UNTERREDUNGEN UND MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN ÜBER ZWEI NEUE WISSENSZWEIGE, ...

Galileo Galilei

Digitized by Google

Ankündigung.

G

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Received JUL 28 1893 . 189 .
Accessions No. 52505 . Class No.

Der Preis für den Druckbogen à 16 Seiten ohne etwaige textliche Abbildungen ist auf *M* —.25 festgesetzt.

Erschienen sind:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhaltung der Kraft. (1847.) (60 S.) 80 *Pf.*

» 2. **C. F. Gauss,** Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. (1840.) Herausg. von A. Wangerin. (60 S.) 80 *Pf.*

» 3. **J. Dalton** u. **W. H. Wollaston,** Abhandlungen zur Atomtheorie. (1803—1808). Herausg. v. W. Ostwald. Mit 1 Taf. (30 S.) 50 *Pf.*

» 4. **Gay-Lussac,** Jod. (1814.) Herausg. v. W. Ostwald. (52 S.) 80 *Pf.*

» 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) 80 *Pf.*

» 6. **E. H. Weber,** Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes etc. (1850.) Herausg. v. M. v. Frey. Mit 1 Taf. (46 S.) *M* 1.—.

» 7. **F. W. Bessel,** Länge d. einfachen Secundenpendels. Herausg. von H. Bruns. Mit 2 Taf. (171 S.) *M* 3.—.

» 8. **A. Avogadro** u. **Ampère,** Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (50 S.) *M* 1.20.

» 9. **H. Hess,** Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald. (102 S.) *M* 1.60.

» 10. **F. Neumann,** D. mathem. Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.50.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterredungen u. mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige etc. (1638.) 1. Tag mit 13 u. 2. Tag mit 26 Fig. im Text. Aus d. Italien. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) *M* 3.—.

» 12. **I. Kant,** Theorie d. Himmels. (1755.) Herausg. v. H. Ebert. (101 S.) *M* 1.50.

» 13. **Coulomb,** 4 Abhandlgen über d. Elektricität u. d. Magnetismus. (1785-1786.) Übers. u. herausg. v. W. König. Mit 14 Textf. (88 S.) *M* 1.80.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

Digitized by Google

UNTERREDUNGEN

und

MATHEMATISCHE DEMONSTRATIONEN

über

zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend,

von

GALILEO GALILEI.

Arcetri, 6. März 1638.

Anhang zum dritten und vierten Tag,
Fünfter und sechster Tag, mit 23 Figuren im Text.

Aus dem Italienischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben

von

Arthur von Oettingen.

Mit Inhaltsverzeichniss zum dritten bis sechsten Tag.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1891.

Digitized by Google

QC123
G3
v.3

52505

Digitized by Google

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Anhang

zum dritten und vierten Tage der

Unterredungen u. mathematischen Demonstrationen, „die derselbe Autor in früherer Zeit über den Schwerpunkt der Körper abgefasst hat“.

Postulat.

»Wenn gleiche Massen in ähnlicher Weise an verschiedenen Hebeln angebracht sind, und wenn der Schwerpunkt der Massen an einem Hebelarm denselben in bestimmter Weise theilt, so wird der Schwerpunkt an jedem anderen einzelnen Hebel denselben gleichfalls nach jenem Verhältnisse theilen.«

Hülfssatz.

Es sei die Linie AB (Fig. 126) in C halbirt, und die Hälfte AC sei wiederum in E getheilt, so dass BE zu AE wie AE zu EC; alsdann, behaupte ich, sei BE gleich $2AE$. Denn es ist BE zu EA wie EA zu EC, folglich, wenn man zusammensetzt und umtauscht, BA zu AC wie AE zu EC; aber wie AE zu EC oder wie BA zu AC, so verhält sich BE zu EA, mithin ist BE gleich $2EA$.

Fig. 126.

Dieses vorausgesetzt, soll bewiesen werden: »dass, wenn Grössen, die um gleichviel von einander verschieden sind und deren Unterschiede gleich sind der kleinsten unter ihnen, so auf einem Hebelarm der Reihe nach vertheilt werden, dass ihre Aufhängepunkte gleich weit von einander abstehen, der Schwerpunkt Aller den Hebelarm so theilen wird, dass die den kleineren Gewichten zugekehrte Strecke das Doppelte der anderen beträgt.«

Digitized by Google

An dem Hebelarm AB (Fig. 127) mögen in irgend welcher Anzahl die Grössen F, G, H, K, N, von denen N die kleinste sei, in gleichen Abständen angebracht sein in A, C, D, E, B. Der Schwerpunkt Aller bei dieser Anordnung liege in X. Es soll bewiesen werden, dass BX gleich $2XA$ sei. Man halbire den Arm in D, einem Punkte, der nothwendig in einen Theilungspunkt oder in die Hälfte zwischen zweien solchen fallen muss; die übrigen Distanzen zwischen A und D mögen in den Punkten M, J halbirt werden; endlich denke man sich alle Grössen aus Theilen gleich N gebildet. Die Theile von F sind an Zahl gleich der Anzahl angehängter Grössen, die von G sind um eins kleiner u. s. f. Die Theile von F seien N, O, Y, S, T, die von G seien N, O, Y, S, von H — N, O, Y, die von K endlich N, O. Die sämmtlichen N zusammen sind gleich F; die sämmtlichen O zusammen gleich G; die sämmtlichen Y gleich H; die S gleich K, und T ist gleich N. — Alle die N sind bei D im Gleichgewicht, welches den Arm halbirt; ebenso sind es die O in J, die Y in C, die S in M und T ist in A angebracht. Mithin sind am Hebelarm in gleichen Abständen D, J, C, M, A Grössen angebracht, die um ein Gleiches sich von einander unterscheiden, und deren Unterschied gleich ist der geringsten unter ihnen; die grösste hängt in D, die kleinste T in A, die anderen dazwischen. Ein andrer Arm AB sei gedacht, an welchem andere Grössen in derselben Ordnung, an Zahl und Grösse jenen gleich, angebracht seien. Die Hebelarme AB, AD werden nun vom Schwerpunkt aller Grössen in ein und demselben Verhältniss getheilt. Der Schwerpunkt der Erstgenannten war X, folglich theilt X die beiden Arme AB, AD in gleichem Verhältniss, mithin ist BX zu XA wie XA zu XD; folglich ist BX gleich $2XA$, w. z. b. w.

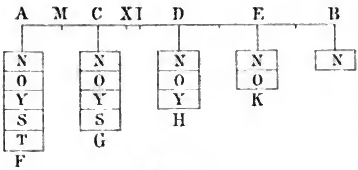

Fig. 127.

»Wenn einem parabolischen Conoid Cylinder gleicher Höhe ein- und umschrieben werden, und die Axe so getheilt wird, dass der dem Gipfel zugekehrte Theil das Doppelte des basalen beträgt, so wird der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur in der letzteren Strecke dem genannten Punkte nahe liegen, der Schwerpunkt der umschriebenen Figur wird dagegen in der an-

Digitized by Google

deren Strecke um gleich viel wie in jener abstehen, und zwar um den sechsten Theil der Höhe eines solchen Cylinders, aus denen die Figuren bestehen.«

Es sei ein parabolisches Conoid gegeben mit den ein- und umschriebenen Figuren; die Axe AE (Fig. 128) sei in N getheilt, so dass AN gleich $2NE$ sei. Es soll gezeigt werden, dass der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur in NE liege, der umschriebenen in AN. Man lege eine Ebene durch die Axe. Der parabolische Schnitt sei BAC; die Linie BC sei die Basis der schneidenden Ebene sowie des Conoides; die Schnitte der Cylinder sind Rechtecke; der erste der eingeschriebenen Cylinder mit der Axe DE verhält sich zu dem mit der Axe DY wie das Quadrat von OD zum Quadrat von SY, mithin wie DA zu AY; der Cylinder DY zum Cylinder YZ wie die Quadrate von SY und RZ, also wie YA zu AZ; ebenso Cylinder ZY und ZV wie ZA zu AV, folglich verhalten sich die genannten Cylinder wie die Linien DA, AY, ZA, AV: diese aber sind um gleich viel von einander unterschieden, und zwar um die kleinste unter ihnen, so dass AZ gleich $2AV$, AY gleich $3AV$, DA gleich $4AV$; also auch die Cylinder unterscheiden sich um gleich viel, und zwar um den Betrag des kleinsten, und in der Linie XM werden sie in gleichen Abständen angebracht sein (denn jeder Cylinder hat seinen Schwerpunkt in der Axe); mithin wird der Schwerpunkt Aller die Linie XM so theilen, dass die eine Strecke das Doppelte der anderen sei. Solcher Art sei nun $X\alpha$ gleich $2\alpha M$, alsdann ist α der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur. Man halbire AV in ε; alsdann wird εX gleich $2ME$ sein; aber $X\alpha$ ist gleich $2\alpha M$, folglich εE gleich $3E\alpha$; ferner ist AE gleich $3EN$, mithin ist EN grösser als $E\alpha$, und ebenso ist α näher zur Basis gelegen als N; da nun AE zu EN wie εE zu $E\alpha$, so ist der Ueberschuss von

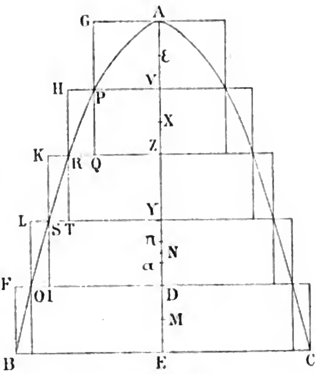

Fig. 128.

Digitized by Google

AE über εE, das heisst $A\varepsilon$ zum Ueberschuss von EN über $E\alpha$, d. h. $N\alpha$ wie AE zu EN. Folglich ist αN der dritte Theil von $A\varepsilon$ und der sechste von AV. Ganz ebenso beweist man, dass die umschriebenen Cylinder um gleich viel von einander unterschieden sind, ferner, dass die Unterschiede gleich seien dem kleinsten, und dass sie ihre Schwerpunkte in εM haben in gleichen Abständen. Wird daher εM so in π getheilt, dass $\varepsilon\pi$ gleich $2\pi M$ sei, so wird π der Schwerpunkt der ganzen umschriebenen Figur sein. Da $\varepsilon\pi$ gleich $2\pi M$ und $A\varepsilon$ kleiner als $2EM$ (da $A\varepsilon$ gleich EM ist), so ist das ganze AE kleiner als $3E\pi$, folglich ist $E\pi$ grösser als EN, und weil εM gleich $3M\pi$ ist, und weil ME sammt $2\varepsilon A$ gleich $3ME$ ist, wird AE sammt $A\varepsilon$ gleich $3E\pi$ sein. Aber EA ist gleich $3EN$, folglich ist der Rest $A\varepsilon$ gleich $3\pi N$, und mithin $N\pi$ der sechste Theil von AV, w. z. b. w. — Man kann also einem parabolischen Conoid eine Figur ein-, und eine andere umschreiben, so dass die Schwerpunkte beider um weniger von einander abstehen, als irgend eine gegebene Linie. Denn nimmt man zur gegebenen Linie eine sechsfache, und macht man die Cylinderaxenlängen kleiner, so werden die Unterschiede der Schwerpunkte vom Punkte N kleiner als die gegebene Strecke sein.

Andere Methode: Die Axe des Conoides CD (Fig. 129) werde in O getheilt, so dass CO gleich $2OD$ sei. Man soll beweisen, dass der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur in OD liege, der umschriebenen in CO. Durch die Axe CD lege man eine Schnittebene. Die Cylinder SN, TM, VJ, XE verhalten sich wie die Quadrate von SD, TN, VM, XJ; diese wiederum verhalten sich wie die Strecken NC, CM, CJ, CE; letztere unterscheiden sich um gleich viel, nämlich um CE; der Cylinder TM ist gleich dem QN, VJ gleich PN, XE gleich LN; mithin unterscheiden sich die Cylinder SN, QN, PN, LN um gleich viel, und zwar um LN.

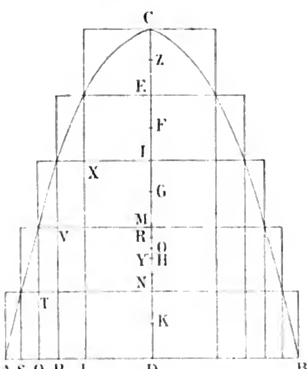

Fig. 129.

Digitized by Google

Aber der Unterschied der Cylinder SN, QN bildet einen Ring von der Höhe QT gleich ND und der Breite SQ; und der von QN, PN ist ein Ring von der Breite QP, der Unterschied von PN und LN ein Ring von der Breite PL. Mithin sind die Ringe SQ, QP, PL einander gleich und gleich dem Cylinder LN. Mithin ist der Ring ST gleich dem Cylinder XE; der Ring QV ist doppelt so gross und gleich dem Cylinder VJ, der selbst gleich $2\,XE$ ist; mithin ist der Ring PX dem Cylinder TM und der Cylinder LE dem SN gleich. Auf einem Hebelarm KF verbinden K und F die Mittelpunkte der Strecken EJ und DN. Sie werden in H und G in gleiche Theile getheilt, und in diesen Punkten werden Grössen angebracht gleich den Cylindern SN, TM, VJ, XE, so dass der Schwerpunkt des ersteren in K, des zweiten in H, des dritten in G, des vierten in F liege. Nun nehmen wir noch einen anderen Arm MK an, gleich $\frac{1}{2}FK$, ebenso in ebensoviel Punkten in gleichen Abständen getheilt, nämlich MH, HN, NK, und in diesen bringen wir andere Grössen an, als in FK, an Zahl und Grösse gleich und mit den Schwerpunkten in M, H, N, K und in gleicher Weise angeordnet, denn der Cylinder LE hat seinen Schwerpunkt in M und ist gleich dem Cylinder SN, dessen Schwerpunkt in K liegt; der Ring PX aber hat seinen Schwerpunkt in H, und ist gleich dem Cylinder TM, dessen Schwerpunkt in H liegt; der Ring QV mit dem Schwerpunkt in G ist gleich VJ, dessen Schwerpunkt in N; endlich der Ring ST in K gleich XE in F. Folglich theilt der Schwerpunkt der genannten Grössen den Arm in demselben Verhältniss, daher ist das Centrum dasselbe und auf beiden Hebeln derselbe Punkt, etwa Y. Daher ist FY zu YK wie KY zu YM und folglich FY gleich $2\,YK$; halbirt man CE in Z, so wird ZF gleich $2\,KD$ sein, und ZD gleich $3\,DY$; allein CD ist gleich $3\,DO$, mithin ist die Strecke DO grösser als DY; und deshalb liegt Y, der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur, näher zur Basis als der Punkt O. Da ferner CD zu DO wie ZD zu DY, so ist auch CZ zu YO wie CD zu DO; also ist YO der dritte Theil von CZ und der sechste Theil von CE. Ebenso können wir beweisen, dass die Cylinder der umschriebenen Figur um gleich viel von einander unterschieden sind, und zwar um den Betrag des kleinsten von ihnen, und wenn ihre Schwerpunkte gleichmässig am Arme KZ vertheilt und ähnlich die diesen Cylindern gleichen Ringe auf einem anderen Arme KG, gleich $\frac{1}{2}KZ$, angebracht werden, der Schwerpunkt R der umschriebe-

Digitized by Google

nen Figur den Arm so theile, dass ZR zu RK sich verhält wie KR zu RG. Mithin wird ZR gleich $2RK$ sein; CZ aber ist gleich LD und nicht doppelt so gross, folglich ist CD kleiner als $3DR$, und die Gerade DR grösser als DO, d. h. der Schwerpunkt der umschriebenen Figur liegt weiter von der Basis, als der Punkt O. Da nun ZK gleich $3KR$ und KD sammt $2ZC$ gleich $3KD$, so ist CD sammt CZ das dreifache von DR; aber CD ist gleich $3DO$, folglich ist der Rest CZ gleich $3RO$ und mithin OR gleich dem sechsten Theile von EC, w. z. b. w.

Jetzt kann bewiesen werden, dass der Schwerpunkt eines parabolischen Conoïdes so die Axe theile, dass die dem Gipfel zuliegende Strecke das Doppelte der basalen betrage. —

Ein parabolisches Conoïd habe die Axe AB (Fig. 130); dieselbe sei in N getheilt, so dass AN gleich $2NB$ sei. Es soll bewiesen werden, dass N der Schwerpunkt sei. Liegt letzterer nicht in N, so muss er ober- oder unterhalb sich befinden. Angenommen, er läge unterhalb in X, so mache man LO gleich NX. Ferner theile man LO in S, und das Verhältniss der Summe der beiden Strecken BX und OS zu OS habe das Verhältniss des Conoïdes zum festen Körper Y. Man zeichne eine eingeschriebene Figur aus Cylindern gleicher Höhe, so zwar, dass das zwischen dem Schwerpunkte und dem Punkte N liegende Stück kleiner als LS sei, der Ueberschuss des Conoïdes über der eingeschriebenen Figur sei kleiner als Y; es ist offenbar, dass letzteres ausführbar ist. Es sei J der Schwerpunkt des eingeschriebenen Körpers; alsdann ist JX grösser als SO, und da XB sammt OS zu OS wie das Conoïd zu Y (und Y ist grösser als der Ueberschuss des Conoïdes über der eingeschriebenen Figur), so wird auch das Conoïd zum genannten Ueberschuss ein grösseres Verhältniss haben, als BX sammt OS zu OS, und mithin hat die eingeschriebene Figur zu demselben Ueberschuss ein grösseres Ver-

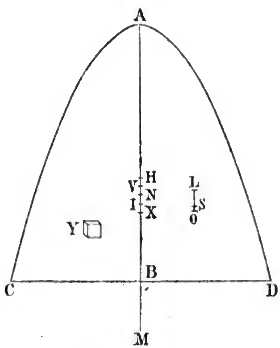

Fig. 130.

Digitized by Google

hältniss, als BX zu SO; aber BX zu XJ ist kleiner als BX zu SO; daher wird die eingeschriebene Figur zu den Reststücken ein weit grösseres Verhältniss haben, als BX zu XJ. Wie nun das Verhältniss der eingeschriebenen Figur zu den Reststücken sei, so verhalte sich eine gewisse andere Linie zu XJ. Offenbar wird sie grösser sein als BX. Gesetzt, sie sei MX. Wir haben also den Schwerpunkt des Conoïdes in X, den der eingeschriebenen Figur in J, mithin wird der des Ueberschusses beider in XM liegen, und zwar so, dass das Verhältniss der eingeschriebenen Figur zum Ueberschuss gleich dem der fraglichen Strecke zu XJ. Allein es ward bewiesen, dass dieses Verhältniss gleich dem von MX zu XJ sei: folglich ist M der Schwerpunkt des Ueberschusses, — was offenbar unmöglich ist, denn wenn durch M eine Gerade parallel der Basis gezogen wird, so liegen alle Grössen nach ein und derselben Seite und werden nicht von einander getrennt. Hieraus folgt, dass der Schwerpunkt nicht unterhalb N liegen könne. Aber eben so wenig oberhalb. Denn wenn es möglich wäre, etwa in H, und wiederum, wie vorhin, LO gleich HN genommen und in S getheilt wird, so dass BN sammt SO sich zu SL verhält, wie das Conoïd zu Y, und wenn dem Conoïd eine aus Cylindern bestehende Figur umschrieben wird, so dass der Unterschied kleiner als Y sei und die Strecke vom Schwerpunkt der umschriebenen Figur bis zu N kleiner als SO sei, so wird der Rest VH grösser als LS sein; und da BN sammt OS zu SL wie das Conoïd zu Y (denn Y ist grösser als der Ueberschuss der umschriebenen Figur über dem Conoïd), so hat BN sammt SO zu SL ein kleineres Verhältniss, als das Conoïd zum Ueberschuss. Aber BN ist kleiner als BN sammt SO; VH dagegen ist grösser als SL; mithin hat um so mehr das Conoïd zu den genannten Grössen ein grösseres Verhältniss, als BV zu VH. Dem Verhältniss des Conoïdes zu den genannten Grössen sei das von VH zu einer Linie gleich, die grösser als BV sein wird. Es sei MV diese Strecke. Da der Schwerpunkt der umschriebenen Figur in V liegt, der des Conoïdes in H, und da das Conoïd zum Ueberschuss wie MV zu VH sich verhält, so müsste M der Schwerpunkt des Ueberschusses sein, was wiederum unmöglich ist. Mithin liegt der Schwerpunkt des Conoïdes nicht oberhalb N. Da er sich auch nicht unterhalb N befinden kann, so kann er nur in N selbst liegen. Aehnlich wird ein Conoïd behandelt, welches von einer zweiten Ebene unterhalb des Gipfels abgeschnitten wird. Zunächst beweisen wir auf an-

Digitized by Google

derem Wege, dass der Schwerpunkt des parabolischen Conoïdes zwischen denen der ein- und umschriebenen Figur liegt:

Das Conoïd habe die Axe AB (Fig. 131); der Schwerpunkt der umschriebenen Figur sei C, der eingeschriebenen O. Ich behaupte, der des Conoïdes liege zwischen C und O. Wenn aber nicht, so müsste er unterhalb, oberhalb oder in einen der beiden fallen. Angenommen, er liege unterhalb, in R. Da R der Schwerpunkt des ganzen Conoïdes, während O das der eingeschriebenen Figur ist, so wird der des Unterschiedes beider in OR liegen über R hinaus, so zwar, dass der Ueberschuss zur eingeschriebenen Figur sich verhält wie OR zu RX. Nun kann X innerhalb des Conoïdes fallen, oder ausserhalb, oder auf die Basis. In letzten beiden Fällen ist die Absurdität schon offenbar; fällt X innerhalb, so ist, weil XR zu RO wie die eingeschriebene Figur zum Ueberschuss, auch BR zu RO wie die eingeschriebene Figur zum Körper H, welcher kleiner ist, als der Ueberschuss. Man schreibe eine andere Figur ein, die einen Ueberschuss hat, kleiner als H, dessen Schwerpunkt falle unterhalb CO, etwa in V. Da die erstere Figur zu H wie BR zu RO, die zweite aber, deren Schwerpunkt V mehr enthält und um weniger vom Conoïd abweicht als H, so verhält sich die zweite Figur zum Ueberschuss wie RU, welches grösser sein wird als BR, zu BR selbst. Aber R ist der Schwerpunkt des Conoïdes und V der der eingeschriebenen Figur: mithin müsste der Schwerpunkt des Ueberschusses ausserhalb des Conoïdes, unterhalb B liegen, was unmöglich ist. Ebenso beweist man, dass der Schwerpunkt des Conoïdes nicht auf der Strecke CA liegen könne. Offenbar aber kann er auch weder in C noch in O sich befinden. Denn wenn solches möglich wäre, so könnte man andere Figuren beschreiben, die eingeschriebene grösser als diejenige, deren Schwerpunkt in O, die umschriebene kleiner als diejenige, deren Schwerpunkt in C, und es würde der Schwerpunkt des Conoïdes ausserhalb dieser neuen Strecke fallen, was nach dem Vorigen wiederum unmöglich ist. Folglich liegt er zwischen beiden. Dann

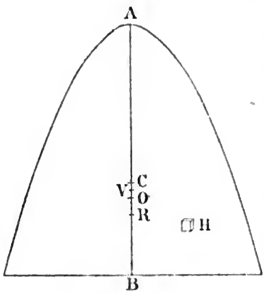

Fig. 131.

Digitized by Google

aber folgt, dass er durchaus in demjenigen Punkte, der die Axe in zwei Theile theilt, deren einer dem Gipfel zunächst, das Doppelte der anderen, der basalen, betrüge, da man Figuren ein- und umschreiben könnte, deren Schwerpunkte näher zum fraglichen Punkte lägen, als irgend eine angebbare Linie, denn sonst liesse sich wiederum beweisen, dass der Conoïdschwerpunkt nicht innerhalb der Distanz der beiden Schwerpunkte zu liegen komme.

»Wenn drei Linien einander proportional sind, und wenn die kleinste zum Ueberschuss der grössten über die kleinste sich verhält, wie eine gewisse Strecke zu $\frac{2}{3}$ des Ueberschusses der grössten über die mittlere, und wenn ferner die Summe der grössten und der doppelt genommenen mittleren sich zum dreifachen Betrage der Summe der beiden grösseren sich verhält, wie eine gewisse andere Strecke zum Ueberschuss der grösseren über die mittlere Linie, so ist die Summe jener beiden Strecken gleich einem Dritttheil der grössten Linie.«

Es seien die drei Linien AB, BC, BF (Fig. 132) folgweise proportional, und wie BF zu FA, so verhalte sich eine Strecke MS zu $\frac{2}{3}\,CA$, und so wie AB sammt $2BC$ zur dreifachen Summe von AB und BC, so verhalte sich eine andere Strecke SN zu AC. Es soll bewiesen werden, dass MN gleich $\frac{1}{3}AB$ sei. Da AB, BC, BF folgweise proportional sind, so hat auch AC, CF dasselbe Verhältniss. Folglich AB zu BC wie AC zu CF und auch $3AB$ zu $3AC$ wie AC zu CF. Mithin $3AB$ sammt $3BC$ zu $3BC$ wie AC zu einer Strecke, die kleiner ist als CF. Sie sei gleich CO. Durch Zusammensetzung und Umkehrung findet man OA zu CA wie $3AB$ sammt $6BC$ zu $3AB$ sammt $3BC$; ferner ist AC zu SN wie $3AB$ sammt $3BC$ zu AB sammt $2BC$; mithin ist OA zu NS wie $3AB$ sammt $6BC$ zu AB sammt $2BC$; aber $3AB$ sammt $6BC$ sind das Dreifache von AB sammt $2BC$; folglich ist AO gleich $3SN$.

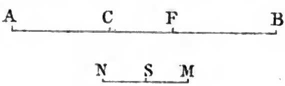

Fig. 132.

Weil andererseits OC zu CA wie $3CB$ zu $3AB$ sammt $3CB$, und weil CA zu CF wie $3AB$ zu $3BC$, so ist OC zu CF wie $3AB$ zu $3AB$ sammt $3BC$, mithin OF zu FC wie $3BC$ zu $3AB$ sammt $3BC$; aber wie CF zu FB, so verhält sich AC zu CB und $3AC$ zu $3BC$. Folglich wie OF zu FB, so $3AC$ zu $3AB$ sammt $3BC$. Folglich ist die ganze Linie OB zu BF wie $6AB$ zur dreifachen Summe von AB und

Digitized by Google

AC. Da FC zu CA dasselbe Verhältniss hat, wie CB zu BA, so ist FC zu CA wie BC zu BA, mithin FA zu AC wie BA sammt BC zu BA, und das Dreifache zum Dreifachen; wie also FA zu AC, so $3BA$ sammt $3BC$ zu $3AB$, mithin wie FA zu $\frac{2}{3}AC$, so $3BA$ sammt $3BC$ zu $\frac{2}{3}$ von $3BA$, d. h. zu $2BA$: aber wie FA zu $\frac{2}{3}AC$, so FB zu MS. Folglich wie FB zu MS, so $3BA$ sammt $3BC$ zu $2AB$. Da nun OB zu FB wie $6AB$ zu $3AB$ sammt $3BC$, so ist OB zu MS wie $6AB$ zu $2AB$, folglich ist MS gleich $\frac{1}{3}OB$. Da endlich SN gleich $\frac{1}{3}AO$ war, so ist MN gleich $\frac{1}{3}AB$, w. z. b. w.[1])

»Ein stumpfes parabolisches Conoïd hat seinen Schwerpunkt in der Axe. Wird dieselbe in drei gleiche Theile getheilt, so liegt der Schwerpunkt im mittleren Stück und theilt dasselbe so ab, dass die der kleineren Basis zugekehrte Strecke zur anderen sich verhält, wie die grössere Basis zur kleineren.«

Vom vollen Conoïd mit der Axe RB (Fig. 133) sei ein Theil mit der Axe BE abgeschnitten durch eine der Basis parallele Ebene. Eine andere Ebene, senkrecht zur Basis durch die Axe gelegt, schneide das volle Conoïd in der Parabel V, R, C; die beiden Basis werden in LM, VC geschnitten. Man theile EB in drei gleiche Theile, das mittlere Stück sei QY. Dasselbe werde in F so getheilt, dass das Verhältniss der Basis mit dem Diameter VC zu der Basis mit dem Diameter LM, oder dass

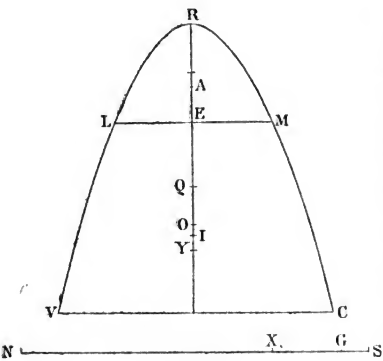

Fig. 133.

das Verhältniss der Quadrate von VC und LM gleich sei dem von QJ zu JY. Es soll bewiesen werden, dass J der Schwerpunkt des Stumpfes LMC sei. Man nehme eine Linie NS gleich BR und schneide SX gleich ER ab, dann bilde man zu NS, SX die dritte Proportionale SG und mache BQ zu JO wie NG zu GS. Es ist gleichgültig, ob der Punkt O oberhalb oder unterhalb LM fällt, und weil im Schnitt VRC die Linien LM, VC der Parabel zugehören, so verhalten sich die Quadrate von VC, LM wie die Linien BR, RE; aber die Quadrate von VC, LM verhalten sich wie QJ zu JY und wie BR zu RE, so verhält sich NS zu SX, folglich ist QJ zu JY wie NS zu SX. Wie mithin QY zu YJ, so verhält sich NS sammt SX zu SX, und wie EB zu YJ, so $3NS$ sammt $3SX$ zu SX; wie aber EB zu BY, so $3NS$ sammt $3SX$ zu NS sammt SX; folglich wie EB zu BJ, so $3NS$ sammt $3SX$ zu NS sammt $2SX$. Mithin sind die drei Linien NS, SX, GS proportional, und wie SG zu GN, so verhalte sich eine gewisse Strecke OJ zu $\frac{2}{3}EB$ oder zu $\frac{2}{3}NX$. Wie nun NS sammt $2SX$ zu $3NS$ sammt $3SX$, so sei eine gewisse andere Strecke JB zu BE oder zu NX. Nach dem vorigen Satz sind die beiden Strecken zusammen gleich $\frac{1}{3}NS$ oder gleich $\frac{1}{3}RB$; folglich ist RB gleich $3BO$, mithin ist O der Schwerpunkt des Conoïdes VRC. Es sei nun A derjenige des Conoïdes LRM; mithin liegt der Schwerpunkt des Stumpfes in der Linie OB, und zwar so, dass, wie der Stumpf $VLMC$ sich zum Conoïde LRM verhält, so auch die Linie AO zu derjenigen, die von O bis zum fraglichen Punkte reicht. Nun ist RO gleich $\frac{2}{3}RB$ und und RA gleich $\frac{2}{3}RE$: folglich ist der Rest AO gleich $\frac{2}{3}EB$. Da ferner der Stumpf $VLMC$ zum Conoïd LMR wie NG zu GS, und auch wie $\frac{2}{3}EB$ zu OJ, AO aber gleich $\frac{2}{3}EB$ ist, so verhält sich der Stumpf $VLMC$ zum Conoïd LMR wie AO zu OJ. Daher ist J der Schwerpunkt des Stumpfes und theilt die Axe so, dass der der kleineren Basis zugekehrte Theil zum anderen sich verhält, wie die doppelte grössere Basis sammt der kleineren zur doppelten kleineren mitsammt der grösseren. Welches der Inhalt des eleganter ausgedrückten Theorems ist.

»Wenn mehrere Grössen so geordnet sind, dass die zweite gleich der ersten sammt dem Doppelten der ersten, die dritte gleich der zweiten sammt dem Dreifachen der ersten, die vierte gleich der dritten sammt dem Vierfachen der ersten, jede spätere gleich der vorherigen sammt dem sovielsten der ersten, als die Ordnungszahl anzeigt, und wenn diese Grössen an einem Wegearm äquidistant angebracht werden, so theilt der Schwerpunkt den letzteren so, dass der den kleinen Grössen zugekehrte Theil das Dreifache des anderen beträgt.«

Es sei LT (Fig. 134) der Hebelarm, an welchem die Grössen A, F, G, H, K angebracht seien, die erste in T. Ich behaupte, der Schwerpunkt schneide den Arm TL so, dass der

Digitized by Google

nach T hin liegende Theil das Dreifache des übrigen sei. Es sei TL gleich $3\,LJ$, und SL gleich $3\,LP$, ferner QL gleich $3\,LN$ und LP gleich $3\,LO$, alsdann werden JP, PN, NO, OL einander gleich sein. Man denke sich in F eine Grösse gleich $2\,A$ angebracht, in G gleich $3\,A$, in H gleich $4\,A$ u. s. f. und überlege, wie viel an jeder Stelle nachbleibt. Der Rest in F ist B gleich A, und nimmt man $2B$ in G fort, $3B$ in H u. s. f. überall Vielfache von B; ferner ähnlich die C, die D und die E; alsdann werden alle die A zusammen so gross sein wie K; alle die B sind gleich H; die C gleich G; alle die D gleich F und E gleich A. Da nun TI gleich $2IL$, so ist I der Schwerpunkt aller A, und ähnlich da SP gleich $2\,PL$, so ist P der Schwerpunkt aller B, ferner N derjenige aller C, O der aller D und L der von E. Also ist am Arm TL in gleichen Abständen K, H, G, F, A angebracht und an IL ebenso in gleichen Abständen eben so viele Grössen in derselben Ordnung, da alle A in I angebracht gleich K in L, alle B in P gleich H in P, alle C in N gleich G in Q, alle D in O gleich F in S und endlich E in L gleich A in T. Mithin werden die Arme in derselben Ordnung von Schwerpunkten getheilt. Allein alle diese Grössen haben ein und denselben Schwerpunkt in beiden Fällen. Mithin ist es ein und derselbe in der Geraden TL und in der Geraden LI. Es sei X. Mithin verhält sich TX zu XL wie LX zu XI und wie LT zu LI; aber TL ist gleich $3\,LI$, mithin ist auch TX gleich $3\,XL$.

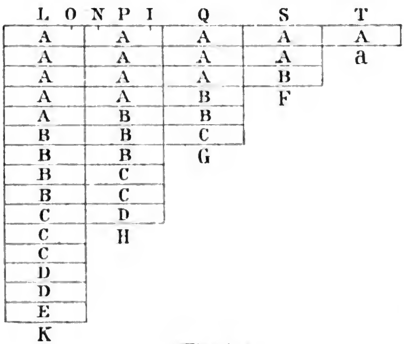

Fig. 134.

»Wenn mehrere Grössen so geordnet sind, dass die zweite gleich der ersten sammt dem Dreifachen der ersten, und die dritte gleich der zweiten sammt dem Fünffachen der ersten, die vierte gleich der dritten sammt dem Siebenfachen der ersten, u. s. f. irgend eine Grösse gleich der Vorhergehenden sammt

Digitized by Google

einem unpaarigen Vielfachen der ersten, — ebenso wie die Quadrate der um eine Grösse zunehmenden Linien sich von einander unterscheiden, — und werden jene Grössen gleichabständig auf einem Raume vertheilt, so liegt der Schwerpunkt Aller so, dass das den kleineren Grössen zugekehrte Stück mehr als das Dreifache des Uebrigen beträgt, und wenn letzteres von jenem abgezogen wird, weniger als das Dreifache nachbleibt.«

Auf dem Arme BE (Fig. 135) seien die beschriebenen Grössen angebracht. Man fasse von denselben je solche Theile zusammen, wie sie in dem vorigen Satze (Fig. 134) angeordnet waren. Man findet eine aus lauter A zusammengesetzte Gruppenvertheilung, desgleichen aus C, bei welchen der grösste Betrag fehlt. Es sei ED gleich $3\,BD$ und GF gleich $3\,FB$, so ist D der Schwerpunkt aller A, während F aus allen C besteht. Somit liegt der Schwerpunkt aller A und C zwischen D und F. Er sei in O. Mithin ist EO grösser als $3\,OB$, GO dagegen ist kleiner als $3\,OB$, w. z. b. w.

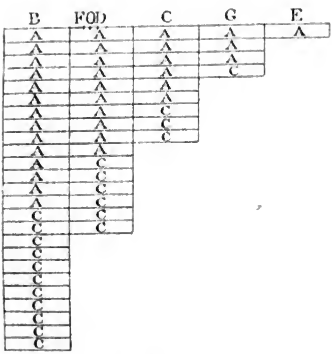

Fig. 135.

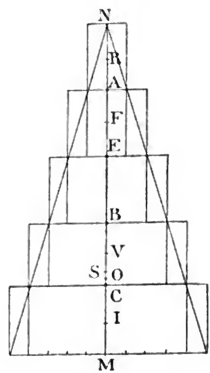

Fig. 136.

»Wenn einem Kegel oder einem Theile eines Kegels eine Figur aus Cylindern gleicher Höhe eingeschrieben, und eine andere umschrieben wird, und wenn die Axe so getheilt wird, dass der dem Scheitel zugekehrte Theil das Dreifache des übrigen beträgt, so wird der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur näher zur Basis liegen, als jener Theilpunkt, derjenige der umschriebenen Figur dagegen näher zum Scheitel.«

Digitized by Google

Der Kegel mit der Axe NM (Fig. 136) sei gegeben. Der Punkt S liege so, dass NS gleich $3\,SM$. Ich behaupte, der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur liege in NM, unterhalb S, nach der Basis zu, der der umschriebenen oberhalb S, dem Gipfel zu. Die Axen der eingeschriebenen Cylinder seien MC, CB, BE, EA, sämmtlich einander gleich. Der erste Cylinder, dessen Axe MC, verhält sich zum zweiten, dessen Axe CB, wie beider Basis, also auch wie die Quadrate von CN und NB. Ganz ähnlich die Cylinder, deren Axen CB und BE wie die Quadrate von BN und NE, und die Cylinder, deren Axen BE und EA wie die Quadrate von EN und NA. Aber die Linien NC, NB, NE, NA sind um gleich viel unter einander verschieden, und zwar um den Betrag der kleinsten, NA. Mithin verhalten sich die Grössen der auf einander liegenden Cylinder der eingeschriebenen Figur wie die Quadrate von Linien gleichen Unterschiedes, deren Unterschied gleich der kleinsten Linie. Auf einem Arm FI sind die Grössen also in dieser Weise angebracht. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass der Schwerpunkt Aller den Arm FI so theile, dass der F zugekehrte Theil mehr als das Dreifache der Uebrigen betrage. Er liege in O; also ist FO mehr als $3\,OI$. Aber FN ist gleich $3\,IM$, folglich ist MO kleiner als $\frac{1}{4}MN$, da MS gleich $\frac{1}{4}MN$ gesetzt ist. Folglich liegt O der Kegelbasis näher als S. Ferner habe die umschriebene Figur die Axen MC, CB, BE, EA, AN, sämmtlich einander gleich; ähnlich wie vorhin wird bewiesen, dass sie sich verhalten wie die Quadrate von NM, NC, NB, NE, NA, die um gleich viel unterschieden sind, und zwar um AN; der Schwerpunkt Aller liegt also so in V, dass in dem Arme IR der Theil RV grösser als $3\,VI$, während FV kleiner als $3\,VI$ ist. Aber NF ist gleich $3\,IM$, folglich ist VM grösser als $\frac{1}{4}MN$, da MS gleich $\frac{1}{4}MN$ gesetzt war. Folglich liegt V dem Scheitel näher als S, w. z. b. w.

»Einem gegebenen Kegel lassen sich Figuren aus Cylindern gleicher Höhe zusammengesetzt ein- und umschreiben, so dass die zwischen den Schwerpunkten beider liegende Strecke kleiner sei, als irgend eine gegebene Linie.«

Es sei der Kegel (Fig. 137) mit der Axe AB gegeben, sowie die Linie K. Es sei L ein Cylinder, gleich demjenigen, der dem Kegel eingeschrieben wird, mit einer Höhe gleich AB, und AB werde so in C getheilt, dass AC gleich $3\,CB$ sei, und wie AC zu K, so verhalte sich der Cylinder L zum Körper X. Ferner werde dem Kegel eine Figur aus Cylindern gleicher

Höhe umschrieben, und eine andere ebensolche Figur werde eingeschrieben, so zwar, dass der Unterschied beider kleiner sei als X; endlich sei der Schwerpunkt der umschriebenen in E oberhalb C, der eingeschriebenen, S, unterhalb C. Ich behaupte, ES sei kleiner als K. Wenn nicht, so nehme man EO gleich CA. Da nun OE zu K wie L zu X, die eingeschriebene Figur aber nicht kleiner ist als der Cylinder L, während der Unterschied gegen die umschriebene Figur kleiner ist als X und mithin die eingeschriebene ein grösseres Verhältniss zum Ueberschuss beider hat, als OE zu K, während ferner OE zu K nicht kleiner ist als OE zu ES (da ES nicht kleiner als K), so wird die eingeschriebene Figur zum Ueberschuss ein grösseres Verhältniss haben, als OE zu ES. Wie aber der Ueberschuss zur eingeschriebenen Figur, so verhalte sich die Linie ES zu einer Strecke, die grösser als EO sein wird, und die gleich ER sei. Der Schwerpunkt der umschriebenen Figur liegt in E, der der eingeschriebenen in S. Nun weiss man, dass der Schwerpunkt des Ueberschusses in RE liege, und zwar so, dass das Verhältniss der eingeschriebenen Figur zum Ueberschuss sich verhalte, wie die Strecke von E bis zu dem fraglichen Punkte zu ES; dasselbe Verhältniss hat auch RE zu ES; folglich müsste R der Schwerpunkt des Ueberschusses sein, was unmöglich ist, da eine parallel der Basis durch R hindurch gelegte Ebene die Massen nicht von einander trennt. Mithin ist es unrichtig, dass ES nicht kleiner als K sei, mithin ist ES kleiner als K. Dasselbe lässt sich für eine Pyramide beweisen.

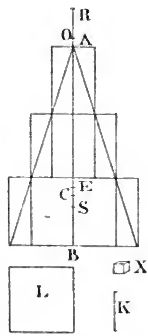

Fig. 137.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass einem gegebenen Kegel eine aus Cylindern gleicher Höhe bestehende Figur ein- und umschrieben werden könne, deren Schwerpunkte von demjenigen Punkte, der die Axe im Verhältniss von 3 zu 1 theilt, weniger entfernt seien, als irgend eine gegebene Strecke. Denn da jener die Axe im genannten Verhältniss theilende Punkt stets zwischen den Schwerpunkten der ein- und umschriebenen Figur liegt, so kann auch die zwischen den Schwerpunkten selbst liegende Strecke kleiner als jede gegebene Linie sein, da die Entfernung zwischen den einzelnen Schwerpunkten und jenem Theilpunkte sehr viel kleiner als die gegebene Linie sein könnte.

»Der Schwerpunkt eines Kegels oder einer Pyramide theilt die Axe so, dass der dem Scheitel zugekehrte Theil das Dreifache des basalen beträgt.«

Ein Kegel, dessen Axe AB (Fig. 138), werde in C getheilt, so dass AC gleich $3BC$ sei. Es soll bewiesen werden, dass der Schwerpunkt in C liege. Wenn nicht, so wird derselbe oberhalb oder unterhalb C liegen. Angenommen, er läge unterhalb in E. Man nehme SP gleich CE und theile in N, so dass BE sammt PN zu PN wie der Kegel zum Körper X. Dann schreibe man eine aus Cylindern gleicher Höhe bestehende Figur ein, deren Schwerpunkt von C weniger abstehe, als um SN, und dass der Unterschied gegen den Kegel kleiner sei als X, denn dass solches möglich sei, ward soeben bewiesen. Der bezügliche Schwerpunkt liege in I. Mithin ist IE grösser als NP, da SP gleich CE und IC kleiner als SN: da nun BE sammt NP zu NP wie der Kegel zu X und da der Ueberschuss kleiner ist als X, so wird der Kegel zum Ueberschuss ein grösseres Verhältniss haben, als BE sammt NP zu NP, also auch die eingeschriebene Figur zum Ueberschuss grösser als BE zu NP. Aber BE zu EI ist kleiner als BE zu NP sammt EI; um so mehr ist die eingeschriebene Figur zum Ueberschuss grösser als BE zu EI. Wie also die eingeschriebene Figur zum Ueberschuss, so verhalte sich EI zu einer Linie, die grösser ist als BE, und die gleich ME sei. Da nun ME zu EI wie die eingeschriebene Figur zum Ueberschuss, und da E der Schwerpunkt des Kegels ist und I der der eingeschriebenen Figur, so müsste M der Schwerpunkt des Ueberschusses sein, was unmöglich ist. Also liegt der Schwerpunkt nicht unterhalb C. — Aber auch nicht oberhalb; denn läge er in R, so nehme man wiederum SP mit dem Theilungspunkte N, so dass BC sammt NP zu NS sei wie der Kegel zu X; dann umschreibe man eine Figur, die um weniger als X abweicht, so dass der Schwerpunkt der umschriebenen Figur von C weniger absteht, als NP beträgt. Er liege in O. Alsdann wird der Rest OR grösser als NS sein, und da BC sammt PN zu NS wie der Kegel zu X und da der Ueberschuss kleiner als X ist, da-

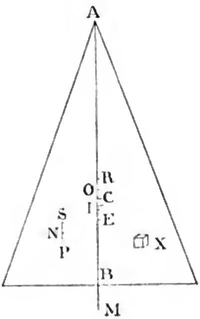

Fig. 138.

Digitized by Google

gegen BO kleiner als BC sammt PN, und OR grösser als SN, so wird der Kegel zum Ueberschuss ein viel grösseres Verhältniss haben, als BO zu OR. Es sei gleich MO zu OR; alsdann wird MO grösser als BC sein, und M der Schwerpunkt des Ueberschusses, was aber unmöglich ist. Mithin liegt der Kegelschwerpunkt auch nicht oberhalb C; also liegt er in C. Dasselbe gilt für die Pyramide.

»Wenn vier Linien einander folgweise proportional sind, und wenn die kleinste zum Ueberschuss der grössten über die kleinste sich so verhält, wie eine gewisse Strecke zu $\frac{3}{4}$ des Ueberschusses der grössten über die zweite; und wenn eine Linie gleich der grössten sammt der doppelten zweiten und dreifachen dritten zu einer Linie, gleich dem Vierfachen der grössten sammt dem Vierfachen der zweiten sammt dem Vierfachen der dritten sich verhält wie eine gewisse zweite Strecke zum Ueberschuss der grössten über die zweite, so ist die Summe jener beiden Strecken gleich dem vierten Theile der grössten der vier Linien.«

Es seien die vier Strecken AB, BC, BD, BE (Fig. 139) folgweise proportional, und wie BE zu EA, so verhalte sich FG zu $\frac{3}{4} AC$. Wie ferner AB sammt $2\,BC$ sammt $3\,BD$ zu $4\,AB$ sammt $4\,BC$ sammt $4\,BD$, so sei KG zu AC. Es soll bewiesen werden, dass KF gleich $\frac{1}{4} AB$ sei. Da nämlich AB, BC, BD, BE folgweise proportional sind, so sind auch AC, CD, DE folgweise proportional, und wie $4\,AB$ sammt $4\,BC$ sammt $4\,BD$ zu AB sammt $2\,BC$ sammt $3\,BD$, so verhält sich $4\,AC$ sammt $4\,CD$ sammt $4\,DE$, oder was dasselbe ist $4\,AE$ zu AC sammt $2\,CD$ sammt $3\,DE$; und so verhält sich auch AC zu KG; mithin wie $3\,AE$ zu AC sammt $2\,CD$ sammt $3\,DE$, so auch $\frac{3}{4} AC$ zu KG. Wie aber $3\,AE$ zu $3\,EB$, so $\frac{3}{4} AC$ zu GF; also (nach dem 24. Satz des 5. Buches) wie $3\,AE$ zu AC sammt $2\,CD$ sammt $3\,DB$, so $\frac{3}{4} AC$ zu KF, und wie $4\,AE$ zu AC sammt $2\,CD$ sammt $3\,DB$ oder was dasselbe ist wie $4\,AE$ zu AB sammt CB sammt BD, so AC zu KF und umgekehrt auch $4\,AE$ zu AC wie AB sammt CB sammt BD zu KF; nun ist aber AC zu AE wie AB zu AB sammt CB sammt BD, folglich auch $4\,AE$ zu AE wie AB zu KF. Mithin ist KF der vierte Theil von AB.[2])

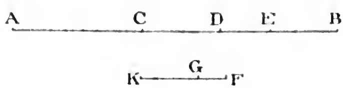

Fig. 139.

Digitized by Google

»Eine abgestumpfte Pyramide oder ein stumpfer Kegel hat den Schwerpunkt in der Axe und theilt dieselbe so, dass der der kleineren Basis zugekehrte Theil zum anderen sich verhält wie das Dreifache der grösseren Basis sammt dem doppelten Mittelwerth aus beiden sammt der kleineren Basis zum Dreifachen der kleineren Basis sammt dem doppelten Mittelwerth aus beiden Basen.«

Ein Kegel oder eine Pyramide, deren Axe AD (Fig. 140), werde durch eine der Basis parallele Ebene abgestumpft. Der Stumpf habe die Axe VD, und wie das Dreifache der grösseren Basis sammt dem Mittel aus beiden Basen sammt der kleineren zur dreifachen kleineren sammt dem doppelten Mittel aus beiden sammt der grösseren, so verhalte sich VO zu OD. Es soll bewiesen werden, dass O der Schwerpunkt des Stumpfes sei. Es sei VM gleich $\frac{1}{4}VD$.

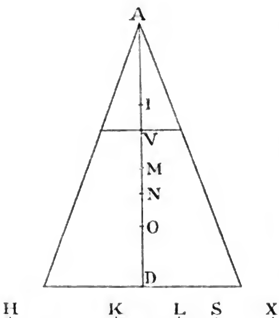

Fig. 140.

Man mache HX gleich AD und es sei KX gleich AV; ferner sei zu HX, KX die dritte Proportionale gleich XL, und zu diesen sei die vierte Proportionale XS; wie ferner HS zu SX, so verhalte sich MD zu einer Strecke, die von O an nach A hin verlaufe und ON sei; da nun die grössere Basis zum Mittel aus beiden Basen sich verhält wie DA zu AV, d. h. wie HX zu XK: und da jene mittlere zur kleineren Basis wie KX zu XL, so verhalten sich die grössere, die mittlere und die kleinere Basis wie HX, XK, KL.

Deshalb verhält sich die dreifache grössere sammt der doppelten mittleren sammt der kleineren zur dreifachen kleineren sammt der doppelten mittleren sammt der grösseren, oder, was dasselbe ist, VO zu OD wie $3\,HX$ sammt $2\,XK$ sammt XL zu $3\,XL$ sammt $2\,XK$ sammt XH: also OD zu DV wie HX sammt $2\,XK$ sammt $3\,XL$ zum Vierfachen von HX sammt XK sammt XL.

Hieraus folgt, dass die vier Linien HX, XK, XL, XS folgweise proportional sind; wie nun XS zu SH, so verhält sich NO zu $\frac{3}{4}DV$, d. h. zu DM oder zu $\frac{3}{4}HK$; wie aber

HX sammt $2\,XK$ sammt $3\,XL$ zu $4\,HX$ sammt $4\,XK$ sammt $4\,XL$, so verhalte sich eine gewisse Strecke OD zu DV, d. h. zu HK. Mithin ist (nach dem Vorigen) DN der vierte Theil von HX oder von AD; folglich ist N der Schwerpunkt des Kegels oder der Pyramide mit der Axe AD. Es liege nun der Schwerpunkt der Pyramide oder des Kegels mit der Axe AV in I. Alsdann liegt der Schwerpunkt des Stumpfes in IN, wenn dasselbe über N hinaus verlängert wird, und zwar liegt er so weit von N entfernt, dass diese Entfernung zu IN sich verhält wie der Stumpf zur Spitze mit der Axe AV. Mithin erübrigt zu beweisen, dass IN zu NO sich verhalte wie der Stumpf zur Spitze mit der Axe AV. Nun verhält sich der volle Kegel mit der Axe DA zur Spitze mit der Axe AV wie der Cubus von DA zum Cubus von AV oder wie die Cuben von HX und XK; d. h. wie HX zu XS; folglich verhält sich HS zu SX wie der Stumpf zur Spitze; nun aber war HS zu SX wie MD zu ON: folglich Stumpf zu Spitze wie MD zu NO. Da aber AN gleich $\frac{3}{4}AD$ und AI gleich $\frac{3}{4}AV$, so ist der Rest IN gleich $\frac{3}{4}VD$; mithin ist IN gleich MD. Aber MD verhält sich zu NO wie der Stumpf zur Spitze, folglich verhalten sich letztere auch wie IN zu NO, woraus der Lehrsatz folgt.

Ende des Anhanges.

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

Digitized by Google

Fünfter Tag.

Discurse
zwischen den Herren
Salviati, Sagredo und Simplicio.

Salv. Wie sehr freue ich mich, dass wir nach einer Pause von einigen Jahren uns heute wieder versammeln. Ich weiss, dass Herr *Sagredo* mit seinem rührigen Geiste nicht müssig sein kann; er wird daher inzwischen über die Lehre von der Bewegung, die wir das letzte Mal behandelten, nachgedacht haben. Aus der Unterhaltung mit ihm, sowie auch mit unserem Herrn *Simplicio*, habe ich stets Früchte von nicht gemeiner Art geerntet, daher bitte ich die Herren, irgend neue Gedanken über den von unserem Autor behandelten Gegenstand vorzubringen. Damit wollen wir unsere gewohnten Discurse beginnen und eine nützliche Unterhaltung pflegen.

Sagr. Ich leugne nicht, dass ich in den vergangenen Jahren manche Gedanken mir gemacht habe über die neuen Beziehungen, die unser trefflicher Alter (buon Vecchio) uns aufgedeckt hat in der Lehre von der Bewegung, die er auf Grundsätze der Geometrie aufgebaut hat. Auf Ihre Aufforderung hin will ich etwas aus meinem Gedächtniss herausholen und will Ihnen Gelegenheit geben, meinem Verständniss aufzuhelfen durch Ihre gelehrten Auseinandersetzungen.

Um also auf die Abhandlung über die Bewegung zurück zu kommen, möchte ich Ihnen einen langgehegten und jetzt bei Betrachtung der gleichförmigen Bewegung wieder neu angeregten Zweifel vorhalten. Unser Autor stützt sich nämlich (ebenso wie viele andere ältere und neuere Schriftsteller auch thun) auf den Satz der gleichen Vielfachen. Hier herrscht eine gewisse Dunkelheit in Betreff der fünften, oder wie andere sagen, sechsten Definition im fünften Buche des *Euclid.* Ich schätze mich glücklich, bei dieser Gelegenheit meinen Zweifel Ihnen gegenüber verlaut-

Digitized by Google

baren zu dürfen, in der Hoffnung, von demselben völlig befreit zu werden.

Simpl. Für mich erscheint diese erneute Zusammenkunft wie ein besonderes Geschenk des Schicksals, wenn ich gerade über den von Herrn *Sagredo* bezeichneten Gegenstand einiges Licht erhalten könnte. In dem geringen Quantum von Geometrie, das ich in der Knabenschule kennen lernte, ist mir die Schwierigkeit nicht zum Bewusstsein gekommen. Wenn ich nun nach langer Zeit wieder einiges über die speciell genannte Frage erfahre, so wird mir solches von hohem Werthe sein.

Sagr. Ich meine also, dass beim Beweise des ersten Theorems über die gleichförmige Bewegung unser Autor sich auf die Methode der gleichen Vielfachen, auf die fünfte oder sechste Definition im fünften Buche des *Euclid* gestützt hat, und dass, da ich seit lange ein Bedenken gegen diese Definition hatte, mir etwas an der Klarheit fehlte, die ich in der genannten Proposition gewünscht hätte. Eben jenes erste Princip gründlich zu verstehen, wäre mir von hohem Werth, um das Folgende in der Lehre von der Bewegung fester erfassen zu können.

Salv. Eurem Wunsche, meine Herren, hoffe ich zu entsprechen, wenn ich die Definition *Euclid*'s Euch in anderer Weise zugänglich mache und den Weg zeige, auf welchem ich den Begrift der Proportionalität einführen möchte. Indess sollt Ihr wissen, dass in diesem Bedenken Ihr Männer von hervorragender Bedeutung zu Genossen habt, Männer, die gleichfalls lange Zeit unbefriedigt waren über die Behandlung der Frage.

Zudem muss ich bekennen, dass einige Jahre nachdem ich das Studium des fünften Buches des *Euclid* beendet hatte, ich lebhaft das mich umgebende Dunkel empfand. Ich überwand endlich alle Schwierigkeiten durch das Studium der wunderbaren »Spiralen« des *Archimedes*, bei dem ich gleich Eingangs in der schönen Einleitung einen Beweis fand, der dem unseres Autors ähnlich war. Bei dieser Gelegenheit fing ich nun an nachzudenken, ob nicht ein einfacherer Weg zu finden wäre, um dasselbe Ziel zu erreichen und für mich und Andere einen präcisen Begriff der Proportionalität zu gewinnen; nun will ich dem allerstrengsten Urtheil der Herren meine Gedanken unterbreiten.

Zunächst nehme man an (wie auch *Euclid* bei seiner Definition es thut), es seien proportionale Grössen vorhanden. Mit anderen Worten: dass, wenn drei Grössen gegeben seien, die

Digitized by Google

Proportion, oder die Beziehung, oder das Grössenverhältniss der ersten zur zweiten, auch die dritte zu einer vierten haben könne. Weiter behaupte ich, dass, um eine Definition dieser Proportionalität zu geben, so dass der Leser eine richtige Vorstellung von dem Wesen dieser proportionalen Grössen erhält, wir eine ihrer vorzüglichsten Eigenschaften betrachten müssen, und zwar die einfachste, die auch dem nicht in der Mathematik Gebildeten zugänglich sei. So machte es *Euclid* selbst sehr oft. Erinnern Sie sich, wie er nicht etwa sagt, der Kreis sei eine ebene Figur, bei welcher zwei denselben und sich selber schneidende Linien solche Stücke enthalten, dass die Rechtecke aus den Abschnitten einer jeden denselben Betrag haben; oder eine Figur, in welcher bei allen eingeschriebenen Vierecken die Summe der gegenüberliegenden Winkel stets zweien Rechten gleich sei. Solche Definitionen wären immerhin gut und richtig gewesen. Indess kannte er eine andere Eigenschaft des Kreises, die weit leichter verständlich war, und welcher eine deutlichere Vorstellung entsprach; wer wird leugnen, dass er besser that, diese Eigenschaft zu wählen, um jene entfernter liegenden zu beweisen und später als Schlussfolgerungen vorzuführen?

Sagr. Sie haben vollkommen Recht und ich glaube, man wird selten Jemanden finden, der sich willig zufrieden wissen wird mit der Definition, die ich in Uebereinstimmung mit *Euclid* so hinstelle:

»Vier Grössen sind dann einander proportional, wenn irgend gleiche Vielfache der ersten und dritten Grösse stets grösser oder kleiner oder gleich sind irgend welchen gleichen Vielfachen der zweiten und vierten Grösse.«

Wessen Geistesgaben sind so glücklich beschaffen, sogleich davon überzeugt zu sein, dass wirklich bei vier Proportionalen stets jene Uebereinstimmung der gleichen Vielfachen stattfinde? Oder aber: ob jene Uebereinstimmung nicht auch eintreten könnte, wenn die Grössen nicht in Proportion stehen? Hatte doch schon *Euclid* in den vorhergehenden Definitionen gesagt:

»Die Proportion zwischen zwei Grössen ist eine solche Beziehung oder solch ein Verhältniss zwischen denselben, welches sich auf ihre Quantität bezieht.«

Hier also hatte bereits der Leser erfasst, was ein Verhältniss zweier Grössen sei; dann wird es ihm nicht deutlich sein, ob unter der Beziehung oder dem Verhältniss zwischen der ersten und zweiten Grösse etwas ähnliches zu verstehen sei, wie unter der Beziehung oder dem Verhältniss zwischen der dritten und

Digitized by Google

vierten, wenn jene gleichen Vielfachen der ersten und dritten sich in angedeuteter Art stets gleich unterscheiden von den gleichen Vielfachen der zweiten und vierten Grösse.

Salv. Wie dem auch sei, mir scheint der Ausspruch des *Euclid* mehr ein zu beweisendes Theorem, als eine voran zu stellende Definition zu sein. Da ich so oft meiner Anschauung habe beipflichten hören, so will ich mich bemühen, der unmittelbaren Vorstellung auch derjenigen, die keine Geometrie kennen, entgegen zu kommen, und folgendermaassen mich fassen:

»Vier Grössen sind stets unter einander proportional, d. h. es hat dann die erste zur zweiten dasselbe Verhältniss, wie die dritte zur vierten, wenn die erste gleich ist der zweiten, und auch die dritte gleich der vierten. Oder: wenn die erste eben so viel mal ein Mehrfaches der zweiten, wie die dritte ein Mehrfaches der vierten.« Sollte der Herr *Simplicio* hiergegen ein Bedenken haben?

Simpl. Gewiss nicht.

Salv. Da nun aber zwischen vier Grössen nicht stets die angegebene Gleichheit statthaben wird oder ein ganzes Vielfaches vorgefunden wird, müssen wir weiter gehen, und ich werde mir erlauben, Herrn *Simplicio* zu fragen: Haltet Ihr noch die vier Grössen für proportional, wenn die eine etwa drei und einhalb mal die zweite enthält, und eben so die dritte drei und einhalb mal die vierte?

Simpl. Gewiss gestehe ich das zu und halte die vier Grössen nicht nur dann für proportional, wenn das genannte bestimmte Beispiel, sondern auch dann, wenn irgend ein anderes Vielfaches oder Uebertheiliges statthat.

Salv. Kurz und allgemein gefasst können wir also sagen:

»Vier Grössen sind dann proportional, wenn das Uebermaass (eccesso) der ersten zur zweiten (wie gross dasselbe auch sei) gleich ist dem Uebermaass der dritten über die vierte.«

Simpl. Bis hierzu bemerke ich keine Schwierigkeit, allein ich finde, dass Sie in dieser Definition der proportionalen Grössen nur den Fall beachten, in dem die Vorderglieder grösser sind, denn Sie nehmen an, die erste sei grösser als die zweite, und eben so die dritte grösser als die vierte. Was aber, frage ich, soll ich thun, wenn die Vorderglieder die kleineren sind?

Salv. Nun, wenn die Ordnung der vier Grössen eine solche ist, dass die Vorderglieder kleiner sind, alsdann wird die zweite Grösse die erste, und die vierte die dritte übertreffen. Alsdann belieben Sie die Ordnung umzukehren und nehmen die zweite

Digitized by Google

zuerst, die vierte zudritt. Alsdann werden wiederum die Vorderglieder die grösseren sein und unsere Definition braucht nicht verändert zu werden.

Sagr. So ist es. Wir wollen also stets annehmen, die Vorderglieder seien die grösseren, wodurch die Ausdrucksweise und das Verständniss erleichtert werden wird.

Salv. Ausser der nunmehr festgestellten Definition könnten wir noch folgendermaassen vier proportionale Grössen definiren:

»Wenn die erste Grösse, um zur zweiten ein solches Verhältniss zu haben wie die dritte zur vierten, nicht im Geringsten grösser oder kleiner ist als sie sein soll, alsdann hat sie dasselbe Verhältniss zur zweiten, wie die dritte zur vierten.« Bei dieser Gelegenheit aber will ich den Begriff des grösseren Verhältnisses definiren und sagen:

»Wenn aber die erste Grösse grösser ist, als sie sein müsste, um zur zweiten dasselbe Verhältniss zu haben, wie die dritte zur vierten, alsdann soll gesagt werden, die erste habe zur zweiten ein grösseres Verhältniss, als die dritte zur vierten.«

Simpl. Gut, aber wenn nun die erste Grösse kleiner ist, als sie sein müsste, um zur zweiten dasselbe Verhältniss zu haben, wie die dritte zur vierten?

Salv. Nun, in diesem Falle ist es klar, dass die dritte grösser ist, als sie sein sollte, um zur vierten dasselbe Verhältniss zu haben, wie die erste zur zweiten. Dann belieben Sie die Glieder umzuordnen, indem Sie das dritte und vierte als erstes und zweites nehmen, sowie das erste und zweite als drittes und viertes.

Sagr. Bis hierher verstehe ich vollkommen Eure Absicht und das Princip, auf welches Sie die Proportionalität gründen wollen. Nun, scheint mir, liegt Ihnen ob, auf Grund dieses Principes entweder die ganze fünfte Definition des *Euclid* zu beweisen, oder auf Grund Ihrer beiden Definitionen jene beiden anderen zu demonstriren, die *Euclid* als fünfte und siebente bringt und auf welche er den ganzen Mechanismus des fünften Buches errichtet. Wenn Sie als Schlussfolgerungen jene beiden uns beweisen können, so bleibt mir über diesen Gegenstand Nichts mehr zu wünschen übrig.

Salv. Gerade das war meine Absicht: denn wenn es evident wird, dass vier gegebene proportionale Grössen stets so beschaffen sind, dass irgend welche Vielfache der ersten und dritten stets in gleicher Weise gegen irgend ein Vielfaches der zweiten und vierten sich unterscheiden, alsdann kann man ohne Bedenken an das fünfte Buch des *Euclid* herantreten, und alle

Digitized by Google

Theoreme über die proportionalen Grössen sind verständlich. Und ferner, wenn mit der aufgestellten Definition über das grössere Verhältniss ich zeigen kann, dass in gewissem Falle bei den Vielfachen der ersten und der dritten, sowie der zweiten und der vierten, dasjenige des ersten das Vielfache der zweiten übertrifft, während das der dritten nicht grösser ist, als das Vielfache der vierten, so wird man mit diesem Satze die übrigen Theoreme über nichtproportionale Grössen erledigen. Denn unsere Schlussfolgerung wird keineswegs eine Definition sein, wie einer solchen, gleich Eingangs, *Euclid* sich bedient.

Simpl. Sobald ich überzeugt sein werde von jenen beiden Eigenschaften des gleichen Vielfachen, d. h. davon, dass, wenn vier Grössen proportional sind, dieselben stets in derselben Weise sich einander anpassen, sei es im Gleichbleiben, im Grösser- oder Kleinersein; und dass, wenn vier Grössen nicht proportional sind, dieselben in gewissen Fällen nicht in genannter Weise übereinstimmen, dann will ich für meinen Theil keine andere Hülfe brauchen, um mit voller Klarheit das ganze fünfte Buch der Elemente des *Euclid* zu verstehen.

Salv. Nun sagt mir, Herr *Simplicio*, wenn wir die vier Grössen A, B, C, D proportional sein lassen, so zwar, dass die erste A zur zweiten B stets dasselbe Verhältniss habe, wie die dritte C zur vierten D, gebt Ihr zu, dass alsdann auch $2A$ zu B sich verhalte, wie $2C$ zu D?

A B

C D

Simpl. Das verstehe ich recht wohl, denn wenn ein A zu B wie ein C zu D, so könnte ich nimmer einsehen, wie $2A$ zu B ein anderes Verhältniss haben könnten, als $2C$ zu D.

Salv. Alsdann werden auch 4, oder 10, oder $100A$ zu B sich verhalten wie 4 oder 10 oder $100C$ zu D.

Simpl. Gewiss, wenn nur das Mehrfache beidemal dasselbe ist. Das Gegentheil würde man mir schwerlich beibringen können.

Salv. Also ist es nicht so heikel einzusehen, dass das Mehrfache der ersten zur zweiten sich ebenso verhalte, wie dasselbe Mehrfache der dritten zur vierten. Alles nun, was bis jetzt über Vervielfältigung der Vorderglieder gesagt ist, übertraget gefälligst auf die Hinterglieder, und lasset jene, die Vorderglieder, unverändert, und sagt mir nun: glaubt Ihr, dass bei vier gegebenen proportionalen Grössen, die erste zu zwei zweiten sich anders verhalte, als die dritte zu zweien der vierten?

Simpl. Ich glaube, dass das keineswegs statthaben wird;

Digitized by Google

im Gegentheil wird auch jetzt, wenn eine erste zu einer zweiten sich verhält wie eine dritte zu einer vierten, dieselbe erste zu zwei, vier oder zehn zweiten sich verhalten wie eine dritte zu zwei, vier oder zehn der vierten Grösse.

Salv. Ihr gebt also zu und versteht es vollständig, dass, wenn vier proportionale Grössen *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 141) gegeben sind, und die erste und die dritte um ein Gleiches vervielfältigt werden, das Verhältniss dieses Vielfachen *E* der ersten *A* zur zweiten *B* gleich sei dem Verhältniss desselben Vielfachen *F* der dritten *C* zur vierten *D*. Nehmet nun aber an, diese neuen vier Grössen *E*, *B*, *F*, *D* seien die vier Proportionalen, d. h. das Vielfache *E* der ersten sei jetzt die erste, die zweite *B* sei unverändert, das Vielfache *F* der dritten sei die dritte, und die vierte *D* bleibe die vierte. Ferner habt Ihr bereits zugestanden, dass nunmehr auch die folgenden Glieder *B*, *D* gleichmässig vervielfältigt werden können, d. h. das zweite und vierte, ohne die vorhergehenden zu verändern, und dass dann das Verhältniss der ersten zum Vielfachen der zweiten dasselbe sei, wie das der dritten zum Vielfachen der vierten. Aber diese vier Grössen werden jetzt *E*, *F*, d. h. die Vielfachen der ursprünglichen ersten und dritten, und *G*, *H*, die gleichen Vielfachen der zweiten und vierten sein.

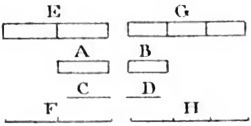

Fig. 141.

Sagr. Ich bekenne mich vollkommen befriedigt und begreife, warum die gleichen Vielfachen stets übereinstimmen in Hinsicht auf ihr Grösser- oder Kleiner- oder Gleichsein. Denn nimmt man die gleichen Vielfachen der ersten und dritten, und andere gleiche Vielfache der zweiten und vierten, so haben Sie mir bewiesen, dass das Vielfache der ersten zu einem beliebigen Vielfachen der zweiten dasselbe Verhältniss habe, wie die ähnlicher Weise gebildeten Vielfachen je der zweiten und vierten, und ich erkenne es klar, dass, wenn das Vielfache der ersten grösser ist als das Vielfache der zweiten, dann auch das Vielfache der dritten das Vielfache der vierten übertreffen muss. Wenn es dagegen kleiner oder gleich ist, wird dasselbe mit dem Verhältniss der dritten zur vierten statthaben.

Simpl. Auch ich empfinde hierin keinerlei Widerstreben. Es bleibt mir indess der Wunsch übrig, zu erfahren, wie (vorausgesetzt, die vier Grössen seien nicht proportional) es wahr

Digitized by Google

sei, dass die gleichen Vielfachen nicht mehr immer jene Uebereinstimmung in Hinsicht auf das Grösser-, Kleiner- oder Gleichsein offenbaren.

Salv. Auch hierin sollt Ihr volle Genüge finden. Von vier Grössen AB, C, D, E sei die erste AB um ein Gewisses grösser, als sie sein müsste, um sich zur zweiten zu verhalten, wie die dritte zur vierten. Nun werde ich beweisen, dass, wenn in einer besonderen Weise ein Vielfaches der ersten und dritten, und wiederum ein anderes Vielfaches der zweiten und vierten genommen wird, das Vielfache der ersten grösser als das der zweiten geworden sein wird, während das der dritten nicht das Vielfache der vierten übertrifft, sondern kleiner als dasselbe sein wird.

Man nehme von AB (Fig. 142) den Ueberschuss fort, so dass der Rest genau vier Proportionale ergiebt. Der Betrag des Ueberschusses sei FB. Mithin werden wir vier Grössen haben, die proportional sind, d. h. AF verhält sich zu C wie D zu E. Man vervielfältige FB so oft, dass es grösser als C sei, in der Zeichnung sei dieses Vielfache gleich HJ. Ferner mache man HL gleich demselben Vielfachen von AF, und M gleich demselben Vielfachen von D, als HJ das Vielfache von FB war. Ohne Zweifel wird alsdann LJ dasselbe Vielfache von AB sein, wie HJ von FB oder M von D.

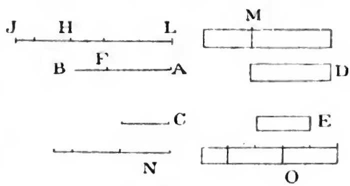

Fig. 142.

Nun nehme man N als Vielfaches von C, so zwar, dass N möglichst nahe gleich LH, letzteres jedoch noch etwas grösser sei als N; und wie N zu C sich verhält, so mache man O zu E.

Da nun N etwas grösser als LH ist, so wird, wenn wir von N einen seiner Theile (gleich C) fortnehmen, ein Rest bleiben, kleiner als LH. Geben wir dem N wieder seinen Theil zurück und fügen LH ein Stück HJ, welches grösser ist als jener Theil, hinzu, so wird LJ grösser sein als N.

Somit liegt ein Fall vor, wo das Vielfache der ersten Grösse grösser als das der zweiten ist. Da nun die vier Grössen AF, C, D, E proportional waren, und da LH und M gleiche Vielfache der ersten und dritten, N und O gleiche Vielfache der zweiten und vierten waren, so werden diese Grössen in steter Uebereinstimmung bleiben in Hinsicht auf das Grösser-, Kleiner- oder Gleichsein. Und da nach unserer Construction *LH*, das Vielfache der ersten kleiner als *N*, das Vielfache der zweiten war, so wird auch *M*, das Vielfache der dritten, nothwendig kleiner sein als *O*, das Vielfache der vierten.

Indess ist es nun bewiesen, dass, wenn die erste Grösse um etwas diejenige übertrifft, die zur zweiten sich verhielte wie die dritte zur vierten, es möglich sein wird, gewisse Vielfache der ersten und dritten und andere Vielfache der zweiten und vierten zu nehmen, so dass das Vielfache der ersten das der zweiten übertrifft, während das Vielfache der dritten kleiner als das der vierten ist.

Sagr. Bis jetzt habe ich Alles verstanden. Es erübrigt noch, dass Sie uns auf Grund des Bisherigen zeigen, dass die beiden streitigen Definitionen des *Euclid* nothwendige Schlussfolgerungen seien, was Ihnen leicht sein wird, da Ihr schon zwei umgekehrte Theoreme bewiesen habt.

Salv. Das soll uns leicht gelingen; zunächst beweisen wir die fünfte Definition:

Wenn von vier Grössen *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 143) die gleichen Vielfachen der ersten und dritten, stets in Hinsicht auf ein Grösser-, Kleiner- oder Gleichsein übereinstimmen mit den beliebigen gleichen Vielfachen der zweiten und vierten, so sind die vier Grössen proportional.

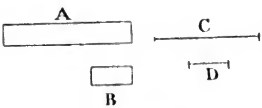

Fig. 143.

Denn angenommen, sie seien nicht proportional. Alsdann würde eines der Vorderglieder grösser sein als nöthig wäre, um die Proportionalität zu erlangen, um zum folgenden dasselbe Verhältniss zu haben, wie das andere Vorderglied zu dessen Begleiter. Es sei das die Grösse *A*. Nimmt man alsdann die Vielfachen von *A* und von *C*, solcher Art, wie oben gezeigt wurde, und ebenso Vielfache von *B*, *D*, so würde ein Vielfaches von *A* grösser als ein Vielfaches von *B* sein können, während das Vielfache von *C* hinter dem von *D* zurückbliebe. Solches aber ist gegen unsere Annahme.

Zum Beweise der siebenten Definition diene folgendes: Es seien *A*, *B*, *C*, *D* vier Grössen, und angenommen, man finde einen Fall, bei dem ein Vielfaches von *A* und dasselbe von *C*, sowie bei gleichen Vielfachen von *B* und *D*, dasjenige von *A*

Digitized by Google

grösser als das Vielfache von B sei, während das von C kleiner als das von D ausfällt, alsdann behaupte ich, hat A zu B ein grösseres Verhältniss, als C zu D, oder, was dasselbe ist, A ist grösser als es sein müsste, um sich zu B zu verhalten wie C zu D.

Angenommen, A sei nicht grösser, alsdann müsste es genau gleich dem zur Proportionalität nöthigen Werthe, oder aber kleiner als dieser sein. Im ersteren Falle müssten alsdann die gleichen Vielfachen der ersten und dritten stets übereinstimmen mit gleichen Vielfachen der zweiten und vierten in Hinsicht auf Grösser-, Kleiner- oder Gleichsein; solches aber widerspricht der Voraussetzung. Angenommen aber zweitens, A sei kleiner als die nöthige Grösse, alsdann wäre offenbar die dritte grösser, als zur Proportionalität nöthig ist, d. h. um zur vierten sich zu verhalten, wie die erste zur zweiten. Alsdann könnte man von der dritten den fraglichen Ueberschuss fortnehmen, damit die genaue Proportionalität sich ergäbe. Wenn aber jetzt jene anfangs angegebenen Vielfachen der Grössen genommen würden, so ist es klar, dass, wenn das Vielfache der ersten das der zweiten überträfe, auch das Vielfache jenes Restes der dritten grösser als das Vielfache der vierten sei. Wenn man nun, anstatt das Vielfache des Restes der dritten zu verkleinern, dasselbe vollauf ersetzte bis zum Vielfachen der ganzen dritten, so würde dieses grösser sein, als das Vielfache des Restes, um so mehr aber grösser, als das Vielfache der vierten, was gegen die Voraussetzung spricht.

Sagr. Ich bin vollständig befriedigt in Hinsicht auf die vorliegende Frage, die mich lange beunruhigt hatte: ich wüsste kaum zu sagen, was in mir überwiegt, die Freude über die neugestaltete Erkenntniss oder das Bedauern, Ihnen nicht früher beim Beginn unserer Unterredungen meine Bedenken mitgetheilt zu haben, da ich leichter hätte folgen können; hatten Sie doch einigen Freunden, denen es wegen der Nähe ermöglicht war, Sie auf Ihrer Villa zu besuchen, Mittheilung gemacht. Nun aber bitte ich um eine Fortsetzung unserer Unterredungen, es sei denn, dass Herr *Simplicio* noch Einwände in Betreff der heute verhandelten Fragen zu erheben hätte.

Simpl. Ich kann meinerseits mich nur vollständig beruhigt und befriedigt erklären.

Salv. Auf unserem Fundamente könnte man das ganze fünfte Buch des *Euclid* zum Theil kürzen, zum Theil umordnen; indess würde uns das zu weit führen und von unseren Zielen ab-

Digitized by Google

lenken. Ueberdies weiss ich, dass Sie, meine Herren, ähnliche Compendien von anderen Autoren gesehen haben werden. Nachdem wir nun die fünfte und siebente Definition des *Euclid* erledigt haben, hoffe ich in Ihrem Sinne zu handeln, wenn ich noch eine alte Erinnerung über eine andere Definition des *Euclid* auffrische. Der Gegenstand liegt dem vorigen nicht fern und ist auch unserem Hauptziel nicht fremd, ich meine den Begriff der zusammengesetzten Proportion, wie unser Autor in seiner Abhandlung sie häufig gebraucht.

Unter den Definitionen im sechsten Buche des *Euclid* findet man folgende fünfte Definition über die zusammengesetzte Proportion:

»Eine Proportion, sagt man, sei dann aus mehreren Proportionen zusammengesetzt, wenn die Beträge der letzteren, mit einander multiplicirt, jene Proportion ergeben.«

Zudem bemerke ich, dass weder *Euclid*, noch irgend ein anderer antiker Autor so sich der Definition bedient, wie sie im Buche aufgestellt worden ist: daraus erwachsen zwei Uebelstände, dem Leser eine Schwierigkeit des Verständnisses, dem Schriftsteller eine überflüssige Bemerkung.

Sagr. Das ist sehr wahr; indess dünkt es mir nicht wahrscheinlich, dass *Euclid*, bei seiner erstaunlichen Genauigkeit, diese Definition aus Unbedacht und umsonst in sein Werk aufgenommen habe. Andererseits könnte dieselbe von Anderen hinzugefügt oder wenigstens derart geändert worden sein, dass man heute nicht mehr erkennt, was der Autor seinen Theoremen hat zu Grunde legen wollen.

Simpl. Dass andere Autoren ihrer sich nicht bedienen, muss ich den Herren glauben, da ich selbst nicht viel darüber gearbeitet habe; mir würde es sehr missfallen, wenn *Euclid* selbst, der von Euch in allen seinen Schriften so hoch geehrt wird wegen seiner Genauigkeit, sie ganz umsonst aufgenommen hätte. Indess möchte ich bekennen, dass ich in meiner schwachen Einsicht, da ich niemals tief in die Mathematik eingedrungen bin, in der vorliegenden Definition wohl noch eine Schwierigkeit erblicke, und zwar vielleicht keine geringere, als in den von Herrn *Salviati* schon erledigten.

Eine Zeit lang half ich mir durch Lektüre langer Commentare über diesen Gegenstand, aber aufrichtig gestanden, fand ich jenes Dunkel nie enthüllt. Wenn Sie nun Einiges mittheilen wollen, was mir Klarheit verschaffte, wäre ich Ihnen äusserst dankbar.

Digitized by Google

Salv. Am Ende setzen Sie gar voraus, dass es hier um tiefsinnige Speculationen sich handele; in der That aber wird eine geringfügige Bemerkung uns Genüge thun.

Denken Sie sich zwei Grössen gleicher Qualität A, B (Fig. 144). Es wird A zu B ein gewisses Verhältniss haben. Zwischen beide Grössen setze man eine dritte C von gleicher Qualität. Nun sagt man, das Verhältniss von A zu B könne zusammengesetzt werden durch zwei Verhältnisse A zu C und C zu B. Das ist der Sinn der *Euclid*'schen Definition.

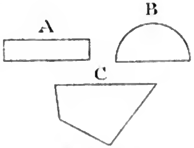

Fig. 144.

Simpl. Gewiss versteht *Euclid* so die zusammengesetzte Proportion, allein ich verstehe nicht, wie A zu B ein zusammengesetztes Verhältniss habe aus zwei Proportionen, nämlich von A zu C und von C zu B.

Salv. Sagt mir doch, Herr *Simplicio*, versteht Ihr, dass A zu B überhaupt irgend ein Verhältniss habe?

Simpl. Ja, mein Herr, wenn nur beide gleicher Qualität sind.

Salv. Und dass dieses Verhältniss ein unveränderliches sei und nie einen anderen Werth haben könne, als eben den, den es hat?

Simpl. Auch das räume ich ein.

Salv. Weiter füge ich hinzu, dass ebenso auch A zu C ein unabänderliches Verhältniss habe, sowie auch C zu B. Das Verhältniss der äussersten Grössen A und B, sagt man, sei aus zwei Verhältnissen zusammengesetzt, welche zwischen jene äusseren Grössen hineintreten.

»Ich füge noch hinzu, dass, wenn Sie sich vorstellen, dass zwischen diese äusseren Grenzen nicht blos eine Grösse zwischengestellt sei, sondern mehrere, wie in beliebigen Zeichen A, C, D, B, alsdann Sie verstehen werden, dass das Verhältniss von A zu B aus allen Verhältnissen zusammengesetzt sei, die dazwischen liegen, also aus den Verhältnissen A zu C, C zu D, D zu B und ähnlich, wenn noch mehr Zwischengrössen gegeben wären; es könnte die erste zur letzten zusammengesetzt werden aus allen Proportionen der Zwischenglieder.

Zugleich bemerke ich, dass, wenn die zusammenzusetzenden Proportionen einander gleich sind, oder richtiger, wenn es dieselben sind, die erste Grösse zur letzten ein aus allen zwischenliegenden zusammengesetztes Verhältniss haben wird; weil aber

Digitized by Google

die Zwischenverhältnisse einander gleich sind, so können wir uns auch so ausdrücken, dass die erste Grösse zur letzten ein Verhältniss habe, welches ein Vielfaches des Verhältnisses der ersten zur zweiten Grösse ist, und zwar ein so Vielfaches, als Zwischenverhältnisse vorhanden sind zwischen der ersten und letzten. Wie z. B. wenn drei Grössen gegeben sind, und die erste zur zweiten sich verhält wie die zweite zur dritten, es auch richtig wäre, zu sagen, es habe die erste zur dritten ein aus zweien zusammengesetztes Verhältniss, nämlich aus der ersten zur zweiten, und aus der zweiten zur dritten; da die letzteren Verhältnisse aber dieselben sein sollen, so wird man sagen können, das Verhältniss der ersten zur dritten sei das Doppelte (la duplicata) desjenigen der ersten zur zweiten. Gäbe es vier Grössen, so wäre das Verhältniss der ersten zur vierten aus dreien zusammengesetzt, und es wäre das Dreifache (la triplicata) desjenigen der ersten zur zweiten Grösse, da letzteres dreimal genommen werden muss, um dasjenige der ersten zur vierten zu erhalten etc.«

Hier gelten weder Betrachtungen noch Beweise, denn es handelt sich um eine schlichte Terminologie. Gefällt Euch nicht die Bezeichnung »zusammengesetzt«, so könnten wir sie nennen »unzusammengesetzt« oder »verklebt« oder »vermischt« (incomposta o impastata o confusa) oder irgend wie anders, wie es nur den Herren belieben mag, wenn wir nur festhalten, dass allemal, wo drei Grössen gleicher Qualität unzusammengesetzt oder verklebt oder vermischt genannt werden, wir das Verhältniss der extremen Glieder in der bezeichneten Art auffassen und nicht anders.

Sagr. Ich verstehe das Alles recht wohl, ja ich habe oft *Euclid*'s Kunstgriff bewundert, bei jenem Satze, in dem er beweist, dass gleichwinklige Parallelogramme ein aus dem Verhältniss der Seiten zusammengesetztes Verhältniss haben. In diesem Falle bestehen die beiden Verhältnisse aus vier Grössen, nämlich den Seiten der beiden Parallelogramme; dann fordert er, dass die beiden Verhältnisse sich in drei Grössen darstellen lassen, sodass das eine Verhältniss aus der ersten und zweiten, das andere aus der zweiten und dritten bestehe. Beim Beweise begnügt er sich damit, zu zeigen, dass ein Parallelogramm zum anderen sich verhalte, wie die erste Grösse zur dritten: d. h. es ist zusammengesetzt aus zweien, und zwar aus dem Verhältniss einer Grösse zu einer zweiten und aus dem anderen, dem Verhältniss dieser selben zweiten zur dritten, und zwar sind das

Digitized by Google

dieselben Verhältnisse, die zuerst aus getrennten vier Grössen, den Seiten des Parallelogramms, gebildet vorlagen.

Salv. Das habt Ihr vortrefflich wiedergegeben. Wenn nun die zusammengesetzte Proportion wohl definirt und aufgefasst ist (und es soll nichts anderes darunter verstanden werden, als das Ding, das wir so genannt haben), alsdann kann die 23. Proposition des sechsten Buches des *Euclid*, wie er selbst es thut, bewiesen werden, denn hier nimmt er nicht die Definition in der Art, wie sie weit verbreitet ist, sondern gerade in dem Sinne, wie wir sie oben gefasst haben. Nach der 23. Proposition würde ich in einem Zusatz die übliche fünfte Definition des sechsten Buches über die zusammengesetzte Proportion hinzugefügt haben, besser aber in Form eines Theorems. Man nehme zwei Verhältnisse an, deren eines aus den Grössen A, B, das andere aus C, D gebildet ist. Die vulgäre Definition besagt, man werde die aus beiden zusammengesetzte Proportion haben, wenn man die Quantitäten beider mit einander multiplicirt. Ich stimme indess Herrn *Simplicio* bei, wenn er meint, dass das schwer zu erfassen sei, und dass ein Beweis gegeben werden müsste, was mit wenigen Worten folgendermaassen geschehen könnte. Wenn die vier Grössen der beiden Verhältnisse nicht Linien, sondern andere Qualitäten wären, so sollen letztere durch gerade Linien dargestellt werden. Aus den Vordergliedern A, C (Fig. 145) bilde man ein Rechteck, desgleichen aus den anderen B, D ein anderes Rechteck. Nach dem 23. Satz des sechsten Buches ist es klar, dass das Rechteck aus A, C zu dem aus B, D gebildeten ein aus den Verhältnissen A zu B und C zu D zusammengesetztes Verhältniss haben wird, und diese beiden Verhältnisse sind gerade diejenigen, welche wir anfangs schon annahmen, um zu untersuchen, welche Proportion aus ihrem Vergleiche sich ergeben werde. Da nun das aus A zu B und C zu D zusammengesetzte Verhältniss dasjenige ist, welches das Rechteck AC zum Rechteck BD hat, so möchte ich Herrn *Simplicio* bitten, zu sagen, wie wir vorgegangen sind, um diese beiden Grössen zu finden, aus denen das gesuchte Verhältniss bestand?

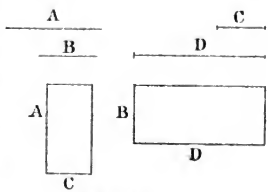

Fig. 145.

Simpl. Ich denke nicht anders, als dass wir zwei Rechtecke

Digitized by Google

aus den anfangs gegebenen Grössen bildeten, das eine nämlich aus A und C, das andere aus B und D.

Salv. Aber die Bildung der Rechtecke aus Linien in der Geometrie entspricht genau der Multiplication von Zahlen in der Arithmetik, wie jeder Anfänger in der Mathematik weiss, und was wir mit einander multiplicirt haben, das sind die Linien A, C und die Linien B, D, also die homologen Glieder der beiden Theilverhältnisse.

Indem man also die Quantitäten oder die Werthe der einfachen Verhältnisse multiplicirt, erhält man die Quantität oder den Werth des Verhältnisses, welches man aus jenen zusammengesetzt nennt.

Ende des fünften Tages.

Digitized by Google

Sechster Tag.

Ueber den Stoss.

Discurse
zwischen den Herren
Salviati, Sagredo und Aproino.

Sagr. Eure 14tägige Abwesenheit, Herr *Salviati*, gab mir Gelegenheit, mich in die Lehre vom Schwerpunkt fester Körper zu vertiefen und so die neuen Lehrsätze über die beschleunigte Bewegung aufmerksam durchzusehen, und da unter denselben mehrere recht schwer zu verstehen sind, so erfreute ich mich der Mitarbeit dieses Herrn, den ich Ihnen vorstelle.

Salv. Ich wollte soeben nach dem Herrn, der Sie begleitet, fragen, und mich auch erkundigen, warum unser Herr *Simplicio* fehlt.

Sagr. Die Abwesenheit des Herrn *Simplicio* glaube ich mit Bestimmtheit darauf zurückführen zu müssen, dass er in einigen Beweisen zu diversen Bewegungsproblemen sich nicht hat zurecht finden können, desgleichen in der Lehre vom Schwerpunkt. Ich meine jene Sätze, die wegen einer langen Verkettung von geometrischen Beweisen solchen Herren unzugänglich sind, die die Elemente nicht stets zur Hand haben; dieser Herr hier ist Herr *Paolo Aproino*, ein Edelmann aus Treviso, ein Zuhörer unseres Akademikers, als derselbe in Padua las, zugleich einer seiner vertrautesten Freunde, der viel und lange mit ihm verkehrt hat, und in Gemeinschaft mit Anderen (unter welchen vor Allen Herr *Daniello Antonini*, Edelmann aus Udine, von übernatürlichem Geist und Verstand, zu nennen wäre, der bei der Vertheidigung des Vaterlandes für seinen erhabenen Gebieter einen glorreichen Tod fand und der aller verdienten Ehren Seitens der durchlauchtigsten Republik Venedig theilhaft wurde) specielle Zusammenkünfte hatte behufs Anstellung von Experimenten, die sich auf diverse Probleme bezogen und im Hause unseres Akademikers unternommen wurden. Vor etwa zehn Tagen ist dieser Herr aus Venedig hergekommen; seiner Gewohnheit gemäss hat er mich aufgesucht, und da er erfuhr, dass ich im Besitze der Abhandlungen unseres gemeinsamen Freundes sei, so hat er an denselben Gefallen gefunden; nun wünscht er, an

Digitized by Google

unserer Besprechung des wunderbaren Stossproblems Theil zu nehmen. Wie ich von ihm höre, hat er viel darüber unterhandelt, jedoch ohne besonderen Erfolg, und ohne feste Entscheidung selbst mit dem Akademiker, mit dem zusammen er Versuche angestellt hat über die Kraft des Stosses und die Art, denselben zu erklären, und er war bereit, unter Anderem einen recht sinnreichen und feinen Versuch uns mitzutheilen.

Salv. Ich bin überaus erfreut, Herrn *Aproino* kennen zu lernen, besonders da ich von unserem Akademiker schon von ihm gehört habe; mit grossem Vergnügen werde ich wenn auch nur von einem Theile der Versuche Kenntniss nehmen, die im Hause unseres Akademikers in Gegenwart so ausgezeichneter Männer, wie Herr *Aproino* und Herr *Antonini*, angestellt worden sind. Von diesen Herren hat unser Freund mir so oft mit Anerkennung und Bewunderung gesprochen. Da wir heute über den Stoss uns unterhalten wollten, so wird Herr *Aproino* gewiss uns mittheilen, was er hierüber aus den Versuchen erschlossen hat, wobei ich meinerseits mich bereit erkläre, meine Erfahrungen über andere Probleme herbei zu holen, deren es eine grosse Zahl giebt, denn unser Akademiker war stets ein eifriger und scharfsinniger Experimentator.

Apr. Wenn ich mit schuldigem Dank, mein Herr, Ihrer Höflichkeit entsprechen wollte, so würde ich so viel Worte machen müssen, dass wenig oder gar keine Zeit übrig bliebe, den vorgenommenen Gegenstand zu behandeln.

Sagr. Nein, nein, Herr *Aproino*, lassen Sie uns sogleich unsere gelehrten Unterredungen beginnen und ceremonielle Complimente den Höflingen überlassen. Ich bitte, lasst es bewenden bei den kurzen, aufrichtigen und herzlichen Worten.

Apr. Obwohl ich mir nicht einbilde, Herrn *Salviati* etwas Neues bringen zu können, und es besser wäre, wenn er die Leitung der Unterredung auf seine Schultern nähme, so will ich doch, wenigstens um ihm die Last zum Theil abzunehmen, von den Grundgedanken und Fundamentalversuchen Mittheilung machen, die unseren Freund veranlassten, sich in das wunderbare Stossproblem zu vertiefen. Er versuchte ein Mittel ausfindig zu machen, die bedeutende Kraft des Stosses zu messen, und wo möglich die Prinzipien zu ergründen, nach denen das Wesen der Wirkung zu erfassen sei, eine Wirkung, die, wie es schien, ganz anders bei ihrem höchsten Betrage sich zeigte und die gänzlich abwich von der Art und Weise, wie sonst bei mechanischen Vorrichtungen (ich nenne solche, um die immense

Digitized by Google

Wucht des Feuers auszuschliessen) eine vermehrte Wirkung erzielt wird, und bei denen es recht wohl verständlich ist, wie die Geschwindigkeit eines geringfügigen Körpers die Kraft eines bedeutenden Widerstandes überwindet und eine geringe Bewegung erzeugt. Da aber beim Stosse die Bewegung des Stossenden und dessen Geschwindigkeit mit der Bewegung des Gestossenen und seiner geringeren oder grösseren Fortrückung in Beziehung gebracht werden musste, so gedachte der Akademiker zuerst zu untersuchen, welchen Einfluss auf die Stosswirkung das Gewicht des Hammers und seine Geschwindigkeit habe; er versuchte ein Maass zu finden für die eine und für die andere Grösse. Zu dem Zwecke ersann er einen sinnreichen Versuch. Er legte einen festen Stab von 3 Ellen Länge über einen Zapfen, ähnlich dem Arme einer Waage, hing an beide Enden des Stabes gleiche Gewichte, deren eines aus zwei kupfernen Gefässen oder Eimern bestand. Der eine von beiden war mit Wasser angefüllt, und an seinen Ohren waren zwei etwa 2 Ellen lange Stricke angebunden, an welchen der zweite leere Eimer befestigt war; dieser Eimer hing lothrecht unter dem erstgenannten, der voll Wasser war; am anderen Ende des Waagebalkens hing ein steinernes Gegengewicht, welches die ganze Last der Eimer mit dem Wasser und den Stricken balancirte. Der obere Eimer hatte im Boden ein 1 Zoll dickes Loch, das man verschliessen und öffnen konnte. Wir hatten alle Beide erwartet, dass, wenn nach eingetretenem Gleichgewicht man den Stopfen aus dem oberen Eimer entfernte und dem Wasser gestattet würde, durch seinen Fall auf den unteren Eimer zu stossen, das Hinzukommen dieses Stosses dieser Seite der Waage ein gewisses Moment zufügen werde, so dass das Gegengewicht vermehrt werden müsste, um das Gleichgewicht wieder herzustellen und die neu hinzu kommende Kraft des aufprallenden Wassers aufzuheben; wir hätten alsdann sagen können, das Moment des Stosses sei äquivalent einem Gewichte von 10 oder 12 Pfund, wenn solches der Betrag des neu hinzugefügten Gegengewichtes gewesen wäre.

Sagr. Wahrlich, eine sinnreiche Vorrichtung; ich bin sehr begierig auf den Erfolg des Versuches.

Apr. Der Erfolg war ein ganz unerwarteter und sehr wunderlich; denn sobald das Loch geöffnet war und das Wasser auszulaufen begann, neigte die Waage auf die andere Seite; bald erreichte das fallende Wasser den unteren Eimer, da hörte die fernere Senkung des Gegengewichtes auf, und es begann sich langsam und ganz gleichmässig wieder zu heben, so lange

Digitized by Google

das Wasser lief, und erreichte den alten Gleichgewichtsstand, ohne um eines Haares Breite denselben zu überschreiten, um alsdann stehen zu bleiben.

Sagr. Wahrhaftig, dieser Ausgang kam mir unerwartet, aber trotzdem, dass das Gegentheil von dem eintrat, was wir geglaubt hatten, und was uns die Kraft des Stosses messen lassen sollte, kann ich nichtsdestoweniger zum guten Theil den Vorgang erklären, wenn ich sage: die Kraft und das Moment des Stosses ist gleich dem Gewicht der Wassermenge, die im Fallen begriffen ist, mithin in der Luft zwischen beiden Eimern schwebt; diese Wassermasse gravitirt weder gegen den oberen, noch gegen den unteren Eimer; gegen den oberen deshalb nicht, weil die Wassertheilchen nicht an einander befestigt sind und daher auch keinen Zug nach unten ausüben können, wie das z. B. eintreten könnte, wenn eine klebrige, zähe Masse, wie Pech oder Vogelleim, verwandt worden wäre; gegen das untere Gefäss auch nicht, weil beim beschleunigten Falle der Wassermasse die höheren Theile keinen Druck ausüben können auf die tiefer gelegenen, woraus folgt, dass all das Wasser des Strahles sich so verhält, als wäre es gar nicht auf der Waage. Das zeigt sich denn auch deutlich, denn wenn diese Masse einen Druck auf die Eimer ausübte, so müssten die letzteren bei der Ankunft des Strahles sich stark senken und das Gegengewicht erheben, was aber nicht eintritt. Diese Ansicht wird dadurch bestärkt, dass, wenn plötzlich das fliessende Wasser gefrieren könnte, der gefrorene Strahl sofort sein Gewicht äussern müsste, und mit Aufhören der Bewegung schwände auch der Stoss.

Apr. Eure Erklärung, mein Herr, entspricht genau der Auffassung, die wir sofort nach Anstellung des Versuches gewannen, und es schien uns zudem der Schluss gestattet zu sein, dass die durch den Fall durch 2 Ellen erlangte Geschwindigkeit des Wassers dahin wirke, dass ohne die mindeste Vermehrung des Wassergewichtes letzteres ebenso gravitirt, wie ohne Stoss, so dass, wenn man die im Strahle enthaltene Menge messen könnte, man mit Sicherheit zeigen könnte, dass der Stoss vermögend sei, das an Druck hervorzurufen, was 10 oder 12 Pfund des fallenden Wassers bewirken.

Salv. Die scharfsinnige Vorrichtung gefällt mir sehr und ich glaube, ohne Eurer Auffassung entgegen zu treten, in welcher die Schwierigkeit, die Menge des fallenden Wassers zu messen, eine Unsicherheit hinterlässt, wir mit einem nicht unähnlichen Versuche uns den Weg zu tieferer Erkenntniss ebnen können.

Digitized by Google

Denken wir uns nämlich ein grosses Gewicht, wie man solche beim Einrammen von Pfosten in die Erde aus gewisser Höhe auf einen Pfahl herabfallen lässt (man nennt solche Klötze, wie ich glaube, »Bären«), und es sei z. B. das Gewicht des »Bären« 100 Pfund, die Höhe betrage 4 Ellen, und es dringe der Pfahl durch einen einzigen Stoss um 4 Zoll in die Erde; angenommen ferner, dasselbe gelinge ohne Stoss durch Aufladen eines Gewichtes von 1000 Pfund, welche nur durch die Schwere ohne vorhergehende Bewegung wirken. Solch ein Gewicht wollen wir ein »todtes Gewicht« nennen (peso morto). Ich frage nun, können wir, ohne uns dabei zu versehen oder uns zu täuschen, behaupten, dass die Kraft und die Energie eines Gewichtes von 100 Pfund, verbunden mit der durch 4 Ellen Fall erlangten Geschwindigkeit, äquivalent sei einem todten Gewichte von 1000 Pfund: so dass die Geschwindigkeit allein das bewirke, was 900 Pfund todten Gewichtes vermögen, denn soviel bleiben noch, wenn man das Gewicht des »Bären« abzieht? — Ich sehe, Sie zögern Beide, zu antworten, vielleicht weil meine Frage undeutlich gefasst war; ich meine also in kurzem: können wir auf Grund des beschriebenen Versuches versichern, dass das todte Gewicht stets auf einen Widerstand ebenso wirken wird, wie ein »Bär« von 100 Pfund, der aus 4 Ellen Höhe herabfällt, so zwar, dass, wenn derselbe »Bär«, von gleicher Höhe fallend, auf einen stärker widerstehenden Pfahl aufprallt und ihn nur 2 Zoll tiefer einrammt, auch das todte Gewicht von 1000 Pfund dieselbe Wirkung haben wird und gleichfalls um 2 Zoll den Pfahl einsinken lässt?

Apr. Ich glaube nicht, dass Jemand auf den ersten Blick dem widersprechen wird.

Salv. Aber Ihr, Herr *Sagredo*, hegt Ihr einen Zweifel?

Sagr. Für jetzt, in der That, nein; aber ich habe es zu oft schon erfahren, wie leicht man einen Irrthum begeht, daher werde ich nicht mich erdreisten und ziehe mich lediglich aus Furcht zurück.

Salv. Nun, da ich Eueren Scharfsinn bei tausend und abertausend Gelegenheiten kennen gelernt habe, und da Ihr zur falschen Ansicht hinneigt, so darf ich wohl sagen, dass man unter Tausenden kaum einen oder zwei finden würde, der nicht in die Falle ginge. Was Euch aber noch wunderbarer erscheinen wird, das ist der Umstand, dass hier der Irrthum unter einem so leichten Schleier bedeckt ist, dass der leiseste Luftzug ihn heben und enthüllen könnte, so dass Nichts verdeckt bleibt.

Digitized by Google

Lassen wir also den »Bären« fallen, so dass er um 4 Zoll den Pfahl einramme, und seien thatsächlich 1000 Pfund todten Gewichtes hierzu nöthig, und erheben wir nochmals den »Bären« zur selben Höhe, und ramme er bei dem zweiten Falle den Pfahl um nur 2 Zoll in die Erde, weil das Erdreich fester ist, sollte dasselbe todte Gewicht von 1000 Pfund ebendasselbe bewirken?

Apr. Ich denke ja.

Sagr. Wehe uns, Herr *Paolo*, wir müssen entschieden antworten: Nein. Denn wenn beim ersten Aufruhen das todte Gewicht von 1000 Pfund eine Senkung von 4 Zoll hervorrief, und nicht mehr, warum wollt Ihr annehmen, dass durch das blosse Abladen und Wiederauflegen der Pfahl sich wieder um neue 2 Zoll senken werde? Warum geschah denn diese Senkung nicht sogleich, vordem das Gewicht abgeladen wurde? Wollt Ihr, dass das Ab- und Aufladen das bewirke, was vordem nicht geschah?

Apr. Ich muss erröthen und bekennen, dass ich in Gefahr war, in einem Glase Wasser zu ertrinken.

Salv. Seid nur nicht allzu sehr bestürzt, Herr *Aproino*, ich versichere Euch, Ihr habt viele Genossen gehabt, die leicht verschlungene Knoten nicht lösen konnten, und sicherlich wäre jeglicher Irrthum von selbst leicht entfernt, wenn man ihn stets sorgfältig zu enthüllen und seine Grundelemente aufzudecken versuchte, von welchen aus jeder Fehltritt entdeckt werden müsste. In dieser Art mit wenigen Worten die handgreiflichen Fehlschlüsse, die alle Welt für wahr hielt, nachzuweisen, das war unseres Akademikers besonderes Talent. Ich besitze eine Sammlung von zahlreichen verbreiteten, für wahr gehaltenen Meinungen, die mit wenig Worten als irrig erwiesen werden.

Sagr. Und hier liegt wieder solch ein Fall vor, und wenn die anderen dem ähnlich sind, solltet Ihr sie uns gelegentlich mittheilen, wenn wir auch jetzt zu unserer Frage zurückkehren. Wir suchen einen Weg (wenn es einen solchen giebt), die Stosskraft zu regeln und zu messen, und solches gelingt offenbar nicht auf Grund des vorgetragenen Experimentes. Denn bei Wiederholung der Stösse des »Bären« auf den Pfahl, wobei jedesmal eine neue Senkung des letzteren beobachtet wird, ist es klar, dass jeder Stoss Arbeit leistet (ciascheduno dei colpi l a v o r a); solches trifft beim todten Gewicht nicht zu, da dasselbe die Wirkung des ersten Aufladens nicht in ähnlicher Weise bei abermaligem Auflegen wiederholt. Im Gegentheil sieht man deutlich, dass ein zweites Mal ein todtes Gewicht von mehr als

Digitized by Google

1000 Pfund erforderlich wäre, und wenn die Wirkung eines dritten, vierten und fünften Stosses erhalten werden soll, immer grössere todte Gewichte erfordert werden müssten: welches von diesen sollen wir nun als Maass der Kraft des Stosses nehmen, da letzterer durchaus immer ein und derselbe ist?

Salv. Hier eben liegt eine wunderbare Thatsache vor, der die speculativen Geister bestürzt und rathlos gegenüber standen. Wer empfindet es nicht deutlich, dass das Maass der Stosskraft nicht beim stossenden, sondern beim gestossenen zu suchen ist? Und nach dem mitgetheilten Versuche scheint es, als könne man auf eine unbegrenzte, oder besser auf eine unbestimmte oder unbestimmbare Stosskraft schliessen, die bald kleiner, bald grösser ist, je nachdem der getroffene Widerstand grösser oder kleiner ist.

Sagr. Ich fange an zu begreifen, dass wirklich die Kraft des Stosses ungeheuer gross oder unbegrenzt gross sein könne; denn wenn der erste Stoss in unserem Versuche den Pfahl um 4, der folgende um 3 Zoll, und da das Erdreich immer fester wird, der dritte Stoss den Pfahl um 2 Zoll, der vierte um $1\frac{1}{2}$, dann um 1, $\frac{1}{2}$ etc. einrammt, dann, scheint mir, wird, wenn der Widerstand nicht unendlich gross wird, doch der Pfahl fortrücken um immer kleinere und kleinere Strecken; sei aber die Fortrückung noch so klein, sie ist fortgesetzt theilbar; setzen wir also die Stösse fort, so wird das erforderliche todte Gewicht immer mehr anwachsen, so dass schliesslich ein ganz immenses todtes Gewicht angewandt werden müsste.

Salv. Ich bin vollkommen Ihrer Ansicht.

Apr. Sollte denn ein Widerstand nicht so gross sein können, dass er einem selbst leichten Stoss absolut nicht nachgiebt?

Salv. Ich glaube nicht, wenn das Gestossene nicht vollkommen unbeweglich ist, d. h. wenn sein Widerstand nicht unendlich gross ist.

Sagr. Das finde ich sehr merkwürdig und seltsam, die Kunst überwindet und täuscht in gewissem Sinne die Natur, wie solches auf den ersten Anblick einem auch bei manchen mechanischen Apparaten so vorkommt, wenn die grössten Gewichte mit geringer Kraft gehoben werden, wie beim Hebel, bei der Schraube, beim Flaschenzug etc.; indess hier beim Stoss, wo wenige Schläge eines 10 oder 12pfündigen Hammers einen kupfernen Würfel zerschlagen können, der unter der Last eines enormen Marmorblockes, ja selbst unter der eines sehr hohen Thurmes, der auf dem Hammer aufruhte, nicht zerbrechen würde, hier scheint mir alle Ueberlegung ohnmächtig, den

Digitized by Google

wundersamen Zusammenhang aufzudecken; nun, Herr *Salviati*, erfasset den Faden und führt uns aus dem Labyrinth der Verwirrung.

Salv. In alle dem, was vorgebracht worden ist, steckt der Hauptknoten in dem Umstande, dass beim Stosse, der unbegrenzt ist, man doch nicht andere Mittel, eine Erklärung zu finden, suchen soll, als für andere Vorrichtungen, bei denen kleine Kräfte grosse Widerstände überwinden. Ich hoffe zeigen zu können, wie auch hier ein analoger Vorgang vorliegt. Ich will versuchen, denselben zu erläutern; und trotzdem er verworren erscheint, so könnte ich doch mittelst Eurer Zweifel und Einwände zu einer Vervollkommnung und Verschärfung der Frage gelangen, so dass wir den Knoten, wenn auch nicht auflösen, so doch lockern. Es ist klar, dass die Kraft des Stossenden oder des Gestossenen nicht ein einfacher Begriff sei, sondern von zwei Momenten abhänge, welche beide die zu messende Energie (energia) bestimmen; das eine ist das Gewicht (il peso) des Bewegten und des zu Bewegenden, das andere ist die Geschwindigkeit, mit welcher jenes sich bewegt und dieses bewegt werden soll. Wenn nun das Bewegte mit der Geschwindigkeit des Stossenden bewegt werden soll, so also, dass die in gleichen Zeiten von beiden Körpern zurückgelegten Wege einander gleich seien, so darf das Gewicht des Stossenden nicht kleiner als das des Gestossenen sein, wohl aber um einiges grösser, denn bei der genauen Gleichheit würde Gleichgewicht entstehen und Ruhe, wie man das bei der gleicharmigen Waage sieht. Wollen wir aber mit einem kleineren Gewichte ein grösseres heben, so muss die Vorrichtung so angeordnet werden, dass das kleinere Gewicht um eine grössere Strecke fortrücke, als das andere, oder was dasselbe ist, dass es sich schneller bewege; und so lehrt uns die Ueberlegung und der Versuch, dass z. B. bei der Schnellwaage, damit das Laufgewicht eine 10 oder 15mal grössere Last heben könne, sein Aufhängepunkt eine 10 oder 15mal grössere Bewegung um das Centrum ausführen müsse, als der der grossen Last, oder was dasselbe ist, dass der Bewegende 10 oder 15mal grössere Geschwindigkeit habe. Da man dasselbe bei allen Apparaten wieder findet, können wir sicher erwarten, dass Gewicht und Geschwindigkeit (gravità e velocità) in demselben, nur aber umgekehrten Verhältnisse stehen. Gewöhnlich sagt man, das »Moment« des leichteren Körpers sei gleich dem »Momente« des schwereren, wenn die Geschwindigkeit jenes zu der Geschwindigkeit dieses sich verhält, wie das Gewicht dieses

Digitized by Google

zum Gewichte jenes Körpers, und jedes noch so kleine Uebergewicht leitet die Bewegung ein. Weiter nun behaupte ich, dass nicht nur dem Stoss die Fähigkeit zukomme, eine unbegrenzt grosse Widerstandskraft zu überwinden, sondern dass ebendasselbe bei jedem mechanischen Apparate sich zeige; ist es also nicht klar, dass ein ganz kleines Gewicht von 1 Pfund fallend 100 und 1000 Pfund heben kann, und noch beliebig viel mehr, wenn wir nur dasselbe auf dem Waagearm 100 oder 1000mal weiter vom Centrum entfernt anbringen, als das andere grosse Gewicht, oder wenn wir bewirken, dass die Senkung des kleinen 100 oder 1000mal grösser als die Hebung des grossen Gewichtes sei, oder noch anders, wenn die Geschwindigkeit jenes 100 oder 1000 mal grösser sei? Indess möchte ich mit einem noch schlagenderen Beispiel Euch gleichsam mit der Hand fühlen lassen, wie das allerkleinste Gewicht beim Falle das allergrösste heben könne. Solch ein enormes Gewicht sei an einem Seile aufgehängt an einem festen erhabenen Orte, um welchen, als Centrum, ein Kreisbogen beschrieben sei, der durch den Schwerpunkt der Last hindurchgehe, welcher Schwerpunkt bekanntlich in die Verlängerung des Seiles oder besser, in jene gerade Linie fällt, die vom Aufhängepunkt nach dem Erdcentrum gerichtet ist, dem gemeinsamen Centrum aller Körper. An einem anderen sehr feinen Faden sei ein ganz kleines Gewicht so befestigt, dass der Schwerpunkt desselben in jenen Kreisbogen falle; ausserdem soll der kleine Körper den grossen berühren, und sich an jene grosse Last anlehnen; glaubt Ihr nicht, dass von der Seite her das neue Gewicht jenes grosse ein wenig fortstossen und dessen Schwerpunkt aus jener Senkrechten, die beschrieben wurde, verdrängen und längs dem Kreisbogen fortschieben wird, wobei derselbe zugleich die Horizontale verlassen muss, welche der Kreis im untersten Peripheriepunkte berührt, in welchem zuerst der Schwerpunkt der Last sich befand? Es beschreibt dabei diese Last einen eben so grossen Bogen wie der kleine Körper, der sich an den grossen anlehnt; indess wird die Hebung des Schwerpunktes des grossen nicht gleich sein der Senkung des Schwerpunktes des kleinen, denn letzteres Stück wird durch einen stärker geneigten Weg gesenkt, während der Erhebungswinkel der grossen Last kleiner als irgend ein spitzer Winkel ist (un angulo minore di ogni acutissimo). Hätte ich zu thun mit Männern, die weniger bewandert sind in der Geometrie als Ihr, so würde ich zeigen, dass, wenn ein Körper vom untersten Contactpunkte sich erhebt, es sehr wohl geschehen könne, dass

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Digitized by Google

die Erhebung dieses untersten Punktes von der Horizontalen in einem beliebigen Verhältniss kleiner sein kann als die Senkung eines gleich grossen Körpers, der an irgend einer anderen entfernteren Stelle der Peripherie angenommen wird, wenn nur der Contactpunkt nicht in dem Senkungsbogen liegt. Allein ich bin sicher, dass Ihr hieran nicht zweifelt. Und wenn nun das einfache Anstützen des kleinen Gewichtes die grosse Last bewegen und heben kann, was wird erst dann geschehen, wenn man den kleinen Körper entfernt und längs dem Kreisbogen herabfallen lässt, bis er aufprallt?

Apr. Hier bleibt allerdings kein Zweifel übrig, dass die Stosskraft unbegrenzt gross sein könne, wie der vorgetragene Versuch es lehrt; doch genügt mir diese Erkenntniss nicht, alle Dunkelheiten fortzuräumen, mit denen mein Geist umfangen bleibt, so lange ich nicht einsehe, wie diese Stosswirkung zu Stande kommt; so lange bin ich nicht fähig, jedem Zweifel zu begegnen.

Salv. Ehe wir weiter gehen, will ich noch eine Unklarheit forträumen, die wie im Hintergrunde lauert und uns glauben macht, dass alle jene Stösse beim Rammen des Pfahles einander gleich seien, da sie von ein und derselben aus gleicher Höhe herabfallenden Masse herstammten. Letzteres aber ist nicht richtig. Um das einzusehen, denkt Euch, Ihr wolltet mit der Hand einen Stab auffangen, der aus der Höhe herabfällt, und sagt mir, wenn Ihr bei der Ankunft des Stabes Eure Hand in derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit senktet, ob Ihr alsdann einen Stoss empfinden könntet? Doch sicherlich nicht. Wenn Ihr aber nur um einen Theil zurückwichet, indem Ihr die Hand mit geringerer Geschwindigkeit, als der Stab sie hat, senken liesset, dann würdet Ihr gewiss einen Stoss erhalten, aber nicht einen der vollen Geschwindigkeit entsprechenden, sondern nur dem Ueberschusse der Geschwindigkeit des Stabes über die der Hand, so dass, wenn der Stab etwa mit 10 Grad Geschwindigkeit anlangte, die Hand aber mit 8 auswiche, der Stoss wie von 2 Grad ausgeführt wäre, und wenn die Hand mit 4 Grad auswiche, der Stoss 6 Graden entspräche, und beim Senken der Hand mit 1 Grad würden dem Stoss 9 Grad angehören, und 10 Grad würden dem vollen Stoss entsprechen, wenn die Hand gar nicht auswiche. Wenden wir dieses auf den Rammstoss an, so wich der Pfahl das erste Mal 4 Zoll, dann nur 2 aus, das dritte Mal nur 1 Zoll, mithin sind die Stösse ungleich, und der erste Stoss ist schwächer als der zweite, und dieser

Digitized by Google

schwächer als der dritte, weil das Ausweichen von 4 Zoll mehr von der Stossgeschwindigkeit abzieht, als der zweite, und dieser mehr als der dritte, der halb so viel abzieht als jener. Wenn also das starke Ausweichen des Pfahles beim ersten Schlage und das geringere beim folgenden und noch geringere beim dritten u. s. f. Ursache ist, dass der erste Stoss schwächer ist als der zweite, und dieser schwächer als der dritte, was wundert es uns, dass dem ersten Stosse ein geringeres todtes Gewicht entspricht fürs Eintreiben um 4 Zoll, und dass ein grösseres für ein zweites Eintreiben um 2 Zoll, und ein noch grösseres für das dritte, u. s. f. grössere, je kleinere Strecken der Pfahl beschreibt, in Folge des vermehrten Widerstandes desselben? Ich denke, man sieht es leicht ein, wie schwer es ist, die Kraft des gegen einen Widerstand ausgeübten Stosses zu bestimmen, da das Ausweichen, wie das unseres Pfahles, variirt und unbestimmt ein Anwachsen des Widerstandes anzeigt; daher halte ich es für nothwendig, über solche Fälle nachzusinnen, wo dem Stosse ein unveränderlicher Widerstand entgegentritt. Zu dem Zwecke denken wir uns einen festen Körper von 1000 Pfund Gewicht, der auf einer Ebene ruhe; an diesen Körper sei ein Seil gebunden, welches über eine Zugwinde geschlungen werde, welch letztere ein gut Theil oberhalb des festen Körpers befestigt sei. Offenbar wird eine am anderen Ende des Seiles angebrachte Kraft beim Heben der Last stets denselben Widerstand zu überwinden haben, nämlich den der 1000 Pfund; und hängt man an jenes andere Seilende einen Körper von demselben Gewicht, so wird Gleichgewicht eintreten, und ohne Stütze werden die beiden Gewichte herabhängen und in Ruhe verharren, so lange keinerseits ein Ueberschuss vorhanden ist. Ruht nun der erste Körper auf der Ebene, so könnte man auf der anderen Seite verschiedene Gewichte anbringen (nur seien sie alle kleiner als das zum Gleichgewichte erforderliche) und verschiedene Stösse ausführen, indem man solch ein Gewicht aus gewisser Höhe herabfallen liesse und beobachtete, was mit dem anderen Körper geschieht, wenn er den Stoss erhält, der ihn in die Höhe treiben will. Man versteht, wie ich meine, dass jedes noch so kleine fallende Gewicht den Widerstand der grossen Last überwinden und sie erheben muss, wie wir sicher folgern dürfen aus der Erkenntniss, dass jedes kleinere Gewicht ein jedes noch so viel grössere überwindet, nur dass die Geschwindigkeit des kleineren die des grösseren in dem Maasse übertrifft, wie das Verhältniss der Gewichte des grösseren zum kleineren Körper

Digitized by Google

es angiebt. Im vorliegenden Falle ist die Geschwindigkeit des fallenden Körpers unendlich viel grösser, da der andere Körper ruht; aber das Gewicht des fallenden ist nicht gleich Null im Vergleich zu dem des anderen, da weder letzteres unendlich gross, noch jenes gleich Null angenommen worden ist; mithin muss die Stosskraft den Widerstand des Ruhenden überwinden. Wir müssen jetzt untersuchen, wie hoch der gestossene Körper gehoben wird; und wenn eine Uebereinstimmung mit den Principien anderer Apparate gefunden wird, wie bei der Schnellwaage, wo die Erhebung der Last sich zur Senkung des Laufgewichtes verhält, wie das Gewicht des letzteren zu dem der Last, so müssen wir auch zusehen, ob, wenn z. B. unsere Last 1000mal so gross ist, als die des Körpers, der etwa um 1 Elle herabfällt, ob jener um $\frac{1}{100}$ Elle sich erheben wird, wie solches ungefähr das Princip der anderen Apparate fordern würde. Zunächst indess lassen wir ein dem anderen gleiches Gewicht aus etwa 1 Elle Höhe fallen, so also, dass das eine Gewicht zuerst auf der Ebene ruhe, an den beiden Seilenden aber ein gleich grosses Gewicht angebracht sei; was wird nun geschehen mit dem ruhenden Gewicht, wenn der Stoss auf dasselbe wirkt? Euere Meinung möchte ich wissen.

Apr. Da Sie mich, mein Herr, ansehen, wie wenn Sie von mir die Antwort erwarteten, so meine ich, wird, da beide Körper gleich schwer sind, und da der fallende die Geschwindigkeit erlangt, der andere ein gutes Stück über das Gleichgewicht hinaus gehoben werden; denn für das Gleichgewicht selbst reichte das blosse Gewicht hin, mithin wird die Hebung viel mehr als 1 Elle betragen, welches der Betrag der Senkung sein sollte.

Salv. Und was sagt Herr *Sagredo?*

Sagr. Auf den ersten Blick scheint mir die Erwägung richtig zu sein, wie ich aber kürzlich schon sagte, irrt man sich gar zu leicht, und man muss gründlich Umschau halten, ehe man eine entschiedene Antwort giebt. Ich glaube also (mit Vorbehalt eines Zweifels), dass 100 Pfund fallenden Gewichtes hinreichen werden, das andere von gleichfalls 100 Pfund bis zum Gleichgewicht zu erheben, ohne dass demselben noch eine andere Geschwindigkeit hinzu ertheilt werde, wozu $\frac{1}{2}$ Unze Ueberschuss hinreichen würde, allein es will mir scheinen, als werde dieses Gleichgewicht sehr langsam eintreten (con gran tardità); wenn nur der sinkende Körper mit grosser Geschwindigkeit anlangt, wird er auch mit einer ebensolchen den anderen Körper

Digitized by Google

erheben; nun aber scheint es mir nicht zweifelhaft, dass zur Mittheilung einer grossen Geschwindigkeit eine grössere Geschwindigkeit erforderlich sei, als zur Ertheilung einer kleinen; daher könnte es geschehen, dass der beim freien Fall erlangte Geschwindigkeitsbetrag verbraucht werde, und so zu sagen verwandt werde, das andere Gewicht mit ebenso grosser Geschwindigkeit auf dieselbe Höhe zu erheben, denn ich möchte glauben, dass die beiden Bewegungen nach unten und nach oben aufhören würden nach der Erhebung des anderen um 1 Elle, wobei der andere um 2 Ellen sich senkt, da er allein schon um 1 Elle gefallen war.

Salv. Ich neige in der That zu derselben Ansicht, denn obwohl der fallende Körper ein Zusammengesetztes aus Gewicht und Geschwindigkeit darstellt, so ist das Heben des Gewichtes keiner Anstrengung gleich, da beide Gewichte gleich sind und ohne Zulage auf jener Seite keine Bewegung eintreten würde; die Hebewirkung ist daher ganz und gar auf die Geschwindigkeit zurück zu führen und auf nichts anderes; die vorhandene Geschwindigkeit kann mitgetheilt werden, und es ist keine andere vorhanden, als die beim Fallen erlangt war; durch dieselbe Strecke von 1 Elle und mit derselben Geschwindigkeit wird der andere emporsteigen, in Uebereinstimmung mit dem, was in vielen Versuchen beobachtet werden kann, nämlich dass ein von der Ruhelage aus aus gewisser Höhe fallender Körper an jedem Orte eine Geschwindigkeit besitzt, die hinreicht, ihn ebenso hoch wieder empor zu heben.[3])

Sagr. Solcher Art ist es ja auch bei einem Körper, der an einem Faden befestigt und aufgehängt ist; wenn derselbe aus der Senkrechten um einen beliebigen Bogen, kleiner als einen Quadranten, entfernt und fallen gelassen wird, bewegt er sich über die Senkrechte hinaus und steigt um einen ebenso grossen Bogen wieder hinan; hieraus aber erkennt man, dass die Erhebung ganz und gar aus der Geschwindigkeit stammt, die beim Fallen erlangt war; denn am Ansteigen kann das Gewicht des Körpers doch wohl keinen Antheil haben, da dasselbe der Bewegung entgegen wirkt und allmählich die Geschwindigkeit vernichtet, die durch den Fall erlangt war.

Salv. Wenn das Beispiel mit dem schwingenden Körper, über den wir in den früheren Unterredungen gehandelt haben, völlig zu dem heute besprochenen Falle passte, so wäre Eure Auseinandersetzung sehr überzeugend; allein ich finde doch einen namhaften Unterschied zwischen den beiden Erscheinungen,

Digitized by Google

ich meine zwischen dem an einem Faden herabhängenden Körper, der von gewisser Höhe längs dem Kreisbogen herabfallend einen Impuls erlangt, der hinreicht, ihn ebenso hoch wieder zu erheben; und der anderen Erscheinung, bei der ein fallender Körper an einem Ende eines Seiles befestigt ist, um ein am anderen Ende befindliches gleich grosses Gewicht zu heben; der im Bogen fallende Körper wird bis zur Senkrechten beschleunigt in Folge seines Eigengewichtes, welches nachher das Ansteigen hemmt (da die Bewegung der Schwere entgegen gerichtet ist), so dass für die bei dem beschleunigten Fall erlangte Geschwindigkeit keine geringe Entschädigung zu erblicken ist in dem Anstieg in gegennatürlicher Richtung. Im anderen Falle dagegen trifft der fallende auf einen ihm gleichen, aber in Ruhe befindlichen Körper, nicht nur mit der erlangten Geschwindigkeit, sondern auch noch mit seinem Gewicht, welches letztere für sich allein allen Widerstand des anderen gegen eine Erhebung aufhebt, denn die erlangte Geschwindigkeit erfährt nicht den Contrast eines Körpers, der gegen das Ansteigen Widerstand leistet; ein nach unten einem Körper ertheilter Impuls begegnet keiner Ursache zur Vernichtung oder Schwächung der Bewegung, so auch findet dasselbe nicht statt beim Ansteigen jener Last, die nicht gravitirt (la cui gravità rimane nulla), weil sie durch ein Gegengewicht aufgehoben ist. Und hier, glaube ich, trifft genau das zu, was mit einem schweren Körper geschieht, der auf einer vollkommen glatten und etwas geneigten Ebene ruht, und der von selbst herabfallen wird, immer grössere Geschwindigkeit annehmend; wollte man in entgegengesetzter Richtung ihn emporsteigen lassen, so müsste man ihm einen Impuls ertheilen, der schwinden und schliesslich verschwinden würde; wenn aber die Ebene nicht geneigt, sondern horizontal wäre, so würde ein darauf befindlicher Körper Alles thun, was uns beliebt, d. h. stellen wir ihn in Ruhe hin, so wird er in Ruhe verharren, geben wir ihm in irgend einer Richtung einen Impuls, so wird er in derselben Richtung sich bewegen und seine Geschwindigkeit bewahren, da er dieselbe weder vermehren noch vermindern könnte, da die Ebene weder eine Senkung noch eine Hebung zulässt, und ganz ähnlich werden die beiden Gewichte an beiden Seilenden im Gleichgewicht sein und in Ruhe bleiben, und wenn wir dem einen Gewichte nach unten einen Impuls ertheilen, wird derselbe sich unverändert erhalten. Und hier muss hervorgehoben werden, dass dieses Alles einträte, wenn äussere, unwesentliche Hindernisse fortgeräumt werden, wie die Steifigkeit

Digitized by Google

und das Gewicht des Seiles, der Rollen, die Reibung der Axen u. a.; weil man die Geschwindigkeit kennt, welche das eine der beiden Gewichte beim Fallen aus bekannter Höhe erlangt, während das andere ruht, so ist es möglich, zu bestimmen, welcher Art und wie gross die Geschwindigkeit sei, mit welcher nachher sich beide bewegen, nach dem Fallen des einen, während derselbe weiter fällt und der andere sich erhebt. Schon aus dem Bisherigen wissen wir, dass ein aus der Ruhe frei fallender Körper immer grössere Geschwindigkeit erlangt, so dass in unserem Falle der höchste Betrag in dem Moment erreicht ist, wo er den Gefährten zu heben beginnt, und es ist klar, dass dieser Werth nicht mehr vermehrt werden kann, da die Ursache einer Vermehrung aufgehoben ist, nämlich das Eigengewicht des fallenden Körpers, denn dieses wirkt nicht mehr, da der Gefährte dem Streben zum Fall durch sein Widerstreben gegen eine Erhebung entgegen wirkt. Mithin wird der höchste Geschwindigkeitswerth beharren, und auf die beschleunigte Bewegung wird eine gleichförmige folgen; welches diese Geschwindigkeit sein mag, wird aus den Betrachtungen der früheren Tage offenbar werden, d. h. es wird die Geschwindigkeit eine solche sein, dass in einer Zeit, gleich der des Falles, der doppelte Weg beschrieben werde.[4])

Sagr. Also Herr *Aproino* hatte richtiger combinirt und ich bin bis hierzu, mein Herr, sehr befriedigt von Ihrer Auseinandersetzung, wie ich auch Alles, was Sie behauptet haben, einräume; aber so weit bin ich noch nicht gediehen, dass mein Erstaunen behoben sei über die Möglichkeit, durch den Stoss jedweden noch so grossen Widerstand zu überwinden, auch wenn der stossende Körper noch so klein und seine Geschwindigkeit zudem geringfügig wäre, und was meine Bewunderung vermehrt, ist die Behauptung, es gäbe keinen Widerstand, der dem Stoss nicht nachgeben müsste (er sei denn unendlich gross); und endlich, dass von solchem Stosse es unmöglich sei, in irgend einer Weise ein bestimmtes Maass anzugeben; seid so freundlich, mein Herr, und schickt Euch an, diese Dunkelheiten aufzuhellen.

Salv. Da man von einem Theorem keinen Beweis verlangen kann, wenn nicht bestimmte Bedingungen festgestellt sind, und da wir über die Stosskraft und den Widerstand des Gestossenen reden wollen, so müssen wir einen stossenden Körper annehmen mit immer sich gleich bleibender Kraft; das sei der von stets gleicher Höhe herabfallende Körper; ebenso wollen wir einen Körper mit stets gleich bleibendem Widerstande annehmen. Um solches zu erreichen, nehme ich an, dass (in unserem Beispiele

Digitized by Google

zweier an einem Seile hängender gleicher Gewichte) der stossende Körper klein sei, der andere so viel grösser, als irgend beliebt, und in dessen Hebung der Impuls des fallenden kleinen Körpers wirksam wird; offenbar ist der Widerstand des grossen stets und in allen Fällen ein und derselbe, was nicht der Fall sein wird bei einem Nagel oder dem Pfahle, wo der Widerstand stets anwächst und in ganz unbekanntem Verhältniss sich ändert, je nach der Härte des Holzes, des Erdreiches etc., trotzdem dass Nagel und Pfahl immer dieselben bleiben. Ausserdem müssen wir uns einige Sätze ins Gedächtniss rufen aus unseren früheren Gesprächen über die Bewegung; und zwar zunächst den Satz, dass Körper von einem höheren Punkte bis zu einem Horizonte stets gleiche Geschwindigkeit erlangen, unabhängig davon, ob sie senkrecht fallen oder längs beliebig geneigten Ebenen, sodass z. B., wenn AB (Fig. 146) eine horizontale Ebene vorstellt und vom Punkte C die Senkrechte CB herabgelassen wird, während durch denselben Punkt andere Geneigte CA, CD, CE hindurchgehen, alle von C aus fallenden Körper bei der Horizontalen angelangt, gleiche Geschwindigkeit erlangt haben.

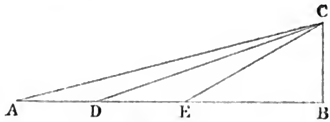

Fig. 146.

Ferner müssen wir zweitens festhalten, dass die in A erlangte Geschwindigkeit genau hinreichen würde, denselben fallenden Körper oder einen anderen ihm gleichen bis auf dieselbe Höhe zu erheben, woraus verständlich wird, dass ebenso viel Kraft nöthig ist, denselben Körper vom Horizonte bis zur Höhe C zu erheben, ob er von A, D, E oder B empor getrieben würde. Drittens besinnen wir uns darauf, dass die Fallzeiten längs den genannten Ebenen sich verhalten wie die Längen, sodass, wenn z. B. AC gleich $2\,CE$ wäre und gleich $4\,CB$, die Fallzeit für AC die doppelte derjenigen für CE und die vierfache der für CB wäre. Endlich erinnern wir uns dessen, dass, um die Körper längs den verschiedenen Ebenen ansteigen oder besser hinaufschleppen zu lassen, um so kleinere Kräfte nöthig sind, je geneigter die Ebenen, weil sie in dem Maasse länger sind. Nun nehmen wir eine Ebene AC (Fig. 147) an, die etwa zehnmal länger sei, als die Höhe CB, und auf AC ruhe ein Körper S von 100 Pfund: wird an diesen eine Schnur befestigt und über eine Rolle gewunden bis unterhalb C, und an dieses andere Ende ein Gewicht von 10 Pfund angehängt, das

Digitized by Google

wir mit P bezeichnen wollen, so ist es klar, dass jedes kleinste Uebergewicht den Körper S heben würde. Und es ist wohl zu bemerken, dass, obwohl die Fortbewegungen beider Körper die gleichen sind (woran Jemand zweifeln könnte auf Grund des Principes aller Mechanismen, demgemäss eine kleine Kraft einen grossen Widerstand nur überwindet, wenn die Bewegung jenes grösser ist im Verhältniss der Körper), im gegenwärtigen Falle die Senkung des kleinen Körpers in der Senkrechten geschieht, und hiermit auch die senkrechte Erhebung des anderen Körpers S verglichen werden muss, d. h. man muss zusehen, wie viel S in der senkrechten Richtung ansteigt.[5])

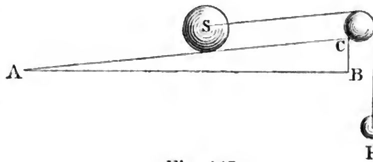

Fig. 147.

Nach längerer Bearbeitung des Gegenstandes gelangte ich dazu, folgenden Satz aufzustellen, den ich sodann erklären und beweisen will:

Proposition.

Wenn die Wirkung, die ein Stoss eines und desselben von stets gleicher Höhe herabfallenden Körpers ausübt, darin besteht, einen Körper von stets gleich bleibendem Widerstande längs einer gewissen Strecke fortzubewegen, und wenn, um dieselbe Wirkung zu erzielen, wir eine bestimmte Quantität todten Gewichtes anwenden müssen, die ohne Stoss nur Druck ausübt, so behaupte ich, dass, wenn derselbe stossende Körper auf einen anderen Körper mit grösserem Widerstande trifft, er denselben um die halbe Strecke forttreiben wird, als vorhin, wenn zu dieser Fortrückung im zweiten Falle ein todtes Gewicht von doppeltem Betrage nothwendig ist, und ähnlich bei anderen Verhältnissen, sodass, wenn die durch Stoss hervorgerufene Fortrückung kürzer ist, ein um so grösseres todtes Gewicht erforderlich ist.

Hier ist die Rede von dem Widerstande, wie er beim Pfahle sich zeigt, also einem solchen, der von nicht weniger als 100 Pfund todtem Gewicht überwunden wird, während der stossende Körper nur 10 Pfund wiegt und aus einer Höhe von etwa 4 Ellen nur 4 Zoll tief den Pfahl einrammt. Offenbar würde das frei herabhängende Gewicht von 10 Pfund hinreichen, jene

Digitized by Google

100 Pfund längs einer Ebene zu heben, deren Länge das Zehnfache der Höhe beträgt, denn 10 Pfund senkrecht zu heben erfordert ebenso viel Kraft, wie 100 Pfund längs einer Ebene, deren Länge der zehnfachen Höhe gleich ist; und weiter, wenn der beim senkrechten Fall durch eine Strecke erlangte Impuls verwandt wird, einen gleichen Widerstand zu überwinden, so wird er denselben um eine ebensolche Strecke erheben; nun ist dem Widerstande von 10 Pfunden in senkrechter Richtung derjenige von 100 Pfunden längs geneigter Ebene zehnfacher Länge gleich, folglich wird das durch irgend eine Strecke senkrecht fallende Gewicht von 10 Pfund, wenn dessen Impuls auf das 100pfündige übertragen wird, dasselbe so weit fortrücken, dass die Höhe dieselbe wird, also den zehnten Theil der Ebene ausmacht. Schon oben wurde festgestellt, dass eine Kraft, die hinreicht, ein Gewicht längs einer geneigten Ebene fortzuschieben, dasselbe auch senkrecht erheben könnte, nur mit entsprechender Höhe, im vorliegenden Falle um den zehnten Theil der geneigten Strecke, denn soviel beträgt die Fallstrecke der 10 Pfund; also können 10 senkrecht fallende Pfunde auch 100 Pfund senkrecht erheben, jedoch nur um den zehnten Theil der Senkung der 10 Pfund; eine Kraft aber, die 100 Pfund heben kann, ist gleich der Kraft, mit der die 100 Pfund nach unten streben, und diese war im Stande, den Pfahl nieder zu drücken. So ist es zu verstehen, wie der Fall von 10 Pfund einen Widerstand zu überwinden vermag, der gleich jenem ist, den 100 Pfund äussern, wenn sie gehoben werden sollen, die Fortrückung wird nur den zehnten Theil der Fallstrecke des Stossenden betragen. Verdoppeln wir den Widerstand, oder verdreifachen wir denselben, sodass 200, 300 Pfund todten Gewichtes als Druck nöthig sind, so finden wir, dass der Impuls der fallenden 10 Pfund ein erstes, zweites und drittes Mal den Pfahl eintreiben wird, aber wie beim ersten Mal $\frac{1}{10}$ der Fallstrecke, so das zweite Mal $\frac{1}{20}$, das dritte dritte Mal $\frac{1}{30}$ der Fallstrecke. Vermehrt man unbegrenzt den Widerstand, so wird stets derselbe Stoss ihn überwinden, aber mit stets abnehmenden Fortrückungen, sodass wir mit Recht behaupten dürfen, die Stosskraft sei unbegrenzt an Grösse (la forza della percossa essere infinita). Andererseits muss auch in anderer Hinsicht die Druckkraft ohne Stoss als unbegrenzt (infinita) betrachtet werden; denn wenn dieselbe den Widerstand des Pfahles überwindet, so wird das nicht nur durch jene Strecke hindurch geschehen, um welche der Stoss seine Wirkung ausübte, sondern immer weiter ohne Grenze (in infinito).

Digitized by Google

Sagr. Ich sehe deutlich, wie Ihr, mein Herr, geradezu darauf ausgehet, den wahren Grund des vorliegenden Problemes aufzudecken; weil aber der Stoss in so verschiedener Weise erzeugt und auf so verschieden geartete Widerstände verwandt werden kann, so wäre es gut, wenigstens einige Fälle zu erklären, deren gründliches Verständniss uns die Einsicht in alle anderen eröffnen könnte.

Salv. Ihr habt vollkommen Recht, und ich schickte mich bereits an, solche vorzuführen. Dahin gehört z. B. ein Fall, der stets da eintreten kann, wo die Wirkung nicht an dem gestossenen Körper offenbar wird, sondern in dem stossenden; wenn auf einen festen Amboss ein Schlag mit einem Hammer aus Blei ausgeführt wird, so wird die Wirkung im Hammer sichtbar, der zerquetscht wird, und nicht im Amboss, der sich nicht senken wird. Dem ähnlich verhält es sich mit dem kleinen Hammer der Steinmetze, der nicht gehärtet worden und daher weich ist, so dass er nach langem Gebrauch auf einem gehärteten Stahlamboss nicht letzteren zerbricht, sondern sich selbst höhlt oder umformt. Ein anderes Mal wird die Wirkung in den stossenden Körper reflectirt, wie man solches nicht selten sieht, wenn man einen Nagel in sehr hartes Holz eintreiben will, wo alsdann der Hammer zurückschnellt, ohne im Mindesten den Nagel zu fördern, in welchem Falle man zu sagen pflegt, der Schlag habe nicht »gesessen«. Nicht unähnlich ferner ist der Abprall, den man auf festem Erdreich bei einem grossen aufgeblasenen Ball eintreten sieht, und dasselbe tritt ein, wenn der Stoff so geartet ist, dass er zwar beim Stosse ausweicht, aber auf demselben Wege in seine alte Form zurückkehrt, und solch ein Abspringen kommt sowohl beim stossenden, wie auch beim gestossenen Körper vor, wie z. B. ein aus selbst sehr hartem Holz gearbeiteter Stab von der wohlgespannten Membran einer Trommel abprallt. Zuweilen sieht man die wunderbare Erscheinung, dass zur Stosswirkung ein Druck sich hinzugesellt; bei der Tuch- oder Oelpresse wird mit dem Drängen von 4 oder 6 Männern die Schraube angestrengt, wobei sie, wenn möglich, einen Schritt hinter den Barren zurücktreten und, rasch denselben antreibend, die Schraube mehr und mehr anziehen, so dass der Stoss mit der Kraft der 4 oder 6 Menschen das leistet, was sonst kaum 12 oder 20 mit blossem Druck hervorbrächten, weshalb man auch den Barren sehr kräftig baut, von recht hartem Holz, sodass er wenig oder gar nicht sich biegt, denn sonst, wenn er nachgäbe, würde der Stoss zum Verbiegen desselben verbraucht werden.

Digitized by Google

[6]) In jedem Körper, der heftig bewegt werden soll, giebt es zweierlei Art Widerstand: der eine ist ein innerer Widerstand, dem wir Rechnung tragen, wenn wir sagen, es sei schwerer 1000 Pfund zu heben, als 100 Pfund; der andere bezieht sich auf die Strecke, durch welche die Bewegung erfolgen soll; denn einen Stein 100 Schritte weit zu werfen fordert mehr Kraft, als wenn er 50 Schritte fliegen soll etc. Solchen zwei verschiedenen Arten von Widerstand entsprechen zwei Arten von Antrieb; bei den einen giebt es einen Druck ohne Stoss, bei den anderen einen Stoss. Bei den ersteren wird stets ein kleinerer Widerstand überwunden, wenn auch kaum merklich kleiner, die Druckkraft wirkt durch unbegrenzt grosse Strecken, sie folgt aber mit stets gleicher Kraft; bei diesen, den stossenden, kann jedweder Widerstand überwunden werden, sei derselbe noch so gross, aber durch ein begrenztes Intervall. Daher halte ich die beiden Sätze für wahr, die Stosskraft überwindet unbegrenzte Widerstände durch begrenzte Strecken, so dass dem Stossenden die Strecke und nicht der Widerstand proportional erscheint, dem Drucke dagegen der Widerstand und nicht die Strecke. Dieses Verhalten macht mich zweifeln, ob wohl die Frage des Herrn *Sagredo* zu beantworten wäre, sofern Dinge, die nicht fähig sind, in ein Verhältniss gebracht zu werden, doch mit einander verglichen werden sollen, denn dieser Art sind die Wirkungen des Stosses und des Druckes, wie z. B. im speciellen Falle ein sehr grosser Widerstand, der in dem Keile BA (Fig. 148) vertreten sei, von jedwedem Stosskörper C überwunden werden kann, aber durch eine begrenzte Strecke, wie etwa durch die Punkte B, A, während der Druck von D nicht jedweden Widerstand des Keiles BA überwinden wird, sondern nur einen begrenzten, und zwar einen solchen, der nicht grösser ist als D; wird derselbe überwunden, so braucht das nicht nur durch die begrenzte Strecke BA zu geschehen, sondern unbegrenzt weit, wenn der Körper AB stets den gleichen Widerstand ausübt, wie man annehmen muss, da das Gegentheil nicht als Vorbedingung hingestellt worden ist.

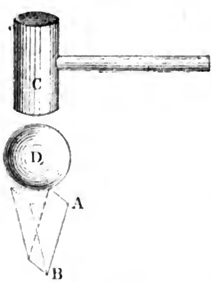

Fig. 148.

Das Moment eines Körpers beim Stosse ist zusammengesetzt aus unendlich vielen Momenten, deren jedes gleich ist dem einen, inneren, natürlichen Momente (dem Momente des eigenen absoluten Gewichtes, das der Körper stets auf seine Unterlage ausübt) und einem äusseren, heftigen, von der Bewegung abhängigen. Solche Momente wachsen an während der Zeit der Bewegung des Körpers mit gleichem Zuwachs, und erhalten sich in dem Körper gerade so wie die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers zunimmt. Wie in den unendlich vielen Zeittheilchen der Körper durch alle Grade der Geschwindigkeit hindurch geht, indem er die einmal erlangten festhält, so verbleiben dem Körper auch die natürlich beschleunigten oder die künstlich ertheilten Bewegungen.

Die Stosskraft hat ein unbegrenztes Moment, sobald sie vom stossenden Körper auf einen Körper wirkt, der nicht nachgiebt, wie wir zeigen werden. Das Nachgeben eines Körpers, der von einem mit beliebiger Geschwindigkeit bewegten anderen gestossen wird, kann nicht momentan geschehen, weil es sonst eine instantane Bewegung durch eine endliche Strecke hindurch gäbe, was als unmöglich bewiesen worden ist. Geschieht also das Ausweichen in der Zeit, so wird auch die Uebertragung jener Momente vom stossenden Körper Zeit kosten, und diese Zeit ist hinreichend, zu vernichten oder zu verringern jene obengenannten Momente, die, wenn sie in einem Augenblicke auf den Widerstand wirkten (was der Fall wäre, wenn beide, stossender und gestossener Körper, gar nicht nachgäben), einen viel grösseren Einfluss auf die Erregung einer Bewegung hätten, als wenn sie in der Zeit wirkten, und sei dieselbe auch noch so kurz; einen grösseren Einfluss, sage ich, denn ein Einfluss überhaupt auf den gestossenen Körper findet statt, wie klein auch der Stoss und wie gross das Nachgeben sei; aber solche Wirkung kann unseren Sinnen als unmerklich entgehen, obwohl sie vorhanden ist, was am gehörigen Orte bewiesen werden soll; nur der Beobachtung entzieht sie sich; wenn mit einem kleinen Hammer in gleichmässigen Stössen das Ende eines sehr grossen Balkens, der auf der Erde liegt, geschlagen wird, so kann man nach vielen Stössen schliesslich sehen, dass der Balken um eine wahrnehmbare Strecke fortbewegt worden ist, ein sicheres Zeichen dafür, dass jeder Stoss für seinen Theil eine Fortrückung bewirkt hat; denn wenn der erste Stoss keinen solchen Erfolg hätte, so würden auch alle anderen, dem ersten gleichen Stösse nichts ausrichten, während die Beobachtung die Wirkung unseren Sinnen zugänglich erscheinen lässt und ebenso der Versuch wie die Erklärung das Gegentheil lehrt.[7])

Digitized by Google

Die Stosskraft hat ein unbegrenztes Moment, sofern es keinen noch so grossen Widerstand giebt, der nicht von dem allerkleinsten Stosse überwunden werden könnte.

Wer die Broncethore von San Giovanni schliessen will, würde umsonst versuchen, sie mit einem schlichten Druck zu bewegen, aber mit fortgesetzten Impulsen ertheilt er dieser enormen Last eine solche Kraft, dass im Momente, wo das Thor an die Schwelle stösst, die ganze Kirche erzittert. Solcher Art sieht man den schwersten Körpern Kräfte mittheilen, ansammeln und vermehren.

Eine ähnliche Erscheinung bemerkt man bei einer grossen Glocke, die nicht mit einem Zuge am Seile, auch nicht mit vieren oder sechsen heftig bewegt werden kann, sondern mit sehr vielen, gleichartig und lange wiederholten, wobei die letzten die Kraft hinzufügen zu der vorher ertheilten, und je grösser und schwerer die Glocke ist, eine um so grössere Kraft und beträchtlicheren Impuls wird sie erhalten, da mehr Zeit dazu verwandt worden ist und mehr Züge, als für eine kleine Glocke nothwendig sind; letztere wird leicht in Bewegung gesetzt, auch wird sie rasch wieder beruhigt, da sie so zu sagen nicht soviel Kraft in sich geschluckt hat, wie die grosse.

Aehnlich ist es endlich auch bei den grossen Schiffen, die nicht bei den ersten Ruderschlägen oder bei den ersten Windstössen in rasenden Schwung gebracht werden, sondern nach vielen Schlägen, nach beständiger Einwirkung der Kraft des Windes auf die Segel erhalten sie einen enormen Impuls, der hinreichen kann, eben dieselben Fahrzeuge zu zerbrechen, wenn sie an Klippen geschleudert werden.

Ein biegsamer aber langer Bogen einer Armbrust trägt viel weiter, als ein harter von geringer Zugweite, weil jener längere Zeit hindurch das Geschoss begleitet und demselben allmählich die Kraft mittheilt, während dieser alsbald dasselbe entsendet.

Ende des sechsten Tages.

Digitized by Google

Anmerkungen.

Mit vorliegendem Bändchen schliessen wir *Galilei*'s berühmte »Discorsi« ab. Der Leser wird manch anregenden Gedanken sowohl im Anhange zum dritten und vierten, als auch besonders im sechsten Tage finden. Leider ist der letztere offenbar von *Galilei* nicht ganz vollendet worden. Der Vollständigkeit wegen haben wir auch den fünften Tag aufnehmen müssen, wenngleich derselbe kaum mehr als ein historisches Interesse beansprucht.

Anhang zum dritten und vierten Tage.

1) *Zu S. 12.* Wir stellen den Beweis in weit kürzerer Form her: Es ist

$$\frac{ab}{bc} = \frac{ac}{cf},$$

und wenn

$$\frac{bf}{af} = \frac{ms}{\frac{2}{3} \cdot ca}$$

und

$$\frac{ab + 2bc}{3(ab + bc)} = \frac{sn}{ac},$$

so soll

$$mn = \frac{ab}{3}$$

sein.

Es ist

$$ms = \frac{2bf \cdot ac}{3af}$$

und

$$sn = \frac{ab \cdot ac + 2ac \cdot bc}{3ab + 3bc},$$

Digitized by Google

mithin

$$3(ms+sn)=3mn=\frac{2bf\cdot ac}{af}+\frac{ab\cdot ac+2ac\cdot bc}{ab+bc},$$

aber

$$bf=ab-ac-cf$$

und

$$cf=\frac{bc\cdot ac}{ab};$$

setzt man $ac=u$ und $ab=k$, so wird

$$3mn=\frac{2u\cdot\left(k-u-\frac{(k-u)u}{k}\right)}{u+\frac{k-u}{k}\cdot u}+\frac{k\cdot u+2u(k-u)}{2k-u}=k.$$

2) *Zu S. 19.* Dem Texte getreu folgend, wollen wir die Schlussfolgerungen übersichtlich wiedergeben. Dazu sei gesetzt $AB=a$, $BC=b$, $BD=c$, $BE=d$, $FG=x$, $GK=y$; alsdann heisst der Lehrsatz: Wenn

$$1)\qquad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

und wenn

$$2)\qquad \frac{d}{a-d}=\frac{x}{\frac{3}{4}(a-b)},$$

sowie

$$3)\qquad \frac{a+2b+3c}{4(a+b+c)}=\frac{y}{a-b},$$

so ist stets

$$x+y=\tfrac{1}{4}a.$$

Aus 1) folgt, dass

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b-c}{c-d}\quad\text{und auch}\quad\frac{a+b+c}{a+2b+3c}=\frac{b+c+d}{b+2c+3d}$$

sei, folglich ist

$$\frac{4(a+b+c)}{a+2b+3c}=\frac{4(a-b)+4(b-c)+4(c-d)}{(a-b)+2(b-c)+3(c-d)}$$

mithin auch

$$\frac{4(a+b+c)}{a+2b+3c}=\frac{4(a-d)}{(a-b)+2(b-c)+3(c-d)}=\frac{a-b}{y}$$

Digitized by Google

nach Gleichung 3), folglich auch

$$\frac{3(a-d)}{(a-b)+2(b-c)+3(c-d)}=\frac{\frac{3}{4}(a-b)}{y}.$$

Nach Gleichung 2) ist

$$\frac{3(a-d)}{3d}=\frac{\frac{3}{4}(a-b)}{x},$$

folglich nach *Euclid* 24, V:

$$\frac{3(a-d)}{(a-b)+2(b-c)+3c}=\frac{\frac{3}{4}(a-b)}{x+y}$$

(einfach durch Umkehr der beiden letzten Gleichungen und Addition der Zähler gefunden), also auch

$$\frac{4(a-d)}{(a-b)+2(b-c)+3c}=\frac{4(a-d)}{a+b+c}=\frac{a-b}{x+y}$$

und

$$\frac{4(a-d)}{a-b}=\frac{a+b+c}{x+y}.$$

Aber

$$\frac{a-b}{a-d}=\frac{a}{a+b+c}$$

(weil

$$\frac{d}{c}=\frac{c}{b},$$

also

$$\frac{c+d}{b+c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{a},$$

folglich

$$\frac{d-b}{b+c}=\frac{b-a}{a},$$

also

$$\frac{b+c}{a}=\frac{d-b}{b-a},$$

mithin

$$\frac{a+b+c}{a}=\frac{a-d}{a-b}\Big)$$

folglich

$$\frac{4(a-d)}{a-d}=\frac{a}{x+y},$$

folglich

$$x + y = \tfrac{1}{4} a.$$

Sechster Tag.

3) *Zu S. 49.* Der Leser wird bemerken, dass *Salviati*'s Erläuterung ganz correct ist, wenn vorausgesetzt wird, der fallende Körper werde nach ausgeübtem Stosse am weiteren Fallen gehindert. Diese Bedingung wird aber nicht erwähnt, daher bleibt die Erklärung ungenügend.

4) *Zu S. 51.* Wie man bemerkt, ist in diesem interessanten Discurse nicht die Bedingung ausgesprochen, dass der stossende Körper am weiteren Fallen gehindert werde. Die Unterhaltung lässt auch in keiner Weise erkennen, ob eine vollkommene Elasticität bei der Wirkung des Stosses gelten soll. Richtig ist der Gedanke, dass beide Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortbewegen ohne Ende. Aber der doppelte Weg in der Zeit, die der stossende Körper zum Fallen gebraucht, kann schon deshalb nicht erwartet werden, weil eine doppelt so grosse Masse fortbewegt werden soll. — Heutzutage würden wir die experimentelle Vorrichtung kaum mehr für geeignet halten, weil bei Voraussetzung vollkommener Elasticität das Seil niemals straff gespannt bliebe. Der ruhende Körper müsste emporgeschnellt werden und um die Fallstrecke des stossenden steigen. Wenn unterdessen der andere nicht unterstützt würde, so würde er von neuem von der Geschwindigkeit 0 an zu fallen beginnen, das Seil würde in dem Momente stramm werden, wo der andere gehobene Körper seine höchste Höhe erreicht und die Geschwindigkeit 0 erlangt hätte. In diesem Augenblicke würde er einen neuen Stoss erhalten und sich wieder um solch ein Stück wie vorhin erheben. Beim Experimente dagegen wird der vielfache Verlust von Energie die Erscheinung dahin abändern, dass der gehobene Körper weniger hoch steigt und im Zurückfallen einen neuen Stoss erhält, wenn nicht unterdess der andere Körper aufgehalten worden sein sollte. Folgweise würde sich der Process wiederholen, bis beide Massen mit gleichförmiger Geschwindigkeit gleiche Wege zurücklegen. Wenn endlich ein vollkommen unelastischer Stoss statt hat, so würden die beiden Massen sogleich mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortbewegen, aber nur mit dem halben Betrage der Endgeschwindigkeit des stossenden, weil das Bewegungsmoment mc nach dem Stosse auf die doppelte Masse sich vertheilt, also $mc =$

Digitized by Google

$2mx$ wird, mithin $x = \frac{c}{2}$ ist. Diesem Verhalten dürfte der Versuch nahe kommen. Bei ungleich grossen Massen wird die experimentelle Vorrichtung wahrscheinlich völlig unbrauchbar werden.

5) *Zu S. 53.* Es ist sehr zu bedauern, dass der Faden der Erläuterung hier plötzlich abreisst, sodass das immer tiefer und richtiger erkannte Problem schliesslich ungelöst bleibt. In der Ausgabe von 1811 findet man an dieser Stelle eine Anmerkung des Herausgebers, die wörtlich übersetzt lautet: »Der Leser wird bemerken, dass das nun Folgende nicht zum Vorhergehenden passt, denn der Autor wird seinen Plan, die Discussion zu Ende zu führen, haben ändern wollen, nachdem er jene Voraussetzungen niedergeschrieben hatte.« Die Wiederholungen in *Salviati*'s Worten sind wohl auch unvollendet gebliebenen redactionellen Aenderungen zuzuschreiben.

6) *Zu S. 56.* Auch hier finden wir in der Ausgabe von 1811 eine Anmerkung, deren Wortlaut folgender ist: »Unter den Originalschriften *Galilei*'s über den Stoss findet sich auf einem separaten Blatte von *Galilei*'s eigener Hand dasjenige, was im Texte von hier ab bis zum Ende mitgetheilt wird, und was offenbar zur Aufnahme in den sechsten Tag bestimmt war.« Wir müssen daraus schliessen, dass das Gesprächsthema des sechsten Tages leider unvollendet geblieben ist. Uebrigens lautet die Ueberschrift zum fünften Tage auch nur: »principio della quinta giornata«.

7) *Zu S. 57.* Hier wäre denn doch vorerst zu prüfen, welcher Art die Reibung sich geltend macht. Wäre es nicht denkbar, dass der Balken nur elastisch erschüttert würde und nicht im Geringsten auf der Unterlage sich verschöbe?

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss.

A. zum II. Bändchen.

Dritter Tag.

Ueber die örtliche Bewegung.

Digitized by Google

Vierter Tag.

Digitized by Google

B. zum III. Bändchen.

Anhang zum dritten und vierten Tage.

Fünfter Tag.

Sechster Tag.
Ueber den Stoss.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Digitized by Google

52505
QC123
G3
v.3
Galilei, Galileo
Unterredungen und mathematische demonstrationen...

FEB 14 1929 Evans
FEB 28 1929 Evans
JUN 20 1929 11√
NOV 23 1930 11 B
MAY 2 1940
FEB 1929
AUG 27 1932
AUG 27 1932
AUG 27 1932
JUL 25 1940

UNIVERSIT ... Y

QC 123
G 3
v. 3
52505

5 · 92

...zer algebr. Functionen (81 S.) ℳ 1.50.

...d. Vegetation. (1804.) ...er. (96 S.) ℳ 1.80.

...r. (113 S.) ℳ 1.80.

...r. (1849.) Übers. u. in ...u. E. Blasius. Mit

... C. Ludwig, E. Becher ...tfig. (43 S.) ℳ —.75.

...ndlungen von Laplace (1838) und Dirichlet ℳ 2.—.

...erausg. von E. Lom-

...Jonen während der ...af. Herausg. von

...nzoesäure. (1832.) ℳ 1.—.

...r Jonen während ...af. Herausg. von

... Demonstrationen ... Tag mit 90 Fig. ...rausg. von A. von

... 5. u. 6. Tag, mit ...übers. u. herausg. von ...iss zum 3.—6. Tag.

...nstitution der organi- ...opp. (86 S.) ℳ 1.40.

...akodylreihe. (1837— ... Mit 3 Figuren im Text.

(148 S.) ℳ 1.80.

» 28. I... orga-
... n. A.

Bunsen...
Cannizz...
... d. k.
... Man-
Kepler, ...
Lambert...
Lavoisie...
Mitsche... de-
Neuman... öme.
Wilhelm... uren
... zig).

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE STAMPED BELOW

AN INITIAL FINE OF 25 CENTS

WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE FOURTH DAY AND TO $1.00 ON THE SEVENTH DAY OVERDUE.

APR 3 1944
APR 4 1944
2Mar'52KU
3Mar...