^6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot n \cdot 64r^6$$

$$= 20nr^6 \text{ u. s. f.}$$

2) Es dürfte nicht ohne Interesse sein von diesem Satze einige specielle Fälle anzuführen:

1. Fall.  $n = 2$ . „Satz des Pythagoras“.

2. Fall.  $n = 3$ . „Zieht man von einem Punkte eines Kreises „nach den Ecken eines gleichseitigen ihm einbeschriebenen „Dreiecks Strahlen, so ist der mittlere gleich der Summe

„Ist einer Ellipse ein gleichseitiges Dreieck umschrieben, so ist die Summe „der Quadrate und die Summe der Biquadrate der Entfernungen des Ellipsenmit- „telpunkts von den Seiten der Dreiecke constant, nämlich gleich

$$\frac{2}{3}(a^2 + b^2) \text{ bzw. gleich } \frac{2}{3}(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)$$

„beiden andern. (Bekannter el. Satz.) Die Summe der „Quadrate dieser Strahlen ist dagegen gleich  $6r^2$  und die „Summe der Biquadrate gleich  $18r^4$ .

3. Fall  $n = 4$ . „Zieht man ebenso von einem Punkt des „Umfangs des einem Quadrat umschriebenen Kreises „nach den Ecken des Quadrats die vier Strahlen, so ist „die Summe der Quadrate, vierten und sechsten Potenzen „dieser Strahlen entsprechend gleich  $8r^2$ ,  $24r^4$ ,  $80r^6$  „u. s. w.“

3) Wählen wir den Punkt  $P$  insbesondere in der Mitte des Bogens über einer Seite des  $n$ -Ecks und ist  $n$  ungerade, so werden die Sehnen paarweise gleich, und eine wird gleich dem Durchmesser des Kreises, und wir haben dann:

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 - \dots \pm PA_{\frac{n-1}{2}} = \pm \frac{2r}{2} = \pm r$$

$$PA_1^3 - PA_2^3 + PA_3^3 - \dots \pm PA_{\frac{n-1}{2}}^3 = \pm \frac{(2 \cdot r)^3}{2} = \pm 4r^3$$

u. s. f.

Fällen wir aber vom Mittelpunkt des Umkreises Lote auf die Diagonalen und Seiten des Polygons, so sind dieselben entsprechend gleich  $\frac{1}{2}PA_1$ ,  $\frac{1}{2}PA_2$ , u. s. w. und wir haben also:

„Bezeichnen wir die Entfernungen der Seiten und Diagonalen „eines regulären Polygons von ungerader Seitenzahl vom Mittel- „punkt des Umkreises ihrer Grösse nach mit  $e_1, e_2, e_3 \dots e_{\frac{n-1}{2}}$  „so ist immer auch

$$e_1^{2p+1} - e_2^{2p+1} + e_3^{2p+1} - \dots \pm e_{\frac{n-1}{2}}^{2p+1} = \frac{1}{2}r^{2p+1}$$

„wenn  $2p + 1 < n$  und  $r$  der Halbmesser des Umkreises ist“.

„So ist z. B. die Entfernung der Seite des gleichseitigen einem „Kreise einbeschriebenen Dreiecks vom Mittelpunkt  $= \frac{1}{2}r$  und ebenso „der Unterschied der Entfernung der Seiten des Fünfecks und der „Diagonale gleich  $\frac{1}{2}r$ , und der Unterschied der Kuben dieser zwei „Entfernungen ist gleich dem halben Kubus des Halbmessers des „Umkreises“. \*)

---

\*) Auch hier lassen sich eine Menge anderer Formeln ableiten, ist z. B.

4) Beschreiben wir weiter um den Mittelpunkt  $O$  (Fig. 2) einen zu dem ersteren concentrischen Kreis, so schneidet dieser die Strahlen  $PA$  in  $2n$  Punkten  $P$ , die wir der Reihe nach durch  $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$  bezeichnen wollen. Es ist dann immer:

$$PB_1 + PB_{n+1} = PA$$

$$PB_1 + PB_{n+1} = \text{const.}$$

Bezeichnen wir  $PB_1$  und  $PB_{n-1}$  mit  $\sigma$  und  $\tau$ , so erhalten wir aber:

$$(\sigma^n + \tau^n) = (\sigma + \tau)^n + b_1(\sigma + \tau)^{n-2} + b_2(\sigma + \tau)^{n-1} + \dots$$

wo auch  $b_1, b_2 \dots$  constante Werte sind. Bezeichnen wir aber wieder die Strahlen  $PB_1, PB_2, PB_3, \dots$  mit  $\rho_1, -\rho_2, +\rho_3, \dots$  so finden wir hieraus und aus 1):

„Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines „Kreises  $n$  Strahlen, die den Vollwinkel in  $2n$  gleiche Teile zerlegen, und sind die Abschnitte, die dieser Kreis auf diesen Strahlen „bestimmt  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$ , so ist allemal

$$\rho_1^{2p+1} - \rho_2^{2p+1} + \rho_3^{2p+1} - \dots + \rho_{2n}^{2p+1} = 0$$

$$\rho_1^{2q} + \rho_2^{2q} + \rho_3^{2q} + \dots + \rho_{2n}^{2q} = \text{const.}$$

„wenn  $2p+1 < n$  und  $2q$  ebenfalls  $< 2n$  ist“.

Wir brauchen kaum hinzuzufügen, dass hier und in 1) an Stelle dieser Potenzsummen andere cyklisch-symmetrische Functionen treten können.

5) Sind ferner die Gleichungen

$$L_1' = x \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1 - p = 0$$

$$L_2' = x \sin \alpha_2 - y \cos \alpha_2 - p = 0$$

. . . . .

$$L_n' = x \sin \alpha_n - y \cos \alpha_n - p = 0$$

der Halbmesser eines Kreises = 1, Seite und Diagonale des einbeschriebenen reg. Fünfecks  $x$  resp.  $y$ , so gelten die Gleichungen:

$$x^3 + y^2 = 5 \quad x^4 + y^4 = 15 \quad x^6 + y^6 = 10 \quad x^8 + y^8 = 175$$

Ebenso erhalten wir für das reg. Siebeneck, wenn  $x, y, z$  Seiten und Diagonalen sind:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7 \quad x^4 + y^4 + z^4 = 21 \quad x^6 + y^6 + z^6 = 70$$

$$x^8 + y^8 + z^8 = 245 \quad x^{10} + y^{10} + z^{10} = 872 \quad x^{12} + y^{12} + z^{12} = 3234$$

u. s. w.

gegeben, so bilden die durch diese Gleichungen dargestellten Geraden ein reguläres Polygon von  $n$  Seiten. Bilden wir aus diesen Grössen  $L$  aber dadurch, dass ihre Werte in eine cyklisch-symmetrische Function der  $L$  an Stelle der  $L$  selbst gesetzt werden, so werden in der entwickelten Function die Coefficienten offenbar auch solche cyklisch-symmetrische Functionen der Werte  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  sein müssen, oder es wird für den Fall, dass die Function von kleinerem als dem  $n$ ten Grade ist, in eine solche von  $(x^2 + y^2)$  zerfallen. So wird z. B.

$$\sum L_1'^2 = \frac{n}{2} (x^2 + y^2) + np^2$$

Eine unmittelbare Folge aus diesem ist aber der Satz:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines beliebigen regulären „Polygons von ungerader Seitenzahl  $L$  einen Kreis und fällen von „einem beliebigen Punkt dieses Kreises Lote auf die Seiten des „Polygons, und bilden wir aus diesen Loten eine solche cyklisch-symmetrische Function, vom Grade  $p$ , so ist der Wert der Function „für alle Punkte des Kreises constant, wenn nur  $p < n$  bleibt. So „ist insbesondere für jeden Punkt dieses Kreises auch die Summe „aller  $p$ ten Potenzen dieser Lote constant“.

6) Um den Ursprung des Coordinatensystems möge weiter mit dem Halbmesser eins ein Kreis beschrieben sein, und von einem Punkt  $P$  der  $x$ -Achse mit der Abscisse  $x$  mögen nach den Ecken  $A$  eines dem Kreise einbeschriebenen  $n$ -Ecks Strahlen gezogen sein. Es ist dann für diese Strahlen immer die Gleichung

$$PA^2 = x^2 + 1 - 2x \cos \alpha$$

gültig, wo wir, um die verschiedenen Längen  $PA^2$  zu erhalten, dem Werte  $\alpha$  die entsprechenden Worte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  zu geben haben. Wir werden dann auch für diesen Fall eine Reihe von solchen Relationen ableiten können. So werden wir z. B die Summe der  $p$ ten Potenzen der Quadrate dieser Entfernungen bilden können. Ist  $p < n$ , so erhalten wir aber mittelst unserer goniometrischen Beziehungen zwischen  $\sum \cos^p \alpha$  wieder:

$$\sum P^{2p} = \sum ((1 + x^2) - 2x \cos \alpha)^p$$

oder :

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{PA^{2p}}{n} &= (1+x^2)^p + \frac{p(p-1)}{(1!)^2} x^2(1+x^2)^{p-2} \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{(2!)^2} x^4(1+x^2)^{p-4} \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{(3!)^2} x^6(1+x^2)^{p-6} \\ &+ \dots + 1 \end{aligned}$$

und hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\Sigma PA^{2p} = n \left\{ x^{2p} + \binom{p}{1}^2 x^{2p-2} + \binom{p}{2}^2 x^{2p-4} + \dots + 1 \right\}$$

Ändern wir jetzt die  $x$ -Achse oder mit andern Worten den Wert  $\alpha_1$ , so beschreibt der Punkt einen Kreis, und wir finden daraus:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines reg. Polygons von „ungerader Seitenzahl einen Kreis, so ist die Summe der  $2p$ ten Potenzen der Entfernungen irgend eines Punktes dieses Kreises von „den Ecken des Polygons constant, nämlich gleich

$$n \left\{ a^{2p} + \binom{p}{1}^2 a^{2p-2} \cdot b^2 + \binom{p}{2}^2 a^{2p-4} \cdot b^4 + \dots + b^{2p} \right\}$$

„wenn  $p < n$ , und  $a$  der Halbmesser des Umkreises des Polygons „ $b$ , der des beliebigen Kreises ist. Diese Summe bleibt zudem „constant, wenn der eine Kreis mit dem andern vertauscht wird. „Hat das Polygon eine gerade Seitenzahl, so bleibt der Satz mit „entsprechenden Änderungen gültig“.

Wir können diesen Satz ohne weiteres auch für den Fall  $p = n$  ausdehnen, wollen dies jedoch unterlassen.

7) Auch im letzteren Falle können wir an Stelle der Summen der Potenzen solche Beziehungen, für die Summen der Combinationen etwa, ableiten. Wir wollen uns dabei aber auch diesmal auf das Product dieser Grössen  $PA^2$  beschränken. Wir haben für dasselbe

$$\Pi PA^2 = \Pi(x^2 + 1 - 2x \cos \alpha)$$

oder entwickelt und die Werte aus den Gleichungen 21) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Pi PA^2 &= (x^2 + 1)^n - \frac{1}{1!} nx^2(x^2 + 1)^{n-2} + \frac{1}{2!} n(n-3)x^4(x^2 + 1)^{n-4} \\ &- \frac{1}{3!} n(n-4)(n-5)x^6(x^2 + 1)^{n-6} + \dots - 2^n x^n \Pi \cos \alpha \\ &= x^{2n} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ x^{2n-2} \cdot n(1-1) \\
 &+ x^{2n-4} \cdot \frac{n}{2!} ((n-1) - 2(n-2) + (n-3)) \\
 &+ x^{2n-6} \cdot \frac{n}{3!} \{(n-1)(n-2) - 3(n-2)(n-3) + 3(n-3)(n-4) \\
 &\hspace{15em} - (n-4)(n-5)\} \\
 &+ x^{2n-8} \cdot \frac{n}{4!} \{(n-1)(n-2)(n-3) - 4(n-2)(n-3)(n-4) \\
 &\hspace{10em} + 6(n-3)(n-4)(n-5) - 4(n-4)(n-5)(n-6) \\
 &\hspace{15em} + (n-5)(n-6)(n-7)\} \\
 &+ \dots - 2x^n \cos n\alpha
 \end{aligned}$$

Betrachten wir aber etwa den Coefficienten von  $x^{2n-8}$ , so treten in diesen die Zahlen 1, 4, 6, 4, 1 als Factoren vor den Klammerausdrücken auf. Die Ausdrücke in der Klammer sind aber ihrerseits die Glieder einer arith. Reihe der 3ten Ordnung, und nach einem bekannten Satze verschwindet dann notwendig die Summe. Daraus folgt aber das Theorem von Cotes mit der Moivre'schen Erweiterung

$$\underline{\Pi PA^2 = x^{2n} - 2x^n \cos n\alpha + 1, \quad \text{d. h.}}$$

für  $\alpha = 0$

$$\underline{\Pi PA^2 = (x^n - 1)^2}$$

für  $\alpha = \frac{\pi}{n}$

$$\underline{\Pi PA = x^n + 1}$$

u. s. w.

### IX. Quadratur der Fusspunktencurve des Kreises.

Wie wir in VIII. 5) sahen, können wir zwischen den Loten eines Punktes auf die Seiten eines reg. Polygons eine Menge von Relationen aufstellen, die auf Kreise als geometrische Oerter für den Punkt führen. Bilden wir so etwa die Function:

$$L_1' \cdot L_2' + L_2' \cdot L_3' + L_3' \cdot L_4' + \dots + L_n' \cdot L_1' = \text{const.}$$

so giebt uns die Entwicklung dieses Orts aber die Gleichung

$$(x^2 + y^2) \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + np^2 = \text{const.} \quad \text{siehe Gl. 30), oder:}$$

wenn wir mit  $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$  die Entfernungen eines Punktes von den Seiten des Polygons, mit

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Entfernung desselben vom Mittelpunkt des Polygons bezeichnen, dann ist immer:

$$\frac{1}{2} n \rho^2 + n p^2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_4 + \dots + e_n e_1$$

Verbinden wir die Fusspunkte der aufeinander folgenden Lote auf die Seiten aber durch gerade Linien, so erhalten wir ein Polygon das wir als Fusspunktenvieleck bezeichnen wollen. Je zwei aufeinander folgende Lote bilden aber mit einander einen Winkel  $= \frac{2\pi}{n}$  und wir erhalten daraus als Inhalt des Fusspunktenvielecks den Wert

$$F = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} (e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_3 + \dots + e_n \cdot e_1)$$

oder:

$$F = \frac{1}{4} n \cdot \rho^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{2} n p^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

oder:

$$F = \frac{1}{2} n \cdot \sin \frac{4\pi}{n} \cdot \rho^2 + \frac{1}{2} n p^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

Lassen wir die Seitenzahl des Vielecks jetzt in's unendliche wachsen, so können wir anstatt des Sinus den Winkel selbst setzen und erhalten daraus für den „Inhalt der Fusspunktencurve des Kreises für einen beliebigen Pol, der die Entfernung  $\rho$  vom Kreismittelpunkt hat,

$$F = \frac{1}{2} \rho^2 \pi + p^2 \pi$$

$p$  ist hierbei der Halbmesser des Kreises geworden“.

#### Schlussbemerkung.

Die hier entwickelten Relationen legen es nahe zu vermuten, dass auch für die regulären Polyeder analoge Beziehungen gültig sein werden. Dem ist in der Tat so. Wir erhalten z. B. wenn wir die Summen der 2<sup>ten</sup> Potenzen der Entfernungen eines Punktes  $P$  von den Ecken  $A$  eines solchen Polyeders mit  $\Sigma r^{2P}$  bezeichnen,, z. B.:

„Bewegt sich der Punkt  $P$  auf einer Kugel, deren Mittelpunkt „mit dem Mittelpunkt eines reg. Polyeders zusammenfällt, so ist für

„das reguläre Tetraeder  $\Sigma r^2$  und  $\Sigma r^4$ , für das Hexaeder und Oktaeder  $\Sigma r^2$ ,  $\Sigma r^4$  und  $\Sigma r^6$  und für das Dodekaeder und Ikosaeder  $\Sigma r^2$ ,  $\Sigma r^4$ ,  $\Sigma r^6$  und  $\Sigma r^8$  je gleich einer Constanten“.

Wie wir bei den reg. Polygonen z. B. die Ecken durch congruente gleichschenkl. Dreiecke abstumpfen könnten, ohne dass alle die oben entwickelten Relationen für die entstandenen Polygone ungültig werden, ebenso könnten wir auch entsprechend die Ecken dieser Polyeder abstumpfen und würden wir dann Relationen erhalten. Doch wollen wir uns darauf beschränken in beiden Fällen darauf hingewiesen zu haben.

Stuttgart, im März 1897.

## IV.

Eine neue Beziehung zwischen den Krümmungen  
von Curven und Flächen.

Von

**R. Hoppe.**

Die Entdeckung der Beziehung zwischen der Hauptkrümmung der allgemeinen konischen Fläche und dem Krümmungsverhältniss einer ebenso allgemeinen Curve, welche Mangeot in Soc. Math. de France Bull. XXIV. p. 98 mittheilt, ist wol von genügendem Interesse, um sie den Principien der analytischen Geometrie anzufügen. Die Beziehung ist in den fundamentalen Ausdrücken beider Grössen unmittelbar gegeben.

Die genannte Fläche wird von einem Strahle in der Richtung der Tangente der Curve erzeugt. Bezeichnen  $fg h$ ,  $f'g'h'$ ,  $lm n$  die Richtungscos. der Tangente, Hauptnormale, Binormale,  $\tau$  und  $\vartheta$  den Krümmungs- und Torsionswinkel,  $v$  den Bogen der Curve,  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die Hauptkrümmungsradien der Fläche,  $u$  den Strahl, so sind die Gleichungen der Fläche in den Parametern  $u$ ,  $v$ :

$$x = uf; \quad y = ug; \quad z = uh$$

woraus die Werte der Fundamentalgrössen

$$e_1 = \frac{\partial x^2 + \dots}{\partial u^2} - 1; \quad f_1 = \frac{\partial x^2 + \dots}{\partial u \partial v} = 0;$$

$$g_1 = \frac{\partial x^2 + \dots}{\partial v^2} = \left(u \frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2$$

$$E = p \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \dots = 0; \quad F = p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \dots = 0;$$

$$G = p \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \dots = \frac{\partial \tau \partial \vartheta}{\partial v^2}$$

leicht folgen. Hier ist  $p$  Richtungscos. der Normale  $= l$ . Da die eine Hauptkrümmung null ist, so hat man:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{e_1 G_1}{e_1 g_1 - f_1^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

Diese Gleichung spricht den Satz von Mangeot aus: „Der Hauptkrümmungsradius  $\rho_1$  variirt proportional dem Strahle  $u$ , und der Coefficient des Verhältnisses ist gleich dem Krümmungsverhältniss der Curve.“

## V.

Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises  
zu den Berührungskreisen eines Dreieckes.

Von

**Konstantin Karamata.**

Betrachtet man den Umkreis eines Dreieckes  $ABC$  als Erzeugniss zweier congruenten Strahlenbüschel, so kann man etwa die Seiten  $AC$  und  $CB$  als ein Paar zweier einander eindeutig zugeordneten Strahlen annehmen. Derselbe Kreis ist dann durch die Gleichungen

$$x + y = 180^\circ - \mu \quad (1)$$

oder

$$x + y = \mu \quad (2)$$

charakterisirt, wo  $x$  und  $y$  die veränderlichen Winkel der Dreiecke bedeuten, die durch die Zuordnung der Strahlen entstehen, und welche an dem gemeinschaftlichen Strahle  $AB$  liegen,  $\mu$  ist der dritte Winkel, welcher als Peripheriewinkel, des Kreises immer constant bleibt. Die erste Gleichung bezieht sich auf den Kreisbogen oberhalb der Sehne  $AB$  und die zweite auf den Kreisbogen unterhalb derselben Sehne. Der Radius dieses Kreises ist

$$r = \frac{a}{2 \sin \mu} \quad (3)$$

wo  $a$  die Länge der gemeinschaftlichen Seite  $AB$  ist.

2. Hälften wir sowol die inneren als auch die äusseren Winkel an der allen Dreiecken des Umkreises gemeinschaftlichen Seite  $AB$ , so geben die Durchschnitte je vierer zu einem Dreiecke gehörigen Symmetralen die Mittelpunkte der vier Berührungskreise, so dass die Frage nach dem geometrischen Orte dieser Mittelpunkte entsteht. Je zwei Symmetralen, die zu einem Innen- und dessen Aussenwinkel gehören, bilden zwei involutorisch zugeordnete Strahlen, die auf einander senkrecht stehen, wodurch wir zwei involutorische und congruente Strahlenbüschel mit dem Scheitel in  $A$  und  $B$  erhalten. Die eindeutige Zuordnung je eines Paares involutorischer Strahlen des einen Strahlenbüschels ( $A$ ) einem anderen Paare aus dem involutorischen Strahlenbüschel aus  $B$  bestimmt schon die eindeutige Zuordnung der Strahlen aus dem ursprünglichen Strahlenbüschel ( $A$ ) und ( $B$ ), deren Erzeugniss der Umkreis selbst ist, dadurch dass je einen Strahl des ursprünglichen Strahlenbüschels ein Strahlenpaar des involutorischen Strahlenbüschels begleitet. Der geometrische Ort aller Mittelpunkte der vier Berührungskreise aller Dreiecke, welche einem Umkreise eingeschrieben sind und eine Seite gemeinschaftlich haben, wird daher das Erzeugniss zweier involutorischen und congruenter Strahlenbüschel sein. Dasselbe ist im allgemeinen eine Curve 4. Ordnung, welche in diesem Falle, wie aus der folgenden Specialisirung hervorgeht, in zwei Kreise zerfällt.

3. Diese Curve können wir auf Grund der Gleichungen (1) und (2) untersuchen und werden daher die zwei Fälle, ob die Dreiecke oberhalb oder unterhalb der gemeinschaftlichen Seite in dem Umkreise liegen, unterscheiden.

## I. Die Dreiecke oberhalb der gemeinschaftlichen Seite $AB$ .

a) Die Symmetralen der inneren Winkel an der Seite  $AB$  schneiden sich im Punkte  $D$ , der ein Mittelpunkt eines Kreises, welcher alle drei Seiten eines Dreieckes von innen berührt. Der Winkel bei  $D$  ist gegeben durch  $180^\circ - \frac{x+y}{2}$  oder nach (1) durch

$$90^\circ + \frac{\mu}{2}$$

Dies aber findet für jedes Dreieck, welches dem Kreise  $K$  einge-

geschrieben ist und oberhalb  $AB$  liegt, statt, daher ist der geometrische Ort aller solcher Punkte  $D$  ein Kreisbogen  $AB$  mit dem constanten Peripheriewinkel  $90^\circ + \frac{\mu}{2}$  oberhalb der Sehne  $AB$ . Der Radius des Kreises, dem dieser Kreisbogen angehört, ist

$$\rho_1 = \frac{a}{2 \cos \frac{\mu}{2}}$$

Den Mittelpunkt und den Centriwinkel dieses Kreises  $K$  erhält man, wenn man die Senkrechte  $SP$  verlängert, bis sie den Kreis  $K$  unterhalb der Sehne  $AB$  schneidet. Der Durchschnittspunkt  $S_c'$  giebt den Mittelpunkt des Kreises  $K_c'$  und

$$AS_c' = S_c'B$$

ist dessen Radius.

b) Es sei  $D_b''$  der Schnittpunkt der Symmetrale des Aussenwinkels bei  $A$  mit der Symmetrale des Innenwinkels bei  $B$ ,  $D_a$  dagegen der Schnittpunkt der Symmetrale des Innenwinkels bei  $A$  mit der Symmetrale des Aussenwinkels bei  $B$ , so geben dieselben die Mittelpunkte zweier Berührungskreise, welche eine der als Strahlen einander zugeordneten Seiten in ihrer Verlängerung, die andere aussen berühren. Der Winkel der Symmetralen bei  $D_b$  ist  $180^\circ - \left[ \frac{180^\circ - x}{2} + x + \frac{y}{2} \right]$  und der bei  $D_a$  ist  $180^\circ - \left[ \frac{180^\circ - y}{2} + y + \frac{x}{2} \right]$  oder nach (1)

$$\frac{\mu}{2}$$

d. h. der Ort aller  $D_a$  und  $D_b$  ist ein Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel  $\frac{\mu}{2}$  oberhalb der Sehne  $AB$ , der zum Kreise  $K_c''$  mit dem Radius

$$\rho_2 = \frac{a}{2 \sin \frac{\mu}{2}}$$

gehört. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der zweite Durchschnittspunkt  $S_c''$  der Senkrechten  $SP$  mit dem Kreise  $K$ .

c) Die Symmetralen beider Aussenwinkel an  $AB$  geben als Durchschnittspunkt den Mittelpunkt  $D_b$  des Kreises, welcher die

gemeinschaftliche Seite  $AB$  aussen berührt. Der Winkel bei  $D_c$  ist  $180^\circ - \left[ \frac{180^\circ - x}{2} + \frac{180^\circ - y}{2} \right]$  oder nach (1)

$$90^\circ - \frac{\mu}{2}$$

dies ist aber der Supplementwinkel von I. a. und constant, daher liegt  $D_c$  am Kreisbogen, welcher dem von I. a. zum Kreise  $K_c'$  ergänzt.

## II. Die Dreiecke unterhalb der gemeinschaftlichen Seite $AB$ .

a) Bezeichnet man mit  $D'$ , analog nach I. a., die Mittelpunkte der Kreise, welche die Dreiecke, die unterhalb der Sehne  $AB$  liegen, innerlich berühren, so wird der Peripheriewinkel bei  $D'$  gegeben sein durch  $180^\circ - \left[ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right]$  und dies ist nach (2)

$$180^\circ - \frac{\mu}{2}$$

Der Kreisbogen, an welchem die Scheitel der obigen Peripheriewinkel liegen, ist supplementär zu dem von I. b.

b) Für die Mittelpunkte  $D_b'$  und  $D_a'$  erhalten wir, dass sie an Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel  $180^\circ - \left[ \frac{180^\circ - x}{2} + x + \frac{y}{2} \right]$  beziehungsweise  $180^\circ - \left[ \frac{180^\circ - y}{2} + y + \frac{x}{2} \right]$  d. i. nach (1)

$$90^\circ - \frac{\mu}{2}$$

liegen; daher ist das derselbe Kreisbogen wie I. c.

c) Die Mittelpunkte  $D_c$  sind Scheitel der Peripheriewinkel  $180^\circ - \left[ \frac{180^\circ - x}{2} + \frac{180^\circ - y}{2} \right]$  oder nach (2)

$$\frac{\mu}{2}$$

d. h. der Kreisbogen I. b.

Man ersieht aus dem, dass auf dem Kreise  $K_c'$  die Mittelpunkte  $D_a, D_b, D_a'$  und  $D_b'$  und auf dem Kreise  $K_c''$   $D_a, D_b, D$  und  $D_c'$  liegen. Daraus folgt, dass der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Berührungskreise der einem Umkreise eingeschriebener Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Seite haben, zwei Kreise sind, als auch dass die Curve 4. Grades, welche als Erzeugniss zweier congruenter involutorischen Strahlenbüschel erscheint, in zwei Kreise zerfällt.

4. Ebenso wie die Punkte  $A$  und  $B$  des eingeschriebenen Dreiecks  $ABC$  als Scheitel zweier congruenter Strahlenbüschel angenommen worden sind, kann man auch  $B$  und  $C$ , als auch  $C$  und  $A$  als solche betrachten; dem gemäss sind im ersten Falle  $BC$  der gemeinsame Strahl,  $BA$  und  $AC$  die einander zugeordneten Strahlen, im zweiten Falle  $CA$  der gemeinschaftliche Strahl und  $CB$  und  $BA$  die zugeordneten. Im ersten Falle erhalten wir, dass die Mittelpunkte der Berührungskreise an den Kreisen  $K_a'$  und  $K_a''$ , im zweiten Falle auf den Kreisen  $K_b'$  und  $K_b''$  liegen müssen, die man in Bezug auf die Seite  $BC$  resp.  $CA$  ebenso erhält, wie die Kreise  $K_c'$  und  $K_c''$  in Bezug auf  $AB$ ; daher werden  $K_a', K_a'', K_b'$  und  $K_b''$  analoge geometrische Oerter repräsentiren wie die Kreise  $K_c'$  und  $K_c''$ .

Nun betrachten wir das Dreieck  $ABC$  mit seinem Umkreise  $K$ , dessen Mittelpunkt  $S$  ist, für sich und fällen aus  $S$  Senkrechte auf alle drei Seiten, so erhalten wir sechs Schnittpunkte auf dem Umkreise  $S_a', S_a'', S_b', S_b'', S_c'$  und  $S_c''$ , beschreiben aus diesen einzelnen Punkten als Mittelpunkten Kreise mit Radien, welche gleich dem Abstände des Mittelpunktes von den Endpunkten der Seite, in Bezug auf welche die dazugehörige Senkrechte die Symmetrale ist ( $S_aB = S_aC, S_a'B = S_a'C, S_c'C = S_b'A, S_b''C = S_b''A, S_c'A = S_c'B$  und  $S_c'C = S_a''B$ ), so erhalten wir sechs Kreise  $K_a', K_a'', K_b', K_b'', K_c'$  und  $K_c''$ , von denen sich je vier in den drei Ecken des Dreiecks schneiden und je drei in vier anderen Punkten  $D, D_a, D_b$  und  $D_c$ , welche zugleich auch die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks sind.

Dies ist leicht einzusehen sowol für einen dieser Punkte, als auch für die anderen. Nehmen wir z. B. den Punkt  $D$  an, so muss derselbe als Mittelpunkt der Berührungskreise, welche die dem Kreise  $K$  oberhalb der gemeinsamen Seite  $AB$  eingeschriebenen Dreiecke innerlich berühren, auf dem Kreisbogen  $AB$  des Kreises  $K_c$

liegen; analog für die Seite  $BC$  liegt derselbe auf den Kreisbogen  $BC$  des Kreises  $K_a'$ , und in Bezug auf die Seite  $CA$  auf dem Kreisbogen  $CA$  des Kreises  $K_b'$ . Für ein und dasselbe Dreieck kann dieses nur dann stattfinden, wenn sich diese drei Kreisbögen in einem und demselben Punkte  $D$  schneiden.

Aehnlich beweist man, dass  $D_a$  der Schnittpunkt der Kreise  $K_a'$ ,  $K_b''$  und  $K_c''$ ,  $D_b$  der Schnittpunkt der Kreise  $K_a''$ ,  $K_b'$  und  $K_c'$   $D_c$  der Schnittpunkt der Kreise  $K_a''$ ,  $K_b'$  und  $K_c'$  ist.



VI.

Desargues' Verdienste um die Begründung der  
projectivischen Geometrie.

Von

**Stanislaus Chrzaszczewski**, stud. math.

München.

---

E i n l e i t u n g.

Wol nahezu 2000 Jahre beherrschten die Bücher des Euklid, Archimedes und Apollonius das Interesse der Geometer, ohne dass wesentliche Fortschritte in dem Aufbau der Kegelschnittstheorie gemacht worden wären. Immer noch bot diese Wissenschaft den Charakter einer speciellen, immer noch fehlte ihr der der Allgemeinheit. Ellipse, Parabel und Hyperbel wurden so behandelt, als ob sie unter sich fremdartige Gebilde wären.

Der erste, der eine Darstellung der oben genannten Curven von einheitlichem Gesichtspunkt aus mit grossem Geschick unternahm, ist Girard Desargues, indem bei ihm wesentlich das eine Bestreben zu Tage tritt, nur lagengeometrische Beziehungen, die doch für jeden beliebigen Kegelschnitt gelten, d. h. die projectivischen Eigenschaften derselben aufzustellen. Metrische Relationen werden von ihm nur ganz nebenher gestreift.

Der Verfasser hofft nun einen Beitrag zur Kenntniss der Geschichte der projectivischen Geometrie zu liefern, wenn er in der vorliegenden Abhandlung in erster Linie eine eingehende Darstellung der Desargues'schen Verdienste gibt, indem diese bisher in keinem

mathematisch-geschichtlichen Werke in der ihnen gebührenden Weise betrachtet worden sind. So konnte z. B. im 2. Bande von Herrn Cantors Vorlesungen, die ja das ganze Gebiet der Mathematik umfassen, selbstverständlich nur eine cursorische und allgemeine Schilderung der Desargues'schen Arbeiten Raum finden und es musste eine genauere Auseinandersetzung derselben mit Recht einer Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

In den bekannten französischen Arbeiten von Chasles, Poudra und St. M. Marie sind die Ausführungen bezüglich Desargues theils unvollständig, theils auch nicht einwandfrei dargestellt. Wieder andere Werke enthalten zu wenig, als dass es auch nur annähernd möglich ist, sich über Desargues' Leistungen eine genügende Vorstellung zu bilden.

Somit bleibt! jedem, der die in Frage stehenden Verdienste Desargues' um die projectivische Geometrie kennen lernen will, nur die äusserst mühsame Lectüre der Originalwerke desselben übrig, namentlich des „Brouillon project.“ Volle zwei Jahrhunderte galt bekanntlich dies merkwürdige Buch für verloren. Erst im Jahre 1845 fand Chasles durch einen glücklichen Zufall eine Abschrift desselben, die im Jahre 1679 von De La Hire gefertigt worden war.

Da es aber nicht Aufgabe des Historikers ist, die wissenschaftliche Tätigkeit einer hervorragenden Persönlichkeit für sich allein zu betrachten, so müsste der Verfasser auch die Bedeutung Desargues' und seine Zeit, sowie den Einfluss seiner Leistungen auf die spätere Entwicklung der projectivischen Geometrie in's Auge fassen. Dabei ergaben sich enge und interessante Beziehungen zu Pascal, Fermat und De La Hire.

---

Die vorliegende Abhandlung ist ein Auszug der von der allgemeinen Abteilung der K. bayr. technischen Hochschule in München 1896 mit vollem Preis gekrönten Arbeit des Verfassers über Desargues.

---

## § 1.

## Geometrische Grundgedanken.

Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass bereits Desargues diejenigen Fundamentalbegriffe ausdrücklich eingeführt hat, die man heutzutage als die geometrischen Grundgebilde erster Stufe bezeichnet.

Wir fassen seine Gedanken folgendermassen kurz zusammen:

1) Mehrere Geraden, die alle durch einen festen Punkt  $O$  gehen, bilden eine „ordonnance de droites, der Punkt  $O$  heisst: „but de l'ordonnance.“<sup>1)</sup>

Ebenso bildet man eine Schar von Ebenen, die durch eine feste Gerade  $O$  gehen, eine „ordonnance de plans,“ die feste Gerade  $O$  heisst: „Aissien de l'ordonnance.“

3) Wenn durch verschiedene Punkte einer Geraden  $O$  eine Serie von Geraden hindurchläuft, so heisst jene Gerade  $O$ , auf welcher die verschiedenen Punkte „noeuds“ liegen, „tronc.“

4) Eine Schar von parallelen Geraden ist als ein Strahlenbüschel zu betrachten, dessen Centrum im Unendlichen liegt. Oder: Einen Punkt  $O$  mit dem unendlich fernen Punkt einer gegebenen Geraden verbinden heisst: durch den Punkt  $O$  zu derselben eine Parallele legen<sup>2)</sup>

5) Eine Schar von parallelen Ebenen ist als ein Ebenenbüschel zu betrachten, dessen Achse im Unendlichen liegt.

6) Jede Gerade geht nach 2 Seiten in das Unendliche und schliesst sich dort. Jede Gerade kann als Kreis betrachtet werden, dessen Mittelpunkt in das Unendliche gerückt ist.

1) Vergleiche: Oeuvres de Desargues par Poudra deux tomes, Paris 1864. Wir citiren dieses Werk mit Herrn Cantor stets als Desargues I. oder II. Die Begriffe finden sich in der angegebenen Weise auf Seite 104—107 erklärt.

2) Desargues I. pag. 205.

3) Ebenda. I. pag. 107, 108, 224.

Dass die Desargues'sche Vorstellung über den Parallelismus in jener Zeit völlig neu war, dürfte wol daraus zur Genüge hervorgehen, dass sich Descartes in einem Briefe an Desargues in günstigem Sinne darüber äussert, und hätte ersterer die Angelegenheit wol ignorirt, wenn die fragliche Ansicht bereits in der damaligen Zeit üblich gewesen wäre. Lettres de Descartes, Poudra t. II. pag 134.

Eine Hauptschwierigkeit beim Studium der Werke Desargues besteht darin, dass derselbe nicht nur eine Reihe neuer Begriffe, sondern auch eine Menge neuer Bezeichnungen für dieselben einführte, die aber ebensowenig, wie diejenigen Vietas sich forterhielten, weshalb wir im folgenden nur die notwendigsten anführen und gebrauchen werden.

Weit wichtiger ist es zu betonen, dass Desargues die Tragweite der von ihm neu aufgestellten Begriffe vollständig erfasst und mit ihnen zu operiren versteht, indem er in seiner Involution durch eindeutige Zuordnung der Elemente einer Punktreihe den Grundgedanken der projectivischen Geometrie zum ersten Male verwirklicht. Seine Betrachtungsweise der Involution wollen wir im folgenden Paragraphen nur insoweit klarzulegen versuchen, als sie zum Verständniss der darauf aufgebauten Kegelschnittstheorie notwendig ist.

## § 2.

### Die Theorie der Involution.

#### (a) Definition des Arbres.<sup>2)</sup>

Trägt man auf einer Geraden, von einem festen Punkte  $O$  aus, Streckenpaare  $(Oa, Oa_1 - 8b, Ob_1, Oc - 9c_1)$  ab, deren Producte constant sind, so bilden die Punkte  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  einen Arbre.

Hieraus ersieht man, dass Desargues' Definition des Arbres identisch ist mit der heutigen Bestimmung der Involution, wenn man vom Involutionenmittelpunkt  $O$  ausgeht, welchem Desargues den Namen: souche beilegt.

Dabei wird jedoch von vornherein bestimmt, dass alle Streckenpaare  $Oa, Oa_1$  u. s. w. entweder nach verschiedenen Seiten oder nach der gleichen Seite von  $O$  abgetragen werden. Darnach erhält man beziehungsweise einen Arbre mit eingeschlossen- oder getrennt liegender Souche. In dem ersten Falle greifen die Strecken

---

Wenn man die Frage aufwirft, wie denn Desargues zu seiner so neuen und fruchtbaren Anschauung über den Parallelismus gekommen ist, muss man wol zur Beantwortung derselben auf die Perspective vom Jahre 1636 zurückgreifen. Desargues I. pag. 80 u. ff.

1) Desargues I. pag. 112.

entsprechender Punkte  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  übereinander, im zweiten Falle liegen sie getrennt. 1)

(b) **Metrische Relationen für die einzelnen Strecken eines Arbre.**

Desargues' Bestreben geht nun dahin, eine Gleichung zu finden, welche zwischen den einzelnen Entfernungen der verschiedenen Punkte eines Arbre statthat, um den Punkt 0 (d. h. den Involutionenmittelpunkt) zu eliminiren. Dabei gewinnt er folgende Gleichungen:

$$\text{I. } \frac{0a}{0c} = \frac{0c_1}{0a_1} = \frac{ac_1}{a_1c}$$

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{0c_1}{0a} = \frac{a_1c_1}{ac}$$

Durch Division folgt

$$\text{II. } \frac{0a}{0a_1} = \frac{ac_1 \cdot ac}{a_1c_1 \cdot a_1c}$$

und analog

$$\frac{0a}{0a_1} = \frac{ab_1 \cdot ab}{a_1b_1 \cdot a_1b}$$

1) La souche est engagée entre . . . Desargues I, pag; 115, 116.

La souche est degagée entre . . . " " ;  
 les deux noeus de chacune des couples  $aa_1$  se trouvent meslez aux deux noeus des autres couples:  $bb_1 - cb_1$ . Desargues I, pag. 116  
 les deux noeus de chacune des couples  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  se trouvent des meslez des deux noeus de chacune des autres couples. Desargues I, pag. 116.

2) Beweis:

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{0c_1}{0a} = \frac{0a_1 + a_1c_1}{0c + ca}$$

$$\frac{0a_1}{0a_1 + a_1c_1} = \frac{0c}{0c + ca}$$

und hieraus

$$\frac{0a_1}{0a_1 + a_1c_1 - 0a_1} = \frac{0c}{0c + ca - 0c}$$

d. h.

$$\frac{0a_1}{0c} = \frac{a_1c_1}{ac}$$

ebenso die andere Gleichung.

Die Vergleichung liefert:

$$\text{III. } \frac{ab \cdot ab_1}{a_1b \cdot a_1b_1} = \frac{ac \cdot ac_1}{a_1c \cdot a_1c_1}$$

Dadurch ist offenbar der Arbre unabhängig von der Souche dargestellt und ergibt sich folgende

(6) Definition der Involution, unabhängig vom Mittelpunkt.

Wenn drei Punktepaare  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  so auf einer Geraden liegen, dass die einzelnen Punkte gegenseitige Entfernungen besitzen, die der Gleichung III. Genüge leisten, so nennt man diese Punkt-lage eine Involution. <sup>1)</sup> Vorausgesetzt bleibt aber immer noch die Verteilung der Punkte, wie sie unter  $\alpha$  hervorgehoben worden ist. Die daraus sich ergebende strenge Einteilung in zwei verschiedene Involutionen fällt mit der modernen Unterscheidung einer elliptischen und hyperbolischen Involution völlig zusammen, und später werden wir auch noch der parabolischen begegnen. Auf die Involutionen lassen sich sämtliche Gesetze des Arbre, wie sie in den Gleichungen I. und II. niedergelegt sind, anwenden.

Wir brauchen kaum noch hinzuzufügen, dass die Gleichung III. genau dieselbe ist, wie diejenige, die heutzutage die Involution durch die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse definiert.

(d) Sätze über die Involution.

1) Eine Involution erscheint gegeben, wenn man 2 Punktepaare,  $aa' - cc_1$  derselben kennt. <sup>2)</sup>

Denn wenn 0 die Souche ist, so kann man dieselbe vermitteltst folgender Gleichungen eindeutig <sup>3)</sup>

$$\frac{0a \ a_1 c_1}{c \ a_1 c} \quad \text{und} \quad 4a - Oc = ac$$

1) Involution und Arbre decken demnach denselben Begriff. Es besteht zwischen ihnen nur insofern ein formaler Unterschied, als die Bezeichnung Arbre immer nur dann angewendet wird, wenn die Strecken vom Involutionenmittelpunkt ausgezählt werden.

2) Desargues I. pag. 121.

3) . . . „la souche 0 est donnée de position . . .“ Desargues I. pag. 121.

2) Der Involutionenmittelpunkt entspricht dem unendlich weiten Punkt der Punktreihe. <sup>1)</sup>

3) Bis hieher führt Desargues seine Untersuchungen für beide Involutionen gemeinsam durch. Zur Beantwortung der Frage aber: Wo liegen diejenigen Punktepaare einer Involution, die von der Souche gleichen Abstand haben? sieht er sich genötigt, in der Untersuchung eine Trennung vorzunehmen.

Bezeichnen  $x$  und  $y$  diejenigen Punkte, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, so hat man im Falle der Punktlage nach Figur 1a:

$$Ox = Oy = \sqrt{Oa \cdot Oa_1}$$

(wenn  $aa_1$  ein gewöhnliches Punktepaar vorstellt.)

Hiebei betont Desargues ganz scharf, dass der Punkt  $x$  zwei nicht zusammengehörige Punkte  $bc_1$ , der Punkt  $y$  die Punkte  $b_1 c$  repräsentirt, und bezeichnet sie daher als *noeus moyens simples*. <sup>2)</sup> (Siehe Figur 2a). Durch Specialisirung der allgemeinen Involutionen-gleichung erhält man folgende Relation:

$$\frac{a_1 x}{a_1 y} = \frac{ay}{ax}$$

Der Fall nach Figur 1b liefert wiederum

$$Ox = Oy = \sqrt{Oa \cdot Oa}$$

wobei Desargues ausdrücklich hervorhebt, dass  $x$  das Paar  $bb_{11}$ ,  $y$  das Paar  $ec_1$  repräsentirt. Dementsprechend bezeichnet er sie richtig als „*noeus moyens doubles*“ <sup>3)</sup>, kennt somit die Doppelpunkte der hyperbolischen Involution. (Siehe Figur 2b.)

Ist  $aa_1$  ein gewöhnliches Punktepaar, so geht bei Einführung der Punkte  $xy$  in die allgemeine Involutionenbedingung die sehr wichtige Relation hervor:

$$\frac{ax}{ay} = \frac{a_1 x}{a_1 y}$$

Dieselbe drückt aus, dass ein gewöhnliches Punktepaar  $aa_1$  von den Punkten  $xy$ , also von den Doppel-

1) Desargues I. pag. 127,

2) Desargues I. pag. 123.

3) Desargues I. pag. 124.

punkten harmonisch getrennt wird, was oben durchaus nicht der Fall war.

(e) Die Vierpunktinvolution. Indem Desargues die besondere Wichtigkeit des soeben behandelten Falles anerkennt, nennt er die Punktelage  $aa_1 - xy$  (Fig. 2 b) eine Vierpunktinvolution und entwickelt eine Reihe von Sätzen, die bei derselben statthaben, eine vollständige Theorie der harmonischen Punkte. Als solche nennt er auch die Punkte  $x$  und  $y$  ein Paar entsprechende, und bezeichnet in der Erkenntniss, dass  $ay$  mit  $aa_1$  gleichberechtigt erscheint, die Mitte  $p$  von  $aa_1$  als die reciproke Souche der Vierpunktinvolution. Man hat dann neben

$$\begin{aligned} Ox \cdot Oy &= Oa \cdot Oa_1 = Ox^2 = Oy^2 \\ \text{auch noch} \quad pa \cdot pa_1 &= px \cdot py = pa^2 = pa_1^2 \end{aligned}$$

Aus den sich hieran anschliessenden Sätzen heben wir nur folgende hervor:

1) Eine Vierpunktinvolution ist gegeben, wenn man ein Punktepaar und den einen Punkt des anderen Paares kennt. <sup>1)</sup>

2) Die Endpunkte einer Strecke bilden mit dem Mittelpunkt derselben und dem unendlich fernen Punkt der Geraden, auf welcher sie liegt, eine Vierpunktinvolution. <sup>2)</sup>

3) Hat man eine Vierpunktinvolution ( $aa_1 - xy$ ), deren Souche  $O$  ist, so sind damit sofort zwei neue allgemeine Involutionen gegeben. Nämlich

$$\begin{aligned} xy - Oa_1 &\text{ mit Souche } a \text{ und} \\ xy - Oa &\text{ mit Souche } a_1 \end{aligned}$$

Desargues beschliesst die Theorie seiner Punktinvolution mit einem Satze, der für später von besonderer Wichtigkeit ist und deshalb angeführt werden möge.

4) Hat man auf einer Geraden drei Punktepaare einer gewöhnlichen Sechspunktinvolution ( $aa_1 - bb_1 - cc_1$ ), sowie ein weiteres Punktepaar  $xy$ , das mit den beiden ersten Paaren ( $aa_1 - bb_1$ ) je eine Vierpunktinvolution bildet, so gilt dies auch bezüglich des letzten Paares  $cc_1$ .

1) Desargues I. pag. 134.

2) Desargues I. pag. 136.

Hieran schliesst sich eine ebenso vollständig durchgeführte Behandlung der

(f) Strahleninvolution, <sup>1)</sup> welche folgendermassen definiert wird: Laufen durch drei Punktepaare einer Involution drei Strahlenpaare, so hat man eine Strahleninvolution (*ramé d'un arbre*). Auf diese Definition folgt direct der Hauptsatz von der Invarianz der Involution bei Projection:

„Jede beliebige Gerade wird von den 6 Strahlen des Büschels nach 6 Punkten einer Involution geschnitten.“ <sup>2)</sup>

Infolge der umständlichen Schreibweise Desargues' gestaltet sich der Beweis dieses wichtigen Satzes, von dem man sagen kann, dass er das Fundament der vorliegenden Kegelschnittstheorie ist, breit und unübersichtlich; wir glauben denselben deshalb mitteilen zu müssen, weil er historisch interessant ist und ein beredtes Zeugnis von dem geometrischen Scharfsinn unseres Mathematikers ablegt.

Zunächst ist der Satz für den speciellen Fall ohne weiteres klar, „dass das Büschelcentrum im Unendlichen liegt“ d. h. wenn die einzelnen Strahlen parallel laufen. <sup>3)</sup> Für den allgemeinen Fall jedoch ist folgende Figur (Fig. 3) zu entwerfen: Die Involution  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  wird durch das Strahlenbüschel  $K$  projicirt, und die beliebige Gerade  $M$  liefert auf den Strahlen derselben drei weitere Punktepaare  $AA_1 - BB_1 - CC_1$ , von denen nachzuweisen ist, dass sie eine Involution bilden.

Zum Beweise zieht nun Desargues die Hilfslinie  $cC_1$ , welche auf den Strahlen bezüglich der Punkte  $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1$  liefert.

Nunmehr wird auf die folgenden Dreiecke der Transversalensatz des Menelaos angewendet. Das Dreieck  $cCC_1$  von der Transversale  $KB_1$  geschnitten, liefert die Gleichung: <sup>4)</sup>

$$1) \quad \frac{B_1C}{B_1C_1} = \frac{KC}{Kc} \cdot \frac{\beta_1c}{\beta_1C_1}$$

Das nämliche Dreieck  $cCC_1$  von  $KB$  geschnitten, ergibt:

1) Desargues I. pag. 146, 147.

2) Desargues I. pag. 147.

3) Desargues I. 147.

4) Desargues, der diesen Satz dem Ptolemäus zuschreibt, da er ihn jedenfalls aus dem *Almagest* kennt, wendet ihn, den Griechen folgend, beständig in der obigen Form, der der zusammengesetzten Verhältnisse, an.

$$2) \quad \frac{BC}{BC_1} = \frac{Kc}{Kc} \cdot \frac{\beta c}{\beta C_1}$$

1) und 2) verbunden, ergeben:

$$I) \quad \frac{BC \cdot B_1C}{BC_1 \cdot B_1C_1} = \frac{\beta c \cdot \beta_1 c}{\beta C_1 \cdot \beta_1 C_1} \cdot \left(\frac{Kc}{Kc}\right)^2$$

Schneidet man das Dreieck  $cc_1C_1$  bzw. durch die Transversalen  $Kb_1$  und  $Kb$ , so erhält man:

$$3) \quad \frac{\beta_1 c}{\beta_1 C_1} = \frac{b_1 c}{b_1 c_1} \cdot \frac{Kc_1}{KC_1}$$

$$4) \quad \frac{\beta c}{\beta C_1} = \frac{bc}{bc_1} \cdot \frac{Kc_1}{KC_1}$$

und hieraus:

$$II \quad \frac{\beta c \cdot \beta_1 c}{\beta C_1 \cdot \beta_1 C_1} = \frac{bc \cdot b_1 c}{bb_1 \cdot b_1 c_1} \cdot \left(\frac{Kc_1}{KC_1}\right)^2$$

I. und II. verknüpft, liefern:

$$A. \quad \frac{BC \cdot B_1C}{BC_1 \cdot B_1C_1} = \left(\frac{Kc \cdot Kc_1}{Kc \cdot KC_1}\right)^2 \cdot \frac{bc \cdot b_1 c}{bc_1 \cdot b_1 c_1}$$

In dieser Gleichung A. erscheint die Buchstabengruppe  $CC_1BB_1$  besonders ausgezeichnet. Durch Auszeichnung der Gruppe  $aa_1AA_1$  entsteht bei der Beibehaltung der Hilfslinie  $cC_1$  die Gleichung:

$$B. \quad \frac{AC \cdot A_1C}{AC_1 \cdot A_1C_1} = \left(\frac{Kc \cdot Kc_1}{Kc \cdot KC_1}\right)^2 \cdot \frac{ac \cdot a_1 c_1}{ac_1 \cdot a_1 c_1}$$

Indem nun nach Voraussetzung:

$$\frac{ac \cdot a_1 c}{ac_1 \cdot a_1 c_1} = \frac{bc \cdot b_1 c}{bc_1 \cdot b_1 c_1}$$

ist, ergibt sich aus A. und B. die Beziehung:

$$\frac{AC \cdot A_1C}{AC_1 \cdot A_1C_1} = \frac{BC \cdot B_1C}{BC_1 \cdot B_1C_1}$$

Damit ist aber gemäss Hauptgleichung III. auf Seite 124 die Behauptung bewiesen.

Beachtungswert scheint uns auch noch die Bemerkung Desargues<sup>1)</sup>

1) Desargues I. pag. 151.

Läuft die schneidende Transversale  $M$  parallel zu einem der projicirenden Strahlen, etwa  $K\alpha$ , so schneidet der entsprechende Strahl  $K\alpha_1$  die Gerade  $M$  in der Souche, der auf  $M$  entstehenden Involution.

Von dieser Behandlung der allgemeinen Sechsstrahleninvolution geht er nun auf die Theorie der

(g) Vierstrahleninvolution <sup>1)</sup> über, die dadurch entsteht, dass man eine Vierpunktinvolution ( $aa_1 - xy$ ), also eine harmonische Punktlage, von einem Centrum  $K$  aus projicirt. Wir nennen dieselbe heutzutage ein harmonisches Strahlenbüschel. (Fig. 4.)

Von diesem Teile der Desargues'schen Untersuchungen erwähnen wir der Kürze halber nur die einzelnen Sätze, obgleich noch manches Interessante bei der Beweisführung zur Sprache kommen könnte.

Heissen in Analogie mit dem Früheren die Strahlen  $\alpha\alpha_1 - \xi\eta$  entsprechende, so hat man:

Läuft die Transversale  $M$  parallel zu einem Strahl  $\alpha_1$ , so halbirt in der Vierstrahleninvolution der entsprechende  $\alpha$  die von den beiden anderen Strahlen  $\xi$  und  $\eta$  auf ihr ausgeschnittene Strecke. Dieser Satz gilt auch umgekehrt. <sup>2)</sup>

Auch das Rechtwinkelpaar einer Vierstrahleninvolution findet Erwähnung in dem Satze: (Fig. 5.)

Stehen zwei entsprechende Strahlen aufeinander senkrecht, so halbirt jeder derselben den Winkel zwischen dem anderen Strahlenpaar. Auch wird die Umkehrung angeführt.

Zieht man in einem Dreieck  $ABC$  durch die Mitte  $M$  von  $AB$  eine beliebige Gerade  $MY$ , welche  $BC$  in  $Z$ ,  $AC$  in  $Y$  trifft, zieht man ferner  $CN \parallel ZX \parallel AB$ , so bilden  $AC - XY$  und  $MN - YZ$  je eine Vierpunktinvolution.

Mit diesen verschiedenartigen Sätzen haben wir die Mittel gewonnen, um im folgenden Paragraphen die eigenartige Behandlung der Kegelschnittstheorie schildern zu können, die Desargues geschaffen hat.

1) Desargues I. pag. 152.

2) Man beachte die kühnen Schlussweisen des Desargues im Beweise für die Umkehrung. Weil die Mitte  $m$  auf  $\alpha$  conjugirt ist zu dem unendlich fernem Punkte  $m_1$  auf  $\alpha_1$ , so muss  $M \parallel \alpha_1$  laufen.

## § 3.

**Kegelschnitttheorie.**

(a) **Definition des Kegels.** Der Kegel entsteht durch Bewegung einer Geraden  $G$ , die, stets durch einen festen Raumpunkt  $S$  gehend, längs einer gegebenen Kreislinie dahingleitet. Liegt  $S$  im Unendlichen, so entsteht der Cylinder, <sup>1)</sup> liegt  $S$  in der Ebene des Kreises, so erhält man einen Strahlenbüschel.

(b) **Die einzelnen Kegelschnitte.** Eine Ebene  $E_0$ , die durch die Spitze des Kegels geht, trifft denselben entweder in einem Punkte oder in 2 Geraden, die in eine einzige zusammenfallen, wenn  $E_0$  die Fläche berührt. Jede andere Ebene  $E$  trifft den Kegel nach einem Kegelschnitt. Und zwar:

Läuft die Kegelerzeugende  $G$  während ihrer Bewegung um den Kreis niemals parallel zu  $E$ , so erhält man eine im Endlichen sich schliessende Schnittfigur <sup>2)</sup>, die Ellipse; läuft  $G$  während der Bewegung um den Kreis nur einmal parallel zu  $E$ , so ist das Schnittergebniss eine im Unendlichen sich schliessende Curve <sup>3)</sup>, die Parabel; läuft  $G$  während der Bewegung um den Kreis zweimal parallel zu  $E$ , so erhält man als Schnittfigur eine sich im Unendlichen in zwei congruente, gegeneinandergekehrte Hälften spaltende Figur, die Hyperbel. <sup>4)</sup> Der Cylinder wird im allgemeinen nach einer Ellipse geschnitten.

Diese aus einer völlig neuen Auffassungsweise entstandenen Sätze charakterisiren die drei Kegelschnittsarten nach der Anzahl ihrer unendlichfernen Punkte.

Die Kegelschnitte werden von je einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten. Fallen dieselben in einen zusammen, so berührt die Gerade den Kegelschnitt.

Nicht viel verschieden von der oben geschilderten Entstehungs-

1) „Le cylindre et le cone sont deux sougenres d'un surgenre, ici nommé sealeau . . .“ Desargues I. pag. 159.

2) une ligne courbe, laquelle à distance finie rentre et repasse en soi-même. Desargues I. pag. 161.

3) „une ligne courbe laquelle à distance infinie rentre et repasse en soi-même —“ Desargues I. pag. 162.

4) „une ligne courbe, laquelle à distance infinie se mipartit en deux égales et semblables moitiés . . .“ Desargues I. pag. 162.

weise der Kegelschnitte ist diejenige, von welcher Oldenburg in einem Briefe an Leibniz berichtet <sup>1)</sup> Nach ihm soll sich dieselbe in den bis heute noch nicht wieder aufgefundenen Leçons des Tenèbres von Desargues befinden. Sie lautet kurz zusammengefasst:

Projicirt man vom Mittelpunkte einer Kugel aus einen kleinen Kreis derselben auf eine ihrer Tangentialebenen, so erhält man entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder endlich eine Hyperbel, jenachdem der zur genannten Ebene parallele Hauptkreis der Kugel den kleinen Kreis nicht trifft, denselben berührt oder endlich in zwei Punkten schneidet.

Nach diesen einleitenden Definitionen der Kegelschnitte wendet sich Desargues zur Aufstellung jenes Hauptsatzes, der heute noch seinen Namen trägt:

(c) Der Satz des Desargues. Derselbe wird folgendermassen ausgesprochen: Laufen durch vier Punkte einer Ebene drei Paare von Geraden, sowie auch ein beliebiger Kegelschnitt, so schneidet irgend eine Transversale diese Figur nach vier Punktepaaren einer Involution.

Der Beweis zerfällt in drei Abteilungen und wird im wesentlichen mit Hilfe des Transversalensatzes von Menelaos geführt. (Fig. 7.)

Das Dreieck  $pp_1f$  wird bzhw. von den Transversalen  $bc$ ,  $de$ ,  $bd$  und  $ec$  geschnitten, und es ergeben sich sofort folgende Gleichungen:

$$1) \quad \frac{ip}{ip_1} = \frac{cf}{cp_1} \cdot \frac{bp}{bf}$$

$$2) \quad \frac{i_1p}{i_1p_1} = \frac{df}{dp_1} \cdot \frac{ep}{ef}$$

$$3) \quad \frac{gp}{gp_1} = \frac{cf}{cp_1} \cdot \frac{ep}{ef}$$

$$4) \quad \frac{g_1p}{g_1p_1} = \frac{bp}{bf} \cdot \frac{df}{dp_1}$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1) und 2), sowie 3) und 4) folgt unmittelbar:

---

1) Leibnizens Mathematische Schriften, ed. J. C. Gerhardt. B. I. Abt. I pag. 40.

$$\text{I.} \quad \frac{ip \cdot i_1p}{i_{p_1} \cdot i_1p_1} = \frac{gp \cdot g_1p_1}{gp_1 \cdot g_1p_1}$$

d. h. doch die drei Punktepaare  $ii_1 - gg_1 - pp_1$  bilden eine Involution <sup>1)</sup>).

Liegen nun die vier, ursprünglich willkürlichen Punkte: *bede* auf einem Kreise, so folgt durch wiederholte Anwendung des Potenzsatzes:

$$\frac{ip \cdot i_1p}{i_{p_1} \cdot i_1p_1} = \frac{cf \cdot df}{bf \cdot ef} \cdot \frac{bp \cdot ep}{cp_1 \cdot dp_1} = \frac{bp \cdot ep}{cp_1 \cdot pp_1} = \frac{lp \cdot l_1p}{lp_1 \cdot l_1p_1}$$

und daraus:

$$\frac{ip \cdot i_1p}{i_{p_1} \cdot i_1p_1} = \frac{lp \cdot l_1p}{lp_1 \cdot l_1p_1} = \frac{gp \cdot g_1p}{gp_1 \cdot g_1p_1}$$

Diese Gleichungen definieren die drei Involutionen

$$(ii_1 - ll_1 - pp_1), \quad (gg_1 - ll_1 - pp_1) \quad \text{und} \quad (ii_1 - gg_1 - pp_1)$$

welche aber zusammenfallen müssen, weil sie je zwei Punktepaare gemeinsam haben.

Um nun endlich den Satz für einen beliebigen Kegelschnitt nachzuweisen, bedient sich Desargues der Methode der Projection, die hier zum ersten Male auftritt und zeigt, dass er den Charakter der Projectivität seiner Involution (d. h. die Invarianz) vollkommen richtig erkannt hat. Auch hebt er die Wichtigkeit und Verwendbarkeit dieser seiner Methode ausdrücklich hervor und kommt noch an anderer Stelle darauf zu sprechen. <sup>2)</sup>

Dieser wichtige Satz bildet nun für Desargues das Fundament zu einer vollständigen Theorie von

(d) Pol und Polare, die bisher immer de La Hire zugeschrieben wurde. Pol und Polare werden durch die bekannte harmonische Eigenschaft, die, wie wir schon wissen, Desargues als die Vierpunktinvolution bezeichnet, sowol in Bezug auf ein Geradenpaar als auch in Bezug auf einen Kegelschnitt definiert.

1) Dieser specielle Fall des Satzes für das Vierseit ist bekanntlich in seiner Umkehrung bereits von Pappus im 130ten Satze des 8. Buches der *Collectiones math.* angegeben worden. Jedoch tritt statt der obigen achtgliedrigen Bedingungsgleichung die sechsgliedrige auf.

2) Desargues I. pag. 176 ff., pag. 493.

Was den Beweis dafür anlangt, dass die sämtlichen harmonischen Punkte zum Pol  $f$  (bei Desargues but de l'ordonnance) bezüglich der Schnittpunkte mit den eben genannten Figuren auf einer Geraden, der Polaren des Punktes (traversale d'une ordonnance au but  $f$ ) liegen, so wird derselbe zunächst für das Geradenpaar  $(AA_1)$  geliefert und hierauf vermittelt des Desargues'schen Satzes auf einen beliebigen Kegelschnitt ( $K$ ) ausgedehnt. (Fig 8.)

Um die Polare des Punktes  $f$  in Bezug auf das Geradenpaar  $(AA_1)$  zu construiren, zieht Desargues zwei beliebige Strahlen  $fc$  und  $fd$ , welche auf  $A$  und  $A_1$  bzw. die Punkte  $cd$  und  $be$  liefern. Der Schnittpunkt  $m$  der Diagonalen  $ce$  und  $bd$  mit  $n$ , dem gemeinsamen Punkt von  $A$  und  $A_1$ , verbunden, liefert die verlangte Polare. Die Verbindungslinie  $fm$  schneidet  $A$  und  $A_1$  in den Punkten  $x$  und  $y$ .

Wendet man in Bezug auf das Dreieck  $nxy$  den Satz von Menelaos an, indem man  $bd - ce - de - bc$  bzw. als schneidende Transversalen ansieht, so hat man:

$$1) \quad \frac{mx}{my} = \frac{dx}{dn} \cdot \frac{bn}{by}$$

$$2) \quad \frac{mx}{my} = \frac{cx}{cn} \cdot \frac{cn}{cy}$$

$$3) \quad \frac{fx}{fy} = \frac{dx}{dn} \cdot \frac{en}{ey}$$

$$4) \quad \frac{fx}{fy} = \frac{cx}{cn} \cdot \frac{bn}{by}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\left(\frac{mx}{my}\right)^2 = \left(\frac{fx}{fy}\right)^2 \quad \text{d. h.} \quad \frac{mx}{my} = \frac{fx}{fy} \quad 1)$$

Liegen aber hiernach  $mf$  und  $xy$  harmonisch, so muss auch ein beliebiger Strahl  $fk - ii_1$  vier harmonische Punkte liefern.

Geht nun durch die vier Punkte  $bzde$  ein ganz beliebiger Kegelschnitt, so ist nach Desargues die bereits construirte Linie auch die Polare in Bezug auf den Kegelschnitt. Denn auf dem beliebigen Strahl  $fl$ , der den Kegelschnitt in  $l$  und  $l_1$  trifft, liegt die Involution  $(ii_1 - gg_1 - ll_1)$ , deren Punktepaare  $(ii_1 - gg_1)$  von  $f$  und  $k$  harmo-

---

1) Man erkennt sehr leicht, dass dieser bekannte Satz ein specieller Fall von dem unter lit. c. dieses Paragraphen gegebenen Satze über das Vierseit ist.

nisch getrennt werden. Die beiden letztgenannten Punkte sind somit die Doppelpunkte obiger Punktreihe, so dass sie auch zum Punktepaar  $ll_1$  harmonisch liegen müssen, was aber zu beweisen war.

Daran schliesst sich sofort eine Reihe von

(e) Sätzen über Pol und Polare, von denen wir die wichtigsten hervorheben wollen:

1) Es findet sich der Hinweis, dass die Linie  $mf$  (Figur 8) Polare zu  $n$ , die Linie  $nf$  Polare zu  $m$  sei. <sup>1)</sup>

2) Diejenigen Geraden, welche den Pol  $f$  mit den Schnittpunkten  $s$  und  $t$  der Polaren mit dem Kegelschnitt verbinden, berühren denselben. <sup>2)</sup>

3) Die Pole der Geraden eines Büschels liegen auf der Polaren seines Centrums und umgekehrt. <sup>3)</sup>

4) Die Polaren der Punkte einer Geraden laufen durch den Pol derselben. <sup>4)</sup>

Es ist kaum nötig darauf hinzuweisen, dass die beiden letztgenannten Sätze das Princip der reciproken Polaren enthalten.

5) Wie ferner Desargues jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts eine einzige Polare bezüglich desselben zuordnet <sup>5)</sup> und auch umgekehrt jeder Geraden nur einen Pol, so weist er auch jeder Geraden eine ganz bestimmte Involution <sup>6)</sup> zu, nämlich die der Punkte  $m$  und  $n$ , also die Involution der conjugirten Pole. Lässt man  $n$  längs der Geraden  $ns$  variiren, so bekommt man immer andere und andere Lagen der Punkte  $(mn)$ . Und zwar gilt hierüber folgendes:

( $\alpha$ ) Jedem Punkte  $f$  ausserhalb eines Kegelschnitts gehört eine Polare zu, die den Kegelschnitt in zwei Punkten trifft, und die dieser gemäss (5) zugewiesene Involution ist hyperbolisch <sup>7)</sup>.

1) Desargues I. pag. 18d.

2) Desargues I. pag. 192.

3) Desargues I. pag. 191.

4) Desargues I. pag. 191.

5) Desargues I. pag. 192.

6) Desargues I. pag. 194, 195.

7) „l'arbre est d'espèce à souche dégagée.“ Desargues I. pag. 195.

( $\beta$ ) Jedem Punkte im Innern eines Kegelschnitts gehört bezüglich desselben eine Polare zu, die denselben nicht schneidet, und die dieser gemäss (5) zugewiesene Involution ist elliptisch <sup>1)</sup>

$\gamma$ ) Der Pol einer Tangente des Kegelschnitts bezüglich desselben liegt im Berührungspunkt, und die der Tangente gemäss (5) zugewiesene Involution ist parabolisch. <sup>2)</sup>

Desargues hebt also die parabolische Involution ausdrücklich als eine dritte Anordnung der involutorischen Punktlage hervor.

6) (Siehe Figur 9.) Jeder Strahl ( $s, s_1', s_1'', \dots$ ) eines Strahlenbüschels  $f$  trifft einen Kegelschnitt in Punkten ( $ab, a'b', a''b''$ ) so, dass ihre Verbindungsstrahlen mit einem festen Punkte  $p$  auf dem Kegelschnitt eine Strahleninvolution ( $\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' \dots$ ), bilden<sup>3)</sup> Und die Umkehrung:

7) (Fig. 9.) Die sich entsprechenden Strahlen einer Involution ( $\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' \dots$ ), deren Centrum ( $p$ ) auf einem Kegelschnitt liegen, schneiden denselben in Punkten: ( $ab - a'b' - a''b'' \dots$ ), deren Verbindungslinien stets durch einen festen Punkt laufen. <sup>4)</sup>

8) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts wird von Desargues als Pol der unendlich fernen Geraden definiert. <sup>5)</sup>

(f) Ausdehnung der Polarentheorie auf den Raum. Desargues begnügt sich aber nicht damit eine vollständige Polarentheorie der Kegelschnitte zu entwerfen, sondern er dehnt dieselbe sogar auf den Raum aus, indem er die Polarebene (plan

1) „l'arbre est d'espace à souche engagée“. Desargues I. pag. 193.

2) „Cependant on remarquera qu'entre les deux espèces de conformation, d'arbre, il y en a une troisième, en la quelle chaque couple de nous toujours un est uni à la souche, . . . et cette espece de conformation d'arbre est mitoyenne entre autres les deux, à souche engagée et à souche dégagée“. Desargues I. pag. 194. 195.

3) Desargues I. pag. 194.

4) Die Sätze 6) und 7) führten später, wieder neu gefunden, zur Betrachtung der krummen involutorischen Punktreihen.

5) „Quand en un plan, aucun des points d'une droite n'y est à distance finie, cette droite y est à distance infinie. D'autant qu'en un plan le point nommé centre d'une coupe de rouleau, n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnance de droites, il ne doit être jamais ici parlé de centre de coupe de rouleau.“ Wir glaubten auf Grund dieser Stelle (Desargues I. pag. 166, 168) den Satz (8) in der angegebenen Weise formuliren zu dürfen. Vergleiche auch Des. I. pag. 168 ff.

traversal des droites d'une ordonnance) in Bezug auf eine Kugel nach Analogie der Verhältnisse in der Ebene definiert.<sup>1)</sup> Ja, es wird sogar der folgende Satz deutlich ausgesprochen: Bewegen sich verschiedene Geraden, die alle je einen festen Punkt in einer gegebenen Ebene besitzen, um eine Kugel, so sind die Ebenen der dabei durchlaufenen Berührungskreise die Polarebenen zu jenen festen Punkten; überdies gehen diese alle durch den Pol der ursprünglich gegebenen Ebene.

Dazu fügt Desargues nachfolgende merkwürdige Stelle:

„Eine ähnliche Eigenschaft findet sich auch in Bezug auf andere Körper, die zur Kugel in dem nämlichen Verhältniss stehen, wie die Ovale oder Ellipsen zum Kreise,<sup>2)</sup> aber es wäre hierüber zuviel zu sagen, wenn man nichts dabei übersehen wollte.“<sup>2)</sup>

Darin scheint zum mindesten eine Vorahnung der Collineationsverwandtschaft zwischen den Flächen zweiten Grades und der Kugel angedeutet zu sein.<sup>3)</sup>

(g) Eine wichtige Anwendung, die Desargues von der Polarentheorie macht, und auf welche wir später noch zurückkommen werden, wollen wir hier nicht übergehen. Es handelt sich darum, den Mittelpunkt, ein paar conjugirter Durchmesser, sowie auch die Tangenten und Asymptoten eines Kegelschnitts zu ermitteln, der dadurch entsteht, dass eine gegebene Kegelfläche mit kreisförmiger Basis durch eine beliebige Ebene  $E$  geschnitten wird. Desargues verfährt folgendermassen: Durch die Spitze  $f$  des Kegels legt er eine Hülfebene  $E_0$  parallel zu  $E$ , welche die Kreisebene in  $S_0$  trifft, während  $E$  dieselbe in  $S$  schneiden möge. Der Pol von  $S_0$  bezüglich des Kreises sei  $p$ , und die ihr gemäss Satz 5 auf Seite 134 zugehörige Involution:  $(mn, m'n'; m''n''$  u. s. w.) (Fig. 10a). Die Verbindungslinie der Kegelspitze  $f$  mit dem Pol  $p$  ist Achse eines

1) Desargues I. pag. 214.

2) Desargues I. 124, 215.

3) Aehnlich drückt sich Poncelet, ebenfalls anschliessend an die Ebene in seinem *Traité des propriétés projectives des figures* t. I. pag. 125 aus, indem er sagt: Uebrigens lässt sich die Theorie der reciproken Polaren ohne Mühe auf Raumfiguren ausdehnen, indem man den Kegelschnitt durch eine beliebige Fläche zweiten Grades ersetzt, ich trete aber nicht in den Gegenstand dieses Capitels ein, das uns zu lange aufhalten würde u. s. w. u. s. w.

Ebenenbüschels,<sup>1)</sup> die auf der gegebenen Ebene  $E$  den Mittelpunkt des entsprechenden Kegelschnitts ausscheidet; Ebenenpaare des Büschels, welche durch zwei conjugirte Punkte der Involution auf  $S_0$  gehen, schneiden in  $E$  ein Paar conjugirter Durchmesser aus<sup>2)</sup>, deren Endpunkte in der einfachsten Weise bestimmt werden können. Auch die Tangenten und Asymptoten, welch' letztere bei dieser Gelegenheit wol zum ersten Male als Durchmesser und Tangenten in den unendlich weiten Punkten betrachtet werden, lassen sich mit Hülfe der construirten Involution ermitteln, wenn auch die Construction der letzteren Elemente nicht besonders scharf angegeben ist.

Um in der gegebenen Figur 10a, die in Orthogonalprojectionen den Vorzug illustriren soll, einen Punkt des entstehenden Kegelschnitts zu finden, ziehen wir die Gerade  $mp$ , legen durch diese und die Kegelspitze  $f$  eine Ebene, die den Kegel in dem Dreieck  $\delta\beta f$  trifft; die Schnittlinie  $Mb$  derselben Ebene mit der gegebenen Ebene  $E$  (Spuren  $S$  und  $T$ ) muss parallel laufen zu  $mf$ , welche doch in der Hülfebene  $E$ , (Spuren  $S_0 T_0$ ) liegen muss;  $Mb$  schneidet das Dreieck in zwei Punkten des gesuchten Kegelschnitts. Dieselbe Construction mit dem Punkte  $n$  ausgeführt, liefert zwei neue Punkte  $ac$ .  $ac$  und  $bd$  sind zugleich conjugirte Durchmesser des sich ergebenden Schnittgebildes,  $\mu$  ist sein Mittelpunkt.

Lösen wir nun aus der Figur 10a die Figur 10b heraus, und denken uns den ganzen Vorgang in einer Ebene ausgeführt, so steht eine Construction vor uns, die nach der bisherigen Ansicht von De La Hire im Jahre 1673 in seinen Planiconiques zum ersten Male gegeben wurde und die Transformation des Kreises in einen Kegelschnitt leistet; dass De La Hire durch obigen Gedankengang zu dieser gelangt ist, dürfte wol ausser allem Zweifel sein.

Die übrigen noch im Brouillon enthaltenen Sätze aus der Kegelschnittstheorie beanspruchen nicht das Interesse, wie die angeführten, da sie teilweise kaum verständlich gefasst sind. Dagegen wollen wir noch den bekannten

---

1) et la droite menée par le sommet du rouleau et ce but  $p$  (F) est l'essieu de l'ordonnance de plan etc. Des. I. pag. 196.

2) Aus dieser Construction lässt sich unmittelbar der Satz ablesen, dass die conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts eine Involution bilden, indem dieselben, wie aus der Figur ersichtlich ist, eine Punktinvolution projectiren, oder durch einen involutorischen Ebenenbüschel ausgeschnitten werden.

(h) Satz über perspectivisch liegende Dreiecke <sup>1)</sup> erwähnen, welcher sich in der von Bosse herausgegebenen Perspective des Desargues befindet. Er lautet: Wenn die Geraden (siehe Figur 11)  $HDa$ ,  $HEb$ ,  $cED$ ,  $lga$ ,  $lfb$ ,  $abc$ ,  $HLL$ ,  $DgK$ ,  $EfK$  sich irgend wie im Raume oder in einer und derselben Ebene gegenseitig durchschneiden, so müssen auch die Punkte  $cfg$  auf einer Geraden liegen. Desargues gibt zunächst einen Beweis für den Raum, wie er heute noch allgemein üblich ist; für die Ebene gelingt derselbe durch dreimalige Anwendung des Satzes von Menelaos, indem die Dreiecke  $DHK$ ,  $KEH$  und  $DHE$  mit den Transversalen  $lga$ ,  $lfb$  und  $abc$  geschnitten werden. Man hat dann:

$$1) \quad \frac{gD}{gK} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{lH}{lK}$$

$$2) \quad \frac{fK}{fE} = \frac{lK}{lH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

$$3) \quad \frac{cD}{cE} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{gD}{gK} \cdot \frac{fK}{fE} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}$$

und in Verbindung mit (3) ergibt sich:

$$\frac{cD}{cE} = \frac{gD}{gK} \cdot \frac{fH}{fE}$$

oder

$$\frac{cD}{gD} = \frac{fK}{gK} \cdot \frac{cE}{fE}$$

somit liegen nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos die drei Punkte  $c$ ,  $f$ ,  $g$  in einer Geraden.

Auch findet sich der Hinweis, dass in solchen Fällen, wo Sätze für den Raum aufgestellt werden, dieselben ohne weiteres eine Deutung in der Ebene zulassen. <sup>2)</sup>

1) Desargues I. pag. 413.

2) . . . et l'on peut discourir de leurs propriétés sur l'une comme sur l'autre, et par ce moyen se passer de celle du relief en lui substituant celle d'un seul plan." Desargues I. pag. 415.

## § 4.

## Rückblick.

Blicken wir noch einmal auf die geführte Untersuchung zurück, so ergeben sich folgende Hauptresultate: Desargues baut bereits die Geometrie im wesentlichen auf der Betrachtung der Grundgebilde erster Stufe auf, wie es nachmals, unabhängig von ihm, J. Steiner getan hat. Wohl findet er nicht die allgemeine projectivische Beziehung dieser Grundgebilde, aber ersetzt dieselbe durch die Involution, die er in ihrer vollständigen Allgemeinheit erkennt und bis in's Detail behandelt. Diese führt ihn zu einer eingehenden Behandlung der Polarentheorie, <sup>1)</sup> die ihrerseits auf den Satz vom Kegelschnitt, dem ein Vierseit eingeschrieben ist, gestützt wird. Ausserdem ist Desargues vollständig vertraut mit dem Begriff der Invarianz geometrischer Eigenschaften bei Projection, und diese allein ermöglicht ihm eine Behandlung der Kegelschnittstheorie, wie sie in einer solchen Allgemeinheit nie vor ihm gegeben worden war. Dafür spricht auch eine Stelle in den Acta Eruditorum vom Jahre 1685 pag. 400, welche lautet: „Desarguesius primus sectiones conicas universali quadam ratione tractare, ac propositiones multas sic enuntiare coepit, ut quaecunque sectio subintelligi posset.“

## §. 5.

## Desargues' Stellung in seiner Zeit.

Selten wol hat ein Gelehrter so widersprechende Beurteilung von Seiten seiner Zeitgenossen erfahren müssen, wie gerade Desargues.

Von den Grossen angestaunt und bewundert, ward er zu gleicher Zeit von den mittelmässigen Mathematikern, welche in ihrer conservativen Haltung jeder Neuerung in der Geometrie feindlich gegenüberstanden, mit Hass verfolgt, mit Beleidigungen und Schmähungen überschüttet, die bald Desargues jede Lust nahmen, seine eigenartigen gedankenreichen Arbeiten fernerhin zu veröffentlichen. So

---

1) Wir glauben im Vorhergehenden bestimmt nachgewiesen zu haben, dass Desargues tatsächlich der Schöpfer der Polarentheorie ist, die bisher dem De La Hire zugeschrieben wurde. Vergl. z. B. Dr. Lehmann; De La Hire und seine Sectiones Conicae, Abhandlung zum Jahresbericht des Kgl. Gymnasiums zu Leipzig auf das Schuljahr Ostern 1887 bis Ostern 1888, ebenso Ostern 1889 bis 1890; Cantor B. III. pag. 123.

erklärt es sich auch, dass er von dem Jahre 1644 an keine Schrift mehr erscheinen liess.

Schon sein erstes Werk, das über die Perspective handelte, hatte alsbald nach seiner Veröffentlichung gewissen Leuten Veranlassung gegeben, gegen die von Desargues auf diesem Gebiete eingeführte Neuerung der Coordinatenmethode <sup>1)</sup> zu protestiren.

So wurden mehrere Schriften verfasst, die zum Teil den Namen ihres Urhebers trugen, zum Teil anonym herausgegeben wurden. Ein heftiger Streit entbrannte und wurde mit grosser Leidenschaft auf beiden Seiten geführt.

Als Beispiel hierfür sei erwähnt, dass Desargues einem gewissen Curabelle die ungeheure Summe von 100000 Livres anbot, falls es ihm (Desargues) nicht gelingen sollte nachzuweisen, dass der Inhalt der Curabelle'schen Streitschrift zum Teil falsch, zum Teil verleumderisch sei.

Schliesslich wurden dann alle gegen Desargues erschienenen Schmähchriften in einem einzigen Bande vereinigt, der den Titel trug: „Abis charitable sur les diverses oeuvres et feuilles volantes du sieur Girard Desargues Lyonnais Paris 1642, chez Melchior Tavernier.“ <sup>2)</sup> und heute zu den grossen Seltenheiten gehört.

In dieser Sammlung befindet sich auch der Brief eines gewissen Beaugrand, Sekretär des Königs, der sich in seinem ersten Teil mit dem Brouillon Desargues', in seinem zweiten Teile aber mit Studien über den Schwerpunkt beschäftigt, indem er an eine Arbeit des letzteren über Mechanik anknüpft, die dem Kegelschnittswerk beigegeben war, heute aber nicht mehr vorhanden ist.

Der Eindruck, den man nun beim Lesen des Beaugrand'schen Briefes gewinnt, ist der, dass es diesem Secretär weniger darum zu

1) Bekanntlich beruht die Desargues'sche Methode, Gegenstände perspectivisch abzubilden einfach darin, dass die einzelnen Ecken derselben punktweise vermittelt ihrer Coordinaten dargestellt werden.

2) Uns lag ein Exemplar der Münchner Hof- und Staatsbibliothek mit der Signatur: 20. Arch. libr. 47<sup>m</sup><sub>6</sub> vor.

3) Als Beweis für Beaugrands Unfähigkeit zur Beurteilung mathematischer Dinge, führen wir nur folgende Tatsachen an: In dem oben bezeichneten Brief zeichnet er die Einführung der Doppelpunkte einer Involution für völlig überflüssig da dies alle jene selbst machen können, die die ersten Elemente des Euklid studirt haben“. In seiner Geostatik behauptet der Secretär, dass das Gewicht eines Körpers, der sich dem Erdmittelpunkte nähert, abnehmen müsse.

tun war an dem Brouillon sachliche Kritik zu üben, wozu er auch keineswegs die Fähigkeit besass, <sup>1)</sup> als vielmehr durch eine spöttisch gehaltene Bemängelung der von Desargues allerdings zahlreich eingeführten Begriffe, wie Souche oder Involution, das Werk verächtlich zu machen und als das Product eines nicht mehr vollständig zurechnungsfähigen Mannes hinzustellen. Aehnlichen Charakter tragen alle übrigen gegen Desargues gerichteten Schmähschriften an sich.

Während nun die wichtigsten Originalarbeiten des grossen Gelehrten verloren gingen und erst nach langer Zeit teilweise wieder aufgefunden werden konnten, haben sich diese Ergüsse des Hasses und der Eifersucht bis auf den heutigen Tag erhalten.

Und gerade sie haben, wenn sie auch zu Desargues's Lebzeiten seinem Ruhm manchen Abbruch taten, dazu beigetragen, die Nachwelt auf den Gelehrten aufmerksam zu machen und manche seiner Entdeckungen zu überliefern.

Im Gegensatze zu diesen unerquicklichen Anfeindungen, die Desargues über sich ergehen lassen musste, steht die wichtige Tatsache, dass die Geistesheroen jener Zeit ihm ihre Hochachtung nach jeder Richtung hin bekundeten.

So schreibt z. B. Fermat an den P. Mersenne, der bekanntlich mit allen bedeutenden französischen Gelehrten jener Epoche in Beziehungen stand:

„Ich achte den Herrn Desargues sehr und zwar deshalb, weil er der selbständige Erfinder seiner Kegelschnittstheorie ist. Sein Büchlein, das, wie Sie sagen, als Jargon <sup>1)</sup> gilt, ist mir sehr verständlich und geistreich erschienen.“

Ein nicht minder günstiges Zeugnis stellt ihm Carcavy in einem Briefe vom 22. Juni 1656, der an Huyghens gerichtet ist, aus: <sup>2)</sup>

„Es ist wahr, dass Desargues einen Styl hat, der von dem der anderen Geometer etwas abweicht. Da er aber die Werke derselben nur wenig gelesen hat, seine Gedanken ihm allein entsprungen sind, und er die Dinge allgemeiner fasst, wie die anderen Geometer, so muss man ihn entschuldigen und aus dem wenigen, das er uns gegeben hat, Nutzen ziehen, der freilich ein grösserer sein würde, wenn Desargues seine Gedanken in anderer Reihenfolge entwickelt hätte.“

1) So drückt sich Beaugrand in seinem Briefe aus.

2) Ch. Henry: Intermédiance de Carcavy, de Fermat, Pascal et Huyghens. Bull. di Bibliographia et di storia, B. Boncompagni tome 17. S. 330.

Statt noch mehr solcher Stellen anzuführen, weisen wir darauf hin, dass Desargues mit dem berühmten Philosophen und Mathematiker Descartes in inniger freundschaftlicher Beziehung stand, die hauptsächlich in der wissenschaftlichen Tüchtigkeit des ersteren ihre Begründung hatte. Auch versäumt Descartes keine Gelegenheit diese seine Hochschätzung Desargues gegenüber auszusprechen.<sup>1)</sup> Das Bewusstsein der Wertschätzung von Seite solcher Männer, die wie z. B. Descartes nur äusserst sparsam in der Erteilung von Lobsprüchen waren, musste den Gelehrten entschädigen für die vielen Angriffe und Beleidigungen anderer.

Wie es bei neu auftretenden Gedanken immer geht, so waren es eben nur wenige, die Desargues' Ideenflug zu folgen vermochten. Der wesentlichste Grund hiefür liegt wol in seinen Werken selbst, denn sie unterscheiden sich sowol im Styl als auch im Inhalt von allen mathematischen Schriften jener Zeit.'

Obwol seit Vieta eine bedeutende Besserung der algebraischen Bezeichnungs- und Rechnungsweise eingetreten war bediente sich dennoch Desargues beständig derjenigen der Alten, da er diese allein kannte. Auch Decartes hat ihm diesen Mangel vorgehalten, indem er an seinen Freund schreibt:<sup>2)</sup>

„Um Ihre Beweise einfacher zu gestalten, wäre es nicht übel angebracht Termen und arithmetische Rechnungsweisen anzuwenden, sowie ich das in meiner Geometrie gemacht habe. Denn es gibt viel mehr Leute, welche wissen, was Multiplication ist, als solche, die verstehen, was ein zusammengesetztes Verhältniss bedeutet.“

Die Klarheit, namentlich des Kegelschnittswerkes, wurde aber auch dadurch wesentlich beeinträchtigt, dass weder eine Einteilung nach Capiteln vorhanden, noch eine logische Aufeinanderfolge in den Entwicklungen eingehalten ist.

Ausserdem mussten die scheinbar willkürlichen Definitionen, wie z. B. bei der Involution, und die nicht immer genügend begründete Notwendigkeit der Einführung neuer Gedanken und Betrachtungen einen nicht sehr geschulten Leser abschrecken.

Ferner hatte zwei Jahre vor dem Erscheinen des Brouillon Descartes seine Geometrie herausgegeben, die die Aufmerksamkeit der damaligen Mathematiker sehr bald von den Methoden ablenkte, die

---

1) Vergleiche z. B. Descartes' Briefwechsel.

2) Lettres de Descartes, Edit Cousin, pag. 88. tome 8. Brief vom 4. Januar 1639. Aehnlich pag. 214, tome 8.

durch die griechischen Mathematiker des goldenen Zeitalters angebahnt und seit etwa zwei Jahrtausenden verfolgt worden sind.

Doch ganz ohne fruchtbaren Einfluss blieben Desargue's neue Gedanken keineswegs. Vielmehr befanden sich unter seinen Schülern Männer, die nach ihren Geistesigenschaften befähigt waren, die so neuen Anregungen ihres Meisters aufzunehmen und weiter auszubilden. Ein solcher war Abraham Bosse, der später auf der Pariser Hochschule die Perspective und den Steinschnitt lehrte und 1666 lieber seiner Professur entsagte, als dass er der Methode des Desargues abgeschworen hätte, wie das von ihm verlangt wurde. Auch De La Hire, der Vater des berühmten Gelehrten gleichen Namens, von dem wir noch weiter unten sprechen werden, befand sich im Schülerkreis unseres Mathematikers. Der bedeutendste unter allen aber war Blaise Pascal der Jüngere. Geboren im Jahre 1623, fand er mit 16 Jahren jenen berühmten Satz, der nach ihm den Namen trägt.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass dieser Satz den Studien bei Desargues entsprungen ist, indem Pascal selbst sagt, <sup>1)</sup> „dass er, soweit es ihm möglich war, versucht habe, Desargues nachzuahmen.“

In seinem *Essay pour les coniques* finden wir die Definition des Strahlenbüschels mit derselben Bezeichnung wie bei Desargues (*ordre de lignes, ordonnance de lignes*) und ausserdem den Satz vom Kegelschnitt dem ein Viereck eingeschrieben ist, aufgeführt. Ueber dieselbe Schrift äussert sich Descartes wie folgt: <sup>2)</sup>

„Ich habe auch den *Essay* des jungen Pascal über die Kegelschnitte bekommen, und bevor ich noch die Hälfte desselben durchgelesen hatte, erkannte ich, dass Pascal von Desargues gelernt hat, was er mir auch sofort einräumte.“

Auch hält er es an einer anderen Stelle für nicht glaubwürdig, dass ein 16 jähriger Jüngling einen so wichtigen Satz, wie der Sechsecksatz ist, habe finden können.

In der Tat ist es leicht möglich, aus zwei Sätzen des Desargues den von Pascal abzuleiten. Wir teilen diesen Beweis mit, da vielleicht Pascal einen ähnlichen Weg eingeschlagen hat. (Siehe Fig. 12.)

Das Viereck 1264 mit den Diagonalen 24 und 16 werde von der Transversale  $G$  in den Punkten  $aa_1 - bb_1$  geschnitten. Eben-

1) *Essay pour les Coniques* pag. 184. tome III.

2) *Lettres de Descartes* pag. 201. tome 8, Brief vom 11. Juni 1640.

dieselbe trifft einen beliebigen (Kegelschnitt, der durch 1, 2, 4, 6 gelegt ist, in den Punkten  $cc_1$ .

Nun bilden aber die Paare  $aa_1 - bb_1 - cc_1$  eine Involution, die wir von 4 auf den Kegelschnitt projiciren wollen, und erhalten dadurch die Punktepaare  $23 - 56 - ce$ , deren Verbindungslinien durch einen einzigen Punkt 0 auf  $G$  laufen müssen. (Vergl. Satz 7 auf Seite 135.) Betrachten wir in der Figur das Sechseck 1 2 3 4 5 6, so schneiden sich offenbar seine Gegenteilen in drei Punkten einer Geraden  $G$ , womit der Pascal'sche Satz bewiesen <sup>1)</sup> ist.

12 und 45 schneiden sich in  $a_1$

23 und 56 schneiden sich in 0

34 und 61 schneiden sich in  $b_1$

Auch Fermat, der wie wir schon sahen, Desargues' Bedeutung zu würdigen wusste, scheint sich eingehend mit der Involution desselben beschäftigt zu haben. Denn in seinem Nachlasse befinden sich zwei specielle Fälle des Satzes vom Kegelschnitt mit dem eingeschriebenen Vierseit. Den einen hat bereits Herr Cantor in seiner Geschichte der Mathematik angeführt <sup>2)</sup> und bemerkt, dass in ihm die jetzt gebräuchliche Definition der Involution enthalten sei, wenn auch jener Kunstausdruck nicht genannt und gebraucht sei. <sup>3)</sup>

Der fragliche Satz lautet:

Verbindet man einen beliebigen Punkt  $b$  eines Kreises mit den Endpunkten  $m$  und  $n$  einer Sehne, so erhält man auf dem zu  $mn$  parallelen Durchmesser  $pp_1$  die Punkte  $qr_1$  und durch Annahme des Punktes  $e$  zwei weitere  $q_1r$ .

Dann besteht folgende Beziehung:

$$\frac{pq \cdot p_1r_1}{pr_1 \cdot p_1q} = \frac{pr \cdot q_1p_1}{pq_1 \cdot p_1r} \quad (\text{Fig. 13})$$

1) Bekanntlich ist dieses Theorem bereits in den: Pappi Alexandrini mathematicae collectiones im 141 und 143ten Satz des 8. Buches für den Fall enthalten, dass der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt.

2) Cantors Vorlesungen II. Band p. 606 und pag. 620. Hierzu ist zu bemerken, dass Désargues gerade jener allgemeinen Beziehung (Gleichung III auf Seite 124 dieser Arbeit) den Namen Involution beilegte, während er mit der Constanz des Rechtecks den Arbre definiert.

3) Oeuvres de Fermat. Henry-Tanery B. I. pag. 79.

Als Porisma wird der Satz, der allerdings die allgemeine Involutionenbedingung darstellt, beweislos angegeben und noch beigelegt, dass es unschwer sei, denselben auf Ellipsen, Hyperbeln und Gegenschritte auszudehnen.

Diesem Porisma geht ein anderes voraus, das ebenfalls als specieller Fall des allgemeinen Desargues'schen Satzes zu betrachten ist, was bisher noch nicht bemerkt wurde.<sup>1)</sup>

In einer Parabel sei der Durchmesser  $OO_1$  gezogen. (S. Fig. 14).

Verbindet man 2 Punkte  $M$  und  $N$  mit zwei festen  $A$  und  $B$ , so erhält man auf dem Durchmesser Punktepaare  $aa_1 - bb_1$ , welche der folgenden Relation genügen:

$$\frac{Oa}{Oa_1} = \frac{Ob}{Ob_1} \quad \text{oder} \quad Oa \cdot Ob_1 = Ob \cdot Oa_1$$

Dies bedeutet aber, dass  $O$  die Souche der Involution  $aa_1 - bb_1$  ist. Diese entspricht aber dem Punkte  $O_1$ . Somit hätte man die Sechspunktinvolution  $aa_1 - bb_1 - OO_1$ .

Wenn man erwägt, dass Fermat Desargues' Schrift über die Kegelschnitte gekannt hat und ihr auch seinen Beifall nicht versagte, so ist die Vermutung, dass er durch jenen auf die obigen Sätze gekommen ist, keine unberechtigte. Unbeschadet dessen besteht neben dieser Annahme auch die Möglichkeit, dass Fermat bei seinen ausgedehnten Studien über Apollonius, hauptsächlich aber über die Porismen des Euklid, selbst auf diese verhältnissmässig wenig bedeutenden Sätze stiess.

Da sich aber die beiden Theoreme, wie schon bemerkt, erst im Nachlasse des Fermat vorgefunden haben,<sup>2)</sup> so muss man wenigstens zugeben, dass der fragliche Fundamentalsatz von Desargues zuerst veröffentlicht worden ist. So nennt auch Pascal,<sup>3)</sup> der diesen Satz anführt, nur Desargues als den Entdecker des Satzes vom Kegelschnitt mit dem eingeschriebenen Viereck.

1) Oeuvres de Fermat. Ed. Henry-Tanery 1891. tome I. pag. 79.

2) Somit erst 25 Jahre nach dem Erscheinen des Brouillon! Siehe auch Chasles Aperçu historique § 25. II. Capitel.

3) Oeuvres complètes de Pascal: Ed. Librairie de L. Hachette et Cie, Essay pour les Coniques. tome III. pag. 184.

## § 6.

**Einfluss der Arbeiten Desargues' auf die Entwicklung der projectivischen Geometrie in späterer Zeit.**

Da das wichtigste Werk Desargues', das über die Kegelschnitte, vielleicht infolge der geringen Auflage oder schweren Lesbarkeit desselben bald gänzlich verschwand, so wäre der Name unseres Gelehrten als eines hervorragenden Geometers wol ganz in Vergessenheit geraten, wenn nicht, wie schon früher bemerkt, jene Schmähschriften ihn der Nachwelt überliefert hätten. Umsomehr ist es zu begrüßen, dass der französische Mathematiker Philipp De La Hire, der von 1640 — 1718 lebte, <sup>1)</sup> im Jahre 1679 eine eigenhändige Abschrift des „Brouillon project“ von Desargues, fertigte, die dann Chasles nach weiteren 165 Jahren, im Jahre 1845 wieder auffand. Was De La Hire zu diesem eigentümlichen Verfahren veranlasste, dürfte kaum mehr zu ermitteln sein, dagegen hat die Kenntniss dieses Werkes unzweifelhaft Einfluss auf seine so berühmt gewordenen, geometrischen Arbeiten ausgeübt, wenn er auch in einem seiner Abschrift beigegebenen Briefe dies nicht zum Ausdruck bringt. <sup>2)</sup> Mit dieser unserer Anschauung stehen wir keineswegs allein, sondern es findet sich bereits in den Acta Eruditorum vom Jahre 1685 auf pag. 400 eine Bemerkung, welche bei Gelegenheit der Recension des im gleichen Jahre erschienenen Werkes von De La Hire: „Sectiones Conicae in novem libros distributae (fol., Parisii 1685, apud Steph. Michallet.) gemacht wird, und welche lautet:

Cum nihil de his Pascalii, Desarguesii aut pauca sint edita, eo gratior fuit labor doctissimi geometrae Ph. de La Hire, qui vestigiis istorum insistens, multaue perpulchraque de suo adjiciens, jam ante 12 annos libellum titulo Novae methodi sectiones conicas et cylindricas explicandi edidit . . . <sup>3)</sup>

Ein genauer Vergleich des genannten Werkes mit der Desargues'schen Schrift macht, wie wir sehen werden, diese Beeinflussung unzweifelhaft.

Nun hatte aber De La Hire bereits im Jahre 1673, also 3 Jahre bevor er nach seiner Angabe Desargues' Kegelschnittstheorie zum

---

1) Vergleiche hierüber Cantor B. III, pag. 120 ff.

2) Desargues I. pag. 231, 232.

3) Diese Stelle findet sich in Chasles' Aperçu historique, deutsche Ausgabe von Sohnke pag. 85.

ersten Male las, ein Werk mit dem Titel „Nouvelle Méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques“ veröffentlicht. In derselben gibt er eine Methode an, um einen Kreis in einen Kegelschnitt punktweise zu transformiren.

Fast genau dieselbe Construction fanden wir bei der Desargues, als wir die von ihm gegebenen Vorschriften durch eine Zeichnung veranschaulichten. <sup>1)</sup> Der einzige Unterschied besteht darin, dass Desargues die Elemente des Kegelschnittes aus dem Grundkreis des Kegels, also räumlich ableitet, während De La Hire Kreis und Kegelschnitt in einer und derselben Ebene sich vorstellt. <sup>2)</sup> Aber auch Desargues hatte schon, wie wir Seite 138 sahen, die Bemerkung gemacht, dass derartige räumliche Figuren unmittelbar in der Ebene gedeutet werden dürfen. Dieser Umstand hindert jedoch nicht, De La Hire's Worten betreffs der erstmaligen Lectüre dem Desargues'schen Kegelschnitte Glauben zu schenken, denn er kann die Kenntniss von dieser Methode sehr wol durch seinen Vater bekommen haben, der ein Schüler Desargues' war.

Bei der Abfassung des schon citirten Werkes vom Jahre 1685 kannte nun aber De La Hire, wie er selbst sagt, den Brouillon project, und hat aus diesem unzweifelhaft den Gedanken zur Aufstellung seiner Polarentheorie und zur Ableitung der allgemeinen Kegelschnittseigenschaften aus dem Kreise durch Raumprojection geschöpft. <sup>3)</sup>

Die Tragweite der Sechspunktinvolution jedoch erkannte er nicht, indem er dieselbe als unbequem bezeichnet und nur die Vierpunktinvolution, die er im Anschluss an Pappus die harmonische Teilung nennt, aufgreift. Aber schon Desargues hatte, wie wir zeigten, alle Eigenschaften von Pol und Polare mit Zuhilfenahme derselben Punkte-lage abgeleitet. Sein Standpunkt war sicherlich ein allgemeinerer als der des De La Hire, indem er aus seiner Sechspunktinvolution den nach ihm benannten Satz gewann, der die Quelle so wichtiger Theoreme wurde, während De La Hire bei seiner engeren Auffassung dieses Instrument vollständig entbehren musste.

---

1) Siehe S. 137 dieser Arbeit. † Siehe auch Fig. 10b.

2) Vergleiche hierüber Cantor B. III. pag. 120, 121, wo die Methode genauer auseinander gesetzt wird.

3) Oldenburg spricht in einem Briefe an Leibniz mit Achtung von einer Desargues'schen Methode, womit jedenfalls die Projectionsmethode genannt ist. Dieselbe soll auch dem Pascal'schen Werke zugrunde gelegen haben, welche den Satz vom hexagrammum mysticum enthalten hat.

Dagegen muss dem letzteren das Verdienst zugesprochen werden, dass er einerseits aus der dunklen Darstellung Desargue's die Wichtigkeit der Polarentheorie zu erkennen vermochte, andererseits dieselbe in überaus klarer und nicht unselbständiger Weise entwickelte. Diese vorzügliche Darstellungsweise, die überhaupt De La Hire's Schriften auszeichnet, verschaffte diesem und damit indirect auch Desargues' Ideen Einfluss auf die weitere Entwicklung der Geometrie.

So verbreitete sich die Kenntniss der Polarentheorie in England durch das Schriftchen von Jacob Milnes: *Sectionum Conicarum Elementa*, Oxford 1702, das aber De La Hire als den Begründer derselben bezeichnet. Ähnlich behandelt Robert Simson im 12ten Satze des 5ten Buches ferner *Treatise on Conic Sections* 1735 das Desargues'sche Theorem, welches durch den *Essay pour les Coniques* des Pascal bekannt geworden war. <sup>1)</sup> Geradezu zum Fundament einer Arbeit <sup>2)</sup> über die Kegelschnitte machte dieses Brianchon. Auch reproducirte Servois <sup>3)</sup> den Satz von den perspectivisch liegenden Dreiecken, den auch Brianchon, Sturm, Gergone und Poncelet, welcher letzterer durch ihn auf die Theorie von den homologen Figuren geführt wurde, anwendeten.

Das Verdienst, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf Desargues wieder gelenkt zu haben, gebührt hauptsächlich Poncelet. Auf Grund des Descart'schen Briefwechsels und des Briefes von Bœaugrand sieht er sich veranlasst auf die Bedeutung dieses Gelehrten hinzuweisen, den er treffend den Monge seines Jahrhunderts nennt. <sup>4)</sup>

Doch war eine eingehende Würdigung der Verdienste Desargues erst möglich, nachdem Chasles im Jahre 1845 die De La Hire'sche Abschrift des Brouillon project aufgefunden hatte. Chasles' eigene Untersuchungen über die Involution, die er in der Note XV zu seinem *Aperçu historique* zum ersten Mal veröffentlichte, sind jedenfalls selbständig durchgeführt, indem das letztgenannte Werk bereits 1837, also 8 Jahre vor Auffindung des Brouillon project publicirt worden

---

1) Pascal: *Essay pour les Coniques* pag. 184, tome II.

2) Brianchon: „*Mémoire sur les lignes du deuxième Ordre*. Paris 1817. (Rachelier.)

3) Servois: *Solutions peu connues* . . . Metz 1805.

4) Siehe die Einleitung zu Poncelet's: *Traité des propriétés projectives des figures*.

ist. Dagegen kannte Chasles schon damals, aus dem Briefe Beaugrands, den Satz vom Kegelschnitt und dem eingeschriebenen Viereck, welcher ihm das Mittel an die Hand gab, von der involutorischen Beziehung zu dem allgemeinen Princip der Projectivität überzugehen. Chasles zeigte nämlich als der Erste, dass obengenanntes Theorem unmittelbar den Satz ergibt, dass zwei projectivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt erzeugen. <sup>1)</sup>

---

1) Chasles: *Aperçu historique*, Deutsch von Sohncke pag. 349.

2) Zu S. 133 Z. 3 v. unt. Desargues construirt also die Polare eines Punktes inbezug auf einen Kegelschnitt in der heute noch üblichen Weise.

3) Zu S. 142 Z. 12 v. unt. Descartes meint offenbar die Anwendung des Transversalensatzes von Menelaos in der Form mit den zusammengesetzten Verhältnissen.

## III.

Untersuchungen und Lehrsätze über  
Begrenzungscurven.

Von

**C. W. Meyer,**

Ingenieur in Lauchhammer.

## § 1.

Die folgenden Untersuchungen erstrecken sich auf die Beziehungen und Lehrsätze, die sich ergeben, wenn man auf dem rechtwinkligen Coordinaten-System vom Anfangspunkt 2 Linien abträgt,  $m$  auf der Ordinaten-,  $n$  auf der Abscissenachse; und zwischen beiden ein bestimmtes Verhältniss derart festsetzt, dass man dasselbe allgemein durch die Formel

$$m^s + n^s = S^s$$

ausdrücken kann, worin  $S$  eine gegebene constante Länge ist.  $s$  ist ein variabler Exponent, für den wir successive alle erdenklichen Werte einsetzen können. Verbindet man nun die Endpunkte von  $m$  und  $n$  durch eine Gerade, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, worin die letztere Hypotenuse ist.

Dies Dreieck kann dann innerhalb der durch die Formel

$$m^s + n^s = S^s$$

gegebenen Grenzen die verschiedensten Formen annehmen. Es beginnt als Linie auf der Ordinaten-Achse, wo dann

$$m = S, \quad n = 0$$

durchläuft eine Symmetriefform unter  $45^\circ$ , wo  $m = n$  und das Dreieck gleichschenkelig ist, und endigt als Linie auf der  $X$  Achse, wo  $n = S$  und  $m = 0$ . Denkt man sich nun alle diese Dreiecke in unendlich naher Succession aufgezeichnet, so werden die Hypotenusen derselben eine Continuität von Schnittpunkten miteinander bilden, die einer mathematisch bestimmbaren Curve angehören, die bei  $q$  beginnt und in  $p$  endigt. Die Curve hat demnach die Eigenschaft, mit jeder solchen Hypotenuse einen Punkt gemeinsam zu haben; diese ist also Tangente an jene. In Folge dessen schliesst die Curve den gesammten Raum ein, welcher von der Succession jener verschiedenen Dreiecke ausgefüllt wird und zwischen den Achsen liegt. Ich nenne sie deshalb *Begrenzungscurve*.

Es leuchtet ein, dass jedem Grade der Gleichung

$$m^s + n^s = S^s$$

auch eine besondere Begrenzungscurve entspricht. Im Folgenden sollen mehrere dieser Curven bestimmt und genauer untersucht werden. Dabei wird sich ergeben, dass der allgemeinen Formel

$$m^s + n^s = S^s$$

(die wir *Katheten-Formel* oder *-Gleichung* nennen wollen) auch eine eben solche allgemeine Formel der *Begrenzungscurve* (*Coordinatengleichung*) entspricht.

## § 2.

Es läge nahe, zuerst den Exponent  $z = 1$  zu nehmen und also die *Katheten-Gleichung*

$$m + n = S$$

zu behandeln. Allein das Weitere wird lehren, dass man zweckmässig mit  $z = 2$  beginnt, wobei wesentlich der Umstand in's Gewicht fällt, dass für den Fall

$$m^2 + n^2 = S^2$$

„dann auch die Hypotenusen aller successiven Dreiecke constant  $= S$  sind“, während diese in allen andern Fällen in ihrer Länge variiren. Hieraus erhellt, dass  $S$ , zwischen den Achsen, mit seinen Endpunkten auf diesen gleitend, durch alle möglichen Lagen hindurch geführt, immer Tangente an die *Begrenzungscurve* bleibt. Da nun bekanntlich bei der angegebenen Bewegung von  $S$  jeder feste Punkt darauf eine Ellipse (d. h. im ersten Quadranten ein Viertel derselben) beschreibt, so lässt sich schon hieraus schliessen, dass

- 1) die Begrenzungscurve auch jede solche Ellipse tangirt,
- 2) überhaupt zwischen beiden Curven mannichfache Beziehungen bestehen werden.

Vor dem Eintritt in die Untersuchung noch 2 Bemerkungen:

Da im Laufe derselben viele 3te Wurzeln vorkommen, so habe ich es praktisch befunden, zur Vereinfachung der Schreibweise die dritte Wurzel immer durch einen doppelten Strich über dem Wurzelzeichen auszudrücken; also statt  $\sqrt[3]{x}$  werde ich schreiben  $\sqrt{\sqrt{x}}$ . Ferner werde ich es tunlichst vermeiden, mich der Differential-Rechnung zu bedienen, um einerseits zu zeigen, wie selbst complicirte Probleme, am richtigen Ende angefasst, auch mit den gewöhnlichen Mitteln der Analysis gelöst werden können; andererseits das Nachfolgende auch denen verständlich zu machen, die die Differential-Rechnung nicht kennen. Zur Aufsuchung der Maxima und Minima werde ich die Methode der Behandlung arithmetischer Proportionen (oder sog. Ungleichungen) benutzen, deren Wesen bis auf einen Punkt mit der Behandlung der Gleichungen völlig übereinstimmt. Dieser Punkt ist der, dass die Vorzeichen beider Seiten nicht durch Division bzw. Multiplication oder Radiciren bzw. Potenziren geändert werden dürfen, sondern nur durch beiderseitige Addition oder Subtraction. Denn es ist z. B.  $-2 > -3$ ; wollte ich aber quadriren, so erhielt ich  $4 > 9$ . Dagegen kann ich beiderseits 4 addiren und erhalte  $2 > 1$ . Diese Manipulation mit den arithmetischen Proportionen enthält zwar eigentlich schon die Grundelemente des Differentiirens, ist aber ohne weitere Erklärung Jedem verständlich. Will man aber quadriren, so muss man negative Grössen zuerst durch Hinüberschaffen auf die andre Seite positiv machen, oder sich Gewissheit verschaffen, dass auf derselben Seite noch ein grösserer positiver Ausdruck steht, der einen positiven Wert der ganzen Proportionsseite garantirt. Unter Beachtung dieser Regeln jedoch leistet das Verfahren nahezu ebensoviel wie das Differentiiren.

### § 3.

Um die Begrenzungscurve zu finden, beachte man in erster Linie den Umstand, dass jeder Punkt derselben in welchem sie eine Dreieckshypotenuse tangirt, dadurch charakterisirt ist, dass er ein äusserster Punkt dieser Hypotenuse ist. Das will sagen: Jeder andre Punkt der betr. Hypotenuse liegt ausserdem noch auf einer oder mehreren anders geneigten Hypotenusen  $S$ , die sich hier mit Ersterer

kreuzen. Dieser Punkt jedoch liegt auf keiner andern mehr, sondern nur auf dieser einen, er ist ein Grenzpunkt für den durch die Succession der Hypotenusen gebildeten Raum. „Mithin ist hier für ein gewisses festes  $x$  das zugehörige  $y$  ein Maximum“.

In nebenstehender Figur ist, ein für alle Mal, bei allen beliebigen Exponenten der Kathetengleichung:

$$y \cdot n + x \cdot m = m \cdot n$$

Ferner ist

$$m^2 + n^2 = S^2, \quad m^2 = S^2 - n^2$$

also

$$y \cdot n + x \cdot \sqrt{S^2 - n^2} = n \cdot \sqrt{S^2 - n^2} \quad (1)$$

$$y = \frac{(n - x) \sqrt{S^2 - n^2}}{n}$$

Soll nun 0 ein Punkt der Begrenzungscurve sein, so muss der letztere Ausdruck ein Maximum darstellen; d. h. wenn in der durch denselben repräsentirten Function von  $x$  eine Grösse variirt wird, so muss allemal  $y$ , d. h. der ganze Wert des Ausdrucks kleiner werden. In demselben ist  $S$  eine constante Grösse, ebenso hatten wir  $x$  als unveränderlich angenommen. Bleibt also nur  $n$  als variabel übrig, das wir daher als  $n \pm z$  einsetzen. Dann muss folgende arithmetische Proportion entstehen:

$$\frac{(n - x) \sqrt{S^2 - n^2}}{n} > \frac{(n - x \pm z) \sqrt{S^2 - n^2 \mp 2zn - z^2}}{n \pm z}$$

Wir können hier  $z$  als so kleinen Wert annehmen, dass  $n - z$  immer positiv bleibt; gleicherweise bedingt es das rechtwinklige Dreieck, dass  $n$  immer  $< S$  und  $\sqrt{S^2 - n^2}$  immer einen reellen Wert hat. Demnach kann obige Proportion quadriert werden. Dann ist:

$$\frac{(n - x)^2 (S^2 - n^2)}{n^2} > \frac{[(n - x)^2 \pm 2z(n - x) + z^2] (S^2 - n^2 \mp 2zn - z^2)}{n \pm 2zn + z^2}$$

Für das nun folgende Verfahren eine kurze Erläuterung. Es wird sich zeigen, dass beim Fortschaffen der Nenner und Auflösen der Klammern sämtliche Glieder auf beiden Seiten, welche kein  $z$  als Factor erhalten, sich gegenseitig aufheben. Die Uebrigbleibenden haben alle  $z$  oder höhere Potenzen davon und also kann durch  $z$  dividirt werden. Nachher setzen wir  $z = 0$  und es fallen somit alle Glieder fort, welche im Anfang  $z^2$  oder eine noch höhere Potenz von  $z$  zum Factor haben.

Wir können uns mithin die ganze Rechnung sehr vereinfachen, wenn wir dieses Resultat vorweg nehmen und alle Glieder mit  $z^2$  und höher, oder diese selbst einfach weglassen. Dann lautet unsere obige Gleichung:

$$\frac{(n-x)^2(S^2-n^2)}{n^2} > \frac{[(n-x)^2 \pm 2z(n-x)](S^2-n^2 \mp 2zn)}{n^2 \pm 2zn}$$

$$(n^2 \pm 2zn)(n-x)^2(S^2-n^2) > n^2[(n-x)^2 \pm 2z(n-x)](S^2-n^2 \mp 2zn)$$

$$\pm 2zn(n-x)^2(S^2-n^2) > \pm 2zn^2(n-x)(S^2-n^2) \mp (2zn^2(n-x))^2$$

dividire durch  $2z(n-x)n$

$$\pm (n-x)(S^2-n^2) > \pm n(S^2-n^2) \mp n^2(n-x)$$

Wenn nun  $z = 0$  wird, was Voraussetzung war, so verschwindet die Ungleichheit beider Seiten und ebenso die doppelten Vorzeichen — welche man behalten will, ist gleichgültig, weil sie sich jetzt beliebig auf die andere Seite bringen lassen.

Dann ist aber

$$(n-x)(S^2-n^2) = n(S^2-n^2) - n^2(n-x)$$

oder

$$n^2(n-x) = (S^2-n^2)x$$

$$n^3 - xn^2 = S^2x - xn^2$$

oder

$$n^3 = S^2x, \quad n = \sqrt{S^2x}$$

Führen wir diesen Wert in die obige Gleichung (I) ein, so ist:

$$y \sqrt{S^2x} + x \sqrt{S^2 - \sqrt{S^4x^2}} = \sqrt{S^2x} \sqrt{S^2 - \sqrt{S^4x^2}}$$

Hier lässt sich durch  $\sqrt{S^2x}$  dividiren:

$$y + \sqrt{x^2} \sqrt{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}} = \sqrt{S^2} \sqrt{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}}$$

$$y = \sqrt{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}} (\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}) = (\sqrt{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}})^3$$

quadrire:

$$y^2 = (\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2})^3 \quad \text{oder} \quad \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2} - \sqrt{x^2} \quad \text{und}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}}}$$

Dies die endgültige Gleichung der gesuchten Begrenzungscurve, deren Formel von einer frappanten Einfachheit ist.

§ 4.

Wir suchen zunächst den correlativen Wert von  $m$  auf der  $Y$ -Achse. Da

$$n = \sqrt{S^2} x$$

so ist

$$m^2 = S^2 - \sqrt{S^4} x^2 = \sqrt{S^4} (\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}) = \sqrt{S^4} y^2$$

und somit

$$m = \sqrt{S^2} y$$

Demnach verhalten sich  $m$  und  $n$  wie  $\sqrt{y}$  und  $\sqrt{x}$  oder mit andern Worten: „Die Katheten auf den Achsen verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Coordinaten des auf der Hypotenuse liegenden Punktes der Begrenzungscurve.“ Ist diese Hypotenuse, wie oben ausgeführt, zugleich Tangente an dieselbe, so hat der Tangentenwinkel mit der  $X$  Achse die

$$\text{tg} = - \frac{\sqrt{S^2} y}{\sqrt{S^2} x} = - \sqrt{\frac{y}{x}}$$

und die Tangentengleichung müsste lauten:

$$y - y_1 = - \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} (x - x_1)$$

Um dies zu beweisen, suchen wir nunmehr die Gleichung der Tangente von der Secante aus auf. In die allgemeine Gleichung einer Linie durch 2 gegebene Punkte ist ein entsprechender Wert einzuführen. Dies geschieht wie folgt:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n} (x - x_1)$$

Der Factor  $\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}$  lässt sich zerlegen in

$$\frac{(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n}) (\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_1 y_n} + \sqrt{y_n^2})}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n}) (\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_1 x_n} + \sqrt{x_n^2})}$$

Ferner ist

$$\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{y_n^2}$$

oder

$$\sqrt{x_1^2} - \sqrt{x_n^2} = - (\sqrt{y_1^2} - \sqrt{y_n^2})$$

und

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n}) = -(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_n})$$

$$\frac{\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_n}} = -\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_n}}$$

Diesen Wert führen wir in obige Formel ein, die dann lautet:

$$y - y_1 = -\frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_n})(\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_1 y_n} + \sqrt{y_n^2})}{(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_n})(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_1 x_n} + \sqrt{x_n^2})} (x - x_1)$$

Nunmehr lasse ich beide Punkte der Secante zusammenfallen, so dass  $x_1 = x_n$  und  $y_1 = y_n$ , dann ist

$$y - y_1 = -\frac{2\sqrt{x_1} \cdot 3\sqrt{y_1^2}}{2\sqrt{y_1} \cdot 3\sqrt{x_1^2}} (x - x_1) = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} (x - x_1)$$

Woraus erhellt, dass die Hypotenuse  $S$  in der That Tangente an die Begrenzungscurve ist.

Wenn wir uns nun des Umstandes erinnern, dass jeder Punkt auf der Hypotenuse  $S$  bei Verschiebung derselben zwischen den Achsen eine Ellipse beschreibt, deren halbe Achsensumme  $= S$  ist, so wird klar, dass der obere Abschnitt auf  $S$ , der durch den Punkt marquirt wird, der halben grossen Achse  $a$ , der untere Abschnitt der halben kleinen Achse  $b$  gleich sein muss. Der Punkt  $O$  ist mithin der Ellipse und Begrenzungscurve gemeinsam. Die Frage ist nur noch die: Welcher Lage von  $S$ , bzw. dadurch des Punktes  $O$  entspricht die durch  $a$  und  $b$  bestimmte Ellipse? Oder: welches ist die Beziehung zwischen den Coordinaten in  $O$  und den Abschnitten  $a$  und  $b$ ? Diese ergibt sich aus nebenstehender Figur:

$$y^2 + (n - x)^2 = b^2$$

$$y^2 + \sqrt{x^2} (\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2})^2 = b^2$$

$$y^2 + \sqrt{x^2} y^4 = b^2$$

$$\sqrt{y^4} (\sqrt{y^2} + \sqrt{x^2}) = \sqrt{S^2} y^4 = b^2$$

$$\underline{b = \sqrt{S} y^2}$$

ebenso

$$x^2 + (m - y)^2 = a^2 = x^2 + \sqrt{y^3}(\sqrt{S^2} - \sqrt{y^2})^2$$

$$x^2 + \sqrt{y^2}x^2 = \sqrt{x^4}(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}) = \sqrt{S^2}x^2 = a^2$$

$$\underline{a = \sqrt{Sx^2}}$$

Demnach

$$\underline{a : b = \sqrt{x^2} : \sqrt{y^2} = n^2 : m^2}$$

Die Abschnitte, in welche der Berührungspunkt die Tangente  $S$  zerlegt, verhalten sich, wie die Quadrate der Katheten auf den Achsen. Nun ist ferner:

$$\left. \begin{aligned} m : b &= \sqrt{S^2y} : \sqrt{Sy^2} = \sqrt{S} : \sqrt{y} \\ b : y &= \sqrt{Sy^2} : \sqrt{y^3} = \sqrt{S} : \sqrt{y} \end{aligned} \right\} \text{ also } \underline{m : b = b : y}$$

$$\left. \begin{aligned} n : a &= \sqrt{S^2x} : \sqrt{Sx^2} = \sqrt{S} : \sqrt{x} \\ a : x &= \sqrt{Sx^2} : \sqrt{x^3} = \sqrt{S} : \sqrt{x} \end{aligned} \right\} \text{ also } \underline{n : a = a : x}$$

Die Ellipsen-Achsen sind also die mittleren Proportionalen zwischen den Tangenten-Abschnitten auf den Achsen und den betr. Coordinaten des Berührungspunktes mit der Begrenzungscurve.

Es ist nun leicht zu beweisen, dass die Tangente an die Begrenzungscurve zugleich in demselben Berührungspunkte auch Tangente an die zugehörige Ellipse ist; mithin der Berührungspunkt allen 3 Linien gemeinsam ist. Zu dem Behufe bestimmen wir  $x$  und  $y$  nach  $a$  und  $b$ . Es ist

$$a = \sqrt{Sx^2}, \text{ also } x^2 = \frac{a^2}{S}$$

$$x = a \sqrt{\frac{a}{S}} = a \sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

ebenso

$$b = \sqrt{Sy^2}, \text{ also } y = b \sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

aus welchen Werten sich ferner ergibt, dass die Quadrate der Coordinaten sich verhalten, wie die Kuben der Hypotenusen-Abschnitte. Auch gestatten diese Formeln, zu jeder Ellipse den ihr zugehörigen Begrenzungspunkt durch geometrische Construction zu finden, indem

$$S : a = a^2 : x^2$$

Ist nun dieser Punkt mit obigen Coordinaten zugleich Ellipsenpunkt und auf derselben Tangente gelegen, so müssen obige Werte, in die Gleichung der Ellipsen-Tangente eingesetzt, dieser eine Form geben, dass deren Winkeltangente mit der X-Achse

$$= - \sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

ist. Die Ellipsentangente hat die Gleichung:

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$$

also mit obigen Werten:

$$a^2 y b \sqrt{\frac{b}{a+b}} + b^2 x a \sqrt{\frac{a}{a+b}} = a^2 b^2$$

dividire durch  $ab \sqrt{ab}$ :

$$y \sqrt{\frac{a}{a+b}} + x \sqrt{\frac{b}{a+b}} = \sqrt{ab}$$

Setzen wir die Coordinaten abwechselnd = null, so erhalten wir als Abschnitte auf den Achsen

$$y = \sqrt{b(a+b)}, \quad x = \sqrt{a(a+b)}$$

Die Winkeltangente ist:

$$- \sqrt{\frac{b}{a}} = - \sqrt{\frac{\sqrt{S y_1^2}}{S x_1^2}} = - \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \quad \text{w. z. b. war.}$$

Daraus folgt der Satz: Jede Ellipse hat eine Tangente, deren Länge im Quadranten gleich der Summe der Halbachsen ist. Dieselbe wird durch den Berührungspunkt in die Halbachsen zerlegt.

### § 5.

Wir fanden bei dieser Gelegenheit

$$m = \sqrt{b(a+b)} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{a(a+b)}$$

mithin

$$m^2 : n^2 = b : a$$

d. h. die Quadrate der Katheten verhalten sich, wie die Achsen der betr. Ellipse oder die Abschnitte der Tangente.

Nun ist aber leicht zu zeigen, dass dasselbe Verhältniss besteht zwischen den Katheten und den Abschnitten der Hypotenuse, in welche dieselbe durch eine Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels zerlegt wird.

$q$  sei senkrecht auf  $S$ ; dann ist

$$m : n = q : d, \quad q^2 = c \cdot d, \quad m^2 : n^2 = q^2 : d^2$$

also

$$\underline{m^2 : n^2 = c \cdot d : d^2 = c : d}$$

Da oben war

$$\underline{m^2 : n^2 = b : a.} \quad \text{also} \quad \underline{b : a = c : d} \quad \text{so ist}$$

$$\underline{\frac{a+b}{S^2} : a = \frac{c+d}{S} : d,} \quad \underline{S : a = S : d} \quad \text{oder}$$

$$\underline{a = d} \quad \text{folglich auch} \quad \underline{b = c}$$

Hieraus folgt nun, dass die Senkrechte vom Scheitel die Hypotenuse in dieselben Abschnitte  $a$  und  $b$  zerlegt, wie der Berührungspunkt der Tangente an die Begrenzungscurve, nur in umgekehrter Folge. Dies gibt ein Mittel an die Hand, bei jeder Lage von  $S$  den zugehörigen Punkt der Begrenzungscurve auf ihr zu finden, indem man den durch die Senkrechte vom Scheitel entstandenen oberen Abschnitt am unteren Ende abträgt. Der neue Endpunkt ist der gesuchte Punkt der Begrenzungscurve.

Die Tangente an die Begrenzungscurve und an die zugehörige Ellipse hat noch 2 bemerkenswerte Eigenschaften, die allem Anscheine nach bisher unbekannt sind:

1) Von allen möglichen Tangenten an die Ellipse ist diese, welche gleich der Achsensumme  $S$  ist, die kürzeste zwischen den Schnittpunkten mit den Achsen.

2) Von allen durch einen bestimmten Punkt  $O$  gelegten Hypotenusen ist diejenige die kürzeste, welche der Lage des Punktes als Begrenzungscurvenpunkt mit der Hypotenuse als Tangente entspricht.

Beweis ad I.

Wir leiten zuerst aus der Gleichung der Ellipsentangente die

allgemeine Form des Ausdrucks für die Länge zwischen den Achsen ab, indem wir  $x$  und  $y$  abwechselnd 0 setzen.

$$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2, \quad y = \frac{b^2}{y_1}, \quad x = \frac{a^2}{x_1}$$

$$\text{Tangentenlänge} = \sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}}$$

Eliminiren wir  $y_1$  durch den aus der Ellipsengleichung gewonnenen Ausdruck

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \quad \text{so kommt:}$$

$$\text{Länge } L = \sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4 \cdot a^2}{b^2(a^2 - x_1^2)}} = a \sqrt{\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2}}$$

Dies muss also ein Minimum sein und der sich ergebende Wert muss  $x$ , als eine Function von  $a$  und  $b$  enthalten, die dem oben für den Fall der Begrenzungscurve abgeleiteten Werte gleich ist. Factor  $a$  kann als constant weggelassen werden, da er auf die Verschiedenheit der beiden Seiten ohne Einfluss ist. Ebenso kann, da  $a^2 - x_1^2$  immer positiv bleibt und der Radicand desgleichen, das Wurzelzeichen fortbleiben. Dann variiren wir  $x_1^2$  als  $x_1^2 \pm z$ . Es entsteht

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2} < \frac{a^2}{x_1^2 \pm z} + \frac{b^2}{a^2 - x_1^2 \mp z}$$

schaffe die Nenner fort:

$$a^2(a^2 - x_1^2)(x_1^2 \pm z)(a^2 - x_1^2 \mp z) + b^2 x_1^2(x_1^2 \pm z)(a^2 - x_1^2 \mp z) < \\ a^2 x_1^2(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_1^2 \mp z) + b^2 x_1^2(a^2 - x_1^2)(x_1^2 \pm z)$$

es bleibt:

$$\pm a^2 z(a^2 - x_1^2)^2 < \pm b^2 x_1^4 z$$

dividire durch  $z$  und setze es dann  $= 0$

$$a^2(a^2 - x_1^2)^2 = (b^2 x_1^4), \quad a(a^2 - x_1^2) = b x_1^2, \quad a^3 = x_1^2(a \pm b)$$

$$x_1 = a \sqrt{\frac{a}{a \pm b}} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Der Fall  $a \sqrt{\frac{a}{a - b}}$  ist unmöglich, weil dann entweder  $b > a$

und der Wert imaginär oder  $a > b$  und dann  $x_1 > a$  wäre, was in der Ellipse nicht vorkommen kann.

Beweis ad II.

Hierfür suchen wir den allgemeinen Ausdruck für alle durch  $x_1, y_1$  möglichen Hypotenusen und dann davon das Maximum. Es ist:

$$H^2 = m^2 + n^2$$

ferner

$$y_1 : m = n - x_1 : n$$

also

$$m = \frac{y_1 n}{n - x_1}$$

demnach

$$H^2 = \frac{y_1^2 n^2}{(n - x_1)^2} + n^2 = \text{Minimum}$$

Variire  $n$  als  $n \pm z$ , so muss sein:

$$\frac{y_1^2 (n^2 \pm 2zn)}{(n - x_1 \pm z)^2} + 2zn > \frac{y_1^2 n^2}{(n - x_1)^2}$$

$$y_1^2 (n^2 \pm 2zn)(n - x_1)^2 \pm 2zn(n - x_1)^4 > y_1^2 n^2 (n - x_1 \pm z)^2$$

$$n^2 \pm 2zn y_1^2 (n - x_1)^2 \pm 2zn(n - x_1)^4 > y_1^2 \pm 2z(n - x_1) n^2 y_1^2$$

dividire durch  $2zn(n - x_1)$

$$\pm y_1^2 (n - x_1) \pm (n - x_1)^3 > \pm n y_1^2$$

oder da  $z = 0$  und die Ungleichheit wegfällt:

$$-x_1 y_1^2 + (n - x_1)^3 = (n - x_1)^3 = x_1 y_1^2 \quad \underline{n - x_1 = \sqrt{x_1 y_1^2}}$$

Nun ergibt sich aus Fig. 74.:

$$\text{tg } \alpha = - \frac{y_1}{n - x_1}$$

(für alle möglichen  $H$ ) demnach für das kürzeste  $H$

$$\text{tg } \alpha = - \frac{y_1}{\sqrt{x_1 y_1^2}} = - \sqrt{\frac{y_1}{x_1}}$$

welches wir oben als Tangente des Winkels einer Tangente an die gefundene Begrenzungscurve ermittelt hatten. Folglich ist eine solche die kürzeste Hypotenuse durch ihren Berührungspunkt. Dass diese Eigenschaft für die Praxis häufig von Bedeutung sein kann, ist ohne Weiteres einleuchtend.

## § 6.

Wenn wir in der Begrenzungscurve  $x = y$  setzen, so erhalten wir

$$2 \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \quad x = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

Da der betr. Punkt auf einer Linie liegen muss, die unter  $5^\circ$  gegen die Achsen geneigt vom Anfangspunkt ausgeht, so ist der Abstand vom Anfangspunkt

$$x = \sqrt{2} = \frac{S}{2}$$

Und da die Gleichung eine sog. symmetrische ist, d. h.  $x$  und  $y$  treten in genau derselben Function auf, so muss auch die Curve eine solche sein, die durch die benannte  $45^\circ$  Linie in 2 symmetrische Hälften geteilt wird. Jeder Punkt hat daher auf der andern Seite dieser Symmetrie-Achse einen ihm homogenen Punkt, mit denselben, nur vertauschten Coordinaten. Die Curve lässt sich auch auf die Symmetrie-Achse beziehen und lautet dann die Gleichung:

$$\sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{2} S^2$$

Aus beiden Gleichungsformen geht hervor, dass die Vorzeichen von  $x$  (und  $y$  ganz ohne Einfluss sind (ist eine Coordinate positiv, die andre negativ, so verwandelt sich nur  $x+y$  in  $x-y$  und umgekehrt.) Mithin geht die Curve durch alle 4 Quadranten.

Die Gleichung der Normale ist:

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y}} (x - x_1)$$

Setzen wir  $y = 0$ , so ist

$$-y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}} (x - x_1), \quad -\frac{y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} = x - x_1, \quad x = x_1 - \frac{y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

also

$$\text{Subnormale} = \frac{y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

$$\text{Subtangente} = n - x_1 = \sqrt{x_1 y_1^2}$$

demnach

$$Sn : Stg = \sqrt{\frac{y_1^4}{x_1}} : \sqrt{x_1 y_1^2} - \sqrt{y_1^2} : \sqrt{x_1^2} - b : a$$


---

Der Radiusvector ( $Rv$ ) ist  $= \sqrt{x^2 + y^2}$ . Drücken wir  $x$  und  $y$  durch  $a$  und  $b$  aus, so ist

$$Rv^2 = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} = \frac{a^3 + b^3}{a+b} = \underline{a^2 + b^2 - ab}$$

Ist  $x = y$ , so ist  $a = b$ , die Ellipse ein Kreis, dessen Radius  $= S/2$ . Dass dies der kürzeste  $Rv$  ist, kann man leicht zeigen, indem man

$$a = \frac{S}{2} \pm z \quad \text{und} \quad b = \frac{S}{2} \mp z$$

setzt. Dann ist

$$Rv^2 = \frac{S^2}{4} \pm Sz + z^2 + \frac{S^2}{4} \pm Sz + z^2 - \frac{S^2}{4} + z^2 = \frac{S^2}{4} + 3z^2$$

daher  $Rv > S/2$ .

Da die Entfernung des Ellipsenbrennpunktes vom Anfangspunkt

$$= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{S^2} \sqrt{\sqrt{r^2} - \sqrt{y^2}}$$

so ist ein Fall möglich, wo  $e$  und der  $Rv$  gleich sind. Alsdann ist

$$a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - ab, \quad 2b^2 = ab, \quad a = 2b = \frac{2S}{3}$$

$$b = \frac{S}{3} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{2S}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} &= S \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} y = T \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{y_1}{x_1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieses Falles wird weiter unten zur Sprache kommen.

Man kann die Begrenzungscurve in der Weise entstanden denken, dass der Mittelpunkt von  $S$  mit dem Radius  $S/2$  im Anfangspunkt befestigt und darum gedreht wird, während die Endpunkte auf den Achsen vom betr. nach dem Anfangspunkte gleiten. Bestreut man nun die Fläche während  $S$  noch an einer Achse anliegt, mit einem

feinen Pulver oder Sande, so schiebt  $S$  auf seinem Wege diesen genau so weit zurück, dass die Contur des Sandes in der Begrenzcurve liegen bleibt. In der Praxis beschreibt z. B. der eine Arm des Watt'schen Parallelogramms einen Teil dieser Curve.

## § 7.

Wir fanden in § 5., dass auch die Senkrechte vom Anfangspunkt auf die Hypotenuse  $S$  diese in 2 Abschnitte  $a$  und  $b$ , die Achsen der Ellipse mit dem entsprechenden Berührungspunkt, zerlegt. Zu sehr interessanten Beziehungen gelangt man nun, wenn man alle diese Treffpunkte von  $S$  in seinen verschiedenen Lagen mit den bezl. Senkrechten zu einer continuirlichen Curve verbindet und deren Gleichung aufsucht. Da das Stück  $b$  am oberen Ende gleich demselben unterhalb des Berührungspunktes, so ist

$$n - x_1 = X \quad \text{und} \quad m - y_1 = Y$$

Mithin sind die Coordinaten des neuen Punktes

$$x = \sqrt{S^2 x_1} - x_1 = \sqrt{x_1} (\sqrt{S^2} - \sqrt{x_1^2}) = \sqrt{x_1 y_1^2}$$

$$y = \sqrt{S^2 y_1} - y_1 = \sqrt{y_1} (\sqrt{S^2} - \sqrt{y_1^2}) = \sqrt{x_1^2 y_1}$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\underline{x \cdot y} = \sqrt{x_1^3 \cdot y_1^3} = \underline{x_1 y_1}$$

das Rechteck aus den Coordinaten des Punktes der neuen Curve ist also gleich dem Rechteck aus den Coordinaten des Berührungspunktes der Begrenzcurve auf derselben Hypotenuse  $S$ . Ferner ergeben obige Werte:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x_1^2 y_1^4} \\ y^2 &= \sqrt{x_1^4 y_1^3} \end{aligned} \right\} x^2 + y^2 = \sqrt{x_1^2 y_1^3} (\sqrt{y_1^2} + \sqrt{x_1^2})$$

letztere Klammer ist  $= \sqrt{S^2}$

$$x_1 y_1 = x y \quad \text{also}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{S^2 x^2 y^2} \quad \text{oder}$$

$$\underline{\sqrt{x^2 + y^2}} = \underline{\sqrt{Sxy}}$$

Gleichung der gesuchten Curve. Mit Worten: Der Kubus aus dem Radiusvector ist gleich dem Parallelepipied aus der Linie  $S$  mit den Coordinaten des betr. Punktes.

Die hier gefundene Curve, welche ich nach ihrer charakteristischen Form einfach Blattcurve (eigentlich ist sie eine Schleife) nennen will, ist an sich keine neue. Wol aber scheint ihre Bedeutung, Ursprung, Zusammenhang mit Ellipse und Begrenzungscurve, sowie ihre näheren Eigenschaften anher unbekannt zu sein. Man findet sie bereits angeführt in anderer Form in Lübsen's Lehrbuch der analytischen Geometrie (S. 138) der sie seinerseits einem Werke von Cramer entlehnt hat, der sie wiederum aus Guido Grandi (Florenz 1728) übernommen. Wie lange ist demnach die Curve schon bekannt, ohne dass man ihren Zusammenhang mit der Ellipse kannte! Denn wäre das der Fall, so fände sich in genanntem Buche doch wenigstens eine Andeutung davon. Allein schon die Art, wie die Blattcurve bei Lübsen mit Hilfe ihrer Polargleichung discontinuirlich construirt wird, -- die in gar keinem Zusammenhang mit obiger Herleitung steht -- beweist klar, dass er von der eigentlichen Bedeutung der Curve keine Ahnung hatte. Ich fand die Curve auf dem bezeichneten Wege, ehe ich Lübsen's Buch in die Hände bekam, der sie übrigens bloß verwertet, um zu zeigen, welchen Nutzen oft die Verwandlung einer Coordinatengleichung in eine Polargleichung für die geometrisch-anschauliche Construction einer Curve haben könne. Bei ihm erfährt man daher über die weiteren Eigenschaften der Curve nichts. Offenbar ist doch meine discontinuirliche Construction durch Senkrechte vom Scheitel auf die Hypotenusen  $S$  viel einfacher, als die seinige mittelst des Sinus des doppelten Winkels.

§ 8.

Um Irrtümer zu vermeiden, sollen von jetzt ab die Coordinaten der Blattcurve immer mit  $x, y$ , diejenigen der Begrenzungscurve mit  $x_1, y_1$  bezeichnet werden. Aus der Figur, wie aus obigen Werten ergibt sich:

$$x_1^2 = \sqrt{x^2 y^4} = y \sqrt{x^2 y} = y_1 \cdot y$$

$$y_1^2 = \sqrt{x^4 y^2} = x \sqrt{x^2 y} = x_1 \cdot x$$

Demnach ist die Abscisse die mittlere Proportionale zwischen ihrer Ordinate und der Ordinate des zugehörigen Punktes der Begrenzungscurve. Für die Ordinate gilt das Entsprechende. Ferner gelten noch folgende Beziehungen:

$$m = y + y, \quad n = x + x, \quad x : x = b : x = y : y$$

Aus der Gleichung der Begrenzungscurve folgt

$$(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = S^2 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 y^2} (\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})$$

also

$$Rv^2 = 3\sqrt{S^2 x^2 y^2}. \quad \text{Da } xy = xy \quad \text{und} \quad \sqrt{S^2 x^2 y^2} = x^2 + y^2$$

und letzteres das Quadrat des Radiusvectors der Blattcurve (der mit  $Rvb$  bezeichnet sei), so haben wir zwischen den Radiusvectoren 2 er zusammengehöriger Punkte beider Curven die Beziehung:

$$Rv^2 = S^4 - 3Rvb^2$$

Setzen wir in der Blattcurvengleichung  $x = y$ , so ist

$$2x^2 = \sqrt{S^2 y^4}, \quad 8x^6 = S^2 x^4, \quad x = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

und der Abstand des betr. Punktes vom Anfangspunkt ist  $= S/2$ .

Da dieser Punkt auf der Symmetrie-Achse liegt, so folgt, dass beide Curven diesen Punkt gemein haben, sich darin tangiren, der in diesem Falle allen 4 Linien, nämlich auch dem Kreise mit dem Radius  $S/2$  und der Hypotenuse  $S$  angehört.

Es ist natürlich leicht, zu einem gegebenen Punkt der Blattcurve den entsprechenden der Begrenzungscurve zu finden bzw. zu construiren. Ebenso haben wir gesehen, dass bei gegebenem  $m$  und  $n$  oder gegebener Ellipse aus  $a$  und  $b$  sogleich der zugehörige Punkt der Begrenzungscurve gefunden werden kann. Anders aber steht es mit der Aufgabe, aus den gegebenen Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve den entsprechenden der Blattcurve und das zugehörige  $S$  zu ermitteln. Denn alle hier in Betracht kommenden Grössen sind dritte Wurzeln einer Function von  $x$  und  $y$  bzw.  $S$ , die sich mit den bisherigen Mitteln der Planimetrie nicht construiren lassen. Weder  $m$  noch  $n$ , noch die Subnormale, noch auch  $a$  oder  $b$  oder die Senkrechte vom Scheitel auf  $S$  kann ich aus ihren gefundenen Formeln geometrisch darstellen. Der Weg zur Lösung liegt in der Weiterverfolgung des Umstandes, dass die Radiivectoren an zusammengehörige Punkte beider Curven auf  $S$  gleiche Abschnitte  $fi$  und  $ow$  erzeugen. In Folge dessen sind die Dreiecke  $fri$  und  $ovw$  congruent und  $fr = ov$ . Verbinde ich den gegebenen Punkt mit dem Anfangspunkt, so zeigt die Figur, dass der gesuchte Punkt der Blattcurve auf der Peripherie eines über  $qo$  errichteten Halbkreises liegen muss. Des Weiteren wird dessen Lage dadurch bestimmt,

dass die Senkrechte von diesem Punkte auf die  $y$ -Achse und die Verbindungslinie desselben mit  $o$ , verlängert, auf der  $y$ -Achse ein Stück  $-y_1$  abschneiden müssen. Hierauf gründet sich die geometrisch-constructive Auffindung des zu  $o$  gehörenden Blatteurvenpunktes. Man schlägt über  $qo$  einen Halbkreis, nimmt dann  $y_1$  auf die Ordinaten-Achse und errichtet im unteren Endpunkte von  $y_1$  eine Senkrechte parallel zur  $X$ -Achse. Mittelst Anlegen eines gewöhnl. hölzernen Winkels an die  $X$ -Achse, auf dessen verticalen Schenkel man  $y_1$  abträgt, und dessen horizontaler Schenkel genügende Länge über  $o$  hinaus hat, lässt sich dies leicht ausführen. Man befestigt ferner in  $o$  ein um diesen Punkt drehbares Lineal, dessen nach unten gerichtete Kante durch  $o$  läuft und am oberen Endpunkt von  $y_1$  auf der  $Y$ -Achse anliegt. Verschiebt man nun das hölzerne Dreieck der  $Y$ -Achse entlaug aufwärts, so wird der horizontale Schenkel parallel zur  $X$ -Achse sich bewegen, und gleichzeitig wird das Lineal um  $o$  drehend, eine ständige geradlinige Verbindung zwischen  $o$  und dem oberen Endpunkte von  $y_1$  bilden. Bald kommt dann der Moment, wo der horizontale Schenkel des Dreiecks und die um  $o$  drehende Gerade einen Schnittpunkt mit einander bilden, dieser rückt bei weiterer Fortbewegung des Winkels in einer sogleich zu bestimmenden Curve weiter fort, passirt  $o$  selbst und trifft endlich mit der Peripherie des Halbkreises zusammen, wo dann der gesuchte Punkt gefunden ist. Denn bei jeder Lage dieses Schnittpunktes muss das an der  $Y$ -Achse entstehende Dreieck die Vertical-Kathete  $y_1$  haben und dem an der  $X$ -Achse anliegenden Dreieck congruent sein.

So zeigt die Figur einen solchen Zwischenpunkt  $p$ ; offenbar ist  $\triangle usp \simeq \triangle ovh$ . Der Unterschied zwischen  $p$  und dem gesuchten Punkte besteht nur darin, dass in  $i$  die Verbindungslinie mit  $q$  auf der Hypotenuse senkrecht steht, (weil  $i$  auf dem Halbkreise liegt) bei allen anderen Schnittpunkten, wie  $p$ , jedoch nicht. Es ist nun zunächst von Interesse, die Natur der hier von den erwähnten Schnittpunkten gebildeten Curve  $dopi$  kennen zu lernen. Nehmen wir also  $p$  als beliebigen Punkt derselben an.

Es ist

$$sp = vh = x$$

ferner

$$vh : y_1 = vh + x_1 : y_1 + y \quad \text{oder} \quad x : x + x_1 = y_1 : y_1 + y$$

ergibt

$$x + x_1 : x = y + y_1 : y_1$$

und somit

$$x_1 : x = y : y_1$$

$$\underline{x \cdot y = x_1 \cdot y_1}$$

mit Worten: „Das Product aus den Coordinaten jedes Punktes dieser „Curve ist constant =  $x_1 y_1$ .“ Demnach ist die Curve eine Hyperbel und die Achsen sind deren rechtwinklige Asymptoten. Mithin haben wir durch obiges Verfahren gefunden:

1) Eine continuirliche Construction einer Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten.

2) Eine Methode, die kürzeste Linie zwischen den Achsen durch einen Punkt  $x_1 y_1$  zu legen.

3) Den Lehrsatz, dass in einer Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten jede durch dieselbe gehende beliebige Linie von der Hyperbel so geschnitten wird, dass die ausserhalb derselben fallenden Stücke gleich sind.

4) Eine Methode, auf constructivem Wege jedes Prisma in einen Kubus gleichen Inhalts zu verwandeln, bzw. dessen Seite zu erhalten.

Das letztere Resultat ist offenbar das Wichtigste, bedarf aber noch einer Erläuterung. Da man jedes Rechteck in ein Quadrat verwandeln kann, und sonach auch für jedes Prisma eines mit gleichem Inhalt und quadratischer Grundfläche sich herstellen lässt, so handelt es sich zuletzt um die Möglichkeit, eine Linie zu finden, die der Formel genügt:

$$x^3 = a^2 b$$

Da wir nun für die Coordinaten der Blattcurve haben:

$$x = \sqrt{xy^2} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{x^2 y}$$

so braucht man die beiden Seiten des quadratischen Prisma's nur als Coordinaten eines Punktes der Begrenzungscurve aufzutragen und erhält dann nach dem obigen Verfahren sogleich das gesuchte  $x$  als Abscisse oder Ordinate des gefundenen Blattcurvenpunktes, jenachdem man die Seite des Quadrats als Ordinate oder Abscisse aufgetragen hat.

Wir werden später sehen, dass die Gleichung der Blattcurve in verschiedenen Fällen treffliche Dienste leistet; ebenso aber auch das zuletzt demonstrierte Verfahren.

## § 9.

Interessant ist es, bei dieser Gelegenheit den Inhalt des Dreiecks zu untersuchen, welches von den Radienvectoren zweier zusam-

mengehöriger Punkte beider Curven eingeschlossen wird. Man sieht sogleich, dass dieser Inhalt mit null anhebt, wenn  $S$  auf der Achse liegt, allmählich grösser, dann wieder kleiner und bei der Symmetrie-Lage von  $S$ , wo beide Radiivectoren wieder zusammenfallen, abermals null wird. Es muss also ein Maximum dieses Inhalts geben. Die auf der Hypotenuse  $S$  liegende Kathete des Dreiecks ist

$$= a - b = \sqrt{Sx^2} - \sqrt{Sy^2} = \sqrt{S} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

die andre ist  $= \sqrt{Sxy}$ , somit Inhalt

$$= \frac{\sqrt{S^2xy} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2}{2}$$

Da hier  $\frac{\sqrt{S^2}}{2}$  constant ist, so bleibt dieser Factor auf das Resultat der Proportion ohne Einfluss und kann deshalb wegfallen. Es muss demnach von  $\sqrt{xy} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2$  das Maximum gesucht werden. Variiren wir  $\sqrt{x}$  als  $\sqrt{x} \pm z$ , so haben wir:

$$\sqrt{x^2} \pm 2z\sqrt{x} + \sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x} = \sqrt{S^2}$$

und somit tritt für  $\sqrt{y^2}$  ein:  $\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x}$ . Dann lautet die Proportion:

$$\sqrt{xy} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 > (\sqrt{x} \pm z) \sqrt{\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x}} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} \pm 4z\sqrt{x})$$

quadriren jetzt

$$\sqrt{x^2y^2} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 > (\sqrt{x^2} \pm 2z\sqrt{x}) (\sqrt{y^2} \mp 2z\sqrt{x})$$

$$\cdot [(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 \pm 8z\sqrt{x} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})]$$

$$\pm 2z\sqrt{xy^2} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 \mp 2zx(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^3$$

$$\mp 8zx\sqrt{y^2} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})$$

$$\text{dividire durch } 2z(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})\sqrt{x}$$

und erhalte

$$0 > \pm \sqrt{y^2} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) \mp \sqrt{x^2} (\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) \pm 4\sqrt{y^2x^2}$$

setze  $z = 0$ , dann ist:

$$(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})^2 = 4\sqrt{x^2y^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = 2\sqrt{xy}$$

nach dem unteren Resultate =  $\frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{x^4} - 4\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = 4\sqrt{x^2y^2}$$

$$\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = 8\sqrt{x^2y^2}$$

$$(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = 8\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{S^4}$$

somit

$$8\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{S^4}, \quad \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{S^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2} \\ 2\sqrt{xy} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{S^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ - \sqrt{S^2} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{S} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}$$

da

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2}}$$

so ist

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{2} \sqrt{S} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{S}}{2} \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\sqrt{2}}} \left( \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1} \right) = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{S}}{2} \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}} \right] = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2^3} \sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

Der  $R_o$  an den zugehörigen Punkt der Blattcurve ist unschwer festzustellen

$$\sqrt{xy} \text{ war } = \frac{\sqrt{S^2}}{2\sqrt{2}}$$

da

$$xy = x_1 y_1 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Sxy}$$

so ist

$$R_o = \frac{S}{2\sqrt{2}}$$

Das Mittelstück auf der Hypotenuse ist

$$= a - b = \sqrt{S(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})}$$

nach Obigem

$$= \sqrt{S^3} \left( \frac{\sqrt{2+1} - \sqrt{2-1}}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Daraus folgt:

Das Maximum für den Inhalt des Dreiecks zwischen zwei zusammengehörigen Radiivectoren beider Curven ist  $= \frac{S^2}{8}$  also = dem Quadrat der Blattcurve  $Ra$ . Der  $Rv$  der Begrenzungscurve ist in diesem Falle  $= S \sqrt{\frac{1}{8}}$ .

Da die eine Kathete doppelt so gross wie die andere, so hat der anliegende Winkel an der Hypotenuse die  $\text{tg} = \frac{1}{2}$ . Die Neigung der Hypotenuse  $S$  gegen die  $X$ -Achse ist

$$= \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2+1}}} = \sqrt{2-1}$$

Nimmt man diesen Winkel doppelt, so ist

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2-1}}{1 - 2 + 2\sqrt{2-1}} = \frac{2\sqrt{2-1}}{2\sqrt{2-1}} = 1$$

d. h. also  $2\alpha = 45^\circ$  und die Neigung von  $S$  beträgt  $\frac{1}{4}$  von einem Rechten.

Die Construction des Falles ist hiernach äusserst leicht.

Die Gleichung der Blattcurve gibt, nach der Cardani'schen Formel aufgelöst für  $\sqrt{x^2}$  den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{y}{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{y^2 - \frac{4S^2}{27}} - y_1} - \sqrt{\sqrt{y_1^2 - \frac{1S^2}{27}} + y} \right]$$

Nun werden wir aber sogleich zeigen, dass  $y^2$  höchstens  $-\frac{1S^2}{27}$ , niemals aber grösser als  $\frac{1S^2}{27}$  sein kann, mithin ergäbe die Formel nur für diesen Fall einen obendrein noch negativen reellen Wert, in allen übrigen einen imaginären. Selbst für ersteren Fall wird der Wert für  $x$  imaginär, weil dann  $\sqrt{x^2}$  negativ sein müsste, also

$$\sqrt{x} = i$$

Es würde uns sonach schwer werden, ohne Zuhilfenahme der höheren Mathematik über die weiteren Eigenschaften der Curve es zu ermitteln, wenn nicht ihre Beziehung zu den Coordinaten der Begrenzungscurve hierzu ein Mittel an die Hand gäbe. Dadurch aber sind wir in der Lage, „die Coordinaten der Ersteren durch die der Letzteren zu ersetzen“, damit zu operiren und nach erlangtem Resultat wieder in jene überzuführen.

#### § 10.

Ein Versuch lehrt sogleich, dass keine Möglichkeit besteht, die Gleichung der Tangente an die Blatteurve auf dem gewöhnlichen Wege der Secantengleichung zu finden, daher wir hier in erster Linie das oben erwähnte Verfahren anwenden müssen. Hierbei fällt sofort Eins auf. Bei der Form der Blatteurve beginnen nämlich die Tangenten, wenn man sie successiv um die Curve herumführt, im Anfangspunkt und auf der  $Y$ -Achse, vollführen eine Wendung von  $\frac{3}{4}$  Kreis und endigen wieder im Anfangspunkt jedoch auf der  $X$ -Achse. Dabei passiren sie 2 Lagen, wo die Tangente einmal mit der  $X$ -, einmal mit der  $Y$ -Achse parallel läuft und die hierzu gehörigen Punkte nenne ich Culminationspunkte der Curve, deren Einer im Maximum für  $y$ , der andere für  $x$  repräsentirt. Diese müssen für die Tangenten-Gleichung von Bedeutung sein, weil offenbar vom Anfangs- bis zum  $Y$ -Culminationspunkte der Winkel, welchen die Tangente mit der  $X$ -Achse bildet, eine positive Tangenten-Function hat, diese im  $Y$ -Culminationspunkte null wird, dann in eine negative übergeht und im  $X$ -Culminationspunkt  $\mp \infty$  wird; sie schlägt darauf wieder in positiv um und endigt im Anfangspunkt mit  $0$ . Dies wird die Tangenten-Gleichung ausweisen müssen und es könnte daher überflüssig scheinen, die Culminationspunkte vorher aufzusuchen. Demnach wollen wir, da die Operation sehr einfach

ist, dies vorher tun, weil wir dann bei Auftreten des betr. Ausdrucks in der Tangenten-Gleichung dessen Bedeutung sofort erkennen.

Es war

$$y_1 = \sqrt{x^2 y}$$

und da

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{S^2 - y^2}$$

so ist

$$y_1 = \sqrt{S^2 y} - y$$

Hiervon ist aber das Maximum zu suchen

$$\sqrt{S^2 y} - y > \sqrt{S^2} (\sqrt{y} \pm z) - y \mp 3z \sqrt{y^2}$$

$$3z \sqrt{y^2} > z \sqrt{S^2} \quad 3 \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x^2} = 2 \sqrt{y^2}$$

multipliziert mit

$$\sqrt{x^4 y^2} = 2 \sqrt{x^2 y^4} \quad \text{oder} \quad y^2 = 2x^2$$

Für den *Y*-Culminationspunkt ist also *y* die mittlere Proportionale zwischen *x* und *2x*. Da wir aber auch in § 8. gefunden hatten

$$y_1^2 = x_1 \cdot x$$

so ist offenbar

$$x_1 = 2x$$

und weil

$$n = x_1 + x$$

so ist

$$n = 3x$$

und es ergibt sich

$$x = \frac{n}{3}$$

Ist aber die Kathete durch die Ordinate in  $\frac{1}{3}$  geteilt, so muss es auch die Hypotenuse durch den Combiantionspunkt sein; m. r. W.: „der Culminationspunkt gehört zu einem Punkte der Begrenzungscurve, dessen zugehörige Ellipse die Achsen hat  $\frac{2S}{3}$  und  $\frac{S}{3}$ “.

Da beide Punkte symmetrisch zur  $45^\circ$  Linie liegen müssen, so liegt für den *K*-Culmiationspunkt das Verhältniss umgekehrt:

$$2y^2 = x^2.$$

Bestimmen wir die Coordinaten genauer. Es war für *Y*-Maximum

$$3x_1^2 = \sqrt{S^2 \cdot 2x^4}, \quad 27x^6 = S^2 \cdot 2x^4, \quad x^2 = \frac{S^2 \cdot 2}{27}, \quad x = S \sqrt{\frac{2}{27}}$$

$$y^2 - 2x^2 = \frac{S^2 \cdot 4}{27}, \quad y = \frac{S \cdot 2}{\sqrt{27}}$$

$$\text{Radiusvector} = \sqrt{3x^2} = \frac{S}{3} \sqrt{2}$$

Da nun der betr. Punkt der Begrenzungscurve ebenfalls im Abstände  $S/3$  vom Endpunkte der Hypotenuse liegt, so muss das Stück zwischen beiden Punkten wiederum  $S/3$  sein und verhält sich mithin zum  $Ro$  der Blattecurve wie  $1 : \sqrt{2}$  oder wie die Seite eines Quadrats zur Diagonale.

Der  $Ro$  der Begrenzungscurve ist hiernach

$$= \sqrt{\frac{S^2}{9} + \frac{S^2 \cdot 2}{9}} = \frac{S}{3} \sqrt{3} = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

Es war für diesen Fall

$$\sqrt{x^2} = 2 \sqrt{y^2}$$

also auch

$$3\sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}, \quad 27y^3 = S^2$$

$$y = \frac{S}{\sqrt{27}} \quad \sqrt{x^2} = \frac{2\sqrt{S^2}}{3} \quad x^2 = \frac{8S^2}{27} \quad x = S\sqrt{\frac{8}{27}}$$

$$m = \sqrt{S^2 k} = \sqrt{\frac{S^3}{\sqrt{27}}} = \frac{S}{\sqrt{3}} = Ro \quad n = \sqrt{S^2 x} \\ = \sqrt{S^3} \sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Also  $m : n = 1 : \sqrt{2}$  und Inhalt des Dreiecks

$$= \frac{S^2 \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{S^2}{3\sqrt{2}}$$

Hier ist auch derselbe Fall, wo die Entfernung des Ellipsenbrennpunktes vom Anfangspunkt gleich ist dem  $Rv$  an den Berührungspunkt der Begrenzungscurve. Denn

$$a = 2b, \quad \text{also} \quad e^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 = \frac{3S^2}{9} = \frac{S^2}{3} \quad \text{und}$$

$$e = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

In diesem Falle bilden beide Radiivectoren von den Brennpunkten an

den Berührungspunkt  $O$  einen rechten Winkel miteinander. Die unter  $45^\circ$  gegen beide Achsen laufende Verbindungslinie der Culminationspunkte ist

$$(y_1 - x_1)\sqrt{2} = \frac{S}{\sqrt{27}} (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} - \left(\frac{2S\sqrt{2}-1}{\sqrt{27}}\right) = D$$

§ 11.

Gehen wir nun an die Aufsuchung der Tangentengleichung. Der Weg hierzu ist folgender: Man zieht einen Radiusvector und stellt dessen Gleichung auf. Dann stellt man die Gleichung einer zum  $Ro$  parallelen Secante auf, dass dann eine zu beiden senkrechte Linie und ermittelt dadurch den allgemeinen Ausdruck für den Abstand zwischen  $Ro$  und Secante. Dieser Abstand wird ein Maximum, wenn die Secante zur Tangente wird. Bei Aufsuchung dieses Maximi zeigt es sich, dass es damit gleichbedeutend ist, wenn man für den Abschnitt  $p$ , welchen die Secante auf der  $X$ -Achse rechts vom Anfangspunkte erzeugt, das Maximum aufsucht, weil zwischen  $A$  und  $p$  ein festes Verhältniss besteht, denn  $A$  ist  $= p \cdot \cos \alpha$ . In der Figur ist

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} : y_1 = p : A$$

ferner

$$x_1 - p : y_1 = x : y$$

Mithin ist die Ermittlung von  $A$  erst durch  $p$  möglich und es ist daher nur von diesem das Maximum aufzusuchen. Es ist

$$p = \frac{x_1 y - y_1 x}{y} = \text{Maximum.}$$

Der Nenner  $y$  kann, da der  $Ro$  gegebene constante Coordinaten hat, für die Ermittlung wegfallen, und wir verwandeln nunmehr die Blattcurvencoordinaten in solche der Begrenzungscurve, da sonst nicht  $y$  in  $x$  übergeführt werden kann. Es ist

$$x_1 y - x y_1 = \sqrt{x_1 y_1^2 \cdot x^2 y} - \sqrt{x y^3 \cdot x_1^2 y_1}$$

Hier kann Factor  $\sqrt{xy}$  als constante Grösse wiederum herausgezogen werden. Es bleibt:

$$\sqrt{x \cdot x_1 y_1^2} - \sqrt{y \cdot x_1^2 y_1} = \text{Maximum.}$$

Variiren wir jetzt  $\sqrt{x_1}$  als  $\sqrt{x} \pm z$ , dann ist

$$\sqrt{x_1^2} \sqrt{2z \sqrt{x_1} + \sqrt{x_1^2}} = \sqrt{S^2} \\ \mp 2z \sqrt{x_1}$$

Wir haben also:

$$\sqrt{x_1 y_1^2} - \sqrt{y_1 x_1} \quad \text{oder} \quad \sqrt{x_1 y_1^2} - \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x_1^2 y_1} >$$

$$(\sqrt{x_1 x z}) (\sqrt{y_1^2 \mp 2z \sqrt{x_1}}) - \sqrt{\frac{y}{x}} (\sqrt{x_1^2 \mp 2z}) \sqrt{y_1^2 \mp 2z \sqrt{x_1}}$$

$$\sqrt{x_1 y_1^2} - \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x_1^2 y_1} > \sqrt{x_1 y_1^2} \pm z \sqrt{y_1^2 \mp 2z \sqrt{x_1^2}}$$

$$- \sqrt{\frac{y}{x}} (\sqrt{x_1^2 \pm 2z \sqrt{x_1}}) \sqrt{\sqrt{y_1^2 \mp 2z \sqrt{x_1}}}$$

bringe die negativen Glieder auf die andere Seite:

$$\sqrt{\frac{y}{x}} (\sqrt{x_1^2 \pm 2z \sqrt{x_1}}) \sqrt{\sqrt{y_1^2 \mp 2z \sqrt{x_1}}} > \sqrt{\frac{y}{x^2}} \sqrt{x_1^2 y_1}$$

$$\pm z (\sqrt{y_1^2} - 2 \sqrt{x_1^2})$$

quadriere jetzt

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2}} (\sqrt{x_1^4 \pm 4z x_1}) \sqrt{y_1^2 \mp 2z \sqrt{x_1}}$$

$$> \sqrt{\frac{y^3}{y^2}} \sqrt{x_1^4 y_1^2 \pm 2z} \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x_1^2 y_1} (\sqrt{y_1^2} - 2 \sqrt{x_1^2})$$

aufgelöst

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2}} \sqrt{x_1^4 y_1^2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} 4z x_1 \sqrt{y_1^2} \mp \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} 2z x_1 \sqrt{x_1^2}$$

$$> \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} \sqrt{x_1^4 y_1^2} \pm 2z \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x_1^2 y_1} - 2 \sqrt{x_1^2}$$

$$\text{dividire } 2z \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad z = 0$$

die beiden Seiten werden gleich

$$\sqrt{\frac{y}{x}} y_1 (2 \sqrt{y_1^2} - \sqrt{x_1^2}) = \sqrt{x_1^2 y_1} (\sqrt{y_1^2} - 2 \sqrt{x_1^2})$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x_1^3} (2 \sqrt{y_1^2} - \sqrt{x_1^2}) = \sqrt{y_1 x^2} (\sqrt{y_1^2} - 2 \sqrt{x_1^2})$$

multiplicire mit  $\sqrt{x_1 y_1^3}$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x_1^2 y_1} (2 \sqrt{x_1^2 y_1^4} - \sqrt{x_1^4 y_1^2}) = \sqrt{y_1^2 x_1} (\sqrt{y_1^4 x_1^2} - 2 \sqrt{x_1^4 y_1^2})$$

führe jetzt die Coordinaten der Blattcurve wieder ein. Es ist

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} \cdot y_1 (2x_1^2 - y_1^2) = x_1 (x_1^2 - 2y_1^2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1 (2x_1^2 - y_1^2)}{x_1 (x_1^2 - 2y_1^2)}$$

da nun die Winkeltangente des  $Ro = \frac{y}{x}$  und die der Secante, weil sie ihm parallel ist, auch  $= \frac{y}{x}$  sein muss, so ist letzterer Ausdruck gleich der Winkeltangente der Tangente im Punkte  $x_1 y_1$  und die Tangentengleichung lautet:

$$y - y_1 = \frac{y_1 (2x_1^2 - y_1^2)}{x_1 (x_1^2 - 2y_1^2)} (x - x_1)$$

Wir finden also unsere Erwartung vollkommen bestätigt, dass die charakteristischen Merkmale der Culminationspunkte in der Tangentengleichung wiederkehren. Der Zähler  $2x_1^2 - y_1^2$  ist für den  $y$ -Culminationspunkt bestimmt, denn setzen wir

$$2x_1^2 = y_1^2$$

(wie in § 10. ermittelt), so wird die Winkeltangente  $= 0$ , d. h. die Tangente ist der  $X$  Achse parallel. Der Nenner hingegen bestimmt den  $X$  Culminationspunkt, denn sobald

$$2y_1^2 = x_1^2$$

ist, wird die Winkeltangente  $= \infty$ , d. h. die Tangente steht auf der  $X$  Achse senkrecht.

Setzt man in obigem Ausdruck  $x_1 = y_1$ , so ist dies offenbar der Fall der Tangente im Symmetriepunkt, und es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

d. h. die Tangente steht unter  $45^\circ$  von links oben nach rechts unten gegen beide Achsen geneigt.

Bemerkenswert ist, dass, obwol die Blattcurve mit den Achsen nur den Anfangspunkt gemein hat, dennoch die Gleichung zwei Werte ergiebt, jenachdem man  $x_1$  oder  $y_1 = 0$  setzt. Ist

$$y_1 = 0$$

so hat man Tangente  $= 0$ . Ist

$$x_1 = 0$$

so ist die Tangente  $= \infty$ . Daraus folgt, dass es im Anfangspunkt 2 Tangenten giebt und zwar sind dies die Achsen selbst.

Sowol in der Tangentengleichung der Begrenzungs- wie der Blattcurve kommt der Parameter  $S$  nicht mehr vor. Dies beweist, dass alle derartigen Curven untereinander proportional sind und daher keinen Punkt gemein haben können, nur die Blattcurven haben den Anfangspunkt gemein.

Wir sind allerdings bei unserem Aufsuchen der Tangentengleichung von einer rechts vom  $Ko$  liegenden Secante ausgegangen. Da aber die resultirende Gleichung dennoch allen Lagen der Tangente Rechnung trägt, so beweist schon dies, dass das Ergebniss dasselbe gewesen wäre, wenn wir die Secante links vom  $Ko$  angenommen hätten. Wer es übrigens versucht, wird meine Behauptung bestätigt finden.

## § 12.

Wenn wir auf Grund der gefundenen Resultate nunmehr die Winkel feststellen, welche in zwei zusammengehörigen Punkten der Blatt- und der Begrenzungscurve zwischen den betr. Radiivectoren und den Tangenten an die betr. in diesen Punkten entstehen, so ergiebt sich der auffallende Umstand, dass diese Winkel immer gleich sind. Ermitteln wir zuerst diesen Winkel für die Begrenzungscurve. Es ist

$$\delta = \alpha + \beta$$

also

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{also}$$

$$\delta \delta = \frac{\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}}{1 - \frac{y}{x} \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{y\sqrt{x} + x\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})}{\sqrt{x^4} - \sqrt{y^4}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}}$$

Ebenso haben wir bei der Blattcurve

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \beta_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y}{x} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_1 &= \frac{\frac{y}{x} - \frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{(2x^2 - y^2)}{x^2 - 2y^2}} \\ &= \frac{xy(x^2 - 2y^2 - 2x^2 + y^2)}{x^4 - 2x^2y^2 + 2x^2y^2 - y^4} = -\frac{xy(x^2 + y^2)}{x^4 - y^4} = -\frac{xy}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$

führen wir dies in die Coordinaten der Begrenzungscurve über, so ist

$$\operatorname{tg} \delta_1 = -\frac{xy}{\sqrt{x^2y^4} - \sqrt{x^4y^2}} = -\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2} - \sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}}$$

also  $\delta = \delta_1$

wonach die Construction einer Tangente an die Blattcurve sehr einfach ist.

Wenn wir nun 2 symmetrisch liegende Radienvectoren annehmen, so lässt sich der zwischen beiden liegende Winkel leicht bestimmen, da das  $x$  = dem  $y$  des andern Curvenpunktes und umgekehrt. Es ist somit

$$\operatorname{tg} E = \frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

oder, auf den kleineren Winkel bezogen

$$= \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Dies ist aber der halbe reciproke Wert der Tangente des Winkels zwischen Tangente und  $Rv$ . Hieraus resultirt erstens der Satz:

Das Product der Tangenten der Winkel zwischen  $Ro$  und

Tangente an die Curve und zwischen beiden symmetrischen Radiivectoren ist constant =  $\frac{1}{2}$ .

Zweitens könnte man auf Grund dieses Umstandes eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Blattcurve construiren. Es sei  $st$  die Tangente im Punkte  $i$  an die Curve (Fig. 10). Dann finden wir mittelst des Zirkels sogleich den zu  $ri$  gehörigen  $Ro$ .  $rk$ . Nun fallen wir von  $k$  eine Senkrechte auf  $ri$ , verlängern über  $l$  hinaus, bis diese die Tangente schneidet in  $q$ .

Dann muss nach Obigem sein

$$\frac{ql}{li} \cdot \frac{lk}{rl} = \frac{1}{2} \text{ oder } li \cdot sl = 2ql \cdot lk$$

d. h. also, wenn man  $ql$  nochmals verlängert um sich selbst, sodass  $oq = ql$ , dann liegen die 4 Punkte  $o$ ,  $i$ ,  $k$ ,  $r$  auf der Peripherie eines Kreises, in welchem  $ei$  und  $ok$  sich schneidende Sehnen sind. Da mir nun dieser Kreis durch die 3 Punkte  $r$ ,  $i$ ,  $k$  gegeben ist, so hat man nur die Senkrechte  $kl$  zu fällen, durch Verlängerung den Punkt  $o$  zu erhalten,  $ol$  zu halbiren und hat dann in  $qi$  die gesuchte Tangente.

Die im vorigen § gefundene Tangentengleichung muss, wie auf der Hand liegt, immer zusammengehörigen parallelen Tangenten entsprechen, mögen auch die Berührungspunkte wie natürlich verschiedene Coordinaten haben. Denn zu jedem Punkte links der Symmetrie Achse gibt es notwendig einen rechts derselben, dessen Tangente zur Tangente im Ersteren parallel ist. Es müsste also sein

$$\frac{y}{x} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2} = \frac{y_1}{x_1} \frac{2x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 - 2y_1^2}$$

Eine weitere Behandlung dieser Gleichung verlangt indes vorherige Verwandlung in die Coordinaten der Begrenzungscurve für  $xy$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt{x^2 y}}{xy^2} \right)^2 \frac{(2\sqrt{x^2 y^4} - \sqrt{x^4 y^2})^2}{(\sqrt{x^2 y^4} - 2\sqrt{x^4 y^2})^2} = \frac{(2x_1^2 - y_1^2)^2}{(x_1^2 - 2y_1^2)^2} = \frac{\sqrt{x^2} (2\sqrt{y^2} - \sqrt{x^2})^2}{y^2 (\sqrt{y^2} - 2\sqrt{x^2})^2} \\ & = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{S^2} - \sqrt{x^2}} \cdot \frac{(2\sqrt{S^2} - 3\sqrt{x^2})^2}{(\sqrt{S^2} - 3\sqrt{x^2})^2} \\ & = \frac{4\sqrt{S^2 x^2} - 12\sqrt{S^2 x^4} + 9\sqrt{x^6}}{S^2 - 6\sqrt{S^4 x^2} + 9\sqrt{S^2 x^4} - \sqrt{S^4 x^2} + 6\sqrt{S^2 x^4} - 9\sqrt{x^6}} \\ & = \frac{S^2 \cdot 7\sqrt{S^4 x^2} + 15\sqrt{S^2 x^2} - 9\sqrt{x^6}}{\dots} \end{aligned}$$

$$= \frac{y_1^2(2y_1^2 - y_1^2)^2}{x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2}$$

$$(4\sqrt{S^2x^2} - 12\sqrt{y^2x^4} + 9\sqrt{x^6})x_1^2(x_1^4 - 2y_1^2)^2$$

$$= (S^2 - 7\sqrt{S^4x^2} + 15\sqrt{S^2x^4} - 9\sqrt{x^6})y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2$$

$$9\sqrt{x^6}[x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 + y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2]$$

$$- 3\sqrt{S^2x^4}[4x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 + 5y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2]$$

$$+ \sqrt{S^4x^2}[4x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 + 7y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2] = S^2y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2$$

Ich setze nun

$$x_1^2(x_1^2 - 2y_1^2)^2 = c \quad \text{und} \quad y_1^2(2x_1^2 - y_1^2)^2 = d$$

dann lautet die Gleichung:

$$9\sqrt{x^6}(c+d) - 3\sqrt{S^2x^4}(4c+5d) + \sqrt{S^4x^2}(4c+7d) = S^2d$$

$$\sqrt{x^6} - 3\sqrt{S^2y^4} \frac{(4c+5d)}{9(c+d)} + \sqrt{S^4x^2} \frac{(4c+7d)}{9(c+d)} = \frac{S^2d}{9(c+d)}$$

$$\left[ \sqrt{x^2} - \sqrt{S^2} \frac{(4c+5d)}{9(c+d)} \right]^3 - 3\sqrt{S^4x^2} \frac{(4c+5d)^2}{9^2(c+d)^2} + \sqrt{S^4c^2} \frac{(4c+7d)}{9(c+d)}$$

$$= \frac{S^2d}{9(c+d)} - \frac{S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3}$$

$$\left[ \sqrt{x^2} - \sqrt{S^2} \frac{(4c+5d)}{9(c+d)} \right]^3 - \left[ \sqrt{x^2} - \sqrt{S^2} \frac{(4c+5d)}{9(c+d)} \right]$$

$$\cdot 3\sqrt{S^4} \left[ \frac{(4c+5d)^2}{9^2(c+d)^2} - \frac{3(4c+7d)(c+d)}{9^2(c+d)^2} \right]$$

$$= \frac{S^2d}{9(c+d)} - \frac{S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3} + \frac{2S^2(4c+5d)^3}{9^3(c+d)^3} - \frac{9S^2(4c+7d)(c+d)}{9^2(c+d)^2}$$

$$\left[ \sqrt{x^2} - \sqrt{S^2} \frac{(4c+5d)}{9(c+d)} \right]^3 - \left[ \sqrt{x^2} - \sqrt{S^2} \frac{(4c+5d)}{9(c+d)} \right]$$

$$\cdot 3\sqrt{S^4} \left[ \frac{16c^2 + 40dc^2 + 25d^2 - 12c^2 - 33dc - 21d^2}{9^2(c+d)^2} \right]$$

$$= c^2 + 7dc + 4d^2 = 4(c+d)^2 - dc$$

$$\frac{S^2}{2^3(6+d)^3} [d \cdot 9^2 \cdot (c+d)^2 + 2(4c+5d)^3 - 9^2(4c+7d)(c+d)^2]$$

$$= 9^4(c+d)^2(4c+7d-d) = -9^2(c+d)^2(4c+6d)$$

$$= -\frac{S^2}{9^3(c+d)^3} [9^2(c+d)^2(4c+6d) - 2(4c+5d)^3]$$

$$= -\frac{2S^2}{9^3(c+d)^3} [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]$$

Setze

$$\left[ \sqrt{x^2} - \sqrt{S^2 \frac{4c+5d}{9(c+d)}} \right] = p+q$$

$$p^3 + 3pr(p+r) + r^3 - (p+r)3\sqrt{S^4 \frac{(4c+d)^2 - dc}{9^2(b+d)^2}}$$

$$= - \frac{2S^3}{9^3(c+d)^3} [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]$$

setze

$$pr = \sqrt{S^4 \frac{4(c+d)^2 - dc}{9^2(c+d)^2}}, r^3 = \frac{S^4 [4(c+d)^2 - dc]^3}{9^5(c+d)^3 p^3}$$

$$p^3 + \frac{S^4 [4(c+d)^2 - dc]^2}{9^5(c+d)^6 p^3} = - \frac{2S^2}{9^3(c+d)^3} [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]$$

$$p^6 + \frac{2S^2 p^3 [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]}{9^3(c+d)^3} = - \frac{S^4 [4(c+d)^2 - dc]^3}{9^6(c+d)^6}$$

$$+ \frac{S^3 [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]^2}{9^6(c+d)^6}$$

$$+ \frac{S^4 [9^2(c+d)^2(2c+3d) - 4c+5d]^3}{9^6(c+d)^6}$$

$$p^3 + \frac{S^2 [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]^2}{9^3(c+d)^3}$$

$$= \frac{S^4}{9^6(c+d)^6} \{ [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]^2 = \{4(c+d)^2 - dc\}^3 \}$$

Um zu sehen, ob der rechtsseitige Ausdruck überhaupt einen positiven Wert haben kann — wenn er das nicht könnte, wäre das Resultat imaginär und also die Lösung auf diesem Wege unmöglich — nehmen wir der Kürze halber einmal  $c = d$  an, ein Fall, der eintritt, wenn die Tangente unter  $45^\circ$  geneigt. Dann wird die Klammer:

$$\{9^2 \cdot 4c^2 \cdot 5c - 9^3 c^3\}^2 - 18c^2 - c^3\}^3 = (9^2 \cdot 20 \cdot c^3 - 9^3 c^3)^2 - 15^3 \cdot c^6$$

hier kann  $b^6$  ausfallen, da es nur auf den anderen Factor ankommt,

$$9^4 \cdot (20-9)^2 - 15^3 = 3^6 \cdot 11^2 - 5^3 \cdot 3^3 = 3^3(3^5 \cdot 11^2 - 5^3)$$

$$= 3^3(243 \cdot 121 - 125)$$

was positiv bleibt; also hat die Gleichung eine richtige Lösung

$$p^3 = - \frac{S^2 [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3] \pm S^2 \sqrt{[9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]^2 - [4(c+d)^2 - dc]^3}}{9^5(c+d)^3}$$

$$p+r = \sqrt{x^2} = \frac{\sqrt{S^2(4c+5a)}}{6(c+d)} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)}$$

$$\left[ \sqrt{\frac{\sqrt{9[(c+d)^2(2c+3d)-(4c+5d)^2]^2 - 4(c+2)^2 - dc}^3}{\text{Klammer} = f^3 \text{ gesetzt} \quad = g^2 \text{ gesetzt}} - [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]} \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\sqrt{9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]^2 - [4(c+d)^2 - dc]^3}{+ [9^2(c+d)^2(2c+3d) - (4c+5d)^3]} \right]$$

$$\sqrt{x^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)} \left\{ (4c+5d + \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3} - \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}) \right.$$

$$\sqrt{y^2} = \frac{\sqrt{S^2}}{9(c+d)} \left\{ \underbrace{9c+9d-4c-5d}_{5c+4d} - \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3} \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3} \right\}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{S}}{3\sqrt{c+d}} \sqrt{[(4c+5d) + \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3} - \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}]}$$

$$\sqrt{xy^2} = x = \frac{S}{27\sqrt{(c+d)^3}} \left\{ 5c+4d - \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3} \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3} \right\} \sqrt{4c+5d + \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}-f^3} - \sqrt{\sqrt{f^6-g^6}+f^3}}$$

Wenn man bedenkt, dass schon  $c$  und  $d$  Grössen 6ten Grades sind,  $f$  und  $g$  also ebenfalls, so leuchtet die angegebene Complicirtheit des Ausdrucks ein, der allerdings ja gestattet, wenn  $x_1 y_1$  gegeben sind, den Punkt  $xy$  zu bestimmen, dessen Tangente mit der in  $x_1 y_1$  parallel läuft, niemals aber diese Bestimmung auf Grund irgend einer Beziehung zwischen  $x_1 y_1$  und  $xy$  zulässt.

Die Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten zweier parallelen Tangenten ist ein Durchmesser der Curve, dessen Länge sich auf Grund der vorstehenden Formel für jeden einzelnen Fall berechnen lässt.

Die allgemeine Formel für diese Länge ist ihrer Complicirtheit wegen zu irgend welchen Operationen ganz untauglich und müssen wir uns daher darauf beschränken, einige specielle Fälle zu untersuchen.

Nachdem wir die Culminationspunkte, schon analysirt, deren Parallel-Tangenten die Achsen selbst sind, ist wesentlich der Fall von Interesse, wo die Tangenten der Symmetrie-Achse parallel laufen, also unter  $45^\circ$  gegen beide Achsen.

Dann ist  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  also

$$y_1(2x_1^2 - y_1^2) = x_1(x_1^2 - 2y_1^2)$$

$$2x_1^2 y_1 - y_1^3 = x_1^3 - 2x_1 y_1^2$$

$$x_1^3 + y_1^3 = 2x_1 y_1 (x_1 y_1 (x_1 + y_1))$$

dividire durch  $(x_1 + y_1)$

$$x_1^2 + y_1^2 - x_1 y_1 = 2x_1 y_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 3x_1 y_1 = \sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

$$27x_1^3 y_1^3 = S^2 x_1^2 y_1^2$$

$$27x_1 y_1 = S^2$$

$$x_1 y_1 = \frac{S^2}{27}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 y_1 = \frac{2S^2}{27} \\ x_1^2 + y_1^2 = \frac{3S^2}{27} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x_1 + y_1)^2 &= \frac{5S^2}{27} \\ (x_1 - y_1)^2 &= \frac{S^2}{27} \end{aligned}$$

$$x_1 + y_1 = S \sqrt{\frac{5}{27}}$$

$$x_1 - y_1 = S \sqrt{\frac{1}{27}}$$

Inhalt des zw. beiden  $Ro$  einschl. Dreiecks

$$= \frac{x_1^2 - y_1^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 27} S^2$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{S}{2\sqrt{27}} (\sqrt{5} \pm 1)$$

Da beide Tangenten-Berührungspunkte offenbar symmetrisch liegen, so ist das  $a$  des einen gleich dem  $y$  des andern und umgekehrt.

$$Rv = \sqrt{x_1^2 + k_1^2} = \frac{S}{2\sqrt{27}} \sqrt{5+1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{S\sqrt{12}}{2\sqrt{27}} = \frac{S}{3} = Rv$$

Der  $R_0$  im Berührungspunkt der  $45^\circ$  Tangente ist also ein Drittel der Constanten  $S$  und verhält sich zum  $R_0$  der Culminationspunkte wie  $1:\sqrt{2}$  d. h. wie die Seite eines Quadrats zur Diagonalen. Ferner ist der Durchmesser

$$D = (x_1 - y_1)\sqrt{2} = \frac{S\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}(\sqrt{5+1} - \sqrt{5-1}) = \frac{S\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$$

$$= D = S\sqrt{\frac{2}{27}}$$

Dies war aber oben als  $x$  des  $y$  Culminationspunktes gefunden worden, mithin haben wir den neuen Satz entdeckt, dass der kleinste Durchmesser — denn das ist Obiger offenbar — gleich ist der Ordinate bzw. Abscisse der Culminationspunkte.

Bestimmen wir den zwischen den Radiivectoren an dieser Berührungcurve den  $45^\circ$  Tangenten liegenden Winkel. Es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2 - y^2}{4xy}$$

wo

$$x = \frac{S(\sqrt{5+1})}{2\sqrt{27}}, \quad y = \frac{S(\sqrt{5-1})}{2\sqrt{27}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S^2(6+2\sqrt{5}) - S^2(6-2\sqrt{5})}{2(\sqrt{5+1})(\sqrt{5-1})S^2} = \frac{4\sqrt{5}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Für den Culminationspunkt ist der eingeschl. Winkel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4S^2}{27} - \frac{2S^2}{27}}{2 \cdot 2 \frac{S^2\sqrt{2}}{27}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Suchen wir noch zu obigen 2 Punkten der  $45^\circ$  Tangenten die entsprechenden Punkte der Begrenzungscurve. Wir hatten

$$x^2 = y_1 y$$

also

$$y = \frac{x^2}{y} = \frac{S^2(\sqrt{5}-1)^2}{S(\sqrt{5}-1)2\sqrt{27}} = \frac{S(6+2\sqrt{6})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)2\sqrt{27}}$$

$$= \frac{S(16+8\sqrt{5})}{8\sqrt{27}} = \frac{S(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{27}} = y$$

Ferner

$$y_1^2 = x \cdot x, \quad x = \frac{y^2}{x^2} = x_1 = \frac{S(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{27}}$$

$Rv = \sqrt{x^2+y^2} = S\sqrt{\frac{2}{3}}$  = gleich 3mal so gross wie der kleinste Durchmesser der Blattcurve.

Es ergeben sich nunmehr für den quäst. Punkt der  $45^\circ$  Tangente folgende Eigentümlichkeiten:

$$x \cdot y = x \cdot y = \frac{S^2}{27} \qquad x \cdot y = \frac{S^2}{27}$$

$$a = \sqrt{Sx^2} = \frac{S}{3} \sqrt{9-4\sqrt{5}}, \quad b = \sqrt{Sy^2} = \frac{S}{3} \sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$a \cdot b = \frac{S^2}{9}$$

$$m = \sqrt{S^2y} = \frac{S}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{5}+2}, \quad n = \sqrt{S^6x} = \frac{S}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$m \cdot n = \frac{S^2}{3}$$

worin eine sehr merkwürdige Beziehung sich ausdrückt.

Das Dreieck, was durch Verbindung der Scheitel der Ellipse entsteht, ist also  $1/3$  von dem durch  $m$ ,  $n$  und  $S$  gebildeten; das Dreieck aus den Coordinaten  $x$ ,  $y$  und dem  $Ro$  ist dann  $1/9$  des letzteren.

10) Wenn man die Endpunkte des kürzesten Durchmessers  $lh$  durch zu den Achsen parallele Linien mit dem auf der Symmetrie-Achse liegenden Punkte  $k$  verbindet, so entsteht das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck  $lkh$  und in diesem sind die Katheten

$$= \frac{lh}{\sqrt{4}} = \frac{S}{\sqrt{27}}$$

Da wir nun für den Culminationspunkt

$$y \text{ bzw. } x = \frac{2S}{\sqrt{27}}$$

hatten, so ist

$$kh = \frac{1}{2} og$$

d. h. die Tangente unter  $45^\circ$  halbirt  $og$ , da

$$kh = oi = \frac{og}{2}$$

Ebenso halbirt  $cl$  die Linie  $or$ .

„Demnach hat der kürzeste Durchmesser der Blattcurve die halbe Länge der Diagonale des umschriebenen Quadrats.“

Nach allem Obigen ist die geometrische Construction der Culminationspunkte, der  $45^\circ$  Tangenten und des kürzesten Durchmessers für eine gegebene Blattcurve äusserst einfach.

Nimmt man den zwischen 2 symmetrischen Radiivectoren eingeschl. Winkel zu  $61^\circ$  an, so muss das Dreieck, welches durch Verbindung der Peripheriepunkte entsteht, notwendig ein gleichseitiges sein. Zur Bestimmung dieses Falles setzen wir also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \sqrt{3}$$

Dann ist

$$x^4 - y^4 = 2 \sqrt{3} \cdot xy$$

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 12x^2y^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 16x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$x^2 + y^2 = 4xy = \sqrt{S^2 x^2 y^2}$$

$$64x^3y^3 = S^2 x^2 y^2, \quad xy = \frac{S^2}{64}$$

$$\sqrt{Sxy} = \frac{S}{4} = \sqrt{x^2 + y^2} = Ro \quad (\text{Siehe Figur vor. Seite.})$$

Wir erhalten also das überraschende Resultat, dass das in die Curve eingeschriebene gleichseitige Dreieck, welches mit einer Ecke im Anfangspunkt liegt, den 4ten Teil der Constanten  $S$  zur Seite hat. Bestimmen wir nun die Coordinaten

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{S^2}{16} \\ 2xy = \frac{S^2}{32} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x+y)^2 = \frac{S^2 \cdot 3}{32} \\ (x-y)^2 = \frac{S^2}{32} \end{array} \quad \begin{array}{l} x+y = \frac{S}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x-y = \frac{S}{4\sqrt{2}} \end{array}$$

$$x = \frac{S(\sqrt{3+1})}{8\sqrt{2}}, \quad y = \frac{S(\sqrt{3-1})}{8\sqrt{2}}$$

Die Punkte der Begrenzungscurve sind:

$$xy = \frac{S^2}{64} \quad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{3-1}} = \frac{3+2\sqrt{3+1}}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x} = 8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3} = 26+15\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x} = (2+\sqrt{3})^3, \quad y = \frac{S}{8} \sqrt{(2+\sqrt{3})^3}, \quad x = \sqrt{\frac{S^2}{64(2+\sqrt{3})^2}} \\ = \frac{S}{8} \sqrt{(2-\sqrt{3})^3}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ro = \frac{S}{8} \sqrt{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3} = \frac{S}{8} \sqrt{52} = \frac{S}{4} \sqrt{13}$$

tg des eingeschl. Winkels beider symm. Rven = 26.

### § 13.

Ein besonderer Specialfall ist der, wenn die Verbindungslinie zweier parallelen Tangenten, also ein Durchmesser der Blattcurve, parallel zu einer Achse ist. Dieser Specialfall ist mit einem andern identisch. Nämlich zu jedem  $x$  gehören 2 verschiedene  $y$  (ausser dem Anfangs- und dem Culminationspunkt), wie zu jedem  $y$  zwei  $x$  und darum muss auch die Auflösung der Blattcurvengleichung nach  $x$  2 Werte ergeben, wie auch die nach  $y$ . Für ein  $y$  hat also die Blattcurve 2 Schnittpunkte, deren Verbindungslinie gleich der Differenz der zwei  $x$ , d. h.  $= x_1 - x_2$  ist. Entsprechend ist für ein  $x$  der verticale Durchmesser  $= y_1 - y_2$ . Für obigen Fall nun, wo die Schnittpunkte für ein  $x$  oder ein  $y$  zugleich Berührungspunkte paralleler Tangenten sind, ist diese Differenz ein Maximum. Denn vor diesen Schnittpunkten, d. h. wenn diese näher beim Anfangspunkt liegen, convergiren die Tangenten in demselben nach dem Anfangspunkt; jenseits dieser Schnittpunkte convergiren sie in entgegengesetzter Richtung, mithin muss in beiden Fällen der Durchmesser abnehmen.

Es ist

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{S^2 x^2 y^2} \\ x^2 + y_1^2 &= \sqrt{S^2 x^2 y_1^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y^2 - z_1^2 &= \sqrt{S^2 x^2} (\sqrt{y^2} - \sqrt{y_1^2}) \\ \sqrt{y^4} + \sqrt{y^2 y_1^2} + \sqrt{y_1^4} &= \sqrt{S^2 x^2} \end{aligned}$$

Dividire durch letztere Klammer.

$$\sqrt{y_1^4} + \sqrt{y_1^2 y^2} + \sqrt{\frac{y^4}{4}} = \sqrt{S^2 x^2} - 3 \frac{\sqrt{y^4}}{4}$$

$$\sqrt{y_1^2} = -\frac{\sqrt{y^2}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{S^2 x^2} - 3 \frac{\sqrt{y^4}}{4}}$$

$$\sqrt{y_1^2} = \frac{\sqrt{4\sqrt{S^2 x^2} - 3\sqrt{y^4}} - \sqrt{y^2}}{2}$$

$$\sqrt{S^2 x^2} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{y^2}} \text{ eingeführt}$$

$$\sqrt{y_1^2} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 - 3y^2} - y}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{4x^2 + y^2} - y}{2\sqrt{y}}$$

$$y_1^2 = \frac{(\sqrt{4x^2 + y^2} - y)^2}{4y}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{(\sqrt{4x^2 + y^2} - y)^2}}{2\sqrt{y}}$$

$$y - y_1 = y - \frac{\sqrt{(\sqrt{4x^2 + y^2} - y)^2}}{2\sqrt{y}}$$

dies müsste als Maximum behandelt werden, zu welchem Behufe aber die Ersetzung der einen Coordinate durch die andere erforderlich ist. Allein die bisher befolgte Methode sowol als auch das Differentiiren liefert für diesen Fall eine Gleichung so hohen Grades, dass eine Auflösung unmöglich ist. Es muss daher, wie folgt, verfahren werden:

Nach Einführung der Begrenzungscurven-Coordinationen ersetzt man erst auf Grund der Gleichung

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}$$

alle  $y$  durch  $x$  und setzt hiernach

$$\sqrt{x} = z \cdot \sqrt{S}$$

worin  $z$  ein echter Bruch ist. Dann erhalten wir für den Durchmesser die Formel:

$$D = S \sqrt{1-z^2} [z^3 - \sqrt{0,5z[\sqrt{4(1-z^2)^3 + z^2(3-2z^2)^2} - z(3-2z^2)]}]$$

In diese setzt man nun successive für  $z$  von 1 ab fallende Werte ein.

$z =$	$D =$
0,95	unter 0,28 18 S
0,90	0,322 4033 S
0,89	0,324 9398 S
0,88	0,325 05 964 S
0,879	0,325 705 55 S
...	...
2,8785	0,32569 381 S
0,878	0,325 680 338 S

Das Maximum liegt also kurz vor oder hinter 0,32570555 S. Man kann durch Uebergehen auf die nächste Decimalstelle der Einsetzungswerte die Genauigkeit noch weiter treiben, doch wird die Rechnung deshalb so ungeheuer mühevoll, weil alsdann sogar die Mantissen der Logarithmen schon kleine Irrtümer veranlassen, welche das Resultat beeinflussen und man daher gezwungen ist, alle Operationen ohne Hilfe der Logarithmen auszuführen.

Begnügt man sich mit dem Werte  $z = 0,879$ , so hat man

$$\sqrt{x} = 0,879 \sqrt{S} \quad \text{und} \quad \sqrt{y} = 0,476 821 \sqrt{S}$$

$$\sqrt{y^2} = 0,227 359 \sqrt{S^2}, \quad \sqrt{x^2} = 0,772 641 \sqrt{S^2}$$

$$\sqrt{xy^2} = x_1 = 0,199 848 561 S, \quad \sqrt{x^2 y} = y = 0,368 411 454 S$$

und

$$y_1 = 0,042 705 898 S, \quad y - y_1 = D = 0,325 705 556 S$$

$\text{tg } \alpha$  des Winkels der Tangente mit der X Achse berechnet sich

$$= \frac{y}{x} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 - 2y^2} = \text{tg } \alpha = 0,444 698 \quad \text{und} \quad \alpha = 23^\circ 59' \text{ annähernd.}$$

Es muss also auch

$$\frac{y_1}{x} \frac{2x^2 - y_1^2}{x^2 - 2y_1^2} = \text{tg } \alpha$$

sein, was ein Versuch bestätigt.

§ 14.

Wenn man 2 symmetrisch liegende Hypotenusen  $S$  konstruirt, und auf diese die entsprechenden Senkrechten vom Anfangspunkt fällt, so ergibt sich eine weitere Eigentümlichkeit, die ad oculos die Polargleichung der Blattcurve demonstirt, welche auf  $S$  bezogen, lautet:

$$Rv = \rho = \frac{S \sin 2\alpha}{2}$$

Sie ergibt sich durch Einsetzen von

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha$$

$$\sqrt{\rho^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \sqrt{S \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \rho^2}$$

$$\rho = \sqrt{S \cdot \rho^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$\rho^3 = S \cdot \rho^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \rho = \frac{S \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

Es muss in der Figur offenbar Winkel

$$igf = vwi$$

sein; ausserdem, weil  $ip \perp vw$ , ist

$$vwi = vip$$

also auch

$$vtp = igf$$

Verlängern wir nun  $ip$  bis sie  $gf$  in  $s$  trifft, so muss demnach in dem entstehenden Dreieck  $isg$

$$gs = is$$

sein, weil die gegenüber liegenden Winkel gleich sind. Daraus folgt aber weiter, dass eine Senkrechte von  $s$  auf  $ig$ , letztere als Grundlinie halbiren würde und da diese Senkrechte der  $X$  Achse parallel „So resultirt, „dass auch die Hypotenuse selbst in  $s$  halbirt ist.“ „so ist jede Senkrechte auf eine Hypotenuse zugleich in ihrer Verlängerung Mittellinie für die zu jener symmetrisch liegenden Hypotenuse.“ Dann ist also

$$gs = is = sf$$

und  $isf$  ist

$$= 2\alpha = igf + gis$$

Da nun  $iu \perp gf$ , so ist

$$iu = ip$$

und da

$$is = sf = \frac{S}{2}$$

so haben wir unmittelbar:

$$\sin 2\alpha = \frac{iu}{is} = \frac{\rho}{S/2}$$

oder

$$\rho = \frac{S}{2} \sin 2\alpha$$

wie oben entwickelt.

Der Punkt  $s$  liegt für alle Hypotenusen immer auf der Peripherie des mit  $S/2$  um  $i$  beschriebenen Kreises. Wir haben hier also die Begründung für die Lübsen'sche die continuirliche Construction der Blatteurve mittelst deren Polargleichung; eine Begründung die Lübsen naturgemäss nicht liefern konnte, weil ihm die Herkunft der Curve unbekannt war.

Wenn wir nun auch die Polargleichung der Begrenzungscurve aufstellen wollen, so haben wir ebenso

$$x = \rho \cdot \cos \alpha, \quad y = \rho \cdot \sin \alpha$$

und

$$\sqrt{\rho^2} (\sqrt{\cos^2 \alpha} + \sqrt{\sin^2 \alpha}) = \sqrt{S^2}, \text{ mit 3 potenzirt:}$$

$$\overbrace{\rho^2}^1 [\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 3\sqrt{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha (\sqrt{\cos^2 \alpha} + 3\sqrt{\sin^2 \alpha})] = S^2$$

da nun

$$\sqrt{\cos^2 \alpha} + \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{S^2}{\rho^2}}$$

und wir diesen Wert einführen können, so ist die Gleichung:

$$\rho^2 + 3\sqrt{S^2} \rho^4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = S^2$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

also:

$$\rho^2 + 3\sqrt{S^2} \rho^4 \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = S^2$$

Aus dieser und der obigen Gleichung lässt sich nunmehr eine dritte ableiten, welche die Beziehung zwischen den Radiivectoren beider Curven mit demselben Neigungswinkel ausdrückt. Nennen wir den  $R$  der Begrenzungscurve  $R$ , den der Blatteurve  $r$ , so ist offenbar:

$$R^2 + 3\sqrt{R^4 r^2} = S^2$$

woraus sich bei einem gegebenen  $Rv$  der andre finden lässt. Am leichtesten ist dies, wenn beide Radiivectoren ein festes geometrisches Verhältniss haben. Z. B. es sei

$$R = 2r$$

d. h. der  $Rv$  an die Begrenzungscurve wird von der Blatteurve halbiert. Dann ist:

$$R^2 + 3\sqrt{\frac{R^6}{4}} = S^2 = R^2 \left(1 + \frac{3}{\sqrt{4}}\right) = S^2, \quad R^2 = \frac{S^2 \sqrt{4}}{\sqrt{4+3}}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{S^2 \sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} - 3\sqrt{S^2 x^2 y^2} = S^2 - 3\sqrt{S^2 x^2 y^2}$$

$$\frac{S^2 \sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} \text{ div durch } \sqrt{S^2}$$

$$\sqrt{S^4} - 3\sqrt{x^2 y^2} = \frac{\sqrt{4S^4}}{\sqrt{3+4}}$$

$$3\sqrt{x^2 y^2} = \frac{\sqrt{4S^4} + 3\sqrt{S^4} - \sqrt{4S^4}}{\sqrt{4+3}} = \frac{4\sqrt{S^4}}{\sqrt{4+3}}$$

$$\sqrt{x^2 y^2} = \frac{\sqrt{S^4}}{\sqrt{4+3}}$$

$$x^2 y^2 = \frac{S^4}{(\sqrt{4+3})^2}, \quad xy = \sqrt{\frac{S^2}{\sqrt{4+3}}}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{S^2 \sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} \\ 2xy &= \left(\sqrt{\frac{2S^2}{\sqrt{4+3}}}\right)^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= S^2 \left[ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} + \left(\sqrt{\frac{3}{\sqrt{4+3}}}\right)^2 \right] \\ (x-y)^2 &= S^2 \left[ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} - \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4+3}}}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$x+y = S \sqrt{\frac{4}{\sqrt{4+3}} + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+3}}}\right)^2}$$

$$x-y = S \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+3}} - \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4+3}}}\right)^2}$$

ändere diese Werte ab, indem ich Zähler und Nenner mit  $\sqrt{2}$  multiplicire:

$$x+y = \sqrt{\frac{2}{2+3\sqrt{2}} + \frac{2}{2+3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{2+3\sqrt{2}}}}$$

oder setzen wir

$$\left. \begin{aligned} x+y &= S \sqrt{k+k\sqrt{k}} \\ x+y &= S \sqrt{k-k\sqrt{k}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \frac{S}{2} [\sqrt{k-k\sqrt{2}} + \sqrt{k-k\sqrt{k}}] \\ y &= \frac{T}{2} [\sqrt{k+k\sqrt{k}} - \sqrt{k-k\sqrt{k}}] \end{aligned}$$

$$\frac{2+3\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\frac{x}{y} = \frac{S}{\sqrt{2+3\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{\sqrt{4-3\pm\sqrt{3}}}{\sqrt{4+3}}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{k+k\sqrt{k}}}{\sqrt{k-k\sqrt{k}}} = \frac{k+k\sqrt{k+k-k-2\sqrt{k^2-k^3}}}{k+k\sqrt{-k+\sqrt{k}}} = \frac{k-\sqrt{k^2-k^3}}{k\sqrt{k}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1-\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}} - \sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{\frac{\sqrt{4+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{4+3}}{\sqrt{4}}} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}} = \sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{4}}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{\sqrt{4}}} \end{aligned}$$

Ebenso für  $R = 3r$ . Es ist

$$R^2+3\sqrt{\frac{R^2}{9}} = S^2 = R^2(1+\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad R^2 = \frac{S^2}{1+\sqrt{3}}$$

$$x^2+y^2 = \frac{S^2}{1+\sqrt{3}} = S^2-3\sqrt{S^2x^2y^2}, \quad 3\sqrt{S^2x^2y^2} = \frac{S^2+\sqrt{3} \cdot S^2 - T^2}{1+\sqrt{3}}$$

durch  $\sqrt{S^2}$

$$\sqrt{x^2y^2} = \frac{\sqrt{S^4}}{\sqrt{9(1+\sqrt{3})}}, \quad \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{3}\sqrt{(1+\sqrt{3})}}$$

$$xy = \frac{S^2}{3(\sqrt{1+3\sqrt{3}})^2}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1+\sqrt{3}}{S^2} \\ 2xy &= \frac{2S^4}{3(\sqrt{1+\sqrt{3}})^3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{1+\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{1+\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} \sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2}$$

$$x-y = \frac{S^2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}$$

$$x = \frac{S}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}} \left( \sqrt{2\sqrt{1+\sqrt{3}}+2} + \sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2} \right)$$

$$y = \frac{S}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}} \left( \sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2} - \sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2} \right)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2} - \sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}}{\sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2} + \sqrt{3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2+3\sqrt{1+\sqrt{3}}-2-2\sqrt{9+9\sqrt{3}}-4}{3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2-3\sqrt{1+\sqrt{3}}+2} \\ &= \frac{3\sqrt{1+\sqrt{3}} - \sqrt{5+\sqrt{3}}}{2} = \text{tg} \end{aligned}$$

§ 15

Wir fanden § 10, dass im Culminationspunkte der Blattcurve die zugehörige Hypotenuse  $S$  in  $1/3$  ihrer Länge geteilt wird, und es war der entsprechende  $Rv$  der Begrenzungscurve  $= \frac{T}{\sqrt{3}}$ . Sucht man nun den Fall, wo  $S$  in  $1/3$  der Länge geteilt wird, so haben wir unmittelbar:

$$Rv = \sqrt{ab} = \sqrt{x^2+q^2} = \frac{S\sqrt{3}}{4}$$

und da das zwischen den beziehlichen Punkten von  $S$  liegende Stück  $= S/2$ , so ist der  $Rv$  der Begrenzungscurve

$$= \sqrt{\frac{S^2 \cdot 3}{16} + \frac{S^2}{4}} = \frac{S}{4} \sqrt{7}$$

Der  $Rv$  an diesen Punkt der Blattcurve ist also gleich  $3/4$  der obigen  $Rv$  an die Begrenzungscurve für den Culminationsfall. Ferner ist:

$$\sqrt{Sxy} = \frac{S\sqrt{3}}{4}, \quad Sxy = \frac{S^3 \cdot 3\sqrt{3}}{64}, \quad xy = \frac{S^2 \cdot 3\sqrt{3}}{64}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{S^2 \cdot 3}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2 \cdot 3\sqrt{3}}{32} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{32} (6+3\sqrt{3}) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{32} (6-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{4} \sqrt{\frac{3(2+\sqrt{3})}{2}}$$

$$y-x = \frac{S}{4} \sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{S\sqrt{3}}{S\sqrt{2}} [\sqrt{2+\sqrt{3}} \mp \sqrt{2-\sqrt{3}}] \text{ und}$$

$$x^2 + y^2 = S^2 - 3\sqrt{S^3 x^2 y^2} = S^2 - \frac{3S^3 \cdot 3}{16} = \frac{S^2 \cdot 7}{16}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{7 \cdot S^2}{16} \\ 2xy &= \frac{S^2 \sqrt{3}\sqrt{3}}{32} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{32} (14+3\sqrt{3}) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{32} (14-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x+y = \frac{S}{4\sqrt{2}} \sqrt{14+3\sqrt{3}}$$

$$x-y = \frac{S}{4\sqrt{2}} \sqrt{14-3\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{S}{3\sqrt{2}} [\sqrt{14+3\sqrt{3}} \pm \sqrt{14-3\sqrt{3}}]$$

Diese Ausdrücke lassen sich vereinfachen, indem man quadriert; so ist z. B.:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{S^2}{128} [14+3\sqrt{3}+14-3\sqrt{3}+1\sqrt{\underbrace{14^2-27}_{169}}] \\ &= \frac{S^2}{128} [28+26] = \frac{S^2 \cdot 27}{64} \text{ also } x = \frac{S \cdot 3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

$$y^2 = \frac{S^2}{128} [14 + 3\sqrt{3} + 14 - 3\sqrt{3} - 2 \cdot 13] \frac{S^2 \cdot 2}{128} = \frac{S^2}{64} \cdot \frac{S}{8} = y$$

Entsprechend

$$x^2 = \frac{S^2 \cdot 3}{128} [2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4-3}] = \frac{S^2 \cdot 3 \cdot 2}{128} = \frac{S^2 \cdot 3}{64}$$

$$x = \frac{S}{8} \sqrt{3} = \frac{x}{3}$$

$$y^2 = \frac{S^2 \cdot 3}{128} [2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{4-3}] = \frac{S^2 \cdot 3 \cdot 6}{128} = \frac{S^2 \cdot 9}{64}$$

$$y = \frac{S \cdot 3}{8} = 3y$$

Demnach

$$n = x + x^2 = \frac{S\sqrt{3} + S^3\sqrt{3}}{8} = \frac{S\sqrt{3}}{9} = 2 \text{ Rvbl.}$$

$m = y + y = \frac{S}{2}, \frac{m}{S} = \sin$  des Neigungswinkels  $= \frac{1}{2}$ , mithin ist dieser „Neigungswinkel  $= 30^\circ$  und wir finden den Satz, dass die Hypotenuse  $S$  unter  $30^\circ$  von der Begrenzungs- und Blattcurve in  $\frac{1}{4}$  der Länge geteilt wird.“

In diesem Falle hat der  $Rp$  der Blattcurve natürlich eine Neigung von  $60^\circ$  und der ihm symmetrische eine solche von  $30^\circ$ ; beide Radiivectoren der Blattcurve teilen somit den rechten in 3 gleiche Teile.

Die Blattcurve hat noch einen besonders charakteristischen Punkt, den wir nunmehr aufsuchen wollen. Es entsteht durch 2 symmetrische Radiivectoren und den zugehörigen Durchmesser allemal ein in die Curve eingeschriebenes gleichschenkliges Dreieck. Wenn man von allen diesen Dreiecken, die mit dem Inhalt 0 beginnen und auf der Symmetrie-Achse wieder mit 0 endigen das Maximal-Dreieck sucht, so ergeben sich eigentümliche Beziehungen. Die allgemeine Formel für den Inhalt dieses Dreiecks ist

$$J = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

wovon wir jetzt das Maximum suchen wollen. Der Nenner 2 kann wegbleiben, und dann führen wir wieder die Coordinaten der Begrenzungscurve ein.

$$2J = \sqrt{x^2y^4} - \sqrt{x^4y^2} > (\sqrt{x^2 \pm z})(\sqrt{y^4 \mp 2z\sqrt{y^2}}) \\ - (\sqrt{x^4 \pm 2z\sqrt{x^2}})(\sqrt{y^2 \mp z})$$

$$\sqrt{x^2y^2} - \sqrt{x^2y^6} > \sqrt{x^2y^4} \pm z\sqrt{y^4 \mp 2z\sqrt{x^2y^2}} - \sqrt{x^4y^2} \mp 2z\sqrt{x^2y^2} \pm z\sqrt{x^4}$$

$$4z\sqrt{x^2y^2} > z(\sqrt{x^4} + \sqrt{y^4})$$

div. durch  $z$  und  $0$  gesetzt:

$$4\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4}$$

$$6\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^4} = (\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2})^2 = \sqrt{S^4} = 6\sqrt{x^2y^2}$$

$$6^2 x^2 y^2 = S^4, \quad xy = \frac{S^2}{6\sqrt{6}}, \quad S^2 = 6\sqrt{S^2 x^2 y^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{S^2}{3\sqrt{6}} - 2xy \\ \frac{S^2}{6} - x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (x+y)^2 &= \frac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{6}+2) = \frac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ (x-y)^2 &= \frac{S^2}{6\sqrt{3}}(\sqrt{6}-2) = \frac{S^2}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$x+y = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}}$$

$$x-y = S\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}}$$

$$x = \frac{S}{2} \left[ \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{3\sqrt{\sqrt{3}}} \right] \text{ vereinfacht } x = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}}$$

$$y = \frac{S}{2} \left[ \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{6}\sqrt{3}} \right] \text{ vereinfacht } y = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$Rv = S/2 \sqrt{2} = 1\frac{1}{2}$  kleinsten Durchm.

Demnach ist  $J$  des eingeschlossenen Dreiecks

$$\frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{S^2}{12\sqrt{6}} \text{ als Maximum}$$

Die Tangente des eingeschlossenen Winkels im Anfangspunkt ist

$$= \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{S^2 \cdot 6\sqrt{6}}{12\sqrt{3}S^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

d. h. die Hypotenuse  $S$ , welche auf einem  $Rv$  senkrecht steht, wird von der Verlängerung des anderen so geschnitten, dass das Stück zwischen beiden sich zum  $Rv$  verhält, wie die Seite des Quadrats zur Diagonale. Es sind in diesem Falle die Coordinaten des zugehörigen Punktes der Begrenzungscurve:

$$x = S \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)^2}, \quad y = S \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)^2} \quad \text{und} \quad Rv = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Der hier gefundene Punkt der Blattcurve für das Maximal-Dreieck, was sich in dieselbe einschreiben lässt, hat nun auch die weitere Eigenschaft, dass die in den symmetrisch liegenden „Punkten an die Curve gezogenen Tangenten den Radiivectoren beziehlich parallel sind“, d. h. dass Radiivectoren und Tangenten zusammen einen Rhombus bilden. Dies können wir auf Grund des § 12 gefundenen Umstandes nachweisen, dass das Product der Tangenten der Winkel zwischen 2 symmetrischen Radienvectoren und der Tangente an die Curve mit dem  $Rv$  constant  $= \frac{1}{2}$  ist.

Ist in nebenstehender Figur

$$\text{tg } S \cdot \text{tg } E = \frac{1}{2}$$

so folgt, da wir  $\text{tg } E$  für diesen Fall  $= \sqrt{\frac{1}{2}}$  ermittelt hatten, dass auch

$$\text{tg } S = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

sein muss, d. h.

$$\text{Wkl. } E = \text{Wkl. } S$$

und somit Tangente

$$sp = Rv \text{ or}$$

Dasselbe gilt natürlich für die symmetrisch liegende Tangente und  $Rv$ ; daher sich beide Tangenten auf der Symmetrie-Achse schneiden müssen. Der Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkt ist

$$= \sqrt{2(x+y)} = \sqrt{2} \cdot S \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}} = S \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$$

Die kleine Diagonale dieses Rhombus ist

$$= (v-y)\sqrt{2}, \quad \text{also} \quad = S \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}$$

Wenn

$$\text{tg } E = \frac{1}{2} \quad \text{so muss} \quad \text{tg } \delta = 1, \quad \text{also} \quad \delta = 45^\circ$$

sein. Dann ist aber auch der Winkel zwischen  $S$  und dem zugehörigen  $Rv$  der Begrenzungscurve  $= 45^\circ$ , mithin ferner auch der zwischen beiden zusammengehörigen Radiivectoren beider Curven.

Dann aber ist die „Tangente an die Blattcurve dem  $Rv$  an die Begrenzungscurve parallel,“ die symmetrischen Lagen desgl., und somit bilden beide Tangenten und beide Radiivectoren wiederum einen Rhombus, dessen Inhalt sich wie folgt, berechnen lässt: Es ist

$$\frac{a-b}{\sqrt{ab}} = 1, \quad \sqrt{ab} = a-b, \quad \sqrt{\sqrt{S^2 x^2 y^2}} = \sqrt{S(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2})}$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}, \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{xy} = \sqrt{y^2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\sqrt{y^2 \frac{4}{b}}} = \frac{\sqrt{y(1+\sqrt{5})}}{2} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} x = \frac{8}{(1+\sqrt{3})^3} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2$$

Der symmetrische  $Rv$  hat also die umgekehrte Tangente und die Gleichung

$$y = x(\sqrt{5}+2)$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}, \quad \frac{x(\sqrt{5}+1)}{2} = a \quad \text{also}$$

$$x + \frac{x^2(\sqrt{5}+1)^2}{4} = \sqrt{S^2 x^2 \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} = \frac{x^2}{4} (5+2\sqrt{5}+1+4).$$

$$= \frac{x^2}{4} (10+2\sqrt{5}) = x^2 \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{6}$$

$$x^6 = \frac{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)^3}{8} = \frac{S^2 x^4 (\sqrt{5}+1)^2}{4}$$

$$x^2 \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{S^2}{\sqrt{5}+1}$$

$$x = S \sqrt{\frac{2}{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}} = S \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}$$

$$y = S \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2^2}} = S \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}}$$

Die Tangente muss also durch diesen Punkt gehen und die Winkel-Tangente

$$\frac{y}{x} = \sqrt{5}-2$$

haben. Ihre Gleichung lautet daher:

$$y - s\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} = (\sqrt{5}-2)\left(x - s\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}}}\right)$$

Wo sich Tangente und  $Ry$  treffen, muss also

$$y = x(\sqrt{5}+2)$$

sein. Dies führen wir ein, um die Coordinaten des Punktes zu erhalten:

$$x(\sqrt{5}+2) = s\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} - (\sqrt{5}-2)\left(x - s\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}\right)$$

$$x\sqrt{5}+2x = s\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} + x\sqrt{5}-2x - s(\sqrt{5}-2)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}$$

$$4x = s\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}}} - (\sqrt{5}-2)\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}}\right)$$

letzterer Ausdruck lässt sich vereinfachen als:

$$\frac{s}{\sqrt{10\sqrt{5}}}\sqrt{\frac{\sqrt{(5+1)+(\sqrt{-2})^2(\sqrt{-1})-2(\sqrt{-2})\sqrt{5-1}}}{\underbrace{5+4-4\sqrt{5}}_9} \cdot \frac{\sqrt{5-1}}{4}}$$

$$= \frac{s}{\sqrt{10\sqrt{5}}}\sqrt{\sqrt{5}+1+9\sqrt{5}-20-9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}+8}$$

$$- 4x = s\sqrt{\frac{10\sqrt{5}-20}{10\sqrt{5}}} - s\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}$$

$$x = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}, \quad y = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}} \cdot (\sqrt{5}+2)^2$$

$$y = \frac{s}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} \quad \text{tg des eingeschl. Winkels} = 2.$$

Dies sind die Coordinaten des Schnittpunktes zwischen Tangente und Radiusvector.

Der Inhalt des Dreiecks zwischen 2 symmetrisch liegenden Linien ist nun

$$= \frac{x^2 - y^2}{2}$$

also der des Rhombus das Doppelte

$$= x^2 - y^2$$

bzw. weil hier  $y > x$  muss es lauten  $y^2 - x^2$ . Mithin

$$J = \frac{S^2}{16} \left( \frac{\sqrt{5+2} - \sqrt{5-2}}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{oder} \quad J = \frac{S^2}{4\sqrt{5}}$$

Der erste Fall des Maximal-Dreiecks in der Blattecurve ist leicht zu construiren, weil die Tangente des eingeschlossenen Winkels am Scheitel

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist und jeder  $Rv$  Mittellinie zur Hypotenuse  $S$  des andern  $Rv$  ist. Dann ist in Figur 18

$$\frac{pq}{op} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

also das Verhältniss von Seite und Diagonale im Quadrat. Dasselbe besteht für  $rv : vr$ . Mithin verfährt man wie folgt: Lege  $S$  horizontal hin  $= ca$ , schlag einen Halbkreis darüber, errichte in der Mitte von  $S$  die Senkrechte  $fg$ , ziehe die Sehne  $cf$  und trag diese auf der Seite  $ce$  nach oben ab

$$ce = cf = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Verbinde nun  $e$  mit  $g$ , wo diese Linie den Kreis trifft, in  $h$ , verbinde ich mit  $e$  und  $d$ , so entspricht  $hc$  die Kathete  $m$ ,  $hd$  der Kathete  $n$  und die Senkrechte auf  $cd$ ,  $hi$  ist einer,  $hg$  der andre der gesuchten Radiivectoren.

Im zweiten Falle hatten wir

$$E = \frac{1}{2}$$

die Construction ist der Obigen ganz analog, da es nicht schwer hält, den betr. Winkel von der Mitte von  $S$  aus anzulegen.

## § 16.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch einer besonderen Beziehung der Begrenzungscurve zur Ellipse Erwähnung thun. Der  $Rv$  der Begr.-Curve ist

$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

derjenige der Blattcurve für zusammengehörige Punkte

$$= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Sxu} = \sqrt{Sxy}$$

also Summe der Quadrate der Radiivectoren

$$= x^2 + y^2 + \sqrt{S^2 x^2 y^2} = (\sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} - \sqrt{x^2 y^2})(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}) + \sqrt{S^2 x^2 y^2}$$

$$= \sqrt{S^2}(\sqrt{x^4} + \sqrt{y^4})$$

$$\sqrt{S^2 x^4} = a; \quad \sqrt{S^2 y^4} = b$$

also „Summe der Radiivectoren-Quadrate“

$$= a^2 + b^2$$

also gleich der Summe der Quadrate der Ellipse-Achsen. Das ist nun eine Eigenschaft der sog. conjugirten Durchmesser, und da unser  $Ro$  an die Begrenzungscurve ein Durchmesser ist, so muss der  $Rv$  an die Blattcurve gleich dem conjugirten Durchmesser sein. Ferner ist aber jener conjugirte Durchmesser parallel zur Tangente im Endpunkt des andern; somit muss der conjugirte Durchmesser zum  $Ro$  der Begrenzungscurve parallel laufen zur Hypotenuse  $S$  und die Länge des  $Ro$  zur Blattcurve haben. Darum ist

$$\text{Wkl. } foh = rso$$

und wenn  $br$  Mittellinie an  $S$  ist, so muss, wenn wir auf diesen

$$oe = op$$

machen,  $e$  ebenfalls ein Punkt der Ellipse sein, der dem Endpunkt des conjugirten Durchmessers symmetrisch liegt. Der eingeschlossene Winkel zwischen den conjugirten Durchmessern  $fo(xy)$  ist nun

$$= po(xy) + 1R$$

also

$$\sin fo(xy) = \cos po(xy) = \frac{po}{o(xy)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Folglich ist das Product der beiden Rven mit dem sin des eingeschl. Winkels

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 = ab$$

Wir hatten bisher nur eine (oder mit der Lübsen'schen) 2 discontinuirliche Construction der Blatt- und Begrenzungscurven kennen gelernt. In beifolgender Figur wird jedoch auch eine continuirliche veranschaulicht. Es sei  $ab$  die Hypotenuse  $R$ . Wenn diese im Mittelpunkte  $c$  durch den Radius

$$S/2 \equiv oc$$

mit  $o$  fest verbunden wird, so lässt sich  $oc$  um  $o$  drehen, wodurch der Kreisbogen  $mfcn$  entsteht und gleichzeitig gleitet  $a$  auf der  $Y$ -Achse,  $b$  auf der  $X$ -Achse entlang, so dass  $S$  alle Lagen innerhalb der Begrenzungscurve durchläuft. Errichtet man auf  $ab$  in  $c$  eine feste Senkrechte

$$cc = S/2$$

welche bei allen Lagen von  $S$  immer senkrecht darauf bleibt, und ergänzt die beiden Linien  $oc$  und  $cc$  durch die beiden  $of$  und  $cf$  (beide  $= S/2$ ) zu einem Rhombus, so wird dieser mit der Drehung von  $T$  seinen Wkl.  $\alpha$  ändern. Derselbe wird  $= 1R$ , wenn  $S$  auf einer Achse liegt, und wird  $= 0$ , wenn  $S$  unter  $45^\circ$  geneigt steht; immer muss  $of = ce$  sein und somit senkrecht auf  $ab$  stehen. Dann ist der Kreuzungspunkt von  $of$  und  $ab$  immer ein Punkt der Blattcurve. Nun bringt man an diesen Kreuzungspunkt  $d$  einen Stift an, der auf beiden Linien gleiten kann und dieser wird dann, wenn  $ab$  alle Lagen durchläuft, genau die Blattcurve aufzeichnen. Durch Anordnung desselben Rhombus auf der rechten Seite von  $cc$  und Verbindung der beiden Ecken  $f$  und  $g$  durch das Kniegelenk  $fhg$ , dessen Kniepunkt  $h$  auf  $hce$  gleiten kann, lässt es sich erreichen, dass der Abstand  $ad$  immer gleich dem Abstand  $kb$  ist und somit ist der Schnittpunkt von  $gi$  und  $ab = k =$  immer ein Punkt der Begrenzungscurve. Durch Anbringung eines auf beiden Linien gleitenden Stiftes ist also auch hier die Möglichkeit continuirlicher Aufzeichnung der Begrenzungscurve gegeben.

Uebrigens lässt sich die Lübsen'sche discontinuirliche Construction der Blattcurve in folgender Weise sehr vereinfachen: Man teilt in Figur die rechte Hälfte eines mitten auf der  $Y$ -Achse liegenden und die  $X$ -Achse von oben berührenden Kreises mit dem Durchmesser  $= S/2$  in eine gerade Anzahl gleicher Bogenstücke ein. Alsdann verbindet man sämtliche Teilpunkte von dem Viertelkreise bei 1 beginnend mit dem Anfangspunkte  $O$  durch Radiivectoren und zieht zugleich von allen Teilpunkten die zur  $Y$ -Achse parallelen Sehnen 1I, 2II, 3III etc. Die Winkel zwischen 2 aufeinander folgenden Radiivectoren müssen demzufolge, weil auf gleichen Bogen

stehend alle gleich sein. Rechnen wir nun unseren Polarwinkel von  $Ro$  ab, so ist allemal die zugehörige Sehne

$$= \frac{S}{2} \sin 2\alpha$$

Denn wenn man z. B. vom Teilpunkt  $8$  aus den Durchmesser  $8c$  zieht,  $c$  mit VIII verbindet  $= cd$ , so ist der Winkel

$$\angle c a = 2\alpha$$

weil Peripheriewinkel auf dem doppelten Bogen wie  $\alpha$  ( $8b1$ ). Dieser Winkel hat den

$$\text{sinus} = \frac{\text{Sehne } 8 \text{ VIII}}{S/2}$$

also

$$\text{Sehne } 8 \text{ VIII} = S/2 \sin 2\alpha = \rho$$

Man braucht mithin nur die zugehörigen Sehnen vom Anfangspunkt auf die entsprechenden Radiivectoren abzutragen, um successive alle Punkte der Blattcurve zu erhalten. Beim Radiusvector  $1o$  ist die Sehne  $= 0$ , die Curve beginnt also in  $o$  und tangirt den  $Ro o1$ . Auf der  $Y$ -Achse ist die Sehne

$$= S/2 \text{ also } \frac{1}{2} = S/2$$

was der Symmetriepunkt ist. Auf diese Weise erhält man, ohne den Winkel jedesmal verdoppeln zu müssen, sofort unmittelbar den betr. Radiusvector.

### § 17.

Nachdem wir die sonstigen Eigenschaften der Begrenzungs- und Blattcurve ziemlich gründlich kennen gelernt, rücken wir nun 2 Fragen näher, deren Lösung schwieriger scheint: die nach Inhalt und Umfang der besagten 2 Curven. Diese Probleme erscheinen bei Curven 3ten Grades besonders verwickelt und ich gestehe, dass ich lange nicht glaubte, sie in befriedigender Weise, namentlich ohne Beihülfe der Integral-Rechnung, lösen zu können. Dass dies mir aber dennoch und zwar auf merkwürdig einfache Weise geglückt ist, beweist nicht nur, dass unermüdliche Ausdauer viel vermag, sondern auch, dass vielleicht noch manche Probleme nur an der richtigen Stelle angefasst zu werden brauchen, um spielend ihre Lösung zu finden, auf die solange nicht verfallen zu sein, man sich nachher wundert. So ist es denn auch Lübsen ganz entgangen, dass seine discontinuirliche Contruction der Blattcurve mittelst deren Polar-

gleichung den Schlüssel enthält zur mathematisch genauen Bestimmung ihres Inhalts. Figur 20 gibt darüber Aufschluss, indem wir nachfolgende Betrachtung anstellen.

Der Radius des Kreises sei  $S/2$ . Links von der  $Y$ -Achse ist die Blattcurve eingezeichnet. Den Viertelkreisbogen, in dem diese liegt, teilen wir in eine unendliche Zahl unendlich kleiner gleicher Teile ein. Gleichzeitig teilen wir den Halbkreis rechts der  $Y$ -Achse in die gleiche Anzahl gleicher Teile.

Diese Zahl soll als eine gerade gelten und es werden also die Bogenteile des Halbkreises doppelt so gross sein, wie die des  $\frac{1}{4}$  Kreises. Wir ziehen nun von den Teilpunkten die mit der  $Y$ -Achse parallelen Sehnen 1-1, 2-2, 3-3 etc.; wo diese die  $X$ -Achse schneiden, verbinden wir die Treffpunkte  $a, b, c, d, e, f, g, h$  mit den Teilpunkten 8, 7, 6, 5, 4 etc. und ziehen zugleich die zur  $Y$ -Achse parallelen Halbsehnen  $aa, bb, cc$  etc. Nun sind sämtliche Centriwinkel des rechten Quadranten bei  $o$  doppelt so gross, wie die Centriwinkel des linken Quadranten, weil Bogen  $h1$  doppelt so lang wie Bogen I II und so fort. Deshalb ist der  $Ro$  der Blattcurve  $o-1$  gleich der Halbsehne 1-1,  $Rv o-2 = \frac{2-2}{2}$ ,  $Rv o-3 = \frac{3-3}{2}$  u. s. fort.

Die Peripheriewinkel bei 8, 7, 6 . . . sind aber gleich den Centriwinkeln des linken Quadranten, weil auf den doppelten Bogen stehend. Ferner ist Wkl.  $a_1 a-7 =$  Wkl. 8, Wkl.  $b_1 b-6 =$  Wkl. 7 etc., da ihre Schenkel parallel sind. Da die Winkel 8, 7, 6, 5 . . . auf gleichen Bogen stehend, alle gleich sind, müssen es auch die Winkel  $a_1 a-7, b_1 b-6, c_1 c-5$  . . . sein. Die Winkel  $88a, 77a, 66c, 55d$  sind naturgemäss gleich den Winkeln bei 8, 7, 6 . . . und auch wiederum gleich den Winkeln  $8aa, 7bb, 6cc$ , woraus resultirt, dass die Winkel  $8a7--7b6$  . . . durch die Linien  $aa_1 - bb_1$  . . . halbiert werden. So sind denn auch die Winkel  $IvII - IoIII$  . . . gleich den Winkeln  $a_1 a7 - b_1 b6$  . . . etc.

Wenn nun die Teilung eine unendlich kleine ist, so wird der Unterschied zwischen den Linien  $a7$  und  $7i$ , sowie  $b6$  und  $6k$  verschwinden, ebenso kann  $aa_1$  gleich  $ik$  und  $bb_1$  gleich  $k6$  angesehen werden; dasselbe gilt aber für die aufeinander folgenden Dreiecke  $8o7, 7o6, 6o5$  in der Blattcurve, welche allemal als unendlich schmale gleichschenklige Dreiecke betrachtet werden können, deren Inhalt sich durch das Quadrat einer Seite mal dem halben eines des eingeschlossenen Winkels ausdrücken lässt. So ist  $J$  des Dreiecks

$$8o7 = \frac{7o^2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

Der  $J$  des Dreiecks  $a_1 a7$  ist gleich  $\frac{a7^2 \cdot \sin \alpha}{2}$ , oder da  $a7 = i7$  wird

$$J = \frac{i7^2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

Nun ist  $i7$  nach der Lübsen'schen Construction  $= Rv7o$ , mithin  $J$  von Dreieck  $7o8 = J$  von Dreieck  $a_1 a7$ ; ebenso Dreieck  $7o6 =$  Dreieck  $b_1 b6$  und so fort, Dreieck  $a_1 a7$  ist jedoch bei unendlich kleiner Teilung  $= \frac{1}{4}$  des Kreisstückes  $8oi7$ , Dreieck  $b_1 b6 = \frac{1}{4}$  von  $7ik6$  und so weiter. Somit ist die Summe aller Dreiecke  $a_1 a7 - b_1 b6 - c_1 c5 - d_1 d4$  gleich  $\frac{1}{4}$  des Viertelkreises  $8bh$  und somit auch der Inhalt der halben Blatteurve. Dann ist der Inhalt der ganzen Blatteurve gleich der Hälfte des Viertelkreises oder

$$J = \frac{\pi S^2}{32}$$

Auf Grund dieses Resultats ist nun auch die Ermittlung des Inhalts der Begrenzungscurve möglich und zwar in folgender Weise. Denken wir uns zwei unendlich nahe aufeinander folgende Lagen zweier Hypotenusen  $S$ , z. B.  $de$  und  $gf$ . Dann kann der Schnittpunkt beider als Punkt der Begrenzungscurve angesehen werden. Der ganze Inhalt der Begrenzungscurve setzt sich nun aus unendlich vielen Successionen von Dreiecken zusammen, welche, wie  $gpd$  und  $fpe$  durch 2 unendlich nahe Tangenten und die Achsen gebildet werden. Die Summe dieser Dreiecke ergibt also den Inhalt des von den Achsen und der Begrenzungscurve eingeschlossenen Raumes; jedoch ist zu beachten, dass jedes Dreieckspaar eine symmetrische Lage über und eine unter der Symmetrie-Achse hat, der ganze Raum also von den Dreiecken 2 mal ausgefüllt wird und mithin die Hälfte von deren Summe zu nehmen ist.

Richten wir nun die Succession der Tangenten so ein, dass der eingeschlossene Winkel bei  $p$  immer derselbe bleibt, und fallen die Senkrechten von  $o$  auf die Tangenten  $- oi$  und  $oh$   $-$  so ist der zwischen letzteren eingeschlossene Winkel  $ioh$  ebenfalls

$$= \text{Wkl. } gpd = \text{Wkl. } epf$$

und da diese Senkrechten Radiivectoren der Blatteurve sind, so schliesst die Succession der aufeinander folgenden Radiivectoren der Blatteurve immer den gleichen Winkel ein, wie die Tangenten, den

wir  $\alpha$  nennen wollen. Für 2 unendlich nahe Tangenten kann der Längenunterschied zwischen  $gp$  und  $dp$ , sowie  $pe$  und  $pf$  als verschwindend betrachtet werden, desgleichen auch für die Radiivectoren  $vt$  und  $vh$ . Demnach lässt sich der eines Dreieckspaares ausdrücken mit:  $\frac{\sin \alpha}{2} (gp^2 + pf^2)t$  doch können wir nach früherer Gepflogenheit auch setzen

also Dreiecke  $gp = a_1$  und  $pf = b_1$

$$= \frac{\sin \alpha}{2} (a_1^2 + b_1^2)$$

und die Summe aller Dreieckspaare  $= 2J$  der Begrenzungscurve

$$= \frac{\sin \alpha}{2} [a_1^2 + b_1^2 + a_{II}^2 + b_{II}^2 + a_{III}^2 + b_{III}^2 \dots a_n^2 + b_n^2] \text{ oder}$$

$$J = \frac{\sin \alpha}{4} [(a_1^2 + b_1^2) + (a_{II}^2 + b_{II}^2) + (a_{III}^2 + b_{III}^2) \dots (a_n^2 + b_n^2)]$$

Dies lässt sich umwandeln in

$$J = \frac{\sin \alpha}{4} [(a_1 + b_1)^2 - 2a_1 b_1 + (a_{II} + b_{II})^2 - 2a_{II} b_{II} + (a_{III} + b_{III})^2 - 2a_{III} b_{III} \dots \\ + (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n]$$

Sämtliche Summen  $(a_i + b_i) = (a_{II} + b_{II}) \dots$  etc. sind aber  $= S$ , mithin

$$J = \frac{S^2 n \cdot \sin \alpha}{4} - \frac{\sin \alpha}{2} [a_1 b_1 + a_{II} b_{II} + a_{III} b_{III} \dots + a_n b_n]$$

Nun ist  $\sqrt{a_i b_i}$  gleich einem  $Rv$  der Blattcurve, mithin, wenn wir 2 mit dem Wkl.  $\alpha$  aufeinander folgende Rven haben, deren Längendifferenz verschwindend ist, so ist der Inhalt zwischen beiden Rven liegenden Dreiecks

$$= a_i b_i \frac{\sin \alpha}{2}$$

und so fort. Dann aber ist der Wert des gesamten Ausdrucks:

$$\frac{\sin \alpha}{2} [a_1 b_1 + a_{II} b_{II} + a_{III} b_{III} \dots + a_n b_n]$$

gleich dem Inhalt der Blattcurve, also

$$= \frac{\pi S^2}{32}$$

Demnach haben wir jetzt:

$$J = \frac{S^2 \cdot n \cdot \sin \alpha}{4} - \frac{\pi S^2}{32}$$

Da nun  $\alpha$  ein unendlich kleiner Winkel und  $n$  eine unendlich grosse Zahl, so haben wir nach Obigem

$$n \cdot \alpha = 90^\circ$$

Für einen unendlich kleinen Winkel ist der sinus = dem Bogen, also

$$n \cdot \sin \alpha = n \cdot \text{arcus } \alpha \quad \text{und} \quad n \cdot \text{arcus } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Somit erhalten wir:

$$J = \frac{S^2 \pi}{8} - \frac{S^2 \pi}{32} = \frac{\pi S^2 \cdot 3}{32}$$

d. h. „die Begrenzungscurve hat den dreifachen Inhalt der Blattcurve“ und erstere wird durch den mit  $S/2$  um den Anfangspunkt geschlagenen Kreis, die Symmetrie-Achse und die Blattcurve in 6 gleiche Teile geteilt.

### § 18.

Die Bestimmung der Länge der Begrenzungscurve verdanke ich gewissermassen einem Zufall, insofern ich, bei aller aufgewandten Mühe, doch nicht vermuten konnte, dass auf dem eingeschlagenen Wege gerade diese Frage eine so überraschende Lösung finden würde. Dieser Weg war der, dass ich den allgemeinen Ausdruck aufsuchte für den zur Begrenzungscurve gehörigen Krümmungsradius. Ich schlug dabei folgendes Verfahren ein. Nämlich aus der Tangentengleichung bildete ich die der Normale und suchte dann durch Variiren der Coordinatenwerte um eine unendlich kleine Grösse, welche ich am Schluss zu null werden liess, den Schnittpunkt dieser beiden unendlich nahe liegenden Normalen zu bestimmen. Die Behandlung war durchaus dieselbe, wie die der oben gebrauchten Ungleichungen, nur haben wir in diesem Falle eine Gleichung vor uns. Die Tangentengleichung war:

$$y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} (x - x_1)$$

also Normalen-Gleichung:

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}} (x - x_1)$$

$$y = y_1 + \sqrt{\frac{x_1}{y_1}} (x - x_1)$$

Variiren wir  $\sqrt{x_1}$  als  $\sqrt{x_1} \pm z$ , so ist für  $x_1$  zu setzen

$$x_1 \pm 3z \sqrt{x_1^2}$$

die entsprechende Variation für  $\sqrt{y_1}$  ergibt sich:

$$\sqrt{x_1^2} \pm 2\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1} = \sqrt{S^2}$$

also für  $\sqrt{y_1}$  tritt ein  $\sqrt{\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}}$

Nun lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} y = y_1 + \sqrt{\frac{x_1}{y_1}} (x - x_1) &= \frac{\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x - x_1)}{\sqrt{y_1}} \\ &= \frac{(\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1} \pm z((x - x_1) \mp 3z\sqrt{x_1^2}))}{\sqrt{\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}}} \\ \frac{\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x - x_1)}{\sqrt{y_1}} &= \frac{\sqrt{y_1^4} \mp 4z\sqrt{x_1^2 y_1^2} + \sqrt{x_1}(x - x_1) \mp zx \mp zx_1 \pm 3zx}{\sqrt{\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}}} \\ &\quad \mp 4z\sqrt{x_1}(\sqrt{y_1^2} + \sqrt{x_1^2}) \\ &= \frac{\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x - x_1) \mp 4z\sqrt{x_1^2 y_1^2} \mp 4zx_1 \pm zx}{\sqrt{\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}}} \\ &= \frac{\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x - x_1) \mp z(4\sqrt{S^2 x_1} - y)}{\sqrt{\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}}} \end{aligned}$$

ich quadriere jetzt und beseitige die Nenner.

$$\begin{aligned} (\sqrt{y_1^2} \mp 2z\sqrt{x_1}) [\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x_1 - x_1)]^2 \\ = \sqrt{y_1^2} [\{\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x - x_1)\}^2 \mp 2z(4\sqrt{S^2 x_1} - x)(\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1}(x - x_1))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{y_1^2} [\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1(x-x_1)}]^2 \mp 2z \sqrt{x_1} [\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1(x-x_1)}]^2 \\ & = \sqrt{y_1^2} [\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1(x-x_1)}]^2 \mp 2z \sqrt{y_1^2} (4\sqrt{S^2 x_1 - x}) \\ & \hspace{15em} (\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1(x-x_1)}) \end{aligned}$$

dividire durch  $2z[\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1(x-x_1)}]$

$$\sqrt{x_1} [\sqrt{y_1^4} + \sqrt{x_1(x-x_1)}] = \sqrt{y_1^2} (4\sqrt{S^2 x_1 - x})$$

$$\sqrt{x_1 y_1^4} + x \sqrt{x_1^2} - \sqrt{x_1^5} = 4 \sqrt{S^2 x_1 y_1^2} - x \sqrt{y_1^2}$$

$$\underbrace{x(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}} = 4 \sqrt{S^2 x_1 y_1^2} + \sqrt{x_1} (\sqrt{x_1^4} - \sqrt{y_1^4})$$

$$\hspace{15em} (\sqrt{x_1^2} - \sqrt{y_1^2}) \sqrt{S^2}$$

$$\begin{aligned} x &= 4 \sqrt{x_1 y_1^2} + \sqrt{x_1} (\sqrt{x_1^2} - \sqrt{y_1^2}) = 4\sqrt{x_1 y_1^2} + y_1 - \sqrt{x_1 y_1^2} \\ & \hspace{15em} = 3\sqrt{x_1 y_1^2} + x_1 \end{aligned}$$

$$y = 3x_1 + x_1 = n + 2x_1, \quad x - x_1 = 3x_1 = \sqrt{x_1 y_1^2}$$

$$y - y_1 = \sqrt{\frac{x_1}{y_1}} \cdot 3 \sqrt{x_1 y_1^2} = 3 \sqrt{x_1^2 y_1} = 3y_1$$

Somit ist der Krümmungsradius

$$\begin{aligned} kR &= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{9x_1^2 + 9y_1^2} \\ &= kR = 3 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned}$$

d. h. also: „der Krümmungsradius ist gleich dem dreifachen  $Rv$  an den zugehörigen Punkt der Blatteurve“, wonach die discontinuirliche Construction der Krümmungcurve sehr leicht ist. Suchen wir nun auch deren Gleichung. Ebenso:

$$y - y_1 = 3\sqrt{x_1 y_1^2}$$

also

$$y = y_1 + 3 \sqrt{x_1^2 y_1}$$

und ebenso

$$x = x_1 + 3 \sqrt{x_1 y_1^2}$$

$$x + y = x_1^3 \sqrt{x_1^3 y_1} + 3 \sqrt{y_1 y_1^2} + y_1 = (\sqrt{y_1} + \sqrt{y_1})^3$$

demnach

$$\sqrt{y+y} = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_1}$$

oder

$$\sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{y_1^2} + 2\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{y_1^2} = \sqrt{S^2} + 2\sqrt{y_1 y_1}$$

oder

$$2\sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{S^2}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} y &= y_1 + 3\sqrt{x_1^2 y_1} = \sqrt{y_1} (\sqrt{y_1^3} + 3\sqrt{x_1^2}) \\ &= \sqrt{y_1} (\sqrt{S^2} + 2\sqrt{x_1^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + 3\sqrt{x_1^3 y_1^2} = \sqrt{x_1} (\sqrt{y_1^2} + 3\sqrt{y_1^2}) \\ &= \sqrt{y_1} (\sqrt{S^2} + 2\sqrt{y_1^2}) \end{aligned}$$

also

$$y^2 = \sqrt{S^2 y_1^2} + 4\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} + 4\sqrt{x_1^4 y_1^2}$$

$$y^2 = \sqrt{S^4 x_1^2} + 4\sqrt{S^3 x_1^2 y_1^2} + 4\sqrt{x_1^2 y_1^4}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{S^4} \underbrace{(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}} + 8\sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

$$+ 4\sqrt{y_1^2 x_1^2} \underbrace{(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{y_1^2})}_{\sqrt{S^2}}$$

$$x^2 + y^2 = S^2 + 12 \sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2}$$

also ferner

$$12 \sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} = x^2 - y^2 - S^2$$

nach Obigem ist aber

$$4 \sqrt{x_1^2 y_1^2} = \sqrt{(x+n)^2} - \sqrt{S^2}$$

oder

$$12 \sqrt{S^2 x_1^2 y_1^2} = 3 \sqrt{S^2} (\sqrt{(x+n)^2} - \sqrt{S^2})^2$$

daraus resultirt:

$$x^2 + y^2 - S^2 = 3 \sqrt{S^2(\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{S^2})^2}$$

also endgültige Gleichung der Curve aller Krümmungsmittelpunkte.

Der wahre Charakter dieser Curve kommt jedoch erst an's Licht, wenn wir des Achsensystem um  $45^\circ$  drehen. Alsdann bleibt  $x^2 + y^2$  als Quadrat des  $Rv$  unverändert; dagegen wird aus  $(x+y)$  nun:  $x\sqrt{2}$  oder statt  $(x+y)^2$  tritt ein  $2x^2$  und die Gleichung lautet:

$$x^2 + y^2 - S^2 = 3 \sqrt{S^2(\sqrt{2x^2} - \sqrt{S^2})^2}$$

dies aufgelöst, ergibt:

$$x^2 + y^2 - S^2 = 3 \sqrt{4S^2x^2} - 6 \sqrt{2S^4x^2} + 3S^2$$

umgeformt:

$$y^2 = 4S^2 - 3 \sqrt{16S^4x^2} + 3 \sqrt{4S^2x^4} - x^2 = (\sqrt{(2S^2)^2} - \sqrt{x^2})^2$$

radicirt:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{(2S^2)^2} - \sqrt{x^2} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{(2S)^2}$$

„Wir machen also die überraschende Entdeckung, dass die Curve der Krümmungsmittelpunkte zur Begrenzungscurve wiederum eine Begrenzungscurve ist, jedoch mit doppeltem  $S$  als Tangenten-Constante.“

In Figur 22. sieht man die Begrenzungscurve nebst ihrer Krümmungcurve ausgezeichnet, letztere nur für die untere Hälfte. Die Betrachtung dieser Figur führte mich sofort auf die Lösung der Frage nach der Länge der Begrenzungscurve. Dazu genügt folgende Ueberlegung: Wir fanden, dass der Krümmungsradius in einem Punkte immer gleich ist dem dreifachen  $Ro$  des entsprechenden Punktes der Blattcurve. Also

$$ia = 3io, \quad mr = 3om, \quad kb = 3vl \quad \text{u. s. w.}$$

Denkt man sich nun den ganzen Raum  $aiw$  in eine unendliche Succession gleichschenkliger Dreiecke zerlegt, deren jedes einen unendlich kleinen Wkl.  $\alpha$  an der Spitze und einen Krümmungsradius zur

Seite hat, so wird sich die Begrenzungscurve  $aw$  aus lauter unendlich kleinen Abständen zwischen den Spitzen dieser Dreiecke zusammensetzen. „Jeder solche Abstand ist aber gleich der Längendifferenz zweier aufeinander folgenden Krümmungsradien“.

Der oben erwähnte Wkl.  $\alpha$  zwischen den aufeinander folgenden Krümmungsradien ist zugleich der Winkel zwischen den 2 entsprechenden Radiivectoren der Blattcurve, weil diese sowol wie die Krümmungsradien auf derselben Hypotenuse  $S$  je paarweise senkrecht stehen. Darum kann man alle Krümmungsradien  $ia, kb, tc, ud$  u. s. w. als gleichwertig betrachten mit Radiivectoren einer Blattcurve mit der Constanten  $3S$ , den halben Quadranten bei  $45^\circ$  durchlaufend. Die Radiivectoren der Blattcurve sind aber, wie wir wissen, hinsichtlich der Länge gleich dem sinus des doppelten Polarwinkels. Wir haben somit die successiven Längendifferenzen, aus welchen sich unsere Curve  $aw$  zusammensetzt, auszudrücken durch:

$$\sin 2\alpha + (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) + (\sin 8\alpha - \sin 6\alpha) \dots \\ + [\sin(n-2)\alpha - \sin(n-4)\alpha] + [\sin n\alpha - \sin(n-2)\alpha]$$

Als Summe dieser Reihe bleibt offenbar übrig  $\sin n \cdot \alpha = \sin 90^\circ =$  dem Radius des betr. Kreises, welcher in diesem Falle 3mal so gross ist, wie der unserer ursprünglichen Blattcurve. Dieser war  $S/2$ , demnach haben wir als Länge der Curve  $aw$  den Wert  $\frac{3S}{2}$  und da  $aw$  eine halbe Begrenzungscurve ist, so hat die ganze Begrenzungscurve mit der Constanten  $2S$  die Länge  $= 3S$ . Da nun alle Begrenzungscurven in Grösse etc. proportional sein müssen, so haben wir als Schlussresultat: Länge der Begrenzungscurve von der Formel

$$\sqrt{y^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{S^2}$$

ist 
$$= \frac{3S}{2}$$

Anmerkung. Aus Obigem ergibt sich der  $KR$  für den Symmetriepunkt  $= \frac{3S}{2}$  für die Endpunkte der Curve  $= 0$ . Zwischen diesen liegen 2 Punkte mit

$$KR = S$$

für diese ist also  $R_o$  des Blattcurvenpunktes  $= S/3$ , was nach Obigem die Berührungspunkte der  $45^\circ$  Tangente an die Blattcurve sind.

$$W + kR = 0$$

da muss auch die Curve selbst endigen, mithin hat die Begrenzungscurve jenseits der Längen  $S$  keine Fortsetzung.

§ 19.

Im folgenden letzten Paragraphen sollen noch 3 Nutzanwendungen dargelegt werden, die aus der Blattecurvegleichung gezogen werden können; wobei ich gleich betonen will, dass es solche Nutzanwendungen noch viele geben kann, die ich jetzt nicht ahne. Die erste bezieht sich auf die Parabel, deren Gleichung ich, abweichend von der neueren Schreibweise, mit

$$y^2 = 2px$$

nach altem Styl beibehalte, weil ich sie für entsprechender erachte. Sucht man zur Parabel den allgemeinen Ausdruck für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so erhält man

$$x = p + 3x_1, \quad y = -\frac{y_1^3}{p^2}$$

und demnach

$$\begin{aligned} KR &= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(p+2x_1)^2 + y_1^2 \left(\frac{y_1^2}{p^2} + 1\right)^2} \end{aligned}$$

oder

$$\sqrt{(p+2x_1)^2 + y_1^2 \left(\frac{2x_1}{p} + 1\right)^2} = \frac{(2x_1+p)\sqrt{p+y_1^2}}{p}$$

Wollen wir nun in der Formel nur  $x_1$  und  $y_1$  haben, so müssen wir für  $p$  den Wert  $\frac{y_1^2}{2x_1}$  einführen und erhalten dann

$$KR = \frac{\left(2x_1 + \frac{y_1^2}{2x_1}\right) \sqrt{\frac{y_1^4}{4x_1^2} + y_1^2}}{y_1^2/2x_1}$$

oder

$$KR = \frac{(4x_1^2 + y_1^2) \sqrt{y_1^4 + 4x_1^2 y_1^2}}{y_1^2}$$

$$= \frac{(2x_1^2 + y_1^2) \sqrt{4x_1^2 + y_1^2}}{2x_1 y_1}$$

$$KR \cdot 2x_1 y_1 = \left( \sqrt{4x_1^2 + y_1^2} \right)$$

oder

$$\sqrt{2x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{KR \cdot 2x_1 y_1}$$

endlich

$$\sqrt{(2x_1)^2 + y_1^2} = \sqrt{KR \cdot 2x_1 y_1}$$

Dies ist die genaue Gleichung unserer Blatteurve, woraus sich also ergibt, dass der Krümmungsradius jedes Punktes der Parabel zu dessen Coordinaten in einer Beziehung steht, ähnlich wie die Constante  $S$  zu den Coordinaten der Blatteurve. Das Wichtigste ist nun, dass dies eine sehr einfache, directe Construction des Krümmungsradius für jeden Punkt der Parabel ermöglicht. Nämlich: man trägt  $x_1$  2 mal nach rechts ab, errichtet  $y_1$  senkrecht im Endpunkt dieser verdoppelten Abscisse, verbindet das obere Ende von  $y_1$  mit dem Anfangspunkt und errichtet im Endpunkte dieses  $Rv$  wiederum eine Senkrechte. „Diese schneidet die Achsen, und deren sich ergebende Länge ist der gesuchte  $KR$  zum Punkte  $x_2 y_1$  der Parabel.“

Die zweite Nutzanwendung ergibt sich bei der Curve mit der Gleichung:

$$x^2 y = T^3$$

welche man wol die Cubus-Hyperbel nennen könnte, indem die Gleichung

$$xy = S^2$$

die Hyperbel 2ten Grades bezeichnet. Die Tangentengleichung findet man wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 y_1 = S^3, \quad x_1^2 = \frac{S^3}{y_1} \\ x_1^2 y_{11} = S^3, \quad x_1^2 = \frac{S^3}{y_{11}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1^3 - x_1^2 &= S^3 \frac{(y_{11} - y_1)}{y_1 y_{11}} = \frac{S^3}{y_1 y_{11}} (y_1 - y_{11}) \\ &= \frac{(x_1 + x_{11}) y_1 y_{11}}{S^3} = \frac{y_1 - y_{11}}{x_1 - x_{11}} \end{aligned}$$

also Secantengleichung:

$$y - y_1 = - \frac{y_1 y_{11} (x_1 + x_{11})}{S^3} (x - x_1)$$

setzen jetzt beide Punkte als einen, Tangentengleichung:

$$y - y_1 = - \frac{2y_1^2 x_1}{S^3} (x - x_1) = - \frac{2x_1 y_1^3}{x_1^2 y_1} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = - \frac{2y_1}{x_1} (x - x_1) \quad \text{Gleichg. der Normale } y - y_1 = \frac{x_1}{2y_1} (x - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{x_1}{2y_1} (x - x_1)$$

variiren nun  $x_1$  als  $x_1 \pm x$ ,  $y_1 = \frac{S^3}{y_1^2}$  variirt  $\frac{S^2}{x_1^2 \pm 2x x_1}$

$$y_1 + \frac{x_1 x}{2y_1} - \frac{x_1^2}{2y_1} = \frac{S^3}{x_1^2} + \frac{x_1^3 x}{2S^3} - \frac{x_1^4}{2S^3} = \frac{S^3}{x_1^2 \pm 2x x_1} + \frac{x_1 x_1^3 \pm 3x x_1^2}{2S^3} - \frac{x_1^4 \pm 4x x_1^3}{2S^3}$$

$$2S^6(x_1^3 \pm 2x x_1) + x x_1^5(x_1^2 \pm 2x x_1) - x^6(x_1^3 \pm 2x x_1) = 2S^6 x_1^2 + x x_1^2(x_1^2 \pm 2x x_1)(x_1^3 \pm 3x x_1^2) = (x_1^4 \pm 4x x_1^3)(x_1^2 \pm 2x x_1) x_1^2$$

$$2S^6 x_1^2 \pm 4S^6 x x_1 + x x_1^7 \pm 2x x x_1^6 - x_1^8 \mp 2x x_1^7 = 2S^6 x_1^2 \times x x_1^2 \pm 2x x x_1^6 \pm 3x x x_1^6 - x_1^8 \mp 4x x_1^7 \mp 2x x_1^7$$

dividire durch  $x x_1$

$$\begin{aligned} 4S^6 &= 3x x_1^6 - 4x_1^6 \\ 8x x_1^5 &= 4(S^6 + x_1^6) \\ x &= \frac{4(S^6 + x_1^6)}{3x_1^5} \end{aligned}$$

setze

$$S^6 = x_1^2 y_1^2, \quad x = \frac{4x_1^4(y_1^2 + x_1^2)}{3x_1^5}$$

$$x = \frac{4(x_1^2 + y_1^2)}{3x_1}, \quad x - x_1 = \frac{4x_1^2 + 4y_1^2 - 3x_1^2}{3x_1} = \frac{4y_1^2 + x_1^2}{3x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{x_1}{2y_1} \frac{4y_1^2 + x_1^2}{3x_1} = \frac{4y_1^2 + x_1^2}{6y_1}$$

und Krümmungsradius also

$$KR = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \frac{(4y_1^2 + x_1^2)}{3} \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{4y_1^2}}$$

$$= \frac{(4y_1^2 + x_1^2) \sqrt{4y_1^2 + x_1^2}}{3 \cdot 2x_1y_1}$$

$$KR = \frac{(\sqrt{4y_1^2 + x_1^2})^3}{6y_1x_1}$$

Diesem Ausdruck kann man folgende Form geben:

$$3KR \cdot 2y_1x_1 = \left( \sqrt{4y_1^2 + x_1^2} \right)^3$$

oder

$$\sqrt{(2y_1)^2 + x_1^2} = \sqrt{3KR \cdot 2y_1x_1}$$

Hier haben wir also wiederum eine Blattcurvengleichung, in welcher nur  $y_1$  verdoppelt ist und in der 3 fachen  $KR$  die Stelle von  $S$  einnimmt; daraus ergibt sich, ähnlich wie bei der Parabel, eine einfache Construction des  $KR$  für jeden Punkt der Curve. Man errichtet senkrecht im Endpunkt der Abscisse  $y_1$  die doppelte Ordinate  $y_1$ ; zieht den  $Ro$  an den erhaltenen Punkt und errichtet im Endpunkt wiederum senkrecht auf dem  $Ro$  die Hypotenuse, welche die Achsen schneidet. „Ihre Länge ist dann gleich dem 3 fachen Krümmungsradius des Punktes  $x_1y_1$ “. (Siehe die Figur.)

Für eine Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten ist der Krümmungsradius

$$KR = \frac{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^3}{a^2}$$

und da für diesen Fall

$$a^2 = 2x_1y_1$$

so haben wir

$$2KR \cdot x_1y_1 = \left( \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right)^3$$

oder

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2KR \cdot x_1y_1}$$

was ebenfalls eine Blattcurvengleichung ist. Hier ergibt also die Senkrechte auf den Radiusvector in dem betr. Punkte der Hyperbel

sofort eine Hypotenuse gleich dem doppelten Krümmungsradius. Jedoch sind diesfalls die Asymptoten als Achsen anzusehen und hierauf die Coordinaten zu beziehen. (Siehe die Figur).

Eine ganze Anzahl von Werten, die sich bei Untersuchung dieser und anderer Curven ergeben und 3te Wurzeln von einfachen Zahlen enthalten, würden sich mit den gewöhnlichen Mitteln der Planimetrie nicht construiren lassen. Dagegen nach dem in § 8 demonstirten Verfahren ist dies möglich.

Die Untersuchung weiterer Curven von der Formel

$$x^2 + y^2 = S^2$$

wird später folgen. In Vorstehendem sollte nur der Beweis geliefert werden, dass es möglich ist, Curven 3ten Grades auf einfach analytischem Wege erschöpfend zu behandeln und so unsren höheren Schulen zugänglich zu machen, die sich bisher über die Kegelschnitte nicht hinauswagen durften.

Anmerkung. Es sei hier gleich der Satz mitgeteilt, den bei näherer Untersuchung Jeder leicht bestätigt finden wird: „dass für alle Curven in der Ebene, deren Gleichung nur eine Constante enthält, der allgemeine Ausdruck für den Krümmungsradius die Form der Blattcurvengleichung annimmt, gleichviel welchen Grades die Curve sei.“ Also lautet dieser:

$$\sqrt{\epsilon \cdot KR \cdot z \cdot y_1 \cdot v \cdot x_1} = \sqrt{(z \cdot y_1)^2 + (v \cdot x_1)^2}$$

worin  $\epsilon$  der Exponent der Constante,  $z$  derjenige von  $x_1$  und  $v$  der von  $y_1$  in der Gleichung der Curve ist. Die Coefficienten von zwei Gliedern geben also zusammen jedesmal den Coefficienten des dritten, wie in der Gleichung die Exponenten von zwei Gliedern zusammen den des dritten.

## VIII.

## Miscellen.

## 1.

## Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen.

Bezeichnet man die Einer einer Zahl  $z$  mit  $z_1$  und die Zahl in den Stellen vor den Einern mit  $z_2$ , so hat man  $z = 10z_2 + z_1$ . Da der Rest  $r$ , den  $z$  bei der Division durch  $m$  giebt, der Zahl congruent ist, so ist:

$$r = 10z_2 + z_1 \pmod{m}$$

Setzt man in diese Congruenz  $1 \equiv 10\alpha \pmod{m}$ , so ist auch

$$r \equiv 10z_2 + 10\alpha z_1 \pmod{m} \quad \text{und}$$

$$r \equiv 10(z_2 + \alpha z_1) \pmod{m}$$

Wegen der Congruenz  $1 \equiv 10\alpha \pmod{m}$  ist  $m$  relative Primzahl zu 10. Der Rest  $10(z_2 + \alpha z_1)$  kann also nur null werden, wenn  $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \pmod{m}$  ist.

Die beiden Congruenzen  $1 \equiv 10\alpha \pmod{m}$  und

$$z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \pmod{m}$$

sprechen also zusammen die Bedingung aus, unter welcher  $z$  durch  $m$  teilbar ist.

Die relativen Primzahlen zu 10 haben in den Einern eine der vier Zahlen 1, 3, 7, 9. Wenn man daher unter  $m_1$  die Zahl der Stellen vor den Einern der Zahl  $m$  versteht, so lässt sich  $m$  darstellen durch eine der vier Formen

$$1) \quad m = 10m_1 + 1$$

$$2) \quad m = 10m_1 + 3$$

$$3) \quad m = 10m_1 + 7$$

$$4) \quad m = 10m_1 + 9$$

Der Congruenz  $1 \equiv 10\alpha \pmod{10m_1+1}$  genügt  $\alpha = -m_1$ ,

$$\text{denn } 10(-m_1) = -(10m_1+1)+1$$

Der Congruenz  $1 \equiv 10\alpha \pmod{10m_1+3}$  genügt  $\alpha = 3m_1+1$ ,

$$\text{denn } 10(3m_1+1) = 3(10m_1+3)+1$$

Der Congruenz  $1 \equiv 10\alpha \pmod{10m_1+7}$  genügt  $\alpha = -(3m_1+2)$ ,

$$\text{denn } 10(-3m_1-2) = -3(10m_1+7)+1$$

Der Congruenz  $1 \equiv 10\alpha \pmod{10m_1+9}$  genügt  $\alpha = m_1+1$ ,

$$\text{denn } 10(m_1+1) = (10m_1+9)+1$$

Wenn  $m_1 = 0$  gesetzt wird aus  $1 \equiv 10\alpha \pmod{+1}$  für  $\alpha = 0$

$$1 \equiv 10\alpha \pmod{+3} \text{ für } \alpha = 1$$

$$1 \equiv 10\alpha \pmod{+7} \text{ für } \alpha = -2$$

$$1 \equiv 10\alpha \pmod{+9} \text{ für } \alpha = 1$$

Aus der Congruenz  $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \pmod{m}$  erhält man

$$1) \quad z_2 + 0 \cdot z_1 \equiv 0 \pmod{1}$$

$$2) \quad z_2 + 1 \cdot z_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$3) \quad z_2 - 2 \cdot z_1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$4) \quad z_2 + 1 \cdot z_1 \equiv 0 \pmod{9}$$

Die Congruenz 1) spricht aus, dass jede Zahl durch 1 teilbar ist.

Die Congruenz 2) spricht aus, dass eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen von den Einern die Einer addirt.

$$72531 \equiv 7254 = 729 \equiv 81 \equiv 9 \pmod{3}$$

Die Congruenz 3) spricht aus, dass eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer subtrahirt

$$5313 \equiv 525 \equiv 42 \equiv 0 \pmod{7}$$

Die Congruenz 4) spricht aus, dass eine Zahl durch 9 teilbar ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen von den Einern die Einer addirt

$$4788 \equiv 486 \equiv 9 \pmod{9}$$

Setzt man  $n_1 = 1$ , so ist 1)  $1 \equiv 10\alpha \pmod{11}$  und  $\alpha = -1$

$$2) \quad 1 \equiv 10\alpha \pmod{13} \text{ und } \alpha = 4$$

$$3) \quad 1 \equiv 10\alpha \pmod{17} \text{ und } \alpha = -5$$

$$4) \quad 1 \equiv 10\alpha \pmod{19} \text{ und } \alpha = 2$$

Die Congruenz  $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \pmod{11}$  giebt also

- 1)  $z_2 - z_1 \equiv 0 \pmod{11}$
- 2)  $z_2 + 4z_1 \equiv 0 \pmod{13}$
- 3)  $z_2 - 5z_1 \equiv 0 \pmod{17}$
- 4)  $z_2 + 2z_1 \equiv 0 \pmod{19}$

Nach 1) ist also eine Zahl durch 11 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern die Einer subtrahirt.

$$58443 \equiv 5841 \equiv 583 \equiv 55 \equiv 0 \pmod{11}$$

Nach 2) ist eine Zahl durch 13 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl vor den Einern das Vierfache der Einer addirt.

$$8125 \equiv 832 \equiv 91 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}$$

Nach 3) ist eine Zahl durch 17 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Fünffache der Einer subtrahirt.

$$6341 \equiv 629 \equiv 37 \equiv 0 \pmod{17}$$

Nach 4) ist eine Zahl durch 19 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer addirt.

$$14022 \equiv 1406 \equiv 152 \equiv 19 \equiv 0 \pmod{19}$$

Wenn  $m_1$  gleich 2 gesetzt wird, findet man

- 1)  $1 \equiv 10\alpha \pmod{21}$  und  $\alpha = -2$
- 2)  $1 \equiv 10\alpha \pmod{23}$  und  $\alpha = +7$
- 3)  $1 \equiv 10\alpha \pmod{27}$  und  $\alpha = -8$
- 4)  $1 \equiv 10\alpha \pmod{29}$  und  $\alpha = +5$

Die Congruenz  $z_2 + \alpha z_1 \equiv 0 \pmod{m}$  giebt also

- 1)  $z_2 - 2z_1 = 0 \pmod{21}$
- 2)  $z_2 + 7z_1 \equiv 0 \pmod{23}$
- 3)  $z_2 - 8z_1 \equiv 0 \pmod{27}$
- 4)  $z_2 + 3z_1 = 0 \pmod{29}$

Nach 1) ist also eine Zahl durch 21 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Zweifache der Einer subtrahirt.

$$13734 \equiv 1365 \equiv 126 \equiv 0 \pmod{21}$$

Nach 2) ist eine Zahl durch 23 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Siebenfache der Einer addirt.

$$14651 \equiv 1472 \equiv 161 \equiv 23 \equiv 0 \pmod{23}$$

Nach 3) ist eine Zahl durch 27 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man von der Zahl in den Stellen vor den Einern das Achtfache der Einer subtrahirt.

$$9369 \equiv 861 \equiv 54 \equiv 27 \equiv 0 \pmod{27}$$

Nach 4) ist eine Zahl durch 29 teilbar, wenn es die Zahl ist, welche man erhält, wenn man zu der Zahl in den Stellen vor den Einern das Dreifache der Einer addirt.

$$12064 = 1218 \equiv 145 \equiv 29 \equiv 0 \pmod{29}$$

In derselben Weise kann man für jeden Modulus  $m$ , welcher zu 10 relative Primzahl ist, das entsprechende  $\alpha$  und damit das Kennzeichen für die Teilbarkeit jeder Zahl  $z$  durch den Modulus  $m$  finden.

Direktor Dr. Theodor Lange.

2.

**Facultätencongruenzen.**

Für eine Reihe von auf einanderfolgenden Facultäten und für einen beliebigen Modul  $m$  bestehen die folgenden Congruenzen:

$$\left. \begin{array}{l} 2! + (m - 2)1! \\ 3! + (m - 3)2! \\ 4! + (m - 4)3! \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ (m-1)! + (m - [m - 1])(m-2)! \end{array} \right\} \equiv 0 \pmod{m}$$

Beispiel:

$$m = 11.$$

$$2! + 9 \cdot 1! = 11$$

$$3! + 8 \cdot 2! = 22$$

$$4! + 7 \cdot 3! = 66$$

$$5! + 6 \cdot 4! = 264$$

$$6! + 5 \cdot 5! = 1320$$

$$7! + 4 \cdot 6! = 6920$$

$$8! + 3 \cdot 7! = 55440$$

$$9! + 2 \cdot 8! = 443520$$

$$10! + 1 \cdot 9! = 3991680$$

Die entstandenen Producte sind alle durch 11 teilbar.

Oldenburg i. G.

G. Speckmann.

IX.

Anwendungen von Dühring's Begriff der Wertigkeit.

II.

Von

Dr. K. Wessely.

Fortsetzung von Nr. XX. im X. Teil.

Jede algebraische Gleichung mit constanten Coefficienten kann aufgefasst werden als specieller Fall der Definitions-Gleichung einer algebraischen Function; entweder in der Weise, dass die ganzen rationalen Functionen, welche die Coefficienten einer solchen Definitions-Gleichung bilden, nur das absolute Glied enthalten, oder in der Weise, dass diese Coefficienten durch Substitution eines bestimmten Wertes für die unabhängig Veränderliche zu Constanten geworden sind.

Entsprechend dem durch die Riemann'sche Fläche bestimmten Zusammenhang zwischen den einzelnen Zweigen der algebraischen Function kann man dann auch zwischen den einzelnen Lösungen einer numerischen Gleichung eine bestimmte Reihenfolge fixirt denken, und unter Beibehaltung der einmal fixirten Reihenfolge mit dem gesamten Wertecomplex der Lösung in derselben Weise arithmetische Operationen ausführen, wie mit einer algebraischen Function.

Tatsächlich ist ja auch eine irrationale Zahl  $a + \sqrt{b}$  durch die Bedingung, einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten genügen zu sollen, mit einer zweiten irrationalen Zahl  $a - \sqrt{b}$  insofern verknüpft, als es unmöglich ist eine solche Gleichung zu bilden,

die eine der beiden Lösungen hätte ohne die andere; das heisst: es ist durch eine Gleichung:

$$x^2 = a$$

$x$  als zweiwertige, durch eine Gleichung:

$$x^2 = a$$

$x$  als dreiwertige Grösse definiert.

Jeder zweiwertige Coefficient  $\pm \sqrt{a}$  macht eine Verbindung  $x \pm \sqrt{a} \cdot y$  zu einer „irreductiblen“, das heisst zu einer solchen, welche aus der Gleichung

$$x \pm \sqrt{a} \cdot y = 0$$

folgern lässt

$$x = 0; y = 0$$

Es wird daher auch eine unabhängig Veränderliche

$$z = x \pm \sqrt{a} \cdot y$$

in bestimmter Weise über die Fundamental-Ebene ausgebreitet werden können, sobald die Festsetzung gemacht ist, dass die beiden reellen Variablen  $x$  und  $y$  zwei auf einander senkrechte Richtungen der Ebene darstellen und der zweiwertige Coefficient  $\pm \sqrt{a}$  nur dazu dient, ihre additive Verbindung zu einer irreductiblen zu machen, ohne dass  $a$  speciell gleich der negativen Einheit sein müsste. Für eine bestimmte Ausbreitung der complexen Grössen:

$$y + \sqrt{-1} \cdot y$$

über die Fundamental-Ebene ist also die Deutung der imaginären Einheit als „Richtung“ nicht erforderlich, und das Rechnen mit complexen Grössen kann in mancher Hinsicht als specieller Fall des Rechnens mit einem zweiwertigen Argument angesehen werden, das in analoger Weise auch für ein drei- und mehrwertiges Argument durchgeführt werden kann.

Ist z. B.  $k$  durch eine Gleichung

$$k^2 = a$$

als zweiwertige Grösse definiert, und ordnet man einem bestimmten Werte von

$$z = x + ky$$

einen bestimmten Wert von

$$f(z) = u + kv$$

zu, und ebenso einem unendlich benachbarten Wert von  $z$  einen solchen von  $f(z)$ , so folgt aus

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

dass der Quotient  $\frac{df(z)}{dz}$  von  $dz$  unabhängig wird, sobald

$$\frac{df(z)}{\partial y} = k \frac{\partial f(z)}{\partial x}$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial v}{\partial y} &= k \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &= k \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Da  $k^2$  definitionsgemäss einwertig gleich  $a$  ist, folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} - a \frac{\partial V}{\partial x} + k \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} - a \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} & \end{aligned}$$

als notwendige und wie man leicht übersieht auch als hinreichende Bedingung dafür, dass  $u + kv$  eine Function von  $z$  ist, d. h. einen Differential-Quotienten nach  $z$  besitzt, der von der Art, wie  $z$  verschwindet, unabhängig ist. Untersucht man aber das Verhältniss entsprechender Bogen-Elemente:  $\frac{dU^2 + dV^2}{dx^2 + dy^2}$ , so gibt die Rechnung:

$$\begin{aligned} dU^2 + dV^2 &= dx^2 \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} + dy^2 \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &\quad + 2dx dy \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

so dass im allgemeinen das Verhältniss der Moduln entsprechender Bogenelemente von den Incrementen nicht unabhängig ist. Nur in dem speciellen Falle  $a = -1$  wird, wie man sieht, der Quotient  $\frac{dU^2 + dV^2}{dx^2 + dy^2}$  eine Function der Coordinaten, oder die Abbildung ähnlich.

Verfährt man in ganz analoger Weise mit einem dreiwertigen Argument

$$w = x + ky + k^2z$$

wobei  $k$  durch die Gleichung

$$k^3 = a$$

als dreiwertige Grösse definirt sein soll, so dass durch  $w$  sämtliche Punkte des Raumes in bestimmter Weise repräsentirt werden können, so erhält man, wie früher, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$U + kV + k^2W = f(w)$$

eine Function von  $w$  sei, aus

$$df(w) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = k \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = k^2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

oder:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial f}{\partial z}$$

hiefür kann man auch wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial y} + k^2 \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + k \frac{\partial V}{\partial z} + k^2 \frac{\partial W}{\partial z}$$

schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial V}{\partial x} + k^2 \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial W}{\partial y} \\ &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht darauf, dass aus

$$k^3 = a \text{ folgt:}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{k^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{k}{a}$$

ergibt sich weiter, da man definitionsgemäss die Coefficienten der einzelnen Potenzen von  $k$  einander gleich setzen kann, für die Bedingungsgleichungen die Form:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = a \frac{\partial W}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = a \frac{\partial V}{\partial x} = a \frac{\partial W}{\partial y}$$

Jeder analytische Ausdruck, der von  $x, y, z$  nur in der Verbindung  $x + ky + k^2z$  abhängt, lässt sich in bestimmter Weise auf die Form  $U + kV + k^2W$  bringen.

Denn aus einer Gleichung

$$f(x + ky + k^2z) = U + kV + k^2W$$

bestimmen sich die Werte von  $U, V, W$  in eindeutiger Weise, da diese Gleichung nichts anderes ist, als eine kürzere Schreibweise für die drei linearen Gleichungen, die man erhält, wenn man für  $k$  seine drei Werte  $k_1, k_2, k_3$  substituirt; bezeichnet man die entsprechenden Werte von  $w$  mit  $w_1, w_2, w_3$ , so folgt aus

$$\begin{cases} f(w_1) = U + k_1V + k_1^2W \\ f(w_2) = U + k_2V + k_2^2W \\ f(w_3) = U + k_3V + k_3^2W \end{cases}$$

$$3U = f(w_1) + f(w_2) + f(w_3)$$

$$3V = k_1^2f(w_1) + k_2^2f(w_2) + k_3^2f(w_3)$$

$$3W = k_1f(w_1) + k_2f(w_2) + k_3f(w_3)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man auch unmittelbar, dass die Grössen  $U, V, W$  den aufgestellten Bedingungsgleichungen genügen, so dass also jeder analytische Ausdruck der nur von  $x + ky + k^2z$  abhängt, auch als eine Function des dreiwertigen Argumentes zu bezeichnen ist.

Bildet man nun wieder den Quotienten der Moduln sich entsprechender Bogenelemente, so zeigt sich wie früher, dass dieses Verhältniss im allgemeinen für einen bestimmten Punkt nicht constant ist, dass es aber in dem speciellen Fall

$$k^3 = 1 \quad \text{oder} \quad k^3 = -1$$

für jede Function von  $w$  eine bestimmte Fläche gibt, für deren Punkte der erwähnte Quotient eine Function der Coordinaten ist, es

dass diese Fläche auf der ihr durch  $f(w)$  zugeordneten in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet wird.

Man erhält nämlich unter Benutzung der aufgestellten partiellen Differential Gleichungen :

$$\begin{aligned} dU^2 + dV^2 + dW^2 &= \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx^2 \\ &+ \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dy^2 \\ &+ \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right] dz^2 \\ &+ 2dx dy \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\ &+ 2dy dz \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} \right] \\ &+ 2dz dx \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

daher für  $k^3 = 1$

$$\begin{aligned} dU^2 + dV^2 + dW^2 &= \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &+ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) [dx dy + dy dz + dz dx] \end{aligned}$$

das heisst für alle Werte  $x, y, z$ , welche der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

genügen, wird

$$\frac{dU^2 + dV^2 + dW^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2$$

oder jede Function von  $x + ky + k^2z$

$$f(x + ky + k^2z) = U + kV + k^2W$$

wobei

$$k^3 = 1$$

bildet die Fläche, welche durch die obige Gleichung bestimmt ist, auf der ihr entsprechenden in den kleinsten Teilen ähnlich ab.

Man kann die Gleichung dieser Fläche in etwas einfachere Form bringen, wenn man für  $U$  den früher berechneten Wert einsetzt.

Man erhält dann:

$$3 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} + \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} + \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

$$3 \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial y}$$

und unter Berücksichtigung, dass

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \quad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad \text{ist,}$$

$$9 \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1}\right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2}\right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}\right)^2$$

$$+ (k_2 + 1) \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} + (k_3 + 1) \cdot \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

$$+ (k_3 + k_2) \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

Die analogen Relationen für die beiden übrigen Posten geben addirt:

$$9 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 3 \left( \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \right)^2 - 3 \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

so dass die Gleichung der abzubildenden Fläche auch geschrieben werden kann:

$$\left( \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \right)^2 = \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

Bezeichnet  $\psi$  die Umkehrfunctionen von  $f$ , so dass

$$w = \psi(U + kV + k^2W)$$

so kann man die entsprechende Fläche schreiben:

$$\left[ \frac{\partial f \psi(U + kV + k^2W)}{\partial \psi(U + kV + k^2W)} \right]^2 = \frac{\partial f \psi(U + k_2V + k_2^2W)}{\partial \psi(U + k_2V + k_2^2W)}$$

$$\cdot \frac{\partial f \psi(U + k_3V + k_3^2W)}{\partial \psi(U + k_3V + k_3^2W)}$$

worin  $f$  und  $\psi$  im Zähler selbstverständlich weggelassen werden können.

Um hiernach ein einfaches Beispiel zu rechnen, das durch die Gauss'sche Abbildungstheorie leicht verificirt werden kann, möge  $f$

so bestimmt werden, dass die abzubildende Fläche eine Rotationsfläche wird, deren Axe in die Richtung der früher definierten  $i$  oder  $1+k+k^2$  fällt, welche Richtung auf der Ebene

$$x + y + z = 0$$

senkrecht steht.

Die partielle Differential-Gleichung aller dieser Rotationsflächen lautet:

$$(y-z) \frac{\partial F}{\partial x} + (z-x) \frac{\partial F}{\partial y} + (x-y) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Setzt man voraus, dass  $F$  die Form haben soll

$$F = \left( \frac{\partial f(w_1)}{\partial w_1} \right)^2 - \frac{\partial f(w_2)}{\partial w_2} \cdot \frac{\partial f(w_3)}{\partial w_3}$$

so erhält man, wenn der Kürze halber

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w} = \varphi(w)$$

gesetzt wird, als Gleichung der Rotationsfläche:

$$\begin{aligned} & (y-z) [2\varphi(w_1)\varphi'(w_1) - \varphi(w_2)\varphi'(w_3) - \varphi(w_3)\varphi'(w_2)] \\ & + (z-x) [2\varphi(w_1)\varphi'(w_1) - \varphi(w_2)\varphi'(w_3)k_3 - \varphi(w_3)\varphi'(w_2)k_2] \\ & + (x-y) [2\varphi(w_1)\varphi'(w_1) - \varphi(w_2)\varphi'(w_3)k_2 - \varphi(w_3)\varphi'(w_2)k_3] = 0 \end{aligned}$$

woraus sich nach einigen einfachen Reductionen ergibt:

$$\varphi(w_2) \cdot \varphi'(w_3) \cdot w_3 - \varphi(w_3) \cdot \varphi'(w_2) \cdot w_2 = 0$$

Wählt man also  $\varphi$  so, dass

$$\varphi'(w) \cdot (w) = A \varphi(w) \text{ wird,}$$

oder also

$$\log \varphi(w) = A \log w + \log C$$

$$\varphi(w) = C \cdot w^A$$

worin  $C$  und  $A$  Constante bedeuten, so ist die obige Gleichung identisch erfüllt.

Für  $f(w)$  folgt also:

$$f(w) = \frac{C}{A+1} w^{A+1} + C_1$$

oder wenn  $A = -1$

$$f(w) = \log C_2 \cdot w^C$$

Speziell

$$f(w) = w^{-1} = U + kV + k^2W$$

liefert als abzubildende Fläche:

$$w_3^{-4} = (w_2 \cdot w_3)^{-2}$$

$$w_1^3 = \pm w_2 \cdot w_3$$

oder

$$(x + y + z)^2 = \pm (x + k_2y + k_3z)(x + k_3y + k_2z)$$

indem

$$k_2^2 = k_3 \quad \text{und} \quad k_3^2 = k_2$$

Dreht man das Coordinaten-System in die Richtung der früher definirten Einheitsvectoren  $i, j, l$  durch die Transformation

$$x + ky + k^2z = \frac{1+k+k^2}{\sqrt{3}} \xi + \frac{2-k-k^2}{\sqrt{6}} \eta + \frac{k-k^2}{\sqrt{2}} \zeta$$

worin die Coefficienten gleich hoher Potenzen von  $k$  gleich gesetzt werden können, so verwandeln sich die beiden Flächengleichungen, da

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= \frac{3}{\sqrt{3}} \xi \\ x + k_2y + k_3z &= \frac{3}{\sqrt{6}} \eta + \sqrt{\frac{-3}{2}} \zeta \\ x + k_3y + k_2z &= \frac{3}{\sqrt{6}} \eta - \sqrt{\frac{-3}{2}} \zeta \end{aligned} \right.$$

in:

$$\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 = 0$$

und

$$\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2 = 0$$

bedeuten also einen reellen und einen imaginären Kreiskegel.

Für die entsprechende Fläche ergeben sich selbstverständlich wegen der Reciprocität:

$$w_1 = (U + V + W)^{-1}$$

$$w_2 = (U + k_2V + k_3W)^{-1}$$

$$w_3 = (U + k_3V + k_2W)^{-1}$$

Gleichungen von derselben Form, so dass also die Function  $\frac{1}{w}$  die Kegel auf sich selbst abbildet, und zwar in reciproker Weise, indem den Schnittcurven des Kreiskegels im  $xyz$  Raume mit den Ebenen

$$x + y + z = c$$

die Schnitte desselben Kegels im  $UVW$  Raume mit den Ebenen

$$U + V + W = \frac{1}{c}$$

entsprechen.

Im allgemeinen erhält man entsprechende Punkte durch die Relationen:

$$U = \frac{x^2 - yz}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}, \quad V = \frac{z^2 - xy}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}, \quad W = \frac{y^2 - zx}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}$$

welche sich auf die früher angegebene Weise durch directes Ausrechnen ergeben.

Eine conforme Abbildung des reellen Kegels auf die Ebene erhält man, wenn  $A = -1$  gesetzt wird, also durch

$$f(w) = \log w = U + kV + k^2W$$

indem man als abzubildende Fläche wieder erhält:

$$\frac{(1)^2}{(w_1)^2} = \frac{1}{w_2} \cdot \frac{1}{w_3}$$

während sich für die entsprechende Fläche aus:

$$x + ky + k^2z = c^{U + kV + k^2W}$$

ergibt:

$$w_1^2 = e^{2(U + V + W)}$$

$$w_2 = e^{U + k_2V + k_3W}$$

$$w_3 = e^{U + k_3V + k_2W}$$

so dass

$$w_1^2 = w_2 w_3$$

übergeht in

$$2(U + V + W) = U + k_3V + k_2W + U + k_3V + k_2W$$

oder:

$$\underline{V + W = 0}$$

Entsprechende Punkte erhält man durch die Relationen, die sich zwischen  $xyz$  und  $UVW$  aus den drei Gleichungen:

$$3U = \log w_1 w_2 w_3$$

$$3V = \log w_1 w_2^{k_3} w_3^{k_2}$$

$$3W = \log w_1 w_2^{k_2} w_3^{k_3}$$

ergeben.

Um auf eine von den bisherigen Entwicklungen unabhängige Weise zu zeigen, dass die einander in solcher Weise zugeordneten Flächen wirklich conform abgebildet sind, sollen noch beide Flächen mit je zwei Schaaren sich rechtwinklig schneidender Curven bedeckt werden; die Zuordnung entsprechender Punkte durch die obigen Relationen, muss dann in den krummlinigen Coordinaten ausgedrückt übergehen in eine Zuordnung durch gewöhnliche complexe Functionen.

Bezeichnet man die neuen Variablen für  $xyz$  mit  $\delta$  und  $\kappa$  und die neuen Variablen für  $UVW$  mit  $\sigma$  und  $\rho$ , so lässt sich die Kegel-  
fläche

$$w_1^2 = w_2 w_3 \quad \text{oder} \quad xy + yz + zx = 0$$

darstellen durch

$$x = \sqrt{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} + \frac{2}{\sqrt{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \sin \lambda$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} + \sqrt{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \cos \lambda - \sqrt{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \sin \lambda$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} - \sqrt{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \cos \lambda - \sqrt{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \sin \lambda$$

und die zugeordnete Ebene darstellen durch

$$U = \sigma$$

$$V = -\rho \cos \frac{\pi}{4}$$

$$W = \rho \sin \frac{\pi}{4}$$

Mit Rücksicht darauf, dass

$$3U = 3\sigma = \log w_1 w_2 w_3$$

$$\rho = \sqrt{V^2 + W^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\log w_1 w_2 \log w_3 + [\log w_1 w_2 \log w_3]^2}$$

und

$$w_1 = 3 \sqrt{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{-3}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \cos \lambda + \sqrt{\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \sin \lambda = \sqrt{\frac{-3}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} e^{-\sqrt{-1} \cdot \lambda}$$

$$w_3 = -\sqrt{\frac{-3}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \cos \lambda + \sqrt{\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} \sin \lambda = -\sqrt{\frac{-3}{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\delta} e^{\sqrt{-1} \cdot \lambda}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
 3U &= \log \left\{ \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} e^{3\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \delta} \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \log \frac{\pi}{2} + 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \delta \\
 \sigma &= \frac{1}{3} \log \frac{\pi}{2} + \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \delta
 \end{aligned}$$

Um noch  $\rho$  durch  $\lambda$  und  $\delta$  auszudrücken, kann man für  $\sqrt{-1}$

schreiben  $e^{\sqrt{-1} \cdot \frac{\pi}{2}}$ , so dass

$$\sqrt{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot \frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad -\sqrt{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{-1} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

gesetzt wird, woraus sich weiter ergibt:

und  $w_1 \cdot w_2^{k_2} \cdot w_3^{k_3} = e^{-\sqrt{3} \left( -\frac{\pi}{2} + \lambda \right)}$

$$w_1 \cdot w_2^{k_3} \cdot w_3^{k_3} = e^{+\sqrt{3} \left( -\frac{\pi}{2} + \lambda \right)}$$

$$9\rho^2 = 6 \left( -\frac{\pi}{2} + \lambda \right)^2$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( -\frac{\pi}{2} + \lambda \right)$$

so dass zwischen den krummlinigen Coordinaten die Beziehung besteht:

$$\sigma + \sqrt{-1} \rho = \frac{1}{3} \log \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{-2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta + \sqrt{-1} \lambda)$$

was bekanntlich eine hinreichende Bedingung für die Conformität der Abbildung ist.

Als auszuschliessende Unstetigkeitsstellen einer eindeutigen Function eines dreiwertigen Argumentes müssen naturgemäss alle jene Punkte angesehen werden, in welchen einer der drei Functionswerte unstetig wird; für die Function  $\frac{1}{w}$  erfüllen daher die Unstetigkeitsstellen erstens die Ebene

$$w_1 = 0 = x + y + z$$

und zweitens die Gerade  $w_2 = 0$  oder (was dasselbe Resultat liefert)  $w_3 = 0$ ; nämlich

$$x = y = z$$

Dies sind zugleich auch die im endlichen gelegenen Unstetigkeitsstellen des Logarithmus, wie man entweder aus den früher berechneten Werten von  $UVW$ , oder auch aus der Definition des Logarithmus durch die Summe  $\int \frac{dw}{w}$  erkennt.

Dass ein solches Integral einen „Sinn“ hat, d. h. einen vom Integrationsweg unabhängigen Wert liefert, folgt aus dem Satz von Stokes, nach welchem ein Integral:

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

das sich über eine geschlossene Curve erstreckt, stets ersetzt werden kann durch ein Flächen-Integral:

$$\int \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(nz) \right] d\sigma$$

wobei  $n$  die Normale auf  $d\sigma$  bedeutet und die Fläche vom Integrationsweg begrenzt wird.

Bringt man nämlich das Linien-Integral

$$\int f(w) dw$$

zunächst durch Ausführung der Multiplication:

$$(U + kV + k^2W)(dx + k dy + k^2 dz)$$

auf die Form:

$$\int U dx + W dy + V dz + k \int V dx + U dy + W dz + k^2 \int W dx + V dy + U dz$$

und verwandelt dasselbe hernach nach dem Stokes'schen Satz in ein Flächen-Integral, so erhält man für den ersten Posten, wo  $UVW$  an die Stelle von  $\alpha\beta\gamma$  treten:

$$\int \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \cos(nz) \right] d\sigma$$

und für den zweiten und dritten Posten durch cyclische Vertauschung:

$$\int \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cos(nz) \right] d\sigma$$

$$\int \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) \cos(nz) \right] d\sigma$$

Nach den früher aufgestellten Relationen zwischen den einzelnen partiellen Differential-Quotienten verschwindet jeder einzelne Posten unter dem Integralzeichen, und es wird daher

$$\int f(w) dw = 0$$

sobald man durch die geschlossene Integrations-Curve eine Fläche legen kann, die nur solche Punkte enthält, für welche die aufgestellten Relationen zwischen den partiellen Differential-Quotienten richtig sind.'

Wollte man etwa jene Stellen, wo die partiellen Differential-Gleichungen keine Giltigkeit haben, als „Wirbelraum“ von  $f(w)$  bezeichnen, so kann man also sagen, ein Integral

$$\int f(w) dw$$

hat für alle jene Curven, die sich ohne einen Wirbelraum zu treffen, in einander überführen lassen, ein und denselben Wert.

Beispielsweise wird das Integral

$$\int \frac{dw}{w}$$

erstreckt um irgend eine Curve, welche die Gerade

$$x = y = z$$

oder die Richtung  $i$  einschliesst, ohne die Ebene

$$x + y + z = 0$$

zu treffen, ersetzt werden können durch dasselbe Integral längs eines Kreises, dessen Ebene auf der Richtung  $i$  senkrecht steht und dessen Mittelpunkt in die  $i$  Axe fällt.

Dreht man das Coordinaten-System in die Richtung der  $i j l$  und führt Polar-Coordinationen ein, so dass für  $w$  zu schreiben ist:

$$w = r(i \cos \varphi + g \sin \varphi) \quad \text{wobei} \quad g = j \cos \lambda + l \sin \lambda$$

und für  $dw$ , mit Rücksicht darauf, dass bezüglich der Integration  $\varphi$  constant ist, geschrieben werden kann,

$$dw = r \sin \varphi \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda} \cdot d\lambda \right)$$

so geht das Integral  $\int_{(c)} \frac{dw}{w}$  über in

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi (-j \sin \lambda + l \cos \lambda) d\lambda}{i \cos \varphi + g \sin \varphi}$$

Man kann nun  $\frac{1}{i \cos \varphi + g \sin \varphi}$  auf die Form:  $iX + jY + lZ$  bringen, indem man in der Gleichung:

$$1 = i^2 \cos \varphi X + j^2 \cos \lambda \sin \varphi Y + l^2 \sin \lambda \sin \varphi Z + j l (\sin \lambda \sin \varphi Y \sin \varphi Z)$$

für  $i, j, l$  die Werte in  $k$  substituirt, und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von  $k$  einander gleich setzt, wodurch man erhält:

$$X = \frac{1}{3 \cos \varphi}, \quad Y = \frac{2 \cos \lambda}{3 \sin \varphi}, \quad Z = -\frac{2 \sin \lambda}{3 \sin \varphi}$$

hiernach wird:

$$\int \frac{dw}{w} = \int_0^{2\pi} \left[ iX + j \cdot \frac{2 \cos \lambda}{3 \sin \varphi} - l \cdot \frac{2 \sin \lambda}{3 \sin \varphi} \right] \sin \varphi \frac{\partial g}{\partial \lambda} d\lambda$$

der erste Posten unter dem Integral verschwindet, weil

$$ij = il \equiv 0$$

Ferner gibt:

$$dg = (-j \sin \lambda + l \cos \lambda) d\lambda$$

$$j \cos \lambda \cdot dg = (-j^2 \cos \lambda \sin \lambda + jl \cos^2 \lambda) d\lambda$$

$$l \sin \lambda \cdot dg = (-jl \sin^2 \lambda + l^2 \cos \lambda \sin \lambda) d\lambda$$

daher:

$$\begin{aligned}
 (j \cos \lambda - l \sin \lambda) dg &= - (j^2 + l^2) \sin \lambda \cos \lambda d\lambda + j l d\lambda \\
 &= l \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} d\lambda
 \end{aligned}$$

indem wie früher gezeigt.

$$j^2 + l^2 \equiv 0$$

$$j l = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot l$$

das Integral  $\int_{(D)} \frac{dr}{w}$  geht also über in

$$l \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2\pi = l \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \pi$$

d. h. „es hat einen von  $r$  und  $\varphi$  unabhängigen Wert.“

Selbstverständlich muss man, wenn für  $ijl$  respective  $k$  seine drei Werte in die letzte Beziehung substituirt werden, drei richtige Gleichungen erhalten

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen:  $\frac{\sin \varphi \cdot dg}{i \cos \varphi + g \sin \varphi}$  hat für  $k_1 k_2 k_3$  die drei Werte:

$$0; \quad \frac{(-\sin \lambda + \sqrt{-1} \cos \lambda) d\lambda}{\cos \lambda + \sqrt{-1} \sin \lambda}; \quad \frac{(-\sin \lambda - \sqrt{-1} \cos \lambda) d\lambda}{\cos \lambda - \sqrt{-1} \sin \lambda}$$

dem entsprechen die drei Werte von  $l \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$  nämlich

$$0; \quad 2\pi \sqrt{-1}; \quad -2\pi \sqrt{-1}$$

X.

**Der Ring des Saturn.**

Eine mathematische Abhandlung.

Von

**Albert Niemann,**

Regierungs- und Baurath a. D.

---

V o r w o r t.

„Die Atmosphäre hat, nach den aus der Strahlenbrechung gezogenen „Schlüssen, eine Höhe von weniger als zehn geographischen Meilen.“ Etwas andere Schlüsse zog man aus der Erscheinung der Sternschnuppen und Feuerkugeln, deren plötzliches Aufleuchten der Berührung mit unserer Atmosphäre zugeschrieben und nach Schätzungen, so gut sie sich machen liessen, in einen Abstand von dreissig bis vierzig Meilen oder von 200 bis 300 km von der Erdoberfläche gesetzt wurde. Weiter zu gehen, schien gewagt. Dass nun jemand kommt und die Grenze der Atmosphäre, wie es in der vorliegenden Schrift geschieht, fast auf das fünfhundertfache des früheren oder auf das hundertundzwanzig- bis hundertundachtzigfache des neueren Maasses hinausrückt, das kann als Dreistigkeit angesehen werden. Der Leser möge diese Dreistigkeit wolwollend verzeihen und möge die Schrift mit freundlichem Willen lesen: er wird finden dass sie sich nicht auf wenn und aber gegründet, sondern sich auf den bewährten und unanfechtbaren Gesetzen der Massenanziehung aufgebaut hat, und zwanglos an ihren Schlüssen über den Ring des Saturn vorgeschritten ist.

## I. Allgemeine Gleichung.

$SAN$  in Figur 1 sei ein Weltkörper, der sich in  $n$  Secunden einmal um seine Achse dreht. Durch die Centrifugalkraft, die sich aus der Umdrehung entwickelt, werden die Massenteilchen der Atmosphäre nach aussen gedrängt; durch die Anziehung, die der Weltkörper ausübt, werden sie nach dessen Mittelpunkt hingezogen. Da die Anziehung mit dem Abstände vom Weltkörper abnimmt, und die Centrifugalkraft mit diesem Abstände zunimmt, so muss es eine Grenze  $FBED$  geben, an welcher Anziehung und Centrifugalkraft mit einander im Gleichgewicht stehen. Bis zu dieser Grenze dehnt sich, wie hier abweichend von allen bisherigen Annahmen behauptet wird, mit stetig abnehmender Dichte die Atmosphäre aus und schliesst dort in einer Verdünnung ab, die wir weder mit Luftpumpen noch mit anderen Vorrichtungen erreichen können und die sich von der Torricellischen Leere kaum unterscheidet.

In  $E$  sei eine Masse  $\omega$  vorhanden und die Beschleunigung der Fallschwere in diesem Punkte sei gleich  $\gamma$ . Die Anziehung, mit der das Gestirn die Masse  $\omega$  nach dem Mittelpunkte  $C$  hinzieht und die gleich  $\gamma\omega$  ist, werde mit  $q$  bezeichnet. Sie zerlegt sich in  $q \sin \varphi$  parallel zur Achse  $FD$  und in  $q \cos \varphi$  senkrecht zur Achse  $FD$ .

Die Centrifugalkraft, die sich im Punkte  $E$  in der Masse  $\omega$  entwickelt, ist in der Figur mit  $P$  bezeichnet worden und ist, da sie durch Umdrehung des Gestirns um die Achse  $FD$  entsteht, senkrecht zu dieser Achse gerichtet. Wenn man also bestimmen will, wie weit der Punkt  $E$  in der Grenze der Atmosphäre vom Mittelpunkt  $C$  des Weltkörpers entfernt ist, so muss man die Gleichung ansetzen:

$$P = q \cos \varphi$$

Bei der Umdrehung um die Achse  $FD$  beschreibt der Punkt  $E$  mit der Tangentialgeschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi}{n} EH$$

einen Kreis vom Halbmesser  $EH$ . Danach ist

$$P = \frac{\omega v^2}{EH}$$

und, wenn man für  $v$  den eben genannten Wert einrückt und aus der Figur

$$EH = CE \cos \varphi$$

entnimmt,

$$P = \omega \left( \frac{2\pi}{n} \right)^2 CE \cos \varphi$$

Setzt man dies gleich  $q \cos \varphi$ , d. h. nach dem Vorhergehenden  
 $= \gamma \omega \cos \varphi$

so erhält man nach Ausscheidung der sich hebenden Grössen

$$CE = \gamma \left( \frac{n}{2\pi} \right)^2$$

oder wenn man  $CE$  durch  $R$  bezeichnet

$$R = \gamma \left( \frac{n}{2\pi} \right)^2$$

In diesem Ausdruck muss noch  $\gamma$  bestimmt werden. Es sei  $g$  die Beschleunigung der Fallschwere im Aequator unserer Erde,  $n$  der Aequatorial-Halbmesser der Erde,  $A$  die Masse der Erde und  $M$  mal  $A$  die Masse des fremden Gestirns. Da sich nun nach dem bekannten Gesetz die durch die Beschleunigungen  $\gamma$  und  $g$  vertretenen Anziehungen direct wie die Massen der ihnen zugehörigen Gestirne und umgekehrt wie die Quadrate der Abstände der angezogenen Masse von den Mittelpunkten dieser Gestirne verhalten, so hat man die Proportion

$$\gamma : g = \left\{ \begin{array}{l} MA : A \\ a^2 : CE^2 \end{array} \right\}$$

woraus sich

$$\gamma = M \cdot \frac{a^2 g}{CE^2} \quad \text{oder} \quad \gamma = Mg \left( \frac{a}{R} \right)^2$$

ergibt. Durch Einführung dieses Wertes in die vorige Gleichung und durch Entwicklung von  $R$  erhält man schliesslich

$$R = \sqrt[3]{gM \left( \frac{na}{2\pi} \right)^2}$$

In diesem Ausdruck ist, wie der Deutlichkeit halber noch einmal wiederholt sein möge,  $u$  ( $= 6377,5$  km) der Aequatorial-Halbmesser der Erde und  $a$  ( $= 9,815$  m) die Beschleunigung der Fallschwere im Aequator der Erde, die aber, wenn  $a$  in Kilometern angenommen wird, ebenfalls als Bruchteil eines Kilometers

$$(- 0,009815 \text{ km})$$

angesetzt werden muss.  $M$  und  $n$  sind Maasse, die dem fremden Gestirn angehören, z. B. für den Saturn  $n = 37757$  Secunden und  $M = 92$ .

Zufolge der vorstehenden Berechnung sind also die sämtlichen Punkte der Linie  $FBED$  gleich weit vom Mittelpunkt des Sterns

entfernt oder mit anderen Worten: die Linie ist eine Kreislinie und das Gestirn bildet mit seiner Atmosphäre trotz seiner Umdrehung und trotz der Abplattung des festen Teils eine genaue Kugel vom Halbmesser  $R$ .

## II. Die Beschleunigung $g$ .

In seinen logarithmischen Tafeln (Ausgabe 1879, Seite 160) giebt Dr. E. F. August die Beschleunigung der Pendelschwere im Aequator der Erde gleich 9,781 m an. Es ist dies die Beschleunigung der Fallschwere, vermindert um den Verlust, der ihr aus der Centrifugalkraft erwächst. Durch die Fallschwere wird eine im Aequator der Erde befindliche Masse  $\omega$  mit der Kraft  $g\omega$  angezogen. Die Centrifugalkraft der Masse  $\omega$  ist aber  $-\frac{\omega v^2}{a}$  oder, weil die Tangential-Geschwindigkeit  $v = \frac{2\pi a}{n}$  ist, gleich  $\omega \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 a$ .

Dieselbe Masse wird von der Pendelschwere mit der Kraft 9,781  $\omega$  angezogen und dies muss gleich

$$g\omega - \omega \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 a$$

sein, woraus man

$$g = 9,781 + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 a$$

erhält. Hierin ist  $n = 86164$  Secunden, die Zeit einer Umdrehung der Erde um ihre Achse und  $a = 6377500$  m der Halbmesser des Erd-Aequators. Die Ausrechnung ergibt

$$\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 a = 0,034 \quad \text{und} \quad g = 9,815 \text{ m}$$

## III. Die Anziehung $q \sin \varphi$ .

Man beachte folgende drei Punkte. Erstens, dass die in  $E$  angenommene Masse  $\omega$ , oder, wie wir auch sagen können, das Massenteilchen  $E$  sich an der Grenze oder, wenn man will, auf der Grenze der Dunsthülle befindet; zweitens, dass die Anziehung  $q$  (Figur 1) in die beiden Seitenanziehungen  $q \cos \varphi$  und  $q \sin \varphi$  zerlegt, folglich durch diese beiden Anziehungen ersetzt worden ist; drittens, dass die Seitenkraft  $q \cos \varphi$  und die Centrifugalkraft  $P$  in

$E$  mit einander im Gleichgewicht stehen, sich also gegenseitig aufheben, so dass das Massenteilchen  $E$  sich weder in der Richtung  $EH$  (Figur 1) gegen die Erdachse hin, noch in der Richtung  $EP$  nach aussen bewegt. Dann erkennt man, dass die Kraft  $q \sin \varphi$  übrig geblieben ist und für sich allein, unabhängig von den Kräften  $q \cos \varphi$  und  $P$  behandelt werden kann. Wir wollen sie  $K$  nennen, Figur 2, also

$$q \sin \varphi = K$$

setzen und in die beiden Aeste  $U$  in der Richtung des Halbmessers  $EC$  und  $T$  in der Richtung der Tangente an den Meridian  $DEB$  zerlegen. Die Seitenkraft  $U$  wird, wie man sieht, durch den Widerstand der Dunsthülle aufgehoben, so dass die Seitenkraft

$$T = K \cos \varphi = q \sin \varphi \cos \varphi$$

vollständig frei geworden ist. Durch die Kraft  $T$  wird das Massenteilchen  $E$  längs des Bogens  $EB$  nach der Aequatorebene  $CB$ , also nach  $B$  hingeführt.

Die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, ist bemerkenswert und soll zunächst besprochen werden. Sie geht infolge des anhaltenden Einflusses der wenn auch abnehmenden Kraft  $T$  in eine beschleunigte über und hört zufolge der Massenträgheit auch dann noch nicht auf, wenn  $T$  und  $\varphi = 0$  geworden sind.

Zur Beantwortung der Frage, welche Geschwindigkeit das Massenteilchen  $E$  bei seiner Ankunft in  $A$  erlangt habe, nehme man an, es sei um den Bogen  $\alpha$  bis  $G$  vorgerückt, und seine Geschwindigkeit in  $G$  sei gleich  $v$  geworden. In  $G$  ist die Kraft

$$T' = q \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha)$$

Das Differential der Zeit sei  $dt$ , das Differential des Bogens  $ds$  und  $p$  die Beschleunigung, die durch die Kraft  $F$  erzeugt wird. Dann ist

$$dv = p dt \quad \text{und} \quad v dt = ds \quad \text{also} \quad v dv = p ds$$

Da wir nun die Beschleunigung der Fallschwere, die durch die Anziehung  $q$  in  $E$  hervorgerufen wird und die in jedem Punkte des Kreisbogens  $DEBF$  die nämliche ist, mit  $\gamma$  bezeichnet haben, so ist  $p : \gamma = T : q$  und hieraus nach dem Vorstehenden

$$p = \gamma \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha)$$

Auch ist

$$ds = R d\alpha$$

mithin

$$v dv = \gamma R \sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \quad \text{und}$$

$$v^2 = - \gamma R \sin(\varphi - \alpha)^2 + \text{Const}$$

Da für  $\alpha = \theta$  auch  $v = 0$  ist, so ist

$$\text{Const} = \gamma R \sin \varphi^2 \quad \text{und} \\ v^2 = \gamma R \{ \sin \varphi^2 - \sin(\varphi - \alpha)^2 \}$$

Hierin ist die Geschwindigkeit gegeben, die ein Massenteilchen erreicht hat, wenn es von einem beliebigen Punkte  $E$  aus um einen Bogen  $\alpha$  vorgerückt ist. Von Bedeutung ist jedoch nur die in  $B$  erlangte Endgeschwindigkeit, die sich ergibt, wenn  $\alpha = \varphi$  geworden ist. Sie ist

$$v = \sqrt{gR} \sin \varphi$$

Im Abschnitt I. ist

$$\gamma = \frac{Ma^2}{R^2 g}$$

berechnet worden, so dass man schliesslich für die Endgeschwindigkeit in  $B$  den Ausdruck erhält

$$v = a \sin \varphi \sqrt{\frac{gM}{R}}$$

Wenn man in dieser Gleichung  $\varphi = 90$  Grad werden lässt und für  $R$  den im Abschnitt I. berechneten Wert setzt, so erhält man die Geschwindigkeit, die ein vom Pol der Dunsthülle, also von  $D$  herankommendes Massenteilchen an der Aequatorebene in  $B$  erlangt gleich

$$V = \sqrt[3]{\frac{2\pi a^2 g M}{n}}$$

In dieser Gleichung ist wieder  $a = 6377,5$  km der Aequatorial-Halbmesser der Erde;  $g = 9,815$  m (oder 0,009815 km) die Beschleunigung der Fallschwere im Erdaequator, wogegen  $M$  und  $n$  die dem fremden Gestirn angehörigen Maasse bezeichnen.

Die Ergebnisse einer hiernach ausgeführten Zahlenberechnung sind für drei vorzugsweise zu berücksichtigende Planeten in nachfolgender Liste zusammengestellt worden.

Gestirn	$M$	$n$	$R$	$V$
	Masse im Verhältniss zu der Masse der Erde	Zeit einer Umdrehung des Gestirns Secunden	Halbmesser der Oberfläche der Dunsthülle km	Endgeschwindigkeit der Massenteilchen vom Pol an der Aequatorebene km
Erde	1,0	86164	42185	3,1
Saturn	92,0	37757	109868	18,3
Jupiter	308,0	35707	158354	27,9

Die für  $R$  und  $V$  angegebenen Zahlen müssen befremden. Denn in Beziehung auf die Erde sagen sie zum Beispiel, dass die Höhe ihrer Atmosphäre über ihrer Oberfläche nicht 90 oder 200 bis 300 km, sondern  $42185 - 6377,5 =$  rund 35808 km beträgt. Die Berechnung macht aber, auch wenn das Ergebniss noch so viel Erstaunen erregt, Anspruch auf volle Richtigkeit.

#### IV. Die Venus und unser Mond.

Wollte man die Berechnung auf die Venus anwenden, die sich angeblich in 224,7 Tagen einmal um ihre Achse dreht, oder auf unsern Mond, bei dem auf eine Umdrehung 29,53 Tage vergehen, so erhielte man für die Venus

$$R = 1437870 \text{ km}$$

und für den Mond

$$R = 93707 \text{ km}$$

das heisst, bis auf diese Abstände von ihren Mittelpunkten würden die Atmosphären dieser Gestirne reichen. Dem Mond wird keine Atmosphäre zugeschrieben, die Venus dagegen soll eine Atmosphäre haben, jedoch sie hat entweder keine Atmosphäre oder sie dreht sich rascher um, denn die ausserordentliche Grösse des Maasses, das sich für  $R$  herausrechnet, macht das Vorhandensein einer Dunsthülle unwahrscheinlich.

Die Formel für  $R$  zeigt deutlich, dass  $R$  um so kleiner wird je kleiner  $n$  ist, je rascher also das Gestirn sich dreht, und dass, abgesehen von der Masse  $M$ , die Gestirne ihre Atmosphäre um so fester zusammenhalten, je rascher sie sich umdrehen. Dies mag auffallend erscheinen, weil die Centrifugalkraft, also die aus einander treibende Kraft mit der Schnelligkeit der Umdrehung wächst, aber die Sache ist nicht anders.

#### V. Die Entstehung eines Ringes.

Die Massenteilchen  $E$  kommen freilich nicht mit der im Abschnitt III. angegebenen Geschwindigkeit an der Aequatorebene in  $B$  an. Es treten ihnen vielmehr einige Störungen entgegen, die nicht unbedeutend sind, die sich aber in keine Formeln fassen lassen. Jedes Massenteilchen schlägt zunächst die Richtung der Tangente  $ET$  ein, es wird auch beim Hervorquellen aus der Atmosphäre so zu sagen aufgeworfen, nach kurzem Lauf durch die

Anziehung des Gestirns wieder auf die Dunsthülle gestossen und gezwungen, seinen Weg in ähnlichen Sprüngen fortzusetzen wie der Stein, der über eine glatte Wasseroberfläche geschleudert wird. Bei jedem Sprunge erleidet es einen Aufenthalt. Ein anderer Aufenthalt entsteht dadurch, dass die aus höheren Breiten herkommenden, schon zu grösserer Geschwindigkeit angeregten Massenteilchen die aus niedrigeren Breiten entstammenden und deshalb langsamer hieziehenden Massenteilchen einholen und durch diese verzögert werden. Endlich entsteht noch ein Aufenthalt dadurch, dass die Massenteilchen infolge der Umdrehung des Gestirns sich in Spiralen bewegen, mithin einen grösseren Weg laufen müssen, als worauf die Berechnung bezogen worden ist.

Nichtsdestoweniger wird die Endgeschwindigkeit an der Aequatorebene in  $B$  noch bedeutend sein: das Heranströmen der Massenteilchen würde sogar noch stürmisch genannt werden können, wenn die heraneilenden Luftarten nicht fast gewichtlos wären. In dieser Beziehung nimmt in der That die Sache ein Aussehen an, dass sich unsere Gedanken nur schwer an das Ergebniss heranwagen, das der Rechenstift herausrechnet. Wendet man nämlich das zwar für solche ausserordentlichen Fälle nicht ersonnene, immerhin aber hier nicht ganz abzulehnende Mariottesche Gesetz in Gemeinschaft mit den Gesetzen der Anziehung an und setzt man die Dichte der Luft an der Oberfläche der Erde gleich Eins, so findet man, dass ihre Dichte im Abstände

$$R - 42185 \text{ km}$$

vom Mittelpunkt der Erde, also an der Grenze  $DEBF$  unserer Dunsthülle sich in einem Bruche darstellt, dessen Zähler gleich Eins und dessen Nenner eine Million auf die etwa fünfzigste Potenz erhoben ist. Ungezählte Billionen Jahre müssten vergehen, ehe aus der Oberfläche der Dunsthülle, obgleich sie über zwanzig tausend Millionen Quadratkilometer gross ist, soviel Luft an der Aequatorebene  $CB$  zusammengeströmt wäre, wie einem einzigen Kubikmeter der Luft an der Erdoberfläche entspräche. Dies soll uns jedoch nicht abschrecken, den von uns eingeschlagenen Weg weiter zu verfolgen.

Die Massenteilchen  $E$ , die an der Oberfläche des nördlichen Teils der Dunsthülle entspringen, begegnen an der Aequatorebene  $CB$  den Massenteilchen von der südlichen Halbkugel. Die einen drängen dort auf die andern und alle treten, da die Centrifugalkraft ihnen den Wiedereintritt in die Atmosphäre verwehrt, vor die Atmosphäre.

Solange die Massenteilchen dem von der Linie  $FBD$  begrenzten, durch die Anziehung des Gestirns zusammengehaltenen Dunstkreise

angehörten, wuchs ihre Tangential-Geschwindigkeit mit ihrem Abstände von der Achse  $FD$ , weil die Winkelgeschwindigkeit dieselbe blieb und der zu durchlaufende Kreis immer grösser wurde. Sobald hingegen die Teilchen bei  $B$  aus dem Dunstkreise ausgetreten sind, ist der Anziehungskraft durch die ihr in  $B$  in gleicher Grösse entgegengesetzte Centrifugalkraft die Möglichkeit genommen, die Tangential-Geschwindigkeit der Teilchen noch zunehmen zu lassen; sie behalten aber auf Grund der Trägheit einerseits in der Richtung der Planetenbahn um die Sonne die Geschwindigkeit des Planeten, andererseits in der Richtung der Tangente an den Aequator des Dunstkreises die Rotations-Geschwindigkeit, die der Punkt  $B$  bei der Umdrehung des Planeten um die Achse  $FD$  besitzt. Sie können aber nicht der Tangente folgen, das heisst, sich nicht in der Richtung der Tangente vom Dunstkreise entfernen, weil sie an diesen fortwährend durch die Anziehung des Gestirns herangezogen werden. Sich wieder in den Dunstkreis einzufügen, gestattet ihnen, wie wir schon gesagt haben, die Centrifugalkraft nicht, durch die sie vielmehr, sobald sie den Dunstkreis berühren, dauernd abgestossen werden. Es bleibt ihnen nichts anderes übrig, als sich bei  $B$  ausserhalb des Dunstkreises zu lagern.

Derselbe Vorgang, wie er beschrieben wurde, vollzieht sich in allen Punkten des Aequators der Dunsthülle in seinem ganzen Umfange. Zugleich strömen ununterbrochen andere Massenteilchen den zuerst ausgetretenen nach und drängen diese von dem Dunstkreise ab weiter nach  $Z$  hinaus.

Auf solche Weise entsteht um die Dunsthülle ein Ring oder Wolkenzug  $BZ$  Figur 3, der wegen der stetig in Wirksamkeit bleibenden Kraft  $q \sin \varphi$  in der Richtung parallel zur Planetenachse gemessen nur sehr dünn sein kann und dem in Richtung der Aequatorebene eine grössere Ausdehnung offen steht.

Der Ring des Saturn ist sichtbar, der Ring der Erde nicht. Wir sehen ja die Luft nicht, in der wir athmen: um so weniger können wir die Luft von dünnster Dünne sehen, die in weitem Abstände von uns den Ring um die Erde bildet. Aber er entgeht uns nicht; denn das Zodiakallicht ist unzweifelhaft sein Verräter.

Noch einiges andere von allgemeiner Bedeutung möge dem nächsten Abschnitt vorbehalten und der grösseren Anschaulichkeit halber an dem Planeten dargelegt werden, der merkwürdiger Weise in unserem Sonnensystem allein die hier in Behandlung genommenen Eigenschaften deutlich wahrnehmen lässt.

## VI. Der Ring des Saturn.

In der nach dem Maassstabe gezeichneten Figur 4 ist der Saturn mit seinem Kranze dargestellt. Die stark punktirte Kreislinie *E* ist die rechnermässige Grenze seiner Atmosphäre, also die Linie *DEBF* der früheren Figuren. Wie kommt es dann, so lautet sofort die Frage, dass der Ring, der nach den Lehren der vorigen Abschnitte ausserhalb der erwähnten Grenze liegen sollte, in diese hineinragt? Bevor dies erklärt wird, ist noch an das zu erinnern, was man bisher über den Ring beobachtet hat.

Früher schrieb man der Kranzscheibe eine Dicke von etwa 40 Kilometern zu, was mit unseren Ausführungen über die Kraft  $q \sin \varphi$  schlecht übereinstimmt. In neueren Zeiten haben die mächtigen Fernrohre, die man jetzt besitzt, Zweifel an den 40 km erweckt und zu der Meinung geführt, dass mehr als ein halbes Kilometer Dicke nicht angenommen werden könne. Die Stärke einer Scheibe zu messen, die dem Einen aus Dunstmassen, dem Andern vielleicht aus Flüssigkeiten und dem Dritten gar aus einem kreisenden Schwarm von staubwolkenartigen Körperchen gebildet zu sein scheint und die mindestens 1190 Millionen Kilometer oder achtmal so weit wie die Sonne von uns entfernt ist, also die Dicke einer Scheibe zu bestimmen, die aus lauter verschiebbaren und in Bewegung befindlichen Theilchen besteht und die aus diesem Grunde schwerlich eine scharf begrenzte Kante hat, das ist viel zu schwierig, als dass die Unsicherheit der bisherigen Angaben auffallend wäre. Für unsere Untersuchungen ist, wie wir sehen werden, die Dicke der Scheibe gleichgültig.

Selbst der grösste Durchmesser der Scheibe, obgleich er als ein grösseres Object schärfer in's Auge gefasst werden kann, wird verschieden gross angegeben, einmal 271000 km, dann von dem amerikanischen, im Jahre 1863 verstorbenen Astronomen G. P. Bond 278230 km und in den neueren Jahren von Barnard 276368 km. Diese Zahl sollte die zuverlässigste sein, denn sie gründet sich auf Beobachtungen, die ihr Urheber im Jahre 1894, als die Sichtbarkeit des Saturn besonders günstig war, mit dem 36 zölligen Refractor der Licksternwarte ausgeführt hat. Der Unterschied der beiden amerikanischen Zahlen beträgt 1862 km und zeigt zur Genüge, dass die Angaben über die Dicke der Scheibe sich rein auf Schätzung beschränken müssen.

Schwer zu bekämpfen ist die herrschend gewordene Ansicht, dass der Kranz des Saturn aus zwei um einanderliegenden Ringen be-

stünde, die durch einen leeren Zwischenraum von einander getrennt wären. Im Anfange unseres Jahrhunderts hat man von dieser Trennung nichts gemerkt; der Astronom Barnard stellt sie auf Grund seiner sorgfältigen Beobachtungen ebenfalls in Frage und will nur etwas gesehen haben, das ihm wie eine schwache dunkle Linie auf dem Ringe erschienen wäre. In unserer Figur ist der Zwischenraum den G. P. Bond 3230 km breit angiebt, durch die Kreise *F* und *G* angedeutet werden.

Wenn wir auch mit berühmten Astronomen in Widerspruch geraten, so wollen wir doch von dem vermeintlichen Zwischenraum absehen und zwar sowol weil der Astronom Barnard Glauben verdient, als auch weil das Dasein einer leeren den Kranz in zwei concentrische Ringe spaltenden Schicht durch unsere Entwicklungen widerlegt wird. Der Astronom Bond führt auch noch einen dunkeln, innersten Ring an, der in der Figur durch die Kreislinien *C* und *D* eingeschlossen wird und 16155 km Breite haben soll. Zum Kranze des Saturn kann dieser dunkle Ring oder Raum nicht gehören: vielleicht ist es dasselbe, was Barnard einen dunklen Äquatorialgürtel nennt. Wir bleiben bei dem Ringe stehen, der bisher stets als der eigentliche Ring betrachtet wurde und in der Figur durch die Kreislinien *D* und *H* begrenzt worden ist.

Dieser Ring dreht sich anscheinend rückläufig um den Planeten herum. Wir haben im vorigen Abschnitt gesagt, dass und weshalb jedes Massenteilchen *E*, das aus der Dunsthülle austräte, bei der Umdrehung um die Achse *FD* die Tangential-Geschwindigkeit bewahrte, die in der Grenzlinie *DEBF* Figur 3 sich entwickelt hätte, was so gut für den Punkt *Z* gilt, wie für jeden zwischen *Z* und *B* befindlichen Punkt. Da nun der Punkt *Z* in Beziehung auf die Barnard'schen Angaben um 28316 km weiter vom Mittelpunkt des Saturn entfernt ist als der Punkt *B*, so muss *Z* mit der nämlichen Geschwindigkeit auf die Secunde, mit der *B* den von ihm bei jeder Umdrehung des Planeten mit dem Halbmesser *CD* beschriebenen Kreis durchläuft, eine um 17800 km grössere Kreislinie durchlaufen, was zur Folge hat, dass bei jeder Umdrehung des Saturn der Punkt *Z* sich um zwei Stunden und zweiundvierzig Minuten ( $2^{\circ} 42'$ ) verspätet, oder mit anderen Worten, dass der Punkt *Z* zu einer Umdrehung um die Achse des Planeten  $2^{\circ} 42'$  mehr verbraucht als der Punkt *B*, oder der Planet selbst. Ebenso ist es mit dem Punkte zwischen *Z* und *B* mit der Maassgabe, dass mit die Verzögerung kleiner wird, je näher der fragliche Punkt bei *B* liegt. Auf diese Weise entsteht der Eindruck einer rückläufigen Bewegung des Ringes um den Saturn.

Noch haben wir zu erwähnen, dass die Ringscheibe des Saturn streifig aussieht. Als die ersten Massenteilchen  $E$  aus der Dunsthülle austraten, bildeten sie einen Ring um den Planeten. Dann folgten andere Teile nach und schoben, da die Wirkung der Kraft  $q \sin \varphi$  oder der Kraft  $q \sin \varphi \cos \varphi$  (Abschnitt III) ihnen nicht erlaubte, sich neben dem ersten Ringe zu lagern, diesen weiter hinaus und bildeten für sich den zweiten Ring. Darauf folgte ein dritter, ein vierter und so fort immer ein neuer Ring nach dem andern, bis die jetzt bestehende, durch den Kreis  $H$  Figur 4 gekennzeichnete Ausdehnung erreicht worden war, deren Zunahme ununterbrochen stattfindet, für uns kurzlebige Menschen aber nicht wahrnehmbar ist. Hiernach hätten wir also zu verstehen gegeben, dass der Ring des Saturn aus lauter concentrischen Ringen bestünde. Man braucht dies jedoch nicht wörtlich zu nehmen, sondern nur auf die soeben ausgesprochene Bemerkung zurückzugehen, dass die an der Aussen- seite der Grenze  $DEBF$  der Dunsthülle liegenden Teile des Kranzes sich in ganz verschiedenen Zeiten um die Planetenachse drehen, je nachdem ihr Abstand von dieser grösser oder kleiner ist. Danach kann es nicht ausbleiben, dass sich, wenn es nicht schon von vorn- herein geschehen ist, auch nachträglich concentrische Ringe bilden, denen wir keinen unabänderlichen Bestand zusprechen wollen, das heisst, die wol hin und wieder in einander verschwimmen mögen, die aber dem Kranze des Planeten das erwähnte streifige Aussehen verschaffen müssen. Da der Ring durch die von Norden und von Süden gegen einander wirkenden Kräfte  $q \sin \varphi$ , durch die Anziehung des Planeten und durch die Centrifugalkraft zusammen gehalten wird, da er also ein geschlossenes Ganze bildet, so gehen die Drehungen der concentrischen Ringe um einander auch auf den innerhalb der Grenzlinie  $DEBF$  liegenden Teil des Kranzes oder Ringes über und geben auch diesem ein streifiges Aussehen.

## VII. Die Lage des Saturnringes.

Es kommt schliesslich darauf an, die Lage des Saturnringes zu der Grenzlinie  $DEBF$  zu bestimmen, also auch nachzuweisen, weshalb sich der Ring, anscheinend im Widerspruch mit den Erklärungen des Abschnittes I, in den Raum erstreckt, der von der Grenzlinie  $DEBF$  umschlossen wird. Wesentlich hierbei ist, dass der Ring gemäss dem Schlusssatz des vorigen Abschnitts ein zwar aus losen Teilen bestehendes, aber doch in sich vereinigt Gebilde darstellt.

Wir schneiden den Keil  $KKHH$  Figur 5 aus dem Ringe heraus. Seine Dicke sei gleich eins, seine Breite  $BB$  ebenfalls gleich eins.

$C$  ist der Mittelpunkt des Saturn,  $AA$  seine Oberfläche,  $KK$  die innere und  $HH$  die äussere Kante des Saturnringes,  $BB$  die im Abschnitt I berechnete Grenzlinie oder die Oberfläche der Dunsthülle vom Halbmesser

$$R = 109\,868 \text{ km}$$

Die Centrifugalkraft, die sich in dem Stück  $BH$  entwickelt, vermehrt um die in  $KB$  entwickelte Centrifugalkraft muss mit der Anziehung die der Planet auf den ganzen Keil ausübt, im Gleichgewicht stehen. Es soll Alles auf die Linie  $BB$  bezogen werden, für welche wir die Beschleunigung der Fallschwere durch  $\gamma$  bezeichnet haben.

ℳ. In dem Stück  $BH$  kommt nach dem bisher gesagten durchweg dieselbe Tangential-Geschwindigkeit  $v$  vor, die dem der Grenzlinie  $BB$  angehörigen Punkt  $B$  bei der Umdrehung um die Planetenachse  $SN$  zu eigen geworden ist. Da

$$BB = 1$$

ist, so ist

$$hh = \frac{R+y}{R}$$

und das Differential, das zugleich die Masse ausdrücken möge,

$$= \frac{R+y}{R} dy$$

Danach ist die Centrifugalkraft

$$= \frac{R+y}{R} \cdot \frac{v^2}{R+y} dy$$

und dies von 0 bis  $b$  integriert, ergiebt die ganze Centrifugalkraft des Stückes  $BH$  gleich  $\frac{x^2}{R} b$  oder, weil

$$v = \frac{2\pi R}{n} \text{ ist, } = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 Rb \text{ (ℳ)}$$

℔. In Beziehung auf das Stück  $KB$  könnten zweierlei Ansichten geltend gemacht werden, entweder dass in diesem Stück die Tangential-Geschwindigkeit mit dem Abstände vom Mittelpunkte des Planeten gerade so zunimmt, wie in dem übrigen Raume innerhalb der Grenzlinie  $DEBF$ , oder dass das Stück  $KB$ , dessen Teile vorher, solange sie an der Aussenseite von  $DEBF$  lagen, die constante Geschwindigkeit  $v$  hatten, diese wie im vorigen Abschnitt auch dann noch beibehalten hat, nachdem es durch das Stück  $BH$  in den Innenraum von  $DEBF$  hineingedrückt worden war. Wahrscheinlich

werden beide Geschwindigkeiten einander beeinflussen und fortwährend mit einander kämpfen, ohne dass eine von beiden für sich allein jemals die Herrschaft zu behaupten vermag.

Die erste Ansicht, wonach die Tangential-Geschwindigkeit veränderlich ist, soll zunächst in Rechnung gezogen werden. Für die Masse  $ee$  ist der Umdrehungs-Halbmesser

$$\begin{aligned} &= R - d + x \\ \text{die Masse} & \\ &= \frac{R-d+x}{R} dx \end{aligned}$$

und die Centrifugalkraft

$$= \frac{R-d+x}{R} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \frac{(R-d+x)^2}{R-d+x} dx = \frac{(R-d+x)^2}{R} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 dx$$

was von 0 bis  $d$  integrirt, die Centrifugalkraft des Stückes  $KB$  ergäbe

$$= \frac{1}{3R} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \{R^3 - (R-d)^3\} \quad (\mathfrak{B})$$

Wenn die zweite Ansicht gelten soll, so hat man einfach den unter  $A$  gegebenen Ausdruck von 0 bis  $d+b$  zu integriren und erhält in diesem Falle die Centrifugalkraft des Stückes  $KB$

$$= \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 R(d+b) \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B})$$

$\mathfrak{C}$ . Die Anziehung des Saturn auf das Massenteilchen  $BB=1$  ist nach dem Früheren  $= \gamma$ , mithin auf das Massenteilchen  $ee$  gleich

$$\gamma \frac{R-d+x}{R} \cdot \frac{R^2}{(R-d+x)^2} dx = \gamma \frac{R}{R-d+x} dx$$

was von 0 bis  $d+b$  integrirt, die ganze Anziehung, die der Planet auf den Keil  $HK$  ausübt, gleich

$$\gamma R \log \frac{R+b}{R-d}$$

ergiebt. Nach Abschnitt I ist aber

$$R = \gamma \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 \quad \text{also} \quad \gamma = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 R$$

mithin die ganze Anziehung auf den Keil gleich

$$\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 R^2 \log \frac{R+b}{R-d} \quad (\mathfrak{C})$$

Es ist also einmal  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$  und das andere Mal  $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$  zu setzen. Im ersten Falle erhält man nach gehöriger Auflösung die Gleichung

$$\frac{b+d}{R} = \log \frac{R+b}{R-d} + \frac{d^2}{R^2} - \frac{d^3}{3R^3} \quad (\mathfrak{D})$$

im anderen Falle die Gleichung

$$\frac{b+d}{R} = \log \frac{R+b}{R-d} \quad (\mathfrak{E})$$

Hierin ist für den Saturn  $R = 109863$  der im Abschnitt III. angegebene Halbmesser seiner Dunsthülle;  $b+d = 47816$  km nach G. P. Bond die ganze Breite  $KH$  des Ringes;  $b$  und  $d$  sind zu berechnen.

Im ersten Falle ergibt die Zahlenberechnung

$$b = 31271 \text{ km} \quad \text{und} \quad d = 165544 \text{ km} \text{ im zweiten Falle}$$

$$b = 25636 \text{ km} \quad \text{und} \quad d = 22179 \text{ km}$$

Zählt man  $b$  zu  $R$  hinzu, so erhält man den Halbmesser des äusseren Randes, und wenn man  $d$  von  $R$  abzieht, so erhält man den Halbmesser des innern Randes der Ringscheibe. Die nachstehende Uebersicht gibt Gelegenheit, die Zahlen der Berechnungen und die Zahlen der astronomischen Beobachtungen unter sich mit einander bequem zu vergleichen.

Ursprung der Zahlen	Streifenbreite		Halbmesser	
	$b$ km	$d$ km	des äussern Randes km	des innern Randes km
G. P. Bond	29247	18568	<b>139115</b>	<b>91300</b>
Barnard	28318	19499	<b>138184</b>	<b>90369</b>
Berechnung $\mathfrak{D}$	31271	16544	141139	93324
Berechnung $\mathfrak{E}$	25636	22179	135504	87689
Mittel aus $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$	28454	19361	138322	90507

Nur die drei fettgedruckten Zahlen sind von den Astronomen angegeben, und die übrigen Zahlen danach und nach der von G. P. Bond angegebenen Kranzbreite von 48815 km berechnet worden. Die letzte Zeile der vorstehenden Liste enthält auch das Mittel aus

den berechneten Zahlen. Dass dieses Mittel mit den Barnard'schen Messungen nahezu übereinstimmt, soll aber kein Beweis für die Richtigkeit der vorausgegangenen Herleitungen sein; denn wenn diese nicht an und für sich richtig wären, dann könnten ihnen auch keine Zahlen dazu verhelfen. Die Angabe des Durchschnitts erschien im Hinblick auf das, was vorhin unter (B) über die zweierlei verschiedenen Ansichten gesagt wurde, nicht überflüssig, sondern geradezu geboten.

Zu bemerken ist noch, dass der Keil  $KKHH$  unter der beständigen Geschwindigkeit  $v$  dieselbe Centrifugalkraft (BB) auch dann liefern würde, wenn er, zwischen die verlängerten Radien  $CH$  und  $CH$  gefasst, dass heisst, von diesen Verlängerungen begrenzt und in der Masse vergrössert, ganz ausserhalb der Grenzlinie  $BB$  läge, vorausgesetzt, dass seine Höhe sich nicht änderte.

Anmerkung. Nicht unerwähnt soll bleiben, dass die Kraft  $q\sin\varphi$  oder die im Abschnitt III. besprochene Kraft  $q\sin\varphi\cos\varphi$ , in dem Maasse, wie sie an die Oberfläche der Erde kommt, in dem beweglichen Wasser der Meere die Meeresströmungen verursacht und dadurch den Grund zu Ebbe und Flut legt. Der Mond hat dabei die Aufgabe übernommen, durch seine Anziehung, die nicht geläugnet werden soll, die in Bewegung befindlichen Massen einer gewissen Regelung zu unterwerfen.

## XI.

## Ueber das gleichseitige und das Höhenschnitts-Tetraeder.

Von

**R. Hoppe.**

## § 1. Allgemeine Anordnungen.

Die Gleichheit aller 4 Seiten und der Schnitt aller 4 Höhen in einem Punkte sind 2 Eigenschaften, welche 2 specielle Classen von Tetraedern definiren. Die Vereinigung beider Eigenschaften macht das Tetraeder zu einem regelmässigen.

Die Untersuchung vereinfacht sich sehr, indem wir das orthogonale Axensystem so legen, dass die Anzahl der nötigen Bestimmungsstücke die kleinste wird, nämlich 3. Sei eine Seite  $P_1 P_2 P_3$  als beliebiges Dreieck angenommen und Ebene der  $xy$ , eine Kante  $P_1 P_2$  Axe der  $x$ , und  $P_1$  Anfang der  $xyz$ , überdies (mit Absehen vom Spiegelbild)  $z$  ausschliesslich positiv, also in Coordinaten

$$P_1 \equiv (0, 0, 0); \quad P_2 \equiv (a, 0, 0); \quad P_3 \equiv (b, c, 0); \quad P_4 \equiv (x_4, y_4, z_4) \quad (1)$$

Dann zeigt sich, dass die 4te Ecke durch  $a, b, c$  beim gleichseitigen Tetraeder eindeutig bestimmt, beim Höhenschnitts-Tetraeder nur von der letzten Höhe abhängig ist.

Das gegebene Dreieck  $P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2}ac$  sei stets bezeichnet durch  $\frac{1}{2}A$ .

## § 2. Gleichseitiges Tetraeder.

Alle Punkte  $P_4$ , die der Bedingung

$$P_1 P_2 P_4 = P_1 P_2 P_3$$

genügen, liegen offenbar auf einem Cylinder, dessen Axe  $P_1 P_2$  ist, und der durch  $P_3$  geht. Dies angewandt auf die 2 übrigen Seiten zeigt, dass  $P_4$  der Schnittpunkt dreier Cylinder ist, dessen Axen  $P_2 P_3$ ,  $P_3 P_1$  und  $P_1 P_2$  sind, und die bzhw. durch  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  gehen. Die Gleichungen dieser Cylinder sind bzhw.

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_2 & x_3 - x_2 \\ y - y_2 & y_3 - y_2 \end{array} \right|^2 + g_1^2 z^2 = \Delta^2$$

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right|^2 + g_2^2 z^2 = \Delta^2$$

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{array} \right|^2 + g_3^2 z^2 = \Delta^2$$

wo  $g_1, g_2, g_3$  die Kanten  $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$  bezeichnen. Den Coordinatenwerten zufolge werden sie:

$$\left| \begin{array}{cc} x - a & b - a \\ y & c \end{array} \right|^2 + \{(a - b)^2 + c^2\} z^2 = (ac)^2 \quad (2)$$

$$\left| \begin{array}{cc} x & b \\ y & c \end{array} \right|^2 + (b^2 + c^2) z^2 = (ac)^2 \quad (3)$$

$$\left| \begin{array}{cc} x & a \\ y & 0 \end{array} \right|^2 + a^2 z^2 = (ac)^2 \quad (4)$$

Die letzte gibt sogleich:

$$y^2 + z^2 = c^2 \quad (5)$$

die Differenz der 2 ersten:

$$a(y - c) \{2cx + (a - 2b)y - ac\} + a(a - 2b)z^2 = 0 \quad (6)$$

nach Division durch  $a(y - c)$  mit Anwendung der vorigen Gleichung:

$$2cx - 2(a - b)c = 0$$

Demnach ist für  $P_4$

$$x_4 = a - b \quad (7)$$

woraus nach Einführung in Gl. (3):

$$\{cy + b(a - b)\}^2 = \{c^2 - b(a - b)\}^2$$

Die eine Wurzel ist  $y = -c$ ; ihr entspricht  $z = 0$ . Das Tetraeder

degenerirt hier in ein Parallelogramm. Die andre, demnach allein gültige Wurzel gibt als Coordinaten der gesuchten Ecke:

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= a - b; & y_4 &= c - 2b \frac{d-b}{c} \\ z_4 &= \frac{2}{c} \sqrt{\{b(a-b)[e^2 - b(a-b)]\}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die 3 Factoren unter dem Quadratwurzelzeichen entscheiden über folgende Fälle. Verschwindet einer, so ist  $\Delta$  rechtwinklig, und die Figur fällt wegen  $z_4 = 0$  in eine Ebene. Wird einer negativ, so wird  $\Delta$  stumpfwinklig und das Tetraeder imaginär. Mehr als einer können nicht null oder negativ werden. Sind alle Factoren positiv, so ist  $\Delta$  spitzwinklig, das Tetraeder reell. Es resultirt demnach:

**Lehrsatz 1.** Alle Seiten jedes gleichseitigen Tetraeders sind spitzwinklig.

**Lehrsatz 2.** Auf jedem spitzwinkligen Dreieck als Seite lässt sich ein und nur ein gleichseitiges Tetraeder errichten.

**Bemerkung.** Eine Figurbetrachtung zeigt unmittelbar, dass 3 Parallelogramme nebst Diagonalen die Bedingung gleichseitiger Tetraeder mit  $\Delta$  als Basis erfüllen, nämlich diejenigen, welche einzeln die 3 Seiten von  $\Delta$  zur Diagonale haben. Nun ergibt die Elimination von  $z$  und  $x$  zwischen den Gl. (1) (2) (3) direct eine Gleichung 4. Grades für  $y$ , welche dann durch Division auf ersten Grad herabsinkt. So verdankt die alleingültige Lösung (7) ihre Eindeutigkeit den 3 genannten zu verwerfenden Lösungen.

### § 3. Schwerpunkt des homogenen gleichseitigen Tetraeders.

Sind  $L$ ,  $M$  und  $N$  die Schwerpunkte von  $P_1P_2$ ,  $P_1P_3P_4$  und dem Tetraeder, und  $u_2, u_3, u_4, t, v, w$  die Projectionen der Strecken  $P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_1L, P_1M, P_1N$  auf einen von  $P_1$  ausgehenden Strahl, so ist

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{2}u_2; & v &= t + \frac{1}{3}(u_3 - t) = \frac{1}{3}(u_2 + u_3) \\ w &= v + \frac{1}{3}(u_4 - v) = \frac{1}{3}(u_2 + u_3 + u_4) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Geht dann der Strahl in die Axen der  $x, y, z$  über, und man setzt für die  $u$  die Coordinatenwerte (1), so kommt bzhw.:

$$t = \frac{1}{2}a; \quad v = \frac{1}{2}(a+b); \quad w = \frac{1}{2}a$$

$$t = 0; \quad v = \frac{1}{2}c; \quad w = \frac{1}{2}\left(c - b \frac{a-b}{c}\right)$$

$$t = 0; \quad v = 0; \quad w = \frac{1}{2c} \sqrt{b(a-b)[c^2 - b(a-b)]}$$

Demnach sind die Coordinaten des Schwerpunkts:

$$x_0 = \frac{1}{2}a; \quad y_0 = \frac{1}{2}\left(c - b \frac{a-b}{c}\right)$$

$$z_0 = \frac{1}{2c} \sqrt{b(a-b)[c^2 - b(a-b)]}$$

Die erste dieser Gleichungen, auf alle 6 Kanten angewandt, zeigt, dass die normal halbirenden Ebenen derselben sich im Schwerpunkt schneiden. Dieser Schnittpunkt aber ist der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel. Es folgt:

**Lehrsatz 3.** Der Schwerpunkt des homogenen gleichseitigen Tetraeders ist zugleich der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel.

**Bemerkung.** Das Vorstehende hat eine gemeinsame Eigenschaft des gleichseitigen Tetraeders und des gleichseitigen Dreiecks ergeben. Man könnte die Frage untersuchen, ob die analogen Gebilde von beliebig vielen Dimensionen sie besitzen.

#### § 4. Höhenschnitts-Tetraeder.

Sei  $N$  eine Normale auf der Dreiecksebene  $\mathcal{A}$  und  $M$  ein variabler Punkt, der sie durchläuft. Dann beschreibt die Gerade  $P_2M$  eine Ebene  $Q$ . Normal zu jedem  $P_2M$  gehe eine Ebene  $E$  durch  $P_1$ . Die Schnitte aller  $E$  sind offenbar einander parallel, weil normal zu  $Q$ . Geht also einer durch  $P_3$ , so gehen alle durch  $P_1$  und  $P_3$ . Hiermit erfüllen alle  $E$  die Bedingung der Ebene einer zweiten Tetraederseite gegenüber  $P_2$ , deren Höhenlot von  $P_2$  durch  $M$  geht. Nun ist die Ebene  $\mathcal{A}$  eine der Ebenen  $Q$ , entsprechend dem Fusspunkt von  $N$ ; auch hier ist  $P_2M$  normal zu  $P_1P_3$ . Angewandt auf alle 3 Seiten ergibt sich:

**Lehrsatz 4.** Schneiden sich die Höhen eines Tetraeders in einem Punkte, so liegt der Fusspunkt einer jeden im Höhenschnitt des entsprechenden Seitendreiecks.

Damit auch der umgekehrte Satz gilt, ist noch die Bedingung zu erfüllen, dass die 3 analogen Ebenen  $E$  sich auf  $N$  schneiden.

Der Höhenschnitt des Dreiecks  $\mathcal{A}$  hat die Coordinaten:

$$x = b; \quad y = b \frac{a-b}{c}; \quad z = 0$$

daher der Höhenschnitt des Tetraeders:

$$x = b; \quad y = b \frac{a-b}{c}; \quad z = h \tag{9}$$

wo  $h$  eine unbekante Strecko bezeichnet. Daraus lassen sich die Gleichungen der übrigen Höhen (als Verbindungen des Punktes (9) mit  $P_1, P_2, P_3$ ) und hieraus wieder die der zu ihnen normalen Tetraederseiten berechnen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} b(x-a) + b \frac{a-b}{c} y + hz &= 0 \\ (b-a)x + b \frac{a-b}{c} y + hz &= 0 \\ \left( b \frac{a-b}{c} - c \right) y + hz &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Als deren Durchschnitt ergibt sich der Punkt  $P_4$  mit den Coordinaten

$$x_4 = b; \quad y_4 = b \frac{a-b}{c}; \quad z_4 = b \frac{a-b}{ch} \left( c - b \frac{a-b}{c} \right) \tag{11}$$

Die letzte Bedingung ist also von selbst, und sogar für willkürliches  $h$  erfüllt. Es hat sich ergeben:

**Lehrsatz 5.** Auf jedem Dreieck als Seite lassen sich Höhenschnitts-Tetraeder errichten.

**Lehrsatz 6.** Ein Höhenschnitts-Tetraeder behält diese seine Eigenschaft, wenn die Höhe über einer unveränderten Seite longitudinal variiert.

**Lehrsatz 7.** Der Normalabstand des Höhenschnitts von einer Tetraederseite variiert, wenn diese unverändert bleibt, der Höhe umgekehrt proportional.

### § 5. Gleichseitiges Höhenschnitts-Tetraeder.

Soll ein Tetraeder beide, in § 2. und § 4. genannten Eigenschaften haben, so müssen (bei identificirten Grundflächen  $\mathcal{A}$ ) die

Werte (10) und (11) gleich sein. Die Werte von  $x_4$  und  $y_4$  ergeben sofort:

$$a = 2b; \quad c^2 = 3b^2$$

Dies genügt schon, das Grunddreieck zu einem gleichseitigen zu machen, und nach Gl (11) zeigt der Wert

$$z_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

dass das Tetraeder regelmässig ist. Gl. (11) bestätigt dies nur durch dessen Mittelpunkt:

$$h = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

**Lehrsatz 8.** Ein gleichseitiges Höhenschnitts-Tetraeder ist stets regelmässig.

### § 6. Schwerpunkt und Mittelpunkt der umschriebenen Kugel für das Höhenschnitts-Tetraeder.

Nach der Formel

$$w = \frac{1}{4}(u_2 + u_3 + u_4) \quad (3)$$

sind die Coordinaten des Schwerpunkts:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{4}(a + 2b) \\ y_0 &= \frac{1}{4}\left(c + b \frac{a-b}{c}\right) \\ z_0 &= b \frac{a-b}{4ch} \left(c - b \frac{a-b}{c}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel wird bestimmt als der Schnittpunkt der Ebenen, welche 3 Kanten normal halbiren. Wir wählen die Kanten  $P_1P_2$ ,  $P_1P_3$ ,  $P_1P_4$ . Die Gleichungen der Ebenen sind:

$$\begin{aligned} a\left(x - \frac{a}{2}\right) &= 0 \\ b\left(x - \frac{b}{2}\right) + c\left(y - \frac{c}{2}\right) &= 0 \\ x - \frac{b}{2} + \frac{a-b}{c}\left(y - b \frac{a-b}{2c}\right) \\ &+ \frac{a-b}{ch}\left(c - b \frac{a-b}{c}\right)\left\{z - b \frac{a-b}{2ch}\left(c - b \frac{a-b}{c}\right)\right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

woraus als Coordinaten des Mittelpunkts der umschriebenen Kugel:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a \\ y &= \frac{1}{2}\left(c - b \frac{a-b}{c}\right) \\ z &= b \frac{a-b}{2c^2} \frac{c^2 - b(a-b)}{h} - h \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Soll dieser mit dem Schwerpunkt zusammenfallen, so müssen die Werte von  $x, y, z$  gleich  $x_0, y_0, z_0$  sein, demnach zuerst

$$a = 2b; \quad c = \sqrt{3}b$$

also das Grunddreieck gleichseitig, und das zugehörige Höhenlot muss auf dessen Mittelpunkt stehen.

Führt man die gefundenen Werte für  $a, c, x, y$  in Gl. (12) (13) ein, so kommt:

$$z = \frac{b^2}{3h} - h; \quad z_0 = \frac{b^2}{6h}$$

also gemäss  $z = z_0$ :

$$h = \frac{b^2}{\sqrt{6}}$$

Dies ergibt nach Gl. (14):

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

was einem regelmässigen Tetraeder entspricht.

**Lehrsatz 9.** Ein Höhengchnitts-Tetraeder, dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt der umschriebenen Kugel zusammenfällt, ist regelmässig.

### § 7. Fernere Eigenschaften des gleichseitigen Tetraeders.

Seien die Kanten  $P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4$  bezeichnet durch  $g_{14}, g_{24}, g_{34}$ . Dann ist

$$g_{14}^2 = x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = x_4^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2 = g_1^2$$

(s. Gl. (5) (7)), also analog auch

$$g_{14} = g_1; \quad g_{24} = g_2; \quad g_{34} = g_3$$

Demnach hat jede Seite des Tetraeders ausser einer gemeinsamen 2 gleiche Kanten mit  $\mathcal{A}$ . Es ergibt sich:

**Lehrsatz 10.** Die Gegenkanten eines gleichseitigen Tetraeders sind einander gleich.

**Lehrsatz 11.** Sind alle Seiten eines Tetraeders einander gleich, so sind sie auch einander congruent.

Infolge des Lehrs. 10. stellt sich die Spitze  $P_4$  des gleichseitigen Tetraeders als Schnitt dreier Kugeln dar:

$$\begin{aligned} x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 &= g_1^2 \\ (x_4 - a)^2 + y_4^2 + z_4^2 &= g_2^2 \\ (x_4 - b)^2 + (y_4 - c)^2 + z_4^2 &= g_3^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Durch Subtraction je zweier ihrer Gleichungen ergeben sich zwei lineare Gleichungen für  $x_4$  und  $y_4$ . Aus Gl (5) folgt dann der Wert von  $z_4$ , sämtliche Coordinaten in Uebereinstimmung mit § 2., einfacher hergeleitet, aber erst vermöge der Gleichheit der Gegenkanten.

### § 8. Mittelpunkt und Radius der eingeschriebenen Kugel eines gleichseitigen Tetraeders.

Ist  $K \equiv (x_0 y_0 z_0)$  der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel, so hat dieser gleichen Normalabstand  $r$  von allen 4 Seiten. Zunächst ist also

$$z_0 = r$$

Legt man nun 6 Ebenen durch  $K$  und einzeln durch alle Kanten, so wird das Tetraeder in 4 congruente Tetraeder  $= 3 \Delta r$  geteilt.

Das Tetraeder auf der Seite  $P_1 P_3 P_4$  ist, wenn man sich in Betreff des Vorzeichens durch das regelmässige Tetraeder leiten lässt:

$$\begin{aligned} \Delta_1 r &= - \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_4 - x_2 & x_0 - x_2 \\ y_3 - y_2 & y_4 - y_2 & y_0 - y_2 \\ z_3 - z_2 & z_4 - z_2 & z_0 - z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b - a & x_4 - a & x_0 - a \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} b & x_4 & x_0 \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Das Tetraeder über  $P_1 P_3 P_4$ :

$$\Delta_2 r = \begin{vmatrix} b & x_4 & x_0 \\ c & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} = b(y_4 z_0 - z_4 y_0) + c(z_4 x_0 - x_4 z_0)$$

das Tetraeder über  $P_1 P_2 P_4$ :

$$\Delta_3 r = \begin{vmatrix} a & x_4 & x_0 \\ 0 & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} = -a(y_4 z_0 - z_4 y_0)$$

ausserdem ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y_4 & y_0 \\ 0 & z_4 & z_0 \end{vmatrix} = y_4 z_0 - z_4 y_0 + c(z_4 - z_0)$$

woraus nach Addition, sofern  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta$ :

$$3\Delta r = ac(z_4 - z_0) = \Delta(z_4 - r)$$

folglich

$$r = \frac{1}{4} z_4$$

Dieselben Gleichungen ergeben auch:

$$(a + b)\Delta r = ac(z_4 x_0 - x_4 z_0) \quad \text{d. i.}$$

$$a + b = 4x_0 - (a - b) \quad \text{oder:}$$

$$x_0 = \frac{1}{2} a$$

ferner

$$\frac{\Delta r}{a} = z_4 y_0 - y_4 z_0 = (4y_0 - y_4)r$$

$$4y_0 = c + y_4 = 2c - 2b \frac{a - b}{c}$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \left( c - b \frac{a - b}{c} \right)$$

Da die  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  mit den Coordinaten des Schwerpunkts übereinstimmen, so hat man in Ergänzung von Lehrsatz 3:

**Lehrsatz 12.** Der Schwerpunkt des gleichseitigen Tetraeders fällt zusammen mit den Mittelpunkten der um- und eingeschriebenen Kugel.

§ 9. **Mittelpunkt und Radius der eingeschriebenen Kugel des Höhengschnitts-Tetraeders.**

Setzt man den doppelten Umfang eines beliebigen Tetraeders

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta = U$$

so ist das sechsfache Tetraeder

$$Ur = \Delta z_4 = acz_4$$

Die Bezeichnung von § 8. sei beibehalten und nur die Gleichheit der Seiten in Wegfall gebracht. Dann führt die gleiche Rechnung wie in § 8. zu folgenden Ergebnissen:

$$z_0 = r = \frac{\Delta z_4}{U}$$

$$x_0 = \frac{a\Delta_2 + b\Delta_3 + x_4 \Delta}{U}; \quad y_0 = \frac{\Delta_3 + a y_4}{U} c$$

Um aus diesen für beliebiges Tetraeder geltenden Formeln die dem Höhengschnitts-Tetraeder entsprechenden zu erhalten, sind nur die in § 6. angegebenen Werte

$$x_4 = b; \quad y_4 = b \frac{a-b}{c}; \quad z_4 = b \frac{a-b}{c^2} \frac{c^2 - b(a-b)}{h}$$

und die Seiteninhalte einzusetzen. Letztere findet man in bekannter Weise aus ihren Projectionen auf die Coordinatenebenen; es ergibt sich:

$$\Delta_1 = (a-b) \frac{c^2 - b(a-b)}{c} \sqrt{1 + b^2 \frac{c^2 + (a-b)^2}{c^2 h^2}}$$

$$\Delta_2 = b \frac{c^2 - b(a-b)}{c} \sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2}{c^2} \left(\frac{a-b}{h}\right)^2}$$

$$\Delta_3 = ab \frac{a-b}{c} \sqrt{1 + \frac{1}{h^4} \left(c - b \frac{a-b}{c}\right)^2}$$

§ 10. **Lage der genannten Centra des Höhengschnitts-Tetraeders.**

Die Coordinaten der 3 ersten Centra sind, um sie zum Vergleich zusammenzustellen:

Höhenschnitt  $K$ :

$$X = b; \quad Y = b \frac{a-b}{c}; \quad Z = h$$

Schwerpunkt  $K'$ :

$$X' = \frac{a+2b}{4}; \quad Y' = \frac{c^2+b(a-b)}{4c}; \quad Z' = b \frac{a-b}{4ch} \left( s - b \frac{a-b}{c} \right)$$

Mittelpunkt der umschriebenen Kugel  $K''$ :

$$X'' = \frac{a}{2}; \quad Y'' = \frac{c^2-b(a-b)}{2c}; \quad Z'' = b \frac{a-b}{2ch} \left( c - b \frac{a-b}{c} \right) - h$$

dennach zu relativer Bestimmung:

$$X' - X = \alpha; \quad Y' - Y = \beta; \quad Z' - Z = \gamma$$

$$X'' - X = 2\alpha; \quad Y'' - Y = 2\beta; \quad Z'' - Z = 2\gamma$$

wo

$$\alpha = \frac{a-2b}{4}; \quad \beta = \frac{c^2-3b(a-b)}{4c}; \quad \gamma = b \frac{a-b}{4h} \frac{c^2-b(a-b)}{c^2} - h$$

Die genannten 3 Centra liegen also, gleichwie Höhenschnitt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks, auf einer geraden Linie, in gleicher Reihenfolge, aber in succedirenden Abständen, die beim Dreieck sich verhalten wie 2 : 1, beim Tetraeder wie 1 : 1. Setzt man

$$x^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

so dass beim Tetraeder die Richtungscosinus jener geraden Linie  $\frac{\alpha}{x}, \frac{\beta}{x}, \frac{\gamma}{x}$ , beim Dreieck  $\frac{\alpha}{x}, \frac{\beta}{x}$  werden, so ist beim Tetraeder  $KK' = x$ ,  $KK'' = 2x$ ;  $K'K'' = x$  beim Dreieck  $KK' = x$ ;  $KK'' = \frac{3}{2}x$ ,  $K'K'' = \frac{1}{2}x$ .

Die Ausdrücke für Inkugel- und Inkreismittelpunkt des Tetraeders und Dreiecks zeigen zunächst die Aehnlichkeit, dass sie den Umfang zum Nenner und einen aus den Seiten ähnlich gebildeten Zähler haben; eine instructive geometrische Beziehung kann vielleicht noch entdeckt werden.

### § 11. Zur Determination.

Der Umfang beider in Rede stehenden Specialclassen vom Tetraeder ist von den vorstehenden Sätzen vollständig enthalten. In Betreff der gleichseitigen Tetraeder liegt die Determination unmittelbar zutage. Es gibt genau ebensoviele verschiedene (d. h. weder congruente noch symmetrische) gleichseitige Tetraeder, als es verschiedene spitzwinklige Dreiecke gibt.

Auch das Gebiet der Höhenschnitts-Tetraeder ist durch die Bestimmung der Spitze  $P_4$  bezüglich auf eine Grundseite schon absolut begrenzt. Zwar lässt sich die Variation des Parameters  $h$  auf 4 Parameter bezüglich auf alle 4 Seiten anwenden. Da aber die Variabilität von  $h$  bedingt ist durch Unveränderlichkeit des Grunddreiecks, so können nie mehr als ein Parameter zugleich variiren. Hat man nun das Gebiet nur mit Berücksichtigung eines Grunddreiecks begrenzt, so umfasst letzteres schon alle möglichen Dreiecke, mithin kann die Wahl eines der 3 übrigen Seiten zum Grunddreieck keinen neuen Fall ergeben. Die Determination lautet:

Es gibt sovieler verschiedene Höhenschnitts-Tetraeder, als es verschiedene Dreiecke (als Grundflächen) und verschiedene Strecken (als Höhen) gibt.

### § 12. Gleichseitiges Tetraeder eingeschrieben in ein Parallelepipedon.

Je 2 Gerade im Raume bestimmen 2 parallele Ebenen, auf denen sie liegen. Um z. B. aus den Gleichungen der 2 Gegenkanten  $P_1P_2$  und  $P_3P_6$ , nämlich

$$y = 0; \quad z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x - b}{x_4 - b} = \frac{y - c}{y_4 - c} = \frac{z}{z_4}$$

diese Ebenen zu erhalten, braucht man nur mit der letzteren durch  $P_1$  die Parallele

$$\frac{x}{x_4 - b} = \frac{y}{y_4 - c} = \frac{z}{z_4}$$

zu ziehen; denn diese bildet mit der erstern die Winkalebene.

$$z_4 y + (c - y_4) z = 0$$

mit der dann die andre Ebene

$$z_4 (y - c) + (c - y_4) z = 0$$

nur parallel durch  $P_3$  zu nehmen ist. Erstere sei Ebene der neuen Coordinaten  $XY$  (d. i.  $Z = 0$ ). Sie geht aus der  $xy$  Ebene durch Drehung um die Kante  $P_1P_2$  hervor, so dass die Coordinatenrelationen die Form haben müssen:

$$x = X; \quad y = Y \cos \vartheta - Z \sin \vartheta; \quad z = Y \sin \vartheta + Z \cos \vartheta$$

und zwar bestimmt sich der Drehungswinkel  $\vartheta$  am einfachsten aus den Bedingungen  $Z = 0$ ,  $Z_3 = Z_4$ , woraus sogleich mit Beachtung von Gl. (5) folgt:

$$y_4 = -c \cos 2\vartheta, \quad z_4 = -c \sin 2\vartheta$$

also

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{c - y_4}{2c}}; \quad \sin \vartheta = \sqrt{\frac{c + y_4}{2c}}$$

Verfährt man ebenso mit allen 3 Gegenkantenpaaren, so entstehen 3 Paare paralleler Ebenen, die ein Parallelepipedon begrenzen, in welches das Tetraeder in dem Sinne eingeschrieben ist, dass seine 6 Kanten Diagonalen der 6 Seiten desselben bilden. Seine 4 Ecken fallen in 4 der 8 Ecken des Parallelepipedons, während die 4 übrigen, unberührt vom Tetraeder, Ecken eines zweiten Tetraeders sind, das zum ersten in reziproker Beziehung gegenseitiger Bestimmung steht.

Die 3 Höhenlote des Parallelepipedons werden unmittelbar im Tetraeder dargestellt als Normalverbindungen der Gegenkanten. Aus den Gleichungen der Gegenkanten  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  ergeben sich zunächst deren Normalebene

$$(x_2 - x_1)(x - A) + (y_2 - y_1)(y - B) + (z_2 - z_1)(z - C) = 0 \quad (16)$$

$$(x_4 - x_3)(x' - A') + (y_4 - y_3)(y' - B') + (z_4 - z_3)(z' - C') = 0 \quad (17)$$

bzw. für die Fusspunkte  $(ABC)$  und  $(A'B'C')$ . Jeder dieser 2 Punkte muss aber auf beiden Normalebene liegen; demgemäss muss

$$(x_2 - x_1)(A' - A) + \dots = 0 \quad (18)$$

$$(x_4 - x_3)(A' - A) + \dots = 0 \quad (19)$$

und, damit jeder auf zugehöriger Kante liegt,

$$A = x_1 + \mu(x_2 - x_1); \quad B = y_1 + \mu(y_2 - y_1); \dots \quad (20)$$

$$A' = x_3 + \mu'(x_4 - x_3); \quad B' = y_3 + \mu'(y_4 - y_3), \dots \quad (21)$$

sein. Diese Werte in Gl. (18) (19) eingesetzt gibt 2 lineare Gleichungen zur Bestimmung von  $\mu$  und  $\mu'$  und nach Gl. (20) (21) von  $A, B, C, A', B', C'$ . Sind letztere festgesetzt, so liegen die Punkte  $(xyz)$  und  $(x'y'z')$ , welche die Gl. (16) (17) befriedigen, auf der

Schnittlinie der 2 Normalebenen, ausgedrückt durch Verbindung beider Gleichungen. Der Normalabstand ist dann

$$= \sqrt{\{(A' - A)^2 + (B' - B)^2 + (C' - C)^2\}}$$

Auch wird derselbe als Höhe des Parallelepipedons dargestellt durch

$$Z_4 = c \sin \vartheta = \sqrt{c \frac{c + y_4}{2}}$$

Die vorstehenden Formeln sind nur für 1 Höhenlot ausgeschrieben, zur Anwendung auf die 2 übrigen bedarf es nur der Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4.



## XII.

Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks;  
als besonderen Fall die Steiner'sche Curve des  
Dreiecks.

Von

Dr. **Bücking**,  
Oberlehrer in Metz.

## E i n l e i t u n g.

Nach dem bekannten dualistischen Gesetz müssen den involutorischen Punktsystemen der Ebene, in denen die Punkte sich paarweise entsprechen, Strahlensysteme gegenüberstehen, in welchen die Geraden involutorisch zugeordnet sind. Zu diesen gehört das System der Seitensymmetriegeraden; ich nenne 2 Geraden Symmetriegeraden, wenn sie die Seiten eines  $\triangle$  in gleich weit von den Seitenmitten entfernten Punkten schneiden. Legt man bei den Punktsystemen die speciellen Punktcoordinaten  $(x_1 x_2 x_3)$  zu Grunde, bei welchen die Abstände selbst, nicht bestimmte Vielfache derselben als Coordinaten angesehen werden, so sind  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$  die Coord. des Winkelgegenpunkts von  $(x_1 x_2 x_3)$ . Wählt man bei den Liniensystemen als Liniencoordinaten  $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$  die Abstände der Geraden von den Ecken des Grunddreiecks, so sind  $\xi_{i=1,2,3}$  und  $\frac{1}{\xi_i}$  die Coordinaten zweier Seitensymmetriegeraden. In diesem Sinne stehen die Seitensymmetriegeraden den Winkelgegenpunkten zur Seite.

Die Geometrie des Dreiecks entfaltet ihren grössten Reiz in den besonderen Fällen; unter den Kegelschnitten z. B., welche durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks gehen, hat gewiss der Kreis

von Feuerbach die meisten und merkwürdigsten Eigenschaften. Alle sogenannten merkwürdigen Punkte sind um so wichtiger für das Dreieck, je elementarer ihr Zusammenhang mit ihm ist, z. B. können sich die Brocard'schen Punkte nicht mit dem Schwerpunkte messen. Bei Untersuchungen über das Dreieck wird man also stets gezwungen sein, die Einzelfälle der allgemeinen Sätze auszubeuten. Es wurde nicht immer die analytische Methode angewandt, da sie in trimetrischen Coordinaten ungeeignet zur Untersuchung von Winkeln und Massverhältnissen ist. Die analytischen Teile enthalten einen interessanten Stoff für projectivische Coordinaten; der englische Mathematiker Green schreibt: the question (die von den normalen Symmetriegeraden umhüllte Steiner'sche Curve) was proposed to me some time ago in conversation by Dr. Hirst as one of some difficulty and apt for the exercise of the method of trilinear coordinates. (The geometry of the triangle. u. s. w., 1865).

Es bedeutet  $H$  den Höhenschnittpunkt,  $M$  den Mittelpunkt des umgeschriebenen,  $O$  des eingeschriebenen Kreises,  $S$  den Schwerpunkt,  $D_1 D_2 D_3$  die Mittelpunkte der Seiten des Grunddreiecks  $A_1 A_2 A_3$ ; ferner  $C^2$  einen Kegelschnitt,  $F^2$  einen Strahlenbüschel zweiter Classe, also die Tangentenschaar eines Kegelschnitts,  $C^n$  eine Curve  $n$ ter Ordnung,  $F^n$  einen Strahlenbüschel  $n$ ter Classe; Ssg sei die Abkürzung für Seitensymmetriegerade, Fpl für Fusspunktlinie, Wgp für Winkelgegenpunkt, Sgp. für Seitengegenpunkt.

### 1. Seitengegenpunkte.

Die Punkte  $P$  und  $P_1$  sind Seitengegenpunkte im Dreieck  $A_1 A_2 A_3$ , wenn ihre Verbindungsgeraden mit den Ecken die Gegenseiten des Dreiecks in gleichweit von den Mittelpunkten der Seiten entfernten Punkten schneiden. (s. Fig. 1.)

Wenn die barycentrischen Coordinaten vom Punkte  $P$  (d. h. Grössen, welche den Flächen  $PA_2 A_3$ ,  $PA_3 A_1$ ,  $PA_1 A_2$  proportional sind)  $= p_1, p_2, p_3$  sind, so sind diejenigen von

$$P_1 = \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}$$

die Coordinaten beider Punkte sind reciproke Werte. Es ist nützlich, die barycentrischen Coordinaten als Punktcoordinaten für die folgenden Untersuchungen zu verwenden.

Durchläuft  $P$  die Gerade  $a$ , deren Gleichung (in b. C.) ist

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

so erhält man den Ort seines Seitengegenpunktes, indem man die  $x_i$  mit  $\frac{1}{x_i}$  vertauscht, also

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} = 0 \quad \text{oder}$$

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

d. h. einen durch  $A_1, A_2, A_3$  gehenden Kegelschnitt.

Im allgemeinen entspricht einer  $C^n$  eine  $C^{2n}$ ; die Verwandtschaft beider Systeme ist eine quadratisch involutorische. (s. A. Müller-Kempton, Untersuchungen über die merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks 1889; F. Bücking, die Winkelgegenpunkte des Dreiecks, Progr. 1892. Nr. 522. S. 2).

Aehnlich gestalten sich die Formeln für die Liniencoordinaten. Der Punkt  $P$  mit den barycentrischen Coordinaten  $p_1, p_2, p_3$  hat die Gleichung

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

worin die  $\xi_i$  die Abstände jeder beliebigen durch  $P$  gehenden Geraden von den Ecken des Dreiecks bedeuten. Der Seitengegenpunkt von  $P$  hat die Gleichung

$$\frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} + \frac{\xi_3}{p_3} = 0$$

Die Coefficienten dieser Gleichungen sind also den Punktcoordinaten der durch die Gleichungen dargestellten Punkte proportional.

Jedem Punkte der Ebene entspricht ein bestimmter Punkt als Seitengegenpunkt, mit Ausnahme der Ecken des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ , z. B. ist  $A_1$  als Gegenpunkt eines jeden auf  $A_2 A_3$  liegenden Punktes zu betrachten. Sich selbst entsprechende Punkte sind der Schwerpunkt  $S$  und die Schnittpunkte der Parallelen durch  $A_1, A_2$  und  $A_3$  zu den Seiten des Dreiecks.

## 2. Seitensymmetriegeraden.

Man erhält die Ssg.  $p_1$  einer beliebigen  $p$ , indem man auf den Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  die zu den Schnittpunkten mit  $p$  in Bezug auf die Seitenmitten symmetrisch gelegenen Punkte aufsucht (Fig. 1.) Die Gleichungen von  $p$  und  $p_1$  sind

$$1) \quad \begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 &= 0 \\ \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} &= 0 \end{aligned}$$

also in Liniencoordinaten

$$2) \quad \begin{aligned} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 &= p_1 : p_2 : p_3 \\ \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 &= \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3} \end{aligned}$$

Eine Gerade fällt mit ihrer Ssg zusammen, wenn

$$p_1 = \pm p_2 = \pm p_3$$

ist. Dies giebt die 4 Geraden

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Diese als Ssg sich selbst entsprechenden sind die  $\infty$  ferne Geraden der Ebene und die Seiten des Dreiecks  $D_1, D_2, D_3$  (s. Einleitg.).

Im System der Ssg entspricht also jeder Geraden eine bestimmte andere, mit Ausnahme der Seiten des Dreiecks  $A_1, A_2, A_3$ , von welchen jede  $\infty$  viele entsprechende Geraden hat, nämlich alle durch den Gegenpunkt des Dreiecks gehende.

Wir wollen nun das Gebilde betrachten, das eine Gerade  $g$  durchläuft, wenn ihre Seitensymmetriegerade sich um einen Punkt dreht. Der Punkt sei  $P$  und seine Gleichung

$$3) \quad p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

Dann müssen die Coord. von  $g$  nach 2) notwendig die Gleichung erfüllen

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0, \text{ oder}$$

$$4) \quad p_1 \xi_2 \xi_3 + p_2 \xi_3 \xi_1 + p_3 \xi_1 \xi_2 = 0$$

Dies ist ein Strahlenbüschel zweiter Classe, zu welchem auch die Seiten des Dreiecks  $A_1, A_2, A_3$  gehören. Wir wollen es kurz bezeichnen mit  $\Gamma(\pi)$  oder auch, indem wir den umhüllten Kegelschnitt in's Auge fassen, den Kegelschnitt  $\pi$ . Den Punkt  $P$  und die  $\Gamma(\pi)$

wollen wir als „zusammen gehörend“ oder „entsprechend“ bezeichnen. (s. Fig. 2.)

Die Berührungspunkte von  $\pi$  mit den Seiten des Dreiecks findet man, indem man schreibt

$$p_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_1 (p_2 \xi_3 + p_3 \xi_2) = 0$$

und den Coefficienten von  $\xi_1$ , also

$$p_2 \xi_3 + p_3 \xi_2 = 0$$

setzt. Die Berührungspunkte sind dann

$$\frac{\xi_2}{p_2} + \frac{\xi_3}{p_3} = 0, \quad \frac{\xi_3}{p_3} + \frac{\xi_1}{p_1} = 0, \quad \frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} = 0$$

Wir nennen sie  $B_1, B_2, B_3$ .  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$  schneiden sich dann im Punkte

$$\frac{\xi_1}{p_1} + \frac{\xi_2}{p_2} + \frac{\xi_3}{p_3} = 0$$

er ist der Seitengegenpunkt  $P_1$  von  $P$ . Wir nennen ihn den Nagelschen Punkt des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  in Bezug auf  $\pi$  oder kurz den N. P. von  $\pi$ , indem wir einen Namen, der in gleicher Bedeutung für den eingeschriebenen Kreis bereits gebraucht wird, verallgemeinern.

Wenn eine Gerade ein Strahlenbüschel  $n$ ter Classe  $\Gamma^n$  durchläuft, so werden die Ssg. im allg. ein  $\Gamma^{2n}$  bilden. Denn ist die Gleichung der  $\Gamma^n$

$$f_n(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

so erhält man als entsprechende nach Gl. 2)

$$f_n \left( \frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3} \right) = 0$$

welche nach Multiplication mit  $(\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n)$  vom  $2n$ ten oder geringeren Grade ist, z. B. bilden die Tangenten eines dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  des Kegelschnitts  $\sum \frac{a_i}{x_i} = 0$  des Strahlenbüschels

$$\frac{a_1^2}{\xi_1^2} + \frac{a_2^2}{\xi_2^2} + \frac{a_3^2}{\xi_3^2} - \left[ \frac{a_1 a_2}{\xi_1 \xi_2} + \frac{a_2 a_3}{\xi_2 \xi_3} + \frac{a_3 a_1}{\xi_3 \xi_1} \right] = 0$$

Jedem Punkte  $P$  entspricht, wie wir sahen, eine  $\Gamma(\pi)$ . Diese

kann auch in 2 Strahlenbüschel ausarten. Setzt man in Gl. 4)  $p_1 = 0$ , so ist die  $\Gamma(\pi)$  das einfache Strahlenbüschel

$$p_2 \ddot{\xi}_3 + p_3 \ddot{\xi}_2 = 0$$

dessen Mittelpunkt auf  $A_2A_3$  liegt; hierzu kommt das Strahlenbüschel  $\xi_1 = 0$  oder  $A_1$ . Jedem Punkt einer Seite des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  entspricht also ein Punkt derselben Seite; die sich entsprechenden Punkte liegen von der Seitenmitte gleichweit entfernt. Sie fallen zusammen in den Seitenmittenpunkten  $D_1$ ,  $D_2$  oder  $D_3$  und in den  $\infty$  fernen Punkten der Seiten des Dreiecks d. h. jedem Strahl eines dieser 6 Strahlenbüschel entspricht ein Strahl desselben Büschels, wie dies geometrisch sofort einleuchtend ist. Die Zuordnung in einem solchen ist eine involutorische und die Ordnungsstrahlen sind 2 sich selbst als Ssg. entsprechende Strahlen. Parallelen Geraden entsprechen die Tangenten einer dem Dreiecke  $A_1A_2A_3$  eingeschriebenen Parabel, denn da zu jenen auch die sich selbst entsprechende  $\infty$  ferne Gerade gehört, so muss der entsprechende Kegelschnitt sie zur Tangente haben. Einem  $\infty$  fernen Punkt  $P$  entspricht also eine Parabel, deren Axe durch  $P$  geht. Also folgt auch umgekehrt, dass die Ssg. der Tangenten einer dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eingeschriebenen Parabel Durchmesser eben derselben sind. Im besonderen muss die Scheiteltangente der Parabel zu ihrer Ssg. senkrecht stehen und nur sie von allen Parabeltangente hat diese Eigenschaft. Daraus folgt umgekehrt leicht: „Die zueinander normalen Seitensymmetriegeraden sind die Scheiteltangenten der dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eingeschriebenen Parabeln.“

Wenn durch  $P$  an  $\pi$  Tangenten gezogen werden können, so sind es Ssg. Denn nennt man sie  $PU$  und  $PV$ , so ist die Ssg. von  $PU$  erstens Tangente an  $\pi$ , da  $PU$  durch  $P$  geht; zugleich muss sie auch  $P$  enthalten, da  $PU$  zur  $\Gamma(\pi)$  gehört. Wenn also  $PU$  sich nicht selbst entspricht, so muss ihre Ssg.  $PV$  sein. Liegt  $P$  auf einer sich selbst entsprechenden Geraden, so fallen  $PU$  und  $PV$  zusammen, und  $P$  ist ein Punkt von  $\pi$ . Wir haben also den Satz:

„Die Tangenten von einem Punkte an dem zugehörigen Kegelschnitt sind Seitensymmetriegeraden.“

Ferner:

„Durch jeden Punkt der Ebene gehen höchstens zwei Ssg.“

Man erhält für die durch  $P$  gehenden Ssg. die Gl.

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

Also  $\frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{p_1 p_3}$ , also  $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 \pm \sqrt{\varphi}}{2p_1 p_2}$

wenn

$$\varphi = - (p_1 + p_2 + p_3)(-p_1 + p_2 + p_3)(p_1 - p_2 + p_3)(p_1 + p_2 - p_3)$$

ist. Sie sind also reell, wenn  $\varphi > 0$ , sie fallen zusammen für  $\varphi = 0$  und sind imaginär für  $\varphi < 0$ .  $\varphi$  ist = 0 für

$$\xi_1 = \pm \xi_2 = \pm \xi_3$$

also nur für die sich selbst entsprechenden Geraden (S. 272). Man findet  $\varphi < 0$ , wenn  $P$  im Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  oder in den Winkelräumen der Scheitelwinkel seiner Winkel liegt, sonst ist  $\varphi > 0$ . Also gilt der Satz:

„Durch jeden Punkt, welcher nicht im Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  oder in den Winkelräumen seiner Scheitelwinkel liegt, gehen zwei reelle Seitensymmetriegeraden.“

Man findet sie für den Punkt  $P$ , indem man die Seitengegeraden von  $A_1 P$ ,  $A_2 P$ ,  $A_3 P$  zieht, durch ihre Schnittpunkte mit den Gegenseiten des Dreiecks einen dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt legt und vom ersten Punkt Tangenten an ihn zieht.

Um den Mittelpunkt von  $\pi$  zu bestimmen, ziehe man durch  $P$  die Parallele zu  $A_2 A_3$  und ihre Ssg, deren Berührungspunkt  $C_1$  mit  $\pi$  auf  $A_3 P$  liegen muss (s. Fig. 2.)  $B_1 C_1$  ist dann Durchmesser von  $\pi$ , für  $C_1$  findet man die Coord.

$$\left(\frac{p_2 + p_3}{2}\right)^2 : p_2 : p_3 \text{ und für den Mittelpunkt}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2 + p_3) : (p_3 + p_1) : (p_1 + p_2)$$

Wir stellen uns die Frage, ob  $P$  Mittelpunkt von  $\pi$  sein kann. Es muss dann

$$p_1 : p_2 : p_3 = (p_2 + p_3) : (p_3 + p_1) : (p_1 + p_2)$$

also

$$p_1 = p_2 = p_3 \text{ sein.}$$

Der Schwerpunkt  $S$  allein also ist der Mittelpunkt des zu ihm

gehörenden Kegelschnitts. Die durch  $S$  gehenden Ssg sind imaginär. Man findet ihre Gleichungen auf folgende Weise. Angenommen sie seien

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0$$

so erhält man durch Multiplication

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 \left( \frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} \right) + x_3 x_1 \left( \frac{p_3}{p_1} + \frac{p_1}{p_3} \right) + x_1 x_2 \left( \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) = 0$$

Da

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 0$$

so sind die Coefficienten der 3 letzten Glieder  $= -1$ , also

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3)(x_1 + \varepsilon_3 x_2 + \varepsilon_2 x_3) = 0$$

wenn  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  die kubischen Einheitswurzeln  $= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$  sind. Die gesuchten Ssg sind also

$$x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 = 0$$

$$x_1 + \varepsilon_3 x_2 + \varepsilon_2 x_3 = 0$$

Wir fassen von den Curven  $\pi$  die dem Dreieck eingeschriebenen Hyperbeln und ihre Asymptoten in's Auge. Dem Schnittpunkt  $R$  zweier Tangenten von  $\pi$  entspricht ein Kegelschnitt  $\rho_1$ , welcher die Ssg der Tangenten berührt. Lässt man die Tangenten zusammenfallen, so entspricht einem Punkt  $R$  (Tangente  $t$ ) von  $\pi$  ein durch  $P$  gehender die Ssg von  $t$  in  $P$  berührender Kegelschnitt. Ist also  $\pi$  eine Hyperbel, so entsprechen ihren beiden  $\alpha$  fernen Punkten die dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  eingeschriebenen, durch  $P$  gehenden Parabeln (S. 274). Wenn also umgekehrt durch  $P$  solche Parabeln gelegt werden können, so ist  $\pi$  eine Hyperbel; jenes findet statt, wenn  $P$  ausserhalb des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  oder der Flächen seiner Scheitelwinkel liegt. So hat sich ergeben:

„Der zu einem Punkte  $P$  gehörende Kegelschnitt  $\pi$  ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem  $P$  innerhalb des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$

und der Flächen seiner Scheitelwinkel liegt oder ausserhalb derselben;  $\pi$  ist eine Parabel, wenn  $P$  ein Punkt der  $\infty$  fernen Geraden ist.“

Da der Nagel'sche Punkt  $P_1$  von  $\pi$  der Seitengegenpunkt von  $P$  ist und die Ssg der  $\infty$  fernen Punkte auf der Steiner'schen Ellipse  $\varepsilon$  liegen, so folgt: „Der Nagel'sche Punkt einer dem Dreiecke eingeschriebenen Parabel liegt auf  $\varepsilon$ , derjenige einer Ellipse innerhalb, diejenige einer Hyperbel ausserhalb von  $\varepsilon$ .“

Ist  $\pi$  eine Hyperbel,  $u$  und  $v$  ihre Asymptoten,  $u_1$  und  $v_1$  deren Ssg, so sind  $u_1$  und  $v_1$  die Tangenten in  $P$  von 2 durch  $P$  gehenden Parabeln. Da nun die  $\infty$  fernen Punkte von  $\pi$  durch je 2 diametral gegenüberliegende Punkte harmonisch getrennt sind, so gilt dies auch für die Tangenten in diesen Punkten, also auch für deren Ssg. Also sind die Ssg von zwei parallelen Tangenten von  $\pi$  im Büschel  $P$  harmonisch getrennt durch  $u_1$  und  $v_1$ ; sie sind zugleich Tangenten an eine dem Dreieck eingeschriebenen Parabel (S. 274); die zugeordneten Strahlen des involutorischen Büschels  $P$  sind demnach die Tangentenpaare von  $P$  an die dem Dreieck eingeschriebenen Parabeln und die Ordnungsstrahlen des Büschels sind die Tangenten der 2 durch  $P$  selbst gehenden Parabeln. Zugeordnet sind auch  $PA_1$  und die Parallele durch  $P$  zu  $A_2A_3$ . Dies führt zu einer Construction der Parabeltangente in  $P$  und der Asymptoten von  $\pi$ . Man ziehe  $PA_1$ ,  $PA_2$ ,  $PA_3$  und die Parallelen  $b_1b_2b_3$  zu den Seiten durch  $P$  und bestimmt in dem so erhaltenen involutorischen Büschel  $P$  die Ordnungsstrahlen. Sie sind die verlangten Tangenten, ihre Seitensymmetriegeraden sind die Asymptoten der  $P$  zugehörigen Hyperbel  $\pi$ .

Für einen einzigen Punkt der Ebene ist das Büschel  $P$  ein rechtwinkliges, nämlich für  $H$ , den Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $A_1A_2A_3$ . Die von  $H$  an irgend eine dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eingeschriebene Parabel gezogenen Tangenten stehen also aufeinander senkrecht, was den bekannten Satz liefert, dass die Leitlinien aller dieser Parabeln sich in  $H$  schneiden.

Liegt  $P$  auf dem Kreise  $A_1A_2A_3$ . so ist das Büschel ein symmetrisches, denn bringt man es zum Schnitt mit dem Kreise, so sind die Verbindungslinien entsprechender Schnittpunkte parallel den Winkelgegengeraden von  $A_1P$ ,  $A_2P$  und  $A_3P$ ; und wenn  $UV$  der zu dieser Richtung normale Kreisdurchmesser ist, so sind  $PU$  und  $PV$  die Ordnungsstrahlen und  $PU$  senkr. auf  $PV$ . Da  $PU$  und  $PV$  auch die Tangenten der 2 durch  $P$  gehenden dem  $\Delta$  eingeschriebenen Parabeln sind, so schneiden sich diese in  $P$  unter rechten Winkeln.

Dieselbe Zuordnung der Strahlen im Büschel  $P$  erhält man, wenn man aus  $P$  die Punkte des Kreises und zugleich ihre Winkelgegenpunkte projicirt. (s. Bücking a. a. O. p. 10),  $PU$  und  $PV$  enthalten also auch die Wgp. von  $U$  und  $V$ .

Lässt man  $P$  den Kreis durchlaufen, so erhält man eine Schaar von Ordnungsstrahlen, sie sind, wenn  $O_1, O_2, O_3$  die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  bezeichnen, die Fusspunktlinien des Dreiecks  $O_1O_2O_3$  (s. Bücking a. a. O. Auf. 31). Von ihnen berühren 3 den Kreis  $A_1A_2A_3$  und die dazu gehörigen Normalstrahlen sind Durchmesser (s. Auf. 30).

Also giebt es auch 3 dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eingeschriebene Parabeln, welche den Kreis  $A_1A_2A_3$  berühren, und 3, welche ihn in denselben Punkten rechtwinklig schneiden. Da das Büschel  $P$  nur dann ein symmetrisches ist, wenn  $P$  auf dem Kreise  $A_1A_2A_3$  liegt, so muss also, wenn zwei einem Dreieck eingeschriebene Parabeln sich rechtwinklig schneiden, der Schnittpunkt auf dem Umkreis des Dreiecks gelegen sein.

Die 4 als Ssg sich selbst entsprechenden Geraden bilden ein Vierseit, dessen eingeschriebene Kegelschnitte mit den Ssg in enger Verbindung stehen. Die Kegelschnitte sind die dem Dreieck  $D_1D_2D_3$  eingeschriebenen Parabeln, da sie die  $\infty$  ferne Gerade berühren; je 2 Ssg des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  sind conjugirt in Bezug auf alle diese Parabeln. Denn die Gleichung der letzteren ist

$$1) \quad u_1 \xi_1^2 + u_2 \xi_2^2 + u_3 \xi_3^2 = 0$$

in Verbindung mit der Bedingungsgleichung

$$2) \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

Den Pol der beliebigen Geraden  $\xi_i = p_i$  für eine Curve 1 erhält man in der Form

$$u_1 \xi_1 p_1 + u_2 \xi_2 p_2 + u_3 \xi_3 p_3 = 0$$

und 2 ist erfüllt, wenn

$$p_1 \xi_1 = p_2 \xi_2 = p_3 \xi_3 \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{p_i}$$

ist, d. h. der Pol liegt auf der Seitensymmetriegeraden von  $\xi_i = p_i$ .

Also enthält das dem Punkte  $P$  entsprechende Strahlenbüschel  $\Gamma(\pi)$  die Polaren von  $P$  in Bezug auf die dem Dreieck  $D_1D_2D_3$  eingeschriebenen Parabeln. Ist  $P$  ein Punkt einer solchen Parabel  $p$ , so ist seine Polare für  $p$  die Tangente  $t$  an  $p$  in  $P$ . Da  $t$  und

ihre Ssg  $t_1$  conjugiert sind für  $p$ , so muss  $t_1$  auch durch  $P$  gehen: es muss also noch eine 2te durch  $P$  gehende Parabel möglich sein, welche dann  $t_1$  berührt. Geht man umgekehrt von einem Punkte  $P$  aus, durch welche zwei dem Dreiecke eingeschriebene Parabeln gelegt werden können, so sind die Tangenten an sie in  $P$  Ssg; Parabeln und Ssg durch  $C$  sind zu gleicher Zeit reell oder imaginär.

Da nun bekannt ist, dass man durch  $P$  nur dann Parabeln jener Art legen kann, wenn von den Punkten  $P D_1 D_2 D_3$  keiner durch das von den 3 andern gebildete Dreieck eingeschlossen wird, so kommen wir auf den S. 7—8 abgeleiteten Satz zurück.

Die zwei durch  $P$  gehenden Ssg bestimmen nach dem Vorhergehenden auch den Winkel, unter welchem sich die zwei durch  $P$  gehenden dem Dreiecke  $D_1 D_2 D_3$  eingeschriebenen Parabeln schneiden. Ist dieser  $1R$ , so liegt  $P$  auf dem Kreise  $D_1 D_2 D_3$  (s. oben), also liegen die Schnittpunkte von je 2 normalen Ssg ( $b$  und  $b_1$ ) des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks. Für diejenige Parabel, deren Durchmesser  $b$  parallel sind, muss  $b$  selbst Axe sein, da von den Durchmessern einer Parabel nur die Axe zu den ihr conjugirten Geraden senkr. steht. Dasselbe gilt von  $b_1$ . Also haben wir den Satz:

„Die zu einander normalen Ssg sind die Axen der dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  eingeschriebenen Parabeln.“

Da  $A_2 A_3$  Ssg eines jeden durch  $A_1$  gehenden Strahls ist und das gleiche für  $A_3 A_1$  und  $A_1 A_2$  gilt, so folgt:

„Das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  ist gemeinschaftliches Poldreieck aller dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  eingeschriebenen Parabeln.“ (s. Stoll 1893, Aufg. 1217 i. der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht von J. C. V. Hoffmann.)

Die Axe einer beliebigen dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  eingeschriebenen Parabel wird von ihrer Ssg unter rechtem Winkel geschnitten. Da nun je 2 in Bezug auf eine Parabel conjugirte Normalstrahlen die Axe der Parabel in vom Brennpunkt gleich weit entfernten Punkten schneiden, so wird also auf irgend einer Geraden  $b$ , deren Ssg  $b_1$  auf ihr senkrecht steht (s. oben), von den Paaren der anderen zu einander normalen Seitensymmetriegeraden Strecken ausgeschnitten, welche einen gemeinsamen Mittelpunkt besitzen, nämlich den Brennpunkt  $F$  der dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  eingeschriebenen Parabel mit der Axe  $b$ . Dem Punkt  $bb_1$  (oder  $U$ ) entspricht der Berührungspunkt  $T$

derjenigen Curve, welche von den zu einander normalen Seitensymmetriegeraden eingehüllt wird (Steiner'sche Curve s. S. 274) so dass also  $UT = FT$  ist.

### 3. Nähere Betrachtung der projectivischen Zuordnung des Strahlenbüschels $P$ und des zugeordneten $I(\pi)$ .

Die Strahlen durch  $P$  und ihre den Kegelschnitt  $\pi$  berührenden Ssg sind projectivisch einander zugeordnet, da sie  $A_2A_3$ , welche Tangente von  $\pi$  ist, in proj. Punktreihen schneiden. Sind nun  $p$  und  $v$  beliebige durch  $P$  gehende Geraden,  $p_1$  und  $v_1$  ihre Ssg, so sind im vollständigen Viereck  $(pv, p_1v_1)$  mit den Gegenseiten  $p$  und  $p_1$ ,  $v$  und  $v_1$  auch das letzte Paar Gegenseiten ( $p$  und  $p_1$  Ssg.) Denn schneidet man die Seiten des Vierecks durch  $A_1A_2$ , so erhält man 6 Punkte einer Involution, also liegen auch die Schnittpunkte von  $p$  und  $p_1$  mit  $A_2A_3$  gleichweit von den benachbarten Ecken entfernt, und dasselbe gilt von  $A_1A_2$  und  $A_3A_1$ . Denkt man sich nun  $v$  und  $v_1$  als feste Geraden,  $p$  und  $p_1$  beweglich, nämlich  $p$  sich selbst drehend um  $P$ , so bleibt, wenn  $r$  durch  $P$  geht,  $r_1$  Tangente von  $\pi$ , welche Lage auch  $p$  annimmt. Also sind  $p_1$  und  $r_1$  die Tangenten, die von dem  $v$  durchlaufenden Punkte  $(p_1v_1)$  an  $\pi$  gezogen werden, woraus folgt, dass  $p_1$  und  $r_1$  involutorisch geordnete Strahlen im Tangentenpunkt  $T(\pi)$  sind. Deshalb sind auch die Punkte  $p_1v_1$  und  $pv_1$  der festen Geraden  $v_1$  entsprechende Punkte einer involutorischen Punktreihe, durch welche je 2 Ssg der Büschel  $P$  und  $I(\pi)$  gehen. Diese Reihe besitzt Ordnungspunkte, wenn  $v$  und  $\pi$  sich schneiden. Den Schnittpunkten von  $v_1$  mit  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$ ,  $A_1A_2$  entsprechen die Schnittpunkte von  $v_1$  mit den Geraden  $A_1P$ ,  $A_2P$ ,  $A_3P$ . Es hat sich also ergeben:

a)  $P$  sei ein beliebiger, nicht auf einer Seite des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  liegender Punkt,  $\pi$  der dazu gehörige Kegelschnitt und  $v_1$  eine Tangente von  $\pi$ . Bringt man die durch  $P$  gehenden Strahlen  $r$  zum Durchschnitt mit  $v_1$  und zieht aus diesen Punkten die 2ten Tangenten  $p_1$  an  $\pi$ , so sind diese und die Ssg  $r_1$  der ersten involutorisch zugeordnet im Tangentenbüschel  $I(\pi)$ . Die Involutionaxe ist die Ssg  $v$  von  $v_1$ , das Involution-Centrum also der Pol von  $v$  für  $\pi$ . Man erhält je 2 Paare von Ssg, wenn man von einem beliebigen Punkte von  $v$  die Tangenten  $l$  und  $m$  von  $\pi$  zieht und deren Schnittpunkte auf  $v_1$  mit  $P$  verbindet ( $l'$  und  $m'$ );  $l'$  ist dann Ssg von  $m$  und  $m'$  Ssg von  $l$ .

b) Jede Tangente von  $\pi$  wird durch die anderen Tangenten und deren Ssg in den Punkten einer involutorischen Punktreihe geschnitten. In dieser sind auch zugeordnete Punkte  $(v(s_1, s_1'; s_2, s_2'; s_3, s_3'))$ , wenn  $s_1$  die Seite  $A_2A_3$  und  $s_1' PA_1$  bedeutet. Der Punkt  $vv_1$  entspricht dem Berührungspunkt von  $v$  auf  $\pi$ . Gehen von  $P$  Tangenten an  $\pi$ , so schneiden sie  $v_1$  in entsprechenden Punkten. Besitzt die Punktreihe reelle Ordnungspunkte, so sind für jeden die Tangente von ihm an  $\pi$  und die Verbindungsgerade mit  $P$  Ssg.

c) Es gibt keine anderen Strahlen der Ebene, welche die durch  $P$  gehenden Strahlen und ihre Ssg in involutorischen Punktreihen schneiden.

Lässt man  $P$  auf die  $\infty$  ferne Gerade fallen, so folgt: jede Tangente einer dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eingeschriebenen Parabel wird durch die Tangenten der Parabel und den als Ssg diesen zugeordneten Durchmessern der Parabel in einer symmetrisch-involutorischen Punktreihe geschnitten.

Schneidet man die Strahlen des Büschels  $P$  durch eine beliebige Gerade  $x$  und die Tangenten des zugeordneten Kegelschnitts  $\pi$  durch eine Tangente  $u$  von  $\pi$ , so erhält man zwei projectivische Punktreihen, welche ein neues Strahlenbüschel 2ter Classe bestimmen, zu welchem auch  $x$  und  $u$  gehören. Dies  $\Gamma^2$  zerfällt, wenn die durch den Punkt  $(ux)$  gehenden Ssg zu den Büscheln  $P$  und  $\Gamma^2$  gehören. Nimmt man an, dass das  $\Gamma^2$  in die Büschel  $(ux)$  und  $Q$  zerfällt und nennt man  $s_1''$  die Verbindungslinie des Punktes  $(us_1)$  und des Schnittpunkts von  $x$  mit  $A_2A_3$ , so erhält man ebenso wie bei der reciproken Ableitungen über Winkelgegenpunkte eine Configuration (11), d. h. 11 Geraden und 11 Punkte in der Lage, wo jede der 11 Geraden 3 der 11 Punkte enthält, und durch jeden der Punkte 3 von den Geraden gehen. Es sind die 11 Geraden  $s_1s_2s_3; s_1's_2's_3'; s_1''s_2''s_3''$ ,  $x$  und  $u$  und die 11 Punkte  $A_1A_2A_3; P, Q$  und 6 auf  $x$  und  $u$  liegende. Mit Hülfe der Restfiguren  $(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta)$  findet man, dass sie von derselben Art, wie die oben genannte ist und sich dem Martinetti-schen Schema

1	2	3	4	5	(6)	7	8	9	10	11
(u)	$A_3$	$A_3$	(x)	Q	(u)	(u)	(u)	P	$A_3$	(x)
$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\delta$	$\beta$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\delta$	$\alpha$	$\epsilon$	$\delta$

fügt, wenn die Buchstaben der 2ten Zeile die Punkte unserer Configuration, die 1te und 3te Zeile die Abzählung und die Restfiguren von Martinetti bedeuten \*).

\*) s. Martinetti, Ann. di mat. Fr. Brioschi, Serie II, tome XV.

4. Kegelschnitte, welche den Punkten einer Geraden entsprechen.

Bewegt sich der Punkt  $P$

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

auf einer Geraden  $m$  mit den Coordinaten

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = m_1 : m_2 : m_3$$

so sind die Coefficienten der Gleichung des zugehörigen Kegelschnitts  $\pi$  (S. 5.)

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0 \text{ durch die lineare Gleichung verbunden,} \\ p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 = 0 \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 1 bestimmen eine Kegelschnittschaar, welche aus den Kegelschnitten besteht, welche die Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  und die Gerade

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3}$$

zu gemeinschaftlichen Tangenten hat; diese Gerade ( $mc$ ) ist die Ssg von  $m$ .

Zu den  $\infty$  fernen Punkte von  $m$  gehört die Parabel der Schaar; ihre Axe ist zu  $m$  parallel. Für diese Parabel ist

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

$$p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 = 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

Also ist ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{\xi_2} & \frac{1}{\xi_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{m_2 - m_3}{\xi_1} + \frac{m_3 - m_1}{\xi_2} + \frac{m_1 - m_2}{\xi_3} = 0$$

Der Nagel'sche Punkt von  $\pi$  ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{p_1} : \frac{2}{p_2} : \frac{1}{p_3}$$

den Ort dieses Punktes für die Kegelschnitte der Schaar erhält man, wenn man seine Coordinaten in die zweite Gleichung von 1) einsetzt

$$2) \quad \frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \frac{m_3}{x_3} = 0$$

es ist ein dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  umgeschriebener Kegelschnitt, zugleich die Seitengegencurve von  $m$ , d. h. sie enthält die Seitengegencurvepunkte der auf  $m$  liegenden Punkte.

Die zur  $\infty$  fernen Geraden gehörende Kegelschnittschaar ist

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

sie enthält die dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  eingeschriebenen Parabeln. Der Ort ihrer Nagel'schen Punkte ist

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$$

d. h. die Ellipse von Steiner, welche die durch die Ecken des Dreiecks zu seinen Gegenseiten gezogenen Parallelen berührt. Da sie die Seitengegencurvepunkte der  $\infty$  fernen Punkte der Ebene enthält, „so ist die Curve 2 eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem  $m$  die Ellipse von Steiner schneidet, berührt, oder nicht trifft.“

Wir wollen die Mittelpunkte der zur Geraden  $m$  gehörenden Kegelschnittschaar  $(x_1x_2x_3m_1)$  betrachten. Der Mittelpunkt  $P_m$  des zum Punkte  $P$

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0$$

gehörenden Kegelschnitts

$$\frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

hat die Coordinaten

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2 + p_3) : (p_3 + p_1) : (p_1 + p_2)$$

Die Gerade  $P_mP$  hat dann die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 + p_3 & p_1 + p_3 & p_1 + p_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder, nachdem man durch  $p_1 + p_2 + p_3$  dividirt hat:

Da sie für  $x_1(p_2 - p_3) + x_2(p_3 - p_1) + x_3(p_1 - p_2) = 0$

$$x_1 = x_2 = x_3$$

erfüllt wird, so geht sie durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Dies ergibt sich auch leicht geometrisch (Fig. 2). Denn

$$B_1 D_1 = D_1 C_1, \text{ also}$$

$$P_m D_1 \text{ par. } C_1 E_1 \text{ und } 2 P_m D_1 = C_1 E_1 = A_1 P, \quad D_1 S : S A_1 = 1 : 2$$

also ist  $S$  Schwerpunkt im Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  und

$$P_m S : SP = 1 : 2$$

Also sind  $P$  und  $P_m$  homologe Punkte in den ähnlich liegenden Dreiecken  $A_1 A_2 A_3$  und  $D_1 D_2 D_3$ . Die Mittelpunkte also der Kegelschnitte, welche die Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  und eine 4te Gerade  $m_1$  berühren, liegen auf einer zur Ssg  $m$  von  $m_1$  parallelen Geraden  $m'$  der Art, dass  $m$  und  $m'$  entspr. Geraden in den Dreiecken  $A_1 A_2 A_3$  und  $D_1 D_2 D_3$  sind.

Die Coordinaten von  $P$  seien  $x_1 x_2 x_3$  die von  $P_m$  seien  $x_1' x_2' x_3'$  dann folgt aus

$$x_1' = x_2 + x_3 \quad (\text{S. 7}) \quad \text{u. s. w.}$$

$$x_1 = -x_1' + x_2' + x_3', \quad x_2 = x_1' - x_2' + x_3'; \quad x_3 = x_1' + x_2' - x_3'$$

Aus der Gleichung von  $m$ , nämlich

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

folgt dann die für  $m'$  durch Einsetzung jener Werte. Sie ist

$$(-m_1 + m_2 + m_3)x_1 + (m_1 - m_2 + m_3)x_2 + (m_1 + m_2 - m_3)x_3 = 0$$

Durchläuft  $P$  eine beliebige Curve  $n$ ter Ordnung, so ist die Bahn des Mittelpunkts des zu  $P$  gehörenden Kegelschnitts ebenfalls eine solche, welche zur ersten ähnlich liegt (Centrum  $S$ , Verhältniss 2 : 1); dagegen ist die Bahn des Nagel'schen Punkts eine Curve vom  $2n$ ten Grade, die  $A_1 A_2 A_3$  zu  $n$ fachen Punkten hat, nämlich die Seitencurve der ersten  $C^n$ .

Wir wollen das Vorhergehende an einigen besonderen Fällen erläutern. Der dem Dreieck umgeschriebene Kreis

$$\frac{s_1^2}{x_1} + \frac{s_2^2}{x_2} + \frac{s_3^2}{x_3} = 0$$

ist der Ort der Nagel'schen Punkte der die Seiten des Dreiecks und die Ssg der Seitengegerade des Kreises, also

$$\frac{x}{x_1^2} + \frac{x_2}{s_2^2} + \frac{x_3}{s_3^2} = 0$$

berührenden Kegelschnitte. Die Parabel dieser Schaar hat die Gleichung

$$\frac{1}{s^2 - s_3^2} + \frac{s_2 - s_4^2}{\xi_1^2} + \frac{s_1^2 - r_2^2}{\xi_2} = 0$$

ihr Nagel'scher Punkt hat also die Coordinaten

$$\frac{1}{s_2^2 - s_3^2} : \frac{1}{s_3 - s_1^2} : \frac{1}{s_3 - s_3^2}$$

und ist der Steiner'sche Punkt, da er der Schnittpunkt des umgeschriebenen Kreises und der Steiner'schen Ellipse ist. Wenn  $H_1$  den Seitengegenpunkt des Höhenschnittpunkts  $H$  des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  bedeutet, und wenn  $m$  durch  $H_1$  geht, so ist der Kegelschnitt

$$\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \frac{m_3}{x_3} = 0$$

eine gleichseitige Hyperbel, da er  $H$  enthält. Die analytische Bedingung dafür ist  $m_1 \tan A_1 + m_2 \tan A_2 + m_3 \tan A_3$ , da  $x_i = \cot A_i$ .

Zieht man durch die Ecken des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  in beliebiger Richtung Parallelen, welche die Gegenseiten in  $B_1, B_2$  und  $B_3$  treffen, so schneiden sich die Ssg der Tangenten des Kegelschnitts, der in diesen Punkten berührt, in einem Punkte der Steiner'schen Ellipse, sein Mittelpunkt liegt also auf der Ellipse  $\epsilon_1$ , welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mitten berührt. Die Ssg der durch  $H$  gehenden Geraden umhüllen eine Ellipse, welche mit dem umgeschriebenen Kreise den Mittelpunkt  $M$  gemein hat, denn

$$HS : SM = 2 : 1$$

Sie berührt die Seiten in den Endpunkten der Seitengegeraden der Höhen. Die Ssg der Durchmesser des Kreises  $M$  umhüllen eine Ellipse, die mit dem Feuerbach'schen Kreise den Mittelpunkt  $T$  gemein hat, denn

$$MS : ST = 2 : 1$$

Diese beiden Ellipsen und die eingeschriebene, zur Steiner'schen ähnlich liegende  $\epsilon_1$  haben eine gemeinschaftliche Tangente (ausser den Dreiecksseiten), nämlich die Ssg der Euler'schen Geraden  $MH$ , da  $\epsilon_2$  zu  $S$  gehört und  $S$  auf  $MH$  liegt. Die Parabel der zugehörigen Kegelschnittschaar hat also  $MH$  zum Durchmesser, zum Brennpunkt den Tarry'schen Punkt  $N$  (s. Lieber, Progr. 134 vom Fr. W. Gymn. Stettin 1856 Nr. 94), ihr Nagel'scher Punkt ist der 4. Schnittpunkt

der Steiner'schen Ellipse mit der Hyperbel  $A_1 A_2 A_3 S H_1$  und durch ihn geht auch der Kreisdurchmesser  $RMN$ , welcher den Steiner'schen mit dem Tarry'schen Punkte verbindet. Der Grebe'sche Punkt  $K$  ist bekanntlich der Mittelpunkt der eingeschriebenen Ellipse, welche die Seiten in den Höhenfusspunkten berührt. „Also liegt der Ssg.  $H_1$  von  $H$  so auf  $SK$ , dass

$$H_1 S : SK = 1 : 2 \text{ ist.}''$$

$K$  und  $M$  sind also auch Sgp im Dreieck  $D_1, D_2, D_3$ , da

$$MS : SH = 1 : 2 \quad \text{und} \quad KS : SH_1 = 1 : 2$$

ist. Eine gleichseitige Hyperbel  $A_1 A_2 A_3$  enthält stets  $H$ , also ist der Ort der Nagel'schen Punkte einer Kegelschnittschaar  $(s_1 s_2 s_3 m')$  eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Ssg.  $(m)$  von  $m'$  durch  $H_1$ , die Mittelpunktsgerade also durch  $K$  geht. Zu jeder solchen Schaar gehört die vorher genannte Ellipse um  $K$ .

Ist  $O$  der Mittelpunkt des eingeschr. Kreises,  $N$  der Punkt von Nagel (Schnittpunkt der zu den Berührungspunkten laufenden Transversale),  $N'$  sein Sgp, so ist  $N'$  der Punkt, zu welchem der eingeschr. Kreis gehört (s. oben), also liegen  $N'S$  und  $O$  auf derselben Geraden und

$$N' S : SO = 2 : 1$$

Dies führt zu einer bemerkenswerten Folgerung. Zieht man nämlich durch die Ecken des Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten und nennt das neu erstandene Dreieck  $A_1' A_2' A_3'$ , so muss  $N'$  Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises dieses Dreiecks sein. Dasselbe gilt für die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ ; nennt man sie  $O_1, O_2, O_3$ , die zugehörigen Nagel'schen Punkte  $N_1, N_2, N_3$  und deren Sgp  $N_1', N_2', N_3'$ , so ist das Viereck  $N' N_1' N_2' N_3'$  zum Viereck  $O O_1 O_2 O_3$  ähnlich liegend mit  $S$  als innere Aehnlichkeit und dem Verhältnisse  $2 : 1$ . Die Punkte  $N$  sind die Mittelpunkte der 4 die Seiten des Dreiecks  $A_1' A_2' A_3'$  berührenden Kreise, so dass also jede Seite des ersten Vierecks die Winkel und Aussenwinkel des Dreiecks  $A_1' A_2' A_3'$  halbiren. Der Mittelpunkt des Kegelschnitts ferner, welcher die Seiten des Dreiecks in den Endpunkten der durch  $O$  (Mittelpunkt des eingeschr. Kr.) laufender Transversalen berührt, ist ein für das Dreieck ausgezeichneter Punkt ( $L$ ), nämlich der Schwerpunkt seiner Seiten, da

$$OS : SL = 2 : 1$$

sein muss (s. Laisant Théorie des équipollences p. 123).

Lässt man den Nagel'schen Punkt eine beliebige Gerade  $g$  durchlaufen, so ist der Ort für  $P$  ein durch  $A_1A_2A_3$  gehender Kegelschnitt  $k$ , nämlich die Seitengegencurve von  $g$ , und der Ort für die Mittelpunkte  $P_m$  der zugehörigen Kegelschnitte ist der zu  $k$  ähnlich liegende Kegelschnitt durch  $D_1O_2D_3$ .  $P_m$  durchläuft den Kreis  $D_1D_2D_3$ , wenn  $g$  die Ssg des Kreises  $A_1A_2A_3$  ist.

In der Schaar, deren Kegelschnitte den Punkten einer Geraden entsprechen, müssen wir noch die zerfallenden  $C^2$  ins Auge fassen. Wenn der Punkt  $P$  die Gerade  $m$  durchläuft, so berührt der zugehörige Kegelschnitt  $\pi$  stets die Ssg  $m_1$  von  $m$ .  $\pi$  wird zerfallen, wenn  $P$  auf eine Seite des Dreiecks zu liegen kommt. Denn schneiden  $m$  und  $m_1$   $A_2A_3$  in  $C$  und  $C_1$  und fällt  $P$  auf  $C$ , so entsprechen ihm die Strahlenbüschel  $C_1$  und  $A_1$ . Als Mittelpunkt der zerfallenden Curve muss also der Mittelpunkt von  $A_1C_1$  betrachtet werden, und da  $A_1C_1$  Diagonale ist im vollständigen Viereck, gebildet aus den Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  und  $m_1$ , so ergibt sich, dass  $m'$  auch die Mittelpunkte dieses Vierecks enthält, wie bekannt. Wenn man erwägt, dass  $m'$  und  $m$  parallel und durch  $S$  im Verhältniss 1 : 2 getrennt sind, so erhält man: Die beliebigen Geraden  $a_1a_2a_3a_4$  bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalmittelpunkte auf  $a_m$  liegen mögen.  $a_1'$  sei die Ssg von  $a_4$  für das Dreieck  $a_1a_2a_3$ , analog  $a_2'$ ,  $a_3'$ ,  $a_4'$  und  $S_1, S_2, S_3, S_4$  seien die Schwerpunkte der von den 4 Geraden bestimmten Dreiecke, so dass  $S_4$  Schwerpunkt des Dreiecks  $a_1a_2a_3$  ist. Dann ist

$$a_m \parallel a_1' \parallel a_2' \parallel a_3' \parallel a_4$$

(Richtung der Axe der zur Schaar gehörenden Parabel) und  $S_4$  liegt zwischen  $a_4'$  und  $a_m$  so, dass jede durch  $S_4$  gehende Gerade im Verhältniss 2 : 1 geteilt wird, analoges gilt für  $a_1', a_2', a_3'$ .

Fasst man 5 Tangenten eines Kegelschnitts in's Auge, so ergibt sich: Die Geraden  $a_1a_2a_3a_4a_5$ , von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, bestimmen 10 Dreiecke, deren Schwerpunkte wir mit  $S_{12}, S_{13}$  u. s. w. bezeichnen; wobei  $S_{12}$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $a_3a_4a_5$  sein soll. Die Seitensymmetriegeraden von  $a_1$  und  $a_2$  für das Dreieck  $a_3a_4a_5$  sollen sich in  $A_{12}$  schneiden, wodurch man 10 Punkte  $A$  erhält. Dann sind die Zehnecke, gebildet aus den Punkten  $S$  und  $A$ , ähnlich und ähnlich liegend; das Centrum (äusseres) ist der Mittelpunkt des die 5 Geraden berührenden Kegelschnitts und das Verhältniss 1 : 3, so dass

$$MS_{12} : MA_{13} = 1 : 3 \text{ ist.}$$

### 5. Die dem Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln.

Nur dem stumpfwinkligen Dreieck können gleichs. Hyperbeln eingeschrieben werden; wir wollen deshalb für das Folgende voraussetzen  $A_1 > 90^\circ$ .

Die dem Dreieck eingeschriebene Hyperbel  $\pi$  habe die Asymptoten  $u$  und  $v$  und den Mittelpunkt  $P'$ . Dann sind die Ssg ( $u_1$  und  $v_1$ ) von  $u$  und  $v$  diejenigen Geraden des zu  $\pi$  gehörenden Strahlenbüschels  $P$ , welche die durch  $P$  gehenden, eingeschriebenen Parabeln berühren. Wir wollen deshalb zuerst die Gleichungen von  $u_1$  und  $v_1$  aufsuchen.  $P$  habe die Coordinaten  $p_1, p_2, p_3$ , also die Hyperbel die Gleichung

$$1) \quad \frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

Eine durch  $P$  gehende, eingeschriebene Parabel habe die Gleichung

$$2) \quad \frac{m_1}{\xi_1} + \frac{m_2}{\xi_2} + \frac{m_3}{\xi_3} = 0$$

wobei

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0$$

sein muss. Also muss sein

$$3) \quad m_1 : m_2 : m_3 = \left( \frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3} \right) : \left( \frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_1} \right) : \left( \frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right)$$

Die Gleichung 2) kann auch geschrieben werden

$$(m_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (m_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (m_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$$

oder

$$4) \quad m_1^2 x_1^2 + m_2^2 x_2^2 + m_3^2 x_3^2 - 2m_2 m_3 x_2 x_3 - 2m_3 m_1 x_3 x_1 - 2m_1 m_2 x_1 x_2 = 0$$

Wir setzen für  $x_i = p_i$ , da 4) durch  $P$  geht, und aus 3) die Werte für  $m_i$

$$\begin{aligned} & p_1^2 \left( \frac{1}{\xi_2^2} - \frac{1}{\xi_3^2} \right)^2 + p_2^2 \left( \frac{1}{\xi_3^2} - \frac{1}{\xi_1^2} \right)^2 + p_3^2 \left( \frac{1}{\xi_1^2} - \frac{1}{\xi_2^2} \right)^2 \\ & - 2p_1 p_2 \left( \frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3} \right) \left( \frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_1} \right) - 2p_2 p_3 \left( \frac{1}{\xi_3} - \frac{1}{\xi_1} \right) \left( \frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right) \\ & - 2p_3 p_1 \left( \frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right) \left( \frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_3} \right) = 0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$5) \quad \left( \frac{p_2 + p_3}{\xi_1} + \frac{p_3 + p_1}{\xi_2} + \frac{p_1 + p_2}{\xi_3} \right)^2 = 4(p_1 + p_2 + p_3) \cdot \left( \frac{p_1}{\xi_2 \xi_3} + \frac{p_2}{\xi_1 \xi_3} + \frac{p_3}{\xi_1 \xi_2} \right)$$

Für die beiden durch  $P$  oder

$$6) \quad p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 - p_3 \xi_3 = 0$$

gehenden in 5 enthaltenen Geraden wird die rechte Seite 0, und man erhält

$$7) \quad \frac{p_2 + p_3}{\xi_1} + \frac{p_3 + p_1}{\xi_2} + \frac{p_1 + p_2}{\xi_3}$$

d. h. sie sind die Tangenten von  $P$  an diesen eingeschriebenen Kegelschnitt. Die Gleichungen für  $u_1$  und  $v_1$  ergeben sich, wenn man aus 6) und 7) die Wurzeln berechnet. Ihre Ssg  $u$  und  $v$  müssen dann die Wurzeln sein von

$$8) \quad \frac{p_1}{\xi_1} + \frac{p_2}{\xi_2} + \frac{p_3}{\xi_3} = 0$$

(s. Gl. 1)) und

$$9) \quad (p_2 + p_3) \xi_1 + (p_3 + p_1) \xi_2 + (p_1 + p_2) \xi_3 = 0$$

Setzt man die zweifachen Wurzelwerte =  $q_i$  und  $q_i'$ , so erhält man leicht

$$10) \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{-p_2 + p_3 + w}{p_3(p_3 + p_1)} \quad \text{und} \quad \frac{q_2'}{q_3'} = \frac{-p_2 - p_3 - w}{p_3(p_3 + p_1)}$$

worin

$$w = \sqrt{p_2^2 p_3^2 - p_2 p_3 (p_1 + p_2) (p_3 + p_1)}$$

ist. Da nun die Hyperbel  $\pi$  eine gleichseitige sein soll, so muss  $u$  norm. z.  $v$  sein, oder ihre Coordinaten die Gleichung erfüllen

$$11) \quad [\cot A_1 (q_2 q_3' + q_3 q_2') + \cot A_2 (q_3 q_1' + q_1 q_3') + \cot A_3 (q_1 q_2' + q_2 q_1')] \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 = q_1 \cdot q_1' \sin^2 A_1 + q_2 q_2' \sin^2 A_2 + q_3 \cdot q_3' \sin^2 A_3$$

Aus 10) folgt nun

$$\frac{q_2}{q_3} \cdot \frac{q_3'}{q_3'} = \frac{p_2 (p_1 + p_2)}{p_3 (p_3 + p_1)}$$

ähnlich

$$\frac{q_3}{q_3'} \cdot \frac{q_3'}{q_1'} = \frac{p_3(p_2 + p_3)}{p_1(p_1 + p_2)}$$

also

$$q_1 \cdot q_1' : q_2 \cdot q_2' : q_3 \cdot q_3' = \frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_1} + \frac{p_3}{p_1 + p_2}$$

Wir setzen

$$12) \quad q_1 \cdot q_1' = \varepsilon \frac{p_1}{p_2 + p_3}$$

Ferner folgt aus (10)

$$\frac{q_2}{q_3} + \frac{q_2'}{q_3'} = \frac{q_2 q_3' + q_2' q_3}{q_3 \cdot q_3'} = \frac{-2p_2}{p_1 + p_3}$$

also nach 12)

$$= \frac{-2\varepsilon p_2 p_3}{(p_1 + p_2)(p_1 + p_2)}$$

Nach Multiplication mit  $\frac{1}{\varepsilon} (p_2 + p_3)(p_3 + p_1) \cdot (p_1 + p_2)$  wird dann aus 11)

$$\begin{aligned} & 2[\cot A_1(p_2 + p_3) p_2 p_3 + \cot A_2(p_3 + p_1) p_3 p_1 + \cot A_3 \\ & \cdot (p_1 + p_2) p_1 p_2] \cdot \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 + \sin^2 A_1 p_1 (p_3 + p_1) \\ & \cdot (p_1 + p_2 + \sin^2 A_2 p_2 (p_1 + p_2)(p_2 + p_3) + \sin^2 A_3 (p_2 + p_3) \\ & \cdot (p_3 + p_1) = 0 \end{aligned}$$

welche zerfällt in

$$(p_1 + p_2 + p_3) = 0$$

und

$$\begin{aligned} 13) \quad & p_1^2 \sin^2 A_1 + p_2^2 \sin^2 A_2 + p_3^2 \sin^2 A_3 + 2(\cot A_1 p_2 p_3 \\ & + \cot A_2 p_3 p_1 + \cot A_3 p_1 p_2) \cos A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 = 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung stellt die  $\infty$  ferne Gerade dar, und liefert die dem Dreieck eingeschriebenen Parabeln, welche hier nicht mitgezählt werden können, also bleibt nur 13) als Gleichung für die Punkte  $P$ . Sie ist die Gleichung eines Kreises. Denn die allg. Gleichung eines Kreises, nämlich

$$\begin{aligned} 14) \quad & (s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + s_3^2 x_1 x_2) + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \\ & \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 0 \end{aligned}$$

geht in (13) über, wenn man 11)

$$a_1 = s_1^2$$

setzt und darauf durch  $(-4r^2)$  dividirt. Man erhält:

$$15) \quad -\sum s_1^2 x_2 x_3 + \sum s_1^2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

Die Radicalaxe mit dem umgeschriebenen Kreise ist die Gerade

$$s_1^2 x_1 + s_2^2 x_2 + s_3^2 x_3 = 0$$

oder in trimetrischen Coordinaten

$$s_1^3 x_1 + s_2^2 x_2 + s_3^3 x_3 = 0$$

Gleichung 15) kann auch geschrieben werden:

$$s_1^2 x_1^2 + s_2^2 x_2^2 + s_3^2 x_3^2 + 2s_2 s_3 x_2 x_3 \cos A_1 + 2s_3 s_1 x_3 x_1 \cos A_2 + 2s_1 s_2 x_1 x_2 \cos A_3 = 0$$

Hieraus folgt nun leicht die Gleichung für den Mittelpunkt  $P'$  der gleichseitigen Hyperbel  $\pi$ . Denn Gleichung (9) zeigt, dass seine Coordinaten sind

$$x_1 : x_2 : x_3 = (p_2 + p_3) : (p_3 + p_1) : (p_1 + p_2)$$

Also ist

$$p_1 : p_2 : p_3 = (-x_1 + x_2 + x_3) : (x_1 - x_2 + x_3) : (x_1 + x_2 - x_3)$$

Man setze diese Werte in 15) ein und erhält nach einigen Aenderungen, wenn  $r$  den Radius des Kreises  $A_1 A_2 A_3$  bedeutet,

$$16) \quad s_1^2 x_2 x_3 + s_2^2 x_3 x_1 + s_3^2 x_1 x_2 - \frac{s_1 s_2 s_3}{2r} (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$(\cot A_1 \cdot x_1 + \cot A_2 \cdot x_2 + \cot A_3 \cdot x_3) = 0$$

oder in gewöhnlichen Coordinaten

$$16a) \quad (s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2 - (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) (x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3)) = 0$$

Dieser Kreis gehört zu dem Büschel, welches der umgeschriebene und der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  bestimmen, denn die Gl. des letzteren, nämlich

$$2(4(s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2) - (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) (\cos A_1 \cdot x_1 + \cos A_2 \cdot x_2 + \cos A_3 \cdot x_3)) = 0$$

zeigt, dass die gemeinsame Radicalaxe der 3 genannten Kreise die Gerade

$$\cos A_1 \cdot x_1 + \cos A_2 \cdot x_2 + \cos A_3 \cdot x_3 = 0$$

ist zugleich die Axe der Homologie, von  $A_1 A_2 A_3$  und dem Dreieck der Höhenfusspunkte.

Die Gleichung 16) unseres Kreises (in barycentrischen Coordinaten) kann in die Form gebracht werden

$$18) \quad x_1^2 \cot A_1 + x_2^2 \cot A_2 + x_3^2 \cot A_3 = 0$$

sie zeigt, dass er nur reell ist, wenn eine der Coefficienten negativ ist, also nur für stumpfwinklige Dreiecke. In einem solchen schneidet bekanntlich der Feuerb. Kreis den umgeschriebenen, und es folgt, dass auch der neue Kreis durch diese beiden Schnittpunkte gehen muss.

Sein Mittelpunkt ist ein Punkt der Euler'schen Geraden und zwar der Höhenschnittpunkt. Denn setzt man für den Punkt  $A_2$  seine Coordinaten in Gl. 16) und bezeichnet die Potenz des Kreises 16) im Punkte  $A_2$  mit  $p_2^2$ , so ist

$$m \cdot p_2^2 = -s_2 h_2^2 \cdot \cos A_2$$

andererseits ist  $p_2^2$  gleich dem Product der Abschnitte auf  $x_3$ , gemessen von  $A_2$  und dies ergibt sich aus Gl. 18)

$$p_2^2 = \frac{s_3^2 \cot A_2}{\cot A_1 + \cot A_2}$$

Beides liefert

$$m = -2r \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3$$

Setzt man nun die Coordinaten von

$$M(x_i = r \cos A_i)$$

ein, so ist die Potenz

$$= r^2(1 - 4 \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3)$$

und die von  $H$

$$= 4r^2 \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3$$

Da nun

$$MH^2 = r^2(1 - 8 \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3)$$

ist, so ist klar, dass  $H$  der Mittelpunkt des untersuchten Kreises und

$$2r \sqrt{-\cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3}$$

sein Radius ist. Wir haben also den Satz:

„Die Mittelpunkte der einem bei  $A_1$  stumpfwinkligen Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln liegen auf einem um seinen Höhenschnittpunkt beschriebenen Kreise, der durch die

„reellen Schnittpunkte des umgeschriebenen und des Feuerbach'schen Kreises des Dreiecks geht und dessen Radius gleich

$$2r \sqrt{-\cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3} \text{ ist.}''$$

Die Asymptoten dieser Hyperbeln bilden einen Strahlenbüschel 6ter Classe, das die  $\infty$  fernen Geraden zur Doppeltangente hat. Denn ihre Coordinaten sind Wurzeln der Gl. 8) und 9), woraus folgt

$$p_1 : p_2 : p_3 = \xi_1^2(\xi_3 - \xi_2) : \xi_2^2(\xi_1 - \xi_3) : \xi_3^2(\xi_2 - \xi_1)$$

Da für die  $p_i$  die Gleichung besteht 18)

$$(p_2 + p_3)^2 \cot A_1 + (p_3 + p_1)^2 \cot A_2 + (p_1 + p_2)^2 \cot A_3 = 0$$

so folgt für die Asymptoten

$$(\xi_2 - \xi_3)^2 (-\xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 + \xi_1 \xi_2)^2 \cot A_1 + \dots = 0$$

Aehulich liegen die Brennpunkte auf einer Curve 6ter Ordnung. Denn ist Gl. 8) die Gleichung einer solchen Hyperbel und  $x_1 x_2 x_3$  die Coordinaten eines ihrer Brennpunkte, so ist  $p_1$  proportional

$$\frac{x_2 \sin A_3}{x_3 \sin A_3} + \frac{x_3 \sin A_2}{x_2 \sin A_3} + 2 \cos A_1$$

(s. Bücking a. a. O. S. 5). Setzt man

$$x_1(x_2^2 \sin^2 A_3 + x_3^2 \sin^2 A_2 + 2x_2 x_3 \sin A_2 \sin A_3 \cos A_1) = \eta_1$$

so ist der Ort der Brennpunkte

$$\eta_1^2 \sin^2 A_1 + \eta_2^2 \sin^2 A_2 + \eta_3^2 \sin^2 A_3 + 3(\eta_2 \eta_3 \cot A_1 + \eta_3 \eta_1 \cot A_2 + \eta_1 \eta_3 \cot A_3) = 0$$

Der umgeschriebene Kreis und der Kreis um  $H$  schneiden sich unter einem Wkl.  $\varphi$ , so dass

$$\cos^2 \varphi = -\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3$$

ist; setzt man an die Stelle des umgeschriebenen Kreises, den von Feuerbach, so erhält man

$$\cos^2 \varphi = -\frac{1}{16} \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3$$

Die Potenz unseres Kreises im Schwerpunkt ist

$$= \frac{2A \cot \cot \omega}{9}$$

wenn

$$\Delta = \Delta A_1 A_2 A_3$$

und  $\omega$  den Brocard'schen Winkel \*) bedeutet.

Der Kreis um  $S$ , welcher mit den Kreisen um  $M$  und  $H$  zu einem Büschel gehört, schneidet den Kreis um  $H$  in  $U$  und  $V$  rechtwinklig, denn  $US$  und  $UH$  halbieren den Winkel  $MUF$  und dessen Nebenwinkel. Also ist auch

$$SU^2 = \frac{2}{9} \Delta \cot \omega = SV^2$$

Endlich ist die Entfernung

$$UV = 4r \sqrt{\frac{-w(1+w)}{1-8w}}$$

wenn

$$w = \cos A_1 \cdot \cos A_2 \cdot \cos A_3 \text{ ist.}$$

Die Punkte  $U$  und  $V$  sind zugleich Mittelpunkte von 2 dem Dreiecke umgeschriebenen und von 2 ihm eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Zu ihrer Construction dienen die erwähnten involutorischen Büschel; man ziehe  $US$  bis zum 2ten Schnittpunkt  $U_1$  auf dem Kreise  $A_1 A_2 A_3$ , und bestimme die Ordnungstrahlen von  $U$  und  $U_1$ . Die ersteren sind die Asymptoten der umgeschriebenen, die Seitensymmetriegeraden, die letzteren die Asymptoten der eingeschriebenen Hyperbeln.

Unter den dem stumpfwinkligen Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln giebt es solche mit paarweise parallelen Asymptoten. Sind  $X$  und  $Y$  die  $\infty$  fernen Punkte einer solchen eingeschriebenen Curve, so gehören zu ihnen eingeschriebene Parabeln  $x$  und  $y$ , welche von den Seitensymmetriegeraden der durch  $X$  und  $Y$  gehenden Geraden umhüllt werden, und deren Axen durch  $U$  und  $V$  gehen, also senkrecht zu einander sind. Wenn  $U$  und  $V$  in dem Winkelraum des stumpfen Winkels des Dreiecks liegen, so schneiden sich  $x$  und  $y$  in 4 Punkten. Zu jedem von diesen Punkten gehört eine eingeschriebene durch  $U$  und  $V$  gehende Hyperbel, also giebt es in diesem Falle 4 gleichseitige Hyperbeln mit parallelen Asymptoten.

Jene Schnittpunkte sind Punkte des Kreises, dessen Gleichung 45) ist, und die ihnen entsprechenden Punkte auf dem Kreise 16) sind die Mittelpunkte der Hyperbeln. Liegen aber die Parabeln

\*) s. die Brocard'schen Gebilde von Emmerich.

in verschiedenen Winkelräumen der Winkel  $A_1, A_1, A_3$ , so schneiden sie sich überhaupt nicht. Also haben wir den Satz:

„Die in 2 einem stumpfwinkligen Dreieck eingeschriebenen Parabeln, deren Axen auf einander senkrecht stehen, schneiden sich entweder nicht, oder in 4 Punkten eines Kreises, und dieser Kreis ist für alle ein und derselbe“.

Man kann beliebig viele Paare solcher Parabeln finden, indem man von ihren Brennpunkten ausgeht, die auf dem Kreise  $A_1A_2A_3$  diametral gegenüber liegen. Sind  $A_2A_2'$  und  $A_3A_3'$  Durchmesser dieses Kreises, so können die Brennpunkte nur auf den Bogen  $A_2A_2'$  gelegen sein. Ist  $G$  ein solcher Brennpunkt, so geht die Axe  $a$  der zu ihm gehörenden Parabel durch  $G$  und den  $\infty$  fern liegenden Winkelgegenpunkte von  $G$ , die Fusspunktlinie von  $G$  für das Dreieck  $A_1A_2A_3$  liefert nun die Scheiteltangente und die Parallele dazu durch  $H$  die Leitlinie  $l$  der Parabel. Diejenige eingeschriebene Parabel, deren Axe zu der Axe der vorhergehenden senkrecht steht, habe den Brennpunkt  $G'$ , die Axe  $a'$ , die Leitlinie  $l'$ ; dann ist  $G'G$  Kreisdurchmesser,  $a \perp a'$ ,  $l \perp l'$ , wodurch diese Linien sogleich bestimmt sind.

Die Nagel'schen Punkte der einem (stumpfwinkligen) Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln sind die Seitengegenpunkte der Punkte  $P$  (s. oben); man vertausche in Gl. 15) die  $x_i$  mit  $\frac{1}{x_i}$  und erhält als Ort für jene die Curve

$$\sum \frac{s_1^2}{x_1^2} + 2 \sum \frac{s_2 s_3 \cos A_1}{x_2 x_3} = 0$$

oder in gewöhnlichen Coordinaten

$$x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 x_3 \cos A_1 + \dots = 0$$

Diese Gleichung findet man bei Depèue (1893 Progr. 177, Breslau, über die einem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kegelschnitte). Synthetisch ist sie als Curve 4ten Grades und 6. Classe bereits von Montag bestimmt worden. (1870, Dissert. von C. Montag, Breslau, Seite 27).

## 6. Gegenschaaen.

Unter einer Gegenschaar wollen wir eine Schaar von Geraden verstehen der Art, dass die Seitensymmetriegerade einer jeden wieder eine Gerade der Schaar ist.

Man erhält eine solche, wenn man den Punkt  $P$  eine beliebige Curve beschreiben lässt, und für jede Lage die 2 durch  $P$  gehende Ssg bestimmt. Die von  $P$  durchlaufene Curve wollen wir die Leitcurve der Schaar nennen.

1) Die Leitcurve sei die Gerade  $m$  mit den Coordinaten

$$\xi_2 = m_1$$

Die Coordinaten der durch  $P$  gehenden Ssg seien  $\xi_i'$  und  $\xi_i''$ , ihr Schnittpunkt also

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' \end{vmatrix} = 0$$

Man setzt hierin

$$\xi_i'' = \frac{1}{\xi_i'}$$

und für die  $\xi_i$  der ersten Zeile  $m_i$ , da ihr Schnittpunkt sich auf  $m$  bewegt. Man erhält dann die Gleichung 3ten Grades

$$1) \quad m_1 \xi_1 (\xi_2^2 - \xi_3^2) + m_2 \xi_2 (\xi_3^2 - \xi_1^2) + m_3 \xi_3 (\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$$

Die Gegenschaar also, deren Leitcurve eine Gerade ist, ist ein Strahlenbüschel 3ter Classe, d. h. ein solches, von welchem durch einen Punkt der Ebene höchstens 3, immer aber ein Strahl geht. Sie enthält, da

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2$$

der Gleichung 1) genügt, alle sich selbst entsprechenden Geraden, darunter die  $\infty$  ferne Gerade, ferner die Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$ , die Gerade  $m$  und deren Ssg, und die Berührungspunkte auf  $m$  sind die Punkte, in denen  $m$  von den sich selbst entsprechenden Geraden geschnitten wird. Sie enthält endlich die Geraden  $A_1M_1$ ,  $A_2M_2$ ,  $A_3M_3$ , wenn die  $M$  die Schnittpunkte von  $m$  mit den Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  bedeuten.

Die Gegenschaar zerfällt, wenn

$$m_1 = m_2$$

allgemeiner, wenn

$$m_1^2 = m_2^2 \quad \text{oder} \quad m_2^2 = m_3^2 \quad \text{oder} \quad m_3^2 = m_1^2 \quad \text{ist,}$$

d. h. wenn  $m$  zu einer Dreiecksseite parallel oder durch  $D_1D_2D_3$  geht (Schnittpunkte von je 2 sich selbst entsprechenden Seiten). Für

$$m_1 = m_2$$

z. B. erhält man

$$m_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_1 \xi_2 + \xi_3^2) + m_3 \xi_3(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$$

zerfallend in

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{und}$$

$$m_1(\xi_1 \xi_2 + \xi_3^2) - m_3 \xi_3(\xi_1 + \xi_2) = 0$$

Diese  $\Gamma^2$  enthält auch  $A_2 A_3$ ,  $A_3 A_1$ ,  $D_2 D_3$  und  $D_3 D_1$ .

2) Die Leitcurve sei eine Curve  $n$ ter Ordnung, deren Gleichung ist

$$f_n(x_1 x_2 x_3) = 0$$

Wenn die durch  $P$  gehenden Ssg die Coordinaten  $\xi_i'$  und  $\frac{1}{\xi_i'}$  haben, so ergeben sich die Punkteordinaten ihres Schnittpunkts aus

$$\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 = 0$$

$$\frac{x_1}{\xi_1'} + \frac{x_2}{\xi_2'} + \frac{x_3}{\xi_3'} = 0$$

also

$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1(\xi_2^2 - \xi_3^2) : \xi_2(\xi_3^2 - \xi_1^2) : \xi_3(\xi_1^2 - \xi_2^2)$$

Durch Einsetzen dieser Werte wird

$$f_n(x_i) = 0$$

eine Gleichung  $3n$ ten Grades in  $\xi_i$ .

Durchläuft z. B. der Punkt die Ellipse von Artzt

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$$

so ist die entsprechende  $\Gamma^6$  von der Form

$$\frac{\xi_2 \xi_3}{\xi_2^2 - \xi_3^2} + \frac{\xi_3 \xi_1}{\xi_3^2 - \xi_1^2} + \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} = 0$$

Also hat sich ergeben:

„Durchläuft ein Punkt eine Curve  $n$ ter Ordnung, so bilden die „durch ihn gehenden Seitensymmetriegeraden im allgemeinen ein „Strahlenbüschel der Classe  $3n$ “.

Eine andere Methode Gegenschaaeren zu erhalten, soll für diejenigen 3ter Classe gezeigt werden. Die Gleichung

$$P = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3$$

geht durch Vertauschung der  $\xi_i$  mit ihren reciproken Werten  $\frac{1}{\xi_i}$  und Multiplication der Gleichung mit  $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3$  über in

$$P = p_1 \xi_2 \xi_3 + p_2 \xi_3 \xi_1 + p_3 \xi_1 \xi_2$$

Bedeutet  $R$  und  $R'$ ,  $Q$  und  $Q'$  u. s. w. ebenfalls solche Ausdrücke und  $c$  eine constante Grösse, so ist

$$1) \quad c_1 \cdot P \cdot P' + c_2 \cdot Q \cdot Q' + c_3 \cdot R \cdot R' + \dots = 0$$

die Gleichung einer Gegenschaar der 3ten Classe. Denn jeder Summand ist vom 3ten Grade und beim Einsetzen der  $\frac{1}{\xi_i}$  für die  $\xi_i$  und folgender Multiplication mit  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  geht  $P$  in  $P'$  u. s. w., die Gleichung also in sich selbst über, d. h. die Geraden sind paarweise Symmetriegeraden. Da  $PQ'$  für die  $\xi_i$  ein homogener Ausdruck 3ten Grades ist und durch Einsetzen der reciproken Werte der  $\xi_i$  für die  $\xi_i$  selbst übergeht in  $P' \cdot Q$ , so erhält man auch Gegenscharen in der Form

$$PQ' \pm P'Q = 0$$

oder allgemeiner

$$2) \quad c_1(P \cdot Q' \pm P' \cdot Q) + c_2(R \cdot S' + R'S) + \dots = 0 \quad \text{und}$$

$$3) \quad c_1(P \cdot Q' - P' \cdot Q) + c_2(R \cdot S' - R' \cdot S) + \dots = 0 \quad \text{und}$$

$$4) \quad c_1(PQ' + P'Q) + c_2(RS' + R'S) + \dots + \gamma_1 P \cdot P' + \gamma_2 Q \cdot Q' + \dots = 0$$

4) ergibt sich durch Combination von 1) und 2), eine solche von 1) und 3) giebt keine Gegenschaar, denn für 3) ist nach Einsetzung der  $\frac{1}{\xi_i}$  an Stelle der  $\xi_i$  und einer nachfolgenden Multiplication mit  $\xi_1^2 \cdot \xi_2^2 \cdot \xi_3^2$  auch eine solche mit  $-1$  erforderlich, um die alte Gleichungsform wieder herzustellen. Also würde die Gleichung

$$(PQ' - P'Q) + PP' = 0$$

übergehen in

$$(PQ' - P'Q) - P \cdot P' = 0$$

also nicht in sich selbst.

Die Gleichungen 1), 2) und 4) erscheinen bei unserer Untersuchung in der gemeinsamen Form

$$I. \quad \frac{\xi_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2 + \xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{n_3} + \varepsilon \cdot \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

die Gleichung 3) in der Form

$$II. \quad m_1 \xi_1(\xi_2^2 - \xi_3^2) + m_2 \xi_2(\xi_3^2 - \xi_1^2) + m_3 \xi_3(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$$

Die letztere ist uns bereits bekannt; ihre Leitcurve ist eine Gerade (S. 298). Ehe wir I. untersuchen, wollen wir die anderen Gegenschaaren 3ter Classe bestimmen. I. und II. stimmen darin überein, dass die Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  zur Gegenschaar gehören. Diese Bedingung lassen wir fallen. Angenommen, die durch  $A_1$  gehenden Strahlen der Schaar wären verschieden von  $A_1A_2$  und  $A_1A_3$ , dann müssten auf  $A_2A_3$  3 Berührungspunkte liegen, oder  $A_2A_3$  wäre ein 3 facher Strahl der  $F^3$ , was unmöglich ist. Also bleibt uns noch der Fall, dass  $A_2A_3$  eine Doppeltangente und eine der anderen Seiten, etwa  $A_1A_3$  einfacher Strahl der  $F^3$  ist. Dann ist die Gleichung der Schaar

$$\xi_3^2 \cdot P + \xi_2 \cdot R = 0, \text{ da für } \xi_3 = 0$$

die übrigen Glieder  $\xi_3^2$  als Factor haben müssen. Infolge der Bedingung, dass die Schaar sich selbst entspricht, findet man leicht  $R = P'$ ; also

$$\text{III.} \quad \xi_i P \pm \xi_k \cdot P' = 0$$

wenn  $i$  und  $k = 1, 2, 3$  sind.

Diese Gleichungen bieten kein besonderes Interesse, wol aber die Gegenschaaren von der Form I., zu deren näheren Untersuchung wir jetzt gehen wollen.

Zur Gegenschaar

$$\frac{\xi_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2 + \xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{n_3} + \varepsilon \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

gehören zuerst die Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$ , dann die Verbindungslinien des Punktes  $N(x_i = n_i)$  mit  $A_1, A_2$  und  $A_3$ , denn für  $\xi_1 = 0$  ist

$$\frac{\xi_2 \xi_3^2}{n_2} + \frac{\xi_3 \xi_2^2}{n_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_2 \xi_3 \left( \frac{\xi_2}{n_2} + \frac{\xi_3}{n_3} \right) = 0$$

d. h. durch  $A_1$  geht ausser  $A_1A_2$  und  $A_1A_3$  der Strahl

$$n_3 \xi_3 + n_2 \xi_2 = 0$$

Die für die 3 Ecken so erhaltenen Strahlen gehen durch den Punkt

$$n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + n_3 \xi_3 = 0$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = n_1 : n_2 : n_3$$

Der Sgp von  $N$  liefert die Berührungspunkte auf den Seiten des

Dreiecks. Da die  $\Gamma^3$  die Seiten des vollständigen Vierecks, gebildet aus  $A_1, A_2, A_3$  und  $N$  enthält, so muss sie geschrieben werden können

$$N \cdot u - \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdot v = 0$$

worin

$$N = n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + n_3 \xi_3 \text{ ist.}$$

Man findet

$$u = n_1 \xi_2 \xi_3 + n_2 \xi_3 \xi_1 + n_3 \xi_1 \xi_2$$

$$v = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3} - 2$$

also ist  $u = 0$  der zum Punkte  $N$  gehörende Kegelschnitt. Die Gleichung I lautet dann

$$(n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + n_3 \xi_3) \left( \frac{\xi_2 \xi_3}{n_1} + \frac{\xi_3 \xi_1}{n_2} + \frac{\xi_1 \xi_2}{n_3} \right) + \left( -\varepsilon + \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3} \right) \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

Für

$$\varepsilon = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3}$$

zerfällt also die  $\Gamma^3$  in das Strahlenbüschel  $N$  und dessen Ssg, oder die Tangenten des zugehörigen Kegelschnitts:

$$n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + n_3 \xi_3 = 0$$

$$\frac{n_1}{\xi_1} + \frac{n_2}{\xi_2} + \frac{n_3}{\xi_3} = 0$$

Wir betrachten die Leitcurve der Gegenschaar I, d. h. den Ort der Schnittpunkte der in der Schaar enthaltenen Ssg. Schreibt man I. nach Division  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_2} + \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{\xi_2}{\xi_1} + \varepsilon = 0$$

und benutzt

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{x_2 x_3}$$

so erhält man sofort

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \frac{x_1}{n_1} (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_2}{n_2} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) \\ + \frac{x_3}{n_3} (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - \varepsilon x_1 x_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

Die Leitcurve von I. ist also eine Curve 3ter Ordnung; sie geht durch die Mittelpunkte  $D_1 D_2 D_3$  der Dreiecksseiten, durch die  $\infty$  fernen Punkte der Seiten, durch die Schnittpunkte der Geraden  $A_1 N$ ,  $A_2 N$  und  $A_3 N$  mit den Gegenseiten des Dreiecks.

Zerfällt die  $\Gamma^3$  (s. oben), so wird aus  $\alpha$ )

$$\beta) \quad \frac{x_1}{n_1} (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_2}{n_2} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) \\ + \frac{x_3}{n_3} (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_1 n_2 n_3} x_1 x_2 x_3 = 0$$

oder nach einigen Veränderungen

$$\gamma) \quad (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \left[ \frac{x_1}{n_1} (-x_1 + x_2 + x_3) + \frac{x_3}{n_3} (x_1 + x_2 - x_3) \right] \\ - \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{n_1 n_2 n_3} \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$$

Die Leitcurve schneidet also die Seiten des Dreiecks ausser in den  $\infty$  fernen Punkten in 6 Punkten eines dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  umgeschriebenen Kegelschnitts, die Gleichung ist

$$\delta) \quad \frac{x_1}{n_1} (-x_1 + x_2 + x_3) + \frac{x_2}{n_2} (x_1 - x_2 + x_3) + \frac{x_3}{n_3} (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

Die Umformung von  $\beta$ ) kann auch so geschehen, dass  $x_1 + x_2 - x_3$ , allgemein  $(x_1 \pm x_2 \pm x_3)$  als Factor des ersten Products erscheint, z. B.

$$\varepsilon) \quad (x_1 + x_2 - x_3) \left[ \frac{x_1}{n_1} (-x_1 + x_2 - x_3) + \frac{x_2}{n_2} (x_1 - x_2 - x_3) \right. \\ \left. + \frac{x_3}{n_3} (x_1 + x_3 + x_3) \right] - \frac{(x_1 + x_2 - x_3)^2}{n_1 n_2 n_3} \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$$

Die Betrachtung von  $\gamma$ ) lehrt uns, dass hier die Leitcurve zerfällt, wenn

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

ist, in die  $\infty$  ferne Gerade und den Kegelschnitt  $\delta$ ;  $\varepsilon$  aber und die analogen Gleichungen zeigen, dass dies auch stattfindet für

$$\zeta) \quad n_1 \pm n_2 \pm n_3 = 0$$

Es ist

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

die Bedingung dafür, dass der Punkt  $N$  auf der  $\infty$  fernen Geraden

$$x_1 + x_2 + x_3$$

liegt, wie schon gesagt wurde; der zugehörige Kegelschnitt  $\epsilon$  ist eine Parabel, denn bringt man ihn zum Schnitt mit

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und setzt

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

so wird

$$\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)^2 = 0$$

was zeigt, dass die  $\infty$  ferne Gerade Tangente und  $N$  ihr  $\infty$  ferner Punkt ist.

Da  $\beta$  der Ort der Schnittpunkte der Strahlen des Büschels  $N$  mit dem Ssg ist, so hat sich also ergeben:

„Die Strahlen eines Büschels  $N$  werden von ihren Seitensymmetriegeraden in den Punkten einer Curve 3ter Ordnung geschnitten, welche zerfällt, wenn  $N$  auf einer der sich selbst entsprechenden Geraden liegt, in diese Gerade und einen sie berührenden Kegelschnitt, welcher, dem von den 3 anderen sich selbst entsprechenden Geraden gebildeten Dreieck umgeschrieben ist. Im besonderen werden parallele Geraden von ihren Ssg in einer durch  $D_1 D_2 D_3$  gehenden Parabel geschnitten, deren Axe den Geraden parallel ist, und welche die von den Ssg umhüllten Parabel berührt.“

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt,  $v$  eine durch ihn gehende Gerade,  $v_1$  deren Ssg, und schneidet die zum Punkte  $P$  gehörende  $C^3 v_1$  ausser im Punkte  $vv_1$ , noch in den Punkten  $S$  und  $T$ , so sind die  $S$  und  $T$  die Ordnungspunkte der involutorischen Punktreiben, in welchen  $v_1$  von den Strahlen des Büschels  $P$  und deren Ssg geschnitten werden.

Wir kehren zu der nicht zerfallenden Gegenschaar zurück, deren Gleichung war

$$\eta) \quad \frac{\xi_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2 + \xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{n_3} + \epsilon \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

deren Leiteurve ist

$$\kappa) \quad \frac{x_1}{n_1} (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_2}{n_2} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) \\ + \frac{x_3}{n_3} (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - \varepsilon x_1 x_2 x_3 = 0$$

Diese  $C^3$  kann zerfallen, ohne dass die  $T^3(\eta)$  zerfällt, in einen Kegelschnitt und eine Gerade. Setzt man nämlich die linke Seite von

$$k = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

$$(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + \partial_1 x_2 x_3 + \partial_2 x_3 x_1 + \partial_3 x_1 x_2)$$

so erhält man

$$a_1 b_1 = -\frac{1}{n_1}, \quad a_2 b_2 = -\frac{1}{n_2}, \quad a_3 b_3 = -\frac{1}{n_3}$$

Berechnet man ferner die Coefficienten von  $x_2^2 x_3$  und  $x_3^2 x_2$ , so muss sein

$$a_3^2 \partial_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = a_2 n_2 + a_3 n_3$$

$$a_2^2 \partial_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = a_2 n_2 + a_3 n_3$$

woraus folgt

$$a_2^2 = a_3^2$$

Die Bedingung für das Zerfallen der  $C^3(k)$  ist also

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$$

Wir nehmen zuerst

$$a_1 = a_2 = a_3$$

dann wird

$$\partial_1 = \frac{n_2 + n_3}{a_1 n_2 n_3}, \quad -\varepsilon = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + a_3 \partial_3 = 2 \frac{n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2}{n_1 n_2 n_3}$$

Die Gleichung  $k$  lautet dann

$$\frac{x_1}{n_1} (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_2}{n_2} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_3}{n_3} (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) \\ + 2x_1 x_2 x_3 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \right) = 0$$

sie zerfällt in

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und

$$\lambda) \quad \frac{x_1}{n_1} (-x_1 + x_2 + x_3) + \frac{x_2}{n_2} (x_1 - x_2 + x_3) + \frac{x_3}{n_3} (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

Die letzte Gleichung stellt einen dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  umgeschriebenen Kegelschnitt dar. Die Gleichung der zugehörigen Gegenschaaer ist

$$\frac{\xi_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)}{n_1} + \frac{\xi_2(\xi_3^2 + \xi_1^2)}{n_2} + \frac{\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{n_3} - 2\xi_1\xi_2\xi_3\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\xi_1}{n_1}(\xi_2 - \xi_3)^2 + \frac{\xi_2}{n_2}(\xi_3 - \xi_1)^2 + \frac{\xi_3}{n_3}(\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

Sie enthält ausser den genannten Strahlen stets die  $\infty$  ferne Gerade als Doppeltangente.

„Es wird später bewiesen werden, dass die Aymptoten der Hyperbelen eines Kegelschnittbüschels eine solche  $T^3$  bilden.“

Die Leitcurve der Gegenschaaer  $n$  zerfällt, wenn

$$a_1 = \pm a_2 = \pm a_3$$

ist; berücksichtigen wir jetzt auch noch die negativen Zeichen. Mit den  $a_i$  wechseln die  $b_i$  ihr Vorzeichen, während die  $\delta_i$  ihre Zeichen behalten. Die Folge davon ist, dass der Kegelschnitt  $\lambda$  einem andern der 4 von den sich selbst entsprechenden Geraden gebildeten Dreiecken umschrieben sein muss. Im Falle, dass er auch noch die 4te sich selbst entsprechende Gerade berührt, zerfällt die Gegenschaaer, was oben bereits besprochen wurde.  $\lambda$  kann ferner zerfallen in 2 Geraden, so werden wir wieder auf Gegenschaaeren geführt, deren Leitcurve Geraden sind und zwar auf einen besonderen Fall des allgemeinen.

Fassen wir unsere Resultate zusammen:

Es giebt 2 Arten der Gegenschaaeren 3ter Classe mit  $\xi_i$  symmetrischen Gleichungen. Diejenigen der ersten Art sind die Paare von Ssg, deren Schnittpunkte auf einer Geraden liegen; zu der Geraden  $\xi_i = m_i$  gehört die Gegenschaaer

$$m_1 \xi_1(\xi_2^2 - \xi_3^2) + m_2 \xi_2(\xi_3^2 - \xi_1^2) + m_3 \xi_3(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$$

Die Gegenschaaeren der 2ten Art haben die Gleichung

$$\frac{\xi_1}{m_1}(\xi_2^2 + \xi_3^2) + \frac{\xi_2}{m_2}(\xi_3^2 + \xi_1^2) + \frac{\xi_3}{m_3}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \varepsilon \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0$$

Es sind bei constanten  $n_1, n_2, n_3$  die variablen  $\varepsilon$  die Strahlenbüschel 3ter Classe, welche in den 6 Seiten eines vollständigen

Vierseits und in den Berührungspunkten auf dreien von ihnen übereinstimmen. Die Leitcurve einer solchen  $T^3$  ist eine  $C^3$  mit der Gleichung

$$\sum \frac{x_i}{n_i} (-x_i^2 + x_i^2 + x^2) - \varepsilon x_1 x_2 x_3 = 0$$

Für constante  $n_i$  und variables  $\varepsilon$  sind es die  $C^3$  eines  $c^3$  Büschels. Die Gegenschaar zerfällt in ein gewöhnliches Strahlenbüschel  $N$  und deren Ssg, also  $I^2$  für

$$\varepsilon = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 n_2 n_3}$$

Die Leitcurve zerfällt, wenn

$$\varepsilon = -2 \left( \frac{1}{n_1} \pm \frac{1}{n_2} \pm \frac{1}{n_3} \right)$$

ist, in eine sich entsprechende und einem Kegelschnitt, welcher dem von den anderen sich selbst entsprechenden Geraden gebildeten Dreieck umgeschrieben ist. Die dazu gehörige Gegenschaar ist

$$\frac{\xi_1}{n_1} (\xi_2 - \xi_3)^2 \pm \frac{\xi_2}{n_2} (\xi_3 - \xi_1)^2 \pm \frac{\xi_3}{n_3} (\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

Gegenschaar und Leitcurve zu gleicher Zeit, wenn  $N$  auf eine der sich selbst entsprechenden Geraden, also auf der  $\infty$  fernen Geraden oder auf eine Seite des Dreiecks  $D_1 D_2 D_3$  liegt. Die Gleichungen sind dann

$$n_1 \xi_2 \xi_3 \pm n_2 \xi_3 \xi_1 \pm n_3 \xi_1 \xi_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{n_1} (-x_1 + x_2 + x_3) \pm \frac{x_2}{n_2} (x_1 - x_2 + x_3) \pm \frac{x_3}{n_3} (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

$$n_1 \pm n_2 \pm n_3 = 0$$

Besonders bemerkenswert von den dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  umgeschriebenen Kegelschnitten (Gl.  $\lambda$  S. 31) ist der Feuerbach'sche Kreis, für welchen  $N$  auf den Höhenschnitt

$$\left( n_i = \frac{1}{\cot A_i} \right)$$

fällt. Seine Gleichung lautet also

$$x_1 \cot A_1 (-x_1 + x_2 + x_3) + x_2 \cot A_2 (x_1 - x_2 + x_3) + x_3 \cot A_3 (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

und die dazu gehörige Gegenschaar ist

$$\cot A_1 \xi_1 (\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2 \xi_2 (\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3 \xi_3 (\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

Diese wichtige Gegenschaar werden wir im Abschnitt 3 besonders behandeln.

### 7. Die Seitensymmetriegeraden als Asymptoten der dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umgeschriebenen Hyperbeln.

Die Geraden  $p$  und  $q$  mit ihrem Ssg  $p'$  und  $q'$  mögen dargestellt sein durch

$$\sum p_i x_i = 0; \quad \sum q_i x_i = 0; \quad \sum \frac{x_i}{p_i} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{x_i}{q_i} = 0$$

Dann ist

$$\alpha) \quad \sum p_i x_i \sum \frac{x_i}{p_i} - \sum q_i x_i \sum \frac{x_i}{q_i} = 0$$

ein Kegelschnitt, welcher durch die Ecken des Vierecks  $ppq'q'$  geht. Die Quadrate der Coordinaten fallen weg, und seine Gleichung ist

$$\beta) \quad x_2 x_3 \left[ \frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} - \left( \frac{q_2}{q_3} + \frac{q_3}{q_2} \right) \right] + x_3 x_1 \left[ \frac{p_3}{p_1} + \frac{p_1}{p_3} - \left( \frac{q_3}{q_1} + \frac{q_1}{q_3} \right) \right] \\ + x_1 x_2 \left[ \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} - \left( \frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1} \right) \right] = 0$$

und ist also auch dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschrieben.

Ist nun  $q$  eine sich selbst entsprechende Ssg. also

$$q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 1$$

so wird aus Gl.  $\alpha$ )

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) \left( \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} \right) = (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^2$$

d. h. die Geraden  $p$  und  $p'$  sind Tangenten des Kegelschnitts und ihre Berührungsehne die Gerade

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$$

Also haben wir den Satz:

„Wenn 2 beliebige Seitensymmetriegeraden eine sich selbst entsprechende Gerade in den Punkten  $U$  und  $V$  schneiden, so berührt „der Kegelschnitt  $A_1 A_2 A_3 UV$  jene Geraden.“

Da es 4 sich selbst entsprechende Ssg giebt, so folgt durch Parallelprojection allgemein:

Durch die 3 Punkte  $A_1 A_2 A_3$  können 4 die festen Geraden  $p$  und  $p'$  berührende Kegelschnitte gelegt werden; die Verbindungslinien zusammengehöriger Berührungspunkte schneiden sich paarweise auf den Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ ; es sind die sich selbst entsprechenden Geraden in dem involutorischen Liniensystem, das durch das Grunddreieck  $A_1 A_2 A_3$  und  $p$  und  $p'$  als entsprechende Geraden gegeben ist. Jene Kegelschnitte sind reell, wenn das Liniensystem reelle sich selbst entsprechende Geraden besitzt.

Für die  $\infty$  ferne, als Ssg sich selbst zugeordnete Gerade folgt nun:

„Je zwei Seitensymmetriegeraden sind die Asymptoten einer dem „Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschriebenen Hyperbel.“

Die Gleichung einer solchen folgt aus  $\beta$ ) für

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

$$\gamma) p_1(p_2 - p_3)^2 \cdot x_2 x_3 + p_2(p_3 - p_1)^2 \cdot x_3 x_1 + p_3(p_1 - p_2)^2 x_1 x_2 = 0$$

Umgekehrt sind also die Asymptoten einer dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschriebenen Hyperbel Ssg für das Dreieck  $A_1 A_3 A_3$  wie bekannt. Angenommen, die Hyperbel  $\gamma$  ginge durch den Punkt

$$N(x_i = n_i)$$

wenn man dann  $\gamma$  durch  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$  dividirt, so wird

$$\delta) \frac{p_1}{n_1} (p_2 - p_3)^2 + \frac{p_2}{n_2} (p_3 - p_1)^2 + \frac{p_3}{n_3} (p_1 - p_2)^2 = 0$$

Vergleicht man dies mit der S. 306 gegebenen Gleichung einer Gegenschaar, deren Leitcurve ein dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  umgeschriebener Kegelschnitt war, so findet man vollständige Uebereinstimmung.

Die Grössen  $p_i$  sind nämlich die Liniencoordinaten der Geraden  $p$  und  $p'$ ; also gilt der Satz:

„Die Asymptoten der durch die festen Punkte  $A_1 A_2 A_3 N$  gehenden Hyperbeln bilden ein Strahlenbüschel 3ter Classe  $\delta$ . Die „Mittelpunktscurve des Kegelschnittbüschels ist“

$$\frac{x_1}{n_1} (-x_1 + x_2 + x_3) + \frac{x_2}{n_2} (x_1 - x_2 + x_3) + \frac{x_3}{n_3} (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

Wir wollen jetzt die dem Dreieck umgeschriebenen Hyperbeln mit gleichen Asymptotenwinkeln untersuchen. Wird der eine Winkel, den die Geraden

$$\text{und} \quad \begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 &= 0 \\ p_1' x + p_2' x_2 + p_3' x_3 &= 0 \end{aligned}$$

bilden, mit  $\theta$  bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\sin \theta = \pm \frac{\Sigma(p_j p_i' - p_i p_j')}{\Sigma \left( \frac{p_i p_i' \sin^2 A_i}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3} \right) - \Sigma(p_j p_i' + p_i p_j') \cot A_k}$$

positiv oder negativ zu wählen, je nachdem  $\theta$  spitz oder stumpf ist.

Da hier

$$p_i = \frac{1}{p_i'}$$

ist, so erhält man, wenn man

$$\frac{\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \sin^2 A_3}{\sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3} = U \text{ setzt,}$$

$$\delta) \quad \pm \tan \theta \cdot \left[ U \cdot \left[ \left( \frac{p_3}{p_2} + \frac{p_2}{p_3} \right) \cot A_1 + \left( \frac{p_1}{p_3} + \frac{p_3}{p_1} \right) \cot A_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \right) \cot A_3 \right] \right] = \left( \frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_2} \right) + \left( \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_1}{p_3} \right) + \left( \frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1} \right)$$

Es ist nun

$$U = 2(\cot A_1 + \cot A_2 + \cot A_3)$$

erner die rechte Seite von  $\delta$

$$= \frac{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)}{p_1 p_2 p_3}$$

Ersetzt man die  $p_i$  als Linienkoordinaten der Geraden, von denen wir ausgingen, durch  $\xi_i$  und multiplicirt mit  $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3$ , so erhält man aus  $\delta$  die Gleichung

$$\varepsilon) \quad (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1) \mp \tan \theta \cdot [\cot A_1 \cdot \xi_1(\xi_2 - \xi_3)^2 \\ + \cot A_2 \xi_2(\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3 \xi_3(\xi_1 - \xi_2)^2] = 0$$

Der Winkel  $\theta$  muss hierbei, ebenso wie die Wkl.  $A_i$  in einer bestimmten Drehungsrichtung gemessen werden, etwa im Sinne des sich drehenden Uhrzeigers. Dann, enthält  $\varepsilon$  erstens nach Voraussetzung alle Geraden der Ebene, welche von ihren Ssg unter dem Wkl.  $\theta$  geschnitten werden.  $\varepsilon$  enthält aber zweitens auch diese schneidenden Geraden. Für sie hat man nur das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen; denn wenn  $m$  eine Gerade von  $\varepsilon$ ,  $m'$  ihre Ssg, und

$$mm' = \theta \text{ ist, so ist } m'm = 180^\circ - \theta$$

Setzt man

$$180^\circ - \theta = \theta'$$

so muss die Gleichung aller Geraden  $m'$  die Form haben (wenn man für den ersten Fall das obere Zeichen wählt)

$$\text{oder } (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1) - \tan \theta' \cdot f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

$$(\xi_1 - \xi_2) \cdot (\xi_2 - \xi_3) \cdot (\xi_3 - \xi_1) + \tan \theta \cdot f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

was sich bewahrheitet, wenn man in  $\varepsilon$  die  $\xi_i$  durch  $\frac{1}{\varepsilon}$  ersetzt. Beide Gleichungen zusammen repräsentieren die gesuchten Asymptoten. Man hat also den Satz:

„Die Asymptoten der dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  umgeschriebenen „Hyperbeln mit gleichen Asymptotenwinkeln bilden im allgemeinen „zwei Strahlenbüschel 3ter Classe, der Art, dass die beiden Asymp- „toten jeder Hyperbel entsprechende Seitensymmetriegeraden in den „Büscheln sind.“

Für  $\theta = 90^\circ$  muss der Factor von  $\tan \theta$  in  $\varepsilon$  verschwinden, also ist die Bedingung für die sich rechtwinklig schneidenden Asymptoten

$$\cot A_1 \cdot \xi_1(\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2 \cdot \xi_2(\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3 \cdot \xi_3(\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

es sind die Asymptoten der gleichseitigen, dem Dreieck  $A_1A_2A_3$  umgeschriebenen Hyperbeln. Die Werte

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$$

erfüllen die Gleichung und geben die  $x$  ferne Gerade, welche, wie bekannt, als auf sich selbst senkrecht betrachtet werden kann.

Die Mittelpunkte der betrachteten Hyperbeln, deren Asymptoten gleiche Winkel bilden, liegen bekanntlich auf einer Curve 4ter Ordnung (s. u. A. Bücking, a. a. O. 8. 13). Wir wollen mit Hilfe des Vorhergehenden die Gleichung dieser  $C^4$  ableiten. Die Asymptoten einer Hyperbel seien

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0$$

Daraus folgen die Coordinaten des Mittelpunkts

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1(p_2^2 - p_3^2) : p_2(p_3^2 - p_1^2) : p_3(p_1^2 - p_2^2)$$

Man setze

$$x_1 = p_1(p_2^2 - p_3^2)$$

und hat dann

$$\eta) \quad x_1 + x_2 + x_3 = p_1 p_2 p_3 \left[ \left( \frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_2} \right) + \left( \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_1}{p_3} \right) + \left( \frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1} \right) \right]$$

ferner ist

$$\frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{x_2 x_3}$$

also

$$\frac{p_2}{p_3} - \frac{p_3}{p_2} = \frac{\varphi}{x_2 x_3}$$

wenn

$$\varphi^2 = - (x_1 + x_2 + x_3) (-x_1 + x_2 + x_3) (x_1 + x_2 - x_3)$$

ist, also

$$\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_1}{p_3} = \frac{\varphi}{x_3 x_1}$$

$$\frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2}{p_1} = \frac{\varphi}{x_1 x_2}$$

Demnach aus  $\eta$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \varphi$$

oder

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{\varphi}$$

Wir haben jetzt die Mittel  $\varepsilon$  umzuformen. Wenn

$$\sum p_i x_i = 0$$

eine Gerade ist, deren Linienkoordinaten  $\varepsilon$  genügen, so hat man, indem man auf  $\delta$  zurückgreift,

$$p_1(p_2^2 - p_3^2) + p_2(p_3^2 - p_1^2) + p_3(p_1^2 - p_2^2)$$

$$\mp \tan \theta [\cot A_1 \cdot p_1 p_2 - p^2]^2 + \dots = 0$$

Es ist aber

$$p_1(p_2 - p_3)^2 = p_1 p_2 p_3 \left( \frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2} - 2 \right)$$

$$= - \frac{x_1 x_2 x_3}{\varphi} \cdot \frac{(x_1 + x_2 + x_3) (-x_1 + x_2 + x_3)}{x_2 x_3}$$

demnach

$$x_1 + x_2 + x_3 \pm \tan \theta \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\varphi}$$

$$\cdot [\cot A_1 x_1 (-x_1 + x_2 + x_3) + \dots] = 0$$

Diese Gleichung zerfällt in

$$x_1 + x_2 \mp x_3 = 0$$

und

$$[\cot A_1 x_1 (-x_1 + x_2 + x_3) + \dots] \pm \varphi \cot \theta = 0$$

setzt man den Wert von  $\varphi$  ein und hebt aufs Quadrat, so ist

$$[\sum \cot A_i \cdot x_i (-x_i + x_j + x_k)]^2 + \cot^2 \theta (x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

„Diese Curve 4ter Ordnung enthält also die Mittelpunkte der dem „Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschriebenen Hyperbeln mit gleichen Asymp- „totenwinkeln  $\theta$ .“

Die Curve hat  $D_1, D_2, D_3$  zu Doppelpunkten und geht durch die  $2 \infty$  fernen imaginären Kreispunkte.

Hier fällt der Unterschied zwischen  $\theta$  und  $(180^\circ - \theta)$ , welchen wir in  $\varepsilon$  und  $\vartheta$  wahrnahmen, weg, wie zu erwarten war.

Sie zerfällt für  $\theta = 90^\circ$  und wir kommen mit

$$\sum \cot A_i \cdot x_i \cdot (-x_i + x_j + x_k) = 0$$

auf den Feuerbach'schen Kreis zurück; ferner treten für  $\theta = 0^\circ$  statt der Curve die 4 als Ssg sich selbst entsprechenden Geraden  $\varphi^2 = 0$  auf.

### 8. Normale Seitensymmetriegeraden oder die Fusspunktlinien des Dreiecks; die Curve von Steiner.

Die Gesamtheit der zu einander normalen Ssg bildet, wie wir abgeleitet haben, ein Strahlenbüschel 3ter Classe, dessen Gleichung ist

$$\cot A_1 \xi_1 (\xi_2 - \xi_3)^2 + \cot A_2 \xi_2 (\xi_3 - \xi_1)^2 + \cot A_3 (\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

Durch jeden Punkt der Ebene gehen also höchstens 3, wenigstens aber eine dieser Geraden. Sie sind die Strahlen einer Gegenschaa, deren Leitcurve der Feuerbach'sche Kreis des Dreiecks ist mit der Gleichung:

$$\cot A_1 x_1 (-x_1 + x_2 + x_3) + \cot A_2 x_2 (x_1 - x_2 + x_3) + \cot A_3 x_3 (x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

d. h. der Schnittpunkt von je 2 aufeinander senkrecht stehenden Ssg liegt auf dem Feuerbach'schen Kreise.

Diese Geraden sind auch die Asymptoten der dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln, ferner die Scheiteltangenten der dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  und endlich die Axen der dem Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  eingeschriebenen Parabeln. Auch sieht man leicht, dass sie die Fusspunktlinien oder Simsongeraden des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  sind; denn man erhält eine solche, wenn man von einem beliebigen Punkt  $P$  des Kreises  $A_1 A_2 A_3$  auf die Dreiecksseiten die Lote fällt und deren Fusspunkte, die auf einer Geraden  $p$  liegen, verbindet. Denn  $p$  ist nichts anders als die Scheiteltangente der dem Dreieck eingeschriebenen Parabel  $\pi$  mit dem Brennpunkte  $P$ .

So sehen wir, dass die zu einander normalen Ssg eine vielseitige und deshalb wichtige Rolle in der Geometrie des Dreiecks spielen. Viele Mathematiker haben sich mit ihnen beschäftigt, seitdem Steiner nachgewiesen hatte, dass sie eine Curve der 3. Classe und 4ter Ordnung mit 3 Spitzen (die sog. Steiner'sche Curve) umhüllen. Steiner gab eine Reihe von Sätzen ohne Beweis im 52. Band von Crelle's Journal. Schröter behandelte im 54. Band die Sache synthetisch. Er betrachtet die Fpl. als Verbindungslinien der Punkte des F. Kreises und deren  $\infty$  fern liegenden Winkelgegenpunkte für das Dreieck  $D_1 D_2 D_3$ . „Durch einen Punkt  $a$  des Kreises geht ein fester Strahl  $aa_1$  und ein beweglicher Strahl  $ax$ , welcher in den  $x$  den Kreis zum andern Male trifft. Trägt man den Winkel  $xaa_1$  an den Schenkel  $aa_1$  entgegengesetzt an, so dass der andere Schenkel  $ax_1$  dieselbe Neigung zu  $aa_1$  hat, wie  $ax$  zu  $aa_1$  und zieht dann durch den Punkt  $x$  eine Parallele zu  $ax_1$ , so wird dieselbe eine Curve 3ter Classe umhüllen, während der Punkt  $x$  den Kreis durchläuft“. Von dieser Definition, welche das Dreieck  $D_1 D_2 D_3$  bei Seite lässt, ausgehend, entwickelt er in überaus klarer Weise die Hauptfragen; doch verallgemeinert er das Problem, indem er an die Stelle des Kreises und der  $\infty$  fernen Geraden eine beliebige Punktreihe 2ter und 1ter Ordnung setzt.

8 Jahre später (1865) erhob sich unter englischen Mathematikern ein Wettstreit, die Fusspunktlinien analytisch zu untersuchen. Im 7., 8. und 9. Bande des Quarterly Journal of pure and applied Mathematics findet man eine Reihe von Aufsätzen von Green, Ferrers, Cayley, Walton über unsere Geraden. Green gab die Gleichung der Fusspunktlinie des Punktes  $(\alpha\beta\gamma)$  für das Dreieck  $ABC$  in trimetrischen Coordinaten  $(x, y, z)$  in der Form

$$X\lambda(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) + Y\mu(\mu - \nu)(\mu - \lambda) + Z\nu(\nu - \lambda)(\nu - \mu) = 0$$

(worin  $X = x \cdot \sin A \cdot \tan A$ ,  $\lambda = \frac{\cos A}{\alpha}$ ) und die Gleichung der Enveloppe; doch fügt er hinzu: I am forced to conclude for my part that the easiest method of obtaining the desired eliminant is the straight-formed but unsymmetrical course. Ferrers untersuchte mit Hilfe von cartesischen Coordinaten und erhält für die Enveloppe

$$p = \frac{1}{4}a \sin 3\psi$$

worin  $p$  das Lot vom Mittelpunkt des F. Kreises (Radius =  $\frac{1}{4}a$ ) auf eine Fpl, und  $\psi$  deren Neigungswinkel zu einer festen Axe bedeuten, Im 8. Band füllte Cayley die von Green gelassene Lücke und giebt mit Hilfe Hesse'scher Formeln a symmetrical method zur Ableitung der Tangentialgleichung und der eingehüllten Curve in der Form

$$\frac{1}{(x+y+z)^2} \text{recip} \{a\xi(\eta - \zeta)^2 + \dots\} = 0$$

Dann bestimmte er durch mühsame Rechnungen die Coefficienten, um bei einer sehr complicirten Gleichung zu endigen; s. auch den Nachtrag dazu in demselben Bande S. 75.

Im 9ten Bande gab auch Walton die Gleichung der eingehüllten Curve

$$\frac{a}{L} + \frac{b}{M} + \frac{c}{N}$$

worin  $a = \tan A$ ;  $L$ ,  $M$  und  $N$  homogene Functionen 2ten Grades in den laufenden Coordinaten der Curve bedeuten.

Ferrers (Band IX, S. 153) berechnete sie für das Dreieck  $W_1 W_2 W_3$  (s. F. 3.) und erhielt

$$(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)^2 - 4x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

was einfacher geschrieben werden kann als

$$\frac{1}{x_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x_3^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Bezogen auf das Dreieck  $v_1 v_2 v_3$  (s. F. 3.) als Grunddreieck giebt jene Gleichung mittelst der Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= 7x_1' + x_2' + x_3' \\ x_2 &= x_1 + 7x_2' + x_3' \\ x_3 &= x_1 + x_2' + 7x_3' \end{aligned}$$

$$(x_1+x_2+x_3)^4 - 48(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2) + 8(x_1+x_2+x_3)^2 \\ \cdot (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) + 192(x_1+x_2+x_3)x_1x_2x_3 = 0$$

Noch eine Gleichung der St. Curve haben wir anzugeben; man hat gefunden, dass die St. Curve eine nicht transcendente Hypercykloide ist, und als solche ist sie von Painjoin, Serret, Salmon, Eckhardt und Kieper behandelt worden. Ihre Gleichung ist nach Salmon, wenn man (s. F. 3)  $Ou_1 = r$  setzt und  $Ov_1$  als  $y$  Axe annimmt, in rechth. Coordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 - 8ry^3 + 24rx^2y + 18r^3(x^2 + y^2) = 27r^4$$

So sehen wir, dass die Fpl. und die von ihnen umhüllte Steiner'sche Curve vielfach untersucht worden sind; auch eine elementare Behandlung liegt vor von Perlewitz (Progr. 1890, Nr. 99, Sophiengymnasium zu Berlin) und hier findet man auch auf der 2. Seite einen guten Litteraturnachweis.

Wir betrachten es noch als unsere Aufgabe dem Leser die Fusspunktlinien in ihrer Gesamtheit zur Anschauung zu bringen.

In sehr einfacher Weise geschieht dies, wenn man sie, an die Schröter'sche Betrachtung anknüpfend, als Verbindungslinien der Punkte des Feuerbach'schen Kreises mit deren  $\infty$  fern liegenden Winkelgegenpunkten (f. d. Dreieck  $D_1D_2D_3$ ) ansieht. Nur werden wir anstatt der  $\infty$  fern Punkte ihre 2ten Schnittpunkte mit dem Kreise benutzen und hierdurch eine Vereinfachung erzielen. Angenommen  $F$  und  $F_1$  seien 2 Punkte des Kreises, und  $f$  und  $f_1$  die durch sie gehenden Fusspunktlinien, welche  $F$  und  $F_1$  mit deren Winkelgegenpunkten verbinden; dann ist der spitze Winkel  $ff_1 =$  dem spitzen Peripheriewinkel über  $FF_1$ . Denn zieht man etwa  $D_1F_1$  und  $D_1F$  und durch  $D_1$  zu  $f$  und  $f_1$  die Parallelen, so erhält man 2 Paare Winkelgegengeraden, deren Winkel entgegengesetzt gleich sind. Angenommen nun  $f$  und  $f_1$  schnitten den Kreis zum 2ten Male in  $G$  und  $G_1$ , so verbinde man  $F$  mit  $G_1$ . Da Wkl.  $G_1 =$  Wkl.  $ff_1$ , so ist Wkl.  $GFG_1$  (oder sein Supplement) doppelt so gross, als jener, und Bogen  $GG_1 = 2$  Bogen  $FF_1$  aber mit entgegengesetzten Drehungssinn. Denkt man sich  $F$  und  $G$  den Bogen  $FG$  durchlaufend, so werden sie in einem Punkt  $U_1$  zusammenfallen, so dass

$$\widehat{U_1G} = 2 \widehat{U_1F} \text{ ist.}$$

Also können wir uns die Fusspunktlinien vorstellen als die Verbindungslinien zweier Punkte des F. Kreises, welche von  $U_1$  ausgehend den Kreis in entgegengesetzten Richtungen so durchlaufen, dass die Geschwindigkeit des einen ( $G$ ) doppelt so gross ist, als die

des anderen ( $F$ ). Hieraus lassen sich die meisten Sätze über unsere Geraden mit Leichtigkeit ableiten; z. B. gehen durch  $F$  noch 2 andere Fpl.  $FF_1$  und  $FF_2$ , denn da  $G$  den Kreis 2 mal zu durchlaufen hat, um alle Fpl. zu liefern, so geht er 2 mal über  $F$  und liefert 2 neue Fusspunktlinien, für welche  $F$  jetzt ein  $G$  Punkt ist. Jene stehen senkrecht auf einander, da dem Kreise, welchen  $G$  von einem Durchgang durch  $F$  zum anderen zu durchlaufen hat, ein Halbkreis  $F_1F_2$  entspricht. Auch steht  $FG$  senkr. auf  $F_1F_2$ , denn wenn  $G$  nach dem  $F$  wandert, so geht  $F$  bis zum Halbirungspunkt  $F_1$  von  $GF_1$ , ebenso muss  $F_2$  den anderen Segmentbogen  $FG$  halbieren. Wenn  $F$  einmal den Kreis durchläuft, muss es mit  $G$  ausser in  $U_1$  offenbar noch 2 mal zusammenfallen ( $U_2$  und  $U_3$ ), so dass

$$U_1 U_2 = U_2 U_3 = U_3 U_1 = 120^\circ$$

ist. Es sind dies die Berührungspunkte der Steiner'schen Curve mit dem Kreise. Jedes Segment  $FG$  wird durch einen der Punkte  $U$  gedrittelt, z. B. auch die Bögen  $D_1H_1$ ,  $D_2H_2$  und  $D_3H_3$ , wenn die  $H$  Punkte die Fusspunkte der Höhen im Dreieck  $A_1A_2A_3$  bedeuten, da die Höhen und die Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  zu den Fpl. gehören. Lässt man zwei benachbarte Fpl.  $FG$  und  $F_1G_1$  zusammenfallen, so muss, da  $\text{Wkl. } ff_1 = \text{Wkl. } G_1$  ist, der Schnittpunkt  $T$  jener auch in der Grenzlage so fallen, dass er von  $F$  ebenso weit entfernt ist als  $G$  von  $F$ .  $T$  ist dann der Berührungspunkt der Fusspunktlinie  $FG$  mit der St. Curve. So könnte man in der Ableitung von bekannten Sätzen fortfahren; es sei nur darauf hingewiesen, dass die Aufgabe bei gegebenem  $F$  Kreise und einer Fpl. die übrigen zu zeichnen und die Berührungspunkte der umhüllten Curve zu bestimmen, im Gesagten eine sehr einfache Lösung findet; man vergleiche damit die von Cremona gegebene (s. Perlewitz S. 9).

Auch die Gleichung von Ferrers ergibt sich hier leicht. Denn nennt man  $L$  das Lot von  $O$  auf  $FG$  und

$$\text{Wkl. } FNU = 2\psi'$$

so ist

$$\text{Wkl. } UOS = 4\psi' \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } FOL = 3\psi'$$

also

$$OL = OF \cdot \cos 3\psi'$$

Man nehme also  $OA$  senkr. auf  $OF$  als feste Axe, setze  $OL = p$  und  $OF = \frac{1}{2}a$  und nenne  $\text{Wkl. } LOA = \psi$ ; dann ist

$$\psi' + \psi = 40^\circ \quad \text{und} \quad p = \frac{1}{2}a \sin 3\psi$$

Wir wollen zum Schluss die Lage der 3 oben definirten Punkte  $U$  zu den Punkten  $D_1D_2D_3$  feststellen. Wir denken uns auf dem

Bogen  $D_3D_2$  den Punkt  $F$  (s. Fig. 4) und die durch ihn gehende Fpl.  $FG$ , so dass

$$\widehat{GU} = 2\widehat{UF}$$

ist. Wir ziehen zu  $D_3D_2$  die parallele Sehne  $FN$  und  $D_1N$ . Dann liegt der Wgp. von  $U$   $\infty$  weit auf  $D_1N$ , also ist

$$FG \parallel ND_1$$

Man setze

$$\widehat{ND_2} = \delta = \widehat{FD_3}$$

und die Wkl. des Dreiecks gleich  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ). Dann ist

$$\widehat{FN} = 2\alpha_1 - 2\delta = \widehat{D_1G}; \quad \widehat{D_2G} = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 + 2\delta$$

$$FG = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 + 3\delta; \quad FU = \delta - 2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}$$

Wir berechnen  $UD_1, UD_2$  und  $UD_3$  ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ):

$$\delta_3 = \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2}{3}$$

$$\delta_1 = \frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2}{3}$$

$$\delta_2 = \frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3}{3}$$

also ist deren Summe

$$= 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi$$

Denken wir uns nun im Kreise  $D_1D_2D_3$  einen beliebigen Radius  $OR$  ( $= 1$ ) als Axe von Aequipollenzen und Bogen  $RU$ , in der Richtung der früheren gemessen,  $= u$  gesetzt, so ist

$$OU = \varepsilon^u, \quad OD_1 = \varepsilon^{(\delta_1+u)}, \quad OD_2 = \varepsilon^{(\delta_2+u)}, \quad OD_3 = \varepsilon^{(\delta_3+u)}$$

also

$$OD_1 \cdot OD_2 \cdot OD_3 = \varepsilon^{(\delta_1+\delta_2+\delta_3+3u)}$$

und da

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi \quad \text{und} \quad \varepsilon^{2\pi} = 1$$

so ist

$$OD_1 \cdot OD_2 \cdot OD_3 = \varepsilon^{3u} = OU^3$$

also

$$OU = \sqrt[3]{OD_1 \cdot OD_2 \cdot OD_3}$$

Diese Wurzel hat 3 Werte, welche bekanntlich um  $120^\circ$  von einander getrennt sind, und liefert uns die Strecken  $OU_1, OU_2$  und

$OU_3$ . Wir haben also den Satz: „Für jeden Radius des Feuerb. „Kreises als Axe von Aequipollenzen ergeben sich die Radien „nach dem Berührungspunkte der Steiner’schen Curve als Wurzel-  

$$\text{„werte von } \sqrt[3]{OD_1 \cdot OD_2 \cdot OD_3}$$
“.

Dieser Satz gilt nicht allein für die Punkte  $D$ , sondern auch für beliebig viele andere Tripel von Punkten des F. Kreises, nämlich den Seitenmittelpunkten aller Dreiecke, deren Seiten und Höhen Fusspunktlinien sind.

Da  $UG = 2UF$  ist (s. d. Fig.); so ist, wenn man die Axe der Aequipollenzen nach  $OF$  legt

$$OU = \sqrt[3]{OG}$$

Auch diese Gleichung liefert uns 3 Punkte, welche Teilpunkte der in derselben Richtung gemessenen Bögen  $FG$ ,  $FG + 2\pi$ ,  $FG + 4\pi$  sind (s. diese Teilung, schon angewandt bei van Schooten in seinen coment. zur geometria des Descartes, Ausgabe 1683, p. 345 ff., de cubicarum aequationum resolutione).

Endlich folgt aus

$$OU = \sqrt[3]{OD_1 \cdot OD_2 \cdot OD_3}$$

und

$$OU = \sqrt[3]{OG}$$

$$OG = OD_1 \cdot OD_2 \cdot OD_3$$

gültig für die Axe  $OF$ . Sie bestimmt zum Punkt  $F$  den zugehörigen Punkt  $G$  und kann als Definitionsgleichung der Fusspunktlinien ( $FG$ ) für die Rechnung in Aequipollenzen angesehen werden.

## XIII.

Ueber eine  
Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma  
mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck.

Von

Dr. **Dziobek,**

Professor in Charlottenburg.

In einer Abhandlung (gesammelte Werke, Bd. III, Nachlass pag. 481--490) hat Gauss für ein gegebenes rechtwinklig sphärisches Dreieck ein Fünfeck besonderer Art, nämlich ein solches, dessen fünf Diagonalen sämtlich Quadranten sind — von ihm Pentagramma mirificum genannt — angegeben, aus dessen Betrachtung unter Anderen sich auf der Stelle die merkwürdigen Neper'schen Analogien ergeben. Der Versuch, diese Figur so zu erweitern, dass sie auf irgend ein gegebenes schiefwinkliges sphärisches Dreieck angewendet werden kann, führt zwar zu einer grösseren Zahl von Punkten und Linien, aber doch zu einem Netz von sehr übersichtlichem geometrischen Gepräge, aus dessen analytischer Untersuchung sich recht eigentümliche Formeln für die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks ergeben.

Man gelangt hierzu wie folgt. Gegeben sei das sphärische Dreieck  $ABC$ . Man construire das Polardreieck  $A'B'C'$ , so dass  $A'$  Pol von  $BC$ ,  $B'$  von  $CA$ ,  $C'$  von  $AB$  ist (Pol eines Kreisbogens oder eines Kreises soll hier ein Punkt heissen, der zu jenem die Lage von Pol zu Aequator hat. Im übrigen mag es gleichgültig sein, welchen von beiden Polen man nimmt, da hier zwei gegenüberlie-

gende Punkte im wesentlichen einander ersetzen und daher als ein Punkt angesehen werden können). Die drei grössten Kreise durch  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sind dann die Höhen sowol des Dreiecks  $ABC$  als auch des Dreiecks  $A'B'C'$  und schneiden sich in einem Punkte  $D$ . Das gegebene Dreieck und sein Poldreieck liegen daher perspectivisch und befinden sich die drei Schnittpunkte  $EFG$  der Seiten  $BC$  und  $B'C'$ ,  $CA$  und  $C'A'$ ,  $AB$  und  $A'B'$  in einem grössten Kreise.

Bisher sind 10 Punkte  $ABC$ ,  $A'B'C'D$ ,  $E$ ,  $FG$  und 10 Kreise genannt worden. Sie bilden eine in sich geschlossene Figur, derart, dass durch jeden Punkt drei Kreise gehen, und auf jedem Kreise drei Punkte liegen. Ausserdem ist diese Figur sich selbst polar, da jedem der zehn Punkte einer der zehn Kreise als Aequator entspricht. Doch tritt ihr Charakter fester hervor bei einer zweckmässigen Bezeichnung ihrer Punkte (und Kreise). Hierzu wählt man am einfachsten 5 Indices 1, 2, 3, 4, 5 und giebt jedem Punkte zwei Indices, so dass z. B. der Punkt  $A$  die Indices 1 und 4 erhalten und von nun an  $P_{14}$  oder  $P_{41}$  heissen möge. Dann sollen die neuen Bezeichnungen folgende werden:

$A$	$B$	$C$ ,	$A'$	$B'$	$C'$	$D$	$E$	$E$	$G$
$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{5,1}$	$P_{5,2}$	$P_{5,3}$	$P_{4,5}$	$P_{2,3}$	$P_{3,1}$	$P_{1,2}$

Die Indices sind so verteilt, dass je zwei Punkte mit einem gleichen Index, wie z. B.  $P_{23}$  und  $P_{13}$  auf einem der zehn Kreise liegen. Auf demselben Kreise liegt auch der Punkt  $P_{1,2}$ . Er möge  $l_{4,5}$  oder  $l_{5,4}$  genannt werden u. s. w., so dass jeder Kreis durch die drei Punkte geht, welche mit ihm keinen Index gemein haben.

Sämtliche „Diagonalen“ dieser Figur, z. B.  $P_{12}—P_{24}$  sind Quadranten, und desgleichen schneiden sich in jedem „Diagonalpunkte“, wie  $l_{12}$ ,  $l_{34}$  die beiden Kreise senkrecht. Zählt man diese 15 Kreise und 15 Punkte noch hinzu, so lassen sich in der Figur jetzt 15 sich selbst polare Dreiecke namhaft machen.

Unter den vielen merkwürdigen in dem Netz enthaltenen Figuren möge hier nur noch eine besondere Art hervorgehoben werden. Stellt man 5 der zehn Punkte  $P$  zu einem Cyklus zusammen, z. B.

$$P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}, P_{51}$$

so erhält man nichts anderes als ein Gauss'sches Pentagramma mirificum, da die fünf Diagonalen, wie  $P_{12}—P_{34}$  sämtlich Quadranten sind. Solche Fünfecke, die der Einfachheit wegen mit  $[1, 2, 3, 4, 5]$  etc. bezeichnet werden mögen, giebt es 12, und sie gruppieren sich zu zwei und zwei, wie z. B.  $[1, 2, 3, 4, 5]$  und  $[1, 3, 5, 2, 4]$  der-

art, dass die zehn Punkte  $P$  und die 10 Linien  $l$  sich in nur je einem als Ecken oder Seiten finden, wobei überdies noch zu bemerken ist, dass jedes der beiden Pentagramme dem andern zugleich ein- und umschrieben ist.

In Folge der Symmetrie leuchtet auch ohne Weiteres ein, dass dieselbe Construction, welche von dem sphärischen Dreieck  $P_{41}$ ,  $P_{42}$ ,  $P_{43}$  ausgegangen, zu demselben Satze führen muss, wenn man von irgend einem der 20 sphärischen Dreiecke ausgeht, die aus diesem durch Vertauschung der Indices hervorgehen. Und es muss auch möglich sein, ihre Seiten und Winkel, (oder auch nur ihre Seiten, da zu jedem Dreieck das Polardreieck in der Figur vorhanden ist) durch symmetrische Formeln auszudrücken. Es erhebt sich aber die Frage, in welcher Weise dies geschehen soll?

Zu ihrer Beantwortung ist es sehr zweckmässig, das Netz auf folgende Weise auf den Raum hinein zu projiciren. Man suche im Raume fünf Punkte  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5$  auf, derart, dass die 10 Verbindungslinien dieser fünf Punkte parallel sind zu den 10 durch die Punkte  $P$  gehenden Durchmessern der Kugel, also z. B.  $Q_4 Q_5$  parallel zum Durchmesser nach  $P_{4,5}$ . Dass dies möglich ist, ergibt sich ohne Weiteres aus der Tatsache, dass je drei der Durchmesser immer in einer Ebene, nämlich der Ebene eines Kreises  $l$  liegen. Auf die fünf Punkte  $Q$  überträgt sich dann die Polarität in der Weise, dass die Verbindungslinie irgend zweier, z. B.  $Q_4 Q_5$  senkrecht steht auf der Verbindungslinie zweier anderer, z. B.  $Q_1 Q_2$ , also auch senkrecht steht auf der Ebene  $Q_1 Q_2 Q_3$ . Je vier der fünf Punkte bilden daher ein Tetraeder, in dem die gegenüber liegenden Kanten auf einander senkrecht stehen.

In einem solchen Tetraeder schneiden sich aber die vier Höhen in einem Punkte, und dieser Punkt ist kein anderer, als der fünfte, übrig bleibende Punkt.

So hat sich also die Aufgabe in eine andere verwandelt, nämlich die Winkel der 10 ebenen Dreiecke durch symmetrische Formeln auszudrücken, und hierzu ist es wieder am besten, sich an die Längen der 10 Verbindungslinien  $Q_1 Q_2$  zu halten. Nach einem bekannten Satze sind in einem Tetraeder, dessen vier Höhen sich in einem Punkte schneiden, die drei Summen der Quadrate gegenüber liegender Seiten einander gleich, also z. B.:

$$Q_1 Q_2^2 + Q_3 Q_4^2 = Q_{13}^2 + Q_2 Q_4^2 = Q_{14}^2 + Q_{23}^2 \text{ etc.}$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man setzt:

$$Q_1 Q_2^2 = u_1 + u_2$$

$$Q_1 Q_3^2 = u_1 + u_3$$

$$Q_1 Q_4^2 = u_1 + u_4$$

$$Q_1 Q_5^2 = u_1 + u_5$$

etc., wo die fünf Grössen  $u$  noch näher zu untersuchen sind. Hierzu bemerke man, dass  $Q_4 Q_5$  senkrecht auf der Ebene  $Q_1 Q_2 Q_3$  steht. Der Durchschnitt beider sei  $S$  und es sei

$$Q_4 S = x$$

$$Q_5 S = y$$

also zunächst

$$\pm (x \pm y) = Q_4 Q_5 = \sqrt{u_4 + u_5}$$

Andererseits folgt sofort durch Betrachtung des Dreiecks  $Q_4 Q_5 Q_1$ , indem  $S$  der Fusspunkt einer Höhe ist:

$$x^2 - y^2 = Q_4 Q_1^2 - Q_5 Q_1^2 = u_4 - u_5$$

daher in der Verbindung mit der vorigen Gleichung

$$\pm (x \mp y) = \frac{u_4 - u_5}{\sqrt{u_4 + u_5}}$$

daher

$$\pm x = \frac{u_4}{\sqrt{u_4 + u_5}}$$

$$\pm y = \frac{u_5}{\sqrt{u_4 + u_5}}$$

$x$  und  $y$  sind die Höhen von  $Q_4$  und  $Q_5$  der beiden Tetraeder  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$  und  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_5$ . Die Inhalte derselben verhalten sich daher wie  $u_4 : u_5$  oder wie  $\frac{1}{u_5} : \frac{1}{u_4}$ . Da nun die algebraische Summe der Inhalte der fünf Tetraeder = 0 ist, so folgt hieraus die wichtige Gleichung:

$$I) \quad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = 0$$

Eine andere Gleichung zwischen den  $u$  findet nicht statt. Zu bemerken ist aber, dass für reelle Punkte nur eines der  $u$  negativ sein kann.

Aus dem Dreieck  $Q_1 Q_2 Q_3$  folgt sofort:

$$\cos Q_2 Q_1 Q_3 = \cos(P_{12} P_{13}) = \frac{u_1}{\sqrt{u_2+u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}}$$

und ähnlich für alle zwanzig Winkel. Hieraus findet man

$$\begin{aligned} \sin Q_2 Q_1 Q_3 &= \sin P_{12} P_{13} = \frac{\sqrt{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}}{\sqrt{u_2} \cdot u_1 \cdot \sqrt{u_3+u_1}} \\ &= \frac{\sqrt{u_1 u_2 u_3 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right)}}{\sqrt{u_2+u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}} = \frac{\sqrt{\frac{u_1 u_2 u_3}{u_4 u_5} \cdot \sqrt{u_4+u_5}}}{\sqrt{u_2+u_1} \cdot \sqrt{u_3+u_1}} \end{aligned}$$

Kehrt man endlich wieder zu dem ursprünglichen Dreieck  $ABC$  und seinem Polardreieck  $A'B'C'$  zurück, so ergeben sich schliesslich folgende eigentümliche Formeln für die Seite  $abc$  und Winkel  $\alpha\beta\gamma$  eines sphärischen Dreiecks.

$\cos a = \frac{u_4}{\sqrt{u_2+u_4} \cdot \sqrt{u_3+u_4}}$	$\cos \alpha = \frac{-u_5}{\sqrt{u_2+u_5} \cdot \sqrt{u_3+u_5}}$
$\cos b = \frac{u_4}{\sqrt{u_3+u_4} \cdot \sqrt{u_1+u_4}}$	$\cos \beta = \frac{-u_5}{\sqrt{u_3+u_5} \cdot \sqrt{u_1+u_5}}$
$\cos c = \frac{u_3}{\sqrt{u_1+u_2} \cdot \sqrt{u_2+u_4}}$	$\cos \gamma = \frac{-u_5}{\sqrt{u_1+u_5} \cdot \sqrt{u_2+u_5}}$
$\sin a = \frac{\sqrt{\frac{-u_1 u_2 u_3}{u_4 u_5} \cdot \sqrt{u_1+u_5}}}{\sqrt{u_2+u_4} \cdot \sqrt{u_3+u_4}}$	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\frac{-u_5 u_2 u_3}{u_1 u_4} \cdot \sqrt{u_1+u_4}}}{\sqrt{u_2+u_5} \cdot \sqrt{u_3+u_5}}$
$\sin b = \frac{\sqrt{\frac{-u_4 u_3 u_1}{u_2 u_5} \cdot \sqrt{u_2+u_5}}}{\sqrt{u_3+u_4} \cdot \sqrt{u_1+u_4}}$	$\sin \beta = \frac{\sqrt{\frac{-u_5 u_3 u_1}{u_2 u_4} \cdot \sqrt{u_2+u_4}}}{\sqrt{u_3+u_5} \cdot \sqrt{u_1+u_5}}$

II)

$$\text{II) } \left| \begin{array}{l} \sin c = \frac{\sqrt{\frac{-u_3 u_1 u_2}{u_3 u_5}} \cdot \sqrt{u_3 + u_5}}{\sqrt{u_1 + u_4} \cdot \sqrt{u_2 + u_4}} \\ \sin \gamma = \frac{\sqrt{\frac{-u_5 u_1 u_2}{u_3 u_4}} \cdot \sqrt{u_3 + u_4}}{\sqrt{u_1 + u_5} \cdot \sqrt{u_2 + u_5}} \end{array} \right.$$

wo zwischen den  $u$  die Gleichung I) stattfindet. Zu bemerken ist noch, dass man die Vorzeichen der Wurzeln im allgemeinen beliebig annehmen kann.

Vertauscht man in den Formeln II) die Indices 1, 2, 3, so bleibt man in demselben Dreieck und wechselt die Reihenfolge der Ecken. Vertauscht man die Indices 4 und 5, so geht man von dem Dreieck zu seinem Polardreieck über. Vertauscht man aber die Indices 1, 2, 3, 4, 5 unter einander in irgend einer anderen Weise, so ergeben sich die Seiten und Winkel eines anderen Dreiecks aus den vorhin namhaft gemachten Gruppen von 20 Dreiecken.

Aus den Gleichungen II) folgen noch einige kleine Reductionen

$$\begin{aligned}
 u_1 : u_2 : u_3 : u_4 &= -\cos a \cos b \cos c + \cos^2 a : -\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \\
 & : -\cos a \cos b \cos c + \cos^2 c : \cos a \cos b \cos c
 \end{aligned}$$

und man kann also, da eine der Grössen  $u$  beliebig bleibt, setzen:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sin b \cdot \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \alpha \\
 u_2 &= \sin c \cdot \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \beta \\
 u_3 &= \sin a \cdot \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \gamma \\
 u_4 &= \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c
 \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}
 u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5 &= \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma : \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
 & : \cos^2 \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma : -\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
 & = \sin \beta \sin \gamma \cos a \cos \alpha : \sin \gamma \cdot \sin a \cos b \cos \beta : \sin \alpha : \sin \beta \cos c \cos \gamma : \\
 & \quad -\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma
 \end{aligned}$$

Setzt man daher durch Abkürzung

$$\text{III)} \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = k$$

so folgt:

$$u_3 = -k^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

und daher zum Schluss noch die ausserordentlich merkwürdige Gleichung:

$$\text{IV)} \quad \frac{1}{\cos a \cos b \cos c} + \frac{1}{\sin b \sin c \cos a \cos \alpha} + \frac{1}{\sin c \sin a \cos b \cos \beta} \\ + \frac{1}{\sin a \sin b \cos c \cos \gamma} - \frac{1}{k^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = 0$$

## XIV.

## Zur Theorie der Lemniskate.

Von

Dr. K. Zahradnik.

Die Lemniskate, deren Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad 1)$$

ist bekanntlich eine rationale Curve. Jeder Kreis, der die Lemniskate in realem Doppelpunkt berührt, schneidet dieselbe in 7 festen Punkten; der achte Schnittpunkt ist eindeutig vom Halbmesser  $u$  des Kreises abhängig, d. h. wir können den Halbmesser als seinen rationalen Parameter betrachten und erhalten so

$$\begin{aligned} x &= a^2 \sqrt{2} \frac{u(a^2 + u^2)}{a^4 + u^4} \\ y &= a^2 \sqrt{2} \frac{u(a^2 - u^2)}{a^4 + u^4} \end{aligned} \quad 2)$$

als Gleichungen der Lemniskate in parametrischer Darstellung.

Durch die Substitution

$$u = at, \quad a\sqrt{2} = c \quad 3)$$

gehen diese Gleichungen über in <sup>1)</sup>

---

1) Den Parameter  $u$  benutzt Dr. Em. Weyr in seiner Abhandlung: Die Lemniskate in rationaler Behandlung, Prag 1875. Auf anderem Wege kommt Hermite zur Parameterdarstellung (4) der Lemniskate in seinem Cours d'Analyse. Paris 1873, pg. 242.

$$\begin{aligned} x &= c \frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ y &= c \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \end{aligned} \quad 4)$$

Setzen wir nun die Werte (4) in die Gleichung eines Kreises ein, so erhalten wir sofort

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1 \quad 5)$$

als die Bedingungsgleichung für die Lage von vier Punkten  $t_1, t_2, t_3, t_4$  der Lemniskate auf einem Kreise.

Setzen wir

$$t_2 = t_3 = t_4 = t$$

so erhalten wir

$$t^3 t_1 = 1 \quad 6)$$

eine Relation zwischen dem Osculationspunkte  $t$  des Krümmungskreises und dessen Durchschnitt  $t_1$  mit der Lemniskate.

Aus der Gleichung (6) erhellt, dass durch jeden Punkt  $t_1$  der Lemniskate drei Krümmungskreise hindurch gehen und zwar ein realer und zwei imaginäre. Die Parameter ihrer Osculationspunkte erhalten wir als Wurzeln der kubischen Gleichung

$$t^3 = \frac{1}{t_1} \quad 7)$$

Aus dieser Gleichung folgt sogleich, wenn wir ihre Wurzeln mit  $t', t'', t'''$  bezeichnen, dass die drei Osculationspunkte  $t', t'', t'''$  der drei Krümmungskreise, welche durch den Punkt  $t_1$  der Lemniskate hindurchgehen, auf einem Kreise liegen, was natürlich ist, da ja dieser Satz für den Kegelschnitt gilt, und somit auch für jede Curve, welche aus ihm durch Inversion hervorgeht, z. B. Cardioide, Lemniskate, Cissoide.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\Sigma t = (t)_1, \quad \Sigma tt = (t)_2, \quad \Sigma ttt = (t)_3$$

so folgt aus (7)

$$(t)_1 = 0, \quad (t)_2 = 0, \quad (t)_3 = \frac{1}{t_1} \quad 8)$$

somit

$$\begin{aligned} (t^{3\lambda})_1 &= \frac{3}{t_1^\lambda}, & (t^{3\lambda})_2 &= \frac{3}{t_1^{2\lambda}} \\ (t^\mu) &= (t^\mu)_2 = 0 \end{aligned} \quad 8')$$

für  $\mu = 3\lambda$ , wo  $\lambda$  und  $\mu$  ganze positive Zahlen sind.

Die drei Osculationspunkte  $t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$ , welche dem Punkte  $t_1$  zugeordnet sind, nennen wir ein Osculationstripel oder Osculationsdreieck.

### Schwerpunkt des Osculationstripels.

2. Es sei  $\varphi(\xi, \eta)$  der Schwerpunkt des Osculationstripels  $t_1, t_2, t_3$ , welches dem Punkte  $t$  zugeordnet ist, somit gilt mit Rücksicht auf die Gleichungen (8) und (8'):

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{c}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{t_\lambda (1 - t_\lambda^2)}{1 + t_\lambda^4} = c \frac{t(1 + t^2)}{1 + t^4} \\ \eta &= \frac{c}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{t_\lambda (1 - t_\lambda^2)}{1 + t_\lambda^4} = c \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^4}\end{aligned}\tag{9}$$

„Der einem Osculationstripel zugeordnete Punkt der Lemniskate ist der Schwerpunkt dieses Osculationstripels.“

### Umkreis des Osculationstripels.

3. Die Gleichung des Kreises durch drei Punkte ist

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) | x, y, 1 | - x | x^2 + y^2, y, 1 | + y | x^2 + y^2, x, 1 | \\ - | x^2 + y^2, x, y | = 6\end{aligned}\tag{10}$$

Nun ist für ein Osculationstripel

$$| x, y, 1 | = \frac{-2c^2 \mathcal{A} \cdot \{(t_1) + (t_2)(t_3)\}}{\prod_{h=1}^3 (1 + t_h^4)}$$

wegen der Gl. (8) und (8'); ferner ist

$$| x^2 + y^2, y, 1 | = \frac{-2c^3 \mathcal{A} \cdot [1 + (t)_h^2]}{\prod_{h=1}^3 (1 + t_h^4)}$$

$$| x^2 + y^2, x, 1 | = \frac{-2c^3 \mathcal{A} \cdot [1 - (t)_{32}]}{\prod_{h=1}^3 (1 + t_h^4)}$$

1) Statt  $t', t'', t'''$  schreiben wir im folgenden  $t_1, t_2, t_3$  und den zugeordneten Punkt  $t_1$  bezeichnen wir einfach  $t$ .

$$|x^2 + y^2, x, y| = \frac{4c^4 \mathcal{A} \cdot (t)_3}{\prod_{k=1}^3 (1 + t_k^2)}$$

wo

$$\mathcal{A} = |1, t, t^2|$$

ist, somit geht die Gleichung des Kreises (10), wenn es ein Umkreis eines Osculationstripels ist, über in

$$(t + (t)_3^2)x - (1 - (t)_3^2)y - 2c(t)_3 = 0$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (8)

$$T \equiv (1 + t^2)x + (1 - t^2)y - 2ct = 0 \quad (11)$$

Der Umkreis eines Osculationstripels zerfällt somit in zwei Gerade, in die Gerade  $T$  und in die unendlich ferne Gerade, da wegen

$$|x, y, 1| = 0$$

das dem Punkte  $t$  beigeordnete Osculationstripel auf einer Geraden  $T$  liegt, welche den Punkt  $t$  selbst enthält.

Die Gerade  $T$  ist somit die gemeinschaftliche Sehne des realen Krümmungskreises und der Lemniskate. Beschreibt der Punkt  $t$  die Lemniskate, so hüllt die Gerade  $T$  die gleichseitige Hyperbel

$$H \equiv x^2 - y^2 - c^2 = 0 \quad (12)$$

ein, mit  $c = \overline{O.A}$  als realer Halbachse.

#### Construction des Krümmungsmittelpunktes.

4. Bekanntlich ist die Lemniskate eine Fusspunktcurve dieser Hyperbel für den Mittelpunkt der Hyperbel als Pol. Daraus folgt eine Construction des Osculationspunktes des realen Krümmungskreises, welcher durch den Punkt  $t$  hindurchgeht, auf welchen Dr. Em. Weyr<sup>1)</sup> auf ganz anderem Wege gekommen ist. Auf  $\overline{Ox}$  errichten wir im Punkte  $t$  eine Senkrechte. Ihr Durchschnitt mit der Lemniskate ist der verlangte Punkt  $t^*$ .

Umgekehrt können wir zu einem Punkte  $t^*$  der Lemniskate, als Osculationspunkt genommen, den beigeordneten Punkt  $t$  finden als Durchschnitt des Kreises, dessen Durchmesser  $Ot^*$ , mit der Lemniskate.

1) Dr. Em. Weyr l. c. pg. 21.

Da nun die Construction der Normale im Punkte  $t$  keine Schwierigkeiten bereitet, so ist auch eine einfache Construction des Krümmungshalbmessers und des Krümmungsmittelpunktes in einem Punkte der Lemniskate gegeben.

Die Gerade  $T$  ist somit eine Tangente der Hyperbel  $H$ ; ihr Berührungspunkt sei  $M$ , und  $t$  der Fusspunkt in Bezug auf  $O$  als Pol. Bekanntlich können wir aber die Lemniskate als eine Inverse der gleichseitigen Hyperbel  $H$  auffassen mit  $O$  als Inversionscentrum und  $OA = c$  als Halbmesser des Inversionskreises.

Somit gilt

$$ON \cdot OM = c^2$$

Betrachten wir die Lemniskate als eine Fusspunktcurve der Hyperbel  $H$  mit  $O$  als Pol, so entspricht dem Punkte  $M(x, y)$  der Hyperbel der Punkt  $t(\xi, \eta)$  der Lemniskate; betrachten wir aber die Lemniskate als Inverse der Hyperbel  $H$  in Bezug auf  $t$  als Inversionskreis, so entspricht dem Punkte  $M(x, y)$  der Punkt  $N(\xi', \eta')$  der Lemniskate. Die Punkte  $t, N$  liegen symmetrisch gegen die  $X$ -Achse. Es ist nämlich

$$t \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta = -\frac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right., \quad N = \left\{ \begin{array}{l} \xi' = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta' = \frac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

Ersichtlich ist die Polare  $P_m$  des Punktes  $M$  in Bezug auf den Inversionskreis  $\Gamma$  eine Tangente der Hyperbel  $H$ ; deren Berührungspunkt  $M'$  mit  $M$  zur Achse  $X$  symmetrisch liegt.

Diese Eigenschaft können wir auch anders ausdrücken. Die Hyperbel  $H$  ist sich selbst polarreciprok in Bezug auf den Kreis  $\Gamma$ .

#### Weitere Eigenschaft der Osculationstripel.

5. Wir wollen nun die nachstehende Eigenschaft der Osculationstripel beweisen, nämlich: „Die Tangenten der Lemniskate in „den Punkten des Osculationstripels schneiden sich in einem Punkte.“

Die Gleichung der Tangente der Lemniskate im Punkte  $t$  lautet

$$(1 - t^2)(1 + 4t^2 + t^4)y - (1 + t^2)(1 - 4t^2 + t^4)x = 4ct^3$$

Die Tangenten dreier Punkte  $t_1, t_2, t_3$  der Lemniskate schneiden sich in einem Punkte, wenn

$$\begin{vmatrix} 1 + 3t^2 - 3t^4 - t^6 & 1 - 3t^2 - 3t^4 + t^6 & t^3 \end{vmatrix} = 0$$

Nun ist diese Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} 1, -3t^2 - t^4 + t^6, t^3 \end{vmatrix} = 0$$

oder in Summanden zerlegt:

$$3 \begin{vmatrix} 1, t^2, t^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, t^4, t^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, t^3, t^6 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Ist nun  $t_1, t_2, t_3$  ein Osculationstripel, so gelten die Gleichungen (8), und in Folge dessen ist jeder einzelne Summand von (12) gleich null, womit die Eigenschaft der Osculationstripel der Lemniskate bewiesen erscheint.

Durch Inversion gelangen wir zum nachstehenden Satze: „Die drei Kreise, welche eine gleichseitige Hyperbel in den Punkten eines Osculationstripels berühren, und durch den Mittelpunkt der Hyperbel hindurchgehen, schneiden sich in einem Punkte“.

## XV.

## Miscellen.

## 1.

**Nachtrag zu Nr. XI. Ueber das gleichseitige Tetraeder.**

§ 13. Eigenschaft des eingeschriebenen Tetraeders bezüglich auf das einhüllende Parallelepipedon.

**Lehrsatz 13.** Schreibt man ein gleichseitiges Tetraeder in ein Parallelepipedon ein, so ist stets letzteres rechtwinklig, und umgekehrt.

**Beweis.** Nach Lehrsatz 10. sind die Gegenkanten des Tetraeders einander gleich, das sind die Diagonalen der Gegenseiten des umhüllenden Parallelepipedons (s. §. 12.) Projicirt man diese Parallelogramme in paralleler Bewegung auf einander, so können die genannten Diagonalen nicht auf einander fallen; denn wären sie vorher parallel gewesen, so hätte das Tetraeder in einer Ebene gelegen. Folglich werden sie die 2 sich schneidenden Diagonalen je eines Parallelogramms, und dieses ist, weil sie einander gleich sind, ein Rechteck. Das Parallelepipedon ist demnach von lauter Rechtecken begrenzt, also rechtwinklig. w. z. b. w.

Das Umgekehrte ergibt sich noch einfacher. Die Gegenkanten des Tetraeders sind als Diagonalen eines Rechtecks einander gleich, folglich die Seiten des Tetraeders alle einander congruent, also gleich.

Vermöge dieses Satzes erscheinen Eigenschaften des rechtwinkligen Parallelepipedons als Eigenschaften des eingeschriebenen gleichseitigen Tetraeders. So sind namentlich die gemeinsamen Normalen der Ge-

genkanten des Tetraeders, welche sich nach leichter Betrachtung als Parallelen mit den Kanten des einhüllenden Parallelepipeds, von dessen Mittelpunkt aus gezogen, darstellen, ein System dreier, sich im Mittelpunkte schneidenden orthogonalen Geraden. Der Mittelpunkt des Parallelepipeds ist offenbar auch Mittelpunkt der ihm umschriebenen Kugel, welche, weil unter deren 8 Ecken 4 zur Bestimmung hinreichen, auch dem Tetraeder umschrieben ist. Aus allem geht hervor:

**Lehrsatz 14.** Die gemeinsamen Normalen der Gegenkanten eines gleichseitigen Tetraeders schneiden sich im Mittelpunkt der ihm umschriebenen Kugel.

Seien, wie in § 12, die an  $P_1$  anstossenden Kanten des Parallelepipeds Axen der  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , auf ihnen

$$X = \alpha, \quad Y = \beta, \quad Z = \gamma$$

die Kantenlängen. Dann sind die Ecken des Tetraeders:

$$P_1 \equiv (0, 0, 0); \quad P_2 \equiv (\alpha, \beta, 0); \quad P_3 \equiv (\alpha, 0, \gamma); \quad P_4 \equiv (0, \beta, \gamma)$$

die Kantenpare:

$$P_2 P_3 = P_1 P_4 = g_1$$

$$P_3 P_1 = P_2 P_4 = g_2$$

$$P_1 P_2 = P_3 P_4 = g_3$$

letztere, als Hypotenusen durch die Katheten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ausgedrückt:

$$g_1^2 = \beta^2 + \gamma^2; \quad g_2^2 = \gamma^2 + \alpha^2; \quad g_3^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

woraus:

$$\alpha = \sqrt{\frac{g_2^2 + g_3^2 - g_1^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{g_3^2 + g_1^2 - g_2^2}{2}}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{g_1^2 + g_2^2 - g_3^2}{2}}$$

Die Grössen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  drücken die normalen Abstände der Gegenkanten des Tetraeders aus.

Der Schnittpunkt der gemeinsamen Normalen hat als Mittelpunkt des Parallelepipeds die Coordinaten:

$$X = \frac{1}{2}\alpha; \quad Y = \frac{1}{2}\beta; \quad Z = \frac{1}{2}\gamma$$

Ihre 3 orthogonalen Richtungen bestimmen sich durch die Mittelpunkte der Seiten des Parallelepipeds, durch welche sie vom Schnitt aus gehen, nämlich (in Coordinaten ausgedrückt)

$$(0, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\gamma), \quad (\frac{1}{2}\alpha, 0, \frac{1}{2}\gamma), \quad (\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta, 0)$$

Ihre Gleichungen lauten also:

$$\begin{aligned} \text{I. } & Y = \frac{1}{2}\beta; & Z = \frac{1}{2}\gamma \\ \text{II. } & Z = \frac{1}{2}\gamma; & X = \frac{1}{2}\alpha \\ \text{III. } & X = \frac{1}{2}\alpha; & Y = \frac{1}{2}\beta \end{aligned}$$

R. Hoppe.

2.

Ueber Primzahlen.

1.

Es lassen sich arithmetische Reihen zweiter Ordnung bilden, in denen sehr viele Zahlen-Primzahlen sind. Die allgemeine Formel zu solchen Reihen ist

$$\pm ax^2 + bx + p \quad (p = \text{Primzahl})$$

Solche Reihen sind z. B. die folgenden:

- 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71, . . . (Formel:  $x^2 + 5x + 5$ )
- 11, 23, 37, 53, 71, 91, 113, . . . (Formel:  $x^2 + 11x + 11$ )
- 23, 47, 73, 101, 131, 163, 197, . . . (Formel:  $x^2 + 23x + 23$ )
- 7, 13, 17, 19, . . . (Formel:  $-x^2 + 7x + 7$ )
- 13, 37, 59, 79, 97, 113, 127, . . . (Formel:  $-x^2 + 25x + 13$ )

u. s. w

II.

Für die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer Grenze  $x^2$  lassen sich zu bestimmten Classen von Quadratzahlen arithmetische Reihen bilden. Es ist z. B.:

Quadratzahlgrenze:	Anzahl der Primzahlen:
$(1 \cdot 2^2)^2$	6
$(2 \cdot 2^2)^2$	18
$(3 \cdot 2^2)^2$	34
u. s. w.	u. s. w.

Formel für die Anzahl der Primzahlen:

$$2x^2 + 10x + 6$$

$$(x = 0, 1, 2, \dots)$$

Man kann diese Verhältnisse auch so ausdrücken:

Quadratzahlgrenze:  $(n^2)^2$ . Anzahl der Primzahlen:  $n(n+3)-1$   
 Bis zu der Quadratzahl  $(8 \cdot 2^2)^2 = 10, 24$  und der Anzahl der Primzahlen  $(8 \cdot 11 - 2) = 174$  stimmen diese Verhältnisse genau. Von hier ab treten Abweichungen ein, die aber auch von regelmässiger Form sind und die Bildung der weiteren arithmetischen Reihen für die Anzahl der Primzahlen ermöglichen.

G. Speckmann.

Oldenburg i. Gr.

XVI.

Schleiermacher als Mathematiker.

Ein Brief von ihm an den Reichsburggrafen und Grafen Friedrich Ferdinand Alexander zu Dohna-Schlobitten, 1791.

Aus dem reichsburggräfl. Dohnaschen Archive zu Schlobitten mitgeteilt

von

H. Borkowski-Schlobitten (Ostpr.)

---

Als Schleiermacher am 22. Oktober 1790 als Erzieher in das burggräfl. Dohnasche Haus zu Schlobitten eintrat gieng ihm der Ruf nicht nur eines philosophisch ausserordentlich beanlagten Geistes, sondern der eines vortrefflichen Mathematikers voraus. So fügt der Herr des Hauses, Burggraf Friedrich Alexander, der spätere Obermarschall des Königreichs Preussen in einem Briefe <sup>1)</sup> (5. Nov. 1790) an seinen zweitältesten Sohn Wilhelm, den späteren Landhofmeister des Königreichs Preussen, († 1845) welcher in Königsberg i. Pr. studierte, der kurzen Charakteristik Schleiermachers: „Ein Classischer Gesellschafter! bereitwilliger Mann, und Starker Leteur . . . wozu sein Anstand kombt“, hinzu: „Er ist stark in der Mathematique“. Schleiermacher zeigte dieses sowohl in dem Unterrichte der Söhne des Hauses, als auch in dem Briefwechsel, den er im folgenden Jahre mit dem ältesten Sohne, Burggrafen Friedrich Ferdinand Alexander zu Dohna, dem spätern preussischen Staatsminister, damals Referendarius in Berlin, eröffnete.

---

1) Orig. Arch. Schlobitten.

Leider ist von den Briefen, welche mathematische Fragen behandeln, bisher nur der folgende gefunden worden. Aus dem Schlusse desselben geht hervor, dass andere dieser Art vorangegangen und wahrscheinlich auch gefolgt sind. Der vorliegende Brief, welcher in dem von J. L. Jacobi herausgegebenen Briefwechsel: „Schleiermachers Briefe an die Grafen zu Dohna“ (Halle 1837) nicht enthalten ist, lautet folgender massen<sup>1)</sup>:

### Arithmetik.

#### 1. Wesen der Arithmetik.

Arithmetik und Geometrie sind beides Wissenschaften, die uns Lehrsätze über die Verhältnisse der Grössen in einem gewissen System geben. Sie unterscheiden sich aber dadurch, dass sich die Geometrie blos auf die stetigen Grössen im Raum bezieht.

Anm. Stetig nennt man eine Grösse, die unserer sinnlichen Anschauung ein Ganzes darbietet, wie z. E. jede geometrische Linie, Fläche und Körper. Wir denken uns auch die stetige Grösse, wenn wir nemlich keine Rücksicht auf ihre Materie nehmen gar nicht als aus Theilen zusammengesetzt, sondern als aus dem ganzen vorhandenen Raum heraus genommen und begränzt: erst wenn wir sie haben denken wir uns Theile willkürlich hinein, wir denken also hier die Theile nur durch das Ganze. Ich glaube, dass ich Ihnen das schon lezthin mündlich deutlich genug gemacht habe. Erlauben Sie mir aber es durch ein paar Beispiele zu erläutern. Indem ich einen Triangel zeichne, so stell ich mir gar nicht die drei Linien als die Theile vor, aus denen er zusammengesetzt wäre, wie denn auch diese gar nicht Theile der Fläche seyn können, sondern nur Gränzen; dennoch entsteht der Triangel, indem ich diese Linien ziehe, also nicht dadurch, dass ich eine kleine Fläche als Theil hervorbringe und dann immer mehr hinzuseze, bis der Triangel fertig ist (das hiesse ihn aus Theilen zusammensezen) sondern die ganze Fläche, die er einschliesst ist schon lange vorhanden und ich thue nichts als sie abzusondern. — Wenn ich zum Behuf irgend eines geometrischen Lehrsazes in einem Triangel eine parallele mit seiner Basis ziehe, so denke ich mir die beiden Theile nicht so, als ob der Triangel daraus entstanden und zusammengesetzt worden, sondern diese sind wiederum

---

1) Orig. Arch. Schlobitten.

willkürlich aus dem Triangel abgesondert worden, eben so wie vorher der Triangel selbst aus dem ganzen Raum. Wenn man sagt ein Zirkel entsteht wenn eine gerade Linie sich um einen festen Endpunkt bewegt, so denkt man sich die kleinen Flächenräume, welche entstehen, wenn man die Bewegung der Linie irgend wo anhält gar nicht als die Theile woraus der Zirkel erst zusammengesetzt würde, sondern der Bewegung ist nur die Regel, nach welcher die Gränze hervorgebracht und also die Zirkelfläche abgesondert werden soll.

Den Eigenschaften der stetigen Grösse im Raum, welche man die ausgedehnte Grösse nennt sind grade entgegengesetzt die Eigenschaften der Zahl, Grösse womit sich die Arithmetik beschäftigt.

Anm. Zahl ist Vielheit der Einheiten, und kann nicht anders erzeugt werden, als indem wir uns in Gedanken die Einheit so oft wiederholen als die Aufgabe fodert. Hier ist die Einheit ein wahrer Theil, eine jede neue Wiederholung derselben gibt uns einen Abschnitt; hier denken wir das Ganze nur durch die Theile. Wenn wir z. B. 8 denken, so können wir nicht umhin, uns eine gewisse Menge Einheiten vorzustellen, welche die natürlichen Theile der Zahl sind, und wir können uns den Begriff von der ganzen 8 nicht anders machen, als indem wir von der eins anfangen und nach und nach durch alle folgenden Zahlen heraufsteigen. — Sie könnten mir hier den Einwurf machen, dass das auch bei den stetigen Grössen im Raum der Fall sei, die wir auch nicht anders übersehn können, als indem wir mit dem Auge nach und nach von einem Theil zum andern fortgehn. Das ist auch genau genommen richtig, allein es gibt doch noch zwei Verschiedenheiten und die sind es eben, worauf alles ankommt. 1., sagen wir dennoch nicht, dass die Grösse so entstanden ist, sondern nur unsere Anschauung derselben, welches wol unterschieden werden muss. Bei der Zahl hingegen kann unser Anschauen dieses Fortschreitens von einer Einheit zur andern wol am Ende entbehren, aber wir denken uns die Grösse selbst als so aus der Einheit entstanden, denn das ist ja der Begriff auf den wir alle Operationen des Verstandes mit Zahlen (d. h. alles Rechnen) reduciren. 2., gehen wir bei der geometrischen Anschauung durch jede unendlich kleine Grösse, die in der gegebenen enthalten ist, und können eben deswegen diese nicht als Theile ansehen durch deren Zusammensetzung das Ganze entstanden wäre; bei der Zusammensetzung der Zahl hingegen gehen wir nicht durch alle unendlich kleine Theile woraus jede Einheit besteht, sonst würden wir uns die Zahl als Linie, als stetige Grösse denken, sondern wir nehmen die Einheit selbst, und durch diese bekommen wir natürliche Abschnitte, d. h. Theile.

Ich glaube dass dies den wesentlichen Unterschied der Arithmetik von der Geometrie ausmacht und um ihn in der Erklärung der Arithmetik mit auszudrücken, müssen wir sie so abfassen:

„Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Verhältnissen der Zahlen“.

Anm. 1. Sie sehn dass man eine jede Grösse in eine Zahl verwandeln kann wenn man eine Einheit zu ihrer Beurtheilung annimmt, d. h. wenn man sie misst (denn eine angenommene Einheit zur Beurtheilung einer Grösse die an sich nicht als Zahl erscheint, heisst ein Maass). Also können auch die geometrischen Grössen als Zahlen angesehen werden; das geschieht aber nicht in der reinen Geometrie (da wird nicht gemessen, und alle Zahlen sind nur zufällig) sondern nur in der sogenannten angewandten Geometrie und in der Trigonometrie.

Anm. 2. Man theilt aber die ganze Wissenschaft von den Verhältnissen der Zahlen noch ab in eigentliche Arithmetik und in Analysis, die Sie unter dem Namen Algebra kennen. Da wir es (vor der Hand) nur mit der ersten zu thun haben, so wäre es gut auch den Unterschied zwischen diesen beiden zu kennen. Den besinn ich mich aber nicht befriedigend gefunden zu haben. Doch bringt mich der Umstand, dass die Analysis überall in Gleichungen arbeitet auf folgende Angabe: Die eigentliche Arithmetik gibt uns überall Data um daraus Resultate zu finden; die Analysis gibt uns Resultate, um daraus gewisse Data die als unbestimmt in ihnen enthalten waren zu finden.

## 2. Noch eine Vergleichung der Arithm. und Geometrie.

In der Geometrie giebt es noch Grössen von verschiedener Art und verschiedener Würde, deren eine nicht mit der andern verwechselt werden, eine nicht in die andere übergehn kann, nämlich Linien, Flächen und Körper. Das kommt von der Eigenschaft des Raumes her, welche man seine dreifache Ausmessung nennt. In der Arithmetik wo wir es mit dem Raum nicht zu thun haben ist auch nichts dergleichen zu bemerken; alle Zahlen sind von einerlei Art, da sie alle aus Wiederholungen der Einheit entstanden sind, und liegen alle in einer unendlichen Reihe, denn da es immer noch möglich ist zu einer Zahl eine andere hinzuzusetzen, so ist keine Zahl an sich die letzte, und die Reihe derselben ist ins unendliche unvollendet. In dieser Reihe hat eine jede Zahl ihren festen Platz

nach der Menge der Einheiten die in ihr enthalten sind, und alles was wir mit den Zahlen vornehmen, geht innerhalb dieser Reihe vor.

### 3. Von den allgemeinen Verhältnissen der Zahlen.

Dieses aber was wir mit den Zahlen vornehmen können, scheint auf den ersten Anblick nicht so recht viel zu seyn; denn wenn wir von dem Begriff der Zahl als Menge der Einheiten und des Zählens als Hervorbringen der Zahl durch Wiederholung der Einheiten ausgehn, so erscheint uns kein anderes Verhältniss der Zahlen, als dass eine grösser eine kleiner ist als die andre, eine aus mehreren andere aus wenigern Wiederholungen der Einheit besteht, und wir finden keinen andern Punkt aus dem wir sie vergleichen könnten, als zu sehn wie viel Einheiten ich zu einer kleineren hinzusezen, wie weit ich in der natürlichen Zahlenreihe vorwärts gehn muss, um eine grössere zu erlangen, und wie viel Einheiten ich von der grössern wegnehmen, wie weit ich in der natürlichen Zahlenreihe rückwärts gehn muss um zu der kleinen zu gelangen. Und so gäbe es keine andere Operation des Rechnens als 1. zu einer Zahl gewisse Wiederholungen der Einheit, das heisst eine gewisse andere Zahl hinzusezen und daraus eine dritte machen: Zahlen zusammenfügen, addiren 2. von einer Zahl gewisse Wiederholungen der Einheit, d. h. eine gewisse andere Zahl hinwegnehmen, und daraus eine dritte machen: Zahlen trennen subtrahiren.

### 4. Erweiterung.

Allein wenn dieses auch alles ist, so werden wir doch bald sehn, dass es wenigstens mehrere Arten giebt zu addiren und zu subtrahiren. Wenn man nemlich eine jede Grösse als Einheit betrachten kann, so kann man auch eine jede schon zusammengesetzte Zahl als Einheit für andere ansehen. Das gibt nun einen neuen Gesichtspunkt indem ich also eine jede Zahl nicht als nur aus der natürlichen, sondern auch aus irgend einer angenommenen Einheit entsprungen ansehen kann. Diese Befugniss und die Reduktion ihrer Anwendung auf die natürliche Zahlenreihe ist der Grund aller übrigen Operationen des Rechnens; die einfachsten derselben sind multipliciren und dividiren. Ich kann nemlich fragen: Die wievielste Wiederholung der Einheit, d. h. welche Zahl bekomme ich wenn ich die 12 als Einheit ansehe und diese Einheit viermal seze: Das ist multi-

pliciren. Ich kann ferner fragen: Wie oft hätte ich die 12 wiederholen müssen indem ich die Eins 48 mal wiederholte? Das ist dividiren.

### 5. Von der mechanischen Einrichtung unseres Rechen-Systems.

Nachdem wir so die Begriffe der vier einfachsten Rechnungsarten erfunden haben aus denen alle übrige nur Zusammensetzungen sind, so bitte ich Sie nun sich an das zu erinnern, was wir damals vom dekadischen System sagten; von der grossen Erfindung für die ganze unendliche Zahlenreihe sich mit 10 Zeichen zu begnügen und dafür die Zahlen nach ihren Fortschreitungen in gewisse Ordnungen zu theilen, welche bei den Ziffern durch die Stelle bezeichnet werden wo sie stehn. Daraus lässt sich sehr leicht unser Verfahren bei den arithmetischen Aufgaben deduciren; warum wir beim addiren und sub. die gegebenen Zahlen gleichsam trennen, und successiv nur die zusammengehörigen Ordnungen mit einander verbinden um zu rechter Zeit die kleinern in die grössern verwandeln zu können, warum wir beim multipliciren jede Ordnung des einen Faktors einzeln mit dem andern verbinden, aber beim dividiren umgekehrt die höhern Ordnungen zuerst eintheilen, weil wir sie oft wenn die Einheiten einer Ordnung nicht hinreichen einen Quotienten derselben Ordnung hervorzubringen in die niedrigere Ordnung verwandeln müssen. Dieses ganze dekadische System ist aber nicht notwendig sondern bloss willkürlich; die Alten rechneten nicht so und noch jetzt rechnen viele Völker anders. Leibniz erfand eine Diadik wo er nur immer bis 2 zählte und nur diese beiden Ziffern hatte: 0, 1.

### 6. Von den Reihen.

Wenn wir wieder von der Idee ausgehn, dass man nun eine jede Zahl als Einheit behandeln kann, die beim Zählen wiederholt, so entstehn aus einem solchen Zählen mit einer angenommenen Einheit andere Zahlenreihen als die natürliche (jedoch müssen sie immer in der natürlichen enthalten seyn) z. E. man fängt von der Eins an, nimmt aber die 3 zu der Einheit, welche immer wiederholt wird, so bekommt man folgende Reihe:

1<sup>3</sup>). 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34

und so fort bis ins unendliche.

Man kann aber auch bei jeder andern Zahl anfangen und es eben so machen:

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32. 35 etc.

Unter einer Zahlen Reihe (Progression, wenn Sie sich vor dem fürchterlichen Wort nicht erschrecken) versteht man eine Menge von Zahlen (einerlei wo sie anfangen und aufhören) von denen immer die folgende aus der vorigen nach einerlei Gesez entstanden ist, wie z. E. in den obigen Reihen dadurch dass immer zu der vorigen Zahl, die 3, die als Einheit galt, hinzugesezt ward. Allein es können auch noch Reihen aus ganz andern Gesezen entstehn. Z. E. man kann bei einer Zahl anfangen diese selbst als Einheit ansehen und wiederholen; dann aber wieder die Zahl, welche daraus entstand als Einheit betrachten und eben so wiederholen. Ich meine auf diese Art:

2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256 etc.

Die 2 ist hier als Einheit angesehen und wiederholt, daraus entstand die 4, nun wurde diese als Einheit angesehen und fortgezählt, daraus entstand die 8; nun wurde diese die Einheit, und so immer fort nach dem nemlichen Gesez. Es ist auch nicht nöthig, dass man die angenommene Einheit nur einmal wiederholt um die nächste Zahl der Reihe zu bekommen, man kann gleich ein vielfaches derselben nehmen, welches schon mehrere Wiederholungen derselben in sich fasst. Z. E. ich fange bei der 2 an, will aber nicht die 2 nur einmal wiederholen, sondern gleich dreimal: Daraus entsteht nun eine Zahl diese wird als Einheit angesehen und ebenfalls nicht einmal wiederholt, sondern dreimal.

2. 6. 18. 54. 162. 394. 1092. 3274.

Sie sehen ich behandle überall die Reihen als Arten zu zählen und suche die Einheiten auf nach denen man zählt.

Die obigen Beispiele geben aber 2 ganz verschiedene Arten von Reihen an die Hand.

Bei der einen wird eine Einheit gewählt und mit dieser so gezählt wie mit der wahren Einheit in der natürlichen Zahlenreihe; diese nennt man zählende Reihen (arithmetische Progressionen). Bei der andern wurde zwar auch die erste Zahl bei der man anfang

---

1) Muss heissen: 486. 1458. 4374.

zur Einheit gewählt und ein bestimmtes vielfaches derselben genommen, aber dann eben diese nun erhaltene Zahl zur Einheit genommen und eben so behandelt; diese nennt man steigende Reihen (geometrische Progressionen).

Sie sehn dass ich jene erhalte wenn ich zu der letzten vorhandenen Zahl die angenommene Einheit addire, diese hingegen wenn ich die letzte Zahl die nun Einheit wird so oft nehme, als es das angefangene Gesez erfordert. Dieses so oft nehmen ist aber nach unserm oben gegebenen Begriff ein multipliciren. Auch bei den arithmetischen Reihen ist zwar ein multipliciren, aber nicht jedes Gliedes aus dem nächsten, sondern aller aus dem ersten. Ich frage nemlich: was entsteht für eine Zahl der natürlichen Zahlenreihe wenn ich die angenommene Einheit so oft wiederhole, wenn ich sie einmal mehr wiederhole u. s. w. so ist jedes Glied des einmal eins nur eine arithmetische Progression, worin die Zahl womit das Glied anfängt die Einheit ist z. E.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

aber es ist nicht das nächste Glied aus der Multiplikation mit dem vorigen entstanden, sondern alle aus einer successiven Multiplikation des ersten. Ich hoffe ich habe nun den Unterschied dieser beiden Arten von Reihen hinlänglich angegeben. Es gibt noch mehrere Arten derselben, die aber nicht von der Wichtigkeit als diese beiden und besonders die geometrische.

### 7. Einige Beobachtungen über diese Arten von Reihen?

Man kann leicht bemerken, dass, man mag eine arithmetische Reihe anfangen wo man will und abbrechen wo man will, sich dennoch immer folgendes dabei ereignet: wenn man die zwei äussersten Glieder zusammen addirt und so von beiden Seiten nach der Mitte zu fortfährt, so geben alle diese Paare die nemliche Summe. Z. E. in der Reihe

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23.

$$1 + 23 = 24. \quad 3 + 21 = 24. \quad 5 + 19 = 24.$$

$$7 + 17 = 24. \quad 9 + 15 = 24 \text{ etc.}$$

Ferner bei der geometrischen Reihe wenn man die äussersten

Glieder mit einander multiplicirt und eben so fortfährt, so geben alle diese Paare einerlei Produkte. Z. E.

$$3. 6. 12. 24. 48. 96.$$

$$3 \cdot 96 = 288 \cdot 6 \cdot 48 = 288 \cdot 12 \cdot 24 = 288$$

Wenn diese beiden Sätze von allen arithmetischen und geometrischen Reihen gälten, so könnte man daraus verschiedene Folgerungen ziehen, und da die Eigenschaften der Reihen der Grund alles übrigen Rechnens sind, so würden wir auf diese Weise sehr weit kommen. Allein wie kommen wir zu der Ueberzeugung dass diese Resultate eine solche nothwendige Allgemeinheit haben, als sie als Lehrsätze haben müssen? Denn wenn wir das auch an hundert und tausend Reihen wiederholen, so kann uns immer der Zweifel kommen dass die individuellen Eigenschaften der Zahlen die wir gewählt haben uns täuschen, und dass es doch welche geben könne, wo es nicht eintreffen würde. Aus den Begriffen der Zahlen und der Reihen wir mögen sie drehn wie wir wollen können wir es auch nicht folgern. Wir müssen also ehe wir weiter gehn uns erst ein Mittel verschaffen zu beweisen und unsern Beispielen eben die Allgemeinheit geben, welche die Beweise aus der Construction der Figuren uns in der Geometrie verschaffen, und dazu werden Sie mir erlauben Ihnen nächstens den Schlüssel zu geben.

---

Sehen Sie mein lieber Graf, da ist doch wieder ein kleines Fragment zur Fortsetzung, aber es ist grösser als Sie denken, denn Sie werden nun leicht rathen können, woraus alles heraus will.

Inzwischen will ich Ihnen nicht bergen dass ich einen Streich gemacht habe den mir die Arithmetiker vielleicht nicht vergeben; ich habe von Progressionen gesprochen und bin noch nicht bei den Proportionen eingekehrt; aber mein Ideengang der vom Zählen ausging liess es nicht anders zu und die Proportionen sollen auch nicht leer ausgehen.

Wir haben gestern einen Königsbergischen Besuch gehabt, aber ich muss Ihnen gestehen, ich bin seitdem ich ihn gesehn nicht mehr ganz so empfindlich gegen das was dieser Besuch in Holland von Ihnen gesagt hat, ich bin ein närrischer Mensch aber ich stellte mir vor die Leute die Sie lobten müssten anders aussehn. Wie das

zugeht mögen Sie sich selbst enträthseln. Inzwischen wenn Sie nur a laudatis viris (die Damen nicht ausgeschlossen) gelobt werden — lassen Sie sich das lateinische Sprüchelchen von Graf Wilhelm erklären — was können Sie denn dafür, wenn es auch andere thun. Sie sehn mein Papier ist aus und meine Zeit leider ebenfalls also entschuldigen Sie

Ihren

Schleiermacher.

Schlobitten d. 16 Dec. 1791.

XVII.

Drei gegebene Gerade im Raume nach einem  
Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu  
schneiden.

Von

**Eduard Salfner.**

Kgl. Reallehrer in Nürnberg.

---

Drei Gerade können im Raume drei Hauptlagen haben. Bei paralleler Lage derselben geschah bisher der Schnitt mit vorgeschriebenen Winkeln nach einer von Gugler in seiner „darstellenden Geometrie“ angegebenen Weise oder aber nach der von Marx in seiner Inaugural-Dissertation <sup>1)</sup> mitgetheilten Construction. Während ersterer den rein geometrischen Weg wählt, erreicht letzterer vorerst das Ziel auf dem der Rechnung, löst aber nachgehends auch die Aufgabe allgemein constructiv für alle Lagen der Geraden mit Hilfe einer Fläche 4. Ordnung. Eine streng geometrische Lösung hält er für den Fall, dass die Geraden nicht parallel sind, „für nicht mehr durchführbar“. Gleichwol beschäftigte er sich auch in dieser Richtung mit der vorliegenden Aufgabe, ohne indes das Ziel zu erreichen; er schliesst seine Betrachtungen mit den Worten: „Praktisch ausführbar dürfte keine dieser Constructionen sein, doch wäre eine constructive Lösung auf diese Weise wenigstens denkbar“.

---

1) Marx, über eine Fläche 4. Ordnung etc. München, Kgl. Hof- u. Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf u. Sohn, 1880.

Der Verfasser glaubt nun gleichwol im Folgenden durch Construction und anschliessende Rechnung auf einem von Marx nicht angedeuteten, dazu für weitere Kreise gangbaren Wege für alle Fälle die Lösung der Aufgabe zu erreichen. Dieselben sollen in der nämlichen Reihenfolge wie sie gefunden wurden, vorgeführt werden.

## I.

Die drei Geraden schneiden sich in einem Punkte, eine von ihnen ( $A$ ) steht senkrecht auf den beiden andern ( $B$  und  $C$ ). (Dreikant.)

Die Geraden  $B$  und  $C$  sind in die Tafel Fig. 1. eins gelegt<sup>1)</sup> und bilden den beliebigen Winkel  $\alpha$ . Die auf ihnen senkrechte  $A$  gehört der Tafel zwei an. Ist nun  $bc$  eine Seite des gesuchten Schnittes  $bcd$ , der die Winkel  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  haben soll, so ist Dreieck  $bcd$  bestimmt. Dasselbe wurde nun um die Tafel eins gedreht, wodurch die zu  $bc$  gehörigen Höhen dieses und des Dreiecks  $abc$ , der Projection des ersteren, aufeinander fielen. Sobald eines dieser Dreiecke gegeben ist, kann das andere unter Benutzung des geometrischen Ortes der Scheitel gleicher Winkel über gegebener Seite  $bc$  gefunden werden. Sein Schnitt mit der gemeinschaftlichen Höhenrichtung ist der fehlende dritte Eckpunkt.

Nun ist  $de$  die Hypotenuse und  $ae$  die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zweite Kathete angibt, in welchem Abstand von  $a$  auf  $A$  der Punkt  $d$  genommen werden muss.

Construction. Man wird Strecke  $bc$  beliebig nehmen, darüber Dreieck  $abd_3$  mit den vorgeschriebenen Winkeln  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  construiren, hierauf den Kreis, den geometrischen Ort für alle Scheitel mit dem Winkel  $\alpha$  über  $bc$ , schlagen, wodurch der Schnittpunkt  $a$  desselben mit der Höhe über  $bc$  erhalten wird. (Der zweite Schnittpunkt beider bezieht sich auf den Winkel  $180^\circ \alpha$ ). Ein zweiter Kreis um  $e$  mit dem Radius  $ed_3$  gibt mit der senkrechten  $A$  den Schnittpunkt  $d$  über und unter der Ebene  $BC$ . (Spiegelbilder).

Der Punkt  $d$  auf der dritten Kante ( $A$ ) entspricht der beliebig angenommenen Seitenlänge  $bc$ . Soll aber der Schnitt durch einen

---

1) Nach der Darstellungsmethode Klingenfolds, dessen Schüler und späterer Assistent am Kgl. Polytechnikum München ich war.

andern Punkt auf  $A$  gehen, so hat man lediglich durch ihn zwei Parallele zu den Seiten des Dreiecks  $bc$  zu ziehen.

Für die Berechnung.

Im Anschluss an die Construction bezeichne ich  $bc$  mit  $a_1$ , die Strecke von  $e$  bis zur Sehnenmitte mit  $b_1$ , dann sind die Coordinaten des Kreismittelpunktes  $b_1$  und  $\frac{a_1 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$ , daher die Kreisgleichung, weil der Radius gleich  $\frac{a_1}{2 \sin \alpha}$ ,

$$\left(x - \frac{a_1}{2} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2 + (y - b_1)^2 = \left(\frac{a_1}{2 \sin \alpha}\right)^2$$

und die Gleichung der durch  $e$  gehenden Senkrechten

$$y = 0$$

also ist für den Schnitt

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \sin \alpha}\right)^2 - b_1^2} + \frac{a_1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

$$y = 0$$

Das untere Zeichen im Ausdruck für  $x$  gibt den 2. Schnittpunkt an, der jedoch nicht gelten kann als Scheitel eines Winkels  $(180^\circ - \alpha)^\circ$ .

Die Strecke  $ad = z$  ergibt sich aus dem bei  $x$  rechtwinkligen Dreieck  $ead$ :

$$z = \sqrt{ed_3^2 - ed_1^2} \quad \text{oder}$$

$$z = \pm \sqrt{ed_3^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2 \sin \alpha}\right)^2 - b_1^2} + \frac{a_1}{2} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2}$$

Das doppelte Vorzeichen entspricht den Spiegelbildern in Bezug auf Ebene  $BC$ .

## II.

Die drei Geraden bilden ein Dreikant, in welchem keine Kante senkrecht auf der gegenüber liegenden Seite steht.

Fig. 2.

Bezeichnen wir wieder mit  $A$ ,  $B$ , und  $C$  die Kanten der körperlichen Ecke, mit  $A_1$  die Projection von  $A$  auf die Ebene  $BC$ , die

wir als Tafel eins nehmen!  $bc$  sei abermals die beliebig angenommene Seite des durch seine Winkel bestimmten Schnitts  $cbd$ . Das durch  $B, C$  und  $bc$  bestimmte vorderhand noch unbekannte Dreieck  $a_1b_1c_1$  liege wieder in Tafel eins.

Nehmen wir nun an, dass beim Umklappen des Dreiecks  $bed$  um die gemeinsame  $bc$  in die gemeinschaftliche Tafelebene die beiden zu  $bc$  gehörigen Dreieckshöhen nicht aufeinander fallen, dann ist durch Seite  $bc$  und den gegenüber liegenden Winkel  $\alpha$  ein Kreis (in die Tafel eins gelegt) bestimmt, auf dessen Umfang der Scheitel des gesuchten Dreikants liegen muss. Sowol der der Seite  $bc$  gegenüber liegende Winkel  $\alpha$ , als auch der Winkel ( $\epsilon$ ) der Projection  $A_1$  mit  $B_1$  sind constante Winkel, darum ist auch der Punkt  $f_1$ , in welchem der Kreis um Sehne  $bc$  von der Projection  $A_1$  der dritten Kante geschnitten wird, ein fester Punkt; wandert auch  $a$  auf dem ganzen Bogen über  $bc$  dahin, so ist, wie  $b$  und  $c$ ,  $f_1$  bleibend. — Ebenso ist  $e$ , ein Höhenfusspunkt des Dreiecks  $bed$ , auf  $bc$  ein fester Punkt, da entsprechende Höhen ähnlicher Dreiecke die zugehörigen Seiten in gleichem Verhältnisse teilen; gleichzeitig sind  $g_1$  und  $h_1$ , die Schnittpunkte der Höhe mit dem vorhin genannten Kreise, feste Punkte.

Auf der um  $f_1$  beweglichen Sehne des Kreises, der Projection der dritten Kante, muss natürlich stets auch der Fusspunkt  $d_1$  des gesuchten dritten Punktes des Schnittes liegen. Ausserdem ist noch die Bedingung zu erfüllen, dass die Kante  $ad(A)$  den vorgegebenen Winkel  $dad_1$  mit der Ebene  $abc$  bilde, oder, dass

$$dd_1 : ad_1 = m : n$$

(ein gegebenes Verhältniss) sei. Der Fusspunkt  $d_1$  muss aber auch auf der Projection  $ed_1$  der Höhe des Dreiecks  $bed$  liegen. Dreht sich also Sehne  $af_1$  um  $f_1$ , so ist ihr Schnitt mit  $ed_1$  stets der Fusspunkt  $d_1$  einer Senkrechten, auf der

$$dd_1 = \frac{m \cdot ad_1}{n}$$

abzutragen ist.

Die Punktreihe der  $d$  ist in der Tafel zwei Fig. 3. gezeichnet. Deren Schnittpunkt mit dem Kreise um  $e$  und dem Halbmesser  $ed$  liefert den gesuchten Punkt  $d$ , da  $d$  zugleich auf diesem Kreise liegen muss, damit der Schnittpunkt  $bed$  die Höhe  $de$  habe.

Punkt  $f_1$  kann im allgemeinen jeder Punkt der Kreislinie werden,  $a_1$  wird aber stets auf der andern Seite von  $ed$  liegen müssen, da  $af$  die  $ed$  schneiden muss.

Fällt jedoch Punkt  $f_1$  auf  $g_1$  — was geschieht, wenn der zum Bogen  $b_1g_1$  gehörige Peripheriewinkel  $= \xi$  wird — so ist  $g_1h_1$  die einzige in Betracht kommende Sehne des Kreises, und Punkt  $h_1$  ist der gesuchte Punkt  $a_1$  wie im Fall I. Während aber dort die Gerade  $A$  mit  $ed$  einen rechten Winkel einschloss, bildet sie jetzt mit ihr einen vorgeschriebenen Winkel  $dad_1$ .

Wir construiren demnach unter beliebiger Annahme der Strecke  $bc$  eine Pyramide, welche den gestellten Bedingungen genügt, in folgender Weise:

Eine Strecke  $bc$  wird beliebig lang in der Tafel eins angenommen, doch soll sie wieder senkrecht zur Tafelkante sein. Hierauf construirt man den der Sehne  $bc$  und dem ihr gegenüber liegenden Winkel  $\alpha$  zukommenden Kreis und legt bei einem beliebigen Punkte  $a$  der Peripherie den Winkel

$$baf_1 = \varepsilon$$

an, den die Projection der dritten Kante  $A$  auf die gegenüber liegende Seitenfläche mit Kante  $B$  macht, wodurch man auf dem Kreisumfang den Punkt  $f_1$  erhält, durch den alle Sehnen  $af$  gehen müssen. Nachdem man noch durch  $e$ , den Höhenfusspunkt des Dreiecks  $bcd$ , die Senkrechte zu  $bc$  gezogen, wodurch Sehne  $h_1g_1$  erhalten wird, kann man der Reihe nach die Punkte  $a$  des Bogens, der auf der andern Seite von  $f$  mit Bezug auf  $h_1g_1$  liegt, mit  $f$  verbinden und zur erhaltenen Schnittpunktreihe  $d_1$  die zugehörige Punktreihe  $d$  mit Hilfe der gegebenen Projection

$$dd_1 : ad_1 = m : n$$

bestimmen. Die Höhe  $e_1d_3$  des mit  $bc$  und den vorgeschriebenen Winkeln gezeichneten Schnittdreiecks  $bcd$  nimmt man als Radius und zeichnet in Tafel zwei um  $e$  den Kreis. Der Schnitt desselben mit der Curve der  $d$  löst die Aufgabe.

Nicht alle Punkte des Kreises oder der Curve kommen in Betracht. Verbindet man  $f_1$  mit  $c_1$ , so ist Schnittpunkt  $d''$  Grenzpunkt, da die Punkte  $a$  auf Bogen  $c_1g_1b_1$  genommen Winkel gleich  $180^\circ - \alpha$  geben. Fällt  $d_3$  zwischen  $h_1$  und  $e$ , so ist  $d_3$  Grenzpunkt; fällt es auf  $h_1$ , oder darüber hinaus, so ist  $h_1$  Grenze, weil sich darüber hinaus die beiden Secanten  $g_1h_1$  und  $a_1f_1$  schneiden.

Die Projection  $A_1$  fällt zwischen  $B_1$  und  $C_1$ , auf  $B_1$  (oder  $C_1$ ) oder über beide hinaus, je nachdem der Flächenwinkel bei  $B_1$  (und  $C_1$ ) spitz, recht oder stumpf ist; dem entsprechend fällt  $f_1$  auf den Bogen  $c_1g_1b_1$ , auf  $b_1$  (oder  $c_1$ ), oder auf Bogen  $d_3b_1$  ( $d_3c_1$ ).

Der durch einen andern auf  $A$  angegebenen Punkt  $d$  gehende Schnitt ergibt sich nunmehr durch Ziehen von Parallelen.

**Zur Berechnung.**

Wir fallen vom Punkt  $f_1$  auf die Projection der Höhe des Dreiecks  $bcd$  die Senkrechte  $f_1O$ , nehmen  $O$  als Mittelpunkt des Coordinatensystems in der Ebene  $h_1g_1d$  und setzen

$$Od_1 = x, dd_1 = y, Of_1 = c, Og = p, hg = q, fd_1 = v \text{ und } ad_1 = w$$

Die Gleichungen

$$(p+x)(q-p-x) = vw \dots 1.,$$

$$v^2 = c^2 + x^2 \dots 2.,$$

$$y : w = m : n \dots 3.,$$

verbelfen auf die Gleichung der Curve:

$$(p+x)^2(q-p-x)^2 = (c^2+x^2)y^2 \frac{n^2}{m^2}$$

Diese Curve ist also von der 4 Ordnung <sup>1)</sup>.

Nimmt man dazu die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt  $e$ :

$$(x - \sigma)^2 + y^2 = r^2$$

wo

$$\sigma = Oe \text{ und } r = d_3 e_1$$

so entsteht zur Berechnung der Schnittpunkts-Abcisse

$$\begin{aligned} & x \frac{m^2 + n^2}{m^2} - x^3 \left[ 2(q - 2p) + 2 \frac{n^2}{m^2} \sigma \right] \\ & + x^2 \left[ (q - 2p)^2 - 2p(q - p) - \frac{n^2}{m^2} (r^2 - c^2 - \sigma^2) \right] \\ & + x \left[ 2p(q - p)(q - 2p) - 2 \frac{n^2}{m^2} c^2 \sigma \right] \\ & + p^2(q - p)^2 - \frac{n^2}{m^2} c^2 (r^2 - \sigma^2) = 0 \end{aligned}$$

1) Sie weist ein *max* auf, welches durch die Gleichung

$$x^3 + [2c^2 + (q - p)]x - c^2(q - 2p) = 0$$

bestimmt ist. Diese Gleichung zeigt nur einen reellen Wert für  $x$ .

Tritt der schon erwähnte Fall ein, dass  $f_1$  und damit  $O$  auf  $g_1$  fällt, so wird

$$c = p = 0$$

und die Gleichung der Curve 4. Ordnung

$$q - x = y \frac{n}{m}$$

also zur Geraden durch  $h_1$  (wo wir die Gerade im neg. Tafelraum vernachlässigen). Aus der Gleichung 4. Grades zur Berechnung von  $x$  wird

$$x^4 \frac{n^2 + m^2}{m^2} - x^3 \left[ 2q + 2\sigma \frac{n^2}{m^2} \right] + x^2 \left[ q^2 - \frac{n^2}{m^2} (r^2 - \sigma^2) \right] = 0$$

Für  $x^2 = 0$  erhält man den Punkt  $g_1$ , der mit  $b_1$  und  $c_1$  verbunden den Winkel  $180^\circ - \alpha$  gibt, und für unseren Fall unbrauchbar ist. Die beiden übrigen Werte sind

$$x = \frac{m^2 q + n^2 \sigma}{n^2 + m^2} \pm \sqrt{\frac{1}{n^2 + m^2} [n^2(r^2 - \sigma^2) - m^2 q^2] + \left( \frac{m^2 q + n^2 \sigma}{n^2 + m^2} \right)^2}$$

Wird auch noch  $n = 0$ , d. h. steht  $A$  auf der Ebene  $BC$  senkrecht, so wird die Hauptgleichung

$$x^4 - 2qx^3 + x^2 q^2 = 0 \quad \text{und} \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \pm q$$

wovon die beiden ersten Werte für den spitzen Winkel  $\alpha$  nicht genommen werden können, die beiden letzten den Punkt  $h_1$  bezeichnen, wodurch sich I. als besonderer Fall von II. erweist.

### III.

Die drei Geraden sind parallel und bestimmen ein Prisma.

Die drei parallelen Geraden sollen  $A$ ,  $B$  und  $C$  heissen. Dreieck  $ahg$  ist ein senkrechter, Dreieck  $abc$  ein schiefer Schnitt derselben.  $B$  und  $C$  liegen in Tafel eins und sind zugleich parallel zur Tafelkante. Die Spur der durch  $A$  gelegten Lotebene eins schneidet die Dreiecksseite  $bc$  in gleichem Verhältniss wie  $gh$ , so dass also

$$a_1 g_1 : a_1 h_1 = f_1 c_1 : f_1 b_1$$

Ist somit das Verhältniss  $a_1 g_1 : a_1 h_1$  constant, so ist dies auch von  $f_1 c_1 : f_1 h_1$  zu sagen.

Zieht man durch den dem schiefen Schnitte angehörigen Punkt  $a$  zu  $bc$  die Höhe  $ae_1$  und dreht das Dreieck um jenes in die Ebene  $BC$ , so ist  $a_3 e_1$  die Projection von der Geraden  $ae_1$ .

Nehmen wir wieder eine Strecke  $bc$  beliebig als Seite eines schiefen Schnittes, und sind  $\alpha\beta\gamma$  dessen Winkel, so ist damit Dreieck  $abc$ , mit ihm der Höhenfusspunkt  $e$ , aber auch der Punkt  $f$  mittels der eben angeführten Proportion bestimmt.

Zu diesem Dreieck suchen wir nun das Prisma, welches die gestellten Forderungen erfüllt! Hierzu bieten sich zwei Wege dar: Man kann sich die Festlegung des Punktes  $a$  oder auch des Punktes  $g_1$  (oder auch  $h_1$ ) zum Ziel setzen. Im Nachfolgenden ist der erstgenannte gewählt, weil er weitaus einfacher ist und sich den Betrachtungen in II. anschliesst.

Punkt  $a$  liegt vorerst auf dem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt  $e$  und dessen Radius  $ae$  ist, seine Projection eins ist die Senkrechte durch  $e$  zu  $bc$ ; somit liegt auch die Projection des Punktes  $a$  stets auf dieser Senkrechten.

Die Verbindungslinie  $f_1 a_1$ , die Projection von  $A$ , gibt die Richtung der Prismenkanten an. Wird nun irgend ein Punkt  $a_1$  auf  $a_3 e_1$  herausgegriffen, so liegt auf der zu ihr durch  $a_1$  gehenden zu  $a_1 f_1$  Senkrechten Punkt  $g_1$  und zugleich auf der Parallelen durch  $e_1$  zu  $f_1 a_1$ . Punkt  $a$  aber ist bestimmt durch die so gefundene Strecke  $a_1 g_1$  und die Winkel des vorgegebenen (schon genannten) Dreiecks  $ah_1 g_1$ . Es sei

$$\operatorname{tg} ag_1 a_1 = \frac{m}{n}$$

Lässt man so den Punkt  $a_1$  die Gerade  $a_1 e_1$  durchwandern und sucht dazu die Punktreihe der  $e$ , so erhält man eine Curve 4. Ordnung, deren Schnitt mit dem bereits bestimmten Kreise den gesuchten Punkt  $a$  liefert, wodurch dann auch das zur angenommenen Strecke  $bc$  gehörige Prisma bestimmt ist.

#### Construction. Fig. 5.

Ueber der beliebig angenommenen Strecke  $b_1 c_1$  zeichnet man ein Dreieck  $b_1 c_1 a_3$  mit den vorgeschriebenen Winkeln  $\alpha\beta\gamma$ , zieht die Höhe zu  $b_1 c_1$  und hat den Punkt  $e_1$ .

Dann verschafft man sich einen Normalschnitt des gegebenen Prismas und findet mit Hilfe der Proportion

$$a_1 g_1 : a_1 h_1 = f_1 c_1 : f_1 b_1$$

den Punkt  $f_1$  und

$$\operatorname{tg} \alpha g_1 a_1 = \frac{m}{n}$$

Zur Verbindungslinie  $a_1 f_1$  (wo  $a_1$  ein beliebiger Punkt auf der Projection  $a_1 e_1$  ist) zieht man hierauf durch  $c_1$  die Parallele  $c_1 g_1$  und durch  $a_1$  die Senkrechte, so erscheint  $g_1$  als Schnittpunkt. Construiert man

$$a a_1 : a_1 g_1 = m : n$$

so ist das hieher gehörige  $a$  bestimmt. Ebenso erhält man die übrigen Punkte der Reihe.

**Discussion. Fig. 6.**

Punkt  $e$  ist für  $m = n$  Rückkehrpunkt; denn es fällt  $a$  mit  $g$  und  $e$  zusammen, also ist

$$a g_1 = 0$$

und damit auch die Ordinate zwei ( $y$ ). Ist  $\frac{m}{n}$  von 1 verschieden, so erhält man ähnliche Curven.

Von  $e$  aus wächst die Ordinate zwei ( $y$ ) gleichzeitig mit  $a_1 g_1$  auf beiden Seiten von  $bc$ . Da aber die Länge  $g_1 l$  stets  $= c_1 f_1$  ist, der Winkel  $\zeta$  aber immer grösser wird, so wächst auch  $a_1 g_1$ , wie die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks  $a_1 g_1 l$  ergibt, fortwährend, bis die Kathete

$$a_1 g_1 = f_1 c_1$$

geworden, was für den unendlich entfernten Punkt der Senkrechten  $e_1 a_1$  zutrifft.

Auf der Seite rechts von  $f_1 c_1$  bekommt man einen eben solchen Curventheil. Der negative Tafelraum weist die gleichen Curventheile auf wie der positive.

Man erhält stets 2 Schnittpunkte mit dem Halbkreis, denen 2 congruente Prismen entsprechen.

Punkt  $f_1$  liegt (wie in II.) entweder zwischen  $B_1$  und  $C_1$ , auf  $B_1$  oder  $C_1$ , oder ausserhalb derselben, je nachdem die Flächenwinkel an  $B$  und  $C$  des vorgegebenen Prismas beide spitz, einer ein rechter

oder stumpfer Winkel ist. Als besonderer Fall ist das Zusammenfallen des Punktes  $f_1$  mit  $e_1$  zu erwähnen, da sich dann die Curve 4. Ordnung auf eine Gerade reducirt.

### Zur Berechnung.

Bezeichnet man mit Bezug auf den Coordinatenmittelpunkt  $e_1$  die Strecke

$$a_1 e_1 = x, a_1 a = y, f_1 e_1 = c, a_1 g_1 = w, f_1 a_1 = v, f_1 c_1 = p$$

so finden sich die Gleichungen

$$v^2 = x^2 + c^2$$

$$w : p = x : v$$

$$y : w = m : n$$

woraus man

$$n^2 y^2 x^2 + n^2 c^2 y^2 = p^2 m^2 x^2$$

erhält.

Nimmt man hierzu die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{wo } r = ae)$$

so erscheint

$$x^4 + \left( c^2 - r^2 + \frac{m^2}{n^2} p^2 \right) x^2 = c^2 r^2$$

also

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \left[ c^2 - r^2 + \frac{m^2}{n^2} p^2 \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 r^2 + \left[ c^2 - r^2 + \frac{m^2}{n^2} p^2 \right]^2}}$$

Für den erwähnten besonderen Fall ist  $c = 0$ , also wird aus der Gleichung der Curve 4. Ordnung

$$ny = \pm pm$$

d. i. eine Gerade  $A$  parallel zur Ebene  $BC$  oberhalb und unterhalb derselben.

Für  $x$  erhält man

$$x = \pm \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{n^2} p^2}$$

Für ein vorgelegtes ähnliches Prisma sind lediglich Parallel-  
linien zu ziehen, um auch hierfür den verlangten Schnitt zu erhalten.

## IV. Fig. 7.

Nunmehr unterliegt es keiner Schwierigkeit, drei zu einander windschiefe Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden.

Sind  $B$  und  $C$  zwei windschiefe Gerade und  $a$  ein Punkt der dritten ( $A$ ), so legt man durch  $a$  und  $B$  eine Ebene, welche die  $C$  im Punkte  $d$  schneidet,  $D$  ist die Spur eins dieser Ebene und infolge der Tafelannahme parallel zu  $B$ . Durch Verbindung der Punkte  $a$  und  $d$  erhält man den Schnittpunkt  $e$  auf  $B$ .

Ist nun  $abc$  das Schnittdreieck für  $a$ ,  $C$  und  $B$ ; welches die vorgeschriebenen Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  hat, so kann man weiter, weil

$$a_1 e_1 : a_1 d_1 = a_1 b_1 : a_1 b_1'$$

auch die Winkel des Dreiecks  $ab'c$  bestimmen, nach denen Dreikant  $d_1 c$ ,  $d_1 a_1$  und  $d_1 b_1'$  geschnitten wird.

Man verschafft sich also zunächst das Dreikant, bestimmt die Winkel, nach denen dasselbe zu schneiden ist, und teilt  $a_1 b_1'$  nach dem Verhältniss  $a_1 e_1 : a_1 d_1$ . Für die vorgegebenen Stücke  $a$ ,  $C$  und  $B$  ist dann durch Ziehen von Parallelen die Lösung zu erreichen; dieselbe ist auf II. zurückgeführt.

## XVIII.

## Die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centrakraft.

Von

Ulrich Bigler.

Ich halte es nicht für überflüssig, meiner Arbeit über die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centrakraft einige Bemerkungen voranzuschicken. Der dem Aufsätze zu Grunde gelegte Gegenstand gehört zu denjenigen Problemen der Mathematik, welche schon zu wiederholten Malen behandelt worden sind, und ich bin mir auch bewusst, dass selbst ganz tüchtige Mathematiker denselben zum Objecte ihres Nachdenkens gewählt haben. Aber trotz dem sind die Studien über diesen Gegenstand noch zu keinem Abschlusse gelangt, sondern die grosse Mannigfaltigkeit in der Annahme der Kraftwirkung lassen ihn als unerschöpflich erscheinen. Als Ursprung der Kraft wird hier eine Masse  $M$  angenommen, deren Einwirkung auf den materiellen Punkt  $m$  durch  $nMmf'(r)$  dargestellt wird, wo  $n$  ein proportionaler Factor ist, und  $f'(r)$  den Differentialquotienten einer Function darstellt, die nur vom Leitstrahle  $r$ , als der Verbindungslinie der beiden Massen, abhängig ist. Ueber die Function  $f'(r)$  werden nun verschiedene Annahmen gemacht, um daraus die resultirenden Bewegungsarten abzuleiten. Wie viele der hier behandelten Fälle schon untersucht worden sind, ist mir unbekannt; ich weiss daher nicht, wie viel Neues der Aufsatz enthalten wird. Doch glaube ich annehmen zu dürfen, dass der Leser die Ueberzeugung bekommen wird, der Verfasser habe

dabei einen selbständigen Weg eingeschlagen, und die befolgte Methode dürfte einiges Interesse darbieten. Ich empfehle meinen Collegen die im nachfolgenden Aufsätze enthaltenen Studien über die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centrakraft einer wolwollenden Beurteilung.

Die Masse  $M$  sei Ursprung einer Kraft, welche auf den materiellen Punkt  $m$  nach einem bestimmten Gesetze anziehend oder abstossend wirkt. Die Kraftwirkung geschehe immer in der Richtung des Leitstrahles  $r$ , welcher die beiden Massenmittelpunkte verbindet. Die Masse  $M$  wird als unbeweglich angenommen, während sich der Massenpunkt  $m$  unter dem Einflusse der Kraft frei bewegen kann. Die Kraft selber wird defnirt als eine Function der Massen  $M$  und  $m$  und des Leitstrahles  $r$  und zwar sei sie den Massen direct proportionirt, während die Abhängigkeit von  $r$  durch eine Function  $f'(r)$  dargestellt werden soll. Es sei daher die wirkende Kraft analytisch durch den Ausdruck

$$K = n M m f'(r)$$

dargestellt, wo  $n$  ein proportionaler Factor und  $f'(r)$  nur eine Function von  $r$  ist, die als Differentialquotient einer Function  $f(r)$  aufgefasst wird. Ich setze ferner fest, dass eine positive Kraft abstossend auf den Punkt  $m$  wirken soll, während eine neg. Kraft anziehend wirkt. Der Ausgangspunkt der Kraft  $K$  werde nun als Ursprung eines räumlichen, rechtwinkligen Coordinatensystems mit den Axen ( $X, Y, Z$ ) gewählt und dem Massenpunkte  $m$  die Coordinaten ( $x, y, z$ ) gegeben. Wird nun die Kraft  $K$  in ihre Componenten nach den drei Axen zerlegt, und werden dieselben resp. mit  $P, Q$  und  $R$  bezeichnet, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$P = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad Q = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad R = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Wenn nun der Leitstrahl  $r$  mit den pos. Axenrichtungen resp. die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bildet, so ist auch

$$P = K \cos \alpha; \quad Q = K \cos \beta; \quad R = K \cos \gamma$$

und wenn in diesen Gleichungen für die Kraft  $K$  und die Cosinuse die bekannten Werte eingesetzt werden, so hat man

$$P = n M m f'(r) \cdot \frac{x}{r}; \quad Q = n M m f'(r) \cdot \frac{y}{r};$$

$$R = n M m f'(r) \cdot \frac{z}{r}$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke mit den obigen führt nun auf das folgende System von Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = n M f'(r) \cdot \frac{x}{r} \\ 2) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = n M f'(r) \cdot \frac{y}{r} \\ 3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = n M f'(r) \cdot \frac{z}{r} \end{array} \right\} \text{ I.}$$

Wird nun hier die erste Gleichung mit  $y$  multiplicirt und die zweite mit  $x$  und subtrahirt, so erhält man die Gleichung

$$y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Mittelst ähnlicher Operationen an System I. erhält man nebst dieser Gleichung noch 2 andere, so dass das System I. durch das folgende System ersetzt werden kann.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\ 2) \quad z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \\ 3) \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ I'}$$

Wenn wir die Ableitung nach der Zeit von dem Ausdruck

$$y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t}$$

untersuchen, so findet man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \left( y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t} \right) = y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

und somit kann das System I' durch das Folgende ersetzt werden:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left( y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0 \\ 2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( z \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial z}{\partial t} \right) = 0 \\ 3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left( x \frac{\partial z}{\partial t} - z \frac{\partial x}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right\} \text{ I''}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man nun, dass die Ausdrücke  $\left(y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t}\right)$  etc. von der Zeit  $t$  unabhängig sind, somit durch Constante dargestellt werden können, die mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  bezeichnet werden sollen. Die Integration des System I'' ergibt daher das folgende:

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t} = A \\ 2) \quad z \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial z}{\partial t} = B \\ 3) \quad x \frac{\partial z}{\partial t} - z \frac{\partial x}{\partial t} = C \end{array} \right.$$

Nun stellen aber bekanntlich die Determinanten  $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot x \\ \frac{\partial y}{\partial t} \cdot y \end{vmatrix}$ , etc.

die Projectionen der doppelten Flächengeschwindigkeit auf die Coordinatenebenen dar. Wird diese mit  $F$  bezeichnet, so wird dieselbe durch die Gleichung

$$F = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

bestimmt. Da nun aber  $A$ ,  $B$  und  $C$  constante Grössen und von der Zeit unabhängig sind, so gilt dasselbe auch für  $F$ .

Wir erhalten daher für einen materiellen Punkt, der sich unter dem Einflusse einer Centrakraft frei im Raume bewegen kann, folgenden Hauptsatz:

Bewegt sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer Centrakraft frei im Raume, so ist dessen Flächengeschwindigkeit eine Constante.

Wenn daher der Radius  $r$  in der Zeiteinheit die Fläche  $\frac{1}{2} \cdot F$  durchläuft, so ist die von ihm während der Zeit  $dt$  durchlaufene Fläche  $\frac{1}{2} \cdot F \cdot dt$  und somit stellt  $F \cdot t$  den doppelten Inhalt des Sectors dar, der von  $r$  in der Zeit  $t$  durchlaufen wird. Der Anfang der Zeit ist so gewählt, dass mit  $t = 0$  auch der Sector null wird. Die Integrationsconstante, welche hier  $F \cdot t$  noch beigesetzt werden müsste, ist daher als null angenommen worden. Die Inhalte der Sektoren sind somit mit der Zeit direct proportional.

Dieser Satz gilt natürlich auch von den Projectionen der Sectors; auch diese sind mit der Zeit proportional und können durch  $At$ ,  $Bt$  und  $Ct$  dargestellt werden. Wenn nun die Gleichungen des Systems II. der Reihe nach mit  $z$ ,  $x$  und  $y$  multiplicirt und addirt werden, so erhält man die bedeutungsvolle Gleichung

$$Bx + Cy + Az = 0$$

Das ist nun die Gleichung einer Ebene, welche durch den Ursprung der Kraft gelegt ist, und in welcher die Bewegung des materiellen Punktes erfolgt. Wir haben daher den ferneren Satz:

Die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher unter dem Einflusse einer Centrakraft steht, erfolgt in einer Ebene, welche durch den Ursprung der Kraft gelegt ist.

Da die in dieser Gleichung auftretenden Coefficienten  $A$ ,  $B$  und  $C$  von der Zeit  $t$  unabhängig sind, so ist auch die Lage dieser Ebene von der Zeit unabhängig.

Ist z. B. die Constante  $A = 0$ , so erfolgt die Bewegung in einer Ebene, welche durch die  $z$ -axe geht; sind  $A = 0$  und  $B = 0$ , so erfolgt die Bewegung in der Ebene  $y = 0$  und sind alle drei Constanten gleich null, so erfolgt die Bewegung in einer Geraden, da ja in diesem Falle auch  $F = 0$  ist. Der Einfachheit wegen wähle man nun die Ebene, in welcher die Bewegung des materiellen Punktes erfolgt, als  $xy$ -ebene eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems und gebe dem Punkte  $m$  die Coordinaten  $(x, y)$ . Hier kann nun die doppelte Flächengeschwindigkeit durch  $y \frac{\partial x}{\partial t} - x \frac{\partial y}{\partial t}$  dargestellt werden, die in Zukunft mit  $A$  bezeichnet sein soll, wobei aber zu bemerken ist, dass dieses neue  $A$  im allg. nicht mit dem früher gebrauchten  $A$  identisch ist. Es gilt daher die Gleichung

$$1. \quad y dx - x dy = A dt$$

Wir suchen nun weiter einen Ausdruck für die Geschwindigkeit  $v$  des Punktes  $m$  in seiner Bahn. Bekanntlich sind die Ausdrücke  $\frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t}$  die Componenten derselben nach den Axen, so dass  $v$  durch die Gleichung

$$v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

bestimmt wird, und unter  $v$  selber die positive Quadratwurzel aus der rechten Seite verstanden ist. Wird nun diese Gleichung nach  $t$  abgeleitet und durch 2 dividirt, so erhält man

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Werden nun hier die zweiten Abgeleiteten aus System I. ersetzt und zugleich in Berücksichtigung gezogen, dass aus

$$r^2 = x^2 + y^2$$

durch einmalige Ableitung nach  $t$  die Relation

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = x \frac{\partial x}{\partial t} + y \frac{\partial y}{\partial t}$$

folgt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial t} = n M f'(r) \frac{\partial r}{\partial t}$$

Soll nun  $v^2$  aus dieser Gleichung als Function von  $r$  dargestellt werden können, so muss das unbestimmte Integral  $\int f'(r) dr$  angebar sein. Wir nehmen daher an, es sei  $f'(r)$ , wie schon im Anfang gesagt wurde, das vollständige Differential einer Function  $f(r)$ , so dass man setzen kann

$$f'(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}$$

In diesem Falle ist nun

$$2. \quad v^2 = 2n M f(r) + B$$

wo  $B$  die Integrationsconstante bezeichnet, und unter  $v$  die pos. Wurzel zu verstehen ist. Damit nun eine reelle Bewegung des Punktes  $m$  statt finde ist absolut notwendig, dass der Ausdruck unter der Quadratwurzel positiv ausfalle, und es sind daher nur solche Werte von  $r$  zulässig, welche  $(2n M f(r) + B)$  pos. machen. Für eine gegebene Function  $f(r)$  ist aber auch  $B$  so zu wählen, dass die pos. Beschaffenheit des genannten Ausdruckes längs der Wegcurve erhalten bleibt. Ich suche ferner noch einen allgemeinen Ausdruck für  $dr$ . Der Leitstrahl  $r$  bilde mit der pos. Richtung der  $x$ -axe den Winkel  $w$ . Dann ist

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

Da nun bekanntlich der Ausdruck  $(y dx - x dy)$  den doppelten Inhalt des Dreiecks darstellt, das gebildet wird von dem Wegelement  $ds$  und den Leitstrahlen  $r$  und  $r_1$  nach den Punkten  $(x, y)$  und  $(x+dx, y+dy)$  und dieser Inhalt auch durch  $r^2 dw$  dargestellt werden kann,

wenn  $d\omega$  den Winkel zwischen den Strahlen  $r$  und  $r_1$  bezeichnet, so hat man die Beziehung

$$y dx - x dy = A dt = r^2 d\omega$$

Für das Wegelement  $ds$ , welches vom Massenpunkte  $m$  während der Zeit  $dt$  mit der Geschwindigkeit  $v$  durchlaufen wird, hat man den Ausdruck

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\omega)^2$$

Da nun aber auch

$$ds = v dt$$

ist, so gilt die Gleichung

$$(v dt)^2 = (dr)^2 + (r d\omega)^2$$

Wird nun in dieser Gleichung für  $v^2$  der oben gefundene Ausdruck substituirt und ebenfalls  $d\omega$  mittelst der Gleichung

$$r^2 d\omega = A dt$$

ersetzt, so erhält man für  $dr$  nach einigen Umformungen den Wert

$$3. \quad (dr)^2 = \left( (2n Mf(r) + B) - \frac{A^2}{r^2} \right) dt^2$$

wo unter  $dr$  die pos. Quadratwurzel aus der rechten Seite verstanden ist. Dass die Annahme  $A = 0$  eine geradlinige Bewegung bedingt, ist sofort klar, da in diesem Falle die Flächengeschwindigkeit gleich null ist. Wenn aber  $A = 0$  ist, so muss wegen

$$A dt = r^2 d\omega \quad \text{auch} \quad d\omega = 0$$

sein, da ja nicht überall  $r = 0$  sein kann. Ist aber

$$d\omega = 0$$

so muss  $\omega = \text{Constante}$  sein, also die Bahn eine gerade Linie. Wenn die Bahn des materiellen Punktes ein Kreis sein soll, so muss längs der ganzen Wegcurve

$$dr = 0$$

also  $r = \text{Const.}$  sein. Damit dieses der Fall ist, muss die Bedingung

$$2n Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2} = 0$$

erfüllt sein, das heisst, es muss

$$2n Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2}$$

stattfinden. Da nun aber

$$2n Mf(r) + B = v^2$$

ist, so kann die Bedingung für eine Kreisbewegung auch in der Form

$$v^2 = \frac{A^2}{r^2}$$

dargestellt werden; es muss also

$$A = rv$$

sein. Diese Bedingung ist nun aber sofort klar, wenn man sich daran erinnert, dass  $A$  die Flächengeschwindigkeit und  $v$  die Tangentialgeschwindigkeit des Punktes  $m$  ist. In diesem Falle ist dann auch

$$r dw = v dt = \frac{A}{r} dt$$

Aus der allgemeinen Gleichung 3. ergibt sich für das Zeitelement  $dt$  der Ausdruck

$$3'. \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{(2n Mf(r) + B) - \frac{A^2}{r^2}}}$$

Für eine Kreisbewegung, bei welcher sowohl der Zähler als auch der Nenner in diesem Ausdrucke verschwindet, ist diese Formel nicht anwendbar. Ersetzt man hier das Zeitelement  $dt$  durch  $\frac{r^2 dw}{A}$  so erhält man

$$4. \quad dw = \frac{A dr}{r^2 \sqrt{(2n Mf(r) + B) - \frac{A^2}{r^2}}}$$

eine Gleichung die für eine parallelinige Bewegung nicht mehr anwendbar ist, da in diesem Falle sowohl  $dr$ , als auch  $A$  gleich null ist. Die Formeln 3) und 4) zeigen nun deutlich, dass für eine reelle Bewegung nicht nur  $(2n Mf(r) + B)$  pos. sein muss, sondern auch  $2n Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2}$ . Es muss daher beständig  $2n Mf(r) + B$  pos. und grösser als  $\frac{A^2}{r^2}$  sein.

Ich bin nun mit den allgemeinen Betrachtungen beim Schlusse angelangt und gehe zu den speciellen Fällen über.

## I. Die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

Bedingung:  $A = 0$ .

$$1) f'(r = r; \quad 2n Mf(r) = n M r$$

$$K = n M m r; \quad g = n M r$$

Bei dieser speciellen Annahme sind sowol die Kraft als auch die Beschleunigung pos.; die Kraft übt daher eine abstossende Wirkung aus. Wenn die Constante  $n$  noch durch  $n_1^2$  ersetzt wird, so erhält man für die Geschwindigkeit  $v$  den Ausdruck

$$v = \sqrt{M n_1^2 r^2 + B}$$

Setzt man nun fest, dass in  $r = a$  die Geschwindigkeit null sei, so wird die Constante  $B$  durch die Gleichung

$$0 = \sqrt{M n_1^2 a^2 + B}$$

bestimmt, woraus folgt, dass

$$B = -n_1^2 a^2 M$$

sein muss. Es ist daher

$$v = n \cdot \sqrt{M} \cdot \sqrt{r^2 - a^2}$$

und man erkennt, dass eine reelle Bewegung nur für  $r > a$  statt hat. Wird hier

$$r = a + \varrho$$

gesetzt, wo  $\varrho$  neben der endlichen Strecke  $a$  verschwindend klein sein soll, so kann die Geschwindigkeit in diesem Punkte annähernd durch

$$v = n_1 \sqrt{2aM} \cdot \sqrt{\varrho}$$

dargestellt werden. Dieselbe ist daher annähernd mit der Quadratwurzel aus dem Wege proportional, nur einer hat die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = \varrho : \varrho_1$$

Ist aber  $r$  sehr gross, so dass neben  $r$  die Grösse  $a$  vernachlässigt werden kann, so ist in tiefster Näherung

$$v = n \sqrt{M} \cdot r$$

In grosser Ferne ist daher die Geschwindigkeit mit der Strecke  $r$  direct proportionirt und wird auf die gleiche Art unendlich, wie der zurückgelegte Weg.

Der Punkt  $P$  soll die Strecke  $a$  nach aussen begrenzen. Man trage nun vom Punkte  $P$  aus auf dem Leitstrahle die Strecke  $h$  nach aussen ab und untersuche die Geschwindigkeit auf dem Wege  $h$ . Wenn nun die Wege  $a$  und  $h$  noch so beschaffen sind, dass der Quotient  $\frac{h}{a}$  verschwindend klein ist, so dass höhere Potenzen derselben vernachlässigt werden können, so lässt sich  $v$  annähernd durch die Gleichung

$$v = n_1 \cdot \sqrt{2aM} \cdot \sqrt{\varrho}$$

darstellen. Auf der Strecke  $h$  gilt daher für die Geschwindigkeit annähernd die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = \varrho : \varrho_1$$

Die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich wie die durchlaufenen Wege.

Das Zeitelement  $dt$ , welches der materielle Punkt  $m$  braucht, um das Wegelement  $dr$  zurückzulegen, wird nach Gleichung (3') durch

$$dt = \frac{dr}{v}$$

bestimmt, eine Relation, die für eine geradlinige Bewegung sofort einleuchtet. Setzt man nun in

$$v dt = dr$$

für  $v$  den oben gefundenen Wert ein, so folgt

$$dt = \frac{dr}{n_1 \sqrt{M} \cdot \sqrt{r^2 - a^2}}$$

Um diese Gleichung zu integrieren setze man

$$\frac{a}{r} = \sin \alpha$$

dann ist

$$dr = - \frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot d\alpha$$

und somit

$$dt = - \frac{d\alpha}{n_1 \sqrt{M} \cdot \sin \alpha} = - \frac{d \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{n_1 \sqrt{M} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

daher ist

$$t = - \frac{1}{n_1 \sqrt{M}} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C$$

Nun ist aber

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{a}{r + \sqrt{r^2 - a^2}}$$

somit

$$t = \frac{1}{n_1 \sqrt{M}} \cdot \log \left( \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right) + C$$

Soll nun für  $r = a$  auch  $t = 0$  sein, so muss  $C = 0$  angenommen werden, und man erhält schliesslich für die Zeit den Wert

$$t = \frac{1}{n_1 \sqrt{M}} \cdot \log \left( \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right)$$

wenn dieselbe von dem Momente an gerechnet wird, wo der materielle Punkt  $m$  seine Bewegung beginnt. Um die Zeit in der Nähe des Ausgangspunktes der Bewegung zu beurteilen, setze man

$$r = a + \varrho$$

und nehme  $\varrho$  sehr klein an. Weil unter dieser Voraussetzung  $\frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a}$  annähernd durch  $1 + \sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$  dargestellt werden kann,

also  $\log \left( \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right)$  durch  $\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$ , so lässt sich die Zeit in einem solchen Punkte annähernd durch

$$t = \frac{1}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{2}{aM}} \cdot \sqrt{\varrho}$$

darstellen. Dieselbe ist somit mit der Quadratwurzel aus der kleinen Wegstrecke  $\varrho$  proportional; hier gilt daher die Proportion

$$t^2 : t_1^2 = \varrho : \varrho_1$$

Ist  $r$  sehr gross, so dass  $a$  neben  $r$  vernachlässigt werden kann, so ist  $\frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a}$  annähernd gleich  $\frac{2r}{a}$  und man erkennt, dass die Zeit unendlich wird wie  $\log r$ . Man untersuche ferner die Zeit auf der früher definirten Wegstrecke  $h$  und setze

$$r = a + \varrho$$

wo der Quotient  $\frac{\varrho}{a}$  für das Intervall  $0 < \varrho < h$  als verschwindend

klein betrachtet werden kann, Weil in diesem Falle  $\frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a}$

durch  $1 + \sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$  also  $\log \left( \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right)$  durch  $\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}$  ersetzt wer-

den kann, so kann auf der angegebenen Strecke  $h$  die Zeit annähernd durch

$$t = \sqrt{\frac{2aM}{an_1 M}} \cdot \sqrt{e}$$

dargestellt werden. Dieselbe ist daher mit der Quadratwurzel aus dem durchlaufenen Wege proportional.

$$2) f'(r) = -r$$

$$K = -nMmr; \quad g = -nMr; \quad 2nMf(r) = -nMr^2$$

Da in diesem Falle der analytische Ausdruck der Kraft neg. ist, so wirkt dieselbe anziehend auf die Masse  $m$  ein. Ersetzt man wie früher die Constante  $n$  durch  $n_1^2$  und nimmt die Geschwindigkeit in  $r = a$  wieder als null an, so erhält man für  $v$  den Ausdruck

$$v = n_1 \sqrt{M} \cdot \sqrt{(a^2 - r^2)}$$

Diese Gleichung offenbart sofort, dass nur auf dem Wege  $r < a$  eine reelle Bewegung stattfindet. Die Geschwindigkeit im Anfange des Weges ist null und der Massenpunkt kommt mit der Geschwindigkeit  $n_1 \sqrt{M} \cdot a$  im Ursprunge der Kraft an. Die Endgeschwindigkeiten verhalten sich daher wie die durchlaufenen Wege. Ist ferner  $a$  sehr gross und  $r$  so beschaffen, dass  $\frac{r}{a}$  verschwindend klein ist, so kann die Geschwindigkeit  $v$  für solche Punkte der Bahn durch  $n_1 \sqrt{M} \cdot a$  dargestellt werden, ist daher auf der betreffenden Wegstrecke annähernd constant. Wenn daher der Massenpunkt  $m$  aus dem Unendlichen, wo seine Geschwindigkeit als null aufgefasst wird, durch die oben definirte anziehende Kraft in das endliche Gebiet gelangt, so kann hier die Geschwindigkeit als constant aufgefasst werden, welche auf dieselbe Weise unendlich wird, wie der durchlaufene Weg. Vom Punkte  $P$  aus, welcher die Wegstrecke  $a$  nach aussen begrenzt, werde nach innen die Strecke  $h$  abgetragen und es soll die Geschwindigkeit  $v$  auf diesem Wegstücke untersucht werden. Man setze daher

$$a = R + h, \quad r = R + r_1$$

wo der Quotient  $\frac{r_1}{R}$  für das Intervall  $0 < r_1 < h$  verschwindend klein ist. Setzt man dann noch  $r_1 + r = h$ , so ist in tiefster Näherung

$$\sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{2Rr}$$

und daher

$$v = n_1 \sqrt{2RM} \cdot \sqrt{r}$$

Auf dem Wegstücke  $h$  gilt daher annähernd die Proportion

$$v_1^2 : v^2 = r_1 : r$$

Um einen allgemein gültigen Ausdruck für die Zeit  $t$  zu erhalten, setze man wieder

$$v dt = dr$$

und führe in diese Gleichung für  $v$  den oben gefundenen Wert ein, dann hat man

$$dt = \frac{dr}{n_1 \sqrt{M} \cdot \sqrt{(a^2 - r^2)}}$$

Um diese Gleichung integrieren zu können, setze man

$$r = a \sin \alpha, \text{ also } dr = a \cos \alpha d\alpha$$

Durch diese Substitution geht nun der obige Ausdruck in den andern

$$dt = \frac{d\alpha}{n_1 \sqrt{M}}$$

über, so dass

$$t = \frac{\alpha}{n_1 \sqrt{M}} + C$$

gesetzt werden kann.

In  $r = a$  ist  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Wird nun der Anfangspunkt der Zeit  $t$  gewählt, dass mit

$$v = 0 \text{ auch } t = 0$$

ist, so muss die Constante  $C$  den Wert  $\frac{-\pi}{2n_1 \sqrt{M}}$  haben. Weil nun auch

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{a}$$

ist, so hat man schliesslich, wenn noch die Zeit pos. aufgefasst wird, für  $t$  den Wert

$$t = \frac{1}{2n_1 \sqrt{M}} \left( \pi - 2 \arcsin \frac{r}{a} \right)$$

Die ganze Zeit  $T$ , welche der Massenpunkt braucht, um den Weg  $a$  zurückzulegen, ist daher von  $a$  unabhängig, also eine Constante, die durch  $\frac{\pi}{2n_1 \sqrt{M}}$  dargestellt wird. Somit erreichen verschiedene Massenpunkte, die in verschiedenen Entfernungen zu gleicher Zeit ihre Bewegungen nach dem Kraftmittelpunkte beginnen, in demselben

Momente den Ursprung der Kraft. Ist  $a$  unendlich gross, so ist für alle endliche  $r$  die Zeit  $t$  annähernd gleich  $\frac{1}{2n_1 \sqrt{M}} \cdot \left(\pi - \frac{2r}{a}\right)$ . In unmittelbarer Nähe des Ausgangspunktes der Bewegung, wo

$$r = a - \rho$$

und  $\rho$  sehr klein ist und  $2 \arcsin \frac{r}{a}$  annähernd durch  $\left(\pi - 2 \sqrt{\frac{2\rho}{a}}\right)$  dargestellt werden kann, ist die Zeit  $t$  mit der Quadratwurzel aus der Wegstrecke proportionirt, das heisst, es ist in tiefster Näherung

$$t = \frac{1}{n_1 \sqrt{M}} \cdot \sqrt{\frac{2\rho}{a}}$$

Um nun auch hier die Zeit  $t$  auf der früher bezeichneten Wegstrecke  $h$  untersuchen zu können, setze man wieder

$$a = R + h; \quad r = R + r_1$$

Wenn nun noch

$$r_1 + r = h$$

gesetzt und angenommen wird, dass der Quotient  $\frac{r}{R}$  im ganzen Intervalle  $0 < r < h$  verschwindend klein sei, so gelten näherungsweise die Gleichung

$$\sin \alpha = 1 - \frac{r}{R} + \text{etc.}; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{2r}{R}} + \text{etc.};$$

$$2\alpha = \pi - 2 \sqrt{\frac{2r}{R}} + \text{etc.}$$

und daher kann  $t$  auf der Strecke  $h$  in tiefster Näherung durch

$$t = \frac{1}{n_1 \sqrt{M}} \cdot \sqrt{\frac{2r}{R}}$$

dargestellt werden. Weil in diesem Falle die Beschleunigung  $g$  annähernd durch  $n_1^2 MR$  und die Geschwindigkeit durch  $n_1 \sqrt{2RM} \sqrt{r}$  dargestellt werden kann, so ergeben sich aus der Gleichung für die Zeit  $t$  auch die nachfolgenden Näherungswerte

$$r = \frac{n_1^2 MR}{2} \cdot t^2; \quad r = \frac{g}{2} \cdot t^2; \quad r = \frac{v}{2} \cdot t$$

Um die Arbeit über die geradlinige Bewegung nicht übermässig auszudehnen, behandle ich bloss noch den Fall, wo die gegebenen Massen nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einander

wirken, und setze  $f'(r) = -\frac{1}{r^2}$ . Man könnte selbstredend für  $f'(r)$  noch andere Functionen von  $r$  wählen und namentlich auch solche, wo höhere Potenzen von  $r$  vorkommen. Da aber die Bestimmung der dabei auftretenden Integrale mehr als elementare Hilfsmittel erfordert, so sehe ich hier von diesen Fällen ab und gehe über zur Behandlung von

$$3) \quad f'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

$$K = -\frac{nMm}{r^2}; \quad g = -\frac{nM}{r^2}; \quad 2nMf(r) = \frac{2nM}{r}$$

Wenn auch hier die im allgemeinen Ausdrucke für die Geschwindigkeit  $v$  auftretende Constante  $B$  so bestimmt wird, dass im Punkte  $r = a$  die Bewegung beginnt, also dort  $v = 0$  annimmt, so ist

$$v = \sqrt{2nM} \cdot \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{2nM}{a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-r}{r}\right)}$$

und wir haben nur auf der Wegstrecke, wo  $r < a$  ist, eine reelle Bewegung. Wenn der Massenpunkt im Unendlichen seine Bewegung nach dem Kraftmittelpunkt beginnt, so kann die Geschwindigkeit im endlichen Gebiete annähernd durch  $\sqrt{2nM} \sqrt{\frac{1}{r}}$  dargestellt werden, wo  $r$  jeweilen seine Entfernung vom Ursprunge angibt. Somit ist bei dieser Annahme der Kraftwirkung das Product  $v^2 r$  annähernd constant und es gilt die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r$$

Untersuchen wir auch hier die Geschwindigkeit  $v$  auf der Strecke  $h$  und machen dabei die gleiche Voraussetzung wie früher, so ist annähernd

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+r_1} = \frac{1}{R} - \frac{r_1}{R^2} + \text{etc.}; \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} + \text{etc.}$$

also

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a} = \frac{h-r_1}{R^2} + \text{etc.}$$

Somit kann  $v$  auf der Strecke  $h$  in tiefster Näherung durch

$$v = \frac{\sqrt{2nM}}{R} \cdot \sqrt{r}$$

dargestellt werden. Dieselbe ist somit mit der Quadratwurzel aus der durchlaufenen Wegstrecke proportional. Wird diese Gleichung nach  $r$  aufgelöst und beachtet, dass annähernd der absolute Wert von der Beschleunigung durch  $\frac{nM}{R^2}$  dargestellt werden kann, so findet man

$$r = \frac{v^2}{2g}$$

Zur Bestimmung der Zeit dient in diesem Falle die Gleichung

$$dt = \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{2nM} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{r}{a}\right)}}$$

Um dieselbe integrieren zu können, setze man

$$r = a \sin^2 \alpha$$

also

$$dr = 2a \sin \alpha \cos \alpha d\alpha,$$

dann ist

$$dt = \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{2nM}} \cdot 2 \sin^2 \alpha d\alpha$$

Weil ferner

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

ist, so erhält man für die Zeit  $t$  den allgemeinen Ausdruck

$$t = \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{2nM}} \cdot (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) + C$$

Die Zeit  $t$  soll nun von dem Momente an gezählt werden, wo der Massenpunkt seine Bewegung beginnt, also im Punkte P. Für denselben ist aber

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

und die Constante  $C$  muss somit den Wert  $\frac{-a \sqrt{a} \pi}{2 \sqrt{2nM}}$  haben. Ferner ist

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha = \sqrt{\frac{r}{a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r}{a}}$$

und

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{r}{a}}$$

demnach ist der pos. Wert von  $t$  gleich dem Ausdrucke

$$t = \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{2nM}} \cdot \left( \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{r}{a}} \right) + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{r(a-r)} \right)$$

Die Zeit, welche der Massenpunkt  $m$  braucht, um die Strecke  $a$  zu durchlaufen, wird gefunden, indem in der obigen Gleichung  $r = 0$  gesetzt wird. Wird dieselbe, wie früher, mit  $T$  bezeichnet, so erhält man dafür den Wert

$$T = \frac{a \sqrt{a} \cdot \pi}{2 \sqrt{2n M}}$$

Für verschiedene Wegeslängen  $a$  gilt daher die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

Die Quadrate der Gesamtzeiten verhalten sich daher wie die Kuben der durchlaufenen Wege. Ist  $a$  sehr gross und stellt  $r$  eine endliche Zahl dar, so kann die Zeit  $t$  in tiefster Näherung durch  $\frac{a \sqrt{a} \cdot \pi}{2 \sqrt{2n M}}$  dargestellt werden, wird daher unendlich von der Form  $a^{\frac{3}{2}}$ .

Zum Schlusse will ich noch die Zeit auf der Strecke  $h$  untersuchen. Der Quotient  $\frac{r}{R}$  sei längs des Intervalls  $0 < r < h$  verschwindend klein. Weil in diesem Falle  $\sqrt{\frac{r}{a} \left(1 - \frac{r}{a}\right)}$  und  $\alpha$  annähernd durch

$$\sqrt{\frac{r}{a} \left(1 - \frac{r}{a}\right)} = \sqrt{\frac{r}{R}} + \text{etc.}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r}{R}} + \text{etc.}$$

dargestellt werden können, so kann auf der Strecke  $h$  die Zeit in tiefster Näherung durch

$$t = \frac{2R}{\sqrt{2n M}} \cdot \sqrt{r}$$

dargestellt werden. Hier gilt daher die Proportion

$$t^2 : t_1^2 = r : r_1$$

das heisst: die Quadrate der Zeiten verhalten sich wie die durchlaufenen Wege.

## II. Die kreisförmige Bewegung eines materiellen Punktes.

Die Bedingung für eine kreisförmige Bewegung ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

das heisst, der Leitstrahl  $r$  muss von der Zeit unabhängig sein. Damit nun aber längs des ganzen Weges

$$dr = 0$$

ist, muss offenbar

$$2n Mf(r) + B - \frac{A^2}{r^2} = 0$$

sein, wobei aber angenommen wird, dass  $A$  von null verschieden sei, weil sonst keine reelle Bewegung vorhanden wäre. Weil nun aber

$$2n Mf(r) + B = v^2$$

ist, so lässt sich die obige Bedingung durch die andere

$$A = rv$$

wiedergeben, was für eine Kreisbewegung sofort einleuchtet, da ja  $A$  die doppelte Flächengeschwindigkeit darstellt. Aus der Bedingung

$$dr = 0$$

folgt aus den früher angegebenen Formeln, dass auch

$$ds = r dw = v dt$$

sein muss. Bei der Kreisbewegung ist daher einerseits

$$v = \sqrt{2n Mf(r) + B}$$

und andererseits

$$v = \frac{A}{r}$$

und da

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

ist, so muss auch überall  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , somit  $v = \text{Constante}$  sein. Der Massenpunkt  $M$  durchläuft daher unter dem Einflusse einer Centralkraft mit constanter Geschwindigkeit die Kreisbahn und eine Beschleunigung findet nur in der Richtung der Normalen statt, welche ihrem absoluten Werte nach durch

$$g = n Mf'(r)$$

dargestellt werden kann. Wir suchen nun zuerst nach einem andern Ausdrücke für die Beschleunigung  $g$ . Die beiden Punkte  $P$  und  $P_1$  mögen das Curvelement  $ds$  abgrenzen; in beiden ist die Geschwindigkeit  $v$  dieselbe und unterscheidet sich nur durch ihre Richtungen. Wird nun dieser Richtungsunterschied mit  $dw$  bezeichnet, so ist

$$v dw = g dt$$

Nun ist aber bekanntlich auch

$$r dw = ds = v dt$$

somit

$$r \frac{\partial w}{\partial t} = v, \quad \text{also} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{v}{r}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung

$$r \frac{\partial w}{\partial t} = g$$

ein, so erhält man für die Normalbeschleunigung  $g$  schliesslich den Ausdruck

$$g = \frac{v^2}{r}$$

Nun sollen bestimmte Annahmen über die Kraftwirkung gemacht werden.

$$1) \quad f(r) = -r$$

$$K = -n M m r; \quad g = -n M r; \quad 2n M f(r) = -n M r^2$$

Die Geschwindigkeit  $v$  wird mittelst der Gleichung

$$v^2 = r g$$

gefunden, wo unter  $g$  der absolute Wert der Beschleunigung verstanden ist. Setzt man hier für  $g$  obigen Wert ein, so folgt

$$v = r \cdot \sqrt{nM}, \quad \text{also} \quad \frac{v}{r} = \sqrt{nM}$$

Für verschiedene Massenpunkte  $m$ , welche unter dem Einflusse derselben Masse  $M$  in verschiedenen Abständen  $r$  den Kraftursprung umkreisen, ist daher der Quotient  $\frac{v}{r}$  eine Constante; daher gilt hier die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Radien der Kreisbahnen.

Zur Bestimmung der Flächengeschwindigkeit  $A$  wende man die Formel

$$A = r v$$

an und setze für  $v$  den oben gefundenen Wert ein; dann findet man

$$A = r^2 \sqrt{nM}; \quad \frac{A}{r^2} = \sqrt{nM}$$

Somit ist auch  $\frac{A}{r^2}$  für alle materiellen Punkte der verschiedenen Bahnen eine Constante und es gilt daher die Proportion

$$A : A_1 = r^2 : r_1^2$$

Die Flächengeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

Wenn der Leitstrahl  $r$  mit der pos. Richtung der  $x$ -axe den Winkel  $w$  bildet, so ist

$$r dw = v dt$$

also

$$dw = \sqrt{nM} dt$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt sofort

$$w = \sqrt{nM} \cdot t$$

wenn die Zeit von dem Momente an gerechnet wird, wo der materielle Punkt  $m$  die  $x$ -axe passirt.

Die Radien der verschiedenen Bahnen durchlaufen daher in gleichen Zeiträumen gleiche Winkel. Wenn die Umlaufszeit mit  $T$  bezeichnet wird, so findet man für dieselbe den Wert

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{nM}}$$

Da dieser Ausdruck vom Radius der Bahn unabhängig ist, so durchlaufen die verschiedenen Massenpunkte in gleichen Zeiten ihre Bahnen. Dass für eine solche Kraftwirkung nur pos. Werte von der im Ausdrücke für  $v$  auftretenden Constanten  $B$  in Betracht kommen können, ergibt sich schon aus der Gleichung

$$v^2 = B - nMr^2$$

Ist einmal ein pos. Wert von  $B$  gewählt, so gibt die Gleichung

$$nMr^2 = B - nMr^2$$

den Wert von  $r$ . Nach derselben ist

$$r = \sqrt{\frac{B}{2nM}}$$

und es gilt daher die Proportion

$$r^2 : r_1^2 = B : B_1$$

Setzt man diesen Wert von  $r$  in den Ausdruck  $B - nMr^2$  ein, so geht dieser in  $\frac{B}{2}$  über, ist daher pos., sobald  $B$  pos. ist. Die Constante  $B$  darf daher alle positiven Werte durchlaufen.

$$2) \quad f'(r) = -r^3$$

Ersetzt man das frühere  $n$  durch  $\frac{3n_1^3}{2}$ , so hat man hier

$$K = -\frac{3}{2} n_1^3 M m r^2; \quad g = -\frac{3}{2} n_1^3 M r^2; \quad 2nMf(r) = -n_1^3 M r^3$$

Nach der bekannten Formel

$$\frac{v^2}{r} = g$$

erhält man für die Geschwindigkeit  $v$  den Wert

$$v^2 = \frac{3}{2} M n_1^3 r^2, \quad \text{also} \quad v = n_1 r \cdot \sqrt{\frac{3n_1 M r}{2}}$$

Dividirt man daher  $v^2$  durch  $r^3$ , so ergibt sich, dass dieser Quotient für alle materiellen Punkte, welche in concentrischen Bahnen den Kraftursprung umkreisen, constant ist, dass somit für dieses Bewegungssystem die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r^3 : r_1^3$$

gilt.

Die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich daher wie die Kuben der Radien.

Um einen Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit  $A$  zu erhalten, setze man wieder  $A = rv$  und führe für  $v$  den oben erhaltenen Wert ein. Dann erhält man

$$A^2 = \frac{3}{2} n_1^3 M r^5; \quad A = n_1 r^2 \cdot \sqrt{\frac{3n_1 M r}{2}}$$

Der Ausdruck für  $A^2$  zeigt nun sofort, dass der Quotient  $\frac{A^2}{r^5}$  für ein solches Bewegungssystem materieller Punkte eine Constante ist, und dass daher die Proportion

$$A^2 : A_1^2 = r^5 : r_1^5$$

stattfindet.

Die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten verhalten sich wie die fünften Potenzen der Entfernungen.

Auch hier ist

$$d\omega = \frac{v}{r} dt$$

und wenn man für  $\frac{v}{r}$  den obigen Wert einsetzt, so erhält man für die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\omega}{dt}$  den Wert

$$\frac{dw}{dt} = n_1 \sqrt{\frac{3nMr}{2}}$$

Dieselbe ist somit der Quadratwurzel aus der Entfernung proportional. Für den Centriwinkel  $w$  erhält man hieraus

$$w = n_1 \sqrt{\frac{3n_1Mr}{2}} \cdot t$$

Derselbe ist daher für dasselbe Massenteilchen der Zeit proportional, nur für verschiedene Massenpunkte, deren Bahnen concentrische Kreise sind, gilt für gleiche Zeiten die Proportion

$$w^2 : w_1^2 = r : r_1$$

Für die Umlaufszeit  $T$  erhält man aus der Gleichung für  $w$  den Wert

$$T = \frac{2\pi}{n_1 \sqrt{\frac{3n_1Mr}{2}}}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass  $rT^2$  eine Constante ist und zwar gleich  $\frac{8\pi^2}{3n_1^3M}$ . Daher gilt für ein solches Bewegungssystem die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = r_1 : r$$

Bewegen sich daher verschiedene Massenpunkte in concentrischen Kreisen unter dem Einflusse einer Centrakraft, welche im direkten, quadratischen Verhältniss der Entfernung wirkt, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten, wie umgekehrt die Radien ihrer Bahnen.

Weil hier

$$v^2 = B - n_1^2 Mr^2$$

ist, so können für eine reelle Bewegung nur pos. Werte von  $B$  in Betracht kommen. Weil ferner

$$v^2 = \frac{A^2}{r^2} = \frac{3n_1^3Mr^3}{2}$$

so erhält man zur Bestimmung von  $r$  die Gleichung

$$\frac{3n_1^3Mr^3}{2} = B - n_1^2 Mr^2$$

also

$$r = \sqrt[3]{\frac{2B}{5n_1^3M}}$$

Zwischen den  $B$  und den zugehörigen Radien gilt daher die Proportion

$$r^3 : r_1^3 = B : B_1$$

$$3) \quad f'(r) = -r^3$$

Man ersetze  $n$  durch  $2n_1^4$ ; dann gelten die Gleichungen

$$K = -2n_1^4 M m r^3; \quad g = -2n_1^4 M r^3; \quad 2n M f(r) = -n_1^4 M r^4$$

Die Tangentialgeschwindigkeit  $v$  wird durch die Gleichung  $v^2 = rg$  bestimmt. Nach derselben ist

$$v^2 = 2n_1^4 M r^4; \quad v = n_1^2 r^2 \sqrt{2M}$$

und  $\frac{v}{r^2}$  ist für das ganze Bewegungssystem eine Constante, daher gilt die Proportion

$$v : v_1 = r^2 : r_1^2$$

Die Tangentialgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

Ferner ist

$$A = rv = n_1^2 r^3 \sqrt{2M}$$

und somit ist auch die Flächengeschwindigkeit dividirt durch den Kubus der Entfernung eine Constante, die durch  $n_1^3 \sqrt{2M}$  dargestellt werden kann. Es gilt daher die Proportion

$$A : A_1 = r^3 : r_1^3$$

Die Flächengeschwindigkeiten der Massenpunkte verhalten sich wie die Kuben der Entfernungen.

Um die Umlaufzeit  $T$  zu erhalten, setze man wieder

$$\frac{dw}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{A}{r^2}$$

und führe hier für  $\frac{v}{r}$  oder  $\frac{A}{r^2}$  den oben gefundenen Wert ein. Dann erhält man als Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{dw}{dt} = n_1^2 r \sqrt{2M}$$

Dieselbe ist von der Zeit unabhängig, also für dieselbe Bahn constant, variirt aber von Massenteilchen zu Massenteilchen und zwar nimmt dieselbe nach aussen in Verhältniss der Radien zu.

Wird die Winkelgeschwindigkeit mit  $\alpha$  bezeichnet, so gilt daher die Proportion

$$\alpha : \alpha_1 = r : r_1$$

Ferner ist hier der Centriwinkel  $w$  gleich dem Ausdrücke

$$w = n_1^2 r \sqrt{2M} \cdot t$$

somit für dasselbe Massenteilchen mit der Zeit proportional. Setzt man nun in diesem Ausdrücke für  $w$  den Wert  $2\pi$ , so erhalten wir zur Bestimmung von  $T$  die Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{n_1^2 r \sqrt{2M}}$$

und es gilt hier die Proportion

$$T : T_1 = r_1 : r$$

Die Umlaufszeiten der Massenpunkte verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Da die Flächengeschwindigkeit  $\frac{A}{2}$  für dieselbe Bahn eine Constante ist, so lässt sich die Umlaufszeit auch finden, indem man den doppelten Inhalt des Kreises durch  $A$  dividirt, also durch die Gleichung

$$T = \frac{2r^2\pi}{A}$$

Setzt man hier für  $A$  den gefundenen Wert ein, so erhält man für  $T$  den obigen Ausdruck wieder. Die Gleichung zur Bestimmung von  $r$  lautet hier:

$$2n_1^4 Mr^4 = B - n_1^4 Mr^4$$

und somit ist

$$r = \sqrt[4]{\frac{B}{3n_1^4 M}}$$

daher die Proportion

$$r^4 : r_1^4 = B : B_1$$

Wird z. B. für  $B$  der Wert  $3M$  gesetzt, so ist  $r = \frac{1}{n_1}$ , und somit

$$K = -2n_1 Mm; \quad g = -2n_1 M, \quad v = \sqrt{2M},$$

$$A = \frac{1}{n_1} \sqrt{2M}; \quad T = \frac{2\pi}{n_1 \sqrt{2M}}$$

4)  $f'(r) = -r\mu$ , wo  $\mu$  eine ganze Zahl sein soll.

Wird in diesem allgemeinen Falle der proportionale Factor  $n$  durch  $\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1}$  ersetzt, so findet man

$$K = -\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1} M m r^\mu; \quad g = -\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1} M r^\mu;$$

$$2n M f(r) = -n_1^{\mu+1} r^{\mu+1} M$$

und daher ist die Geschwindigkeit  $v$  gleich dem Ausdrucke

$$v = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} r^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu+1}{2}} M$$

Somit ist der Quotient  $\frac{v^2}{r^{\mu+1}}$  für alle materiellen Punkte, welche unter der oben angegebenen Kraftwirkung stehen, eine Constante, und daher gilt hier die Proposition

$$v^2 : v_1^2 = r^{\mu+1} : r_1^{\mu+1}$$

Ist daher  $(\mu+1)$  eine ungerade Zahl, also  $\mu$  eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien. Ist aber  $(\mu+1)$  eine gerade Zahl, somit  $\mu$  eine ungerade, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Zur Bestimmung der Flächengeschwindigkeit  $A$  benutze man wieder die Gleichung  $A = rv$  und setze für  $v$  den obigen Wert ein. Man erhält so

$$A = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot r^{\frac{\mu+3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu+1}{2}} \cdot M$$

und daher ist auch  $\frac{A}{r^{\frac{\mu+3}{2}}}$  für das ganze Bewegungssystem eine Constante, so dass hier die Proportion

$$A^2 : A_1^2 = r^{\mu+3} : r_1^{\mu+3}$$

gilt. Ist daher  $(\mu+1)$  eine ungerade Zahl, also  $\mu$  eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien. Ist aber  $(\mu+1)$  eine gerade Zahl, also  $\mu$  eine ungerade, so verhalten sich die Flächengeschwindigkeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Ferner ist die Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$  gleich dem Ausdrucke

$$\alpha = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} r^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\frac{\mu+1}{2}} \cdot M$$

und für dieselbe gilt die Proportion

$$\alpha^2 : \alpha_1^2 = r^{\mu-1} : r_1^{\mu-1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist nur für den Fall  $\mu = 1$  für das ganze System eine Constante; im allgemeinen verhalten sich die Quadrate derselben wie die ganzzahligen Potenzen der Radien. Wird die Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit integriert und soll mit  $t = 0$  auch der Centriwinkel null werden, so erhält man

$$w = n_1^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}} \sqrt{\frac{\mu+1}{2} M} \cdot t$$

und hieraus ergibt sich als Wert für die Umlaufzeit  $T$

$$T = \frac{2\pi}{n_1^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu+1}{2} M}}$$

Wird nun auf beiden Seiten mit  $r^{\frac{\mu-1}{2}}$  multiplicirt, so erkennt man, dass das Product  $T^2 \cdot r^{\mu-1}$  für alle Kreisbahnen eine Constante ist, und dass daher die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = r^{\mu-1} : r_1^{\mu-1}$$

gilt.

Ist  $(\mu - 1)$  eine ungerade Zahl, also  $\mu$  eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie umgekehrt die ungeradzahligten Potenzen der Radien. Ist aber  $(\mu - 1)$  eine gerade Zahl, und daher  $\mu$  eine ungerade, so verhalten sich die Umlaufzeiten umgekehrt wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Zur Bestimmung der Radien  $r$  aus der anziehenden Masse  $M$  und der Constanten  $B$  dient die Gleichung

$$\frac{A^2}{r^2} = 2n M f(r) + B$$

Setzt man hier für  $A$  und  $f(r)$  die bekannten Werte ein, so folgt

$$\frac{\mu+1}{2} \cdot n_1^{\mu+1} M r^{\mu+1} = B - n_1^{\mu+1} M r^{\mu+1}$$

also

$$r = \sqrt{\frac{\mu+1}{(\mu+3) n_1^{\mu+1} M} 2B}$$

Auch hier darf die Constante  $B$  alle pos. Werte durchlaufen und der Zusammenhang zwischen ihr und den Radien der Bahnen wird durch die Proportion

$$r^{\mu+1} : r_1^{\mu+1} = B : B_1$$

ausgedrückt.

$$5) f'(r) = -\frac{1}{r}$$

$$K = -\frac{n M m}{r}; \quad g = -\frac{n M}{r}; \quad 2n M f(r) = -2n M \log r$$

Weil in diesem Falle die Geschwindigkeit  $v$  durch

$$v = \sqrt{nM}$$

dargestellt werden kann und somit vom Radius der Bahn unabhängig ist, so bewegen sich alle Massenpunkte mit derselben Geschwindigkeit in ihren Bahnen.

Die Flächengeschwindigkeit ist hier

$$A = r \sqrt{nM}$$

und mit dem Radius der Bahn direct proportionirt, also

$$A : A_1 = r : r_1$$

Für die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha$  erhalten wir den Wert

$$\alpha = \frac{\sqrt{nM}}{r}$$

Dieselbe ist daher mit dem Radius  $r$  umgekehrt proportionirt, nimmt somit im Bewegungssysteme nach aussen im gleichen Verhältniss ab, wie die Radien der Bahnen zunehmen.

$$\alpha : \alpha_1 = r_1 : r$$

Wird die Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit integrirt, so folgt

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r} \cdot t$$

und somit ist hier

$$T = \frac{2r\pi}{\sqrt{nM}}$$

Der Quotient  $\frac{T}{r}$  ist daher für dieses System eine Constante und man hat die Proportion

$$T : T_1 = r : r_1$$

Die Umlaufzeiten verhalten sich wie die Radien der Bahnen.

Um aus  $B$  und der Masse den Radius zu finden, beachte man, dass

$$v^2 = -2nM \log r + B = \frac{A^2}{r^2} = nM$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt nun, dass

$$\log r = \frac{B - nM}{2nM} = \frac{B}{2nM} - \frac{1}{2}$$

also

$$r = e^{\left(\frac{B}{2nM} - \frac{1}{2}\right)} \text{ ist.}$$

$$6) f'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

$$K = -\frac{nMm}{r^2}; \quad g = -\frac{nM}{r^2}; \quad 2nMf(r) = \frac{2nM}{r}$$

Bei dieser Kraftwirkung, die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt, ist

$$v^2 = gr = \frac{nM}{r}$$

und man erkennt sofort, dass hier das Product aus dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem Radius der Bahn eine constante Grösse darstellt und gleich  $nM$  ist. Zwischen der Geschwindigkeit und dem Radius  $r$  existirt daher die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r$$

Die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Radien der Bahnen.

Die Flächengeschwindigkeit  $A$  ist auch hier gleich  $rv$ , also

$$A = \sqrt{nMr}$$

und somit ist der Quotient  $\frac{A^2}{r}$  für das ganze Bewegungssystem eine Constante; mithin gilt die Proportion

$$A^2 : A_1^2 = r : r_1$$

Die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten verhalten sich wie die Entfernungen.

Ferner ist

$$dw = \frac{v}{r} dt = \frac{\sqrt{nM}}{r \sqrt{r}} dt$$

also

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r \sqrt{r}} \cdot t$$

und für gleiche Zeitabschnitte gilt die Proportion

$$w^2 : w_1^2 = r^3 : r_1^3$$

Die Quadrate der Centriwinkel verhalten sich umgekehrt wie die Kuben der Entfernungen.

Die Umlaufzeit  $T$  wird durch die Gleichung

$$T = \frac{2r\pi\sqrt{r}}{\sqrt{nM}}$$

bestimmt. Aus derselben erkennt man, dass für alle Massenpunkte des Systems der Quotient  $\frac{T^2}{r^3}$  eine Constante ist und zwar gleich  $\frac{4\pi^2}{nM}$ . Daher die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = r^3 : r_1^3$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Radien.

Wir haben oben die Geschwindigkeit  $v$  durch  $\sqrt{gr}$  ausgedrückt. Nach der bekannten Formel ist aber auch

$$v^2 = \frac{2nM}{r} + B$$

und man könnte meinen, dass für eine reelle Bewegung sowol pos. wie neg. Werte von  $B$  zulässig wären. Da nun aber

$$\frac{2nM}{r} + B = \frac{nM}{r}$$

sein muss, so ist

$$r = -\frac{nM}{B}$$

Da aber für einen solchen Wert von  $r$  bei positivem  $B$  der Ausdruck  $\left(\frac{2nM}{r} + B\right)$  neg. würde, was unzulässig ist, so können nur neg. Werte von  $B$  in Betracht kommen, und da das Product  $r \cdot B$  für das ganze System eine Constante ist, so gilt die Proportion

$$r : r_1 = B_1 : B$$

$$7) \quad f'(r) = -\frac{1}{r^3}$$

$$K = -\frac{nMm}{r^3}; \quad g = -\frac{nM}{r^3}; \quad 2nMf(r) = -\frac{nM}{r^2}$$

In diesem Falle ist

$$v^2 = \frac{nM}{r^2}, \quad \text{also} \quad v = \frac{\sqrt{nM}}{r}$$

und das Product  $vr$  daher eine Constante, die durch  $\sqrt{nM}$  dargestellt wird. Bei dieser Art der Bewegung gilt daher die Proportion

$$v : v_1 = r_1 : r$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Die Flächengeschwindigkeit  $A$  ist hier eine Constante und gleich  $\sqrt{nM}$  und daher durchlaufen die Radien der verschiedenen Bahnen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. Ferner ist

$$dw = \frac{v}{r} dt = \frac{\sqrt{nM}}{r^2} dt$$

und die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Radien, das heisst, es gilt die Proportion

$$\alpha : \alpha_1 = r_1^2 : r^2$$

Für die Centriwinkel erhalten wir durch Integration obiger Gleichung den Ausdruck

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r^2} \cdot t$$

Dieselben sind somit der Zeit direct und dem Quadrat der Radien umgekehrt proportional. Setzt man in der letzten Gleichung für  $w$  den Wert  $2\pi$ , so erhält man für die Umlaufzeit  $T$  den Wert

$$T = \frac{2r^2\pi}{\sqrt{nM}}$$

aus welchem sich die Proportion

$$T : T_1 = r^2 : r_1^2$$

ergibt.

Die Umlaufzeiten verhalten sich wie die Quadrate der Radien

$$8) \quad f'(r) = -\frac{1}{r^\mu}$$

Hier soll  $\mu$  eine pos., ganze Zahl sein, welche ich mir grösser als 3 denke, da die Fälle  $\mu = 1, 2, 3$  speciell behandelt worden sind. Man hat

$$K = -\frac{nMm}{r^\mu}; \quad g = -\frac{nM}{r^\mu}; \quad 2nMf(r) = \frac{2}{\mu-1} \cdot \frac{nM}{r^{\mu-1}}$$

Weil  $v^2 = gr$  ist, so folgt

$$v = \frac{\sqrt{nM}}{r^{\frac{\mu-1}{2}}}$$

Es ist daher das Product  $v \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}}$  eine Constante und zwar gleich der Quadratwurzel aus  $nM$ . Für dieses Bewegungssystem gilt daher die Proportion

$$v^2 : v_1^2 = r_1^{\mu-1} : r^{\mu-1}$$

Ist nun  $(\mu-1)$  eine ungerade Zahl, also  $\mu$  eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten wie umgekehrt die ungeradzahligten Potenzen der Radien. Ist aber  $(\mu-1)$  eine gerade Zahl, somit  $\mu$  eine ungerade, so verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die ganzzahligten Potenzen der Radien.

Die Flächengeschwindigkeit  $A$  ist hier

$$A = \frac{\sqrt{nM}}{r^{\frac{\mu-3}{2}}}$$

und demnach ist  $A^2 r^{\mu-3}$  für das ganze Bewegungssystem eine Constante und gleich  $nM$ . Wenn nun  $(\mu-3)$  eine ungerade Zahl ist, somit  $\mu$  eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten umgekehrt wie die ungeradzahligten Potenzen der Radien. Ist aber  $(\mu-3)$  eine gerade Zahl, also  $\mu$  eine ungerade, so verhalten sich die Flächengeschwindigkeiten umgekehrt wie die ganzzahligten Potenzen der Radien.

Ferner ist

$$dv = \frac{v}{r} dt$$

und aus dieser Gleichung folgt sofort

$$w = \frac{\sqrt{nM}}{r^{\frac{\mu+1}{2}}} \cdot t$$

und daher ist

$$T = \frac{2\pi \cdot r^{\frac{\mu+1}{2}}}{\sqrt{nM}}$$

und folglich gilt die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = r^{\mu+1} : r_1^{\mu+1}$$

Ist  $(\mu + 1)$  eine ungerade Zahl, also  $\mu$  eine gerade, so verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die ungeradzahligem Potenzen der Radien. Ist aber  $\mu$  eine ungerade Zahl, so verhalten sich die Umlaufzeiten wie die ganzzahligen Potenzen der Radien.

Um schliesslich einen allgemeinen Ausdruck für  $r$  zu erhalten, setze man

$$v^2 = \frac{2}{\mu - 1} \cdot \frac{nM}{r^{\mu-1}} + B = \frac{nM}{r^{\mu-1}}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nun, dass

$$B \cdot r^{\mu-1} = \frac{\mu - 3}{\mu - 1} \cdot nM$$

also

$$r = \sqrt[\mu-1]{\frac{\mu - 3}{\mu - 1} \cdot \frac{nM}{B}}$$

ist. Das Product  $B' r^{\mu-1}$  ist für das ganze Bewegungssystem eine Constante, und man hat hier die Proportion

$$r^{\mu-1} : r_1^{\mu-1} = B_1 : B$$

Der für  $r$  gefundene Ausdruck gilt für  $\mu = 1$  nicht mehr. Für  $\mu = 2$  würde der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ; da aber  $r^{\mu-1}$  pos. verstanden wird, so sind in diesem Falle nur neg.  $B$  anwendbar. Für  $\mu = 3$  wird die rechte Seite null, und erst für  $\mu > 3$  erhält man für  $r$  einen pos. Ausdruck, sobald auch  $B$  pos. ist. Damit überhaupt eine reelle Bewegung statt finde, muss bekanntlich der Ausdruck  $(2nMf(r) + B)$  einen pos. Wert haben; es sind daher keine Werte von  $r$  zulässig, welche denselben neg. machen würden.

Setzen wir daher in  $\left(\frac{2}{\mu - 1} \cdot \frac{nM}{r^{\mu-1}} + B\right)$  den oben für  $r^{\mu-1}$  erhaltenen Wert ein, so geht derselbe in den andern  $\frac{2}{\mu - 3} \cdot B$  über, und man erkennt auch hieraus, dass für  $\mu > 3$  nur pos. Werte von  $B$  zulässig sind.

In den bekannten Bewegungsgleichungen des allgemeinen Teiles meines Aufsatzes spielte die Constante  $A$ , welche die doppelte Flächengeschwindigkeit darstellt, eine Hauptrolle. Ihrer Natur nach ist dieselbe eine reelle, pos. Zahl und kann jeden beliebigen Wert auf der pos. Hälfte der Realitätslinie, null nicht ausgeschlossen, darstellen. Dass der Fall  $A = 0$  längs des ganzen Weges die geradlinige Be-

wegung zur Falle hat, ist im ersten Abschnitte speciell gezeigt worden. Was  $dr$  anbetrifft, so kann dieses Differential sowol pos. wie neg. sein und die Bedingung, dass fortwährend  $dr = 0$  sein soll, bringt die kreisförmige Bewegung hervor. Da nun in den nachfolgenden Untersuchungen die Bedingungen, dass sowol  $A$  wie  $dr$  längs des ganzen Weges verschwinden sollen, fallen gelassen werden, so habe ich diesen Fällen einen allgemeineren Charakter zugeschrieben und sie unter dem Titel „Allgemeine Fälle der Centralbewegung“ zusammengefasst.

### III. Allgemeine Fälle der Centralbewegung.

- 1) Die wirkende Kraft sei der Entfernung der Massen direct proportional.

$$\text{a) } K = -nmMr; \quad f'(r) = -r; \quad f(r) = -\frac{1}{2} \cdot r^2 \\ g = -nMr$$

Setzt man abkürzend  $\mu^2 = nM$  und versteht unter  $\mu$  die pos. Wurzel aus  $nM$ , so lässt sich die Geschwindigkeit  $v$  des Massenpunktes  $m$  in einem beliebigen Punkte der Bahn durch die Gleichung

$$v^2 = -\mu^2 r^2 + B$$

darstellen, wo  $B$  die Integrationsconstante bezeichnet. Damit nun  $v$  für pos. Werte von  $r$  reell ausfalle, ist absolutes Erforderniss, dass  $B$  einen pos. Wert habe. Ist dieser einmal gewählt, so ist der Leitstrahl  $r$  an die Bedingung

$$\mu^2 r^2 < B$$

gebunden, und es muss somit  $(B - \mu^2 r^2)$  längs des ganzen Weges einen pos. Wert haben.  $B = 0$  anzunehmen ist unstatthaft. Nach der im allg. Teile meiner Arbeit aufgestellten Formel für den

Differentialquotienten  $\frac{dr}{dt}$  erhält man hier

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{-\mu^2 r^4 + Br^2 - A^2}$$

und die Realität der Bewegung erfordert, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen längs des ganzen Weges pos. bleibt. Allerdings sind auch solche Werte von  $r$  zulässig, welche denselben zu null machen, und in diesen Punkten erreicht  $r$  ein Maximum oder ein Minimum. Im allgemeinen aber muss  $r$  die Bedingung

$$-\mu^2 r^4 + Br^2 - A^2 > 0$$

erfüllen. Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$r^4 - \frac{B}{\mu^2} r^2 + \frac{A^2}{\mu^2} = 0$$

mit  $a^2$  und  $b^2$  bezeichnet werden, so muss die Bedingung

$$\mu^2(a^2 - r^2)(r^2 - b^2) > 0$$

erfüllt sein, d. h. es muss

$$b^2 < r^2 < a^2$$

statt finden. Die beiden Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$  müssen für eine reelle Bewegung reell sein. Denn wären sie imaginär, so müssten sie conjugirt sein; dann aber wäre  $(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)$  beständig pos. und es liessen sich keine reellen, positiven Werte von  $r$  finden, welche  $\mu^2(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)$  pos. machen würden. Die Realität der Bewegung erfordert daher auch die Realität der beiden Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$ . Nun ist

$$a^2 = \frac{B}{2\mu^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}}\right)$$

$$b^2 = \frac{B}{2\mu^2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}}\right)$$

und da  $\sqrt{1 - \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}}$  reell ist, so muss  $B^2 > 4\mu^2 A^2$  sein, also  $\frac{B}{A} > 2\mu$ . Für den Fall  $B^2 = 4\mu^2 A^2$  würden die beiden Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$  zusammenfallen und der Ausdruck für  $\frac{\partial r}{\partial t}$  wäre in diesem Falle

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{-(\mu^2 r^4 - 2\mu A r^2 + A^2)} = + \frac{1}{r} \sqrt{-(\mu r^2 - A)^2}$$

was aber eine reelle Bewegung ausschliesst. Die Annahme  $B = 2\mu A$  ist daher unstatthaft. Für die beiden Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$  gelten die Gleichungen

$$\mu^2 a^2 b^2 = A^2; \quad \mu^2(a^2 + b^2) = B$$

und da  $A$  und  $B$  pos. sind, so müssen es auch  $a^2$  und  $b^2$  sein. Es steht nun frei,  $a^2 > b^2$  anzunehmen. Da nun  $r^2$  alle zwischen  $a^2$  und  $b^2$  liegenden Werte annehmen kann, so lässt sich der Leitstrahl  $r$  auf folgende Weise als Function der neuen Variablen  $\varphi$  darstellen:

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2(1 - k^2 \sin^2 \varphi); \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Da nun  $r^2$  bei  $a^2$  beginnt und von hier an bis  $b^2$  beständig abnimmt, so beginnt die neue Variable bei 0 und wächst von hier an bis  $2\pi$ . Weil

$$a^2 - r^2 = a^2 k^2 \sin^2 \varphi; \quad r^2 - b^2 = a^2 k^2 \cos^2 \varphi$$

so ist auch

$$r \cdot \frac{\partial r}{\partial t} = \mu a^2 k^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

und man erkennt, dass  $\frac{\partial r}{\partial t}$  nur da verschwindet, wo  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  verschwinden, also in  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  und in diesen Punkten erreicht somit  $r$  seine grössten und kleinsten Werte und zwar existirt sowol für  $\varphi = 0$  als auch für  $\varphi = \pi$  ein Maximum, während in  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  Minimum vorhanden sind. Wird nun im ferneren die Gleichung

$$r^2 = a^2(1 - k^2 \sin^2 \varphi)$$

nach  $t$  abgeleitet, so findet man

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = - a^2 k^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und die Vergleichung mit dem oben gefundenen Ausdrucke ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \mu$$

Die Ableitung der Variablen  $\varphi$  nach  $t$  ist eine Constaute und daher  $\varphi$  selber eine lineare Function der Zeit. Die Integration ergibt

$$\varphi = - \mu t + \nu$$

ersetzt man hier  $t$  durch  $-t$  und nimmt die Integrationsconstante gleich null an, so hat man

$$\varphi = \mu t$$

Es ist daher erlaubt, den Winkel  $\varphi$  direct mit der Zeit proportional anzunehmen.

Wir denken uns ferner den Kraftmittelpunkt als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen pos.  $x$ -axe durch das Aphelium der Bahn geht; ist ferner  $w$  die wahre Anomalie des Massenpunktes  $m$  mit den Coordinaten  $(x, y)$ , so hat man

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

Da nun einerseits die doppelte Flächengeschwindigkeit des

Massenpunktes gleich  $A$  ist, dieselbe aber auch durch  $r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$  dargestellt werden kann, so hat man die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Massenpunktes ist dem Quadrate des Radius umgekehrt proportional. Da nun

$$A = \mu ab \quad \text{und} \quad \mu dt = d\varphi$$

ist, so hat man auch

$$dw = ab \frac{d\varphi}{r^2} = \frac{d \cdot \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi\right)}{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi\right)^2}$$

und man darf

$$w = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} w = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

annehmen. Bezeichnet nun  $d$  einen proportionalen Factor, so gelten daher folgende Gleichungen:

$$d \cdot \sin w = b \sin \varphi; \quad d \cdot \cos w = a \cos \varphi$$

Werden nun diese beiden Gleichungen quadriert und addirt, so findet man  $d = r$ . Für die rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$  des Massenpunktes erhält man daher die Werte

$$\begin{aligned} x &= r \cos w = a \cos \varphi \\ y &= r \sin w = b \sin \varphi \end{aligned}$$

und die Elimination von  $\varphi$  aus dieser Gleichung führt auf die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Bahn des materiellen Punktes ist daher eine Ellipse, in deren Mittelpunkte die anziehende Kraft liegt. Der Winkel  $\varphi$  heisst die excentrische Anomalie und da dieselbe mit der Zeit proportional ist, so durchläuft der entsprechende Kreispunkt seine Bahn mit constanter Geschwindigkeit.

Wenn die Umlaufszeit mit  $T$  bezeichnet wird, so erhalten wir für dieselbe aus der Gleichung  $\varphi = \mu t$  den Wert

$$T = \frac{2\pi}{\mu}$$

Dieselbe ist daher von den Halbaxen der Ellipse, also auch von den Constanten  $A$  und  $B$  unabhängig. Bewegen sich daher verschiedene materielle Punkte unter dem Einflusse derselben Centrakraft in Ellipsen um den Kraftmittelpunkt, so ist die Umlaufszeit für alle eine constante Grösse, die durch  $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu M}}$  dargestellt werden kann.

Für die doppelte Flächengeschwindigkeit  $A$  hatten wir oben den Ausdruck

$$A = \mu ab$$

erhalten. Da nun  $\pi ab$  den Inhalt  $J$  der Ellipse darstellt, so ist für das ganze Bewegungssystem der Quotient  $\frac{A}{J}$  eine constante Grösse und gleich  $\frac{\mu}{\pi}$  und es besteht daher die Proportion

$$A : A_1 = J : J_1$$

Die Flächengeschwindigkeiten der verschiedenen materiellen Punkte verhalten sich daher wie die Inhalte der entsprechenden Ellipsen.

Wenn der Inhalt des Sectors, der vom radius vector in der Zeit  $dt$  durchlaufen wird, mit  $dS$  bezeichnet wird, so ist

$$dS = \frac{A}{2} dt = \frac{\mu}{2} ab dt$$

also

$$S = \frac{\mu}{2} ab t$$

Diesen Ausdruck erhält man auch auf folgende Weise: die Länge des Weges, welchen der entsprechende Kreispunkt in der Zeit  $t$  durchläuft, kann durch

$$a\varphi = a\mu t$$

ausgedrückt werden; somit ist der Inhalt des Kreissectors gleich  $\frac{a^2\mu t}{2}$ . Wird dieser Ausdruck noch mit  $\frac{b}{a}$  multiplicirt, so erhält man

den Inhalt des entsprechenden Ellipsensectors in der Form  $\frac{\mu ab}{2} \times t$ .

Dasselbe Resultat erhält man auch wie folgt:

$$A = x \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial x}{\partial t} = \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & b \sin \varphi \\ -\mu a \sin \varphi & \mu b \cos \varphi \end{vmatrix} = \mu ab$$

Wird nun dieser Wert für  $A$  mit  $dt$  multiplicirt und von 0 bis  $t$  integrirt, so erhält man wieder den bekannten Ausdruck für den doppelten Inhalt des Ellipsensectors. Für die Geschwindigkeit  $v$  des materiellen Punktes  $m$  in seiner Bahn hatten wir den Ausdruck

$$v^2 = -\mu^2 r^2 + B$$

erhalten. Um dieselbe als Function der Variablen  $\varphi$  darzustellen, ersetze man  $r^2$  und  $B$  durch die bekannten Ausdrücke  $a^2(1-k^2 \sin^2 \varphi)$  und  $\mu^2(a^2 + b^2)$ . Dann ist

$$v = \mu a \cdot \sqrt{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}$$

Dieser Ausdruck kann direct aus den rechtwinkligen Coordinaten  $(x, y)$  des Massenpunktes abgeleitet werden. Bekanntlich ist

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

und da

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu a \sin \varphi = -\mu \frac{a}{b} \cdot y$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = b \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu b \cos \varphi = \mu \frac{b}{a} \cdot x$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \mu^2(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) = \mu^2 a^2 (1 - k^2 \cos^2 \varphi)$$

also wieder

$$v = \mu a \cdot \sqrt{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}$$

Die Beschleunigung  $g$  des Massenteilchens ist im allgemeinen gleich dem Quotienten aus Kraft und Masse und in unserem Falle gleich  $-\mu^2 r$ , wenn die Richtung mit in Berücksichtigung gezogen wird. Denselben Wert von  $g$  erhält man aber auch mittelst der allgem. Formel

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2}$$

Denn es ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\mu^2 a \cos \varphi = -\mu^2 r \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\mu^2 b \sin \varphi = -\mu^2 r \cdot \frac{y}{r}$$

also wieder

$$g = -\mu^2 r$$

Zugleich erkennt man aus dem Werte für die 2. Abgeleiteten, dass die Beschleunigung nach dem Centrum gerichtet ist. Zum

Schlusse dieses Abschnittes will ich noch den Winkel  $\alpha$  bestimmen, den die Bewegungsrichtung mit der  $x$ -axe bildet. Wenn  $v_x$  und  $v_y$  die Geschwindigkeiten nach den Axen sind, so hat man

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x = v \cos \alpha$$

also

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{v} = - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_y = v \sin \alpha$$

also

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{v} = \frac{b \cos \varphi}{a \cdot \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$\text{b) } K = n m M r; \quad f'(r) = r; \quad f(r) = \frac{r^2}{2}$$

$$g = n M r$$

Da die Kraft pos. angenommen ist, so wirkt sie abstossend auf den materiellen Punkt  $m$  ein. Setzt man auch hier abkürzend

$$n M = \mu^2$$

so ist die Geschwindigkeit  $v$  durch die Formel

$$v^2 = \mu^2 r^2 + B$$

dargestellt. Während im vorhergehenden Abschnitte der Constanten  $B$  nur die pos. Hälfte der Realitätslinie eingeräumt werden könnte, so kann sich hier dieselbe auf der ganzen Realitätslinie frei bewegen, ohne einem Punkte derselben ausweichen zu müssen. Ist einmal ein bestimmter Wert von  $B$  gewählt, so ist  $r$  längs des ganzen Weges an die Bedingung

$$\mu^2 r^2 + B > 0$$

gebunden. Ich behandle zuerst den Fall, wo  $B$  eine neg. Zahl ist, und ersetze daher  $B$  durch  $-B'$ , wo fortan  $B'$  pos. zu verstehen ist. Lässt man in der Folge bei  $B'$  den Accent wieder fallen, so ist

$$v^2 = \mu^2 r^2 - B$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\mu}{r} \cdot \sqrt{\left(r^4 - \frac{B}{\mu^2} r^2 - \frac{A^2}{\mu^2}\right)}$$

es sind nur solche Werte von  $r$  zulässig, welche den Ausdruck

$$(\mu^2 r^4 - B r^2 - A^2)$$

pos. oder null machen. Werden die Wurzeln der Gleichung

$$r^4 - \frac{B}{\mu^2} r^2 - \frac{A^2}{\mu^2} = 0$$

mit  $a^2$  und  $b^2$  bezeichnet, so hat man

$$a^2 = \frac{B}{2\mu^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}} + 1 \right)$$

$$b^2 = -\frac{B}{2\mu^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}} - 1 \right)$$

und

$$B = \mu^2(a^2 + b^2); \quad A^2 = -\mu^2 a^2 b^2$$

Man erkennt aus diesen Formeln, dass die beiden Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$  reelle Werte haben, und dass die eine positiv ist, während die andere neg. sein muss. Ist  $a^2$  die pos. Wurzel, so ist auch  $a^2 > \text{mod. } b^2$ . Ersetzt man  $b^2$  durch  $-b_1^2$ , so hat man

$$b_1^2 = \frac{B}{2\mu^2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\mu^2 A^2}{B^2}} - 1 \right); \quad B = \mu^2(a^2 - b_1^2); \quad A^2 = \mu^2 a^2 b_1^2$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\mu}{r} \cdot \sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 + b_1^2)}$$

Der Radius  $r$  ist nur an die Bedingung

$$r^2 > a^2$$

gebunden, kann somit von  $a$  an alle pos. Werte durchlaufen. Setzt man nun

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b_1^2 \sin^2 \varphi = a^2(1 + k^2 \sin^2 \varphi), \quad k^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

so ist

$$r^2 - a^2 = a^2 k^2 \sin^2 \varphi; \quad r^2 + b_1^2 = a^2 k^2 \cos^2 \varphi$$

und daher auch

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = \mu a^2 k^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi$$

Wird nun auch die Gleichung für  $r^2$  nach  $t$  abgeleitet, so erhält man

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = a^2 k^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und die Vergleichung mit dem vorhergehenden Werte ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu$$

also

$$\varphi = \mu t$$

Die Variable  $\varphi$  ist somit mit der Zeit direct proportional. Wählt man nun wieder den Kraftmittelpunkt als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen pos. Richtung der  $x$ -axe durch das Perihel der Wegcurven, also durch den Punkt  $r = a$  geht, ist ferner  $w$  die Anomalie des Massenteilchens mit den Coordinaten  $(x, y)$ , so hat man

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2} = \frac{\mu ab_1}{r^2}$$

Die Ableitung von  $w$  nach  $t$  verschwindet nur in  $r = \infty$ , und hier hat somit  $w$  sein Maximum erreicht. Die Curve hat somit eine Asymptote, die durch den Ursprung geht und der Leitstrahl  $r$  fällt für unendlich entfernte Punkte mit derselben zusammen. Ganz analog wie früher erhält man auch hier

$$dw = \frac{d \left( \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi \right)}{1 + \left( \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi \right)^2}$$

also

$$w = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi \right)$$

somit

$$\operatorname{tg} w = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi$$

Für  $\varphi = \infty$  ist auch  $r = \infty$  und hier erreicht  $w$  sein Maximum. Weil  $\operatorname{tang} \varphi$  für  $\infty = \varphi$  den Wert 1 hat, so wird dieses Maximum durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} w = \frac{b}{a}$$

bestimmt, und dieser Ausdruck ist somit die Gleichung der Asymptote.

Für die rechtwinkligen Coordinaten des Massenpunktes erhält man die Werte

$$x = r \cos w = a \cos \varphi$$

$$y = r \sin w = b \sin \varphi$$

und die Elimination von  $\varphi$  führt auf die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Wegcurve ist somit eine Hyperbel, in deren Mittelpunkte die wirkende Kraft liegt, und deren Halbaxenquadrate die Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$  sind.

Die Geschwindigkeit  $v$  des materiellen Punktes wurde oben als Function des Leitstrahles  $r$  dargestellt. Hier soll dieselbe noch als Function von  $\varphi$  ausgedrückt werden. Ersetzt man in dem bekannten Ausdrücke für  $v^2$  die Constante  $B$  durch  $\mu^2(a^2 - b^2)$  und  $r^2$  durch  $a^2(1 + k^2 \sin^2 \varphi)$ , so erhält man nach einigen Umformungen für  $v$  den Wert

$$v = \mu a \sqrt{(k^2 \cos^2 \varphi - 1)}$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes will ich noch mit einigen Worten der beiden Fälle erwähnen, wo die Constante  $B$  eine pos. Zahl oder gleich 0 ist. Ist z. B. die Constante  $B$  gleich null, so fallen die beiden Wurzeln  $a^2$  und  $b^2$  zusammen und die Wegcurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Halbaxenquadrat durch die Gleichung

$$a^2 = \frac{A}{\mu}$$

bestimmt wird. Die Geschwindigkeit kann durch  $\mu r$  dargestellt werden und ist dem radius vector direct proportional. Die Flächen- geschwindigkeit ist gleich  $\mu a^2$  und da  $k^2$  den Wert 2 hat, so ist

$$r = a \cdot \sqrt{(1 + 2 \sin^2 \varphi)}$$

Ist die Constante  $B$  eine pos. Zahl, so muss infolge der Gleichung

$$\mu^2(a^2 + b^2) = -B$$

der absolute Wert der neg. Wurzel  $b^2$  grösser sein als die pos. Wurzel  $a^2$ . Die Wegcurve ist wieder eine Hyperbel von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo aber  $b^2 > a^2$ .

2) Die wirkende Kraft sei dem Quadrate der Entfernung der Massen umgekehrt proportional.

(Gesetz v. Newton.)

$$\text{a) } K = -\frac{nmM}{r^2}; \quad f'(r) = -\frac{1}{r^2}; \quad f(r) = \frac{1}{r}$$

$$g = -\frac{nM}{r^2}$$

Wenn abkürzend  $\mu = nM$  gesetzt wird, so lässt sich nach der allgemeinen Formel das Quadrat der Geschwindigkeit des Massenpunktes  $m$  durch die Gleichung

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + B$$

ausdrücken. Die Realität der Bewegung erfordert die Unterscheidung folgender drei Fälle, wobei aber für  $B$  das Unendliche auszuschliessen ist

- 1)  $B > 0$
- 2)  $B = 0$
- 3)  $B < 0$

Ersetzt man nun  $B$  durch  $-\frac{\mu}{a}$ , wo  $a$  die neue Integrationsconstante bezeichnet, so ist

$$v^2 = 2\mu \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

Mit Ausnahme von 0 ist die ganze Realitätslinie für  $a$  zugänglich. Wir unterscheiden daher folgende drei Hauptfälle

- 1)  $a > 0$
- 2)  $a < 0$
- 3)  $a = \infty$

Zuerst kommt nun der Fall zur Behandlung, wo  $a$  gleich einer pos., endlichen Zahl ist

- 1)  $a > 0$ .

Nach der Gleichung für  $v^2$  ist klar, dass  $v$  nur dann reell ausfallen kann, wenn beständig  $2a$  grösser als  $r$  ist, wenn also längs des Weges die Bedingung

$$r < 2a$$

erfüllt bleibt. Um die Grenzen von  $r$  noch näher bestimmen zu können, beachte man, dass

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \sqrt{-\frac{\mu}{a} r^2 + 2\mu r - A^2}$$

nur dann reell ausfallen kann, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen pos. Wert hat. Es sind somit nur solche Werte von  $r$  zulässig, welche  $\left(r^2 - 2ar + \frac{aA^2}{\mu}\right)$  neg. machen. Wenn wir nun die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 - 2ar + \frac{aA^2}{\mu} = 0$$

mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen, so sind dieselben für eine reelle Bewegung entschieden reell aufzufassen. Denn wären sie imaginär, so müssten sie conjugirt sein; dann aber wäre das Product  $(r - \alpha)(r - \beta)$  für reelle  $r$  beständig pos. und es liessen sich somit keine reellen Werte von  $r$  finden, welche  $\left(r^2 - 2ar + \frac{aA^2}{\mu}\right)$  neg. machen würden. Aus den Relationen

$$\alpha \cdot \beta = \frac{aA^2}{\mu}; \quad \alpha + \beta = 2a$$

erkennt man aber auch, dass beide Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  pos. sein müssen. Es steht nun frei,  $\alpha > \beta$  anzunehmen. Dann ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a} (\alpha - r)(r - \beta)}$$

und  $r$  muss nun längs des ganzen Weges die Bedingung

$$\beta < r < \alpha$$

erfüllen. Schon aus der Gleichung

$$\alpha + \beta = 2a$$

erkennt man, dass für  $\alpha > a$  die andere Wurzel  $\beta < a$  sein muss. Nur wenn  $\alpha = a$  ist, muss auch  $\beta = a$  sein. In diesem Falle wäre aber

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{-\frac{\mu}{a} (r - a)^2}$$

für reelle  $r$  beständig imaginär, somit die Bewegung selbst imaginär. Dieser Fall ist daher auszuschliessen. Im allgemeinen ist

$$\alpha = a \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{A^2}{a\mu}}\right)$$

$$\beta = a \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{A^2}{a\mu}}\right)$$

und es muss daher  $\frac{A^2}{a\mu} < 1$  sein. Auch der Fall  $A^2 = a\mu$  ist auszuschliessen. Setzt man abkürzend

$$k^2 = 1 - \frac{A^2}{a\mu}$$

also

$$A^2 = a\mu(1 - k^2)$$

so lassen sich die Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  auf folgende Weise darstellen:

$$\alpha = a(1 + k)$$

$$\beta = a(1 - k)$$

Auch ist nach den festgesetzten Bedingungen  $k$  reell und pos. und kleiner als 1. Der Leitstrahl  $r$  muss daher zwischen den Werten  $a(1 - k)$  und  $a(1 + k)$  liegen; es ist daher angezeigt

$$r = a(1 - k \cos \varphi)$$

zu setzen. Ich will aber diese Substitution noch deutlicher herleiten. Ersetzt man in dem Ausdrucke für  $\frac{\partial r}{\partial t}$  die Constante  $A^2$  durch  $\mu a(1 - k^2)$ , so erhält man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \left( \frac{a^2 k^2}{r^2} - \left( \frac{a}{r} - 1 \right)^2 \right)}$$

und es muss daher  $\left( \frac{a^2 k^2}{r^2} - \left( \frac{a}{r} - 1 \right)^2 \right)$  beständig pos. sein. Hier kann man nun  $\frac{ak}{r}$  als Hypotenuse und  $\left( \frac{a}{r} - 1 \right)$  als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks auffassen, die den Winkel  $\varphi$  einschliessen. Dann ist

$$\frac{a}{r} - 1 = \frac{ak}{r} \cdot \cos \varphi, \text{ also } r = a(1 - k \cos \varphi)$$

und  $\sqrt{\frac{a^2 k^2}{r^2} - \left( \frac{a}{r} - 1 \right)^2}$  ist die Länge der anderen Kathete, kann daher durch  $\frac{ak}{r} \sin \varphi$  ersetzt werden. Daher ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \cdot \frac{k \sin \varphi}{r}$$

Der grösste Wert, den  $r$  annehmen kann, wird für  $\varphi = \pi$  in der Form

$$r_1 = a(1 + k) = \alpha$$

erhalten, während der kleinste Wert durch

$$r_{11} = a(1 - k) = \beta$$

dargestellt werden kann. Es ist daher

$$\frac{r_1 + r_{11}}{2} = a$$

und somit ist die Constante  $a$  gleich dem arithmetischen Mittel aus der grössten und kleinsten Entfernung des Massenpunktes  $m$  von der wirkenden Kraft und ist als mittlere Entfernung bekannt. In  $r = a$  befindet sich der Punkt  $m$  im Aphelium und in  $r = \beta$  im Perihelium seiner Bahn. Wir beabsichtigen nun, die Differentialgleichung für  $\frac{\partial r}{\partial t}$  zu integrieren. Nun ist wol  $r$  eine bekannte Function von  $\varphi$ ; aber  $\varphi$  ist eine noch unbekannte Function von  $t$ . Man leite daher die Gleichung

$$r = a(1 - k \cos \varphi)$$

nach  $t$  ab; dann ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ak \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und somit muss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

sein. Man erkennt aus dieser Darstellung von  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , dass dieser Differentialquotient mit dem Radius der Bahn umgekehrt proportional ist und längs des ganzen Weges nirgends verschwinden kann. Löst man die Gleichung nach  $dt$  auf, so ist

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (1 - k \cos \varphi) d\varphi$$

und die Integration dieser Gleichung ergibt die Zeit in Function der Variabele  $\varphi$ . Man erhält

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (\varphi - k \sin \varphi)$$

Aus der Gleichung

$$r = a(1 - k \cos \varphi)$$

ist einleuchtend, dass der materielle Punkt  $m$  seine Bahn einmal durchlaufen hat, wenn der Winkel  $\varphi$  von 0 an den Wert  $2\pi$  erreicht hat. Wird daher die Umlaufszeit mit  $T$  bezeichnet, so erhält man dafür aus der Darstellung für die Zeit  $t$  im allgemeinen durch Substitution von  $\varphi = 2\pi$  den Wert

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot 2\pi$$

Dieselbe ist daher von der Masse des materiellen Punktes  $m$  unabhängig und der Quotient  $\frac{T^2}{a^3}$  für ein System beweglicher Massenpunkte, die sich unter dem Einflusse derselben Kraft bewegen, eine Constante. Daher gilt hier die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen.

Für die doppelte Flächengeschwindigkeit  $A$  hatten wir oben gefunden

$$A = \sqrt{\mu a(1 - k^2)}$$

Wie nun der doppelte Inhalt des Flächenstückes, welcher vom radius vector in der kleinen Zeit  $dt$  durchlaufen wird, mit  $dS$  bezeichnet, so ist

$$dS = \sqrt{\mu a(1 - k^2)} \cdot dt$$

und daher

$$S = \sqrt{\mu a(1 - k^2)} \cdot t$$

Die Inhalte der Sektoren, welche vom radius vector durchlaufen werden, sind somit mit der Zeit direct proportional. Ersetzt man noch  $t$  durch die bekannte Function  $\varphi$ , so hat man auch

$$S = a^2 \sqrt{1 - k^2} \cdot (\varphi - k \sin \varphi)$$

und setzt man hier  $\varphi = 2\pi$ , so ist

$$J = a^2 \sqrt{1 - k^2} \cdot \pi$$

der Inhalt der von der Wegcurve eingeschlossenen Fläche.

Der Kraftmittelpunkt werde als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. Richtung der  $x$ -Axe durch das Perihel der Wegcurve geht.

Bezeichnet  $w$  die wahre Anomalie und sind  $x$  und  $y$  die Coordinaten des Massenpunktes  $m$ , so hat man

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

und es ist ganz allgemein

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{A}{r^2}$$

Der Differentialquotient der wahren Anomalie nach der Zeit  $t$  ist mit dem Quadrat des Radius umgekehrt proportional. Ersetzt man nun  $r$  und  $dt$  durch die bekannten Functionen in  $\varphi$ , und setzt abkürzend

$$u = \frac{1+k}{1-k} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

so ist

$$dw = 2 \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

also

$$w = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$$

und daher auch

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

Bezeichnet daher  $d$  einen constanten Factor, so hat man

$$d \cdot \sin \frac{w}{2} = \sqrt{1+k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$d \cdot \cos \frac{w}{2} = \sqrt{1-k} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

werden nun diese Gleichungen quadriert, so findet man den Wert des proportionalen Factors  $d$  in der Form

$$d^2 = 1 - k \cos \varphi$$

Es ist daher

$$\sin \frac{w}{2} = \sqrt{1+k} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-k \cos \varphi}}$$

$$\cos \frac{w}{2} = \sqrt{1-k} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-k \cos \varphi}}$$

Durch Anwendung der Relationen

$$\sin w = 2 \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2} \quad \text{und} \quad \cos w = \cos^2 \frac{w}{2} - \sin^2 \frac{w}{2}$$

erhält man hieraus für  $\sin w$  und  $\cos w$  drei Werte

$$\sin w = \sqrt{1-k^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1-k \cos \varphi}; \quad \cos w = \frac{\cos \varphi - k}{1-k \cos \varphi}$$

Die rechtwinkligen Coordinaten  $(x, y)$  des Massenpunktes  $m$  lassen sich daher auf folgende Weise in Functionen von  $\varphi$  darstellen:

$$x = r \cos w = a(\cos \varphi - k)$$

$$y = r \sin w = a \cdot \sqrt{1 - k^2} \cdot \sin \varphi$$

Die Elimination der Variablen  $\varphi$  aus diessen Gleichungen führt nun schliesslich auf die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten. Man hat

$$\frac{(x + ak)^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\sqrt{1 - k^2})^2} = 1$$

Der materielle Punkt bewegt sich somit in einer Ellipse, in deren Brennpunkte die anziehende Kraft liegt. Die Halbaxenquadrate werden durch  $a^2$  und  $a^2(1 - k^2)$  ausgedrückt und die numerische Excentricität wird durch die Gleichung

$$k^2 = 1 - \frac{A^2}{\mu a}$$

bestimmt. Der Winkel  $\varphi$  bildet die excentrische Anomalie.

Ich will noch die Geschwindigkeit  $v$  durch die excentrische Anomalie  $\varphi$  ausdrücken. Bekanntlich ist

$$v^2 = 2\mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

ersetzt man hier  $r$  durch  $a(1 - k \cos \varphi)$ , so erhält man nach einigen Umformungen

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + k \cos \varphi}{1 - k \cos \varphi}}$$

Im Perihel ist

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + k}{1 - k}}$$

und im Aphelium

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 - k}{1 + k}}$$

und daher

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1 + k}{1 - k}$$

Den oben angegebenen Ausdruck für die Geschwindigkeit  $v$  in Function von  $\varphi$  erhält man auch auf folgende Weise:

Es ist

$$v = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2}$$

weil

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$$

Aus den Werten für die rechtwinkligen Coordinaten  $(x, y)$  ergibt sich aber

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -a \cdot \sin \varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = a \sqrt{1 - k^2} \cdot \cos \varphi$$

somit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2(1 - k^2 \cos^2 \varphi)$$

ersetzt man noch  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$  durch  $\left(\frac{\mu}{a^3} \cdot \frac{(1 - k \cos \varphi)^2}{1}\right)$ , so erhält man wieder

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + k \cos \varphi}{1 - k \cos \varphi}}$$

Für die Flächengeschwindigkeit  $A$  hatten wir den Wert  $\sqrt{\mu a (1 - k^2)}$  erhalten. Nun ist aber auch

$$A = x \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial x}{\partial t} = \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi - k \cdot \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cdot \cos \varphi \end{vmatrix} a^2 \cdot \sqrt{1 - k^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

somit

$$A = a^2 \sqrt{1 - k^2} \cdot (1 - k \cos \varphi) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \cdot \sqrt{1 - k^2}$$

und der bekannte Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit kehrt wieder.

Wir haben uns im Vorhergehenden die Aufgabe gestellt, die Bahn eines Massenpunktes aufzufinden, der sich unter dem Einflusse einer Kraft frei bewegen kann, welche im directen Verhältniss der Massen und im umgekehrten Verhältniss der Entfernung auf ihn einwirkt, und haben als speciellen Fall eine Ellipse gefunden, mit der anziehenden Kraft im Mittelpunkte. Ich will nun die Aufgabe umkehren und sagen: Die Bahn eines Massenpunktes, welcher sich unter dem Einflusse einer centralen Kraft frei bewegen kann, ist eine Ellipse mit den Halbaxen  $a$  und  $b$ ; die Bewegung findet ferner

in der Weise statt, dass der radius vector in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchläuft. Die Lage des Kraftmittelpunktes und die Art und Weise ihrer Einwirkung auf den materiellen Punkt soll gesucht werden. Der Vollständigkeit wegen will ich die Lösung dieser Aufgabe hier folgen lassen.

Der Brennpunkt  $F$  der Ellipse mit den Halbaxen  $a$  und  $b$  werden als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen Axen mit denen der Ellipse zusammenfallen sollen. Bezeichnet nun wie früher  $w$  die wahre und  $\varphi$  die excentrische Anomalie des beweglichen Massenpunktes  $(x, y)$ , so ist

$$k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

die numerische Excentricität, und man hat

$$x = a(\cos \varphi - k); \quad y = b \sin \varphi$$

Ebenso kann der Inhalt eines Sectors, der vom radius vector in der Zeit  $t$  durchlaufen wird, durch  $\frac{ab}{2}(\varphi - k \sin \varphi)$  dargestellt werden. Nach Voraussetzung ist derselbe nun mit der Zeit proportional. Bezeichnet daher  $n$  einen proportionalen Factor, so hat man

$$nt = \frac{ab}{2}(\varphi - k \sin \varphi)$$

Für  $\varphi = 2\pi$  hat der Massenpunkt  $m$  die Ellipse einmal durchlaufen. Wird die Umlaufszeit mit  $T$  bezeichnet, so hat man

$$aT = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi$$

also

$$n = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Setzt man nun abkürzend

$$\mu = \frac{2\pi}{T}$$

so ist

$$\mu t = (\varphi - k \sin \varphi)$$

und die Ableitung (dieser Gleichung nach  $\varphi$ ) von  $t$  nach  $\varphi$  ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{1 - k \cos \varphi}$$

Da nun

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - k \cos \varphi)$$

ist, so hat man auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu a}{r}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des entsprechenden Kreispunktes ist somit mit dem radius vector umgekehrt proportional.

Bezeichnet auch wieder  $A$  die doppelte Flächengeschwindigkeit, so kann dieselbe aus den rechtwinkligen Coordinaten nach der Formel

$$A = x \frac{\partial y}{\partial t} - y \frac{\partial x}{\partial t}$$

berechnet werden. Da dasselbe in der vorher gehenden Aufgabe geschehen ist, so will ich hier einen andern Weg einschlagen und setze

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

wo nun  $\frac{\partial w}{\partial t}$  zu berechnen ist. Aus

$$x = r \cos w = a(\cos \varphi - k)$$

folgt einerseits

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \cos w \cdot \frac{\partial r}{\partial t} - r \sin w \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a(\cos \varphi - k)}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} - b \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial t}$$

und andererseits ist auch

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Ersetzt man nun hier  $\frac{\partial r}{\partial t}$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  resp. durch  $\frac{a^2 \mu k \sin \varphi}{r}$  und  $\frac{a \mu}{r}$ , so erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2 \mu}{r^2} \cdot \sqrt{1 - k^2}$$

Wird nun diese Gleichung mit  $r^2$  multiplicirt, so folgt

$$A = a^2 \mu \cdot \sqrt{1 - k^2}$$

Die Geschwindigkeit wird nach der Formel

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

berechnet. Nun ist

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a^2 \mu \sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = b \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{ab \mu \cos \varphi}{r}$$

und daher

$$v = \mu a \sqrt{\frac{1 + k \cos \varphi}{1 - k \sin \varphi}}$$

Bezeichnet wieder  $g$  die Beschleunigung, und sind  $g_x$  und  $g_y$  deren Componenten, so hat man

$$g_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{a^3 \mu^2}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{a^3 \mu^2}{r^2} \cdot \cos w$$

$$g_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{a^3 \mu^2}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{a^3 \mu^2}{r^2} \cdot \sin w$$

weil nun

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

so erhält man für die Beschleunigung den Wert

$$g = -\frac{a^3 \mu^2}{r^2}$$

Aus den für  $g_x$  und  $g_y$  erhaltenen Ausdrücken erkennt man, dass die Beschleunigung des Massenpunktes  $m$  längs des ganzen Weges nach dem Brennpunkte gerichtet ist. Da nun aber die Beschleunigung auch die Richtung der Kraft angibt, so ist klar, dass der Brennpunkt  $F$  auch als Sitz der Kraft betrachtet werden muss. Der absolute Wert derselben ist daher

$$K = \frac{m \mu^2 a^3}{r^2}$$

Bezeichnet ferner  $M$  die Masse des anziehenden Körpers und ist  $d$  ein proportionaler Factor, so hat man auch

$$d \cdot M = a^3 \mu^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

und man erkennt, dass der Quotient  $\frac{a^3}{T^2}$  für ein System beweglicher Massenpunkte eine constante Grösse ist. Daher gilt hier die Proportion

$$T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$$

$$2) \quad a < 0.$$

Da hier die willkürliche Constante  $a$  einen neg. Wert hat, so ersetze man  $a$  durch  $(-a')$ , wo  $a'$  pos. aufzufassen ist. Lässt man bei  $a'$  den Accent wieder fallen, so ist

$$v^2 = 2\mu \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{2a} \right)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a} \left( r^2 + 2ar - \frac{aA^2}{\mu} \right)}$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 + 2ar - \frac{aA^2}{\mu} = 0$$

seien wie früher mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet. Für dieselben ergeben sich die Werte

$$\alpha = a \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{A^2}{\mu a}} - 1 \right)$$

$$\beta = -a \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{A^2}{\mu a}} + 1 \right)$$

Beide Wurzeln sind reell;  $\alpha$  ist pos. und  $\beta$  neg. und zugleich ist mod.  $\beta > \alpha$ . Dasselbe zeigen auch die Relationen

$$\alpha + \beta = -2a; \quad \alpha \cdot \beta = -\frac{aA^2}{\mu}$$

Man ersetze nun die neg. Wurzel  $\beta$  durch  $(-\beta')$ ; zugleich sei

$$k^2 = 1 + \frac{A^2}{\mu a}$$

Lässt man bei  $\beta'$  den Accent wieder weg, so hat man

$$\alpha = a(k - 1); \quad \beta = a(k + 1)$$

$$\alpha\beta = \frac{aA^2}{\mu}; \quad \beta - \alpha = 2a$$

$$A^2 = \mu a \cdot (k^2 - 1)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a} (r - \alpha)(r + \beta)}$$

und daher muss beständig  $r > \alpha$  sein. Um auch hier zu einer passenden Substitution für die Variable  $r$  zu gelangen, ersetze man im Ausdrücke für  $\frac{\partial r}{\partial t}$  die Constante  $A^2$  durch  $\mu a(k^2 - 1)$ . Weil dann

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 - \frac{a^2 k^2}{r^2}}$$

so ist es angezeigt,  $\left(1 + \frac{a}{r}\right)$  durch  $\frac{ak \cos \varphi}{r}$  zu ersetzen. Dann ist

$$r = a(k \cos \varphi - 1)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \cdot \frac{k \sin \varphi}{r}$$

Da der tiefste Wert von  $r$  gleich  $a$ , oder gleich  $a(k-1)$  ist, so beginnt die neue Variable  $\varphi$  bei null und durchläuft von hier an alle pos. Werte. Aus der Gleichung

$$r = a(k \cos \varphi - 1)$$

folgt aber auch, dass

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ak \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ist und daher

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ist daher mit dem Leitstrahl umgekehrt proportional. Für das Differential der Zeit erhält man nun den Wert

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (k \cos \varphi - 1) d\varphi$$

und die Integration ergibt sofort

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (k \sin \varphi - \varphi)$$

Der Mittelpunkt der Kraft werde als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen positive Richtung der  $x$ -Axe durch den Punkt

$$(\varphi = 0, \quad r = (k-1)a$$

geht. Für die rechtwinkligen Coordinaten  $(x, y)$  des Massenpunktes hat man wieder

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

Aus dem bekannten Ausdrucke für die doppelte Flächengeschwindigkeit

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\sqrt{\mu a (k^2 - 1)}}{r^2}$$

Ersetzt man hier  $dt$  und  $r^2$  resp. durch  $\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (k \operatorname{cof} \varphi - 1) d\varphi$  und  $a^2(k \operatorname{cof} \varphi - 1)^2$ , so erhält man

$$dw = \sqrt{1 - k^2} \cdot \frac{d\varphi}{k \operatorname{cof} \varphi - 1}$$

und die Integration dieser Gleichung führt auf

$$w = 2 \operatorname{arctg} \cdot \left( \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \right)$$

also

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$$

Bezeichnet auch hier  $d$  einen constanten Factor, so gelten die Gleichungen

$$d \cdot \sin \frac{w}{2} = \sqrt{1+k} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$d \cdot \cos \frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \operatorname{cof} \frac{\varphi}{2}$$

Erhebt man beide Gleichungen in's Quadrat und addirt, so folgt

$$d = \sqrt{k \operatorname{cof} \varphi - 1}$$

daher ist

$$\sin \frac{w}{2} = \sqrt{k+1} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k \operatorname{cof} \varphi - 1)}}$$

$$\cos \frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \frac{\operatorname{cof} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k \operatorname{cof} \varphi - 1)}}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun mit Hülfe der bekannten Relationen

$$\frac{1 - \cos w}{2} = \sin^2 \frac{w}{2}; \quad \frac{1 + \cos w}{2} = \cos^2 \frac{w}{2}$$

$$\frac{\operatorname{cof} \varphi - 1}{2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}; \quad \frac{\operatorname{cof} \varphi + 1}{2} = \operatorname{cof}^2 \frac{\varphi}{2}$$

für  $\sin w$  und  $\cos w$  schliesslich die Werte

$$\cos w = \frac{\operatorname{cof} \varphi - k}{k \operatorname{cof} \varphi - 1}; \quad \sin w = \frac{\sqrt{k^2 - 1} \cdot \sin \varphi}{k \operatorname{cof} \varphi - 1}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke lassen sich nun die Coordinaten des Massenpunktes auf folgende Weise darstellen:

$$x = r \cos w = a(\cos \varphi - k)$$

$$y = r \sin w = a \sqrt{k^2 - 1} \cdot \sin \varphi$$

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen die Variable  $\varphi$ , so erhält man die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten in der Form

$$\frac{(x + ak)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a\sqrt{k^2 - 1})^2} = 1$$

Wenn daher die ursprüngliche Constante  $a$  einen endlichen, negativen Wert hat, so ist die Bahn des materiellen Punktes eine Hyperbel, in deren pos. Brennpunkte der Mittelpunkt der anziehenden Kraft liegt. Die Hauptaxe derselben ist gleich dem absoluten Werte von  $a$ , während die Nebenaxe  $b$  durch  $a\sqrt{k^2 - 1}$  bestimmt wird. Die numerische Excentricität ist gleich der positiven Quadratwurzel aus  $\left(1 + \frac{A^2}{\mu a}\right)$  und ist beständig grösser als 1. Für  $1 < k^2 < 2$  ist auch  $b < a$ ; ist aber  $k^2 = 2$ , so ist  $b = a$  und die Hyperbel geht in eine gleichseitige über. Ist endlich  $k^2 > 2$ , so ist auch  $b > a$ .

$$3) \quad a = \infty.$$

Weil in diesem Falle  $\frac{1}{2a}$  als verschwindend klein betrachtet werden kann, so nimmt der Ausdruck für  $v^2$  die Form

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

an. Die Geschwindigkeit ist daher mit der Quadratwurzel aus der Entfernung  $r$  umgekehrt proportional. Ebenso erhält man für  $\frac{\partial r}{\partial t}$ , wenn dort  $a = \infty$  gesetzt wird, den Wert

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{2\mu r - A^2}$$

und es muss daher beständig  $r > \frac{A^2}{2\mu}$  angenommen werden, wenn eine reelle Bewegung entstehen soll. Der tiefste Wert, den  $r$  annehmen kann, ist  $\frac{A^2}{2\mu}$ . Man setze nun

$$r = \frac{A^2}{2\mu} \cdot \cos^2 \varphi$$

Die neue Variable  $\varphi$  wächst nun von 0 bis zum pos. Unendlichen.  
Die Substitution ergibt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = A \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$$

Die Ableitung von  $r$  nach  $t$  ergibt aber auch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{A^2}{\mu} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und diese beiden Ausdrücke für  $\frac{\partial r}{\partial t}$  führen auf den Wert von  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ .  
Man erhält

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\mu^2}{A^2 \cos^3 \varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{2r^3}}$$

Die Ableitung von  $\varphi$  nach  $t$  ist somit mit der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional. Für  $dt$  erhält man aus obiger Gleichung den Wert

$$dt = \frac{A^3}{2\mu^2} \cdot \cos^3 \varphi d\varphi$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi})$$

also ist auch

$$\begin{aligned} \cos^3 \varphi &= \frac{1}{2^3} \left( (e^{3\varphi} + e^{-3\varphi}) + 3(e^\varphi + e^{-\varphi}) \right) \\ &= \frac{1}{2^3} (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi), \end{aligned}$$

und somit

$$dt = \frac{A^3}{2^3 \mu^2} \cdot (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi) d\varphi$$

Die Integration dieser Gleichung führt nun auf den Wert von  $t$  in der Form

$$t = \frac{A^3}{2^3 \cdot \mu^2} \cdot \left( \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + 3 \sin \varphi \right)$$

Der Kraftmittelpunkt werde nun als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen  $x$ -Axe durch das Perihel der Wegcurve, also durch den Punkt

$$r = \frac{A^2}{2\mu}$$

geht. Wenn der Winkel, den der Leitstrahl  $r$  mit der pos.  $x$ -Axe bildet, mit  $w$  bezeichnet wird, so hat man

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w$$

und

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{also} \quad dw = \frac{A}{r^2} dt$$

Ersetzt man wieder  $dt$  und  $r^2$  durch die oben dargestellten Functionen in  $\varphi$ , so folgt

$$dw = \frac{2 d\varphi}{\cos \varphi}$$

oder

$$dw = 4 \cdot \frac{d \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

also

$$w = 4 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ist  $d$  wieder ein proportionaler Factor, so gelten die Gleichungen

$$d \cdot \sin \frac{w}{4} = \sin \frac{\varphi}{2}; \quad d \cdot \cos \frac{w}{4} = \cos \frac{\varphi}{2}$$

und die Elimination von  $w$  aus diesen Gleichungen führt auf den Wert von  $d$  in der Form

$$d = \sqrt{\cos \varphi}$$

Daher ist

$$\sin \frac{w}{4} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi}}; \quad \frac{w}{4} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi}}$$

Aus diesen Werten findet man ferner

$$\begin{aligned} \sin \frac{w}{2} &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}; & \cos \frac{w}{2} &= \frac{1}{\cos \varphi} \\ \sin w &= \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}; & \cos w &= \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

und daher ist auch

$$\begin{aligned} x = r \cos w &= \frac{A^2}{2\mu} \cdot (1 - \sin^2 \varphi) \\ y = r \sin w &= \frac{A^2}{\mu} \sin \varphi \end{aligned}$$

Die Elimination von  $\varphi$  aus diesen 2 Gleichungen führt nun auf die Gleichung der Wegcurve in der Form

$$y^2 = \frac{2A^2}{\mu} \cdot \left( \frac{A^2}{2\mu} - x \right)$$

Die Bahn des materiellen Punktes ist somit eine Parabel, in deren Brennpunkte die anziehende Kraft liegt. Der Parameter ist gleich  $\frac{2A^2}{\mu}$ , also mit dem Quadrate der doppelten Flächengeschwindigkeit proportional und der Brennpunkt wird durch  $\frac{A^2}{2\mu}$  bestimmt.

Wir sind am Schlusse dieses Abschnittes angelangt, und es bleibt jetzt noch der Fall zu behandeln übrig, wo die wirkende Kraft nach dem Newton'schen Gesetze abstossend auf den beweglichen Massenpunkt einwirkt.

$$b) \quad K = \frac{nmM}{r^2}; \quad f'(r) = \frac{1}{r^2}; \quad f(r) = -\frac{1}{r}; \quad g = \frac{nM}{r^2}$$

Setzt man auch hier abkürzend

$$\mu = nM$$

so erhält man nach der allgemeinen Formel für die Geschwindigkeit  $v$  den Ausdruck

$$v^2 = -\frac{2\mu}{r} + B$$

und man erkennt, dass nur pos. Werte von  $B$  in Betracht kommen können. Wenn

$$B = \frac{\mu}{a}$$

gesetzt wird, und für die Constante  $a$  das pos. Unendliche ausgeschlossen wird, so hat man

$$v^2 = 2\mu \left( \frac{1}{2a} - \frac{1}{r} \right)$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a} \left( r^2 - 2ar - \frac{aA^2}{\mu} \right)}$$

Sind nun  $\alpha$  und  $\beta$  die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 - 2ar - \frac{aA^2}{\mu} = 0$$

so hat man

$$\alpha = a \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{A^2}{\mu a}} \right)$$

$$\beta = a \cdot \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{A^2}{\mu a}} \right)$$

und

$$\alpha \cdot \beta = -\frac{aA^2}{\mu}; \quad \alpha + \beta = 2a$$

Beide Wurzeln sind reell;  $\alpha$  ist pos. und  $\beta$  ist neg. und mod.  $\beta < \alpha$ . Ersetzt man auch  $\beta$  durch  $(-\beta')$ , wo  $\beta'$  pos. zu verstehen ist und lässt bei  $\beta'$  den Accent wieder fallen, so erhält man, wenn noch abkürzend

$$k^2 = 1 + \frac{A^2}{a\mu}$$

gesetzt wird

$$\alpha = a(1 + k); \quad \beta = a(k - 1)$$

$$\alpha\beta = \frac{aA^2}{\mu}; \quad \alpha - \beta = 2a$$

Für die doppelte Flächengeschwindigkeit  $A$  erhält man hier den Wert

$$A^2 = \mu a(k^2 - 1)$$

Weil jetzt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a} (r - \alpha)(r + \beta)}$$

ist, so muss  $r$  längs des ganzen Weges die Bedingung

$$r > \alpha$$

erfüllen. Ersetzt man  $A^2$  durch  $\mu a(k^2 - 1)$ , so hat man auch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \left( \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{a^2 k^2}{r^2} \right)}$$

und es scheint auch hier angezeigt,  $\left( 1 - \frac{a}{r} \right)$  durch  $\frac{ak}{r} \cos \varphi$  zu ersetzen, also

$$r = a(1 + k \cos \varphi)$$

anzunehmen. Der tiefste Wert von  $r$  liegt bei

$$\alpha = a(k + 1)$$

Die neue Variable  $\varphi$  beginnt daher bei null und durchläuft von hier an die ganze pos. Hälfte der Realitätslinie. Mittelst dieser Substitution geht nun  $\frac{\partial r}{\partial t}$  in

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\mu a} \cdot \frac{k \sin \varphi}{r}$$

über. Wird ferner die Gleichung

$$(r = a(1 + k \cos \varphi))$$

nach  $t$  abgeleitet, so erhält man auch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ak \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und die Elimination von  $\frac{\partial r}{\partial t}$  aus diesen beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

Die Ableitung von  $\varphi$  nach der Zeit  $t$  ist somit mit dem Radius umgekehrt proportional. Weil nun auch

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (1 + k \cos \varphi) d\varphi$$

so führt die Integration dieser Gleichung auf die Zeit  $t$  in Function der Variablen  $\varphi$ . Man hat

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot (\varphi + k \sin \varphi)$$

Der Mittelpunkt der wirkenden Kraft werde wieder als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen pos. Richtung der  $x$ -Axe durch das Perihel der Wegcurve geht, wo also

$$r = a(1 + k) \text{ ist.}$$

Sind  $(x, y)$  die rechtwinkligen Coordinaten des Massenpunktes  $m$  und ist  $w$  der Winkel, den der Leitstrahl mit der  $x$ -Axe bildet, so hat man

$$x = r \cos w; \quad y = r \sin w; \quad dw = \frac{A}{r^2} dt$$

Setzt man auch hier wieder für  $r$  und  $dt$  die oben gefundenen Werte in  $\varphi$  ein, so folgt

$$dr = \sqrt{k^2 - 1} \cdot \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi}$$

Weil

$$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

ist, und 1 durch  $\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{6}$  ersetzt werden kann, so hat man auch, wenn abkürzend

$$u = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$$

gesetzt wird,

$$dw = 2 \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

also

$$w = 2 \cdot \operatorname{arctg} u$$

und somit ist

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$$

Bezeichnet  $d$  einen proportionalen Factor, so gelten die Gleichungen

$$d \cdot \sin \frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}; \quad d \cdot \cos \frac{w}{2} = \sqrt{k+1} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

und die Elimination von  $w$  aus diesen Gleichungen führt auf den Wert von  $d$  in der Form

$$d = \sqrt{(k \cos \varphi + 1)}$$

Daher hat man

$$\sin \frac{w}{2} = \sqrt{k-1} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k \cos \varphi + 1)}}$$

$$\cos \frac{w}{2} = \sqrt{k+1} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(k \cos \varphi + 1)}}$$

folglich auch

$$\sin w = \sqrt{k^2-1} \frac{\sin \varphi}{k \cos \varphi + 1}; \quad \cos w = \frac{k + \cos \varphi}{k \cos \varphi + 1}$$

Die rechtwinkligen Coordinaten des Massenpunktes lassen sich daher auf folgende Weise als Functionen von  $\varphi$  darstellen:

$$x = a(\cos \varphi + k); \quad y = a \sqrt{k^2-1} \cdot \sin \varphi$$

die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten ist daher

$$\frac{(x-ak)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a\sqrt{k^2-1})^2} = 1$$

Die Bahn des materiellen Punktes ist also eine (Ellipse) Hyperbel mit den Halbaxen  $a$  und  $a\sqrt{k^2 - 1}$ , in deren neg. Brennpunkte die wirkende Kraft liegt. Die numerische Excentricität  $k$  ist gleich der pos. Quadratwurzel aus  $\left(1 + \frac{A^2}{\mu a}\right)$  und hat den Wert  $\sqrt{2}$ , wenn  $A = \sqrt{\mu a}$  ist. In diesem Falle ist die Bahn eine gleichseitige Hyperbel mit den Halbaxen  $a$ .

3) Die Kraft ist dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional.

$$a) \quad K = -\frac{nmM}{r^3}; \quad f'(r) = -\frac{1}{r^2}; \quad f(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$g = -\frac{nM}{r^3}$$

Wenn auch hier abkürzend

$$u^2 := nM$$

gesetzt wird, so lässt sich das Quadrat der Geschwindigkeit durch die Formel ausdrücken

$$v^2 = \frac{u^2}{r^2} + B$$

Die Constante  $B$  darf mit Ausschluss des Unendlichen die ganze Realitätslinie durchlaufen. Es sind demnach folgende drei Hauptfälle zu unterscheiden:

- 1)  $B > 0$
- 2)  $B = 0$
- 3)  $B < 0$

Wir betrachten zuerst den Fall, wo  $B$  einen pos. Wert hat.

- 1)  $B > 0$

Ist  $B$  eine pos. Zahl, so existirt  $v$  für alle reellen Werte von  $r$ ,  $r = 0$  und  $r = \infty$  nicht ausgeschlossen. Ist  $r = \infty$ , so darf man in tiefster Näherung  $v^2 = B$  setzen und die Constante  $B$  stellt somit das Quadrat der Geschwindigkeit in unendlicher Ferne dar. Für die Ableitung von  $r$  nach  $t$  erhält man den Ausdruck

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\mu^2 - A^2 + r^2 B}$$

Da nun  $B$  pos. ist, so hängt die Realität von  $\frac{\partial r}{\partial t}$  von dem Werte von  $(\mu^2 - A^2)$  ab. Es ist daher angezeigt, hier drei Unterabteilungen zu unterscheiden, je nachdem der Ausdruck  $(\mu^2 - A^2)$  positiv, negativ oder null ist.

$$\alpha) \quad \mu^2 - A^2 > 0; \quad A < \mu$$

Da in diesem Falle auch  $\frac{\partial r}{\partial t}$  für alle pos. Werte von  $r$  reell ausfällt, so muss die Wegcurve in's Unendliche reichen und weil für ein pos.  $dt$  auch  $dr$  pos. ausfällt, so nimmt mit wachsender Zeit auch die Entfernung vom Kraftmittelpunkte zu. Im Unendlichen bekommt  $\frac{\partial r}{\partial t}$  annähernd den Wert  $\sqrt{B}$ , stimmt also hier mit der Geschwindigkeit  $v$  überein. Man führe nun folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{\mu^2 - A^2}{A^2} = a^2; \quad \frac{A^2}{B} = b^2; \quad B = c^2$$

dann ist

$$A = be; \quad \mu^2 - A^2 = a^2 b^2 c^2$$

Da im allgemeinen  $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$  durch  $\left(2nMf(r) + B - \frac{A^2}{r^2}\right)$  ausgedrückt wird, so steht es frei,  $\frac{\partial r}{\partial t}$  durch die negative Quadratwurzel aus diesem Ausdrucke darzustellen und also

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu^2 - A^2}{r^2} + B}$$

anzunehmen. Ersetzt man nun hier  $(\mu^2 - A^2)$  und  $B$  durch die oben angegebenen Ausdrücke, so hat man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{r^2} + c^2} = -c \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^2}{r^2} + 1}$$

Wenn  $dt$  einen pos. Wert hat, so ergibt diese Formel für  $dr$  einen neg. Wert; daher ist mit zunehmender Zeit der Leitstrahl im Abnehmen begriffen. Man führe nun mittelst der Gleichung

$$r = \frac{ab}{\sin \varphi}$$

die neue Variable  $\varphi$  in die Rechnung ein. Weil dann  $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{r^2} + 1}$  in  $\cos \varphi$  übergeht, so folgt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -c \cos \varphi$$

also

$$dt = -\frac{dr}{c \cos \varphi}$$

Aus dem Ausdrücke für  $r$  folgt aber auch

$$dr = -ab \cdot \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

Setzt man nun diesen Wert für  $dr$  in die Gleichung für  $dt$  ein, so folgt

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

und man erkennt aus dieser Gleichung, dass mit wachsender Zeit auch die Variable  $\varphi$  im Zunehmen begriffen ist. Wenn  $\varphi$  von 0 an bis zum pos. Unendlichen ansteigt, sinkt die Variable  $r$  vom pos. Unendlichen fortwährend bis auf null herab. Nun ist aber

$$d \cdot \cotang \varphi = -\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

und somit

$$dt = -\frac{ab}{c} d \cdot \cotang \varphi$$

folglich

$$t = -\frac{ab}{c} \cdot \cotang \varphi + C$$

wo  $C$  die Integrationsconstante bezeichnet. Nimmt man nun an, dass mit  $\varphi = \infty$  die Zeit  $t$  gleich null sein soll, so muss die Constante  $C$  den Wert  $\frac{ab}{c}$  haben; in diesem Falle ist dann

$$t = \frac{ab}{c} (1 - \cotang \varphi)$$

Nun ist aber

$$\sin \varphi = \frac{ab}{r}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 + \frac{a^4 b^2}{r^2}}, \quad \text{also} \quad \cotang \varphi = \sqrt{\frac{r^2}{a^2 b^2} + 1}$$

somit hat man auch

$$t = \frac{ab}{c} \left( 1 - \sqrt{\frac{r^2}{a^2 b^2} + 1} \right)$$

Für  $r = 0$  ist auch  $t = 0$  und der Zeitanfang liegt somit im Ursprunge. Für  $r = N$  ist annähernd auch  $t = -\frac{N}{c}$ , wird somit auf

dieselbe Art unendlich wie der Leitstrahl  $r$ . Da der obige Ausdruck für  $t$  für  $r > 0$  beständig neg. ausfällt, so gibt diese Gleichung den neg. Wert der Zeit an, welche der Körper  $m$  braucht, um vom Punkte  $r$  seiner Bahn nach dem Kraftmittelpunkte als dem Ende der Wegcurve zu gelangen. Nehmen wir diese Zeit pos. an, so ist

$$t = \frac{ab}{c} \cdot \left( \sqrt{\frac{r^2}{a^2 b^2} + 1} - 1 \right)$$

Ferner ist

$$r^2 \frac{dw}{dt} = A = bc$$

also

$$dw = bc \cdot \frac{dt}{r^2}$$

Ersetzt man wieder  $dt$  und  $r^2$  durch die bekannten Functionen in  $\varphi$ , so folgt

$$a dw = d\varphi$$

also

$$\varphi = aw$$

Die Variable  $\varphi$  ist somit mit dem Winkel  $w$  direct proportional. Um die Wegcurve in unendlicher Ferne beurteilen zu können, beachte man, dass

$$dt = -\frac{1}{c} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1 + \frac{a^2 b^2}{r^2}}}$$

ist. Setzt man nun diesen Wert von  $dt$  in die Gl. für  $dw$  ein, so folgt

$$dw = -b \cdot \frac{dr}{r^2 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 b^2}{r^2}\right)}}$$

und diese Gleichung geht für  $r = \infty$  in die andere

$$dw = -b \cdot \frac{dr}{r^2}$$

über, aus welcher

$$w = \frac{b}{r}$$

folgt. Die bei dieser Integration auftretende Constante muss den Wert null haben, weil für  $r = \infty$  der Winkel  $w$  annähernd gleich null sein muss. Für ein sehr grosses  $r$  ist es daher erlaubt,  $w$  durch  $\sin w$  zu ersetzen und da bekanntlich  $r \sin w$  den Abstand des Massenpunktes von der  $x$ -Axe angibt, so hat man für die Wegcurve in unendlicher Ferne die Gleichung

$$r \sin \omega = b$$

Dieselbe läuft daher; in der Entfernung  $b$  mit der  $x$ -Axe parallel und  $y = b$  ist die Gleichung der Asymptote. In unmittelbarer Nähe von  $r = 0$  sind sowol  $\varphi$  wie  $\omega$  unendlich gross; weil dann  $\sin \varphi$  annähernd durch  $\frac{1}{2} e^\varphi$  dargestellt werden kann, so nimmt hier die Gleichung der Wegcurve die Form

$$r = 2ab e^{-a\omega}$$

an, hat daher Aehnlichkeit mit einer log. Spirale. Im allgemeinen aber hat die Gleichung der Wegcurve die Form

$$r = \frac{\sin a\omega}{ab}$$

Setzt man hier der Reihe nach  $\omega = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ , so erhält man die Durchschnittspunkte der Curve mit der  $x$ -Axe in der Form

$\frac{ab}{\sin a\pi}, \frac{ab}{\sin 2a\pi}, \frac{ab}{\sin 3a\pi}, \frac{ab}{\sin 4a\pi}$  etc.; setzt man aber  $\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}$ , etc., so geben die Werte von  $\frac{ab}{\sin \frac{a\pi}{2}}, \frac{ab}{\sin \frac{3a\pi}{2}}, \frac{ab}{\sin \frac{5a\pi}{2}}, \frac{ab}{\sin \frac{7a\pi}{2}}$  etc.

die Durchschnittspunkte auf der  $y$ -Axe an. Ersetzt man ferner in der Gleichung für  $v^2$  die Grössen  $\mu^2, r^2$  und  $B$  resp. durch  $b^2 c^2 (1 + a^2) \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \varphi}$  und  $c^2$ , so erhält man auch

$$v = \frac{c}{a} \sqrt{(1 + a^2) \cos a^2 \omega - 1}$$

Für einen sehr kleinen Wert von  $\omega$ , also in sehr grosser Ferne, kann daher die Geschwindigkeit durch  $c$  dargestellt werden. Ist dagegen  $\omega$  pos. sehr gross, und der Massenpunkt in der Nähe des Kraftmittelpunktes, so ist annähernd

$$v = \frac{c \sqrt{(1 + a^2)}}{2a} \cdot e^{a\omega}$$

wird somit unendlich von der Form  $e^{a\omega}$ . Die Zeit, welche der Körper  $m$  braucht, um vom Punkte  $(r, \omega)$  seiner Bahn nach dem Ursprunge zu gelangen, kann nach Früherem durch

$$t = \frac{ab}{c} (\cot a\omega : \omega - 1)$$

dargestellt werden. Wenn man hier  $t$  unter einem Umlaufe die Zeit versteht, welche der Körper  $m$  braucht, um von einem Durch-

gangspunkte durch die  $x$ -Axe bis zum entsprechenden nachfolgenden zu gelangen und die Umlaufszeit mit  $T$  bezeichnet, so erhält man dafür den Ausdruck

$$T = \frac{ab}{c} \cdot (\cotang \, n a \tau - \cotang \, (n + 1) a \varphi)$$

Wenn  $ds$  ein Element der Wegcurve bezeichnet, so hat man

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r dw)^2$$

nuu ist

$$r dw = \frac{r}{a} d\varphi - \frac{b}{\sin \varphi} \cdot d\psi, \quad dr = -ab \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

und somit

$$(ds)^2 = \frac{(a^2 + 1)b^2 \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} \cdot \left(1 - \frac{1}{(a^2 + 1) \cos^2 \varphi}\right) (d\varphi)^2$$

Setzt man nun abkürzend

$$k^2 = \frac{1}{a^2 + 1}$$

und führt mittelst der Substitution

$$S(u) = \frac{1}{\cos \varphi}$$

die neue Variable in die Rechnung ein, so ist

$$1 - \frac{1}{(a^2 + 1) \cos^2 \varphi} = D^2 u; \quad \cos \varphi = \frac{1}{S(u)}$$

$$\cos^2 \varphi - 1 = \frac{1}{S^2 u} - 1 = \frac{C^2(u)}{S^2(u)}$$

und daher

$$\frac{(a^2 + 1)b^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} = (a^2 + 1)b^2 \cdot \frac{S^2(u)}{C^2(u)}$$

Ferner ist

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{CD du}{S^2(u)}, \quad \text{also} \quad d\varphi = -\frac{D du}{S}$$

und daher

$$ds = -\frac{b}{k} \cdot \frac{D^2(u)}{C^2(u)} du$$

Wenn  $\varphi$  den Wert 0 hat, so ist  $u = K$  und für  $\varphi = \infty$  ist  $u = 0$ . Wenn daher die Variable  $\varphi$  die Werte von 0 bis zum pos. Unendlichen durchläuft, sinkt  $u$  fortwährend von  $K$  auf null herab. Zu  $\varphi_1$  gehöre  $u_1$ ; dann lässt sich die Länge des Bogens vom Ursprunge bis zum Punkte  $\varphi_1$  durch das Integral

$$s = \frac{b}{k} \int_0^{u_1} \frac{D^2(u)}{C^2(u)} du$$

darstellen, Bekanntlich ist nun aber

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{SD}{C} \right) = \frac{D^2}{C^2} + D^2 - 1$$

folglich auch

$$s = \frac{b}{h} \int_0^{u_1} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{SD}{C} \right) - D^2 + 1 \right) du$$

also

$$s = \frac{b}{k} \left( \frac{S(u_1) D(u_1)}{C(u_1)} - E \operatorname{am} u_1 + u_1 \right)$$

Der Inhalt der infinitesimalen Fläche, welche der radius vector in der Zeit  $dt$  durchläuft, kann durch

$$dS = \frac{r^2 dw}{2}$$

dargestellt werden. Ersetzt man hier  $r^2$  und  $dw$  durch die bekannte Functionen in  $\varphi$ , so erhält man

$$dS = \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

Wird nun  $\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$  durch  $-d \cdot \cotang \varphi$  ersetzt, so folgt

$$dS = -\frac{ab^2}{2} \cdot d^2 \cdot \cotang \varphi$$

und daher ist

$$\begin{aligned} S &= -\frac{ab^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\infty} d \cdot \cotang \varphi \\ &= \frac{ab^2}{2} (\cotang \varphi_1 = 1) \end{aligned}$$

Wird aber von  $\varphi_1$  bis  $\varphi_{11}$  integrirt, wo  $\varphi_{11} > \varphi_1$  ist, so hat man

$$S = \frac{ab^2}{2} (\cotang \varphi_1 - \cotang \varphi_{11})$$

$$\beta) \mu^2 - A^2 = 0; \quad A = \mu$$

In diesem Falle ist

$$v^2 = \frac{A^2}{r^2} + B$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\sqrt{B}$$

Fassen wir hier  $dt$  pos. auf, so muss  $dr$  neg. sein, und man erkennt schon hieraus, dass sich der materielle Punkt  $m$  mit wachsender Zeit dem Kraftmittelpunkte nähert. Die Integration obiger Differentialgleichung ergibt

$$r = -\sqrt{B} \cdot t + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten setze man fest, dass mit  $r = 0$  auch  $t = 0$  sein soll; da unter dieser Annahme die Constante den Wert null haben muss, so ist

$$r = -\sqrt{B} \cdot t$$

Die Zeit, welche somit der materielle Punkt  $m$  braucht, um vom Punkte  $(r, w)$  seiner Bahn nach dem Kraftmittelpunkte zu gelangen, ist dem radius vector direct proportional und lässt sich durch  $\frac{r}{\sqrt{B}}$  darstellen. Für einen unendlich fernen Punkt der Bahn wird daher die Zeit auf gleiche Weise unendlich wie der Leitstrahl.

Die doppelte Flächengeschwindigkeit  $A$  ist auch hier  $r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$ . Da aber  $A = \mu$  ist, so hat man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu}{r^2}$$

und weil  $dt = -\frac{dr}{\sqrt{B}}$  ist, so ist auch

$$dw = -\frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

Wenn  $dr$  pos. ist, so muss  $dw$  neg. sein. Mit abnehmendem  $r$  ist daher der Winkel  $w$  im Wachsen begriffen. Aus obiger Gleichung folgt, dass allgemein

$$w = \frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{r} + C$$

ist. Wenn aber für  $r = \infty$  der Winkel  $w$  verschwinden soll, so muss die Constante  $C$  als null angenommen werden, und es ist daher

$$w = \frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{r}$$

Der Winkel  $w$  ist daher mit dem reciproken Werte des Radius direct proportional. Weil auch

$$r = \frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{w}$$

ist, so erkennt man, dass die Wegcurve vom Unendlichen herkommend spiralförmig den Kraftmittelpunkt umgibt und sich demselben in immer enger werdenden Windungen stetig nähert. Ersetzt man in dem Ausdrücke für die Zeit den Radius durch die gefundene Function in  $w$ , so hat man auch

$$t = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{w}$$

Wenn  $r$  sehr gross gewählt wird, so muss  $w$  sehr klein sein und kann daher annähernd durch  $\sin w$  dargestellt werden. Da nun aber  $r \sin w$  den Abstand des materiellen Punktes von der  $x$ -Axe darstellt, welche mit  $y$  bezeichnet werden soll, so lässt sich die Wegcurve in unendlicher Ferne durch die Gleichung

$$y = \frac{A}{\sqrt{B}}$$

darstellen. Dieselbe läuft daher im Unendlichen in der Entfernung  $\frac{A}{\sqrt{B}}$  mit der  $x$ -Axe parallel. Wenn nun der materielle Punkt vom Unendlichen herkommend sich spiralförmig dem Mittelpunkte nähert, so findet der erste Durchgang durch die  $x$ -Axe für  $w = \pi$  statt, und hier ist

$$r_1 = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{\pi}$$

und

$$t_1 = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Um den neg. Durchgangspunkt durch die  $x$ -Achse zu erhalten, hat man in der allgemeinen Formel  $w$  durch  $n \cdot \pi$  zu ersetzen. Für diesen Punkt hat man

$$r_n = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{n \cdot \pi}$$

$$t_n = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{n\pi}$$

und aus diesen Werten folgt, dass

$$r_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot r_n$$

$$t_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot t_n$$

ist. Wenn ferner

$$D_n^* = r_n + r_{n+1} \quad \text{und} \quad T_n = t_n - t_{n+2}$$

bezeichnen, so hat man

$$D_n = \frac{A}{\pi \sqrt{B}} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

und

$$T_n = \frac{A}{2\pi \sqrt{B}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

folglich auch

$$D_{n+1} = \frac{n(2n+3)}{(n+2)(2n+1)} \cdot D_n$$

$$T_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot T_n$$

Das Wegelement  $ds$  wird bekanntlich durch die Gleichung

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r dw)^2}$$

bestimmt. Ersetzt man hier  $dr$  und  $r$  durch die bekannten Functionen in  $w$ , so erhält man

$$ds = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{1+w^2} \cdot \frac{dw}{w^2}$$

und wenn ferner  $w = \sin \varphi$  gesetzt wird, so ist

$$ds = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \cotang^2 \varphi \cdot d\varphi \mp \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right) d\varphi$$

und daher

$$ds = \frac{A}{\sqrt{B}} d \cdot (\varphi - \cotang \varphi)$$

Die Länge der Wegcurve vom Punkte  $\varphi_1$  bis zum Punkte  $\varphi_{11}$  lässt sich daher durch die Formel

$$s = \frac{A}{\sqrt{B}} \left( (\varphi_{11} - \varphi_1) + (\cotang \varphi_1 - \cotang \varphi_{11}) \right)$$

ausdrücken. Führt man hier die ursprüngliche Variable  $w$  wieder in die Rechnung ein, indem man  $\varphi$  durch  $\log(\sqrt{1+w^2}+w)$  und  $\cotang \varphi$  durch  $\frac{\sqrt{1+w^2}}{w}$  ersetzt, so hat man

$$s = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \left( \log \frac{\sqrt{1+w_{11}^2}+w_{11}}{\sqrt{1+w_1^2}+w_1} + \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{w_1} - \frac{\sqrt{1+w_{11}^2}}{w_{11}} \right)$$

Der Inhalt des kleinen Sectors, welcher vom radius vector in der Zeit  $dt$  durchlaufen wird, ist bekanntlich  $\frac{r^2 dw}{2}$ . Wird nun hier  $dw$  durch  $-\frac{\mu}{\sqrt{B}} \cdot \frac{dr}{r^2}$ , so erhält man dafür den Ausdruck

$$S = \frac{\mu}{2\sqrt{B}} \cdot \int_0^r dr = \frac{\mu}{2\sqrt{B}} \cdot r$$

Die Inhalte der Sektoren sind somit mit dem Leitstrahl direct proportional. Ersetzt man  $r$  durch  $\sqrt{B} \cdot t$ , so hat man auch

$$S = \frac{\mu}{2} \cdot t = \frac{A^2}{2B} \cdot \frac{1}{w}$$

Wenn nun hier  $w$  zuerst durch  $n \cdot 2\pi$  und dann durch  $(n+1) \cdot 2\pi$  ersetzt wird, so hat man

$$S_n = \frac{A^2}{2B} \cdot \frac{1}{n \cdot 2\pi}$$

und

$$S_{n+1} = \frac{A^2}{2B} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2\pi}$$

und daher gilt hier die Relation

$$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot S_n$$

Bezeichnet man ferner die Differenz  $(S_n - S_{n+1})$  mit  $J_n$ , so folgt

$$J_n = \frac{A^2}{4\pi B} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$$

und wir erhalten zwischen  $J_n$  und  $J_{n+1}$  die Beziehung

$$J_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot J_n$$

$$\gamma) \quad \mu^2 - A^2 < 0, \quad A > \mu^2.$$

Weil

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{2B - (A^2 - \mu^2)}$$

so hängt die reelle oder imaginäre Beschaffenheit der Bewegung von dem pos. Werte von  $A^2 - \mu^2$  ab, und es ist einleuchtend, dass die Realität der Bewegung  $r^2 > \frac{A^2 - \mu^2}{B}$  verlangt. Führt man auch hier die Abkürzungen

$$\frac{A^2 - \mu^2}{A^2} = a^2, \quad \frac{A^2}{B} = b^2; \quad B = c^2$$

ein, so folgt, da

$$A^2 - \mu^2 = a^2 b^2 c^2; \quad A^2 = b^2 c^2$$

ist, dass

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{r^2}}$$

ist. Der tiefste Wert, den  $r$  annehmen kann, ist  $ab$ , und weil hier  $\frac{\partial r}{\partial t}$  verschwindet, so zeigt derselbe die Minimumeigenschaft an. Von diesem Minimum an darf nun  $r$  fortwährend wachsen bis zum pos. Unendlichen, wo  $\frac{\partial r}{\partial t}$  den Wert  $c$  erreicht hat. Wenn  $dt$  pos. aufgefasst wird, so muss auch  $dr$  pos. sein und man erkennt, dass mit wachsender Zeit auch  $r$  im Wachsen begriffen ist. Im Unendlichen ist  $r$  mit der Zeit direct proportional. Da der Quotient  $\frac{ab}{r}$  längs des ganzen Weges beständig kleiner als 1 sein muss, so erscheint es angezeigt, denselben durch  $\cos \varphi$  zu ersetzen, also

$$r = \frac{ab}{\cos \varphi}$$

anzunehmen. Da  $r$  von  $ab$  an alle pos. Werte bis zum pos. Unendlichen durchlaufen kann, so wächst die neue Variable  $\varphi$  von  $-\frac{\pi}{2}$  fortwährend bis  $\frac{\pi}{2}$ ; in  $\varphi = 0$  ist für  $r$  ein Minimum vorhanden. Diese Substitution ergibt nun

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \sin \varphi$$

Weil nun auch

$$dr = \frac{ab \sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

ist, so folgt

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

und weil

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = d \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

ist, so hat man schliesslich

$$dt = \frac{ab}{c} d \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

und daher ist allgemein

$$t = \frac{ab}{c} \operatorname{tg} \varphi + \text{Const.}$$

Setzt man nun fest, dass mit  $\varphi = 0$  auch  $t = 0$  sein soll, der Anfangspunkt der Zeit also in  $r = ab$  liege, so muss die Integrationsconstante gleich 0 sein und man hat

$$t = \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Diese Formel drückt somit die Zeit aus, welche der Massenpunkt  $m$  braucht, um vom Punkte  $(r, \varphi)$  der Bahn nach dem Punkte  $(r = ab, \varphi = 0)$  zu gelangen. Da nun

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{ab} \cdot \sqrt{(r^2 - a^2b^2)}$$

ist, so hat man auch

$$t = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(r^2 - a^2b^2)}$$

für einen unendlich fernen Punkt der Bahn wird daher die Zeit auf dieselbe Weise unendlich wie  $r$ . Nun soll auch hier eine Relation zwischen  $\varphi$  und  $w$  aufgestellt werden. Bekanntlich ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{A}{r^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{ab} \cos^2 \varphi$$

und weil

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{c}{ac} \cos^2 \varphi$$

so hat man

$$a dw = d\varphi$$

und es ist daher erlaubt

$$a w = \varphi$$

anzunehmen. Setzt man diesen Wert von  $\varphi$  in die Gl. für  $r$  und  $t$  ein, so hat man

$$r = \frac{ab}{\cos aw}, \quad t = \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{tg} aw$$

Da nun  $\varphi$  alle Werte von  $-\frac{\pi}{2}$  bis  $\frac{\pi}{2}$  durchlaufen kann, so durch-

läuft der Winkel  $w$  von  $-\frac{\pi}{2a}$  an alle reellen Werte bis  $\frac{\pi}{2a}$ ; somit bildet der Leitstrahl  $r$ , welcher die unendlich fernen Punkte der Bahn mit dem Ursprunge verbindet, mit der pos. Richtung der  $x$ -Axe den Winkel  $\frac{\pi}{2a}$ . Da nun

$$a^2 = \frac{A^2 - \mu^2}{A^2} = 1 - \frac{\mu^2}{A^2}$$

ist, und  $A > \mu$  angenommen wurde, so ist beständig  $a$  kleiner als 1 und somit ist  $\frac{\pi}{2a}$  grösser als  $\frac{\pi}{2}$ . Ist z. B.  $a = \frac{1}{2}$ , also  $1 - \frac{\mu^2}{A^2} = \frac{1}{4}$ , somit  $\frac{\mu^2}{A^2} = \frac{3}{4}$ , so ist

$$r = \frac{ab}{\cos \frac{w}{2}}; \quad t = \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{tg} \frac{w}{2}$$

und der radius vector, welcher die unendlich fernen Punkte der Bahn mit dem Ursprunge verbindet, bildet mit der  $x$ -Axe den Winkel  $\frac{\pi}{2}$ . Die Curve läuft somit im Unendlichen mit der  $x$ -Axe parallel. Ersetzt man oben in dem Ausdrucke für  $u$  den Winkel  $w$  durch  $(\pi - \alpha)$ , wo  $\alpha$  sehr klein ist, so lässt sich  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$  durch  $\frac{1}{2} \sin \alpha$  ersetzen, und daher ist für solche Curvenpunkte

$$r = \frac{2ab}{\sin \alpha}$$

und weil  $r \sin \alpha$  den Abstand von der  $x$ -Axe angibt, so läuft die Wegcurve im Unendlichen in der Entfernung  $2ab$  mit der  $x$ -Axe parallel. Für den Fall  $a = \frac{1}{2}$  will ich noch die Gleichung der Wegcurve in rechtwinkligen Coordinaten darstellen. Bekanntlich ist

$$x = r \cos w = ab \cdot \frac{\cos w}{\cos \frac{w}{2}}, \quad y = r \sin w = ab \cdot \frac{\sin w}{\cos \frac{w}{2}}$$

und es handelt sich darum, aus diesen 2 Gleichungen den Winkel  $w$  zu eliminiren. Zu diesem Zwecke ersetze man  $\sin w$  durch  $2 \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}$  und  $\cos w$  durch  $\left(1 - 2 \sin^2 \frac{w}{2}\right)$  und findet so

$$\sin \frac{w}{2} = \frac{y}{2ab}$$

$$\cos \frac{w}{2} = \frac{ab}{x} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2a^2b^2}\right)$$

quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie, so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(4a^2b^2 - y^2) = 4a^4b^4$$

Um die Wegcurve zu rectificiren, setze man wieder

$$ds^2 = dr^2 + (r dw)^2$$

und ersetze  $r$ ,  $dr$  und  $dw$  resp. durch  $\frac{ab}{\cos \varphi}$ ,  $\frac{ab \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi$  und  $\frac{d\varphi}{a}$ , um die Länge des Curveelementes durch die Variable  $\varphi$  auszudrücken. Nach einigen Reductionen findet man

$$ds = b \cdot \sqrt{1 - (1 - a^2) \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

Wenn nun

$$\sin \varphi = S(u)$$

gesetzt, so durchläuft die neue Variable  $u$  die Werte von 0 bis  $K$  während  $\varphi$  von 0 bis auf  $\frac{\pi}{2}$  ansteigt: Da der Punkt  $u = K$  für die Integration unzugänglich ist, so setze man

$$s = b \cdot \int_0^u \frac{D^2(u)}{C^2(u)} du$$

und dieses Integral ist nach Seite 426

$$s = b \cdot \left( \frac{S(u) \cdot D(u)}{C(u)} - E \operatorname{am} u + u \right)$$

Der Inhalt des Flächenelementes, welches vom radius vector  $dt$  durchlaufen wird, ist bekanntlich gleich  $A dt$ , und da

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

ist, so lässt sich der Inhalt auch durch  $\frac{r^2 dw}{2}$  wiedergeben. Ersetzt

man hier  $r^2$  und  $dw$  durch die bekannten Functionen in  $\varphi$ , so hat man für den Inhalt des Flächenelementes  $dS$  den Ausdruck

$$dS = \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{ab^2}{2} d \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

somit ist

$$S = \frac{ab^2}{2} \cdot \int_0^\varphi d \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab^2}{2} \cdot \operatorname{tg} aw$$

Ersetzt man hier  $ab \operatorname{tg} aw$  durch  $ct$ , so hat man auch

$$S = \frac{bc}{2} \cdot t$$

Dieses letzte Resultat hätte man auch sofort aus dem Ausdrucke  $\frac{A dt}{2}$  erhalten, wenn man hier  $A$  durch  $bc$  ersetzt und von  $t = 0$  an integriert hätte. Ist z. B.  $a = \frac{1}{2}$ , so ist der Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches östlich der  $y$ -Axe liegt, gleich  $\frac{b^2}{a}$ .

$$2) \quad B = 0.$$

Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes lässt sich hier durch

$$v = \frac{\mu}{r}$$

darstellen. Dieselbe ist daher mit dem Radius umgekehrt proportional und nimmt im Unendlichen den Wert null an. Weil ferner

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{(\mu^2 - A^2)}$$

ist, so scheint es angezeigt, hier die beiden Fälle zu unterscheiden, wo  $(\mu^2 - A^2)$  entweder grösser oder gleich null ist.

$$\alpha) \quad \mu^2 - A^2 > 0; \quad \mu > A$$

Setzt man abkürzend

$$\mu^2 - A^2 = a^2$$

so ist

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{a}{r}, \quad \text{also} \quad dt = \frac{1}{a} \cdot r dr$$

Ist  $dt$  pos., so muss auch  $dr$  pos. sein und mit wachsender Zeit ist somit auch der Radius im Wachsen begriffen. Die Ableitung von

$r$  nach der Zeit verschwindet nur für  $r = \infty$  und hier hat somit  $r$  sein Maximum erreicht. Da der Mittelpunkt für die Bewegung zugänglich ist, so verlege man auch den Anfangspunkt der Zeit dorthin und setze

$$t = \frac{1}{2a} \cdot r^2$$

Die Zeit, welche der materielle Punkt  $m$  braucht, um vom Punkte  $(r, w)$  der Bahn nach dem Kraftmittelpunkte zu gelangen, ist somit dem Quadrat des Radius direct proportional. Ferner ist

$$dw = \frac{A}{v^2} dt = \frac{A}{a} \cdot \frac{dr}{r}$$

und man erkennt, dass mit wachsendem  $r$  auch  $w$  im Wachsen begriffen ist. Die Integration obiger Differentialgleichung ergibt nun

$$aw = \log r + \text{Const.}$$

Bezeichnet man hier die willkürliche Constante mit  $(-\log p)$ , so erhält man

$$r = p \cdot e^{aw}$$

als Gleichung der Wegeurve: Die Bahn ist somit eine log. Spirale. Irgend eine durch den Kraftursprung gezogene Gerade schneide die Windungen der Spirale in den Punkten  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$  etc. etc., deren Radien mit  $r_n, r_{n+1}, r_{n+2}$ , etc. bezeichnet werden sollen. Der Gegenpunkt von  $a_n$  sei mit  $\alpha_n$  bezeichnet und der zugehörige Radius mit  $r_n$ . Wird der zu  $r_n$  gehörige Winkel mit  $(\pi \cdot 2\pi + \alpha)$  bezeichnet, so entsprechen den Radien  $r_{n+1}, r_{n+2}$ , etc. und  $r_n, r_{n+4}, r_{n+2}$ , etc. Die Winkel  $((n+1) \cdot 2\pi + \alpha), ((n+2) \cdot 2\pi + \alpha),$  etc.,  $((2n+1)\pi + \alpha), ((2n+3)\pi + \alpha),$  etc.

Nun ist

$$r_n = p \cdot e^{a(n \cdot 2\pi + \alpha)}$$

$$r_{n+1} = p \cdot e^{a((n+1) \cdot 2\pi + \alpha)}$$

$$r_{n+2} = p \cdot e^{a((n+2) \cdot 2\pi + \alpha)}$$

und aus diesen Gleichungen ergeben sich sofort die Relationen

$$r_{n+1} = e^{a \cdot 2\pi} \cdot r_n$$

und

$$r_n \cdot r_{n+2} = r_{n+1}^2,$$

Es zeigt sich somit, dass das Verhältniss zweier Radien  $r_n$  und  $r_{n+1}$  von  $n$  und  $\alpha$  unabhängig ist und durch eine Constante darge-

stellt werden kann. Daraus folgt aber auch, dass  $r_{n+1}$  mittlere Proportionale zwischen  $r_n$  und  $r_{n+2}$  ist. Bezeichnet man ferner die Differenz der beiden Radien  $r_n$  und  $r_{n+1}$  mit  $b_n$  und nennt  $b_n$  die Breite des Spiralenganges, so hat man auch

$$b_n = r_{n+1} - r_n = p \cdot e^{n(u + \frac{1}{2}\pi + \alpha)} \cdot (e^{a \cdot 2\pi} - 1)$$

$$b_{n+1} = r_{n+2} - r_{n+1} = p \cdot e^{a((n+1) \cdot 2\pi + \alpha)} \cdot (e^{a \cdot 2\pi} - 1)$$

$$b_{n+2} = r_{n+3} - r_{n+2} = p \cdot e^{a((n+2) \cdot 2\pi + \alpha)} \cdot (e^{a \cdot 2\pi} - 1)$$

folglich ist

$$b_{n+1} = e^{a \cdot 2\pi} \cdot b_n$$

und

$$b_n \cdot b_{n+2} \equiv b_{n+1}^2$$

Das Verhältniss zweier Breiten  $b_n$  und  $b_{n+1}$  ist von  $n$  und  $\alpha$  unabhängig und  $b_{n+1}$  ist mittlere, geometrische Proportionale zwischen  $b_n$  und  $b_{n+2}$ . Die Summe der beiden Radien  $r_n$  und  $r_{n+1}$  werden mit  $d_n$  bezeichnet. Dann ist

$$d_n = r_n + r_{n+1} = p \cdot e^{a(n \cdot 2\pi + \alpha)} \cdot (1 + e^{a \cdot \pi})$$

$$d_{n+1} = r_{n+1} + r_{n+2} = p \cdot e^{a(n \cdot 1 + 2\pi + \alpha)} \cdot (1 + e^{a \cdot \pi})$$

und man hat auch hier

$$d_{n+1} = e^{a \cdot 2\pi} \cdot d_n$$

und

$$d_n = d_{n+2} = d_{n+1}^2$$

Es sei ferner  $T_n$  die Zeit, welche der Massenpunkt  $m$  braucht, um vom Punkte  $r_{n+1}$  der Bahn nach dem Punkte  $r_n$  zu gelangen; dann hat man

$$T_n = t_{n+1} - t_n = \frac{1}{2a} \cdot (r_{n+1}^2 - r_n^2) = \frac{p^2}{2a} \cdot e^{2a(n \cdot 2\pi + \alpha)} (e^{2a \cdot 2\pi} - 1)$$

und

$$T_{n+1} = t_{n+2} - t_{n+1} = \frac{1}{2a} \cdot (r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2) = \frac{p^2}{2a} \cdot e^{2a((n+1) \cdot 2\pi + \alpha)} \cdot (e^{2a \cdot 2\pi} - 1)$$

folglich ist auch

$$T_{n+1} = e^{a \cdot 4\pi} \cdot T_n$$

und daher

$$T_n \cdot T_{n+2} = T_{n+1}^2$$

Der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Verlaufszeiten  $T$  ist daher für die ganze Spirale constant und  $T_{n+1}$  ist auch hier mittlere Proportion zwischen  $T_n$  und  $T_{n+2}$ .

Der Inhalt der Fläche  $S$ , welche vom radius vector in der Zeit  $t$  durchlaufen wird, ist hier

$$S = \frac{A}{4a} \cdot r^2$$

wo also mit  $r = 0$  auch  $S = 0$  angenommen ist. Wenn nun der Inhalt der Fläche, welche vom Leitstrahl  $r$  in der Zeit  $T_n$  durchlaufen wird, mit  $S_n$  bezeichnet wird, so findet man, dass

$$S_{n+1} = e^{a \cdot 4\pi} \cdot S_n$$

und

$$S_n \cdot S_{n+2} = S_{n+1}^2$$

ist. Ersetzt man in dem bekannten Ausdrucke für das Curvelement

$dw$  durch  $\frac{A}{a} \cdot \frac{dr}{r}$ , so erhält man

$$ds = \frac{\sqrt{a^2 + A^2}}{a} \cdot dr$$

und somit ist

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + A^2}}{a} \cdot r$$

Bezeichnet man mit  $U_n$  die Länge des Weges vom Punkte  $r_{n+1}$  bis zum Punkte  $r_n$ , so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung

$$U_n = s_{n+1} - s_n = \frac{\sqrt{a^2 + A^2}}{a} \cdot pc^{a(n \cdot 2\pi + \alpha)} \cdot (e^{a \cdot 2\pi} - 1)$$

ebenso findet man

$$U_{n+1} = s_{n+2} - s_{n+1} = \frac{\sqrt{a^2 + A^2}}{a^2} \cdot pe^{a((n+1) \cdot 2\pi + \alpha)} \cdot (e^{a \cdot 2\pi} - 1)$$

und daher gelten auch hier die Relationen

$$U_{n+1} = e^{a \cdot 2\pi} \cdot U_n$$

$$U_n \cdot U_{n+2} = U_{n+1}^2$$

$$\beta) \quad \mu^2 - A^2 = 0, \quad \mu = A$$

Da bei dieser Wahl der willkürlichen Elemente der Differentialquotient  $\frac{\partial r}{\partial t}$  längs des ganzen Weges verschwindet, und daher  $r$  eine von der Zeit unabhängige Constante bezeichnet, so ist die Bahn ein Kreis. Die nähere Betrachtung dieser Bewegung findet sich im ersten Teile meiner Arbeit.

$$3) \quad B < 0$$

Weil hier  $B$  eine negative, reelle Zahl darstellt, so ersetze man  $B$  durch  $-B_1$ , wo dann  $B_1$  pos. aufzufassen ist. Lässt man in der Folge den Accent wieder fallen, so hat man

$$v^2 = \frac{\mu^2}{r^2} - B$$

Sobald nun  $B$  einen von 0 verschiedenen pos. Wert hat, so können nach diesem Ausdrucke für die Geschwindigkeit keine unendlich grossen Werte von  $r$  in Betracht kommen, und die Wegcurve kann in diesem Falle das Uendliche nicht erreichen. Da im allgemeinen  $\frac{\partial r}{\partial t}$  durch eine Quadratwurzel ausgedrückt wird, so ist es erlaubt, dieselbe hier neg. aufzufassen und

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{1}{r} \cdot \sqrt{(\mu^2 - A^2) - r^2 B}$$

zu setzen. Die Realität der Bewegung erfordert nun, dass  $(\mu^2 - A^2)$  einen pos. Wert habe. Setzt man wieder abkürzend

$$\frac{\mu^2 - A^2}{A^2} = a^2; \quad \frac{B}{A^2} = b^2, \quad B = c^2$$

so folgt

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -c \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{r^2} - 1\right)}$$

es ist daher absolut notwendig, dass  $\frac{ab}{r}$  längs des ganzen Weges grösser als 1 sei, und diese Bedingung wird nur dann erfüllt, wenn  $r$  kleiner als  $ab$  ist. Der grösste Wert, den  $r$  annehmen kann, ist  $\sqrt{\frac{\mu^2 - A^2}{B}}$ , und da für diesen Wert die Geschwindigkeit durch  $A\sqrt{B}$  dargestellt werden kann, so ist durch die aufgestellte Bedingung für

$r$  auch die Realität von  $v$  gesichert. Es ist daher angezeigt,  $\frac{ab}{r}$  durch  $\cos\varphi$  zu ersetzen und

$$r = \frac{ab}{\cos\varphi}$$

anzunehmen. Zu  $r = ab$  gehört  $\varphi = 0$  und zu  $r = 0$  gehört  $\varphi = \infty$ . Die neue Variable  $\varphi$  läuft daher von 0 bis  $\infty$ . Mittelst dieser Substitution lässt sich nun die Ableitung von  $r$  nach der Zeit durch

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -c \sin\varphi$$

darstellen und verschwindet nur in  $\varphi = 0$ , wo also für  $r$  ein Minimum vorhanden ist. Im übrigen behält  $c \sin\varphi$  längs des ganzen Weges für pos. Werte von  $\varphi$  seinen pos. Wert bei, und daher ist bei wachsender Zeit der radius vector im Abnehmen begriffen.

Daher ist es angezeigt, den Anfang der Zeit in den Punkt  $r = ab$  zu verlegen. Ersetzt man in der Gleichung

$$dt = -\frac{dr}{c \sin\varphi}$$

$dr$  durch  $\left(-\frac{ab \sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi\right)$ , so folgt

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{ab}{c} \cdot d \tan\varphi$$

Wird nun diese Differentialgleichung von  $\varphi = 0$  an integriert, so erhält man

$$t = \frac{ab}{c} \tan\varphi$$

als Ausdruck für die Zeit, welche der Massenpunkt  $m$  nötig hat, um vom Punkte  $(r, \varphi)$  der Bahn nach dem Punkte  $(r = ab, \varphi = 0)$  zu gelangen. Ferner ist  $\frac{ab}{c}$  die Zeit, welche der Körper  $m$  braucht, um vom Punkte  $r = ab$  an den ganzen spiralförmigen Weg bis zum Kraftmittelpunkte zu durchlaufen. Wir suchen auch hier eine Relation zwischen der Variablen  $\varphi$  und dem Winkel  $w$  aufzustellen. Bekanntlich ist die doppelte Flächengeschwindigkeit

$$A = r^2 \frac{\partial w}{\partial t}$$

und weil  $A = bc$  ist, so hat man

$$dw = bc \cdot \frac{dt}{r^2}$$

Wenn hier  $dt$  pos. aufgefasst wird, so muss auch  $dw$  pos. sein, und mit wachsender Zeit ist daher auch  $w$  im Wachsen begriffen. Ersetzt man  $dt$  und  $r^2$  durch die Functionen in  $\varphi$ , so folgt

$$a dw = d\varphi$$

also

$$aw = \varphi$$

wenn mit  $\varphi = 0$  auch  $w = 0$  sein soll. Die Bahn des materiellen Punktes wird daher durch die Gleichung

$$r = \frac{ab}{\cos aw}$$

bestimmt, wo  $w$  der Winkel ist, den der Leitstrahl mit der  $x$ -Axe bildet. Dieselbe ist daher eine Spirale, welche im Punkte  $ab$  der  $x$ -Axe beginnt und den Kraftmittelpunkt in immer enger werdenden pos. Windungen umgibt, um in demselben selbst zu endigen. Wenn  $w$  pos. sehr gross ist, so darf man  $\cos aw$  durch  $\frac{1}{2}e^{-aw}$  ersetzen und in unmittelbarer Nähe des Ursprunges lässt sich daher die Spirale durch

$$r = 2ab e^{-aw}$$

darstellen. Dieselbe hat hier Aehnlichkeit mit einer log. Spirale. Da in unserer Rechnung auch negative Werte von  $w$  zulässig sind, so kann der Weg auch durch eine Spirale dargestellt werden, welche vom Punkte  $ab$  an den Kraftmittelpunkt in neg. Windungen umgibt. Das Wegelement wird durch die Gleichung

$$ds^2 = dr^2 + (r dw)^2$$

bestimmt. Führt man hier an Stelle von  $r$  und  $w$  die Variable  $\varphi$  ein, so erhält man nach einigen Reductionen die Gleichung

$$ds^2 = \frac{a^2 b^2}{\cos^4 \varphi} \cdot \left( -1 + \frac{a^2 + 1}{a^2} \cdot \cos^2 \varphi \right) d\varphi^2$$

Setzt man nun abkürzend

$$\frac{a^2}{1 + a^2} = k^2$$

und führt mittelst der Substitution

$$\cos \varphi = \frac{1}{S(u)}, \quad \sin \varphi = \frac{C(u)}{S(u)}$$

die Variable  $u$  in die Rechnung ein, so hat man, weil

$$-1 + \frac{1+a^2}{a^2} \cos^2 \varphi = \frac{D^2(w)}{k^2 S^2(u)}; \quad a\varphi = -\frac{D(u)}{S(u)} du$$

ist,

$$ds = \frac{ab}{k} \cdot D^2(u) du$$

ist  $\varphi = 0$ , so muss  $u = K$  sein, und ist  $\varphi = \alpha$ , so ist  $u = 0$ . Wenn daher die Variable  $\varphi$  von 0 bis zum pos. Unendlichen stetig wächst, so sinkt  $u$  fortwährend von dem pos. Werte  $K$  auf 0 herab. Um daher die Länge des Weges vom Punkte ( $r = 0, \varphi = \infty$ ) bis zu einem beliebigen Punkte ( $r, \varphi$ ) der Bahn zu erhalten, integriere man obige Gleichung von  $u = 0$  an bis zu einem beliebigen Werte von  $u$ . Man erhält so

$$s = \frac{ab}{k} \cdot \int_0^u D^2(w) du = \frac{ab}{k} \cdot E \text{ am } u$$

Um die Länge des ganzen Weges zu erhalten, ersetze man die obere Grenze des Integrals durch  $K$  und findet

$$S = \frac{ab}{k} \cdot E$$

als Gesamtlänge der Spirale.

Ersetzt man in dem bekannten Ausdrucke  $\frac{A dt}{2}$  für das Flächenelement die Constante  $A$  durch  $bc$  und  $dt$  durch  $\frac{ab}{c} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ , so hat man

$$dS = \frac{ab^2}{2} d \text{ tang } \varphi$$

als Inhalt des Sectors, welcher vom Radius in der kleinen Zeit  $dt$  durchlaufen wird. Integriert man diese Gleichung von  $\varphi = 0$  an bis in einem beliebigen Werte von  $\varphi$ , so folgt

$$S = \frac{ab^2}{2} \text{ tang } \varphi$$

Der Inhalt der Fläche, welche vom Leitstrahle auf seinem ganzen Wege durchlaufen wird, kann daher durch  $\frac{ab^2}{2}$  ausgedrückt werden.

$$b) \quad K = \frac{nmM}{r^3}; \quad f'(r) = \frac{1}{r^3}; \quad f(r) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2}; \quad g = \frac{nM}{r^3}$$

Die Kraft ist hier pos. angenommen, und daher wirkt sie abstossend auf den Massenpunkt  $m$  ein. Die Wegcurve wird somit

dem Kraftmittelpunkte die convexe Seite zukehren. Setzt man auch hier wieder abkürzend  $\mu^2 = nM$ , so ist

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{r^2} + B$$

und es ist daher absolut notwendig, dass  $B$  eine von null verschiedene pos. Zahl sei. Dann ist aber  $r$  an die Bedingung  $r > \sqrt{\frac{\mu}{B}}$  gebunden. Das pos. Unendliche ist daher für  $r$  zugänglich. Ferner hat man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\left(B - \frac{\mu^2 + A^2}{r^2}\right)}$$

Setzt man auch hier abkürzend

$$\frac{A^2 + \mu^2}{A^2} = a^2; \quad \frac{A^2}{B} = b^2; \quad B = c^2$$

also

$$A^2 + \mu^2 = a^2 b^2 c^2; \quad A^2 = b^2 c^2$$

so hat man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2}{r^2}\right)}$$

Wenn daher  $dt$  pos. aufgefasst wird, so muss auch  $dr$  pos. sein, und mit wachsender Zeit ist daher auch  $r$  im Wachsen begriffen. Ferner muss  $r$  beständig grösser als  $ab$  sein, damit  $\frac{ab}{r}$  kleiner als 1 ausfalle. Es ist daher angezeigt,  $\frac{ab}{r}$  durch  $\cos \varphi$  zu ersetzen, also

$$r = \frac{ab}{\cos \varphi}$$

anzunehmen. Da für  $r$  auch neg. Werte zulässig sind, so ist im allgemeinen die Variable  $\varphi$  an keine Beschränkung gebunden. Im folgenden habe ich aber diejenige Wegcurve im Auge, welche innerhalb  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  liegt. Mittelst dieser Substitution erhält man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c \sin \varphi$$

Weil aber auch

$$dr = \frac{ab \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

ist, so hat man auch

$$dt = \frac{ab}{c} \cdot d \operatorname{tg} \varphi$$

folglich ist allgemein

$$t = \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{tg} \varphi + \text{Const.}$$

Soll nun aber der Anfang der Zeit im Punkte ( $r = ab$ ,  $\varphi = 0$ ) der Bahn liegen, so muss die Constante gleich null sein, und in diesem Falle darf man

$$t = \frac{ab}{c} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

setzen. Weil ferner

$$dw = A \frac{dt}{r^2}; \quad \frac{dt}{r^2} = \frac{1}{abe} d\varphi$$

ist, so hat man auch

$$a dw = d\varphi$$

somit

$$aw = \varphi$$

Die Gleichung der Wegcurve ist daher

$$r = \frac{ab}{\cos aw} \quad \text{und} \quad t = \frac{ab}{c} \operatorname{tg} aw$$

Die beiden Asymptoten, die zugleich durch den Ursprung gehen, bilden einen Winkel von  $\frac{\pi}{a}$ , der von der  $x$ -Axe halbirt wird. Ferner ist

$$ds^2 = dr^2 + (r dw)^2 = \frac{a^4 b^2}{\cos^4 aw} \cdot \left( 1 - \frac{(a^2 - 1)}{a^2} \cos^2 aw \right) dw^2$$

und somit

$$ds = \frac{a^2 b}{\cos^2 aw} \cdot \sqrt{\left( 1 - \frac{a^2 - 1}{a^2} \cdot \cos^2 aw \right)} \cdot dw$$

Da nun hier  $a$  beständig grösser als 1 ist, so setze man abkürzend

$$k^2 = \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

und führe mittelst der Substitution

$$\cos aw = S(u)$$

die neue Variable  $u$  in die Rechnung ein. Weil dann

$$dw = - \frac{1}{a} D(u) du$$

ist, so hat man

$$ds = - ab \cdot \frac{D^2(u)}{S^2(u)} du$$

also

$$s = ab \cdot \int_u^K \frac{D^2(u)}{S^2(u)} du$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{CD}{S} \right) = -k^2 C^2 - \frac{D^2(u)}{S^2(u)}$$

somit

$$\frac{D^2(u)}{S^2(u)} = l^2 - D^2(u) - \frac{\partial}{\partial u} \cdot \left( \frac{\varphi D}{S} \right)$$

Wird nun dieser Wert für  $\frac{D^2(u)}{S^2(u)}$  in den obigen Integralausdruck substituirt, so erhält man schliesslich

$$s = ab \left[ l^2(K - u) - (E - E_{\text{am}} u) + \frac{C(u) \cdot D(u)}{S(u)} \right]$$

als Ausdruck für die Länge der Wegcurve vom Punkte  $(r = a, u = K)$  bis zum Punkte  $(r, u)$ , wo  $u$  durch die Gleichung

$$\cos ar = S(u)$$

bestimmt wird.

XIX.  
Miscellen.

---

1.

**Ueber die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer bestimmten Grenze.**

Nach unserer desfälligen Notiz in diesem Archiv ist die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer Grenze  $x^2 = (4n)^2$  annähernd gleich  $2x^2 + 10x + 6$  ( $x = 0, 1, 2, \dots$ ). Ist nun die Grenze  $G$  nicht gleich einer Quadratzahl  $(4n)^2$ , so kann man für  $x$  in die Formel  $2x^2 + 10x + 6$  den Betrag  $\sqrt{\frac{G}{16}} - 1$  einführen. Dann erhält man für eine beliebige Grenze  $G$  annähernd die Anzahl der Primzahlen.

Beispiel:

$$G = 1000$$

$$\frac{1000}{16} = 62,5 \quad \sqrt{62,5} = 7,9$$

$$2 \cdot (6,9)^2 + 10 \cdot 6,9 + 6 = 170,22$$

Die Anzahl der Primzahlen unter 1000 ist 168, also annähernd 170.

G. Speckmann.

---

2.

**Ueber Primzahlenmengen.**

Zur Ergänzung unserer Notiz „Ueber Primzahlen“ möchten wir noch mitteilen, dass man für eine beliebige Grenze  $G$  annähernd

die Grenze der Primzahlen dadurch bestimmen kann, dass man in die Formel  $2x^2 + nx + 6$  für  $x$  den Betrag  $\sqrt{\frac{G}{16}} - 1$  einführt. Es ist also für jede beliebige Grenze  $G$  die Anzahl der Primzahlen  $< G$  annähernd gleich  $\frac{G}{8} + 6\sqrt{\frac{G}{16}} - 2$  G. Speckmann.

## 3.

## Formeln für Primzahlen.

Jede Primzahl  $> 3$  hat die Form  $6n \mp 1$ , und alle Primzahlen  $> 3$  kommen deshalb in der Zahlenreihe  $6n \mp 1$  vor. Die teilbaren Zahlen der Reihe  $6n \mp 1$  sind in den Reihen

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad p^2 + 6np \\ 2) \quad p^2 + 2p + 6np \end{array} \right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n - 1)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad p^2 + 6np \\ 4) \quad p^2 + 4p + 6np \end{array} \right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n + 1)$$

vorhanden. Demnach müssen die nach Streichung der teilbaren Zahlen von der Form  $6n \mp 1$  übrig bleibenden Primzahlen durch die Formeln

$$\left. \begin{array}{l} 5) \quad p^2 + 6np - 2 \\ 6) \quad p^2 + 2p + 65p + 2 \end{array} \right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n - 1)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} 7) \quad p^2 + 6np - 2 \\ 8) \quad p^2 + 4p + 6np + 2 \end{array} \right\} (p = \text{Primzahl von der Form } 6n + 1)$$

dargestellt werden können. Die Primzahlen, welche aus den Formeln 5) und 7) hervorgehen, haben nebenbei auch die Form  $6n - 1$ , und die Primzahlen, welche aus den Formeln 6) und 8) hervorgehen, die Form  $6n + 1$ . G. Speckmann.

# Litterarischer Bericht

LXI.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

History of modern mathematics. By David Eugene Smith, Professor of mathematics in Michigan-State Normal School. Reprinted from „Higher mathematics“. Published by John Willy and sons, New-York. Chapman and Hall. Limited, London 1896. 70 S.

Das Werk ist eine zeitgemässe und verdienstliche Unternehmung, wie sie wol in gleichem Sinne bisher noch nicht in Angriff genommen worden ist. Es ist charakteristisch für unser Zeitalter, dass die Richtungen der mathematischen Forschung sich immer schneller vielfältigt haben, indem Zweige der Doctrin immer neue Fragen und Probleme hervorriefen. Hiernach erscheint nun eine übersichtliche Zusammenstellung der gegenwärtigen Forschungsrichtungen als ein immer wachsendes Bedürfniss. Mit gutem Grunde beschränkt sich die vorliegende Bearbeitung auf das Notwendige und beobachtet die grösst mögliche Kürze. Nur die Ketten der Untersuchungen, welche gemeinsames Ziel anstreben, sind es, was aus der Litteratur zugezogen wird. Von jeder solchen Untersuchungsfolge wird der Ursprung nach Autor und Jahrzahl angegeben, auf dessen Schrift in Fussnoten verwiesen, ferner die Abzweigungspunkte, in denen verschiedene Autoren eine Untersuchung von eigentümlicher Seite angegriffen haben, bemerkt, auch der Standpunkt der noch ungelösten Frage an

Licht gestellt. Dagegen werden alle Beiträge, welche die Frage unverändert bestehen lassen, übergangen und über die Motive der Untersuchungen keine Kritik geübt, mithin kein Unterschied gemacht, ob eine solche durch ein vorhandenes Problem gefordert wird oder nicht, sondern allein als massgebend betrachtet, dass Viele der eröffneten Bahn gefolgt sind. 18 Zweige der Doctrin sind getrennt behandelt. Mechanik sowie alle weitem Anwendungen der Mathematik sind ausgeschlossen. H.

*Index operum Leonardi Euleri. Confectus a Joanne G. Hagen s. j. Directore speculae astronomicae Collegii Georgiopolitani Washington D. C. Berlin 1896. Felix L. Dames. 80 S.*

Es werden 796 Schriften von Euler, grösstenteils in lateinischer Sprache, auch manche in französischer aufgeführt, und zwar 28 Bücher. Die Gegenstände der Abhandlungen sind: Zerlegung der Zahlen in Summen, Teilbarkeit der Zahlen, diophantische Analysis, imaginäre Grössen, Reihen, besondere Reihen, Brüche, algebraische Gleichungen, elementare Geometrie, analytische Geometrie, Differentialgeometrie, Differentialrechnung, Integralrechnung, bestimmte Integrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Principien der Mechanik, Probleme der Mechanik, Hydromechanik und Aeromechanik, Maschinen und Reibung, Elasticität, Schall und Musik, Licht und Wärme, optische Instrumente, Magnetismus, sphärische Astronomie, Sonne und Mond, Planeten und Kometen, Wahrscheinlichkeit, Philosophisches. H.

*Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. Von A. von Braumühl. Mit 1 Tafel Nr. 1. Halle 1897. Wilhelm Engelmann in Leipzig. 4<sup>o</sup>. 30 S.*

Die vorliegende Schrift, welche auf selbständiger Forschung beruht und manche Unrichtigkeiten enthüllt, behandelt nach einander die Trigonometrie der Griechen, der Inder, der Araber und schliesst mit Johannes Müller Regiomontanus. Lange Zeit bestand die Doctrin aus wenigen Methoden, Sätzen und Formeln, welche zur Lösung astronomischer Aufgaben in Anwendung waren, eine Anwendung die auf Projection beruht, von den Griechen erfunden ist, von denen sie die Babylonier gelernt haben. Regiomontanus war in Europa der erste, welcher die Trigonometrie zuerst zu einer Wissenschaft gestaltet hat. Erst viel später entdeckte man, dass schon 200 Jahr früher ein Perser das vollständige System der Lehren aufgestellt hat. H.

Nassir Eddin Tusi und Regiomontan. Von A. v. Braumühl. Mit 2 Tafeln Nr. II. und III. Halle 1897. Wilh. Engelmann, Leipzig. 4<sup>o</sup>. 37 S.

Nassir Eddin Tusi ist der obengenannte Perser, welcher im 13. Jahrhundert die vollständige Trigonometrie, ebene und sphärische, lehrte. Sein Buch, besprochen von Suter in *Bibliotheca Mathematica* 1873 p. 1—8, ist, wie die erstere Schrift von Braumühl sagt, den Arabern nicht bekannt gewesen und wird nun mit den Lehren der Araber im einzelnen in Vergleich gestellt. Das Lehrsystem lässt sich daraus nicht entnehmen; nach allem daraus Angeführten ist es kein so einfach gestaltetes wie das heutige. Im zweiten Teile der Schrift wird die Lehre des Regiomontan damit verglichen. H.

F. E. Neumann. Von A. Wangerin. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV. 1894—5. Berlin, Georg Reimer. 15 S.

Franz Ernst Neumann, geboren den 11. September 1798 in Joachimsthal, besuchte von seinem 9ten Jahre an das Werder'sche Gymnasium in Berlin, studirte von 1817 an Theologie in Berlin und Jena, wandte sich 1819 in Berlin den Naturwissenschaften zu, insbesondere der Mineralogie, trieb aber dabei privatim Mathematik, hielt 1823 eine Reihe von Vorlesungen über seine neue Methode der Krystallprojection vor einem ausgewählten Kreise von Zuhörern, promovirte 1826, habilitirte sich an der Universität Königsberg, ward 1828 ausserordentlicher, 1829 ordentlicher Professor daselbst und starb am 23. Mai 1893. Seine ausgedehnte und erfolgreiche Wirksamkeit ist bekannt. Seine wissenschaftliche Productivität ist nur zu verhältnissmässig geringem Teil durch eigene Publication zur Verbreitung gelangt, im übrigen theilte er seine Entdeckungen bloss seinen Zuhörern mit. Gegenwärtig ist es indes von Seiten dieser im Werke, seine Vorlesungen herauszugeben, und sind bis 1895 bereits 7 Bearbeitungen erschienen; beteiligt sind die Herren C. Pape, Von der Mühl, E. Dorn, G. E. Meyer und A. Wangerin.

H.

Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Von Gustav Wertheim, Professor an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. Zweite, verbesserte Auflage. Braunschweig 1896. Vieweg und Sohn. 68 S.

Elia Misrachi war von 1495 bis 1526 Oberrabbiner in Constantinopel, in der ersten Zeit der Türkenherrschaft, wo die Sultane die aus Spanien vertriebenen Juden mit grosser Begünstigung aufnahmen und ihnen hohe Aemter verliehen, und die Juden Handwerke, Künste und Wissenschaften trieben, ein Eifer freilich, der nicht lange gedauert hat. Das in Rede stehende Buch ist eines seiner in hebräischer Sprache verfassten und unter hebräischen Titeln aufgeführten Werke. Es werden einige Quellen, arabische und griechische, genannt, aus denen seine Lehre geschöpft ist. Vor allem ist zu erwähnen, dass er mit indischen Ziffern schreibt und rechnet, die Null anwendet, nebenbei manchmal hebräische Buchstaben statt der 9 Ziffern schreibt, nebenbei auch ausser der sonst zugrunde gelegten Decimaltheilung die Sexagesimaltheilung zur Approximation benutzt. Dagegen fehlt ihm ganz der Begriff der negativen Zahl; er muss daher immer Fälle unterscheiden. Bei der Addition und Multiplication werden auch die arithmetischen und geometrischen Reihen in Betracht gezogen und summiert. Bei der Potenzrechnung handelt es sich besonders um die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel; das Verfahren ist dem heutigen wesentlich gleich; zur Approximation wird der Radicand mit  $10^{2n}$  multiplicirt. Auf die hiermit abschliessende Lehre von der discreten Zahl folgt nun in der Bedeutung als Rechnung mit stetigen Grössen die rechnende Geometrie und Astronomie, das ist dann nur die Rechnung mit benannten Zahlen. H.

Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus publié d'après le ms. latin 13084 de la bibliothèque royale de Munich par M. Victor Mortet. Avec une introduction de M. Paul Tannery. Tiré des notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale et autres bibliothèques. Tome XXXV. 2<sup>e</sup> partie. Paris 1896. C. Klincksieck. 4<sup>o</sup>. 44 S.

Die Einleitung von Tannery gibt Auskunft über die Quellen, nämlich lückenhaften Manuscripte aus dem Mittelalter, aus denen Cantor und Curtze den Text der 2 genannten Abhandlungen über Feldmessung und Geometrie zusammengestellt haben. Diesen Quellen fügt nun Mortet ein neues, in der Münchener Bibliothek gefundenes Manuscript hinzu und gibt hier auf 18 Seiten den lateinischen Text. Die eine Abhandlung enthält die Berechnung der Flächeninhalte der einfachsten ebenen Figuren, die andre die der Säulen.

H.

Hermann Grassmann's gesammelte mathematische und phy-

sikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel.

Ersten Bandes erster Theil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Unter Mitwirkung von Eduard Study. Mit einem Bilde Grassmann's in Holzschnitt und 35 Figuren im Text. Leipzig 1894. B. G. Teubner.

I. Band. II. Theil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Leipzig 1896. B. G. Teubner.

Die letztere Ausdehnungslehre unterscheidet sich von der ersteren dadurch, dass Grassmann von vorn herein darauf verzichtet, sein System unabhängig von der Analysis zu entwickeln. Engel bezeichnet dies als einen wesentlichen Fortschritt: erstere stehe auf keiner ganz sichern Grundlage; die Grundbegriffe, von denen Grassmann ausgehe, seien so allgemein und so inhaltslos, dass sie zum Aufbau eines wirklichen Systems nicht genügen, und Grassmann müsse daher, um zu einem solchen Systeme zu gelangen, später stillschweigend in seine Grundbegriffe viel mehr hineinlegen, als die von ihm aufgestellten Erklärungen besagen.

Nun hat aber Grassmann bei erstem Auftreten auf jene Allgemeinheit den grössten Wert gelegt und es als seinen unterscheidenden didaktischen Grundgedanken ausgesprochen: wenn irgend ein Punkt in der mathematischen Doctrin schwer zu verstehen sei, so sei nur der Ausgangspunkt der Doctrin nicht allgemein genug. Hat dann Grassmann in der neuen Bearbeitung diesen Grundgedanken fallen lassen, und Engel denselben verworfen, d. h. nicht als unwesentlich beseitigt, sondern es wirklich einen Fortschritt genannt, dass er aufgegeben sei, so kann man doch gewiss nicht umbin zu fragen: Was ist dann die unterscheidende Basis von Grassmanns Lehre?

Darüber sagt Engel absolut nichts. Alles, was er sagt, ruft dieselbe Frage hervor. Ein Fortschritt setzt doch ein Ziel oder wenigstens eine Richtung voraus. Die Behauptung, dass die neue Lehre einwandfrei sei, ist gerade hier besonders zweideutig, denn gegen Inhaltsloses kann man nicht streiten. In der neuen Bearbeitung hat der Herausgeber viele Unrichtigkeiten gefunden und in gegenwärtiger Ausgabe berichtigt. Er erklärt die Irrtümer für un-

wentlich. Auch hier muss man fragen: Was ist dann des Wesentlichen von der Lehre? Er bemerkt, dass die Ausdehnungslehre selbst in der verbesserten Gestalt noch bei Wenigen Anerkennung gefunden habe, und sorgt zwar für Verbreitung und Zugänglichkeit des Buches, aber mit keinem Worte dafür, ihre Stellung und Leistung in der Wissenschaft zu documentiren, trotz der 50jährigen Erfahrung, dass ihr Vorhandensein allein nicht dazu geführt hat.

Der 2. Teil hat die Abschnitte: die wichtigsten Verknüpfungen extensiver Grössen; Functionslehre; Grassmann's Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem. Der erste enthält die 5 Capitel: Addition, Subtraction, Vervielfachung und Teilung extensiver Grössen; die Productbildung im allgemeinen; combinatorisches Product; inneres Product; Anwendungen auf die Geometrie — der zweite die 4 Capitel: Functionen im allgemeinen; Differentialrechnung; unendliche Reihen; Integralrechnung. H.

---

### Methode und Principien.

Kritik der Formel der Newton'schen Gravitations-Theorie. Von A. Sinram. Hamburg 1896. Lucas Gräfe u. Sillem. 44 S.

Die Schrift ist ein neuer Versuch die bestehende Himmelsmechanik zu stürzen. Dies wird hier auf rhetorischem Wege in Angriff genommen, anders lässt sich das Verfahren wol kaum bezeichnen: es ist fern von aller wissenschaftlichen Logik; so viel Schlüsse vorkommen, sind die Argumente so voreilig und unzureichend als möglich. Hoppe.

Démonstration de l'axiome XI. d'Euclide. Par Michel Frolov, Membre de la Société Mathématiques de France. Deuxième édition. Genève 1896. W. Kundig et fils. 22 S.

Der Fehler des Beweises ist kein verborgener. Der Verfasser ist durch seine Figur, nämlich die zu Theorem C, getäuscht; welche nur unter Voraussetzung der zu beweisenden Thesis die der Behauptung entsprechende Lage der gezeichneten Lote darbietet. Da dieses Theorem im Grunde mit den Parallelenetze identisch ist, so konnte man gewiss sein, den Fehlschluss darin zu finden.

Hoppe.

Der Festpunkt des Denkens. Von H. Gimler. Lissa i. P. 1896. Friedrich Ebbecke. 22 S.

Die Schrift besteht aus 46 Urteilen über Lebewesen, Tätigkeit, Gleichgewicht, Ganzes und Teile, Verständigung, Ausdehnung und Zusammenziehung, Druck, Intensität, Verhältnisse, Wahrheiten, einzeln nebst sogenanntem Beweis und Bestätigung, zumteil selbstverständlich, zumteil unklar, und schliesst mit dem Satze: Die Anordnung der Lebewesen bildet den Festpunkt des Denkens.

Hoppe.

Ein Deutsches Testament. Die Natur als Organismus. Von Hugo Astl-Leonhard. Wien 1897. Selbstverlag. 262 S.

Der erste Titel soll dem Gesamtwerk gelten, der zweite dem jetzt erschienenen 1. Teile, dem noch 2 andere folgen sollen. Der 1. Teil besteht wieder aus 3 „Büchern“ mit den Ueberschriften: Das antike und moderne Wissen und die Erkenntnissätze der Wirklichkeit; die Materie und ihre Reiche, ihre Entwicklung als Spannung und Entladung; der Mensch und sein Geistesleben. Es wird viel Gelehrsamkeit vorgetragen, doch eine fortschreitende Entwicklung lässt sich darin nicht entdecken. Die Lösung der philosophischen Fragen, von der der Verfasser sagt, dass sie sich ihm ohne Zwang und ohne Speculation ergab, denkt er sich sehr leicht: er stellt eine Formel auf, damit ist's getan; ob sie klar ist, kümmert ihn nicht; jedenfalls kann man damit nichts anfangen.

Hoppe.

Das Beharrungsgesetz. Von Paul Johannesson. Berlin 1896. R. Gaertner (Hermann Heyfelder). 4<sup>o</sup>. 26 S. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Ostern 1896.

Die 5 Teile der Schrift sind: Die Form, der Inhalt des Beharrungsgesetzes. Die Irrtumquelle desselben. Welchen Wert hatte es? Seine Wahrheit in neuer Form. Gleich im Anfang ist es höchst brav gesprochen, wo der Verfasser sagt: Es ist erklärlich, wenn Newton als Schöpfer der Himmelsmechanik, im Ausdruck fehlend, der Beharrung eine Kraft, ein Vermögen unterlegt; aber darüber muss man sich wundern, dass noch heutzutage viele Schulbücher denselben Irrtum lehren. Charakteristisch für den Gedankengang in vorliegender Schrift ist es nun, dass sie ihren Gegenstand nicht direct nach eigenem Urteil anfasst, sondern Begriff und Theorie als

heutzutage geltende den Ansichten von Schriftstellern entnimmt, genannt sind: Lodge, C. Neumann, Mach, L. Weber, Streintz — und über diese Kritik übt. Dadurch wird die an sich einfache Untersuchung sehr in die Länge gezogen, fremde und trennbare Fragen mit eingemischt und immer grössere Verwickelungen geschaffen. Doch hat dieser Weg wenigstens die gute Folge gehabt, dass der Verfasser dadurch zu gesteigerter Gründlichkeit genötigt ward, demgemäss auch richtiger urteilte, als es gewöhnlich geschieht, und im Verlaufe immer verständlicher sprach. Es handelt sich hier namentlich um die Natur menschlicher Erkenntniss und um die Relativität der Raumbestimmung und Bewegung. In Betreff der Erkenntniss ist, wenn auch nur zumteil ausgesprochen, dem Verfasser doch gewiss nicht fremd, dass sie in der Unterwerfung der Tatsachen unter die Herrschaft des Geistes besteht, und ihre Mittel, nämlich Begriffe, Vorstellungsweisen und Theorien, nach freier Wahl vom Menschen erzeugt werden. Dagegen zeigt sich der Verfasser zu wenig orientirt, indem er ohne weiteres diese Freiheit für gleichbedeutend mit Willkür hält. Nur die überflüssige Stoffanhäufung macht es erklärlich, dass er hier über dem Mittel den Zweck vergisst und es nicht beachtet, dass uns die Freiheit dazu dient und dienen soll, den grösst möglichen Gewinn an Erkenntniss zu ziehen. Dies zeigt sich in Betreff der Relativität der Bewegung und macht hier die vorher gründliche Logik wieder zunichte. Alle räumlichen Bestimmungen, sowol von Orten als von Bewegungen, sind anfänglich relativ. Sie zu absoluten zu machen, ist notwendige Bedingung der Erkenntniss, namentlich der Dynamik. Es hätte sehr zur Klarstellung gedient, wenn der Verfasser diesen Umstand in voller Allgemeinheit ausgesprochen hätte. Im Einzelnen findet er freilich Anlass auf ihn einzugehen; schon Newton erkannte das empirische Kriterium der Drehbewegung; der Verfasser aber hält dasselbe für illusorisch, weil wir kein Kriterium der geradlinigen Bewegung besitzen, und ist sehr schnell mit der Behauptung fertig, dass alle räumliche Bestimmung auf Vereinbarung beruhe, ohne sich nach den notwendigen Forderungen der einzelnen Theorien umzusehen. Zieht man diese allseitig in Betracht; so bleibt der freien Vereinbarung nur wenig (z. B. Längen- und Zeiteinheit, erster Erdmeridian etc.) übrig. Dass jedenfalls die Drehbewegung (fühlbar für den Menschen und unentbehrlich für die Dynamik, namentlich für die Theorie der Centralbewegung) nicht zu den der Vereinbarung unterliegenden Bestimmungen gehört, sondern nur ihre Epoche, d. i. die momentane Stellung, ist offenbar. Der Verfasser leugnet es, wol nur aus einem gewissen horror exceptionis. Andererseits ist auch die Vereinbarung nicht immer ausreichend, das Relative absolut zu fixiren. Von den 3 Raumanordnungen, der skopocentrischen, geocentrischen, heliocen-

trischen kann keine die andern ersetzen, somit vermag es auch keine Vereinbarung; überall sind es scientive Gesichtspunkte, welche die Wahl der Axenkreuze bestimmen. Der Verfasser führt 3 voraussetzende Begriffe auf, welche erst durch Vereinbarung zu bestimmen seien, bevor man ein Beharrungsgesetz lehren könne: die geradlinige, die gleichmässige Bewegung und die Masse. Dies ist insofern unrichtig, als diese Begriffe bis auf die Masseinheiten, die hier gleichgültig sind, als Grundlagen von Theorien nicht abgeändert werden können, ohne wenigstens deren Einfachheit preiszugeben. Hierbei zu verweilen haben wir keinen Grund, es ist alles nur ein Abschweif, auf den der Verfasser durch sein historisches Verfahren gelenkt worden ist. Seine, anfängliche, oben erwähnte, Aeusserung liess erwarten, dass er nicht daran denken würde, dem sogenannten Beharrungsgesetz einen positiven Inhalt zuzuschreiben. Die Schrift schliesst mit der Frage, ob der Unterricht in der Mechanik von ihren Ergebnissen berührt werde. Eine definitive Formulirung des Beharrungsgesetzes gemäss diesen Ergebnissen wird nicht aufgestellt, es können wol nur die 3 genannten Bedingungen mit den Ergebnissen gemeint sein; was aber dann in der Ueberschrift die „neue Form“ des Satzes bedeuten soll, ist schwer zu erraten. Dies gibt uns Anlass auf den Anfang der Schrift zurückzugehen und von dem zu sprechen, was sie im weiteren zu sagen versäumt. Es wird gerügt, dass viele Lehrer und Schriftsteller eine Kraft aller Körper, in ihrer Bewegung zu beharren, statuiren, d. h. offenbar: einen Grund dafür bedürfen, dass etwas sich nicht ohne Grund ändert. So angesehen erscheint allerdings das Beharrungsgesetz als eine ganz überflüssige Lehre. Indessen, um es so anzusehen, muss doch ein Wissen vorausgehen, das dem Unkundigen fremd sein wird, das also die Schule zu verleihen verpflichtet ist: der Schüler muss erst lernen die Bewegung als jenes Etwas aufzufassen, welches dem Körper in jedem Augenblicke bestimmend zukommt und sich nicht ohne Grund ändern kann. Der zu lernende Grundsatz der Dynamik lautet: Momentaner Ort und momentane Bewegung bestimmen den momentanen Zustand jedes Punktes eines Körpers. Ein Lehrer, der ihn zu umgehen sucht, umgeht damit das Verständniss der Dynamik. Wer ihn kennt, dem ist der sogen. Beharrungssatz selbstverständlich und überflüssig. Ihn Anfängern deutlich zu machen, bedarf es keiner höhern Doctrin, sondern nur eine Auswahl nahe liegender Beispiele. In vorliegender Schrift steht er nicht, und das eben ist der fehlende Punkt in der ganzen Behandlung des Gegenstandes. Hoppe.

Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wir-

kungen. Von Dr. C. Neumann, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig. Geheimer Hofrath, Ordentliches Mitglied der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Auswärtiges Mitglied der Kgl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen. Correspondirendes Mitglied der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, des Instituto Lombardo und Akademie zu Bologna. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 292 S.

Es möge genügen den Inhalt der 9 Capitel anzugeben. Einleitende Untersuchungen. Aus der Vorstellung des elektrischen Gleichgewichts entspringende Schlussfolgerungen. Nähere Bestimmung des Exponentialgesetzes. Ueber die Entwicklung des Exponentialgesetzes nach Kugelfunctionen. Anwendung des eingliedrigen Exponentialgesetzes auf die Theorie der Gravitation und auf die Theorie der Elektrostatik. Allgemeine Untersuchungen über die mehrgliedrigen Exponentialgesetze. Ueber das Green'sche Gesetz. Ueber das Hamilton'sche Princip und das effective Potential. Ueber die Integration der Differentialgleichung:  $\Delta\psi = \sigma^2\psi$  unter Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels. H.

Naturphilosophie als exacte Wissenschaft. Mit besonderer Berücksichtigung der mathematischen Physik. Von C. Schmitz-Dumont. Mit vier Figurentafeln. Leipzig 1895. Duncker u. Humblot. 494 S.

An der Schrift ist anzuerkennen, dass sie an keiner Autorität haftet, um von ihr Recht und Ansehen zu borgen, sondern an den Ansichten der Gelehrten wie an den invteerirten der Menge unparteiisch die Schwächen enthüllt. Dies verbunden mit einer geschickten, und nicht sophistischen, sondern auf Klarheit gerichteten Handhabung der Sprache vermag im Anfang die besten Hoffnungen auf befriedigende Lösung ihrer Aufgabe zu erwecken. Eigentümlich an ihr ist, dass alle Auseinandersetzungen auf Antithesen gebaut werden; eine Antithese ist dem Verfasser notwendig für jedes Urtheil, und wenn er eine solche aufgegriffen hat, mag sie auch bloss auf oberflächlichem Eindruck seiner Lecture beruhen, so erscheint sie ihm als hinreichende Rechtfertigung seiner Behauptungen statt aller Begründung. Der erste Fall dieser Art bezieht sich auf die historische Philosophie der Neuzeit und ist bestimmend für die Richtung der vorliegenden Arbeit. Der Verfasser nennt die speculative Philosophie und den Materialismus die Pole der Philosophie, gleichsam ihren Geist und Leib. Alle aufgetretenen Fehler, Mängel, Verirrungen und alles Mislingen sei nur Folge ihrer Einseitigkeit; die Natur-

philosophie, wie er das Wort verstehe, müsse beide als einander notwendige Gegensätze in sich vereinigen. Diese Vereinigung ist's, was er sich zur Aufgabe macht. Die Abschnitte des Buchs sind betitelt: Topik der Begriffe. Philosophie der mathematischen Wissenschaften. Physikalische Erklärung durch Hypothesen. Logischer Aufbau der Physik. Die Aussenwelt. Die Innenwelt Körper und Geist. Die Reihenfolge der Themata ist für die Beurteilung bedeutungslos. Was zunächst den obigen zu vereinigenden Gegensatz von speculativer Philosophie und Materialismus betrifft, so ist zweierlei an der Aufstellung zu vermissen. Erstens werden beide jedes als Ganzes betrachtet, ohne doch das Specifiche zu nennen, was sie zum Ganzen macht. Die Geschichte bietet zwei Reihen verschiedenartiger Erscheinungen dar, zwischen denen man mancherlei Gegensätze finden kann. Unter diesen hat der Verfasser nicht gerade das Beste, sondern vorzugsweise Ausartungen gewählt, um es anzuführen. Da er beide Arten acceptirt und aufrecht halten will, so lag es ihm als Philosophen doch gewiss ob, über die zwei entgegengesetzten Grundgedanken jener Erscheinungen, welche er im Sinne hat, keinen Zweifel bestehen zu lassen. Zweitens ist auch nichts darüber gesagt, in welchem Sinne der Verfasser beide Arten von Philosophie zu vereinigen denkt. Das factische Zuwerkegehen lässt nur eine Halbheit nach beiden Seiten hin erkennen. Von den schlimmsten Vorurteilen der speculativen Philosophie, die längst durch die Geschichte gerichtet sind, hat er sich noch nicht frei gemacht. Er hängt noch immer an der Meinung fest, dieselbe sei berufen und notwendig dazu der materiellen Forschung voranzuleuchten und sie vor Verirrungen zu bewahren und verfolgt noch immer die Chimäre des absoluten Wissens, sieht demgemäss die Hypothese für einen Notbehelf an. Auf diesem Standpunkte bleibt natürlich die Bedeutung inductiver Forschung unverstanden, und so erscheint ein grosser Teil des Buches, nämlich die 3 Abschnitte über Mathematik und Physik, als Gedanken eines Laien beim Lesen gelehrter Schriften. Sehen wir aber von den Urteilen über die auf festen Principien ruhenden Wissenschaften ab, so bieten die übrigen 4 Abschnitte Vieles von hinreichendem Werte dar um Interesse zu erwecken. Die psychische Genesis wird ein wenig gründlicher beobachtet, als es gewöhnlich geschieht; der restirende Mangel in dieser Hinsicht mag vielleicht zum weitem Fortschritt die Anregung geben. So ist z. B. die Willensfreiheit, welche heutzutage Viele trotz dem Bewusstsein aus Vorurteilen leugnen, anerkannt und als Beweis die Fähigkeit der Negation in Idee und Handlung (in der That das deutlichste Indicium) aufstellt. Dagegen beschränkt sich die psychische Beobachtung des Verfassers stets dahin, dass er in einem Dualismus Halt macht, der sich bei mehr Gründlichkeit bald lösen würde. Die Aussenwelt erscheint ihm

noch als ursprünglich gegeben im Gegensatz zum Ich. Das Ich hält er nur für möglich im Gegensatz zur andern Person u. s. w. alles wahrscheinlich nur, weil für seine Logik die Antithese unentbehrlich ist, und er deren Verlust schon im voraus fürchtet.

Hoppe.

**Logische Uebungen.** Von Karl Streckler, Doctor der Philosophie. 1. Heft. Der Anfang der Geometrie als logisches Uebungsmaterial, zugleich als Hilfsmittel für den mathematischen Unterricht. Essen 1896. G. D. Baedeker. 61 S.

Es wird erst die einfachste Form der Schlüsse erklärt, dann eine Reihe elementarer Lehrsätze und Aufgaben über Winkel und Dreiecke ausgeführt, deren Beweise die leichtesten Anwendungen des gezeigten Schlussverfahrens darstellen.

H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

LIV.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Du Bois-Reymond, Emil, Hermann v. Helmholtz. Gedächtnissrede. gr.8°. (80 S.) Leipzig, Veit & Co. 2 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. 8. Jahrg. 1894. 4. Hft. Berlin, Springer. 5,60 Mk.

Fortschritte, die, der Physik i. J. 1891. Dargestellt v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 47. Jahrg. 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. gr.8°. (XLVII, 621 S.) Braunschweig, Vieweg. 25 Mk.

Goldbeck, Ernst, die Gravitationshypothese bei Galilei u. Borelli. 4°. (31 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Obenrauch, Ferd. Jos., Geschichte der darstellenden u. projektiven Geometrie mit besond. Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich u. Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Oesterreich. gr.8°. (VI, 442 S. m. 2 Bildn.). Brünn, C. Winiker. 9 Mk.

Photographen-Bibliothek, deutsche. V. Bd. Rohr, Mor., zur Geschichte u. Theorie des photographischen Teleobjectivs mit besonderer Berücksichtigung der durch die Art seiner Strahlenbegrenzung bedingten Perspektive. gr.8°. (VII, 41 S. m. 7 Fig.) Weimar, Photographen-Zeitg. Kart. 2,50 Mk.

Poggendorff's Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften 3. Bd. 8. u. 9. Lfg. Leipzig, Barth. à 3 Mk.

### Methoden und Principien.

Bachmann, F., u. Rich. Kanning, Methodik zu dem Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. gr.8°. (70 S.) Leipzig, Freytag. 80 Pf.

Bucherer, Alfr. H., eine Kritik der Nernst'schen thermodynamischen Anschauungen. Eine Antwort auf die Kritik meines Buches: Grundzüge einer thermodynamischen Theorie elektrochemischer Kräfte. gr.8°. (31 S.) Freiberg, Craz u. Gerlach. 60 Pf.

Grimm, O. u. W. Kaufmann, Praxis des Rechenunterrichts in der Volksschule. gr.8°. (78 S.) Hamm, Breer & Thiemann. 1 Mk.

Hollefreund, Karl, Anwendung des Gauss'schen Principes vom kleinsten Zwange. 4°. (24 S. m. 2 Taf.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Lefler, Methodisches aus dem Unterrichte in der Arithmetik. gr.8°. (25 S.) Gotha, Thienemann. 60 Pf.

Močnik, Frz. v., der Rechen-Unterricht in der Volksschule. Eine methodische Anleitung für Volksschullehrer. 6. Aufl. gr.8°. (238 S. m. Fig.) Leipzig, Freytag. Geb. 3 Mk.

Schleichert, F., Beiträge zum Unterrichte in der Raumlehre mit besonderer Berücksichtigung der geometrischen Formenlehre. gr.8°. (28 S.) Leipzig, Haacke. 50 Pf.

Zehmler, L., die Mechanik des Weltalls in ihren Grundzügen dargestellt. gr.8°. (VII, 176 S.) Freiburg, Mohr. 3 Mk.

### Lehrbücher.

Bork, H., P. Crantz, E. Haentzschel, mathematischer Leitfaden für Realschulen. 1. Tl.: Planimetrie u. Arithmetik. gr.8°. (184 S. m. Fig.) Leipzig, Dürr'sche B. 1,80 Mk.

Haller v. Hallerstein, F. Baron, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplane für das kgl. preuss. Kadettenkorps bearb. v. Bruno Hülsen. 1. Tl. Pensum der Quarta u. Unter-Tertia. 6. Aufl. gr.8°. (VI, 187 S. m. Fig.) Berlin, Nauck & Co. Geb. 2,80 Mk.

Meisel, F., Leitfaden für den geometrischen Unterricht an niederen u. mittleren gewerblichen Lehranstalten. gr.8°. (IV, 28 S.) Darmstadt, Bergsträsser. 40 Pf.

Vogel, J. G., Hilfs- u. Wiederholungsbuch für den Unterricht in der astronomischen Geographie an mittleren Lehranstalten. gr.8°. (VI, 71 S. m. Fig.) Leipzig, Deichert. 1,40 Mk.

### Sammlungen.

Bachmann, F. u. Rich. Kanning, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 7 Hfte. gr.8°. Leipzig, Freytag. Geb. 5,70 Mk.

Baur, Ludw., Rechenbuch i. Aufgaben u. Auflösungen f. Lehrer u. Lehramtszöglinge, sowie zum Selbststudium. 2. Aufl. gr. 8°. (VI, 266 S.) Stuttgart, Steinkopf. 3,20 Mk.

Frank, F. u. H. Martens, Rechenbuch für Gewerbe- u. Bau- schulen, sowie für gewerbliche Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr. 8°. (VI, 161 S. m. 52 Fig.) Dresden, Kühnemann 2,40 Mk.

Gajdeczka, Jos., Maturitäts-Prüfungs-Fragen aus der Physik. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 194 S. m. Fig.) Wien, Deuticke. 2 Mk.

Hartmann, Berthold, Rechenbuch f. höhere u. mittlere Mädchenschulen. 3. Hft. Für das 5. u. 6. Schuljahr. gr. 8°. (IV, 96 S.) Frankfurt a/M., Kesselring. Kart. 50 Pf.

Heinze u. Hübner, Rechenbuch für Volksschulen u. die un- teren Klassen höherer Lehranstalten. Ausg. C. in 7 Heften. 2. u. 3. Hft. gr. 8°. Breslau, Görlich. 45 Pf.

Költzsch, A., Rechenbuch f. Volks- u. Mittelschulen in 8 Heften. 1.–7. Hft. gr. 8°. Leipzig, Merseburger. 1,52 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse u. methodische Bemerkungen dazu. 3.–7. Hft. gr. 8°. Ebd. 1,60 Mk.

Königbauer, Joach., geometrische Aufgaben für Mittelschulen u. Lehrerbildungsanstalten. 4. Aufl. gr. 8°. (33 S.) Regensburg, Habel. 80 Pf.

Löser, J., kleines Rechenbuch für Landwirtschafts- u. ländliche Fortbildungsschulen. gr. 8°. (IV, 108 S. m. 70 Abbild.) Stuttgart, Ulmer. Kart. 1,20 Mk.

—, u. H. Zeeb, Rechenbuch nebst populärer Geometrie, Phy- sik, Mechanik u. Landwirtschaftslehre mit vielen Aufgaben. 7. Aufl. Unter Mitwirkung v. R. Seifert. gr. 8°. (XVI, 367 S. m. 160 Holz- schn.) Ebd. 2,80 Mk.; Resultate (76 S. m. 7 Holzschn.) 1,30 Mk.

Lindau, Frdr., Max Berbig u. Ernst Schmidt, Aufgaben- sammlung f. d. Unterricht im Kopfrechnen. gr. 8°. (100 S.) Wies- baden, Behrend. Kart. 2 Mk.

Matthiessen, Ludw., Uebungsbuch f. d. Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. Nach der Aufgabensammlung v. Heis bearb. 4. Aufl. gr. 8°. (VII, 253 S.) Köln, Du Mont-Schauberg. 2 Mk.

Maurer, Aug., Maxima und Minima. Aufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. gr. 8°. (V, 50 S. m. 13 Fig.) Berlin, Spring- ger. Kart. 1,40 Mk.

Rosenberg, Karl, methodisch geordnete Sammlung von Auf- gaben aus der Planimetrie u. Stereometrie für Lehrer- u. Lehrer- innen-Bildungsanstalten, sowie für andere gleichgestellte Lehran- stalten. gr. 8°. (III, 159 S. m. 107 Fig.) Wien, Hölder. Geb. 1,90 Mk.

Seeländer, Frdr., Rechenbuch für kaufmännische, gewerb- liche u. hauswirtschaftliche Mädchen-Fortbildungsschulen in Bei-

spielen u. Aufgaben 2. Hft. gr.8°. (95 S.) Leipzig, Dürr'sche B. 1,20 Mk.

Utescher, Otto, Rechenaufgaben für höhere Schulen. In 3 Heften, nach den preuss. Lehrplänen v. 1892 bearb. 2. Aufl. gr.8°. Breslau, Hirt. 1,10 Mk.

### Tabellen.

Arnold, E., Constructionstabeln für den Dynamobau. 1. Tl. Gleichstrom-Maschinen. qu.-gr. Fol. (55 Taf. m. 1 Bl. Text.) Stuttgart, Enke. In Mappe 20 Mk.

Becker, E., logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 5 Decimalen. 2. Ausg. Lex.8°. (XVI, 104 S.) Leipzig, Tauchnitz. 1,20 Mk.

Fulst, Otto, nautische Tafeln. Mit 1 Schalttafel als Beilage. 8°. (IV, 154 u. 4 S.) Bremen, Heinsius. 3,50 Mk.

Gezeitentafeln f. d. Jahr 1898. Hrg. v. Reichsmarine-Amt. Red.: Observatorium zu Wilhelmshaven. Mit 14 Blättern in Stein-  
druck, enth. Darstellungen der Gezeitenströmungen in der Nordsee, im Engl. Kanal u. der Irischen See. 8°. (XII, 265 S.) Berlin, Mittler. 1,50 Mk.

Matthies, E., nautische Tafeln für Nord- u. Ostsee. gr.8°. (III, 72 S.) Emden, Haynel. Geb. 2,50 Mk.

Produktentafel, kleine, hrg. v. der trigonometrischen Ab-  
theilung der kgl. preuss. Landesaufnahme. gr.8°. (4 S.) Berlin, Mittler. 15 Pf.

Spitzer, Sim., Tabellen f. die Zinseszins- u. Renten-Rech-  
nung mit Anwendung derselben auf Berechnung von Anlehen, Con-  
struction von Amortisationsplänen etc. 4. Aufl. gr.8°. (VIII, 513 S.)  
Wien, Gerold. 15 Mk.

Taschentafel, 4 stellige logarithmische. Hrg. v. d. trigo-  
nometrischen Abtheilung der kgl. preuss. Landesaufnahme. gr.8°.  
6 S.) Berlin, Mittler. 30 Pf.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Behm, Max. u. Herm. Dageförde, die Praxis des kauf-  
männ. Rechnens zum Gebrauche für Schule u. Kontor. Hrg. im  
Auftrag des Kuratoriums der kaufmänn. Fortbildungsschulen zu Berlin.  
Auflösungen f. den 1. bis 3. Thl. gr.8°. (46 S.) Berlin, Spamer.  
1,50 Mk.

Bigler, U., ein Beitrag zur Theorie der arithmetischen Reihen.  
8°. (36 S.) Aarau, Sauerländer. 1 Mk.

Burkhardt, Heinr., funktionentheoretische Vorlesungen. 1. Tl. Auch unter d. Titel: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen. Mit zahlreichen Figuren im Text. gr.8<sup>o</sup>. (XII, 213 S.) Leipzig, Veit & Co. 6 Mk.

Daublebsky v. Sterneck, R., über einen Satz der additiven Zahlentheorie. gr.8<sup>o</sup>. (8 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Diesener, H., die Arithmetik. Praktisches Unterrichtsbuch zur Erlernung der 4 Rechnungsarten mit ganzen Zahlen, gewöhnlichen Brüchen und Dezimalbrüchen etc. Mit einer grossen Zahl vollständig ausgerechneter praktischer Beispiele für den Selbstunterricht und zum Gebrauche an Gewerbe- u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (IV, 64 S.) Halle, Hofstetter. 1,50 Mk.

Fricke, Rob., Hauptsätze der Differential- u. Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 2. Tl. gr.8<sup>o</sup>. (VIII, 66 S. m. 15 Fig.) Braunschweig, Vieweg. 1,50 Mk.

Frischauf, Johs., Vorlesungen über Kreis- u. Kugel-Funktionen-Reihen. gr.8<sup>o</sup>. (VI, 60 S.) Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Fuchs, L., zur Theorie der Abel'schen Functionen. gr.8<sup>o</sup>. (14 S.) Berlin, Reimer. 50 Pf.

Goldschmidt, Ludw., die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. gr.8<sup>o</sup>. (VII, 279 S.) Hamburg, Voss. 7 Mk.

Hochstein, A., Arithmetik u. Algebra. 1. Hft.: Lehrsätze u. Uebungsstoff für die Untertertia. Zunächst für Rektoratsschulen bearb. gr.8<sup>o</sup>. (56 S.) Lippstadt, Harlinghausen. 60 Pf.

Isenkrahe, C., das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung u. algebraische Anwendung. gr.8<sup>o</sup>. (113 S. m. 79 Fig.) Leipzig, Teubner. 2,80 Mk.

Puchberger, Eman., eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. V. (Suppl.-)Hft. gr.8<sup>o</sup>. (30 S.) Wien, Gerold. 1,60 Mk.

Rogel, Frz., die Entwicklung nach Bernoulli'schen Functionen. gr.8<sup>o</sup>. (48 S.) Prag, Rivnác. 72 Pf.

—, Note zur Entwicklung nach Euler'schen Functionen. gr.8<sup>o</sup>. (9 S.) Ebd. 20 Pf.

Schüller, Werner Jos., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra für höhere Schulen u. Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterr. 2. um die Logarithmen verm. Ausg. gr.8<sup>o</sup>. (XXV, 478 S. m. 54 Fig.) Leipzig, Teubner. 2,50 Mk.

Servus, H., Regeln der Arithmetik u. Algebra zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. 2. Tl.: Ober-Sekunda u. Prima. gr.8<sup>o</sup>. (III, 235 S.) Berlin, Salle. 2,40 Mk.

Studnička, F. J., Beitrag zur Theorie der Potenz- u. Kombinations-Determinanten. gr.8<sup>o</sup>. (20 S.) Prag, Rináč. 24 Pf.

Weltzien, Carl, Ueber Produkte u. Potenzen von Determinanten. 4<sup>o</sup>. (23 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

### Geometrie.

Augschun, W., Grundzüge der Geometrie m. geometr. Konstruktions- u. Rechenaufgaben. 2. Aufl. Mit 4 Steindrucktaf. u. Abbild. i. Text. 8<sup>o</sup>. (VIII, 125 S.) Berlin, Mittler. Kart. 1,50 Mk.

Böger, R., die Geometrie der Lage in der Schule. gr. 8<sup>o</sup>. (47 S. m. Fig.) Hamburg, Herold. 2,50 Mk.

Bosse, L., u. H. Müller, Stereometrie für Landwirtschaftsschulen. 8<sup>o</sup>. (IV, 40 S. m. 30 Abbild.) Berlin, Parey. 50 Pf.

Falcke, A., Leitfaden der Geometrie. 18. Aufl. Neu bearb. v. H. Röhrs. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, 102 S. m. 215 Fig.) Berlin, Rentel. Kart. 80 Pf.

Fenkner, Hugo, Lehrbuch d. Geometrie f. d. mathemat. Unterricht an höheren Lehranstalten. (In 2 Tln.) 1. Tl.: Ebene Geometrie. 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 208 S. m. Fig.) Berlin, Salle. 2 Mk.

Ganter, H., u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. 1. Tl. Die analytische Geometrie der Ebene. 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, 176 S. mit 54 Fig.) Leipzig, Teubner. 2,40 Mk.

Jetter, die geometrischen Oerter mit besonderer Berücksichtigung von Spiekers Lehrbuch u. Benützung anderer Quellen zusammengestellt. 2. Aufl. 8<sup>o</sup>. (12 S.) Blaubeuren, Mangold. 20 Pf.

Kleinschmidt, Emerich, Leitfaden der Geometrie u. des geometrischen Zeichnens f. Mädchen-Bürgerschulen. 2. Thl. (II. Classe.) 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (III, 60 S. m. 60 Abbildgn. u. 2 Taf.) Wien, Hölder. Geb. 92 Pf.

Küpper, Karl, die ultraelliptischen Curven  $C^n, p > 1$ . gr. 8<sup>o</sup> (11 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Loria, Gino, i poligoni di Steiner nelle cubiche razionali. Aggiunte ad una memoria di Em. Weyr. gr. 8<sup>o</sup>. (4 S.) Ebd. 10 Pf.

Richter, Otto, die Berührungskegelschnitte der ebenen Kurven 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten. Progr. 4<sup>o</sup>. (20 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Hinrichs' Sort. 1,20 Mk.

Schwering, Karl u. Wilh. Krimphoff, Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearb. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 133 S. m. 151 Fig.) Freiburg, Herder. 1,80 Mk.

Spieker, Th., Lehrbuch der Stereometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Mit in den Text gedr. Holzschn. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, 108 S.) Potsdam, Stein. 1,60 Mk.

Tobel,, Edw. v., Geometrie für Sekundarschulen. 8°. (126 S.)  
Zürich, Orell, Füssli. Kart. 1,30 Mk.

Zwicky, M., Grundriss der Planimetrie u. Stereometrie, nebst  
Uebungsaufgaben. 1. Tl.: Planimetrie. 2. Aufl. 8°. (V, 94 S. m.  
Fig.) Bern, Schmid & Francke. Kart. 1,50 Mk.

### Trigonometrie.

Kambly u. Röder, Trigonometrie. Vollständig nach den  
preuss. Lehrplänen v. 1892 bearb. Ausg. der Trigonometrie v. Kambly.  
Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima. Unter Voranstellung  
der planimetrischen Lehraufgabe der Ober-Sekunda. 2. Aufl. (25.  
der Kambly'schen Trigonometrie.) gr.8°. (189 S. m. Fig.) Breslau,  
Hirt. Geb. 2 Mk

Wotruba, R., Einleitung in die Trigonometrie. Für techn.  
Lehranstalten u. zum Selbstunterrichte. gr.8°. (V, 55 S. m. 4 lith.  
Taf.) Altenburg, Bonde. 1,70 Mk.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Ergebnisse der Triangulation der Schweiz. Hrsg. durch das  
eidgen. topograph. Bureau. 2. u. 3. Lfg. (2. Kanton Zürich. —  
3. Cantone Ticino.) gr.4°. Bern, Schmid & Francke. à 4 Mk.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd. Feld-  
u. Landmessung. 5. Aufl. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. gr.8°. (416 S. m.  
Fig.) Stuttgart, Metzler. 8 Mk.

Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Ab-  
theilung der kgl. preuss. Landesaufnahme. 4. 5. u. 8. Hft. — 4.  
Schleswig-Holstein u. die Grossherzogthümer Mecklenburg. — 5.  
Schlesien. — 6. Prov. Sachsen u. d. Thüringischen Länder. 12°.  
Berlin, Mittler. Kart. à 1 Mk.

Schmidt, v., die trigonometrischen Vorarbeiten für die topo-  
graphische Messtisch-Aufnahme in Preussen. 8°. (41 S.); Ebd.  
Kart. 50 Pf.

Schubert, Formulare zu Vermessungs-Uebungen. 8°. (48 S.)  
Neudamm, Neumann. 80 Pf.

Trabert, Wilh., Höhenmessung mittels des Barometers. gr.8°.  
(8 S.) Znaim, Fournier & Haberler. 20 Pf.

Weixler, Adolph, Ausgleichung trigonometrischer Mes-  
sungen nach der Methode der geometrischen Oerter. gr.8°. (57 S.  
m. 2 Taf.) Wien, Lechner. 1 Mk.

### Mechanik.

Meissner, G., die Hydraulik u. die hydraulischen Motoren. 2. Aufl. v. H. Hederich u. Nowack. 18. — 22. Lfg. gr.8°. Jena, Costenoble. à 3 Mk.

Schmid, Carl, Statik u. Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vielen Beispielen, elementar bearb. für den Gebrauch an der Schule u. in der Praxis. 2. Aufl. 4°. (VIII, 102 S. m. Abbild. u. 2 Taf.) Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

### Technik.

Bach, C., die Maschinen-Elemente. Ihre Berechnung u. Konstruktion mit Rücksicht auf die neueren Versuche. 6. Aufl. 2 Bde. Mit in den Text gedr. Abbildgn., 3 Texttaf. m. 54 Taf. Zeichngn. Lex.-8°. (XVIII, 702 u. 29 S.) Stuttgart, Bergsträsser. 30 Mk.

Bibliothek, polytechnische. 1. Bd.: Weiler, W., die Dynamomaschine. Physikalische Prinzipien, Arten, Teile, Wechselwirkung der Teile u. Konstruktion derselben. 3. Aufl. gr.8°. (XVI, 199 S. m. 190 Fig.) Magdeburg, Faber. 4 Mk.

Biscan, Wilh., die elektrischen Messinstrumente. Die wissenschaftl. Messinstrumente u. Messbehelfe. gr.8°. (IV, 102 S. m. 98 Abbildgn.) Leipzig, Leiner. 3 Mk.

Eder, Jos. Maria, ausführliches Handbuch der Photographie. 8. Hft.: Das Bromsilber-Collodion, sowie das orthochromatische Collodion Verfahren u. das Bad-Collodion-Trockenverfahren. 2. Aufl. gr.8°. (X, VIII u. S. 365 — 595 m. 104 Holzschn.) Halle, Knapp. 2 Mk.

Erhard, Thdr., Einführung in die Elektrotechnik. Die Erzeugung starker elektr. Ströme u. ihre Anwendung zur Kraftübertragung. gr.8°. (VI, 183 S. m. 95 Fig.) Leipzig, Barth. 4 Mk.

Hochenegg, C., Anordnung u. Bemessung elektr. Leitungen. 2. Aufl. gr.8°. (VIII, 214 S. m. 12 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 6 Mk.

Holzmüller, Gust., die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 1. Tl., enth. die statischen Momente u. Schwerpunktslagen, die Trägheits- u. Centrifugal-Momente für die wichtigsten Querschnittsformen u. Körper der techn. Mechanik in rechn. u. graph. Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land u. Reye. Mit 287 Fig. u. zahlreichen Übungsaufgaben. gr.8°. (XI, 340 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 5 Mk.

Holzt, A., Elektrotechniker. 22. u. 23. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Jenisch, P., Hausteleggraphie. Eine gemeinverständliche Anleitung zum Bau von elektrischen Hausteleggraphen-, Telephon- u. Blitzableiter-Anlagen. gr.8°. (VII, 233 S. m. 312 Abbildgn.) Berlin, Rockenstein. 3 Mk.

Kapp, Gisbert, Dynamomaschinen für Gleich- u. Wechselstrom u. Transformatoren. Deutsch v. L. Holborn u. K. Kahle. 2. Aufl. gr.8°. (VIII, 374 S. m. 165 Fig.) Berlin, Springer. Geb. 8 Mk.

Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- u. Maschinenwesen. II. Thl.: Mechanik elastisch-fester u. flüssiger Körper. gr.8°. (VIII, 367 S. m. 364 Holzschn.) Hannover, Helwing 12 Mk.

Lueger's, O., Lexikon der Technik. 22.—24. Abtlg. Stuttgart, Deutsche Verlagsanst. à 5 Mk.

Meissner, Geo., die Kraftübertragung auf weite Entfernungen u. die Konstruktion der Triebwerke u. Regulatoren. 2. Aufl. v. Jos. Krämer. 1. Lfg. gr.8°. (64 S. m. 5 Taf.) Jena, Costenoble. 3 Mk.

Parseval, A. v., der Drachen-Ballon. gr.8°. (32 S. m. Fig.) Berlin, Mayer & Müller. 1,50 Mk.

Rummer v. Rummershof, Adf., die Photogrammetrie im Dienste der Militär-Mappierung. gr.8°. (32 S. m. 9 Fig.) Wien, Lechner. 1 Mk.

Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Hrsg. v. Ernst Voit. 1. Bd. 3. Hft. Feussner, K., die Ziele der neueren elektrotechnischen Arbeiten der physikalisch-technischen Reichsanstalt. gr.8° (S. 115—149 m. 9 Abbild.) Stuttgart, Enke. 1 Mk.

Schulte, A., Wirkungsweise des Wassers im Laufrade der Turbinen. gr.4°. (16 S. m. 10 Fig.) Berlin, Siemens. 80 Pf.

Thaa, Geo. v., Anleitung zum Gebrauche des logarithmischen Rechenschiebers f. die Zwecke des Technikers. 8°. (59 S. m. Fig.) Wien, Hof- u. Staatsdruckere. 80 Pf.

Thompson, Silvanus P., die dynamoelektrischen Maschinen. 5. Aufl. Uebers. v. C. Grawinkel. Nach dem Tode des Uebersetzers besorgt v. K. Streckler u. F. Vesper. 2 Thle. gr.8°. (VII, IX, 790 S. m. 520 Abbild. u. 19 Taf.) Halle, Knapp. 24 Mk.

Weiler, W., der praktische Elektriker. Populäre Anleitung zur Selbstanfertigung elektrischer Apparate u. zur Anstellung zugehöriger Versuche, nebst Schlussfolgerungen, Regeln und Gesetzen. 3. Aufl. 8°. (XXXII, 614 S. m. 466 Fig.) Leipzig, Schäfer. 8 Mk.

Wietz, Hugo, die isolierten elektrischen Leitungsdrähte u. Kabel. Ihre Erzeugung, Verlegung u. Unterhaltung. Dargestellt u. durch 159 in den Text gedr. Fig. erläutert. gr.8°. (VIII, 236 S.) Leipzig, Leiner. 7 Mk.

### Optik, Akustik und Elastizität.

Kerber, Arthur, Beiträge zur Dioptrik. 3. Hft. gr. 8°. (16 S.) Leipzig, Fock. 50 Pf.

Röntgen, W. C., weitere Beobachtungen über die Eigenschaften der X-Strahlen. gr. 8°. (17 S. m. 1 Fig.) Berlin, Reimer. 1 Mk.

Tyndall, John, der Schall. Nach der 6. engl. Aufl. des Originals bearb. v. A. v. Helmholtz u. Cl. Wiedemann. 3. Aufl. gr. 8°. (XXII, 548 S. m. 204 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 10 Mk.

### Erd- und Himmelskunde.

Annalen der schweizerischen meteorologischen Central-Anstalt 1894. „Der schweizerischen meteorologischen Beobachtungen“ 31. Jahrg. gr. 4°. Zürich, Fäsi u. Beer. 18 Mk

Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums i. J. 1895. (Russisch u. deutsch.) gr. 4°. (IV, XXIX, 198 S.) Petersburg, Eggers. 10 Mk.

Brenner, Leo, Jupiter-Beobachtungen an der Manora-Sternwarte 1895—1896. gr. 4°. (24 S. m. 8 Farbendr. u. 8 Pausen.) Wien, Gerold. 7,60 Mk.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördlicher u. 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 9. Stück: Graham, A. Catalogue of 14 464 stars between 24° 15' and 30° 57' of north declination 1855 for the epoch 1875 from observations made according to the programme of the Astronomische Gesellschaft at the university observatory Cambridges, England during the years 1872 to 1896. gr. 4°. (X, 308 S.) Leipzig, Engelmann. 26 Mk.

Falb's, Rud., neue Wetter-Prognose u. Kalender der kritischen Tage f. 1897 Juli-Dez. 16°. (82 S.) Berlin, Steinitz. 1 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 9. Lfg. Breslau, Trendt. 3,60 Mk.

Hartl, Heinr., meteorologische u. magnetische Beobachtungen in Griechenland. 2. Bericht. gr. 8°. (32 S. m. Fig. u. 1 Taf.) Wien, Lechner's Sort. 1 Mk.

Heinrich, Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, angestellt auf der landwirtschaftlichen Versuchsstation zu Rostock i. J. 1896. gr. 8°. (2 Tab. u. 1 Taf.) Güstrow, Opitz & Co. 50 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1895. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg i. J. 1895. Mitteilungen der mit dem kgl. statistischen Landesamt verbundenen meteorologischen Zentralstation. Bearb. v. L. Meyer unter Mitwirk. v.

Mack. Mit 7 Uebersichtskarten. gr. 4°. (94 S.) Stuttgart, Metzler. 4,50 Mk.

Jahres-Bericht des Centralbureaus f. Meteorologie u. Hydrographie i. Grosshrzogth. Baden, mit den Ergebnissen der meteorologischen Beobachtungen u. Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein u. seinen grösseren Nebenflüssen f. d. J. 1896. Mit e. Anh. betr. die Hochwasserkatastrophe v. März 1896. gr. 4°. (IV. 117 S. m. 11 Taf.) Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

—, 5., des Sonnblick-Vereins f. d. J. 1896. Lex-8°. (40 S. m. 2 Abbild. u. 3 Taf.) Wien, Gerold. 3 Mk.

Ledóchowski, Jos., Graf, Wetterprognose, giltig für Niederösterreich, Theile v. Oberösterreich, Süd Mähren u. Westungarn für d. Monat Mai 1897. 12°. (1 Bl.) Wien, Braumüller. 20 Pf.

Lemke, H., über die Mars- u. Jupiter-Störungen des kleinen Planeten vom Hebe-Typus. 4°. (37 S.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Müller, G., die Photometrie der Gestirne. gr. 8°. (X, 556 S. m. 81 Fig.) Leipzig, Engelmann. 20 Mk.

Pernter, J. M., die Farben des Regenbogens u. der weisse Regenbogen. gr. 8°. (101 S. m. 3 Steintaf.) Wien, Gerold. 2 Mk.

Publikationen der astronomischen Gesellschaft. XXI. Gylden, Hugo, Hülftafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten. Unter Mitwirkung v. S. Oppenheim hrsg. gr. 4°. (LIII, 242 S.) Leipzig, Engelmann. 30 Mk.

— des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 35. (XI. Bd., 2. Stück.) Scheiner, J., Ausmessung des Orionnebels nach physikalischen Aufnahmen. gr. 4°. (68 S. m. 2 Photograv.) Ebd. 4 Mk.

Scheiner, J., die Photographie der Gestirne. Mit 1 Taf. u. 52 Fig. i. Text. gr. 8°. (V, 382 S.) Nebst e. Atlas v. 11 Taf. mit textl. Erläuterungen. 4°. (6 S.) Ebd. 21 Mk.

Servus, Herm., Neue Grundlagen der Meteorologie. 4°. (24 S.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Sinram, A., Fragmente zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) u. zur Mechanik des Himmels. gr. 8°. (32 S.) Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk.

Stechert, Carl, Tafeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen. Mit 2 im Text gegeb. Fig. u. 1 Diagramm in 2 Expln. gr. 4°. (II, 43 S.) Hamburg, Friederichsen. 6 Mk.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam i. J. 1894. 2. Hft. gr. 4°. (44 S. m. 4 Taf.) Berlin, Asher. 3,50 Mk.

Veröffentlichungen des kgl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam i. J. 1895. 2. Hft. gr. 4°. (43 S. m. 4 Taf.) Berlin, Asher. 3,50 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen i. J. 1894. gr. 4°. (XL, 206 S. m. 2 Karten.) Ebd. 10 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordng. i. J. 1896, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1896. Beobachtungssystem des Königreich Preussen u. benachbarter Staaten. 2. Hft. gr. 4°. (S. 57—110.) Ebd. 3 Mk.

— dasselbe. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam i. J. 1895. gr. 4°. (XII, 119 S. m. 4 Fig.) Ebd. 8 Mk.

Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft. 31. Jahrg. 4. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

### Nautik.

Segelhandbuch für den Stillen Ozean. Mit e. Atlas v. 31 Karten. Hrsg. v. d. Direktion der deutschen Seewarte. Mit 32 in den Text gedr. Figuren u. 9 Steindr. Taf. Lex.-8°. (XII, 916 S.) Hamburg, Friederichsen. Geb. 36 Mk.

### Physik.

Abhandlungen, physikalische, der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1896. gr. 4°. (27, 36 u. 66 S. m. 6 Taf.) Berlin, G. Reimer. Kart. 9,50 Mk.

Albrecht, Gust., die Elektrizität. 8°. (167 S. m. 38 Abbild.) Heilbronn, Schröder & Co. Geb. 2 Mk.

Bezold, Wilh. v., zur Theorie des Erdmagnetismus. gr. 8°. (36 S. m. 2 Fig. u. 2 Taf.) Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Cellier, Léon, Leitungsvermögen der schwarzen Kohle für Wärme u. Electricität. Diss. gr. 8°. (132 S.) Zürich, Speidel. 3 Mk.

Cohn, Emil, elektrische Ströme, 10 Vorträge über die physikalischen Grundlagen der Starkstrom-Technik. gr. 8°. (IV, 182 S. m. 70 Abbild.) Leipzig, Hirzel. 3,60 Mk.

Donle, Wilh., Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen u. Realgymnasien, nach den minist. Lehrplänen bearb. Ausg. A. Mit 173 in den Text gedruckten Abbildungen u. 525 Übungsaufgaben. gr. 8°. (VIII, 268 S.) München, Wolff. Geb. 3 Mk.

Ebert, H., magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus u. der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. 2. Tl. Mit 47 Abbild. im Text u. auf einer Tafel. gr.8°. (XVIII u. S. 225 — 499.) Leipzig, Barth. 10 Mk.

Götz, Hans, Leitfaden der Physik. Zum Gebrauch an humanistischen Anstalten. Mit 180 in den Text gedr. Figuren u. zahlreichen Uebungsaufgaben. gr.8°. (VIII, 245 S.) München, Franz. 2,80 Mk.

Hellmann, G., die Anfänge der magnetischen Beobachtungen Lex.8°. (27 S. m. 3 Fig.) Berlin, Kühl. 1,50 Mk.

Klemenčić, Ign., Ueber magnetische Nachwirkung. gr.8° (18 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. Leop. Pfaundler unter Mitwirkung v. Otto Lummer. (In 3 Bdn.) Mit gegen 2000 Holzst. u. Taf. 2. Bd. 1. Abth. 3. Lfg. gr.8°. (XX u. S. 609—1192.) Braunschweig, Vieweg. 9,50 Mk.

Planck, Max, Vorlesungen über Thermodynamik gr.8°. (VII, 248 S. m. 5 Fig.) Leipzig, Veit. Kart. 7,50 Mk.

Wallentin, Ign. G., Lehrbuch der Elektrizität u. des Magnetismus. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen über elektrische Energieverhältnisse u. unter Darstellung der den Anwendungen in der Elektrotechnik zugrunde liegenden Principien gr.8°. (VIII, 394 S. m. 230 Holzschn.) Stuttgart, Enke. 8 Mk.

### Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher. LXXI. Bd. gr.4°. Leipzig, Engelmann. — Nr. 1. Braumühl, A. v., Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie. (30 S. m. 1 Taf.) 1,50 Mk. — Nr. 3. Kutta, W. M., zur Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung. (33 S. m. 3 Taf.) 2,50 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Hrsg. v. Roland Baron Eötvös, Jul. König, Carl v. Than. Red. v. J. Fröhlich. 13. Bd. 2. Hlfte. gr.8°. (IV u. S. 193—464 m. Abbild.) Budapest, Akademie d. Wissensch. 4 Mk.

— der sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Math.-physik. Classe. 1897. I. u. II. Hft. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Bibliothek, internationale wissenschaftliche. 59. Bd. Mach, Ernst, die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. 3. Aufl. 8°. (XII, 505 S. m. 250 Abbild.) Leipzig, Brockhaus. 8 Mk.

Bibliothek<sup>1</sup>, photographische. (Sammlung kleinerer photograph. Hilfsbücher.) Nr. 5—7. gr. 8°. Berlin, G. Schmidt. — 5. Schultz-Hencke, D., Anleitung zur photographischen Retouche u. zum Uebermalen v. Photographien. 3. Aufl. v. Kopske's Anleitg. zum Retouchieren. Mit 2 Lichtdr.-Taf. u. 21 Fig. im Text. (VIII, 121 S.) 2,50 Mk. — 6. Parzer-Mühlbacher, Alfr., photographische Aufnahme u. Projektion m. Röntgenstrahlen mittels der Influenz-Elektrismaschine Eine Anleitg. f. die Praxis. Mit 10 Taf. nach Orig.-Aufnahmen des Verf. u. 15 Fig. im Text. (V, 47 S.) 1,80 Mk. — 7. Hanneke, Paul, das Celloidinpapier, seine Herstellung u. Verarbeitung. Mit besond. Berücksicht. der Anfertig. v. Mattpapieren sowie des Platintonprozesses. Mit 15 Fig. im Text. (VII, 131 S.) 3 Mk.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 4. Bd. 1894—95. gr. 8°. (V, XVIII, 546 S.) Berlin, G. Reimer. 16 Mk.

— dass. 5. Bd. 1896. 1. Hft. gr. 8°. (94 S.) Leipzig, Teubner. 2,80 Mk.

Nachrichten v. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikal. Klasse, nebst geschäftl. Mitteilgn. 1897. Lex.-8°. Göttingen, Horstmann. 5 Mk.

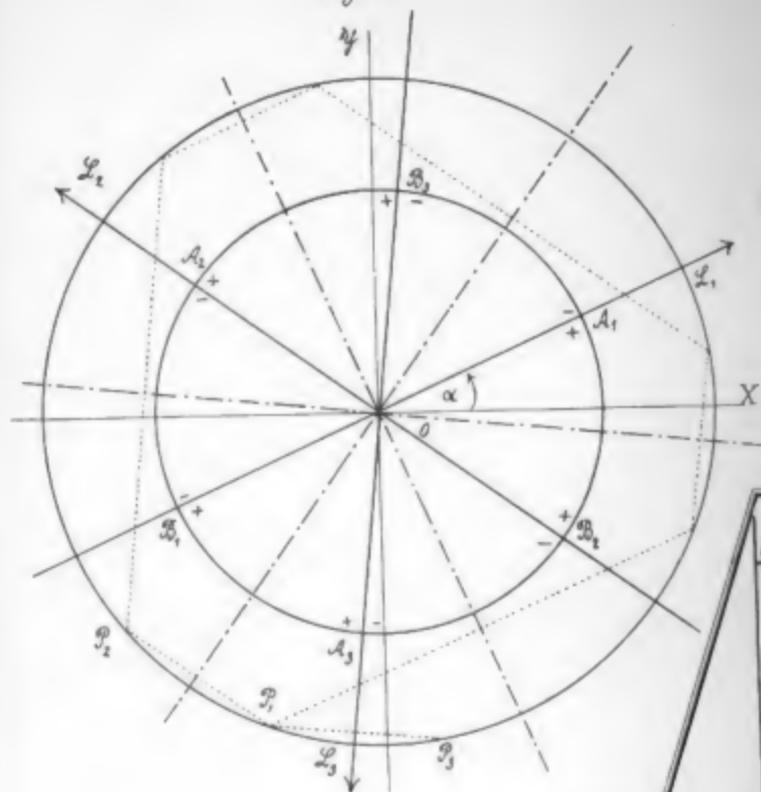
Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 86. u. 87. Leipzig, Engelmann. Kart. — 86. Faraday, Mich., Experimentaluntersuchungen über Elektrizität. (Aus den Philosoph. Transact.) Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. III.—V. Reihe. 1833. (104 S. m. 15 Fig.) 1,60 Mk. — 87. Dasselbe. VI.—VIII. Reihe. 1834. (180 S. m. 48 Fig.) 2,60 Mk.

Sitzungsberichte, Münchener. Math. Classe. 1896. IV. Hft. München, Franz. 1,20 Mk.

—, Wiener. Mathem.-naturw. Classe. Wien, Gerold. 1. Abth. 105. Bd. 8.—10. Hft. 5 Mk. — Abth. IIa. 105. Bd. 8.—10. Hft. 7 Mk. — Abth. IIb. 105. Bd. 8.—10. Hft. 1,60 Mk. — Abth. III. 105. Bd. 8.—10. Hft. 3 Mk.

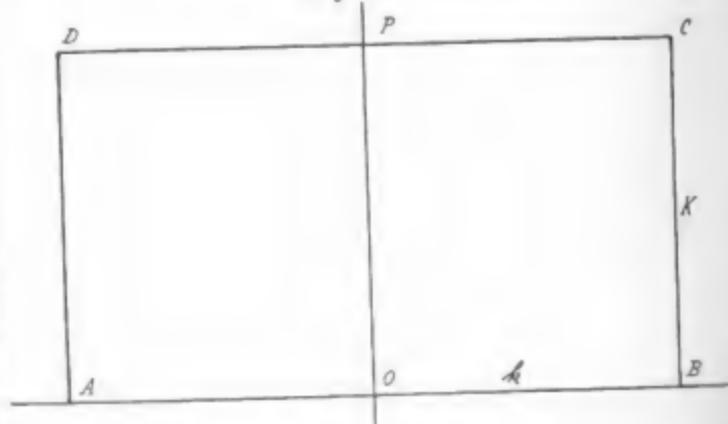
Verhandlungen der v. 15.—21. X 1896 in Lausanne abgehaltenen Konferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Red. v. A. Hirsch. Zugleich mit den Berichten über die Fortschritte der Erdmessung in den einzelnen Ländern während des letzten Jahres. (Deutsch u. französ.). gr. 4°. (318 S. m. Fig. u. 13 Taf. u. Karten.) Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Fig. 1.



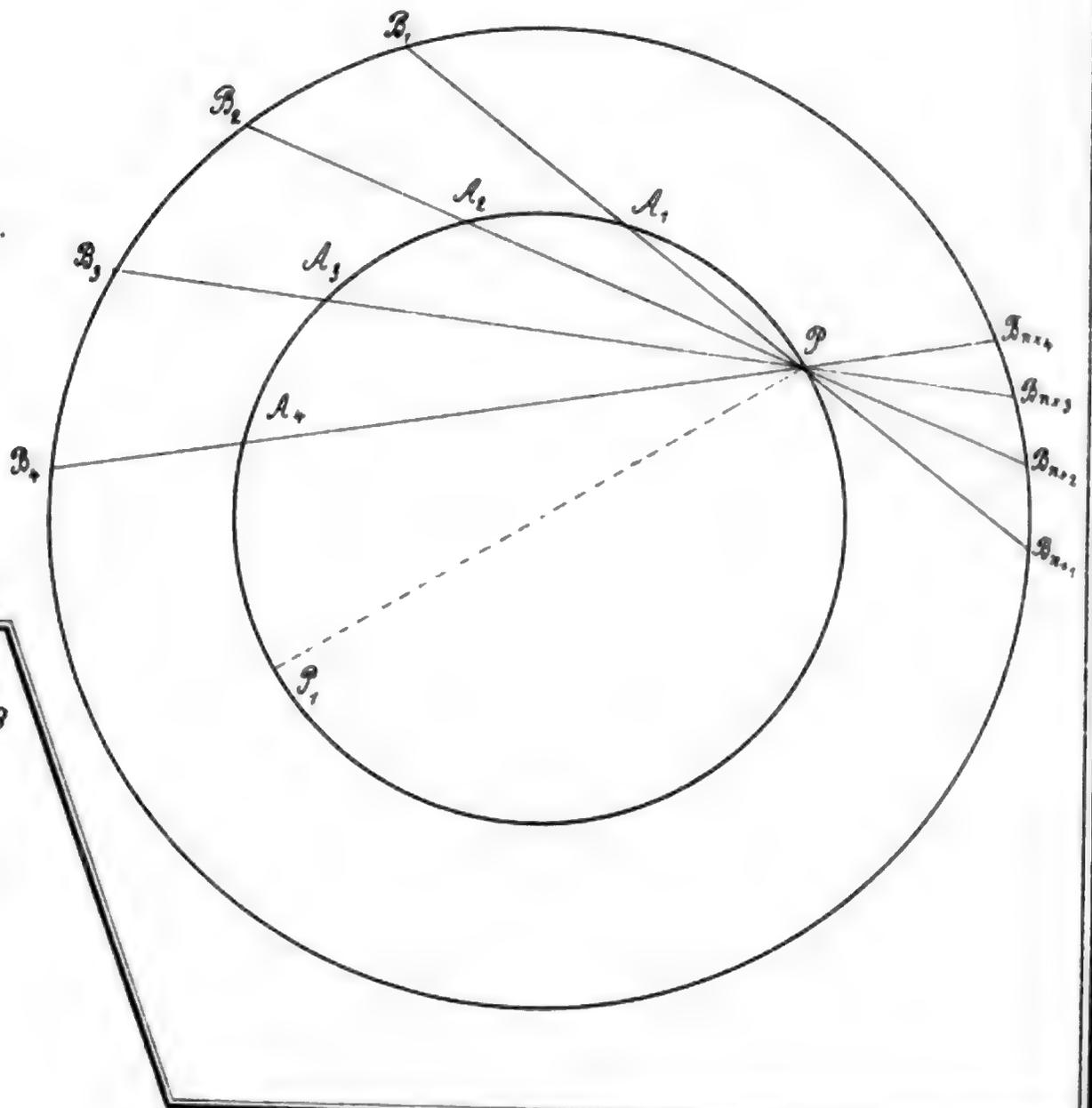
III. 5  
Goniometrie

Fig. 2.



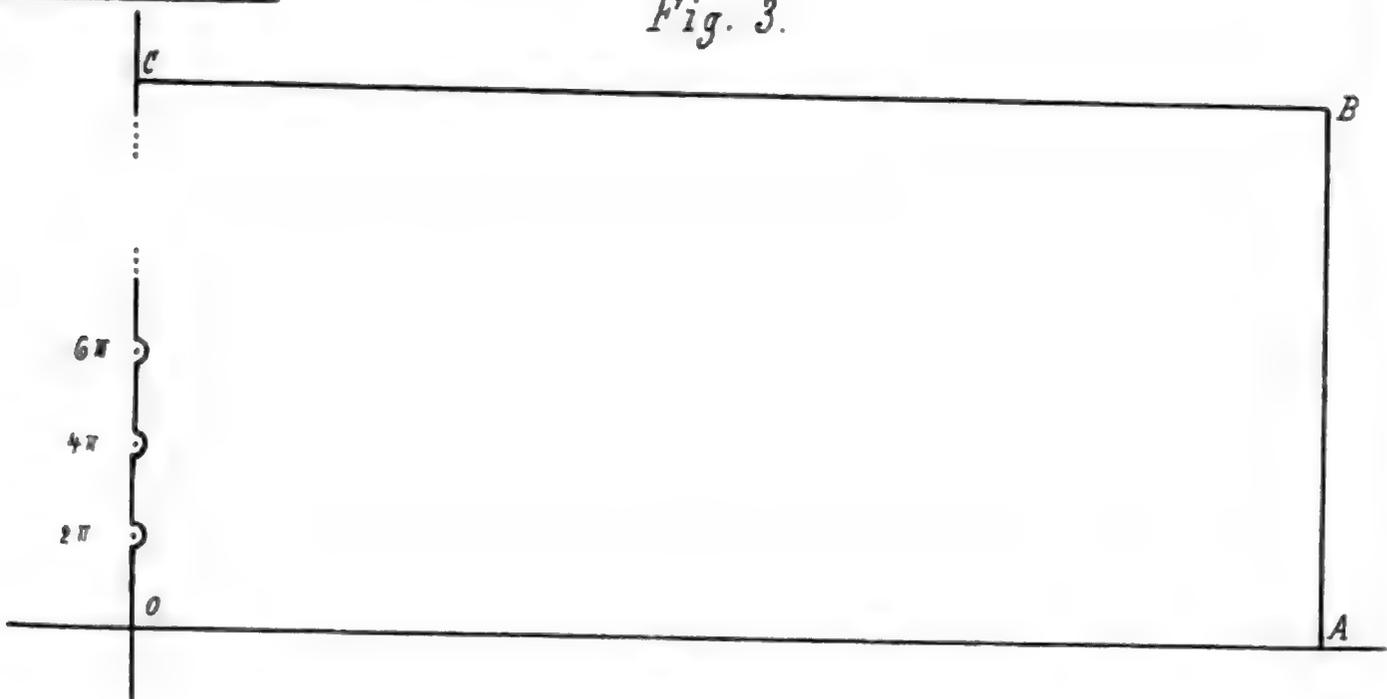
I. Christen: Verwendung des freien Integrationsweges.

Fig. 2.



ITER:  
Relationen.

Fig. 3.



answeges.

0

---

Fig. 1.

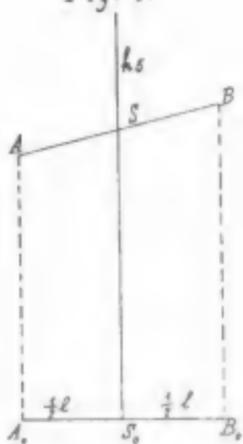


Fig. 2.

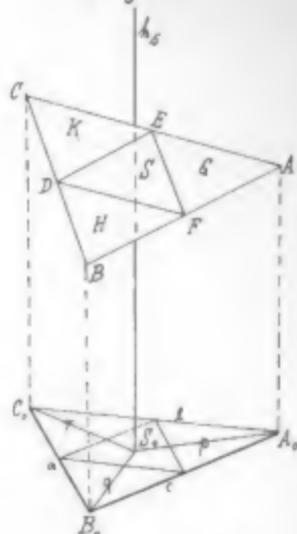


Fig. 6.

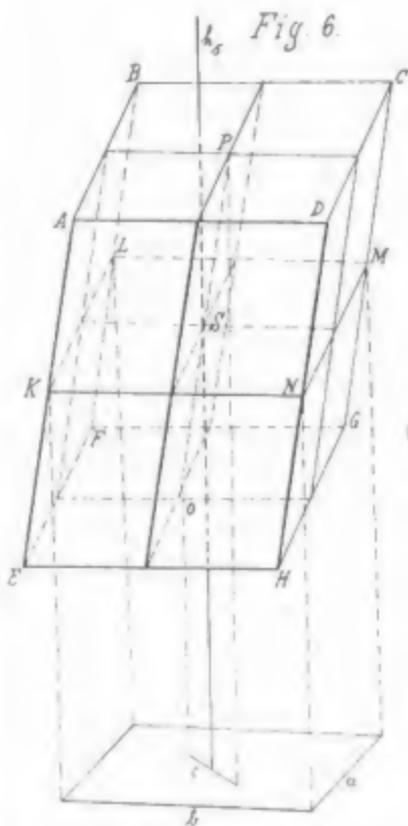
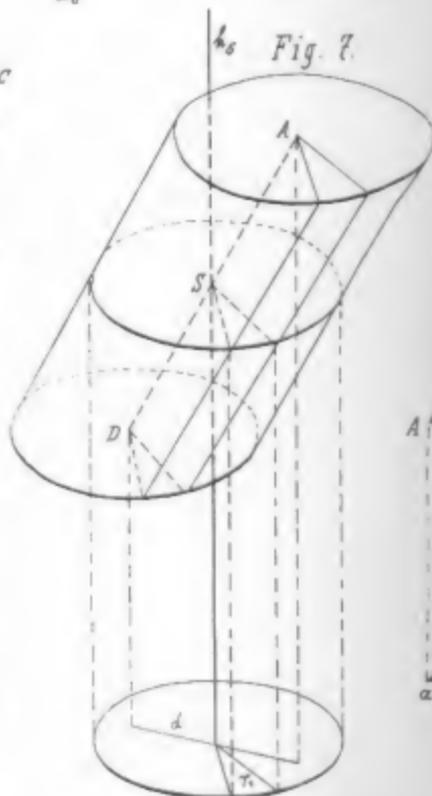


Fig. 7.



II. Rehfeld: Trägheitsmomente.

Fig. 4.

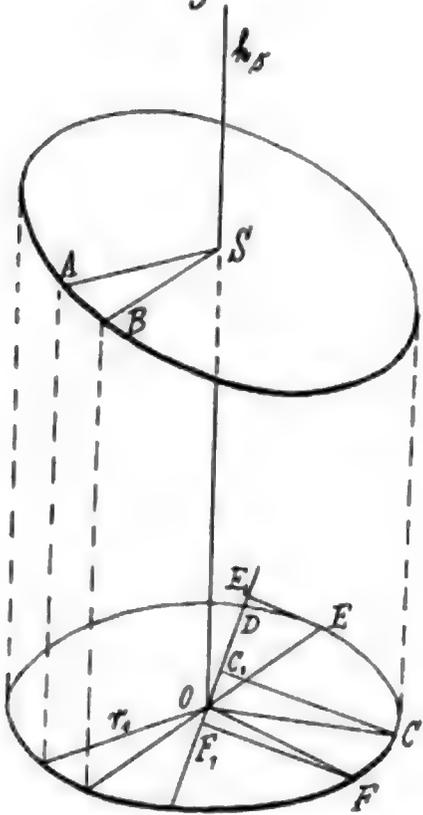


Fig. 5.

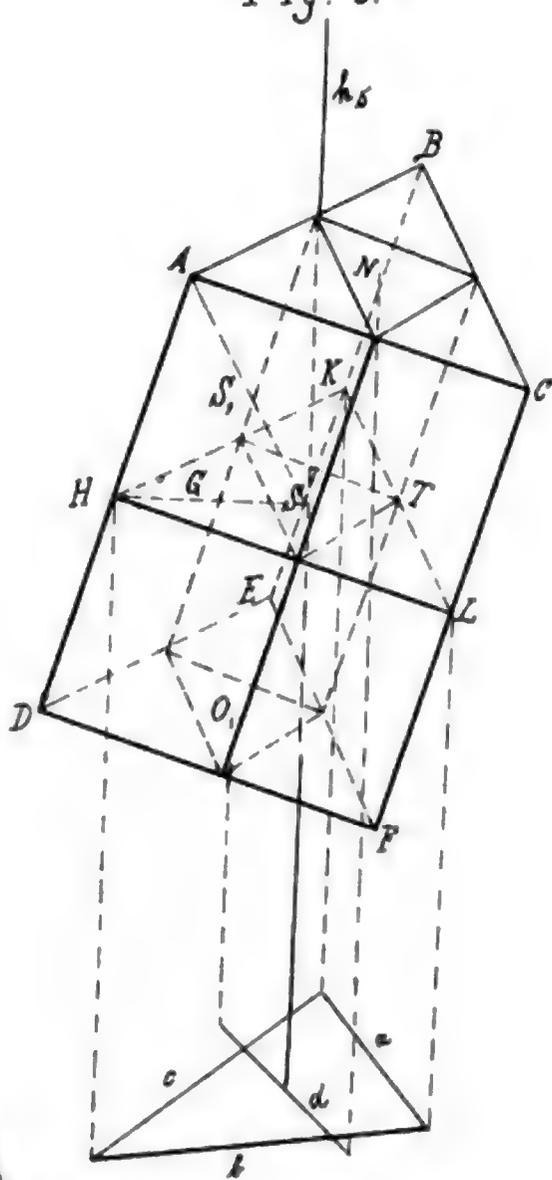


Fig. 9.

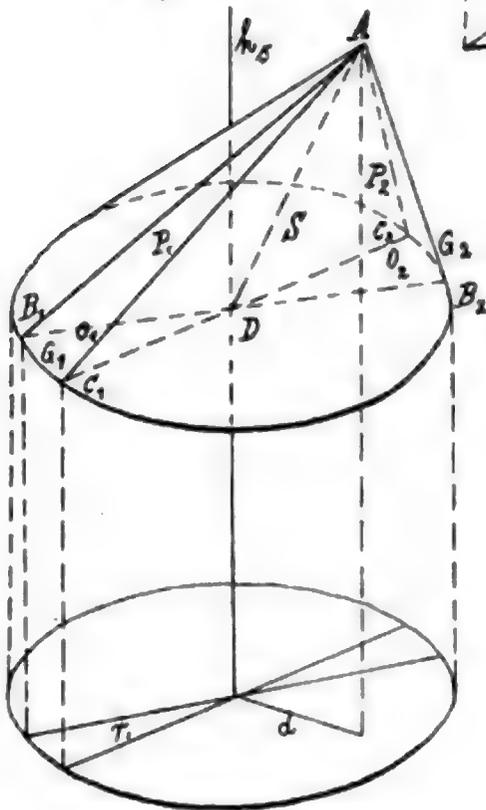
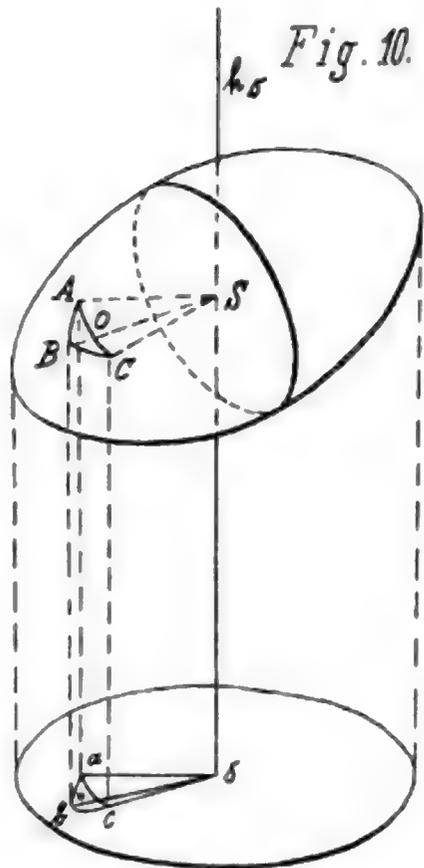


Fig. 10.



# Litterarischer Bericht

## LXII.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

The works of Archimeds. Edited in modern notation with introductory chapters by T. L. Heath, Sc. D. some time Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. University press. London. C. J. Clay. Leipzig, F. A. Brockhaus. 186 + 325 S.

Dies Buch enthält einleitend in vielseitigst umfassender kritischer Behandlung über Archimedes, sein Leben, seine Geistesrichtung und seine Werke, alles, was sich aus vorhandenen Daten ermitteln lässt, dann die englische Uebersetzung seiner erhaltenen Schriften. In gleicher Weise hat der Verfasser die Werke von Apollonius behandelt und bereits herausgegeben. Dem Urteil von Chasles folgend findet er in beiden den in der Neuzeit bedeutungsvollen, hier schon im Altertum hervortretenden Gegensatz, dass Apollonius seine Forschung auf die Geometrie der Form und Lage, Archimedes auf die Geometrie des Masses richtet. Die Einleitung gibt zuerst Notizen aus dem Leben — geboren 287 gestorben 213 v. Chr. in Syrakus, Sohn des Astronomen Pheidias. Eine beträchtliche Zeit verlebte er in Alexandria. Ausser Geometrie und Arithmetik trieb Archimedes auch Mechanik, aber nicht sowol in wissenschaftlichem Streben, sondern zu vorliegenden technischen Zwecken. — Ferner berichtet die Einleitung über Manuscripte, Hauptausgaben, verlorene Werke u. a. ferner über die Beziehungen des Archimedes zu seinen Vor-

gängern. Dann wird das Wesen seiner Arithmetik dargelegt, dann die Probleme besprochen, welche Apollonius und Archimedes mit *μεύσεις* bezeichnen. Das Folgende betrifft die kubischen Gleichungen, Anticipationen der Integralrechnung und die Terminologie. — Die übersetzten Werke des Archimedes sind folgende: Ueber Kugel und Cylinder, 2 Bücher. Ueber Konoide und Sphäroide. Ueber Spiralen. Ueber das Gleichgewicht von Ebenen, 2 Bücher. Der Sandrechner, Quadratur der Parabel. Ueber schwimmende Körper, 2 Bücher, Buch der Lemmata. Das Rinderproblem. Jedes dieser 13 Bücher besteht aus einer Anzahl Sätze und Aufgaben. H.

Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzensdorf. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen. Von Dr. phil. J. H. Graf, ordentl. Professor der Mathematik an der Hochschule in Bern. Mit dem Portrait und dem Facsimile eines Briefes Steiners. Bern 1897. K. J. Wyss. 54 S.

Jakob Steiner, jüngster Sohn des Landwirts und Viehzüchters Niklaus Steiner und Anna Barbara geb. Weber in Utzensdorf (im Tale der Emme, Kanton Bern) ist geboren am 18. März 1796, gestorben 1863. Er verliess 1814 trotz des heftigen Widerstandes seiner Eltern aus Lernbegierde seine Heimat und gieng nach der Anstalt Pestalozzi's in Yverdon, der ihn aufnahm, und wo er  $1\frac{1}{2}$  Jahr als Schüler, dann noch einige Zeit als Lehrer gewesen ist. Von 1818 an setzte er seine Studien in Heidelberg fort, wo er bei Prof. Schweins höhere Analysis hörte, sich aber später mit demselben überwarf und dessen Methode verspottete. Von 1821 bis 1822 war er Lehrer am Werderschen Gymnasium in Berlin, gab jedoch die Stelle wegen des ihm verhassten, von seinem Director eingeführten Lehrbuchs auf. Als Privatlehrer in Berlin gewann er dann hohe Anerkennung beim Prinzen August, Wilhelm von Humboldt und den hervorragendsten Familien, deren Söhne er unterrichtete. 1834 ward er zum ausserordentlichen Professor an der Universität und zum Mitglied der Akademie ernannt. Aus dieser Zeit stammt der grösste und wichtigste Teil seiner litterarischen Productivität. Hervorzuheben ist sein Umgang mit Jacobi, mit dem er in gegenseitig beeinflussender Beziehung stand. Sein späteres Leben verbrachte er zum grossen Teil in der Schweiz, wo er mit Schläfli dauernd wissenschaftlich verkehrte, aber schliesslich sich doch definitiv von ihm trennte. Die vorliegende Lebensbeschreibung ist voll von charakteristischen Zügen. An allen erkennt man eine ganz eigentümliche Geistesrichtung. Er betrachtet seine Sätze nicht als errungen, nicht als hergeleitet nach alten oder neueren Methoden, sondern als

selbstverständlich sich darbietend vermöge einer alles umfassenden und beherrschenden Raumanschauung. Deren immer weiteres Vor- und Eindringen macht den ganzen Fortschritt seiner Erkenntniss aus. So hat er nicht anfangs, sondern erst später die räumlichen Gestalten in sein Gebiet gezogen. Es werden jedoch auch Fälle erwähnt, wo Steiner nach vergeblichem Suchen die Hülfe anerkennen musste, die ihm in analytischer Deduction dargeboten ward, was ihn solange ganz entmutigte, bis es ihm gelang, wenigstens nachträglich seine Anschauung dahin zu ergänzen, dass sie das Vermisste enthielt. H.

Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Oesterreich. Vom Professor Ferdinand Jos. Obenrauch. Brünn 1897. Carl Winiker. 442 S.

Berücksichtigt ist bereits die Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie in Chr. Wiener's Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1884, wenn auch nur in gedrängter Kürze, ferner den Werken von Wilhelm Fiedler, H. Mannheim und A. G. V. Peschka. Es ist unstreitig ein höchst verdienstliches Werk, welches hier die Geschichte der beiden nahe verwandten Zweige der Geometrie für sich in voller Ausführlichkeit und nach allen Gesichtspunkten giebt. Das Buch besteht aus 2 Teilen. Der erste handelt ausschliesslich vom Leben und Wirken Monge's. Alle Angaben über Anbahnung der darstellenden Geometrie von den ältesten Zeiten an werden nur im Laufe der Einleitung gemacht. Gaspard Monge, geboren am 10. Mai 1746 im burgundischen Städtchen Beaume im Departement Côte d'or, erfand die descriptive Geometrie, durfte aber, weil das Geniecorps sie als Staatsgeheimniss betrachtete, 30 Jahre lang nichts darüber veröffentlichen. Erst 1794 ward nach Errichtung der École normale ihm gestattet darüber öffentliche Vorträge zu halten. — Es folgt dann die Gründung der École polytechnique, der weitere Ausbau der darstellenden Geometrie, in der neuern Geometrie, Monge's Infinitesimalgeometrie und sein späteres Leben. — Der 2. Teil geht sehr weit auf die Vorgeschichte der projectiven Geometrie ein. Dann folgt die neue Geometrie in den Werken von Carnot, Brianchon, Poncelet, Gergonne, Möbius, Plücker, Steiner, von Staudt, Hesse, Kummer, Schröter, Reye, Sturm, Wiener, Chasles, Brasseur, de la Gournerie, Mannheim, Cayley, Cremona, Veronese, Segre und Zeuthen. H.

## Methoden und Principien.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik. Von Dr. Ludwig Goldschmidt, mathematischem Revisor der Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha. Hamburg und Leipzig 1897. Leopold Voss. 279 S.

Der Titel des Buchs lässt erwarten, dass es sich zur ersten und Hauptaufgabe machen würde, die unter der Praxis und vielteiligen Anwendung aufgenommenen, dunkel gebliebenen Elemente der Theorie einmal sorgfältig auf feste Begriffe zu reduciren. Das gegenteilige Streben findet man hier durchweg betätigt. Mit wol hundertmal so vielen Worten, als hingereicht hätten, die Sache klar zu stellen, beständig abschweifend und ohne sichtliche Beziehung zum Gegenstande, wird auf den Eindruck hingearbeitet, dass es sich um eine schwierige, streitige, der Logik fremde Sache handele. Alle exacte Aussage wird mit Fleiss gemieden, alles, wonach man des Verständnisses wegen fragen muss, verschwiegen. Das Inhaltsverzeichnis lautet: Einleitung. Die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die gleich wahrscheinlichen Fälle. Das Gesetz der grossen Zahlen; die logische Theorie und dieses Gesetz. Die Bayes'sche Regel. Der Bernoulli'sche Satz und diese Regel. Schlussbetrachtungen. Im Vorwort nennt der Verfasser einige Autoren in Beziehung zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Kant, Kries Lotze, v. Kries, und erklärt sich für oder wider deren Ansichten, ohne von letzteren ein Wort zu sagen, ebenso gibt er an, dass Jakob Bernoulli das Gesetz der grossen Zahlen bewiesen habe; aber in dem 63 Seiten langen Artikel sucht man vergeblich nach einer Aufstellung dieses Gesetzes; ob irgendwo ein vermeintlicher Beweis steht, entdeckt vielleicht noch jemand. Die ganze Abfassung charakterisirt sich durch eine heutzutage ungewöhnliche Ueberschätzung der formalen Logik. Zwar erkennt der Verfasser an, dass sie unzureichend sei; doch meint er nur das Reich der Gefühle mit dem, was sie nicht beherrsche. Es ist aber überhaupt die neue Wissenschaft und Forschung, in der sie bereits bedeutungslos geworden ist. In so fern ist es wol begreiflich, dass die Versation im engen Gebiete formaler Logik gegen sachliche Erfordernisse blind macht, dass also, was oben als Tendenz ausgelegt ward, sich vielleicht durch zu grosse Bevorzugung formaler Logik erklären mag.

Hoppe.

Der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie. Von Dr. K. Traub, Prof. a. D. Jahr 1896. Moritz Schauenburg. 12 S.

Der Verfasser findet, dass der pythagoräische Lehrsatz in einigen Formen ausgesprochen sich gleichlautend auf sphärische und absolute Geometrie übertragen lässt, und hofft durch gegenwärtige Mitteilung Manchen für das Studium der absoluten Geometrie zu gewinnen.

## II.

Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Von Dr. Leo Königsberger, Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg. Mit einem Bildniss Hermann von Helmholtz's. Leipzig 1896. B. G. Teubner. 58 S.

Die in vorliegender Rede enthaltenen Untersuchungen gelten nicht allein den bewährten und daher, woran niemand zweifelt, ewig dauernden Grundlagen jener Wissenschaften, sondern zu noch grösserem Teile den problematischen Grundlagen einiger Zweige derselben, von deren definitiver Feststellung wir gegenwärtig noch weit entfernt sind. In Betreff der erstern ist zu betonen, dass das gesamte Zuwerkegehen vollkommene Freiheit bekundet von den Kant'schen Vorurteilen des absoluten Apriori, des Transscendentalen und der Metaphysik. Die gänzliche Lossagung würde noch entschiedener an den Tag treten, wenn Helmholtz nicht, statt einer nutzlosen Bekämpfung, es klugerweise stets vorgezogen hätte, in respectvoller Ferne an solchen Lehren vorüberzugehen. Wäre die Herrschaft und Präoccupation Kant'scher Irrlehren nicht selbst jetzt noch so gross und verbreitet, so würde man die Forschungswege von Helmholtz nicht sowol für originell, sondern vielmehr für natürlich halten und nicht auf Priorität Gewicht legen wollen in Ideen, mit denen man längst vertraut war, wenn man sie auch nicht mit gleichem Erfolge verkündigt hatte. Dies hat erweiternde Anwendung auf ein Urteil von Königsberger. Ihm zufolge untersuchte Helmholtz nicht mathematische Probleme um ihrer selbst willen mit Anwendung auf die Naturwissenschaften; er holte sie sich vielmehr aus der Beobachtung der Natur zu dem Zwecke, die Probleme der Natur mathematisch zu formuliren. Im Gegenwärtigen aber handelt es sich nicht um mathematische Probleme, sondern um philosophische Fragen der psychischen Genesis des Erkennens. In diesen heisst es, nahm er ein unmittelbares Interesse. Auch hier ist es die Freiheit von Vorurteilen, was von Vielen der Originalität der Entdeckung zugerechnet wird. Zunächst ist es nicht neu, sondern in der Forderung Bako's alle Begriffe zu ihrer scientiven Gültigkeit durch Erfahrung zu begründen enthalten, dass man den Ursprung der Grundbegriffe der Mathematik und Mechanik, in Betreff des Raumes, der Zeit und der

Masse in der Erfahrung gesucht hat. Unterbrochen und beiseite geschoben durch Kant's unwissenschaftliche, aber populäre Lehre vom Apriori ward dann die Untersuchung wieder aufgenommen von Riemann, welcher die unterschiedlichen empirischen Elemente des Raumbegriffs ermittelte. Für ihn war das Problem ein mathematisch logisches. Für Helmholtz war die Aufgabe vorbehalten den exacten Nachweis der Erfahrung durch präzise Experimente zu geben. Der Anfang und das unmittelbare Interesse seiner Tätigkeit war daher auf Beobachtung der Sinnesorgane und ihrer Functionen gerichtet. Diese physiologische Untersuchung eröffnete ihm die Bahn zur Lösung der psychologischen Aufgabe, die Construction des dreifach orthogonalen, homogenen, unendlichen, translocabeln und drehbaren Raumsystems und des Congruenzbegriffs von Seiten des erkennenden Geistes zum Bewusstsein zu führen und die Axiome der Geometrie in Betreff der Geraden, der Ebene, der Parallelen empirisch zu begründen, d. h. auf rein gegebene Tatsachen zurückzuführen. Die Lösung mag unvollendet, zum Teil bestreitbar sein, immer ist doch Helmholtz der erste, der sie ernstlich, mit Bewusstsein der Erfordernisse in Angriff genommen hat. So gilt denn Koenigsberger's charakteristische Bemerkung nicht allein von mathematischen Problemen, sondern auch von einer philosophischen Frage von didaktisch pädagogischer Bedeutung für den mathematischen Schulunterricht. — In der Mechanik handelt es sich um das Princip der summarisch unveränderlichen lebendigen Kraft, anticipirt von Cartesius in voller Allgemeinheit für die gesamten Naturvorgänge, wiewol bei problematisch bleibendem Wesen, begrifflich exact aufgestellt von Leibniz, nach Ergänzung durch das Potential als Magazin der lebendigen Kraft für Bewegung fester Körper (und deren Atome) durch bewiesenen Lehrsatz bestimmt von Huygens, ausgedehnt auf die Wärme von Robert Mayer. Die Existenz dieses in allen Naturvorgängen herrschenden Gesetzes ist also kein Gedanke der Neuzeit. Uebrig blieb und bleibt die Entdeckung und der Nachweis des unveränderlichen Elements in der Hydrodynamik, der Aerodynamik, der Elektrizität, des Magnetismus und dem Lichte. Was Helmholtz für diese Aufgabe geleistet hat, wird im übrigen Teile der Rede dargelegt.

H.

Die Zahl und das Unendlichkleine. Von Dr. Karl Goebel-Soest. Leipzig 1896. Gustav Fock. 47 S.

Der Titel nennt den Gegenstand, über den der Verfasser sich äussern will; was er zu geben gedenkt, sagt der Titel nicht. Die

Anfangsworte der Schrift scheinen die Absicht zu verraten ihn nicht erklären, sondern in mystisches Dunkel hüllen zu wollen. Doch fern von aller täuschenden Kunst setzt sie auseinander, was keinem Rechner unbekannt ist, ohne je die Punkte zu berühren, welche zu principiellen Untersuchungen Anlass geben. Die ganze hinzugefügte Logik besteht im Gegensatz des Allgemeinen und Besondern. Das Motiv der Schrift ist also aus ihr so wenig wie aus dem Titel zu ersehen. Zu erwähnen sind einige historische Angaben betreffend Galilei, Fermat und Newton.

Hoppe.

Kritik der exacten Forschung. Von Friedrich Ego. Gedruckt auf Kosten des Verfassers. Leiden 1897. E. J. Brill. 81 S.

Kritik ist im ganzen Buche nicht zu finden; die eigentümlichen Meinungen des Verfassers werden stets imperatorisch ausgesprochen und nirgends ein Versuch gemacht sie dem Leser überzeugend darzutun. Auch wird dies Verhalten gar nicht verhehlt; denn gleich im Anfang erklärt der Verfasser das Gemüt für den Grund aller Erkenntniss und Richter über dieselbe und äussert sich geringschätzig über die Objectivität des Urteils. Für richtig gilt ihm, was dem Ego zusagt, der stets im Namen aller urteilt. Da nun die Schrift nur beliebige Stücke aus Doctrinen bespricht, die für sich weder instructiv noch anziehend sind, so dürfen wir sie wol für ganz unschädlich halten, nur berechnet auf das Gemüt des Ego als einzigen Lesers.

Hoppe.

Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. [Par G. Burali Forti, Professeur à l'Académie militaire de Turin. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils. 165 S.

„Das Buch enthält eine kurze Darlegung des geometrischen Calculs nebst mehreren Anwendungen auf die elementare differentielle Geometrie. Der geometrische Calcul ist 1679 erfunden von Leibniz, dem ersten, der es für bequem oder notwendig hielt, direct auf die geometrischen Elemente zu operiren, während die analytische Geometrie auf Zahlen operirt, die eine indirecte Beziehung zu den repräsentirten Elementen haben.“ Die Gegenstände sind: die geometrischen Formen, nämlich Definitionen und Regeln des Calculs, Vektoren und ihre Producte, Reduction der Formen, regressive Producte, Coordinaten; variable Formen, nämlich Derivirte, Linien und Enveloppen, Regelflächen, Fresnel'schen Formeln; Anwendungen, nämlich Helix, Regelflächen bezüglich auf eine Curve, orthogonale Trajectorien.

H.

An essay on the foundations of geometry. By Bertrand A. W. Russell. M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. University press. 201 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende. Einleitung, unser Problem definiert durch seine Beziehungen zur Logik, Psychologie und Mathematik. Geschichte der Metageometrie. Kritischer Bericht über einige der Geometrie vorausgehende philosophische Theorien. Die Axiome der projectiven Geometrie, die der metrischen Geometrie, die der Freibeweglichkeit, das Axiom der Dimensionen, das der Entfernung. Philosophische Consequenzen. Der Verfasser ist Anhänger von Kant, dem gegenüber er wenig eigenes Urtheil darbietet. Er lässt es oft bei kurzer Formulirung bewenden, wo eingehende Erörterung erwartet werden durfte. H.

Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. Herausgegeben von A. Pringsheim. Leipzig 1896. Duncker u. Humblot. 60 S.

Daniel Bernoulli, Sohn des Professors der Mathematik Johann Bernoulli, geboren 1700 in Gröningen, ward 1725 Professor in Petersburg, 1733 Professor in Basel, zunächst für Anatomie und Botanik, später auch für Physik, und starb 1782. Die von ihm verfasste, 1738 von der Petersburger Akademie herausgegebene Abhandlung, von welcher hier die Rede ist, hat den Titel: Specimen theoriae novae de mensura sortis, auctore Daniele Bernoulli. Von ihr wird im Vorliegenden eine deutsche Uebersetzung gegeben. Voraus geht eine Einleitung, unterschrieben: Ludwig Fick. Hauptsächlich in letzterer tritt besonders deutlich und auffällig der verhängnissvolle Fehler der Forschung hervor, dass man nach Lösung von Fragen sucht ehe man die Fragen verstanden hat. Seit Jahrhunderten ist die richtige Wertschätzung in Frage, und bis heute hält man es für zu umständlich, und Fick denkt gar nicht daran, die Bedeutungen des Wortes aus den verschiedenartigen Bedürfnissen seiner Anwendung herzuleiten. Er betrachtet noch immer das Wort als Vertreter eines, wenn auch besserungsbedürftigen Begriffs und die Zuziehung zu berücksichtigender Umstände als Fortschritt und Berichtigung. In der That besitzen wir auf gegenwärtigem Standpunkt erst eine Vielheit von Begriffen des Wertes gültig für die respectiven in's Auge gefassten Fälle, deren manche sich vielleicht nachweisbar vereinigen lassen. Fick sieht in Bernoulli's Schrift einen epochemachenden

Fortschritt der Theorie des Wertes über die bisherige, welche auf objectiver Grundlage ruht. Bernoulli selbst legt nur Gewicht darauf, dass seine Theorie neu ist. Neu ist sie durch die Annahme, dass Jeder seinen Gewinn und Verlust nach dessen Quotienten durch sein Vermögen schätzt (nach gleichem Princip, wie später Fechner die Grenze der Empfindbarkeit von Sinnesreizen als den Quotienten des Unterschiedes durch den gesamten Reiz mit Experimenten nachwies). Aber ein Fortschritt der Theorie ist aus der Zuziehung eines subjectiven Elements nicht ersichtlich: es sind eben nur andre Fälle in Betracht gezogen, auf welche der neue Begriff des Wertes passt (sei es dass man fragt, ob oder bei wieviel Einsatz man auf ein gebotenes Spiel eingehen will, oder dass man mit der Spielregel Gimpel zu fangen gedenkt u. s. w.) Auf die Fehler, welchen dadurch Raum gegeben wird, dass man Bernoulli's Hypothese allgemein, mithin auch an unpassender Stelle, wo die Frage mit subjectiver Schätzung nichts zu tun hat, anwendet, wollen wir nicht eingehen, sondern nur einen von Bernoulli selbst begangenen Fehler erwähnen, der an einem Beispiel das Ungenügende der alten Theorie zeigen will. Er lässt wiederholt ein Geldstück werfen, so dass 2 Fälle gleich möglich sind; nach jedem Wurf soll sich der Preis für den glücklichen Wurf von  $a$  an verdoppeln; mit letzterem endet das Spiel. Er behauptet, nach alter Theorie wäre der Wert der Hoffnung offenbar unendlich. Nach einfacher Wahrscheinlichkeitsrechnung ist derselbe

$$= (2^{n-1} \cdot 2^n) = \frac{1}{2} a$$

und  $\frac{1}{2}a$  anfangs einzusetzen. Um den Irrtum zu erklären, könnte man annehmen, Bernoulli habe im Sinne gehabt (wovon er nichts sagt, wie er überhaupt von veränderlichen Werten nie spricht) der Spieler habe nach dem  $m$ ten unglücklichen Wurf seinen Anspruch an einen andern verkauft (auch die Zulässigkeit der Uebertragung durfte nicht verschwiegen werden) Das Spiel wäre dann, vorher um die Einheit  $a$ , von da an in ein ein gleiches um die höhere Einheit

$$b = 2^{m-1} a$$

übergegangen. Ist nun der Käufer kein Freund von hohem Glücksspiel, so kann er sich mit dem ersten Spieler auch auf einen niedern Preis  $c$  einigen, wenn nämlich dieser den gewissen Gewinn der Hoffnung dermassen vorzieht, dass er geru ein Geschenk von  $a-c$  dazu verwendet, die Unlust des Käufer's zu überwinden. So lassen sich in der That subjective Elemente beim Handel mitwirkend denken; nur sind diese ganz verschieden von den in Bernoulli's Hypothese vorausgesetzten. Das angeführte Beispiel zeigt weder einen Mangel der alten Theorie noch eine Besserung durch die neue.

Hoppe.

## Erd- und Himmelskunde.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Par H. Poincaré, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté. Tome II. Methodes de M. M. Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlin. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 479 S.

Der 2. Band enthält folgende Capitel: Formelle Rechnung, Methoden von Newcomb und Lindstedt, Anwendung zur Untersuchung der säcularen Variationen, Anwendung auf das Problem der 3 Körper, Anwendung auf die Bahnen, Divergenz der Reihen von Lindstedt, directe Berechnung der Reihen, anderes Verfahren directer Rechnung, Methoden von Gylden, Fälle linearer Gleichungen, Fälle nicht linearer Gleichungen, Methoden von Bohlin, Reihen von Bohlin, Ausdehnung der Methoden von Bohlin. Die neuen Methoden sind dadurch charakterisirt, dass die säcularen Terme entfernt werden, mithin die Reihen nur periodische Terme haben.

H.

Annuaire pour l'an 1896, pour l'an 1897, pour l'an 1898. Publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris. Gauthier-Villars et fils.

La maison Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1898. — Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements scientifiques qu'on ne trouve que là. Le volume de cette année contient en outre les Notices suivantes: Sur la stabilité du système solaire; par M. H. Poincaré. — Notice sur l'oeuvre scientifique de M. H. Fizeau; par M. A. Cornu. — Sur quelques progrès accomplis avec l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire; par MM. M. Loewy et P. Puiseux. — Sur les travaux exécutés 1897 à l'observatoire du mont Blanc; par M. J. Janssen. — Discours prononcés au cinquantième anniversaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897; par MM. J. Janssen et M. Loewy. In-18 de VI — 806 pages, avec 2 Cartes magnétiques: 1 fr. 50 franco 1 fr. 85).

Gauthier-Villars et fils.

Das erste (für 1896): enthält als Anhang folgende Aufsätze. A. Cornu: Die Fernkräfte und die Undulationen. — Die Arbeiten Fresnel's in der Optik. — De Bernardières: Ueber die Construction der neuen magnetischen Karten des Globus unternommen

unter der Direction des Bureau des Longitudes. — J. Janssen: Ueber eine dritte Besteigung des Gipfels des Montblanc zum Observatorium und die während des Jahres 1895 im Grunde dieses Gebirgs ausgeführten Arbeiten. — Bernardières: Notiz über das Leben und die Arbeiten des Contreadmirals Fleuriais. — J. Janssen und F. Tisserand: Rede gehalten beim Leichenbegängniss von E. Brunner. — Das Annuaire für 1897 gibt im Anhang folgende Aufsätze. F. Tisserand: Notiz über die eigene Bewegung des Sonnensystems. — H. Poincaré: Die kathodischen und die Röntgen-Strahlen. — J. Janssen: Die Epochen in der astronomischen Geschichte der Planeten. — F. Tisserand: Notiz über die 4. Versammlung des internationalen Comites für Ausführung der photographischen Karte des Himmels. — Notiz über die Arbeiten der internationalen Commission der fundamentalen Sterne. — A. Cornu: Rede gehalten beim Leichenbegängniss von Tisserand. — J. Janssen: Arbeiten auf dem Montblanc 1896. H.

Annuaire de l'observatoire de Montsouris pour l'année 1896, p. l'a. 1897, p. l'a. 1898. (Analyse et travaux de 1894 Météorologie). — Chimie. — Micrographie. — Applications à l'hygiène. Paris. Gauthier-Villars. 503 + 664 + 636 S.

Dieses Annuaire enthält ausser dem Kalender, der Auf- und Untergang der Sonne und des Mondes anzeigt, viele tabellarisch aufgestellte physikalische und hygienische Beobachtungsergebnisse bezüglich auf Paris und Frankreich. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

LV.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Dirichlet's, G. Lejeune, Werke hrsg. auf Veranlassg. der köuigl. preuss. Akademie der Wissenschaften v. L. Kronecker. Fortgesetzt v. L. Fux. 2. (Schluss) Bd. gr.4°. (X, 422 S.) Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

Fortschritte der Physik, hrsg. v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. Namensregister nebst e. Sach-Ergänzungregister zu Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887) unter Berücksicht. der in den Bdn. I—XX enthaltenen Autorennamen. Bearb. v. B. Schwalbe. 1. Hälfte. gr.8°. (VII, 640 S.) Berlin, G. Reimer. 30 Mk.

—, dass. i. J. 1891. 47. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8°. (XLII, 752 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 30 Mk. — dass. im Jahre 1896. 52. Jahrg. Ebd. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. gr.8°. (LXX, 476 S.) 20 Mk.; 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. (XLV, 531 S.) gr.8°. 21 Mk.

Haentschel, E., über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Eine historisch-krit. Studie. gr.8°. (8 S. m. 1 Fig.) Leipzig, Dürr'sche Buchh. 40 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Herausg. von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895. (In 3 Hftn.) 1. u. 2. Hft. gr.8°. Berlin, G. Reimer. 19,90 Mk.

Kronecker's, Leop., Werke. Hrsg. v. K. Hensel. 2. Bd. gr.4°. (VIII, 541 S.) Leipzig, Teubner. 36 Mk.

Oswald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 91.  
Dirichlet, G. Lejeune, Untersuchung üb. verschiedene Anwendungen  
der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839—1840). Deutsch  
hrsg. v. R. Haussner. 8°. (128 S.) Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

### Methoden und Principien.

Danmar, Wm., die Schwere, ihr Wesen u. Gesetz. Isaak  
Newton's Irrtum. Das Wesen des Stoffs u. das Gesetz der Natur.  
Begründung der wissenschaftl. Metaphysik. gr.8°. (VII, 128 S. m.  
21 Fig.) Zürich, Verlags-Magazin. 3 Mk.

Drude, P., über Fernwirkungen. gr.8°. (XLIX, 18 S.) Leip-  
zig, Barth. 1 Mk.

Dyck, Walth., üb. die wechselseitigen Beziehungen zwischen  
der reinen u. der angewandten Mathematik. Festrede. gr.8°. (38 S.)  
München, Franz' Verl. 1,20 Mk.

Heinze, u. Hübner, Methodik des Rechnens. Lehrer-Ausg.  
des Rechenbuchs f. einfache Schulverhältnisse (Ausg. D), enth.  
Aufgaben u. Auflösgn. m. method. Anweisgn. u. 90 meist ausgeführten  
Lektionen. gr.8°. (XXIX, 160 S. m. Fig.) Breslau, Goerlich. 1.80 Mk.

Lippmann, Edm., Robert Mayer u. das Gesetz v. der Er-  
haltung der Kraft. gr.8°. (36 S.) Leipzig, Pfeffer. 60 Pf.

Nippoldt, W. A., die Entstehung der Gewitter u. die Prin-  
cipien des Zweckes und Baues der Blitzableiter m. e. Anh. üb. die  
Methoden der Blitzableiterprüfungen. gr.8°. (80 S. m. 6 Abbildgn.)  
Frankfurt a./M. Gebr. Knauer. 2 Mk.

Riecke, Ed., die Principien der Physik u. der Kreis ihrer  
Anwendung. Lex.-8°. (4) S.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.  
30 Pf.

Seeger, Organisation des Unterrichts im Rechnen u. in der  
Arithmetik. gr.8°. (III, 45 S.) Güstrow, Opitz & Co. 50 Pf.

Sinram, A., Fragmente II zum kosmischen Bewegungsgesetz  
(Incitations Theorie) u. zur Mechanik des Himmels. (Berichtigungen  
u. Ergänzungen der Fragmente v. I. V. 1897.) gr.8°. (14 S.) Ham-  
burg, Gräfe & Sillem. 40 Pf.

Streng, Karl, Praktische Anleitung zur Behandlung des  
Rechenunterrichtes in der Volksschule. 2. Bd. Das Rechnen auf  
der Mittel- u. Oberstufe. (4., bzw. 5. bis 8. Schulj), die geometrische  
Formenlehre, sowie die Flächen- u. Körperberechngn. gr.8°. (X,  
436 S. m. Fig.) Wien, Pichler's Ww. & Sohn. 4,60 Mk.

Wachs, D., die Kraft. Eine physikal. Studie. gr.8°. (15 S.)  
Wien, Breitenstein. 35 Pf.

### Lehrbücher.

Bork, H., P. Crantz, E. Haentschel, **Mathematischer Leitfaden f. Realschulen. 2. Tl.: Trigonometrie u. Stereometrie.** gr. 8°. (128 S. m. 2 Fig.) Leipzig, Dürr'sche Buchh. 1,40 Mk.

Bussler, Fr., **die Elemente der Mathematik für höhere Lehranstalten bearb. 2 Thle. 2. Aufl.** gr. 8°. (Mit Fig.) Dresden, Ehlermann. Geb. 1. Pensum f. die Mittelklassen (Quarta bis Untersekunda). (IV, 151 S.) 1,50 Mk. — 2. Pensum für Oberklassen (Obersekunda u. Prima). (IV, 234 S.) 2 Mk. 60 Pf.

Moshammer, Karl, **Hydromechanik. Lehrtext zum Gebrauche an höheren Gewerbeschulen u. Buch zum Selbststudium.** Lex.-8°. (73 S. m. 100 Abbildgn.) Wien, Deuticke. 2 Mk.

### Sammlungen.

Baur, Ludw., **Rechenbuch f. Lehrer u. Lehramtszöglinge. Resultate zu den Aufgaben** gr. 8° (20 S.) Stuttgart, Steinkopf. 40 Pf.

Bussler, Fr., **Mathematisches Übungsbuch. 1. Tl. Für den Gebrauch in den mittleren Klassen höherer Lehranstalten (Untertertia bis Untersekunda) zusammengestellt.** 2. Aufl. gr. 8°. (IV, 88 S.) Dresden, Ehlermann. Geb. 1 Mk.

Dorn's **Aufgaben f. mündliches u. schriftliches Rechnen. Ausg. C. f. höhere Mädchenschulen. Nach den ministeriellen Bestimmungen das Mädchenschulwesen vom 31. V. 1894 bearb. v. A. Elsner u. R. Sandler. Resultate zum 2. — 7. Hft** gr. 8°. Breslau, Handel. 1,30 Mk.

Fink, K., **Sammlung von Sätzen u. Aufgaben zur systematischen u. darstellenden Geometrie der Ebene in die Mittelschule. 3. Kurs.: Ueber die Abbildgn. geometr. Systeme. 4. Kurs.: Einführung in die Grundlehren der projektiven Geometrie. Als Hilfsbuch f. die Schule bearb.** gr. 8°. (XXIV, 268 S. m. 12 Fig.) Tübingen, Laupp, 4 Mk.

Gönnenwein, G., **Rechenbuch. Stufenmässig geordnete Sammlg. von Aufgaben f. das 5. u. 6. Schulj. Schüler-Ausg. 8°. Stuttgart, Lung. Kart. à 35 Pf.; Lehrerausg. à 1,20 Mk.**

Grassmann, R., **Aufgaben zu den Gleichungen 1. Grades m. 1 u. mehreren Unbekanntem. Enth. 970 Aufgaben.** gr. 8°. (24 S.) Stettin, Grassmann. 10 Pf.; Auflösgn. (3 S.) Geb. 40 Pf.

Haberer, Karl, **Rechenbuch f. kaufmännische Fortbildungsschulen u. einklassige Handelsschulen f. Mädchen. 3 Thle.** gr. 8°. Wien, Hölder. Kart. 2,28 Mk.

Hellermann, K., u. L. Krämer, **Aufgaben f. das Kopfrech-**

nen zum Gebrauch f. Lehrer. In 3 Hftn. (Unter-, Mittel- u. Ober-Stufe). 2. Aufl. gr. 8°. Berlin, Oehmigke's Verl. 5,60 Mk.

Hiemes, Karl Heinr., Rechenbuch f. Elementar- u. Volksschulen. gr. 8°. (VI, 117 S.) Kronstadt, Zeidner. Geb. 90 Pf.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlg. 1368—1374. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Klunzinger, K., zweimal 1000 Aufgaben f. das mündliche u. schriftliche Rechnen zum Gebrauch für Schulaspiranten, Landexamenskandidaten, gehobene Oberklassen u. Fortbildungsschulen. Schülerausg. 4. Aufl. 8°. (146 S.) Stuttgart, Lung. Kart. 1,40 Mk.; Lehrerausg. (243 S.) 2,80 Mk.

Küffner, Ed. u. A. l. J. Ruckert, Rechenbuch f. die Volksschule, unter Mitwirkung erfahrener Schulmänner. 4. Lehrerhft. Der Zahlenraum bis zu den Millionen. Zweifach benannte Zahlen m. decimaler Einteilg. 8°. (82 S.) Würzburg, Bucher. 80 Pf.

Lieber, H. u. C. Müsebeck, Aufgaben üb. kubische u. diophantische Gleichungen, Determinanten u. Kettenbrüche, Kombinationslehre u. höhere Reihen. gr. 8°. (V, 129 S.) Berlin, Simion. 2,40 Mk.

Löser, J., praktisches Rechenbuch f. deutsche Schulen. 4. Hft. Jubiläums-Aufl. Lehrerheft. 8°. (100 S. m. Fig.) Weinheim, Ackermann. 1 Mk.

Martus, H. C. E., mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an preuss. Gymnasien u. Realgymnasien gestellten Aufgaben ausgewählt u. mit Hinzufügung der Ergebnisse (II. Tl.) zu e. Übungsbuche vereint. 2 Tle. gr. 8°. Dresden, Koch. 1. Aufgaben. 10. Doppelauf. (XVI, 194 S.) 3,60 Mk.; geb. 4 Mk. 2. Ergebnisse der Aufgaben des I. Teiles. 9. u. 10. Aufl. (276 S.) 4,80 Mk.; geb. 5,20 Mk.

Quitow, W. A., Rechenbuch f. Schulen. Neue Ausg., bearb. v. Thdr. Wilke. Lübeck, Quitow. 1. Tl. Hft. a—c. 8°. 80 Pf. Antworten zum 1. Tl., Hft. b. 8°. (16 S.) 25 Pf.

Reidt, Fdr., Sammlung von Aufgaben u. Beispielen aus der Trigonometrie u. Stereometrie. II. Tl.: Stereometrie. 4. Aufl. Neu bearb. v. A. Much. gr. 8°. (VIII, 194 S.) Leipzig, Teubner. 3 Mk. — Resultate der Rechnungs-Aufgaben. (58 S.) 1 Mk.

Roth, Rich., landwirtschaftliche Berechnungen. Eine Sammlg. v. Aufgaben f. den Unterricht im landwirtschaftl. Rechnen. Für mittlere u. niedere landwirtschaftl. Schulen bearb. gr. 8°. (VI, 103 S.) Chemnitz, Bülz. 1,20 Mk.

Schawen, P., 500 Aufgaben aus dem mathematischen Pensum der Untersekunda. gr. 8°. (28 S.) Halle, Strien. 80 Pfg.; Resultate (nur an Lehrer.) (7 S.) 1 Mk.

Stahel's Sammlung von Prüfungsaufgaben Nr. 2.: Absolutoriaufgaben in Bayern. 1. Hft. Ducrue, Jos., Aufgaben aus der Mathematik u. Naturwissenschaft', gegeben an den humanist. Gymnasien, Real-Gymnasien u. Realschulen Bayerns. Als Uebungstoff f. den Repetitionsunterricht zusammengestellt. 7. Aufl. (Ergänzt bis 1897.) 12°. (III, 124 S.) Würzburg, Stabel. 1 Mk.

Vöhringer, L., Rechenschule. Stufenmässig geordnete Beispielsammlg. f. das mündl. u. schriftl. Rechnen in niederen u. höheren Schulen. III. Bdchn. Das Rechnen mit mehrfach benannten ganzen Zahlen im 4. Schuljahr. 3. Aufl. 8°. (VII, 119 S.) Stuttgart, Lung. Kart. 90 Pf.

Wenzel, Karl, Rechenbuch f. kaufmännische Fortbildungsschulen. Antwortenheft. 1. u. 2. Tl. gr. 8°. (29 u. 40 S.) Hannover, Meyer. à 60 Pf.

### Tabellen.

Biscan, Wilh., Formeln u. Tabellen f. den praktischen Elektrotechniker. Hilfs- u. Notizbuch. Mit Holzsch. u. 4 Taf. 3. Aufl. 12°. (IV, 130 S. m. Notizbuch.) Leipzig, Leiner. Geb. 2 Mk.

Engelmann, Th. W., Tafeln u. Tabellen zur Darstellung der Ergebnisse spectroscopischer u. spectrophotometrischer Beobachtungen. gr. 8°. (4 S. m. 2 Tab. u. 2 farb. Taf. in je 10 Explen.) Leipzig, Engelmann. 1,80 Mk.; 10 Expl. einer Taf. ohne Text u. Tab. 1 Mk.

Hartenstein, H., fünfstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, f. d. Schulgebrauch hrsg. gr. 8°. (III, 123 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 1 Mk. 40 Pf.

Jelinek, Laur., logarithmische Tafeln f. Gymnasien u. Realschulen. 3. Aufl. Sammt Anleitg. gr. 8°. (IV, 157 S.) Wien, Pichler's Ww., Sohn. Geb. 1,50 Mk.

Müller, Carl, Adf, Multiplikations-Tabellen, auch f. Divisionen anwendbar. Bearb. nach e. neuen Anordnung. gr. 8°. (VIII, 201 S. m. 1 Tab. auf Leinw.-Pap.) Karlsruhe, G. Braun. Geb. 3 Mk.

Murai, Heinr., Zinseszinsen-, Einlage-, Renten- u. Amortisations-Tabellen, auf 10 Decimalstellen berechnet. Mit 362 ausgearbeiteten Amortisationsplänen. gr. 8°. (157 u. IV, 344 S.) Berlin, Gesellius. Geb. 20 Mk.

Opus palatinum, Sinus- u. Cosinus-Tafeln von 10' z. 10". Hrsg. v. W. Jordan. gr. 8°. (VII, 270 S.) Hannover, Hahn. 7 Mk.

Person, Benj., Tabellen zur Bestimmung der Trägheitsmomente symmetrischer u. unsymmetrischer beliebig zusammengesetzter Querschnitte für Bauingenieure, Maschineningenieure u. Architekten. gr. 4°. (V, 20 S. m. 5 Fig.) Zürich, Speidel. 2 Mk.

Reinhardt, Karl, Steuerungstabellen für Dampfmaschinen mit Erläuterungen nach den Müller'schen Schieberdiagrammen u. mit Berücksichtigung einer Pleuelstangenlänge gleich dem fünffachen Kurbelradius, sowie beliebiger Exzenterstangenlänge für einfache u. Doppelschiebesteuern. Mit zahlreichen Beispielen. Lex.-8<sup>o</sup> (VIII, 112 S. m Fig.) Berlin, Springer. Geb. 6 Mk.

Sachs, J., Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. gr.fol. Stuttgart, Maier. 50 Pf.

Schmidt, H. C., Zahlenbuch. Produkte aller Zahlen bis 1000 mal 1000. Ein Hilfsrechenbuch das alle Multiplicationen erspart, u. das übrige Zahlenrechnen ausserordentlich abkürzt. Entworfen v. C. Caris. Lex.-8<sup>o</sup>. (VII, 279 S.) Aschersleben, Bennewitz. Geb. 10 Mk.

Schülke, A., vierstellige Logarithmen-Tafeln, nebst mathemat., physikal. u. astronom. Tabellen für den Schulgebrauch zusammengestellt. 2. Aufl. Lex.-8<sup>o</sup>. (IV, 18 S.) Leipzig, Teubner. Kart. 60 Pf.

Schultz, E., vierstellige mathematische Tafeln. (Ausg. A.) für gewerbliche Lehranstalten. 2. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (V, 80 S.) Nebst Anleitung zum Gebrauche der mathemat. Tabellen in den techn. Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. 2. Aufl. 16<sup>o</sup>. (31 S.) Essen, Baedeker. Geb. 1,20 Mk.

—, dass. (Ausg. B.) f. höhere Schulen. 2. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (VIII, 46 u. 80 S.) Ebd. Geb. 1 Mk.

—, mathematische u. technische Tabellen f. Handwerker- u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (VIII, 64 S.) Ebd. Geb. 60 Pf.

—, vierstellige Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen u. der Winkelfunktionen zum Gebrauche an Gymnasien. gr.8<sup>o</sup>. (IV, 80 S.) Ebd. Geb. 80 Pf.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Blanke, W., Rechenschule. 2. Hft. Das Rechnen mit benannten Zahlen. 3. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (IV, 64 S.) Bremen, Kaiser. Geb. 65 Pf.

Büttner, A., Kopfrechenschule. 2. Tl. Rechenstoffe f. die Oberstufe mehrklass. Schulen, sowie f. Präparandenanstalten u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. 8<sup>o</sup>. (110 S.) Leipzig, Hirt & Sohn. Geb. 1,25 Mk.

Feller, F. E. u. C. G. Odermann, das Ganze der kaufmännischen Arithmetik zum 10. Male bearb. v. Carl Gust. Odermann. 17. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (X, 467 S.) Leipzig, O. A. Schulz Verl. 4,50 Mk. Auflösungen der Übungsaufgaben (20 S.) 60 Pf.

Fricke, R. u. Fel. Klein, Vorlesungen üb. d. Theorie der

automorphen Functionen. 1. Bd. Die gruppentheoret. Grundlagen. gr. 8°. (XIV, 634 S. m. 192 Fig.) Leipzig, Teubner. 22 Mk.

Hintz, O., grosser Rechenmeister. Eine gründliche Unterweisung in der gesamten Rechenkunst. Zum Selbstunterricht, sowie zum Gebrauche in Fortbildungsschulen hrsg. 8°. (XI, 515 S. m. 55 Fig.) Berlin, Friedberg & Mode. 3 Mk.

—, kleiner Rechenmeister. Praktische Unterweisung in der Rechenkunst. Zur gründl. Selbstbelehrg. f. jedermann, insbesondere f. Gewerbetreibende, Landwirte, Militärpersonen, Beamte etc. sowie zum Gebrauche in Fortbildungsschulen hrsg. 8°. (VI, 249 S.) Ebd. 1,80 Mk.

Klein, F., ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I. u. II. Vorlesung. 4°. I. Geh. im Wintersemester 1895-96. Ausgearb. v. A. Sommerfeld. (V, 391 autogr. S. m. Fig.) II. Geh. im Sommersemester 1896. Ausgearb. v. A. Sommerfeldt u. Ph. Frutwängler. (V, 354 autogr. S.) Leipzig, Teubner. 14,50 Mk.

Krause, Mart., Theorie der doppelperiodischen Functionen e. veränderlichen Grösse. 2 (Schluss-)Bd. gr. 8°. (XII, 306 S.) Ebd. 12 Mk.

Kreibig, Jos. Edm., Leitfaden des kaufmännischen Rechnens f. zweiklassige Handelsschulen. gr. 8°. (VI, 287 S.) Wien, Hölder. Kart. 2,64 Mk.

Küpper, Karl, die primitiven u. unprimitiven Specialgruppen auf  $C_p^n$ . gr. 8°. (14 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Láska, W., Beitrag zur Integration der numerischen Differential-Gleichungen. gr. 8°. (10 S.) Ebd. 20 Pf.

Lerch, M., sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales Eulériennes. gr. 8°. (11 S.) Ebd. 20 Pf.

Loria, Gino, Integrali Euleriani e spirali sinusoidi. gr. 8. (6 S.) Ebd. 20 Pf.

Mertens, F., über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. gr. 8°. (33 S.) Wien, Gerold's Sohn. 70 Pf.

—, über e. algebraischen Satz. gr. 8°. (9 S.) Ebd. 30 Pf.

—, über e. asymptotischen Ausdruck. gr. 8°. (11 S.) Ebd. 30 Pf.

Pleskot, Ant., über die Grenzen der Wurzeln e. Gleichung m. nur reellen Wurzeln. gr. 8°. (9 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Rogel, Frz., combinatorische Beziehungen zwischen Summen von Teilerpotenzen. gr. 8°. (9 S.) Ebd. 20 Pf.

Stolz, O., zwei Grenzwerte, v. welchen das obere Integral e. besonderer Fall ist. gr. 8°. (15 S.) Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Studnička, F. J., Neuer Beitrag zur Theorie der Potenz- u. Kombinations-Determinanten. gr. 8°. (16 S.) Prag, Rivnáč. 24 Pf.

Traber, W. L., Algebra. Ein Lehrheft f. Lehrer u. Schüler techn. u. gewerbl. Lehranstalten. Kurz u. leicht fasslich zusammengestellt. 2 Thle. gr. 8°. Giessen, Balsler. Geb. 1,80 Mk.

Würsdörfer, J., Strömungen aus dem Gebiete des Rechenunterrichts m. besonderer Berücksichtigung der „Sachgebiete des Rechnens“. Vortrag. gr. 8°. (33 S.) Stuttgart, Süddeutsche Verlagsbuchh. 50 Pf.

Zindler, Konr., über die Differentiation mehrfacher Integrale nach e. Parameter, v. dem auch die Grenzen abhängen. gr. 8° (6 S.) Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

### Geometrie.

Binder, Wilh., die Undulationen ebener Curven  $C^4_6$ . (1. Mitteilg.) gr. 8°. (28 S. m. 12 Taf.) Wien, Gerold's Sohn. 1,40 Mk.

Dietsch, Chrph., Leitfaden der darstell. Geometrie. Mit 88 in den Text eingedr. Fig. u. sehr vielen Aufgaben. 3. Aufl. gr. 8°. (IV, 152 S.) Leipzig, Deichert Nachf. 2,20 Mk.

Dobriner, Herm., Leitfaden der Geometrie f. höhere Schulen. Mit 375 z. Tl. farb. Fig. gr. 8°. (XV, 139 S.) Leipzig, Voigtländer. 2,40 Mk.

Girndt, Mart., Raumlehre f. Baugewerbeschulen u. verwandte gewerbliche Lehranstalten. 1. Tl.: Lehre v. den ebenen Figuren Mit 276 Fig. im Text u. 227 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. gr. 8°. (VII, 99 S.) Leipzig, Teubner. Kart. 2,40 Mk.

Holl, W., Lehrbuch der Geometrie. Die Lehre v. den geometrischen Raumgrößen in geeigneter Verbindung mit Zeichnen u. Rechnen. 3. Aufl. v. K. Holl. 8°. (IX, 131 u. 76 S. m. Fig.). Stuttgart, Kohlhammer. Kart. 1,80 Mk.

Kohn, Gust., über räumliche Poncelet'sche Polygone. gr. 8°. (7 S.) Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

Molke, Roman, über diejenigen Sätze Jacob Steiner's, welche sich auf die durch e. Punkt gehenden Transversalen e. Kurve  $n$ ter Ordnung beziehen. gr. 8°. (81 S.) Breslau, Schletter. 1 Mk.

Pözl, Wenzlaus, Elemente der darstellenden Geometrie, zum Schulgebrauch zusammengestellt. I Tl.: Geradlinige ebene Gebilde. Neue [Titel-]Ausg. gr. 8°. (VI, 60 S. m. 81 Fig.) München, Th. Ackermann. 1,20 Mk.

Pyrkosch, Rhld., über Poncelet'sche Dreiecke, besonders solche, welche confocalen Kegelschnitten ein- u. umgeschrieben sind. gr. 8°. (61 S. m. 4 Fig.) Breslau, Schletter. 80 Pf.

Rothe, Rud., Untersuchungen üb. die Theorie der isothermen Flächen. Diss. gr.4<sup>o</sup>. (42 S.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 8. Tl.: Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis. Bearb. nach System Kleyer. gr.8<sup>o</sup>. (VII, 226 S. m. 135 Fig. u. 1 Tab.) Stuttgart, Maier. 5 Mk.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1. Tl.: Speciell darstell. Geometrie. Mit 183 Fig. 3. Aufl. gr.8<sup>o</sup>. (IV, 154 S.) Dresden. Kühnemann. 3,60 Mk.

Tengler, Frz., Construction der conjugirten Durchmesser, resp. Achsen eines Kegelschnittes, der einem gegebenen Polar reciprok ist. gr.8<sup>o</sup>. (12 S.) Klagenfurt, Kleinmayr. 1 Mk.

Waelsch, Emil, über Flächen mit Lionville'schem Bogenelement. gr.8<sup>o</sup>. (6 S.) Wien, C. Gerold's Sohn. 20 Pf.

Walter, Alois, über e. Satz von Chasles u. üb. dessen Zusammenhang m. der Theorie der Momentanaxe. gr.8<sup>o</sup>. (13 S.) Leoben, Nüssler. 1 Mk.

### Trigonometrie.

Brücklen, O., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit Beispielen u. 280 Uebungsaufgaben f. höhere Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. 8<sup>o</sup>. (VII, 122 S. m. 4 Fig.) Heilbronn, Schröder & Co. Geb. 1,50 Mk.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Dreiecknetz, das schweizerische, (der internationalen Erdmessung), hrsg. v. der schweizer. geodät. Kommission. 7. Bd.: Messerschmidt, J. B., Relative Schwerebestimmungen. 1. Tl. Im Auftrage ausgeführt u. bearb. gr.4<sup>o</sup>. (IV, 216 S. m. 3 Taf.) Zürich, Fäsi & Beer. 10 Mk.

Höhenbestimmungen, trigonometrische u. barometrische, (Normalnull-Höhen) in Württemberg, bezogen auf den einheitlich deutschen Normalnullpunkt. Donaukreis. 14. Hft. Oberamtsbez. Ulm. Bearb. v. C. Regelman. Hrsg. v. dem k. statist. Landesamt. gr.8<sup>o</sup>. (38 S.) Stuttgart, Lindemann. Kart. 50 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Bd.: Feld- u. Land-Messg. 5. Aufl. Mit 635 Zeichngn. im Text. 2. Lfg. gr.8<sup>o</sup>. (XII u. S. 417–785 u. Anh. 47 S.) Stuttgart, Metzler's Verl. 8,20 Mk. (II. Bd. kplt. 16,20 Mk.)

Landes-Triangulation, die königl. preussische. Hauptdreiecke. 9. Thl. A. Die rheinisch-hess. Dreieckskette. — B. Das Basisnetz bei Bonn. — C. Das niederrhein. Dreiecksnetz. Gemessen u. bearb. v. der trigonometr. Abtheilg. der Landesaufnahme. Mit e. Uebersichtstaf. u. 19 Skizzen. Lex. 8<sup>o</sup>. (XII, 484 S.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 15 Mk.

Láska, W., über Hauptgleichungen der Geodäsie. gr. 8<sup>o</sup>. (13 S.) Prag, Rivnáč. 20 Pf.

Schreiber, O. die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abtheilg. der Landesaufnahme. Lex.-8<sup>o</sup>. (IV, 99 S.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 3 Mk.

Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes. Kühnen, Fr., die Vermessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin u. Bonn, ausgeführt durch das geodät. Institut. Unter Mitwirkung v. R. Schumann bearb. gr. 4<sup>o</sup>. (IV, 121 S. m. 4 Taf.) Berlin, Stankiewicz. 9 Mk.

### Mechanik.

Boltzmann, Ludw., Vorlesungen üb. die Principe der Mechanik. (In 3 Thln) I. Thl., enth. die Principe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integrirt werden, welche Variationen der Coordinaten od. ihrer Ableitgn. nach der Zeit enthalten. gr. 8<sup>o</sup>. (X, 241 S. m. 16 Fig.) Leipzig, Barth. 6 Mk.

Klein, F. u. A. Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels. 1. Hft. Die kinemat. u. kinet. Grundlagen der Theorie.. gr. 8<sup>o</sup>. (196 S.) Leipzig, Teubner. 5,60 Mk.

Lauenstein, R., die graphische Statik. Elementares Lehrbuch f. techn. Unterrichtsanstalten u. zum Gebrauch in der Praxis. 4. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VI, 235 S. m. 255 Abbildgn.) Stuttgart, Bergsträsser. Geb. 6 Mk.

Schwartze, Thdr., neue Elementar-Mechanik f. technische Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. Mit. e. Vorwort v. F. Reuleaux. 8<sup>o</sup>. (XVI, 359 S. m. 212 Abbildgn.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 4,80 Mk.

Weber's illustr. Katechismen. Nr. 70. Huber, Ph., Katechismus der Mechanik. 6. Aufl., neu bearb. v. Walth. Lange. Mit 196 in den Text gedr. Abbildgn. (XV, 271 S.) 12<sup>o</sup>. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 3,50 Mk.

Weisse, H., das Flug-Gesetz als Grundlage zur Lösung des Flug-Problems im Sinne des Buttenstedt'schen Princips. Mit 1 Fig.-Taf. gr. 8<sup>o</sup>. (45 S.) Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk.

Wilczynski, E. J., Hydrodynamische Untersuchungen u. Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Diss. gr.8°. (34 S.) Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk.

### Technik.

Anleitung zum Bau elektrischer Haustelegraphen-, Telephon- u. Blitzableiter-Anlagen. Hrsg. v. der Aktiengesellschaft Mix & Genest. 4. Aufl. gr.8°. (XV, 382 S. m. 528 Abbildgn.) Berlin, Polytechn. Buchh. A. Seydel. 4,50 Mk.

—, praktische, zur Anlage v. Blitzableitern. Mit 26 Abbildgn. in Holzschn. 3. Aufl. gr.8°. (44 S.) Leipzig, Leiner. 60 Pf.

Bibliothek, elektrotechnische. 11. Bd. Urbanitzki, Alf., die elektrischen Beleuchtungs-Anlagen m. besond. Berücksicht. ihrer praktischen Ausführung. Mit 113 Abbildgn. 3. Aufl. (VIII, 240 S.) 8°. Wien, Hartleben. 3 Mk.

Encyklopaedie der Photographie. 27.—29. Hft. gr.8°. Halle, Knapp. 27. Mercator, G., die Diapositivverfahren. Praktische Anleitung zur Herstellg. v. Fenster-, Steroscop- u. Projektionsbildern mittels älterer, neuerer u. neuester Druckverfahren. (V, 93 S.) 2 Mk. — 28. Büttner, O. u. K. Müller, Technik u. Verwerthung der Röntgen'schen Strahlen im Dienste der ärztlichen Praxis u. Wissenschaft. Mit 29 in den Text gedr. Abbildgn. u. 5 Taf. (V, 146 S.) 3 Mk. — 29. David, Ludw., die Moment-Photographie. Mit 122 Textbildern. gr.8°. (VIII, 241 S.) 8 Mk.

Ernecke, Erich, über elektrische Wellen u. ihre Anwendung zur Demonstration der Telegraphie ohne Draht nach Marconi. Experimentalvortrag. gr.8. (15 S. m. 12 Abbildgn.) Berlin; Gaertner. 80 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Berlin, Springer. 9. Jahrg. 1895. 2. Hft. 5 Mk. 11. Jahrg. 1897. 1. Hft. 5,60 Mk.

Gaisberg, S. Taschenbuch f. Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen. 14. Aufl. 12°. (VIII, 203 S. m. Fig.) München, Oldenbourg. Geb. 2,50 Mk.

Grossmann, Ludw., die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft u. Versicherungstechnik. 9. Lfg. gr.8°. (Suppl.-Bd. VII, 80 S.) Wien, (III. Sofienbrückeng. 14) Selbstverlag. 5 Mk.

Grünwald, E., die Herstellung u. Verwendung der Akkumulatoren in Theorie u. Praxis. Ein Leitfaden. 2. Aufl. 12°. (VI, 154 S. m. 83 Abbildgn.) Halle, Knapp. 3 Mk.

Gümbel, L., das Stabilitätsproblem des Schiffbaues. Mit 28 Textfig. u. 6 lith. Taf. gr. 8° (VI, 49 S.) Berlin, Siemens. 2,40 Mk.

Hartmann, Konr. u. J. O. Knoke, die Pumpen. Berechnung u. Ausführung der f. die Förderung v. Flüssigkeiten gebräuchl. Maschinen. 2. Aufl. gr. 8°. (IX, 666 S. m. 664 Fig. u. 6 Taf.) Berlin, Springer. Geb. 16 Mk.

Holzt, A., Elektrotechniker. 24. Hft. Leipzig, Schäfer. 75 Pf.

Jungelaus, H. A., Magnetismus' u. Deviation der Compasse. 2. Aufl. Anhdazu, Ueber die Einwirkg. der elektr. Licht- u. Kraftübertragungs-Anlagen in Schiffen auf den Compass. 8°. (24 S.) Bremerhaven, Schipper. 6) Pf.

Karmarsch, Karl, Handbuch der mechanischen Technologie. In 5. Aufl. hrsg. v. E. Hartig 6. Aufl. hrsg. v. Herm. Fischer. 14. Lfg., bearb. v. Herm. Fischer u. Ernst Müller gr. 8°. (3. Bd. S. 1151–1296 m. Abbildgn.) Berlin, W. & S. Loewenthal. 5 Mk.

Lewerenz, Ernst, Hilfsbuch f. die Telegraphen- u. Fernsprechtechnik. Unter besonderer Berücksichtigung der Telegraphen- u. Fernsprecheinrichtungen der deutschen Reichs-Post- u. Telegraphenverwaltung. Mit 67 in den Text gedruckten Abbildungen u. 4 farbigen Tafeln. 8°. (XI, 134 S.) Berlin, Springer. Geb. 4 Mk.

Liesegang, R. Ed., die Entwicklung der Auscopir-Papiere. gr. 8°. (60 S.) Düsseldorf, Liesegang. 1 Mk.

Lolling, Heiko, Konstruktionsblätter praktisch ausgeführter Maschinenanlagen, nebst erläut. Text u. elementar gehaltenen Berechnung als Unterlage f. prakt. Ausführgn. techn. Lehranstalten u. zum Selbstunterricht hrsg. 1. Tl. Dampfkessel- u. Dampfkesselanlagen. Fol. (III, 33 S. m. 16 Taf. in Aupeldruck.) Köln, Neubner, In Mappe 3,60 Mk.

Lueger's, O., Lex. d. Technik. 25. u. 26. Abthlg. Stuttgart, Deutsche Verlags Anstalt. à 5 Mk.

Luxenberg, M., die Bogenlicht-Schaltungen u. Bogenlampen-Gattungen. 2. Aufl. gr. 8°. (51 S. m 4 Taf.) Leipzig, Leiner. 2,50 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 23. Lfg. Jena, Costenoble. 3 Mk.

—, die Kraftübertragung auf weite Entfernungen u. die Konstruktion der Triebwerke u. Regulatoren. 2. Aufl. v. Jos. Krämer. 1. Bd. gr 8° (387 S. m. 30 Taf.) Ebd 18 Mk.

Pechan, Jos, Berechnung der Leistung u. des Dampfverbrauches der Zweicylinder-Dampfmaschinen zweistufiger Expansion. gr. 8°. (XV, 289 S. m. 14 Fig. u. 48 Tab.) Wien, Deuticke. 8 Mk.

Rejtó, Alex., die innere Reibung der festen Körper als Beitrag zur theoretischen mech. Technologie. Aus dem Ung. übers. v. Karl Gaul. gr. 8°. (VII, 111 S. m. 22 Taf.) Leipzig, Felix. 7 Mk.

Schenkel, Raim., der überhitzte Dampf. Darstellung seiner ausschliessl. Anwendg. in den gegenwärt. u. zukünft. Dampfbetrieben. gr. 8°. (V, 132 S.) Wien, Spielhagen & Schurich. 2,80 Mk.

Schiemann, Max, Bau u. Betrieb elektrischer Bahnen. Anleitung zu deren Projektierg., Bau u. Betriebsführg. Strassenbahnen. Mit 364 Abbildgn., 2 photo-lith. Taf., 3 Taf. Diagramme u. mehreren Fig.-Taf. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 392 S.) Leipzig, Leiner. 12 Mk.

Schmidt, Geo., die Wirkungsweise, Berechnung u. Konstruktion der Gleichstrom-Dynamomaschinen u. Motoren. Mit 204 Abbildgn., 33 Taf. Konstruktionsskizzen u. 1 Diagrammtaf. gr. 8°. (VIII, 272 S.) Ebd. 8,50 Mk.

Sicherheitsregeln f. elektrische Hochspannungs-Anlagen, hrsg. vom Verband deutscher Elektrotechniker. 12°. (23 S. m. Fig.) Berlin, Springer. Kart. 50 Pf.

Tuma, Jos., eine Quecksilberluftpumpe. gr. 8°. (8 S. m. 4 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

Unterrichtsbriefe d. Elektrotechnik. 11.—20. Hft. Potsdam, Bonness & Hachfeld. à 60 Pf.

Vogel, H. W., Handbuch der Photographie. 4. Aufl. 4 Thle., enth. die photograph. Chemie, Optik, Praxis u. Kunstlehre. III. Thl. Die photograph. Praxis. 1. Abthlg.: Die photograph. Arbeitsräume u. Geräte. Der photograph. Negativprozess m. Kollodium u. Galaline-Emulsion. gr. 8°. (X. 310 S. 207 Illustr.) Berlin, Schmidt. 8 Mk.

Voit, E. u. C. Heinke, elektrotechnisches Praktikum. Hilfsbuch f. Studierende der Elektrotechnik. 2. Thl. Heinke, C., Wechselstrommessungen u. magnetische Messungen. gr. 8°. (XXIII, 200 S. m. 148 Fig.) Leipzig, Hirzel. Geb. 8 Mk.

Was brauche ich zum Photographieren? Leitfaden. gr. 8°. (IV, 84 S. m. Abbildgn. u. 1 Taf.) Düsseldorf, Liesegang. 75 Pfg.

Wiedemann, Eilh. u. Herm. Ebert, Physikalisches Praktikum m. besond. Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden. 3. Aufl. gr. 8°. (XXV, 490 S. m. 316 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

### Optik, Akustik und Elasticität.

Exner, Frz. u. E. Haschek, über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. Wien, Gerold's Sohn. VII. Mittheilg. (enth. die Spectra v. *Pb*, *Zn*, *Sn*, *Cd*, *Al*, *Mg*). gr. 8°. (15 S. m. 6 Taf.) 1,90 Mk. VIII. Mittheilg. (enth. die Spectra v. *Te*, *Hg*, *Bi*, *Sb*, *C*). gr. 8°. (20 S. m. 2 Taf.) 1 Mk. IX. Mitth. (enth. die Spectra v. *K*, *Na*, *Ba*, *Bo*, *Fe*). gr. 8°. (27 S. m. 2 Taf.) 1,10 Mk.

Launstein, R., die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch f. den Schul- u. Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst e. Anh., enth. Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge u. Kreisinhalte. 4. Aufl. gr 8°. (VI, 153 S. m. 9) Abbildgn.) Stuttgart, Bergsträsser. 3,50 Mk.; geb. 4,50 Mk.

Lommel, E., Theorie der Dämmerungsfarben. gr. 4°. (60 S. m. 3 Fig.) München, G. Franz's Verl. 2,50 Mk.

Schweidler, A., über Rotationen im homogenen, elektrischen Felde. gr. 8°. (7 S.) Wien, Gerold's Sohn. 20 Pf.

### Erd- und Himmelskunde.

Anleitung zur Messung u. Aufzeichnung der Niederschläge. Hrsg. vom Königl. preuss. meteorologischen Institut. 3. Aufl. Lex.-8°. (12 S. m. 3 Holzschn.) Berlin, Asher & Co. 60 Pf.

Beobachtungsergebnisse der königl. Sternwarte zu Berlin. 7. Hft. Marcuse, Adf., Photographische Bestimmungen der Polhöhe. (29 S. m. 3 Fig.) gr. 4°. Berlin, Dümmler's Verl. 3 Mk.

Bussler, Fr., die Elemente der mathematischen u. der astronomischen Geographie. Für die Prima höherer Lehranstalten bearb. gr. 8°. (VI, 71 S. m. 24 Fig. u. 1 Sternkarte.) Dresden, Ehlertmann. Geb. 1,50 Mk.

Cohn, Berth., über die Gauss'sche Methode, aus den Beobachtungen dreier gleicher Sternhöhen die Höhe, Zeit u. Polhöhe zu finden u. praktische Hilfsmittel zu ihrer Anwendung. gr. 4°. (70 S. m. Fig., 2 Karten u. 2 Transparenten.) Strassburg, Singer. 4 Mk.

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserhältnisse im deutschen Rheingebiet. Auf Veranlassg. der Reichskommission zur Untersuchg. der Stromverhältnisse des Rheins u. seiner wichtigsten Nebenflüsse u. auf Grund der v. den Wasserbaubehörden der Rheingebietsstaaten gelieferten Aufzeichnungen bearb. u. hrsg. v. dem Centralbureau f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogth. Baden. III. Hft. Die Anschwellgn. im Rhein, ihre Fortpflanzung im Strome nach Mass u. Zeit unter die Einwirkung der Nebenflüsse. Bearb. von M. v. Tein. Mit 10 Taf. IV. Hft. Auftreten u. Verlauf des Hochwasser vom März - April 1895. Bearb. von M. v. Tein. Mit 5 Taf. Fol. (V, 91, 57 S.) Berlin, Ernst & Sohn. Kart. 24 Mk.

Eschenhagen, M., über schnelle periodische Veränderungen des Erdmagnetismus v. sehr kleiner Amplitude. gr. 8°. (9 S. m. 1 Taf.) Berlin, Reimer. 50 Pf.

Fritsche, H., über die Bestimmung der Coefficienten der Gauss'schen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus f. d. J. 1883 u. 1884.

den Zusammenhang der drei erdmagnetischen Elemente untereinander. gr.8°. (85 autogr. S.) St. Petersburg (Strelniuskaya ulitzka 4), Selbstverlag. — Ratzeburg, Fräulein Louise Fritsche. 4 Mk.

Homén, Thdr., der tägliche Wärmeumsatz im Boden u. die Wärmestrahlung zwischen Himmel u. Erde. gr.4°. (147 S. m. 5 Abbildgn. u. 10 lith. Taf.) Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

Jäger, Gust., die Lösung der Mondfrage. gr.8°. (III, 59 S. m. 1 Taf.) Stuttgart, Kohlhammer. 2 Mk.

Jahrbuch. deutsches meteorologisches, f. 1896. Beobachtungssystem der meteorolog. Stationen I. Ordnung. Aachen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. an der Station I. Ordng. Aachen u. deren Nebenstationen im J. 1896. Hrsg. im Auftrage der Stadtverwaltung. v. Dir. P. Polis. II. Jahrg. gr.4°. (VI, 74 S. m. 4 Abbildgn. u. 1 Taf.) Karlsruhe, Braun. 5 Mk.

König, Arth., die Abhängigkeit der Farben- u. Helligkeitsgleichungen v. der absoluten Intensität. gr.8°. (12 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Mangoldt, H., Beweis der Gleichung  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)}{k} = 0$ . gr.8°. (18 S.) Ebd. 1 Mk.

Meyer, Wilh., das Weltgebäude. Eine gemeinverständl. Himmelskunde. Mit etwa 325 Abbildgn. im Text, 9 Karten u. 29 Taf. in Farbendr. Heliograv. u. Holzsch. (In 14 Hftn.) 1. Hft. gr.8°. (S. 1—48.) Leipzig, Bibliograph. Institut. 1 Mk.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 36. XI. Bd 3. Stück. Wilsing, J., Untersuchungen üb. d. Parallaxe u. die Eigenbewegung v. 61 Cygni nach photographischen Aufnahmen. gr.4°. (59 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Soland, unser Sonnensystem. gr.8°. (59 S. m. 2 Taf.) Leipzig, Strauch. 2 Mk.

Spitaler, R., die Ursache der Breitenschwankungen. gr.4°. (19 S. m. 1 Fig. u. 1 Karte.) Wien, Gerold's Sohn. 1,40 Mk.

Stichternoth, Alb., Untersuchung über die Bahn des Cometen 1822 IV. gr.4°. (VI, 64 S.) Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilhl. v. Bezold. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung im J. 1893, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1893. Beobachtungssystem des Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. (1893. 3. Hft.) gr.4°. (XVI u. S. 99—291 m. 1 farb. Karte.) Berlin, Asher & Co. 9 Mk.

—, dass. Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen in den J. 1892, 1893, 1896. gr.4°. (XXI, 57 S. m. 3 Abbildgn.) Ebd. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift der aström. Gesellschaft. 32. Jahrg.  
1. u. 2. Hft. Leipzig, Engelmann. à 2 Mk.

### Nautik.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Taf. f. d. J. 1900 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamte des Innern. Unter Red. v. Dr. Schrader. gr 8°. (XXXII, 276 S.) Berlin C. Heymann's Verl. Kart. 1,50 Mk.

—, kleines nautisches, f. 1898. 37. Jahrg.. Hrsg. W. Ludolph 12°. (52 S.) Bremen, Heinsius. 75 Pf.

Leitfaden f. den Unterricht in der Navigation. 2. Aufl. (X, 370 S. m. 132 Abbildgn. u. 8 Steindr. Taf.) Nebst Anh.: Nautische Rechnn. 4°. (VIII, 139 S. m. Abbildgn.) Berlin, Mittler & Sohn. 13,50 Mk., Leitfaden allein 11 Mk.; Anhang allein 4 Mk.

Segelhandbuch des Irischen Kanals. II. Tl. Die Ostseite. Hrsg. v. der Direktion der deutschen Seewarte. gr.8°. (XXIX, 462 S.) Hamburg, Friederichsen & Co. Kart. 3 Mk.

### Physik.

Börner, H., physikalisches Unterrichtswerk f. höhere Lehranstalten, sowie zur Einführung der neueren Physik in 2 Stufen. 2. Stufe: IV. Lehrbuch der Physik f. die 3 oberen Klassen der Realgymnasien u. Ober-Realschulen, sowie zur Einführg. in das Studium der neueren Physik. gr.8°. 2. Aufl. (XIII, 488 S.) m. 365 Abildgn. Berlin, Weidmann. Geb. 6 Mk.

Diesel, u. M. Schröter, Diesels rationeller Wärmemotor. 2 Vorträge. (gr.4°. 19 S. m. 17 Taf.) Berlin, Springer. 1,40 Mk.

Ernst, Ch., eine Theorie des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprincipes. gr.8°. (64 S. m. 6 Fig.) München, Lüneburg. 2 Mk.

Ferraris, G. u. R. Arnò: ein neues System zur elektrischen Vertheilung der Energie mittelst Wechselströmen. Uebers. v. Carl Heim. 2. Aufl. gr.8°. (31 S. m. 14 Abbildgn.) Weimar, Steinert. 1,35 Mk.

Götz, Hans, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche an Realschulen u. verwandten Lehranstalten. 4. Aufl. Mit 291 in den Text gedr. Fig. u. zahlreichen Uebungsaufgaben. gr.8°. (VIII, 420 S.) München, Franz' Verl. Geb. 4 Mk.

Graham, Will. P., über den Verlauf des Potentialgradienten in Geissler'schen Röhren. gr.8°. (32 S. m. 7 Taf.) Berlin, Mayer & Müller. 1,60 Mk.

Graetz, L., kurzer Abriss der Elektrizität. gr.8°. (VI, 183 S. m. 143 Abbildgn.) Stuttgart, Engelhorn. Geb. 3 Mk.

Haase, Heinr., kritische Betrachtung üb. die Navirische Bogen-  
theorie u. die neuere Elasticitätstheorie kontinuierlicher Fach-  
werkstragbögen. Mit 1 Blatte graph. Darstellgn. gr.8°. (IV,  
74 S.) Regensburg. Bauhof. 1,80 Mk.

—, das Grundgesetz des Horizontalschubs versteifter Tragbögen  
kontinuierlichen Systems, statisch-mathematisch u. experimentell nach-  
gewiesen. Mit Autotyp. des Autors u. des Versuchsapparates. Textfig.  
u. 5 Blättern graph. Darstellgn. nach Handzeichngn. des Autors.  
gr.8°. (VIII, 102 S. m. Bildnis.) Ebd. 3 Mk.

Haschek, Ed., über galvanische Polarisation in alkoholischen  
Lösungen. gr.8°. (10 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 30 Pf.

Januschke, Hans, das Princip der Erhaltung der Energie  
u. seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch f. den höheren  
Unterricht. gr.8°. (X, 455 S. m. 95 Fig.) Leipzig, Teubner. Geb.  
12 Mk.

Jaumann, G., über die Interferenz u. die elektrostatische Ab-  
lenkung der Kathodenstrahlen. gr.8°. (18 S. m. 8 Fig.) Wien,  
Gerold's Sohn. 50 Pf.

Krauss, Fritz, graphische Kalorimetrie der Dampfmaschinen.  
gr.8°. (VI, 87 S. m. 24 Fig. im Text u. auf 1 Taf.) Berlin, Sprin-  
ger. 2 Mk.

Lommel, E., Lehrbuch der Experimentalphysik. Mit 430 Fig.  
im Text u. 1 farb. Spektraltaf. 4. Aufl. gr.8°. (IX, 558 S.) Leip-  
zig, Barth. 6,40 Mk.

Mache, Heinr., Bestimmungen der specifischen Wärme einiger  
schwer schmelzbaren Metalle. gr.8°. (4 S.) Wien, Gerold's Sohn.  
10 Pf.

Meyn, Rich., die absoluten mechanischen, calorischen magne-  
tischen elektrodynamischen u. Licht-Maass-Einheiten, nebst deren  
Ableitgn., wichtigsten Beziehgn. n. Messmethoden, m. e. Anh. nicht-  
metr. Maasse, zum Gebrauche f. Ingenieure, Techniker, Lehraustal-  
ten, sowie f. e. gebildetes Publicum in gedrängter Kürze bearb. gr.16°.  
(VII, 44 S.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1 Mk.

Miller, Andr., das magnetische Kraftfeld e. bipolaren Stabes  
gr.8°. (23 S. m. 1 Fig.) München, Kellerer. 1 Mk.

Pallich, J., über Verdunstung aus e. offenen kreisförmigen  
Becken. gr.8°. (27 S. m. 3 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 60 Pf.

Reis, Paul, Elemente der Physik, Meteorologie u. mathema-  
schen Geographie. Hilfsbuch f. den Unterricht an höheren Lehr-

anstalten. Mit zahlreichen Uebungsfragen- u. Aufgaben. 6. Aufl. v. Ed. Penzold. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 437 S.) Leipzig, Quandt & Händel. 4,50 Mk.

Schmidt, K. E. F., über die Ablenkung der Kathodenstrahlen durch elektrische Schwingungen. 1. u. 2. Mittheilg. gr. 8<sup>o</sup>. 1. (9 S. m. 1 Fig., 1 Taf. u. 1 Bl. Erklärgn.) — 2. Grundgesetz f. die Ablenkung der Strahlen. (21 S. m. 6 Fig.) Halle, Niemeyer. à 1 Mk.

Schollmeyer, G., was muss der Gebildete v. der Elektrizität wissen? Gemeinverständliche Belehrung üb. die Kraft der Zukunft. 6. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (III, 96 S. m. Abbildgn.) Neuwied, Heuser's Verl. 1,50 Mk.

Sumpff's, K., Schulphysik. Methodisches Lehr- u. Uebungsbuch f. höhere Schulen in 2 Lehrstufen. 6. Aufl. bearb. v. A. Pabst. Mit 512 in den Text gedr. Abbildgn. u. 1 Spektraltaf. in Farbendr. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 412 S.) Hildesheim, Lax. 4,50 Mk.

Thompson, Silvanus P., Elementare Vorlesungen üb. Elektrizität u. Magnetismus. Deutsch auf Grund der neuesten Aufl. des Originals v. A. Himstedt. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 604 S. m. 283 Abbildgn.) Tübingen, Laupp. 7 Mk.

Thomson, J. J., Elemente der mathematischen Theorie der Elektrizität u. des Magnetismus. Deutsche Ausg. v. Prof. Gust. Wertheim. gr. 8<sup>o</sup>. (XIII, 414 S. m. 133 Abbildgn.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. 8 Mk.

Tuma, Jos., ein Phasemessapparat f. Wechselströme. gr. 8<sup>o</sup>. (5 S. m. 3 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 30 Pf.

—, ein Phasemessinstrument f. Wechselströme. gr. 8<sup>o</sup>. (11 S. m. 3 Fig.) Ebd. 50 Pf.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsch. v. E. Gumlich, W. Jaeger, St. Lindeck. 2. Tl.: Akustik u. Optik. 2. Bd. Geometrische Optik. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, u. S. 319 — 675 m. 270 Fig.) Berlin, Springer. 8 Mk.

Warburg, Emil, Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studierende. Mit 405 Orig.-Abbildgn. im Text. 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XX, 395 S.) Freiburg i./Br., Mohr. 7 Mk.

Weiler, W., Wörterbuch der Elektrizität u. des Magnetismus Mit vielen Abbildgn. (In ca. 16 Heften.) 1. u. 2. Hft. Lex.-8<sup>o</sup>. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Wilke, Artr., die Elektrizität, ihre Erzeugung u. ihre Anwendung. 3. Aufl. Mit 10 Taf. u. 828 Text-Illustr. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, 637 S.) Leipzig, O. Spamer. 8,50 Mk.

Wulf, Thdr., S. J., Beobachtungen an geschlossenen Clark'schen Normalelementen. gr. 8<sup>o</sup>. (18 S. m. 6 Fig.) Wien, Gerold's Sohn. 50 Pf.

Wüllner, Adph., Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl.

4

2

3. Bd. Die Lehre vom Magnetismus u. v. der Elektrizität m. e. Einleitung. Grundzüge der Lehre vom Potential. gr. 8<sup>o</sup>. (XV, 1414 S. m. 341 Abbildgn. u. Fig.) Leipzig, Teubner. 18 Mk.

#### Vermischte Schriften.

Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss. Mathemat.-phys. Classe. 1897. III. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 7. Hft. Red. v. Sieveking, Schröder u. Busche. gr. 8<sup>o</sup>. (S. 273—317.) Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Scheffler, Herm., vermischte mathematische Schriften, enth. 1. Zusätze zur Theorie der Gleichungen. 2. Die quadratische Zerfällung der Zahlen. 3. Die Phönixzahlen. gr. 8<sup>o</sup>. (100 S.) Braunschweig, Wagner. 2 Mk.

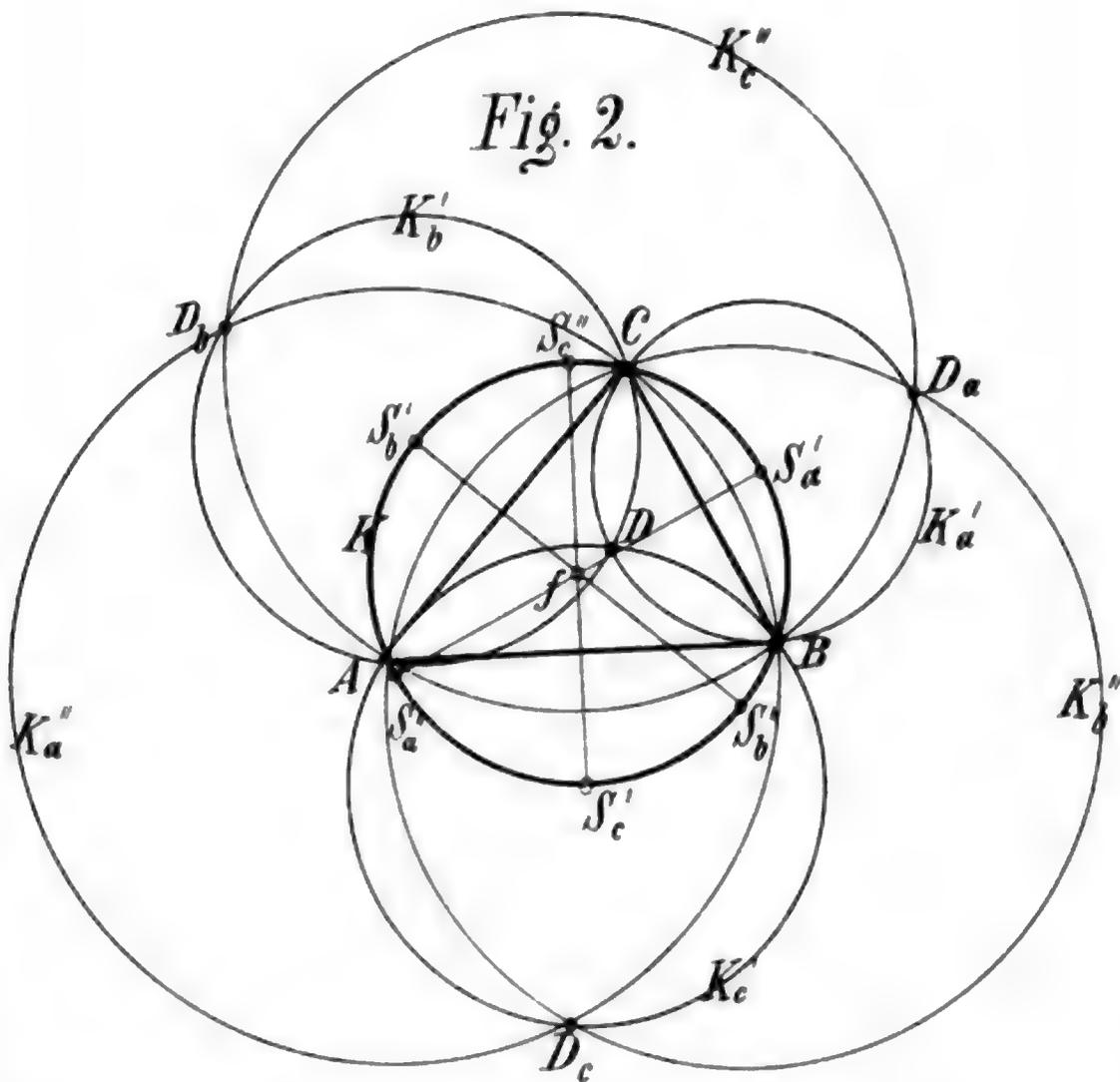
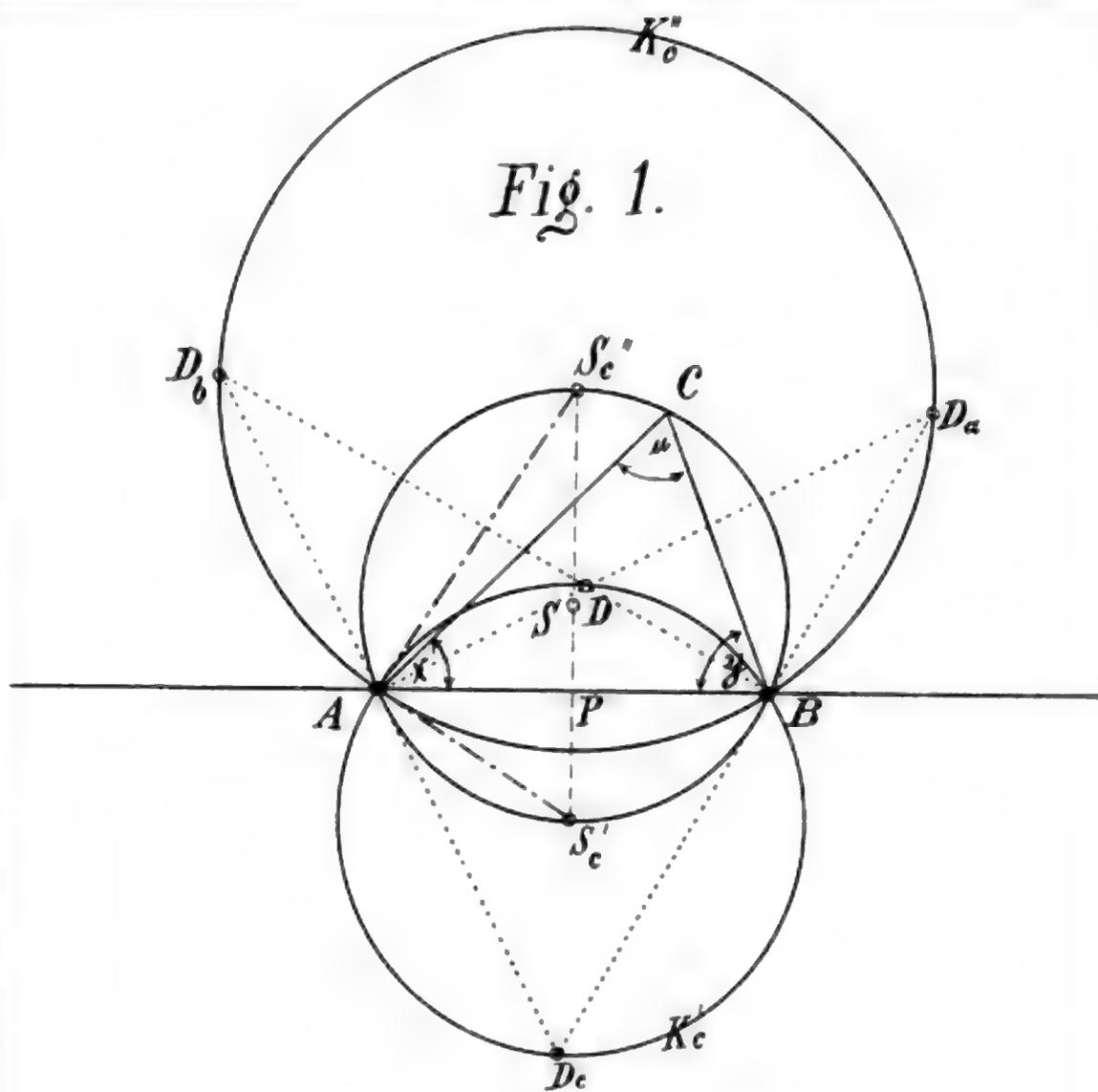
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1896. 2 Bde. Mit 27 Taf. u. 58 Holzschn. gr. 8<sup>o</sup>. (XI, 1064 S.) Prag, Rivaáč. 20 Mk.

— Münch., mathemat. Classe. 1897. 1. Hft. München, Franz' Verl. 1,20 Mk.

— Wiener, math.-naturw. Classe. Wien, Gerold's Sohn. 1. Abthlg. 106. Bd. 1.—3. Hft. 3,40 Mk. Abth. IIa. 106. Bd. 1.—4. Hft. 8,30 Mk. — Abthl. IIb. 106. Bd. 1.—3. Hft. 3,20 Mk.

— , dass. Register zu den Bdn. 101.—105. XIV. gr. 4<sup>o</sup>. (VII, 144 S.) Ebd. 1,90 Mk.

Veröffentlichungen des königl. astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin. Nr. 5.: Bauschinger, J., Genäherte Oppositions-Ephemeriden v. 78 kleinen Planeten f. 1897 August bis December. Unter Mitwirkg. mehrerer Astronomen, insbesondere der Herren A. Berberich u. P. Neudebauer hrsg. 4<sup>o</sup>. (26 S.) Berlin, Dümmler's Verl. 1,20 Mk.



**V. Karamata:** Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen.



Fig. 1a.



Fig. 1b.



Fig. 2a.

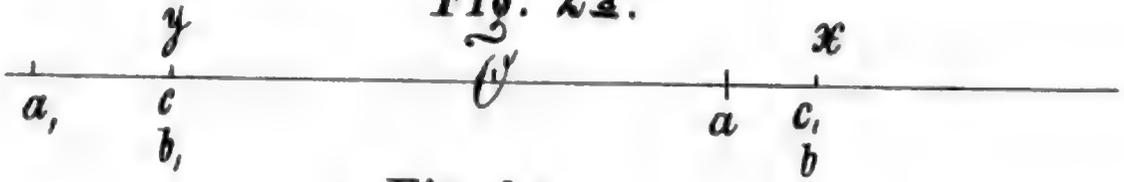


Fig. 2b.

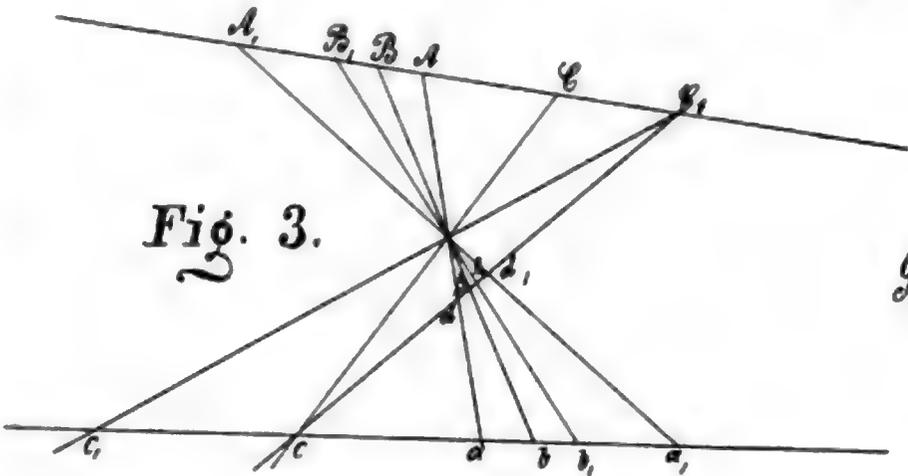
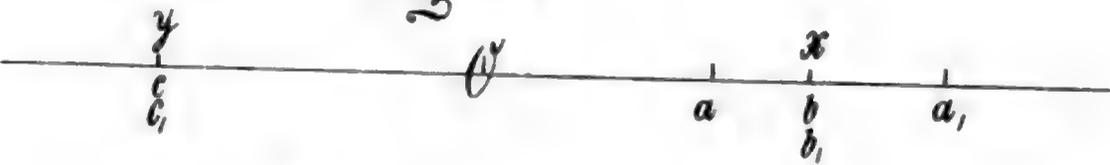


Fig. 3.

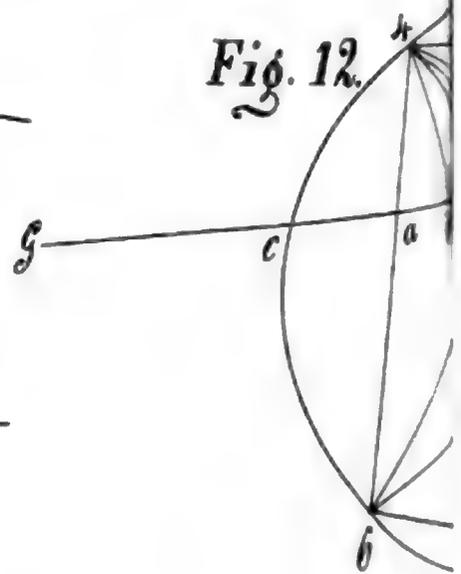


Fig. 12.

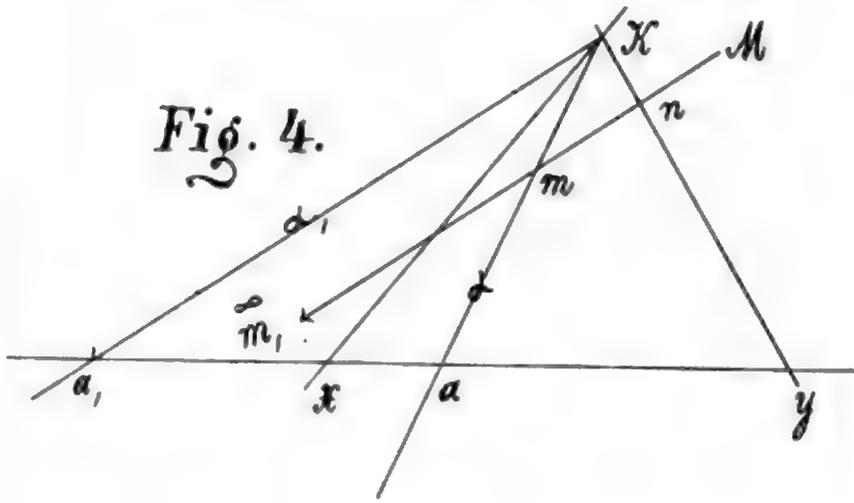


Fig. 4.

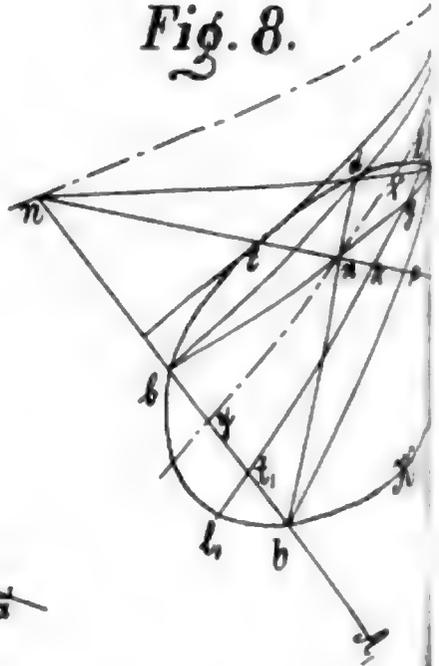


Fig. 8.

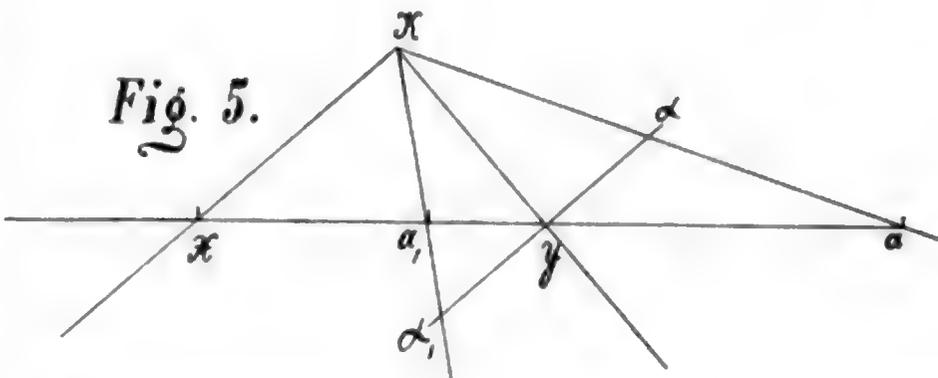


Fig. 5.

y

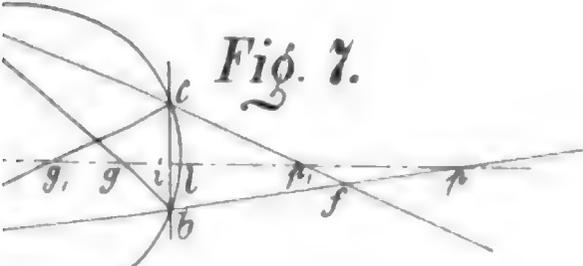


Fig. 7.

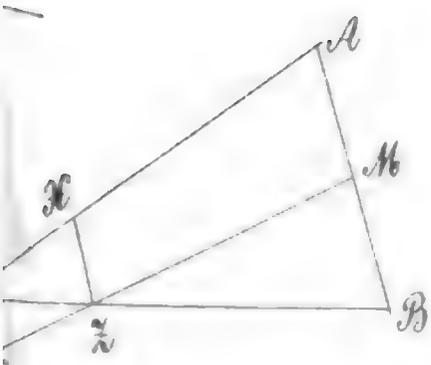
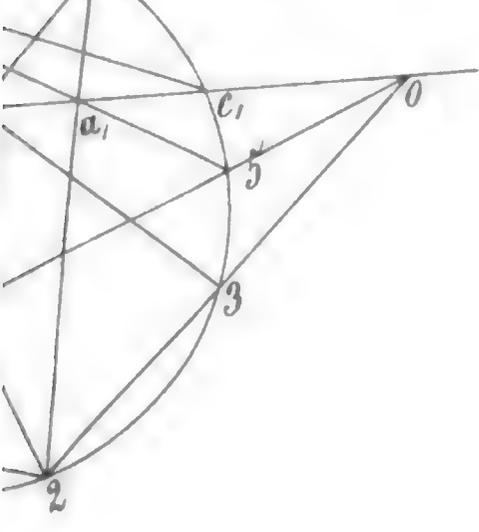
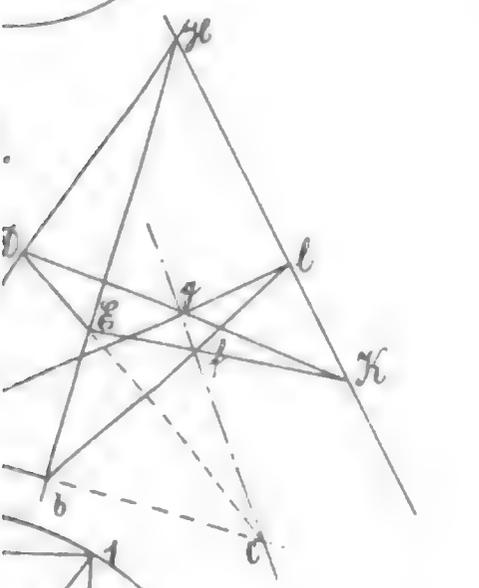


Fig. 6.

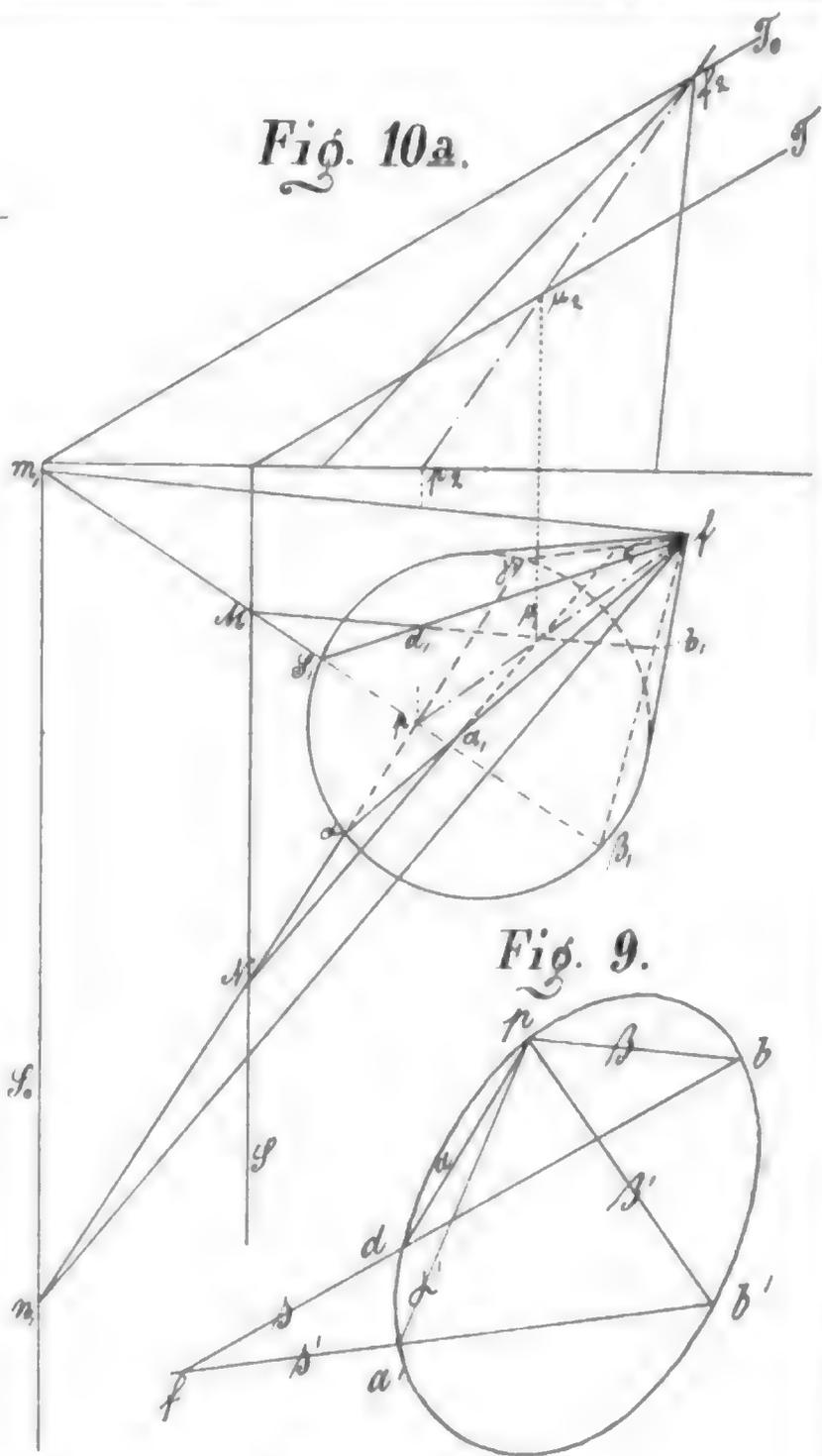


Fig. 10a.

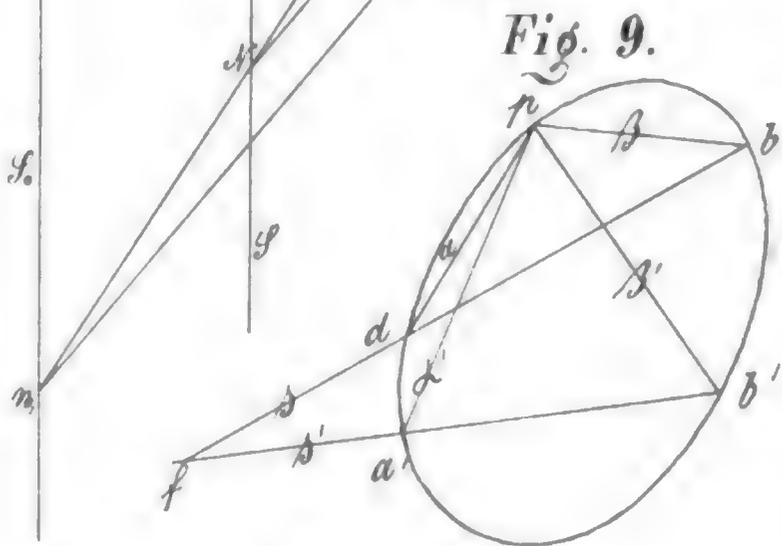


Fig. 9.

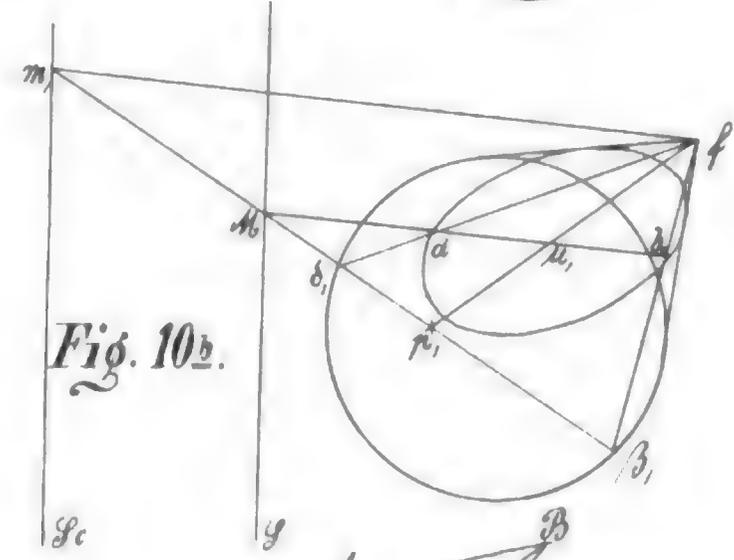


Fig. 10b.

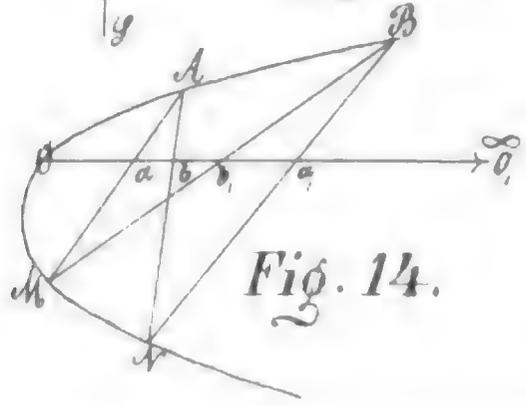
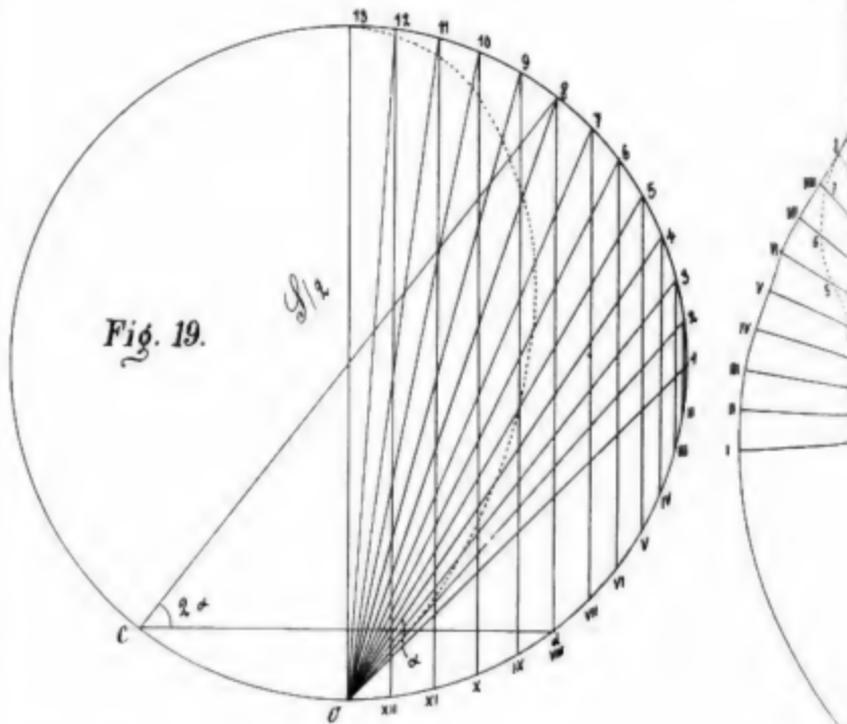
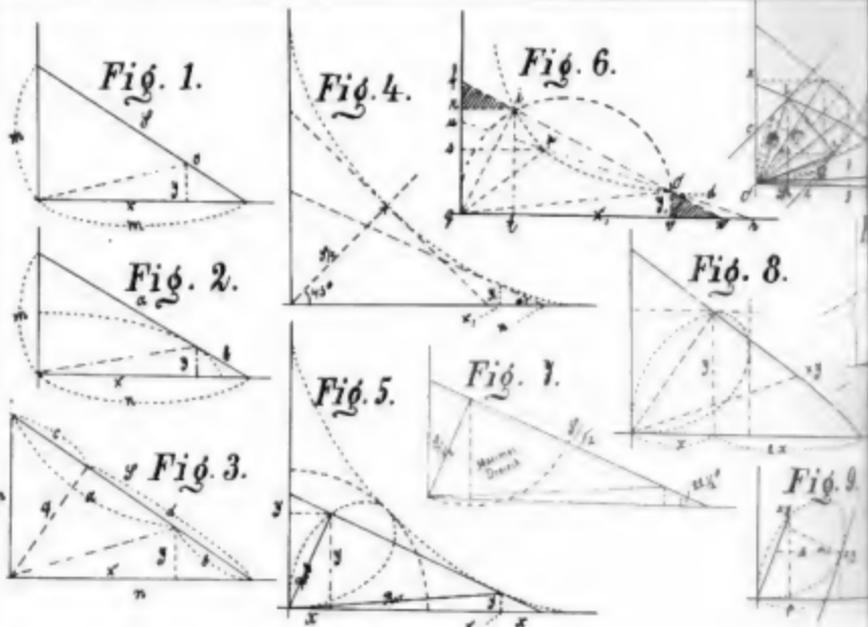
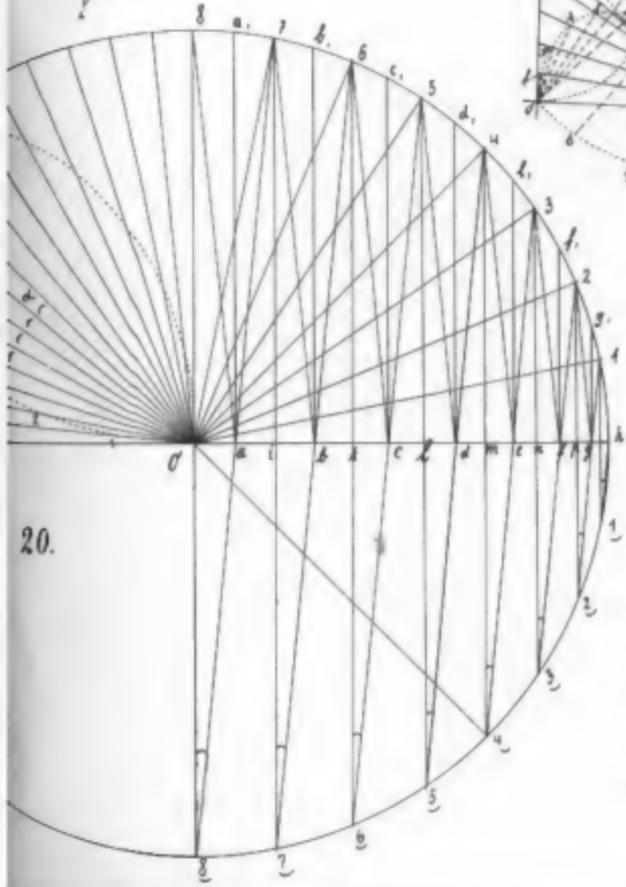
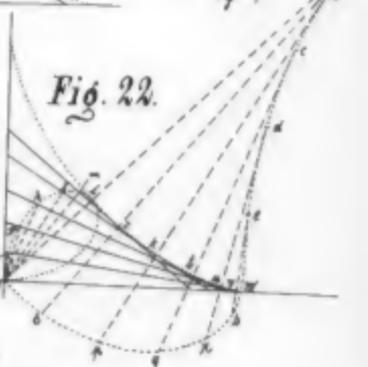
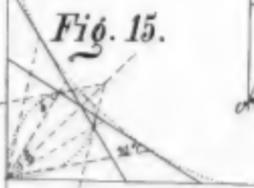
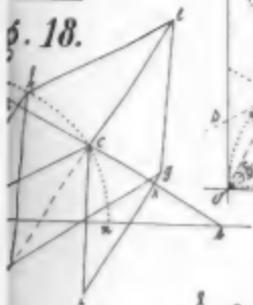
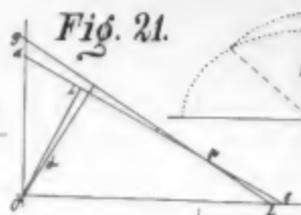
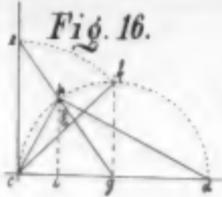
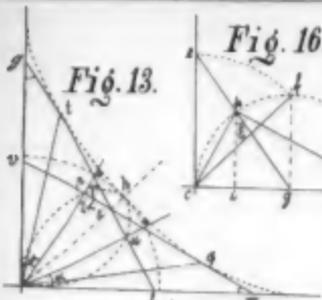


Fig. 14.





VII. Meyer: Begrenzungskurve.





# Litterarischer Bericht

## LXIII.

### L e h r b ü c h e r.

Die Elemente der Mathematik. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von Fr. Bussler, Professor am Sophien-Gymnasium zu Berlin. Teil I. Pensum für die Mittelclassen (Quarta bis Untersecunda). Zweite, durchgesehene Auflage. — Teil II. Pensum für die Oberclassen (Obersecunda und Prima). Zweite Auflage. — Dresden, Berlin 1897. L. Ehlermann. 151 + 234 S.

In Berücksichtigung wenig entwickelten Denkvermögens der Anfänger übertrifft das vorliegende Lehrbuch wol jedes andere. Die Zergliederung und Umformung der Sätze geht so weit, dass nach einer Aussage, eines sei grösser als ein andres, als Folgerung besonders ausgesprochen wird (§ 16): letzteres sei kleiner. Dies Verhalten, welches im weitem Verlauf des Vortrags allmählich in concise Darstellung übergeht, also dem Wachsen logischer Fähigkeit sehr wol Rechnung trägt, mag durch Erfahrung des Verfassers gerechtfertigt sein, wenn man auch die vielen selbstverständlichen „Folgerungen“ lieber durch Fragen ersetzt gesehen hätte. Wichtiger ist natürlich die Forderung eines überall genauen Ausdrucks. In dieser Beziehung ist es nun auffällig, dass zwar der Anfang nichts vermissen lässt, dass aber im weitem Fortgang mehr und mehr Mängel und Nachlässigkeiten zutage kommen, wo der Verfasser darauf zu rechnen scheint, der Schüler werde in richtiger Deutung der Worte seiner Meinung entgegenkommen. Einzelne Unbestimmtheiten durchzugehen würde zu umständlich sein; dagegen darf die ärgste Verletzung didaktischer Pflicht nicht stillschweigend hin genommen werden. Die Lehre von den Parallelen beginnt (nach

euklidischer Definition) mit dem „Grundsatz“: „Zwei parallele Geraden haben dieselbe Richtung“. Was „Richtung“ heisst, ist nirgends erklärt. Auch ist es, wie leicht erhellt, unmöglich die Richtungen zweier unverbundenen Geraden zu vergleichen. Daher sind die Sätze über die Winkel, welche eine schneidende Gerade mit 2 Geraden bildet, vorausgehend notwendig, um von den Richtungen der Geraden, ihrer Gleichheit und ihrem Unterschiede exacte Begriffe zu gewinnen. Die ganze Parallelentheorie ist demnach auf ein Wort ohne bekannten Sinn gebaut. Jeder zu ihr gehörige Beweis setzt schon die Theorie im ganzen voraus. Der Betrug, durch welchen die scheinbare Begründung plausibel gemacht und ein eingebildetes Wissen erzeugt wird, ist zu versteckt um von den Schülern durchschaut zu werden. Zu diesem Blendwerk zu greifen war nun überhaupt kein Anlass. Bekanntlich lautet der Grundsatz der Parallelentheorie, aus dem alle ihre Sätze fliessen, in einfachster Form: Durch einen gegebenen Punkt lässt sich mit einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen. Warum der Verfasser statt dieses Satzes einen solchen gewählt hat, der wegen fehlender Begriffsbestimmung nicht verstanden werden kann, lässt sich kaum anders erklären als durch den Zweck, der Verstandescontrole von Seiten der Schüler und Leser zu entgehen. — Im ganzen ist der Lehrstoff ungemein ausgedehnt; von allen vorgefundenen Theorien findet man Teile zu Nutzen eifriger Mathematiker unter den Schülern dem Standpunkt der Classe entsprechend bearbeitet: Teile der neuern synthetischen Geometrie, der Combinatorik, der Reihen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der complexen Zahlen, der Zinseszinsrechnung u. a. m.

Hoppe.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren, und Wilhelm Krimphoff, Oberlehrer am Gymnasium in Paderborn. Zweite Auflage. Mit 151 Figuren. Freiburg im Breisgau 1897. Herder. 133 S.

Besprochen im 51. litt. Bericht, S. 31.

Hoppe.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler. Achte, verbesserte Auflage. Mit 47 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1897. Louis Nebert. 21 S.

Die 3. und die verbesserte 4. Auflage sind im 8. litt. Bericht, S. 41 besprochen. H.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von Adolf Sickenberg, K. Gymnasialprofessor und Rector der Luitpold-Kreisrealschule in München. Zweiter Teil: Planimetrie. Dritte Auflage. München 1896. Theodor Ackermann. 123 S.

Besprochen im 51. (und 25.) litt. Bericht, S. 36.

H.

Ebene Geometrie. Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. Georg Recknagel, Professor und Rector des K. Realgymnasium zu Augsburg, Mitglied der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. Fünfte Auflage. München 1896. Theodor Ackermann. 222 S.

Die 4. Auflage ist besprochen im 46. litt. Bericht, S. 15.

Hoppe.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie bearbeitet von Dr. E. Hammer, Professor an der K. Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1897. J. B. Metzler. 572 S.

Nach Aussage des Verfassers soll das Buch nur ein Hilfsmittel zur Vorbereitung auf die Geodäsie und die sphärische Astronomie für Schule und Selbstunterricht sein. Dies ausschliesslich praktische Ziel der Bearbeitung darf man jedoch in keiner Weise als Beschränkung der Lehre in theoretischer Beziehung ansehen. Obgleich es sich allerdings durch besonders ausführliche Behandlung des Verfahrens und der Apparate kund gibt, so wird das Lehrgebiet der Trigonometrie als Theiles der Mathematik in gleicher Gründlichkeit und grösster Vielseitigkeit umfasst. Selbstverständlich nimmt hier die Behandlung keine Rücksicht auf die Schuleinrichtung und die Stellung der Trigonometrie im Pensum; vielmehr ist es einzige Sorge, die betreffenden Lehren, nahen und fernen Beziehungen und geometrischen Anwendungen zu erschöpfen. Da hierbei sehr viele Gesichtspunkte massgebend sind, so lässt sich nicht wol eine systematische Ordnung des Lehrstoffes aufstellen.

H.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit Beispielen und 280 Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von O. Bürklen, Professor am kgl. Realgymnasium in Schw. Gmünd. Mit 40 Figuren. Heilbronn a. N. 1897. Schröder u. Co. 122 S.

3\*

Die im Vorwort ausgesprochenen didaktischen Grundsätze kann man wol billigen, doch lässt ihre Ausführung viel vermessen. Dass der Lehrgang hier vom Speciellen zum Allgemeinen fortschreitet, ist in der Tat sachgemäss; wie gewöhnlich wird mit dem rechtwinkligen Dreieck angefangen, hieran schliesst sich im Vorliegenden, was allein diesem besonders zukommt, das gleichschenklige Dreieck und das regelmässige Vieleck. Diesen Specialitäten gegenüber können mit dem Allgemeinen nur (goniometrisch) die Functionen des allgemeinen, also variablen Winkels, (trigonometrisch) das allgemeine Dreieck gemeint sein. Darauf bezüglich lässt das Lehrbuch Vieles im Dunkeln. Die allgemeinere Auffassung wird nämlich hier in der Anwendung der Coordinaten gesehen. Was diese zur Allgemeinheit beitragen soll, ist nirgends zu erkennen. Elementar geometrische Deduction, welche genetische Betrachtung nicht ausschliesst, liefert in einfachster Weise die gesamte Theorie. Zuziehung der Coordinaten hat für den Lernenden nur die vexirende Wirkung eines unnötigen Wechsels der Bezeichnungs- und Betrachtungsweise. Die Erklärung des Functionsbegriffes, dessen Bedeutung wesentlich auf genetischer Betrachtung beruht, ist im Anfang gegeben, aber nur in einer Note, die sich, da kaum je von Variation der Argumente die Rede ist, durchweg der Betrachtung entzieht. Sie zu vergessen, bietet besonders Anlass der abweichende, daher unzulässige Gebrauch des Wortes „Grenzwert“ bezüglich auf Periodenabschluss. Es wurden nämlich in einer Tabelle sogen. Grenzwerte u. a. die falschen und sinnlosen Aufstellungen gemacht:  $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$ ,  $\operatorname{tg} 270^\circ = -\infty$  ohne jede Angabe der Variationsrichtung. Beide als Functionswerte (die natürlich nicht existiren) geschriebene Angaben deuten nur auf vorhergehende und nachfolgende Variation; letztere ist also hier vergessen und die Vorzeichen irrigerweise an die Argumente geknüpft. Sollte also die Anwendung der Coordinaten bei Winkeln  $> 1R$  zur Orientierung dienen, so hat sich gezeigt, dass im Gegenteil der Verfasser dadurch zur Unklarheit verführt worden ist. Allerdings fordert die Coordinatenlehre Unterscheidung der Strecke von der absoluten Länge, aber nicht sie allein, man braucht also nicht erst Coordinaten einzuführen, um sie zu unterscheiden.

Hoppe.

Schulphysik für die Gymnasien nach Jahrgängen geordnet. Von Prof. Dr. G. Brandt. Erster Teil. Obertertia: Mechanik und Wärmelehre. Untersecunda: Magnetismus, Elektrizität, Akustik und Optik. Zweite Auflage. Berlin 1896. Leonhard Simion. 90 S.

Besprochen im 56. litt. Bericht, S. 47. In 2. Auflage ist die Lehre von der Erhaltung der Kraft hinzugekommen.

Hoppe.

## Sammlungen.

Aufgaben über kubische und diophantische Gleichungen, Determinanten und Kettenbrüche, Combinationslehre und höhere Reihen. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, weil. Professor am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin, und C. Müsebeck, Oberlehrer am Gymnasium in Waren in Mecklenburg. Berlin 1898. Leonhard Simion. 129 S.

Dem auf dem Titel angegebenen Inhalt ist wenig hinzuzufügen. Aufgaben über die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen gehen den daselbst genannten voraus. Die Determinanten beginnen mit 2. Ordnung und steigen bei recurrenter Bestimmung durch Unterdeterminanten zu höhern Ordnungen auf. An die Combinationslehre schliesst sich auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unter jeder Aufgabe steht das Resultat. Von einigen Aufgaben ist die Lösung ausgeführt oder auf den Weg zu ihr hingeleitet. H.

Die Aufgaben aus der Elementar-Mathematik, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den k. bayerischen humanistischen und technischen Unterrichts-Anstalten in den Jahren 1873 bis 1893 gestellt wurden. Bearbeitet von Engelbert Sailer, k. Rector der Realschule in Pirmasens. München 1898. Theodor Ackermann. 167 S.

Der 1. Teil enthält Aufgaben aus der Planimetrie über Gerade und Kreise, der 2. Teil aus der Stereometrie über Polyeder, Kegel, Kugeln. Unter ihnen befinden sich auch zu beweisende Sätze. Von allen sind die ausgeführten Lösungen nebst Determination dazu gegeben. H.

Repertorio di matematiche superiori (definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici). Per Ernesto Pascal, Prof. ordinario nella r. università di Pavia. I. Analisi. Milano 1898. Ulrico Hoepli. 642 S.

Ueber den Inhalt der Lehre wird hier im Zusammenhang kurz, aber mit Erklärung aller darin eingeführten Begriffe Rechenschaft gegeben. Die einzelnen Themata sind der Reihe nach folgende. Theorie der Substitutionsgruppen, Determinanten, Reihen, unendliche Producte, Kettenbrüche, algebraische Gleichungen, Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen, Functionen complexer Variabeln, Functionstheorie in Relation mit der Gruppentheorie, Periodicität, Automorphismus, algebraische Functionen und Abel'sche Integrale, elliptische Functionen, hyperelliptische und Abelsche Func-

tionen, specielle Functionen, analytische Darstellung der Functionen, ganze, rationale oder complexe Zahlen, algebraische und transcendente Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, analytische Instrumente und Apparate. H.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. Zweite Auflage. Erster Band. Braunschweig 1898. Friedrich Vieweg und Sohn. 703 S.

Die 1. Auflage ist im 54. litt. Bericht Seite 21 besprochen. In 2. Auflage sind einzelne Irrtümer berichtigt. Eine wesentliche Erweiterung hat die Theorie der Elimination (Theorem von Bezout. Elimination aus 3 Gleichungen) im 4. Abschnitt (symmetrische Functionen) gefunden. H.

*Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et Georges Simart, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École polytechnique. Tome I Paris 1897. Gauthier Villars et fils. 244 S.

Die Gegenstände der einzelnen Capitel des 1. Buchs sind folgende. Vielfache Integrale von Functionen mehrerer Variabeln. Geometrie der Lage. Integrale rationaler Functionen von 2 complexen Variabeln. Singularitäten einer algebraischen Fläche, Invarianten einer Fläche vom Gesichtspunkt der Geometrie der Lage. Integrale totaler Differentiale 1., 2., 3. Gattung. Doppelintegrale 1. Gattung und darauf bezügliche Invarianten. Algebraische Raumcurven und Formel geeignet das Geschlecht einer Fläche zu geben. H.

Vorlesungen über Kreis- und Kugel-Functionen-Reihen. Von Dr. Johannes Frischauf, Professor an der Universität Graz. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 60 S.

Die Abschnitte sind folgende. Reihenentwicklung nach Kreisfunctionen (Fourier'sche Theorie). Kugelfunctionen einer, dann zweier Veränderlichen. Reihenentwicklung nach Kugelfunctionen.

H.

Einführung in die Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Von Heinrich Burkhardt, Professor an der Universität Zürich. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1897. Veit u. Comp. 213 S.

Die Abschnitte sind folgende. Complexe Zahlen und ihre geometrische Darstellung. Die rationalen Functionen einer complexen Veränderlichen und die durch sie vermittelten conformen Abbildungen. Definitionen und Sätze aus der Theorie reeller Veränderlichen und ihrer Functionen. Eindeutige analytische Functionen einer complexen Veränderlichen. Mehrdeutige analytische Functionen einer complexen Veränderlichen. Allgemeine Functionentheorie.

H.

Hauptsätze der Differential- und Integral-Rechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen, zusammengestellt von Dr. Robert Fricke, Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig. — Erster Teil: Mit 45 — Zweiter Teil: Mit 15 — Dritter Teil: Mit 9 in den Text gedruckten Figuren. Braunschweig 1897. Friedrich Vieweg und Sohn. 80 + 66 + 38 S.

Der Leitfaden ist keine blosse Zusammenstellung von Hauptsätzen, sondern gibt die vollständige Lehre in Form und Umfang, wie es nach Erachten des Verfassers für die Studirenden an technischen Hochschulen geeignet ist. Auch ist diese Lehre hinsichtlich ideell wissenschaftlicher Forderungen grösstenteils correct. Wenn gleichwol derselbe zuvorkommend einräumt, dass er die Strenge nur bis zu einem gewissen Masse getrieben, und „wol wisse, dass vereinzelte Wendungen dem scharfen Urteil nicht genehm erscheinen“ würden, so ist, da die betreffenden Punkte nicht genannt sind, wol zu unterscheiden, ob nur der Kürze und Einfachheit wegen auf manche Begründung oder Frage nicht eingegangen worden ist, oder ob der Popularität wegen irgend welche vulgäre Irrtümer beibehalten worden sind. Ein hier vorkommendes Beispiel letzteren Falles ist die Einführung von  $\infty$  als Ausdruck einer Grösse und als Grenzwert mit Berufung auf eine gemeine (d. i. nachlässige) Redeweise. In solchen Fällen bietet die Hinweisung des Verfassers auf den Zweck ihm natürlich keine „Entschuldigung“; denn das Vorgehen dient nicht zur Erleichterung des Lernens, sondern ist eine unnütze, verfehlte Speculation. Im 1. Teil wird nach der Lehre vom Differenzieren davon Anwendung gemacht auf Maxima und Minima, auf den Verlauf der Functionen, auf die Anfangsgründe der Integralrechnung; dann folgt die Theorie der unendlichen Reihen, dann die Bestimmung der Quotienten unendlicher Grössen und Besprechung ähnlicher

Aufgaben. Der 2. Teil enthält folgende Capitel: Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabeln. Hilfssätze aus der Algebra. Weiterführung der Integralrechnung. Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabeln. Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabeln. Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabeln. Der 3. Teil folgende: Gewöhnliche Differentialgleichungen erster, dann höherer Ordnung mit 2 Variabeln. Andeutungen über Differentialgleichungen mit mehr als 2 Variabeln. Hoppe.

Zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des dritten Grades. Von Eduard Grohmann. Wien 1895. Alfred Hölder. 22 S.

In der kubischen Gleichung

$$Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = 0$$

wird gesetzt:

$$r = BC - AD; \quad s = \sqrt{B^2 - AC}; \quad t = 2(C^2 - BD)$$

$$w^3 = r^2 - st; \quad k = \frac{Ar - Bs}{Ac}; \quad w \text{ positiv}$$

Dann ist für positives  $w^3$  die einzige reelle Wurzel

$$x = -\frac{r}{s} + \frac{w}{s} \operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = k$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \frac{1}{3}\pi) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\varphi + \frac{1}{3}\pi)}$$

für negatives  $w^3$  sind die 3 reellen Wurzeln

$$x = -\frac{r}{s} + \frac{w}{s} \operatorname{tg}(\varphi + \frac{2}{3}\mu\pi); \quad \mu = 0, 1, -1$$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = k$$

H.

Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1891. Friedrich Foerster. 133 S.

Die Schrift untersucht allgemeine Fragen, die aus dem Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen hervorgehend bereits von andern Autoren behandelt, jedoch nach dem Urteil des Verfassers nicht zum Abschluss gebracht worden sind. H.

An elementary course of infinitesimal calculus. By Horace Lamb, M. A., F. R. S., Professor of mathematics in the Owens

College, Victoria University, Manchester; formerly Fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897. London: C. J. Clay and sons. Leipzig F. A. Brockhaus. Bombay E. Seymour Hale. 616 S.

Einen leitenden Gedanken und Plan des Ganzen gibt weder der Inhalt noch das Vorwort zu erkennen. Ausgewählte Themata der höhern Analysis, welche dem Verfasser vorzugsweise nützlich für die Ausbildung der Studenten schienen, machen das gesamte Werk aus.

H.

Theory of groups of finite order. By W. Burnside, M. A., F. R. S., late Fellow of Pembroke College, Cambridge; Professor of mathematics at the Royal Naval College, Greenwich, Cambridge 1897. London C. J. Clay and sons. Leipzig F. A. Brockhaus. New-York the Macmillan Company. 388 S.

Die Capitel sind folgende: Substitutionen. Definition einer Gruppe. Einfachere Eigenschaften einer Gruppe unabhängig von ihrer Darstellungsweise. Abel'sche Gruppen. Gruppen, deren Ordnungszahlen Potenzen von Primzahlen sind. Sylow's Theorem. Compositionserien einer Gruppe. Substitutionsgruppen: transitive und intransitive Gruppen. Primitive und imprimitive. Transitivität und Primitivität (Schlusseigenschaften). Zusammensetzung einer Gruppe mit sich selbst. Graphische Darstellung. Gruppen vom Geschlecht 0 und 1. Cayley's Farbengruppen. Lineare Gruppe. Auflösbare und zusammengesetzte Gruppen.

H.

Abel's théorème and the allied theory including the theory of the theta functions. By H. F. Baker, M. A., Fellow and Lecturer of the Johns College, University Lecturer in mathematics. Cambridge 1897. London C. J. Clay and sons. Leipzig F. A. Brockhaus. New-York the Macmillan Company. 684 S.

Das Werk enthält folgende Abschnitte: Gegenstand der Untersuchung. Die fundamentalen Functionen einer Riemann'schen Fläche. Die Unendlichkeiten rationaler Functionen. Specificirung einer allgemeinen Form von Riemann's Integralen. Gewisse Formen der Fundamentalgleichung der Riemann'schen Fläche. Geometrische Untersuchungen. Coordinirung einfacher Elemente; transscendentale einförmige Functionen. Abel's Theorem; Abel's Differentialgleichungen. Jacobi's Inversionsproblem. Riemann's Thetafunctionen; allgemeine Theorie. Der hyperelliptische Fall von Riemann's Thetafunctionen. Eine besondere Form von Fundamentalfläche. Radicale Functionen. Factoriale Functionen. Relationen zwischen Producten

von Thetafunctionen. Transformation von Thetafunctionen. Complexe Multiplication von Thetafunctionen; Correspondenz von Punkten auf einer Riemann'schen Fläche. Degenerirte Abel'sche Integrale. Algebraische Curven im Raume, Matrizen. H.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Par Jules Tannery, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, Jules Molk, Professeur à la Faculté des sciences de Nancy. Tome III. Calcul integrale (I<sup>re</sup> partie). Théorèmes généraux. — Inversion. Paris 1898. Gauthier Villars et fils 267 S.

Die Gegenstände sind folgende: Allgemeine Sätze der Integralrechnung, nämlich: Anwendungen von Caychy's Theorem über die Integrale einer Function einer imaginären Variabeln. Anwendungen der Formel der Zerlegung in einfache Elemente. Addition und Multiplication. Entwicklung in trigonometrische Reihen. Integration doppelt periodischer Functionen. Inversionen, nämlich: gegeben  $k^2$  und  $g_2, g_3$ , gesucht  $\tau$  oder  $\omega_1, \omega_2$ . Inversion der doppelt periodischen Functionen, speciell 2. Ordnung, namentlich der Function  $sn$ .

H.

Integrationsmöglichkeiten der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung mit drei Variablen. Von Oberlehrer Dr. Ernst Schultz. Progr. Stettin, Schiller-Realgymnasium. Ostern 1898. 4<sup>o</sup>. 16 S.

Es wird gezeigt, dass bei der Ham. Gleichung

$$\frac{1}{m} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} = 2U + 2h$$

wo  $m$  die Masse,  $U$  das Potential,  $h$  die Constante bezeichnet, ein Gleichungssystem aufgestellt werden kann, welches die Transformationsgleichungen der rechtwinkligen Coordinaten in diejenigen liefert, in denen die Integration möglich ist. Ausgehend von der für einen angezogenen Punkt geltenden Differentialgleichung, mit Hinzunahme der Bedingung, dass infolge der Transformation eine Variable explicite in der Differentialgleichung nicht vorkommt, wird man bei Nachweis der Integrationsmöglichkeit auf ein Gleichungssystem geführt, welches Jacobi nicht erwähnt. H.

Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et sur applications géométriques. Par M. Ch. Méray, Professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Dijon. Ouvrage honoré d'une souscription

du Ministère de l'instruction publique. Quatrième partie. Applications géométriques classiques. Paris 1898. Gauthier Villars et fils. 248 S.

Der 1. Teil ist im 50. litt. Bericht, Seite 21 besprochen. Der 4. Teil betrifft geometrische Anwendungen, nämlich Rectificationen, Quadraturen, Kubaturen, Berührungen im allgemeinen, Berührungen von Flächen und Linien mit Gebilden 1. Grades, Enveloppen, Berührungen zwischen Kugel, Kreis und gegebenen Gebilden, Unstetigkeitseigenschaften gewöhnlicher Flächen. Berührungen höherer Ordnung einer Linie mit dem Kreise; Fragen, die sich an die Berührung 2. Ordnung einer Fläche mit dem Kreise und der Geraden knüpfen.

Hoppe.

Beiträge zur Zahlenlehre. Von G. Speckmann. Oldenburg i. Gr. 1893. Eschen u. Fasting.

Das Vorliegende sind vermischte zahlentheoretische Studien; die einzelnen Thematika sind folgende: Arithmetische Reihen. Beweis des Satzes, dass jede unendliche arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. Ermittlung der Primzahlen. Anzahl der Primzahlen. Factoren der Zahlen. Allgemeines Verfahren zur Prüfung einer Zahl  $Z$  auf ihre Teilbarkeit durch einen Divisor  $n$ . Teilbare Zahlen und Primzahlen. Productbildung und Teilbarkeit. Auflösung der Congruenzen 2. Grades. Besondere arithmetische Reihen. Quadratzahlen und Zerlegung der Zahlen von der Form  $4n + 1$  in 2 Quadrate. Auflösung der Pell'schen Gleichung. Zur Potenzrechnung. Auflösung der Gleichungen. Identitäten. II.

Memorias de Real Academia de ciencias exactas físicas y naturales de Madrid. Tomo XVIII. Parte I. F. Gomes Teixeira. Sobre o desenvolvimento das funções em serie. Madrid 1897. Don Luis Aguado. Kl. Fol. 116 S.

Die Schrift enthält Studien über die Taylor'sche Reihe für reelle, dann für complexe Variablen; in letzterem Falle die Methode von Cauchy, dann die von Riemann, dann die Methoden von Laurent, von Weierstrass und Mittag Leffler, dann die Reihen von Burmann, von Lagrange und die Verallgemeinerung der ersteren. II.

## G e o m e t r i e.

Verzeichniss der einfachsten Vielfache. Von Dr. Oswald Hermes, Professor. Mit 1 Figurentafel. Berlin 1896. R. Gaertner. Progr. Berlin-Köln. Gymn. Ostern 1896. 4<sup>o</sup>. 24 S.

Beschränkt und individualisirt sind die Polyeder nach Zahl und Aneinandergrenzen der Flächen, Kanten, Ecken ( $f, k, e$ ) (ohne Rücksicht auf Mass), nämlich beschränkt auf 4 bis 10 Seitenflächen und 3kantige Ecken. Für nur 3kantige Ecken gibt der Eulersche Satz die Relation:

$$f - 2 = k - e = \frac{e}{2} = \frac{k}{3}$$

Durch die Flächenzahl sind also auch die Kanten- und Eckezahl bestimmt. Das Verzeichniss führt 1 Vierflach, 1 Fünfflach, 2 Sechsfache, 5 Siebenfläche, 14 Achtfache, 59 Neunfläche und 289 Zehnfläche in Zahlen formulirt auf. Zur Zeichnung der Netze wird eine Fläche von grösster Eckezahl nebst den in den Kanten anschliessenden Flächen zu Grunde gelegt, die übrigen als Deckfiguren über denselben betrachtet. Die gesamte Deckfigur besteht dann aus Gruppen von Kanten. Die Zeichnung auf der beigefügten Tafel enthält nur die 4 einfachsten ganzen Netze; statt der übrigen sind 71 Gruppen gezeichnet. H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von J. Schlotke, Oberlehrer der allgemeinen Gewerbeschule zu Harburg. IV. Teil. Projectivische Geometrie. Mit 223 Figuren. Dresden 1896. Gerhard Kühtmann. 177 S.

Der II. und III. Teil sind im 52. litt. Bericht, Seite 38, der erste (2. Aufl.) im 55sten, Seite 31 besprochen. Im IV. Teile kommen folgende Lehrgegenstände hinzu: Collineation (in Ebene, dann im Raume). Punktreihen und Strahlenbüschel. Deren Erzeugnisse. Doppelemente. Regelscharen und Regelflächen. Princip der reciproken Reihen; Polartiguren. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

LVI.

---

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte der Elektrotechnik. Berlin, Springer. 9. Jahrg. 1895. 5. Hft. 5 Mk. — 11. Jahrg. 1897. 2. u. 5. Hft. à 5,60 Mk.

— die, der Physik i. J. 1892, dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. gr. 8°. Braunschweig, Vieweg. 48. Jahrg. 1. Abth. Physik der Materie. Red. v. Rich. Börnstein. (LXVI, 449 S.) 20 Mk. — 3. Abth. Kosmische Physik. Red. v. Rich. Assmann. (L, 597 S.) 25 Mk. — Dass. i. J. 1896. 52. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. (XLIX, 820 S.) 30 Mk.

—, dass. Namensregister nebst e. Sach-Ergänzungsregister zu Bd. XXI (1865) bis XLIII (1887) unter Berücksichtig. der in den Bdn. I—XX enthaltenen Autorennamen. Bearb. v. B. Schwalbe. 2. Hälfte. gr. 8°. (IX—XXII u. S. 641—1094.) Berlin, G. Reimer. 24 Mk.

Graf, J. H., der Mathematiker Jakob Steiner v. Utzendorf. Ein Lebensbild u. zugleich eine Würdigung seiner Leistungen. Mit dem Portr. u. dem Facsm. eines Briefes Steiners. gr. 8°. (III, 54 S.) Bern, Wyss. 1,20 Mk.

Häbler, Thdr., über zwei Stellen in Platons Timaeus und im Hauptwerke von Copernicus. gr. 4°. (26 S.) Grimma, Gensel. 1 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik hrsg. v. Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895. 3. (Schluss-) Hft. gr. 8°. (LXII u. 785—1173.) Berlin, G. Reimer. 11,40 M.

Jahresbericht des physik. Vereins zu Frankfurt a. Main für das Rechnungsjahr 1895/96. gr. 8°. (100 S. m. 2 Taf. u. 6 Tab.) Frankfurt/Main, Alt. 4 Mk.

Killing, Wilh., Karl Weierstrass. Rektoratsrede. gr. 8°. (21 S.) Münster, Aschendorff. 40 Pf.

Lindemann, Ferd., Gedächtnisrede auf Phil. Ludw. v. Seidel. gr. 4<sup>o</sup>. (84 S.) München, Franz. 3 Mk.

Poggendorff's, J. C., biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enth. Nachweisungen über Lebensverhältnisse u. Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen u. s. w. aller Völker u. Zeiten. 3. Bd (1858—1882). Hrsg. v. B. W. Feddersen u. A. J. v. Oettingen. 12.—15. (Schluss-) Lfg. gr. 8<sup>o</sup>. Leipzig, Barth. à 3 Mk.

### **Methode und Principien.**

Böhme's, A., Anleitung zum Unterricht im Rechnen, ein method. Handbuch für Lehrer u. Seminaristen. (13. Aufl.) Umgearbeitet v. K. Schaeffer. 2. Tl.: Das Besondere. gr. 8<sup>o</sup>. (IV u. S. 85—383.) Berlin, G. W. F. Müller. 3 Mk.

Fitzga, Eman., die leitenden Grundsätze der natürlichen Methode für den Elementarunterricht im Rechnen u. Geometrie. gr. 8<sup>o</sup>. (XVI, 213 S.) Wien, Manz. 2,40 M.

—, die natürliche Methode des Rechenunterrichtes in der Volks- u. Bürgerschule. 2 Thle. gr. 8<sup>o</sup>. Wien, Perles. 6 Mk.

Heinke, C., die Grundvorstellungen über Elektrizität u. deren technische Verwendung. In Form eines Gespräches zw. Laie u. Fachmann. 2. Aufl. m. 24 Skizzen u. Abbildgn. gr. 8<sup>o</sup>. (80 S.) Leipzig, Leiner. 1,50 Mk.

Lay, W. A., Führer durch den ersten Rechenunterricht, naturgemäßes Lehrverfahren, gegründet auf psycholog. Versuche u. angeschlossen an die Entwicklungsgeschichte des Rechenunterrichts. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 158 S. mit 3 Fig.-Taf.) Karlsruhe, Nernich. 2,89 Mk.

Rudolph, H., die Constitution der Materie u. der Zusammenhang zwischen ponderabler u. imponderabler Materie. gr. 8<sup>o</sup>. (33 S. m. Fig.) Berlin, Friedländer. 1 Mk.

### **Lehrbücher.**

Claussen, F., Leitfaden der Planimetrie. gr. 8<sup>o</sup>. (79 S. m. 109 Fig.) Leipzig, Hirt & Sohn. 1 Mk.

Zwenger, Max, Leitfaden zum Unterricht in der elementaren Mathematik mit einer Sammlung v. Aufgaben. 12. Aufl. des Leitfadens der Mathematik v. Herm. Müller. 2. Abtlg. Ebene Geometrie. Mit 117 Fig. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 158 S.) München, Lindauer. 1,60 Mk.

### **Sammlungen.**

Aufgaben für mündliches u. schriftliches Rechnen. 4. Abtlg. (6. u. 7. Schuljahr der Volksschule.) Schlussrechnen u. Anwendung

auf die Rechenfälle des bürgerl. Lebens. Lehrerausg. (Mit method. Andeutungen u. Antworten.) 2. Aufl. Hrsg. v. kathol. Lehrerverein Württembergs. gr. 8°. (VIII, 256 S.) Horb, Christian. Kart. 3,50 Mk.

— zum schriftlichen Rechnen. 4. Hft. 4. Abtlg. (6. u. 7. Schuljahr der Volksschule.) Schlussrechnen u. Anwendung auf die Rechenfälle des bürgerl. Lebens. Schülersausg. (Mit method. Andeutungen u. Figuren.) 2. Aufl. Hrsg. v. kathol. Lehrerverein Württembergs. 8°. (103 S.) Ebd. Kart. 40 Pf.

Bock, Otto, u. Rich. Schulze, geometrische Konstruktions- u. Rechenaufgaben f. Volks- u. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. gr. 8°. (IV, 51 S.) Leipzig, Wunderlich. 40 Pf.; Lösungen (36 S.) 50 Pf.

Böhme's, A., Aufgaben zum Kopfrechnen. Ein Hilfsbuch f. Lehrer. Neubearbeitung v. G. Weidenhammer. 3 Hfte. gr. 8°. Berlin, G. W. F. Müller. 2,20 Mk.

Bussler, Fr., mathematisches Übungsbuch. 2. Tl. Für den Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten (Obersekunda u. Prima) zusammengestellt. 2. Aufl. gr. 8°. (III, 206 S.) Dresden, Ehlermann. Geb. 1,80 Mk.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung, nebst den Resultaten u. den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. 7. Aufl. v. Eug. Netto. gr. 8°. (III, 216 S.) Giessen, Ricker. Geb. 4 Mk.

Fäsch, Frdr., Aufgaben zum Kopfrechnen mit beigelegten Antworten zum Schul- u. Privatgebrauche. Im engsten Anschluss an die Aufgaben zum Zifferrechnen für schweizerische Volksschulen bearb. u. hrsg. II. Tl. Das Rechnen mit Sorten u. Brüchen, Dreisatz- u. Zinsrechnung. 4. Aufl. hrsg. v. Karl Führer. gr. 8°. (156 S.) St. Gallen, Fehr. 1,60 Mk.

Fenkner, Hugo, arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik u. Chemie. Für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten bearb. Ausg. A. Vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien u. Ober-Realschulen. 1. Tl.: Pensum der Unter-Tertia, Ober-Tertia u. Unter-Secunda. 3. Aufl. gr. 8°. (VIII, 258 S.) Braunschweig, Salle. 2,20 Mk.

—, dass. Ausg. B. Vornehmlich für den Gebrauch in 6klass. höheren u. mittleren Lehranstalten, sowie in Seminarien u. gewerbl. Fachschulen. 2. Aufl. gr. 8°. (VI, 222 S.) Ebd. 1,65 Mk.

Huber, Otto, Sammlung v. arithmetischen Aufgaben mit ausgeführten Beispielen für Fortbildungsschulen, höhere Bürgerschulen, u. ähnliche Lehranstalten, sowie auch für die Unterklassen v. Mittelschulen. 1. Tl. gr. 8. (V, 76 S.) München, Oldenbourg. 1,15 Mk.

Kleyer, A., Aufgaben-Sammlung. 1375.—1386. IIft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kloos, Pet., praktische Rechenaufgaben f. Waldbauschulen u. ähnliche Lehranstalten. Gesammelt u. methodisch geordnet. 8°. (VI, 227 S.) Kaiserslautern, Crusius. Geb. 2,50 Mk.

Lichtblau, W., u. B. Wiese, Rechenbuch für Lehrerseminare. 1. Tl. Für die Unterstufe der Seminare. gr. 8°. (206 S.) Breslau, Hirt. 1,80 Mk.

Lühmann, F. v., Uebungsbuch f. den Unterricht in der Goniometrie u. der ebenen Trigonometrie. gr. 8°. (VIII, 81 S.) Berlin, Simion. 1,60 Mk.

Maiss, Ed., Aufgaben über Wärme einschliesslich der mechanischen Wärmetheorie u. der kinetischen Theorie der Gase. Für Studierende an Mittel- u. Gewerbeschulen u. zum Selbststudium für angehende Techniker, Physiker u. a. Mit 29 Fig. i. Text. gr. 8°. (V, 118 S.) Wien, Pichler. 2,40 Mk.

Nafe, Emil, Rechenaufgaben f. Bürgerschulen u. verwandte Lehranstalten. Ein Handbuch f. Lehrer. gr. 8°. (II, 174 S.) Prag, Tempsky. Geb. 2,40 Mk.

Ohlenburger, A., u. J. Würsdorfer, Rechenbuch für mündliches u. schriftliches Rechnen in 3 Hftn. Ausg. B gr. 8°. Wiesbaden, Limbarth. 1,05 Mk.

Otto, F., Rechenaufgaben für höhere Mädchenschulen. Auf Grund der Rechenaufgaben von A. Büttner u. E. Kirchhoff bearb. 7 Hfte. gr. 8°. Leipzig, Hirt & Sohn. 2,20 Mk.

Roth, Rich., landwirtschaftliche Berechnungen. Eine Sammlung von Aufgaben für den Unterricht im landwirtschaftlichen Rechnen. Für mittlere u. niedere landwirtschaftliche Schulen bearb. (Neue [Titel-] Ausg.) gr. 8°. (IV, 103 S.) Berlin, Parey. 1,20 Mk.

Sailer, Engelb., die Aufgaben aus der Elementar-Mathematik, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik u. Physik an den kgl. bayerischen humanistischen u. technischen Unterrichtsanstalten in den J. 1873—1893, gestellt wurden gr. 8°. (III, 176 S. m. 143 Fig.) München, Th. Ackermann. 3,80 Mk.

Sickenberger, Adf., Uebungsbuch zur Algebra. 2. Abtlg. 3. Stufe der Rechnungsarten, quadrat. Gleichungen, Reihen. 2. Aufl. 8°. (III, 128 S.) Ebd. Kart. 2 Mk.

Villicus, Frz., Beispiele u. Aufgaben f. das kaufm. Rechnen an dreiclassigen kaufmännischen Fortbildungsschulen. gr. 8°. (VI, 189 S.) Wien, Pichler. Kart. 1,80 Mk.

Wrobel, E., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höheren Lehranstalten bearb. 1. Tl. Pensum der Tertia u. Untersekunda. 3. Aufl. gr. 8°. (XII, 320 S.) Rostock, Werther. 2,90 Mk.

### Tabellen.

Diakow, G., Multiplications-Tabelle. (In russ., französ. u. deutscher Sprache.) qu. 4<sup>o</sup>. (32 u. 1000 S.) Petersburg, Ricker. Geb. 15 Mk.

Langenbeck, Otto, Zins-Tabelle, enth. die Zinsresultate zu 20 Zinsfüßen aus den Zinszahlen von 1 bis 300000. gr. 8<sup>o</sup>. (79 S.) Berlin, Haude & Spener. Geb. 4 Mk.

Lübing, E., mathematische Tafeln für Markscheider u. Bergingenieure, sowie zum Gebrauche f. Bergschulen. Mit in den Text gedr. Fig. 4. Aufl. Lex. 8<sup>o</sup>. (XLI, 64 S.) Berlin, Springer. Geb. 6 Mk.

Schultz, E., dekadische Logarithmen der Zahlen 1—10000. gr. 8<sup>o</sup>. (32 S.) Essen, Baedeker. 20 Pf.

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Anfangsgründe der Arithmetik u. Trigonometrie. 3. Aufl. 8<sup>o</sup>. (III, 80 S. m. 2 Taf.) Neuwied, Erzieh.-Anst. d. Brüdergemeine. Geb. 1,20 Mk.

Bortkewitsch, L. v., das Gesetz der kleinen Zahlen. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, 52 S.) Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Czuber, Eman., Vorlesung über Differential- u. Integral-Rechnung. 1. Bd. Mit 112 Fig. i. Text. gr. 8<sup>o</sup>. (XIII, 526 S.) Ebd. Geb. 12 Mk.

Daublebsky v. Sterneek, R., empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Function  $\sigma(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$  im Intervalle von 0 - 150000. gr. 8<sup>o</sup>. (190 S. m. 1 Taf.) Wien, Gerold. 3,50 Mk.

Fricke, Rob., Hauptsätze der Differential- u. Integral-Rechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 3. (Schluss-) Thl. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 38 S. m. 9 Fig.) Braunschweig, Vieweg. 1 Mk.

Frobenius, G., über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. gr. 8<sup>o</sup>. (22 S.) Berlin, G. Reimer. 1 Mk.

Fuchs, L., zur Theorie der simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen. gr. 8<sup>o</sup>. (12 S.) Ebd. 50 Pf.

Holzinger, F. S., Lehrbuch der politischen Arithmetik, für höhere Handelsschulen u. zum Selbstunterr. bearb. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (IX, 156 S.) Braunschweig, Vieweg. 3 Mk.

Kiepert, Ludw., Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung. I. Thl.: Differential-Rechnung. 8. Aufl. des gleichnam. Leitfadens von Max Stegmann. gr. 8<sup>o</sup>. (XVIII, 660 S. m. 160 Fig.) Hannover, Helwing. 12 Mk.

Koenigsberger, Leo, über die erweiterte Laplace-Poinsot'sche Potentialgleichung. gr. 8<sup>o</sup>. (9 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Mertens, F., über eine zahlentheoretische Function. gr. 8°. (70 S.) Wien, Gerold. 1,10 Mk.

Molien, Thdr., über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen. gr. 8°. (5 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Rogel, Frz., Entwicklungen einiger zahlentheoretischer Functionen in unendliche Reihen. gr. 8°. (26 S.) Prag, Rivnač. 40 Pf.

—, Transformationen arithmetischer Reihen. gr. 8°. (31 S.) Ebd. 40 Pf.

Ruland, N., praktische Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra. Ausführliche Auflösung der in E. Heis' Sammlung v. Beispielen u. s. w. enthaltenen Aufgaben. 2. Tl. Die Gleichungen u. Progressionen. Zum Selbstunterricht bestimmt. 7. Aufl. bearb. v. Karl Ruland. gr. 8°. (VIII, 571 S.) Bonn, Cohen. 7 Mk.

Schwarz, H. A., zur Lehre von den unentwickelten Functionen. gr. 8°. (7 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Ulrich, Geo., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra für den Selbstunterricht. Mit zahlreichen Uebungsaufgaben u. dazu gehörigen Auflösungen. 8°. (VII, 400 S. m. Fig.) Berlin, Aug. Schultze. 3 Mk.

Weber, Heinr., Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. 1. Bd. gr. 8°. (XV, 703 S.) Braunschweig, Vieweg. 10 M.

### Geometrie.

Degenhardt, Geo., praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Progr. gr. 4°. (30 S. m. 1 Abbildg. u. 4 Taf.) Frankfurt/M. Aufarth. 1 Mk.

Habenicht, Bodo, der Schlüssel zur Geometrie, ein Buch für Anfänger oder Zurückgebliebene an allen Lehranstalten. 12°. (24 S.) Quedlinburg, Selbstverlag. 80 Pf.

Killing, Wilh., Einführung in die Grundlagen der Geometrie. 2. (Schluss-) Bd. Mit 8 Fig. i. Text. gr. 8°. (VI, 361 S.) Paderborn, Schöningh. 7 Mk.

Küpper, C., Curventheoretisches. gr. 8°. (7 S.) Prag, Rivnač. 20 Pf.

Maennchen, Phil., Die Transformation der trilinearen ternären Form in eine teilweise symmetrische. gr. 8°. (22 S.) Leipzig, Teubner. 1,20 Mk.

Martin, P., u. O. Schmidt, Raumlehre f. Mittelschulen, Bürgerschulen u. verwandte Anstalten. Nach Formengemeinschaften bearb. 3. Hft. Kulturstätten. Mit 61 Fig. gr. 8°. (VII, 96 S. m. 1 Tab.) Dessau, Kahle. 70 Pf.

Sammlung Göschen. 41. u. 65. Bd. 12°. Leipzig, Göschen. —

41. Mähler, G., ebene Geometrie. Mit 115 zweifarb. Fig. 2. Aufl. (156 S.) — 65. Simon, Max, analytische Geometrie der Ebene. Mit 45 Abbild. (203 S.) Geb. à 80 Pf.

Schell, Wilh., allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Zur Einführung in das Studium der Curventheorie. 2. Aufl. gr. 8°. (VIII, 163 S. m Fig.) Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Sporer, B., über den Feuerbach'schen Kreis. gr. 8°. (15 S. m. 4 Fig.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Steiner's Jac., Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2. Thl. Auch unter d. Titel: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Auf Grund v. Universitätsvorlesungen u. mit Benutzung hinterlassener Manuskripte Jac. Steiner's bearb. v. Heinr. Schröter. 3. Aufl., durchgesehen v. Rud. Sturm. Mit 103 Fig. i. Text. gr. 8°. (XVII, 537 S.) Leipzig, Teubner. 14 Mk.

Tapla, Thdr., Vademecum der darstellenden Geometrie. Für Schüler gewerblicher Lehranstalten, für Schüler u. Absolventen des Gymnasiums, sowie für Praktiker. Mit 344 Fig. auf 39 Tafeln. gr. 16°. (XIII, 163 S.) Wien, Fromme. Kart. 5 Mk.

Tobel, Edw. v., Geometrie für Sekundarschulen. Weitere Ausführungen für die Hand des Lehrers. 8°. (VII, 100 S. m. Fig.) Zürich, Orell-Füssli. Kart. 1,80 Mk.

### Trigonometrie.

Hammer, E., Lehrbuch der ebenen u. sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie u. sphär. Astronomie bearb. 2. Aufl. gr. 8°. (XIV, 572 S. m. Fig. u. 1 Tab. Stuttgart, Metzler. 7,50 Mk.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Albrecht, Th., Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Decbr. 1897. Mit 1 Taf. Hrsg. v. Centralbureau der internat. Erdmessung. gr. 4°. (36 S.) Berlin, G. Reimer. 3 Mk.

Arbeiten, astronomische des k. k. Gradmessungsbureau, ausgeführt unter der Leitung v. Thdr. v. Oppolzer. Hrsg. v. Edm. Weiss u. Rob. Schram. 9. Bd. Längenbestimmungen. Publicationen für die internat. Erdmessung. gr. 4°. (III, 229 S.) Prag, Tempsky. 16 Mk.

—, astronomisch-geodätische, veröffentlicht von der kgl. bayer. Commission f. die internat. Erdmessung. 2. Hft. 1. Azimutbestimmungen auf den Stationen Irschenberg, Höhensteig, Kampenwand u. München. (Sternwarte.) 2. Neue Polhöhenbestimmung auf der

Station Kampenwand. gr. 4<sup>o</sup>. (VIII, 176 S. m. Fig.) München, Franz. 8,60 Mk.

Ergebnisse, die, der Triangulation der Schweiz. Hrsg. durch das eidgen. topogr. Bureau. 4. Lfg. Kanton Basel Stadt u. -Land. 1897. gr. 4<sup>o</sup>. (43 S. m. Fig. u. 1 Karte.) Bern, Schmid & Francke. 2,50 Mk.

Fixpunkte, die, des schweizerischen Präzisionsnivellements. Les repères du nivellement de précision de la Suisse. Hrsg. durch das eidgen. topogr. Bureau. 6. u. 7. Lfg. Fol. Ebd. à 3,20 Mk.

Höhencoten der noch nicht publizierten Nivellementszüge. Hrsg. v. eidgen. topogr. Bureau. Fol. (42 S.) Ebd. 1,60 Mk.

### Mechanik.

Finger, Jos., über das innere Virial eines elastischen Körpers. gr. 8<sup>o</sup>. (17 S.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Jäger, G., zur Frage des Widerstandes, den bewegte Körper in Flüssigkeiten u. Gasen erfahren. gr. 8<sup>o</sup>. (9 S. m. 2 Fig. Ebd. 20 Pf.

Königsberger, Leo, über die Darstellung der Kraft in der analytischen Mechanik. gr. 8<sup>o</sup>. (16 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

—, über das erweiterte Princip der Erhaltung der Flächen u. dessen Anwendung auf kinetische Potentiale 1. Ordng. gr. 8<sup>o</sup>. (11 S.) Ebd. 50 Pf.

—, über die erweiterte Laplace'sche Differentialgleichung für die allgemeine Potentialfunction. gr. 8<sup>o</sup>. (14 S.) Ebd. 50 Pf.

Rebber, Wilh., die Festigkeitslehre u. ihre Anwendung auf den Maschinenbau. Elementar behandelt zum Gebrauch für Studierende u. in der Praxis. 3. Aufl. Hrsg. v. L. Hummel. gr. 8<sup>o</sup>. (XVI. 476 S. m. 261 Abbild.) Mittweida, Polytechn. Bhlg. 10,50 Mk.

Routh, Edward John, die Dynamik der Systeme starrer Körper, in 2 Bdn. mit zahlr. Beispielen. Deutsch v. Adf. Schepp, 1. Bd.: Die Elemente. Mit 57 Fig. i. Text. gr. 8<sup>o</sup>. (XI, 472 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 10 Mk.

### Technik.

Biscan, Wilh., die Dynamomaschine. Zum Selbststudium für Mechaniker, Installateure, Maschinenschlosser, Monteure etc., sowie als Anleitung zur Selbstaufertigung von Dynamomaschinen leicht fasslich dargestellt. 6. Aufl. Mit 110 Abbild. u. Konstruktionszeichnungen. gr. 8<sup>o</sup>. (V, 128 S.) Leipzig, Leiner. 2 Mk.

David, Ludw., Rathgeber f. Anfänger im Photographieren. Handbuch für Fortgeschrittene. Mit 83 Textbildern u. 2 Taf. 6. u.

7. Aufl. 16. bis 21. Taus. 12°. (X, 202 S. mit 8 Bl. Etiketten.)  
Halle, Knapp. 1,50 Mk.

Diesener, H., praktische Unterrichtsbücher f. Bautechniker.  
I. Darstellende Geometrie. Das geometrische Zeichnen. Die Projektionslehre. Die Lehre vom Steinschnitt. Die Schattenkonstruktion. Die Perspektive u. die Farbenlehre, leichtfassl. dargestellt für Selbstunterricht u. Schulgebrauch. 4. Aufl. Mit 300 Holzschn. gr. 8°. (VI, 149 S.) Halle, Hofstetter. 4 Mk.

Encyklopädie der Photographie. gr. 8°. Halle, Knapp.  
31. Hft.: Hübl, Arth. v., die Entwicklung der photographischen Bromsilber-Gelatineplatte bei zweifelhaft richtiger Exposition. (VII, 61 S.) 2,40 Mk. — 32. Hft.: Albert, Aug., der Lichtdruck an der Hand- u. Schnellpresse sammt allen Nebenarbeiten. Mit 65 Abbild. i. Text u. 9 Taf. (VIII, 192 S.) 7 Mk.

Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. 3. Bd. Festigkeitslehre. Mit 70 Fig. i. Text. gr. 8°. (XVI, 472 S.) Leipzig, Teubner. Geb. 12 Mk.

Goldmann, Max, elektrische Verteilungsanlagen (für Gleichstrom), verbunden mit Aufgaben aus der Praxis u. Anleitungen zu praktischen Uebungen. 1. Hft. Mit 70 Abbild. Lex. 8°. (36 S.) Strelitz, Hittenkofer. 2,70 Mk.

Grawinkel, C., u. K. Strecker, Hilfsbuch f. die Elektrotechnik. Bearb. u. hrsg. v. K. Strecker. 5. Aufl. M. 361 Fig. i. Text. gr. 8°. (X, 696 S.) Berlin, Springer. Geb. 10 Mk.

Hammer, E., der logarithmische Rechenschieber u. sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instruments für Studierende u. Praktiker. Mit 4 Fig. i. Text. gr. 8°. (60 S.) Stuttgart, Metzler. 40 Pf.

Heim, Carl, die Einrichtung elektrischer Beleuchtungsanlagen für Gleichstrombetrieb. 3. Aufl. Mit über 500 Abbildgn. (In 10—12 Hftn.) 1. Hft. gr. 8°. (64 S.) Leipzig, Leiner. 1 Mk.

Herzog, Jos., u. C. P. Feldmann, Handbuch der elektrischen Beleuchtung. Mit 428 Abbild. gr. 8°. (XII, 521 S.) Berlin, Springer. Geb. 16 Mk.

Holst, A., Elektrotechniker. 25/27. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Kapp, Gisb., Elektromechanische Konstruktionen. Eine Sammlung von Konstruktionsbeispielen u. Berechnungen von Maschinen u. Apparaten für Starkstrom. Imp. 4°. (VIII, 200 S. m. 54 Fig. u. 25 Taf.) Berlin, Springer. Geb. 20 Mk.

—, elektrische Kraftübertragung. Ein Lehrbuch für Elektrotechniker. Deutsche Ausg. v. L. Holborn u. K. Kable. 3. Aufl. Mit zahlreichen in den Text gedr. Figuren. gr. 8°. (VI, 338 S.) Ebd. Geb. 8 Mk.

Krügener, R., die Hand-Camera u. ihre Anwendung für die Moment-Photographie, sowie die Beschreibung ihrer Einrichtung, der einzelnen Bestandteile u. Anwendung zu Hause u. auf Reisen. 8°. (VI, 165 S. m. 67 Fig.) Berlin, G. Schmidt. 3 Mk.

Lueger's, O., Lexikon der Technik. 27.—29. Abtlg. Stuttgart, D. Verlagsanstalt. à 5 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 24. Lfg. Jena, Costenoble. 3 Mk.

Niethammer, F., Motoren u. Hilfsapparate für elektrisch betriebene Hebezeuge. Imp. 4°. (29 S. m. 111 Fig.) Berlin, Springer. 2 Mk.

Offinger, H., English-French-Italien-German technical pocket-dictionary. Part. II. The leading language being English. 2. ed. gr. 16°. (230 S.) Stuttgart, Metzler. Geb. 3 Mk.

Pechan, Jos., Leitfaden des Maschinenbaues für Vorträge sowie zum Selbststudium. 1. Abth.: Maschinen zur Ortsveränderung, Pressen u. Accumulatoren. 4. Aufl. Mit 125 in den Text gedr. Holzschn. u. 33 Fig.-Taf. 2 Thle. gr. 8°. (VIII, 318 S.) Wien, Denticke. 9 Mk.

Pizzighelli, G., Anleitung zur Photographie. 9. Aufl. Mit 156 in den Text gedr. Abbildgn. u. 26 Taf. 12°. (VIII, 360 S.) Halle, Knapp. Geb. 3 Mk.

Rusch, M., Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabes. Auch für solche, welche nur die Kenntnisse der Volksschule besitzen. gr. 8°. (19 S. m. 6 Fig.) Wien, Pichler. 50 Pf.

Sammlung elektrotechnischer Vorträge hrsg. v. Ernst Voit. gr. 8°. Stuttgart, Enke. 1. Bd., 4. Hft. Schoop, P., über die Planti-Accumulatoren. Mit 28 Abbild. (S. 147—190.) 1 Mk. — 5. u. 6. Hft.: Heinke, C., die Hauptbegriffe der Gleich- u. Wechselstromtechnik unter Benutzung mechanischer Hilfsvorstellungen. Mit 22 Abbild. (S. 191—254.) 2 Mk. — 7. u. 8. Hft.: Kohlfürst, die Benützung einer u. derselben elektrischen Leitung für verschiedene Betriebe unter besonderer Berücksichtigung der bei den Eisenbahnen vorkommenden einschlägigen Schwachstrom Anordnungen. 2 Mk.

Slaby, A., die Funkentelegraphie. Mit 22 Abbildgn. u. 2 Karten. gr. 8°. (IV, 70 S.) Berlin, Simion. 2 Mk.

Tolhausen, Alex., Dictionnaire technologique dans les langues française, anglaise et allemande. Revu par Louis Tolhausen. (Vol. I.) Français-allemand-anglais. 4. éd. augmentée d'un grand supplément. 8°. (809 u. 165 S.) Leipzig, Tauchnitz. 9,50 Mk.

Vogel, E., Taschenbuch der prakt. Photographie. 5. Aufl. 12°. (VIII, 287 S. m. 60 Fig. u. 5 Taf.) Berlin, G. Schmidt. Geb. 3 Mk.

Weickert, A., u. R. Stolle, praktisches Maschinenrechnen. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Erfahrungswerte aus der

allgemeinen u. angewandten Mechanik in ihrer Anwendung auf den praktischen Maschinenbau. Erläutert durch zahlreiche der Praxis entnommene Beispiele u. eingeleitet durch eine leichtfassl. Darstellung der für Maschinenbauer unentbehrlichen Gesetze des allgemeinen Buchstabenrechnens. Mit über 100 in den Text gedr. Abbild. 3. Aufl. 6. u. 7. Taus. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, 262 S.) Berlin, Polytechn. Buchhlg. 3,50 Mk.

Weiler, W., Wörterbuch der Elektrizität. 3. u. 4. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Weisbach, Jul., Lehrbuch der Ingenieur- u. Maschinen-Mechanik. 3. Thl.: Die Mechanik der Zwischen- u. Arbeits-Maschinen. 2. Aufl. bearb. v. Gust. Herrmann. 3. Abthlg. Die Maschinen zur Formveränderung. 14.—16. Lfg. gr. 8<sup>o</sup>. (S. 1223—1548 m. Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Weitzel, K. G., Maschinentechniker. 82.—86. Hft. Leipzig, Schäfer. à 75 Pf.

Zacharias, Johs., transportable Akkumulatoren. Anordnung, Verwendung, Leistung, Behandlung u. Prüfung derselben. Mit 69 Abbild. im Text. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 259 S.) Berlin, Löwenthal. 7 Mk.

#### Optik, Akustik und Elasticität.

Boltzmann, Ludw., über vermeintlich irreversible Strahlungsvorgänge. 3. Mittheilg. gr. 8<sup>o</sup>. (6 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Exner, Frz., u. E. Haschek, über ultraviolette Funkenspectra der Elemente. X. Mittheilg. (enth. d. Spectra v. *Ca*, *Sz*, *Li*, *Cr*). gr. 8<sup>o</sup>. (26 S. m. 2 Taf.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Glacebrook, R. T., das Licht. Grundriss der Optik für Studierende u. Schüler. Deutsch v. E. Zermelo. 8<sup>o</sup>. (VI, 273 S. m. 134 Fig.) Berlin, Calvary. Geb. 3,60 Mk.

Kayser, H., über die Bogenspectren der Elemente der Platingruppe. gr. 4<sup>o</sup>. (44 S.) Berlin, G. Reimer. 2,50 Mk.

Koláček, Frz., Theorie der Fortpflanzung des Lichtes in anisotropen Medien in inductiver Darstellung. gr. 8<sup>o</sup>. (107 S.) Prag, Rivnač. 1,80 Mk.

Landolt, H., das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen u. dessen praktische Anwendung, bearb. unter Mitwirkung v. O. Schönrock, P. Lindner, F. Schütt, L. Berndt, T. Posner. 2. Aufl. Mit eingedr. Abbild. gr. 8<sup>o</sup>. (XXIII, 655 S.) Braunschweig, Vieweg. Geb. 18 Mk.

Mach, Ludw., optische Untersuchung der Luftstrahlen. gr. 8<sup>o</sup>. (50 S. m. 26 Fig. u. 4 Taf.) Wien, Gerold. 2,20 Mk.

Planck, Max, über irreversible Strahlungsvorgänge. 3. Mittheilg. gr. 8°. (24 S.) Berlin, Reimer. 1 Mk.

Vogel, H. C., einige Bemerkungen über den Kirchhoff'schen Spectralapparat. gr. 8°. (7 S.) Ebd. 50 Pf.

#### Erd- und Himmelskunde.

Bebber, W. J. van, die Wettersvorhersage. Eine gemeinverständliche prakt. Anleitung zur Wettersvorhersage auf Grundlage der Zeitungs-Wetter-Karten u. Zeitungs-Wetterberichte für alle Berufsarten. Im Auftrage der Direktion der deutschen Seewarte bearb. Mit zahlreichen Beispielen u. 125 Abbild. 2. Aufl. gr. 8°. (XVI, 219 S.) Stuttgart, Enke. 5 Mk.

Becker, E., Tafeln zur Berechnung der Praecession. gr. 4°. (IV, 91 S.) Karlsruhe, Braun. 5 Mk.

Braun, C., über die Gravitations-Konstante, die Masse u. mittlere Dichte der Erde nach neueren experimentellen Bestimmungen. gr. 8°. (44 S.) Münster, Aschendorff. 80 Pf.

Brenner, Leo, Mars-Beobachtungen 1896—97 auf der Manora-Sternwarte in Lussin Piccolo. gr. 4°. (32 S. m. 3 Taf.) Berlin, G. Reimer. Kart. 3 Mk.

—, Spaziergänge durch das Himmelszelt. Astronomische Plaudereien mit besonderer Berücksichtigung der Entdeckungen der letzten Jahre. Mit 7 Taf. u. 23 Textbildern. gr. 8°. (VIII, 399 S.) Leipzig, E. H. Mayer. 5,50 Mk.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Systeme der deutschen Seewarte für das Dezennium 1886—1895. Hrsg. v. d. Direktion der Seewarte. gr. 4°. (VI, 10 S.) Hamburg, Friederichsen. 2 Mk.

Foerster, W., u. P. Lehmann, die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Theils des preuss. Normalkalenders f. 1899. Nebst e. allgemeinen statistischen Beitrage von E. Blenck. gr. 8°. (V, 202 S.) Berlin, Statist. Bureau. 5 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 10. -12. Lfg. Breslau, Trewendt. à 3,60 Mk.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 8. Jahrg. 1897. Mit 5 Taf. in Schwarz- u. Chromodruck. gr. 8°. (VIII, 370 S.) Leipzig, E. H. Mayer. Kart. 7 Mk.

—, Berliner astronomisches f. 190) m. Angaben für die Oppositionen der Planeten (I)—(422) f. 1898. Hrsg. v. dem Kgl. astronom. Rechen-Institut unter Leitung v. J. Bauschinger. Der Sammlung Berliner astronom. Jahrbücher 125. Bd. gr. 8°. (X, 520 u. 8 S.) Berlin, Dümmler. 12 Mk.

—, deutsches meteorologisches für 1896. Beobachtungs-System

der deutschen Seewarte. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen an 10 Stationen II. Ordnung u. an 48 Signalstellen, sowie stündl. Aufzeichnungen an 4 Normal-Beobachtungs-Stationen. XIX. Jahrg. Hrsg. v. d. Direktion der Seewarte. Imp. 4<sup>o</sup>. (VIII, 189 S.) Hamburg, Friederichsen. 13 Mk.

Kalender, astronomischer, f. 1898 Berechnet für den Meridian u. die Polhöhe von Wien ( $16^{\circ} 20' 22''$ .  $3 = 1^{\text{h}} 5^{\text{m}} 21^{\text{s}}$ .  $49$  östl. Länge v. Greenwich,  $48^{\circ} 13' 55''$ .  $4$  nördl. Breite). Hrsg. v. d. k. k. Sternwarte. Der ganzen Reihe 6<sup>o</sup>. Jahrg.; der neuen Folge 17. Jahrg. gr. 8<sup>o</sup>. (159. S. u. Tagebuch.) Wien, Gerold. Kart. 2,40 Mk.

Klein, Herm. J., astronomische Abende. Allgemein verständliche Unterhaltungen über Geschichte u. Ergebnisse der Himmels-Erforschung. 4. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 372 S. m. 5 Taf.) Leipzig, E. H. Mayer. 5,50 Mk.

Krieger, Joh. Nep., Mond-Atlas, entworfen nach den Beobachtungen an der Pia-Sternwarte in Triest. I. Bd. Mit 28 Taf. u. Ansicht der Sternwarte. gr. 4<sup>o</sup>. (2) S. Text u. 28 Bl. Pausen.) Ebd. Kart. 12 Mk.

Mazelle, Ed., tägliche Periode des Niederschlages in Triest. gr. 8<sup>o</sup>. (37 S.) Wien, Gerold. 70 Pf.

Meyer, M. Wilh., das Weltgebäude. Eine gemeinverständliche Himmelskunde. Mit 287 Abbild. i. Text, 10 Karten u. 31 Tafeln. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 677 S.) Leipzig, Bibliogr. Institut. Geb. 16 Mk.

Mitteilungen der Hamburger Sternwarte. No. 3. Schorr, Rich., Bemerkungen u. Berichtigungen zu Carl Rümker's Hamburger Sternkatalogen 1836. O. u. 1850. O. Lex. 8<sup>o</sup>. (50 S.) Hamburg, Gräfe & Sillem. 3 Mk.

Mohn, H., Grundzüge der Meteorologie. Die Lehre v. Wind u. Wetter, nach den neuesten Forschungen gemeinverständlich dargestellt. Deutsche Orig.-Ausgabe. 5. Aufl. Mit 24 Karten u. 45 Holzschn. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 419 S.) Berlin, D. Reimer. Geb. 6 Mk.

Neudrucke von Schriften u. Karten über Meteorologie u. Erdmagnetismus. hrsg. v. G. Hellmann. No. 10 u. 11. gr. 4<sup>o</sup>. Berlin, Asher. — 10: Magnetica rara. 1269—1599. P. de Maricourt. F. Falerno. P. Nunes. J. de Castro. G. Hartmann. M. Cortés. G. Mercator. R. Norman. W. Borough. S. Stevin. Mit e. Einleitung. 15 Mk. — 11: Winkler, J. H., B. Franklin, T. F. Dalibard, L. G. Le Monnier, über Lufterlektricität 1746—1753. Mit e. Einleitung. 3,50 Mk.

Oerter, mittlere, von 622 Sternen u. scheinbare Oerter v. 450 Sternen, nebst Reductions-Tafeln f. d. Jahr 1900 u. e. Anh., enth. mittlere Oerter v. 303 südl. Sternen für 1900 O. gr. 8<sup>o</sup>. Berlin, Dümmler. 6 Mk.

Pieper, M., mathematische Erdkunde. Anhang zu Sumpf's

„Schulphysik“ u. „Grundriss der Physik“. Mit 12 in den Text gedr. Orig.-Holzschn. gr. 8<sup>o</sup>. (40 S.) Hildesheim, Lax. 40 Pf.

Publikationen der Sternwarte des eidgenöss. Polytechnikums zu Zürich. Auf Kosten der „Wolfstiftung der eidgen. Sternwarte“ hrsg. v. A. Wolfer. 1. Bd. Wolfer, A., Beobachtungen der Sonnenoberfläche in den Jahren 1887–89. gr. 4<sup>o</sup>. (XXVII, 41 S. m. 15 Taf.) Zürich, Schulthess. 12 Mk.

— des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. gr. 4<sup>o</sup>. Leipzig, Engelmann. No. 37. XI. Bd. 4. Stück. Wilsing, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne in den Jahren 1881–1885. (54 S.) 3 Mk. — No. 38. XI. Bd., 5. Stück: Müller, G., u. P. Kempf, Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichts in der Erdatmosphäre, angestellt auf d. Ätua u. in Catania. (V, III, 71 S. m. 3 Fig. u. 1 Taf.) 4 Mk.

Riggenbach, Alb., Ergebnisse 7jähriger Niederschlags-Registrierungen in Basel. gr. 4<sup>o</sup>. (18 S. m. 1 Taf.) Karlsruhe, Braun. 1,50 Mk.

Sammlung populärer Schriften der Gesellschaft Urania. No. 48 u. 49. gr. 8<sup>o</sup>. Berlin, H. Paetel. — 48. Spies, P., flüssige Luft u. tiefe Temperaturen. (18 S. m. 3 Fig.) — 49. Ule, Willi, Falbs Theorien im Lichte der Wissenschaft. (16 S.) à 60 Pf.

Schweiger-Lorchenfeld, A. v., Atlas der Himmelskunde. 15.–2<sup>o</sup>. Lfg. Wien, Hartleben. à 1 Mk.

Thraen, A., Bestimmung der Bahn des period. Kometen v. Wolf. (Komet 1884 III u. 1891 II.) Verbindung der Erscheinungen in den J. 1884 u. 1891 u. Vorausberechnung des Laufes des Kometen für die Erscheinung im J. 1892. gr. 4<sup>o</sup>. (43 S.) Wien, Gerold. 2,60 Mk.

Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der k. u. k. Kriegs Marine in Pola. No. 1–4. Fol. Wien, Gerold. 13 Mk.

— des kgl. preuss. meteorolog. Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. gr. 4<sup>o</sup>. Berlin, Asher & Co. (1896 II. Hft.) Ergebnisse der magnet. Beobachtgn. in Potsdam i. J. 1896 u. internationale magnet. Simultanbeobachtungen 1896. (43 u. XXXIV S. m. 5 Taf.) 6 Mk. 1897 I. Hft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung i. J. 1897, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1897. Beobachtungssystem des Königreich Preussen u. benachbarter Staaten. (56 S.) 3 Mk.

— des kgl. astronomischen Recheninstituts zu Berlin. No. 6. Bauschinger, J., genäherte Oppositions-Ephemeriden v. 45 kleinen Planeten f. 1898 Jan. bis Aug. Unter Mitwirkung mehrerer Astronomen, insbesondere der Herren A. Berberich u. G. Neugebauer herausgeg. 4<sup>o</sup>. (16 S.) Berlin, Dümmler. 1,20 Mk.

— der kgl. Sternwarte zu Bonn. Hrsg. v. Frdr. Küstner. No. 2.

Küstner, F., Untersuchungen über die Eigenbewegung v. 335 Sternen nach älteren u. eigenen Beobachtungen. gr. 4°. (123 S.) Bonn, Cohen. 7 Mk.

Wanner, Stef., populäre Darstellung u. Erklärung des Föhneff. 8°. (25 S.) Winterthur, Kieschke. 60 Pf.

Zenger, K. W., die Meteorologie der Sonne u. das Wetter i. J. 1888, zugleich Wetterprognose f. d. J. 1898. gr. 8°. (XII, 87 S. m. 1 Taf.) Prag, Rivnač. 2 Mk.

### Nautik.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde 1898. 27. Jahrg. 8. Aufl. gr. 8°. (XXIII, 400 S. u. Ergänzungshft. 39 Bl.) Bremen, Heinsins. Geb. 7,50 Mk.

Seibt, Wilh., der selbstthätige Gezeitenpegel (System Seibt-Fuess). gr. 8°. (8 S. m. 3 Abbild.) Berlin, Ernst & Sohn. 80 Pf.

Verzeichnis der Leuchtfeuer aller Meere. Hrsg. v. Reichsmarineamt. 8 Hfte. Abgeschlossen am 1. XII. 1897. (Mit je 1 farb. Taf.) hoch 4°. Berlin, Mittler. 6 Mk.

### Physik.

Annalen der Physik u. Chemie. Hrsg. v. G. u. E. Wiedemann. Neue Folge 63. Bd. Der ganzen Folge 299. Bd. 1897. 13. Hft. (Festschrift für Gust. Wiedemann zum 50jähr. Doctorjubiläum.) gr. 8°. (XVI, 435 S. m. Fig.) Leipzig, Barth. 5 Mk.

Arbeiten des physikalisch-chemischen Instituts der Universität Leipzig aus den J. 1887—1896. Gesammelt u. hrsg. v. Wilh. Ostwald. 4 Bde. gr. 8°. Leipzig, Engelmann. 36 Mk.

Benndorf, Hans, über das Verhalten rotierender Isolatoren im Magnetfeld u. eine darauf bezügliche Arbeit A. Campetti's. gr. 8°. (10 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Bürker, Karl, über die Erzeugung u. physiologische Wirkung schnell u. langsam verlaufender magnet.-elektrischer Ströme. gr. 8°. (27 S.) Tübingen, Pietzcker. 70 Pf.

Conrad, P., Praeparationen für den Physik-Unterricht in Volks- u. Mittelschulen. Mit Zugrundelegung von Individuen. Nach Herbart'schen Grundsätzen bearb. 2. Tl.: Optik, Wärme, Magnetismus u. Elektrizität. M. 8 Fig.-Taf. gr. 8°. (V, 185 S.) Dresden, Bleyl & Kämmerer. 4 Mk.

Ernecke, Erich, über elektrische Wellen und ihre Anwendung zur Demonstration der Telegraphie ohne Draht nach Marconi. Experimentalvortrag. Mit 12 Abbild. 2. Abdruck. gr. 8°. (15 S.) Berlin, Gärtner. 80 Pf.

Goldstein, E., über die Structur des Kathodenlichts u. die Natur der Lenard'schen Strahlen. gr. 8°. (10 S. m. 6 Fig.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Hentze, Willy, analytische Berechnung elektrischer Leitungen. Mit 37 i. d. Text gedruckten Figuren. gr. 8°. (V, 81 S.) Berlin, Springer. Geb. 3 Mk.

Holborn, L., über die Vertheilung des inducirten Magnetismus im Cylinder. gr. 8°. (10 S. m. 2 Fig.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Jäger, Gust. u. Stef. Meyer, Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten u. deren Aenderung mit der Temperatur. (I. u. II. Mittheilg.) gr. 8°. (29 S. m. 7 Fig. u. 31 S. m. 30 Fig.) Wien, Gerold. à 80 Pf.

Klemencič, Ign., über die magnetische Nachwirkung bei verschiedenen Feldstärken. gr. 8°. (9 S.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Koppe's, K., Anfangsgründe der Physik mit Einschluss der Chemie u. mathemat. Geographie. 21. Aufl. (der neuen Bearbeitung 2. Aufl.) Ausg. B. in 2 Lehrgängen. Für höhere Lehranstalten nach den preuss. Lehrplänen v. 1892 bearb. v. A. Husmann. 2. Tl.: Hauptlehrgang. Mit 318 in den Text gedruckten Holzschnitten u. 1 Sternkarte. gr. 8°. (X, 472 S.) Essen, Baedeker. Geb. 4,80 M.

Korn, Arth., eine Theorie der Gravitation u. der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. 2. Aufl. 2. Tl. Theorie der elektrischen Erscheinungen. 2. Abschn. Elektromotorische Wirkungen. (Schluss.) gr. 8°. (VI u. S. 211—280.) Berlin, Dümmler. 1,50 Mk.

Lehmann, O., die elektrischen Lichterscheinungen od. Entladungen, bezeichnet als Glimmer, Büschel, Funken u. Lichtbogen, in freier Luft u. in Vacuumröhren. gr. 8°. (VIII, 569 S. m. Abbildgn u. 10 Taf.) Halle, Knapp. 20 Mk.

Scheel, Karl, über Fernthermometer. gr. 8°. (48 S. m. 9 Abbild.) Halle, Marhold. 1 Mk.

Schumann, Hans, Einführung in die neuere Elektrizitätslehre in elementar mathematischer Behandlung. Für höhere Schulen sowie zum Studium für angehende Elektrotechniker. 8°. (VIII, 215 S. m. Fig.) München, Wolf. 3,20 Mk.

Schurig, Ewald, die Elektrizität. Das Wissenswürdigste aus dem Gebiete der Elektrizität für jedermann leichtverständlich dargestellt. Mit 30 Fig. i. Text. 4. Aufl. 8°. (III, 72 S.) Leipzig, Möschke. 1,30 Mk.

Tumlirz, O., die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke. gr. 8°. (14 S. m. 2 Fig.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Voigt, Wold., die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung. Mit 52 Fig. i. Text. gr. 8°. (VIII, 243 S.) Leipzig, Veit & Co. 5 Mk.

Warburg, E., über die Entstehung der Spitzenentladung. gr. 8°. (7 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Weber, H., über die Differentialgleichungen der elektrolytischen Verschiebungen. gr. 8°. (11 S. m. 2 Fig.) Ebd. 50 Pf.

Weinstein, B., Physik u. Chemie. Gemeinfassliche Darstellung ihrer Erscheinungen u. Lehren. Mit 34 in den Text gedr. Fig. gr. 8°. (VIII, 427 S.) Berlin, Springer. 4 Mk.

Zwenger, Max, Leitfaden zum Unterricht in der Physik. Nach der Schulordnung für die humanistischen Gymnasien Bayerns bearb. Mit 112 in den Text gedr. Fig. gr. 8°. (VIII, 176 S.) München, Lindauer. 2,20 Mk.

### Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch physikalische Klasse. Neue Folge. 1. Bd. No. 1. Nachtrag. gr. 4°. Berlin, Weidmann. 3 Mk.

— der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikal. Classe. 24. Bd. No. II: Wundt, die geometrisch-optischen Täuschungen. Mit 65 Textfig. Lex. 8°. (S. 53—178.) — No. III: Peter, Bruno, Beobachtungen am sechszölligen Repsold'schen Helio- meter der Leipziger Sternwarte. II. Abhdlg. Mit 2 Textfig. u. 1 Taf. Lex. 8°. (135 S.) Leipzig, Teubner. à 5 Mk.

Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissensch. Mathem.-phys. Classe. 1897. IV. gr. 8°. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

— dass. 1897. V. u. VI. gr. 8°. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Grosse, W., Unterhaltende Probleme u. Spiele in mathematischer Beleuchtung. 8°. (V, 252 S. m. 176 Fig. u. 1 Taf.) Leipzig, Quandt & Händel. 5,20 Mk.

Sachregister der Abhandlungen u. Berichte der mathem.-phys. Classe der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1846—1895. Lex. 8°. (III u. S. 65—184.) Leipzig, Teubner. 2,50 Mk.

Sammlung Göschen. 72., 11. u. 47. Bdchen. 12°. Leipzig, Göschen. Geb. à 80 Pf. 72. Doehlemann, Karl, projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Mit 57 Fig. (162 S.) — 11. Moe- bius, A. F., Astronomie, Grösse, Bewegung u. Entfernung der Himmels- körper. 2. Aufl. v. Walt. F. Wislicenus. Mit 36 Abbildgn. u. 1 Karte des nördl. Sternhimmels. (164 S.) — 47. Schubert, Herm., Arith- metik u. Algebra. 2. Aufl. (171 S.)

Sitzungsberichte, Münchener. Mathem. Classe. 1897. 3. Hft. München, Franz. 1,20 Mk.

—, Wiener. Mathem.-naturw. Classe. Abth. II<sup>a</sup>. 106. Bd. 5. u. 6. Hft. Wien, Gerold. 3,60 Mk.



Fig. 1.

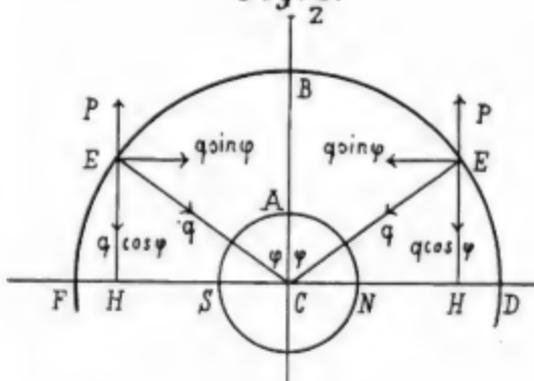


Fig. 2.

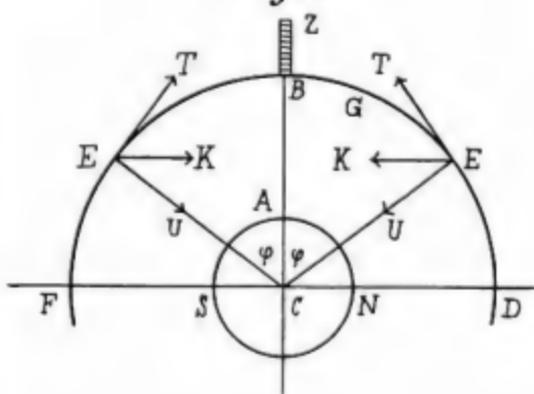


Fig. 3.

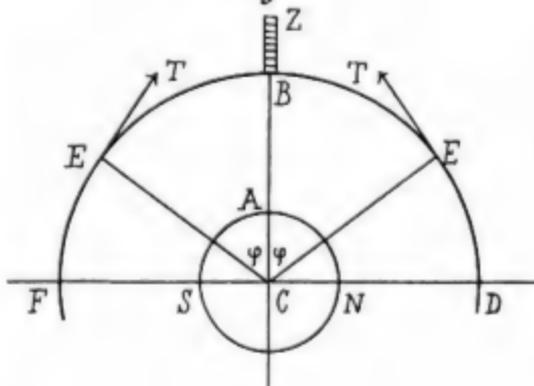


Fig.



Fig.





Fig. 1.

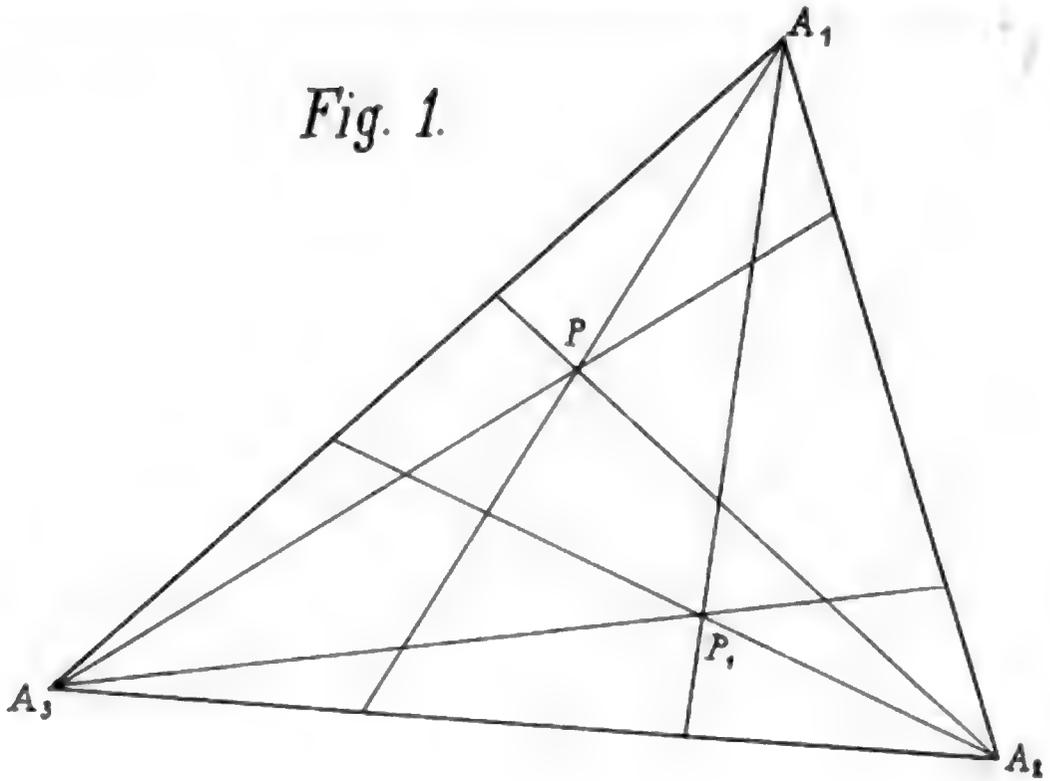
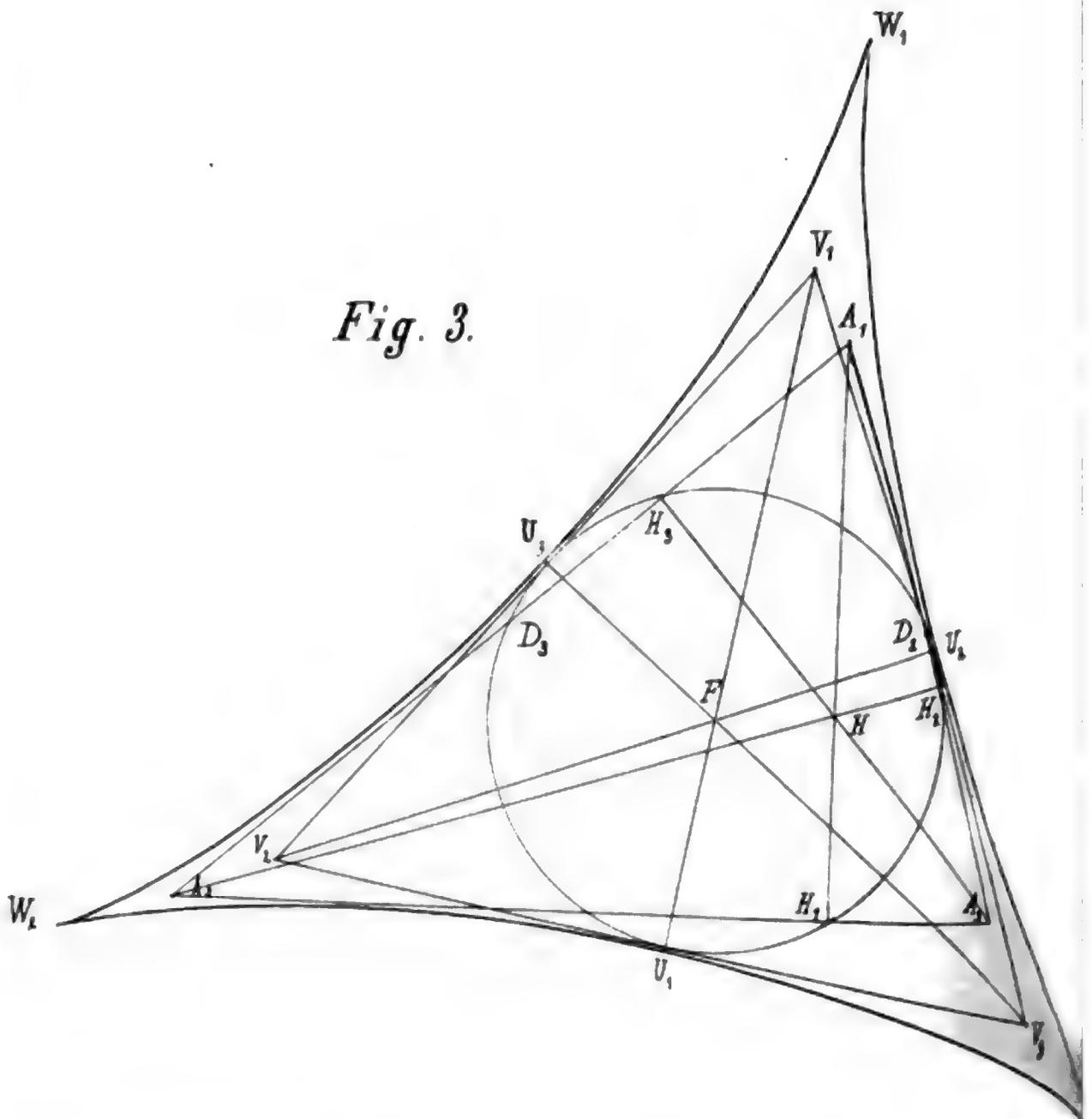


Fig. 3.



XII. Bücking: Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks.





Sturm, Ch., Lehrbuch der Analysis. Uebers. v. Thdr. Gross. 2. Bd. Lex. 8<sup>o</sup>. (VIII, 351 S. m. 104 Fig.) Berlin, Fischers technolog. Verl. 7,50 Mk.

Thomae, J., Elementare Theorie der analytischen Funktionen e. complexen Veränderlichen. 2. Aufl. gr. 4<sup>o</sup>. (VIII, 150 S. m. Holzschn.) Halle, L. Nebert. 9 Mk.

### Geometrie.

Binder, Wilh., die Indulationen ebener Curven  $C_0^4$ . gr. 8<sup>o</sup>. (18 S. m. 4 Taf.) Wien, Gerold's Sohn. 80 Pf.

—, die Tangentenprobleme der Kreis-Epicycloide m. Doppelpunkt. gr. 8<sup>o</sup>. (14 S. m. 2 Taf.) Ebd. 70 Pf.

Böttger, Adf., die ebene Geometrie. Für den Unterricht an der Realschule bearb. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (152 S. m. 138 Fig.). Leipzig, Dürr'sche Buchhl. Geb. 1,80 Mk.

Carda, Karl, zur Geometrie auf Flächen constanter Krümmung. gr. 8<sup>o</sup>. (18 S. m. 4 Fig.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Erlcr, W., die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehraustalt a bearb. Mit 30 Fig. im Text. 5. Aufl. v. L. Huebner. gr. 8<sup>o</sup>. (VI, 60 S.) Leipzig, Teubner. Kart. 1,20 Mk.

Goettler, Joh., conforme Abbildung e. v. confocalen, elliptischen u. hyperbolischen Kurven  $n$ ter Ordaung begrenzten Flächenstückes auf der Halbebene. gr. 8<sup>o</sup>. 31 S. m. 3 Taf.) Passau, Waldbauer. 1 Mk.

Henkel, Ludw., Anleitung zur Behandl. planimetrischer Konstruktionsaufgaben. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, 20 S. m. 10 Fig.) Bielefeld, Velhagen & Klasing. Kart. 50 Pf.

Heun, Karl, die Vektoren der Geschwindigkeit u. der Beschleunigung des Punktes u. der geraden Linie. Progr. 4<sup>o</sup>. (28 S.) Berlin, Gaertner. 1 Mk.

Klug, Leop., die Configuration des Pascal'schen Sechseckes im Allgemeinen u. in 4 speciellen Fällen. gr. 8<sup>o</sup>. (132 S. m. 1 Tab. u. 3 Taf.) Wien, J. Eisenstein & Co. 3 Mk.

Lackemann, C., die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- u. Uebungsbuch f. den geometr. Unterricht an 6klass. höheren Lehranstalten auf Grund der preuss. Lehrpläne v. 1892 bearb. 2. Tl. Trigonometrie u. Stereometrie. 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (64 S. m. 23 Fig.) Breslau, Hirt. Kart. 80 Pf.

Lesser, O., Einführung in den geometrischen Unterricht. gr. 8<sup>o</sup>. (18 S. m. 14 Fig.) Dortmund, Köppen. 40 Pf.

Naprawnik, Frz., Geometrie u. geometrisches Zeichnen f. Knaben-Bürgerschulen. Mit 329 in den Text gedr. Abbildgn. u. 23 Fig.-Taf. Ausg. in 1 Bd. gr. 8°. (VIII, 200 S.) Wien, Pichler. Geb. 2 Mk.

Ploner, Innocenz, O. F. M., die Einheit d. Kegelschnitte. Bozen, Auer & Co. 1 Mk.

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearb. v. Wilh. Fiedler. 1. Thl. Die Elemente u. die Theorie der Flächen 2. Grades. 4. Aufl. gr. 8°. (XXIV, 445 S. m. Fig.) Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Schuster, M., Aufgaben f. den Anfangsunterricht in der Geometrie. gr. 8°. (III, 96 S.) Oldenburg, Littmann. Geb. 80 Pf.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Arbeiten, die astronomisch-geodätischen, des k. u. k. militär-geographischen Institutes in Wien. Publication f. die internationale Erdmessg. Hrsg. v. dem k. u. k. militär-geograph. Institute. gr. 4°. Wien, Lechner. VII., X., XI. Band. 10 —; 10 —; 16 — Mk.

Franke, J. H., geodätische Punktkoordinirung in sphärischen Kleinsystemen. Vergleichende Entwicklgn. im einheitl. Koordinatensystem der bayer. Landesvermessg. gr. 8°. (VI, 80 S. m. 1 Karte.) München, Th. Ackermann. 2,40 Mk.

Koordinaten u. Höhen sämtlicher v. d. trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme bestimmten Punkte im Reg.-Bez. Magdeburg. [Aus: „Die Königl. preuss. Landes-Triangulation, XIV. Thl.] Lex. 8°. (IV u. S. 395 - 527.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 2 Mk.

Kutscher, H., Geometrie, Feldmessen u. Nivelliren. 2. Aufl. 8°. (IV, 122 S. mit 164 Abbildgn). Berlin, Parey. Geb. 1,40 Mk.

Landes-Triangulation, die königl. preussische. Abrisse, Koordinaten u. Höhen sämtl. v. d. trigonometr. Abtheilg. der Landesaufnahme bestimmten Punkte. 14. Thl. Reg.-Bezirk Magdeburg. Hrsg. v. der trigonomet. Abteilg. der Landesaufnahme. Mit 9 Beilagen. Lex. 8°. (VIII, 527 S.) Berlin, Mittler & Sohn. Kart. 10 Mk.

— dass. Hauptdreiecke. 10. Th. A. Der nördl. niederländ. Anschluss. B. Der südl. niederländ. Anschluss. C. Der belg. Anschluss. Gemessen u. bearb. v. der trigonometr. Abtheilg. der Landesaufnahme. Mit 2 Uebersichtsblättern u. 16 Skizzen. Lex. 8°. (X, 275 S.) Ebd. Kart. 10 Mk.

Nielsen, Chr., die Feldmess- u. Nivellierkunde u. das Drainieren. Für den Unterricht an landwirtschaftl. Schulen bearb.

2. Aufl. Mit 3 Taf. u. 10! Textabbildgn. 8°. (VIII, 112 S.) Berlin, Parey. Geb. 2 Mk.

Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Abtheilung der Königl. preussischen Landes-Aufnahme. 7. u. 10.—12. Hft. 12°. Berlin, Mittler & Sohn. Kart. à 1 Mk.

Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes. Bestimmungen v. Azimuten im Harzgebiete ausgeführt in d. J. 1887 bis 1891. Bestimmung der Längendifferenz Jerxheim-Kuiel mittels opt. Signale. gr. 4°. (V, 86 S. m. 1 Taf.) Berlin, Stankiewicz. 6 Mk.

### Mechanik.

Ahlborn, Fr., der Schwebflug u. die Fallbewegung ebener Tafeln in der Luft. Ueber die Stabilität der Flugapparate. 4°. (32 u. 51 S. m. Fig. u. 2 Taf.) Hamburg, Friederichsen & Co. 5 Mk.

Berg, Otto, über die Schwingungsdauer von Kondensatorentladungen. gr. 8°. (31 S.) Freiburg i. B., Speyer & Kaerner. 1 Mk.

Lauens tein, R., Leitfaden der Mechanik. Elementares Lehrbuch f. technische Mittelschulen u. zum Selbstunterricht. 3. Aufl. gr. 8°. (VII, 199 S. m. 191 Abbildgn.) Stuttgart, Bergsträsser. 4 Mk.

Weisstein, Jos., die rationelle Mechanik. 1. Bd. Statik. — Dynamik des Punktes. gr. 8°. (XVIII, 350 S. m. 97 Fig.) Wien, Braumüller. 10 Mk.

### Technik.

Bell, Louis, Stromvertheilung f. elektrische Bahnen. Deutsche Bearbeitg. v. Gust. Rasch. gr. 8°. (VII, 262 S. m. 136 Fig.) Berlin, Springer. Geb. in Leinw. 8 Mk.

Bibliothek, photographische, Nr. 9. u. 10. gr. 8°. Berlin, G. Schmidt. — 9. Schmidt, Hans, Fernobjektiv im Portrait-, Architekten- u. Landschaftsfache. Mit 10 Taf. u. 52 Fig. im Text. (VII, 1:0 S.) 3,60 Mk. — 10. Gaedicke, J., der Gummidruck (direkter Pigmentdruck). Eine Anleitg. f. Amateure u. Fachphotographen. Mit 2 Fig. im Text u. 2 Taf. (VIII, 79 S.) 2,25 Mk.

Eder, Jos. Maria, ausführliches Handbuch der Photographie. 2. Thl. 2. Aufl. gr. 8°. (XII, 595 S. m. 265 Holzschn.) Halle, Knapp. 12 Mk.

Encyklopädie der Photographie. 33. Heft. Neuhauss, R.: die Farbenphotographie nach Lippmann's Verfahren. Neue Untersuchgn. u. Ergebnisse. gr. 8°. Mit 3 Textbildern u. 1 Taf. in Lichtdr. VII. 72 S.) Ebd. 3 Mk.

Fortschritte d. Elektrotechnik. 11. Jahrg. 1897. 4. Heft.  
Berlin, Springer, 5,60 Mk.

Gross, Alfr., in Firma Ferd. Gross, die Dynamomaschine.  
Kurz gefasste prakt. Anleitg. zur Selbstanfertigg. kleiner Dyname-  
maschinen u. Elektromotoren, nebst Beschreibg. u. Konstruktions-  
zeichnng. einiger Modelle. Für Laien bearb. gr. 8<sup>o</sup>. (36 S.) Stutt-  
gart, Wittwer. 1 Mk.

Holz Müller, Gust., die Ingenieur-Mathematik in elementarer  
Behandlung. 2. Tl. A. u. d. T.: das Potential u. seine Anwendg.  
auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektri-  
cität, der Wärme u. der Hydrodynamik, in elementarer Behandlg.  
dargestellt. Mit 237 Fig., zahlreichen Uebungsbeispielen u. e. Anh.  
üb. die Masseinheiten. gr. 8<sup>o</sup>. (XVII, 440 S.) Leipzig, Teubner.  
Geb. 6 Mk.

Jahrbuch f. Photographie u. Reproductions-Technik f. d. J.  
1898. Hrsg. v. Jos. Maria Eder. 12. Jahrg. Mit 111 Abbildgn. im  
Texte u. 30 artist. Taf. Halle, Knapp. 8 Mk.

Kaiserling, Carl, Praktikum der wissenschaftlichen Photo-  
graphie. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 404 S. m. 193 Abbildgn. u. 4 [1 farb.] Taf.)  
Berlin. G. Schmidt. 8 Mk.

Meissner, G., Hydraulik. 2. Aufl. 25. u. 26. Lfg. Jena,  
Costenoble. à 3 Mk.

—, Kraftübertragung. 2. Aufl. 7. u. 8. Lfg. Ebd. à 3 Mk.

Neuhauß, Rich., Lehrbuch der Mikrophotographie. Mit 62  
Abbildgn. in Holzschn. u. 3 Taf. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XV, 236 S.)  
Braunschweig, Bruhn. 8 Mk.

Pechan, Jos., Leitfaden des Maschinenbaues f. Vorträge so-  
wie zum Selbststudium. 3 Abth. Werkzeugmaschinen u. Transmis-  
sionen. 2. Aufl. Mit 21 in den Text gedr. Holzschn. u. 41 Fig-  
Taf. gr. 8<sup>o</sup>. (VIII, 271 S.) Wien, Deuticke. 9 Mk.

Sammlung elektrotechnischer Vorträge, hrsg. v. Ernst Vreit.  
1. Bd. 9. Hft. Feldmann, C. P., die elektrischen Transformations-  
methoden. Mit 31 Abbildgn. — Hummel, G., über Motorelektrici-  
tätszähler. Mit 13 Abbildgn. (S. 321—366) gr. 8<sup>o</sup>. Stuttgart,  
Enke. 1 Mk.

Schmidt, K. E. T., Experimental-Vorlesg. üb. Elektrotechnik.  
2.—5. Lfg. Halle, Knapp. à 1 Mk.

Schoop, Paul, Handbuch der elektrischen Accumulatoren  
auf Grundlage der Erfahrgu. u. m. besond. Berücksichtg. der techn.  
Herstellg. gr. 8<sup>o</sup>. (X, 514 S. m. 193 Abbildgn.) Stuttgart, Enke.  
12 Mk.

Weitzel, Karl Geo., die Schule des Maschinentechnikers.  
10. Bd, 2. Tl. — Pohlhausen, Aug., die Maschinen-Elemente. 2. Tl.

(IV u. S. 355—438 m. 12 Fig. u. 11 Taf.) Lex. 8°. Leipzig, Schäfer. 3 Mk.

— dass. 87.—90. (Schluss)-Hft. Ebd. à 50 Pf.)

Zeitschrift, deutsche, f. Elektrotechnik. Hrsg. Arthur Wilke. 5. Jahrg. 1898. 24 Nrn. hoch 4°. Nr. 1. 16 S. m. Abbildgn. Halle, Knapp. Vierteljährlich 2 Mk.

### Optik, Akustik und Elastizität.

Bach, C., Elasticität u. Festigkeit. Die f. die Technik wichtigsten Sätze u. deren erfahrungsgemäss. Grundlage. Mit in den Text gedr. Abbildgn. u. 18 Taf. im Lichtdr. 3. Aufl. gr. 8°. (XIX, 570 S.) Berlin, Springer. Geb. in Leinw. 16 Mk.

Eder, J. M., u. E. Valenta: die Spectra des Schwefels. gr. 4°. (55 S. m. 2 Fig. u. 3 Taf.) Wien, Gerold's Sohn. 1,10 Mk.

Exner, Frz., u. E. Haschek, über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. XI. Mitthlg. (enth. die Spectra v. *Rb*, *Cs*, *Va*). gr. 8°. (25 S. m. 2 Taf.) Ebd. 1,10 Mk.

Guthjahr, Wilhm., die Diakanotik des Kreises. Progr. 4°. (28 S. m. 2 Taf.) Berlin, Gaertner. 1 Mk.

Thompson, Silvanus P., über sichtbares u. unsichtbares Licht. Eine Reihe v. Vorlesgn., geh. an der Royal-Institution v. Gross-Britannien. Deutsch v. Otto Lummer. gr. 8°. (IX, 229 S. m. ca. 150 Abbildgn. u. 10 Taf.) Halle, Knapp. 9 Mk.

### Erd- und Himmelskunde.

Diesterwegs populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. von M. Milh. Meyer, unter Mitwirkg v. B. Schwalbe. 19. Aufl. Mit 4 Sternkarten, 2 Uebersichtskarten des Planeten Mars, e. farbig ausgeführten Darstellg. e. Sonnenfinsterniss, e. Heliograv. e. farb. Spektral-Taf., 6 Vollbildern, 97 in den Text gedr. Abbildgn, sowie dem Bildniss des Verfassers in Kupferstich. gr. 8°. (VIII, 428 S.) Hamburg, Grand. 7 Mk.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Systeme der deutschen Seewarte f. das Dezennium 1886—1895. Hrsg. v. d. Direktion der Seewarte. gr. 4°. (VI, 10 S.) Hamburg, Friedrichsen & Co. 2 Mk.

Handwörterbuch der Astronomie. 13. Lfg. Breslau, Trendt. 3,60 Mk.

Heinrich, Sonnenschein-Dauer in Rostock (landwirtschaftliche Versuchs-Station) im J. 1897. (In ganzen u. hundertstel Stun-

den). Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, angestellt auf der auf der landwirtschaftl. Versuchsstation zu Rostock im J. 1897. gr. 8°. (2 Tab. u. 1 Taf.) Güstrow, Opitz & Co. 49 Pf.

Jahrbuch des königl. sächsischen meteorologischen Institutes. 1896. XIV. Jahr. 2. Abth. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an der Station I. Ordnung Chemnitz im J. 1896. Hierzu 2 Taf. Zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1896. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. Hrsg. von Paul Schreiber. gr. 4°. Chemnitz, M. Bülz. (60 S.) 5 Mk.

Kienast, Herm., das Klima v. Königsberg i. Pr. I. Thl. Die Niederschlagsverhältnisse der J. 1848—1897. Fol. (64 S. m. 2 Taf.) Königsberg, Koch. 3 Mk.

Koglgruber, Cajetan, der angehende Astronom oder leichtfassliche Anleitung zur Sternkunde. gr. 8°. (III, 51 S. m. 1 Taf.) Graz, Styria. 85 Pf.

Liznar, J., die Verteilung der erdmagnetischen Kraft in Oesterreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den J. 1890—1894 ausgeführten Messungen. II. Thl. A. Die normale Vertheilg. zur Epoche 1890·0. B. Die Störgn. u. d. störenden Kräfte zur Epoche 1890·0. C. Die normale Vertheilg. zur Epoche 1850·0. D. Die Störgn. der Epoche 1850·0. E. Säculare Aenderg. F. Formel zur Berechng. der erdmagnet. Elemente f. e. beliebige zwischen 1850 u. 1890 liegende Epoche. gr. 4°. (16 S. m. 8 Karten). Wien, Gerolds Sohn. 7,80 Mk.

Plassmann, Jos., Himmelskunde. Versuch e. method. Einführg. in die Hauptlehren der Astronomie. Mit 1 Titelbild in Farbendruck, 216 Illustr. u. 3 Karten. gr. 8°. (XVI, 627 S.) Freiburg i. B., Herder. 13 Mk.

Verhandlungen der Konferenz der Vorstände deutscher meteorologischer Centralstellen zu Berlin vom 13. bis 17. X. 1897. gr. 8°. (31 S. m. 1 Karte.) Berlin, Asher & Co. 1 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorologischen Instituts. Hrsg. durch Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen in den J. 1895 u. 1896 Mit 11 Abbildgn. im Text. gr. 4°. (XXIX, 33 S.) Ebd. 3 Mk.

— dass. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im J. 1896. gr. 4°. (XXIV, 119 S. m. 9 Fig. u. 1 Taf.) Ebd. 9 Mk.

— dass. 1897. 2. Hft. Ergebnisse der Beobachtgn. an den Stationen II. u. III. Ordnung im J. 1897, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch f. 1897. Beobachtungssystem des Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. gr. 4°. (S. 57—110.) Ebd. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellsch. 32. Jahrg. 3. u. 4. Hft. u. 33. Jahrg. 1. Hft. Leipzig, Engelmann. à 1 Mk.

### Nautik.

Heyenga, H., Ortsbestimmung u. Kompass-Berichtigung nach neuer Theorie unter Anwendung v. 3 verschiedenen Staudlinien-Systemen zur Erweiterung, Vervollkommnung u. Vereinfachung der nautischen Astronomie. Fol. (IV, 140 S. m. Fig.) Hamburg, Eckhardt & Messtorff. Geb. in Leinw. 10 Mk.

Sammlung Göschen. 84. Bdchn. Schulze, Frz., Nautik. Kurzer Abriss des täglich an Bord v. Handelsschiffen angewandten Teils der Schifffahrtskunde. 12<sup>o</sup>. Mit 56 Abbildgn. (161 S.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. 80 Pf.

### Physik.

Abhandlungen, physikalische. gr. 4<sup>o</sup>. (III, 13 u. 44 S. m. 1 Taf.) Berlin, Georg Reimer. Kart. 4,50 Mk.

Blümel, Ant., über elektrische Entladungsfiguren auf photographischen Platten. Progr. 4<sup>o</sup>. (21 S. m. 2 Taf.) Berlin, Gaertner. 1 Mk.

Bott, Paul, graphische Darstellung elektrischer Wechselströme. Progr. 4<sup>o</sup>. (35 S.) Ebd. 1 Mk.

Graetz, L., die Elektrizität u. ihre Anwendungen. Ein Lehr- u. Lesebuch. Mit 490 Abbildgn. 7. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 584 S.) Stuttgart, Engelhorn. 7 Mk.

Gross, G., die mechanische Wärmetheorie (Thermodynamik) unter besond. Berücksicht. der Molekulartheorie u. der sich daraus ergebenden Erweiterung des Anwendungsgebietes der Thermodynamik; nebst Anwendgn. auf Wärmemotoren, Kältemaschinen u. andere techn. Einrichtgn. Leichtfasslich behandelt. 1. Bd gr. 8<sup>o</sup>. (XIII, 254 S. m. 47 Abbildgn.) Jena, Costenoble. 8 Mk.

Hann, P., weitere Beiträge zu den Grundlagen f. e. Theorie der täglichen Oscillation des Barometers. gr. 8<sup>o</sup>. (79 S.) Wien, Gerold's Sohn. 1,70 Mk.

Helmholtz, H. v., Vorlesungen üb. theoretische Physik. Hrsg. v. Arth. König, Otto Krigar Menzel, Frz. Richarz, Carl Runge. I. Bd. 2 Abth. u. III. Bd. Lex. 8<sup>o</sup>. Leipzig, J. A. Barth. 27 Mk.

Jäger, Gust. u. Stef. Mayer, Bestimmung der Magnetisierungszahlen von Flüssigkeiten u. deren Aenderung in der Temperatur. gr. 8<sup>o</sup>. (9 S. m. 9 Fig.) Wien. Gerold. 30 Pf.

Kerntler, Frz., die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen. Nachtrag zu der Abhandlg: „Die elektrodynam. Grundges. u. das eigentl. Elementargesetz“. gr. 8<sup>o</sup>. (18 S.) Budapest (II), Selbstverlag. 50 Pf.

Klemenčič, Ign., weitere Untersuchungen üb. den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensator-entladungen. gr. 8<sup>o</sup>. (V, 332 S.) Leipzig, E. A. Seemann. 7 Mk.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. Leop. Pfändler unter Mitwirkg. v. Otto Lummer. (In 3 Bdn.) Mit 2981 Holzst. u. 13 Taf. in Farbendr. 2. Thl. 2. Bd. 2. Abth. gr. 8<sup>o</sup>. (1. Abth. Reg., IX S., u. 2. Abth. XIV, 768 S.) Braunschweig, Vieweg. 10 Mk.

Nernst, W., u. A. Schönfliess, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung, mit besond. Berücksicht. der Chemie. 2. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (XII, 339 S. m. 68 Fig.) München, Dr. E. Wolff. 9 Mk.

Neumann, Carl, die elektrischen Kräfte. Darlegung u. genauere Betrachtung der v. hervorr. Physikern u. von Hermann v. Helmholtz entwickelten mathemat. Theorien. 2. (Schluss-)Thl. Ueber die v. angeestellten Untersuchungen in seinen älteren und neueren Arbeiten. Teubner. 14 Mk.

Pfützner, H., die elektrischen Starkströme, ihre Erzeugung u. Anwendung. In leichtfassl. Weise dargestellt. 3. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (IV, 100 S. m. 47 Fig. auf 5 Taf.) Dresden, Th. Jentsch, Gust., Theodor. 2,75 Mk.

Sammlung Götschen. 76. u. 77. Bdn. Jäger, Gust. (Hrsg.) II. Lichtische Physik. I. Mechanik u. Akustik. (155 S. m. Fig.) in Leipzig u. Wärme. (156 S. m. Fig.) 12<sup>o</sup>. Leipzig, Götschen. Gedr. & 80 Pf.

Schweidler, E. R. v., Messungen an Flammen u. Tropfen. 1. Aufl. gr. 8<sup>o</sup>. (9 S. m. 1 Fig.) Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Weiler, W., Wörterbuch d. Electricität. 9.—11. Hft. Schäfer. à 75 Pf.

Weinhold, Adf., F., Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentiren im Unterricht an Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen u. Gewerbeschulen. 3. Aufl. Mit 4 lith. Taf. u. gegen 550 in den Text gedr. Holzschn. (In 3 Lfgn.) 1. Lfg. Lex. 8<sup>o</sup>. (S. 1—240.) Leipzig, Quandt & Händel. 8 Mk.

Wiedemann, Gust., die Lehre v. der Electricität. 2. Aufl. Zugleich als 4. Aufl. der Lehre vom Galvanismus u. Elektromagnetismus. 4. Bd. gr. 8<sup>o</sup>. (XIII, 1237 S. m. 269 Holzst.) Braunschweig, Vieweg. 32 Mk.

#### Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikal. Klasse. Neue Folge. 1. Bd. Nr. 2. Brendel, Mart., Theorie der kleinen Planeten. 1. Th. gr. 4<sup>o</sup>. (171 S.) Berlin, Weidmann. 16 Mk.

Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. 71. Bd. Nr. 5. Schilling, Frdr., Geometrisch-analytische Theorie der symmetrischen S-Functionen m. e. einfachen Nebenpunkt. gr. 4°. Mit 2 Taf. (S. 207—300). Leipzig, W. Engelmann. 7 Mk.

— mathematische. gr. 4°. (III, 32 S. m. 3 Taf.) Berlin, G. Reimer. Kart. 3,50 Mk.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche aus Ungarn, Hrsg. v. Roland Baron Eötvös, Jul. König, Karl v. Than. Red. v. Aug. Heller. 14. Bd. 1895—96. gr. 8°. (XVI, 437 S. m. Fig.) Budapest, Kilián. 8 Mk.

Hausschatz des Wissens.. 215. Hft. Maser, H., die Physik. 5. Hft. gr. 8°. (1. Bd. S. 145—192) Neudamm, Neumann. à 3) Pfg.

Hullmann, K. mathematische Abhandlungen. I. Die Reihen. II. Die Dreiteilg. des Winkels. III. Das delische Problem. gr. 8°. (52 S. m. Fig.) München, J. A. Finsterlin Nehf. 1,50 Mk.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 6. Bd. 1897. 1. Hft. Enth. die Chronik der Vereinigung f. d. J. 1897, sowie kurze Berichte üb. die auf der Versammlung in Braunschweig geh. Vorträge. Hrsg. v. G. Hauck u. A. Gutzmer. gr. 8°. (142 S.) Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. (Nr. 12 u. 96). — 12. Kants allgemeine Naturgeschichte u. Theorie des Himmels od. Versuch v. der Verfassg. u. dem mechan. Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt 1755. Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. (Neue Aufl.) 8°. (158 S.) — 96. Newton's, Sir Isaac, Optik od. Abhandlung üb. Spiegelungen, Brechnng., Beuggn. u. Farben des Lichts. (1704). Uebers. u. hrsg. v. William Abendroth. I. Buch. Mit dem Bildniss v. Sir Isaac Newton u. 46 Fig. im Text. (132 S.) 8°. Leipzig, W. Engelmann. Kart. à 2,40 Mk.

Sammlung, Göschen. 51. Bdchn. Bänklen, O. Th., Formelsammlung u. Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphär. Trigonometrie, mathemat. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene u. des Raumes, der Differential- u. Integralrechng. 12°. Mit 18 Fig. 2. Aufl. (229 S.) Leipzig, Göschen. 80 Pf.

Schubert, Herm., mathematische Mussestunden. Eine Sammlg. v. Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathemat. Natur. 8°. (V, 286 S.) Ebd. Geb. 5 Mk.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg.

1897. 2 Bde. Mit 43 Taf. u. 31 Textfig. (In böhm. u. deutscher Sprache). gr. 8°. Prag, Rivnáč. à 12 Mk.

Sitzungsberichte, Münchener. Mathemat. Classe. 1893.  
1. Hft. München, Franz' Verl. 1,20 Mk.

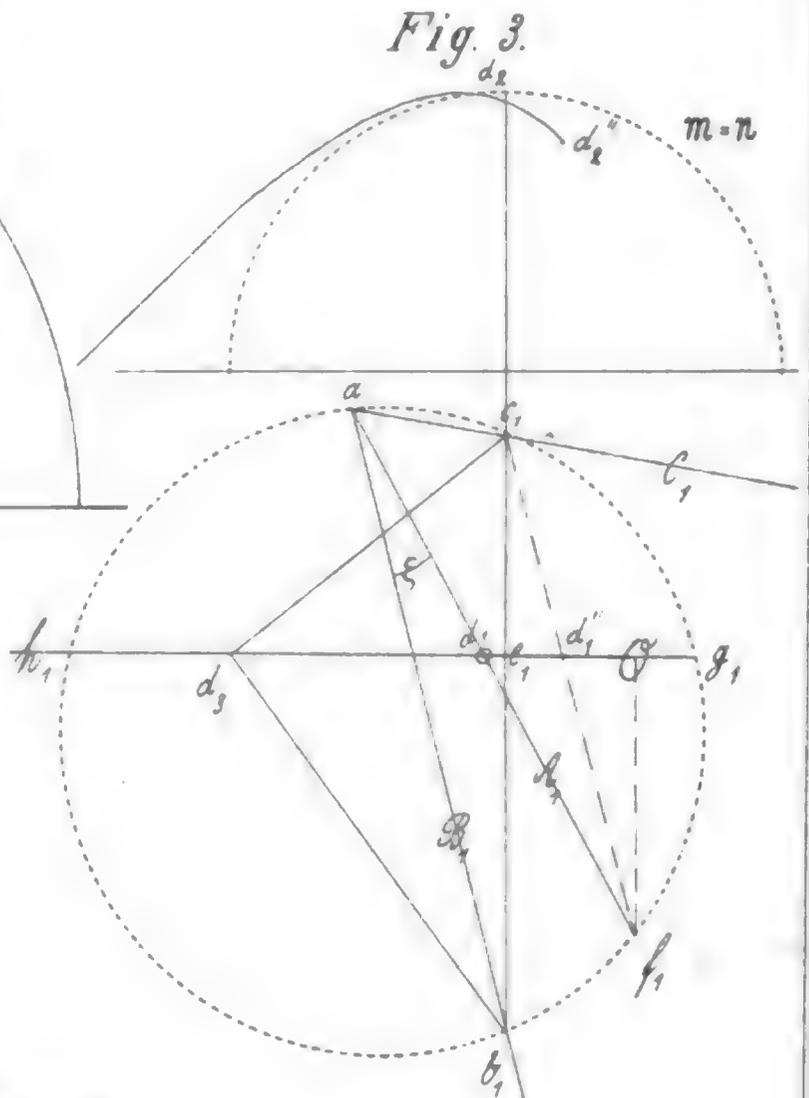
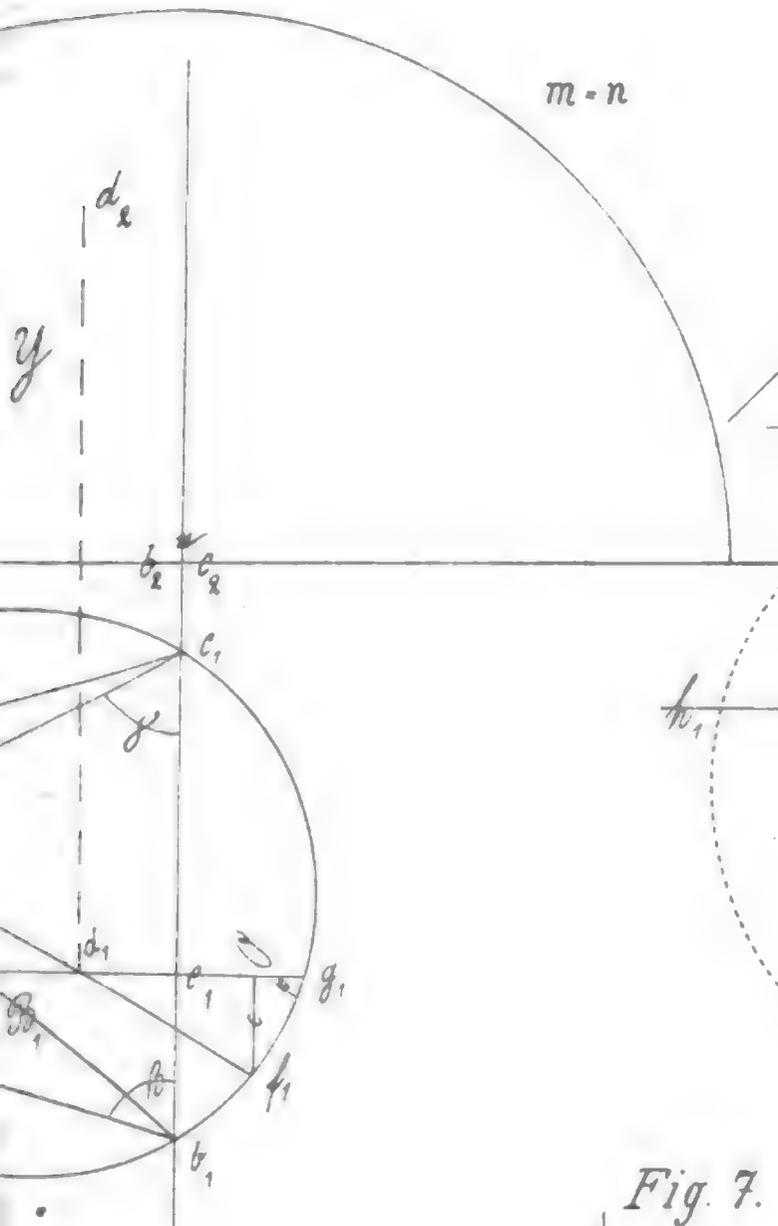
— Wiener. Math.-natur. Classe 1. Abthl. 106. Bd. 8.—10.  
Hft. Wien, Gerold. 1 Mk.

— dasselbe. Abth. IIa. 106. Bd. 7.—10. Hft. Ebd. 15,70 Mk.

— dasselbe. Abth. IIb. 106. Bd. 8.—10. Hft. Ebd. 3 Mk.

Zeitschrift f. Math. u. Physik, hrsg. unter der Red. v. R.  
Mehncke u. M. Cantor. Supplement zum 42. Jahrg. Der Supple-  
mente XIII. gr. 8°. Leipzig, Teubner. 8 Mk.





m-n

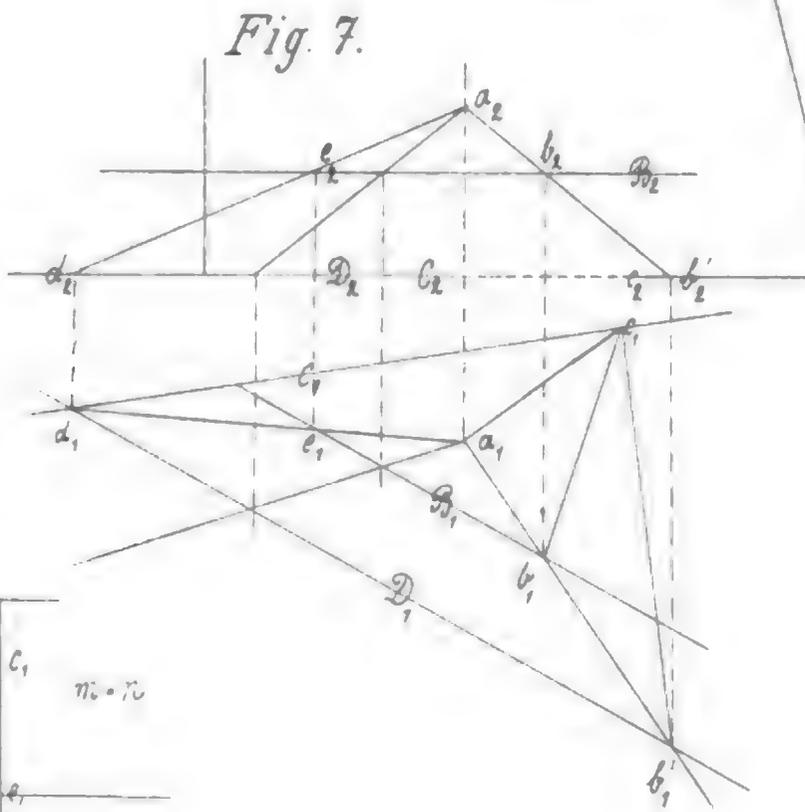
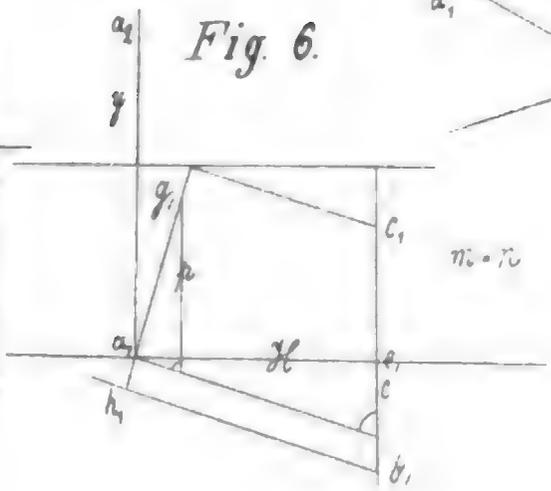


Fig. 6.



# Litterarischer Bericht

## LXIV.

---

### Methode und Principien.

Mélanges de géométrie euclidienne et non euclidienne. Par P. Mansion, Professeur à l'Université de Gand. 38 S.

Es werden Relationen zwischen der euklidischen, lobatschefskischen und riemannschen Geometrie aus Licht gezogen, deren zwei letztere sich dadurch von der euklidischen unterscheiden, dass die lobatschefskische von den euklidischen Axiomen 11. und 12. (hier genannt Postulat 5. und 6.) nur das Axiom 12, die riemannsche nur das Axiom 11. aufnimmt. Voraus geht die Zusammenstellung der Sätze von Legendre, Saccheri, Lambert, Taurinus, Gauss, welche schon vor Lobatschefski die euklidische Grenze in euklidischer Geometrie überschritten haben. In vorliegender Ausgabe ist mit dieser Schrift eine andere desselben Verfassers verbunden: „Méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non euclidienne.“ — welche von der sphärischen Geometrie aus auf die nichteuklidische übergeht. H.

Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. Von Dr. Arthur Korn, Privatdocent an der Universität München. Zweite Auflage. Berlin 1893. Ferd. Dümmler. 277 S.

Das Princip der Abfassung des Werkes wird hier im Vorwort ausgesprochen. Dass der Verfasser bei seinen an die Hypothese

gestellten Forderungen über die Beziehung zwischen Theorie und Hypothese ohne Erörterung hinweggeht, ist freilich im Grunde zulässig, sofern diese Beziehung als rein logische wol bekannt sein sollte. Um seine Aufstellung zu beurteilen, können wir nicht umhin darauf einzugehen. Eine Theorie fordert die Scheidung der einzelnen Elemente der Erscheinungen, welche je einem Causalgesetz unterliegen. Das Causalgesetz des isolirten Elements ist die Hypothese. Der Verfasser misst nun „den Anspruch der Hypothesen auf Anerkennung“ nach zwei Eigenschaften: 1) ihre formale Einfachheit, 2) ihre unmittelbare Anschauung (Intuition). Er verzichtet gleich anfangs auf exacten Ausdruck der Bedingungen, ja er räumt sogar, als ob beide einander beeinträchtigten, der zweiten Forderung ein veto gegen die erste ein. In der That entbehren beide der Objectivität. Wir wollen sie deshalb nicht verwerfen: sie stehen nach der hier waltenden Auffassung nur an unrechter Stelle; bei genauer logischem Eingehen kann man sie wol in objectiv geltende und einander nicht beeinträchtigende Forderungen überführen. Dass die das Gesetz ausdrückende Function einfach sei, ist nicht notwendig; wol aber müssen die Erscheinungen in ihre einfachsten Bestandteile zerlegt werden (wie die Radicale in der Chemie). So ist z. B. die Newton'sche Function der Anziehung in ihrer Einfachheit nicht genau richtig (die genauere, auch für kleine Entfernung geltende, wird noch gesucht); wesentlich aber an der Newton'schen Hypothese ist, dass die Bewegung aller starren Körper auf ein und dasselbe Anziehungsgesetz zweier Massenpunkte zurück geführt wird. Diese Bedingung ist exact und objectiv. — Auch die unmittelbare Anschauung können wir nicht ganz entbehrlieh machen; nur hat sie keine Beziehung zum Causalgesetz, sondern beruht auf Anticipationen in den elementarsten Begriffen von Raum und Materie, die nie in Frage gestellt sind. Von ihnen ist bisher keine Hypothese berührt worden. Dagegen hat sich in neuster Zeit eine erschreckende Menge Litteratur breit gemacht, die im Namen angeblich mangelnder Intuition, insbesondere gegen die Hypothese der Fernwirkung die unsinnigsten Einwände erhoben hat, und der Verfasser hat, obgleich er die meisten Aufstellungen derart widerlegt, jene Erzeugnisse unreifer Verstandesentwicklung einer Berücksichtigung für wert gehalten, indem er doch in der Hauptsache auch von seinem Standpunkte damit einverstanden ist, dass der Fernwirkung die unmittelbare Anschauung fehle, dieselbe also zu verwerfen sei. Diese Behauptung zu begründen hat er nicht versucht und möchte auch unmöglich sein; das Gegenteil zeigt sich beständig im gewöhnlichen Leben: im Gespräche z. B. erscheint die Wirkung der Rede unmittelbar als Fernwirkung; erst hinterher kann man nach den vermittelnden Vorgängen fragen,

die nicht einmal bis ans Ende bekannt sind. Begreiflich sind freilich auch in jenen nachträglichen Erklärungsversuchen die plumpsten Irrungen von Laien durch Befangenheit in gedankenloser Gewohnheit; denn es gibt auch Fälle unentbehrlicher Vermittelung zur Erreichung menschlicher Zwecke. Minder begreiflich ist es, dass ein wissenschaftlicher Forscher durch die vielen Aeusserungen derart dazu vermocht worden sei, das unerfüllte Bedürfniss der Intuition anzuerkennen. Annehmbarer ist vielmehr die Vermutung, dass der Verfasser den zahlreichen Stimmen nur beigetreten ist, um zu Gunsten seines Verlegers von der Menge etwas an Popularität für seine Hypothese zu profitiren. Dem Vorstehenden zufolge hat die Hypothese überhaupt keiner subjecten Forderung eines Dilettanten-Publicums, sondern nur der einen objectiven Bedingung zu genügen, dass durch sie die auf eine beliebige Epoche folgenden Vorgänge in einem isolirten materiellen System eindeutig bestimmt sind. Der Verfasser entscheidet sich für die von Bernoulli der Hydrodynamik zugrunde gelegte Hypothese, um nachzuweisen, dass sie auch auf die Hertz'sche Theorie der Elektrizität anwendbar ist. Die Abschnitte des Werkes sind folgende: 1. Teil: Grundlage der Hydrodynamik und Theorie der Gravitation: Bewegung starrer Körper in einer gewöhnlichen Flüssigkeit. Bewegung pulsirender Kugel in wirbelloser Flüssigkeit, oscillirende Kugeln und starre Ringe in gewöhnlicher Flüssigkeit; 2. Teil: Theorie der elektrischen Erscheinungen: ponderomotorische Wirkungen, elektrisch pulsirende Kugeln, elektromotorische Wirkungen; Theorie Maxwell's und ihre Einwirkung auf neuere Theorienbildungen.

Hoppe.

Grundzüge der kinetischen Naturlehre. Von Baron N. Dellingshausen. Heidelberg 1898. Carl Winter. 520 S.

Diese Bearbeitung der Naturlehre folgt dem Gedanken, dass die Lehre erst von da an eine wissenschaftliche sei, wo sie alle Vorgänge als Bewegungen eines allgemeinen, unterschiedslosen Substrats darzustellen vermag. Die Gegenstände der einzelnen Lehren sind folgende: die Form der innern Bewegungen, der innere Arbeitsvorrat der Körper, die Energie der freien Bewegungen, die äussere Bewegung der Körper, die Gesetze des Stosses, die Körper unter einem Drucke, die Sonnenenergie und die innere Erdwärme, die Schwere der Körper, die Zustandsänderungen der Körper, die chemischen Erscheinungen, verschiedene Erscheinungen (darunter auch Licht, Elektrizität und Magnetismus), die weitere Aufgabe der Naturlehre.

H.

4\*

La théorie des parallèles démontrée rigoureusement. Essai sur le livre I<sup>er</sup> des éléments d'Euclide. Par Michel Frolov. Paris 1893. Carré et Naud. Bale et Genève. Georg et Co. 46 S.

Die Schrift bietet viel Interesse durch Vereinigung der gesamten Litteratur der Neuzeit, welche aus der Forschung betreffend das Parallelenproblem hervorgegangen ist, indem sie genügende Vertrautheit mit mathematischer Logik bekundet, um alle Forschungswerke in gutem innern Zusammenhange wiederzugeben. Dies wird schon in der Vorrede begonnen, dann in der Einleitung, dann in dem bis jetzt erschienenen, ebene Geometrie, erstes Buch betitelten Teile der Schrift fortgesetzt. Die Abschnitte des 1. Buches sind: geradlinige Figuren, Senkrechte und Schiefe, Dreiecke, Vielecke. Summe der Vieleckswinkel, Parallelen. Es enthält 13 Lehrsätze, Mit Lehrsatz 14. „Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann nicht kleiner als 2 Rechte sein“ — macht der Verfasser, nämlich durch Ergänzung des Legendre'schen Satzes „Sie kann nicht grösser sein“ — einen neuen Versuch den Parallelenatz zu beweisen. Da er über seinen ersten Beweisversuch, dessen Fehler im 61. litt. Bericht Seite 6 angezeigt ist, sich nicht äussert, so mag die Kritik des neuen Versuches vorbehalten bleiben. Hoppe.

---

### L e h r b ü c h e r.

Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Curs für die Hand des Lehrers bearbeitet von Dr. K. Fink, Rektor der Realanstalt zu Tübingen. Mit 10 Figurentafeln und 24 Blättern für die darstellend-geometrischen Uebungen gezeichnet von Reallehrer Auer in Tübingen. Tübingen 1896. H. Laupp. 151 S.

Es wird eine Reihe von Lehrstunden vorgeführt, worin der Lehrer über einige vorgezeigte Modelle von Raumgebilden grösstenteils nur Fragen an die Schüler richtet, die sie aus ihrer Anschauung zu beantworten haben; die daraus gezogenen allgemeinen Urteile fügt er selbst einzeln an. Von Beweisen ist auch einmal die Rede, doch handelt es sich nur um deren vorgeschriebene Form. Im 1. Cursus wird gezeigt: die Elemente des Raums; Richtung, Dimension, Aufgabe der Geometrie; die elementaren Mittel der Darstellung der mathematischen Raumgebilde; Bewegungsfähigkeit der Figuren, Distanz, Winkel, identische Gebilde, centrale und axiale Symmetrie, parallele Gerade, Parallelenbüschel verschiedener Richtung; Ein-

leitung in die Lehre vom Dreieck, Viereck und Vieleck; Parallelverschiebung, Drehung, Umklappung einer Figur; das Dreieck; der Kreis; das Viereck, dessen besondere Arten, einfachsten Flächensätze, -Berechnungen und -Verwandlungen, Verjüngungsmaßstab. Im 2. Cursus: Euklidische Axiome und Beweisformen; Aufgabenlösung; einige weitere Flächensätze, Ausziehen der Quadratwurzel auf geometrischem und rechnerischem Wege; ähnliche Figuren, Ähnlichkeitspunkt; stetige Teilung, Sätze über gewisse regelmässige Figuren; regelmässige Vielecke und ihre Berechnung, Kreisberechnung; harmonische Elemente; Sätze des Menelaus und Céva, harmonische Elemente am Viereck und Vielseit, Ähnlichkeitsachsen und Ähnlichkeitscentra bei 3 Kreisen; Anwendung der Sätze des Menelaus und des Céva auf besondere Fälle des Dreiecks und Vierecks; Potenz eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis, Potenzlinie, potenzhaltende Punkte zweier Kreise; das Berührungsproblem des Apollonius. Ziel des Unterrichts scheint hier überall Bekanntschaft mit den Gegenständen und Resultaten der Doctrin zu sein; alle Urteile beruhen auf Autorität des Lehrers, auf exacte Schlüsse wird nicht eingegangen. Die Selbsttätigkeit der Schüler liegt nicht sowol in der Beantwortung der Fragen, die ja stets durch Controle des Lehrers vor Irrtum geschützt ist, sondern im Zeichnen der Figuren, wozu viel Uebungsstoff dargeboten ist. Dem Buche voraus geht eine ausführliche Darlegung der Grundsätze des Verfassers, nach welchen es bearbeitet ist. Daraus sei hervorgehoben, dass die projective Geometrie, schon ehe zu ihr übergegangen wird, bei jeder Gelegenheit vorbereitet werden soll. Dagegen ist nirgends die Absicht ausgesprochen, noch zu rechtfertigen gesucht, die Pflege der mathematischen Logik so geringschätzig beiseite zu lassen, wie es in der Tat geschieht. Ein Anhang gibt die Geschichte der Geometrie. Die für die Hand des Schülers bearbeitete Sammlung von Aufgaben ist im 62. litt. Bericht, Seite 16 besprochen. Hoppe.

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verknüpfung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösungen von Aufgaben systematisch bearbeitet von Werner Jos. Schüller, Seminarlehrer in Boppard am Rhein. Zweite, um die Logarithmen vermehrte Ausgabe. Mit 54 Figuren im Text. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 478 S.

Das Buch ist nach wissenschaftlichen Grundsätzen bearbeitet. Diese sind im Vorwort besprochen, jedoch nur nach sehr oberfläch-

lichen Gesichtspunkten motivirt. Was hier als Verbesserung hervorgehoben wird, weist auf ein von der trügerischen formalen Logik geschaffenes Vorurteil hin, das nur einzeln als pädagogischer Misserfolg beachtet wird, während der allgemeine Irrthum sich noch immer behauptet. Gleichwie eine geschlossene Linie im Raume kein Feld bestimmt, solange dessen Fläche nicht in extenso bekannt ist, so wird auch kein Begriff durch Definition Eigentum des Schülers, wenn dieser nicht vorher schon den Inhalt gekannt hat. Hieraus erklären sich genügend die vom Verfasser nur erfahrungsmässig angeführten Umstände, denen er im vorliegenden Buche abzuhelfen denkt, die man aber auch, wenn man ihren Grund im Auge hat, durch Handhabung des Unterrichts vermeiden oder unschädlich machen kann. Es wird angeführt, dass die inductive Methode das Lernen leichter macht als die deductive. Sehr begreiflich; denn die deductive geht, im Allgemeinen beginnend am Begriffsinhalte vorbei, die inductive in seinem Gebiete herum. Die inductive liefert also, was die deductive voraussetzt; ist aber der Begriff gewonnen, und wird sein Inhalt im Bewusstsein erhalten, so ist der directe Erkenntnissweg der ausschliesslich deductive. Das anfängliche Bedürfniss der Induction schwindet aber im Fortgang der Lehre zu einem Minimum zusammen, wenn gemäss dem synthetischen Aufbau der Theorie der neue Begriff immer seinen Inhalt im alten schon grösstenteils vorfindet. Ferner wird angeführt, dass, wie viele Stimmen behaupten, die Arithmetik wegen der abstracten Natur ihrer Gegenstände Schwierigkeit böte, „ungeniessbar“ sei und mit Unlust erlernt würde. Der Verfasser eilt dem Umstand abzuhelfen, ohne zu fragen, ob die Klage Grund hat. In der That wird nirgends der Schüler unmittelbar in das Gebiet der abstracten Zahl eingeführt; denn in der untersten Classe, selbst der Gymnasien, wird nur mit benannten, also concreten Zahlen gerechnet. Der nachherige Uebergang zur abstracten Zahl aber vollzieht sich ganz von selbst unmerklich durch das Zählen und die dekadische Schreibung, bei welcher das Bewusstsein vom verschiedenen Werte der Einheit immer erhalten bleibt. Dass es ein Misgriff ist, wenn Manche eine angebliche Schwierigkeit vornehmlich der Arithmetik in der abstracten Natur ihrer Gegenstände suchen, erhellt auch, wenn man beachtet, dass die Gegenstände der Geometrie gleicherweise abstract sind; sie abstrahirt vom Stoffe wie die Arithmetik von der zu wählenden Einheit. Die Abstraction ist ein notwendiges Glied in der Entwicklung der Begriffe und bezeichnet darin eine neue Stufe ebensowol in der Geometrie wie in der Arithmetik. Im Vorwort wird auf eine ganz andre Eigenschaft der Geometrie Gewicht gelegt, nämlich die sogenannte Anschaulichkeit. Diese beruht (was hier nicht ausgesprochen ist) auf einer wesentlichen und dem Verständniss sehr förderlichen

Transformation. Ein System, welches ursprünglich vom Gedanken nur successiv, also in einer Zeit durchlaufen werden kann, lässt sich in einfachen Fällen durch räumliche Darstellung wiedergeben, so dass es gleichzeitig im ganzen überschaut wird, dem zufolge die entferntesten Partien in ihrer Beziehung erkannt werden können. Die Ausführung berücksichtigt nun mit Mass und nach selbständigem Urteil vorgehend, unbeirrt durch vorgenannte Stimmen Unkundiger, die im Vorwort berührten Punkte. Die Methode ist nicht wesentlich abweichend von der üblichen; doch zeichnet sich das Verfahren aus durch äusserste Ausführlichkeit und Gründlichkeit in den Principien. Zu erwähnen ist besonders die Anwendung der Construction zur Darstellung des Zahlengebiets, erst des reellen bei Einführung der Negativen, später des complexen bei Einführung der Imaginären. Zu vermeiden ist natürlich der Schein, als wäre der Begriff der Negativen und der Imaginären aus der Geometrie entlehnt, eine Täuschung die vielleicht bisher von Anwendung der Construction abgehalten hat, aber bei vorliegendem Verfahren nicht wol möglich ist. Die Abschnitte des Buchs sind nach einer Einleitung und den Rechnungsarten 1., 2. und 3. Stufe nebst Inversion und Erweiterungen des Zahlbegriffs: Zahlentheorie, Proportionen, Gleichungen 1. und 2. Grades, Determinanten, irrationale, imaginäre, complexe Zahlen. Dann folgen viele Ergänzungen, erst unter diesen die Theorie der Logarithmen als zweite Inversion der Potenzen. H.

---

## G e o m e t r i e.

Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Erster Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. H. Ganter, Professor an der Kantonsschule in Aarau, und F. Rudio, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 54 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Leipzig 1897. B. G. Teubner. 176 S.

Die 2. Auflage ist im 55. litt. Bericht, S. 28 besprochen. Die Verbesserung bezieht sich auf Gruppierung und Präcision einiger Ausdrücke. Die Uebungsbeispiele sind um 31 vermehrt. H.

Projective Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. Karl Doehlemann, Privatdocent an der Universität München. Mit 57 Figuren. Leipzig 1898. G. J. Göschen. 162 S.

Diese übersichtliche Behandlung wird namentlich denjenigen, welche sich nicht productiv mit projectiver Geometrie beschäftigen, zur Kenntnissnahme der Nomenclatur und der Dogmen willkommen sein.

H.

## M e c h a n i k.

Over zekere trillingen van hoogere orde van abnormale intensiteit (relatietrillingen) bei mechanismen met meerdere graden van vrijheid, Door D. J. Korteweg. (Verhandlungen der Koninkl. Ak. v. Wet. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel V. No. 8) Amsterdam 1897. Johannes Müller. 4<sup>o</sup>. 31 S.

Ein System gleichzeitiger Vibrationen wird durch eine nach Cosinus der Perioden fortschreitende Reihensumme dargestellt. Es werden nun einzelne Fälle berechnet. Nach Definition, Auftreten und Untersuchung der Gesetze der Intensitätserhöhung der „Relationsschwingungen“, Bedeutung in der Mechanik, der Lehre vom Ton und Licht und Darlegung der Ansicht von Routh, dergemäss eine scharfe Grenze bei Einfluss einer Relation ist, je nachdem die absolute Coefficientensumme  $<$  oder  $> 4$  ist, werden 3 Arten von Relationsschwingungen unterschieden, Relationsschwingungen höhern Grades.  $S_1 > 4$ ; Erscheinungen im Spectrum. Der Fall  $S_1 = 4$ . Der Fall  $S_1 = 3$ ; Pseudo-Summe und Pseudo-Octavschwingung. Der Fall  $S_1 = 2$ ; Pseudo-Gleichung. Reine Relationsschwingung. Aussonderungsmechanismen. Symmetrische Mechanismen. Kugelschwingungen.

H.

Ur theorien för de solida kropparnes rörelse. Af A. V. Bäcklund, E. O. Professor i Lund. Efter författarens universitetsföreläsningar tvänne månader af vårterminen 1896. Lund, Oleerupska. 122 S.

Die Gegenstände der hier herausgegebenen Vorlesungen sind folgende: Allgemeine Charaktere der Bewegung fester Körper. Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt ohne äussere Kräfte. Unter Schwere als einziger äussern Kraft. Die die Präcession und Nutation bildenden Bewegungen auf den Taggleichheitslinien und an der Erdaxe. Rotation des Mondes um seinen Schwerpunkt. Bewegung der Erdpole infolge variirender Massenverteilung der Erde.

H.

De versnellingen van hoogere orden. Door Dr. G. Schouten. Verhandelingen der Koninkl. Ak v. Wet. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel II. No. 5. Amsterdam 1894. Johannes Müller. 4<sup>o</sup>. 26 S.

Die Arbeit schliesst sich an die Kinematik von Somoff an. Es werden sehr ausführlich die elementaren Begriffe der Kinematik entwickelt und benannt, geometrisch und in Rechnungsform mittelst rechtwinkliger Coordinaten dargestellt. Beschleunigungsvector heisst die Strecke gleich der Beschleunigung eines Punktes eines Gebildes in tangentialer Richtung an die Bahn vom momentanen Punkte aus gezogen, Beschleunigung nächst höherer Ordnung die Beschleunigung des Endpunkts des Beschleunigungsvector. Die Längen ihrer Orthogonalprojectionen finden sich ausgedrückt in höheren Differentialquotienten des Weges nach der Zeit. Die Theorie wird weiter durchgeführt in Betreff der Winkelbeschleunigungen.

H.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik) Erster Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhren und Röhrenleitungen bei constanter sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen. — Zweiter Band: Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen in Canälen und Flüssen. Mit 434 — 282 Erklärungen, mehr als 300—150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220—134 gelösten und ungelösten Aufgaben mit den Resultaten der letztern. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehraustalten bearbeitet nach dem System Kleyer von Richard Klimpert. Stuttgart 1893. Julius Maier. 364 + 228 S.

Dass Theorie und Technik einander nicht entbehren können, gilt, wie in aller physikalischen Forschung, auch, und in besonders stark hervortretender Weise, von der Hydrodynamik. Als Lehrgegenstand zeigt indes letztere manches Eigentümliche. Zunächst sind die Hypothesen der Theorie noch keine feststehenden, vielmehr muss zu deren empirischer Entscheidung approximativ zu Werke gegangen werden, um erst für die einzelnen zu untersuchenden Fälle die überwiegend wirkenden Ursachen, welche nicht unter allen Umständen dieselben sind (namentlich im 1. Buche), gegenüber den anfänglich zu vernachlässigenden zu isoliren. Ferner sind die mitwirkenden Ursachen mannigfaltig, die Vorgänge hingegen zum Teil

als innere der Beobachtung entzogen, während selbst die äusseren nur summarische Quantitäten ergeben. Da hiernach die Forschung von vielen Seiten beginnen muss, so kann, wenn schon auf gegenwärtigem Standpunkt eine Lehre der Hydrodynamik aufgestellt werden soll, der Vortrag schwerlich ein pragmatisch fortschreitender sein. Hier kommt nun einmal die Kleyer'sche Teilung des Vortrags in Frage, Erklärung und Antwort einigermaßen zustatten, indem, wo das Ganze noch keine sichtliche Einheit bildet, wenigstens die vielen Teile durch die jedem vorangestellte Frage einzeln unter einheitlichen Gesichtspunkten behandelt werden. Die Hauptabschnitte des 1. Bandes sind: Ausfluss des Wassers aus Gefässen und durch Röhren bei unveränderlicher Druckhöhe, und zwar 1) aus Gefässen, 2) Contraction des ausfliessenden Strahles, 3) Ausfluss durch Ansatzröhren, 4) Bewegung in Röhren und Röhrenleitungen, 5) Hindernisse in der Bewegung bei Gewindigkeits- und Richtungsveränderungen, dann Abfluss bei veränderter Druckhöhe und zwar 1), aus horizontaler Bodenöffnung, 2) aus Seitenöffnungen; die des 2. Bandes, 1. Hälfte: Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, und zwar die dabei zu beobachtenden verschiedenen Geschwindigkeiten, die an fliessenden Gewässern vorzunehmenden Messarbeiten, dann von dem durch Wasser ausgeübten Stosse und Widerstande und zwar 1) Stoss des bewegten Wassers, 2) Widerstand des Wassers gegen bewegte feste Körper, 3) Reaction ausströmender Flüssigkeiten. In beiden Bänden folgen noch Aufgaben und Formeln. H.

Over de toepassing der quaternionen op de mechanica en de natuurkunde. Door P. Molenbroek, Verhandelingen der Koninkl. Ak. van wet. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel II. No. 3. Amsterdam 1893. Johannes Müller. 38 S.

Die Arbeit betrifft die Bedeutung des Operators  $\nabla$ , welcher bei Hamilton einigemal vorkommt und von Tait ausführlich erklärt ist. H.

Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique. Par G. Nédélec. Premier volume. Paris 1897. Gauthier Villars et fils. 246 S.

Das Buch behandelt der Reihe nach: Ursprung und Natur der Vektorenrechnung, allgemeine Begriffe von den Vektoren, Theorie

der Versoren, Quaternionenversorenrechnung, vectorielle Multiplication, vectorielle Summation; erste Begriffe von vectoriellen Functionen, Begriffe von den expliciten Functionen, vectorielle Begriffe 1. Grades, vectorielle Theorie der Ebene, vectorielles anharmonisches Verhältniss. Bemerkenswert ist, dass der Verfasser in der Einleitung als Denunciant gegen die Hamilton'sche Lehre auftritt, welche die analytische Geometrie und Algebra in neuer Verkleidung als neue Theorie aufstellt, und doch nicht zeigt, inwiefern die hier vorgetragene Lehre nicht in gleichem Falle sei. H.

### Optik, Akustik und Elasticität.

Die Elemente der photographischen Optik. Enthaltend eine gemeinverständliche Darstellung der Einrichtung photographischer Linsensysteme, sowie Angabe über Prüfung derselben. Nach dem neuesten Standpunkt der Wissenschaft und Praxis bearbeitet von Dr. Hugo Schroeder, Optiker und Mechaniker. Zugleich als Ergänzungsband zu Vogel's Handbuch der Photographie. Mit 85 Figuren im Text. Berlin 1891. Robert Oppenheim. 420 S.

Die Themata sind folgende: Elemente der geometrischen Optik in Bezug auf ihre Anwendung auf photographische Linsen; chromatische oder Farbenabweichung; sphärische Aberration und Anomalien schiefer Strahlenkegel; perspectivische Anomalien; Beugungsaberration; Lichtstärke, Bildfeld und Vergrößerungsapparate; Untersuchungsmethoden der photographischen Linsen und die hierzu dienlichen Apparate; kurze Beschreibung der bemerkenswertesten Linsensysteme für Photographie. H.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem theoretischen Gase. Bearbeitet auf Grund der dynamischen Gastheorie vom k. u. k. Oberstlieutenant Wilhelm Schlemüller. Prag, H. Dominicus. 4<sup>o</sup>. 12 S.

Die Schrift enthält resultirende Sätze über Bewegung von Gas-moleculen aus einer frühern Arbeit: „Vier physikalische Abhandlungen“. Die zum Verständniss jener Sätze notwendigen Data sind nicht so weit mitgeteilt um irgend ein Urtheil über die Schrift geben zu können. H.

Optique géométrique. 6<sup>e</sup> mémoire. Genève, variété et polarisation axiale des faisceaux de rayons lumineux ou calorifique. — 8<sup>e</sup> mémoire. Complément aux propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons en général. — Par M. l'Abbe Issaly. Extrait des Mémoires de la Société des 'Sciences physiques' et naturelles de Bordeaux. 50 + 42 S.

Die erstere Abhandlung enthält: die Genesis und axiale Polarisation der optischen (Malus'schen) Strahleubüschel; die der anoptischen oder orthogonalen; geometrische Anwendung der vorgenannten Eigenschaften auf die Pseudosphäre und Pseudoebene; Eigenschaften der Doppelreihe dioptischer, mittlerer und complementärer Strahlenbüschel; homographische Relationen zwischen den Berührungsebenen verschiedener Malus'schen Kegel und der ihnen entsprechenden axialen Ebenen; summarische Erweiterung alles Vorhergehenden auf den Fall schiefer Coordinaten; die letztere: chromatische Polarisation; Fall zweier rein krystallisirter Lamellen; Berechnung des Falles dreier Lamellen; Fall vierer Lamellen; Verallgemeinerung; der Methode; neue Eigenschaften der Diagonalen des Ausweichungsparallelogramms; Rückgang zu den zweiartigen, neutralen Linien; Identificirung der optischen Pole eines zweiartigen Krystalls mit den respectiven Polen einer Normale und ihrer Antinormalen; Bemerkung über 2 besondere Fälle bezüglich auf die chromatische Polarisation von  $n$  rein krystallisirten Lamellen. H.

Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen in verband met het Halleffect. Door Dr. C. H. Wind. Verhandl. der Koninkl. Ak. van Wet. in Amsterdam. Eerste sectie. Deel V. No. 3. Amsterdam 1896. Johannes Müller. 91 S.

Die Teile der Abhandlung sind: die zu betrachtenden Erscheinungen, nach Zeit und Ort periodische Veränderungen; die Maxwell'schen Gleichungen und Grenzbedingungen für den Fall, dass keine äussere magnetische Kraft besteht; die weitere Verbindung zwischen elektrischem Strom und elektrischer Kraft, im besondern für den vorgenannten Fall; Grundgleichung für den Fall, dass eine äussere magnetische Kraft besteht; Fortpflanzung einer Lichtbewegung in reinem willkürlichen Medium bei Magnetisirung parallel der Einfallfläche; Zurückwerfung und Berechnung an der Grenze zweier Media, in deren einem das gebrochene Licht sich bewegt; Theorie des Kerreffects; Vergleichung der Theorie mit den Wahrnehmungen des Kerreffects; Abweichungen zwischen Theorie und

Wahrnehmung; Fortpflanzung einer Lichtbewegung in einem Medium und Zurückwerfung gegen eine Grenzfläche; magnetische Drehung der Polarisationsfläche in Dielektrika; Theorie von Drude; Theorie von Goldhammer; Anwendung eines Symmetrieprinzips auf Zurückwerfung gegen ein nicht magnetisirtes Metall; Anwendung auf den Beginn der Gegenseitigkeit; eine mögliche physische Erklärung des Halleffects in Verbindung mit der Theorie der Elektrizitätsbewegung durch Ionen.

H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

LVII.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, Mor., Vorlesungen üb. Geschichte der Mathematik, 3. (Schluss-)Bd. Vom J. 1668 bis zum J. 1758. 3. Abtlg. Die Zeit von 1727 bis 1758. gr. 8°. (XIV u. S. 473—893 m. 70 Fig.) Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Engelmann, Th. W., Gedächtnissrede auf Emil du Bois-Reymond. gr. 4°. (24 S.) Berlin, G. Reimer. 1 Mk.

Feier, die, des fünfzigjährigen Bestehens des königl. meteorologischen Institutes am 16. X. 1897. gr. 4°. (27 S.) Berlin, Asher & Co. 1 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1892. 48. Jahrg. 2. Abth. Physik des Aethers. Red. v. Rich. Börnstein. gr. 8°. (XLIII, 778 S.) Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

Gross, Th., Robert Mayer u. Hermann v. Helmholtz. Eine krit. Studie. gr. 8°. (V, IV, 174 S.) Berlin, Fischer's technolog. Verlag. Geb. 4,50 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. 27. Bd. Jahrg. 1896. 1. Hft. gr. 8°. (368 S.) Berlin, G. Reimer, 12 Mk.

Kindler, O. S. B., die Zeitmesser bis zur Erfindung der Pendeluhr. hoch 4°. (36 S. m. 16 Fig.). Einsideln, Benziger & Co. 2 Mk.

## Methode und Principien.

Göhler, R., Decimalzahlen u. Brüche im Rechenunterricht der Volksschule, Skizzen zur methodischen Behandlung dieser Zahlen, sowie Aufgaben f. das Kopfrechnen. gr. 8°. (IV, 64 S.) Leipzig, Alfr. Hahn. 1 Mk.

Grosse, W., der Aether u. die Fernkräfte. Mit besond. Berücksicht. der Wellentelegraphie. gr. 8°. (VI, 89 S. m. 17 Fig.) Leipzig, Quand & Händel. 2,25 Mk.

Lettau, R., der Rechenunterricht. Eine method. Anweisg. in schulgemäss. Behandlg. des gesamten Rechenstoffes m. zahlreichen Uebungsaufgaben f. Seminaristen u. Volksschullehrer. 2. Aufl. gr. 8°. (157 S.) Leipzig, E. Peter. 1,6) Mk.

### Sammlungen.

Harries, Fr., u. W. Andermann, Rechenaufgaben f. Fortbildungsschulen. Auf Grund der Verfüggn. des Handelsministers v. 5. VII. 1897. 3. u. 4. Stufe. Schülerheft. 8°. Hannover, Ost. 60 Pf.

— — dasselbe, 3. u. 4. Stufe. Lehrerheft. 8°. Ebd. 1,40 Mk.

Herrigel, G., u. A. Mang, Rechenbuch für die Oberstufe zweiklassiger Schulen. Decimalbrüche u. gemeine Brüche, Schluss-Prozent-, Zins-, Rabatt-, Geschäfts-, Durchschnitts-, Mischungs-, Teilungs-, Gesellschaftsrechnungen und Zinseszinsrechnungen. Raumlehre. 2. Aufl. (5. – 10. Taus.) 8°. (96 S. m. Fig.) Heidelberg, Groos. 50 Pf.

Hiller, Jul., Physikalische Uebungen u. Aufgaben (im Anschluss an den Unterricht. Progr. 4°. (18 S. m. 1 Taf.) Berlin, Gaertner. 1 Mk.

Otto, F., Rechenaufgaben f. höhere Mädchenschulen. Facitbuch zum 3. – 7. Heft. gr. 8°. (31, 32, 40, 20 u. 40 S.) Leipzig, Hirt & Sohn. à 35 Pf.

Richter, Alb., Arithmetische Aufgaben f. Gymnasien, Realgymnasien u. Oberrealschulen. m. besond. Berücksicht. der Anwendgn. gr. 8°. (X, 149 S.) Leipzig, Teubner. 1,40 Mk.

— trigonometrische Aufgaben f. Gymnasien, Realgymnasien u. Oberrealschulen, m. besond. Berücksicht. der Anwendgn. gr. 8°. (VIII, 41 S. m. Fig.) Ebd. 90 Pf.

Sass', J. B., Rechenbuch in Heften. 6. Heft. 3. Aufl. 12°. (144 S. m. Fig.) Altona, Schlüter. kart. 80 Pf.

Schröter, R., Rechenbuch f. die oberen Classen der Mittelschulen. 2. Aufl. 8°. (75 S.) Wittenberg, Herrosé. 60 Pf.

Villicus, Frz., u. Edm. Schiebel, Rechenbuch f. Mädchen-Bürgerschulen. 2. Classe. gr. 8°. (84 S.) Wien, Pichler. Kart. 1 Mk.

### Tabellen.

Fulst, Otto, Azimut-Tafel. Tafel zur Bestimmung des Azimuts aus Breite, Abweichg. u. Stundenwinkel. Lex. 8°. (25 S.) Bremen, Heinsius. In Wachstuch. Kart. 2,20 Mk.

Gauss, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche f. Schule u. Praxis bearb. 2 Thle. gr. 8<sup>o</sup>. Halle, Strien. Geb. 9,25 Mk.

Michael Herm., Amortisationstabellen zur Anfertigung von Amucitaten Tilgungsplänen. gr. 8<sup>o</sup>. (158 S.). Mannheim, Hahn & Co. Kart. 8 Mk.

Sammlung Göschen. 81. Bdchn. Schubert, Herm., Vierstellige Tafeln u. Gegentafeln f. logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen, in 2 Farben zusammengestellt. 12<sup>o</sup>. (128 S.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. 80 Pf.

Tinguély, Paul, Zinstabellen zur Berechnung der Zinsen von 1 bis 100,000 Franken Kapital zu  $2\frac{3}{4}$ , 3,  $3\frac{1}{4}$ ,  $3\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{3}{4}$ , 4,  $4\frac{1}{4}$ ,  $4\frac{1}{3}$ ,  $4\frac{3}{4}$  und 5 % auf das Jahr zu 360 Tagen gerechnet. Mit e. Zeitberechnungs-Tabelle, e. Tages-Tabelle u. einer Münztabelle. gr. 8<sup>o</sup>. (VII, 26<sup>o</sup> S.) Bern, Semminger. Geb. 6 Mk.

#### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. Versuch e. Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. 4. Thl. A. u. d. T.: Die Arithmetik (d. quadrat. Formen. 1. Abth. gr. 8<sup>o</sup>. (XVI, 668 S.) Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Baer, Karl, die Kugelfunction als Lösung e. Differenzgleichung. Progr. 4<sup>o</sup>. (25 S.) Berlin, Mayer & Müller. 1,50 Mk.

Fuhrmann, Arwed, Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik. Lehrbuch u. Aufgabensammlung. 3. Tl.: Bauwissenschaftliche Anwendgn. der Differentialrechng. 1. Hälfte. (gr. 8<sup>o</sup>. (S. 1–180 m. 73 Holzschn.) Berlin, Ernst & Sohn. 5,50 Mk.

Schimpf, Ernst, zur Definition der Konvergenz der unendlichen Reihen u. der unendlichen Produkte. — Mehrfache Grenzgleichungen. period. Reihen. Progr. 4<sup>o</sup>. (III, 30 S.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Schlesinger, Ludw., über die Gauss'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels u. ihre Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunction. gr. 8<sup>o</sup>. (15 S.) Berlin, G. Reimer. 50 Pf.

Sickenberger, Adf., u. C. W. Bauschinger, Leitfaden der kaufmännischen Arithmetik u. systematischen Buchführung. Ein Auszug aus den Hauck'schen Lehr- u. Uebungsbüchern. gr. 8. (III, 188 u. III S.) Nürnberg, Korn. Geb. 2,50 Mk.

Stolz, O., zur Erklärung der absolut convergenten uneigentlichen Integrale. gr. 8<sup>o</sup>. (18 S.) Wien, Gerold's Sohn. 40 Pf.

In zweiter, vollständig umgearbeiteter Auflage erschienen:

Das  
**Lehrbuch**  
**der ebenen u. sphärischen Trigonometrie**

zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen  
besonders auf Vorbereitung auf

**Geodäsie und sphärische Astronomie**

bearb. von Prof. Dr. E. Hammer  
an der technischen Hochschule Stuttgart

Preis M. 7,40. — Gebund. M. 7,90.

Einfache Einrichtung und Uebersichtlichkeit der Zahlenrechnung mit vielen durchgerechneten Beispielen. Zahlreiche praktisch-geometrische Aufgaben als specielle Vorbereitung auf die Geodäsie. Abriss der sphärischen Astronomie zur Vorbereitung auf die astrom. Ortsbestimmung. Schulausgabe (unmittelbar für Mittelschulen) in Vorbereitung.

Prospecte franco.

Verlag J. B. Metzler, Stuttgart.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung (H. Ehlers & Co.)  
Leipzig u. Dresden.

**Mathematische Aufgaben**

zum Gebrauche  
in den  
obersten Klassen höherer Lehranstalten.

Aus den  
bei Reifeprüfungen  
an preussischen Gymnasien und Realgymnasien  
gestellten Aufgaben ausgewählt

und  
mit Hinzufügung der Ergebnisse (II. Teil)

zu einem Uebungsbuche vereint

von  
**Prof. H. C. E. Martus,**  
Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

I. Teil: **Aufgaben.** 10. Doppel-Auflage. Geh. 3,60 M., geb. 4 M.  
II. Teil: **Ergebnisse.** 9. u. 10. Auflage. Geh. 4,80 M., geb. 5,20 M.

 Soeben erschienen. 

Bernau

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung (H. Ehlers & Co.)

Leipzig und Dresden.

**Lehrbuch**  
der  
**analytischen Geometrie.**

I. Teil: **Lehrbuch der analytischen Curventheorie**, nebst  
2 vorausgehenden Abschnitten, enthaltend die Theorie  
der linearen Raumgebilde und die Kinematik.

II. Teil: **Principien der Flächentheorie. 2. Auflage.**

Von

**Dr. R. Hoppe,**

Professor an der Universität Berlin.

Geh. Preis à 1 Mk. 80 Pf.

---

I N H A L T.

|  | Seite |
|--|-------|
| V. Ein Beitrag zu den Beziehungen des Umkreises zu den Berührungskreisen eines Dreiecks. Von Konstantin Karata . . . . . | 113   |
| VI. Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie. Von Stanislaus Chraszczewski . . . . .        | 119   |
| VII. Untersuchungen und Lehrsätze über Begrenzungscurven. Von C. W. Meyer . . . . .                                      | 150   |
| VIII. Miscellen.   |       |
| 1. Die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen. Von Theodor Lange . . . . .   | 220   |
| 2. Facultätencongruenzen. Von G. Speckmann . . . . .   | 223   |

---

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.







**ROOM USE ONLY**

**BOUND**

MAY 17 1923

**UNIV. OF MICH.  
LIBRARY**

UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 08521 5427

**ROOM USE ONLY**

*image  
not  
available*