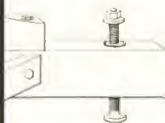
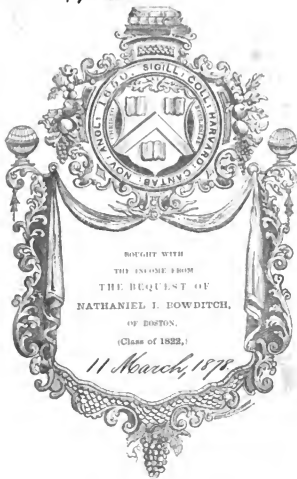


*Abhandlungen von Friedrich
Wilhelm Bessel: bd. III. ...*

Friedrich Wilhelm Bessel



Astr. 176.2



ABHANDLUNGEN

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

ABHANDLUNGEN

VON

FRIEDRICH WILHELM BESSEL.

HERAUSGEGEBEN

VON

RUDOLF ENGELMANN,

DR. PHIL.

IN DREI BÄNDEN.

ZWEITER BAND:

III. THEORIE DER INSTRUMENTE. IV. STELLARASTRONOMIE. V. MATHEMATIK.

MIT 2 TAFELN UND VERSCHIEDENEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

1876.

~~17~~
Ast: 176.2

1878, March 11
Benedict's fund.

Vorwort.

Der zweite Band der Abhandlungen BESSEL's enthält die Arbeiten aus der Theorie der Instrumente (26), der Stellarastronomie (31) und der Mathematik (20 Stücke.) Eine Abänderung und Erweiterung erfuhr der ursprüngliche Plan insofern, als noch eine Reihe von Aufsätzen und Abhandlungen Aufnahme gefunden haben, die früher unberücksichtigt geblieben waren; es konnte dies geschehen, ohne den Umfang des Werkes erheblich zu vergrössern, während das Bild der Thätigkeit BESSEL's unbedingt an Vollständigkeit gewann. Insbesondere sind es die Abhandlungen aus den „Astronomischen Untersuchungen“, welche jetzt in möglichster Vollständigkeit, jedoch mit Weglassung unnöthigen Zahlendetails, gebracht werden sollen. Für die aus den Königsberger Beobachtungen entnommenen Stücke, ohne welche die Theorie der Instrumente nicht unwesentliche Lücken gezeigt haben würde, fühlt sich der Herausgeber dem Director der Königsberger Sternwarte, Herrn Prof. E. LUTHER, zu Dank verpflichtet.

Bei der häufigen Anwendung, welche die Plejadengruppe in der praktischen Astronomie findet, glaubte der Herausgeber etwas nicht ganz Ueberflüssiges zu thun, indem er der Besselschen Abhandlung (104) über die Plejaden eine Karte derselben beifügte (s. p. 305). Als Grundlage diente eine nach der Bonner Durchmusterung, Bd. IV, entworfene Skizze, in welche die in einem Cometensucher von 54 Lin. (122^{mm}) Oeffnung und 44 Zoll (115^{cm}) Brennweite — aus der optischen Anstalt von REINFELDER und HERTEL in München — bei ca. 40 facher Vergrösserung noch gut sichtbaren schwächeren Sterne, etwa bis zur 10.11 Grösse, nach dem Augenmaasse eingetragen wurden. Leider verhinderten lokale Umstände wie das äusserst ungünstige Wetter eine Controlle und genauere Festlegung von Position und Grösse; doch dürften diese nachgetragenen Objecte (auf der Karte — unterstrichen) bis auf $\pm 1'$ und $\pm 0^m.5$ (relativ) richtig sein. Auch an dem Beobachtungsabend (1876 Januar 27) war die Luft keineswegs sehr durchsichtig, so dass die aufgezeichneten und durchaus bequem sichtbaren Sterne (einige sehr schwache aber doch noch erkennbare blieben unberücksichtigt) jedenfalls nicht die Grenze der Leistungsfähigkeit des benutzten Instruments angeben; der Merope-Nebel war an diesem Abend nicht sichtbar. Der Lichtdruck gibt das möglichst sorgfältig gezeichnete Original, von Kleinigkeiten im Gradnetze abgesehen, mit fast vollkommener Treue wieder; aus technischen Gründen werden indess die durch Punkte bezeichneten Sterne bis auf etwa $\pm 0^m.3$, die helleren etwas weniger, die schwächeren mehr, unsicher sein können. Ein hinsichtlich zweier Sterne der D.-M. bestehender Zweifel wurde zum Theil durch eine Berliner Meridianbeobachtung, die der Herausgeber Herrn Dr. BECKER verdankt, beseitigt; die Position der Karte ist nach dieser Beobachtung angegeben; für 1876,0 fand Herr Dr. BECKER: $*0.4 \alpha = 3^h 40^m 34.87$, $\delta = + 23^{\circ} 3' 8.1$; $* 10$ nördlich $1'$ und $0^m.5$ sequ. (genähert); woraus für 1855 hervorgeht: $3^h 39^m 20.1$, $+ 22^{\circ} 59'.1$, bezw. $20^m.5$ und 60.1 , während die D.-M. hat: $3^h 39^m 21.7$, $+ 22^{\circ} 59'.2$, bezw. 18.3 und 60.5 .

LEIPZIG, Ende März 1876.

Der Herausgeber.

Inhalt des zweiten Bandes.

	PAGE
III. Theorie der Instrumente	1-203
52. Ueber die Theilungsfehler der Halley'schen Spiegel-Sextanten	1
53. Methode der Collimationsfehler-Bestimmung beim Mauerquadranten	2
54. Zur Bestimmung des Collimationsfehlers beim Mauerquadranten	3
55. Vorschläge zur Erweiterung des Gebrauchs des Mauerquadranten	4
56. Bemerkung über die Greenwicher Quadranten	7
57. Ueber die Abweichung der Borda'schen Kreise und Pold's Polhöhe	8
58. Ueber das Kreismikrometer	—
58 b. Nachträge	15
59. Bemerkung über Veränderlichkeit der Passageninstrumente	19
60. Ueber das Dollond'sche Mittagsfernrohr und den Cary'schen Kreis (vgl. auch Abb. 74)	—
61. Königsberger Meridianzeichen. — Correction der Culminationzeiten [Bessel'sche Formel]	33
62. Untersuchung des Reichenbach'schen Meridiankreises	34
63. Eine neue Methode, die Biegung der Fernröhre astronomischer Instrumente zu bestimmen	43
64. Ueber den allgemeinen Gebrauch des Passageninstrumente	45
65. Erste Leistungen eines auf der Königsberger Sternwarte befindlichen Repsold'schen Meridiankreises	59
BRANKL'S Rectificirung (WICHMANN'S) und Theilfehlerbestimmung (E. LUTHER'S) des Repsold'schen Meridiankreises	74
66. Beobachtungen des Ganges einer Kessels'schen Pendeluhr und Bemerkungen darüber	78
67. Bemerkungen und Untersuchungen über Pendeluhren	83
68. Vorläufige Nachricht von einem auf der Königsberger Sternwarte befindlichen grossen Heliometer	95
69. Ueber ein Mittel zur Bestimmung der Brennweite des Objectivglases eines Fernrohrs	107
70. Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatorealinstrumente	109
71. Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte	133

	PAGE.
72. Ueber die Theorie des Steinheil'schen Prismenkreises	166
73. Eine Bemerkung über die Anstellungsart beweglicher Instrumente	176
74. Neue Prüfung des Cary'schen Kreises (vgl. Abb. 60)	178
75. Ueber einen Fehler des Dollond'schen Heliometers der Königsberger Sternwarte	181
76. Ueber die aus der Schwere hervorgehenden Veränderungen, die der Kreis eines astronomischen Instruments in der lothrechten Lage seiner Ebene erfährt	182
Literatur der Astr. Nachr. über Instrumente	202

IV. Stellarastronomie 204-325

77. Ueber die Parallaxe von α Herculis	204
78. Ueber die Parallaxen einiger Fixsterne aus Bradley'schen Beobachtungen	—
79. Formeln für die jährliche Parallaxe in Rectascension	206
80. Ueber den Doppelstern Nr. 61 Cygni	207
80 b. Nachtrag	212
81. Ueber die Rectascension von 61 Cygni nach v. LINDENAU'S Beobachtungen	—
82. Ueber die Parallaxe von 61 Cygni und α Cassiopejæ	213
82 b. Nachtrag	216
83. Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans	217
84. Fernere Nachricht von der Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans	231 /
Literatur der Astr. Nachr. über Fixsternparallaxen	236
85. Ankündigung einer vollständigen Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen (mit Nachschrift von LINDENAU)	236
86. Bestimmung der geraden Aufsteigungen der 36 Maskeleyn'schen Fundamentalsterne für 1810, auf Königsberger Beobachtungen gegründet	238
87. Prüfung des Reichenbach'schen Meridiankreises	245
88. Ueber die Abweichungen der Fixsterne	248
89. Neue Untersuchungen über die geraden Aufsteigungen der 36 Fundamentalsterne	251
90. Neue Untersuchung der Reductionselemente der Declinationen und Bestimmung der Declinationen der Fundamentalsterne	256

	286.		
91. Declinationen der Fundamentalsterne aus Brass's letzten Beobachtungen	264	107. Aus einem Schreiben an LINDSAY vom 11. Jan. 1811 (nebst einem Schreiben SOLOV'S über den Integral- logarithmus)	327
92. Vorschlag einer schieflichen Reductionsart der His- toire Céleste	265	108. Untersuchung der durch das Integral $\int \frac{x^x}{1-x}$ ausge- drückten transcendenten Function	330
93. Ueber die Berechnung von Zonenbeobachtungen	268	109. Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten	342
94. Nachricht von einer auf der Königsberger Sternwarte angefangenen allgemeinen Beobachtung des Himmels	269	110. Beweis des MOYR'schen Satzes	353
95. Ueber eine vollständigere Darstellung des gestirnten Himmels	273	111. Attraction eines Parallelepipediums	—
96. Entwurf zu einer Herausgabe neuer Himmelskarten	275	112. Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie (Mon. Corresp.)	355
97. Einige Bemerkungen über die Entwerfung der voll- ständigen Himmelskarten	277	113. Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie (Astr. Nachr.)	356
98. Bemerkungen über die Königsberger Zonenbeob- achtungen	278	113b. Zusatz	358
99. Nachricht von der Vollendung bis zum 45. Grade der Declination der allgemeinen auf der Königs- berger Sternwarte unternommenen Beobachtung des Himmels	280	114. Ueber einen Satz aus der Lehre von den Kegel- schnitten	—
Literatur der Astr. Nachr. über Fundament- sterne, Sternataloge, Sternkarten	281	115. Ueber eine geometrische Aufgabe	360
100. Verzeichniß von 257 auf der Königsberger Stern- warte beobachteten Doppelsternen	282	116. Ueber K. L. STAV'Z's Parallellinien-Theorie	361
101. Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen	285	117. Ueber die Entwicklung der Functionen zweier Win- kel u und u' in Reihen, welche nach den Cosinus- sen und Sinussen der Vielfachen von u und u' fort- gehen	362
102. Vergleichung der gegenseitigen Stellungen von 37 Doppelsternen, welche sowohl in Königsberg als in Dorpat beobachtet sind	287	118. Ueber die Bestimmung des Gesetzes einer periodi- schen Erscheinung	364
103. Ueber den Doppelstern ρ Ophiuchi	291	119. Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler	372
104. Beobachtungen verschiedener Sterne der Pleiaden	299	120. Ueber die Summation der Progressionen	391
105. Ueber Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Fixsterne	306	121. Ueber den Ausdruck einer Function $\varphi(x)$ durch Cosi- nuse und Sinusse der Vielfachen von x	393
Literatur der Astr. Nachr. über Doppelsterne, Eigenbewegungen, veränderliche E.-B., Sirius- begleiter, Verschiedenes	325	122. Ein Hilfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate	398
V. Mathematik	326—404	123. Neue Formeln von JACOB, für einen Fall der An- wendung der Methode der kleinsten Quadrate	401
106. Ueber das Integral $\int \frac{x^x}{1-x}$	326	124. Ueber neue Logarithmentafeln von SUOBTREDE	402
		Literatur der Astr. Nachr.	404
		Berichtigungen	404

III. Theorie der Instrumente.

52. Ueber die Theilungsfehler der Hadley'schen Spiegel-Sextanten.*)

(Bode's Jahrbuch, Supplement-Bd. IV, p. 204.)

Das, was Herr Dr. BENZENBERG in astron. Jahrbuche für 1809 über diesen Gegenstand äusserte, ist, wie es scheint, das erste, was darüber gedruckt wurde, auch die Veranlassung dieser Bemerkung.**) Es kann allen Astronomen, die den Sextanten gebrauchen, und von diesem trefflichen Instrumente allen den Nutzen ziehen wollen, den es gewähren kann, nicht anders als sehr angenehm sein, von Herrn Dr. BENZENBERG auf einen Fehler aufmerksam gemacht worden zu sein, der vorher vielleicht nie berücksichtigt wurde, der bei dem am angeführten Orte beschriebenen Sextanten beträchtlich genug ist, um in Rechnung gebracht werden zu müssen, und dessen Einfluss man um so mehr zu vermeiden suchen muss, da er sich auf eine constante Weise äussert, und durch ein Mittel aus mehreren Beobachtungen keineswegs aufgehoben werden kann. In dieser Rücksicht ist es vielleicht auch mir erlaubt, etwas über diese Materie zu sagen, und eine theoretische Schwierigkeit zu erwähnen, die das Benzenberg'sche Verfahren übrig lässt.

Den Theilungsfehler für jeden Winkel von $\frac{360^\circ}{n}$ bestimmte Herr Dr. BENZENBERG dadurch, dass er die Angularabstände zwischen n im Horizonte befindlichen, scheinbar etwa gleich weit von einander entfernten Gegenständen mit dem Sextanten maass, und den Unterschied ihrer Summe, von 360° , als die n malige, diesem Winkel zugehörige und bei den Messungen anzubringende Correction ansah. Man kann indess leicht erweisen, dass dieses Verfahren in allen Fällen, wenn der Sextant wirklich unrichtig getheilt ist, ein unrichtiges Resultat geben, und dass es desto mehr fehlen muss, je mehr die Correctionen sich ändern. Die Einrichtung des Sextanten erlaubt nämlich nicht, einen Winkel unmittelbar durch die Stellung des Nullpunkts der Alhidade zu messen, es sei denn, dass dieser Punkt

genau auf einen Theilstrich fiel; in allen andern Fällen muss man den Ueberschuss des Winkels über den, durch den nächst vorhergehenden Theilstrich angegebenen, durch den Nonius bestimmen; und diese Bestimmung kann nur dann richtig sein, wenn die bei der Construction des Sextanten gemachte Voraussetzung, dass m Theile des Nonius $m - 1$ Theilen des Limbus gleich sind, wirklich stattfindet, oder mit andern Worten nur dann, wenn der Sextant eine überall gleichförmige Theilung hat und der Nonius dieser vollkommen entspricht.

Die Tafel, die Herr Dr. BENZENBERG beibringt, zeigt, dass der Fehler dieser Voraussetzung bei dem dort erwähnten Sextanten oft sehr beträchtlich ist: so z. B. beträgt er für den Zwischenraum zwischen 36 und 45° , der noch nicht einmal so gross ist, als der vom Nonius bedeckte Raum, volle $43'$; zwischen 36 und 25° aber $19'$ u. s. w. Man kann hieraus leicht übersehen, dass das beschriebene Verfahren in solchen Fällen sehr irrige Resultate geben muss, die sich der Wahrheit oft kaum nähern werden.

Indess kann man allerdings diese Fehler vermeiden; ich würde dazu folgendes sehr einfache Mittel vorschlagen. Ausser dem auf gewöhnliche Weise abgelesenen Winkel w' muss nämlich bei jeder Messung der Theilstrich des Limbus W' notirt werden, mit dem der den Winkel angehende Noniusstrich coincidirt; der Unterschied der Summe n solcher Winkel wird dann der Summe der Correctionen für alle W' , oder

$$= \varphi W' + \varphi W'' + \varphi W''' + \dots + \varphi W^n$$

sein (durch $\varphi W'$ u. s. w. sind die den Winkeln W' u. s. w. zugehörigen Correctionen bezeichnet). Nimmt man nun an, dass die Correctionen als Ordinaten einer krummen Linie betrachtet werden können, deren Abscissen die zugehörigen Punkte des Limbus sind — eine Voraussetzung, die man machen muss, wenn man nicht jeden einzelnen Theilstrich untersuchen kann oder will — so kann man $\varphi W''$ durch die Reihe

*) [26 d. a. Verz.] — Unterm 18. Febr. 1808 eingesandt.

**) S. auch den vorigen Aufsatz des Herrn Dr. BENZENBERG [p. 130].

$$\varphi W'' + \frac{d\varphi W''}{dW''} (W'' - W') + \frac{d^2\varphi W''}{1,2, dW''^2} (W'' - W')^2 + \dots$$

und $\varphi W'''$ u. s. w. durch ähnliche Reihen, die desto schneller convergiren, je kleiner $W'' - W'$, $W''' - W''$, u. s. w. sind, ausdrücken. Dadurch, dass man die Winkel W' , W'' , etc. beinahe gleich macht, wird man sich es also erlauben dürfen, die Reihen schon beim zweiten Gliede abzubrechen, oder

$$\varphi W'' = \varphi W' + \frac{d\varphi W''}{dW''} (W'' - W')$$

zu setzen, in welcher Voraussetzung

$$\frac{360^\circ - (w' + w'' + w''' \dots + w^n)}{n} = \varphi \left(\frac{W' + W'' + W''' \dots + W^n}{n} \right)$$

ist: oder die gefundene Correction ist nicht die dem

Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ zugehörige, sondern sie gehört zu einem Mittel aus $W' + W'' + W''' + \dots$ etc. Auf diese Weise könnte man für mehrere Winkel die Correction bestimmen, und dann durch Hilfe einer leichten Interpolation eine Tafel entwerfen, die sie von Grad zu Grad angäbe, und deren Argument immer der Theilstrich des Limbus sein würde, dessen Coincidenz mit einem Noniusstriche man beobachtet.

Die Aenderungen dieses Verfahrens, wenn man ausser den beinahe gleichen Winkeln einen oder mehrere grössere beobachtet, wie Herr Dr. BENZENBEG p. 227 vorschlägt, so wie die Correctionen, die von einer etwa unrichtigen Theilung des Nonius herrühren könnten, wird sich jeder leicht selbst entwickeln.

53. Methode der Collimationsfehler-Bestimmung beim Mauerquadranten.*

(Aus einem Brief an OLBERS vom 4. Nov. 1806.)

..... Ich glaube Ihnen schon etwas von einem Einfalle gesagt zu haben, wie man den Collimationsfehler eines Mauerquadranten ohne Umwendung oder ohne die Hilfe eines Zenith-Sectors bestimmen kann. HARDING hat auf meine Bitte die Sache versucht; allein der Spiegel, den man ihm hierzu verfertigt hat, ist so wenig plan, dass er mehrere Bilder zeigt; er hat sich indess schon wegen eines bessern bemüht, und wird mir nächstens eine Reihe damit angestellter Beobachtungen schicken. Das Wesentliche der Methode setze ich Ihnen hierher, mit der Bitte um Ihr Urtheil über die Anwendbarkeit des Verfahrens.

Das einzige Instrument, das zu der Ausführung meines Vorschlags nöthig ist, ist ein Spiegel, der vor das Objectiv befestigt wird, und der sich an einem Gelenke gegen die optische Axe des Fernrohrs um einen beliebigen Winkel neigen lässt; zugleich kann man den Spiegel um diese Axe des Fernrohrs drehen und dadurch seine Ebene der des Quadranten senkrecht machen. Wenn der Winkel, den der Spiegel mit der optischen Axe des Fernrohrs macht = a ist, so wird ein Stern, den man durch Reflexion im Fernrohr sieht, auf dem Gradbogen die Zenithdistanz

$$Z + c = z - 2a$$

haben, wo z die wahre Zenithdistanz und c der Colli-

* [Br. m. O. I. p. 48 ff. — Vergl. die folgenden Aufsätze 54 und 55.]

mationsfehler des Quadranten ist. Nimmt man nun eine zweite Zenithdistanz desselben Sterns aus einem vor das Fernrohr gesetzten Oel- oder Quecksilber-Horizonte, so wird sie

$$Z' + c = 180^\circ - z - 2a$$

sein. Man hat also die wahre Zenithdistanz

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z)$$

unabhängig vom Collimationsfehler. Da $Z' - Z$ nie grösser werden kann als der eingetheilte Bogen des Quadranten, so kann die Höhe eines Sterns, den man zu diesen Beobachtungen gebrauchen will, nicht grösser sein als die Hälfte dieses Bogens oder als etwa 45° ; für einen solchen Stern muss a etwa $22\frac{1}{2}^\circ$ betragen.

Wenn der Quadrant nicht in der Ebene des Meridians steht, und wenn der Spiegel nicht so gestellt ist, dass er einen Stern im Augenblicke seiner Culmination an den mittleren Faden bringt, so ist wegen dieser Abweichungen eine Correction nöthig, die, man nach der folgenden Anweisung berechnen kann.

In folgender Figur stellt NZM die Ebene des Meridians vor, $WNOT$ die des Quadranten. Der Pol dieser Ebene liege in P , M sei der Weltpol. Wäre der Spiegel genau senkrecht auf der Ebene des Quadranten, so würde man den Stern in dem Augenblicke in der Mitte des Fernrohrs sehen, wenn er durch diese Ebene $WNOT$ geht; wegen der Abweichung von der senkrechten Stellung, die wir gleich OTL setzen wollen,

sieht man aber den Stern, wenn er in L ist; TL ist $= 2\alpha$.

Da P der Pol der Ebene des Quadranten ist, so ist $CP = TP = OP = NP = WP = 90^\circ$, und die zwischen diesen Bögen eingeschlossenen Winkel sind den Bögen cT, TO etc. gleich, oder diese Winkel sind die auf dem Gradbogen des Quadranten gemessenen.

Da L der Stern ist, so ist $ML =$ seiner Polardistanz $= 90^\circ - \delta$; der Stundenwinkel ZML sei $= t$, dann hat man

$$\cos ZL = \cos t \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \dots (1)$$

und aus dem Dreiecke ZPL

$$\cos ZL = \cos ZPL \sin LP \sin ZP + \cos LP \cos ZP \quad (2)$$

$$2 \sin \frac{1}{2} (Z + 2\alpha' + c + z) \sin \frac{1}{2} (Z + 2\alpha' + c - z) = \left(\frac{1-A}{A}\right) \cos z - \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{A} \cos \varphi \cos \delta - B$$

$$- 2 \cos \frac{1}{2} (Z' + 2\alpha' + c + z) \cos \frac{1}{2} (Z' + 2\alpha' + c - z) = \left(\frac{1-A}{A}\right) \cos z - \frac{2 \sin \frac{1}{2} t'^2}{A} \cos \varphi \cos \delta + B$$

Da aber $Z + 2\alpha' + c - z$ sehr klein und $Z' + 2\alpha' + c + z$ sehr nahe $= 180^\circ$ ist, so hat man ohne merklichen Fehler

$$\frac{1}{2} (Z + 2\alpha' + c - z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-A}{A}\right) \cotg z - \frac{\sin \frac{1}{2} t^2 \cos \varphi \cos \delta}{A \sin z} = \frac{B}{2 \sin z}$$

$$- 90^\circ + \frac{1}{2} (Z' + 2\alpha' + c + z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-A}{A}\right) \cotg z - \frac{\sin \frac{1}{2} t'^2 \cos \varphi \cos \delta}{A \sin z} + \frac{B}{2 \sin z}$$

und wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2} (Z' - Z) - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z \cdot A} (\sin \frac{1}{2} t'^2 - \sin \frac{1}{2} t^2) + \frac{B}{\sin z}$$

Bei dem vom künstlichen Horizonte reflectirten Sterne hat man $Zv = 180^\circ -$ Zenithdistanz, also

$$-\cos Zv = \cos t' \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \dots \dots \dots (3)$$

$$\cos Zv = \cos ZPv \sin vP \sin ZP + \cos vP \cos ZP \quad (4)$$

Da aber der Winkel $LTO = v u W$, und da $TL = u v = 2\alpha$, so ist auch $OL = v W$, oder $LP = v P$.

Man hat demnach aus

$$(1) \text{ u. } (2) \dots \cos ZPL = \frac{\cos t \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta - \cos LP \cos ZP}{\sin LP \sin ZP}$$

$$(3) \text{ u. } (4) - \cos ZPv = \frac{\cos t' \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta + \cos LP \cos ZP}{\sin LP \sin ZP}$$

Der Winkel ZPL ist $= Z + 2\alpha' + c$ (wo $TO = 2\alpha$) und $Z'v = Z' + 2\alpha' + c$. Zieht man von jeder dieser Gleichungen $\cos z$ ab, und setzt, um abzukürzen

$$A = \sin LP \sin ZP$$

$$B = \cotg LP \cotg ZP,$$

so erhält man

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2} (Z' - Z) - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \sin \frac{1}{2} (t' + t) \sin \frac{1}{2} (t' - t) + \frac{B}{\sin(\varphi - \delta)}$$

Der bei dem Werthe von B vorkommende $\cos LP$ ist $= \sin OL$ und sehr nahe $= t \cos \delta$; $\cos ZP = \sin CZ$ ist durch die gegebene Lage des Quadranten bekannt. Diese Correctionen werden nie beträchtlich werden, wenn man nur einigermaßen vorsichtig in der Stellung des Spiegels ist. Es kann nicht schwer halten, diese Richtigkeit bis auf eine oder einige Zeitminuten zu erlangen, und dann wird man alle Correctionen vernachlässigen können.

54. Zur Bestimmung des Collimationsfehlers beim Mauerquadranten.*

(Monatl. Corresp. XX, p. 81 u. 87. — Aus Briefen vom 15. Juni und 12. Juli 1809 an LINDBAEC.)

..... Für das nächste astronomische Jahrbuch werde ich Herrn BODE einen kleinen Aufsatz zusenden,

der bestimmt ist, den Gebrauch des Mauerquadranten zu erweitern, indem er ein Mittel angibt, wie man den Collimationsfehler oder den Theilungsfehler ohne Hilfe anderer Instrumente durch einen vor das Objectivglas

* [Auszug aus 42 d. a. Verz. — Vgl. den folg. Aufsatz 55.]

befestigten Planspiegel und einen Oelhorizont sehr genau und sicher bestimmen kann. Das Wesentliche der Methode besteht in Folgendem: Man befestigt an das Fernrohr einen Spiegel, der auf der Ebene des Quadranten etwa senkrecht steht, mit der optischen Axe aber einen Winkel α macht; damit beobachtet man den reflectirten Strahl eines Sternes sowohl direct als aus dem Horizonte. Bei der ersten Beobachtung wird man dem Fernrohre die Zenitldistanz $Z + c = z - 2\alpha$, bei der andern $Z' + c = 180^\circ - z - 2\alpha$ geben müssen, wobei z die Meridian-Zenithdistanz und c den Collimationsfehler bedeuten. Daraus findet man, ganz unabhängig von c ,

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z)$$

bis auf sehr kleine Correctionen, die, wenn man sie durch eine sehr genaue Stellung des Spiegels nicht vermeidet, sich leicht berechnen lassen.

..... Den Einwurf, den Sie gegen meinen Vorschlag,^{*)} den Collimationsfehler eines Mauerquadranten zu erforschen, machen, werden Sie hoffentlich im Astron. Jahrb. 1812 genügend beantwortet finden. Es ist sogar vortheilhaft, den Spiegel absichtlich etwa einen halben Grad fehlerhaft zu stellen, weil man dadurch zu den

verschiedenen Beobachtungen Zeit gewinnt. Die Correctionen kann man äusserst leicht berechnen, denn es ist

$$\begin{aligned} \text{wahre Zenithdist.} &= 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 1''(t'^2 + t^2) \cos \delta \sin \delta, \end{aligned}$$

wo Z' die aus dem Horizonte, Z die direct mit dem Spiegel beobachtete Zenitldistanz, t' der der ersten, t der der andern zugehörige Stundenwinkel ist. Wenn der Quadrant selbst fehlerhaft aufgestellt ist, so kann man seine Abweichung vom Meridian durch

$$\frac{1}{15} \left(\alpha \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \beta \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \right)$$

darstellen. Nennt man nun

$$\begin{aligned} \alpha \cos z + \beta \sin z &= \lambda \\ -\alpha \cos z + \beta \sin z &= \lambda' \end{aligned}$$

so hat man

$$\begin{aligned} z &= 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z) - \frac{1}{2} \sin 1''(t'^2 + t^2) \cos \delta \sin \delta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 1'' \frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} [(\lambda + \lambda') \cos(\varphi - \delta) + \alpha(t' - t)] \end{aligned}$$

Gewöhnlich wird man indess das zweite Glied vernachlässigen können.

55. Vorschläge zur Erweiterung des Gebrauchs des Mauerquadranten.^{**)}

(BODE'S Jahrbuch f. 1812, p. 148.)

Die Gründe, warum man in neueren Zeiten die ganzen Kreise den Mauerquadranten vorzieht, sind allgemein bekannt und von vielen Astronomen auseinandergesetzt; indess ist das Urtheil über diese Instrumente oft vielleicht etwas zu hart ausgefallen, und man hat einiger Vorzüge nicht gedacht, die der Quadrant wirklich vor dem Kreise hat, und die seinen Gebrauch, vorausgesetzt dass er mit Vorsicht und in jeder Rücksicht zweckmässig behandelt wird, weit weniger unsicher machen, als man es wohl mitunter dargestellt hat.^{***)} Ein Haupterforderniss ist die genaue Kennt-

niss seines Collimationsfehlers und des Winkels, den die beiden Endpunkte der Theilung am Mittelpunkte einschliessen, und der selbst bei einigen bessern Instrumenten dieser Art nicht immer in aller Schärfe $= 90^\circ$ gefunden worden ist. Gut eingerichtete Sternwarten haben zur Erfindung der Collimationsfehler Zenithsectoren, und andere Instrumente zur Untersuchung der Theilung; allein vielen Astronomen stand weder das eine noch das andere dieser Mittel zu Gebote, und namentlich der grosse TOBIAS MAYER musste seinen Quadranten durch Umkehrung berichtigen, ein Verfahren, welches grosse Vorbereitungen erfordert, und zuweilen doch unsichere Resultate geben wird, weil es die völlige Unveränderlichkeit des Instruments während der Operation voraussetzt, ohne ein Mittel anzugeben, wie man die Richtigkeit dieser Voraussetzung erforschen kann. Astronomen, denen selbst dieses Mittel versagt ist, die Fehler ihres Quadranten kennen zu lernen, müssen sich mit Differentialbeob-

*) Ich hatte gegen Herrn Bessel im Allgemeinen die Bedenklichkeit geussert, eine genaue Bestimmung durch einen Spiegel und durch dessen richtigen Stand zu erhalten.
v. LINDENAU.

**) [41 d. a. Verz. — Unterm 29. Juni 1809 eingesandt. — Vgl. die fast identische Ableitung der vorangehenden Abb. 53.]

***) Ich stimme diesen Aeusserungen des Herrn Verf. vollkommen bei. BODE.

achtungen begnügen, und die von andern Beobachtern angegebenen Oerter der Sterne als richtig annehmen; sie können einige Hauptpunkte, z. E. die Polhöhe, nicht bestimmen, und immer werden die Früchte ihres Fleisses, dadurch dass sie von der Richtigkeit anderer Beobachtungen abhängen, an Werth verlieren. Vielleicht ist daher Einiges dieser kleine Ansatz nicht unangenehm, weil er ein Mittel vorschlägt, die Zenithdistanzen der Sterne unabhängig vom Collimationsfehler zu beobachten, oder die Richtigkeit der Theilung zu untersuchen.

Wenn man vor das Objectivglas des Fernrohrs des Quadranten einen an das Rohr befestigten Planspiegel anbringt, der auf der Ebene des Quadranten senkrecht und gegen die optische Axe des Fernrohrs um einen Winkel a geneigt ist, so wird man das vom Spiegel reflectirte Bild eines Sterns, der die Zenithdistanz z hat, am Faden des Fernrohrs sehen, wenn man den Index auf die Zenithdistanz

$$z - 2a - c = Z' \dots \dots \dots (1)$$

stellt, wo c den Collimationsfehler bedeutet. Lässt man das Licht des Sterns durch Reflexion von einem vor das Fernrohr gestellten Oel- oder Quecksilber-Horizonte in den Spiegel, und von diesem ins Fernrohr fallen, so muss dieses die Zenithdistanz

$$180^\circ - z - 2a - c = Z' \dots \dots \dots (2)$$

haben, wenn der Stern am Horizontalfaden erscheinen soll. Die Wahrheit dieser Sätze wird ein jeder sich leicht selbst erweisen; sie geben uns ein Mittel an die Hand, die vorgesetzten Zwecke zu erreichen, denn man darf nur auf die vorgeschriebene Weise zwei Zenithdistanzen Z und Z' beobachten, und man wird ganz unabhängig vom Collimationsfehler erhalten

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z).$$

Zwei Schwierigkeiten die dieses Verfahren hat, lassen sich leicht beseitigen: die eine besteht in der Schwächung des Lichts durch die verschiedenen Reflexionen, die es nicht leicht macht, den Stern aufzufinden und genau zu beobachten; die andere liegt in der Voraussetzung, dass der Spiegel auf der Ebene des Quadranten senkrecht sein muss.

Ein irdischer Gegenstand, den man im Meridiane oder nahe dabei aufstellt, wird das leichteste Mittel gewähren, dem Spiegel eine beliebige Richtung zu geben, denn man darf diesen nur so lange um das Fernrohr drehen, bis das reflectirte Bild, auf irgend einem Theile des Gradbogens, im Fernrohr erscheint; die Zenithdistanz die der Index dann anzeigt, wird, mit der wahren

verglichen, dann nach (1) a bestimmen, und man wird nach (1) und (2) die einem bekannten Sterne zugehörigen Z und Z' angeben, und auf diese Punkte das Fernrohr vorläufig stellen können, wodurch man ohne Mühe den Stern auffinden wird. Die verminderte Helligkeit wird nicht erlauben, sehr kleine Sterne zu diesen Beobachtungen zu wählen, und man wird wohl am besten thun, ausser der Sonne nur Sterne der ersten und zweiten Größe zu gebrauchen. Die andere Schwierigkeit wird man durch eine leichte trigonometrische Rechnung überwinden können, wozu uns die folgende allgemeine Auflösung der Aufgabe den Weg zeigen wird.

Da man eine vollkommen richtige Aufstellung des Quadranten im Meridian nicht immer voraussetzen kann, so wird es gut sein, auch auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen. Es bedeute demnach in der Figur [p. 3] NZM die Ebene des Meridians, $WOTC$ die des Quadranten, deren Pol in P liegt, M den Weltpol, Z das Zenith, $OTL = WUV$ die Neigung der Ebene des Spiegels gegen die Gesichtslinie. Der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit der ersten Beobachtung sei $= t$, zur Zeit der zweiten aus dem Horizonte genommenen $= t'$, die Polhöhe $= \varphi$, die Declination des Sterns $= \delta$. OC nannten wir oben Z , UC aber Z' ; der Stern wird wegen der Neigung des Spiegels am Meridianfaden erscheinen, wenn er noch um $OL = WV$ davon entfernt ist.

Man hat aus der Figur

$$\cos ZL = \cos t \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \dots \dots \dots (3)$$

$$= \cos ZPL \sin LP \sin ZP + \cos LP \cos ZP \dots \dots (4)$$

Die andere Beobachtung gibt, indem der Strahl von einem untern Horizonte befindlichen Sterne herzukommen scheint

$$\cos VZ = -\cos t' \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta \dots \dots \dots (5)$$

$$= \cos ZPV \sin VP \sin ZP + \cos VP \cos ZP \dots (6)$$

Da der Spiegel in der Zwischenzeit der Beobachtungen eine unveränderte Lage behält, so würden die Abstände OL und WV der Bilder des Sterns, von der Ebene des Quadranten, folglich auch LP und VP einander gleich sein, wenn beide Beobachtungen an gleichen Stellen des Horizontalfadens gemacht wären: diese Voraussetzung, die die Anwendbarkeit der Methode beschränken würde, darf man sich ungeachtet der daraus hervorgehenden Erleichterung des Calculs aber nicht erlauben; man darf also nur auf die Zeiten der Beobachtungen aufmerksam sein, unbekümmert an welchem Orte des Horizontalfadens, den man der Ebene des Quadranten senkrecht annimmt, der Stern sich befindet. Man hat nun aus

$$(3) \text{ und } (4) \dots \cos ZPL = \frac{\cos \ell \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta - \cos PL \cos ZP}{\sin PL \sin ZP} \dots (7)$$

$$(5) \text{ und } (6) \dots \cos ZPV = \frac{\cos \ell \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta + \cos VP \cos ZP}{\sin VP \sin ZP} \dots (8)$$

Ausdrücke, die eine völlig genaue Auflösung der Aufgabe enthalten, die hier aber zur Ableitung einer brauchbaren Näherung dienen sollen.

In der Voraussetzung, dass der Spiegel der Ebene des Quadranten beinahe senkrecht, oder dass der Winkel *OTL* sehr klein ist, ist auch *t*, *ℓ'* klein, und man hat wenn man *OT = WU = 2a'* setzt

$$ZPL = Z + 2a' + c \dots ZPV = Z' + 2a' + c \text{ sehr nahe } = z \dots 180^\circ - z$$

wo *z* die Zenithdistanz im Meridian bedeutet. Addirt man zu den Gleichungen (7) $-\cos z$, und zu (8) $+\cos(180^\circ - z)$ so werden sie

$$2 \sin \frac{1}{2}(Z + 2a' + c + z) \sin \frac{1}{2}(Z + 2a' + c - z) = \left(\frac{1-A}{A}\right) \cos z - \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{A} \cos \varphi \cos \delta - B \dots (9)$$

$$2 \sin \frac{1}{2}(Z' + 2a' + c + 180^\circ - z) \sin \frac{1}{2}(180^\circ - Z' - 2a' - c - z) = \left(\frac{1-A'}{A'}\right) \cos z - \frac{2 \sin \frac{1}{2} t'^2}{A'} \cos \varphi \cos \delta + B' \dots (10)$$

A ist um abzukürzen, für $\sin LP \sin ZP$, *B* für $\cotg LP$, $\cotg ZP$ u. s. w. gesetzt.

Da nach der obigen Bemerkung

$$\frac{1}{2}(Z + 2a' + c - z) \text{ und } \frac{1}{2}(180^\circ - Z' - 2a' - c - z)$$

sehr klein sind, so kann man ihre Sinus mit den Bögen selbst verwechseln, und

$$\frac{1}{2}(Z + 2a' + c + z) = z$$

$$\frac{1}{2}(Z' + 2a' + c + 180^\circ - z) = 180^\circ - z$$

setzen; dann verwandelt sich (9) und (10) in

$$Z + 2a' + c - z = \left(\frac{1-A}{A}\right) \cotg z - \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2 \cos \varphi \cos \delta}{A \sin z} - \frac{B}{\sin z} \dots (11)$$

$$180^\circ - Z' - 2a' - c - z = \left(\frac{1-A'}{A'}\right) \cotg z - \frac{2 \sin \frac{1}{2} t'^2 \cos \varphi \cos \delta}{A' \sin z} - \frac{B'}{\sin z} \dots (12)$$

und wenn man diese Gleichungen addirt und die Grössen der 4. Ordnung weglässt

$$180^\circ - (Z' - Z) - 2z = (2 - A - A') \cotg z - \frac{1}{2}(t^2 + t'^2) \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z} + \frac{B' - B}{\sin z} \dots (13)$$

Man hat aber

$$A + A' = \sin ZP (\sin LP + \sin VP) \dots (14)$$

$$B' - B = \cotg ZP (\cotg VP - \cotg LP) \dots (15)$$

welche Werthe also von der Abweichung des Quadranten vom Meridian abhängen, und durch diese bestimmt werden müssen. Stellt man die Correctionen, die man der Durchgangszeit eines Sterns durch den mittlern Faden hinzufügen muss, um seine wahre Culmination zu erhalten, durch

$$\alpha \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \beta \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

dar, so findet man

$$OV = \lambda = \alpha \cos z + \beta \sin z$$

$$WX = \lambda' = -\alpha \cos z + \beta \sin z$$

und daraus

$$LP = 90^\circ - t \cos \delta + \lambda$$

$$VP = 90^\circ - t' \cos \delta + \lambda'$$

ferner

$$ZP = 90^\circ + \alpha$$

welche Werthe, in (14) und (15) substituirt, durch leichte Entwicklungen geben

$$2 - A - A' = \alpha^2 + \frac{1}{2}(t \cos \delta - \lambda)^2 + \frac{1}{2}(t' \cos \delta - \lambda')^2 \dots (16)$$

$$B' - B = -\alpha(t - t') \cos \delta + \alpha(\lambda' - \lambda) \dots (17)$$

Substituirt man dieses in (13), so hat man den vollständigen Werth der Correction; indess kann man noch etwas abkürzen, wenn man die Quadrate und Producte von $\alpha, \beta, \lambda, \lambda'$ vernachlässigt, welches in den meisten Fällen, weil der Quadrant dem Meridian immer sehr nahe sein wird, ohne merklichen Fehler geschehen kann; dann wird

$$2 - A - A' = \frac{1}{2}(t^2 + t'^2) \cos^2 \delta + (t\lambda + t'\lambda') \cos \delta$$

$$B' - B = -\alpha(t - t') \cos \delta$$

folglich (13), wenn man $(\varphi - \delta)$ für *z* setzt, und die Ausdrücke so viel als möglich zusammenzieht

$$180 - (Z' - Z) - 2z = \frac{1}{2}(t^2 + t'^2) \cos \delta \sin \delta - \frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} (t\lambda + t'\lambda') \cos(\varphi - \delta) + \alpha(t - t')$$

Oder, wenn man *t*, *ℓ'*, *λ*, *λ'* und α in Bogensekunden ausdrückt,

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z) - \frac{1}{2} \sin 1'' (t^2 + t'^2) \cos \delta \sin \delta + \frac{1}{2} \sin 1'' \frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} (t\lambda + t'\lambda') \cos(\varphi - \delta) + \alpha(t - t') \dots (18)$$

Sollte der Quadrant so richtig aufgestellt sein, dass man auch die Producte $\alpha t, \lambda t$ u. s. w. vernachlässigen kann, so wird die Correction auf ihr erstes Glied und *z* auf folgende sehr einfache Form reducirt

$$z = 90^\circ - \frac{1}{2}(Z' - Z) - \frac{1}{2} \sin 1''(t^2 + t'^2) \cos \delta \sin \delta \dots (19)$$

Der Nutzen des Spiegels am Quadranten fällt in die Augen, denn da man dadurch eine Zenithdistanz unabhängig vom Collimationsfehler erhalten kann, so wird dieser durch eine directe Messung derselben Zenithdistanz bestimmt; es wäre zu diesem Zwecke vielleicht nützlich, des Spiegels Ebene vorsätzlich nicht ganz senkrecht auf die Ebene des Quadranten, und zwar so zu stellen, dass des Sterns reflectirtes Bild zwei oder drei Minuten früher den mittlern Faden erreicht als das direct gesehene, so dass der Beobachter im Stande ist, sowohl die Spiegelbeobachtungen als die directe Messung der Zenithdistanz bei einer Culmination anzustellen; diese Beobachtungen könnten noch erleichtert werden, wenn man den Spiegel nur einen Theil des Objectivs bedecken liesse, so dass man die directe Beobachtung machen könnte, ohne den Spiegel vom Fernrohre zu nehmen. Wenn man den Collimationsfehler etwa aus Zenithsectorbeobachtungen schon kennt, so kann der Spiegel zur Untersuchung der Theilung angewandt werden, denn wenn man die direct gemessene Zenithdistanz Z' , den bekannten Collimationsfehler n , und das Verhältniss des Bogens von 90° auf dem Instrumente zu einem wirklichen Quadranten $1:1+m$ setzt, so hat man

$$Z'' + n = z - m(90^\circ - z)$$

$$m = \frac{z - Z'' - n}{90^\circ - z}$$

Dieser Gebrauch des Spiegels scheint nicht unwichtig

zu sein, weil er ein Mittel darbietet, die Richtigkeit einzelner Theilstriche des Quadranten zu untersuchen.

Die Neigung der Spiegelebene gegen die optische Axe des Fernrohrs ist zwar willkürlich, insofern die Mauerquadranten nur einige wenige Grade über 90° getheilt sind, so darf die Zenithdistanz des zu beobachtenden Sterns nicht viel weniger betragen als 45° und die Neigung der Spiegelebene nicht viel mehr als $22\frac{1}{2}^\circ$; gibt man ihr genau diese Neigung, welches etwa durch Beobachtung eines irlischen Gegenstandes geschehen könnte, so liegen Z und Z' auf beiden Seiten immer gleich weit von 45° Zenithdistanz.

Die mechanische Einrichtung des Spiegels wird ein jeder leicht selbst hinzufügen; sie kann, da sie so äusserst einfach ist, kaum eine Schwierigkeit haben, und selbst der mittelmässigste Künstler wird den Apparat gut genug verfertigen können, wenn er die Hauptsache — eine gute Spiegelplatte — besitzt. Es kommt eigentlich nur auf eine Fläche an, die die Bilder so deutlich reflectirt, dass man sie gut beobachten kann; dass diese Fläche genau eben ist, wird nicht erfordert, weil die Fehler immer in einerlei Sinn wirken und sich also aufheben; — eine solche Spiegelplatte von einigen Quadratzollen wird man leicht auffinden können, da man ein sehr bequemes Mittel besitzt, ihre Güte schon eher zu erkennen, ehe man sie für den Quadranten einrichtet: bildet sich ein entfernter Punkt, durch ein gutes Fernrohr in dem Spiegel gesehen, deutlich ab, so darf man auf die Güte des Spiegels vertrauen.

56. Bemerkung über die Greenwicher Quadranten.*

(Mon. Corr. XXIII, p. 192. — Auszug aus einem Schreiben an LEIDENAU VOM 11. JAN. 1811.)

... Ueber die Greenwicher Quadranten und die dort beobachteten Declinationen habe ich schöne Resultate vorrätzig, wovon ich Ihnen, da Sie es verlangen, nächstens etwas mittheilen werde. Diese Instrumente sind sterblich, so wie alles auf der Welt; der Greenwicher Quadrant hat sich im Centro ausgeschliffen, und gibt

deshalb unrichtige Zenithdistanzen. Zu BRADLEY'S Zeiten war es nicht so: damals war der Quadrant vortrefflich, und dieselbe Polhöhe, die gegen Norden der Polarstern gab, folgte aus den Beobachtungen der Sonne gegen Süden. Ich habe Beweise in Händen für die Vortrefflichkeit dieses Quadranten, und bin geneigt, ihn, so wie er zu BRADLEY'S Zeiten war, für eins der schönsten astronomischen Instrumente zu halten, welche je existirt haben . . .

*) [Auszug aus 61 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 111, 112, 181. — Vgl. auch Sphärische Astronomie, Abh. 28; Bd. I, p. 223 B.; Fundam. astr. Sect. I. III. VI.]

57. Ueber die Abweichung der Borda'schen Kreise und Pond's Polhöhe.^{*)}

(Zeitschr. f. Astron. V, p. 267. — Aus einem Schreiben an LISIERSKI vom Apr. 1818.)

... Wenn BOHNENBERGER'S Erklärung der Abweichung der kleinen Borda'schen Kreise von andern Instrumenten die richtige ist [vgl. Zeitschr. f. Astr. V, p. 30], wie es wohl sein kann, so werden wir dieses bald von Besitzern solcher Instrumente bestätigt sehen und damit würde ein Theil des Räthsel's, wo nicht das Ganze, aufgelöst sein. Je nachdem die erwartete Bestätigung ausfällt, kommt also die Aufgabe verschieden heraus; aber da wohl schwerlich die von BOHNENBERGER angegebene Ursache ganz ohne Einfluss sein kann, so sehen wir wenigstens daraus, dass noch Fehler stattfinden können, wo wir keine vermuthen. — Indessen ist dieses auch aus den Resultaten klar; es freut mich daher sehr, dass ich im Stande gewesen bin, in der letzten Section meines Werkes [Fundam. astr. p. 322]

zu beweisen (durch den Erfolg): dass POND'S Polhöhe, wenn man sie bei der Berechnung vorausgesetzt hätte, allenthalben Fehler erzeugt haben würde, die weit grösser sind als die, die man zugeben kann; wenn man die sich dagegen allenthalben bewährende Bestimmung $51^{\circ}28'39''.6$ und ihren Erfolg betrachtet, so kann zwar wohl noch ein Zweifel stattfinden, „ob dieses die wahre Polhöhe ist?“ nicht aber darüber, „ob diese oder keine andere zur Reduction der Bradley'schen Beobachtungen angewandt werden muss?“ Mir dünkt, durch diese Entscheidung (denn dafür halte ich sie wirklich) ist viel gewonnen, man sieht auch, dass sehr wenige Beobachtungsreihen einer so scharfen Prüfung unterworfen werden können, indem die wenigsten die dazu nöthige Vollständigkeit besitzen . . .

58. Ueber das Kreismikrometer.^{**)}

(Mon. Corresp. XXIV, p. 425.)

1.

Der allgemeine und leichte Gebrauch des Kreismikrometers gibt ihm eine ausgezeichnete Stelle unter den Hilfsmitteln, die man zur Bestimmung des Orts eines Himmelskörpers besitzt, wenn dieser nicht mit guten fixen Instrumenten beobachtet werden kann. Längst war es den Astronomen bekannt; allein seine würdige Einführung^{*)} in die practische Astronomie verdanken wir unserm verehrungswürdigen OLBERS, der durch seine eigenen damit angestellten Beobachtungen bewies, dass es den ihm gemachten Vorwurf eines Mangels an Genauigkeit nicht verdient. Mehrere Astronomen haben später dieses Hilfsmittel benutzt; einige mit ausgezeichnetem Erfolge; andere minder glücklich, vielleicht weil sie notwendige Vorsichtsmaassregeln vernachlässigten, oder es nicht so zweckmässig behandelten, als der berühmte Wiederhersteller dieser Methode und die Natur der Sache selbst es forderten.

Der längst anerkannte Werth dieser Beobachtungsort erzeugte den mehrmals öffentlich geäusserten Wunsch, eine vollständige Anleitung zu ihrem Gebrauche zu besitzen; wir hätten auch diese gern OLBERS selbst verdankt, allein da seine vielfältig getheilte Zeit die Hoffnung der Erfüllung dieses Wunsches wenigstens für jetzt geraubt hat, so habe ich dem Auftrage meines berühmten Freundes, eine solche Anleitung bekannt zu machen, desto weniger widerstehen wollen, da er selbst mir Materialien dazu mitgetheilt hat. Die Hoffnung, durch den gegenwärtigen Aufsatz der Astronomie hin und wieder eine gute Beobachtung zu gewinnen, mag ihn entschuldigen. Dankbar würde ich Nachträge von OLBERS erkennen, indem ich kaum hoffen darf, durch meine kürzere Erfahrung alle die practischen Vortheile kennen gelernt zu haben, welche die Anwendung des Kreismikrometers bequemer und sicherer machen können.

2.

Die Idee, die dem Kreismikrometer zum Grunde liegt, ist äusserst einfach; man denke sich da, wo die Bilder der Gegenstände im Fernrohre liegen, einen Kreis angebracht, dessen Mittelpunkt in der Axe des Oculars liegt, und dessen Ebene senkrecht auf dieser

^{*)} [Auszug aus 123 d. a. Verz. — Vgl. auch Sphärische Astronomie, Abh. 38; Bd. I. p. 286.]

^{**)} [72 und 75 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 10. 68 (O.). 81 (O.). 101. 163 (O.). 176 (O.). 222. 226 (O.). 290 (O.). 292. 324—328 (O.). 339.]

Axe ist. Richtet man das Fernrohr mit dieser Vorrichtung auf einen Stern, so dass seine tägliche Bewegung ihn durch diesen Kreis führt, und bemerkt man die Zeiten der Uhr, in welchen er in der Peripherie dieses Kreises erscheint, so wird man daraus sowohl die Zeit schliessen können, wenn er sich in dem durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Declinationskreise befand, als den Abstand, in welchem er dem Mittelpunkte vorbei ging. Die auf den Weg des Sterns errichteten Perpendikel sind nämlich Declinationskreise, und der durch den Mittelpunkt des Kreises gehende halbt den in ihm beschriebenen Weg, sodass das Mittel aus beiden beobachteten Zeiten die Zeit des Durchgangs durch diesen Declinationskreis ist. Kennt man ferner die Geschwindigkeit in Theilen des grössten Kreises, mit welcher der Stern sich an der Himmelskugel bewegt, so wird man aus dieser, und der Zeit die zwischen den beiden bemerkten Momenten verstrich, die Länge des im Kreise beschriebenen Weges berechnen; und hieraus, und aus dem als bekannt angenommenen Durchmesser des Kreises der Himmelskugel, dessen Peripherie dem Kreise im Fernrohre correspondirt, den Abstand in welchem der Stern dem Mittelpunkte vorbei ging, finden können. Lässt man das Fernrohr unverrückt stehen, bis ein anderer Stern von seiner täglichen Bewegung durch den Kreis geführt wird, so erhält man auf dieselbe Weise auch die Zeit seines Durchganges durch den erwähnten Declinationskreis, und den Abstand des durch ihn beschriebenen Weges vom Mittelpunkte. Der Unterschied der Durchgangszeiten beider Sterne gibt nun den Unterschied der geraden Aufsteigungen, und der Unterschied der Abstände vom Mittelpunkte den Unterschied ihrer Abweichungen; und damit erhält man, wenn man die gerade Aufsteigung und Abweichung des einen Sterns als bekannt annimmt, diese Bestimmungen für den andern.

3.

Am einfachsten ist das Instrument, wenn man für den erwähnten Kreis die kreisförmige Blendung im Brennpunkte des Fernrohres selbst annimmt, und bei seinem Gebrauche die Zeiten der Ein- und Austritte der Sterne in dieses Scheffeld und aus demselben beobachtet. Fürs erste werde ich das Instrument so voraussetzen, und erst später einige Abänderungen erwähnen, die man, besondere Zwecke zu erreichen, damit vorgenommen hat. Es versteht sich von selbst, dass man sich vor dem Gebrauche überzeugen muss, dass die Blendung wirklich einen Kreis bildet, wozu

ich unten ein Mittel vorschlagen werde; dass sie nicht, wie es oft der Fall ist, einen so grossen Durchmesser hat, dass die Bilder am Rande etwas undeutlich erscheinen; dass sie genau im Brennpunkte des Oculars, und endlich senkrecht auf seiner Axe stehen muss. Ob die beiden letzten Forderungen befriedigt sind, erkennt man dadurch, dass man das Fernrohr auf einen entfernten irdischen Gegenstand richtet, diesen sehr nahe an den Rand des Scheffeldes bringt und untersucht, ob er bei einer Bewegung des Auges vor dem Oculare seinen Ort gegen diesen verändert; ist dieses nicht der Fall, so liegen Bild und Blendung in gleicher Entfernung vom Auge, und es ist klar, dass beide in einer Ebene liegen, wenn die gefundene Unbeweglichkeit des Bildes an allen Stellen des Randes stattfindet. Bei genauem Prüfungen dieser Art wird man oft finden, dass eine Blendung des Fernrohres zur Anstellung genauer Kreisnukrometerbeobachtungen untauglich ist; allein es wird leicht sein, sie durch eine andere zu ersetzen, die man gewöhnlich so wird einrichten können, dass sie in die Ocularröhre geschoben wird, sodass man sie aufs Genaueste in den Brennpunkt bringen kann.

4.

Sehr wesentlich bei dem Gebrauche des Kreisnukrometers ist die Vorsichtsmassregel, dass man dem Oculare immer eine genau gleiche Entfernung von dem Objectiv gibt; und dieses darf man nicht, wie es gewöhnlich geschieht, dadurch zu erreichen hoffen, dass man das Ocular so lange verrückt, bis man die Gestirne mit Deutlichkeit erkennt. Denn die auf diese Weise erhaltene Stellung ist einer Zufälligkeit unterworfen, deren Grund und Einfluss eine nähere Entwickelung verdient. Die scheinbare Grösse des Scheffeldes, oder der Durchmesser des Kreises der Himmelskugel, welcher sich in demselben abbildet, ist dem Winkel gleich, welchen der Durchmesser des Kreises der Blendung am Mittelpunkte des Objectivs einschliesst; ändert sich nun die Entfernung der Blendung vom Objectiv, so ändert sich dieser Winkel und damit die Grösse des Scheffeldes. Eine solche Aenderung der Entfernung der Blendung vom Objectiv wird aber entstehen können, indem das Auge nicht nur bei einem bestimmten, sondern bei allen innerhalb zwei leicht angeleglichen Grenzen gelegenen Ständen des Oculars, Gegenstände im Fernrohr deutlich sieht. Nennt man nämlich die Grenzen des deutlichen Sehens des unbewaffneten Auges φ und φ' , und die Brennweite des Oculars für parallel einfallende Strahlen λ , so werden die aus dem Ocular ausgehenden Strahlen dieselbe Divergenz haben, als die

dem unbewaffneten Auge aus den Entfernungen ϱ und ϱ' zugesandt, wenn das Ocular vom strahlenden Punkte die Entfernungen

$$\frac{\varrho' \lambda'}{\varrho + \lambda'} \text{ und } \frac{\varrho' \lambda'}{\varrho' + \lambda'}$$

hat; man wird also dem Ocular diese beiden Entfernungen vom Bilde im Brennpunkte und alle zwischen liegenden geben können, ohne dass das Auge jenen Mangel an Deutlichkeit bemerkt.*) Nennt man nun die Brennweite des Objectivs (die Entfernung von demselben, in welcher die Blendung stehen sollte) λ , und den Durchmesser der Blendung l , so wird die durch die Gleichung

$$2 \operatorname{tg} r = \frac{l}{\lambda}$$

gegebene Grösse des Sehefeldes $2r$ sich verändern, wenn man die Entfernung λ verändert. Indem man nun dem Oculare die angegebene Entfernung vom Bilde im Brennpunkte beilegt, wird λ sich in

$$\lambda - \frac{\lambda' \lambda'}{\varrho + \lambda'} \text{ und } \lambda - \frac{\lambda' \lambda'}{\varrho' + \lambda'}$$

verwandeln, und $2 \operatorname{tg} r$ in

$$\frac{l}{\lambda - \frac{\lambda' \lambda'}{\varrho + \lambda'}} \text{ und } \frac{l}{\lambda - \frac{\lambda' \lambda'}{\varrho' + \lambda'}}$$

zwischen beiden ist der Unterschied

$$\frac{\lambda' \lambda' (\varrho' - \varrho)}{(\lambda \varrho + \lambda \lambda' - \lambda' \lambda') (\lambda \varrho + \lambda \lambda' - \lambda' \lambda')}$$

oder, wenn man r und $\operatorname{tg} r$ verwechselt, ist der Unterschied der beiden Grenzen des Durchmessers des Sehefeldes

$$= \frac{2r \cdot \lambda' \lambda'}{\lambda} \cdot \frac{\varrho' - \varrho}{\left(\varrho' + \lambda' \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right) \left(\varrho + \lambda' \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right)}$$

Die Unsicherheit, die in der Bestimmung des Sehefeldes von dieser Ursache erzeugt wird, kann man nun leicht nach dem gegebenen Ausdruck schätzen. Zum Beispiele führe ich ein in Lilienthal häufig zu Kreis- mikrometerbeobachtungen gebrauchtes Teleskop an, für welches

$$2r = 36' 53'', 8$$

$$\lambda' = 1,75 \text{ Zoll}$$

$$\lambda = 84 \text{ Zoll}$$

war, und nehme für ϱ und ϱ' die wie ich glaube bei gewöhnlichen Augen stattfindenden Grenzen 5 und 30 Zoll an; daraus ergibt sich die Unsicherheit = $9'' 68$, die offenbar viel zu gross ist, um sie unberücksichtigt zu lassen; indem, wie oben gezeigt wurde, der Durchmesser des Sehefeldes ein Element der Rechnung ist,

*) [S. auch Abb. 17, Bd. I. p. 101.]

von dessen genauer Kenntniss ihre Sicherheit abhängt. Man muss aus diesem Grunde die immer gleiche Entfernung des Oculars vom Objective auf eine andere Weise zu erhalten suchen, und auf der Ocularröhre ein für allemal die Stelle bezeichnen, bis zu welcher man sie dem Objectiv nähert. Man entgeht auch dadurch der optischen Parallaxe, die durch die Zufälligkeit in der Stellung des Oculars erzeugt werden würde.

Nicht minder wesentlich ist die Sorge für einen so festen Stand des Fernrohrs, dass man mit Sicherheit seine Unbeweglichkeit während der Zeit der Beobachtung voraussetzen kann. Kann man nicht ganz dem Fussboden trauen, auf welchem das Instrument aufgestellt ist, so ist es erforderlich, dass der Beobachter während der Beobachtung weder seine Stelle verändert, noch den Schwerpunkt seines Körpers bedeutend verrückt.

5.

Dem Gebrauche des Kreis- mikrometers geht die Bestimmung der Grösse seines Sehefeldes voran. Die einfachste Methode diese zu erhalten, ist auf beobachtete Durchgänge der Sonnenscheibe durchs Fernrohr gegründet. Nimmt man in der ersten Figur [p. 15] die kleineren Kreise für die Sonne, deren Mittelpunkt durch das Sehefeld die gerade Linie $abcd$ beschreibt, den grösseren für das Sehefeld, und setzt man ihre Halbmesser R und r ; ferner die wahre Sonnenzeit, die zwischen den beiden äusseren Berührungen der Ränder verstrich t , die zwischen den inneren t' , die Declination der Sonne δ , so ist

$$ad = 2 \cdot ap = 15 \cos \delta \cdot t$$

$$bc = 2 \cdot bp = 15 \cos \delta \cdot t'$$

$$(Cp)^2 = (r + R)^2 - \left(\frac{15}{2} \cos \delta \cdot t\right)^2 = (r - R)^2 - \left(\frac{15}{2} \cos \delta \cdot t'\right)^2$$

und hieraus

$$2r = \frac{(15 \cos \delta)^2 (t + t') (t - t')}{8R} \dots \dots \dots (1)$$

Es ist klar, dass man diese Auflösung, ohne etwas daran zu ändern, auch dann anwenden kann, wenn die inneren Berührungen in umgekehrter Ordnung stattfinden, oder wenn die Sonnenscheibe grösser ist als das Sehefeld. Man würde dieses auch aus der Figur erkennen können, wenn man dann die Sonne für diesen Fall als ruhend annähme, und ihre Bewegung auf das kleinere Sehefeld übertrüge.

Vor dieser Bestimmungsart verdient eine andere den Vorzug, die sich auf die Beobachtung der Durchgänge zweier Sterne, deren Declination man als be-

kannt voraussetzt, gründet. Theils lassen sich die Zeiten der Ein- und Austritte der Sterne genauer schätzen als die der Sonnenränder; theils hat diese Methode mehr Verwandtschaft mit dem nachherigen Gebrauche des Kreismikrometers, und überhört den Beobachter der Untersuchung, ob etwa an den Rändern des Sehfeldes eine Inflexion des Lichts statt findet, die den Stern zu früh erscheinen und zu spät verschwinden lassen könnte; denn diese Inflexion würde hier so wirken wie dort, also keinen Fehler erzeugen. Man kann zur Berechnung dieser Beobachtungen mehrere Vorschriften geben, die leicht aus der 2. Figur folgen; die Sternzeit, welche einer der Sterne gebraucht von a nach c zu gelangen, sei t , die die der andere zu Beschreibung des Weges eg anwendet sei t' ; die Declinationen beider δ und δ' ; hieraus hat man, die Wege der Sterne als geradlinig angenommen,

$$ac = 15'' t \cos \delta = a$$

$$eg = 15'' t' \cos \delta' = a'$$

$$fb = \delta' - \delta = \frac{1}{2} \left\{ 4r^2 - a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left\{ 4r'^2 - a'^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

und wenn man hieraus die Wurzelzeichen wegschafft

$$4r^2 = (\delta' - \delta)^2 + \frac{1}{4}(a^2 + a'^2) + \left\{ \frac{a^2 - a'^2}{4(\delta' - \delta)} \right\} \dots (2)$$

$$= \left\{ \delta' - \delta + \frac{(a+a')^2}{4(\delta' - \delta)} \right\} \left\{ \delta' - \delta + \frac{(a-a')^2}{4(\delta' - \delta)} \right\} \dots (3)$$

$$= a^2 + \left\{ \delta' - \delta - \frac{(a+a')(a-a')}{4(\delta' - \delta)} \right\}^2 \dots (4)$$

$$= a'^2 + \left\{ \delta' - \delta + \frac{(a+a')(a-a')}{4(\delta' - \delta)} \right\}^2 \dots (5)$$

Man kann diese Ausdrücke zur Rechnung weit bequemer einrichten, oder auch bequemere Formeln unmittelbar finden. Man nehme zwei Winkel z und z' , so dass

$$a = z - z' \quad \text{und} \quad a' = z + z'$$

dann hat man

$$\left. \begin{aligned} \delta' - \delta &= r[\cos(z+z') + \cos(z-z')] = 2r \cos z \cos z' \\ \frac{1}{4}(a'+a) &= r[\sin(z+z') + \sin(z-z')] = 2r \cos z' \sin z \\ \frac{1}{4}(a'-a) &= r[\sin(z+z') - \sin(z-z')] = 2r \cos z \sin z' \end{aligned} \right\} (6)$$

Dividirt man die beiden letzten Gleichungen durch die erste, so hat man

$$\operatorname{tg} z = \frac{\frac{1}{4}(a'+a)}{\delta' - \delta}$$

$$\operatorname{tg} z' = \frac{\frac{1}{4}(a'-a)}{\delta' - \delta}$$

und wenn man die so gefundenen z, z' in (6) setzt, folgende Ausdrücke für den Durchmesser des Sehfeldes:

$$2r = \frac{\delta' - \delta}{\cos z \cos z'} \dots (7)$$

$$2r = \frac{\frac{1}{4}(a'+a)}{\cos z' \sin z} \dots (8)$$

$$2r = \frac{\frac{1}{4}(a'-a)}{\cos z \sin z'} \dots (9)$$

$$2r = \frac{a}{\sin(z-z')} \dots (10)$$

$$2r = \frac{a'}{\sin(z+z')} \dots (11)$$

Es ist leicht, noch mehrere Ausdrücke für den Durchmesser des Sehfeldes zu finden; aus den gegebenen Werthen von $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{tg} z'$ findet man z, z' die in (10) und (11) vorkommenden Winkel unmittelbar aus den Gleichungen:

$$\operatorname{cotg}(z-z') = \frac{\delta' - \delta}{a} + \frac{(a'-a)(a'+a)}{4a(\delta' - \delta)}$$

$$\operatorname{cotg}(z+z') = \frac{\delta' - \delta}{a'} - \frac{(a'-a)(a'+a)}{4a'(\delta' - \delta)}$$

Es ist ferner aus der Art, wie alle diese Ausdrücke gefunden wurden, klar, dass sie allgemein, auch dann wenn beide Sterne auf einer Seite des Mittelpunktes durch's Sehfeld gehen, richtig sind.

6.

In einigen besonderen Fällen wird die Anwendung dieser Methode die Bestimmung des Durchmessers des Sehfeldes am vortheilhaftesten geben:

- 1) wenn $\delta' - \delta$ nur sehr wenig kleiner ist als $2r$, so dass beide Sterne sehr kleine Chorden im Sehfeld beschreiben;
- 2) wenn $\delta' - \delta$ sehr nahe $= r$ ist, so dass, wenn der eine Stern eine sehr kleine Chorde beschreibt, der andere dem Mittelpunkte nahe vorbeigeht.

Im ersten Falle werden die Fehler der Beobachtung den kleinsten, dagegen ein Fehler in $\delta' - \delta$ seinen vollen Einfluss äussern; im andern wird dieses umgekehrt sein. Bei der Genauigkeit und Vollständigkeit des Piazzischen Sternencatalogs wird es nie an Sternepaaren mangeln, die der ersten Forderung entsprechen; und dann scheint dieser Fall vor dem andern den Vorzug zu verdienen, indem man die Beobachtungsfehler mehr fürchten muss, als die Fehler der vortreflichen Piazzischen Declinationen, die man überdies noch vermindern oder aufheben kann, wenn man die Beobachtungen an mehreren Sternepaaren wiederholt. Zwar ist für diesen Fall die Anwendung der Formel (7), sowie für den andern die der Formeln (7), (8), (9) besonders bequem; allein es existirt noch eine andere Berechnungs-Methode, die man mit desto überwiegenderem

Vortheile wird anwenden können, je kleiner $2r - \delta' + \delta$ ist, und je mehr Beobachtungen man zu gleicher Zeit zu berechnen hat. Diese findet man durch die Ausziehung der Quadratwurzel aus (2), wodurch man erhält

$$2r = \delta' - \delta + \frac{a^2 + a'^2}{4(\delta' - \delta)} - \frac{a^2 a'^2}{8(\delta' - \delta)^2} + \frac{(a^2 + a'^2)a^2 a'^2}{32(\delta' - \delta)^3} - \text{etc.} \quad (12)$$

oder ohne merklichen Irrthum

$$2r = (\delta' - \delta) + \frac{[15 \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')]^2}{4(\delta' - \delta)} (t^2 + t'^2) - \frac{[15 \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')]^4}{8(\delta' - \delta)^2} t^2 t'^2 + \text{etc.} \dots \quad (13)$$

wo die in Potenzen von t und t' multiplicirten Coefficienten constant sind und bei der Berechnung aller Beobachtungen gebraucht werden können. Gewöhnlich wird man das dritte Glied entweder ganz vernachlässigen oder durch eine unbedeutende Rechnung erhalten können, indem es selten einige Zehntel-Seconden betragen wird. Auch für den zweiten Fall wird man oft durch eine Reihenentwicklung von (4) oder (5) leichter zum Ziele gelangen, als durch die genauen Ausdrücke: man kann nämlich (4) leicht auf die Form

$$4r^2 = \left\{ \frac{(\delta' - \delta)^2 + \frac{1}{2} a^2}{\delta' - \delta} \right\}^2 + \frac{a'^2}{2(\delta' - \delta)^2} \left\{ (\delta' - \delta)^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a'^2 \right\}$$

bringen, wo das letzte Glied von der vierten Ordnung in Beziehung auf a' ist; zieht man hieraus die Quadratwurzel und vernachlässigt man dabei die höheren Glieder, so hat man

$$2r = \delta' - \delta + \frac{a^2}{4(\delta' - \delta)} + \frac{a'^2}{4(\delta' - \delta)} \left\{ \frac{(\delta' - \delta)^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a'^2}{(\delta' - \delta)^2 + \frac{1}{2} a^2} \right\} \quad (14)$$

Dieser Ausdruck ist bequem, indem man sich gewöhnlich bei den beiden ersten Gliedern wird begnügen können.

Ein dritter vortheilhafter Fall der Anwendung der im vorigen Artikel entwickelten Methode ist, wenn die Sterne, auf welche man die Bestimmung gründen will, dem Pole sehr nahe stehen, sich langsam bewegen, und dadurch den Einfluss der Beobachtungsfehler vermindern. Man wird indess dann die gegebenen Rechnungs-Vorschriften nicht unbedingt anwenden können, indem die Wege der Sterne in diesem Falle merklich von der vorausgesetzten geradlinigen Bewegung abweichen. Der Vortheil, der aus der Beobachtung solcher Sterne entspringt, möchte indess nicht sehr gross sein; ich halte mich daher hier desto weniger dabei auf, da ich unten die Correctionen geben werde, die aus der krummlinigen Bewegung entstehen. Noch eine Methode, den Durchmesser des Sefeheldes zu bestimmen, verdient wenigstens erwähnt zu werden, obgleich sie kaum eine praktische Brauchbarkeit haben

kann, indem die unvermeidlichen Fehler der Beobachtung grossen Einfluss auf das Resultat haben. Wenn man nämlich ein Sternenpaar zweimal, an verschiedenen Stellen, durch das Sefefeld gehen lässt, so kann dadurch, ohne dass man $\delta' - \delta$ kennt, $2r$ bestimmt werden. Man gelangt leicht zu der Auflösung dieser Aufgabe durch die Gleichung (2), welche, wenn man bei dem zweiten Durchgange die Chorden b , b' setzt, sich in folgende verwandelt,

$$4r^2 = (\delta' - \delta)^2 + \frac{1}{2}(b^2 + b'^2) + \frac{(b^2 - b'^2)^2}{4(\delta' - \delta)^2}$$

und wenn man diese von (2) abzieht

$$(\delta' - \delta)^2 = \frac{-[a^2 - a'^2]^2 + [b^2 - b'^2]^2}{8[a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2]} \dots \quad (15)$$

gibt, woraus man dann $2r$ finden kann.

Die oben erwähnte Untersuchung, ob das Sefefeld wirklich einen Kreis bildet, gründet man am vortheilhaftesten auf die der Reihe (13) entsprechende Methode; denn bei dieser ist der Einfluss der Beobachtungsfehler am kleinsten, so dass man sich durch sie am sichersten wird überzeugen können, ob das Sefefeld bei einer Drehung des Oculars um seine Axe wieder denselben Durchmesser erhält, den die vor der Drehung gemachten Beobachtungen angaben.

7.

Die Anwendung des Kreismikrometers zur Bestimmung der unbekanntenen Lage eines Sternes aus der bekannten eines andern ist nun, da man den Durchmesser des Sefeheldes kennt, keiner Schwierigkeit mehr unterworfen. Die gerade Aufsteigung ergibt sich von selbst durch den Unterschied der arithmetischen Mittel zwischen den Ein- und Austrittszeiten beider Sterne; die Declination findet man am leichtesten, wenn man die Abstände vom Mittelpunkte des Sefeheldes d und d' aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{2r} = \frac{15 \cos \delta}{2r} \cdot t; & d &= r \cos \alpha \\ \sin \alpha' &= \frac{a'}{2r} = \frac{15 \cos \delta'}{2r} \cdot t'; & d' &= r \cos \alpha' \end{aligned} \quad \dots \quad (16)$$

berechnet, wodurch man

$$\delta' = \delta + d' - d^2$$

erhält. — Sollten aber die zu vergleichenden Gestirne dem Pol so nahe stehen, dass man von der dieser Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzung der geradlinigen Bewegung einen Irrthum fürchtet, so kann

^{*)} Hier und in der Folge nehme ich d' und d in Secunden ausgedrückt und südliche d' oder d negativ an. d gehört immer dem bekannten, d' dem zu bestimmenden Sterne an.

man diesen durch folgende schärfere Auflösung des Problems bestimmen:

Man denke sich von dem Punkte des Scheffeldes, wo der bekannte Stern ein- oder austritt, nach dem Pole einen grössten Kreis gezogen; einen andern von diesem Punkte nach dem Mittelpunkte des Scheffeldes, und einen dritten von dem Mittelpunkte nach dem Pole. Die beiden ersten grössten Kreise werden sein $90^\circ - \delta$ und r ; den dritten nenne man $90^\circ - D$; das dadurch gebildete sphärische Dreieck hat am Pol den Winkel $\frac{15}{2} t$, und es existirt zwischen diesen Stücken die Gleichung

$$\cos r = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos \frac{15}{2} t$$

oder, wenn für $\cos \frac{15}{2} t$, $1 - 2(\sin \frac{15}{4} t)^2$ setzt, und auf beiden Seiten von 1 abzieht

$$\sin \frac{1}{2} (\delta - D)^2 = \sin \frac{1}{2} r^2 - \cos D \cos \delta \sin \frac{15}{4} t^2$$

Da $\frac{1}{2} (\delta - D)$, $\frac{1}{2} r$, $\frac{15}{4} t$ sehr kleine Winkel sind, so kann man die Sinus mit den Bögen verwechseln, und schreiben

$$\begin{aligned} (\delta - D)^2 &= r^2 - \cos D \cos \delta \left(\frac{15}{2} t\right)^2 \\ &= r^2 - \cos \delta^2 \left(\frac{15}{2} t\right)^2 - (\cos D - \cos \delta) \cos \delta \left(\frac{15}{2} t\right)^2 \\ &= r^2 - \cos \delta^2 \left(\frac{15}{2} t\right)^2 - (\delta - D) \sin \frac{1}{2} \sin \delta \cos \delta \left(\frac{15}{2} t\right)^2 \end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, und vernachlässigt dabei die höheren Potenzen des letzten Gliedes, so hat man

$$\delta - D = \left[r^2 - \cos \delta^2 \left(\frac{15}{2} t\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{(\delta - D) \sin \frac{1}{2} \sin \delta \cos \delta \left(\frac{15}{2} t\right)^2}{2 \left[r^2 - \cos \delta^2 \left(\frac{15}{2} t\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Hier ist das erste Glied nichts anderes, als das in der Voraussetzung der geradlinigen Bewegung berechnete δ , und das zweite seine Correction; man hat also

$$\delta - D = \delta - \sin \frac{1}{2} \sin \delta \cos \delta \left(\frac{15}{2} t\right)^2$$

und ebenso für den andern Stern, dessen Declination wir bestimmen wollen:

$$\delta' - D = \delta' - \sin \frac{1}{2} \sin \delta' \cos \delta' \left(\frac{15}{2} t'\right)^2$$

Hieraus folgt

$$\delta - \delta = \delta' - \delta' + \sin \frac{1}{2} \left[\sin \delta \cos \delta \left(\frac{15}{2} t\right)^2 - \sin \delta' \cos \delta' \left(\frac{15}{2} t'\right)^2 \right]$$

und ohne merklichen Fehler

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= \delta' - \delta \\ &+ \sin \frac{1}{2} \cdot \text{tg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta) \left[\cos \delta^2 \left(\frac{15}{2} t\right) - \cos \delta'^2 \left(\frac{15}{2} t'\right) \right] \end{aligned}$$

Man kann diese Correction noch bequemer ausdrücken, wenn man bedenkt, dass

$$\cos \delta^2 \left(\frac{15}{2} t\right)^2 = \frac{1}{2} a^2 = r^2 - t'^2$$

$$\cos \delta'^2 \left(\frac{15}{2} t'\right)^2 = \frac{1}{2} a'^2 = r'^2 - t'^2$$

alsdann wird sie

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= \delta' - \delta + \sin \frac{1}{2} \text{tg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta) [(a + a') (a - a')] \\ &= \delta' - \delta + \sin \frac{1}{2} \text{tg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta) [(d' + d) (d' - d)] \end{aligned}$$

oder die in der Voraussetzung der geradlinigen Bewegung berechnete Declination δ' erhält die Correction

$$+ \sin \frac{1}{2} \text{tg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta) (d' - d) (d' - d) \dots (17)$$

8.

Sehr häufig kommt bei Anwendung des Kreismikrometers der Fall vor, dass das Gestirn, dessen Ort man bestimmen will, seine gerade Aufsteigung und Abweichung schnell verändert. Dann ist die Voraussetzung, dass der Stern in einer Secunde Sternzeit $15'' \cos \delta'$ im Bogen zurücklegt, und dass die auf seinem Wege errichteten Perpendikel Declinationskreise sind, oft merklich unrichtig, und es ist notwendig, dass man von dem begangenen Irrthum Rechnung trägt. Nennt man die in Secunden ausgedrückte Veränderung der Rectascension in einem mittleren Tage $\mathcal{A} \alpha'$ und die der Declination $\mathcal{A} \delta'$, so sind diese Veränderungen in 1^{er} Sternzeit

$$= \frac{\mathcal{A} \alpha'}{86636} \text{ und } \frac{\mathcal{A} \delta'}{86636}$$

Hieraus folgt die Veränderung des Stundenwinkels in $1^s = 15'' - \frac{\mathcal{A} \alpha'}{86636}$ und die wahre Bewegung in

$$1^s = \sqrt{\left(15'' - \frac{\mathcal{A} \alpha'}{86636}\right)^2 \cos \delta'^2 + \left(\frac{\mathcal{A} \delta'}{86636}\right)^2}$$

wofür man ohne merklichen Irrthum setzen kann $\left(15'' - \frac{\mathcal{A} \alpha'}{86636}\right) \cos \delta'$.

In der dritten Figur sei aa' ein Declinationskreis, eh perpendicularär darauf, eg der Weg des Gestirns und id darauf senkrecht. Aus dem vorigen hat man nun

$$\left(15'' - \frac{\mathcal{A} \alpha'}{86636}\right) \cos \delta' : \frac{\mathcal{A} \delta'}{86636} = d' : ik$$

da aber $ie = ig$, so muss man zu der beobachteten Zeit des Durchganges durch i (dem Mittel der Zeiten in e und g) $\frac{ik}{15 \cos \delta'}$ addiren, um die Zeit des Durchganges durch den Declinationskreis aa' zu erhalten, oder zu der, ohne Rücksicht auf die Ortsveränderung berechneten Rectascension $\frac{ik}{\cos \delta'}$,

$$= \frac{d' \cdot \mathcal{J} \delta'}{86636 \cdot \cos \delta'^2 \left\{ 15 - \frac{\mathcal{J} a'}{86636} \right\}}$$

wofür man ohne merklichen Irrthum setzen kann

$$+ \frac{d' \cdot \mathcal{J} \delta'}{1299540 \cdot \cos \delta'^2} \dots \dots \dots (18)$$

Das wahre d' findet man aus der Gleichung

$$\begin{aligned} d' &= \left\{ r^2 - \left(15 - \frac{\mathcal{J} a'}{86636} \right)^2 t'^2 \cos \delta'^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ r - \left(\frac{15}{2} t' \right)^2 \cos \delta'^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{15 \cdot \mathcal{J} a' \cdot t'^2 \cos \delta'^2}{86636 \cdot 4 d'} \\ &= \left\{ r^2 - \left(\frac{15}{2} t' \right)^2 \cos \delta'^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{\mathcal{J} a'}{1299540} \cdot \frac{1}{4} \frac{a'^2}{d'} \end{aligned}$$

und hieraus die Correction der ohne die Ortsveränderung zu berücksichtigen berechneten Declination

$$+ \frac{\mathcal{J} a'}{1299540} \cdot \frac{1}{d'} \cdot a'^2 \dots \dots \dots (19)$$

9.

Die bisherige Anweisung zur Berechnung der Beobachtungen, die man mit einem Kreismikrometer anstellen kann, setzt voraus, dass die Bewegungen der Sterne wirklich so erscheinen, als sie vor sich gehen. Die Strahlenbrechung erzeugt indes hier einen Unterschied, zu dessen Berechnung ich im XVII. Bande der Mon. Corr. S. 209 u. s. w. eine umständliche Anweisung gegeben habe;* aus ihr entlehne ich folgende hierher gehörige Vorschriften.

Die nach der ersten Art. 6 empfohlenen Methode berechnete Grösse des Sefefeldes erhält wegen der Strahlenbrechung die Correction

$$\frac{-57'' \cdot \sin(\delta' - \delta) \cdot \delta'}{\sin(\psi + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta')^2}$$

wo ψ ans der Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \cos t \operatorname{cotg} \varphi$$

berechnet ist, in welcher t den Stundenwinkel (die östlichen t werden negativ genommen) und φ die Polhöhe bedeutet.

Ferner erhält der ohne Rücksicht auf Refraction mit dem Kreismikrometer bestimmte Ort eines Gestirns die Correctionen

$$\begin{aligned} AR &= \frac{+ a \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta')^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} t \sin \psi}{\cos \delta \cos \delta'} \\ &\quad \times \left\{ \cos(\psi + \delta + \delta') + \cos \psi \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right\} \\ \text{Decl.} &= \frac{+ a \sin(\delta' - \delta)}{\sin(\psi + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta')^2} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \left(\frac{r^2}{d'^2} + 1 \right) \left(\frac{\cos \psi^2}{\operatorname{tg} \psi^2} + \cos \psi \sin \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') \right) \right\} \end{aligned}$$

* [S. Abhandlung 27, Bd. I. p. 221.]

Eine dort gegebene Tafel enthält das hier vorkommende a . Es wird von der Genauigkeit, die man zu erreichen strebt, abhängen, ob man diese Correctionen vernachlässigen kann oder nicht; allein selten wird man sie anwenden dürfen, wenn die beobachteten Sterne nicht dem Horizonte sehr nahe sind.

10.

Es ist klar, dass man den Ein- und Austritt eines Sterns desto genauer wird beobachten können, je schneller er sich von dem Rande des Sefefeldes entfernt und je schneller er sich ihm wieder nähert. Man wird also zur Bestimmung der Rectascension am liebsten Durchgänge wählen, die dem Mittelpunkte des Sefefeldes nahe liegen. Dagegen wird ein Beobachtungsfehler auf die Bestimmung der Declination eines desto grösseren Einfluss haben, je näher der Durchgang dem Mittelpunkte ist; die Declination wird man also am sichersten auf Durchgänge gründen, die weit vom Mittelpunkte entfernt stattfinden. Gehen die beiden Gestirne auf einer Seite des Mittelpunktes und nahe auf einem gleichem Parallel durchs Fernrohr, so ist die Bestimmung der Declination am sichersten, indem dann eine Unsicherheit, die noch in der Bestimmung von $2r$ übrig geblieben sein könnte, sehr geringen Einfluss äussert. Auch kann man in diesem Falle zur Sicherheit der Bestimmung beitragen, indem man abwechselnd Durchgänge nördlich und südlich vom Mittelpunkte beobachtet, um dadurch den Fehler zu eliminiren, der vielleicht durch eine verschiedene Lichtstärke der zu vergleichenden Gestirne und eine daher rührende Ungleichheit in der Schätzung des Erscheinens und Verschwindens im Sefefelde verursacht werden könnte.

Da eine genaue Bestimmung mittelst des Kreismikrometers die Beobachtung dieser Vorsichtsmassregeln voraussetzt, und man nicht immer einen Stern findet, dessen Lage gegen den zu vergleichenden es möglich macht, beide auf die vortheilhafteste Weise durch das Sefefeld gehen zu lassen, so ist es nothwendig, mehrere Sefefelder von verschiedener Grösse vorrätzig zu haben, von welchen man das für jeden Fall passendste wählt. In dieser Hinsicht ist die von OLBERS vorgeschlagene und benutzte Einrichtung bequeme, die drei Kreise von verschiedenen Durchmessern vereinigt, und noch überdies den Vortheil gewährt, durch einen Durchgang mehrere Bestimmungen zu geben, deren eine man durch die andere controliren kann. Die Vorrichtung, ein durch vier Fäden in der Blendung befestigter Kreis von Messing, ist übrigens so einfach, dass sie keiner weitern Beschreibung bedarf.

Noch ein anderes Hilfsmittel verdanken wir demselben scharfsinnigen Astronomen; es ist in der vierten Figur abgebildet und besteht aus einem dünnen Messingstreifen, welcher in der Blendung befestigt ist, so dass sein einer Rand durch ihren Mittelpunkt geht. Man beobachtet mittelst dieser Vorrichtung die Zeiten t, t' wie oben, und die Zeiten, welche die Gestirne gebrauchen, von a nach b und von d nach m zu gelangen = τ und τ' . Stellt nun hi einen Declinationskreis vor und hat man aus der Chorde ca den Abstand vom Mittelpunkt berechnet, so hat man $bl : bg = cl : mg$ oder $15 \cos \delta (\tau - \frac{1}{2} t) : 15 \cos \delta (\tau' - \frac{1}{2} t') - 15 \cos \delta (\tau' - \frac{1}{2} t') = d : d' - d$

$$\text{oder } \delta' - \delta = d \left\{ 1 - \frac{\tau' - \frac{1}{2} t'}{\tau - \frac{1}{2} t} \cdot \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} \right\} \dots (20)$$

wofür man gewöhnlich wird setzen können

$$\delta' - \delta = d \left\{ 1 - \frac{\tau' - \frac{1}{2} t'}{\tau - \frac{1}{2} t} \right\} \dots (21)$$

Man wird hier nicht d , sondern d' suchen, wenn dieses grösser ist als d ; und es ist klar, dass die Bestimmung desto genauer ausfallen wird, je mehr der Streifen gegen die tägliche Bewegung geneigt ist. Uebrigens geben zwei Sterne von bekannten Declinationen leicht die Entscheidung, ob der eine Rand des Streifens wirklich

durch den Mittelpunkt der Blendung geht; in diesem Falle muss nämlich $\frac{d'}{d} = \frac{d}{d' - d + d} = \frac{\tau - \frac{1}{2} t}{\tau' - \frac{1}{2} t'} \cdot \frac{\cos \delta'}{\cos \delta}$ sein; — findet dieses nicht statt, so kann man zwar leicht die deshalb anzubringende Correction entwickeln, allein besser und einfacher wird es sein, den Streifen durch einen neuen ersetzen zu lassen, der wirklich durch den Mittelpunkt geht. Bei einiger Aufmerksamkeit sieht man, dass diese Vorrichtung den Gebrauch des Kreismikrometers sehr erweitert, und dass das so einggerichtete Instrument immer die Declination eines Sterns mit Vorteil zu geben im Stande ist, wenn der mit ihm zu vergleichende nur einen kleinern Declinationsunterschied hat als $2r$. Kann man den zu bestimmenden Stern mit zwei bestimmten vergleichen, deren einem die Buchstaben t'', τ'', δ'' zukommen, so hat man, wie man ohne Mühe sieht,

$$\delta' - \delta = \frac{(\tau - \frac{1}{2} t) \cos \delta - (\tau' - \frac{1}{2} t') \cos \delta'}{(\tau - \frac{1}{2} t) \cos \delta - (\tau'' - \frac{1}{2} t'') \cos \delta''} (\delta'' - \delta)$$

wofür man gewöhnlich wird setzen können

$$\delta' - \delta = \frac{(\tau - \frac{1}{2} t) - (\tau' - \frac{1}{2} t')}{(\tau - \frac{1}{2} t) - (\tau'' - \frac{1}{2} t'')} (\delta'' - \delta)$$

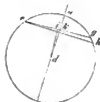
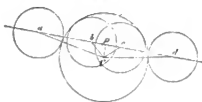
$$\text{oder } \delta'' - \delta' = \frac{(\tau' - \frac{1}{2} t') - (\tau'' - \frac{1}{2} t'')}{(\tau - \frac{1}{2} t) - (\tau'' - \frac{1}{2} t'')} (\delta'' - \delta).$$

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.



58b. Nachträge. (Mon. Corresp. XXVI, p. 67.)

Die in meiner Abhandlung über das Kreismikrometer geäußerte Bitte hat Herr Dr. OLBERS erfüllt, indem er mir einige Stellen darin anzeigte, wo mehr Detail oder die Anführung anderer Methoden ihm wünschenswerth schienen.*) Ich gebe die hierdurch veranlasseten Nachträge in der Hoffnung, dadurch meinen Aufsatz zu vervollständigen und ihn den Liebhabern der Astronomie, die mit den Beobachtungsmethoden und ihrer Theorie weniger bekannt sind, brauchbarer zu machen.

Nachtrag zu Art. 5.

Wenn man voraussetzt, dass die Uhr während einer Revolution des beobachteten Himmelskörpers um

die Weltaxe genau 24 Stunden zeigt, so geschieht die Verwandlung der beobachteten Zeiten in Bogensecunden durch die einfache Multiplication der Zeitsecunden mit 15. Zeigt sie eine andere Zeit, so muss man diese auf jene bringen, wenn man die Verwandlung mit 15 vornehmen will. Leichter wird aber der Gebrauch eines Factors m sein, den man statt des beständigen 15 nimmt, und der sich leicht finden lässt. Wir wollen hier zwei Fälle unterscheiden und die Uhr als

- 1) ungefähr mittlere Zeit
- 2) „ Sternzeit

zeigend annehmen.

1) Wenn die Voreilung der Uhr vor MZ. täglich v Secunden ist, oder $24^h + v$ Sec. der Uhr = 24^h MZ., und die Veränderung der Rectascension des beobachte-

*) [Br. mit O. I. p. 324 — 328.]

ten Himmelskörpers in einem mittleren Tage = \mathcal{A}' : so ändert sich der Stundenwinkel in 1° Uhrzeit um

$$m = \frac{360^\circ 59' 8''.33 - \mathcal{A}'}{24^h + v} = \left\{ 15''.04107 - \frac{\mathcal{A}'}{86400} \right\} \cdot \frac{86400}{86400 + v}$$

2) Wenn $24^h + v$ der Uhr = 24^h Sternzeit, so ist

$$m = \frac{(360^\circ 59' 8''.33 - \mathcal{A}') 360^\circ}{360^\circ 59' 8''.33 \cdot 24^h + v} \\ = \left\{ 15'' - \frac{\mathcal{A}'}{86636,55} \right\} \cdot \frac{86400}{86400 + v}$$

Der vom Gange der Uhr abhängige Factor ist, wenn v sehr klein ist, ohne merklichen Fehler

$$1 - 0,000011574 v$$

und sein Logarithm

$$= 0,0000048 v.$$

Reducirt man die beobachteten Zeiten mittelst des Factors m auf Bogentheile, so darf man, indem man dadurch schon von der durch die Bewegung in Rectascension veränderten Geschwindigkeit Rechnung trägt, die daher rührende Correction der Declination (Gleichung 19) nicht besonders berechnen.

Nachtrag zu Art. 6.

Die nur erwähnte Methode, r aus den Durchgängen zweier Sterne, die dem Pole nahe stehen, zu bestimmen, entwickle ich hier näher. Wenn D die Declination des Mittelpunktes des Kreismikrometers ist, so ist aus Art. 7

$$\cos r = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos \frac{m}{2} t$$

$$\cos r = \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos \frac{m}{2} t'$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} D = \frac{\cos \delta' \cos \frac{m}{2} t' - \cos \delta \cos \frac{m}{2} t}{\sin \delta - \sin \delta'}$$

Addirt man auf beiden Seiten

$$- \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') = \frac{\cos \delta - \cos \delta'}{\sin \delta - \sin \delta'}$$

so hat man

$$\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + \delta') = \frac{2 \cos \delta \left(\sin \frac{m}{4} t \right) - 2 \cos \delta' \left(\sin \frac{m}{4} t' \right)}{\sin \delta - \sin \delta'}$$

$$\sin(D - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta') = \frac{\cos D}{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta')} \\ \times \left[\cos \delta \left(\sin \frac{m}{4} t \right) - \cos \delta' \left(\sin \frac{m}{4} t' \right) \right]$$

Da $D - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'$ immer nur einige Minuten betragen kann, so kann man anfangs bei seiner Berechnung für $\cos D$, $\cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')$ setzen, damit $D - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'$ suchen, und das hieraus hervorgehende D , wenn eine genauere Führung der Rechnung nöthig sein sollte, dazu benutzen. Mit geringer, gewöhnlich ganz unbedeutender Aufopferung an Genauigkeit kürzt man die Rechnung

beträchtlich ab, indem man für die Sinus die Bögen und folglich

$$D = \frac{1}{2}(\delta + \delta') + \cos D \frac{m^2}{8(\delta - \delta')} [\cos \delta t^2 - \cos \delta' t'^2]$$

setzt. Nachdem D gefunden ist, findet man r aus einer der Gleichungen

$$\sin \frac{1}{2} r^2 = \sin \frac{1}{2}(\delta - D)^2 + \cos D \cos \delta \left(\sin \frac{m}{4} t \right)^2$$

$$\sin \frac{1}{2} r^2 = \sin \frac{1}{2}(\delta' - D)^2 + \cos D \cos \delta' \left(\sin \frac{m}{4} t' \right)^2$$

deren Berechnung man am bequemsten erhält, wenn man Hilfswinkel nach den Formeln

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \frac{m}{4} t}{\sin \frac{1}{2}(\delta - D)} \sqrt{\cos D \cos \delta}$$

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\sin \frac{m}{4} t'}{\sin \frac{1}{2}(\delta' - D)} \sqrt{\cos D \cos \delta'}$$

einführt, wodurch man erhält

$$r = \frac{\delta - D}{\cos \psi} = \frac{\delta' - D}{\cos \psi'}$$

Nachtrag zu Art. 7.

So bequem die Correction der in der Voraussetzung der geradlinigen Bewegung berechneten Declination nach der Gleichung (17) gefunden wird, so wird doeh die Rechnung oft etwas unbequem sein, indem die gesuchte Declination selbst in dem Ausdrücke

$$a' = m t' \cos \delta'$$

vorkommt, wodurch zuweilen eine Wiederholung der Rechnung notwendig gemacht werden kann. Man weicht dieser Unbequemlichkeit aus, wenn man durch den bekannten Stern die Declination D des Mittelpunktes des Kreismikrometers sucht, diese zur Erfindung der Chorde nach dem Ausdrücke

$$a' = m t' \cos D$$

benutzt, und die nun auszubringende Correction hinzufügt. Man findet leicht aus der Gleichung

$$\sin \frac{1}{2}(\delta' - D)^2 = \sin \frac{1}{2} r^2 - \cos D \cos \delta' \left(\sin \frac{m}{2} t' \right)^2$$

unter unbedeutenden Vernachlässigungen

$$(\delta' - D)^2 = r^2 - \cos D^2 \left(\frac{m}{2} t' \right)^2 + (\cos D - \cos \delta') \cos \delta' \left(\frac{m}{2} t' \right)^2$$

$$= r^2 - \cos D^2 \left(\frac{m}{2} t' \right)^2 + (\delta' - D) \sin \frac{1}{2}(\delta' + D) \cos \delta' \sin^2 \left(\frac{m}{2} t' \right)^2$$

woraus sich, wenn man das aus den ersten beiden Gliedern näherungsweise, auf die in der Abhandlung angezeigte Art, berechnete $\delta' - D = d'$ setzt, sehr nahe

$$\delta' - D = d' + \sin \frac{1}{2} \operatorname{tg} D \frac{1}{2} a'^2$$

$$\text{oder } \delta' - \delta = d' - d + \sin \frac{1}{2} \operatorname{tg} D [a'^2 + a^2]$$

ergibt. Will man die Correction unmittelbar durch die beobachteten Zeiten t, t' ausdrücken, so kann man diese sowohl in dem gegenwärtigen Falle, als in dem in der Abhandlung angenommenen, wo a' mit dem als bekannt vorausgesetzten δ' berechnet wurde. Im gegenwärtigen Falle ist nämlich die Correction der Declination

$$= + \frac{m^2}{16} \sin 1'' \sin(\delta + \delta') [t^2 + t'^2]$$

und in dem andern

$$= + \frac{m^2}{16} \sin 1'' \sin(\delta + \delta') [t^2 - t'^2]$$

Es verdient untersucht zu werden, wie man die Durchgänge durchs Kreismikrometer nehmen muss, damit die Beobachtungsfehler auf die zu bestimmende Declination den geringsten Einfluss haben.

Offenbar haben die Beobachtungsfehler zwei verschiedene Ursachen; denn theils vermögen wir nicht mit absoluter Schärfe zu beurtheilen, ob ein Gegenstand sich genau unter dem Rande des Kreismikrometers befindet oder etwas näher oder entfernter vom Mittelpunkte ist; theils findet in der Schätzung des Moments an der Uhr, welches zu einem Ein- oder Austritte gehört, eine Unsicherheit statt. Den grösstmöglichen aus dem ersten Ursache entspringenden Fehler, den wir Δr Bogensecunden nennen wollen, kann man sich als eine Unsicherheit des angenommenen Halbmessers des Kreises denken, und ihn folglich alle Fehler der Bestimmung dieses Elementes, und auch die etwaigen Unregelmässigkeiten des Randes in sich begreifend voraussetzen; er ist in allen Punkten des Randes gleich wahrscheinlich, kann aber seine Grösse für Gestirne von verschiedener Helligkeit oder verschiedenem Ansehen ändern. Der andere Fehler, der des Gehörs, dessen Maximum Δt Zeitsecunden sein mag, ist für alle Beobachtungen gleich wahrscheinlich. Differentirt man nun die Gleichung

$$d^2 = r^2 - \cos^2 \delta \frac{m^2}{4} t^2$$

in Beziehung auf beide Fehler, so erhält man, wenn man annimmt, dass die Fehler beim Ein- und Austritte auf die nachtheiligste Weise zusammenwirken, den grösstmöglichen Fehler von d

$$\Delta d = \frac{2r}{d} \Delta r + \cos \delta \frac{m^2}{2d} \Delta t$$

wofür man auch

$$\Delta d = \frac{2r}{d} \Delta r + \frac{\cos \delta \cdot m}{d} \sqrt{r^2 - d^2} \cdot \Delta t$$

$$\Delta d' = \frac{2r}{d'} \Delta r + \frac{\cos \delta' \cdot m}{d'} \sqrt{r^2 - d'^2} \cdot \Delta t$$

schreiben kann, woraus dann der grösstmögliche Fehler der durch das Kreismikrometer bestimmten Declination δ' sehr nahe

$$= 2r \left\{ \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \right\} \Delta r + \cos \delta \cdot m \left\{ \sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1} + \sqrt{\frac{r^2}{d'^2} - 1} \right\} \Delta t$$

folgt; es versteht sich, dass hier d und d' beide mit gleichen Zeichen genommen werden müssen, indem wir die nachtheiligste Conspiration der Fehler untersuchen. Jetzt wird es sich leicht entscheiden lassen, ob es vortheilhafter ist, die Declination aus Durchgängen zu bestimmen, die auf beiden Seiten etwa gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, oder aus Durchgängen, deren einer einem Rande des Schefeldes möglichst nahe liegt.

Im erstern Falle ist

$$-d' = d = \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

und der grösstmögliche Fehler von δ'

$$= \frac{8r}{\delta' - \delta} \Delta r + 2 \cos \delta \cdot m \sqrt{\frac{4r^2}{(\delta' - \delta)^2} - 1} \cdot \Delta t$$

Im andern ist entweder d oder $d' = r$, und der andere Abstand vom Mittelpunkte $= \delta' - \delta - r$, woraus der Fehler von δ'

$$= \frac{2(\delta' - \delta)}{\delta' - \delta - r} \Delta r + \cos \delta \cdot m \sqrt{\frac{r^2}{(\delta' - \delta - r)^2} - 1} \cdot \Delta t.$$

Der Einfluss des ersten Fehlers, des des Sehens, ist in dem Falle am geringsten, in welchem, unabhängig vom Zeichen, der Coefficient von Δr am kleinsten ist. Setzt man in beiden Fällen diesen Einfluss gleich, so hat man

$$\frac{4r}{\delta' - \delta} = \frac{\delta' - \delta}{\delta' - \delta - r}$$

oder

$$0 = \pm 4r^2 \mp 4r'(\delta' - \delta) + (\delta' - \delta)^2$$

eine Gleichung, deren Wurzeln

$$\delta' - \delta = 2r$$

$$\delta' - \delta = 2r(\sqrt{2} - 1) = 0,8284r$$

sind. Es folgt hieraus, dass man den Fehler des Sehens am unschädlichsten macht, wenn man die Durchgänge so nimmt, dass der eine möglichst nahe am Rande des Schefeldes liegt, so lange $\delta' - \delta$ kleiner ist als $0,8284r$; und auf beiden Seiten gleich entfernt vom Mittelpunkte, wenn $\delta' - \delta$ grösser ist als $0,8284r$.

Für den Einfluss des Fehlers des Hörens erhält man eben so die Gleichung

$$2 \sqrt{\frac{4r^2}{(\delta' - \delta)^2} - 1} = \sqrt{\frac{r^2}{(\delta' - \delta - r)^2} - 1}$$

oder

$$0 = -3(\delta' - \delta)^4 + 6r(\delta' - \delta)^2 + 12r^2(\delta' - \delta)^2 - 32r^3(\delta' - \delta) + 16r^4$$

Eine der Wurzeln dieser Gleichung ist offenbar

$$\delta' - \delta = 2r;$$

die übrigen drei finden sich leicht durch die Trisection des Winkels

$$\delta' - \delta = \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot \sin 20^\circ = 0,7898 r$$

$$\delta' - \delta = \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot \sin 40^\circ = 1,4845 r$$

$$\delta' - \delta = \frac{4r}{\sqrt{3}} \cdot \sin 80^\circ = -2,2743 r$$

Man wird also den Fehler des Hörens am unschädlichsten machen, wenn man die Durchgänge folgendermassen nimmt:

einen möglichst nahe am Rande, wenn $\delta' - \delta$ zwischen 0 und $0,7898 r$;

beide gleich weit vom Mittelpunkte, wenn $\delta' - \delta$ zwischen $0,7898 r$ und $1,4845 r$;

einen möglichst nahe am Rande, wenn $\delta' - \delta$ zwischen $1,4845 r$ und $2 r$.

Die letzte Wurzel gehört nicht zu unserm Probleme, indem sie Sterne voraussetzt, deren Declinationsunterschied grösser ist, als der Durchmesser des Sefefeldes.

Von beiden Fehlern ist der erste ohne Zweifel der kleinste, wenn übrigens das Fernrohr gut ist und der Beobachter die in meiner Abhandlung empfohlenen Vorsichtsmassregeln nicht vernachlässigt. Allein ein günstiger Umstand ist es dennoch, dass beide Fehler fast auf dieselben Vorschriften führen, indem durch sie erfordert wird, dass man einen der Durchgänge möglichst nahe am Rande nehmen soll, wenn der Declinationsunterschied kleiner als etwa $\frac{1}{2} r$; allein auf beiden Seiten gleich weit vom Mittelpunkte, wenn er grösser ist. Obgleich der Fehler des Hörens, wenn $\delta' - \delta > 1,4845 r$, geringeren Einfluss äussert, wenn man einen der Durchgänge wieder möglichst nahe am Rande beobachtet, so ist der Unterschied in der Gefahr zu irren doch so klein, dass man, ohne etwas Wesentliches aufzopfern, hier ganz der Willkür folgen kann.

Am bedeutendsten wird der mögliche Fehler der Declination, wenn $\delta' - \delta$ etwa $= 0,8 r$; alsdann ist er mehr als zweimal so gross als der Fehler der beobachteten Chorde. Hier vorzüglich sind die Abänderungen des Kreismikrometers schätzbar, die OLBERS angewandt hat, und die im Art. meiner Abhandlung beschrieben sind. Betrachtungen dieser Art haben auch die Dimensionen seines aus drei Kreisen zusammengesetzten Mikrometers, dessen Durchmesser im Verhältnisse 5 : 7 : 10 sind, bestimmt.

Besondere Empfehlung verdient das Kreismikrometer bei Beobachtung der Sonnenflecken. Es gibt ihren Rectascensions- und Declinationsunterschied vom Mittelpunkte der Sonne mit Vortheil, da man es bei einem sehr stark vergrössernden Fernrohre anbringen und die Beobachtungen oft vervielfältigen kann. Man kann diese Beobachtungen nach den in meiner Abhandlung gegebenen Vorschriften berechnen; jedoch gibt die eigene Bewegung der Sonne der Rechnung eine etwas veränderte Form. Es seien die Zeiten der Uhr, wenn die Berührungen der Ränder der Sonne und des Sefefeldes geschehen,

$$\begin{aligned} \text{der äusseren } \tau, \tau' \text{ und } \tau' - \tau = t, \\ \text{der inneren } \tau'', \tau''' \text{ und } \tau''' - \tau'' = t', \end{aligned}$$

die des Ein- und Austritts des Mittelpunktes des Sonnenflecks T und T' , und $T' - T = t''$; der Factor, womit man die Zeitsecunden multipliciren muss, um Bogensecunden zu erhalten, m : so hat man die Abstände der durch den Sonnenmittelpunkt und des Sonnenflecks beschriebenen Chorden vom Mittelpunkte des Sefefeldes (Art. 5)

$$d = \left\{ (r+R)^2 - \frac{m^2}{4} \cos^2 t^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ (r-R)^2 - \frac{m^2}{4} \cos^2 t'^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$d' = \left\{ r^2 - \frac{m^2}{4} \cos^2 t'' \right\}^{\frac{1}{2}}$$

und den Rectascensionsunterschied (18)

$$= m \left\{ \frac{T+T'}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau+\tau'}{\tau'+\tau''} \right) \right\} + \frac{(\delta'-\delta) d d'}{1296000 \cdot \cos \delta'}$$

Wollte man einen der Halbmesser nicht als bekannt voraussetzen, so würde man, falls man innere und äussere Berührungen der Ränder beobachtet hätte, diesen aus den Beobachtungen selbst nach (1) bestimmen können. Allein es ist klar, dass man die Beobachtungen besser benutzt, wenn man beide Halbmesser als bekannt annimmt, indem es schärfere Methoden gibt, sie kennen zu lernen, als durch den Durchgang der Sonnenscheibe durch das Kreismikrometer.

Auch kann man das Kreismikrometer gebrauchen, den Durchmesser eines Planeten oder Cometen zu bestimmen; lässt man in (1) $2R$ den gesuchten Durchmesser bedeuten, so findet man ihn durch die Beobachtungen der inneren und äusseren Berührungen

$$2R = \frac{(m \cos \delta)^2 (t+t') (t-t')}{8r}$$

desto genauer, je näher man den Planeten oder Cometen am Rande des Sefefeldes hat vorbeigehen lassen.

59. Bemerkung über Veränderlichkeit der Passageninstrumente.*)

(Bode's Jahrb. für 1818, p. 239.)

... Nach dem oben ausgemittelten wahrscheinlichen Fehler meiner Bestimmung [der AR. des Polaris] zu urtheilen, muss die Unsicherheit, insofern sie nicht durch einen etwaigen Fehler der Nutation vermehrt wird, äusserst klein sein;**) mit so guten Beobachtungen wie die Seeberger und Dorpater sind, war also eine äusserst nahe Uebereinstimmung zu erwarten. Dagegen liegt es mir noch ob, das andere aus meinen Beobachtungen gezogene Resultat, dass nämlich die Parallaxe nicht merklich ist, gegen das entgegengesetzte des Herrn PIAZZI in Schutz zu nehmen. PIAZZI's Hülfsmittel sind in der That den meinigen an Güte gleich und seine Geschicklichkeit im Beobachten ist wahrscheinlich grösser als die meinige: also würden meine Beobachtungen die seinigen nicht bestreiten können, wenn diesen nicht vielleicht ein Umstand nachtheilig geworden wäre, der auf die meinigen keinen Einfluss haben konnte. Wir verdanken nämlich der Aufmerksamkeit der berühmten Mailänder Astronomen die genauere Kenntniss der Veränderungen der nicht an ebener Erde aufgestellten Instrumente: sie fanden, dass das Meridianzeichen in den unverrückten Fernröhren täglich eine regelmässige Curve beschreibt, statt dass es immer in einem Punkte erscheinen würde, wenn die

die Instrumente tragenden Pfeiler ihre Lage nicht änderten. Der Grund hiervon liegt in der Erwärmung der Mauern durch die Sonnenstrahlen und in der darauf folgenden Abkühlung. Die Abhandlung, die diese merkwürdigen Resultate enthält, habe ich zwar selbst nicht gesehen und kenne daher die Curve nicht näher: auch würde in Palermo schwerlich dieselbe Curve beschrieben werden, indem die specielle Beschaffenheit des Gebäudes jedesmal eine andere erzeugen muss. Allein wenn in Palermo, in der Gegend des Pols, das Mittagsfernrohr um 6^h Abends in der grössten östlichen, und um 6^h Morgens in der grössten westlichen Digression von den Punkten wäre, denen es um Mittag und Mitternacht entspricht: so würden daraus scheinbare Veränderungen in den Rectascensionen des Polarsterns, selbst in den aus beiden Culminationen geschlossenen entstehen, die den von PIAZZI beobachteten ganz ähnlich sein würden. — BRADLEY's Beobachtungen sind übrigens den meinigen günstig und so weit entfernt, PIAZZI's Parallaxe von 2;885 zu bestätigen, dass sie sogar einen, freilich äusserst kleinen, negativen Werth dafür angeben, der aber leicht von kleinen Beobachtungsfehlern herrühren kann. . . .

60. Ueber das Dollond'sche Mittagsfernrohr und den Cary'schen Kreis.***)

(Königsberger Beobacht. 1. Abth., p. III—XXI.)

Das Mittagsfernrohr von DOLLOND hat 4 Fuss Focallänge, eine Axe von 3½ Fuss und 2,7 Zoll Oeffnung. Sein solider Bau und die Unveränderlichkeit seiner Collimationslinie lassen nichts zu wünschen übrig, indem ich seit der Zeit seiner Aufstellung nie eine

merkliche Veränderung des Instruments selbst gefunden habe. Seine optische Stärke ist gleichfalls befriedigend, indem sie mir, wie das Tagebuch zeigt, die Beobachtung äusserst kleiner Sterne und des β Aquilae bis zum 4. December erlaubt hat. Pallas konnte bei ihrem Gegenschneime im October und November 1814 in einer Höhe von etwa 10° noch bei hinreichender Beleuchtung der Fäden beobachtet werden. Um aber ein bestimmtes Maass hierüber anzugeben, führe ich an, dass die vom August bis November in 322° 28' AR. und — 25° 16' Declination, und 324° 26' AR. und — 24° 35' Declination beobachteten Sterne, die zu denen gehören, mit welchen Herr von WISNIEWSKY den Cometen von 1811 bei seiner letzten Sichtbarkeit verglich, die klein-

*) [Auszug a. 98 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 399 (O.), 403, II. 99.]

**) Ein Fehler der Nutation kann nur geringen Einfluss auf die in J. 1814 angestellten Beobachtungen haben, indem die Nutation in diesem Jahre von + zu — überging. Uebrigens lassen BRADLEY's 12 Jahre umfassende Beobachtungen nur eine sehr geringe Verbesserung der Nutation vermuthen.

***) [Auszug aus 106 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 361 ff. 367, 372 ff. 403, 419. II. 60. — Die detaillirten Zahlenangaben bei der Untersuchung des Kreises sind zum Theil gekürzt oder gestrichen.]

sten sind, die man bei einer Höhe von 10° mit diesem Instrumente beobachten kann. Die Vergrößerung ist 44 Mal.

Das Fadennetz besteht aus drei verticalen Silberfäden und einem horizontalen, die einen Durchmesser von 5 bis 6" haben. Bei der bekannnten Beobachtungsart, indem man nämlich die Zehnteile der Zeitekunden dadurch schützt, dass man die Abstände von beiden Rändern des Fadens bei der vorhergehenden und folgenden vollen Secunde mit einander vergleicht, hat die Dicke des Fadens keinen Einfluss auf die Genauigkeit der Beobachtung, und es ist nur nöthig, dass der Beobachter sich an eine bestimmte Dicke gewöhnt. Aus diesem Grunde glaubte ich statt dieser Silberfäden nicht feinere Spinnenfäden einziehen zu dürfen, zumal da diese die Beobachtung kleiner, nur geringe Beleuchtung vertragender Sterne oft unmöglich gemacht haben würden. Die Fadenintervalle bestimmte ich im April 1814 aus 23 Beobachtungen des Polarsterns

51:986 und 52:865

und aus sehr vielen Beobachtungen anderer Sterne

51:942 und 52:817.

In dem Laufe dieses Jahres ist das Mittel

51:964 und 52:841

zur Reduction der Beobachtungen angewandt worden. Die Verbesserung des Mittels aus den drei Fäden ist hienach $= -0,2923 \text{ sec } \delta = -0,00279$ der zwischen den äusseren Fäden verfloffenen Zeit.

Die Erleuchtung geschieht, mittelst einer Wachskerze, durch die Axe. Die horizontale Lage der letzten erhält man nicht nur durch ein schönes Niveau, sondern auch durch ein Bleiloth, welches am Instrumente selbst aufgehängt und nach RAMSDEN'S Erfindung beobachtet wird. Jenes pflege ich in der wärmeren Jahreszeit anzuwenden; in der kälteren wird es, weil alsdenn die Luftblase so gross wird, dass ihre beiden Enden nicht mehr zugleich sichtbar sind, unsicherer; dann pflege ich mich des Loths zu bedienen. Beide Arten der Berichtigung haben einstimmig gezeigt, dass sehr wenig an der Gleichheit der Dicke der Cylinder fehlt.

Man kann sich leicht überzeugen, dass man die Gleichheit der Cylinder durch das Niveau mit einer sehr grossen Genauigkeit prüfen kann. Indem nämlich die Zapfenlager aus in einem rechten Winkel zusammenstossenden Ebenen gebildet sind, so sind, wenn man die Halbmesser der Cylinder, des östlichen a , des westlichen a' , und die Höhen der Punkte, in welchen die die Lager bildenden Ebenen zusammenstossen, über irgend einer Horizontalebene, h und h' nennt, die

Höhen der Mittelpunkte der Axe $= h + a\sqrt{2}$ und $= h + a'\sqrt{2}$. Nivellirt man nun die Axe mit einem Niveau, dessen Haken gleichfalls in einem rechten Winkel zusammenstossende Ebenen sind, so erhält man dadurch

$$h + a \cdot 2\sqrt{2} = h' + a' \cdot 2\sqrt{2}$$

oder $h - h' = (a' - a)2\sqrt{2}$. Legt man nun die Axe in den Lagern um, so sind die Höhen, denen das wieder angehängte Niveau entspricht $= h + a' \cdot 2\sqrt{2}$ und $= h' + a \cdot 2\sqrt{2}$. Findet sich nun ein, nach Osten positiv genommener, Ausschlag $= x$ Secunden, so ist

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{R} (a' - a)$$

wo R die Länge der Axe bedeutet. Man erhält hierdurch, indem der ursprüngliche, durch das Nivellement erhaltene Höhenunterschied der Mittelpunkte $= h - h' - (a' - a)\sqrt{2} = (a' - a)\sqrt{2}$ ist, diesen $= \frac{1}{2}Rx$, oder in Secunden ausgedrückt $= \frac{1}{2}x$. Ein Niveau, welches einen Höhenunterschied von einer Secunde anzugeben im Stande ist, kann daher eine Ungleichheit der Halbmesser der Cylinder von $R \sin 0,1768$ schon verrathen.

Im Jahre 1815 wurde auf die Untersuchung der Cylinder vorzüglicher Fleiss verwandt; — wenn die Axe in der gewöhnlichen Lage des Instruments nivellirt ist und dann umgewandt wird, so kömmt die Luftblase nicht ganz genau auf ihren vorigen Stand zurück, sondern geht im Mittel etwa einen halben Theil der Scala des Niveaus oder $1,63$ nach Osten. Der Unterschied der Halbmesser der Cylinder ist daher kleiner als der fünfzehntausendste Theil eines Zolls; und der hieraus entstehende Fehler des Nivellements kleiner als $0,4$, welcher Fehler, wenn man die durch astronomische Beobachtungen gefundene Verbesserung der Aufstellung des Instruments in Rechnung bringt, auf die geraden Aufsteigungen gar keinen Einfluss hat, die Zeiten der Durchgänge durch den wahren Meridian aber nur merklich ändert. Die Berichtigung der Axe mit dem Lothe ist von der Dicke der Cylinder ganz unabhängig.

Die Prüfung der Form der Zapfen ist schwieriger als die vorige. Denn der gleiche Stand des Niveaus bei allen Drehungen des Instruments beweiset nur, dass die Durchschnitte der Zapfen Ellipsen sind, keinesweges aber, dass diese Ellipsen Kreise oder bei beiden Zapfen gleich sind. Das Instrument könnte also einen Fehler dieser Art nur dadurch verrathen, dass Circumpolarsterne von verschiedenen Declinationen verschiedene Abweichungen vom Meridiane angäben. Allein es möchte sehr schwierig sein, die Beschaffenheit eines Fehlers dieser Art so auszumitteln, dass man davon

Rechnung tragen könnte. Glücklicherweise kann man aber mit grosser Wahrscheinlichkeit die Verfertigung der Zapfen in dieser Hinsicht als fehlerfrei annehmen, indem die Künstler die Mittel besitzen, die Kreisform mit der grössten Schärfe hervorzubringen.

Das Instrument ist zwischen zwei aus Granit gehauenen Pfeilern von 70 Engl. Zoll Höhe, 24,5 Zoll Breite und 15 Zoll Dicke aufgestellt. Der östliche trägt den Gradbogen, der westliche ist durchbohrt und an seiner Rückseite ist ein Loch eingehauen, in welchem das Licht, ganz vor dem Luftzuge gesichert, steht. Jeder dieser Pfeiler ruht, ohne wesentliche Verbindung, durch seine eigene Schwere auf einem sehr grossen Granitblocke von horizontaler Oberfläche, welche beide durch tief unter dem Fussboden befindliches Mauerwerk mit einander verbunden sind.

Man hätte von dieser Aufstellung des Instruments absolute Unveränderlichkeit erwarten sollen. Dennoch findet diese nicht statt und das Instrument ist, wie mau in dem Tagebuche sehen wird, kleinen Veränderungen, vorzüglich im Sinne des Azimuths, unterworfen. Ueber die Ursache dieser Veränderung wage ich noch keine Muthmassung; in dem verflorbenen Jahre schien sie theils gleichförmig nach Osten zu gehen, theils von der Temperatur abhängig zu sein. Es ist vorauszusetzen, dass sich wenigstens der erste Theil mit der Zeit verlieren wird. Bei den Prüfungen des Instruments habe ich nie die Angabe der gefundenen Abweichungen versäumt und ihre Grösse durch häufige Beobachtungen des Polarsterns auszumitteln gesucht. Dadurch glaube ich den Einfluss dieser kleinen Veränderlichkeit auf die Beobachtungen unschädlich gemacht zu haben.

Am Anfange der Beobachtungen war noch kein Meridianzeichen vorhanden. Ein vorläufiges wurde am 3. März gesetzt, und dieses wurde bis zum 25. October benutzt. Nach sehr häufigen Beobachtungen des Polarsterns stand es 6',0 westlich vom Meridiane. Das bleibende Meridianzeichen wurde am 28. October vollendet und dem Meridiane näher gebracht; ob es aber im Meridiane selbst stand, liess sich nach den wenigen späteren Beobachtungen im J. 1814 noch nicht mit Sicherheit entscheiden. Dieses Zeichen ist eine in 1113 R. Ruthen Entfernung von Feldsteinen erbaute abgestumpfte Pyramide von 6 Fuss Höhe, die oben mit einer Steinplatte belegt ist, auf welcher ein Parallelepipedum von Granit von 30 Zoll Höhe und 18 Zoll Breite ruht; unten ist es schwarz und oben weiss angestrichen, wodurch es sich im Fernrohre, sowohl im Sommer, als im Winter auf dem beschneieten Boden, deutlich projectirt. Es erscheint im Fernrohre unter

einer Breite von $23^{\circ}4'$, deren Halbiring durch den Meridianfaden des Fernrohrs sehr genau beobachtet werden kann. Das Parallelepipedum stand anfangs frei auf der Steinplatte; nach der völligen Bestimmung des Meridians wurde es im J. 1815 noch $3^{\circ}53'$ östlicher geschoben.

Die Uhr, von RERSOLD verfertigt, hat eine Compensation von Zink und Stahl, einen Haken von Achat und steht, vollkommen frei von ihrem Gehäuse, an einem Granitpfeiler von 81 Zoll Höhe, 19,5 Zoll Breite und 15,5 Zoll Dicke. Sie ist so gestellt, dass man sie sowohl bei dem Mittagsfernrohre als bei dem Kreise sehen und hören kann. Die Regelmässigkeit ihres Ganges geht aus den Beobachtungen selbst hervor. Indessen wurde in diesem Jahre [1814] ihr Gang noch durch einige ihr nachtheilige Umstände gestört. Sie hatte bei ihrer Reinigung vor den Beobachtungen in den Zapfenbüchern Oel erhalten, welches sich so verdickte, dass sie am 22. Juni stehen blieb. Sie wurde dazu gereinigt und wieder aufgestellt. Da aber auch das neue Oel nicht besser war als das vorige und ich am 19. Juli besseres erhielt, so wurde die Uhr zum zweiten Male abgenommen. Nun ging sie ununterbrochen bis zum 19. October, wo sie plötzlich stehen blieb. Ich schrieb dieses auf etwas Rost, der sich an der Pendelstange da angelegt hatte, wo die Gabel sie berührt, nahm diesen Rost weg und brachte sie wieder in den Gang. Allein am 19. December zeigte sich wieder eine hörbare Reibung in der Uhr. Da sie selbst in der abgenommenen Uhr noch stattfand, so konnte der am 19. October vermuthete Grund nicht der wahre sein; indessen wurde dieser bald entdeckt, indem es sich fand, dass der eine Zahn des Hakens nicht fest aufgeschoben war, dadurch sich (wahrscheinlich bei der Reinigung am 19. Juli) dem Steigrade genähert hatte und nun, durch einen zu starken Eingriff, die Reibung verursachte. Dieser Fehler wurde so gut es möglich war verbessert. Schnelle Veränderungen des Ganges der Uhr findet man, trotz dieser nachtheiligen Umstände, in den Beobachtungen nicht; allein sie scheint bei zunehmender Wärme etwas langsamer zu gehen. Doch müssen erst fernere Beobachtungen des eine lange Zeit hindurch ungestörten Ganges hierüber entscheiden.

Der Kreis von CARY verdient eine umständlichere Beschreibung, da nur diese die Data zur richtigen Beurtheilung der Beobachtungen geben kann. Ein horizontaler Ring, mit drei Fusschrauben versehen und durch drei Radien sehr fest verbunden, trägt das Instrument und ruht auf einer Granitsäule von 38 Engl. Zoll

Höhe und 30,5 Zoll Durchmesser. Dieser Ring trägt durch sechs starke Säulen von 8 Zoll Höhe einen ähnlichen, durch sechs Radien sehr solide verbundenen horizontalen Ring. Die Mittelpunkte beider Ringe sind durch einen umgekehrten Kegel verbunden, in welchem sich die verticale Drehungsaxe des Instruments befindet. Unmittelbar über der Ebene des oberen Ringes befindet sich der Azimuthalkreis von 24 Zoll Durchmesser; er schleift mit seinem Rande auf den sechs ihn tragenden Säulen und ist durch zwei gegeneinander überstehende Nonien von $10''$ zu $10''$ getheilt. Auf der aus vollem Messing sehr stark gearbeiteten Ebene dieses Kreises stehen vier senkrechte Säulen von 38 Zoll Höhe, deren unveränderlicher Stand durch gegen die Grundfläche angebrachte Stützen und durch eine starke Verbindung am oberen Ende gesichert wird. Unter sich sind diese Säulen paarweis durch mehrere kreuzweis gelegte Querstangen und durch die Zapfenlager des Verticalkreises verbunden. Diese Lager befinden sich 20 Zoll über dem Azimuthalkreis, in der Mitte zwischen zwei gegenüberstehenden Säulenpaaren, und bestehen aus zwei in einem rechten Winkel zusammenstossenden Ebenen.

Der Verticalkreis selbst besteht aus zwei parallelen, 2,7 Zoll von einander entfernten Ringen, deren Ebenen durch 18 starke Stangen mit einander verbunden sind. Acht conische Speichen verbinden diese Kreise mit der Axe, welche aus zwei mit ihren Grundflächen zusammenstossenden Kegeln besteht, 20 Zoll lang ist und an beiden Enden cylindrische Zapfen von 0,8 Zoll Durchmesser hat, mit welchen sie in den vorerwähnten Lagern ruht. Durch die Axe und zwischen den beiden Kreisen durch geht das unwandelbar mit ihnen verbundene Fernrohr von 33 Zoll Länge und 2 Zoll Oeffnung, im Brennpunkte mit fünf verticalen und drei horizontalen Fäden versehen und von vorzüglicher optischer Schönheit. Es vergrössert 40 Mal, hat ausser dem gewöhnlichen ein mit einem Spiegel versehenes Ocular zur Beobachtung der dem Zenith nahe stehenden Sterne und so viel Lichtstärke, dass es zur Beobachtung der Pallas, zur Zeit ihrer letzten Opposition, hinreichte. Bei Tage zeigt es die Sterne nur wenig schwächer als das Mittagsfernrohr; bei Nacht hat es mir aber bei den äusserst kleinen und niedrig stehenden Sternen, die zum Maass der Lichtstärke des Mittagsfernrohrs angeführt wurden, seinen Dienst versagt.

Auf dem einen dieser Kreise ist die Theilung von $5'$ zu $5'$ durch sehr saubere und feine Striche aufgetragen; ihr Radius ist 12,4 Zoll. Die Unterabtheilungen werden durch zwei diametral gegeneinander über-

stehende Mikroskope angegeben. Diese Mikroskope befinden sich in der Mitte zwischen dem einen Säulenpaare: also vertical übereinander; sie haben in ihren Brennpunkten zwei sich in einem sehr spitzen Winkel durchschneidende Fäden, die mit vortrefflichen Mikrometerschrauben bewegt werden, und die mit der äussersten Schärfe über die Theilstriche des Kreises gebracht werden können. Ein einigermaßen geübter Beobachter kann hierin nicht leicht eine Secunde zweifelhaft sein; auf den Zeigerscheiben der Schrauben kann man Zehnthelle der Secunden ablesen. Diese Mikrometerschrauben sind durch die bekannte Ramsden'sche Einrichtung von allem toten Gange frei. Ihre Gänge sind mit solcher Regelmässigkeit geschnitten, dass das Intervall zwischen zwei Theilstrichen des Kreises an jeder Stelle der Schrauben immer vollkommen gleich erscheint. Da überdies die Mikroskope so eingerichtet sind, dass der Beobachter durch Näherung und Entfernung der Objectivlinse die genaueste Uebereinstimmung von fünf Schraubenrevolutionen mit einem Intervalle auf dem Kreise erhalten kann, und da ich auf diese Berichtigung vielen Fleiss verwandte, so glaube ich mit Zuversicht behaupten zu können, dass durch die Schrauben nie ein merklicher Fehler bei den Beobachtungen entstehen kann. Diese Art Winkel zu beobachten scheint sehr grosse Vorzüge vor jeder anderen zu haben. Ich zweifle, ob es möglich ist, sich durch einen Nonius bei einem Kreise von diesem Halbmesser der Ablesung bis auf eine Secunde zu versichern, welches bei dieser Einrichtung gar keine Schwierigkeit hat. Auch wird das Resultat noch dadurch zuverlässiger, wenn man immer die beiden Theilstriche beobachtet, zwischen welchen der Nullpunkt des Mikroskops sich befindet. Diese Beobachtungsart ist ohne Ausnahme die meinige.

Die Zahlen sind auf den eingetheilten Rand so aufgetragen, dass die diametral einander gegenüber stehenden sich zu 90° ergänzen. Der erste Quadrant, der am untern durch *A* bezeichneten Mikroskope die Zenithdistanzen angibt, geht von 0° bis 90° ; der zweite zeigt am demselben Mikroskope die Distanzen vom Nadir von 90° bis 0° ; der dritte, dem ersten entgegengesetzte, geht von 90° bis 0° ; der vierte endlich, den zweiten ergänzend und demnach die Höhen in der dem ersten entgegengesetzten Hälfte des Verticals angehend, ist von 0° bis 90° gezählt, wo er mit 0° des ersten Quadranten zusammenstösst. Für Gegenstände über dem Horizonte beobachtet man daher am Mikroskope *A* nur den ersten und vierten Quadranten; und am oberen, durch *B* bezeichneten, nur den zweiten und dritten. Der

Künstler hat die Zahlen auf die angezeigte Weise aufgetragen, damit die Revolutionen der Mikrometerschrauben immer nach derselben Richtung gezählt werden können.

Die Erleuchtung der Fäden im Fernrohr geschieht durch die Axe; die der Theilungen durch vor den Mikroskopen angebrachte Spiegel.

Zur Stellung des Instruments dient ein Niveau und ein Bleiloth; jenes ist auf dem horizontalen Kreise befestigt, dieses hängt frei in einer der verticalen Säulen parallelen Röhre von 38 Zoll Länge, und wird mittelst zweier Mikroskope nach RAMSDEN'S Erfindung beobachtet. Die feste Verbindung dieser Mikroskope mit demselben Säulenpaare, zwischen welchen sich die Mikrometernikroskope befinden, lässt erwarten, dass die durch die Nullpunkte der letzten gezogene gerade Linie ihre Lage gegen die Lothlinie unverändert beibehalten, oder dass der Collimationsfehler keinen merklichen Veränderungen unterworfen sein wird. Aus diesem Grunde, und weil die Lothlinie sich mit der äussersten Schärfe beobachten lässt, wurde bei den Beobachtungen nur von dieser und nicht von dem Niveau Gebrauch gemacht.

Um die Drehungsaxe des Verticalkreises horizontal zu stellen, sind an diese Axe zwei Arme befestigt, die an ihren Enden der Axe parallele Cylinder haben, an welche das Niveau, mittelst der an diesem befindlichen umgekehrten Zapfenlager, angehängt wird. Durch zwei Correctionsschrauben lässt sich der eine dieser Cylinder so stellen, dass die durch beider Mittelpunkte gehende Drehungsaxe der wahren Drehungsaxe des Verticalkreises parallel ist, welches man aus dem in allen Lagen des Kreises gleichen Stande des Niveaus erkennt; eine Umkehrung des Niveaus zeigt dann, ob diese der Axe parallele Linie, und damit die Axe selbst, horizontal ist; das Fehlende wird durch eine, das eine Zapfenlager in verticaler Richtung bewegendes Schraube verbessert. Diese Art das Niveau anzubringen hat den Vorzug, dass man dadurch die wahre Drehungsaxe, unabhängig von der Voraussetzung der gleichen Dicke der Zapfen, nivellirt. Allein sie kann nur dann vollkommene Sicherheit gewähren, wenn die Cylinder, an welche das Niveau angehängt wird, wirklich parallele Axen haben, welches schwer zu erreichen sein möchte und auch bei diesem Kreise nicht in aller Schärfe stattfindend scheint. Diesen Fehler, der übrigens auf die Höhenmessungen keinen merklichen Einfluss haben kann, würde man leicht durch eine andere Einrichtung des Niveaus verbessern können; dann würde der Kreis mit Vortheil als Mittagsfernrohr gebraucht werden können. Allein ihn als Azimuthalinstrument zu gebrauchen, würde

nicht vortheilhaft sein, da der Azimuthalkreis nicht die Feinheit der Theilungen des Verticalkreises und zur Ablesung nur Nonien hat.

Alle Theile dieses Instruments sind in genauesten Gleichgewichte, wodurch seine Bewegungen äusserst sanft und sicher werden. Allein der Verticalkreis hat weder Gegengewichte noch Federn zur Verminderung der auf den Lagern ruhenden Last. Ohne Zweifel hat der Künstler, dessen Einsicht und Sorgfalt sich an diesem Meisterwerke überall zeigt, zu der Weglassung der Federn seinen Grund gehabt; allein es wird dadurch, bei der bedeutenden Schwere des Verticalkreises, eine merkliche Reibung in den Zapfen erzeugt, die diese wirklich ein wenig angegriffen zu haben scheint. Um diesem Uebel Einhalt zu thun, habe ich die Zapfen mit in einem ätherischen Oele aufgelösten Wachs bestrichen und nachher diese Auflösung wieder abgerieben, sodass nur ein äusserst dünner, sich durch das Gesicht nicht mehr, wölser aber durch das Gefühl ein wenig verrathender Ueberzug zurückblieb. Dadurch ist alle merkliche Reibung verschwunden; der Kreis dreht sich mit der grössten Leichtigkeit und die Zapfen erhalten sich auf das Vollkommenste. *)

*) [Abth. 2 der Kön. Beob. p. V. ändert sich anschliessend noch:]

Uebrigens bemerke ich noch, dass die obere Verbindung der Säulen, zwischen welchen der Kreis sich dreht, in der Nähe des Scheitelpunkts, auf einer Seite desselben, das Licht der Sterne mehr oder weniger schwächt, indem sie einen Theil des Objectivs bedeckt. Wenn der eingetheilte Rand des Kreises nach Westen gewandt ist, so findet die grösste Verdeckung $6^{\circ} 40'$ südlich, wenn er nach Osten gewandt ist, eben so weit nördlich vom Scheitelpunkt statt. Da die geringste Breite der sie verursachenden Verbindung = 1,8 Zoll, der Durchmesser des Objectivs aber nur 2,0 Zoll ist, so ist, bei der angegebenen Zenithdistanz, die Verdunkelung fast vollkommen und kleinere Sterne verschwinden dann ganz. Hieraus erklärt es sich, warum einige Sterne nur einseitig beobachtet sind. Aus derselben Ursache würde, bis zu der Entfernung von 5° von dem angegebenen Punkte, ausser der durch die Lichtschwäche erzeugten Schwierigkeit der Beobachtungen, noch ein Fehler entstehen, wenn entweder das Objectivglas nicht ganz vollkommen gearbeitet, oder die Ablenkung der Lichtstrahlen merklich wäre. Obgleich ich keinen bestimmten Grund habe, das eine oder andere zu vermuthen, so halte ich doch diese Verdeckung des Objectivs für die Ursache einiger grösserer Unregelmässigkeiten, die sich, namentlich bei kleinen Sternen, in der Nähe des Scheitelpunkts oft zeigen.

Eine vollständige Bestimmung mit diesem Kreise setzt nun voraus, dass eine Zenithdistanz an beiden Mikroskopen abgelesen, und dass nach einer Drehung des Kreises von 180° die Beobachtung wiederholt wird. Durch die diametralen Ablesungen wird die Beobachtung frei von der Excentricität und auch von einer etwaigen Abweichung der Figur der Zapfen von der cylindrischen. Denn indem der Einfluss beider Fehler nur darin besteht, dass der Mittelpunkt des eingetheilten Kreises nicht in der Verticalebene liegt, die durch die Punkte geht, in welchen die Lager bildenden Ebenen zusammenstossen, so ist er an beiden Mikroskopen von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Zeichen, so dass er sich in dem arithmetischen Mittel vernichtet. Wenn der Kreis daher nur als Höheninstrument gebraucht werden soll, so ist es, bei der Ablesung beider Mikroskope, durchaus gleichgültig, ob die Zapfen Cylinder bilden oder nicht.

Indessen ist es interessant und nothwendig, über die Figur der Zapfen eine genaue Untersuchung anzustellen, indem man ohne diese weder die Uebereinstimmung beider Ablesungen beurtheilen, noch aus

$$\begin{aligned} z' &= Z + A + \psi(180^\circ + z) + \varphi(180^\circ + z) \\ h' &= H + B - \psi(x) + \varphi(180^\circ + z) \end{aligned}$$

$$Z + H - 90^\circ = -(A + B) + \psi(x) - \psi(180^\circ + z) - 2\varphi(180^\circ + z).$$

In der halben Summe dieser Gleichungen verschwinden die Fehler der Theilstriche und man hat

$$\frac{1}{2} [Z + H - 90^\circ] + \frac{1}{2} [Z' + H' - 90^\circ] = -(A + B) - \varphi(x) - \varphi(180^\circ + z).$$

Findet man nun an allen Punkten des Kreises das erste Glied dieser Gleichung von genau gleicher Grösse, so ist damit erwiesen, dass $\varphi(x) + \varphi(180^\circ + z)$ entweder 0 oder constant ist; das Gegentheil beweiset die Abweichung der Zapfen von der kreis-cylindrischen Figur.

$$V = 0 = -\alpha + u + u' \sin \left(U \right) + u'' \sin \left(U'' \right) + \text{etc.} \dots$$

$$V' = 0 = -\alpha' + u + u' \sin \left(\frac{2\pi}{n} + U \right) + u'' \sin \left(\frac{4\pi}{n} + U'' \right) + \text{etc.} \dots$$

$$V'' = 0 = -\alpha'' + u + u' \sin \left(2 \cdot \frac{2\pi}{n} + U \right) + u'' \sin \left(2 \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) + \text{etc.} \dots$$

$$V''' = 0 = -\alpha''' + u + u' \sin \left(3 \cdot \frac{2\pi}{n} + U \right) + u'' \sin \left(3 \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) + \text{etc.} \dots$$

.....

$$V^{(n-1)} = 0 = -\alpha^{(n-1)} + u + u' \sin \left(n - 1 \cdot \frac{2\pi}{n} + U \right) + u'' \sin \left(n - 1 \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) + \text{etc.} \dots$$

$\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n-1)}$ sind hier beobachtete Quantitäten, aus welchen die unbekanntem Grössen u, u', u'', \dots und die Winkel U, U'', U''', \dots bestimmt werden sollen. Die Anzahl der Gleichungen nehme ich so gross oder grösser als die der Unbekanntem; fände dieser Fall

unvollständigen Beobachtungen Nutzen ziehen kann. Man hat hierzu ein Mittel durch die diametralen Ablesungen selbst. Nennt man nämlich das, was man zu der am Mikroskope A beobachteten Zenithdistanz Z hinzufügen muss, um sie von diesem Fehler zu befreien $\varphi(x)$; die Verbesserung des Fehlers des Theilstrichs, die unter der Annahme stattfindet, dass der Mittelpunkt des Kreises der Punkt ist, durch den die die Mittelpunkte der Zapfen verbindende gerade Linie geht, $\psi(x)$; die Abweichung des unteren Mikroskops von der durch die Lager gelegten Verticalebene A : so wird man die wahre Zenithdistanz aus dem Ausdrucke

$$z = Z + A + \psi(x) + \varphi(x)$$

erhalten; und eben so aus der Beobachtung am oberen Mikroskope die wahre Höhe

$$h = H + B - \psi(x + 180^\circ) + \varphi(x).$$

Beide ergänzen sich zu 90° ; man hat daher

$$Z + H - 90^\circ = -(A + B) - \psi(x) + \psi(180^\circ + z) - 2\varphi(x).$$

Dreht man nun den Kreis, bis der vorher unter dem unteren Mikroskope befindliche Punkt sehr nahe unter das obere kömmt, so hat man ebenso

Ehe ich die nähere Untersuchung dieses und der übrigen Fehler des Kreises mittheile, erlaube ich mir eine Abschweifung über die Auflösung einer häufig in der praktischen Astronomie vorkommenden Classe von Gleichungen, die auch hier ihre Anwendung finden wird. Diese Gleichungen sind folgende:

ursprünglich nicht statt, so würden sich die Gleichungen doch auf ihn reduciren, indem sich die höheren Glieder mit den niedrigeren vereinigen würden. Man würde dann statt $u' \sin U$

und statt $u' \cos U''$

$$u' \sin U'' - n^{(4n+1)} \sin U^{(4n+1)} + n^{(n+1)} \sin U^{(n+1)} - \text{etc.} \dots$$

$$u' \cos U'' - n^{(4n+1)} \cos U^{(4n+1)} + n^{(n+1)} \cos U^{(n+1)} - \text{etc.} \dots$$

haben, und eben so für $u'' \sin U''$, $u'' \cos U''$, u. s. w. — Um die Auflösung durch nichts zu beschränken, verstehe ich also unter $u' \sin U''$, $u' \cos U''$ u. s. w. die Summen aller mit abwechselnden Zeichen genommenen Glieder dieser Form, deren Index immer um $\frac{1}{2}n$ wächst. Ist n eine ungerade Zahl, so fallen die negativen Glieder von selbst weg.

Bekanntlich sind die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten die, welche die Summe der Quadrate dieser Gleichungen so klein als möglich machen. Man hat daher durch Differentirungen dieser Summe in Beziehung auf jede der Unbekannten

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma V^{(m)} \\ 0 &= \Sigma V^{(m)} \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U' \right) \\ 0 &= \Sigma V^{(m)} \cos \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U' \right) \\ 0 &= \Sigma V^{(m)} \sin \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) \\ 0 &= \Sigma V^{(m)} \cos \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) \end{aligned}$$

u. s. w.

die Summen von $m=0$ bis $m=n-1$ genommen. Diese Summen erhalten aber einen sehr einfachen Ausdruck, indem im Allgemeinen

$$0 = \Sigma \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U^{(a)} \right) \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U^{(a)} \right)$$

$$0 = \Sigma \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U^{(a)} \right) \cos \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U^{(a)} \right)$$

Der erste Satz leidet eine Ausnahme, wenn a und a' gleich, oder um irgend ein Vielfaches von $\frac{1}{2}n$ verschieden sind; da aber nur die erste Ausnahme stattfindet, kann man, wie es oben gefordert wurde, die höheren Glieder mit den niedrigeren vereinigt und für $a=a'$ die erste Summe sich in $\frac{1}{2}n$ verwandelt, so verwandelt sich die letzten Gleichungen in folgende:

$$\begin{aligned} 0 &= -\Sigma \alpha^{(m)} + n u \\ 0 &= -\Sigma \alpha^{(m)} \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U' \right) + \frac{n}{2} u' \\ 0 &= -\Sigma \alpha^{(m)} \cos \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} + U' \right) \\ 0 &= -\Sigma \alpha^{(m)} \sin \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) + \frac{n}{2} u'' \\ 0 &= -\Sigma \alpha^{(m)} \cos \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} + U'' \right) \end{aligned}$$

u. s. w.

Bessel's Abhandlungen. 2. Bd.

woraus man, durch die Multiplication mit den Sinussen und Cosinussen von U' , U'' , U''' , ... erhält

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{n} \Sigma \alpha^{(m)} \\ u' \sin U' &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha^{(m)} \cos \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \\ u' \cos U' &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha^{(m)} \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \\ u'' \sin U'' &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha^{(m)} \cos \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} \right) \\ u'' \cos U'' &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha^{(m)} \sin \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

u. s. w.

Die aus dieser einfachen Operation folgenden Werthe der Unbekannten sind die wahrscheinlichsten, die man aus den Gleichungen entwickeln kann, wenn die Anzahl der Gleichungen grösser ist, als die dieser Unbekannten, die bestimmten, wenn beide gleich sind; unbestimmt, wenn mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind. Das letzte zeigt sich durch die oben bemerkte Vereinigung der Unbekannten. In Beziehung auf diese vereinigt Unbekannten sind die Gleichungen immer bestimmt.

Zur Bestimmung der Figur der Zapfen wurden an dem Kreise folgende Ablesungen gemacht; sie gründen sich auf zwei an verschiedenen Tagen beobachtete ganze Revolutionen des Kreises, die in keiner Angabe mehr als 3'' von einander abwichen.

	z	$Z+H-90^\circ$	z	$Z+H-90^\circ$	Halbe Summe.		
I. Quadrant.	0°	0°	+ 21',4	90	180°	+ 53',3	... + 37',35
	10	10	+ 18,5	80	190	+ 54,5	... + 36,5
	20	20	+ 20,7	70	200	+ 53,0	... + 36,85
	30	30	+ 22,4	60	210	+ 50,6	... + 38,5
	40	40	+ 26,3	50	220	+ 46,0	... + 36,15
	50	50	+ 32,3	40	230	+ 40,1	... + 36,2
	60	60	+ 36,6	30	240	+ 33,7	... + 35,15
	70	70	+ 35,7	20	250	+ 37,1	... + 36,4
	80	80	+ 41,5	10	260	+ 33,3	... + 37,4
	90	90	+ 41,4	0	270	+ 34,7	... + 38,05
II. Quadrant.	90	100	+ 49,4	10	280	+ 26,7	... + 38,05
	70	110	+ 46,2	20	290	+ 32,2	... + 39,2
	60	120	+ 49,3	30	300	+ 31,4	... + 40,35
	50	130	+ 54,1	40	310	+ 23,9	... + 39,0
	40	140	+ 54,7	50	320	+ 24,4	... + 39,55
	30	150	+ 53,7	60	330	+ 23,9	... + 38,5
	20	160	+ 55,8	70	340	+ 20,1	... + 37,95
	10	170	+ 54,8	80	350	+ 17,6	... + 36,2

Hier zeigt sich offenbar eine merkliche Abweichung der Zapfen von der cylindrischen Figur, indem ein Unter-

schied von $5,2$ vorkömmt, der weit ausser den Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler liegt. Indem $\varphi(x)$ eine nach einer ganzen Revolution des Kreises in derselben Grösse und Ordnung wiederkehrende Function ist, so ist ihre allgemeinste Form

$$\varphi(x) = u' \sin(x + U') + u'' \sin(2x + U'') + u''' \sin(3x + U''') + \text{etc.} \dots$$

und folglich

$$\varphi(180^\circ + x) = -u' \sin(x + U') + u'' \sin(2x + U'') - u''' \sin(3x + U''') + \text{etc.} \dots$$

Die beobachtete Summe beider enthält also nur die geraden Glieder, und man hat die durch die Ablesungen herausgebrachten halben Summen

$$= -(A + B) - 2u'' \sin(2x + U'') - 2u'''' \sin(4x + U''''') - \text{etc.} \dots$$

woraus nach der gegebenen Auflösung folgt:

$$\begin{aligned} A + B &= -37,536 \\ u'' \sin U'' &= + 0,2172 \\ u'' \cos U'' &= + 0,8461 \\ u'''' \sin U'''' &= + 0,1245 \\ u'''' \cos U'''' &= - 0,2551 \end{aligned}$$

Man hat also

$$\frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(180^\circ + x) = + 0,8735 \sin(2x + 14^\circ 24') + 0,2839 \sin(4x + 153^\circ 59')$$

Das letzte Glied ist zu klein, um es nicht auch als aus den zufälligen Ablesungsfehlern entstanden annehmen zu können; über die wirkliche Existenz des ersten kann aber kein Zweifel sein. Selbst wenn man das zweite Glied vernachlässigt, ist die Uebereinstimmung der Formel mit den Beobachtungen sehr gross, wie die folgende Vergleichung zeigt:

x	Verbesserte halbe Summe = $-(A + B)$
0°	... + 37,52
10	... + 37,48
20	... + 38,27
30	... + 38,18
40	... + 37,89
50	... + 37,78
60	... + 36,39
70	... + 37,16
80	... + 37,58
90	... + 37,61
100	... + 37,07
110	... + 37,78
120	... + 38,67
130	... + 37,26
140	... + 37,95
150	... + 37,56
160	... + 37,19
170	... + 36,92

Wenn man nur den von $2x$ abhängigen Theil der Formel annimmt, so lässt er sich aus der elliptischen Figur der Zapfen oder eines von ihnen erklären. Da aber die Theorie eines Fehlers dieser Art noch nirgends entwickelt ist, so erlaube ich mir, hier seine Untersuchung beizubringen.

Man denke sich zwei gerade, in einem rechten Winkel zusammenstossende Linien, zwischen welchen sich eine Curve so dreht, dass sie die beiden Linien immer berührt; dieses wird der Fall der sich in ihren Lagern drehenden Zapfen sein. Man ziehe von dem Punkte, in welchem die beiden geraden Linien zusammenstossen (a), eine den rechten Winkel

halbirende Linie; nenne die senkrechten Abstände eines festen Punktes in der Ebene der Curve (den man ihren Mittelpunkt nennen kann) und der Punkte b und c , in welchen die Curve die geraden Linien berührt, von der den Winkel halbirenden Linie

$$\alpha, X, X';$$

die Abstände der Punkte, wo diese Senkrechten die erwähnte Linie treffen, von a

$$\beta, Y, Y';$$

ferner die Abscissen und Ordinaten der Punkte b und c , auf eine durch den Mittelpunkt der Curve gehende Axe bezogen und von diesem Mittelpunkte an gerechnet,

$$x, y; x', y';$$

endlich den Winkel, den die angenommene Axe der Curve mit der den rechten Winkel halbirenden Linie macht, v . Alsdann hat man

- 1) durch die Bedingung, dass die Punkte b und c den geraden Linien und der Curve gemeinschaftlich angehören, und dass, wegen des Winkels von 45° , $X = Y, -X' = Y'$ ist

$$\alpha + x \sin v - y \cos v = \beta + x \cos v + y \sin v \quad \dots (1)$$

$$-\alpha - x' \sin v + y' \cos v = \beta + x' \cos v + y' \sin v$$

- 2) durch die Bedingung, dass die beiden Schenkel des rechten Winkels Tangenten an die Curve sind

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(v - 45^\circ); \quad \frac{dy'}{dx'} = \text{tg}(v + 45^\circ) \quad \dots (2)$$

- 3) durch die Gleichung der Curve

$$y = f(x) \quad \dots \dots \dots (3)$$

Aus der Verbindung von (2) und (3) erhält man x, y, x', y' durch v ausgedrückt, und folglich aus (1) sowohl α als β durch denselben Winkel. Da nun α dasselbe ist, was oben durch $\varphi(x)$ bezeichnet wurde, so lösen diese Gleichungen die Aufgabe vollständig auf. Für den besondern Fall einer Ellipse, von deren grosser Axe man den Winkel v an rechnet, ist

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2); \quad y'^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x'^2);$$

woraus folgt

$$x = \frac{a}{r} \sin(v - 45^\circ); \quad y = -\frac{a(1 - ee)}{r} \cos(v - 45^\circ)$$

$$x' = -\frac{a}{r'} \sin(v + 45^\circ); \quad y' = \frac{a(1 - ee)}{r'} \cos(v + 45^\circ);$$

r und r' sind hier, der Kürze wegen, für

$$\sqrt{1 - ee \cos(v - 45^\circ)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - ee \cos(v + 45^\circ)^2}$$

gesetzt. Substituiert man diese Werthe in (1), so erhält man

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}(r' - r); \quad \beta = \frac{a}{\sqrt{2}}(r' + r)$$

woraus

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2(2 - ee)$$

oder die Gleichung eines Kreisbogens hervorgeht. Der Mittelpunkt der Ellipse bewegt sich also während der Drehung auf einem Kreisbogen, um den Mittelpunkt a mit dem Halbmesser $a\sqrt{2 - ee}$ beschrieben, dessen Sehne $= a\sqrt{2} \{1 - \sqrt{1 - ee}\}$ ist, und den er während einer ganzen Drehung zweimal vorwärts und zweimal rückwärts durchläuft. Dieser einfache geometrische Satz war, so viel ich weiss, früher nicht bekannt. Wenn man den rechten Winkel sich um die Ellipse drehen lässt, so ist sein geometrischer Ort ein um den Mittelpunkt der Ellipse mit dem angegebenen Halbmesser beschriebener Kreis.

Entwickelt man α und β nach den Potenzen der Excentricität, und vernachlässigt man die vierten und höheren, so hat man

$$\alpha = \frac{a}{2\sqrt{2}} ee \sin 2v; \quad \beta = a\sqrt{2} \{1 - \frac{1}{2} ee\}$$

woraus folgt, das die Ellipticität der Zapfen keinen merklichen Einfluss auf das Nivellement der Axe hat, allein ihren ganzen Einfluss in horizontaler Richtung zeigt. Diese Folgerung bleibt wahr, wenn beide Zapfen auch ungleich elliptisch sind und ihre grossen Axen in verschiedener Richtung haben. Wenn daher ein Kreis zwei Mikroskope in horizontaler Richtung hätte, so würde die Ellipticität der Axen sich durch nichts verathen und das Instrument würde in dieser Hinsicht als fehlerfrei betrachtet werden können; allein ein Gewinn würde daraus nicht entstehen, indem ein Fehler, dessen Einfluss man der Rechnung unterwerfen kann, aufhört ein Fehler zu sein.

Aus dieser Untersuchung folgt also, dass man alle Beobachtungen bis auf eine unbedeutende Kleinigkeit darstellen kann, wenn man die Zapfen, oder einen derselben, als elliptisch annimmt. In beiden Fällen ist $\varphi(x) = \varphi(180^\circ + x)$; in dem letzten, in welchem, falls die grossen Axen parallel sind, die Excentricität am grössten sein würde, würde

$$0,8735 = \frac{a}{R} \cdot \frac{ee}{4\sqrt{2}}$$

sein, woraus, indem $R = 20\%$, $a = 0,4\text{ Z.}$ ist, der Unterschied beider halben Axen des elliptischen Zapfens $= 0,00024\text{ Z.}$ folgen würde. Diese Ellipticität kann durch die geringe Abnutzung der Zapfen entstanden sein.

Nach dieser Untersuchung wurden die Verbesserungen aufgesucht, die man an die einzelnen diametralen Ablesungen anbringen muss, um sie an allen Punkten des Kreises in nahe Uebereinstimmung zu

bringen. Die angeführten Beobachtungen zeigen in den Werthen von $Z + H - 90^\circ$ eine sehr bedeutende Verschiedenheit; allein ihr Gang ist so regelmässig, dass man sie auf den ersten Blick als einer einfachen Form sehr nahe entsprechend erkennt. Nimmt man für $\psi(x)$ wieder die Form

$$u' \sin(x + U') + u'' \sin(2x + U'') + \text{etc.} \dots$$

$$\text{an, so sind die beobachteten Werthe von } Z + H - 90^\circ \\ = -(A+B) - 2u' \sin(x+U') - 2u'' \sin(3x+U'') - \text{etc.} \\ + 1,7470 \sin(2x + 14^\circ 24')$$

Die geraden Glieder verschwinden hier; die Natur der Sache bringt es mit sich, dass sie durch die diametralen Ablesungen nicht bestimmt werden können. Man erhält durch die Auflösung dieser Gleichungen, wobei es unnöthig ist, auf die von der Ellipticität der Zapfen herrührende Verbesserung Rücksicht zu nehmen, indem sie von selbst verschwindet,

$$A + B = -37,536$$

$$u' \sin U' = + 8,2242$$

$$u' \cos U' = - 2,5625$$

$$u'' \sin U'' = + 0,9944$$

$$u'' \cos U'' = + 0,3954$$

oder

$$\frac{1}{2} \psi(x) - \frac{1}{2} \psi(180^\circ + x) = 8,6134 \sin(x + 107^\circ 18') \\ + 1,0701 \sin(3x + 68^\circ 19').$$

Wenn der Kreis eine Excentricität hat, so entsteht daraus eine Verbesserung von der Form des ersten Gliedes; wenn man sie annimmt, so lassen sich also durch sie allein die diametralen Ablesungen in sehr nahe Uebereinstimmung bringen, indem das zweite Glied der Formel nur 1" beträgt. Wenn aber ein Instrument Theilungsfehler hat, so ist seine Excentricität eigentlich immer etwas Willkürliches; die Diameter schneiden sich dann nicht in einem Punkte, so dass es der Willkür überlassen bleibt, welchen Punkt man für den Mittelpunkt annehmen will. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass, wenn man das erste Glied der Formel als Excentricität annehmen will, es sich auf den Punkt bezieht, der der Schwerpunkt aus allen Durchschnittspunkten der beobachteten Diameter ist. Sammelt man nun alle gefundene Verbesserungen der halben Summe der an beiden Mikroskopen gemachten Ablesungen, so erhält man das, was man zu $\frac{1}{2}(Z + H - 90^\circ)$ hinzufügen muss, um seinen Werth allenthalben in nahe Uebereinstimmung zu bringen,

$$+ 8,6134 \sin(x + 107^\circ 18') + 0,8735 \sin(2x + 14^\circ 24') \\ + 1,0701 \sin(3x + 68^\circ 19') + 0,2839 \sin(4x + 153^\circ 50')$$

Ich habe eine doppelte Vergleichung der Reihe der gemachten Ablesungen mit dieser Formel angestellt; einmal mit der vollständigen Formel, dann mit den beiden ersten Gliedern allein, die die einzigen sind, wenn der Kreis nur eine Excentricität und elliptische Zapfen und weiter keine regelmässig fortschreitende Theilungsfehler besitzt.*)

Obgleich die Fehler bei der Vergleichung der vollständigen Formel geringer sind und sein müssen, als bei der Vergleichung der beiden ersten Glieder allein, so ist doch auch hier die Uebereinstimmung so gross, dass man berechtigt wird, die beiden letzten Glieder zu vernachlässigen und demnach den Kreis nur als excentrisch mit der Axe verbunden und die Zapfen dieser als elliptisch anzunehmen. Die halbe Summe der Theilungsfehler für die gegenüberstehenden Punkte ist dann 21 Mal kleiner als 1", 12 Mal zwischen 1" und 2"; zweimal zwischen 2" und 3", und einmal 3",¹⁹. Bei der vollständigen Formel fallen die Fehler 24 Mal zwischen 0 und 1", 10 Mal zwischen 1" und 2", und zweimal zwischen 2" und 2",¹⁸. Eine nach den beiden ersten Gliedern allein berechnete Tafel der Verbesserung der halben Summe der Angaben der beiden Mikroskope findet man am Ende dieser Einleitung.**)

Die geringen Fehler, die nach diesen Vergleichungen nur übrig bleiben, beweisen, dass der Kreis mit einer weit grösseren Regelmässigkeit getheilt ist, als man bei einem Halbmesser von 12,4 Zoll erwarten sollte. Man darf in der That in keinem Theilstriche einen Fehler von einem Fünftausendtheil-Zoll voraussetzen, um diese Regelmässigkeit vollkommen zu machen. Da überdies die Ablesungen selbst, trotz der Vollkommenheit der Mikroskope, nicht als absolut richtig angesehen werden können, so ist man berechtigt, die Unregelmässigkeit der Theilungen als noch geringer anzunehmen. Sieht man die gefundene Verbesserung als Excentricität an, so wird man veranlasst, die Regelmässigkeit der Theilungen für Richtigkeit anzunehmen; allein dieser Schluss würde, wie ich zeigen werde, sehr unrichtig sein. — Meine ferneren Untersuchungen des Kreises gebe ich hier in der Ordnung, wie sie aufeinander folgten; theils weil sie mir die Ueberzeugung gegeben haben, dass das Instrument in verschiedenen Theilen, deren Unrichtigkeit man fürchten könnte, so ist wie es sein soll; theils weil ich glaube, dass ihre Kenntniss anderen Beobachtern nicht uninteressant sein wird.

*) [Im Original folgt ausführliche Vergleichung.]

** [Hier weggelassen.]

Die ersten Beobachtungen mit dem Kreise verriethen Fehler, die weit grösser waren, als ich sie bei der Schönheit des Instruments erwartete. Statt dass die Beobachtungen bis auf wenige Sekunden hätten zusammenstimmen sollen, fanden sich oft Differenzen von 10 bis 12", die durch Sorgfalt in der Behandlung des Instruments nicht weggebracht werden konnten. Es war desto schwieriger, ihren wahren Grund zu entdecken, da mehrere Fehlerquellen sich vereinigten. Gleiche, an verschiedenen Tagen bei derselben Lage des Kreises gemessene Zenithdistanzen zeigten sogar solche Differenzen; hiervon konnte nur eine Veränderlichkeit des Collimationsfehlers die Ursache sein, deren vorzüglichster Grund sich auch bald fand. Das Gefäss für das Bleiloth war nur zum Theil mit Weingeist gefüllt, so dass das Gewicht nicht ganz von der Flüssigkeit bedeckt wurde. Dadurch musste nothwendig eine Concavität der Flüssigkeit zwischen den Wänden des Gefässes und des Gewichts entstehen, aus welcher eine Anziehung auf das Loth folgen musste, wenn es nämlich nicht genau in der Mitte des Gefässes hing. Dieses war wirklich der Fall, indem eine der Stützen des Kreises verhindert, das Gewicht genau in die Mitte des Gefässes zu bringen; überdies war das Gefäss nicht cylindrisch, sondern conisch, so dass das Verdunsten der Flüssigkeit die Entfernung der Ränder der Flüssigkeit vermindern und die Anziehung vermehren musste. Dass diese Ursache von merklicher Wirkung auf den Collimationsfehler war, zeigte ein directer darüber angestellter Versuch. Das Loth wurde zuerst, ohne alle Flüssigkeit im Gefässe, zum genauen Einspielen gebracht; dann goss ich etwas Weingeist in das Gefäss und beobachtete sogleich eine Abweichung; der Fehler veränderte sich durch das Hinzugiessen mehreren Weingeistes und verschwand nicht eher, als bis das Gefäss bis über das Gewicht gefüllt war, wo das Loth mit der grössten Schärfe zu seinem ursprünglichen Stande zurückkehrte. Da ich die Ursache dieses Fehlers nicht vor dem 10. Januar entdeckte, so verdienete die wenigen Beobachtungen, die mir vorher das Wetter anzustellen erlaubte, kein Vertrauen; in dem Tagebuche sind daher nur die früheren Beobachtungen aufgenommen, die durch die unmittelbare Drehung des Kreises von dem Einflusse dieses Fehlers frei sind [s. Bemerkung p. 31].

Indessen war durch die Bemerkung dieses Fehlers nur wenig gewonnen, denn noch immer zeigten sich sehr sonderbare Anomalien. Wenn ich eine Reihe von Zenithdistanzen beobachtet hatte und am nächsten Abend diese Beobachtungen mit dem umgewandten Kreise wiederholte, so hätte sich zwischen allen ein

gleicher Unterschied, der doppelte Collimationsfehler, zeigen sollen. Dieses war aber nicht der Fall.*)

Der Collimationsfehler wächst vom Zenith bis zum Horizonte; sein Gang ist zu regelmässig, um ihn den Beobachtungsfehlern zuschreiben zu können. Die Idee, die sich zuerst darbot, war, dass einzelne Theile des Instruments einer Biegung unterworfen sein möchten, während der Kreis von der verticalen Lage des Fernrohrs bis zu der horizontalen gedreht wird. Da aber der schöne solide Bau des ganzen Instruments und das genaue Gleichgewicht seiner Theile mir die Furcht gänzlich benehmen musste, dass der Fehler in dem Instrument selbst liegen könnte, glaubte ich, ihn nur in den Schrauben, die die Theile des Kreises verbinden, und die das Fadennetz halten, suchen zu dürfen. Diese wurden daher zu wiederholten Malen untersucht und so fest angeschrieben, als ohne Gefahr für das Instrument geschehen konnte. Der Fehler blieb aber immer derselbe; je eifriger ich seine Quelle zu entdecken suchte, desto sicherer wurde ich überzeugt, dass der Kreis an sich keine Fehler hat, und dass nur die Theilungen die Ursache dieser sonderbaren Erscheinung sein konnten.

Allein Theilungsfehler von dieser Art und Grösse schienen auch nicht wahrscheinlich, da die diametralen Ablösungen, indem sie mit der Annahme einer Excentricität vollkommen übereinstimmten, doch keine verrathen hatten. Um diese räthselhafte Erscheinung zu erklären, musste man annehmen, dass nicht nur die Theilungsfehler nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, sondern auch, dass sie, wenn man für den Mittelpunkt des Kreises den Punkt annimmt, dessen Excentricität oben bestimmt wurde, in den gegenüberstehenden Punkten gleiche Grösse und gleiches Zeichen haben; oder mit anderen Worten, dass die Theilungsfehler, auf den Drehungspunkt des Kreises bezogen, die Form $u' \sin(x+U') + u'' \sin(2x+U'')$ haben und dass ihre höheren Glieder unmerklich sind. Allein selbst dann würden die astronomischen Beobachtungen ihr Gesetz nicht vollständig haben bestimmen können, indem kein Grund vorhanden war, das Mittel aus beiden Zenithdistanzen als der Wahrheit entsprechend anzunehmen. Dennoch hing, bei dem Mangel an Uebereinstimmung unter den Beobachtungen, der aus der Construction des Kreises selbst nicht erklärt werden konnte, von der genauen Kenntnis der Theilungsfehler die Entscheidung der Frage ab, ob der Kreis

brauchbare Zenithdistanzen anzugeben im Stande ist oder nicht.

Die Wichtigkeit dieser Frage veranlasste mich, eine Prüfungsmethode schon jetzt anzuwenden, die ich früher entworfen hatte, um die Beobachtungen mit einem nichtwiederholenden Kreise von den Theilungsfehlern unabhängig zu machen. Zu diesem Zwecke liess ich ein sehr schönes, den Kreisarmikroskopen vollkommen ähnliches Mikroskop mit ähnlichen Kreuzfäden auf einen mit Stellschrauben versehenen Dreifuss setzen, so dass, wenn dieser auf den Azimuthalkreis des Instruments gestellt wird, der Durchschnittspunkt der Fäden auf irgend einen Theilstrich des Verticalkreises gerichtet werden kann. Bringt man nun den Nullpunkt des Kreises unter die Kreuzfäden dieses Mikroskops, welches ich der Kürze wegen immer durch O bezeichnen werde, während ein zu prüfender Theilstrich z sehr nahe unter dem Mikroskope A ist; beobachtet man dann an der Mikrometerschraube von A die Abweichung des Strichs z von dem Nullpunkte von A ; dreht man dann den Kreis, bis z unter O und $2z$ sehr nahe unter A ist, so wird der Strich z genau in der Mitte zwischen O und $2z$ liegen, wenn (nach Berechnung der von dem Fehler der Zapfen herrührenden Verbesserung) die Abweichung des Strichs $2z$ von A eben so gross ist, als vorher die Abweichung von z . Setzt man diese Operation fort, indem man successive $2z$, $3z$, $4z$, unter O bringt, so wird man den Theilungsfehler von z durch eine wahre Repetition bestimmen können. Ist z aber ein aliquoter Theil der ganzen Peripherie, so wird man auf den Nullpunkt zurückkommen, und demnach die Theilungsfehler ganz unabhängig von der Voraussetzung der Richtigkeit eines einzigen Theilstrichs erhalten; kann man nicht auf O zurückkommen, so setzt man bei diesem Verfahren immer nicht mehr voraus, als bei jeder anderen Repetition. Indem man durch dieses Verfahren eine Reihe von Theilungsfehlern eben so scharf bestimmen kann, als man mit den Mikroskopen selbst sehen kann, so scheint es einem nichtwiederholenden Kreise alle die Vorzüge zu geben, die ein wiederholender hat, ohne dass jener dadurch die ihm eigenthümlichen, für den täglichen Gebrauch auf einer Sternwarte sehr bedeutenden, aufopfert. Man wird dann bei heiterem Wetter eine grosse Menge von Beobachtungen sammeln, und zu gelegener Zeit die Repetitionen, wo es erforderlich scheint, machen können. Der Unterschied zwischen beiden Arten von Kreisen ist dann nicht mehr wesentlich: mit dem einen wiederholt man jede einzelne Beobachtung; mit dem andern bezieht man eine ganze Reihe von Beobachtungen auf

*) Im Original folgt Mittheilung zweier Beobachtungsreihen vom 12. und 13. April 1814.]

einen und denselben Theilstrich, und wiederholt diesen ein für allemal. Ich hoffe, von dem grossen Nutzen dieser Einrichtung durch Erfahrung überzeugt, dass die Künstler ihr Aufmerksamkeit schenken und die nicht-wiederholenden Kreise mit einem schieklischen Apparate dieser Art versehen werden. Aus diesem Grunde beschreibe ich den meinigen nicht im Einzelnen.

Die Berechnung der zur Prüfung der Theilungen dienenden Beobachtungen ist äusserst leicht, wenn man die Drehungsaxe des Kreises als seinen Mittelpunkt ansieht und wenn dieser feststeht, denn alsdann ergeben sich die Theilungsfehler unmittelbar. Eine Ellipticität der Zapfen macht aber eine kleine Verbesserung des beobachteten Winkels zwischen O und A nöthig, die bei dem hier beschriebenen Kreise

$$\pm (1 - \cos z) 0,8735 \sin (2Z + 14^\circ 24')$$

beträgt. Das obere Zeichen gilt, wenn das Mikroskop O auf eine grössere Zenithdistanz gerichtet ist als A ; das untere, wenn es sich auf der andern Seite befindet; Z bezeichnet den Punkt des Gradbogens, der A entspricht.

Auf diese Weise wurden die Theilungsfehler aller 22° , 18° und 15° von einander entfernter Punkte des Kreises untersucht; bei der ersten Reihe konnte man die Anhäufung der Beobachtungsfehler dadurch vermeiden, dass man immer Halbierungen machte.*)

Da sich hier in allen drei Reihen, noch mehr aber in den halben Summen der Theilungsfehler für 180° von einander entfernter Punkte eine grosse Regelmässigkeit zeigt, so kann man es nicht mehr bezweifeln, dass der Kreis wirklich einem bestimmten Gesetze folgende Theilungsfehler hat. Um sie näher zu bestimmen, wurden die Beobachtungen mit dem Ausdrucke

$$u + u' \sin (z + U') + u'' \sin (2z + U'') + \text{etc.} \dots$$

verglichen, wodurch sich aus den drei Reihen Resultate ergaben,**) welche mit den durch die diametralen Ablesungen erhaltenen die Summe aller zu der Bestimmung der Theilungsfehler des Kreises anwendbarer Gleichungen ergaben:

$$\begin{aligned} 60 u &= + 146,760 \\ 66 u' \sin U' &= - 529,400 \\ 66 u'' \cos U'' &= + 168,625 \\ 30 u''' \sin U''' &= + 205,284 \\ 30 u'''' \cos U'''' &= - 19,618 \end{aligned}$$

*) [Folgen die Theilungsfehler für die drei Reihen.]

**) [Die Einzelresultate aus den drei Reihen sind hier weggelassen.]

$$66 u''' \sin U''' = - 64,424$$

$$66 u'''' \cos U'''' = - 33,616$$

$$30 u'''' \sin U'''' = - 8,325$$

$$30 u'''' \cos U'''' = + 7,728$$

und hieraus den Ausdruck der Theilungsfehler, auf den Mittelpunkt der Axe bezogen und vom Nullpunkte der Theilung an gerechnet:

$$\begin{aligned} -\Psi(z) &= + 2,446 + 8,4182 \sin (z + 287^\circ 40') \\ &+ 6,8741 \sin (2z + 95^\circ 27\frac{1}{2}') \\ &+ 1,0396 \sin (3z + 249^\circ 52') \\ &+ 0,3786 \sin (4z + 227^\circ 8') \end{aligned}$$

Die ungeraden Glieder dieses Ausdrucks entsprechen äusserst nahe den Bestimmungen, die oben durch die diametralen Ablesungen allein erhalten wurden, und diese stimmen, wie dort gezeigt wurde, sehr nahe mit den Beobachtungen überein. Es ist daher, um zu zeigen, mit welcher Genauigkeit dieser Ausdruck mit den bestimmten Theilungsfehlern übereinkommt, nur nöthig, dass man die geraden Glieder, welche die einzigen sind, die auf die an beiden Mikroskopen beobachteten Zenithdistanzen Einfluss haben, mit der halben Summe der Fehler für diametrale Punkte vergleicht. Da aber das letzte Glied so klein ist, dass es die Uebereinstimmung nicht sehr vermehren kann, und da es überdies aus zufälligen Fehlern der Theilung oder Beobachtung entstanden sein kann, so habe ich es bei der Vergleichung weggelassen und nur den Ausdruck $+ 2,446 + 6,8741 \sin (2z + 95^\circ 27\frac{1}{2}')$ benutzt.***)

Die Uebereinstimmung ist dann so gross, dass an den 24 verschiedenen bestimmten Punkten nirgends ein Fehler der Zenithdistanz von $2''$ übrig bleibt; ohne diese Untersuchung würde man Fehler von $13,7$ gefunden haben. Die Ursachen, aus welchen diese, durch die Uebereinstimmung bewiesenen, stetig fortgehenden Fehler entstanden sein mögen, gehen eigentlich den Beobachter weniger an als den Künstler; doch bemerke ich, dass man die beiden merklicheren Glieder des Ausdrucks, das erste durch eine Excentricität, das andere durch eine Ellipticität des Kreises selbst erklären kann. Wäre nämlich der Kreis ursprünglich richtig getheilt gewesen, und hätte er dann, etwa durch zu starkes oder zu schwaches Anschrauben eines der Räder, seine vorher richtige Figur in eine elliptische verändert, so müsste daraus ein dem zweiten Gliede ganz ähnlicher Fehler entstanden sein. Diese Erklärung würde sich

***) [Im Original folgt Vergleichung der drei Reihen mit der Formel.]

direct prüfen lassen, wenn die concentrischen Kreise, zwischen welchen die Theilstriche gezogen sind, so fein und regelmässig wären wie diese; allein der Künstler hat sie, nach vollendeter Theilung, so stark gemacht, dass diese Prüfung unmöglich ist. Die genaue Uebereinstimmung der Formel mit den gemachten Bestimmungen lässt hoffen, dass, wenn eine beobachtete Zenithdistanz von den regelmässigen Theilungsfehlern befreit ist, selten ein zufälliger von 2" übrig bleiben wird. Mehr Genauigkeit kann man bei einem Radius von 12,4 Zoll schwerlich erwarten. — Die aus diesen Untersuchungen folgende Verbesserung der beobachteten Zenithdistanzen findet man in der unten folgenden [hier weggelassenen] Tafel von Grad zu Grad angebeben.

Das Mittel aus den in beiden Lagen des Kreises vollständig gemachten Beobachtungen einer Zenithdistanz erhält die Verbesserung

$$-u \cos U'' \sin 2z;$$

der daraus geschlossene Collimationsfehler die Verbesserung

$$u + u'' \sin U'' \cos 2z.$$

Bei dem Cary'schen Kreise betragen diese Ausdrücke $+0,654 \sin 2z$ und $+2,446 + 0,843 \cos 2z$; hier ist also die Verbesserung der vollständig beobachteten Zenithdistanzen nicht beträchtlich. Allein wenn U'' sehr klein oder sehr nahe $= 180^\circ$ wäre, so würde das Umgekehrte stattfinden; die vollständig beobachteten Z. D. würden dann eine sehr grosse Verbesserung bedürfen und die Collimationsfehler eine sehr geringe. Man würde in diesem Falle weder durch die astronomischen Beobachtungen, noch durch die diametralen Ablesungen einen Theilungsfehler entdecken, und doch würde sein Einfluss auf die Zenithdistanzen gerade dann am grössten sein.

Um zu zeigen, dass auch die astronomischen Beobachtungen mit den bestimmten Theilungsfehlern übereinkommen, würde man viele, nach der Wendung des Kreises wiederholte Beobachtungsreihen mit einander vergleichen müssen. Bei denen, die bisher verglichen worden, war die Uebereinstimmung immer so gut als man erwarten konnte; allein durch die Anführung vieler solcher Vergleichen würde hier der Raum unnötig verschwendet werden, da sie aus dem Tagebuche selbst leicht entlehnt werden können.*)

Es herrscht stets so viel Uebereinstimmung, als einmalige Beobachtungen, mit den zufälligen Fehlern

der Theilstriche behaftet, erwarten lassen; aller regelmässige Gang ist verschwunden, woraus man schliessen kann, dass die Theile des Instruments während der Drehung ihre gegenseitige Lage nicht verändern.

Durch diese Untersuchung ist der Kreis gewissermassen neu eingetheilt worden; ohne Zweifel ist dadurch für die Beobachtungen sehr viel gewonnen. Allein es zeigte sich noch ein Fehler des Kreises, der gehoben werden musste, wenn die Beobachtungen alles Zutrauen verdienen sollten, welches ein Instrument von dieser Grösse und Beschaffenheit gewähren kann. Der Collimationsfehler war nämlich nicht so beständig als man wünschen konnte; von einem Tage zum andern waren die Veränderungen oft merklich. Da aber alle Theile des Instruments auf das festeste und sicherste verbunden sind, und hierin eine Veränderung kaum möglich ist, so glaubte ich, diese in den Mikroskopröhren für das Bleiloth suchen zu müssen, die am wenigsten sicher unterstützt zu sein schienen.**)

Am 30. April wurde

** [Ueber die Veränderlichkeit des Collimationsfehlers (s. p. 28) schreibt BESSEL am 2. Febr. 1814 noch an OLSEN (Briefwechsel, I. p. 361):

..... Das Beobachten mit meinen Instrumenten macht mir Vergnügen, denn ich erhalte alle die Genauigkeit, die ich wünschen kann. Allein es gibt auch viele Dinge in der praktischen Astronomie, von welchen in unsern astronomischen Schriften nichts zu lesen ist. So stiess ich bei den Kreisbeobachtungen auf eine Schwierigkeit, die ohne Zweifel auf meine ersten Beobachtungen eine Unsicherheit geworfen hat, die sie entweder verlieren sollen, oder die mich veranlassen muss, den Kreis ganz zu verlassen; jedoch wird das erste der Fall sein. Es zeigte sich nämlich, dass der Collimationsfehler von einem Tage zum andern stark variierte; ich schrieb dies anfangs dem nicht hinlänglichen Festhalten der Mikroskopschraube zu und zog diese aufs festeste an; allein die Unsicherheit blieb. Nun glaube ich die wahre Ursache gefunden zu haben: das Gewicht hängt nämlich in einem Glase mit Weingeist, und zwar nicht ganz in der Mitte; von dem einen Rande des Glases ist es nur eine oder zwei Linien entfernt, und das Glas ist überdies ein abgekürzter Kegel, so dass es ihm unten noch näher kommt als oben. Ich fülle das Glas nicht ganz voll, und daraus musste nothwendig eine capillare Anziehung gegen die nähere Wand des Glases entstehen. Diese Folge musste, wenn sie Wirkung der angegebenen Ursache war, mit dieser verschwinden: ich brachte also bei ganz ausgeleertem Glase den Faden genau über seinen mikroskopischen

*) [Im Original folgen als Beispiel die Collimationsfehler vom 12. und 13. April mit und ohne Verbesserung.]

deshalb eine sichere Unterstützung angebracht, die der Absicht grösstentheils entsprach. Ganz unveränderlich war aber auch nachher der Collimationsfehler nicht, wovon ich die Ursache nicht errathen zu können gestehe. Indessen sind die Veränderungen gegenwärtig weit geringer; so dass ich, bei der nie versäumten directen Bestimmung des Collimationsfehlers, ihren nachtheiligen Einfluss nicht fürchten zu dürfen glaube.

Ausser diesen Instrumenten besitzt die Sternwarte gegenwärtig ein 7fussiges achromatisches Fernrohr von PETER DOLLOND; ein Aequatorialinstrument von DOLLOND, mit einem sehr schönen, obgleich nur 16zölligen Fernrohr und einem dasselbe Lob verdienenden Objectivmikrometer versehen; einen Cometensucher von NAIRNE und BLUNT; eine Uhr von KLINDWORTH; zwei Sextanten nebst Zubehör, und meteorologische Instrumente.

Die letzteren sind von einem vortrefflichen Berliner Künstler, SCHAFRINSKY, nach der Anordnung des Herrn Professor TRALLES gemacht, und verdienen eine nähere Beschreibung. Das Barometer ist nach der Erfindung von PRINS eingerichtet und in jeder Hinsicht vortrefflich ausgeführt. Da die auf der Scale gemessene Höhe des höchsten Punkts der Quecksilbersäule, die sich mit Sicherheit bis auf ein Hunderttheil einer Linie beobachten lässt, durch die Haarröhrenkraft niedriger

Punkt; dann goss ich etwas Flüssigkeit ein, und siehe da! der Faden zog sich sehr merklich nach der nähern Wand des Glases; mehr zugewogener Weingeist veränderte den Fehler, der bis auf 15" gehen mochte; allein bei ganz gefültem Glase kehrte das Loth in seine erste Lage zurück. Nun war mir Alles klar; das Verdunsten des Weingeistes hatte in dem conischen Gefässe die Anziehung vermehrt und dadurch kam die Veränderlichkeit. Obgleich ich nun noch nicht Gelegenheit gehabt habe, die Beständigkeit des Collimationsfehlers zu prüfen, so glaube ich doch, dass sie sich bewähren wird.]

ist als die wahre, so muss zu den beobachteten Höhen noch eine Verbesserung addirt werden, die ich = 0,503 Lin. finde. Dieses gründet sich auf den inneren Durchmesser der Röhre von 3 Lin., und auf die Versuche von CAVENDISH. Die Röhre wird dann an einer Scale von Messing, die sich mit der Temperatur frei ausdehnen und zusammenziehen kann, beobachtet; die Temperatur des Instruments an einem die Centesimal-scale habenden Thermometer. Wenn daher die Angabe dieses Thermometers = T , und wenn Quecksilber und Messing sich für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers um den 5412. und 47081. Theil ausdehnen, so ist die auf 10° C. = 50° F. = 8° R. reducirte wahre Barometerhöhe

$$= \{b + 0,503\} \frac{5412 + 10}{5412 + T} \cdot \frac{47081 + T}{47081 + 10}$$

Das Gefäss dieses Barometers ist 2,52 rheinl. Fuss über dem Fussboden der Sternwarte.

Das äussere Thermometer ist an der unteren nördlichen Durchschnittsklappe für den Kreis so befestigt, dass der Beobachter es vor sich hat, wenn er die Klappe öffnet. Sein Siedepunkt ist bei 28 Z. 4 L. Barometerstand bestimmt. Es hat Fahrenheit'sche und Reaumur'sche Scale; die erste wird immer beobachtet. Nimmt man für das Normalthermometer das an, dessen Siedepunkt bei einem Barometerstande von 0,76 Meter bestimmt ist, und die Veränderung des Siedepunkts für jeden Zoll des Barometerstandes = + 1,703 F., so erhält man den Stand des Normalthermometers, welcher dem Stande τ dieses Thermometers entspricht

$$= 32^{\circ} + (\tau - 32^{\circ}) \frac{180,44}{180} = \tau - 0,0078 + 0,00244 \cdot \tau$$

Dieses Thermometer hängt 7 rheinl. Fuss höher als der Fussboden der Sternwarte, und 8,5 Fuss höher als das sie umgebende Erdreich. Bis zum 19. Mai wurden andere meteorologische Instrumente gebraucht; nämlich ein Heberbarometer, dessen Temperatur durch ein Thermometer mit Fahrenheit'scher Scale beobachtet würde, und ein äusseres Thermometer mit Reaumur'scher Scale.

61. Königsberger Meridianzeichen. Correction der Culminationszeiten. [Bessel'sche Formel.]*)

(Königsberger Beobacht. 2. Abth., p. III.)

Die am 8. Juli 1815 vorgenommene Verrückung des Meridianzeichens beruht auf 19, durch die Beobachtung beider Culminationen des Polarsterns zwischen April 12 und Juni 30 angegebenen Bestimmungen seines früheren Fehlers: nämlich im Mittel 3',53 West [Schwankung zwischen 6',60W. und 0',72 O.]. Wenn bei diesen Bestimmungen der mittlere Faden nicht genau dem Meridianzeichen entsprach, oder wenn die Axe von der Horizontalität abwich, so wurden diese Fehler selten sogleich verbessert, immer aber wurde ihr Einfluss in Rechnung gebracht. Den ersten erhält man aus der Schätzung des Verhältnisses der über beide Ränder des Meridianfadens hervorragenden Theile des Zeichens, verbunden mit den bekannten Durchmessern des Zeichens = 23',4 und des Fadens = 6',0; wenn das erwähnte Verhältniss = $\alpha : \beta$ ist, so ist die aus dieser Schätzung hervorgehende Azimthalabweichung des Instruments vom Zeichen

$$15 \cdot \alpha = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cdot 87',7.$$

Der andere Fehler wurde durch die, aus den Bemerkungen auf S. IV. der ersten Abtheilung [s. Abh. 60, p. 20] sich ergebende Formel

$$15 \cdot b = \frac{3x + x'}{4} \cdot 3',27$$

bestimmt, wo x und x' die nach Westen positiv genommenen Entfernungen des Mittelpunkts der Luftblase vom Nullpunkte der Scale in der gewöhnlichen und umgewandten Lage der Axe bezeichnen. Wegen der bei den Angaben von x und x' oft vorkommenden Hundertheile einer Abtheilung der Scale bemerke ich, dass sie nur durch das arithmetische Mittel der Beobachtungen beider Endpunkte der Luftblase, in beiden Lagen der Wasserwaage, entstanden sind; die Sicherheit dieser Angaben selbst ist aber weit geringer, indem oft, unter mehreren gleichzeitigen Wiederholungen, Unterschiede vorkommen, die, selbst bei Anwendung der grössten Sorgfalt, einen Zweifel von 0,2 eines Theils oder mehr übrig lassen. Die Schätzung der Lage des Instruments gegen das Zeichen kann bei ruhiger Luft mit der Sicherheit einer halben, höchstens einer ganzen Secunde gemacht werden; doch darf nicht unerwähnt bleiben, dass sich auch hier, oft wäh-

rend einiger Minuten, eine Aenderung von 1" zeigte, ohne dass, ausser einer Azimthalrefraction, ein genügender Grund dafür angegeben werden könnte. Beiden Unsicherheiten schreibe ich es zu, dass die einzelnen Bestimmungen der Lage des Meridianzeichens oft mehr von einander abweichen, als ich vorher erwartete.

Die Verbesserung der Culminationszeiten wegen der Abweichung des Instruments vom Meridian sind nach der Formel

$$m + n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta$$

berechnet, und nicht mehr nach der früher angewandten, obgleich im Wesentlichen übereinstimmenden,

$$a \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \frac{c}{\cos \delta}.$$

Wenn man sich eine auf die wahre Drehungsaxe senkrechte Ebene denkt, so sind die, östlich positiv genommenen, in Bogensekunden ausgedrückten Entfernungen dieser Ebene vom Meridian, für den Aequator und den Pol = $15m$ und $15n$, und $15c$ ist der Winkel der Absehslinie mit dieser Ebene; δ bedeutet für obere Culminationen die Declination, für untere ihr Supplement. Zwischen m , n , a und b hat man die Relationen

$$m = a \sin \varphi + b \cos \varphi; \quad a = m \sin \varphi - n \cos \varphi$$

$$n = -a \cos \varphi + b \sin \varphi; \quad b = m \cos \varphi + n \sin \varphi$$

Die Collimation wurde immer durch die Umlegung der Axe geprüft und ihr etwaiger Fehler = $15 \cdot c$ durch Schätzung am Meridianzeichen bestimmt; n durch die Beobachtungen des Polarsterns und m durch dieses, verbunden entweder mit der Beobachtung der Wasserwaage oder der Schätzung am Meridianzeichen, nach den Formeln

$$m = -1,413 \cdot n + 1,731 \cdot b$$

$$m = 0,708 \cdot n + 1,225 \cdot a$$

Da die Beobachtung der Wasserwaage, namentlich in der kälteren Jahreszeit, unsicherer zu sein scheint als die Schätzung am Meridianzeichen, so wurde, nach der Berichtigung dieses Zeichens, die Axe seltener nivellirt. Indessen hat m nur auf die absolute Zeit, nicht auf die geraden Aufstellungen Einfluss; alles was man zu der Reduction der letzteren gebraucht, ergeben die astronomischen Beobachtungen allein, ohne Einmischung der Wasserwaage oder des Meridianzeichens, deren Fehler in dieser Beziehung ganz willkürlich bleiben.

*) [Auszug aus 116 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 18.]

62. Untersuchung des Reichenbach'schen Meridiankreises.*)

(Königsberger Beobacht. 6. Abth., p. III.)

Im Jahre 1819 erhielt die Sternwarte einen von REICHENBACH und ERTTEL verfertigten Meridiankreis, ein Instrument, welches geeignet ist, die Wissenschaft zu erweitern; sie verdankt diesen höchst schätzbaren Besitz der freigebigen Vorsorge des hohen königlichen Ministeriums, welches ihr die Mittel gewährte, sich den Forderungen der Wissenschaft stets angemessen zu erhalten. — Sie erfreute sich ferner einer gründlichen Verbesserung der Hauptuhr, welche REPSOLD selbst übernahm, und wodurch er diesem schönen Werke, welches zu den ausgezeichnetsten dieses vortrefflichen Künstlers gehört, eine Regelmässigkeit des Ganges gab, welche nichts zu wünschen übrig lässt.

Der Meridiankreis befindet sich an der Stelle des vorigen Mittagsfernrohres, welches in den Händen des Herrn Professor BRANDES in Breslau ist, und daher ferner der Astronomie nützlich werden wird. Die mit jenem Mittagsfernrohre und dem Cary'schen Kreise gemachten Beobachtungen wurden, wegen der Vorbereitungen zur Aufstellung des neuen Instruments, am 29. Mai 1819 unterbrochen; an diesem Tage wurden die Instrumente abgenommen, worauf die Pfeiler abgebrochen und statt ihrer neue, für den Meridiankreis eingerichtete gesetzt wurden. Allein die Ankunft desselben erfolgte nicht vor dem November, und obgleich derselbe bereits vier Wochen später aufgestellt werden konnte, so fehlten doch noch einige, später nachgelieferte, wesentliche Theile, so dass die ersten Durchgangszeiten nicht vor dem 22. Febr. 1820 und die ersten Entfernungen vom Polc nicht vor dem 6. März beobachtet werden konnten.

Den Beobachtungen mit dem Meridiankreise schicke ich eine kurze Beschreibung desselben, insofern sie nämlich zu ihrem Verständnisse nothwendig ist, voraus; eine genauere würde zwar Allen interessant sein, welche an der hohen, von REICHENBACH herbeigeführten Vervollkommnung der Kunst der astronomischen Instrumente Antheil nehmen, allein sie würde Abbildungen voraussetzen, und doch hinter der Beschreibung bedeutend zurückbleiben, welche wir von dem grossen Künstler selbst zu erwarten haben. Denn diese wird uns nicht nur den eigenthümlichen Gang des erfindungs-

reichen Künstlers, sondern auch die Gründe für das Ganze und jede Einzelheit desselben vor Augen legen.

Das Instrument steht zwischen zwei Pfeilern, so wie ein Mittagsfernrohr; seine horizontale Axe, von 32 Pariser Zoll Länge, endigt sich in stählerne Cylinder, welche in Lagern von Glockenmetall liegen; diese sind aus zwei in einem Winkel von 60° zusammenstossenden Ebenen gebildet und durch einen sich federnden Deckel verschlossen, wodurch die Axe des ganz genau ins Gleichgewicht gesetzten Instruments, gegen die drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, gleichförmig angedrückt wird. Das Gleichgewicht ist durch Hebel hervorgebracht, deren Unterlagen sich auf zwei Säulen befinden, welche auf den Pfeilern stehen; sie tragen das Instrument mittelst Reibungsrollen, welche dem Ganzen eine ausserordentlich leichte und sanfte Bewegung geben. Die Horizontalität der Axe erhält man durch eine schöne Wasserwage, deren äusserst zweckmässige Einrichtung die grösste Sicherheit im Nivelliren gewährt.

Auf dieser Axe sind die beiden Hälften des 5 Fuss langen Fernrohres angeschraubt, und mittelst eines Hebel-Apparats gegen Biegung gesichert; das Objectiv desselben hat 48,2 Linien Öffnung; die vier Oculare vergrössern 66, 107, 129, 182 mal und im Brennpunkte befinden sich fünf verticale und zwei horizontale, nur 8" von einander entfernte Fäden, deren Zwischenraum der zu beobachtende Gegenstand bissectirt.

Bis hierher ist das Instrument also ein vollständiges Mittagsfernrohr, welches noch das Ausgezeichnete hat, dass es mit gleicher Leichtigkeit in beiden Lagen der Axe angewandt werden kann. Seine Umlegung, welche geschehen muss, ohne dass das Gewicht des Instruments durch die Lager getragen wird, erhält man durch eine eben so einfache als sichere Vorrichtung, vermöge welcher die Gegengewichte ihre Wirkung bereits äussern, wenn die Zapfen noch nicht die Lager berühren.

An dem einen Ende der Axe ist ein gegossener Kreis von drei Fns Durchmesser befestigt, welcher auf der dem Pfeiler zugewandten Seite von 3 zu 3 Minuten auf Silber getheilt ist; ein Alhidadenkreis ist auf demselben Ende der Axe angebracht, so dass diese durch sein Centrum durchgeht und sich in der kegelförmigen Öffnung desselben dreht. Dieser Alhidaden-

*) [Auszug aus 150 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 367. II. 30. 41. 43 (O.). 124—127. 130. 144—148. 153. 156. 163—165. 179. 186. 207—210. — Vgl. Abb. 76 unter Stellarastronomie; s. auch 138 d. a. Verz.]

kreis hat vier Nonien, in einer Ebene mit dem Hauptkreise, vermöge welcher dieser von 2 zu 2" getheilt wird; er trägt ferner eine feste Wasserwage, mit einer in Pariser Linien getheilten Scale, wodurch man die Veränderungen seiner Lage gegen den Horizont abmessen kann. Ein sehr starker, von seinem Centro ausgehender Arm und eine Stellschraube an demselben befestigen ihn an den Pfeiler, so dass die Wasserwage stets denselben Stand zeigen würde, wenn das Drehen der durch den Alhidadenkreis gehenden Axe des Instruments, die Temperatur, oder eine Verrückung der Pfeiler, nicht kleine Veränderungen veranlassen könnten, deren wirkliches Stattfinden aber die Ablesung der Wasserwage bei jeder Beobachtung nothwendig macht. Ein Arm an dem andern Ende der Axe, mit einer Hülse, durch welche diese durchgeht, wird, vermittelt einer Schraube, fest an die Axe angeklammert, und dient dann zum feinen Einstellen des Fernrohrs. Durch diese Einrichtungen hat der Künstler erlangt, dass auf die Peripherien beider Kreise gar keine Kraft wirkt, wodurch sonst Aenderungen der Figur und bedeutende Fehler entstanden sind.

Die Beleuchtung der Fäden geschieht durch die Axe, welche auf dem dem Kreise entgegengesetzten Ende durchbohrt ist; die nothwendigen Abänderungen ihrer Stärke erlangt man durch eine an jedem Pfeiler angebrachte Zange, deren grössere oder geringere Öffnung eine grössere oder geringere Menge Licht durchgehen lässt. Eine bedeutende Verstärkung des Lichts ist, seit dem November 1820, aus conischen, inwendig polirten, metallenen Röhren hervorgegangen, welche, so wie früher auf den Sternwarten von München und Göttingen, in den Durchbohrungen der Pfeiler angebracht sind.

Bei der Aufstellung dieses höchst vollendeten Instruments habe ich Alles, was eine Beweglichkeit verursachen kann, insofern es mir aus meinen früheren Erfahrungen bekannt geworden ist, möglichst zu vermeiden gesucht; ich glaube diese Aufstellungsart näher beschreiben zu müssen, da sie sich als zweckmässig bewährt hat. — Eine von Osten nach Westen 10 Fuss lange und von Süden nach Norden 7 Fuss breite Vertiefung von 6 Fuss wurde mit einer Mauer umgeben; in der Mitte dieser Vertiefung wurde ein Parallelepipedum von 3½ Fuss Höhe, von zerschlagenen Feldsteinen, möglichst fest aufgemauert, so dass zwischen seinen verticalen Seiten und der umgebenden Mauer allenthalben ein leerer Raum von 6 Zoll Breite blieb. Auf dieses Parallelepipedum wurden die beiden Granitpfeiler, welche vorher das Mittagsfernrohr trugen (6 Fuss

lang, 2 Fuss breit, 15 Zoll dick) in der Richtung des Meridians aufgelegt und vermauert, so dass ihre Mittelpunkte 4 Fuss von einander abstehen; darauf eine sorgfältig behahene Steinplatte von 6 Fuss Länge, 4 Fuss Breite und 1 Fuss Dicke, welche durch Steinkitt und durch eiserne Klammern so fest als möglich mit den Pfeilern verbunden wurde. Die Oberfläche dieser Steinplatte ist 6 Zoll unter der Oberfläche des Fussbodens; auf ihr stehen, ohne weitere wesentliche Verbindung, die neuen Pfeiler von 6 Fuss 4 Zoll Höhe, 20,5 Zoll Breite und 15 Zoll Dicke, von sehr hartem, feinkörnigem und durehaus gleichförmigem Sandstein, welchem ich der letzten Eigenschaft wegen vor dem Granit den Vorzug geben zu müssen glaubte.

Diese Aufstellung ist dem Seitendrucke, welchen das gefrierende oder aufthauende Erdreich ausüben kann, nicht ausgesetzt, indem dieser nur auf die umgebende Mauer wirken kann, welche tiefer geht als der Frost eindringt; sie ist ferner von einer allgemeinen Senkung des Grundes möglichst frei, indem ihre Gleichförmigkeit und feste Verbindung es wahrscheinlich machen, dass sie ohne drohende Bewegung einsinkt; sie ist endlich von dem Beobachter ganz frei, denn der Fussboden liegt nicht auf der Steinplatte, sondern auf der umgebenden Mauer, und zwischen demselben und der Steinplatte sowohl als den Pfeilern, ist ein leerer Raum.

Da das Instrument zum Umlegen eingerichtet ist, und eben dadurch einen seiner schönsten Vorzüge erlangt, so war noch darauf zu sehen, dass aus der Umlegung keine Veränderung der Pfeiler entstehe. Das Ende der Axe, welches die beiden Kreise trägt, ist nämlich schwerer als das entgegengesetzte und erfordert daher auch schwerere Gegengewichte, wodurch die Hebel auf der einen Seite einen um 104 Pfund stärkeren Druck ausüben, als auf der andern. Hat man nun die Axe nivellirt und legt dann das Instrument um, so erleidet der Pfeiler, welcher vorher dem stärkeren Drucke ausgesetzt war, den schwächeren und umgekehrt, und es ist nicht zu bezweifeln, dass der Unterschied von 208 Pfund eine merkliche Veränderung in der Horizontalität der Axe erzeugen kann. Um dem hieraus hervorgehenden Fehler auszuweichen, wurden in der die Grundlage umgebenden Mauer zwei horizontale, starke eiserne Stangen befestigt, welche an den beiden Pfeilern von Süden nach Norden hergehen und weder die Steinplatte noch den Fussboden berühren; von diesen Stangen geht eine schwache eiserne Stange an der Mitte jedes Pfeilers in die Höhe, welche vermittelt eines viereckigen Rahmens die Lager des Instruments einschliesst, und in deren oberes Ende ein Hebel ein-

greift, dessen Ruhepunkt, vermöge eines an dem andern Ende desselben angebrachten Gewichts, einen Druck von 104 Pfund ausübt. Dieser Hebel wird stets auf der dem Kreise entgegengesetzten Seite angebracht und hebt also die Ursache des Fehlers auf das Vollkommenste. Ohne diese Vorrichtung würde, in beiden Lagen der Axe, ein Unterschied von 1,3 erscheinen.

So vollendet der Reichenbach'sche Meridiankreis noch ist, so glaube ich doch nicht, die Ansicht, welcher ich bisher gefolgt bin, nämlich dass alle Instrumente nach ihrer Aufstellung in den Sternwarten einer genauen und strengen Prüfung unterworfen werden müssen, fahren lassen zu dürfen. In Beziehung auf dieses Instrument findet eine doppelte Prüfung statt; nämlich über die Curve, welche die Absehlinie an der Himmelakugel beschreibt, und über die Punkte dieser Curve, welche verschiedenen Abständen vom Pole oder Scheitelpunkte entsprechen. Nur die erste dieser Untersuchungen hat bis jetzt beendigt werden können; während ich daher die geraden Aufsteigungen bereits mit Zuverlässigkeit angeben zu können glaube, muss ich mich begnügen, im Allgemeinen zu bemerken, dass die Abweichungen noch Verbesserungen bedürfen, welche zwar klein, aber nicht unter der Kraft dieses Instruments sind. Die bisher über das Instrument im Allgemeinen, oder als Mittagsfernrohr, angestellten Untersuchungen theile ich hier mit; den Bericht über seinen Gebrauch für die Abstände vom Scheitelpunkte muss ich mir bis zur nächsten Abtheilung dieser Beobachtungen vorbehalten.

1. Bestimmung der Vergrößerungen.

Ich habe diese Bestimmung auf dasselbe Princip gegründet, auf welchem das Ramsden'sche Dynameter beruht; allein zur Messung des Durchmessers des vom Oculare gemachten Bildes der Einfassung des Objectivs habe ich die Theilungen des Kreises angewandt. Zu diesem Ende wurde, vor dem horizontal gestellten Fernrohre des Instruments, ein zusammengesetztes Mikroskop horizontal aufgestellt, so dass es, nachdem das Ocular des Fernrohrs herausgenommen war, die Fäden im Brennpunkte deutlich zeigte; dieses Mikroskop war mit einem Faden versehen, welcher dadurch, dass er den Zwischenraum der beiden Horizontalfäden im Fernrohre bissectirte, leicht horizontal und folglich der Axe des Instruments parallel gestellt werden konnte. Dann wurde ein Ocular eingesetzt und das Mikroskop so lange zurückgeschoben, bis es das Bild der Einfassung des Objectivs deutlich zeigte, worauf der Winkel beobachtet

wurde, um welchen der Kreis gedreht werden muss, damit beide Ränder des erwähnten Bildes am Faden des Mikroskops erscheinen; dieser Winkel fand sich für die verschiedenen Oculare

$$6' 29,00; 4' 4,08; 3' 23,58; 2' 25,17;$$

woraus also die Grösse des Bildes gefunden werden kann, sobald die Entfernung desselben von der Drehungsaxe des Instruments bekannt ist. Um diese zu finden, machte ich einen willkürlichen Punkt auf das Mikroskop, dessen Entfernung von einem in der Ebene des Fadennetzes gelegenen Punkte auf dem Fernrohre ohne Ocular = 40,3 Lin., mit den vier Ocularen aber = 58,4; 52,6; 50,5; 47,3 Lin. gefunden wurde, woraus hervorgeht, dass die 4 Ocularbilder vom Fadennetze

$$18,1; 12,3; 10,2; 7,0 \text{ Lin.}$$

entfernt sind, oder von der Drehungsaxe

$$387,6; 381,8; 379,7; 376,5 \text{ Lin.,}$$

indem diese vom Fadennetze 369,5 Lin. entfernt ist. Die Einfassung des Objectivs hat aber 48,2 Lin. Durchmesser und daher ist das Verhältniss ihrer Grösse zu denen ihrer Bilder vor den Ocularen

$$65,94; 106,69; 128,62; 181,90.$$

Diese Zahlen würden die Vergrößerungen der vier Oculare angeben, wenn die letzteren so gestellt wären, dass parallel auf das Objectiv fallende Strahlen auch parallel aus ihnen ausgielen; allein sie bedürfen einer kleinen Verbesserung, wenn der Beobachter die Oculare nach seiner eigenen Gesichtswerte gestellt hat. Nennt man den Durchmesser des Objectivs O , den des Bildes vor dem Oculare o ; die Brennweite des Objectivs F , des innern Oculars f , des äussern f' ; die Entfernung der beiden Oculare d , des Objectivs vom innern Oculare $F + \delta$, des Bildes vom äusseren δ' , des Auges vom Punkte des deutlichen Sehens ρ : so ist

$$\delta' = \frac{(F + \delta)(f - d)f' + dff'}{(F + \delta)(f + f' - d) + (d - f)f}$$

$$o = \frac{O f f'}{(F + \delta)(f + f' - d) + (d - f)f}$$

$$\delta = \frac{(\rho - \delta')f(f' - d) - dff'}{(\rho - \delta')(f + f' - d) + (f - d)f'}$$

woraus die Vergrößerung für parallel aus dem Oculare ausgehende Strahlen, oder

$$m = \frac{F(f + f' - d)}{ff'}$$

mit hinreichender Annäherung

$$= \frac{O}{o} + \frac{o}{f} \cdot \frac{F}{\rho}$$

folgt. Ich habe $F: \rho = 6$ angenommen, womit die Vergrößerungen

$$= 66,03; 106,75; 128,67; 181,93$$

gefunden werden. Durch diese Methode würde man jede beliebige Genauigkeit erlangen können, wenn man die Dicken und Krümmungen der verschiedenen Gläser mit in Rechnung zöge, was aber hier ganz unnöthig sein würde.

2. Wasserwaage der horizontalen Axe.

Diese Wasserwaage ist so eingerichtet, dass sie mit der Axe genau in Eine Ebene gestellt werden kann, welche schöne Einrichtung das sonst übliche kleine Querniveau überflüssig macht und sehr viel zum sichern Nivelliren beiträgt, indem die Luftblase ihren Ort nicht merklich ändert, wenn auch die durch die Axe und die Wasserwaage gehende Ebene merklich von der Vertical-Ebene abweicht.

Der Werth der Theile der Seale wurde dadurch bestimmt, dass ich die Wasserwaage am Cary'schen Kreise aufhing, und an den Mikroskopen desselben ihre Veränderungen beobachtete. Aus drei Reihen solcher Beobachtungen fand sich eine Verrückung der Luftblase von 1 Pariser Linie im Mittel = $2',164$.*) Obgleich die Luftblase, in jeder dieser Reihen, nach und nach um 4 Zoll bewegt wurde, so zeigte sich doch nirgends eine Spur von Unregelmässigkeit der Krümmung, indem kein dieser Ursache zuzuschreibender Fehler von einer Secunde vorkam.

3. Figur der Zapfen.

Die bei jeder Umlegung des Instruments vorgenommene Prüfung der Horizontalität der Axe hat gezeigt, dass die Zapfen etwas von der Figur abweichen, welche sie haben sollten. Diese Prüfung wurde nämlich jedesmal in den beiden entgegengesetzten horizontalen Lagen des Fernrohrs wiederholt, woraus sich ergab, dass bei der Richtung nach Norden die Wasserwaage 0,194 L. westlicher steht, als bei der Richtung nach Süden; diese Angabe ist das Mittel aus 62 Beobachtungen vom 17. März bis 1. Juli 1821.)*

Der wahrscheinliche Fehler einer Nivellirung der Axe ist hieraus $0',112 = 0',243$ und folglich der des obigen Mittels = $0',0201$, woraus also hervorgeht, dass an der bemerkten Abweichung nicht gezweifelt werden kann. Diese kleine Abweichung rührt wahrscheinlich nicht von einer Unvollkommenheit der cylindrischen Figur der Zapfen, sondern daher, dass ihre Axen nicht in aller Schärfe in Einer geraden Linie sind; die Punkte der Zapfen, welche auf den Lagern liegen, stehen von

denen, auf welchen die Wasserwaage hängt, 9 Linien ab, so dass man also nur einen Winkel der Axen beider Cylinder von $9''$ anzunehmen braucht, um die geringe Abweichung zu erklären. Wenn sie wirklich diese Ursache hat, so hebt die Wiederholung des Nivellirens in entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs ihren Einfluss gänzlich auf.

Der Durchmesser beider Zapfen ist nicht genau gleich, und der dem Kreise entgegengesetzte ist der dickere. Dreihundertdreissig Umlegungen des Instruments haben den Unterschied der Wasserwaage in beiden Lagen = $1',286$ gegeben.)*

Die Haken, mittelst welcher die Wasserwaage an die Zapfen angehängt wird, bilden einen Winkel von 60° . Bezeichnet man den Halbmesser des dickeren Cylinders durch r' , den des dünneren durch r , die Höhen der Punkte, wo die Lager bildenden Ebenen zusammenstossen, über einer gleichen Horizontal-Ebene, des östlichen durch h , des westlichen durch h' , so sind die Höhen der Mittelpunkte der Axe, wenn der Kreis gegen Osten gewandt ist,

$$h + 2r \text{ und } h' + 2r'$$

und ferner die Höhen der Punkte, wo die Haken der Wasserwaage bildenden Ebenen zusammenstossen

$$h + r(2 + \sqrt{2}) \text{ und } h' + r'(2 + \sqrt{2}).$$

Der Ausschlag der Wasserwaage nach Westen ist daher, wenn R die Länge der Axe, in Linien ausgedrückt,

$$x = \frac{(h' - h) + (r' - r)(2 + \sqrt{2})}{R \sin 2',164}$$

und nach der Umlegung

$$x' = \frac{(h - h') - (r - r')(2 + \sqrt{2})}{R \sin 2',164}$$

woraus sich

$$r' - r = \frac{(x - x') R \sin 1',082}{2 + \sqrt{2}} = 0',0007587$$

ergibt.

Bei der Untersuchung der Abweichungen der Axe von der horizontalen Lage wurden stets die Angaben der Wasserwaage vor und nach der Umlegung zu Rathe gezogen; man hat, die Erhöhung des westlichen Endes über dem östlichen in Secunden ausgedrückt,

$$15. b = \frac{h' - h + 2(r' - r)}{R \sin 1''}$$

und ferner $h' - h = (x + x') R \sin 1',082$; also

$$15. b = (x + x') 1',082 \pm 0',815$$

wo das obere Zeichen für die östliche, das untere für die westliche Lage des Kreises gilt. Ist die Wasserwaage nur in einer Lage beobachtet, so ist

$$15. b = x \cdot 2',164 \mp 0',576.$$

*) [Einzelwerthe hier weggelassen.]

4. Prüfung der Unveränderlichkeit des Instruments während der Drehung.

Nach der Bemerkung des Herrn POND, welcher eine bedeutende Aenderung des alten Greenwicher Mittagsfernrohrs während der Drehung fand, scheint eine genaue Untersuchung dieses Gegenstandes unerlässlich zu sein; sie hat aber nicht geringe Schwierigkeiten, wenn es darauf ankömmt, auch kleine beständige Fehler zu erkennen und in Rechnung zu bringen. In der Voraussetzung, dass die aus einer Veränderung des Instruments selbst hervorgehenden Abweichungen vom Meridiane von dem Sinus und Cosinus der einfachen Zenithdistanz abhängen, oder, was gleichgültig ist, dass sie im grössten Kreise vor sich gehen, hat man die Abweichung des mittleren Fadens vom Meridiane, in den entgegengesetzten Lagen der Axe

$$15(a + \alpha) \sin(\varphi - \delta) + 15(b + \beta) \cos(\varphi - \delta) + 15c$$

und

$$15(a' + \alpha) \sin(\varphi - \delta) + 15(b' - \beta) \cos(\varphi - \delta) + 15c'$$

wo a, b, c, a', b', c' die fünfzehnten Theile der in Sekunden ausgedrückten Abweichungen im Azimuthe, der Horizontalität der Axe und des Collimationsfehlers, und α und β die dem Instrumente eigenthümlichen Abweichungen bedeuten; die erste Formel nehme ich für den Fall, wo der Kreis nach Osten gewandt ist, die andere für die entgegengesetzte Lage desselben.

Aus diesen Formeln geht hervor, dass man durch astronomische Beobachtungen in entgegengesetzten Lagen nur die Quantität $2\beta \cos(\varphi - \delta) + c - c'$, nicht aber a bestimmen kann, welches sich ganz mit dem Azimuthe vereinigt und auf alle durch das Mittagsfernrohr erhaltene Resultate gar keinen Einfluss hat; denn es verursacht nur, dass eine Verticalebene, welche die Absehlenslinie beschreibt, von der horizontalen Axe nicht senkrecht durchschnitten wird, welches zu erkennen aber kein Mittel vorhanden ist, indem man die Richtung der Axe nicht von dem Fernrohre unabhängig beobachten kann.

Dagegen ist die Bestimmung von β nothwendig, und kann, entweder durch Wiederholung der Beobachtungen bei umgelegtem Instrumente, oder durch die Vergleichung des von einer horizontalen Ebene reflectirten Bildes des Polarsterns mit dem direct gesehenen, erlangt werden. Diese letztere Methode scheint mir weit vortheilhafter zu sein, sowohl wegen der langsamen Bewegung dieses Sterns, als auch wegen der Unabhängigkeit von allen andern Fehlern und wegen der Grösse, in welcher der Einfluss von β , zumal in unseren hohen Breiten, sich zeigt.

Die Beobachtung der reflectirten Bilder der Sterne ist, so viel ich weiss, zuerst von TRALLEE bei der Höhenbestimmung der Schweizer Berge zur Erfindung des Collimationsfehlers des Instruments angewandt; sie gewährt aber auch höchst schätzbare Mittel für die Prüfung der astronomischen Instrumente, und ist daher auf der Königsberger Sternwarte in häufigen Gebrauch gekommen. Die horizontale Ebene habe ich durch Wasser erhalten; anfangs in einem Gefässe von 18 Zoll Länge und 12 Zoll Breite, welches aber zu klein gefunden wurde, indem es die Bilder der Sterne, mit dem unverrückten stärksten Oculare des Fernrohrs gesehen, nicht immer vollkommen deutlich zeigte, die Deutlichkeit der Bilder in einem Fernrohre von so starker Oeffnung und Vergrösserung aber das sicherste Kennzeichen der ebenen Oberfläche ist. Bei einem Gefässe von 3 Fuss Durchmesser, auf dessen Mitte die Reflexion vor sich geht, habe ich keine Abweichung von der Ebene bemerkt, und deshalb vom 12. April an ein solches Gefäss angewandt.

Wenn die Zenithdistanz eines Sterns $z = \varphi - \delta$ ist, so ist sie für sein reflectirtes Bild $= 180^\circ - z = 180^\circ - \varphi + \delta$, also die Abweichung des Instruments vom Meridiane für dieses Bild des Sterns

$$15(a + \alpha) \sin(\varphi - \delta) - 15(b + \beta) \cos(\varphi - \delta) + 15c$$

$$\text{und } 15(a' + \alpha) \sin(\varphi - \delta) - 15(b' - \beta) \cos(\varphi - \delta) + 15c'.$$

Hat man daher die Durchgangszeiten eines Sterns durch den mittlern Faden direct und im Wasserhorizonte $= t$ und t' beobachtet, so ist, wenn der Kreis nach Osten gewandt ist,

$$t + (a + \alpha) \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + (b + \beta) \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \frac{c}{\cos \delta}$$

$$= t' + (a' + \alpha) \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - (b' - \beta) \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \frac{c'}{\cos \delta}$$

und wenn er nach Westen gewandt ist

$$t + (a' + \alpha) \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + (b' - \beta) \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \frac{c'}{\cos \delta}$$

$$= t' + (a + \alpha) \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - (b + \beta) \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \frac{c}{\cos \delta}$$

woraus also

$$b + \beta = \frac{t' - t}{2} \frac{\cos \delta}{\cos(\varphi - \delta)}; \quad b' - \beta = \frac{t - t'}{2} \frac{\cos \delta}{\cos(\varphi - \delta)}$$

folgen. Da b und b' durch die Wasserwage bekannt sind, so findet man hieraus β , und eine Uebereinstimmung der in beiden Lagen des Instruments erhaltenen Bestimmungen zeigt, dass den vier beobachteten Punkten der von der Absehlenslinie an der Himmelskugel beschriebenen Curve durch einen grössten Kreis Genüge geleistet werden kann.

Die Beobachtungen des Polarsterns, welche ich in dieser Beziehung gemacht habe, geben im Mittel (Kr. Ost) $15\beta = +0,274$; $\gamma = 14,12$ (15 Best.), (Kr. West) $15\beta = +0,013$; $\gamma = 23,12$ (21 Best.)*

Die γ sind aus der Formel $a\alpha':(a+\alpha')$ berechnet, wo a und α' die Anzahl der direct und im Wasserhorizonte beobachteten Fäden bedeuten. Der wahre Fehler für $\gamma = 1$ findet sich $= 0,453$, und damit der des ersten Mittels $= 0,1205$, des anderen $= 0,094$, so dass der kleine gefundene Werth von β ohne grosse Unwahrscheinlichkeit den zufälligen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden kann. Das Mittel aus beiden Bestimmungen ist $+0,112$ und sein wahrscheinlicher Fehler $= 0,0742$.

Diese Untersuchung beruht auf der Voraussetzung, dass die Abweichungen des Instruments vom Meridian von dem Sinus und Cosinus der einfachen Zenithdistanz abhängen, welche zwar nicht unwahrscheinlich, aber auch nicht als richtig erwiesen ist; ohne diese Voraussetzung hätte man statt β zwei Unterschiede der Abweichungen für den directen und reflectirten Ort des Pols erhalten. Es können aber noch Abweichungen vorhanden sein, welche sich nicht in den grössten Kreis fügen, und deren vollständige Vernichtung durch die Einrichtung des Instruments, vermöge welcher die Beobachtungen, in ungefähr gleicher Anzahl, in den entgegengesetzten Lagen der Axe gemacht werden, nicht nothwendig erlangt wird. Diese Fehler müssen sich aber, wenn sie vorhanden sind, in den geraden Aufsteigungen der Fixsterne verrathen, wenn man sie über und unter dem Pole, bei den entgegengesetzten Lagen des Instruments, beobachtet; von jedem Mittagsfernrohre ist zu fordern, dass es entweder unmittelbar oder nach angebrachten Verbesserungen stets dieselbe gerade Aufsteigung gebe, man mag den Stern über oder unter dem Pole, in der einen oder der andern Lage der Axe mit den Fundamentalsternen vergleichen; ein beständiger Unterschied dieser vier verschiedenen Bestimmungen deutet auf einen weiter zu untersuchenden Fehler des Instruments.

Diese Untersuchung schien mir, da der Gegenstand die grösste Wichtigkeit für die beobachtende Astronomie besitzt, nothwendig zu sein; ich habe sie auf 58 Circumpolarsterne, bis fast zu dem Horizont herab, gegründet; allein ehe ich die dadurch erhaltenen Resultate mittheile, muss ich meine Berichtigungsart des Instruments erläutern.

* [Die einzelnen Bestimmungen, denen die Gewichte γ entsprechen, sind weggelassen.]

5. Verbesserungen der Durchgangszeiten durch den mittleren Faden.

Die Lage des Mittagsfernrohres ist auf der Königsberger Sternwarte zeither dadurch berichtigt worden, dass man die Entfernung der Absehslinie vom Pole durch Beobachtungen des Polarsterns, die Collimationslinie durch Umlegung und die Abweichung vom Meridian im Aequator durch die Wasserwege oder das Meridianzeilen bestimme. Die erste Bestimmung hat aber in einigen Jahreszeiten die Schwierigkeit, dass eine der beiden Culminationen des Polarsterns dann zu so unbequemer Zeit stattfindet, dass sie in der Regel nicht beobachtet wird; alsdann muss man sich mit der andern Culmination allein begnügen, oder noch einen zweiten Stern als Polarstern zu Rathe ziehen. Hierzu eignet sich ganz vorzüglich δ Ursae minoris: er culminirt etwa 6 Stunden vor oder nach α Ursae min., ist dem Pole so nahe, dass er eben so genau beobachtet werden kann, und hat Licht genug, um mit einem so starken Fernrohre zu allen Zeiten gut gesehen werden zu können. Ich habe daher zu allen Bestimmungen der Lage des Instruments gegen den Pol beide Sterne angewandt, und dieses so vorthelhaft und bequem gefunden, dass ich nicht unterlassen kann, auch anderen mit lichtstarken Instrumenten ausgerüsteten Sternwarten diesen Gebrauch zu empfehlen.

Derjenige dieser beiden Sterne, dessen beide Culminationen auf bequeme Zeiten fallen, ist stets zur Erfindung der Abweichung des Instruments vom Pole benutzt worden, und zwar nach folgendem Verfahren. Die wahre Sternzeit α des Durchgangs durch den Meridian erhält man aus der beobachteten t durch die Formel

$$\alpha = t + \tau + m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta$$

und ebenso für einen andern Stern

$$\alpha' = t' + \tau' + m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta'$$

wo α, α' die geraden Aufsteigungen (für untere Culminationen $+12^h$), δ, δ' die Abweichungen (für untere Culminationen ihre Supplemente), τ, τ' die Verbesserungen der Uhrzeit bedeuten; hieraus folgt

$$\frac{(\alpha - t) - (\alpha' - t') + \tau' - \tau}{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \delta'} = n + c \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\delta - \delta')}$$

Nach meinen bisherigen Beobachtungen bedürfen die geraden Aufsteigungen von α Urs. min., so wie sie aus den Tafeln in der IV. Abtheilung folgen, gegenwärtig der Verbesserung $+1,05$, die von δ Ursae min. aber keiner merklichen; den zweiten Stern habe ich stets aus meinem Fundamentalverzeichnisse genommen und

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \delta'} = l; \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\delta - \delta')} = k$$

in zwei Tafeln gebracht. [Folgt ein Auszug aus diesen.]

Durch diese Tafeln wurde aus jeder Beobachtung $n + kc = p$ berechnet, und das Mittel aus allen während einer Periode erhaltenen Werthen desselben als das dieser Periode zukommende p angesehen; ich habe versucht, auch die Veränderung dieses p aus den Beobachtungen herauszubringen, allein sie ist stets so klein oder unregelmässig gewesen, dass ich den Versuch habe aufgeben müssen, woraus auch kein erheblicher Fehler entstehen kann, indem fast immer dieselben Sterne während der ganzen Periode beobachtet sind. So wurden z. B. für die ganze Periode vom 12. bis 27. Juni 1820 im Mittel aus 14 Beobachtungen $p = -0,2451$, $k = 0,996$ angenommen.

Um aus $p = n + kc$ n zu finden, muss man c durch Umlegung des Instruments bestimmen, entweder am Meridianzeichen oder aus Beobachtungen der beiden Polarsterne. Um die erste Methode mit Erfolg anwenden zu können, habe ich dem Meridianzeichen am 11. Mai 1820 eine zweckmässige Einrichtung gegeben. Dieses Zeichen ist, wie aus der I. Abtheilung bekannt ist [s. p. 21], ein Parallelepipedum von Granit, welches seine 24 Zoll hohe und 18 Z. breite Seite der Sternwarte zuwendet; diese Seite ist mit fünf Reihen schwarzer Rechtecke auf weissem Grunde versehen, von 4" Breite und 2,6" Höhe, welche in der Richtung der Diagonale aneinander stossen, so dass die Mitten zweier aneinander stossenden um 4" im Azimuthe verschieden sind. Die erste Reihe fängt am (scheinbaren) oberen Rande des Zeichens in der Mitte der Breite an und bestimmt die Azimuthe 0, -4", -8"; die zweite hat 5 Rechtecke für 7", 3", -1", -5", -9"; die dritte 4 Rechtecke für 6", 2", -2", -6"; die vierte 5 Rechtecke für 9", 5", 1", -3", -7"; die fünfte endlich 3 Rechtecke für 8", 4", 0. Bei dieser Einrichtung sieht man unmittelbar die einzelnen Secunden der Abweichung des Fadens; bei ruhiger Luft und guter Beleuchtung kann man aber Theile einer Secunde noch schätzen, und da man diese günstigen Umstände abwarten kann, so sind die bei den Umlegungen oder in der letzten Spalte der Beobachtungen (z. B. Juni 21 ... 1,9 Ost, Juni 22 ... 2,0 Ost) angegebenen Abweichungen des Fadens vom Zeichen gewöhnlich bis auf 0,2 oder 0,3 sicher.

Trotz dieser Sicherheit in der Beobachtung der Abweichungen habe ich gefunden, dass diese Methode den Collimationsfehler nicht ganz sicher bestimmt, die Umlegungen vom 11. Juli bis 12. Oct. gaben z. B.

Juni	11	+ 0,45
	27	+ 2,4
Juli	16	+ 0,75
Aug.	1	+ 1,5
	9	+ 2,25
	20	+ 2,1
Sept.	7	+ 2,0
	16	+ 1,85
Oct.	12	+ 1,7

woraus eine merkliche Veränderlichkeit hervorzugehen scheint, welche aber, wie ich weiter unten zeigen werde, nicht wirklich stattfand. Die Ursache hiervon liegt vielleicht in kleinen Ungleichförmigkeiten der Temperatur des Instruments, welche, wenn man aus mehreren Beobachtungen das Mittel nehmen könnte, wohl verschwinden würden.

Die andere Methode, den Collimationsfehler durch die Polarsterne zu bestimmen, lässt sich bei einem Instrumente dieser Art nicht ausführen, indem die Umlegung nicht schnell genug bewerkstelligt werden kann, um durch Eine Culmination, selbst des α Urs. min., zu einem genügenden Resultate zu gelangen; wollte man aber verschiedene Culminationen mit einander verbinden, so würde man Gefahr laufen, kleine Veränderungen der Pfeiler u. s. w. auf den Collimationsfehler zu übertragen. In beiden Fällen wird aber die Ursache, welche bei der vorigen Methode die Unsicherheit verursacht haben kann, auch hier zu fürchten sein.

Da aber die sehr genaue Bestimmung der Collimation nothwendig ist, so habe ich eine dritte Methode angewandt, welche theils den Vorzug hat, auf wiederholten Beobachtungen zu beruhen, theils auch die zufälligen Fehler bedeutend zu verkleinern; sie besteht darin, dass man alle während zweier Perioden beobachtete Abweichungen der Axe vom Horizonte, des mittleren Fadens vom Zeichen und des Instruments vom Pole zusammengenommen zur Bestimmung der Collimation anwendet; sie setzt die Unveränderlichkeit der Collimation während zweier Perioden voraus, allein der Erfolg hat gezeigt, dass dieses erlaubt ist und es ist überdies klar, dass eine ähnliche Voraussetzung für kürzere oder längere Zeiten stets gemacht werden muss.

Bezeichnet man die östliche Abweichung des Fadens vom Zeichen durch $15 A$, das östliche Azimuthe des Zeichens durch $15 Aa$, so ist für den südlichen Horizont

$$15A + A = -n \sec \varphi + b \operatorname{tg} \varphi + c;$$

die astronomischen Beobachtungen geben ferner

$$p = n + kc;$$

wenn man hierdurch n eliminiert, so hat man

$$15A = -A - p \sec \varphi + b \operatorname{tg} \varphi + \{1 + k \sec \varphi\} c$$

wo für A, p, b die Mittel der für alle Beobachtungszeiten der Polarsterne gefundenen Werthe gesetzt werden; die Werthe von $15A$ wurden, so oft die Umstände es erlaubten, in der letzten Spalte des Tagebuchs angeführt, die von b sind aus dem Anfange und Ende der Perioden interpolirt; die Vergleichung dieser Gleichung mit der für die vorhergehende Periode erhaltenen gibt die gesuchte Bestimmung von c . Für die oben bereits angeführte Periode vom 12. bis 27. Juni 1820 war die Gleichung z. B.

$$15A = +0,574 + 2,724 c$$

für die vorhergehende vom 27. Mai bis 10. Juni

$$15A = -0,2855 + 2,7389 c$$

woraus unter der Voraussetzung des in beiden Perioden gleichen, aber auf verschiedenen Seiten liegenden Collimationsfehlers

$$c = -0,1576 \text{ und } n = -0,0881$$

folgt. Auf diese Art fanden sich die Collimationsfehler vom 27. Mai bis 27. October:

		$\pm c$	$\pm 15 c$
1820	Mai 27 — Juni 10	+ 0,1576	+ 2,36
	Juni 12 — Juni 27	0,1576	2,36
	Juni 29 — Juli 16	0,1429	2,14
	Juli 20 — Aug. 1	0,1362	1,89
	Aug. 1 — Aug. 9	0,1312	1,97
	Aug. 9 — Aug. 19	0,1351	2,03
	Aug. 21 — Sept. 1	0,1452	2,18
	Sept. 7 — Sept. 16	0,1496	2,24
	Sept. 23 — Oct. 4	0,1611	2,42
	Oct. 13 — Oct. 27	0,1455	2,18

wo keine auffallende Veränderung mehr stattfindet. Wäre die oben durch β bezeichnete Verbesserung nicht $= 0$, so würde das auf diese Art gefundene c noch die Verbesserung $\mp \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ erhalten.

Für die Berechnung der Unterschiede der geraden Aufsteigungen sind n und c hinreichend; vom 27. Mai 1820 an wurde den Beobachtungen unter der Aufschrift „Correction des Instruments“ nur $n \operatorname{tg} \delta + c \operatorname{sec} \delta$ hinzugefügt, wobei das unmittelbar gefundene c wegen der täglichen Aberration um $-0,0121$ verbessert wurde. Will man daher von dieser Zeit an die Durchgangszeiten durch den wahren Meridian haben, so muss man noch m hinzufügen, welches aus der Formel

$$m = n \operatorname{cotg} \varphi + a \operatorname{cosec} \varphi$$

hergeleitet worden ist, wo $15a$ das an Meridianzeichen beobachtete und wegen der Abweichung desselben verbesserte östliche Azimuth des Instruments für den Anfang und das Ende der Periode angenommen ist. Die hieraus folgenden, in der letzten Spalte des Tagebuchs

angemerkten doppelten Bestimmungen von m gelten daher für die Grenzen der Periode, z. B. vom 12. bis 27. Juni $m = +0,20$ und $0,51$; der Unterschied vereinigt sich mit dem Gange der Uhr und hat daher keinen weiteren Einfluss.

6. Beobachtungen der Circumpolarsterne.

Die Reduction der Beobachtungen dieser Sterne auf den Anfang des Jahres 1820 übernahm Herr ANGELANDER, welcher seit dem Herbst 1820 als Gehülfe auf der Sternwarte arbeitet und durch Beobachtung und Rechnung bereits vielfache der Wissenschaft nützliche Resultate erhalten hat. [Es folgen die Einzelbeobachtungen und w. F. für 58 Sterne.]

Die Abweichung der in den verschiedenen Lagen des Kreises und in beiden Culminationen erhaltenen Bestimmungen ist meistens gering und mit den oben angeführten wahrscheinlichen Fehlern wohl vereinbar. Abweichungen, welche eine Secunde des grössten Kreises oder etwas darüber betragen, sind trotz der oft geringen Anzahl der Beobachtungen selten und kommen in den Höhen, wo die Nähe des Horizonts noch nicht nachtheilig auf die Beobachtungen wirkt, unter etwa 19 Malen ein Mal vor; gewöhnlich gehen die Abweichungen ohne Regelmässigkeit fort, zuweilen aber scheinen sie einem Gesetze zu folgen, z. B. von 60° bis 80° Decl. in der oberen Culmination, bei östlicher Lage des Kreises. Ihre geringe Grösse würde weitere Schlüsse sehr schwierig machen, zumal da kaum bezweifelt werden kann, dass die etwa aus dem Instrumente selbst hervorgehenden Fehler mit andern, noch unerkannten, vermischt sein können. Ich glaube daher, dass die strenge Prüfung, welcher das Instrument unterworfen worden ist, nur zu dem Schlusse berechtigt, dass die Abweichung der Abschenslinie von einem Kreise, wenn sie stattfindet, zu klein ist, um aus den Beobachtungen erkannt zu werden.

Als Mittagsfernrohr leistet daher dieses schöne Instrument das Aeusserste: es gibt die Rectascensionen, man mag sie über oder unter dem Pole, bei östlicher oder westlicher Aufstellung, durch Vergleichung mit dem Fundamentalcataloge bestimmen, immer so nahe übereinstimmend, dass sich kein entschiedener Unterschied angeben lässt. In der nächsten Abtheilung hoffe ich eben so befriedigend zeigen zu können, dass dasselbe Instrument auch für die Declinationen nichts zu wünschen übrig lässt.

7. Lage des Meridianzeichens.

Dieselben Gleichungen, welche zu der Bestimmung der Collimation angewandt wurden, geben auch $15Aa$

oder die östliche Abweichung des Zeichens vom Meridiane. Ich habe diese so bestimmt, dass ich eine Periode immer mit der vorhergehenden und folgenden verglichen habe.

		15 Ja	
1820	Mai 27 — Juni 27	+ 2',16	
	Juni 12 — Juli 16	+ 2,75	
	Juni 29 — Aug. 1	+ 2,07	
	Juli 20 — Aug. 9	+ 1,84	
	Aug. 1 — Aug. 19	+ 1,99	
	Aug. 9 — Sept. 1	+ 1,61	
	Aug. 21 — Sept. 16	+ 1,80	
	Sept. 7 — Oct. 4	+ 1,33	
	Sept. 23 — Oct. 27	+ 0,69	
	Oct. 13 — Nov. 15	+ 3,10	
	Nov. 29 — Dec. 23	+ 1,15	
	Dec. 29 — Jan. 3	+ 2,41	
1821	Jan. 12 — Febr. 28	+ 1,80	
	Febr. 11 — März 25	+ 0,32	
	März 27 — April 17	+ 2,32	
	April 20 — Mai 4	+ 3,58	
	April 25 — Mai 22	+ 1,89	
	Mai 5 — Juni 4	+ 1,43	
	Mai 25 — Juni 18	+ 1,29	
	Juni 11 — Juni 30	+ 1,12	

Das Mittel aus diesen 20 Bestimmungen ist $+ 1,783$, genau übereinstimmend mit der Angabe des Dollondsehen Mittagsfernrohrs.

Ich habe diese Resultate einzeln angeführt, weil sie auch zur Beantwortung der Frage, ob die Drehungsaxe der Erde mit einer Hauptaxe zusammenfällt, beitragen können, worüber man, so viel ich weis, noch kein auf Beobachtungen beruhendes positives Resultat besitzt. Wenn man die Periode aus dieser Ursache entstehenden Ungleichheit unter der Voraussetzung, dass die Erde ein Rotationsphäroid ist = $337,5$ mittleren Tagen setzt und den Winkel der Axen durch θ bezeichnet, so ist das beobachtete Azimth des Zeichens

$$= 15 \text{ Ja} + \theta \sec \varphi \sin(\varepsilon + t \cdot 1^{\circ} 4')$$

wo t die von dem Anfange von 1820 an gerechnete Anzahl der mittleren Tage und ε den Werth des Arguments zu dieser Zeit bedeutet; mit dieser Formel verglichen geben die angeführten 20 Beobachtungen

$$15 \text{ Ja} = + 1,7804; \text{ wahrscheinl. F.} = \pm 0,1226$$

$$\theta \cos \varepsilon = + 0,064; \quad \text{ " } \quad \text{ " } = \pm 0,0997$$

$$\theta \sin \varepsilon = - 0,090; \quad \text{ " } \quad \text{ " } = \pm 0,0927$$

$$\theta = 0,110; \quad \text{ " } \quad \text{ " } = \pm 0,1361$$

woraus es wahrscheinlich wird, dass der Winkel der beiden Axen eine Viertelsecunde nicht überschreitet. Beobachtungen dieser Art, länger oder allein in der Absicht θ zu bestimmen angestellt, würden die Unsicherheit

noch vermindern können; die hier angeführten können uns aber schon darüber beruhigen, dass der Winkel der Axen so klein ist, dass er auf die wenigsten Beobachtungen einen nachtheiligen Einfluss haben kann.

Ausser diesen, auf den Gebrauch des Instrumentes als Mittagsfernrohr sich beziehenden Bemerkungen habe ich noch einige Erläuterungen über die Beobachtungen im Allgemeinen zu ertheilen. Die mit dem Kreise gemachten kann man entweder als Abstände vom Pole oder vom Scheitelpunkte benützen, je nachdem man den Ort des Pols oder des Scheitelpunkts auf dem Instrumente als bekannt annimmt; directer scheint mir das erste zu sein, theils weil das gesuchte Resultat, die Declination, unmittelbar daraus hervorgeht, theils weil der Ort des Pols unabhängig von einer Umlegung in jeder Periode, der des Scheitelpunkts aber nur durch die Verbindung zweier Perioden gefunden wird. Ich habe daher die bisherigen Rechnungen stets auf den Pol bezogen, und gebe die dabei angewandten ausschliesslich auf die beiden Polarsterne, welche gewöhnlich bei jeder Cnlimination 5 Mal beobachtet wurden, gegründeten Bestimmungen dieses Punkts; die bei diesen Rechnungen benutzten Declinationen sind für α Ursae min. aus den Ephemeriden, welche Herr Prof. Ritter SCHUMACHER und Herr Prof. STRUVE bekannt gemacht haben, entlehnt, für δ Ursae min. aber aus meinen Tafeln berechnet. [Folgen die einzelnen Orter des Pols.]

Aus den Angaben geht hervor, dass der Ort des Pols auf dem Instrumente, insofern an demselben keine Aenderung vorgenommen wurde, nur sehr geringen Schwankungen, welche im Laufe einer jeden Periode sich immer als unmerklich zeigten, unterworfen ist. Um vielleicht auch diesen kleinen Aenderungen näher auf die Spur zu kommen, habe ich einige Monate lang die Angabe eines an den Pfeilern aufgehängten Réaumur'schen Thermometers, und die Länge der Luftblase der Wasserwaage der Alhidade in der letzten Columne der Beobachtungen angemerkt, z. B. Nov. 4. Bl. 63,6 = 7,6; da ich aber keinen Zusammenhang fand, so habe ich dieses nicht weiter fortgesetzt.

Das Instrument erhielt zu wiederholten Malen neue Fäden, deren Zwischenräume auf der 40. Seite verzeichnet sind. Bei dem Durchgange der Sonnenscheibe wurde der vorgehende Rand gewöhnlich an den 4 ersten, der folgende an den 3 oder 4 letzten Fäden beobachtet; dazwischen aber der nördliche oder südliche Rand zwischen die Horizontalfäden gebracht und die Angabe des Kreises abgelesen; die hierzu erforderliche

Zeit ist nur dann vorhanden, wenn man die Kreisbeobachtung 20° bis 30° vor der Culmination macht und nur 2 Nonien abliest. Dadurch wird es aber nothwendig, die Abweichung der horizontalen Fäden vom Parallelismus mit dem Aequator und den Unterschied zweier Nonien von vieren zu kennen. Jene wurde durch α Ursee min. untersucht, indem man denselben an den beiden Rändern und in der Mitte des Fadennetzes beobachtete, woraus die an die beobachteten Angaben des Kreises anzubringenden, aus dieser Ursache hervorgehenden Verbesserungen sich fanden:

von März 27 bis April 7 . . .	$\mp 0,0040 . t \cos \delta$
April 8 „ Mai 19 . . .	$\pm 0,0226 . t \cos \delta$
Mai 23 „ Mai 25 . . .	$\pm 0,0551 . t \cos \delta$
Mai 27 „ Nov. 14 . . .	$\mp 0,0097 . t \cos \delta$
Dec. 1 „ Dec. 31 . . .	$\pm 0,0109 . t \cos \delta$

wo t die Anzahl Secunden vor der Culmination bedeutet, und das obere Zeichen für die östliche, das untere für die westliche Lage des Kreises gilt.

Dieselben Beobachtungen haben darüber entschieden, dass die Schwere nicht auf die horizontalen Fäden einwirkt, denn die an beiden Rändern gemachten und auf den Meridian reducirten Beobachtungen stimmen immer sehr nahe mit den in der Mitte gemachten und das Mittel aus den häufigen, im Tagebuche vorkommenden Prüfungen dieser Art verräth nicht die geringste Spur einer Biegung durch die Schwere.

Den Unterschied zweier Nonien von vieren habe ich durch eine Reihe von Ablesungen bestimmt, welche dreimal wiederholt und von dem Einflusse einer auf Kreis und Alhidade ungleichförmig wirkenden Temperatur dadurch befreit wurden, dass zwischen dem Stellen und Ablesen des Kreises jedesmal wenigstens eine halbe Stunde verstrich.**)

Die halben Unterschiede $\frac{1}{2}(II + IV) - \frac{1}{2}(I + III)$ werden den durch den ersten und dritten Nonius erhaltenen Ablesungen mit ihrem Zeichen, den durch den zweiten und vierten erhaltenen mit dem entgegengesetzten Zeichen hinzugefügt. Sie lassen sich durch die Formel

$$+ 1,26 + 0,6764 \sin [2\alpha + 215^\circ 56']$$

gut darstellen, wo α die Angabe des ersten Nonius bedeutet; so wie diese Formel sie gibt, sind sie, vereinigt mit der Abweichung der Fäden vom Parallelismus, der Abweichung des Parallels vom grössten Kreise und der Aenderung der Declination, in der Reduction auf den Meridian überschriebenen Columnne des Tagebuchs bei den Sonnenbeobachtungen jedesmal angebracht. Die in derselben Columnne enthaltenen Zahlen für die beiden Polarsterne schliessen aber die Abweichung der Horizontalfäden nicht ein. [Es folgen noch einige Bemerkungen über Beschreibung des Instruments bei den Sonnenbeobachtungen und über die Wasserwaage.]

63. Eine neue Methode, die Biegung der Fernröhre astronomischer Instrumente zu bestimmen. *)

(Astron. Nachr. 3, p. 209.)

Eine kleine Anomalie in der Bestimmung der Polhöhe, welche die im Jahre 1823 gemachten Umlegungen des Meridiankreises ergeben, flösste mir den Argwohn ein, dass die Einwirkung der Schwere auf das Instrument seit 1820 und 1821 sich etwas geändert haben könnte. Ich wünschte daher die Bestimmung derselben (welche auf Beobachtungen der Sterne von einem Wasserhorizonte gegründet wurde) wiederholen zu können; allein die allgemeine Beobachtung des Himmels, welche seit 1821 diese Sternwarte vorzüglich beschäftigt, und das nun schon in das dritte Jahr dauernde äusserst unbeständige Wetter raubten mir die

Hoffnung, eine so grosse Anzahl Beobachtungen dieser Art zusammenbringen zu können, als nöthig gewesen sein würde, um über eine kleine Aenderung sicher zu entscheiden. Es blieb daher nichts übrig, als entweder den Zweifel bestehen zu lassen, oder eine neue Methode aufzufinden, wodurch die erforderliche Sicherheit in kürzerer Zeit erlangt werden kann. Da das letzte mir gelungen ist, so zögere ich nicht länger, den Astronomen eine Mittheilung zu machen, welche für die Besitzer von guten Instrumenten von Interesse sein wird, indem sie einen schwierigen Gegenstand mit auffallender Leichtigkeit beseitigt.

*) [191 d. a. Verz. und Auszug aus 209 d. a. Verz.]

**) [Die detaillirten Zahlenangaben weggelassen.]

Wenn man zwei Punkte bestimmen könnte, welche, vom Mittelpunkt des zu prüfenden Instruments gesehen, diametral einander entgegengesetzt wären, so würde man ihre Entfernung mit dem Instrumente ganz frei von den Theilungsfehlern messen und durch den Unterschied von 180° die Biegung erkennen können. Wenn man daher ein Mittel besäße, von zwei irdischen Objecten die Gewissheit zu erlangen, dass sie in Beziehung auf den Mittelpunkt des Instruments einander diametral gegenüberstehen, so würde man dadurch die doppelte Biegung im Horizonte unmittelbar erhalten; allein diese Gewissheit würde schwer und wegen der Veränderlichkeit der Strahlenbrechung nicht dauernd zu erlangen sein. — Nach der schönen Bemerkung von GAUSS, dass man das Fadennetz eines Fernrohrs durch das Objectiv desselben mit einem andern Fernrohre sehen kann, kann man aber die irdischen Objecte durch die Fadenkreuze zweier Fernrohre ersetzen, und hierauf eine Methode gründen, welche die Biegung im Horizonte mit grossem Vortheile ergibt.

Es ist nämlich klar, dass, wenn man zwei Fernrohre gegeneinander so aufstellt, dass das Fadenkreuz des einen das des andern deckt, die Absehnslinien beider einander parallel sein werden. Stellt man daher gegen Norden und gegen Süden des zu prüfenden Meridianinstruments zwei mit Fadennetzen versehene Fernrohre auf, so dass alle drei nahe horizontal und nahe gleich hoch sind, nimmt man alsdann das Instrument weg und richtet eins der Fernrohre so, dass sein Fadenkreuz das Fadenkreuz des andern deckt, so sind die durch das wieder an seine Stelle gebrachte Instrument gesehenen Fadenkreuze beider Fernrohre genau 180° von einander entfernt.

Nach dieser Idee habe ich zwei Reihen von Versuchen angestellt, welche eine ungewöhnliche Uebereinstimmung gewährt haben. Die Einrichtung, wodurch ein ähnlicher Erfolg stets herbeizuführen sein wird, werde ich jetzt näher beschreiben.

Die beiden erwähnten Fernrohre wurden in den Durchschnitten der Sternwarte so befestigt, dass ihre Axen nahe horizontal waren und mit der Axe des horizontal gestellten Fernrohrs des Meridiankreises nahe zusammenfielen; dieses erlangte ich durch zweckmässige, mit den nöthigen Bewegungen versehene Unterlagen, welche auf eisernen, in die Mauer eingetriebenen Bolzen ruhten. Das nördliche Fernrohr wurde im Brennpunkte mit zwei Spinnenfäden versehen, welche sich in einem Winkel von etwa 10° durchschneiden; das südliche erhielt ein Kreuz von einem verticalen und einem horizontalen Faden. Diese Einrichtung macht

es möglich, sowohl mit beiden befestigten Fernrohren auf einander, als auch mit dem Fernrohre des Meridiankreises (welches bekanntlich zwei horizontale $8''$ von einander entfernte Fäden hat) auf jedes der ersteren scharf zu pointiren. Da der Erfolg von dem deutlichen Sehen abhängt, so wurde durch Spiegel, welche vor den Ocularen angebracht wurden, dafür gesorgt, dass die Fäden sich gegen den Himmel projectiren.

Nachdem die beiden Fernrohre beinahe richtig gestellt waren, wurden das Objectiv und Ocular des Meridiankreises weggenommen, so dass man durch die leere Röhre seines Fernrohrs hindurch das Fadenkreuz des nördlichen Fernrohrs durch das südliche sehen konnte; dieses letztere wurde dann aufs Genaueste auf jenes gerichtet und nun der Winkel zwischen beiden Fadenkreuzen mit dem Meridiankreise, nachdem das Objectiv und Ocular wieder eingesetzt waren, gemessen. Sobald dieses geschehen war, nahm ich das Objectiv und Ocular noch einmal weg und untersuchte, ob beide Fernrohre noch parallel waren; dieses war meistens der Fall, aber wenn eine kleine Aenderung sichtbar war, so ersetzte ich den Versuch durch einen neuen. — Die Sicherheit der Ablesungen des Kreises konnte bis aufs Höchste getrieben werden durch Anwendung zweier Pistor'scher Mikrometerniskope, welche diametral aufgeschraubt werden, und daher bei der nördlichen und südlichen Beobachtung auf dieselben Theilstriche trafen.

Auf diese Weise wurden am 20. und 21. April, als der Kreis gegen Westen gewandt war, 10 Versuche gemacht; am 15. und 16. Juni wurde dieselbe Anzahl von Versuchen in der entgegengesetzten Lage des Kreises wiederholt. In beiden Reihen wurde gegen Norden ein Fraunhofer'sches Fernrohr von 30 Zoll Brennweite aufgestellt; gegen Süden in der ersten ein gleichfalls Fraunhofer'sches Fernrohr von 42 Zoll Brennweite, welches Herr BRAUER, ein hiesiger eifriger Liebhaber der Astronomie, mir auf einige Tage zu leihen die Güte hatte; in der zweiten ein sehr schönes, Herrn von STEINHEIL, einem sehr geschätzten Zuhörer von mir, gehöriges Fernrohr von demselben Meister und derselben Grösse.

Dass die Versuche dadurch von einander unabhängig gemacht sind, dass eins der Fernrohre immer nach einem beendigten Versuche verstellt und dann aufs Neue gerichtet wurde, darf ich kaum erwähnen. Die folgende Angabe der aus jedem einzelnen Versuche hervorgehenden Summe der Zenithdistanzen beider Fadenkreuze wird die Schürfe zeigen, welche man durch diese Methode erlangen kann.

April 20 und 21. 1824.	Juni 15 und 16. 1824.
180° + 0',12	180° + 0',19
- 0,81	- 0,56
+ 0,08	+ 0,25
- 0,38	+ 0,54
+ 0,53	0,00
- 0,39	- 0,07
- 0,29	- 0,06
+ 0,20	+ 0,24
+ 0,10	- 0,12
- 0,06	+ 0,26
Mittel = 180° - 0',090	Mittel = 180° + 0',067

Das Mittel aus beiden Reihen = - 0',0115 gibt die Biegung im Horizonte = + 0',0058 oder verschwindend. In den Jahren 1820 und 1821 fand ich, durch zwei Reihen von Beobachtungen vom Wasserhorizonte, + 1',0646 und + 1',1636, also 1',11 mehr als gegenwärtig. Dieser Unterschied, welcher ausser den Grenzen der zufälligen Beobachtungsfehler liegt, deutet entweder eine Veränderung im Instrumente an, oder er zeigt die Unrichtigkeit der Voraussetzung, dass die Biegung dem Sinus der Zenithdistanz proportional sei. Ich behalte mir vor, die genauere Untersuchung dieses Punktes in den Tagebüchern der Sternwarte bekannt zu machen, bemerke aber vorläufig, dass zwar eine Veränderung des Instruments in demselben Sinne stattzufinden, aber nicht so gross zu sein scheint, dass der ganze Unterschied dadurch erklärt würde.

Die Leichtigkeit, womit diese Methode angewandt werden kann, wird es möglich machen, die Instrumente von Zeit zu Zeit zu prüfen und ihre etwaigen Veränderungen zu entdecken. Sie könnte auch benutzt werden, die Biegung in beliebigen Zenithdistanzen zu bestimmen, wenn man die beiden Fernröhre anders als in horizontaler Lage aufstellte; allein die Sternwarte, auf welcher dieses geschehen soll, muss besonders dazu eingerichtet werden, um den Fernröhren in jeder beliebigen Zenithdistanz eine sichere Aufstellung geben zu können.

Ich glaube noch darauf aufmerksam machen zu dürfen, dass auch der Zenithpunkt eines Instruments, ohne Umlegung desselben, durch eine ähnliche Vorrichtung gefunden werden kann. Man gebraucht dazu nur Ein Fernrohr mit einer empfindlichen Wasserwage versehen, deren Lage gegen die Axe desselben geändert werden kann. Stellt man dasselbe sowohl gegen Norden als gegen Süden auf, so dass die Wasserwage in beiden Lagen einspielt, so ist das Mittel der Angaben des Kreises für beide Aufstellungen des Fernrohrs der Zenithpunkt; — am unabhängigsten von allen anderweitigen Verbesserungen erhält man denselben, wenn man die Wasserwage nahe senkrecht auf die Axe des Fernrohrs richtet, dasselbe im Zenith aufhängt, und alsdann den Versuch nach der Umwendung dieses Fernrohrs wiederholt. Diese Methode, welche nur eine in dem Durchschnitt der Sternwarte oder auf den Pfeilern leicht anzubringende Vorrichtung voraussetzt, wird ein sehr genaues Resultat geben, indem das Fadenkreuz immer vollkommen ruhig und deutlich erscheint, was bei den vergleichenden Beobachtungen der Sterne, an einem Zenithsector und dem Instrumente selbst, nicht immer der Fall ist.

[Dieselbe Methode findet sich auch Königsb. Beob. 10. Abth. bis auf den folgenden Zusatz (p. V)]: ... Statt der Wasserwage, welche nach meinen Vorschlägen benutzt werden soll, dem Probefernrohr in entgegengesetzten Lagen eine gleiche Neigung gegen den Horizont zu geben, hat der sinnreiche KATER das Schwimmen eines schweren Körpers, an welchem das Fernrohr befestigt ist, auf Quecksilber substituirt und dadurch ein neues und bequemes Beobachtungsmittel in die practische Astronomie eingeführt, mir hat es aber bisher an Gelegenheit gefehlt, über die Genauigkeit, welche dieses Mittel und eine gute Wasserwage gewähren, vergleichende Versuche zu machen....

64. Ueber den allgemeinen Gebrauch des Passageninstrumentes.*)

(Astron. Nachr. 6, p. 221.)

1.

Die Absicht meines früheren Aufsatzes in Nr. 49 der Astr. Nachr. [Abb. 48, Bd. I. p. 317] war, die Astro-

nomen auf ein Hilfsmittel aufmerksam zu machen, wodurch die Unterschiede der Polhöhen, welche man bei den Messungen der Meridiangrade mit aller möglichen Genauigkeit zu bestimmen wünscht, ganz unabhängig von den Fehlern eines Instruments gefunden werden

*) [223 und (Berichtigungen) 232 d. a. Verz.]

können. Ich vermied die Darstellung der Einzelheiten der Methode, weil ich mit Recht voraussetzen durfte, dass Jeder, dem das Allgemeine derselben empfehlend genug scheinen würde, um sie in Ausführung zu bringen, auch leicht Mittel finden würde, sie zweckmässig anzuwenden. Jenem Aufsatze verdanke ich in der That drei ausgezeichnete Versuche dieser Methode: der erste ist auf Herrn Prof. SCHUMACHER'S Veranlassung von Herrn Prof. HANSEN auf Helgoland gemacht und den Lesern der Astr. Nachr. aus Nr. 126 bekannt geworden; die beiden anderen sind von Herrn Prof. STRUVE und von Herrn General TENNER, welche die bei ihnen grossen und vortrefflichen Gradmessungen notwendigen Polhöhenunterschiede auf diese Art bestimmten. Alle drei Anwendungen haben bestätigt was man erwarten durfte, nämlich dass die Methode an sich gut ist. Indem sie durch so ausgezeichnete Beobachter in die astronomische Praxis eingeführt und dadurch empfohlen ist, so glaube ich, dass sie in allgemeinere Anwendung kommen und auch zu anderen Zwecken dienen wird. Aus diesem Grunde erlaube ich mir, den allgemeinen Gebrauch des Passageninstrumentes näher zu erläutern und mehr im Einzelnen anzugeben, wie ich mir die Anwendung desselben denke.

2.

Jeder astronomische Gebrauch, den man von einem Passageninstrumente machen kann, besteht darin, dass man die Eintrittszeiten von Sternen in die Curven beobachtet, welche die Fäden des Instruments, durch die Drehung desselben um seine Axe, an der Himmelskugel beschreiben.

Um dieses so ausdrücken zu können, dass die Berechnung der Beobachtungen in allen Fällen darauf gegründet werden kann, werde ich eins der Enden der Axe von dem anderen unterscheiden und es das Kreisende nennen. Diese Benennung bezieht sich bei Instrumenten dieser Art, welche einen Höhenkreis tragen, auf das Ende der Axe, wo er befestigt ist; bei anderen, welche durch andere Mittel auf die Höhen der Sterne gestellt werden, mag ein willkürlicher Unterschied des einen Endes der Axe vom anderen angebracht, und das dadurch bezeichnete Ende, wenn auch ungenügend, das Kreisende benannt werden. Für die Axe des Instrumentes nehme ich die Mittelpunkte der Zapfen, um welche dasselbe sich dreht, verbindende gerade Linie. Die Lage dieser Linie gegen den Horizont bezeichne ich durch ihr Azimuth a und durch ihre Zenithdistanz $90^\circ - b$ oder ihre Erhöhung über dem Horizont b . Damit keine Zweideutigkeit entstehe, beziehe ich beide

Angaben auf die Richtung der Axe, welche vom Mittelpunkt des Instruments nach dem Kreisende genommen ist; das Azimuth wird von Norden rechts herum von 0 bis 360° gezählt.

Bezeichnet man ferner das Azimuth und die Zenithdistanz eines Sterns im Augenblicke seines Durchgangs durch einen der Fäden durch e und z , den Winkel zwischen der Collimationslinie und der Axe, immer auf das Kreisende bezogen, durch $90^\circ + c$, die Entfernung des Fadens von der Collimationslinie, positiv genommen, wenn er sich auf der Seite derselben befindet wo das Kreisende ist, durch f , so ist die beobachtete Entfernung des Sterns von dem Punkte der Himmelskugel, dessen Azimuth $= a$ und Zenithdistanz $= 90^\circ - b$ ist, $= 90^\circ + c + f$, wodurch man erhält:

$$-\sin(c+f) = \sin b \cos z + \cos b \sin z \cos(e-a) \dots (1)$$

Drückt man x und e durch die Polhöhe φ , die Declination δ und den Stundenwinkel t des Sterns, von der oberen Culmination nach der Richtung der täglichen Bewegung gezählt, aus:

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ \sin x \cos c &= \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t \\ \sin x \sin c &= -\cos \delta \sin t \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

so nimmt die Gleichung (1) die Gestalt an, welche die Einführung der unmittelbar beobachteten Zeit ihr gibt, nämlich:

$$\begin{aligned} -\sin(c+f) &= \sin b [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t] \\ &\quad + \cos b \cos a [\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t] \\ &\quad - \cos b \sin a \cos \delta \sin t \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Durch das Passageninstrument kann nichts anderes erlangt werden, als was diese Gleichung enthält; aus ihr müssen also die Vorschriften zur Berechnung aller Anwendungen desselben abgeleitet werden können. Dass man ihr übrigens noch eine andere Form geben kann, indem man den Ort des Pols der Drehungsaxe durch andere Data, z. B. durch seinen Stundenwinkel und seine Declination bestimmt, ist einleuchtend.

3.

Der Stundenwinkel t ist, wenn T die Zeit der Uhr, θ ihre Reduction auf Sternzeit und α die gerade Aufsteigung des Sterns bedeuten:

$$t = T + \theta - \alpha \dots \dots \dots (4)$$

Diese Grössen nehme ich nicht in Stunden, Minuten und Secunden der Zeit ausgedrückt, sondern durch Multiplication mit 15 in Grade und ihre Minuten und Secunden verwandelt an. Im Allgemeinen ist θ veränderlich, ausser wenn der Gang der Uhr vollkommen

der Sternzeit entspricht; bezeichnet man den Werth jeder Secunde der Uhr, in Sternzeit ausgedrückt, durch $1 + t$, so verwandelt sich die Correction der Angabe derselben, wenn sie für eine bestimmte Uhrzeit, z. B. eine volle Stunde, θ ist, nach Verlauf der Uhrzeit h in $\theta + ih$. Diese Veränderung von θ nehme ich der Uhrzeit selbst hinzugefügt an, so dass in dem Ausdrucke von t , θ unveränderlich und für eine bestimmte Zeit der Uhr gültig ist. Nimmt man daher den Ort des Sterns als bekannt an, sowie auch c , f und b , so enthält die Gleichung (3) die unbekannt Grössen a , φ , δ , wovon zwei durch zwei Beobachtungen bei verschiedenen Neigungen des Instruments gegen den Horizont gefunden werden können. Alle drei unbekannt Grössen können aber nicht zugleich, durch drei oder mehrere Beobachtungen bei unveränderter Lage der Axe, bestimmt werden; denn wenn sie sämmtlich unbekannt sind, so ist in der Gleichung nichts Bekanntes, was sich auf den Meridian bezieht, so dass dieser in der That jeder beliebige durch den Pol gehende grösste Kreis sein kann.

Wenn man aber entweder φ oder δ als bekannt annimmt, so kann a eliminiert und das unbekannt angenommene bestimmt werden. Dieses kann man durch einfache Ausdrücke erlangen, wenn man die Sterne als in der Collimationslinie selbst beobachtet, diese als senkrecht auf der Axe und die Axe als horizontal annimmt. Ich werde aber die zusammengesetzteren Ausdrücke angeben, welche man erhält, wenn man diese Voraussetzung nicht macht. Um dieses nicht unnütz erscheinen zu lassen, bemerke ich, dass, wie die Herren HANSTEEN und SCHUMACHER mit Recht erinnert haben, die zweckmässigste Anwendung eines transportablen Passageninstruments zur Zeitbestimmung darin besteht, dass man es nicht in den Meridian, sondern in ein Azimuth stellt, welches erlaubt, die eine Beobachtung an einem der beiden Polarsterne, wie sie auch gegen den Meridian stehen mögen, die andere an einem kurz vor- oder nachher durchgehenden Fundamentalsterne zu machen; dabei wird man nicht immer den dem Pole nahen, sich langsam bewegenden Stern durch alle Fäden des Instruments oder durch den mittlern Faden gehen

lassen können, in welchem Falle es also zweckmässig wird, eine Formel zu besitzen, welche die gesuchte Zeitbestimmung gibt, ohne die Reduction des beobachteten Moments auf den mittleren Faden vorauszusetzen. Wie alle bei einem Sterndurchgange beobachteten Momente in ein einziges vereinigt werden können, werde ich unten zeigen; hier aber mag das angeführte Beispiel mich entschuldigen, wenn ich c , f , b für beide Sterne verschieden annehme, und überdies die Vorschrift zur Rechnung für die beiden Fälle entwickle, wo man die Axe bei beiden Beobachtungen in derselben Lage gelassen und wo man sie zwischen denselben umgelegt hat.

4.

Im ersten Falle ist für den einen Stern, nach (1), wenn man um abzukürzen p für

$$\frac{\sin(c+f) + \sin b \cos z}{\cos b}$$

schreibt

$$-p = \sin z \cos(c-a)$$

und für den anderen

$$-p' = \sin z' \cos(c'-a)$$

woraus man durch Multiplication mit $\sin z' \sin(c'-a)$ und $\sin z \sin(c-a)$ und durch Subtraction der Producte

$$\begin{aligned} \sin z \sin z' \sin(c'-c) &= -p \sin z' \sin(c'-a) \\ &+ p' \sin z \sin(c-a) \end{aligned}$$

erhält. Im andern Falle verwandelt sich a in der zweiten Gleichung in $a + 180^\circ$ und man erhält

$$\begin{aligned} \sin z \sin z' \sin(c'-c) &= -p \sin z' \sin(c'-a) \\ &- p' \sin z \sin(c-a). \end{aligned}$$

Ich werde daher

$$\sin z \sin z' \sin(c'-c) = q$$

schreiben, wo

$$q = -p \sin z' \sin(c'-a) \pm p' \sin z \sin(c-a)$$

ist und das obere Zeichen gilt, wenn die Axe zwischen den Beobachtungen nicht umgelegt, das untere wenn sie umgelegt worden ist.

Eliminiert man z , z' , c , c' durch die Gleichungen (2), so erhält man hieraus

$$\sin \varphi \cos \delta' \cos \delta \sin(t'-t) + \cos \varphi (\cos \delta \sin \delta' \sin t' - \cos \delta' \sin \delta \sin t) = q$$

oder, wenn man

$$t' + t = 2s, \quad t' - t = 2u$$

setzt,

$$\sin \varphi \cos \delta' \cos \delta \sin 2u + \cos \varphi (\sin(\delta' - \delta) \cos u \sin s - \sin(\delta' + \delta) \sin u \cos s) = q \dots \dots \dots (5)$$

Setzt man nun noch

$$\begin{aligned} \sin(\delta' - \delta) \cos u &= m \cos M \\ \sin(\delta' + \delta) \sin u &= m \sin M \end{aligned}$$

so zieht die Formel sich in

$$\sin \varphi \cos \delta' \cos \delta \sin 2u + m \cos \varphi \sin(s - M) = q \dots \dots (6)$$

zusammen. Aus (4) hat man übrigens

$$u = \frac{1}{2}(T' - T - \alpha' + \alpha)$$

$$s = \frac{1}{2}(T' + T - \alpha' - \alpha) + \theta.$$

5.

Setzt man φ als bekannt voraus oder wendet man das Instrument zur Bestimmung von θ an, so ist es am vortheilhaftesten, es nahe in den Meridian zu bringen, dieses sowohl wegen des dann klein werdenden Einflusses von φ , als auch weil die Beobachtungsfehler dann die geringste Wirkung erhalten. Man kann daher annehmen, dass a entweder von 90° oder von 270° nicht über eine mässige Zahl von Graden verschieden ist. Dieses vorausgesetzt ist das erste Glied der Formel (6) jedesmal eine kleine Grösse, entweder weil einer der Sterne dem Pole nahe und deshalb der Cosinus seiner Declination klein ist, oder, wenn dieses nicht der Fall, der Unterschied der Stundenwinkel entweder klein oder von 180° wenig verschieden ist; da q von der Ordnung von f, c, b ist, so ist es auch klein, sowie folglich auch $m \cos \varphi \sin(s - M)$. Der Winkel $s - M$ kann daher aus seinem Sinus mit Sicherheit erkannt werden, wenn der Beobachtungsort nicht etwa dem Pole sehr nahe liegt und daher $\cos \varphi$ sehr klein ist; in diesem Falle kann aber durch keine Methode eine so sichere Zeitbestimmung erlangt werden, als wenn die Polhöhe kleiner ist.

Man hat also

$$\sin(s - M) = -\frac{q \varphi}{m} \cos \delta \cos \delta' \sin 2u + \frac{q}{m \cos \varphi}$$

Inzwischen ist diese Auflösung der Aufgabe indirect, indem im Ausdrucke von q die Zenithdistanzen und Azimuthe der Sterne und das Azimuth der Axe vorkommen. Will man alles dieses aus der Rechnung schaffen, so wird die Auflösung langsamer als die indirecte, deren Durchführung im Allgemeinen darin besteht, dass man den in der Voraussetzung $q = 0$ erhaltenen Werth von θ zur Berechnung von s, c, s', e' (2) und a (1) anwendet, damit q näherungsweise berechnet und einen genaueren Werth von θ sucht u. s. w. Allein die wirkliche Wiederholung der Rechnung wird nicht nöthig sein, indem theils $\sin s \sin(c - a)$ den Sinus des Perpendikels, von dem Sterne auf den im Azimuthe a gezogenen Verticalkreis gefällt, ausdrückt, welches Perpendikel der Zenithdistanz des Sterns so nahe gleich ist, dass man seinen Sinus $= \pm \sin s$ setzen kann; theils aber auch die Grösse q eine kleine Grösse von der Ordnung f, c, b ist. Setzt man nun noch den Werth von s , welcher $q = 0$ entspricht $= s'$, so hat man

$$\sin(s - M) - \sin(s' - M) = \frac{q}{m \cos \varphi}$$

oder

$$2 \sin \frac{1}{2}(s - s') = \frac{q}{m \cos \varphi \cos \left(\frac{s + s'}{2} - M \right)}$$

wofür man ohne merklichen Fehler

$$s = s' + \frac{q}{m \cos \varphi \cos(s' - M)}$$

schreiben kann, weil wegen des kleinen Werthes von $s' - M$ sein Cosinus, durch die Vernachlässigung von $\frac{1}{2}(s - s')$, nur unbedeutend geändert wird.

Der Ausdruck von q ist, in den beiden abgesonderten Fällen,

$$q = -\frac{\sin(c + f) + \sin b \cos z}{\cos b} \sin z' \sin(c' - a)$$

$$\pm \frac{\sin(c' + f') + \sin b' \cos z'}{\cos b'} \sin z \sin(c - a);$$

verwechselt man die Sinus der kleinen Winkel $c + f$ und b mit den Bögen, und schreibt man 1 für $\cos b$, welches in allen vorkommenden Fällen erlaubt sein wird, so ist, nach der obigen Bemerkung, für beide Fälle

$$q = (c' + f' + b' \cos z') \sin z - (c + f + b \cos z) \sin z'. \quad (7)$$

wobei man nur die Regel zu befolgen hat, die Zenithdistanzen positiv anzunehmen, wenn sie rechts vom Kreisende der Axe liegen, negativ wenn sie links liegen. Man hat also aus dem Vorhergehenden folgende Rechnungsvorschrift:

$$m \cos M = \sin(\delta' - \delta) \cos \frac{1}{2}(T' - T - \alpha' + \alpha)$$

$$m \sin M = \sin(\delta' + \delta) \sin \frac{1}{2}(T' - T - \alpha' + \alpha)$$

$$\sin N = -\frac{q \varphi}{m} \cos \delta' \cos \delta \sin(T' - T - \alpha' + \alpha)$$

$$\theta = N + M - \frac{1}{2}(T' + T - \alpha' - \alpha) + \frac{q}{m \cos \varphi \cos N} \dots \quad (8)$$

6.

Setzt man dagegen θ als bekannt voraus, oder wendet man das Instrument zur Bestimmung von φ an, so ist es am zweckmässigsten, die Axe desselben nahe in den Meridian zu bringen. Die Beobachtungen bestimmen nämlich nichts anderes, als die Entfernung des Pols von dem auf die Axe des Instruments senkrechten grössten Kreise; diese ist eine Kathete eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen Hypothenuse die Entfernung des Pols vom Zenith ist, der der genannten Kathete entgegenstehende Winkel ist der Durchschnittswinkel des Meridians und des grössten Kreises, welchen das Instrument beschreibt. Man erhält aber die gesuchte Hypothenuse aus der beobachteten Kathete desto sicherer und unabhängiger vom

Winkel am Pole, oder, was auf dasselbe hinausläuft, von θ , je näher der grösste Kreis des Instruments und der Meridian sich im rechten Winkel durchschneiden.

Dividirt man die Gleichung (5) durch ihr erstes Glied, so ergibt sie

$$\sin \varphi - \cos \varphi \left(\frac{\sin(\delta' + \delta) \cos s}{2 \cos \delta' \cos \delta \cos u} - \frac{\sin(\delta' - \delta) \sin s}{2 \cos \delta' \cos \delta \sin u} \right) = \frac{q}{\cos \delta' \cos \delta \sin 2u};$$

oder, wenn man von dem Ausdrucke ausgeht, aus welchem (5) abgeleitet wurde, auch

$$\sin \varphi - \cos \varphi \left(\frac{\operatorname{tg} \delta' \sin t'}{\sin 2u} - \frac{\operatorname{tg} \delta' \sin t''}{\sin 2u} \right) = \frac{q}{\cos \delta' \cos \delta \sin 2u}.$$

Setzt man den in $\cos \varphi$ multiplicirten Factor = $\operatorname{tg} \varphi'$, so hat man hieraus

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{q \cos \varphi'}{\cos \delta' \cos \delta \sin 2u}$$

oder, ohne merklichen Fehler

$$\varphi = \varphi' + \frac{q \cos \varphi'}{\cos \delta' \cos \delta \sin 2u} \dots \dots \dots (9)$$

Der Ausdruck von q ist durch die Formel (7) gegeben, und die Zeichen von z und z' werden wieder so genommen, wie diese Formel voraussetzt.

Hierbei bietet sich nun die Bemerkung dar, auf welcher der eigentliche Werth der Methode beruht. Wenn man nämlich, statt zweier Sterne, einen, aber auf beiden Seiten des Meridians beobachtet, so wird

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \delta \frac{\cos s}{\cos u} \\ \varphi &= \varphi' + \frac{q \cos \varphi'}{\cos \delta^2 \sin 2u} \dots \dots \dots (10) \end{aligned} \right\}$$

Will man nun nicht annehmen, dass das Instrument von aller Biegung der Axe frei ist, so ist c von der Zenithdistanz abhängig; will man die Zapfen nicht als vollkommen rund annehmen, so ist auch b davon abhängig. Allein beide Fehler mögen beschaffen sein wie man will, so ist klar, dass wenn man die Axe umlegt, ohne die Neigung des Instruments gegen den Horizont zu ändern, ihr Azimuth sich genau um 180° verändert; c aber denselben Werth behält, welchen es vor der Umlegung hatte; und der Unterschied von b in beiden Lagen, von dem Mittel der Neigungen der Axe, welche zwei Nivellirungen in entgegengesetzten Lagen der Axe, aber gleichen Zenithdistanzen (z. B. beide in der horizontalen Lage des Fernrohrs) ergeben, gleich ist. Setzt man nun diese mittlere Neigung und ebenso f für jetzt bei Seite, so wird

$$q = (c + b \cos z') \sin z - (c + b \cos z) \sin z';$$

$$c + f + b \cos z + \vartheta \sin z \cos(e - a) = -\mathcal{A} \sin z \sin(e - a) + \mathcal{A} \varphi \cos z \cos a + \mathcal{A} \theta \cos \delta (\cos t \sin a - \sin t \cos a \sin \varphi) \dots (11)$$

es wird also verschwinden, wenn z und z' gleich sind und gleiches Zeichen haben. Das erste wird dadurch erlangt, dass man den Stern im ersten Vertical auf beiden Seiten des Meridians beobachtet; das zweite durch die Umlegung der Axe zwischen beiden Beobachtungen. Wenn man also so verfährt, so wird das Resultat ganz frei von den Fehlern des Instruments, ohne dass man diese zu kennen braucht.

Herr Professor HANSEN, dessen schönen Aufsatz über diese Materie in Nr. 126 der Astr. Nachr. ich oben schon erwähnt habe, hat in Helgoland vorgezogen, die Axe während eines Tages in gleicher Lage zu lassen, und die auf beiden Seiten des Meridians beobachteten Sterne an einem andern Tage, bei umgelegter Axe, noch einmal zu observiren; die Furcht, dass das Umlegen die Lager verrücken möchte, veranlasste ihn, dieser Anordnung der Beobachtungen den Vorzug zu geben. — Wo diese Furcht gegründet ist, versteht es sich von selbst, dass man das Instrument zwischen zusammengehörigen Beobachtungen nicht umlegen darf; erlaubt aber die Festigkeit des Stativs das Umlegen, so erlangt man dadurch den Vortheil, dass jede einzelne durch einen Stern erhaltene Bestimmung der Polhöhe von den Fehlern des Instruments ganz frei ist. — Für das Endresultat aus allen Beobachtungen ist es gleichgültig, welche Anordnung man trifft.

7.

Was ich in den drei letzten Artikeln gesagt habe, wird vielleicht seltener angewandt werden, als eine Auflösung der beiden dort abgehandelten Aufgaben, welche von näherungsweise bekannten Werthen von a , φ , θ ausgeht und ihre Verbesserungen $\mathcal{A}a$, $\mathcal{A}\varphi$, $\mathcal{A}\theta$ so bestimmt, dass sie alle gemachte Beobachtungen am vorthellhaftesten darstellen.

Berechnet man mit Näherungswerthen von φ und θ das Azimuth und die Zenithdistanz eines Sterns im Augenblicke seiner Beobachtung, welches durch die Formeln

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos t &= g \sin G \\ \sin \delta &= g \cos G \\ \cos z &= g \sin(G + \varphi) \\ \sin z \cos e &= g \cos(G + \varphi) \\ \sin z \sin e &= -\cos \delta \sin t \end{aligned}$$

gesehen kann, so erhält man durch Differentirung von (1) und (2), und wenn man das bei der wirklichen Anwendung unmerklich werdende weglässt,

wo das nicht unmittelbar in Secunden ausgedrückte Glied mit $\rho = 206264,8$ multiplicirt worden ist, um ihm ein gleiches Maass mit den übrigen zu geben.

Jeder beobachtete Antritt an einen Faden gibt eine Gleichung dieser Art; was darin links vom Gleichheitszeichen steht, ist der Ueberschuss der Entfernung des Sterns vom Pole der Axe über einen Quadranten, noch mit dem Einflusse der unbekanntnen Grössen Δa , $\Delta \varphi$, $\Delta \theta$ behaftet. Löst man alle diese durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auf, so sollte man eigentlich auch einer jeden derselben ein anderes Gewicht beilegen, indem die Fehler im Schätzen der Zeit der Uhr auf die Entfernung des Sterns vom Pole der Axe einen desto grössern Einfluss erhalten, je schneller diese Entfernung sich ändert. Man sollte also, um allen Beobachtungen ihr wahres Stimmrecht zu geben, eine Untersuchung über den wahrscheinlichen Fehler, insofern er durch die Schnelligkeit, womit die Sterne die Fäden durchschneiden, geändert wird, der Berechnung voranzugehen lassen. Ob dieses der Rechner thun will, muss ihm selbst überlassen bleiben; ich gestehe aber, dass ich nicht glaube, dass die Resultate der Untersuchung dadurch eine merkliche Verbesserung erhalten werden.

Will man von dieser vortheilhaftesten Benutzung der Beobachtungen etwas aufopfern, so kann man die durch die verschiedenen bei einem Durchgange beobachteten Fäden erhaltenen Gleichungen in eine einzige zusammen-

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum \cos t &= \cos(T + \theta - \alpha) \frac{1}{n} \sum \cos h - \sin(T + \theta - \alpha) \frac{1}{n} \sum \sin h \\ \frac{1}{n} \sum \sin t &= \sin(T + \theta - \alpha) \frac{1}{n} \sum \cos h + \cos(T + \theta - \alpha) \frac{1}{n} \sum \sin h \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$k \cos x = \frac{1}{n} \sum \cos h$$

$$k \sin x = \frac{1}{n} \sum \sin h$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum \cos t &= k \cos(T + x + \theta - \alpha) \\ \frac{1}{n} \sum \sin t &= k \sin(T + x + \theta - \alpha) \end{aligned}$$

und hiermit verwandelt sich das arithmetische Mittel aus allen Gleichungen, wenn man noch

$$\gamma \cos \delta = k \cos \delta$$

$$\gamma \sin \delta = \sin \delta$$

setzt, in

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\gamma} - \frac{1}{\gamma n} \sum f &= b \{ \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(T + x + \theta - \alpha) \} \\ &+ \cos a \{ \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos(T + x + \theta - \alpha) \} \\ &- \sin a \cos \delta \sin(T + x + \theta - \alpha). \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ziehen. Ich werde zwei Methoden angeben, welche dieses leisten.

8.

Die erste Methode, welche vorzüglich zweckmässig zu sein scheint, setzt voraus, dass man statt aller Gleichungen, welche ein Durchgang eines Sterns gibt, das arithmetische Mittel aus ihnen in Rechnung bringen will.

Indem man unter t die verschiedenen bei einem Durchgange beobachteten Stundenwinkel versteht, und unter f die Entfernungen der verschiedenen Fäden von der Collimationslinie, mit dem Zeichen genommen, welches der 2. Artikel verlangt, und in Bogensekunden ausgedrückt, hat man das arithmetische Mittel aus den n Gleichungen, welche der Durchgang des Sterns ergibt:

$$\begin{aligned} -c - \frac{1}{n} \sum f &= b (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \frac{1}{n} \sum \cos t) \\ &+ \cos a (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \frac{1}{n} \sum \cos t) \\ &- \sin a \cos \delta \frac{1}{n} \sum \sin t \end{aligned}$$

Versteht man, um kein neues Zeichen einzuführen, jetzt unter T das arithmetische Mittel aus allen beobachteten Momenten, und unter $T + h$ jedes einzelne derselben, so ist

$$\begin{aligned} \cos t &= \cos(T + \theta - \alpha) \cos h - \sin(T + \theta - \alpha) \sin h \\ \sin t &= \sin(T + \theta - \alpha) \cos h + \cos(T + \theta - \alpha) \sin h \end{aligned}$$

also auch

Dieses ist der Form nach dieselbe Gleichung, welche jede einzelne Beobachtung ergibt. Ich werde jetzt die bequemsten Mittel angeben, δ , x und γ zu finden.

Indem die Summe aller h verschwindet, kann man für die obigen Ausdrücke für k und x folgende setzen:

$$\begin{aligned} k \cos x &= 1 - \frac{2}{n} \sum \sin^2 \frac{1}{2} h^2 \\ k \sin x &= -\frac{1}{n} \sum (h - \sin h) \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $k \sin x$ von der Ordnung von h^2 , sein Quadrat aber von der Ordnung von h^4 und daher eine ganz unbedeutende Grösse ist, wenn die Verweilung des Sterns zwischen den Fäden nicht, wie es ganz in der Nähe des Poles sein könnte, sehr lange dauert. Vernachlässigt man diese kleine Grösse, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} k &= 1 - \frac{2}{n} \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2 \\ x &= -\frac{1}{n} \Sigma (h - \sin h) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

und da

$$\operatorname{tg} \bar{\delta} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$$

ist, nach einer bekannten Entwickelung,

$$\bar{\delta} = \delta + \varphi \frac{1-k}{1+k} \sin 2\delta + \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \sin 4\delta + \text{etc.} \dots$$

Substituirt man hierin den Ausdruck von k , so wird

$$\bar{\delta} = \delta + \frac{\varphi \frac{1}{n} \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2}{1 - \frac{1}{n} \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2} \sin 2\delta + \text{etc.} \dots (14)$$

Endlich wird

$$\gamma = \frac{1 - (1-k) \cos \delta^2}{\cos(\delta - \bar{\delta})}$$

wo man den Nenner = 1 setzen kann und dann erhält

$$\gamma = 1 - \frac{2}{n} \cos \delta^2 \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2 \dots \dots \dots (15)$$

Um diese Grössen bequem berechnen zu können, gebe ich am Ende dieses Aufsatzes eine Tafel, deren erste Columne

$$\varphi \sin \frac{1}{2} h^2,$$

die zweite

$$-(k - \varphi \sin h)$$

enthält. Das Argument dieser Tafel ist der Unterschied jedes einzelnen Moments von dem Mittel aus allen, der Bequemlichkeit wegen in Zeit ausgedrückt; die erste Abtheilung der Tafel wird angewandt, wenn die Uhr nach Sternzeit, die andere, wenn sie nach mittlerer Zeit geht.*) Man nimmt für jedes Moment die Zahlen der Tafel und dividirt ihre Summe durch die Anzahl der Momente, wodurch man

$$\varphi \frac{1}{n} \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2 \text{ und } x$$

erhält. Das erste ist sehr nahe der Coefficient von $\sin 2\delta$ im Ausdrucke von $\bar{\delta}$; man erhält denselben aber genauer, wenn man noch folgende Verbesserung hinzufügt, deren Hälfte auch der Coefficient von $\sin 4\delta$ ist:

$\varphi \frac{1}{n} \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2$ Verbesserung	$\varphi \frac{1}{n} \Sigma \sin \frac{1}{2} h^2$ Verbesserung
10°	0,000
20	+ 0,002
30	+ 0,004
40	+ 0,008
50	+ 0,012
60	+ 0,017
70	+ 0,024
80	+ 0,031
90	+ 0,039
100	+ 0,048
110°	0,059
120	+ 0,070
130	+ 0,082
140	+ 0,095
150	+ 0,109
160	+ 0,124
170	+ 0,140
180	+ 0,157
190	+ 0,175
200	+ 0,194

Der Divisor γ der Glieder der Formel (12), welche links vom Gleichheitszeichen stehen, ist immer so wenig von Eins verschieden, dass man ihn bei der Kleinheit dieser Glieder = 1 setzen kann. Meistens wird auch x unmerklich sein; es verschwindet ganz, wenn die Beobachtungsmomente um das mittlere symmetrisch vertheilt sind. Bei der Anwendung des Instruments zur Zeitbestimmung wird man nur für die dem Pole nahe stehenden Sterne $\bar{\delta}$ statt δ anwenden dürfen, indem eine kleine Aenderung der Declination der entfernteren ohne Einfluss auf das Resultat bleibt.

Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens der Formel (12) befinden sich die Grössen

$$-c - \frac{1}{n} \Sigma f_i$$

die zweite wird = 0, wenn man den Stern an allen Fäden beobachtet hat und die Collimationslinie nicht auf den mittleren Faden, sondern auf den Punkt des Netzes bezieht, für welchen die Summe der positiven Fädenabstände eben so gross ist als die der negativen. In der That gewährt dieses den Vortheil, dass man bei dem Gebrauche eines Passageninstruments zu Meridianbeobachtungen das Mittel aus den Antrittszeiten an alle Fäden nicht weiter zu reduciren braucht; auch bestimmt man die Entfernungen der Fäden von diesem Punkte vortheilhafter, als ihre Entfernungen vom mittleren Faden, indem man die an einem derselben beobachtete Antrittszeit mit dem Mittel aus allen vergleicht. Doch sieht man leicht, dass, wenn man auch die Collimationslinie durch den mittleren Faden bestimmt, dieser Vortheil darum nicht verloren geht.

9.

Die im vorigen Artikel erläuterte Methode, die an verschiedenen Fäden gemachten Beobachtungen auf ein einziges Moment zu reduciren, empfiehlt sich nicht nur durch die Leichtigkeit der Rechnung, sondern auch dadurch, dass sie das Azimuth des Instruments und die Stundenwinkel der Sterne nicht als bekannt voraussetzt.

*) Ich habe diese Tafel so weit ausgedehnt, dass sie hinreicht, wenn die äussersten bei einem Durchgange beobachteten Momente von dem Mittel aus allen nicht über 10 Minuten entfernt sind. Für grössere Zeitunterschiede, bis 24 Minuten, habe ich die bei der Rechnung anzuwendenden Logarithmen gegeben. Vollständig kann man die Tafel nicht machen, da das Verweilen der Sterne zwischen den Fäden mit der Annäherung derselben an den Pol immer zunimmt und am Ende unbegrenzt wird.

Sie gibt aber nicht das Resultat jedes einzelnen Fadens, sondern das mittlere aus allen Fäden.

Gewöhnlich wird man diese Vergleichung der verschiedenen Fäden unter einander entbehren können; will man sie haben, so kann man folgendes anwenden. Wenn man den Stundenwinkel des Sterns bei seinem

$$-c = b(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) + \cos a(\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t) - \sin a \cos \delta \sin t$$

$$-c - f = b(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) + \cos a(\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t) - \sin a \cos \delta \sin t$$

und durch Subtraction beider Ausdrücke

$$f = 2 \sin \frac{1}{2}(t-t') \cos \delta \left\{ \sin a \cos \frac{1}{2}(t+t') - (\cos a \sin \varphi - b \cos \varphi) \sin \frac{1}{2}(t+t') \right\}.$$

Setzt man nun

$$\cos a \sin \varphi - b \cos \varphi = m \cos M$$

$$\sin a = m \sin M$$

wobei man aber $b \cos \varphi$ immer wird vernachlässigen können, so wird

$$f = -2 \sin \frac{1}{2}(t-t') \cos \delta \cdot m \sin \left(\frac{t'+t}{2} - M \right)$$

oder

$$2 \sin \frac{1}{2}(t-t') = \frac{-f}{m \cos \delta \sin \left[\frac{t-t'}{2} - M \right]} \dots \dots (16)$$

Dieser Ausdruck lässt sich bequem berechnen, wenn mehrere Fäden beobachtet sind, weil alsdann die Beobachtung selbst $t'-t$ genau genug ergibt, um es im Nenner der Formel anwenden zu können; wenn dieses aber auch nicht der Fall ist, so ist die bekannte Art, solche indirecte Auflösungen anzuwenden, leichter, als die directe Bestimmung von $t'-t$, welche man durch die vollständige Auflösung der Gleichung (16) erhalten würde.

Bei dieser Gelegenheit mache ich darauf aufmerksam, dass es bequem sein wird, die beobachteten Antrittzeiten an die Fäden nicht sowohl nach der Zeitfolge, als nach der Folge der Fäden, so wie sie von der Seite des Kreisendes der Axe nach dem entgegengesetzten fortschreiten, zu registriren; diese Einrichtung macht es unnöthig, bei der Berechnung aus anderen Gründen zu entscheiden, ob ein beobachteter Faden auf der positiven oder negativen Seite der Collimationslinie ist. Auch wird man anmerken, dass der Stern rechts oder links vom Kreisende der Axe beobachtet worden ist.

10.

Ich werde nun angeben, wie man meiner Meinung nach verfahren muss, wenn man die Polhöhe sehr genau, so wie es zum Behufe der Gradmessungen gefordert wird, mittelst des Passageninstruments bestimmen will. Hierbei wird weder der Aufwand von Zeit, noch der von vorläufigen Einrichtungen vermieden werden dürfen, insofern beide zur Sicherheit des Resultats beitragen.

Durchgänge durch die Collimationslinie, sie sei nun durch den mittleren Faden, oder durch das Mittel aus allen Fäden bestimmt, durch t bezeichnet; den Stundenwinkel bei dem Durchgange durch einen Faden, dessen Entfernung von der Collimationslinie $= f$, durch t' , so hat man (3)

Den Anfang der Beobachtungen eines jeden Tages mögen einige Sterndurchgänge behufs der Zeitbestimmung machen, wobei also das Instrument in ein Azimuth gestellt wird, welches die Beobachtung von a oder δ Ursae minoris möglich macht. Die Rechnung wird, nachdem die Beobachtungen der verschiedenen Fäden nach dem 8. Artikel auf ein einziges Moment reducirt worden sind, entweder nach (8), oder wenn man zwei oder mehrere Fundamentalsterne beobachtet hat, nach (11) geführt. Will man dabei den Collimationsfehler c nicht als bekannt annehmen, so kann er, durch Wiederholung der Beobachtungen mit umgelegter Axe, unschädlich gemacht werden; $\mathcal{A}\varphi$ wird man nur dann in der Rechnung lassen, wenn man beabsichtigt, nach vollendeter Bestimmung der Polhöhe die kleine davon abhängige Verbesserung noch in Rechnung zu ziehen. In diesem Falle erhält man also δ noch von $\mathcal{A}\varphi$ abhängig und bestimmt den Coefficienten dieser Abhängigkeit.

11.

Die Beobachtungen zur Bestimmung der Polhöhe setzen voraus, dass die Axe des Instruments nahe in den Meridian gelegt werde. Dieses erlangt man am bequemsten durch ein nahe in Osten und Westen aufgerichtetes Zeichen. Allein es scheint mir zweckmässig, ein solches Zeichen auch zur genaueren Erkennung etwaiger Veränderungen der Aufstellung des Instruments anzuwenden und dasselbe so einzurichten, dass man diese Veränderungen daran messen kann. Dieses gilt für die Zeichen der Passageninstrumente im Allgemeinen, welche, wenn sie diese Einrichtung nicht besitzen, eigentlich aufhören, brauchbar zu sein, sobald sie nothwendig werden. Es ist bekannt, dass ich das Meridianzeichen der Königsberger Sternwarte so eingerichtet habe*), und dass dieses Beispiel auch auf andern Sternwarten befolgt worden ist.

*) [Vgl. Abb. 60, p. 21.]

Da man aber nicht annehmen darf, dass ein temporär aufgestelltes Passageninstrument so fest stehe als das Mittagfernrohr einer festen Sternwarte, so wird es nöthig, das Zeichen auch zum Gebrauche bei Nacht tauglich zu machen. Zu diesem Zwecke schlage ich die Aufrichtung einer geschwärzten Metallplatte in nahe horizontaler Richtung und in schicklicher Entfernung vom Instrumente vor, mit einer Reihe von runden Löchern, deren Mittelpunkte in gleicher Entfernung auf einer gegen die Lothlinie geneigten geraden Linie liegen, so dass jedes vom nächsten eine bestimmte Entfernung im Azimuth, z. B. 1" hat. Diese Platte wird für den Nachtgebrauch von hinten erleuchtet; für den Taggebrauch wird sie, wenn sie sich nicht auf den Himmel projectirt, hinten mit weissem Papier bedeckt; sollte es vortheilhaft gefunden werden, die weissen Kreise bei Tage grösser zu haben, als die erleuchteten Löcher bei Nacht, so kann eine mit diesen parallele Reihe von grösseren Öffnungen angebracht werden, deren Mittelpunkte dieselben Azimuthe haben.

Bezeichnet man das Azimuth der mittleren Öffnung der Tafel durch A , die Anzahl Secunden, um welche der mittlere Faden des Instruments rechts (im umkehrenden Fernrohre links) von ihr entfernt ist, durch $\mathcal{A}A$, so ist das Azimuth der Axe

$$a = A + \mathcal{A}A \mp (90^\circ + c + f^{(0)}) \dots (17)$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn das Instrument so auf die Lager gelegt ist, dass das Zeichen sich rechts, das untere wenn es sich links vom Kreisende befindet. Bezieht die Collimationslinie sich auf den mittleren Faden selbst, so ist $f^{(0)} = 0$; nimmt man dafür (Art. 9) den Mittelpunkt des Fadennetzes, so ist $f^{(0)}$ die Entfernung des mittleren Fadens von demselben. Indem man diesen Ausdruck von a zur Berechnung der Beobachtungen anwendet, wird das trotz aller Veränderungen der Aufstellung des Instruments immer gleichbleibende A die unbekannte Grösse; $\mathcal{A}A$ der Formel (11) ist dann die Verbesserung eines angenommenen, der Wahrheit nahe kommenden Werthes von A . Man erlangt also hierdurch auch den Vortheil, Beobachtungen an verschiedenen Tagen mit einander verbinden zu können.

12.

Die Axe nivellirt man immer bei der horizontalen Richtung des Fernrohrs, so dass das Kreisende derselben sich rechts von dem vor dem Oculare stehenden Beobachter befindet. Findet man durch eine wiederholte Anwendung der Wasserwage, in ihren beiden Lagen, den Ausschlag derselben, rechts oder nach dem Kreis-

ende positiv genommen = x , und ist ε der Werth eines Theils der Scale, so ist $b = x\varepsilon$. Allein dieses setzt voraus, dass beide Zapfen gleiche Durchmesser haben; hät aber der Zapfen am Kreisende den Halbmesser r , der andere r' , und haben die Lager des Instrumentes (\vee) den Winkel $2i$, die der Wasserwage $2i'$, so ist

$$lb = h - h' + (r - r') \operatorname{cosec} i^{(*)}$$

wo l die Entfernung der Lager, und h und h' die Erhöhung der Punkte, wo die dieselben bildenden Ebenen zusammenstossen, über einer willkürlichen wagerechten Ebene bedeuten. Da die Wasserwage aber nicht an der Axe selbst angebracht ist, sondern mit ihren Lagern die Zapfen berührt, so ist der von ihr angegebene Höhenunterschied

$$l\varepsilon x = h - h' + (r - r') (\operatorname{cosec} i + \operatorname{cosec} i')^{(*)}$$

Bei umgelegter Axe würde man ihn

$$l\varepsilon x' = h' - h + (r - r') (\operatorname{cosec} i + \operatorname{cosec} i')^{(*)}$$

gefunden haben. Man erkennt also die Gleichheit von r und r' , wenn zwei Nivellirungen in entgegengesetzter Lage der Axe $x + x' = 0$ geben; findet man es nicht $= 0$, so ist es eine beständige Grösse, deren Werth, so wie er im Mittel aus öftern Wiederholungen folgt, ich durch 2ξ bezeichne; man hat also

$$2\xi = x + x'$$

und man erhält nun, indem man $h - h', l, r - r'$ und $x + x'$ eliminiert

$$b = \varepsilon \left(x - \xi \frac{\sin i}{\sin i + \sin i'} \right)^{(*)} \dots (18)$$

Gewöhnlich werden i und i' gleich, am zweckmässigsten = 45° sein. Es ist nicht allgemein üblich, die Wasserwage so einzurichten, dass sie die Zapfen an denselben Stellen berührt, welche auf den Lagern reiben; dieses sollte aber ohne Ausnahme der Fall sein, da dadurch sowohl eine Neigung der Zapfen gegeneinander, als auch eine kegelförmige Gestalt derselben unschädlich werden.

13.

Der Collimationsfehler c verliert, wenn man die Beobachtungen richtig anordnet, d. i. jeden Stern in beiden Lagen der Axe gleich oft beobachtet, allen Einfluss auf das Resultat; weshalb die grössere oder geringere Richtigkeit seiner Bestimmung nur die Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander afficirt.

Will man ihn durch Umlegung der Axe während des Durchgangs eines der beiden Polarsterne bestimmen, so kann man aus derselben Gleichung, aus welcher alle Rechnungsvorschriften für das Passageninstrument fol-

*) [Die Verbesserung dieser Formeln ist von WICHMANN ASTR. Nachr. 30, p. 65 gegeben.]

gen, ableiten, wie man die Umstände der Beobachtung in Rechnung bringen muss, ohne vorauszusetzen, dass das Instrument sehr nahe den Meridian beschreibe. Ich nehme an, dass der Stern in beiden Lagen der Axe an demselben Faden beobachtet ist, dessen bekannter Entfernung von der Collimationslinie = f ; den Stundenwinkel, welcher zu der Beobachtung gehört, bei welcher der Stern rechts vom Kreisende steht, oder dieses in der Nähe des Westpunkts ist, bezeichne ich durch t , den zu der andern gehörenden durch t' ; die Neigungen der Axe gegen den Horizont, in beiden Lagen, durch b und b' . Man hat also (1)

$$-c - f - b \cos z = \sin s \cos(e - a)$$

$$+ c + f + b' \cos z' = \sin s \cos(e' - a);$$

ferner hat man, nach dem vorigen Artikel,

$$b = \epsilon \left(x - \xi + \frac{\xi \sin i'}{\sin i + \sin i'} \right)$$

$$b' = \epsilon \left(-x + \xi + \frac{\xi \sin i'}{\sin i + \sin i'} \right)$$

wofür ich, um abzukürzen, $\beta + \beta'$ und $-\beta + \beta'$ schreiben werde. Eliminiert man a und $\cos a$, so geben die beiden Gleichungen

$$(c + f)m + \beta n + \beta' p = -\sin z \sin z' \sin(e' - e) \cos a$$

$$(c + f)m' + \beta n' + \beta' p' = \sin z \sin z' \sin(e' - e) \sin a$$

wo

$$m = \sin s' \sin e' + \sin z \sin e$$

$$n = \cos z \sin z' \sin e' - \cos s' \sin z \sin e$$

$$(c + f)^2 \cos^2 \gamma^2 \sin Z^2 + 2(c + f)\beta \cos \gamma^2 \sin y \cos \varphi \sin T$$

$$+ 2(c + f)\beta' \cos \gamma \cos Z [\sin Z^2 - \sin^2 \gamma (\sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos T)^2] = \sin \gamma^2 \cos^2 \gamma^2 (\sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos T)^2.$$

Wenn man

$$\cos \varphi \sin d \cos T - \sin \varphi \cos d = \sin Z \cos P$$

$$\cos \varphi \sin T = \sin Z \sin P$$

setzt, so ergibt sie

$$c + f = \varphi \sin y \cos P - \beta \frac{\sin \gamma \sin P}{\sin Z} - \beta' \cos Z \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma \cos^2 P}{\cos \gamma} \right) \dots \dots \dots (19)$$

Der von β abhängige Theil wird selten merklich sein; Fälle wo der Factor von $-\beta' \cos Z$ nicht sollte = 1 gesetzt werden können, werden nicht vorkommen.

14.

Indessen ist es nicht nothwendig, dieses Mittel, oder auch die Beobachtung des aufgerichteten Zeichens, in beiden Lagen der Axe zur Bestimmung von c anzuwenden. Ich würde immer vorziehen, den Winkel der Collimationslinie mit der Axe in der Rechnung so anzunehmen, wie ihn die Reihe der Hauptbeobachtungen selbst ergibt; es kann nämlich sein, dass die Collimationslinie für jede Zenithdistanz ihren eigenthümlichen Werth hat, und in der Nähe des Scheitelpunktes, wo die zur Polhöhebestimmung anzuwendenden Beobacht-

$p = \cos z \sin s' \sin e' + \cos z' \sin z \sin e$
und m', n', p' die ähnlichen Grössen, in welchen aber $\cos e'$ und $\cos e$ für $\sin e'$ und $\sin e$ geschrieben sind, bezeichnen. Die Elimination von a gibt also

$$[(c + f)m + \beta n + \beta' p]^2 + [(c + f)m' + \beta n' + \beta' p']^2 = \sin^2 s' \sin^2 s \sin^2(e' - e)^2$$

woraus $(c + f)$ zu bestimmen ist.

Führt man zwei neue Winkel γ und d ein, so dass

$$\cos \gamma \sin d = \sin \delta$$

$$\cos \gamma \cos d = \cos \delta \cos \frac{1}{2}(t' - t)$$

$$\sin \gamma = \cos \delta \sin \frac{1}{2}(t' - t)$$

und bezeichnet man $\frac{1}{2}(t' + t)$ durch T , sowie das für den Punkt, dessen Stundenwinkel = T und Declination = d , stattfindende Azimuth durch E , seine Zenithdistanz durch Z , so hat man aus (2),

$$\cos s = \cos \gamma \cos Z + \sin \gamma \cos \varphi \sin T$$

$$\sin z \cos e = \cos \gamma \sin Z \cos E - \sin \gamma \sin \varphi \sin T$$

$$\sin z \sin e = \cos \gamma \sin Z \sin E + \sin \gamma \cos T$$

und offenbar ähnliche Formeln für die andere Beobachtung, nur dadurch verschieden, dass die $\sin \gamma$ enthaltenden Glieder das entgegengesetzte Zeichen haben. Hierdurch werden m, n, p, m', n', p' ausgedrückt. Vernachlässigt man die immer unmerklichen Quadrate und Producte von β und β' , so erhält man auf diese Weise die Gleichung

ungen vorzugsweise gemacht werden, anders ist als in der Gegend des Pols oder Horizonts. Für das Endresultat richtig angeordneter Beobachtungen ist dieses, wie ich schon oben bemerkt habe, gleichgültig; allein es ist kein Grund vorhanden, eine Voraussetzung in die Rechnung zu bringen, welche die einzelnen Beobachtungen weniger übereinstimmend erscheinen lassen kann, als sie wirklich sind.

Man kann die Beobachtungen der Polhöhe nun auf zwei Arten berechnen. Die eine besteht darin, dass man immer die beiden an demselben Tage gemachten Beobachtungen eines Sterns combinirt und also nach der Formel (10) rechnet, wobei man jedoch c unbestimmt lässt, und, falls man das Zeichen (Art. 11) angewandt hat, noch ΔA in Rechnung bringt. Dieses

gibt eine Aenderung der Formel (10): man hat nämlich (Art. 4), wenn man (17) substituirt:

$$-p = \sin z \cos \{e - A \pm \Delta A \pm (90^\theta + e^\theta + f^\theta)\}$$

wo, wenn das Instrument nicht in allen Neigungen denselben Collimationsfehler behält, e^θ von c verschieden ist. Trennt man ΔA , f^θ und e^θ von den übrigen Größen unter dem Cosinuszeichen, so erhält man

$$-p - (\Delta A \mp e^\theta \mp f^\theta) \sin z = \sin z \cos \{e - A \pm 90^\theta\}$$

wo links vom Gleichheitszeichen die immer angewandte Regel für das Zeichen der Zenithdistanz gilt. Man hat also statt der Formel (7)

$$q = \{c + f' + b' \cos z + (\Delta A \mp e^\theta \mp f^\theta) \sin z\} \sin z$$

wo das Zeichen von e^θ und f^θ nach dem 11. Art. bestimmt wird; ist es für beide Beobachtungen gleich,

$$f + b \cos z + q \sin z \cos \{e - A - \Delta A \pm (90^\theta + f^\theta)\} = -\Delta a \sin z + \Delta q \cos z \cos \{A \mp 90^\theta\} - c \pm e^\theta \sin z \dots (21)$$

wo der Theil vor dem Gleichheitszeichen ganz bekannt ist. Aus allen Gleichungen dieser Art bestimmt man nach der Methode der kleinsten Quadrate Δa , Δq und c , lässt aber e^θ in der Rechnung unbestimmt. Man erhält seinen Werth unmittelbar aus den Beobachtungen des Zeichens in entgegengesetzten Lagen der Axe, und seine Vergleichung mit c wird zeigen, ob die Collimationslinie in horizontaler und nahe verticaler Lage des Fernrohrs ungeändert bleibt. Auf das Endresultat wird es den Einfluss verlieren, wenn man das Instrument stets in derselben Lage der Axe nach dem Zeichen richtet, in welcher man den Stern beobachtet, wodurch jede vollständige Beobachtung drei Angaben, nämlich den Durchgang des Sterns, die Richtung des Fernrohrs nach dem Zeichen und die Neigung der Axe gegen den Horizont enthält und von der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Lager während einer Umlage ganz frei wird. In keinem Falle wird es übrigens einen erheblichen Fehler erzeugen, wenn man e^θ und c gleich annimmt, weil das erste in den Sinus der Zenithdistanz multiplicirt und daher beträchtlich verkleinert in die Rechnung einght.

Durch dieses Zusammennemen aller Beobachtungen erfüllt man die Bedingung, die durch die Unveränderlichkeit des Azimuths des Zeichens gegeben ist; man bestimmt dieses Azimuth dadurch auf die vortheilhafteste Art. Auch sieht man, nachdem man die gefundenen Werthe der unbekannt Größen substituirt, wie jeder einzelne Durchgang eines Sterns übereinstimmt; so wie man auch den Vortheil erlangt, Beobachtungen auf der einen Seite des Meridians, welche wegen des Wetters oder anderer Hindernisse nicht correspondirend gemacht

oder ist das Instrument bei beiden in derselben Lage der Axe nach dem Zeichen gerichtet worden, so verschwindet e^θ offenbar aus dem Resultate; im anderen Falle kommt $\mp 2e^\theta \sin z \sin z'$ in die Rechnung. Man erhält also φ aus (10) zugleich mit seiner Abhängigkeit von c und e^θ ; nach der Berechnung aller Beobachtungen werden diese Größen bestimmt und aus dem Resultate geschafft.

Die andere Berechnungsart der Beobachtungen besteht darin, dass man alle zusammennimmt, nicht allein die an einem Tage gemachten. Man geht dann von Näherungswerthen von A und φ aus und setzt $\Delta \theta = 0$, wenn man es nicht etwa unbestimmt lassen will, um später noch seinen Einfluss auf A schätzen zu können; ich glaube aber nicht, dass dieses je ein Interesse haben kann. Die Formel (11) wird dann

werden konnten, richtig in die Rechnung zu ziehen. Das Endresultat von $\Delta \varphi$ ist aber, unter der gemachten Voraussetzung der richtigen Anordnung der Beobachtungen, stets dasselbe, man mag so oder anders rechnen. Dieses ist eine Folge des Umstandes, dass, wenn man die Gleichungen (21) zuerst in Beziehung auf den Coefficienten von $\Delta \varphi$ nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, die Coefficienten der beiden übrigen unbekannt Größen im Falle der richtigen Anordnung verschwinden. — Es ist klar, dass man Δa durch Sterne, welche dem Horizonte näher durchgehen, sicherer erhalten wird als durch höhere; allein da dieses aus dem eben angeführten Grunde auf $\Delta \varphi$ keinen Einfluss hat, so kann man die Beobachtung solcher Sterne unterlassen, ausser wenn man eine möglichst sichere Bestimmung von A , zu andern Zwecken, benutzen wollte. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass, wenn unter den verschiedenen in die Untersuchung gezogenen Sternen einer ist, dessen Declination man als sicherer bestimmt voraussetzen kann als die Declinationen der übrigen, diese durch jenen mittelst derselben Beobachtungen gefunden werden können. Es versteht sich, dass dieses nur für die Declinationen, also nicht für die absolute Polhöhe, wohl aber für den Polhöhenunterschied der Beobachtungsorter einer Gradmessung, einen Werth haben kann.

15.

Hier bietet sich die Gelegenheit dar, über die Anwendung des Passageninstruments zur Untersuchung der Declinationen der Sterne etwas zu sagen. Ich zweife nicht, dass man solche Untersuchungen, welche man auf den Zenithsector gegründet hat, mit Vortheil damit vornehmen kann; z. B. die Beobachtungen der

Constante der Aberration. Im Allgemeinen kann man dadurch eine Bedingungsgleichung zwischen der Declination eines Sterns und der Polhöhe für alle Sterne, welche zwischen dem Aequator und dem Zenith culminiren, erhalten, welche von der Strahlenbrechung unabhängig ist, und in welcher der Einfluss der Polhöhe auf die Declination bei dem Uebergange vom Zenith zum Aequator sich von 1 bis zu 0 verändert. Dieses ist die Anwendung, welche den erfindungsreichen RÖMER bewog, ein Passageninstrument senkrecht auf den Meridian aufzustellen. Ich glaube allerdings, dass dergleichen Bedingungsgleichungen für eine Anzahl von Sternen, deren Declinationen man noch auf andere Art bestimmt hat, von Werth sind; allein man darf nicht übersehen, dass alle die Sterne angeschlossen werden müssen, welche so nahe dem Horizonte durch den ersten Verticalkreis gehen, dass die Undeutlichkeit, welche niedrig stehende Sterne immer zeigen, die Genauigkeit der Beobachtung vernichtet. Dadurch wird man gezwungen werden, die Bedingungsgleichungen auf einen geringeren Declinationsunterschied zu beschränken, wodurch der Vortheil weniger erheblich wird; zumal da es jetzt nicht mehr an anderen Mitteln fehlt, nicht sehr grosse Declinationsunterschiede mit aller wünschenswerthen Genauigkeit zu bestimmen.

Auf alle Resultate, welche man aus Beobachtungen mit einem im ersten Verticalkreise aufgestellten Passageninstrumente ziehen kann, hat übrigens die tägliche Aberration keinen Einfluss, indem die Aenderung des Azimuths, welche sie erzeugt, dem Cosinusse desselben proportional ist, also für ein Azimuth von 90° und 270° verschwindet.

16.

Ausser den Anwendungen, welche ich bisher erläutert habe, kann man dem tragbaren Passageninstrumente noch eine geben, welche es Denen empfehlen wird, deren Absicht ist, geographische Bestimmungen ohne grossen Aufwand von Zeit und Instrumenten zu machen. Bei gleicher optischer Kraft des Fernrohrs mit dem eines Messinstruments steht das erstere im Vortheil, wenn die Theilung des letzteren nicht so grosse Genauigkeit gewährt als die Zeitbeobachtung am ersteren. Man erlangt durch das Passageninstrument den Vortheil, die Messungen, welche auf den festen Sternwarten mit grossen und sorgfältig geprüften Instrumenten angestellt sind, auf die zu bestimmenden Punkte übertragen zu können, ohne dem Resultate durch ähnliche Messungen mit kleineren und oft nicht hinreichend geprüften Instrumenten eine Ungleichförmigkeit zu geben. Dass man den Transport eines Baro-

mers und Thermometers, welcher wegen der Strahlenbrechung nothwendig ist, erspart, wird manchem Beobachter nicht unwillkommen sein.

Diese Anwendung des Instruments ist jedoch von den vorigen nur dadurch verschieden, dass man dabei geringeren Aufwand von Zeit und Mitteln voraussetzt. Es käme darauf an, durch Erfahrung das Minimum von beiden zu bestimmen, bei dessen Anwendung man eine gewisse Grenze der Sicherheit der Resultate nicht leicht überschreitet. Ich habe in dieser Absicht im verwichenen Sommer einen Versuch mit einem sehr kleinen Passageninstrumente gemacht; es ist dieses das Fernrohr eines achtzölligen Theodolithen, welches in der ausgezeichneten Werkstatt der Herren PISTOR und SCHIE in Berlin mit einem kleinen Höhenkreise zum Einstellen auf die Sterne und mit einem Stativ versehen wurde, welches so eingerichtet ist, dass es der bequemeren Verpackung wegen in zwei Theile zerlegt werden kann, so dass das Instrument mit allem Zubehör in einem Kasten von 13 Zoll Länge, 10 Z. Breite und 6 Z. Höhe Platz findet. Das Stativ besteht aus einem starken horizontalen Kreise von Messing mit 3 Fusschrauben, in dessen Mitte ein Zapfen von Stahl von 4 Z. Länge aufrecht steht; um diesen drehen sich die beiden Säulen, welche die Axe tragen; sie stehen auf einem starken Stücke von Messing, sind möglichst fest mit einander verbunden und werden, wenn man ihnen das verlangte Azimuth gegeben hat, an den horizontalen Kreis so angeklemt, dass beide Theile gewissermassen ein einziges Stück machen. Diese mit einander verbundenen Säulen werden bei der Verpackung vom Zapfen abgenommen, wodurch es möglich geworden ist, dem Kasten eine so geringe Grösse zu geben. Das Fernrohr hat 5 Fäden und ein Prisma aussen am Oculare, welches um das Ocular gedreht werden kann, damit man auf beiden Seiten des Zeniths beobachten könne, ohne Gefahr die Collimation zu ändern.

Ich habe mit diesem kleinen Instrumente in München und in Marienbad Zeit- und Polhöhenbestimmungen gemacht und mich leicht überzeugt, dass ein Hilfsmittel dieser Art alles leistet, was man in solchen Fällen zu fordern berechtigt ist [s. Astron. Nachr. 9, p. 413 (257 d. a. Verz.)]. Wenigstens ziehe ich es einem achtzölligen Theodolithen oder ähnlichem Kreise eben so sehr der Sicherheit der Resultate wegen vor, als wegen der Bequemlichkeit seiner Anwendung und seines Transports. Die damit gemachten Beobachtungen werde ich bekannt machen, obgleich sie wegen nicht völliger Festigkeit des Tisches, auf welchem es aufgestellt war, nicht die Genauigkeit haben, die sie haben könnten.

Die Zeitbestimmung erhält man, mit einem Instrumente von dieser Grösse, durch die Verbindung eines der beiden Polarsterne mit einem Fundamentalsterne so leicht und sicher als möglich, zumal wenn man zur Zeit des Durchgangs eines andern Sterns beide Beobachtungen mit umgelegter Axe wiederholt, wodurch der Collimationsfehler eliminiert wird. Bei der Bestimmung der Polhöhe habe ich sowohl der Bequemlichkeit wegen, als auch weil auf die Unveränderlichkeit der Aufstellung während einer längeren Zeit nicht gerechnet werden sollte, nicht gewartet bis der im Osten beobachtete Stern im Westen wieder durch das Instrument ging, sondern ich habe unmittelbar nach einem auf der einen Seite des Meridians beobachteten Sterne einen andern auf der andern Seite durchgehen lassen. Beide waren, der Zeit und Zenithdistanz ihres Erscheinens im Fernrohre nach, vorher berechnet. Nach diesen beiden Beobachtungen wurden zwei ähnliche mit umgelegter Axe gemacht, so dass sowohl in Osten als in Westen stets zwei Sterne bei entgegengesetzten Lagen der Axe beobachtet worden sind. Die Berechnung wurde in der Voraussetzung eines für alle vier Beobachtungen gleichen Azimuths der Axe geführt.

Da es immer wünschenswerth ist, dass der Kreis welchen das Instrument beschreibt, nicht sehr weit vom ersten Vertikalkreise entfernt sei, man aber, wegen des vorausgesetzten Mangels aller vorläufigen Anordnungen, über den Ost- oder Westpunkt bis auf mehrere Grade unsicher sein kann, so hatte Herr ERTEL in München die Güte, den Horizontalkreis mit einer Theilung zu versehen, welche keinen andern Zweck hat, als durch die vorangegangene Beobachtung eines der beiden Polarsterne den ersten Vertikalkreis näherungsweise zu erkennen. — Wollte man von der Bequemlichkeit des Transports etwas aufopfern und ein stärkeres Fernrohr, etwa von 18 Zoll, anwenden, so würde dieses auch zur Vergleichung der Rectascensionen des Mondes und benachbarter Sterne, sowie zur Beobachtung von Sternbedeckungen und Finsternissen hinreichen.

17.

Ich glaube nach dem, was ich im vorigen Artikel angeführt habe, urtheilen zu dürfen, dass ein kleines Passageninstrument das bequemste und sicherste Hilfsmittel bei einer geographischen Expedition ist, und dass es andere weit schwieriger zu transportirende Instrumente ersetzt. Ich kann aber diesen Aufsatz nicht schliessen, ohne noch einer Anwendung eines solchen Apparates zu erwähnen, dessen Interesse vermehrt worden zu sein scheint, seitdem HANSTEEN mit eben so viel Erfolg als Eifer den Magnetismus der Erde zum

Gegenstande seiner Forschungen gemacht hat. Man kann nämlich das Azimuth der Axe des Instruments, welches durch die astronomische Anwendung desselben jedesmal bekannt wird (am vortheilhaftesten bei einer Zeitbestimmung) zur Erfindung der Abweichung der Magnetnadel benutzen und also der geographischen Bestimmung eines Ortes diesen Theil der magnetischen hinzuzufügen, welcher wegen des dazu erforderlichen Azimuths ohne diese Einrichtung schwieriger als die übrigen, mit derselben aber sehr leicht wird. Der Scharfsinn unserer mechanischen Künstler wird die zweckmässigsten Mittel entdecken, diese Anwendung des Azimuths zu machen. Ohne denselben vorgreifen zu wollen, werde ich eine Möglichkeit andeuten, den Zweck zu erreichen. Ich denke mir die Nadel aus einem cylindrischen Stahlstabe bestehend, welcher in der Mitte, senkrecht auf seine Axe, durchbohrt ist und mit einem Hütchen auf einer Spitze spielt; das Hütchen ist in einer Hülse angebracht, welche auf den Cylinder aufgeschoben ist und sich um dessen Axe drehen lässt, so dass es auf entgegengesetzte Seiten der Nadel gebracht und diese also in entgegengesetzten Lagen aufgehängt werden kann, wodurch eine Verschiedenheit der Axen der Figur und des Magnetismus unschädlich wird. Den Cylinder denke ich mir an beiden Enden mit feinen auslaufenden Spitzen, oder wenn man die Beschädigung derselben fürchten sollte, mit schmalen Stücken Metall, deren Mitten man genau schätzen kann, versehen. Diese Nadel befindet sich in einer Kapsel von Messing, welche an diametral entgegengesetzten Punkten zwei den Zapfen des Passageninstruments gleiche Zapfen hat; vermittelt dieser wird sie in die Lager des Passageninstruments, deren Azimuth durch die vorangegangene oder folgende astronomische Bestimmung bekannt ist, gelegt. Man erhält dadurch auf einer in der Kapsel angebrachten Kreistheilung, durch Ablesung beider Enden und durch Wiederholung mit umgekehrter Nadel, offenbar das Azimuth der Nadel, vorausgesetzt dass man den Diameter des getheilten Kreises kennt, welcher der Axe parallel ist. Um aber diesen ohne anderweitige Hilfsmittel zu finden, kann man die Theilung auf einer inneren Cylinderfläche von einem die Länge der Nadel sehr wenig übertreffenden Durchmesser anbringen und sowohl den Boden der Kapsel, als auch den Deckel von Glas so einrichten, dass sie mit einander verwechselt werden können. Verwechselt man sie, und dreht man folglich die Kapsel um 180° um ihre Axe, so gibt eine Vergleichung der nun zu machenden Ablesungen mit den vorigen den gesuchten Diameter. Wenn der Apparat fest genug ist, so wird

man die einmal gemachte Bestimmung dieses Diameters nicht jedesmal wiederholen dürfen. Da man bei einer Länge der Nadel von 6 Zoll den Kreis noch sehr deutlich von 10 zu 10 Minuten theilen, und, wenn die Lupen gut angebracht sind, das Zehntel davon, oder eine Minute, ziemlich sicher schätzen kann, so werden No-
men oder mikroskopische Mikrometer ziemlich überflüssig

sein, zumal da eine vollständige Beobachtung das Mittel aus 8 Ablesungen ist. Das das Stativ des Passageninstruments kein Eisen oder Stahl enthalten darf, dass die Nadel für die Neigung äquilibrirt werden muss u. s. w. versteht sich von selbst. Ein solches magnetisches Declinatorium wird den Kasten des Instruments nur unbedeutend vergrößern.

Tafel zur Reduction der an verschiedenen Fäden gemachten Beobachtungen auf ein einziges Moment.

	Sternzeit.		Mittlere Zeit.			Sternzeit.		Mittlere Zeit.					
	I	II	I	II		I	II	I	II				
0 ^m 10 ^s	0,93	0,08	0,00	0,03	0,08	0,00	5 ^m 0	24,54	1,67	0,36	24,68	1,67	0,36
20	0,11	0,14	0,00	0,11	0,14	0,00	10	26,21	1,71	0,40	26,35	1,73	0,40
30	0,25	0,19	0,00	0,25	0,19	0,00	20	27,92	1,78	0,44	28,08	1,78	0,44
40	0,44	0,24	0,00	0,44	0,25	0,00	30	29,70	1,82	0,48	29,86	1,84	0,48
50	0,68	0,30	0,00	0,69	0,30	0,00	40	31,52	1,88	0,52	31,70	1,89	0,52
1 0	0,98	0,36	0,00	0,99	0,35	0,00	50	33,40	1,94	0,57	33,59	1,94	0,57
10	1,34	0,41	0,00	1,34	0,41	0,00	6 0	35,34	1,99	0,62	35,53	2,01	0,62
20	1,75	0,46	0,01	1,75	0,47	0,01	10	37,33	2,05	0,67	37,54	2,05	0,67
30	2,21	0,52	0,01	2,22	0,52	0,01	20	39,38	2,10	0,73	39,59	2,11	0,73
40	2,73	0,57	0,01	2,74	0,58	0,01	30	41,48	2,15	0,79	41,70	2,17	0,79
50	3,30	0,63	0,02	3,32	0,63	0,02	40	43,63	2,21	0,85	43,87	2,22	0,85
2 0	3,93	0,68	0,02	3,95	0,68	0,02	50	45,84	2,26	0,91	46,09	2,28	0,91
10	4,61	0,74	0,03	4,63	0,74	0,03	7 0	48,10	2,32	0,98	48,37	2,33	0,98
20	5,35	0,79	0,04	5,37	0,80	0,04	10	50,42	2,37	1,05	50,70	2,38	1,06
30	6,14	0,84	0,04	6,17	0,85	0,04	20	52,79	2,43	1,12	53,08	2,44	1,13
40	6,98	0,90	0,05	7,02	0,90	0,05	30	55,22	2,48	1,20	55,52	2,50	1,21
50	7,88	0,96	0,06	7,92	0,96	0,06	40	57,70	2,54	1,28	58,02	2,55	1,29
3 0	8,84	1,00	0,08	8,88	1,02	0,08	50	60,24	2,59	1,37	60,57	2,60	1,38
10	9,84	1,07	0,09	9,90	1,07	0,09	8 0	62,83	2,64	1,46	63,17	2,66	1,47
20	10,91	1,12	0,11	10,97	1,12	0,11	10	65,47	2,70	1,55	65,83	2,71	1,57
30	12,03	1,17	0,12	12,09	1,18	0,12	20	68,17	2,75	1,65	68,54	2,77	1,67
40	13,20	1,23	0,14	13,27	1,24	0,14	30	70,92	2,81	1,75	71,31	2,83	1,77
50	14,43	1,28	0,16	14,51	1,28	0,16	40	73,73	2,86	1,86	74,14	2,87	1,88
4 0	15,71	1,33	0,18	15,79	1,35	0,18	50	76,59	2,92	1,97	77,01	2,94	1,99
10	17,04	1,39	0,21	17,14	1,40	0,21	9 0	79,51	2,97	2,08	79,95	2,99	2,10
20	18,43	1,45	0,23	18,54	1,45	0,23	10	82,48	3,03	2,20	82,94	3,04	2,22
30	19,88	1,50	0,26	19,99	1,51	0,26	20	85,51	3,08	2,32	85,98	3,10	2,34
40	21,38	1,55	0,29	21,50	1,56	0,29	30	88,59	3,14	2,45	89,08	3,15	2,47
50	22,93	1,61	0,32	23,06	1,62	0,32	40	91,73	3,19	2,58	92,23	3,21	2,60
5 0	24,54		0,36	24,68		0,36	50	94,92	3,24	2,72	95,44	3,26	2,74
							10 0	98,16		2,86	98,70		2,88

Die Zahlen der Columnne I sind immer positiv, die der Columnne II haben das entgegengesetzte Zeichen des Arguments.

Wenn das Argument, in Zeitsecunden ausgedrückt = a , über die Grenze der Tafel hinausgehen sollte, so kann man dieselbe durch die Formeln

$$\text{Log. Num. Col. I} = P + 21a - 10$$

$$\text{Log. Num. Col. II} = Q + 31a - 10$$

ergänzen, wo P und Q folgende Werthe haben:

	Sternzeit.		Mittlere Zeit.	
	P	Q	P	Q
10 ^m	6,43563	2,1212	6,43800	2,1248
11	61	12	799	48
12	60	12	97	48
13	58	12	96	48
14	56	12	94	47
15	54	12	92	47
16	52	12	90	47
17	50	12	87	47
18	47	11	85	47
19	45	11	82	47
20	42	11	80	47
21	39	11	77	47
22	36	11	74	46
23	33	11	71	46
24	30	10	67	46

65. Erste Leistungen eines auf der Königsberger Sternwarte befindlichen Repsold'schen Meridiankreises.*)

(Astron. Nachr. 21. p. 1.)

Die Königsberger Sternwarte besitzt seit dem November 1841 einen von den Herren A. & G. REPSOLD verfertigten Meridiankreis von 3 Fuss Durchmesser, der neben dem seit 1820 gebrauchten Reichenbach'schen Meridiankreise, 174893 genau westlich von diesem entfernt, aufgestellt worden ist. Die Kreise beider Instrumente und ihre Fernröhre haben gleiche Grösse; auch halte ich die optischen Eigenschaften des neuen Fernrohrs für ebenso ausgezeichnet, als die des älteren mir immer erschienen sind. Aber das Repsold'sche Instrument zeichnet sich vor dem Reichenbach'schen nicht allein durch viel stärkeren und schöneren, auch mit grösserer Sorgfalt vollendeten Bau aus, sondern es unterscheidet sich davon auch in seiner Einrichtung, welche in einer Art anders ist, die, unter der Voraussetzung der Anwendung einer ihr angemessenen Beobachtungsmethode, eine wesentliche Vermehrung der Genauigkeit der Resultate verheisst.

Ich werde im Folgenden die Nothwendigkeit der befolgten Beobachtungsmethode zu rechtfertigen, auch die von dem so angewandten Instrumente zu erwartende Genauigkeit an den Tag zu legen versuchen, endlich eine neue dadurch erlangte Bestimmung der Polhöhe und einige Beobachtungen anderer Art mittheilen. Da aber die Beobachtungsmethode für jeden Apparat das Verfahren sein muss, welches die Eigenthümlichkeiten des Apparats am vortheilhaftesten geltend macht, so kann ich die gegenwärtig angewandte nur zu rechtfertigen hoffen, indem ich eine Vorstellung von der Beschaffenheit des Repsold'schen Instruments hervorbringen suche. Seine auf das Einzelne eingehende Beschreibung würde mehr Raum erfordern als ich hier in Anspruch nehmen kann; auch würde sie für den gegenwärtigen Zweck unnöthig sein.

1.

Die zwischen zwei Pfeilern liegende horizontale Ase des Instruments hat in ihrer Mitte einen 8 Zoll grossen Würfel, von dessen Seiten zwei die Grundflächen von Kegeln sind, die sich in den, in den Lagern ruhenden Zapfen von Stahl cüdigen; zwei andere seiner Sei-

ten sind die Befestigungsflächen der beiden, gleichfalls kegelförmig gestellten Hälften des Fernrohrs. Die Hebel, durch welche REICHENBACH der Biegung des letzteren entgegenwirkte, entbehrt das neue Instrument mit Recht, indem sie nur die Grösse der Biegung vermindern, nicht aber die Untersuchung ihres Einflusses entbehrlich machen können. Die Grundflächen der beiden kegelförmigen Hälften des Fernrohrs sind übrigens an dem Repsold'schen Instrumente so gross, dass keine Biegung von erheblicher Grösse zu erwarten ist. An beiden Enden der Ase befinden sich vollkommen gleiche Kreise, wovon ich aber nur einen zur Messung der Zenithdistanzen der Gestirne zu benutzen beabsichtige; weshalb auch nur einer mit der dazu anzuwendenden Theilung von 2 zu 2 Minuten versehen, der andere aber durch starke, dem blossen Auge hinreichend auffallende Striche von 10 zu 10 Minuten getheilt ist, vermöge welcher er das Mittel wird, dem Instrument eine verlangte Stellung zu geben. An dem Umfange dieses nicht zum Messen dienenden Kreises darf man unbedenklich das Instrument drehen, wodurch seine Einstellung beschleunigt und erleichtert wird; der andere Kreis wird nie von der Hand des Beobachters berührt. Die vollständige Ablesung eines Kreises halte ich für genügend, die zur Ablesung eines zweiten erforderliche Zeit also für verschwendet. Die beträchtliche Mühe, welche die — immer wenn man zu sicheren Resultaten gelangen will unentbehrliche — Untersuchung der Theilungen kostet, wird auch besser einem Kreise zugewandt, als auf zwei vertheilt. Dieses sind die Gründe, die meine von den Herren REPSOLD erfüllte Bitte, den einen der Kreise zum Messen, den anderen zum bequemeren Einstellen des Instruments zu bestimmen, zur Folge hatte.

Das Instrument dient, wie aus dem Gesagten hervorgeht, zugleich zur Beobachtung der Durchgangszeiten und der Zenithdistanzen der Gestirne. In der ersteren Beziehung hat es alle einem Passageninstrumente nöthigen Einrichtungen: ein sehr sicher und bequem eingerichteter Apparat dient zu seiner Umlegung, eine Wasserwage zur Untersuchung der Lage seiner Ase gegen die Ebene des Horizonts. Den festen Verticalfäden des Netzes ist noch ein durch eine Mikrometerschraube beweglicher Faden hinzugesetzt, durch den

*) [369 d. a. Verz. und Auszüge aus Abth. 27 der Königsberger Beob. — Vgl. auch 370 d. a. Verz. (Brief an Sir J. HERSCHEL über REPSOLD's Meridiankreise).]

die Entfernung des mittleren Fadens von seinem von Quecksilber reflectirten Bilde gemessen wird. Durch dieses Mittel wird die Neigung der Absehnslinie des nach dem Nadir gerichteten Instruments gegen die Ebene des Horizonts, und durch ihre Vergleichung mit der Angabe der Wasserwaage der Collimationsfehler bekannt; es gewährt auch die Messung der Lage des Meridianzeichens beziehungsweise auf die Absehnslinie.

Die Theilungen des Kreises werden an vier, 90° von einander entfernten Mikroskopen abgelesen, welche sich an den Ecken eines aus zwei wagerechten und zwei lothrechten Röhren zusammengesetzten Rahmens befinden. Dieser Rahmen ist durch 8 Speichen mit einem in seiner Mitte befindlichen Ringe von etwa 12 Zoll Durchmesser verbunden, welcher innen conisch geformt ist und auf einen, aussen conisch geformten, an jedem der Pfeiler befestigten starken Ring passt; so dass die Mikroskope, sowie die Wendung des zum Messen der Zenithdistanzen bestimmten Kreises es fordert, an den einen oder an den anderen Pfeiler befestigt werden können. Die Axe des Instruments ist in keiner Berührung mit dem die Mikroskope tragenden Rahmen, weshalb diese auch von jedem Einflusse seiner Drehung frei sind. Damit aber Bewegungen der Mikroskope, welche eine Ungleichheit der Wärme des Rahmens notwendig hervorbringen muss, oder welche aus Bewegungen der Pfeiler entstehen können, nicht unerkannt bleiben, befindet sich eine Wasserwaage an der unteren wagerechten Röhre des Rahmens und eine zweite an der oberen.

2.

Die Ablesung der Theilungen des Kreises erlangt durch die Mikroskope eine bewunderungswürdige Genauigkeit; wenn man eins derselben oft wiederholt auf einen Theilstrich einstellt, so ergibt eine Ablesung seines Mikrometers selten eine Verschiedenheit von dem arithmetischen Mittel aller Ablesungen, welche zwei Zehntelsekunden überschreitet. Diese Sicherheit der Ablesung eines Kreises von nicht mehr als 18 Zoll Halbmesser kann nur durch die grösste Lichtstärke und Dichtigkeit der Mikroskope, verbunden mit der vortheilhaftesten Belenchtungsart der Theilungen, und durch Festigkeit und Vollendung der mikrometrischen Einrichtung hervorgebracht werden. Eine ähnliche Sicherheit wurde mir anschaulich, als ich im Jahre 1839 Gelegenheit hatte, den Repsold'schen Meridiankreis zu sehen, dessen sich Herr RÜMCKER auf der Hamburger Sternwarte bedient; sie und der eben so schöne als feste Bau dieses Instruments erzeugten den Wunsch, der

Königsberger Sternwarte den Besitz eines Meridiankreises von ähnlichen Eigenschaften zu erwerben. Denn weitere Verfolgung des Vortheils, welchen die fast vollständige Genauigkeit der Ablesung jeder einzelnen Beobachtung gewährt, zeigte, dass man auch andere der zu ihrem Gesamtfehler zusammenwirkenden Ursachen durch eine auf diese Genauigkeit gegründete Anwendungsart des Instruments grösstentheils werde unschädlich machen können; dass man also dadurch eine grössere und wesentlichere Vermehrung der Sicherheit der Resultate der Beobachtungen werde erlangen können als die ist, die aus der fast gänzlichen Vermeidung des Ablesungsfehlers unmittelbar hervorgeht. — Ich werde diese Ansicht weiter entwickeln und deshalb verschiedene der Fehlerursachen verfolgen; zuerst den Einfluss, welchen Wärmeverchiedenheiten an verschiedenen Stellen des Kreises auf die Beobachtungen äussern.

Wenn der Kreis nicht allenthalben gleich warm ist, so müssen dadurch von der Verschiedenheit der Wärme abhängige, mit ihr veränderliche Theilungsfehler erzeugt werden. Wenn die Meridiandurchschnitte der Sternwarte verschlossen sind, also durchziehender Wind nicht die Luft in ihrem Inneren in Bewegung bringt und mit der äusseren vermischt, so ist die Wärme am oberen Rande des Kreises gewöhnlich beträchtlich grösser als am unteren; um die Grösse des Unterschiedes einigermassen anzudeuten, führe ich an, dass ich während des Mai's d. J. an trüben und an heiteren Tagen und zu verschiedenen Tageszeiten zwei an dem höchsten und an dem niedrigsten Punkte des Kreisumfangs aufgehängte, also 3 Fuss von einander entfernte Thermometer häufig abgelesen und dadurch einen sich von $0^{\circ}33$ bis $1^{\circ}50$ C. verändernden Wärmeunterschied an diesen Punkten bemerkt habe; im Mittel aus allen Ablesungen $0^{\circ}84$ C. — Dass solche Wärmeunterschiede merkliche Theilungsfehler erzeugen werden, ist zu erwarten; ich habe aber auch ein Urtheil über ihre Grösse durch Versuche zu erlangen versucht. Indem man den Winkel zwischen zwei Radien des Kreises, von seiner Drehungsaxe nach zwei 180° verschiedenen Strichen seiner Theilung gelegt, an zwei einander entgegengesetzten Mikroskopen unabhängig von dem Winkel zwischen diesen messen kann, habe ich oft, nachdem das Fernrohr während wenigstens zwei Stunden entweder nach dem Scheitelpunkte oder nach dem Fuspunkte gerichtet gewesen war, den Winkel zwischen den beiden Theilstrichen, welche den dann horizontalen Durchmesser bestimmten, gemessen. Zehn Messungen in der ersten Lage des Instruments, bei einem mittleren Wärmeunterschiede von $0^{\circ}835$ C. gemacht, haben

den dann wärmeren Halbkreis 1,345 grösser ergeben, als es durch zehn in der entgegengesetzten Lage, in welcher er der kältere war, in einem mittleren Wärmeunterschiede von 0°084 C. gemachte gefunden wurde. Hieraus geht hervor, dass die einem Wärmeunterschiede von 1° C. entsprechende Veränderung des Theilungsfehlers eines Halbkreises 0,78 beträgt. Sie würde etwa fünfmal so gross sein, wenn jeder Punkt des Kreises die Ausdehnung wirklich annähme, welche seiner Wärme entspricht. Offenbar aber kann dieses nicht stattfinden, indem nicht nur die Speichen des Kreises sich nach dem kälteren Halbkreise hin krümmen und durch den Widerstand, den sie ihrer Krümmung entgegensetzen, sein Metall ausdehnen, sowie das des wärmeren zusammendrücken müssen, sondern auch der Umfang des Kreises selbst eine Wirkung in demselben Sinne äussern muss. Aus der vollständigen Berücksichtigung der Construction des Kreises würde man die Grösse des Einflusses einer Wärmeverschiedenheit, welche ich durch Messungen zu ermitteln gesucht habe, durch Rechnung ableiten können; die Mittel dazu finden sich in einer Abhandlung des Herrn Professors NEUMANN^{*)}, und durch ihre Anwendung wird man beurtheilen können, inwiefern das aus den Messungen hervorgegangene Resultat mit dem, der Construction des Kreises nach zu erwartenden übereinstimmt.

Offenbar kann nicht erwartet werden, dass man die vorübergehenden Theilungsfehler des Kreises für die Zeit jeder Beobachtung durch Rechnung bestimmen könne; denn die Elemente dieser Rechnung würden die zu dieser Zeit vorhandenen Wärmeverschiedenheiten der Punkte des Kreises sein, welche desto weniger bekannt sein werden, als sie keineswegs allein durch die dann stattfindende Wärmeverschiedenheit der umgebenden Luft, sondern grösstentheils durch die Wärmeverschiedenheiten bedingt werden, welche die Punkte des Kreises vorher, durch die umgebende Luft und durch die Nähe des Beobachters, erfahren haben. — Die veränderlichen Theilungsfehler erscheinen daher als zufällige Unregelmässigkeiten, und ihre nicht unerhebliche Grösse erzeugt den Zweifel, ob das Resultat einer ihnen ausgesetzten Beobachtung durch die Vermehrung der Genauigkeit ihrer Ablesung wesentlich an Sicherheit gewinnt. Ich werde dieses näher zu erörtern versuchen.

Wenn ein Instrument, unter der Voraussetzung völliger Genauigkeit seiner Ablesung, den mittleren Beobachtungsfehler a übrig lässt, die Ablesung an sich

^{*)} Gesetze der Doppelbrechung des Lichts. Aus den Abhandl. der Akad. der Wissenschaften zu Berlin besonders abgedruckt. Berlin 1842.

aber den mittleren Fehler b , so kann der mittlere Gesamtmfehler einer Beobachtung bekanntlich $= \sqrt{aa+bb}$ geschätzt werden. Je erfolgreichere Maassregeln zur Verkleinerung von b ergriffen werden, desto näher wird der Gesamtmfehler $= a$; das Aeusserste, was durch Verkleinerung des Ablesungsfehlers erlangt werden kann, ist daher, dass eine aa proportionale Zahl von Beobachtungen ein eben so wahrscheinliches Resultat liefert, als eine $aa+bb$ proportionale mit einem übrigen gleichen, aber den mittleren Ablesungsfehler b besitzenden Instrumente gemacht. Für erheblich und unerheblich ist der Gewinn zu erachten, den die Verkleinerung des Ablesungsfehlers gewährt, je nachdem

$$\frac{aa}{aa+bb} = \frac{1}{1 + \frac{bb}{aa}}$$

viel oder wenig kleiner ist als 1. Er ist also nur erheblich, wenn der Ablesungsfehler, auch ohne die Maassregeln, welche zu seiner Verkleinerung ergriffen worden sind, nicht schon ein kleines Verhältniss zu a besass. — Die vier Nonien der Reichenbach'schen Meridiankreise lassen allerdings einen viel grösseren Ablesungsfehler übrig, als die vier Repsold'schen Mikrometer; aber dennoch halte ich den jenem Instrumente zugehörigen Werth von $\frac{b}{a}$ für kleiner als 1, weshalb ich auch den durch die Vervollkommnung der Ablesung erlangten Gewinn für weniger erheblich halten würde, wenn man darin nicht Mittel fände, auch a beträchtlich zu verkleinern.

Die vorübergehenden, von Wärmeverschiedenheiten der Theile des Kreises herrührenden, wie ich schon bemerkt habe, unbekannt bleibenden Theilungsfehler sind wahrscheinlich im Allgemeinen gross genug, um die Vervollkommnung der Ablesung der durch sie verschobenen Theilstriche als weniger wesentlichen Gewinn erscheinen zu lassen; allein eine aufmerksame Betrachtung zeigt, dass ein merklicher Einfluss dieser Fehler nicht zu fürchten ist. Wie auch die Wärmeverschiedenheiten des Kreises sein mögen, so kann der aus ihnen hervorgehende Fehler eines unbestimmten Punktes u der Theilung immer in der Form:

$$\varphi u = h_1 \sin(u + H_1) + h_2 \sin(2u + H_2) + h_3 \sin(3u + H_3) + \text{etc. . .}$$

dargestellt werden. Bei dem Resultate einer an allen vier Mikrometern abgelesenen Beobachtung kommt aber nur das Mittel der Fehler an den Punkten u , $u+90^\circ$, $u+180^\circ$, $u+270^\circ$, oder

$\varphi u = \frac{1}{4}[\varphi u + \varphi(u+90^\circ) + \varphi(u+180^\circ) + \varphi(u+270^\circ)]$ in Betracht, welches, dem Ausdrücke von φu gemäss,

$$\psi u = h_4 \sin(4u + H_4) + h_8 \sin(8u + H_8) \\ + h_{12} \sin(12u + H_{12}) + \text{etc. . .}$$

wird; so dass dieses Resultat nur die von $4u$, $8u$, $12u$, . . . abhängigen Glieder des Ausdruckes von ψu , nämlich die Theile der vorübergehenden Theilungsfehler enthält, welche jeden Quadranten des Kreises auf gleiche Art ändern oder deren Periode in jedem Quadranten einmal oder öfter vollendet wird. Dass Wärmeverschiedenheiten hervorgebracht werden können, welche Theilungsfehler von dieser Eigenschaft erzeugen, ist nicht zweifelhaft: im Falle einer durch 4 theilbaren Zahl der Speichen, in welchem jeder Quadrant dem anderen ganz gleich wird, geschieht dieses offenbar durch Erwärmung aller vier Quadranten nach einem gleichen Gesetze. Bei den Anwendungen des Kreises ist Aehnliches aber nicht zu erwarten: vielmehr ist anzunehmen, dass die Ursachen der Wärmeverschiedenheiten entweder nur an gewissen Stellen, ohne Beziehung zu anderen, oder an entgegengesetzten im entgegengesetzten Sinne wirken. In dem letzteren Falle können sie keinen Beitrag zu dem im Ausdrucke von ψu vorkommenden Gliedern liefern. Wenn die vorübergehenden Theilungsfehler auch von erheblicher Grösse sind, so ist daher ihr Einfluss auf vollständig abgelesene Beobachtungen im Allgemeinen als unerheblich zu betrachten. — Diese Eigenschaft der vorübergehenden Theilungsfehler eines Kreises ist von Wichtigkeit für die beobachtende Astronomie, indem man, wenn sie nicht vorhanden wäre, gezwungen sein würde, Beobachtungen, denen der höchste erreichbare Grad von Sicherheit gegeben werden soll, durch die Wegschaffung der Wärmeverschiedenheiten des Kreises selbst von ihrem Einflusse zu befreien. Dieses könnte durch die Anbringung eines, den Kreis in den Zwischenzeiten der Beobachtungen drehenden Uhrwerks geschehen; in der Werkstatt des berühmten GAMKEY habe ich einen Arbeiter beschäftigt gesehen, den horizontal aufgestellten grossen für die Pariser Sternwarte bestimmten Meridiankreis vor dem Auftragen seiner Theilung in gleichmässiger langsamer Drehung zu unterhalten.

3.

Die Wärmeverschiedenheiten der Theile des Instruments äussern sich aber nicht allein in vorübergehenden — wie ich eben bemerkt habe, als unwirksam zu beobachtenden — Theilungsfehlern des Kreises, sondern, indem sie die Figur des die Mikroskope tragenden Rahmens verändern, auch in Bewegungen der Mikrometer und endlich in Aenderungen des Fernrohrs. Die Veränderungen des Rahmens müssen grösser sein als

die des Kreises, weil ihnen der Rahmen nicht so stark widersteht als der Kreis. Sie zeigen sich durch ungleiche Bewegungen der beiden, an der unteren und an der oberen wagerechten Röhre des Rahmens angebrachten Wasserwagen, zwischen welchen ein Unterschied von zwei Secunden nicht selten vorkommt. — Wenn man annehmen dürfte, dass die die Wasserwagen tragenden Röhren des Rahmens, trotz seiner Wärmeverschiedenheiten, stets gerade blieben, so würde man auch den Einfluss, welchen diese Verschiedenheiten auf die Beobachtungen äussern, als verschwindend ansehen dürfen. Denn die an den Enden der unteren und der oberen Röhre befestigten Paare der Mikrometer würden dann keine andere Veränderungen ihrer Lagen gegen die Ebene des Horizonts erfahren, als die von den beiden Wasserwagen angezeigten, so dass die durch das Mittel der Angaben der letzteren verbesserten Ablesungen von dem Einflusse der Wärmeverschiedenheiten frei sein würden. Allein wenn sich eine verschiedene Bewegung der beiden Wasserwagen zeigt, und durch ihr Vorhandensein eine Wärmeverschiedenheit der beiden lothrechten Röhren des Rahmens andeutet, ist auch eine Krümmung der wagerechten zu erwarten, weil sie nur bei einer bestimmten, zur Erhaltung der geraden Linie erforderlichen Wärmeverschiedenheit der Speiche fehlen würde, welche die Mitte jeder der wagerechten Röhren mit dem am Pfeiler befestigten Ringe verbindet. Indessen geht aus der Krümmung der wagerechten Röhren des Rahmens noch nicht hervor, dass die Bewegungen der Mikroskope von den durch die Wasserwege angezeigten wirklich verschieden sind. — Um hier die Art der Veränderungen, welche Wärmeverschiedenheiten in dem Fernrohre hervorbringen, nicht ganz unerwähnt zu lassen, erinnere ich, dass es sich seiner kälteren Seite zu krümmen muss. Wenn es z. B. lange genug in horizontaler Lage geruht, um allenthalben die Wärme der Luft in der Sternwarte anzunehmen, so müssen seine beiden Hälften sich nach unten krümmen, wenn die Wärme mit der Höhe wächst. Bei der Wärmezunahme von $0^{\circ}84$ C., welche ich im Mittel aus mehreren Beobachtungen für den Höhenunterschied von 3 Fuss gefunden habe (§ 2), würde die Krümmung jeder Hälfte des Fernrohrs seine Absehsenlinie um etwa $0^{\circ}4$ ändern, und beider Hälften Krümmungszeit würden ihren Einfluss gegenseitig vernichten, was aber bei einem ungleichen Wärmezustande beider Hälften nicht der Fall sein würde. — Alle Arten des Einflusses von Wärmeverschiedenheiten zusammengenommen glaube ich, dass man nicht anders als durch oft wiederholte Messung einer gleichbleibenden Zenithdistanz zu der

sichern Beantwortung der Frage gelangen wird, inwiefern die Wasserwagen zur Angabe der Aenderungen des Apparats hinreichen.

Da nur über kleine Verschiedenheiten zwischen den Bewegungen der Wasserwagen und den Aenderungen des Apparats zu entscheiden ist, so ist die Wahl eines Gegenstandes, dessen Zenithdistanz mit der äussersten Sicherheit so oft man will gemessen werden kann, die Bedingung des Gelingens dieser Versuche. Der hierzu geeignetste ist ohne Zweifel das von einer Quecksilberfläche reflectirte Bild der Fäden im Fernrohre, von welchem ich schon bei einer ähnlichen Gelegenheit gesagt habe, dass es die Grundlage aller Anwendungen fester Instrumente werden sollte. Da seine Beobachtung auf der Königsberger Sternwarte jetzt noch weit häufiger gemacht wird als früher, so bin ich bemüht gewesen, eine möglichst bequeme und zweckmässige Einrichtung dazu zu treffen; ich werde sie kurz beschreiben.

Um den Fusspunkt des Instruments ist ein 9 Zoll grosses, kreisförmiges Stück des Fussbodens ausgeschnitten und in ihm ein cylindrischer Mantel von Eisen, welcher bis einige Zolle über die gemauerte Grundlage der Pfeiler hinabreicht, befestigt. Auf dieser Grundlage steht eine Schale von Gusseisen, in deren breiten Rand eine Rinne eingedreht ist, in welche der untere Rand des Cylindermantels eintaucht ohne sie zu berühren, also auch ohne die Schale in Verbindung mit dem Fussboden zu bringen. Die Füllung dieser Rinne mit Quecksilber sperrt Feuchtigkeit, die sich zwischen dem Fundamente und dem Fussboden befinden mag, von dem Inneren des Cylindermantels ab. Ein fast den inneren Raum dieses Mantels ausfüllender, allenthalben umschlossener cylindrischer Dreifuss von Eisen steht auf dem Boden der Schale und trägt eine vertiefte Kupferplatte, in welcher sich das spiegelnde Quecksilber befindet, so dass seine Oberfläche nur wenig unter der des Fussbodens ist, auch die wenige Luft zwischen dem Cylindermantel und dem Dreifusse, selbst bei beträchtlicher Verschiedenheit ihrer Wärme von der der äusseren, kein bemerkbares Zittern des Bildes im Fernrohre erzeugt. Ein aufzulegender Deckel, dessen unterer Rand wieder in eine mit Quecksilber gefüllte Rinne taucht, schützt die spiegelnde Oberfläche gegen das Eindringen des Staubes von Aussen. Man braucht ihn nur abzuheben, um die vollkommen reine und ruhige Quecksilberoberfläche benutzen zu können. Eine geeignete Einrichtung gewährt die Drehung der Schraube des Instruments von dem erhöhten Standpunkte des Beobachters aus. Das Bild der Fäden wird,

ohne das gewöhnliche Ocular des Fernrohrs gegen ein anderes zu vertauschen, bei Tage und bei Nacht in hinreichender Helligkeit gesehen.

Indem die Absehnslinie des Fernrohrs durch die Mitte des Zwischenraumes zwischen zwei (etwa 8" von einander entfernten) Fäden bezeichnet ist, wird ihre senkrechte Lage vorthellhaft durch das Mittel zweier Beobachtungen bestimmt, bei deren einer das Bild des einen, bei der anderen das des anderen Fadens in die Absehnslinie gebracht wird. Hierdurch wird das Gewicht einer Bestimmung der dem Nadir entsprechenden Angabe des Instruments doppelt so gross, als das Gewicht der der Zenithdistanz eines Sterns entsprechenden; allein jenes erhält ein noch grösseres Verhältniss zu diesem, indem die sich bei der Reflexion zeigende Vergrößerung des Fernrohrs die doppelte der gewöhnlichen ist, indem die Bilder der Fäden stets vollkommen ruhig erscheinen und indem die auf ihre Einstellung in die Absehnslinie zu verwendende Zeit nicht durch die tägliche Bewegung beschränkt wird. Diese der Beobachtung der dem Nadir entsprechenden Richtung des Instruments höchst günstigen Umstände lassen in Verbindung mit der Sicherheit der Ablesungen des Kreises eine grosse Genauigkeit dieser Beobachtung erwarten; die die sie wirklich erlangt, kann man durch die Uebereinstimmung beurtheilen, in welcher die auf beide Fäden bezogenen Beobachtungen sind. Um das Urtheil darüber gehörig zu begründen, führe ich die Unterschiede zwischen den Beobachtungen der Bilder beider Fäden hier an, die sich bei 50 aufeinander folgenden Bestimmungen des Fusspunktes, zwischen dem 22. Mai und 3. Juni, ergeben haben:

3',825	3',875	3',975	3',775	3',475
4,375	3,775	4,225	3,8	3,925
3,825	3,575	3,75	3,575	3,975
3,7	3,75	3,825	3,825	4,05
4,0	3,8	3,825	3,8	4,1
3,95	4,0	3,6	3,95	4,05
3,975	4,125	3,75	4,125	3,75
3,725	4,15	3,875	3,825	4,025
4,25	3,825	3,975	4,05	4,025
3,725	3,95	3,8	4,025	3,9

Das Mittel aller dieser Unterschiede ist = 3',894 und der mittlere Fehler einer Beobachtung des Unterschiedes = $\pm 0',1716$, wovon die Hälfte (= $\pm 0',0858$) der m. F. einer aus den Beobachtungen der Bilder beider Fäden abgeleiteten Bestimmung der dem Nadir entsprechenden Angabe des Kreises ist.

4.

Indem aus dieser Kleinheit des m. F. der Bestimmungen des Nadir hervorgeht, dass schon eine Verschie-

denheit von wenigen Zehnteln einer Secunde zwischen aufeinander folgenden hinreicht, Verdacht gegen eine Annahme, unter welcher Uebereinstimmung stattfinden soll, zu erregen, erscheint die häufige Wiederholung solcher Bestimmungen vorzüglich geeignet zur Aufklärung der Verbindung, welche zwischen den Bewegungen der Wasserwagen und den Veränderungen des Apparats stattfindet. — Oft bringt die Annahme der Gleichheit beider alle während einiger Tage gemachten Bestimmungen des Nadir in so grosse Uebereinstimmung, dass keine derselben Anlass gibt, die Richtigkeit der Annahme zu bezweifeln; z. B. sind von Mai 22 bis Mai 24. 10^b Stz. 17 Bestimmungen vorhanden, von welcher 16 sich nicht über 0,2 von dieser Annahme entfernen und nur eine 0,5 davon abweicht. Allein öfter zeigt sich dieselbe Annahme ungenügend: während mehrere aufeinander folgende Bestimmungen keinen Verdacht gegen sie erregen, finden sich plötzlich eine oder einige, die sich entscheidend gegen sie aussprechen. Z. B. sind zwischen Mai 24. 11^b 51^m und Juni 3. incl. 38 Bestimmungen des Nadir vorhanden, von welchen ich einige, die der Annahme ungünstigsten, hier anführen werde:

Mai 24	14 ^b 18 ^m	180° - 0',15	- 1,75	+ 0',7	180° - 0',55
	15 46	+ 0,4	- 1,9	+ 1,1	0,0
	1 33	+ 0,55	- 2,5	- 0,2	- 0,8
25	10 10	+ 2,2	- 2,7	+ 0,8	+ 1,25
	14 18	+ 0,5	- 2,4	+ 0,6	- 0,4
	15 46	+ 0,7	- 2,1	+ 0,7	0,0
26	0 15	+ 1,75	- 2,8	+ 0,1	- 0,2
	30 23 7	- 2,2	- 0,9	+ 3,0	- 1,15
31	6 48	- 3,5	- 1,0	+ 3,7	- 2,15
	16 30	- 0,55	- 2,0	+ 1,4	- 0,85
Juni 3	23 7	- 1,7	- 1,6	+ 2,2	- 1,4

Die Zeit ist Sternzeit; die darauf folgende Spalte enthält die Ablesung des nach dem Nadir gerichteten Instruments; die dann folgenden beiden Spalten enthalten die Angaben der unteren und der oberen Wasserwagen; die letzte enthält die Summe der ersteren und des Mittels der beiden anderen. Die Zahlen dieser letzten Spalte sollten übereinstimmen, wenn die Annahme richtig wäre: es ist, dem vorigen § zufolge, nicht zweifelhaft, dass sie weit ausser den Grenzen der annehmbaren Beobachtungsfehler von einander verschieden sind.

Dieses eine Beispiel würde also schon der Annahme entscheidend widersprechen, wenn es auch nicht durch andere unterstützt würde. Aus der ganzen, bis jetzt vorhandenen Reihe der Beobachtungen mit diesem Instrumente geht hervor, dass die Aenderungen des Apparats, wenn sie auch oft mit der mittleren Bewegung der beiden Wasserwagen übereinstimmen, doch auch

oft davon verschieden sind. Dieser Erfolg der Untersuchung ist nicht unerwartet; vielmehr machen ihn die Spannungen des Rahmens, welche sich mit seinen Wärmeverschiedenheiten ändern, wahrscheinlich. Es ergibt sich also, dass man die Resultate wesentlich beeinträchtigen würde, wenn man ihrer Ableitung aus den Beobachtungen die Voraussetzung zum Grunde legen wollte, dass diese, nach der Hinzusetzung der mittleren Angabe der Wasserwagen, in Uebereinstimmung seien.

Indem man diese Voraussetzung verlässt, kann man keine Beobachtung mehr unter der Annahme der Kenntniss der dem Scheitelpunkte oder dem Pole entsprechenden Angabe des Instruments benutzen. Man muss vielmehr diese Kenntniss unnöthig machen, indem man sie unmittelbar aus jeder einzelnen Beobachtung schafft. Dieses kann auf zwei Arten geschehen:

1. durch unmittelbar aufeinander folgende Beobachtungen eines Gestirns und seines von Quecksilber reflectirten Bildes;
2. durch Vergleichung der Beobachtung des Gestirns mit der unmittelbar vor oder nach ihr gemachten des Nadir.

Durch die Anwendungen dieser Beobachtungsarten befreit man das Resultat jeder Beobachtung von dem Theile aller von äusseren Ursachen auf das Instrument ausgeübten Einflüsse, weleher während ihrer Dauer als beständig wirkend betrachtet werden kann. Man erlangt dadurch denselben Erfolg, den ein Kreis gewährte, der vor dem Durchgange eines Gestirns durch den Meridian eine Messung der Zenithdistanz, und nach seiner Drehung um eine Verticalaxe nach dem Durchgange eine zweite ergibt; man erlangt nämlich sowohl durch jene Anwendungsarten eines Meridiankreises, als durch diese eines sogenannten Höhenkreises, die Elimination des zur Zeit einer Beobachtung stattfindenden Zustandes des Instruments aus dem Resultate. Der Vortheil dieser Vermeidung der Voraussetzung des unverändert bleibenden Zustandes des Instruments ist mir schon bei meinen frühesten Versuchen in der beobachtenden Astronomie deutlich geworden, indem der Cary'sche Kreis der Königsberger Sternwarte ein Instrument der letzten Art ist, dessen jedesmaliger Anwendung ich allein verdanke, dass man ihm Beobachtungen abgewinnen konnte, welche weniger zu wünschen übrig liessen, als der Grösse des Instruments angemessen ersehen. Ich habe diese Einrichtung der Instrumente immer für die die Beobachtung der Zenithdistanzen am meisten begünstigende gehalten, und sehe jetzt mit Vergnügen, dass die Beobachtung des von Quecksilber zurückgeworfenen Fadenbildes das Mittel wird, das Wesentliche des Vor-

theils, den sie gewährt, auch dem Meridiankreise anzuzeigen.

Das erstere Verfahren ist das weniger allgemeine, indem es nur angewandt werden kann, wenn das Gestirn lauge genug zwischen den Fäden verweilt, um beide Beobachtungen bei einer Culmination möglich zu machen. Das andere kann immer angewandt werden, selbst bei heftigen Winde, indem die Oberfläche des Quecksilbers, durch das Verschliessen der Meridiandurchschnitte, vor jeder Beunruhigung geschützt werden kann. Obgleich diese Beobachtungsart, indem sie das Resultat durch den Unterschied der am Gestirne und an den Bildern der beiden Fäden gemachten Beobachtungen ergibt, den mittleren Fehler der Beobachtung des ersteren vergrössert, so wird sie dadurch kaum weniger empfehlenswerth, indem die im 3. § nachgewiesene Kleinheit des mittleren Fehlers der Bestimmung des Nadir die Vergrösserung unbedeutend macht. Zwar kostet die vollständige Beobachtung eines Gestirns, die nach gewöhnlicher Art in etwa 3 Minuten beendigt wird, jetzt 10 bis 12 Minuten mehr; allein verloren ist diese Zeit nicht, denn sie wird auf die Vermehrung der Sicherheit des Resultats verwandt, in deren Folge man die Anzahl der Beobachtungen vermindern kann.

Zum Schlusse dieser Materie bemerke ich, dass ich den grössten Vortheil der Vollendung der Ablesungen des Repsold'schen Meridiankreises in der dadurch gegebenen Möglichkeit sehe, kleine Einflüsse zu verfolgen, deren nähere Kenntniss andere, mit weniger genauer Ablesung versehene Instrumente versagen, so dass sie sich hier mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern vereinigen und diese vergrössern, während dort ein geeignetes Verfahren ihre Vermeidung zur Folge haben kann. Eine unrichtige Vorstellung von dem Wesen der Beobachtungskunst würde die Forderung verrathen, dass eine Verbesserung eines Instruments, auch ohne ihre durchgehende Berücksichtigung bei der Wahl seiner Anwendungsart, erheblich bessere Beobachtungen hervorbringen solle.

5.

Die Folgen, welche die dem Repsold'schen Instrumente eigenthümliche Genauigkeit seiner Ablesung in der Art seiner Anwendung herbeiführt, beschränken sich nicht auf die, die ich schon erwähnt habe. So grosse Sorgfalt auch auf die Theilung seines Kreises verwandt sein mag, so ist doch nicht zu bezweifeln, dass die dadurch hervorgebrachte Sicherheit nicht so gross sein kann, dass sie nicht schon durch wenige Wiederholungen der Ablesung übertroffen werden sollte. Wenn Resultate durch häufig wiederholte Beobach-

gen zu dem höchsten Grade der Sicherheit, die das Instrument ihnen gewähren kann, gebracht werden sollen, so wird daher ihre Befreiung von den Fehlern der dabei in Betracht kommenden Theilstriche unerlässlich. Die Kenntniss des Gesetzes, welchem die Theilungsfehler im Ganzen folgen, bleibt ohne Anwendung, falls das oft zu beobachtende Gestirn ein Fixstern ist, dessen sämtliche Beobachtungen in jeder der beiden Lagen des Kreises, während mehrerer Jahre, durch die Mikrometer auf nur vier seiner Theilstriche bezogen werden, deren Bestimmung also allein erforderlich ist. Die Ablesung eines Instruments durch Nonien führt dagegen in derselben Zeit auf viele Theilstriche, von deren Fehlern mit grösserem Rechte angenommen werden kann, dass sie ihrem allgemeinen Gesetze folgen; weshalb auch die Anwendung dieses Gesetzes dem Resultate einer mit diesem Instrumente gemachten Beobachtungsreihe eines Fixsterns grössere Sicherheit verheisst, als sie dem Resultate des an sich vollkommeneren, durch Mikrometer abgelesenen Instruments gewähren würde. Das letztere fordert also die Bestimmung der Fehler der Theilstriche, welche jedem häufig beobachteten Fixsterne entsprechen, während das erstere nur die Bestimmung ihres im Ganzen stattfindenden Fortganges verlangt.

Was ich aus diesem Grunde bei der Bestellung des Instruments fordern musste, war, dass ihm eine Einrichtung gegeben werde, welche die für viele Sterne notwendige Bestimmung des Fehlers eines beliebigen Theilstriches so viel als möglich begünstigt. Die Herren REPSOLD haben demzufolge die an den Pfeilern festen conischen Ringe, auf welche die Mikroskope tragende Rahmen aufgeschoben wird, in Verbindung mit diesem Rahmen selbst, benutzt, um zwei beweglichen Mikroskopen eine feste Aufstellung gegen beliebige Theilstriche des Kreises zu verschaffen. Die Anwendungsart dieser Mikroskope ist dieselbe, die, seit meinen früheren Untersuchungen der Theilungen des Cary'schen und Reichenbach'schen Kreises allgemein bekannt geworden, auch von Anderen ausgeführt ist.

Theils um ein durchgeführtes Beispiel der Bestimmung der Theilungsfehler zu geben, theils um die unten folgende neue Festsetzung der Polhöhe der Königsberger Sternwarte in einer wesentlichen Beziehung zu begründen, werde ich hier die Bestimmung der Theilstriche $\pm 33^{\circ} 44'$ und $\pm 36^{\circ} 48'$ und der um ganze Quadrate davon verschiedenen mittheilen. Diese Striche sind die für beide Culminationen α Ursae min. in Anwendung gekommenen.

Wenn der, der Zenithdistanz eines Sterns am nicht

sten kommende Theilstrich des Kreises durch x bezeichnet wird, so sind die Striche, welche bei seinen Beobachtungen in beiden Lagen des Instruments, und auch bei den Beobachtungen seines von Quecksilber reflectirten Bildes, in Anwendung kommen: x , $90^\circ + x$, $180^\circ + x$, $270^\circ + x$ und $360^\circ - x$, $90^\circ - x$, $180^\circ - x$, $270^\circ - x$. Wenn eins der beweglichen Mikroskope in der Entfernung x von einem der festen aufgestellt wird, so werden diese 8 Striche, unter der Voraussetzung der Kenntniss des Winkels zwischen beiden, bestimmt, indem ihre Entfernungen von resp. 0° , 90° , 180° , 270° durch das Mikrometer der einen oder anderen gemessen werden; der als bekannt vorausgesetzte Winkel wird aber durch Wiederholung bekannt; man bringt nämlich einen willkürlichen Strich A unter eins der Mikroskope, also $A + x$ unter das andere; dann nach und nach $A + x$, $A + 2x$, . . . unter jenes, $A + 2x$, $A + 3x$, . . . unter dieses und misst in allen diesen Stellungen des Kreises die Entfernungen. Wenn die Mittel der Theilungsfehler der am Anfange und am Ende der Wiederholungsreihe unter den festen Mikroskopen befindlichen Striche A , $A + 90^\circ$, u. s. w. und $A + nx$, $A + nx + 90^\circ$, u. s. w. als verschwindend angenommen werden*, so ist der Winkel zwischen beiden Mikroskopen hierdurch bestimmt. — Jedes der folgenden Resultate von Anwendungen dieses Verfahrens beruht auf zweimal zehnfachen Wiederholungen des Winkels, deren eine Hälfte vorwärts von A bis $A + 10x$, die andere rückwärts von A bis $A - 10x$ geht. Die Anordnung der Beobachtungen, wodurch es erlangt worden ist, ist folgende:

1. Beobachtung der 8 Striche,
2. vorwärts gehende Wiederholungsreihe,
3. zweimalige Beobachtung der 8 Striche,
4. rückwärts gehende Wiederholungsreihe,
5. Beobachtung der 8 Striche.

Durch diese Anordnung beabsichtigte ich die Verminderung der Entstellung des Resultats durch Wärmeänderungen des Apparats, welche während der Dauer der Beobachtungen wahrscheinlich vorkommen. Jede Bestimmung dieser Art wurde, zum Theil aus demselben Grunde, acht Mal wiederholt; nämlich zweimal in jeder der Stellungen des beweglichen Mikroskops auf die Winkel $360^\circ - x$, $90^\circ + x$, $180^\circ - x$, $270^\circ + x$, wodurch das Endresultat von etwanigen — bei Repsold'scher Arbeit nicht zu verthunenden — Unregelmäßigkeiten der Zapfen des Instruments frei wird. Für die erste Bestimmung war $A = 0^\circ$, für die zweite $A = 10^\circ$, u. s. w. In der folgenden Zusammenstellung der Resultate sind, wenn φu die wegen des Theilungsfehlers erforderliche Verbesserung des Striches u bedeutet:

$$\begin{aligned} a &= \varphi x & - \varphi 0^\circ & a' = \varphi 0^\circ & - \varphi(360^\circ - x) \\ b &= \varphi(90^\circ + x) & - \varphi 90^\circ & b' = \varphi 90^\circ & - \varphi(90^\circ - x) \\ c &= \varphi(180^\circ + x) & - \varphi 180^\circ & c' = \varphi 180^\circ & - \varphi(180^\circ - x) \\ d &= \varphi(270^\circ + x) & - \varphi 270^\circ & d' = \varphi 270^\circ & - \varphi(270^\circ - x) \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \varphi u = \frac{1}{4}[\varphi u + \varphi(90^\circ + u) + \varphi(180^\circ + u) + \varphi(270^\circ + u)].$$

Da der Anfangspunkt von φu willkürlich bleibt, so habe ich ihn durch $\varphi 0 = 0$ bestimmt. — Die Beobachtungen sind im Sept. 1842 gemacht.

α Ursae min. Obere Culmination $z = 33^\circ 44'$.

Festes Mikr.	α Ursae min. Obere Culmination $z = 33^\circ 44'$					α Ursae min. Obere Culmination $z = 33^\circ 44'$				
	a	b	c	d	φx	a'	b'	c'	d'	$-\varphi(360^\circ - x)$
I	+ 0',50	- 2',04	+ 2',86	- 0',59	+ 0',183	+ 1',96	- 1',72	+ 2',03	+ 1',48	+ 0',938
	+ 0,38	- 2,19	+ 2,66	- 1,09	- 0,060	+ 1,90	- 1,85	+ 1,65	+ 1,18	+ 0,720
II	+ 0,45	- 1,89	+ 2,59	- 1,37	- 0,055	+ 1,80	- 1,15	+ 2,03	+ 0,11	+ 0,697
	+ 0,92	- 1,48	+ 2,31	- 1,06	+ 0,173	+ 1,62	- 1,23	+ 1,94	+ 0,44	+ 0,693
III	+ 0,87	- 2,10	+ 2,50	- 1,03	+ 0,060	+ 1,75	- 1,97	+ 1,88	+ 0,78	+ 0,610
	+ 0,66	- 2,01	+ 2,71	- 1,17	+ 0,047	+ 1,69	- 1,87	+ 1,89	+ 0,81	+ 0,630
IV	+ 1,24	- 1,60	+ 1,82	- 1,43	+ 0,097	+ 1,64	- 0,98	+ 1,35	+ 0,43	+ 0,610
	+ 1,41	- 1,44	+ 2,05	- 1,32	+ 0,185	+ 1,20	- 1,01	+ 1,60	+ 0,49	+ 0,829

α Ursae min. Untere Culmination $z = 36^\circ 48'$.

Festes Mikr.	α Ursae min. Untere Culmination $z = 36^\circ 48'$					α Ursae min. Untere Culmination $z = 36^\circ 48'$				
	a	b	c	d	φx	a'	b'	c'	d'	$-\varphi(360^\circ - x)$
I	- 1',13	- 1',97	+ 1',10	- 0',78	- 0',695	- 0',58	- 1',75	+ 0',62	+ 1',85	+ 0',035
	- 0,80	- 1,94	+ 1,26	- 1,00	- 0,690	- 0,24	- 1,68	+ 0,85	+ 2,11	+ 0,260
II	- 0,92	- 0,89	+ 1,61	- 1,49	- 0,423	- 1,03	- 1,12	+ 1,36	+ 1,08	+ 0,073
	- 0,82	- 0,70	+ 1,65	- 1,52	- 0,347	- 1,07	- 0,95	+ 1,34	+ 1,05	+ 0,092
III	- 0,99	- 1,74	+ 1,18	- 1,09	- 0,660	- 0,44	- 1,81	+ 0,61	+ 1,63	+ 0,093
	- 0,73	- 1,43	+ 1,44	- 0,96	- 0,420	- 0,05	- 1,45	+ 1,05	+ 1,83	+ 0,345
IV	- 0,76	- 0,91	+ 1,64	- 1,40	- 0,358	- 0,91	- 1,74	+ 0,71	+ 1,39	+ 0,113
	- 0,97	- 0,95	+ 1,60	- 1,69	- 0,502	- 1,09	- 0,85	+ 1,01	+ 0,98	+ 0,012

*) Falls die Bestimmung des allgemeinen Gesetzes dieser Fehler schon vorangegangen ist, kann sie hier benutzt werden; aber Beides wird fast gleichgültig sein.

Man bemerkt in den einzelnen Bestimmungen von a , b , ... a' , b' , ... Unterschiede von ihren mittleren Werthen, welche eine halbe Secunde überschreiten und zu gross sind, um sie den zufälligen Fehlern der Ablesungen zuschreiben zu können. Ich zweifle nicht, dass sie grösstentheils von Wärmeverschiedenheiten des Kreises herrühren, in welchem Falle sie, der im 2. § erklärten Eigenschaft der vorübergehenden Theilungsfehler zufolge, die Bestimmung der Werthe von ψz und $\psi(360^\circ - z)$, welche allein erforderlich ist, nicht beeinträchtigen; die weit bessere Uebereinstimmung der verschiedenen Bestimmungen dieser letzteren Werthe ist auch dieser Annahme günstig.

Meine Beobachtungen α Ursae min. sind immer der ersten der beiden, § 4 erwähnten Methoden gemäss gemacht; sie haben also die Zenithdistanz durch den halben Unterschied zweier beobachteten Werthe ergeben, die sich zu 180° ergänzen müssen. Ihre Befreiung von den Theilungsfehlern des Instruments fordert also nicht die Kenntniss von ψz und $\psi(360^\circ - z)$, sondern nur die von $\frac{1}{2}[\psi z - \psi(360^\circ - z)]$. Diese habe ich zum Gegenstande einer zweiten Beobachtungsreihe gemacht, welche ich Ende Sept. und Anfangs Oct. 1842 ausgeführt habe, indem ich das bewegliche Mikroskop in der Entfernung $2z$ von jedem der festen aufgestellt habe. Ihre Resultate sind die folgenden:

α Ursae min. Obere Culmination $z = 33^\circ 44'$.

Festes Mikr.	$a+a'$	$b+b'$	$c+c'$	$d+d'$	$\psi z - \psi(360^\circ - z)$
I	+2',56	-2',64	+4',83	+0',21	+1',240
	+2,64	-2,68	+4,70	-0,28	+1,095
II	+2,15	-2,39	+4,66	-1,40	+0,755
	+2,42	-2,40	+4,28	-1,37	+0,733
III	+2,54	-2,38	+4,79	-0,73	+1,067
	+2,52	-2,45	+4,80	-1,05	+0,955
IV	+2,70	-2,38	+4,80	0,00	+1,280
	+2,32	-2,93	+4,45	-0,35	+0,878

α Ursae min. Untere Culmination $z = 36^\circ 48'$.

I	-0',91	-2',08	+2',20	+0',99	-0',200
	-1,28	-3,31	+2,41	+0,86	-0,325
II	-1,71	-2,58	+1,87	-0,98	-0,625
	-0,88	-2,13	+2,38	0,00	-0,158
III	-1,15	-2,90	+2,33	-0,35	-0,367
	-1,05	-2,63	+2,32	-0,42	-0,395
IV	-1,78	-2,33	+2,09	+0,49	-0,458
	-1,30	-2,73	+2,10	+0,48	-0,355

Jede dieser beiden Beobachtungsreihen lässt eine so wenig unsichere Bestimmung des Einflusses der Theilungsfehler auf das Resultat der Beobachtungen α Ursae min. erwarten, dass ich mit der aus ihrer Verbindung hervorgehenden zufrieden gewesen sein würde,

wenn nicht die ihnen unmittelbar folgende Wiederholung einer früheren (Frühjahr 1842) Beobachtungsreihe des Sterns, so wie auch eine zweite Wiederholung (Frühjahr 1843) sich so übereinstimmend erwiesen hätten, dass ich für wünschenswerth hielt, auch die Sicherheit der Bestimmung des Einflusses der Theilungsfehler durch nochmalige Wiederholung der eben mitgetheilten Reihe zu prüfen und zu vermehren. Ich habe dieses im Mai 1843 ausgeführt und dadurch Folgendes erhalten:

α Ursae min. Obere Culmination $z = 33^\circ 44'$.

Festes Mikr.	$a+a'$	$b+b'$	$c+c'$	$d+d'$	$\psi z - \psi(360^\circ - z)$
I	+2',12	-2',56	+5',34	-0',46	+1',110
	+1,86	-2,82	+5,03	-0,74	+0,833
II	+2,25	-2,32	+4,70	-1,28	+0,837
	+2,13	-2,02	+4,78	-1,27	+0,905
III	+2,28	-2,71	+5,44	-0,82	+1,048
	+2,49	-2,39	+5,09	-0,99	+1,050
IV	+2,04	-2,55	+5,45	-0,43	+1,027
	+1,97	-2,63	+4,77	-0,98	+0,783

α Ursae min. Untere Culmination $z = 36^\circ 48'$.

I	-1',93	-2',07	+2',65	+0',15	-0',300
	-2,28	-2,75	+2,25	+0,24	-0,635
II	-1,67	-2,03	+2,12	-0,70	-0,720
	-1,61	-2,24	+2,31	-0,41	-0,488
III	-1,73	-2,24	+2,56	-0,74	-0,537
	-1,63	-2,13	+2,96	-0,48	-0,320
IV	-1,38	-1,76	+2,19	+0,02	-0,233
	-1,72	-1,65	+1,91	+0,05	-0,352

Die gehörige Combination aller drei Bestimmungen ergibt den Werth von $\frac{1}{2}[\psi z - \psi(360^\circ - z)]$, für die obere Culmination $= +0',470$ und den mittleren Fehler jedes dieser beiden Resultate $= \pm 0',0165$.

G.

So wie jeder Stern, durch dessen oft wiederholte Beobachtung die Erlangung der grössten Sicherheit beabsichtigt wird, eine ähnliche Bestimmung der Fehler der ihm entsprechenden Theilstriche fordert, so fordern alle sonstigen Beobachtungen die Kenntniss des Gesetzes, welchem die Theilungsfehler im Ganzen folgen. Bis jetzt habe ich den Theilungsfehler nur für jeden 15° Grad des Kreises bestimmt, behalte mir aber vor, ähnliche Bestimmungen für einander nähere Striche zu machen, um, durch die Vergrösserung ihrer Zahl, der Unterscheidung ihrer zufälligen Unrichtigkeiten von den einer Regel folgenden, grössere Sicherheit zu geben. Die bis zu den doppelten Winkeln fortgesetzte Reihe, welche die vorhandenen 24 Beobachtungen am besten darstellt, ist:

9*

$$\varphi u = -0,928 + 2,318 \sin(u + 53^{\circ} 32') \\ + 0,961 \sin(2u + 308^{\circ} 40'); *)$$

von ihr entfernen sich 15 der bestimmten Werthe innerhalb 0,5, 4 zwischen 0,5 und 1,0, 5 zwischen 1,0 und 1,61. Ich führe dieses hier nur an, um vorläufig anzudeuten, wie grosser Einfluss der Theilungsfehler auf einzelne Beobachtungen zu erwarten ist.

Noch weiter als diese Untersuchung von ihrer Beendigung entfernt, ist die des Einflusses der Schwere auf das Instrument. Ich kann also für jetzt nur solche Beobachtungen bis zu ihren letzten Resultaten verfolgen, welche diesen Einfluss durch ihre Anordnung verschwinden lassen; was bei der unmittelbaren Verbindung der Messungen der Zenithdistanzen eines Sterns und seines reflectirten Bildes, also auch bei den schon erwähnten Beobachtungen α Ursae minoris der Fall ist.

7.

Das Instrument kam hier im November 1841 an, zu welcher Zeit mich Herr ADOLPH REPSOLD mit einem Besuche beehrte und erfreute, während dessen Dauer er selbst die Aufstellung seines Werkes übernahm. Der hiesige Winter liefert aber immer zu wenig günstigen Himmel, um die Erlangung der Kenntniss der einem neuen Instrumente angemessenen Beobachtungsmöglichkeit zu machen. Diese gibt, wenigstens mir, nur aus der Beobachtung des Erfolges hervor, welchen verschiedene, sich zur Auswahl darbietende Versuche haben; aus einer Beobachtung, welche nur gelingt, wenn anhaltend heiterer Himmel sie begünstigt. Auch fehlen am Anfange noch die äusseren Einrichtungen, deren zweckmässigste, für das Gelingen der Beobachtungen keineswegs gleichgültige Anordnung gleichfalls Zeit und Versuche fordert. Erst im April 1842 konnte ich hoffen, Beobachtungen zu machen, welche des neuen Meridiankreises nicht ganz unwürdig waren, und auch dann mussten sie noch auf den Polarstern beschränkt werden, dessen directe und reflectirte Zenithdistanzen bei

Einer Culmination beobachtet werden konnten. Diese Beobachtungen setzte ich bis gegen das Ende des Mai fort, wo eine lange Abwesenheit von der Sternwarte eintrat, nach deren Beendigung ich das Unterbrochene wieder aufnahm und eine zweite Reihe von Beobachtungen desselben Sterns ausführte. Der nun folgende Winter war hier noch weit ungünstiger als gewöhnlich, indem er den heiteren Himmel sehr selten und immer nur auf kurze Zeit zeigte. Als aber nach der Mitte des April d. J. anhaltenderes, schönes Wetter eintrat, fand ich mich selbst und die äusseren Einrichtungen im Stande, nicht allein Beobachtungen des Polarsterns zu machen, sondern auch das Instrument allgemeiner anzuwenden.

Jetzt hätte der neue Meridiankreis den älteren Reichenbach'schen aus dem Gebrauche verdrängen können, allein ich musste trotz des grösseren von ihm zu erwartenden Erfolges vorziehen, ihn erst später Herrn Dr. BUSCH zu überlassen, der seit vielen Jahren die Meridianbeobachtungen macht, und dessen Aufmerksamkeit und Genauigkeitsliebe dem neuen Instrumente wenigstens eben so gute Beobachtungen abzugewinnen würde als die meinigen sind. Denn die notwendigen, zeitraubenden Beobachtungen zur Erfindung der Theilungsfehler, wovon ich im vorigen § ein sich auf beide Culminationen Eines Sterns beziehendes Beispiel gegeben habe, lassen sich nicht ausführen, ohne die der Gestirne selbst zu unterbrechen, wodurch nothwendig wird, noch fürs Erste beide Instrumente zugleich in Anwendung zu erhalten.

Die Beobachtungen α Ursae min., die allein für jetzt bis zu ihrem letzten Resultate verfolgt werden können, beruhen sämmtlich auf 4 oder 5 Messungen der Zenithdistanz des Sterns und auf 4 bis 6 seines reflectirten Bildes, welche letzteren vor und nach den ersteren genommen wurden. Um ihren Hergang anschaulich zu machen, führe ich die einzelnen Momente der ersten, am 22. April 1842 gemachten Beobachtung dieser Art hier an:

*) [Verbessert nach Astr. Nachr. 89, p. 356.]

Zeit der Uhr	Mikrometer.				Mittel.	Reduction auf den Meridian.	Meridian.
	I.	II.	III.	IV.			
0 ^h 45 ^m 54 ^s	11,8	10,2	9,7	12,4	146° 15' 11,0	+ 16,3	146° 15' 27,3
49 1	17,8	16,1	15,4	18,1	16,9	+ 11,0	27,9
51 6	21,0	19,6	18,8	21,3	20,2	+ 8,1	28,3
54 9	41,0	51,0	40,9	43,0	33 44 44,0	- 3,3	33 44 40,7
58 53	38,6	48,7	38,6	40,3	41,5	- 0,5	41,0
1 2 54	37,9	47,7	37,3	39,2	40,5	0,0	40,5
7 28	39,9	49,9	39,8	41,2	42,8	- 1,5	41,3
12 6	42,3	52,7	42,7	44,8	45,6	- 5,2	40,4

1 ^b 18 ^m 25 ^s	16,3	14,0	14,4	17,0	146° 15' 15,4	+ 11,5	146° 15' 26,9
21 27	11,4	9,0	9,2	12,0	10,4	+ 16,8	27,2
23 46	6,2	4,0	4,3	7,2	5,4	+ 21,4	26,8
Mittel. Stern selbst							33 44 40,78
sein refl. Bild							146 15 27,40
Zenithdistanz							33 44 36,60
Barom. 335,62 + 8,4 C. Therm. 49° F. Strahlenbrechung							+ 38,76
Teilungsfehler						+ 0,470	
Reduction wegen der Entfernung des Quecksilbers						+ 0,018	+ 0,40
Entfernung des Sterns vom Pole							1 31 53,53
Complement der Polhöhe							35 17 9,47

Diese Beobachtung gehört keineswegs zu denen, deren einzelnen Momente in der genauesten Uebereinstimmung sind; wenn der Stern ganz ruhig erscheint, entfernt sich eins derselben selten über wenige Zehntelsekunden von dem Mittel aller.

Ich werde nun die Werthe mittheilen, welche die bisherigen auf diese Art gemachten Beobachtungen α Ursae min. dem Complemente der Polhöhe geben:

Erste Reihe.

Obere Culm.		Untere Culm.	
1842 April 22	35° 17' 9,47	April 23	35° 17' 9,32
25	9,42	27	8,88
27	9,55	Mai 1	9,01
29	9,16	2	8,86
30	9,12	7	9,18
Mai 1	9,58	8	9,23
3	9,50	9	9,44
6	9,49	15	9,28
15	8,89	21	9,50
19	9,52	22	9,36
21	9,22		
Mittel	35° 17' 9,35	11 Beob.	35° 17' 9,21

10 Beob.

Zweite Reihe.

1842 Oct. 13	35° 17' 9,15	Oct. 18	35° 17' 9,35
19	9,42	21	9,51
20	9,30	22	9,47
24	9,41	25	9,36
26	9,43	26	9,49
31	9,19	28	9,09
Nov. 10	9,41	Nov. 15	9,16
12	9,41		
15	9,33		
Dec. 27	9,48		
Mittel	35° 17' 9,34	10 Beob.	35° 17' 9,35

7 Beob.

Dritte Reihe.

1843 April 23	35° 17' 9,13	April 24	35° 17' 9,01
24	9,24	25	9,27
27	9,50	29	9,36
30	9,19	Mai 1	9,61
Mai 19	9,39	5	9,58
21	9,05	13	9,55
22	9,14	14	9,52

Mai 23	9,70	Mai 18	9,14
24	9,62	19	9,29
30	9,57	20	9,60
		21	9,74
		22	9,23
		24	8,82
Mittel	35° 17' 9,35	10 Beob.	35° 17' 9,36

13 Beob.

Indem der mittlere Fehler jeder einzelnen Bestimmung sich hieraus = $\pm 0,215$ findet und ihm zufolge die mittleren Fehler der aus jeder Reihe gezogenen arithmetischen Mittel

$\pm 0,065$	$\pm 0,068$
$\pm 0,068$	$\pm 0,081$
$\pm 0,068$	$\pm 0,060$

sind, so geht hervor, dass die (mit einer Ausnahme) stofffindende Uebereinstimmung dieser Mittel, bis auf $0,01$, ein blosses Spiel des Zufalls ist. Allein zugleich zeigt der kleine, durch eine hinreichende Anzahl von Fällen begründete mittlere Fehler einer Beobachtung, dass Beobachtungen dieser Art — nämlich von dem Einflusse der veränderlichen Lage der Mikrometer, durch unmittelbare Vergleichung der Zenithdistanzen eines Sterns und seines reflectirten Bildes, befreite — durch das Repsold'sche Instrument eine ausgezeichnete Genauigkeit erhalten. Eine Genauigkeit, welche mir desto unerwarteter war, je häufiger der Wind die Oberfläche des Quecksilbers beunruhigte und dadurch die Beobachtungen beträchtlich erschwerte; was am meisten bei der unteren Culmination geschah, für welche die eine der beiden nördlichen Seitenklappen geöffnet werden muss, während heiterer Himmel im Frühjahr in Königsberg gewöhnlich nur bei starkem Nordwinde stattfindet. Allein ich glaube schon bei einer anderen Gelegenheit die oft gemachte Erfahrung mitgetheilt zu haben, dass grössere Zeitverwendung in dem Falle unglünstiger Umstände ihre nachtheilige Wirkung zum Theil auszugleichen pflegt; auch muss nicht übersehen werden, dass die gefundenen $\pm 0,215$ der mittlere Fehler einer auf 8 bis 11 Einstellungen und Ablesungen des Instruments beruhenden Beobachtung sind. — Die

drei Beobachtungsreihen ergeben den wahrscheinlichsten Werth der Polhöhe:

$$54^{\circ} 42' 50,675$$

mit dem m. F. = $\pm 0,028$, welcher jedoch durch das Hinzukommen der kleinen, in der Bestimmung der beiden Theilungsfehler übriggebliebenen Unsicherheit (§ 5) noch ein wenig vergrössert wird.

Diese neue, ohne Zweifel grosses Zutrauen verdienende Bestimmung der Polhöhe ist $0,155$ grösser als die im J. 1820 durch den Reichenbach'schen Meridiankreis erlangte [Astr. Nachr. I, p. 247], und $0,03$ kleiner als die auf die Beobachtungen gegründete, welche Herr Dr. Busch von 1836 bis 1840 mit demselben Instrumente gemacht hat.*) Sollten die Polhöhen im Laufe der Zeit langsame Veränderungen erfahren, so würden Bestimmungen von der Sicherheit der gegenwärtig mitgetheilten sie verhältnissmässig bald an den Tag legen können.

Die Declination des Sterns, so wie die Tab. Geom. sie meiner früheren Bestimmung gemäss ergeben, bedarf den gegenwärtigen Beobachtungen zufolge keiner merklichen Verbesserung. Herr Dr. Busch fand eine $0,15$ kleinere**), allein so gering dieser Unterschied, und so wenig hinreichend die Sicherheit seiner Bestimmung ist, so mag hier doch bemerkt werden, dass er sich nicht gefunden haben würde, wenn man eine, nicht unwahrscheinlich erscheinende Vergrösserung des von Lindenman'schen Werthes der Nutationsconstante von einer Viertelsecunde angewandt hätte.

S.

Aus dem vorigen § ersieht man, dass zehn, den mitgetheilten ähnlichen Beobachtungen jeder der Culminationen α Ursae min., Bestimmungen, sowohl der

Polhöhe als auch der Declination ergeben, deren mittlere Fehler etwa eine Zwanzigtelsecunde beträgt. Ich habe früher nicht geglaubt, dass man erwarten dürfe, in der kurzen Zeit, die die Ausführung einer solchen Beobachtungsreihe erfordert, eine so grosse Sicherheit herbeizuführen; allein für noch werthvoller als die hier erlangte halte ich die Sicherheit, welche durch die allgemeine anwendbare zweite Beobachtungsmethode (§ 4) herbeigeführt wird; nämlich durch die Methode, welche die unbekannt bleibenden Veränderungen des Instruments, durch unmittelbar vorhergehende oder folgende Beobachtung des Nadir, unschädlich macht. Während der kurzen Zeit der allgemeineren Anwendung des Repsold'schen Instruments (§ 7) haben sich zwar noch nicht so viele Beobachtungen dieser Art zusammenbringen lassen, dass die Bestimmung ihres mittleren Fehlers schon beendigt werden könnte, allein sie reichen hin, den Werth, den sie besitzen, vorläufig anzudeuten. Ich werde die auf den Anfang 1843 reducirten Zenithdistanzen derjenigen Sterne, deren öftere Beobachtung bis jetzt gelungen ist, hier mittheilen. Sie zerfallen, durch eine Umlegung des Instruments am 19. Mai, in zwei Abtheilungen, die nicht miteinander vermischet werden dürfen, weil der jeder von ihnen zugehörige Theilungsfehler noch nicht bestimmt ist, die Zenithdistanzen also auch noch nicht von ihm befreit werden konnten. Die Aenderung, welche sie durch die Berücksichtigung des Einfusses der Schwere auf das Instrument vielleicht später noch erfahren werden, kommt bei der gegenwärtigen, nur die Beurtheilung ihrer Uebereinstimmung beabsichtigenden Mittheilung nicht in Betracht.

α Andromedae.		γ Pegasi.		α Canis min.		β Geminorum.	
Dec. 27	26° 29' 25,7	Dec. 27	40° 24' 12,9	April 25	49° 5' 28,4	April 25	26° 18' 51,9
April 24	25,7	April 24	12,7	28	28,3	28	52,2
25	25,9	Mai 15	11,6	Mai 1	28,2	Mai 1	51,5
27	25,6	18	12,8	4	28,7	4	51,8
30	26,1	19	12,6	10	28,9	10	51,6
Mai 11	25,9	21	12,5	11	28,3	11	51,8
15	26,2	23	12,8	15	28,3	14	52,1
16	25,7	24	11,9	19	27,1	15	52,2
18	26,8	26	12,2	22	27,4	16	51,5
19	25,8	27	12,6	24	26,6	19	50,4
20	24,9	29	13,0	25	26,3	22	52,3
21	26,1	Juni 2	12,0	30	25,7	24	51,5
23	25,5			31	26,0	25	50,1
24	25,3			Juni 5	27,6	31	50,5
30	26,1					Juni 5	50,8
Juni 2	25,4						

*) Astr. Nachr. Nr. 492, S. 233.

**) Ebendasselbst S. 234.

α Leonis.		β Leonis.		α Bootis.		α Pegasi.	
April 29	41° 58' 57,2	April 25	39° 15' 58,5	Mai 1	34° 42' 45,3	Mai 2	40° 21' 10,5
Mai 3	56,4	28	54,3	12	41,2	11	8,6
4	57,7	29	54,0	13	41,5	12	9,8
5	56,4	Mai 1	52,6	17	41,0	18	8,9
11	56,8	4	53,0	18	42,0	19	7,4
13	56,2	5	52,4	19	41,5	20	8,9
15	56,4	12	58,0	21	42,1	21	9,0
16	56,9	14	52,1	24	41,2	22	7,7
19	56,3	15	53,3	25	40,9	23	7,5
20	56,0	20	52,3	Juni 3	41,1	24	8,0
22	54,7	21	53,4			30	8,7
24	54,8	22	52,8			Juni 3	7,3
25	55,1	24	52,8				
29	56,6	Juni 2	51,4				
30	56,4						

Aus diesen Beobachtungen folgt der mittlere Fehler einer von ihnen:

$$= \pm 0,608.$$

Er ist nicht viel grösser als die Hälfte des m. F. einer Beobachtung mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise; er ist selbst bedeutend kleiner als der m. F., welchen die von POND mit dem grösseren und 6 mikroskopische Ablesungen gewährenden Kreise der Greenwicher Sternwarte gemachten Beobachtungen besitzen, indem dieser, aus der von OLUFSEN gemachten Reduktion der Beobachtungen von 1822, $= \pm 0,799$ hervorgegangen ist*). Allein so vorthellhaft dieses Zeugniß der hier betrachteten Anwendungsart des Repsold'schen Instruments auch ist, so glaube ich doch, dass es durch mein eigenes Verschulden noch nicht vorthellhaft genug ausgefallen ist. Ich glaube nämlich, dass ich das Beobachten bei unruhiger Luft nicht so streng vermieden habe, als dem Apparate angemessen gewesen wäre. Aus der bekannten, auch § 2 angewandten Zusammensetzung des mittleren Gesamtfehlers einer Beobachtung aus seinen unabhängig wirkenden verschiedenen Ursachen geht hervor, dass die Unruhe der Luft die Anwendungen eines, selbst einen grossen Fehler verursachenden Apparats wenig beeinträchtigt, während sie ein desto stärkeres Uebergewicht über den Fehler des Apparats erhält, je kleiner er ist. Insofern man durch die Entbehrung eines Mittels, die von der Unruhe der Luft hervorgebrachte Unsicherheit richtig zu schätzen, gezwungen wird, den einzelnen Beobachtungen einer Reihe, wenn nicht willkürliche Gewichte, ein gleiches Gewicht beizulegen, wird es daher vorthellhaft, jeden Apparat

nur bei Zuständen der Luft anzuwenden, welche nicht Fehler erzeugen, die weit grösser sind, als die ihm eigenthümlichen; den weniger genauen Apparat also häufiger, den genaueren seltener. Ich hätte mit dem Repsold'schen Kreise oft Beobachtungen versäumen sollen, wenn auch die Umstände, unter welchen sie gemacht werden mussten, für den Reichenbach'schen noch hinreichend günstig waren. In der Folge werde ich nur die Zenithdistanz eines Sterns ablesen, wenn ich ihn innerhalb einer halben Secunde in die Mitte des Paares der Horizontalfäden eingestellt zu haben sicher zu sein glaube; seine Durchgangszeit mag auch in den Fällen beobachtet werden, welche die Beobachtung seiner Zenithdistanz ausschliessen.

Der bisher üblichen Beobachtungsmethode zufolge wird die Angabe des Kreises, von welcher an die abgelesenen Winkel gezählt werden müssen, damit sie Entfernungen vom Scheitelpunkte oder Pole werden, während eines gewissen Zeitraums als unveränderlich angesehen und durch das arithmetische Mittel ihrer mehrmaligen, während dieser Zeit gemachten Bestimmungen festgesetzt. Die von mir angewandte geht dagegen von jedesmaliger Bestimmung der dem Nadir entsprechenden Angabe aus, ergibt also jede Beobachtung getrennt von anderen, und zugleich frei von der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Apparats. Dass diese unzweideutigen Vortheile nicht durch eine erhebliche Vergrösserung der zufälligen Fehler der Beobachtungen der Gestirne selbst erkaufte werden dürfen, ist Folge der grossen Genauigkeit, welche das Instrument der Bestimmung des Nadir gewährt. Für ein Instrument, welches sich in dieser Beziehung weniger befriedigend erwiese, würde dieselbe Methode nur vorthellhaft sein, wenn seine zu befürchtenden Veränder-

*) Astr. Nachr. Nr. 73, S. 5.

ungen noch grösser wären, als der zu befürchtende Fehler der jedesmaligen Bestimmung des Nadir.

9.

Wenn auch die von dem Repsold'schen Meridiankreise erwartete Vervollkommnung der Beobachtung der Declination die Veranlassung seiner Verfertigung für die Königsberger Sternwarte war, so glaubte ich doch, diese Gelegenheit nicht ohne den Versuch vorübergehen lassen zu dürfen, auch der Beobachtung der Rectascension die kleinere Vervollkommnung anzuzeigen, der sie noch fähig sein mag. Ich werde auch darüber Einiges mittheilen.

Die Formel, wodurch die beobachtete Durchgangszeit eines Sterns durch die Absehnlinie (t), auf seine Durchgangszeit durch den Meridian (τ) reducirt wird, ist bekanntlich

$$\tau = t + \frac{a \sin(\varphi - \delta) + b \cos(\varphi - \delta) + c}{\cos \delta}$$

und es bedeuten darin φ die Polhöhe, δ die Declination des Sterns (für die untere Culmination über den Pol hinausgezählt); ferner $90^\circ - 15a$ das von Norden rechts herum gezählte Azimuth des östlichen Endes der Axe, $15b$ die Erhöhung ihres westlichen Endes über der Ebene des Horizonts, $15c$ den östlichen Collimationsfehler. Will man τ zugleich von der täglichen Aberration befreien, was bequem ist, weil man dann keine weitere Rücksicht auf sie zu nehmen hat, so muss man c in $c - \mu$ verwandeln, wo

$$\mu = 0,020565 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e \sin \varphi}}$$

ist.*) Man hat also die bekannte Formel:

$$\tau = t + \frac{a \sin(\varphi - \delta) + b \cos(\varphi - \delta) + c - \mu}{\cos \delta} \dots (1)$$

welcher ich die allgemein gewordene Formänderung

$$\tau = t + m + n \operatorname{tg} \delta + (c - \mu) \sec \delta \dots (1^*)$$

gegeben habe, wo

$$m = b \cos \varphi + a \sin \varphi$$

$$n = b \sin \varphi - a \cos \varphi$$

bedeuten; diese Aenderung wird durch leichtere Rechnung nach der letzten Formel, wesentlicher aber durch die Vereinigung etwaniger Aenderungen von m mit dem Gange der Uhr, gerechtfertigt. — Die möglichst vortheilhafte Anwendung eines Passageninstrumentes fordert (abgesehen von Untersuchungen über seine Eigenthümlichkeiten) die möglichst vortheilhafte Bestimmung der jedesmaligen Werthe, entweder von a , b , c , oder

*) Tab. Reg. p. XXIII. [s. Abb. 44, Bd. I, p. 307, wo in der Formel für c' 0,020565 zu lesen ist.]

von m , n , c ; wenn sie vervollkommen werden soll, so kann es nur durch die Aufsuchung genügender Mittel zu dieser Bestimmung geschehen.

Eine der zur Bestimmung der drei unbekannt Grössen erforderlichen Gleichungen ergibt der Ausdruck des Unterschiedes der geraden Aufsteigungen zweier Sterne von verschiedenen Declinationen d , d' , durch ihre beobachteten Durchgangszeiten; nämlich:

$$\alpha - \alpha' = t - t' + n(\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} d') + (c - c')(\sec d - \sec d')$$

und es folgt daraus

$$n = l[\alpha - t - (\alpha', - t')] - k(c - c') \dots (2)$$

wo

$$l = \frac{\cos d \cos d'}{\sin(d - d')}, \quad k = \frac{\sin \frac{1}{2}(d + d')}{\cos \frac{1}{2}(d - d')}.$$

bedeuten. Bekanntlich ist es am vortheilhaftesten, einen der Sterne dem Pole sehr nahe zu wählen, während der andere ein Fundamentalstern ist; ist die untere Culmination des einen oder andern beobachtet, so werden seine um 12° veränderte AR. und das Supplement seiner Declination statt der AR. und Decl. selbst angewandt; für die Combinationen von α und δ Ursae min. mit anderen Sternen können die, immer wenig von resp. $\pm \cotg d$ und 1 verschiedenen Werthe von l und k ein für allemal berechnet werden. — Der Werth von b kann jedesmal durch die Wasserwage bestimmt werden. Die dritte erforderliche Bestimmung kann nur durch die Beobachtung noch einer Abweichung des Instruments vom Meridiane erlangt werden, jedoch nicht genügend durch die Beobachtung eines Sterns. Diese Beobachtung habe ich bisher an dem (zur Ablesung einzelner Bogenseunden eingerichteten) Meridianzeichen gemacht; aber da sein Azimuth nicht als bekannt angenommen, vielmehr durch die Beobachtungen fortgesetzt bestimmt werden sollte, so wurde nöthig, die vor und nach einer Umlegung der Axe des Instruments gemachten, durch die Voraussetzung der Unveränderlichkeit seines Collimationsfehlers miteinander in Verbindung zu bringen; durch eine Voraussetzung, deren Richtigkeit für ein gutes Instrument, wenn nicht durch kleine und vorübergehende Einflüsse von Wärmeveränderlichkeiten des Fernrohrs, nur durch Zufälligkeiten gestört zu werden scheint. Das diese Voraussetzung verfolgende, die der unveränderlichen Lage der Axe aber vermeidende und in seiner Anordnung die möglichst vortheilhafte Benutzung der Beobachtungen beabsichtigende Verfahren, welches seit 20 Jahren auf der Königsberger Sternwarte angewandt ist, habe ich in der VI. Abtheilung meiner Beobachtungen auseinandergesetzt. [Abb. 62, p. 40.]

Ich habe während dieser Zeit nicht bemerkt, dass man die Kenntniss der drei unbekanntenen Grössen auf eine andere Art vortheilhafter erlangen könnte. Wenn man aber den festen Verticalfäden noch einen mikrometrisch beweglichen hinzusetzt, so kann dieser angewandt werden, um die Entfernung zwischen dem mittleren Faden und seinem von Quecksilber reflectirten Bilde zu messen. Hierdurch erhält man die dritte, bei einem Instrumente ohne Mikrometer fehlende, zur Erfindung der drei unbekanntenen Grössen erforderliche Bestimmung; man wird dadurch in den Stand gesetzt, diese drei Grössen kennen zu lernen, ohne Beobachtungen in entgegengesetzter Lage der Axe mit einander vermischen zu dürfen. Aus diesem Grunde haben die Herren REPSOLD dem neuen Instrumente auf meine Bitte diese Einrichtung gegeben; ich werde jetzt mittheilen, wie ich sie anwende.

Wenn man die, östlich positiv genommene Entfernung des Fadenbildes vom Faden durch $15s$ bezeichnet, so ist

$$c = \frac{1}{2}s + b \dots \dots \dots (3)$$

Gleichzeitige Bestimmungen von s und b ergeben also c ; wenn es während eines Zeitabschnitts als beständig angesehen werden soll, erlangt sein Werth, durch Wiederholungen dieser Bestimmung innerhalb derselben Zeit, grössere Genauigkeit, allein die vorhandene Sicherheit der Messungen, sowohl von s als von b , lässt nur geringe Beobachtungsfehler befürchten. s allein wird dagegen bei jeder beobachteten Culmination eines der beiden Polarsterne gemessen, welche zugleich (2):

$$p = [a - t - (a, - t)] l; \quad n = p - k(c - \mu)$$

ergibt. Durch beide zusammengenommen erhält man für dieselbe Zeit

$$m = -n \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}s \operatorname{sec} \varphi + c \operatorname{sec} \varphi \dots (4)$$

und, wenn λ die dann gemessene, östlich positiv genommene Entfernung eines südlichen Meridianzeichens von dem mittleren Faden bedeutet, das östliche Azimuth desselben:

$$A = \lambda - n \cdot 15 \operatorname{sec} \varphi - s \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi + c \cdot 15(1 + \operatorname{tg} \varphi) \dots (5)$$

Wenn der angewandte Polarstern in beiden Culminationen beobachtet ist, so können m und n dadurch von der Voraussetzung der Kenntniss seiner Rectascension befreit werden. — Als wesentliche Vortheile der steti- gen Anwendung des Mikrometers betrachte ich, dass jede Culmination eines Polarsterns das zur Erfindung von m und n Erforderliche, mit geringem Zeitaufwande, vollständig und mit aller wünschenswerthen Sicherheit liefert; auch dass diese Vollständigkeit der Beurtheilung

der Zeitgrenzen günstig ist, innerhalb welcher m und n als unveränderlich angenommen werden dürfen.

10.

In Beziehung auf die Veränderungen der Lage der Axe des Instruments oder des Instruments selbst, aus welchen Aenderungen von m , n , c entstehen, verdanke ich dem Mikrometer eine Bemerkung, welche ich hier mittheilen will, weil sie noch nicht gemacht ist. Wenn man den Mikrometerfaden nach der Anwendung, welche er bei der Beobachtung eines Polarsterns erfahren hat, ungeändert in seiner Stellung auf das Fadenbild lässt, so sieht man zur Zeit der Beobachtung jedes anderen Gestirns, indem die dem Nadir entsprechende Angabe des Kreises beobachtet wird, zugleich, inwiefern die Absehlenslinie die zuletzt gemessene Neigung gegen den Horizont beibehalten hat. Gewöhnlich bemerkt man keine Veränderung, obgleich man eine eine Viertel-secunde betragende (die sich durch die Reflexion eine halbe Secunde gross darstellt) nicht übersehen würde; allein es ist auch nicht selten, Aenderungen bis zu der doppelten Grösse eintreten, vielleicht einige Stunden lang anhalten und dann wieder verschwinden zu sehen. Ohne Zweifel rühren diese vorübergehenden Aenderungen von Wärmeverschiedenheiten her, welche in den Pfeilern, dem Metalle der Lager oder zwischen der Ost- und Westseite des Fernrohrs entstehen und wieder verschwinden. Solche Verschiedenheiten sind nichts weniger als unerwartet; wenn sie vorhanden sind, wird die wahrgenommene Art ihrer Wirkung nothwendig; auch dürfen sie nur in sehr geringer Grösse vorhanden sein, um ihrer Wirkung die wahrgenommene Grösse zu geben. Ich zweifle auch nicht, dass alle vorhandenen Passageninstrumente sie erfahren haben und erfahren werden, und dass sie nur unbemerkt geblieben sind, weil ein Mittel fehlte, sie ohne weiteres Zuthun und dennoch mit der grössten Sicherheit an den Tag zu legen. — Aus diesen Aenderungen geht hervor, dass es gut ist, m , n und c durch die Beobachtungen zur Zeit mehrerer Culminationen der Polarsterne zu bestimmen und mittlere Werthe derselben nicht eher zu verlassen, als bis eine bleibende Aenderung anfängt vorherrschend zu werden.

Das Instrument hatte ursprünglich 7 Verticalfäden in etwa 11 Zeiteinheiten Aequatoralenfernung von einander, statt deren ich ihm aber 5 andere, etwa 15' von einander entfernte, gegeben habe. Diese Aenderung erschien mir nothwendig; wenn die wenigen Secunden, welche zwischen dem Anschreiben der Durchgangszeit durch einen Faden und der 11' späteren übrig bleiben,

auch bei ganz ruhiger Luft vielleicht zur Einstellung des Gestirns in die Mitte des Paares der Horizontalfäden hinreichen, so bedarf man bei gewöhnlicher, noch mehr bei ungünstiger Beschaffenheit der Luft, doch mehr Musse, um die zitternde Bewegung des Gestirns gehörig verfolgen und ein Mittel zwischen ihren Grenzen treffen zu können; dann finde ich die grössere Zwischenzeit der neuen Fäden auch oft noch nicht hinreichend, sondern werde gezwungen einen der Verticalfäden unbenutzt zu lassen. — Ich hätte zwar 7 Fäden von 15' Entfernung in das Netz bringen können, aber ich glaube durch die kleinere Zahl ein besseres Resultat der Beobachtung zu erhalten, indem ich bemerkt habe, dass meine Aufmerksamkeit auf jedes Moment durch die Vergrößerung der Zahl der Momente vermindert wird. Ob die gebräuchlich gewordene Vermehrung der 5 Fäden, auf 7 oder 9, den Beobachtungen wirklich zum Vortheil gereicht, scheint mit Rücksicht auf die Individualität des Beobachters entschieden werden zu müssen. Ich glaube indessen, dass jeder aufmerksame Beobachter in seinen Beobachtungsreihen zuweilen Anomalien gefunden haben wird, die grösser sind, als dass er sie durch die zufälligen Fehler der Wahrnehmung der Durchgangszeiten durch die einzelnen Fäden wahrscheinlich erklären könnte.

Ich schliesse mit der Bemerkung, dass meiner Meinung nach alle sich auf die Richtung der Schwere beziehenden astronomischen Bestimmungen an Sicherheit gewinnen würden, wenn diese Richtung nur durch die Reflexion von einer Quecksilberoberfläche erkannt würde. Die Sicherheit, womit das Perpendikel auf diese Oberfläche die Richtung der Schwere andeutet, ist vollständig, weil das Quecksilber nur ruhig sein kann, wenn es horizontal ist; die Sicherheit, womit die Lage des Perpendikels erkannt wird, ist die, die das Sehen im Fernrohre gewährt. Offenbar ist der Zweck dieser Bemerkung weder die Verdrängung der Wasserwagen von allen Arten der Instrumente, noch die Behauptung, dass alle, ohne die Absicht die Reflexion von Quecksilber zu benutzen, eingerichteten Apparate durch ihre Benutzung wesentlich gewinnen würden.

[Die 27. Abtheilung der Königsberger Beobacht. enthält neben andern, BESSEL betreffende Bemerkungen (von BRUCH), seinem Bildnisse (mit dem im I. Bande dieser Ausgabe identisch), sowie seinen letzten Beobachtungen am Repsold'schen Meridiankreise in extenso, die ausführlichere Beschreibung und Untersuchung dieses Instruments (nebst Abbildung) von WICHMANN und die „Ableitung der Resultate der (Bessel'schen) Declinations-

beobachtungen“ von Prof. E. LUTHER. Ueber die „Rectification des Instruments“ schreibt WICHMANN p. XIV fl.: „Soll das Instrument seiner Einrichtung gehörig entsprechen und zugleich die grösste Bequemlichkeit für die Beobachtungen gewähren, so müssen vor Anwendung desselben folgende Bedingungen erfüllt werden: 1) Der Kreis muss genau senkrecht auf der Drehungsaxe sitzen; 2) die Mikroskope müssen so gestellt werden, dass zwei Revolutionen der Trommel genau einem Intervalle der Theilung entsprechen; 3) der Mikroskoprahmen muss richtig centrirt sein, d. h. die von zwei einander gegenüberstehenden Mikroskopen gebildeten Durchmesser des Kreises müssen senkrecht aufeinander stehen und ihr Durchschnittspunkt mit der Drehungsaxe des Kreises zusammenfallen.

BESSEL fand im März 1842, dass die Ebene des Kreises nicht senkrecht auf der Axe stand; wenn die Mikroskope deutlich gestellt waren, so wurden sie nach einer halben Drehung unendlich. Um den Punkt zu finden, wohin das Maximum der Abweichung fiel, wurde an einem der Mikroskope die Grösse von sechs Intervallen an acht verschiedenen Stellen des Kreises gemessen. Die Grösse derselben variierte von 724" bis 735", und als denjenigen Punkt, für welchen der Werth der Intervalle am kleinsten, der Abstand des Kreises also am grössten war, erhielt BESSEL 79° 28'. Der Kreis wurde hierauf um 180° versetzt und nun durch die Schrauben des ihm anklemmenden Ringes die Ebene desselben so nahe recht gemacht, dass nirgends mehr eine erhebliche Unsicherheit stattfand.

Die Berichtigung der Mikroskope hat BESSEL auf folgende Weise ausgeführt. Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunkts des Mikroskopobjectivs von der Ebene des Kreises durch a , von den Parallelfäden durch b , die diesen Werthen entsprechende Grösse des Bildes eines Intervalls der Theilung in Secunden ausgedrückt durch $120 + \zeta$, so dass ζ der Ueberschuss der Theile der Schraubentrommel über zwei Revolutionen ist, so muss das Bild des Intervalls im Verhältniss $120 : 120 + \zeta = k$ verkleinert werden, indem a in $a + x$, b in $b + y$ verwandelt wird. In der ersten Stellung ist die wahre Grösse des Bildes des Intervalls $J = J \cdot \frac{b}{a}$, im zweiten $J \cdot \frac{b+y}{a+x}$, es muss also

$$J \cdot \frac{b}{a} : J \cdot \frac{b+y}{a+x} = 120 + \zeta : 120 \quad \text{oder} \quad \frac{b+y}{a+x} \cdot \frac{a}{b} = k$$

gemacht werden. Es ist nun aber nach optischen Gesetzen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+y}$$

also

$$k = \frac{a}{b} \left(\frac{(a+b)(b+y)}{ab} - 1 \right),$$

woraus sich ergibt

$$y = -\frac{bb}{a+x} (1-k) = \frac{-bb\xi}{(a+b)(120+\xi)}$$

$$x = \frac{aa}{a+b} \cdot \frac{1-k}{k} = \frac{aa\xi}{120(a+b)}$$

Für ein nahezu berichtigtes Mikroskop fand BESSEL in Par. Linien ausgedrückt $a = 19,4$, $b = 52,6$, woraus sich ergibt $x = \xi \cdot 0,0437$ Par. Lin., und wenn ξ eine kleine Zahl ist, $y = -0,321 \xi$ Par. Lin. Die Correction des Mikroskops ist also hauptsächlich an der Entfernung der Fäden von der Objectivlinse auszuführen, während der Abstand der letztern vom Kreise nur eine viel geringere Aenderung erleidet. Es wird daher zweckmäßig sein, jene Entfernung zuerst zu berichtigen.

Die richtige Stellung und Centrirung des Mikroskoprahmens in Bezug auf den Kreis ist nur insofern nothwendig, indem dadurch die Ablesung für ein Gestirn immer auf dieselben Theilstriche bezogen wird, und die Angaben der vier Mikroskope wenig von einander abweichend gemacht werden, so dass sie sich bequem zu einem Mittel vereinigen lassen.

Bezeichnet man durch $\epsilon' \dots \epsilon''''$ die Winkel, welche die vom Centrum des Kreises C nach den unter dem Nullpunkte der Mikroskope erscheinenden Punkten der Theilung $M' \dots M''''$ gezogenen Linien mit der Horizontalen bilden, gezählt im Sinne der Ablesung der Theilung, den Durchschnittspunkt der beiden von den Mikroskopen gebildeten Durchmesser durch C' , die Entfernungen $C'M'$, $C'M'' \dots$ durch $\rho' \dots \rho''''$, den Halbmesser des Kreises durch r , und durch $\epsilon' \dots \epsilon''''$ die Winkel, welche die von C' nach $M' \dots M''''$ gezogenen Linien mit dem Horizonte bilden; ferner durch s den Abstand des Durchschnittspunktes C' vom Centrum C (beide in einer Ebene gedacht) und durch p den Winkel, welchen die Linie CC' mit der Horizontalen macht, endlich durch $90^\circ + x$ den von den beiden Durchmessern eingeschlossenen Winkel, so ist $\epsilon'' = \epsilon' + 90^\circ + x$, $\epsilon''' = \epsilon' + 180^\circ$, $\epsilon'''' = \epsilon' + 270^\circ + x$ und man hat alsdann

$$\begin{aligned} \rho' \sin \epsilon' &= r \sin \epsilon' - s \sin p \\ \rho'' \sin \epsilon'' &= r \sin \epsilon'' - s \sin p = -\rho'' \cos(\epsilon' + x) \\ \rho''' \sin \epsilon''' &= r \sin \epsilon''' - s \sin p = -\rho''' \sin \epsilon' \\ \rho'''' \sin \epsilon'''' &= r \sin \epsilon'''' - s \sin p = -\rho'''' \cos(\epsilon' + x) \\ \rho' \cos \epsilon' &= r \cos \epsilon' - s \cos p \\ \rho'' \cos \epsilon'' &= r \cos \epsilon'' - s \cos p = -\rho'' \sin(\epsilon' + x) \\ \rho''' \cos \epsilon''' &= r \cos \epsilon''' - s \cos p = -\rho''' \cos \epsilon' \\ \rho'''' \cos \epsilon'''' &= r \cos \epsilon'''' - s \cos p = \rho'''' \sin(\epsilon' + x) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \epsilon' &= \frac{r \sin \epsilon' - s \sin p}{r \cos \epsilon' - s \cos p} = \frac{r \sin \epsilon'''' - s \sin p}{r \cos \epsilon'''' - s \cos p} \\ -\operatorname{tg}(\epsilon' + x) &= \frac{r \cos \epsilon' - s \cos p}{r \sin \epsilon' - s \sin p} = \frac{r \cos \epsilon'''' - s \cos p}{r \sin \epsilon'''' - s \sin p} \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze halber $s \cos p = a$, $s \sin p = b$, so ergibt sich aus den vorigen Formeln

$$r \cos \frac{1}{2}(\epsilon' - \epsilon''''') = a \cos \frac{1}{2}(\epsilon' + \epsilon''''') + b \sin \frac{1}{2}(\epsilon' + \epsilon''''')$$

$$r \cos \frac{1}{2}(\epsilon'' - \epsilon''''') = a \cos \frac{1}{2}(\epsilon'' + \epsilon''''') + b \sin \frac{1}{2}(\epsilon'' + \epsilon''''') \quad (1)$$

mithin

$$\frac{r}{r} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\epsilon'''' - \epsilon''') \sin \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''') - \cos \frac{1}{2}(\epsilon'''' - \epsilon''') \sin \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''')}{\sin [\frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''') - \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''')]}$$

$$- \frac{r}{r} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\epsilon'''' - \epsilon''') \cos \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''') - \cos \frac{1}{2}(\epsilon'''' - \epsilon''') \cos \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''')}{\sin [\frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''') - \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''')]}$$

Man hat ferner

$$90^\circ + x = \frac{1}{2}(\epsilon'' - \epsilon''') + \frac{1}{2}(\epsilon'''' - \epsilon''''')$$

$$90^\circ - x = \frac{1}{2}(\epsilon'' - \epsilon''''') + \frac{1}{2}(\epsilon'''' - \epsilon''''')$$

also

$$x = \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''') - \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon'') - 90^\circ$$

Aus diesen streng richtigen Formeln ergibt sich, wie der Fehler x durch die Verschiebung eines Mikroskops in der Peripherie des Kreises wegzuschaffen ist und der Fehler der Centrirung durch Verschiebung des ganzen Rahmens, nämlich a durch Hälfte der Horizontalschrauben hh , b durch die Verticalschrauben gg [vgl. die Abbildung]. Ist der Kreis nahezu centrir und x klein, so sind bei dem Repsold'schen Kreise die Winkel $\epsilon' \dots \epsilon''''$ nahezu $= 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$. Bezeichnet man also durch $\mu' \dots \mu''''$ die Unterschiede $\epsilon'' - 45^\circ, \epsilon'' - 135^\circ, \dots$, wo $\mu', \mu'' \dots$ in Secunden ausgedrückt sind, und durch ω die Zahl 206265, so ist

$$x = \frac{1}{2}(\mu'''' + \mu''') - \frac{1}{2}(\mu'' + \mu')$$

und bei Vernachlässigung der höheren Ordnungen von $\mu' \dots \mu''''$ ergibt sich aus (1)

$$\frac{\mu'''' - \mu'}{2\omega} = \frac{a}{r} \sin 45^\circ - \frac{b}{r} \cos 45^\circ = \frac{a-b}{r\sqrt{2}}$$

$$\frac{\mu'''' - \mu''}{2\omega} = \frac{a}{r} \cos 45^\circ + \frac{b}{r} \sin 45^\circ = \frac{a+b}{r\sqrt{2}}$$

Man hat also:

$$\epsilon'''' - \epsilon' = 180^\circ + \frac{a-b}{r}\sqrt{2}; \quad \epsilon'''' - \epsilon'' = 180^\circ + \frac{a+b}{r}\sqrt{2}$$

oder

$$\frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''''') - \frac{1}{2}(\epsilon' + \epsilon'') = 180^\circ + \frac{a}{r}\sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon'') - \frac{1}{2}(\epsilon' + \epsilon''''') = -\frac{b}{r}\sqrt{2}$$

Durch Addition und Subtraction von

$$90^\circ + x = \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon''''') - \frac{1}{2}(\epsilon'''' + \epsilon')$$

folgt dann:

$$\epsilon' - \epsilon'''' = 90^\circ - \frac{a}{r}\sqrt{2} - x; \quad \epsilon'' - \epsilon' = 90^\circ - \frac{b}{r}\sqrt{2} + x$$

$$\epsilon'''' - \epsilon'' = 90^\circ + \frac{a}{r}\sqrt{2} - x; \quad \epsilon'''' - \epsilon'''' = 90^\circ + \frac{b}{r}\sqrt{2} + x$$

Sucht man also zuerst x , so muss der Mikroskoprahmen durch die Verticalschrauben gg so verschoben werden, dass

$\epsilon'' - \epsilon' = \epsilon''' - \epsilon'' = 90^\circ + x$ wird, und durch die Horizontalschrauben hh so, dass $\epsilon'' - \epsilon' = \epsilon''' - \epsilon'' = 90^\circ - x$ wird.

Die dann etwa noch nöthige Aenderung der Mikroskope, um sie auf die Mitte der Theilung zu richten, darf nur in der Richtung der Radien geschehen, und zu diesem Zwecke ist die Befestigung der Mikroskope an den Rahmen mit den erforderlichen Correctionschrauben versehen. „...“]

[Ueber die Besselsche Methode der Bestimmung der Theilfehler theilt Prof. E. LUTHER p. XXIV fl. das Folgende mit:

„Das Princip, nach welchem die Theilungsfehler der bei der Beobachtung des Polarsterns und der Fundamentalsterne zur Anwendung kommenden Theilstriche bestimmt sind, ist von BESSEL in Nr. 481 der Astr. Nachr. auseinander gesetzt [s. p. 65 fl.]. Es bleibt mir daher nur übrig, das vollständige Verfahren anzugeben, durch welches dasselbe von ihm angewandt worden ist. Wenn das Fernrohr des Repsold'schen Kreises nach dem Zenith gerichtet ist, so stehen die festen Mikroskope, welche durch M_1, M_2, M_3, M_4 bezeichnet werden sollen, respective über den Theilstrichen $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Liegt der Kreis nach Osten, so befindet sich M_1 nördlich unten, M_2 südlich unten, M_3 südlich oben, M_4 nördlich oben; liegt dagegen der Kreis nach Westen, so befindet sich M_1 südlich unten, M_2 nördlich unten, M_3 nördlich oben und M_4 südlich oben. Bezeichnet man den Theilstrich, welcher die der Zenithdistanz eines Sterns am nächsten kommende gerade Minute angibt, durch z , so enthält das folgende Schema die Theilstriche, welche sich bei Beobachtung eines Sterns mit südlicher Zenithdistanz unter den Mikroskopen befinden:

Lage des Kreises.	Beobachtung.	M_1	M_2	M_3	M_4
Ost	direct	z	$90+z$	$180+z$	$270+z$
Ost	reflectirt	$180-z$	$270-z$	$360-z$	$90-z$
West	direct	$360-z$	$90-z$	$180-z$	$270-z$
West	reflectirt	$180+z$	$270+z$	z	$90+z$

Bei der Beobachtung eines Sterns kommen demnach die Theilstriche

$$z, 90+z, 180+z, 270+z$$

$$\text{und} \quad 360-z, 90-z, 180-z, 270-z$$

zur Anwendung.

Bezeichnet man durch $\varphi(u)$ die Grössen, welche der Ablesung u eines Strichs wegen des Theilungsfehlers hinzugefügt werden muss, und setzt

$$\{ \varphi(u) + \varphi(90+u) + \varphi(180+u) + \varphi(270+u) \} = \psi(u),$$

so ist die Correction, welche bei Beobachtung eines Sterns den Ablesungen wegen der Theilungsfehler hinzuzufügen ist, $\psi(z)$, wenn die ersten vier Striche, und $\psi(360-z)$, wenn die letzten vier Striche gebraucht sind.

Zur Ermittlung dieser Grössen wurde ein bewegliches Mikroskop O näherungsweise in der Entfernung x von einem der festen Mikroskope angebracht, sodass zwischen beiden sich ein Bogen $x+i$ befand, und zwar entweder über M_1 oder M_2 , oder unter M_3 oder M_4 , da die das Instrument tragenden Pfeiler, welche sich zwischen M_1 und M_2 und zwischen M_3 und M_4 erheben, eine andere Anordnung nicht zulassen. Wenn das Mikroskop O über M_1 oder unter M_3 gestellt war, so wurden unter die Absehnslinie desselben viermal der Reihe nach die Striche

$$0 \quad 90 \quad 180 \quad 270 \quad 360-z \quad 90-z \quad 180-z \quad 270-z$$

gebracht; wenn das Mikroskop O dagegen über M_2 oder unter M_4 gestellt war, so wurden unter die Absehnslinie desselben viermal der Reihe nach die Striche

$$z \quad 90+z \quad 180+z \quad 270+z \quad 0 \quad 90 \quad 180 \quad 270$$

gebracht, und es wurde das Mikrometer des festen Mikroskops zum Messen angewandt. Für beide Fälle, welche im Folgenden durch Fall I. und Fall II. unterschieden werden sollen, sind die Einstellungen unter dem Prüfungsmikroskop O und die dazu gehörigen Ablesungen an dem festen Mikroskop in folgendem Schema enthalten:

Einstellungen unter O	I. Ablesungen an den festen Mikroskopen: M_1 oder M_2					Einstellungen unter O	II. Ablesungen an den festen Mikroskopen: M_3 oder M_4				
	$z+a_1$	$z+a_2$	$z+a_3$	$z+a_4$	z		a_1	a_2	a_3	a_4	
1 0	$z+a_1$	$z+a_2$	$z+a_3$	$z+a_4$	z	a_1	a_2	a_3	a_4		
2 90	$90+z+b_1$	$90+z+b_2$	$90+z+b_3$	$90+z+b_4$	$90+z$	$90+b_1$	$90+b_2$	$90+b_3$	$90+b_4$		
3 180	$180+z+c_1$	$180+z+c_2$	$180+z+c_3$	$180+z+c_4$	$180+z$	$180+c_1$	$180+c_2$	$180+c_3$	$180+c_4$		
4 270	$270+z+d_1$	$270+z+d_2$	$270+z+d_3$	$270+z+d_4$	$270+z$	$270+d_1$	$270+d_2$	$270+d_3$	$270+d_4$		
5 $360-z$	a'_1	a'_2	a'_3	a'_4	0	$360-z+a'_1$	$360-z+a'_2$	$360-z+a'_3$	$360-z+a'_4$		
6 $90-z$	$90+b'_1$	$90+b'_2$	$90+b'_3$	$90+b'_4$	90	$90-z+b'_1$	$90-z+b'_2$	$90-z+b'_3$	$90-z+b'_4$		
7 $180-z$	$180+c'_1$	$180+c'_2$	$180+c'_3$	$180+c'_4$	180	$180-z+c'_1$	$180-z+c'_2$	$180-z+c'_3$	$180-z+c'_4$		
8 $270-z$	$270+d'_1$	$270+d'_2$	$270+d'_3$	$270+d'_4$	270	$270-z+d'_1$	$270-z+d'_2$	$270-z+d'_3$	$270-z+d'_4$		

Setzt man nun:

$$\frac{1}{4}[a_1 + a_2 + a_3 + a_4] = a \quad \frac{1}{4}[a'_1 + a'_2 + a'_3 + a'_4] = a'$$

$$\frac{1}{4}[b_1 + b_2 + b_3 + b_4] = b \quad \frac{1}{4}[b'_1 + b'_2 + b'_3 + b'_4] = b'$$

$$\frac{1}{4}[c_1 + c_2 + c_3 + c_4] = c \quad \frac{1}{4}[c'_1 + c'_2 + c'_3 + c'_4] = c'$$

$$\frac{1}{4}[d_1 + d_2 + d_3 + d_4] = d \quad \frac{1}{4}[d'_1 + d'_2 + d'_3 + d'_4] = d'$$

so ergeben sich aus den ersten vier Einstellungen im

Falle I. die Gleichungen:

$$z + i = z + \varphi(x) \quad + a - [0 + \varphi(0)]$$

$$z + i = 90 + z + \varphi(90 + z) + b - [90 + \varphi(90)]$$

$$z + i = 180 + z + \varphi(180 + z) + c - [180 + \varphi(180)]$$

$$z + i = 270 + z + \varphi(270 + z) + d - [270 + \varphi(270)]$$

$$\text{oder} \quad \varphi(x) - \varphi(0) = i - a$$

$$\varphi(90 + z) - \varphi(90) = i - b$$

$$\varphi(180 + z) - \varphi(180) = i - c$$

$$\varphi(270 + z) - \varphi(270) = i - d$$

Ebenso erhält man aus den letzten vier Einstell-

ungen die Gleichungen:

$$\varphi(0) - \varphi(360 - z) = i - a'$$

$$\varphi(90) - \varphi(90 - z) = i - b'$$

$$\varphi(180) - \varphi(180 - z) = i - c'$$

$$\varphi(270) - \varphi(270 - z) = i - d'$$

Durch Addition der ersten vier Gleichungen be-

kommt man:

$$4[\psi(x) - \psi(0)] = 4i - [a + b + c + d]$$

und durch Addition der letzten vier Gleichungen

$$4[\psi(0) - \psi(360 - z)] = 4i - [a' + b' + c' + d']$$

Durch ganz dieselben Betrachtungen ergeben sich

im Falle II. die beiden Gleichungen:

$$4[\psi(x) - \psi(0)] = 4i + [a + b + c + d]$$

$$4[\psi(0) - \psi(360 - z)] = 4i + [a' + b' + c' + d']$$

Wird nun $i \mp a = A$ und $i \mp a' = A'$

$$i \mp b = B \quad i \mp b' = B'$$

$$i \mp c = C \quad i \mp c' = C'$$

$$i \mp d = D \quad i \mp d' = D'$$

gesetzt, was das obere Zeichen für den Fall I. und das

untere für den Fall II. gilt, so erhält man:

$$\psi(x) - \psi(0) = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$$

$$\psi(0) - \psi(360 - z) = \frac{1}{4}(A' + B' + C' + D')$$

Da der Anfangspunkt der Theilung willkürlich ist,

so hat BESSEL ihn dadurch bestimmt, dass er $\psi(0) = 0$

setzte, wodurch man die den Ablesungen wegen der

Theilungsfehler hinzuzufügenden Correctionen:

$$\psi(x) = \frac{1}{4}[A + B + C + D]$$

$$-\psi(360 - z) = \frac{1}{4}[A' + B' + C' + D']$$

* Diese Größen $A, B, C, D, A', B', C', D'$ sind in Nr. 481 der

Astr. Nachr. [p. 66] resp. durch $a, b, c, d, a', b', c', d'$ bezeichnet.

in der Form erhält, welche BESSEL seiner Rechnung

gegeben hat. Die Bestimmung von i wird durch zwei Reihen

von 10 Einstellungen, welche BESSEL Repetitionen

nannte, von denen die eine nach der Ordnung der Theil-

ung, die andere gegen dieselbe fortschreitet, gewonnen.

Bezeichnet A einen beliebigen Theilstrich und

bringt man unter das Mikroskop O , je nachdem O die

Stellung des Falls I. oder die Stellung des Falls II. hat,

folgende Striche:

Erste Reihe nach der Ordnung der Theilung:

$$A \quad A+z \quad A+2z \quad A+3z \quad A+4z \quad A+5z \quad A+6z \quad A+7z \quad A+8z \quad A+9z$$

Zweite Reihe gegen die Ordnung der Theilung:

$$A-z \quad A-2z \quad A-3z \quad A-4z \quad A-5z \quad A-6z \quad A-7z \quad A-8z \quad A-9z$$

so gibt jede Einstellung unter O und die dazu gehörige

Ablesung an M eine Gleichung zwischen i und den

Theilungsfehlern. Man erhält nämlich aus den 10 Ab-

lesungen der ersten Reihe:

$$i = \varphi(A+z) - \varphi(A) \quad \pm m_1$$

$$i = \varphi(A+2z) - \varphi(A+z) \quad \pm m_2$$

$$i = \varphi(A+3z) - \varphi(A+2z) \quad \pm m_3$$

$$\vdots$$

$$i = \varphi(A+10z) - \varphi(A+9z) \quad \pm m_{10}$$

und aus den 10 Ablesungen der zweiten Reihe:

$$i = \varphi(A) - \varphi(A-z) \quad \pm m'_1$$

$$i = \varphi(A-z) - \varphi(A-2z) \quad \pm m'_2$$

$$i = \varphi(A-2z) - \varphi(A-3z) \quad \pm m'_3$$

$$\vdots$$

$$i = \varphi(A-9z) - \varphi(A-10z) \quad \pm m'_{10}$$

wo das obere Zeichen bei m für den Fall I. und das

untere für den Fall II. zu nehmen ist. Durch Addition

der 10 Gleichungen jeder Reihe ergibt sich die

doppelte Bestimmung von i :

$$10i = \varphi(A+10z) - \varphi(A) \quad \pm (m)$$

und $10i = \varphi(A) - \varphi(A-10z) \quad \pm (m')$

Beide Gleichungen haben die Form:

$$10i = \varphi(U) - \varphi(V) \quad \pm m$$

wo U den grössten und V den kleinsten der Anfangs-

und Endpunkte bezeichnet, wenn die ganzen Peripherien

mitgezählt werden.

Stellt man nun zuerst U und dann V unter die Absehnlinie von M_1 und liest an den drei übrigen festen Mikroskopen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ab, so erhält man, wenn die Fehler, welche von der Excentricität des Kreises herrühren, durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bezeichnet werden, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi(U) - \varphi(L) &= 0 \\ \varepsilon_1 + \varphi(U) - \varphi(90 + U) &= \alpha_1 \\ \varepsilon_2 + \varphi(U) - \varphi(180 + U) &= \alpha_2 \\ \varepsilon_3 + \varphi(U) - \varphi(270 + U) &= \alpha_3 \\ \varphi(V) - \varphi(V) &= 0 \\ \varepsilon_1 + \varphi(V) - \varphi(90 + V) &= \beta_1 \\ \varepsilon_2 + \varphi(V) - \varphi(180 + V) &= \beta_2 \\ \varepsilon_3 + \varphi(V) - \varphi(270 + V) &= \beta_3 \end{aligned}$$

welche durch Addition

$$\frac{1}{3}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3] + \varphi(U) - \varphi(L) = \frac{1}{3}[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] = \alpha$$

$$\frac{1}{3}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3] + \varphi(V) - \varphi(V) = \frac{1}{3}[\beta_1 + \beta_2 + \beta_3] = \beta$$

1. Beobachtung der 8 Striche, welche die Ablesungen: $a_1 b_1 c_1 d_1 a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ ergibt,
 2. vorwärtsgehende Repetitionsreihe, " " " " $m_1 m_2 m_3 \dots m_{10}$
 3. 2malige Beobachtung der 8 Striche " " " " $a_2 b_2 c_2 d_2 a'_2 b'_2 c'_2 d'_2$ und
 $a_3 b_3 c_3 d_3 a'_3 b'_3 c'_3 d'_3$ ergibt,
 4. rückwärtsgehende Repetitionsreihe " " " " $m'_1 m'_2 m'_3 \dots m'_{10}$
 5. Beobachtung der 8 Striche. " " " " $a_4 b_4 c_4 d_4 a'_4 b'_4 c'_4 d'_4 \dots$ "

66. Beobachtungen des Ganges einer Kessels'schen Pendeluhr und Bemerkungen darüber.*)

(Astr. Nachr. 8, p. 1.)

Am 1. August 1828 wurde eine neue, von Herrn KESSELS verfertigte Pendeluhr auf der Königsberger Sternwarte aufgestellt; dieses geschah genau nach der von dem Künstler erhaltenen Anweisung. Herr Etatsrath SCHUMACHER, dessen hiesiger Anwesenheit ich mich damals erfreute, hatte die Güte, die Anordnung der Aufstellung zu leiten. Bei der Construction dieser Uhr hat Herr KESSELS alle Hilfsmittel angewandt, welche zur unveränderten Erhaltung des Ganges beitragen können. Die Arbeit der Räderwerke ist ausgezeichnet sorgfältig und schön; die Axen der Räder laufen in Steinen und die Zähne des Graham'schen Ankers sind gleichfalls von Steinen gemacht; die Aufhängungsart des Pendels ist sehr sicher. Die Uhr wird wöchentlich aufgezogen; ihre Schläge sind laut und scharf; ihre Räder und die Zapfenlöcher derselben können bei einer nöthigen Reinigung einzeln herausgenommen werden, was eine mir sehr erwünschte Einrichtung ist.

Um das Verhalten der neuen Uhr genau kennen zu lernen, fing ich gleich nach ihrer Aufstellung an,

ergeben. Substituirt man diese Gleichungen in die früher gefundene:

$$10 i = \varphi(L) - \varphi(V) \pm m,$$

so erhält man:

$$10 i = \alpha - \beta + \varphi(U) - \varphi(V) \pm m$$

oder $i = \frac{1}{10}[\alpha - \beta \pm m] + \frac{1}{10}[\varphi(U) - \varphi(V)]$ welche Gleichung unter der von BESSEL gemachten Voraussetzung, dass $\frac{1}{10}[\varphi(U) - \varphi(V)]$ als eine zu vernachlässigende Grösse zu betrachten ist,

$$i = \frac{1}{10}[\alpha - \beta \pm m]$$

ergibt. Das Mittel aus der doppelten Bestimmung von i ist zur Berechnung von $\psi(x)$ und $\psi(360 - x)$ benutzt worden.

Die Reihenfolge, welche BESSEL bei den zur Ermittlung der Theilungsfehler gemachten Beobachtungen befolgt hat, ist, nach seiner in Nr. 481 der Astr. Nachr. gemachten Angabe, folgende (vgl. p. 66):

1. Beobachtung der 8 Striche, welche die Ablesungen: $a_1 b_1 c_1 d_1 a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ ergibt,
 2. vorwärtsgehende Repetitionsreihe, " " " " $m_1 m_2 m_3 \dots m_{10}$
 3. 2malige Beobachtung der 8 Striche " " " " $a_2 b_2 c_2 d_2 a'_2 b'_2 c'_2 d'_2$ und
 $a_3 b_3 c_3 d_3 a'_3 b'_3 c'_3 d'_3$ ergibt,
 4. rückwärtsgehende Repetitionsreihe " " " " $m'_1 m'_2 m'_3 \dots m'_{10}$
 5. Beobachtung der 8 Striche. " " " " $a_4 b_4 c_4 d_4 a'_4 b'_4 c'_4 d'_4 \dots$ "

sie mit der Repsold'schen Uhr und durch diese mit den astronomischen Beobachtungen selbst zu vergleichen. Um die Vergleichungen genau machen zu können, wurde die Kessels'sche Uhr so aufgehängt, dass man ihre Schläge und die Schläge der Repsold'schen zugleich hören konnte; aus demselben Grunde wurde ihr Pendel so weit verlängert, dass sie nach mittlerer Zeit ging, wodurch sie stets in etwa $6^m 5^s$ hinter der Repsold'schen, Sternzeit zeigenden Uhr einen Pendelschlag zurückblieb und daher durch Coincidenz der Pendelschläge mit dieser verglichen werden konnte. Die Vergleichung wurde täglich zweimal gemacht, um 8^h und 20^h ; diese Zeiten wurden gewählt, weil etwa in die Mitte von 20^h und 8^h die Zeit der grössten Wärme, zwischen 8^h und 20^h die der kleinsten fällt und daher ein von der täglichen Wärmeänderung herrührender Unterschied bei der Wahl dieser Zeiten am deutlichsten hervortreten musste. Das Mittel aus allen, während 13 Monaten auf diese Art beobachteten halbtägigen relativen Gängen beider Uhren scheint zu zeigen, dass ein kleiner Unterschied vorhanden ist; die 12 Tagesstunden der Kessels'schen Uhr erscheinen nämlich,

*) [238 d. a. Verz. — Vgl. auch 224 und 255 d. a. Verz.]

durch die Repsold'sche gemessen, 0,018 länger als die 12 Nachtstunden, was auf eine etwas zu schwache Compensation der ersteren deutet, indem die letztere sich viele Jahre hindurch als sehr richtig compensirt gezeigt hat.

Damit eine Uhr zur Anstellung genauer Beobachtungen, vorzüglich der Rectascensionsunterschiede, brauchbar sei, muss ihr Pendel richtig construirt sein und das Uhrwerk die Schwingungen desselben nicht stören. Ist sie in dem einen oder dem anderen dieser Erfordernisse unvollkommen, so wird ihr Gang unregelmässig; allein wenn der Fehler von der Compensation des Pendels herrührt, so kann er, sobald man ihn erkannt hat, verbessert werden, und erst wenn der Fehler der Compensation sich mit den aus dem Uhrwerke hervorgehenden Fehlern bis zur Unkenntlichkeit vermischt, oder die letzteren sich sehr merklich zeigen, darf man die Uhr als wirklich fehlerhaft betrachten. Die Prüfung der Compensation scheint mehr dem Astronomen, als dem Künstler, der die Uhr fertigt hat, obzuliegen, zumal da der erstere die Mittel dazu in grösserer Vollständigkeit besitzt als der letztere, falls dieser sich nicht selbst so mit astronomischen Beobachtungen beschäftigt, als zu einer lange anhaltenden Prüfung einer Uhr nothwendig ist. Denn die Construction des Pendels nach vorhandenen Angaben über die Ausdehnbarkeit der Metalle durch die Wärme ist nicht hinreichend; theils weil man noch immer nicht mit Sicherheit weiss, ob die Materialien, woraus ein Pendel zusammengesetzt wird, in jedem einzelnen Falle gleiche Ausdehnbarkeit besitzen; theils weil die Temperatur auch die Dichte der Luft ändert und der Einfluss dieser Aenderung auf den Gang der Uhr von der Figur des Pendels auf eine bis jetzt unbekante Art abhängt; endlich weil auch aus der Einwirkung des Uhrwerks auf das Pendel ein Einfluss der Temperatur auf den Gang der Uhr hervorgehen kann. — Die genaue Prüfung der Compensation derjenigen Uhren, welche man zur Beobachtung der Geradenaufsteigungen anwendet, ist aber wesentlich, weil aus einem Fehler derselben konstante Unterschiede zwischen den am Morgen und am Abend angestellten Beobachtungen entstehen, welche, selbst wenn sie auch an sich nicht gross sind, doch leicht den wahrscheinlichen Fehler häufig wiederholter Beobachtungen übertreffen und dann unrichtige Folgerungen veranlassen können.

Es war daher meine Absicht, die Vergleichungen der Kessels'schen Uhr ein Jahr lang fortzusetzen, um die Compensation derselben zu prüfen, und wenn es nöthig sein sollte zu verändern. Es wurde daher auch

die Temperatur der Sternwarte täglich aufgezeichnet, damit die Wärme, welcher die Uhr während jedes beobachteten täglichen Ganges ausgesetzt war, später mit demselben verglichen werden könnte. Diese Aufzeichnung geschah immer um Mittag. Es wäre besser gewesen, das Thermometer so oft, und zwar im Uhrgehäuse selbst, zu beobachten, dass man daraus die mittlere Temperatur des Pendels während eines jeden Tages hätte folgern können; allein hier tritt dieselbe Schwierigkeit ein, welche die Erfindung der mittleren Temperatur immer hat, nämlich die Beschwerlichkeit des öftern Anschreibens und die Nothwendigkeit, dieses auch während der Nacht nicht zu unterlassen. Da der Einfluss der Temperatur auf den Gang der Uhr, wegen der offenbar stattfindenden sehr nahen Richtigkeit der Compensation, nicht gross sein konnte, so hielt ich die Voraussetzung eines beständigen Unterschiedes der mittäglichen Wärme des (meistentheils verschlossenen und durch Fensterladen vor den Sonnenstrahlen geschützten) Zimmers der Sternwarte, in welchem die Uhr sich befand, von der mittleren Wärme des Tages für hinreichend genähert, um annehmen zu können, dass die mittlere Tageswärme dieselben Veränderungen erleidet, welche man an der Mittagswärme beobachtet; auf diese Veränderungen kommt es allein an, nicht auf die mittlere Wärme selbst.

Da die Correction der Repsold'schen Uhr für die Tage, an welchen Fundamentalsterne beobachtet sind, bekannt ist, so ergeben die Vergleichungen den Stand der Kessels'schen Uhr gegen mittlere Zeit für dieselben Tage. Dieses, stets auf 8 Uhr dieser Uhr bezogen, und den daraus folgenden täglichen Gang, so wie auch die Temperatur zu welcher derselbe gehört, findet man in der am Ende folgenden [hier weggelassenen] Tafel angegeben. Aus der Vergleichung des Ganges mit der Temperatur habe ich als wahrscheinlichstes Resultat gefunden, dass der Gang der Uhr sich um $-0,04406$ ändert, wenn das Thermometer um einen Grad der Centesimalscale steigt, ferner dass der mittlere Gang für die Temperatur des schmelzenden Eises $+0,92$ war.

Für die Temperatur t sollte also der tägliche Gang

$$= +0,92 - t \cdot 0,04406$$

sein; die der Uhr eigenthümliche Unregelmässigkeit erhält man, wenn man diesen berechneten Gang von dem beobachteten abzieht. Ich habe diese Abweichungen von der Regelmässigkeit in die letzte Columnne der Tafel gesetzt, welche daher den Gang enthält, welcher beobachtet sein würde, wenn die Compensation so viel stärker gewesen wäre, dass sie für jeden Grad des

Thermometers den täglichen Gang von 0^o4406 verzögert hätte, und wenn dem Pendel seine richtige Länge gegeben worden wäre. Diese Columne, nicht die unmittelbar beobachtete, ist der Maasstab für den Werth der Uhr. Ich glaube es wird schwer sein, eine grössere Regelmässigkeit hervorzubringen, zumal da die von dem Barometerstande herrührende Veränderung der Dichtigkeit der Luft, in welcher das Pendel sich bewegt, und welche durch die Einrichtung aller vorhandenen Uhren nicht compensirt wird, oft eine Aenderung von einigen Zehnteln einer Secunde im täglichen Gange erzeugt haben muss; wenn die Unvollkommenheiten der der Berechnung der Verbesserung zum Grunde gelegten Temperatur des Tages, der astronomischen Beobachtungen und der Vergleichen der Uhren zusammenwirken, so kann auch dadurch eine merkliche Unregelmässigkeit in den Zahlen der letzten Columne entstanden sein.

Um indessen das Verhalten der Uhr noch augenfälliger darzulegen, habe ich ihren Stand für jeden zehnten Tag, vom 1. Septbr. 1828 bis 6. Septbr. 1829, aus den Beobachtungen interpolirt, und aus demselben durch Hinzufügung von

$$- 7^h 59^m 56^s.10 + n. 0^s.92 - 0^o4406 \Sigma$$

seine Abweichung von der völligen Regelmässigkeit berechnet; $7^h 59^m 56^s.10$ ist nämlich das Mittel aus allen wegen des mittleren Ganges und des Fehlers der Compensation verbesserten Ständen der Uhr, n die Zahl der seit dem 1. Septbr. 1828 verfloßenen Tage und Σ die Summe der Thermometerstände, von derselben Epoche an gerechnet. Die folgende Tafel enthält dieses: zur Vergleichung habe ich die letzte Columne hinzugefügt, welche die Abweichungen von der Regelmässigkeit angibt, welche man gefunden haben würde, wenn man den Einfluss der Temperatur vernachlässigt hätte. Den ersten Monat nach der Aufstellung der Uhr habe ich in diese Tafel nicht aufgenommen, theils weil ich die Abweichungen während eines Jahres zu erkennen wünschte, theils weil man nicht sicher ist, dass ganz neue Uhren gleich Anfangs ihren wahren Gang annehmen.

	Beobachtete M. Z. — 8 ^h der Uhr.	Summe der Temperat. 0 ^o 0	Abweichung mit ohne Rücks. auf die Temp.
1828 Sept. 1.	8 ^h 0 ^m 2 ^s .10	0 ^o 0	+ 6 ^o 00 + 23 ^o 09
11.	7 59 58,48	172,5	+ 3,98 + 25,33
21.	59 55,19	327,9	+ 3,04 + 27,90
Oct. 1.	59 50,69	458,6	+ 1,99 + 29,25
11.	59 44,66	593,9	— 0,81 + 29,08
21.	59 36,89	692,1	— 3,71 + 27,17

	Beobachtete M. Z. — 8 ^h der Uhr.	Summe der Temperat.	Abweichung mit ohne Rücks. auf die Temp.
1828 Oct. 31.	7 ^h 59 ^m 31 ^s .54	766 ^o 9	— 3 ^o 24 + 27 ^o 68
Nov. 10.	59 25,58	781,1	— 0,54 + 27,58
20.	59 18,85	822,4	+ 0,91 + 26,70
30.	59 10,77	871,0	+ 0,01 + 24,48
Dec. 10.	59 3,66	878,0	+ 0,87 + 23,23
20.	58 55,43	905,5	+ 0,63 + 20,86
30.	58 45,00	885,8	+ 0,27 + 16,29
1829 Jan. 9.	58 34,36	825,4	+ 1,49 + 11,50
19.	58 24,81	752,7	+ 4,34 + 7,81
29.	58 13,37	672,2	+ 5,65 + 2,23
Febr. 8.	58 3,54	642,1	+ 6,35 — 1,74
18.	57 53,15	588,5	+ 7,52 — 6,27
28.	57 42,64	560,3	+ 7,45 — 10,93
März 10.	57 33,17	553,9	+ 7,46 — 14,54
20.	57 22,65	552,1	+ 6,22 — 19,20
30.	57 13,21	549,4	+ 6,10 — 23,78
April 9.	57 3,46	574,4	+ 4,45 — 26,67
19.	56 53,85	613,3	+ 2,33 — 30,43
29.	56 43,84	681,6	— 0,52 — 34,58
Mai 9.	56 34,86	773,0	— 5,30 — 37,70
19.	56 28,50	805,9	— 7,87 — 38,20
29.	56 24,84	1025,2	— 8,03 — 36,00
Juni 8.	56 18,80	1128,6	— 9,43 — 36,19
18.	56 15,36	1280,1	— 10,34 — 33,77
28.	56 15,12	1481,6	— 10,26 — 28,15
Juli 8.	56 14,25	1687,0	— 10,98 — 23,16
18.	56 16,18	1883,1	— 8,49 — 15,37
28.	56 19,39	2077,7	— 4,66 — 6,31
Aug. 7.	56 21,00	2278,8	— 2,44 + 1,16
17.	56 24,35	2459,2	+ 1,99 + 10,37
27.	56 25,27	2627,9	+ 4,58 + 17,15
Sept. 6.	56 25,36	2802,3	+ 6,00 + 23,09

Es ist nun zu hoffen, dass die Annahme eines Fehlers der Compensation, welche den Gang der Uhr während der Zeit dieser Vergleichen in so gute Uebereinstimmung gebracht hat, auch in der Folge einen ähnlichen Erfolg hervorbringen werde; wenigstens hat er sich, bei dem Uebergange von der Sommerwärme zu der Winterkälte, nahe so gezeigt, wie bei dem Uebergange von dieser zu jener. Auch kann die Compensation, welche die Uhr wirklich hat, keine grössere Autorität haben, als die aus der Beobachtung des jährigen Ganges gefolgerte: denn eine Prüfung des Ganges der Uhr von ähnlicher Vollständigkeit hat, vor der Einrichtung der Compensation, nicht stattgefunden, und ich habe oben schon angeführt, weshalb diese Einrichtung, ohne eine solche Prüfung, nicht als völlig sicher angesehen werden darf. Die Verbesserung der Compensation, welche sich aus der wirklichen Beobachtung des Ganges der Uhr in sehr verschiedenen Temperaturen als nothwendig erzeugt, schliesst alle Einflüsse der Wärme ein, sowohl der directen, welchen

die Pendelstangen erfahren, als auch den aus der Veränderung der Dichtigkeit der Luft durch die Temperatur hervorgehenden, und endlich die etwanige Einwirkung der Wärme auf den Gang des Uhrwerks selbst. Ich habe daher kein Bedenken gehabt, eine Verstärkung der Compensation am Pendel anzubringen, desto weniger da der kenntnisreiche und vorsichtige Künstler, welcher die Uhr gefertigt hat, seine vollständige Einwilligung in diese Aenderung gegeben hat. Diese Verstärkung der Compensation habe ich dadurch erhalten, dass ich 41,6 Linien von dem inneren Paare der Messingstangen des aus Messing und Eisen zusammengesetzten Pendels habe ab schneiden und dieselbe Länge durch Zink ersetzen lassen. Die beobachtete Aenderung des Ganges der Uhr zeigt, dass das Pendel so verändert werden muss, dass der Mittelpunkt des Schwunges um 0,000450 Lin. steigt, wenn die Temperatur um einen Grad der Centesimalscale wächst; allein dieses bezieht sich auf den Zustand, in welchem das Pendel zur Zeit der Versuche war, d. i. auf den Zustand, in welchem es mittlere Secunden schwingt, und in welchem es 2,404 Lin. länger ist, als es in der Folge für den Gang der Uhr nach Sternzeit sein wird; diese Verlängerung von 2,404 Lin. hat, für jeden Grad der Temperatur, eine Ausdehnung von 0,000027 Lin. erzeugt; hätte man die Uhr bei ihrer Prüfung nach Sternzeit gehen lassen, so würde man also 0,000423 Lin. statt 0,000450 gefunden haben. Nimmt man den Unterschied der Ausdehnungen des Zinks und Messings für jeden Grad des Thermometers = 0,0000123, so erhält man die durch Zink zu ersetzende Länge der Messingstangen

$$= \frac{0,000423}{0,0000123} = 34,4 \text{ Lin.}$$

Ich habe aber 7,2 Lin. mehr angenommen, weil ich dadurch die leichtere Anbringung etwaniger späterer Verbesserungen der Compensation erlangen wollte: das Pendel hat nämlich in jeder der inneren Messingstangen und der mittleren Eisenstange, am oberen Ende, fünf zur Veränderung der Compensation bestimmte Löcher, deren jedes von dem nächsten 6 Lin. entfernt ist; wenn man das Querstück, welches diese drei Stangen verbindet, um ein Loch tiefer setzt, so wird dadurch die Compensation für jeden Grad des Thermometers um $6(\alpha' - \alpha)$ geschwächt, wo α' und α die Ausdehnungen des Messings und Eisens bezeichnen; also für $\alpha' - \alpha = 0,000007385$ um 0,0000443 Lin. Um nun das Querstück, welches bei den Versuchen mit der Uhr in den obersten Löchern befestigt war, in die mittleren setzen zu können und dadurch spätere Aenderungen zu erleichtern, habe ich die Zinkstücke so lang genommen, dass

sie die Ausdehnung $0,000423 + 2 \times 0,0000443 = 0,000512$ Lin. compensiren, welches durch

$$\frac{0,000512}{0,0000123} = 41,6 \text{ Lin.}$$

geleistet wird.

Eigentlich wäre die wirkliche Abänderung der Compensation einer Uhr eben so wenig nöthig, als die wirkliche Abänderung der Fehler anderer Instrumente: man könnte dort wie hier, sobald man die Grösse des Fehlers erkannt hat, seine Verbesserung durch Rechnung anbringen. Allein das was der Rechnung zum Grunde gelegt werden muss, nämlich die Kenntniss der mittleren Temperatur während der Zeit für welche man den Gang der Uhr kennen lernen will, ist auf die gewöhnliche Art, durch Beobachtung der Thermometerstände in kurzen Zwischenzeiten, so schwierig zu erlangen, dass die Abänderung des Pendels weit bequemer ist und deshalb den Vorzug verdient; auch kann man sie mit derselben Genauigkeit ausführen, mit welcher man den Fehler erkannt hat. Doch wenn die Uhr keine Pendeluhr sondern ein Chronometer ist, so verhält es sich anders; der Besitzer desselben wird nicht leicht wagen dürfen, an denselben irgend etwas zu ändern und er wird sich oft gezwungen finden, eine unvollkommene Compensation bestehen zu lassen. Hier wird die Verbesserung durch Rechnung nothwendig, wenn man den Resultaten die volle, den Chronometern eigenthümliche Güte geben will, alle dieselbe muss nicht auf eine fortwährende Beobachtung der Thermometer, welche sich schwer ausführen lässt, sondern auf den relativen Gang der Chronometer selbst gegründet werden. Dieses setzt voraus, dass man mehrere derselben zugleich anwende, was nach dem Urtheile des grössten Kenners dieser Instrumente*) ohnedies nöthig ist.

Auf welche Art der Einfluss der Wärme auf ihren Gang, meiner Meinung nach, am zweckmässigsten aus den Resultaten geschafft wird, werde ich bei dieser Gelegenheit andeuten. Man muss zuerst das Verhältniss bestimmen, in welchem eine gleiche Temperaturänderung auf die verschiedenen Chronometer welche man besitzt, einwirkt: dieses geschieht, indem man den täglichen Gang derselben, während alle einer gleichen Temperatur ausgesetzt sind, beobachtet, und bald darauf dieses in einer beträchtlich verschiedenen, aber wiederum für alle gleichen Temperatur wiederholt; um sicherer zu werden, wird man sich nicht mit einem einmaligen Versuche dieser Art begnügen, sondern die Chronometer verschiedene Male niedrigeren und höhe-

*) Astr. Nachr. Nr. 24, S. 507.

ren Temperaturen aussetzen, was keineswegs beschwerlich ist, da nicht gefordert wird, dass die Temperaturen unverändert erhalten werden und bekannt seien, sondern nur, dass sie für alle Chronometer gleich sind. Hat man auf diese Weise den Unterschied des täglichen Ganges, der durch eine beträchtliche Aenderung der Temperatur hervorgebracht wird, für die verschiedenen Chronometer = $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ gefunden, so weiss man, dass während irgend einer Zeit, während welcher sie sich in beliebigen, allein für alle gleichen Temperaturen befunden haben, die Einwirkung der Wärme auf den Stand eines jeden von ihnen resp. $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ proportional, oder = $p\alpha, p\alpha', p\alpha'' \dots$ sein muss, wo p eine von der mittleren Temperatur während derselben Zeit abhängige, also, da man diese nicht beobachtet hat, eine unbekante Grösse ist. Verbessert man daher das durch die Chronometer angegebene Maass dieser Zeit resp. $t, t', t'' \dots$ um den Einfluss der Temperatur, oder fügt man resp. $p\alpha, p\alpha', p\alpha'' \dots$ hinzu, so müsste es, falls die Chronometer keine sonstige Unregelmässigkeit zeigten, der mittleren Zeit proportional sein, in der Wirklichkeit aber müssen die Abweichungen von dieser Proportionalität so genommen werden, dass die Summe ihrer Quadrate ein Minimum wird. Setzt man daher

$$\epsilon = t + \mu T + p\alpha - T$$

$$\epsilon' = t' + \mu' T + p\alpha' - T$$

$$\epsilon'' = t'' + \mu'' T + p\alpha'' - T$$

* s. w.

wo $\mu, \mu', \mu'' \dots$ den täglichen Gang, T die mittlere Zeit, $\epsilon, \epsilon', \epsilon'' \dots$ die übrigbleibenden Fehler bezeichnen, so findet man bekanntlich den wahrscheinlichsten Werth der mittleren Zeit aus der Formel

$$T = \frac{\sum \alpha \alpha \cdot \sum t - \sum \alpha \cdot \sum \alpha t}{n \sum \alpha \alpha - (\sum \alpha)^2} + T \cdot \frac{\sum \alpha \alpha \cdot \sum p - \sum \alpha \cdot \sum \alpha p}{n \sum \alpha \alpha - (\sum \alpha)^2}$$

(n = Anzahl der Chronometer), oder

$$\frac{\sum \alpha \alpha \cdot \sum t - \sum \alpha \cdot \sum \alpha t}{n \sum \alpha \alpha - (\sum \alpha)^2}$$

wächst der Zeit proportional. Diese Grösse kann man aber folgendermassen schreiben:

$$\beta t + \beta' t' + \beta'' t'' + \dots$$

wo

$$\beta = \frac{\sum \alpha \alpha - \alpha \sum \alpha}{n \sum \alpha \alpha - (\sum \alpha)^2}$$

$$\beta' = \frac{\sum \alpha \alpha - \alpha' \sum \alpha}{n \sum \alpha \alpha - (\sum \alpha)^2}$$

$$\beta'' = \frac{\sum \alpha \alpha - \alpha'' \sum \alpha}{n \sum \alpha \alpha - (\sum \alpha)^2}$$

u. s. w.

und daher die Summe aller $\beta = 1$ ist. Meine Meinung ist daher, dass man alle Chronometer, welche man be-

sitzt, gewissermassen als ein einziges Instrument betrachte, die Factoren $\beta, \beta', \beta'' \dots$ ein für allemal bestimme, und bei jeder Anwendung dieses Instruments seinen Stand nach der Formel

$$r = \beta t + \beta' t' + \beta'' t'' + \dots$$

berechne; dieses r ist von den Einwirkungen der Temperatur gänzlich befreit; allein im Allgemeinen ist die Combination der verschiedenen Chronometer, welche es erfordert, darin nachtheilig, dass die Angaben der einzelnen verschiedene Gewichte erlangen, was mit der Voraussetzung einer gleichen inneren Güte der Chronometer nicht besteht. Fände man die Summe aller $\alpha = 0$, so würde dieser Nachtheil nicht stattfinden und r sich geradezu auf das arithmetische Mittel aus den Angaben aller Chronometer reduciren; fände sich diese Summe, vergleichungsweise mit den Werthen einzelner α , sehr klein, so würde der Nachtheil nicht erheblich sein. Allein das allgemeine Mittel diesen Nachtheil zu vermeiden ist, eins der Chronometer absichtlich sehr unrichtig, oder gar nicht zu compensiren, wodurch das ihm zugehörige α , vergleichungsweise mit den übrigen, sehr gross, also β sehr klein wird, die übrigen $\beta', \beta'' \dots$ aber sehr nahe gleich werden. Hat man Veranlassung, den verschiedenen Chronometern verschiedene Gewichte beizulegen, so wird man die obigen Formeln für $\beta, \beta', \beta'' \dots$ leicht darnach abändern.

Ein Chronometer wie das eben erwähnte, welches nicht compensirt ist, oder gar seinen Gang beschleunigt, wenn es wärmer wird, scheint mir überhaupt ein sehr nützlich Instrument zu sein, und immer mit grossem Vortheile angewandt werden zu können, wo es auf die Beobachtung einer mittlern Temperatur ankömmt. Herr KESSELS hat aus Versuchen mit zwei nicht compensirten Chronometern gefunden*), dass sie ihren täglichen Gang für jeden Grad der Temperatur etwa um 12" veränderten; es scheint keine Schwierigkeit zu haben, diese Quantität, wenn es nöthig erscheinen sollte, noch bedeutend zu vermehren, indem man die Zusammensetzung des Balanciers entgegengesetzt einrichtet. Ein Instrument dieser Art, in eine metallene Kapsel verschlossen, gegen die Wärmestrahlung möglichst geschützt und in freier Luft befestigt, würde die mittlere Temperatur eines Jahres und jedes beliebigen Theils desselben mit Leichtigkeit angeben; auch mit Sicherheit, wenn man die Kapsel so einrichtet, dass sie ein Thermometer enthält, dessen Kugel innen, die Scale aussen ist; denn wenn man dieses Thermometer von Zeit zu Zeit, einige Stunden lang, häufig abliest und den

*) Astr. Nachr. Nr. 84, S. 224.

Gang des Chronometers während dieser Zeit beobachtet, so erhält man dadurch eine Controle, welche gegen den Einfluss von Aenderungen des Ganges, welche von der Temperatur unabhängig sind, völlig schützt. Dass ein solches Instrument ähnliche Prüfungen der Compensation einer Pendeluhr, wie die oben beschriebene, erleichtern und sicherer machen würde, ist offenbar. Für die chronometrische Bestimmung der Mittagsunterschiede scheint seine Anwendung erheblichen Nutzen

zu versprechen, und dieser dadurch, zumal wenn man überdies noch directe Versuche über den Einfluss der Bewegung, welche die Chronometer während der Uebertragung erleiden, auf ihren Gang damit verbindet, ein Zuwachs an Sicherheit gegeben werden zu können.

[Folgt noch die ausführliche: „Vergleichung der Kesselschen Pendeluhr Nr. 1273 mit Königsberger mittlerer Zeit“ von 1828 August 2 bis 1829 September 12. — Vgl. auch die Bemerkung „über den Einfluss der Dichtigkeit der Luft auf den Uhrgang“ unter „Physik“.]

67. Bemerkungen und Untersuchungen über Pendeluhren.*)

(Astr. Nachr. 20, p. 137.)

Die Vervollkommnung der Pendeluhren ist mit einem Aufwande von Scharfsinn und Kunst gesucht worden, welcher durch den Nutzen derselben für die Astronomie gerechtfertigt wird, dessen Erfolg auch so gross gewesen ist, dass er kaum noch etwas zu wünschen übrig lässt. Indem dennoch auch die berühmtesten Künstler der jetzigen Zeit, unter welchen ich die Herren BREGUET, DENT, FRODSHAM, KESSELS, TIEDE, WINNELL nenne, ihre Bemühungen, den Pendeluhren einen wachsenden Grad von Vollendung zu geben, fortsetzen, scheinen sie ihren noch gleichmässigeren Gang für erreichbar zu halten. Dieses hat mich aufgefordert, verschiedene, diese Instrumente angehende Gegenstände einer näheren Betrachtung zu unterwerfen, deren Resultate ich hier mittheile, weil ich glaube, dass ihre Kenntniss der Sache selbst und den vortrefflichen Künstlern, welche ihr ihre Anstrengungen widmen, von einigem Nutzen sein kann.

1.

Da jede Ungleichmässigkeit der Schwingungszeit des Pendels unmittelbar auf den Gang der Uhr übergeht, so muss gefordert werden, dass das Pendel, unabhängig von dem Uhrwerke, unter allen Umständen in welche es bei seiner Anwendung in der Uhr gelangt, so nahe gleichzeitige Schwingungen mache, als möglich ist. Das Uhrwerk soll den Verlust ersetzen, welchen die Ausdehnung der Schwingungen des Pendels durch den Widerstand der Luft erfährt; es soll ferner diese Schwingungen hörbar machen und sie zählen: es ist für desto vollkommener zu halten, je weniger es, indem es diese Zwecke erfüllt, die

Schwingungszeiten des freien Pendels ändert. Das Bestreben, Ungleichheiten dieser Schwingungszeiten durch Einwirkungen des Uhrwerks auszugleichen, halte ich nicht allein für fruchtlos, sondern auch für nachtheilig; das letztere, weil es von dem wahren Ziele ablenkt. Indem ich aber den Erfolg fernerer Schritte zur Vervollkommnung der Uhren von der abgesonderten Untersuchung ihrer beiden wesentlichen Theile erwarte, muss ich zuerst eine Methode angeben, durch welche die Schwingungszeiten des Pendels allein, und dann die Grösse des Einflusses des Uhrwerks auf sie, nicht allein mit der erforderlichen Sicherheit, sondern auch leicht und schnell, beobachtet werden können.

Dieses ist die Methode der Coincidenzen des zu untersuchenden Pendels mit dem Pendel einer im Gange befindlichen astronomischen Uhr, welche Methode in diesem Falle so angewandt werden muss, wie ich sie bei meinen Versuchen über die Länge des einfachen Secundenpendels angewandt und im 5. § meiner, unter den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften gedruckten Abhandlung [219 d. a. Verz.] beschrieben habe. Ich setze demgemäss das zu untersuchende Pendel an der Mauer aufgehängt voraus; vor demselben, in 6 bis 8 Fuss Entfernung die Uhr so aufgestellt, dass die gerade Linie zwischen den unteren Enden beider Pendel und ihre Verlängerung über das der Uhr hinaus frei ist, dass also beide Pendelenden von einem Punkte dieser Verlängerung gesehen werden können; ferner das Objectiv eines Fernrohrs, dessen Brennweite etwas kürzer ist als ein Viertel der Entfernung beider Pendel, zwischen ihnen so aufgestellt, dass das dadurch gemachte Bild des einen in die Ebene fällt, in welcher das andere sich bewegt; endlich das zur Wahrnehmung der Coincidenzen erforderliche Fernrohr an einem be-

*) [357 d. a. Verz.]

liebigen Punkte der Verlängerung der beide verbindenden geraden Linie aufgestellt. Durch die häufigen Anwendungen dieser Art, die Coincidenzen beider Pendel zu beobachten, welche ich und Andere gemacht haben, ist bekannt geworden, dass sie so genaue Beobachtungen gewährt, dass dadurch der relative tägliche Gang beider Pendel schon in kurzer Zeit (z. B. 10 bis 20^m) bis auf wenige Zehntel einer Secunde sicher bestimmt wird.

Die Einrichtung zu Versuchen dieser Art ist unerlässlich, wenn die Schwingungszeit des zu untersuchenden Pendels unter verschiedenen äusseren Verhältnissen rein, d. h. ohne alle Einwirkung des Uhrwerkes, untersucht werden soll. Ich zweifle nicht, dass aus dem Folgenden hervorgehen wird, dass sie ein wesentlicher Theil des Apparats ist, womit jeder Künstler, der die möglichst grosse Vollendung einer Pendeluhr beabsichtigt, sich versehen muss.

2.

Zuerst ist das in einer Uhr anzuwendende Pendel so zu berichtigen, dass es, in jeder Wärme der Luft, in gleichen Winkeln gleichzeitige Schwingungen macht. Die beschriebene Einrichtung wird zu diesem Zwecke dienen, wenn dem Raume, in welchem das Pendel schwingt, in kurzer Zwischenzeit beträchtlich verschiedene Wärme gegeben werden kann. Dieses kann erlangt werden, wenn die Vorrichtung, an welcher das Pendel, genau so wie später in der Uhr, aufgehängt wird, nicht unmittelbar an der Mauer, sondern in einem Kasten von Holz befestigt ist, dessen Inneres durch einige, an seinen Wänden hinabgehende, durch Dampf oder heisses Wasser zu heizende Röhren erwärmt wird. Die Gleichmässigkeit der Wärme im Inneren dieses Kastens wird befördert werden, wenn er doppelte Wände, nämlich ausser den äusseren von Holz noch innere von Metall erhält und wenn die Heizungsröhren zwischen beiden liegen. Im Falle Wasser zur Erwärmung angewandt wird, muss am oberen Ende der Röhren ein fortwährender Zufluss desselben, am unteren ein gleich starker Abfluss stattfinden. Einige verglaste Oeffnungen werden im Innern befindliche Thermometer sichtbar machen, also zur Kenntniss der daselbst stattfindenden Wärme und zur Beurtheilung ihrer Gleichmässigkeit führen. Eine solche Oeffnung am unteren Ende des Kastens macht das schwingende Pendel, also auch seine Coincidenzen und Schwingungswinkel sichtbar. Um den Niederschlag von Wasser an der inneren Fläche der Gläser zu vermeiden, muss die Luft im Kasten durch eins der gewöhnlichen Mittel ausgetrocknet werden.

Indem man das Pendel sowohl im nicht erwärmten, als auch im erwärmten Raume schwingen lässt und seine Schwingungszeiten (wenn sie nicht in gleichen Schwingungswinkeln beobachtet sein sollten, nach gehöriger Reduction) vergleicht, erkennt man, ob eine Verbesserung der Compensation erforderlich ist oder nicht. Im ersten Falle wird man den Versuch, nach ihrer vorgenommenen Aenderung, wiederholen und damit so lange fortfahren, bis der zweite Fall herbeigeführt ist. Diese Berichtigung wird am besten in der kälteren Jahreszeit vorgenommen werden.

3.

Der Erfolg einer solchen Berichtigung der Compensation des Pendels gleicht offenbar auch die Theile des Einflusses der Wärme aus, welche aus den von ihr abhängigen Veränderungen der Dichtigkeit der das Pendel umgebenden Luft und der Elasticität der Feder woran es aufgehängt ist, entstehen. In Beziehung auf das Verhalten des Pendels in der verschiedenen Wärme, in welche es während seines Gebrauches in der Uhr gelangt, ist also dieser Erfolg vollständig; während die Construction des Pendels nach einer Rechnung, welche auf der (bei weitem nicht so leicht und sicher zu erlangenden) Kenntniss der Grösse der Einwirkungen der Wärme auf die verschiedenen, in der Compensation angewandten Metalle beruhet, nur einen unvollständigen Gewähr. Durch Quecksilber compensirte Pendel sind, wenigstens in einigen Fällen, nach ihrer Anwendung in der Uhr so geändert worden, dass der Gang im Sommer und Winter gleich wurde; auch rostförmige oder andere Pendel pflegen so eingerichtet zu sein, dass ihre Compensation geändert werden kann. Was in allen diesen Fällen erlangt werden soll, ist auch der vollständige Erfolg; aber da nicht allein die Compensation, sondern auch das Uhrwerk in beiden Jahreszeiten verschiedenen Einfluss auf den Gang der Uhr erlangen kann, so wird der Erfolg auf diese Art weniger sicher herbeigeführt. Die von mir empfohlene Methode ist also nicht allein viel leichter und in viel kürzerer Zeit anzuführen, sondern auch sicherer.

Bei dieser Gelegenheit muss ich ein Bedenken gegen die in neuerer Zeit häufig angewandte Compensation durch Quecksilber äussern. Sie würde, sowie sie die einfachste ist, auch die empfehlenswertheste sein, wenn mit Recht angenommen werden könnte, dass die ganze Länge der Pendelstange sich immer in gleicher Wärme befände. Dieses ist aber oft nicht der Fall, wie zwei Thermometer, das eine unten, das andere oben im Uhrkasten angebracht, zeigen. Die ungleich warme Pendel-

stange erfährt die Compensation, welche die rechte sein würde, wenn sie durchweg die Wärme des unteren Endes, wo das Quecksilber sich befindet, besäße, welche aber im Falle einer unten und oben stattfindenden Wärmeverschiedenheit nicht mehr die rechte ist. Die Compensation wird daher vollkommener, wenn sie der ganzen Länge des Pendels nach wirkt. Dieses ist bei der rostförmigen desto näher der Fall, je näher unter dem Aufhängungspunkte sie anfängt und je näher am Mittelpunkt der Schwingung sie aufhört.

Zu diesem Vorzuge der rostförmigen Compensation gesellt sich ein anderer, nämlich die Schnelligkeit, mit welcher sie sich Aenderungen der Wärme fügt, während eine beträchtliche Zeit verstreichen muss, ehe die erforderliche grosse Masse Quecksilbers die Wärme der umgebenden Luft annimmt. Aus demselben Grunde zieht ich auch die Zusammensetzung des Pendels aus Messing- und Stahlstangen von gleicher Dicke seiner Zusammensetzung aus ungleich dicken Zink- und Stahlstangen vor. Wenn man die Berücksichtigung der Gleichzeitigkeit der Einwirkung der Wärmeänderungen auf alle zur Compensation gehörigen Theile so weit als möglich treiben will, so muss man auch für gleiche Beschaffenheit der Oberfläche der Stangen sorgen, was durch dasselbe Verfahren geschehen kann, wodurch der hochberühmte DENT die Spiralen seiner Chronometer mit Gold bekleidet. Die Anwendung dieses Verfahrens auch auf die Linse des Pendels wird für Die Reiz haben, welche einem dauerhaft schönen Aeusseren Werth beilegen. Wesentlicher, oder eigentlich sehr wesentlich, ist aber die allergrösste Sorgfalt und Umsicht in der Verfertigung des Pendels, welche hervorbringen muss, dass unter allen Umständen keine, die Wirkung der Compensation beeinträchtigende Spannung oder Reibung entstehen kann. Ich halte diese letzte Bemerkung nicht für überflüssig, weil mir Uhren vorgekommen sind, deren Pendel aus den Händen eines Anfängers hervorgegangen erschien, während ihr Räderwerk die Arbeit des Meisters verrieth.

4.

Durch die Berichtigung eines Pendels in Beziehung auf die Wärme werden die Schwingungszeiten desselben (in gleichen Winkeln) noch nicht jederzeit gleichzeitig, indem die den Veränderungen des Barometerstandes entsprechenden Veränderungen der Dichtigkeit der Luft Einfluss darauf erhalten. Eine Gegenwirkung gegen diesen Einfluss kann erlangt werden, indem eine mit der geeigneten Masse Quecksilbers gefüllte Barometeröhre an dem Pendel befestigt wird. Die Theorie davon werde ich hier mittheilen.

Aus meinen Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels weiss man, dass ein Pendel sich in der Luft bewegt, wie ein einfaches im leeren Raume, dessen Länge

$$l = \frac{m(\mu + ss) + Km'}{ms - m's'}$$

ist, wo m, m' die Massen des Pendels und der dadurch verdrängten Luft, s, s' die Entfernungen der Schwerpunkte des Pendels und seines Raumes vom Aufhängungspunkte, $m(\mu + ss)$ das auf diesen bezogene Moment der Trägheit und K einen unbekanntem Coefficienten bedeuten. Dieser Ausdruck kann

$$l = \frac{m(\mu + ss)}{ms} \cdot \frac{1 + \frac{K}{\mu + ss} \cdot \frac{m'}{m}}{1 - \frac{m'}{s}}$$

und wenn man

$$k = \frac{K}{\mu + ss}$$

annimmt, auch $s' = s$ setzt, was ohne in Betracht kommenden Fehler geschehen kann, in der ersten Potenz der kleinen Grösse $\frac{m'}{m}$ richtig,

$$l = \frac{m(\mu + ss)}{ms} \left[1 + (1+k) \frac{m'}{m} \right]$$

geschrieben werden. Wenn das Pendel bei verschiedenen Barometerständen, b und $b + \delta b$, gleichzeitig schwingen soll, so muss also dieser Ausdruck von δb unabhängig sein, oder die Veränderung, welche

$$lms - m(\mu + ss) - ls(1+k)m' \dots \dots (\odot)$$

durch diese Veränderung des Barometerstandes erfährt, muss verschwinden.

Wenn die Entfernungen des Quecksilbers im unteren und oberen Schenkel des Barometers von dem Aufhängungspunkte, bei dem Barometerstande b , durch h und $h - b$ bezeichnet werden, die Halbmesser dieser Schenkel durch a und a' , die Masse einer Cubikeinheit des Quecksilbers durch q , so ist die Masse, welche durch die Veränderung des Barometerstandes von dem unteren Schenkel in den oberen übergeht,

$$= \pi \frac{a'^2 a'}{a^2 + a'^2} q \delta b$$

und die daraus entstehenden Veränderungen sind

$$\delta . ms = - \pi \frac{a'^2 a'}{a^2 + a'^2} q \delta b . b$$

$$\delta . m(\mu + ss) = - \pi \frac{a'^2 a'}{a^2 + a'^2} q \delta b . b(2h - b).$$

Die Veränderung, welche m' durch dieselbe Ursache erfährt, ist

$$\delta m' = m \cdot \frac{\delta b}{b}$$

und wenn die Dichtigkeiten des Pendels und der Luft durch \mathcal{L} und \mathcal{L}' bezeichnet werden:

$$\delta m' = m \cdot \frac{\mathcal{L}' \delta b}{\mathcal{L} b}$$

Der Ausdruck der Veränderung von (C) ist daher:

$$\pi \frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} g \delta b \cdot b (2h - b - l) - l s (1 + k) m \frac{\mathcal{L}' \delta b}{\mathcal{L} b}$$

und die Bedingung seines Verschwindens ergibt:

$$\frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} = \frac{m l s (1 + k) \mathcal{L}'}{\pi g b b (2h - b - l) \mathcal{L}}$$

Nimmt man die Pariser Linie als Einheit des Längenmasses an, das specifische Gewicht des Quecksilbers = 13,6, das Gewicht einer Cubiklinie des dichtesten Wassers = 0,1884961 Preussische Gran^{*)}, so wird

$$g = 2,563547.$$

Der Werth von \mathcal{L}' ist bei der Barometerhöhe von 336²/₉₀₅ und in der Wärme des gefrierenden Wassers^{**)}

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{770,488}$$

Die Länge des einfachen Secundenpendels in Königsberg ist = 440²/₈₁, und dieses ist, wenn das Uhrpendel mittlere Secunden schwingen soll, auch der Werth von l . Nimmt man $b = 336²/₉₀₅$, $m = 15$ Pfund = 115200 Gran, in welchem Gewichte zwei Uhrpendel, die ich gewogen habe, ziemlich nahe übereinkamen; das specifische Gewicht des Pendels $\mathcal{L} = 10$, was auch ziemlich das gewöhnliche sein wird; setzt man endlich $h = l$, oder nimmt man die Barometerröhre so am Pendel befestigt an, dass die untere Quecksilberfläche sich in seinem Mittelpunkte der Schwingung befindet, welcher ihr vortheilhaftester Ort ist, so erhält man:

$$\frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} = 0,03059 \cdot \frac{s}{l} (1 + k).$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden s und k hängen von der Construction des Pendels ab; das erstere ist für jedes Pendel, dessen Construction gegeben ist, bekannt und stets etwas kleiner als l ; das andere müsste, durch besondere Experimente über die Grösse der Einwirkung der Luft auf die Schwingungszeiten des Pendels bestimmt werden, scheint aber auf etwa = 1 geschätzt werden zu können. Nimmt man diesen Werth an und vernachlässigt man die Verschiedenheit von $\frac{s}{l}$ und 1, so erhält man

$$\frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} = 0,06118.$$

Nimmt man a viel grösser an als a' , oder wendet man eine mit einem Gefässe versehene Barometerröhre an, welche am vortheilhaftesten ist, weil sie die untere Quecksilberfläche stets sehr nahe am Mittelpunkte der Schwingung erhält und daher ihren Veränderungen kaum einen Einfluss auf die Schwingungszeit gestattet, so folgt aus dieser Rechnung

$$a' = 0,2474.$$

Hieraus geht hervor, dass eine sehr wenig Quecksilber zu ihrer Füllung bedürftige Barometerröhre von kaum einer halben Linie innerer Weite hinreicht, den kleinen Einfluss auszugleichen, welchen die Veränderlichkeit des Barometerstandes auf die Schwingungszeiten des Pendels äussert. Diese Weite wird man für jeden besonderen Fall bestimmen, indem man die ihm zugehörigen Werthe der in ihrem Ausdrucke vorkommenden Grössen anwendet. Zwar sollte der Werth von k eigentlich für jeden besonderen Fall aufgesucht werden, was unter der Glocke einer Luftpumpe, welche Herr BAILY schon zu ähnlichen Zwecken angewandt hat, am leichtesten geschehen würde; allein es ist wahrscheinlich, dass schon die Annahme $k = 1$, indem sie sich der Bestimmung nähert, welche Herr BAILY für den nicht so sehr verschiedenen Fall des Kater'schen Pendels erhalten hat, hinreicht, wenigstens den grössten Theil des Einflusses des Barometerstandes auszugleichen.

Will man diesen Einfluss nicht vernachlässigen, sondern die Barometerröhre zu seiner Ausgleichung anwenden, so wird diese ihren schicklichsten Platz wohl in der Mitte sämtlicher Compensationsstangen (deren Zahl dann gerade wird) erhalten^{*)}; das kleine Gefäss, von höchstens 8 Lin. innerer Weite, wird in der Pendellinse seinen Platz erhalten. Den Annahmen zufolge, welche der obigen Rechnung zum Grunde liegen, ändert jede Linie der Barometervariation den täglichen Gang der Uhr um 0,03328, so dass Fälle, in welchen der Einfluss des Barometerstandes über zwei Zehntel einer Secunde steigt, schon zu den selteneren gehören. Dass im Falle der Anbringung des Barometers am Pendel seine Berichtigung für die Wärme (§ 2) auf diese Anbringung folgen muss, braucht kaum erwähnt zu werden.

5.

Das auf die jetzt beschriebene Art eingerichtete und berichtigte Pendel wird nur dann stets gleichzeitig

^{*)} Unters. über die Länge des einfachen Secundenpendels S. 150.

^{**)} Ebendas. S. 39.

^{*)} Wendet man Röhren statt voller Stangen an, so wird das Barometer in der mittleren angebracht werden.

schwingen, wenn sein Schwingungswinkel stets in gleicher Grösse erhalten wird. Dieses kann durch das Uhrwerk nur unvollkommen bewirkt werden, indem die Grösse des Verlusts, welchen die Schwingungswinkel durch den Widerstand der Luft erfahren, von ihrer mit den Barometer- und Thermometerständen veränderlichen Dichtigkeit abhängig ist und daher selbst von einer unveränderlichen Kraft des Uhrwerks nicht stets vollständig ersetzt werden kann; noch weniger also von einem Uhrwerke, dessen Kraft mit dem veränderlichen Zustande der Flüssigkeit des Oels veränderlich, und zwar zur Zeit des Winters, wenn die dichtere Luft einen stärkeren Ersatz fordert, gerade am kleinsten ist. Ich werde hier die Maxima und Minima des Schwingungswinkels mittheilen, welche die von Herrn KESSELS gemachte Uhr der Königsberger Sternwarte seit dem August 1840, wo sie gereinigt und mit sehr gutem Oele versehen wurde, gezeigt hat: Sept. 1840 = $1^{\circ} 38'$ auf jeder Seite der Lothlinie; Febr. 1841, bei heftiger Kälte, = $1^{\circ} 25'$; Juni 1841 = $1^{\circ} 39'$; März 1842, während eines ausgezeichnet gelinden Winters, = $1^{\circ} 32'$; August 1842 = $1^{\circ} 39'$. Frühere an derselben Uhr gemachte Erfahrungen ähnlicher Art zeigen grössere Unterschiede, was aber, da die Uhr selbst keine Aenderung erfahren hat, nur weniger gutem Oele zugeschrieben werden kann, also als vermeidlich betrachtet werden muss. Die Hemmung dieser Uhr ist der Graham'sche Haken; wenn eine andere, von der Flüssigkeit des Oels weniger abhängige, wirklich vorhanden sein sollte, so würde sie doch, aus dem schon angeführten Grunde, eine Gleichheit des Schwingungswinkels in allen Jahreszeiten nicht hervorbringen können. Die der Verminderung des beobachteten grössten Schwingungswinkels von $1^{\circ} 39'$ auf resp. $1^{\circ} 32'$ und $1^{\circ} 25'$ entsprechenden täglichen Beschleunigungen des Ganges der Uhr sind = 0,61 und 1,18.

Indem die Hervorbringung eines stets gleichen Schwingungswinkels ausser den Grenzen der Kunst liegt, würde ein Pendel höchst wünschenswerth sein, welches in Folge seiner eigenen Einrichtung grössere und kleinere Schwingungen gleichzeitig vollendete. Eine am 21. Juni 1838 von Herrn W. J. FRODSHAM der Royal Society vorgelesene Abhandlung musste daher das grösste Interesse erregen, indem ihr Resultat war, dass eine Feder von bestimmter Länge und Stärke, wenn das Pendel daran aufgehängt wird, seinen Isochronismus hervorbringe; dieses ergaben die Versuche in so grosser Ausdehnung, dass der Schwingungswinkel, durch Vermehrung des die Uhr treibenden Gewichts bis fast auf das Doppelte, einmal von $1^{\circ} 30'$

auf $2^{\circ} 9'$, ein andermal von $1^{\circ} 39'$ auf $2^{\circ} 15'$ gebracht wurde, ohne dass dieses Einfluss auf den Gang der Uhr geäussert hätte, welcher Einfluss, ohne Gegenwirkung, resp. $3/84$ und $3/90$ täglich betragen haben würde. Eine dieses leistende Erfindung ist gerade die, die gemacht werden muss, damit die astronomischen Uhren auf den höchsten Grad der Vollendung gebracht werden können. Kein Name konnte ihr grösseres Zutrauen erwerben, als der des Künstlers, dessen Chronometer durch die Unveränderlichkeit ihres Ganges den höchsten Ruhm erworben haben.

Indessen haben nicht minder berühmte Künstler, die Herren JOHN DENT in London, WINNERTL in Paris und TIEDE in Berlin, nicht unterlassen, die Frodsam'sche Erfindung auch zu versuchen, allein den mündlichen Mittheilungen zufolge, welche sie mir darüber zu machen die Güte gehabt haben, nicht gleichen Erfolg erhalten. Aber weder die früheren Versuche, noch die zu einem anderen Resultate führenden späteren, sind mit dem abgesonderten Pendel (§ 1) gemacht worden und lassen daher die Möglichkeit bestehen, dass die Verschiedenheit ihrer Resultate durch Störungen der freien Bewegung des Pendels erklärt werden könne, welche aus dem Einflusse des Uhrwerks hervorgegangen und in den verschiedenen Fällen verschieden gewesen sein mögen. Bei dieser Lage der Sache habe ich für angemessen gehalten, die Theorie der Bewegung eines an einer Feder aufgehängten Pendels zu untersuchen. Das Resultat davon werde ich im folgenden Art. mittheilen.

6.

Wenn man den Aufhängungspunkt des Pendels zum Mittelpunkt der Coordinatenachsen der x und y macht und die erstere derselben lothrecht, die andere wagrecht annimmt, so ist das Product der von jedem Massentheilchen dm , dessen Coordinaten zur unbestimmten Zeit t , x und y sind, während der Zeit δt verlorene Kraft und der Projection seiner willkürlichen Bewegung auf ihre Richtung

$$dm \left[\frac{d^2x}{dt^2} - x^2 \lambda \right] \delta x + dm \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \delta y,$$

wo π die gewöhnliche Bedeutung dieses Zeichens hat und λ die Länge des einfachen Secundenpendels ist. Wenn das Pendel an einer Feder (von unbedeutender Masse) aufgehängt ist, deren aus ihrer Krümmung an einem Punkte, dessen Coordinaten x' , y' sind, hervorgehende Kraft E , ihren daselbst stattfindenden Winkel φ mit der Lothlinie zu vermindern sucht, so ist das ähnliche Product für jedes ihrer Elemente:

$$= \pi^2 \lambda E d \delta \varphi.$$

Die Summe aller dieser Producte für das ganze Pendel, deren Verschwinden die Bedingung ist, aus welcher die Differentialgleichungen seiner Bewegung hervorgehen, ist daher:

$$0 = \int dm \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y \right] - \pi^2 \lambda \int [dm \delta x - E d \delta \varphi] \dots (1)$$

Indem den durch das Zeichen δ angedeuteten willkürlichen Veränderungen nur Werthe gegeben werden dürfen, welche mit der Verbindung unter den Theilen des bewegten Systems vereinbar sind, müssen die in (1) anzunehmenden dieser Bedingung gemäss beschränkt werden. Die Lage des festen Theils des Pendels im Raume wird durch die Coordinaten a, b des Endpunkts der ihn haltenden Feder und durch den Winkel u , welchen die in der Ruhe des Pendels lothrechte, durch den Endpunkt der Feder gehende Linie in einer anderen Lage mit der Lothlinie macht, gegeben. Wenn

$$\begin{aligned} & \delta a \int dm \left[\frac{d^2 a}{dt^2} - (x-a) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - (y-b) \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \right] \\ & + \delta b \int dm \left[\frac{d^2 b}{dt^2} - (y-b) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + (x-a) \frac{d^2 u}{dt^2} \right] \\ & + \delta u \int dm \left[-(y-b) \frac{d^2 a}{dt^2} + (x-a) \frac{d^2 b}{dt^2} + [(x-a)^2 + (y-b)^2] \frac{d^2 u}{dt^2} + \pi^2 \lambda (y-b) \right] \end{aligned}$$

und wenn die Entfernung des Schwerpunkts des Pendels von dem Endpunkte der Feder durch s , sein auf diesen Punkt bezogenes Moment der Trägheit durch $m(\mu + ss)$ bezeichnet, also

$$\left. \begin{aligned} & m \delta a \left[\frac{d^2 a}{dt^2} - s \cos u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - s \sin u \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \right] \\ & + m \delta b \left[\frac{d^2 b}{dt^2} - s \sin u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + s \cos u \frac{d^2 u}{dt^2} \right] \\ & + m \delta u \left[-s \sin u \frac{d^2 a}{dt^2} + s \cos u \frac{d^2 b}{dt^2} + (\mu + ss) \frac{d^2 u}{dt^2} + \pi^2 \lambda \cdot s \sin u \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

Das sich auf die Feder beziehende Glied der Gleichung (1), nämlich

$$\pi^2 \lambda f E d \delta \varphi$$

kann

$$\pi^2 \lambda [E \delta \varphi - f \delta \varphi d F]$$

und nach der Substitution des Ausdruckes von

$$\pi^2 \lambda \left[E \delta \varphi + \delta x' \cdot \frac{d E d y'}{d \sigma^2} - \delta y' \cdot \frac{d E d x'}{d \sigma^2} - \int \delta x' \cdot d \frac{d E d y'}{d \sigma^2} + \int \delta y' \cdot d \frac{d E d x'}{d \sigma^2} \right] \dots \dots \dots (B)$$

geschrieben werden. Indessen sind $\delta x'$ und $\delta y'$, also auch ihre Werthe für den Endpunkt der Feder δa und δb , nicht von einander unabhängige willkürliche Aenderungen, sondern durch die Bedingung verbunden, dass die Variation der Länge der Feder von ihrem Anfangspunkte bis zu jedem ihrer übrigen Punkte verschwiude, oder dass

die auf diese und eine zweite, sie im Endpunkte der Feder senkrecht durchschneidende Axe bezogenen Coordinaten eines Massentheils dm durch ξ, η bezeichnet werden, so sind

$$\begin{aligned} x &= a + \xi \cos u - \eta \sin u \\ y &= b + \xi \sin u + \eta \cos u \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta a - (y-b) \delta u \\ \delta y &= \delta b + (x-a) \delta u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 a}{dt^2} - (x-a) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - (y-b) \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 b}{dt^2} - (y-b) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + (x-a) \frac{d^2 u}{dt^2} \end{aligned}$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in (1) werden die sich auf den festen Theil des Pendels beziehenden Glieder

$$\begin{aligned} f d u (x-a) &= m s \cos u \\ f d m (y-b) &= m s \sin u \\ f d m [(x-a)^2 + (y-b)^2] &= m (\mu + ss) \end{aligned}$$

gesetzt werden:

$$\delta \varphi = \frac{d x' d \delta y' - d y' d \delta x'}{d \sigma^2},$$

worin x' und y' die Coordinaten eines Punktes der Feder und σ ihre vom Anfangspunkte bis zu diesem Punkte gezählte Länge bedeuten,

$$\int \left(\frac{d x'}{d \sigma} d \delta x' + \frac{d y'}{d \sigma} d \delta y' \right) = 0$$

sei. Demohgeachtet kann man sie als unabhängig von einander betrachten, wenn man ihre Abhängigkeit dadurch in Rechnung bringt, dass man die Gleichung (1)

$$\int \omega \left(\frac{d x'}{d \sigma} d \delta x' + \frac{d y'}{d \sigma} d \delta y' \right)$$

wo ω einen unbestimmten Factor bedeutet, oder

$$\delta x' \cdot \omega \frac{dx'}{ds} + \delta y' \cdot \omega \frac{dy'}{ds} - f \delta x' \cdot d \cdot \omega \frac{dx'}{ds} - f \delta y' \cdot d \cdot \omega \frac{dy'}{ds} \dots (C)$$

hinzugefügt. Man hat also den Gliedern A die Summe von B und C , oder

$$\pi^2 \lambda [E \delta \varphi + \delta x' \left(\frac{dE \delta y'}{ds^2} + \omega \frac{dx'}{ds} \right) - \delta y' \left(\frac{dE \delta x'}{ds^2} - \omega \frac{dy'}{ds} \right) - f \delta x' \cdot d \left(\frac{dE \delta y'}{ds^2} + \omega \frac{dx'}{ds} \right) + f \delta y' \cdot d \left(\frac{dE \delta x'}{ds^2} - \omega \frac{dy'}{ds} \right)]$$

hinzusetzen. Da die Summe aller drei Theile, der Gleichung (1) zufolge, verschwinden muss, und $\delta x'$, $\delta y'$ als willkürlich angesehen werden müssen, so müssen die noch unter den Integralzeichen stehenden Glieder verschwinden, wodurch man:

$$0 = d \left(\frac{dE \delta y'}{ds^2} + \omega \frac{dx'}{ds} \right)$$

$$0 = d \left(\frac{dE \delta x'}{ds^2} - \omega \frac{dy'}{ds} \right)$$

und wenn c und c' willkürliche Constanten bedeuten:

$$c = \frac{dE \delta y'}{ds^2} + \omega \frac{dx'}{ds}$$

$$c' = \frac{dE \delta x'}{ds^2} - \omega \frac{dy'}{ds}$$

also auch

$$dE = c \delta y' + c' \delta x'$$

$$0 = \frac{d^2 a}{dt^2} - s \cos u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - s \sin u \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \left(1 - \frac{c}{m} \right)$$

$$0 = \frac{d^2 b}{dt^2} - s \sin u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + s \cos u \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \frac{c'}{m} \dots \dots \dots (3)$$

$$0 = -s \sin u \frac{d^2 u}{dt^2} + s \cos u \frac{d^2 u}{dt^2} + (\mu + s) \frac{d^2 u}{dt^2} + \pi^2 \lambda \left(s \sin u + \frac{cb + c'a + c''}{m} \right)$$

In diesen Gleichungen kommen sechs von der Zeit abhängige Grössen vor, nämlich a, b, u und c, c', c'' , welche letzteren, beziehungsweise auf die Figur der Feder in jedem Augenblicke, Constanten sind. Es müssen also noch drei Gleichungen aufgesucht werden. Die Kraft E wird dem Krümmungshalbmasser der Feder umgekehrt proportional angenommen, wodurch, wenn s das ihr zugehörige Maass der Federkraft bedeutet, (2) sich in

$$\frac{s dx' \cdot dy'}{(\sqrt{dx'^2 + dy'^2})^3} = c y' + c' x' + c'' \dots \dots \dots (4)$$

verwandelt. Multiplirt man diese Gleichung mit $c dy' + c' dx'$, integrirt man dann und bezeichnet man durch f eine willkürliche Constante, so erhält man

$$\frac{c \cdot c' dy' - c dx'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}} = f + \frac{1}{2} (c y' + c' x' + c'')^2 \dots \dots (5)$$

statt welcher Gleichung auch

$$c' dy' - c dx' = \frac{\pm (c dy' + c' dx') \{ f + \frac{1}{2} (c y' + c' x' + c'')^2 \}}{\sqrt{s(s(c+c') - (f + \frac{1}{2} (c y' + c' x' + c'')^2)^2)} \dots \dots (6)$$

geschrieben werden kann. Setzt man statt der links vom Gleichheitszeichen stehenden Grösse ihren Ausdruck (5), so erhält man auch:

$$E = c y' + c' x' + c'' \dots \dots \dots (2)$$

erhält. Hierdurch reducirt sich die Summe von B und C auf:

$$\pi^2 \lambda [E \delta \varphi + c \delta x' - c' \delta y']$$

Für den Anfang der Feder verschwinden $\delta x'$ und $\delta y'$, weil dieser Punkt fest ist, $\delta \varphi$ weil die Feder hier fest eingeklemmt ist; für ihr Ende wird der eben gefundene Ausdruck

$$\pi^2 \lambda [(cb + c'a + c'') \delta u + c \delta a - c' \delta b]$$

und dieser zu A hinzugesetzt, ergibt die vollständige Gleichung (1). Indem aber $\delta a, \delta b, \delta u$ in der Rechnung als unabhängig zu betrachten sind, muss das was in jede dieser Variationen multiplicirt ist, verschwinden, wodurch man folgende drei Differentialgleichungen erhält:

$$d\sigma = \frac{\pm s (c dy' + c' dx')}{\sqrt{s(s(c+c') - (f + \frac{1}{2} (c y' + c' x' + c'')^2)}} \dots \dots (7)$$

Das in diesem Ausdrucke, und also auch in dem vorigen anzunehmende Zeichen ist das untere, weil

$$c dy' + c' dx' = dE$$

ist und E abnimmt wenn σ wächst. Das vom Anfange der Feder bis zu ihrem Ende genomene Integral von (6) ergibt eine Relation zwischen a, b, c, c', c'', f ; das eben so genomene von (7) drückt das gegebene σ — die ganze Länge der Feder — durch dieselben Grössen aus. Die Anwendung von (5) auf den Anfang und das Ende der Feder, nämlich

$$\left. \begin{aligned} -ec = f + \frac{1}{2} c''^2 \\ \varepsilon (c' \sin u - c \cos u) = f + \frac{1}{2} (cb + c'a + c'')^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

ergibt endlich noch zwei Gleichungen zwischen ihnen. Durch diese vier Gleichungen und die drei Differentialgleichungen (3) sind die sieben von der Zeit abhängigen Grössen u, a, b, c, c', c'', f bestimmt.

In dem Falle eines kleinen Werthes von ε , dessen niedrigste Dimension man nur berücksichtigen will, hat auch die Durchführung der hier geforderten Rechnung keine wesentliche Schwierigkeit. Statt c, c' werde

ich zwei neue Grössen T, φ , in die Rechnung bringen, so dass

$c = T \cos \varphi, \quad c' = -T \sin \varphi$,
sind. Da dadurch $cdy' + c'dx' = -T d\sigma \sin(\varphi - \varphi)$ wird, so bedeutet φ , den Werth von φ , für welchen $cy' + c'x' + c''$ ein Maximum oder Minimum ist. Die Gleichung (5) verwandelt sich nun in

$$- \varepsilon T \cos(\varphi - \varphi) = f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2$$

und die beiden Factoren des Nenners von (6) und (7) werden

$$c'y - cx' = \frac{-1}{\sqrt{2\varepsilon T}} \int \frac{(f + \frac{1}{2}\eta^2) d\eta}{\sqrt{\varepsilon T + f + \frac{1}{2}\eta^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon T}} \left[(\varepsilon T - f) \log(\eta + \sqrt{2\varepsilon T + 2f + \eta^2}) - \frac{1}{2}\eta\sqrt{2\varepsilon T + 2f + \eta^2} \right] + \text{Const.}$$

$$\sigma = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon T}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\varepsilon T + f + \frac{1}{2}\eta^2}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \log(\eta + \sqrt{2\varepsilon T + 2f + \eta^2}) + \text{Const.}$$

und wenn man diese Integrale vom Anfange bis zum Ende der Feder, oder von $\eta = c''$ bis $\eta = cb + c'a + c'' = \eta'$ nimmt, auch sich an die Gleichungen (8) erinnert:

$$c'b - ca = \frac{\varepsilon T - f}{2\sqrt{\varepsilon T}} \cdot \log \left\{ \frac{\eta' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi - u)}{c' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi} \right\} + \frac{1}{2} c'' \sin \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2} \eta' \sin \frac{1}{2}(\varphi - u) \dots \dots \dots (9)$$

$$\sigma = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \cdot \log \left\{ \frac{\eta' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi - u)}{c' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Wendet man in der Grösse, deren Logarithme hier vorkommt, die aus den beiden Gleichungen (8) zu ziehende Bestimmung von c'' an, nämlich

$$c'' = \frac{-2\varepsilon T \sin(\varphi - \frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u - cb + c'a}{cb + c'a}$$

$$\eta' = \frac{-2\varepsilon T \sin(\varphi - \frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u + cb + c'a}{cb + c'a}$$

so wird diese Grösse

$$\left. \begin{aligned} c'' &= 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \left[\cos(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u \cdot \frac{c' + 1}{c' - 1} + \sin(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u \frac{c' - 1}{c' + 1} \right] \\ \eta' &= 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \left[\cos(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u \cdot \frac{c' + 1}{c' - 1} - \sin(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u \frac{c' - 1}{c' + 1} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Ferner hat man aus (9) und (10) verbunden mit den eben gefundenen Ausdrücken:

$$c'b - ca = -\frac{\varepsilon T - f}{2\sqrt{\varepsilon T}} \cdot \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon T} \left(p p' \frac{c' + 1}{c' - 1} + p' p' \frac{c' - 1}{c' + 1} \right)$$

wo p und p' für

$$\cos(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u \quad \text{und} \quad \sin(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u$$

geschrieben sind. Aus (8) erhält man aber, indem man den Ausdruck von c'' substituirt,

$$c'b - ca = -T\sigma + 2\sqrt{\varepsilon T} \left[p p' \frac{c'^2 - 2zc' - 1}{(c' - 1)^2} + p' p' \frac{c'^2 + 2zc' - 1}{(c' + 1)^2} \right] \dots \dots \dots (13)$$

welcher Ausdruck, mit (11) verbunden,

$$\left. \begin{aligned} a &= \sigma \cos \varphi - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \left[\left(p p' \frac{c'^2 - 2zc' - 1}{(c' - 1)^2} + p' p' \frac{c'^2 + 2zc' - 1}{(c' + 1)^2} \right) \cos \varphi - 2p' \frac{c' - 1}{c' + 1} \sin \varphi \right] \\ b &= \sigma \sin \varphi - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \left[\left(p p' \frac{c'^2 - 2zc' - 1}{(c' - 1)^2} + p' p' \frac{c'^2 + 2zc' - 1}{(c' + 1)^2} \right) \sin \varphi + 2p' \frac{c' - 1}{c' + 1} \cos \varphi \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

ergibt. Substituirt man die jetzt gefundenen Ausdrücke von $\eta' = cb + ca + c''$, a und b in den Gleichungen (3),

$$\sqrt{\varepsilon T + f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2} = \sqrt{2\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi)$$

$$\sqrt{\varepsilon T - f - \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2} = \sqrt{2\varepsilon T} \cdot \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi)$$

Da die Feder wenig von einer geraden Linie abweicht, also $\varphi, -\varphi$ ein kleiner Winkel ist, so kann man den zweiten Factor, ohne erheblichen Fehler, als beständig $= \sqrt{2\varepsilon T}$ annehmen, wodurch die Integrale aufhören, elliptische Transcendenten zu sein. Man hat dadurch, wenn man, um abzukürzen, η für $cy' + c'x' + c''$ schreibt:

$$\frac{4\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u + cb + c'a}{4\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u - cb - c'a}$$

und es folgt dadurch aus (10):

$$cb + c'a = -4\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u \cdot \frac{c' - 1}{c' + 1} \dots (11)$$

wo, um abzukürzen,

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \cdot \sigma$$

gesetzt worden ist. Hieraus folgen

so enthalten diese die drei von der Zeit abhängigen Grössen u, T, φ , zu deren Bestimmung sie hinreichen.

Ein erstes Integral dieser Gleichungen ist das der Erhaltung der lebendigen Kraft entsprechende, nämlich

$$h = \left(s \sin u \frac{du}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \left(s \cos u \frac{du}{dt} + \frac{db}{dt} \right)^2 + \mu \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2\pi^2 \lambda \left[s \cos u + a - \frac{1}{m} \int ((cb + c'a + c'') du + cda - c'db) \right]$$

Wenn
$$\begin{aligned} a &= \sigma \cos u + \alpha \\ b &= \sigma \sin u + \beta \end{aligned}$$

gesetzt und $d\alpha^2 + d\beta^2$ vernachlässigt wird, so verwandelt es sich in

$$h = (\mu + s's') \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2s' \frac{du}{dt} \left(\cos u \frac{d\beta}{dt} - \sin u \frac{d\alpha}{dt} \right) - 2\pi^2 \lambda \left[s' \cos u + \alpha - \frac{1}{m} \int ((c\beta + c'a + c'') du + cda - c'd\beta) \right] \quad (15)$$

wo s' für $s + \sigma$, also für die in der Ruhe des Pendels stattfindende Entfernung seines Schwerpunktes von dem Aufhängungspunkte geschrieben ist. In der weiteren Entwicklung dieses Integrals werde ich Grössen von der Ordnung von $\alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\beta, \alpha\sqrt{\epsilon}, \beta\sqrt{\epsilon}$ vernachlässigen, wodurch man berechtigt wird, $p = p' = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u$ anzunehmen. Demzufolge hat man:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sigma\gamma \cdot \sin u - \zeta \cos u + \zeta' \sin u \\ \beta &= \sigma\gamma \cdot \cos u - \zeta \sin u - \zeta' \cos u \end{aligned}$$

$$h = (\mu + s's') \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2s' \frac{du}{dt} \left(\sigma \frac{d\gamma}{dt} - \zeta \frac{du}{dt} - \frac{d\zeta'}{dt} \right)$$

$$- 2\pi^2 \lambda \left[s' \cos u - \sigma\gamma \sin u - \zeta \cos u + \zeta' \sin u + \int \frac{\gamma}{m} d\zeta - \int \frac{\zeta'}{m} du \right] \dots \dots (16)$$

Die Bestimmung der in dieser Gleichung, ausser u , noch vorkommenden T und γ muss aus den Gleichungen (3) abgeleitet werden. Führt man in den beiden ersten derselben α und β statt a und b ein, und multiplicirt man sie in $-\cos u$ und $-\sin u$, ferner in $\sin u$ und $-\cos u$, so ergeben sie:

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} \cos \gamma = s' \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \cos u \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \sin u \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \pi^2 \lambda \cos u$$

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} \sin \gamma = -s' \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \sin u \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \cos u \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \pi^2 \lambda \sin u$$

Wenn man diese Gleichungen weiter entwickelt, so enthalten sie die zweiten Differentialquotienten sowohl von T als auch von γ ; man kann aber α und β vernachlässigen, indem T nur in Grössen von der ersten Ordnung, und γ nur in σu multiplicirt, in (16) vorkommen, und das letztere Product, bei der immer kleineren Länge der Feder und den kleinen Schwingungswinkeln des Pendels, so klein ist, dass Grössen von der Ordnung von $\sigma\alpha$ und $\sigma u\beta$ als unerheblich angesehen werden können. Man kann daher

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} = s' \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \pi^2 \lambda \cos u$$

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} \gamma = -s' \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \sin u$$

das Integral der Summe ihrer Producte in resp. da, db, du . Bezeichnet man seine willkürliche Constante durch h , so ist es

wo γ für $\varphi - u$ geschrieben ist und die abkürzenden Bezeichnungen

$$\zeta = \frac{c^2 u - 4zc^2 u^2 - 1}{(c^2 u^2 - 1)^2} \sin \frac{1}{2} u \sqrt{\frac{s}{T}}$$

$$\zeta' = \frac{c' - 1}{c' + 1} 2 \sin \frac{1}{2} u \sqrt{\frac{s}{T}}$$

eingeführt sind. Die Gleichung (15) verwandelt sich dadurch in:

annehmen. Wenn das Pendel von $-u'$ bis u' schwingt, so hat man mit hier hinreichender Näherung aus (16):

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{2\pi^2 \lambda s'}{\mu + s's'} (\cos u - \cos u') = \frac{2\pi^2 \lambda}{l} (\cos u - \cos u')$$

und indem man dieses differentiirt:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{\pi^2 \lambda s'}{\mu + s's'} \sin u = -\frac{\pi^2 \lambda}{l} \sin u$$

wo also l die Grösse $\mu + s's'$ bedeutet und damit den obigen Ausdrücken zufolge

$$\left. \begin{aligned} \frac{T}{m} &= \cos u + \frac{2\epsilon'}{l} (\cos u - \cos u') \\ \frac{T}{m} \gamma &= \frac{\epsilon' - l}{l} \sin u \end{aligned} \right\} \dots \dots (17)$$

In meinem Buche über die Länge des einfachen Sekundenpendels habe ich (S. 103) gezeigt, dass ein Pendel, dessen Bewegung der Gleichung

$$c = (1 + 2f'u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2nu (\cos u + fu) \dots \dots (18)$$

entspricht, eine ganze Schwingung in derselben Zeit vollendet, in welcher ein einfaches, dessen Länge

$$l' = \frac{\pi^2 \lambda}{nn} \left[1 + 2\beta + \frac{a}{2} + \sin \frac{1}{2} u'^2 (\beta' + \frac{2}{3} a''') \right] \dots (19)$$

ist, eine gleich grosse vollenden würde, in welchem Ausdrücke die Coefficienten durch die Entwicklungen

$$f u = \alpha + \alpha' \sin \frac{1}{2} u + \alpha'' \sin \frac{1}{4} u^2 + \dots$$

$$f' u = \beta + \beta' \sin \frac{1}{2} u + \beta'' \sin \frac{1}{4} u^2 + \dots$$

erklärt werden, deren erste, wenn der Coefficient von $\sin \frac{1}{2} u^2$ vollständig gefunden werden soll, also bis $\sin \frac{1}{4} u^4$ incl., die zweite bis $\sin \frac{1}{2} u^2$ ausgeführt werden muss. Die Reduction der Gleichung (16) auf die Form (18) ergibt:

$$\frac{\pi^2 l}{n n} = l$$

$$f u = \frac{1}{s} \left[-\sigma \gamma \sin u - \zeta \cos u + \zeta' \sin u + \int \frac{T}{m} d\zeta - \int \frac{c''}{m} du \right]$$

$$f' u = \frac{1}{s'} \left[\sigma \frac{d\gamma}{du} - \zeta - \frac{d\zeta'}{du} \right].$$

Indem man den Ausdruck von $f u$ auch

$$\frac{1}{s'} \left[-\sigma \gamma \sin u + \zeta \left(\frac{T}{m} - \cos u \right) - \int \frac{s'' dT}{m} - \int \frac{c''}{m} du + \zeta' \sin u \right]$$

schreiben kann, bemerkt man leicht, dass die angegebenen Grenzen der Entwicklungen fordern, dass ξ bis zu den Grössen der 2. Ordnung und γ, c'', ζ' bis zu denen der 3. aufgesucht werden. Den Ausdrücken (17) zufolge ist

$$\gamma = -\frac{l-s'}{l} \frac{2v\sqrt{1-vv'}}{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} vv'}$$

wobei v, v' für $\sin \frac{1}{2} u$ und $\sin \frac{1}{2} u'$ geschrieben sind, und man erhält daraus ohne Mühe die entsprechenden Theile von

$$f u = \frac{4(l-s')\sigma}{l s'} \left[\left(1 - \frac{4s'}{l} v'v' \right) v v + \frac{4s'+l}{l} v^4 \right]$$

$$f' u = -\frac{(l-s')\sigma}{l l} \left[1 - \frac{4s'}{l} v'v' + \frac{12s'+4l}{l} v v \right] \dots (a)$$

Wenn man, um abzukürzen, bezeichnet

$$\frac{e'-1}{e'+1} \text{ durch } \alpha, \quad \frac{e'+1}{e'-1} \text{ durch } \beta$$

$$f u = \sqrt{\frac{e}{m}} \left[\frac{1}{s} \left(4\alpha - (a - a'z) \frac{8s'}{l} v'v' \right) v v - \frac{1}{s} \left(2\alpha - (a - a'z) \frac{8s'+4l}{l} v^4 \right) v^4 \right]$$

$$f' u = \sqrt{\frac{e}{m}} \left[-\frac{1}{s'} \left(a - (a - a'z) \frac{2s'}{l} v'v' \right) + \frac{1}{s'} \left(\frac{a}{2} - (a - a'z) \frac{6s'+3l}{l} v v \right) \right] \dots (c)$$

Substituirt man in der Formel (19) die sich aus der Summe von a, b, c ergebenden

$$\alpha'' = \frac{4(l-s')\sigma}{l s'} \left(1 - \frac{4s'}{l} v'v' \right) - \frac{2}{s'} A + \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{4}{s'} \left(a - (a - a'z) \frac{2s'}{l} v'v' \right)$$

$$\alpha''' = \frac{4(l-s')(4s'+l)\sigma}{l l s'} + \frac{1}{s'} (2B - \frac{1}{2} A) - \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{2}{s'} \left(a - (a - a'z) \frac{4s'+2l}{l} \right)$$

$$\beta = -\frac{(l-s')\sigma}{l l} \left(1 - \frac{4s'}{l} v'v' \right) - \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{s'} \left(a - (a - a'z) \frac{2s'}{l} v'v' \right)$$

$$\beta' = -\frac{4(l-s')(3s'+l)\sigma}{l l s'} - \frac{1}{s'} A + \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{s'} \left(\frac{a}{2} - (a - a'z) \frac{6s'+3l}{l} \right)$$

so erhält man endlich:

$$\frac{d\alpha}{d\alpha'} \text{ durch } \alpha', \quad \frac{d\beta}{d\beta'} \text{ durch } \beta',$$

so werden die oben gegebenen Ausdrücke von ξ und c'' :

$$\xi = \sqrt{\frac{e}{m}} \left[\alpha + \beta + (\alpha' + \beta') z \right] \frac{\frac{1}{2} v v'}{\sqrt{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} v v'}}$$

$$\frac{c''}{m} = \sqrt{\frac{e}{m}} (\alpha + \beta) \sqrt{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} v v'}. e.$$

Indem

$$z = \sqrt{\frac{T}{s}} \cdot \sigma = z' + z'' \left[\frac{2s'}{l} v'v' - \frac{2s'+l}{l} v v \right] \dots \left(\text{wo } z' = \sigma \sqrt{\frac{m}{l}} \right)$$

ist, so sind die erforderliche weit fortgesetzten Entwicklungen

$$\xi = \sqrt{\frac{e}{m}} \left[a + b + (a' + b') z' \right] \frac{1}{2} v v$$

$$\frac{c''}{m} = \sqrt{\frac{e}{m}} \left[a + b + [a + b + (a' + b') z'] \left(\frac{2s'}{l} v'v' - \frac{2s'+l}{l} v v \right) \right] v$$

wo a, b, a', b' die in der Voraussetzung $z = z'$ stattfindenden Werthe von $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ bedeuten. Schreibt man, um abzukürzen, $2A$ und $2B$ für $\sqrt{\frac{e}{m}} (a + b)$ und $\sqrt{\frac{e}{m}} [a + b + (a' + b') z']$, so findet man sehr leicht die ξ und c'' enthaltenden Theile von

$$f u = -\frac{2}{s} A v v + \frac{1}{s} (2B - \frac{1}{2} A) v^4 \left. \right\} \dots (b)$$

$$f' u = -\frac{1}{s'} A v v$$

Der Ausdruck von ξ' ist endlich

$$= \frac{2\alpha v}{\sqrt{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} v v}}$$

$$= \left[a - (a - a'z) \left(\frac{2s'}{l} v'v' - \frac{2s'+l}{l} v v \right) \right] 2v$$

und die ihm entsprechenden Theile von $f u$ und $f' u$ sind:

$$\begin{aligned} \frac{l'}{l} = & 1 + \frac{2(l-s')^2 \sigma}{11s'} - \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \cdot \frac{1}{2s'} (a+b) + \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \cdot \frac{l-s'}{1s'} \cdot 2a \\ & + \left[\frac{(l-s')^2 \sigma}{11s'} (8s's' - 12ls' + 3ll) + \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \cdot \frac{3}{4s'} [a+b + (a'+b')\epsilon] - \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \cdot \frac{3l+8s'}{16ls'} (a+b) \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \cdot \frac{3l-s'}{21s'} a + \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \cdot \frac{(l-s')(3l+2s')}{11s'} (a-a's') \right] v'v'. \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

7.

Um zu erfahren, inwiefern die jetzt entwickelte Theorie der Bewegung eines an einer Feder aufgehängten Pendels dem Resultate des Herrn FRODSHAM günstig ist, habe ich die Zahlenwerthe der verschiedenen Theile des oben gegebenen Ausdruckes aufgesucht.

Ein Längenelement $d\sigma$ der Feder, in der Entfernung u von der sie ihrer Dicke nach halbirenden Ebene, oder in der Entfernung $\varphi + u$ von dem Mittelpunkte ihrer Krümmung, erfährt durch diese Krümmung die Veränderung

$$\frac{u}{\varphi} d\sigma,$$

zu deren Erhaltung eine Kraft erforderlich ist, welche unter der Annahme der Proportionalität der Kraft und ihrer Wirkung

$$= \frac{k}{2\beta} \cdot \frac{u}{\varphi}$$

ist, wenn 2β die Verkürzung der Längeneinheit, welche der drückenden Kraft k entspricht, bedeutet. Das Moment der die Feder krümmenden Kraft ist daher

$$= \frac{k}{2\beta} \cdot \frac{uu}{\varphi}$$

und die Summe dieser Momente für alle Punkte eines Querschnittes der Feder, welche als ein Parallelepipedum, ihre Breite = b , ihre Dicke = $2d$, angenommen wird, ist

$$\frac{kb}{2\beta\varphi} \int_{-d}^d uu \, du = \frac{kb d^3}{3\beta\varphi}$$

Dieses ist die oben durch E bezeichnete und durch $\frac{\epsilon}{\varphi}$ ausgedrückte Kraft, woraus die Bedeutung von ϵ hervorgeht, nämlich

$$\epsilon = \frac{kb d^3}{3\beta}$$

Wenn für k das Gewicht einer auf die Flächeneinheit drückenden Quecksilbersäule von der Wärme des schmelzenden Eises und der Höhe 336¹/₀₀₅ angenommen wird, so ist β , den Versuchen des Herrn LAGERHELM zu-

$$\frac{l'}{l} = 1 + \frac{2(l-s')^2 \sigma}{11s'} - \frac{1}{s'} \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \left(\frac{2s'}{l} - 1 \right) + \left[\frac{(l-s')^2 \sigma}{11s'} \left(8 \frac{s's'}{ll} - 12 \frac{s'}{l} + 3 \right) - \frac{1}{s'} \sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \left(\frac{s'}{2l} + \frac{3}{8} - \frac{l-s'}{l} \left\{ \frac{2s'}{l} + 3 \right\} \right) \right] v'v'. \dots (21)$$

folge, für Eisen und Stahl, ein Viermilliontel. Nimmt man die Pariser Linie zur Längeneinheit, die Quadratlinie also zur Flächeneinheit, den Preussischen Gran zur Gewichtseinheit, so ist (§ 4)

$$k = 336,905 \cdot 13,6 \cdot 0,1884961 = 863,6715$$

wodurch also ϵ , für jede gegebene Breite und Dicke der (von Stahl gemachten) Feder bekannt wird.

Die Federn, mit welchen Herr FRODSHAM seine Versuche machte, waren von 0,39 bis 0,40 englische Zoll breit und von 0,002 bis 0,005 dick*); ich werde für $b = 4\frac{1}{2}$ und $2d = 0,003$ Zoll = 0⁰/₀₃₃₇₈ rechnen, das Gewicht des Pendels aber zu 15 Preuss. Pfunden, oder $m = 115200$ annehmen. Die Einrichtung des letzteren werde ich so annehmen, dass es Secunden Sternzeit schwingt, welcher $l = 438\frac{1}{4}$ entspricht, und dass $s' = 400\frac{1}{4}$ ist. Aus dieser Annahme folgt

$$\log \sqrt{\frac{m}{\epsilon}} = 9,66797 - 10$$

und wenn die Länge der Feder (σ) in Pariser Linien ausgedrückt wird:

$$\sigma \sqrt{\frac{m}{\epsilon}} = s' = 2,148 \cdot \sigma.$$

Hieraus geht hervor, dass für Federn von einem halben bis zu einem ganzen engl. Zolle, oder von $\sigma = 5,63$ bis $\sigma = 11,26$, mit welchen Herrn FRODSHAM'S Versuche gemacht wurden, s' so gross ist, dass $e^{s'}$ vergleichungsweise mit $e^{2s'}$ und 1 vergleichungsweise mit e' nicht in Betracht kommen. Dadurch werden die in dem Ausdrucke (20) durch a und b bezeichneten Grössen sehr wenig von einander und von 1 verschieden, und $s'a'$ und $s'b'$ werden unbedeutend; woraus hervorgeht, dass die von der Federkraft abhängigen Theile jenes Ausdruckes als unabhängig von den verschiedenen, in den Versuchen vorkommenden Werthen von σ anzusehen sind, und dass eine solche Verschiedenheit erst bei weit geringeren Längen der Feder erheblichen Einfluss erhalten würde. Dadurch zieht sich der Ausdruck (20) in folgenden zusammen:

*) Eine nur 0,001 Z. dicke nehme ich aus, da sie zu schwach ist, um ein Pendel sicher zu tragen.

und wenn man die angenommenen Zahlen anwendet in:

$$\frac{l'}{l} = 1 + 0,0000211 \cdot \sigma - 0,0009871 \\ - (0,0001971 \cdot \sigma + 0,0005936) v'v'$$

Verlangt man den ähnlichen Ausdruck für eine andere Feder, deren Dicke nicht 3, sondern n Tausentel Zoll ist, so muss man die von σ freien Theile des gegenwärtigen in $\sqrt{\left(\frac{n}{3}\right)^3}$ multipliciren; eine andere Breite, = b Pariser Linien, fordert die Multiplication derselben Theile in $\sqrt{\frac{b}{4,5}}$.

Indem die in $v'v'$ multiplicirte Grösse negativ ist, zeigt die gegenwärtige Anwendung der Theorie des an einer Feder aufgehängten Pendels, dass diese Aufhängungsart die Schwingungszeit desto mehr verkürzt, je grösser der Schwingungswinkel ist. Dieses war wirklich Herr FRODSHAM'S Absicht, allein die von der Feder herrührende Verkürzung ist viel zu klein, um der Verlängerung entgegenzuwirken, welche aus der kreisförmigen Bewegung des Pendels entsteht; bekanntlich ist die letztere = $\frac{1}{4}v'v'$, während die erstere (nämlich die Hälfte des Einflusses auf $\frac{l'}{l}$)

$$- (0,0000986 \cdot \sigma + 0,0002968) v'v'$$

ist, so dass jene durch diese nur unbedeutend vermindert, nicht vernichtet wird. Der nicht in $v'v'$ multiplicirte Theil des Ausdrucks von $\frac{l'}{l}$ zeigt, dass die Kraft der Feder verursacht, dass das an ihr aufgehängte Pendel nennlich kleine Schwingungen in kürzerer Zeit vollendet, als ein an einem Faden ohne Federkraft von gleicher Länge befestigtes von übrigens gleicher Beschaffenheit.

Die Theorie bestätigt also nicht das Resultat, welches Herr FRODSHAM aus seinen Versuchen abgeleitet hat; sie berechtigt daher zu der Annahme, dass fremde Einwirkungen die Schwingungszeiten des Pendels gestört haben müssen. Sie zeigt auch, dass die Veränderung der Länge der Feder, welche Herr FRODSHAM als ein Mittel betrachtet, ein Pendel isochronisch zu machen, erst wenn die Feder viel kürzer ist, als in seinen Versuchen, einen erheblichen Einfluss äussern kann.

8.

Wenn auch das von dem oftgenannten Künstler als isochronisch angegebene Pendel diese Eigenschaft nicht besessen hat, so ist damit die Möglichkeit, sie einem Pendel anzueignen, nicht zurückgewiesen. Viel-

mehr ist diese Möglichkeit offenbar, da bekanntlich die cycloidale Bewegung eines Pendels*) grosse und kleine Schwingungen gleichzeitig vollendet. Es ist also nicht sowohl irgend eine, den Isochronismus hervorbringende Einrichtung, als eine solche aufzufinden, welche ihn, ohne mit anderweitigen Nachtheilen verbunden zu sein, und unter allen Umständen sicher, hervorbringt. Ihre Auffindung ist meiner Ansicht nach die wichtigste Aufgabe für die Künstler, welche die höchste Vollendung der Pendeluhren hervorzubringen beabsichtigen. Hier bemerke ich darüber nur, dass der § 1 und 2 beschriebene Apparat geeignet ist, den Erfolg einer den Isochronismus beabsichtigenden Einrichtung des Pendels dadurch der strengsten Prüfung zu unterwerfen, dass man einen Versuch mit grösseren Schwingungswinkeln anfängt und ihn bis zu kleineren fortsetzt. Dieser Apparat müsste auch Herrn FRODSHAM vor der Täuschung bewahrt haben, welche aus irgend einer fremden Störung, vermuthlich aus der mit dem die Uhr treibenden Gewichte veränderlichen Grösse ihres Einflusses auf die Schwingungszeiten des Pendels, hervorgegangen sein muss.

Zum Schluss erwähne ich noch eines Nutzens, welcher aus dem a. a. O. beschriebenen Apparate gezogen werden kann. Wäre unter den verschiedenartigen Hemmungen, welche man den Pendeluhren gegeben hat, oder geben kann, eine, welche ihre beabsichtigte Wirkung äusserte, ohne die Schwingungszeit des Pendels im geringsten zu beeinträchtigen, so würde sie offenbar den Vorzug vor jeder anderen, dieses nicht leistenden, verdienen. Da aber wahrscheinlich keine von ihnen ganz ohne Einfluss auf die Schwingungszeit ist, so kann auch die Grösse dieses Einflusses verschiedener Hemmungen, sowie seine Beständigkeit unter allen Umständen Grund werden, die eine oder andere vorzugsweise anzuwenden. Diese Grösse kann durch den erwähnten Apparat mit Sicherheit und Leichtigkeit bestimmt werden: man wird ihn so anordnen, dass man die Uhr selbst in dem Kasten befestigt, allein die Einrichtung trifft, dass sie ausser Verbindung mit dem Pendel gesetzt werden kann, so dass die Schwingungszeiten des Pendels, sowohl ohne, als auch in Verbindung mit ihr, unmittelbar nacheinander beobachtet und beide miteinander verglichen werden können. Der Apparat leistet also auch hier dasselbe, was ihn, meiner Meinung nach, allgemein zu einer unentbehrlichen Unterstützung der Uhrmacherkunst macht: er

*) Aller Schärfe nach nur des einfachen Pendels.

gewährt dem Künstler das Mittel, das Pendel einer Uhr, in Beziehungen, in welchen es seiner Absicht vollkommen entsprechend werden kann, ganz zu vollenden; in jeder andern Beziehung aber, die Wirkung

einer zu wählenden Einrichtung unmittelbar zu prüfen, also auch die bessere von einer weniger guten durch den Erfolg selbst zu unterscheiden.

68. Vorläufige Nachricht von einem auf der Königsberger Sternwarte befindlichen grossen Heliometer.*)

(Astron. Nachr. 8, p. 397. Mit einer Tafel.)

Die Aufgabe der beobachtenden Astronomie, die gegenseitige Lage zweier Punkte an der Himmelskugel zu bestimmen, wird in der heutigen Praxis bekanntlich am häufigsten durch die Anwendung von Meridianinstrumenten aufgelöst. Diese Instrumente gewähren eine allgemeine, durch grössere oder kleinere Entfernung der zu vergleichenden Punkte nicht beschränkte Auflösung und sind daher immer anwendbar, wenn die Kraft ihrer Fernröhre hinreicht, das zu beobachtende Gestirn zur Zeit seiner Culmination sichtbar zu machen. So gegründeten Anspruch auf den ersten Rang unter den astronomischen Instrumenten indessen Hilfsmittel auch besitzen, welche die Aufgabe in solcher Allgemeinheit aufzulösen geeignet sind, so würde man doch von der erreichbaren Genauigkeit der Beobachtungen etwas aufopfern, wenn man allenthalben, wo die gegenseitige Lage zweier Punkte gefordert wird, das am allgemeinsten anwendbare Mittel zur Beobachtung derselben anwenden wollte. Denn wo die Aufgabe sich unter irgend einer Beschränkung zeigt, kann durch ein besonderes, für den beschränkten Fall eingerichtetes Instrument für das, was man an Allgemeinheit seiner Anwendbarkeit aufgibt, eine Vermehrung der Genauigkeit, womit das Uebrigbleibende geleistet wird, erlangt werden. Auf diese Art erhielten z. B. die Zenithsectoren, wenn es auf die Beobachtung kleiner Zenithdistanzen ankam, ein Uebergewicht über die Mauerquadranten; am auffallendsten aber tritt der aus der Beschränkung zu ziehende Vortheil hervor, wenn von der Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier sehr nahen Gestirne die Rede ist, denn hier kann man durch Anwendung von Mikrometern eine Sicherheit der Messungen erlangen, welche die mit den besten Me-

ridianinstrumenten erreichbare sehr weit hinter sich zurücklässt.

Wenn man die Fortschritte betrachtet, welche unsere astronomischen Kenntnisse von BRADLEY'S Zeit an gemacht haben, so bemerkt man, dass derjenige Theil derselben, welcher von mikrometrischen Messungen angehen muss, vergleichungsweise mit dem andern, dessen Grundlagen durch Meridianinstrumente erlangt werden können, beträchtlich zurückgeblieben ist. Es ist auch weder zu verwundern, noch bedarf es einer Entschuldigung, dass die Astronomen dem letztern mehr Anstrengung gewidmet haben; allein eine Folge hiervon war, dass die mechanischen Künstler, wenig aufgefordert, den erstern zu unterstützen, ihre Talente und Bemühungen fast ausschliesslich auf die Vervollkommnung allgemeinerer Messinstrumente wandten und dass dadurch die Mikrometer so unvollkommen blieben, dass die Astronomen wirklich nicht mehr im Stande waren, erfolgreiche Anwendungen davon zu machen, vielmehr häufig vorzogen, Bestimmungen, welche ein gutes Mikrometer weit vortheilhafter hätte geben können, auf Meridianbeobachtungen zu gründen. Zwar darf man nicht undankbar sein gegen die schönen Erfindungen des Heliometers und anderer Mikrometer, welche gleichfalls auf Verdoppelung des Bildes im Fernrohr gegründet sind und daher gleichfalls keine Störung des Gebrauchs durch die tägliche Bewegung der Gestirne erfahren; allein die Ausführung blieb hinter derjenigen Vollendung, welche die Wissenschaft forderte, so sehr zurück, dass z. B. die für die Bestimmung der Masse des Saturns so wichtige Kenntniss der mittleren Entfernungen seiner Satelliten fortwährend entbehrt werden musste, wenn man nicht etwa das unmittelbare Ergebniss einer einzelnen, im Jahre 1719 von POUND gemachten Messung der Entfernung des hellsten Trabanten, oder die von mir in Lilienthal mit einem dazu ungenügenden Apparate versuchte Bestimmung dafür

*) [247 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 133, 277, 292, 304, 307, 323, 327 (O.), 331, 337 (O.), 363 (O.), 401. — Vgl. auch Königsb. Beobacht. 15. und 17. Abth. Einleitung (259 und 291 d. a. Verz.)]

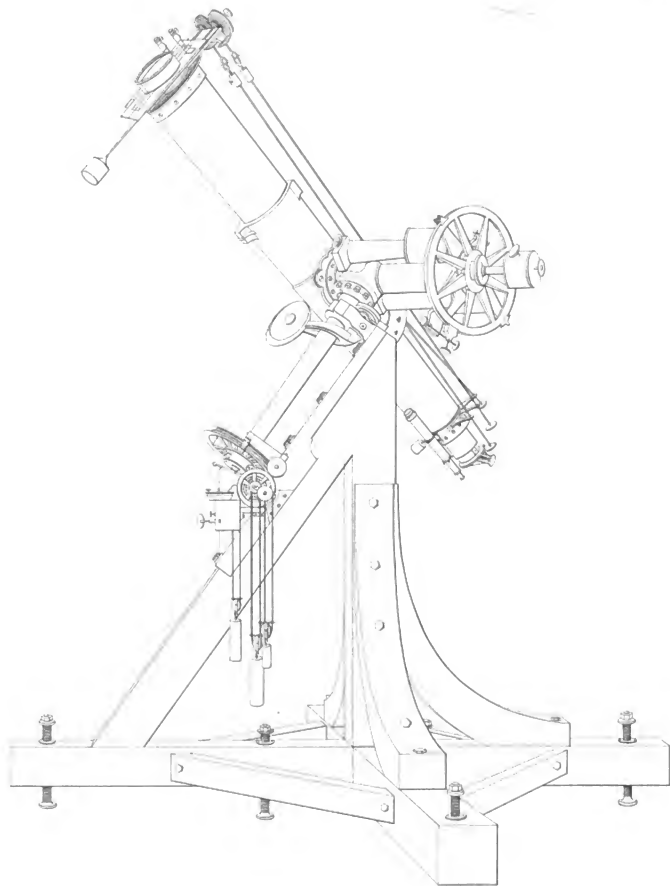
annehmen will. Der Grund, weshalb man keine genügenden Kenntniss dieser mittleren Entfernungen erlangte, war nicht sowohl eine zufällige Vernachlässigung der Beobachtungen des Saturnsystems, als die Unzulänglichkeit der Beobachtungsmittel. Diese zeigte sich auch nicht hier allein, sondern allenthalben wo mikrometrische Messungen gefordert wurden; sie trat vorzüglich auffallend hervor auf Sternwarten wie die von HERSCHEL und SCHRÖTER, auf welchen gute mikrometrische Messungen desto erwünschter gewesen wären, je weniger jene Sternwarten andere Messungen zum Zweck hatten, wo man aber in Ermangelung eines bessern Hilfsmittels häufig die Projectionstafel anwenden musste, welche wohl das Unvollkommenste von allen sein möchte, zumal wenn die zu messenden Winkel die Grenze weniger Secunden überschreiten [s. Bd. I, p. 111].

Die Fadenmikrometer, welche verschiedene englische Künstler verfertigten, würden die Beobachtungen, welche man vermisste, wirklich haben liefern können, wenn nicht ihrer Anwendung zum Messen von Entfernungen und Positionswinkeln durch die tägliche Bewegung Schwierigkeiten in den Weg gelegt würden, welche so gross sind, dass man diesen Instrumenten meiner Meinung nach keine zuverlässigen Beobachtungen dieser Art abgewinnen kann, sondern ihren Gebrauch auf die Messung von Declinationsunterschieden beschränken muss. Indessen hat FRAUNHOFER bekanntlich die Ursache der Schwierigkeit weggeschafft dadurch, dass er die Fernröhre mit Uhrwerken versehen hat, welche dieselben der täglichen Bewegung gemäss stetig fortbewegen, so dass die Sterne ihre Oerter, beziehungsweise auf die Fäden des Mikrometers, nicht ändern und daher mit der erforderlichen Ruhe mit diesen verglichen werden können. Wie sehr ihm dieses gelungen ist, zeigen die vortrefflichen Messungen der Entfernungen und Positionswinkel von Doppelsternen, welche STRUVE mit seinem grossen so eingerichteten Fernrohre erhalten und wovon er bereits einige Proben bekannt gemacht hat.

Ogleich durch diese Verbindung des Fadenmikrometers mit einem Uhrwerke sehr viel geleistet werden kann, und ogleich bei einem Fernrohre, welches mit beiden versehen ist, der Vortheil, zu genauem Messungen anwendbar zu sein, durch nichts was das Sehen beeinträchtigen könnte erkauft wird, so scheint es doch, dass, wenn das Messen der Hauptzweck eines Instruments sein soll, derselbe in noch grösserer Ausdehnung erreicht werden könne. Das Heliumeter hat nämlich ihm eigenthümliche Vorzüge, welche seiner Anwendung diese grössere Ausdehnung geben: es umfasst weit

grössere Entfernungen als das Fadenmikrometer; es erfordert keine Art von Fadenbeleuchtung; es ist endlich, auch ohne Uhrwerk, einer Störung durch die tägliche Bewegung nicht ausgesetzt. Die Grösse der Entfernungen, bis auf welche man mit dem Heliumeter beobachten kann, kann ohne Nachtheil für Messungen in kleineren Entfernungen wenigstens bis auf einen Grad ausgedehnt werden; sie ist von der Grösse des Sehfeldes, und von der Vergrösserung des Oculars unabhängig, so dass man, unbekümmert um die Verkleinerungen des Sehfeldes, welche stärkere Vergrösserungen herbeiführen, immer diejenigen Oculare anwenden kann, welche für die zu beobachtenden Gegenstände die vortheilhaftesten sind. Das Fadenmikrometer dagegen kann nur zur Beobachtung von Objecten angewandt werden, welche zugleich in sein Sehfeld gebracht werden können; es umfasst kleinere Entfernungen wenn die Vergrösserung stärker, grössere wenn sie schwächer ist, allein selbst für die schwächste Vergrösserung bleibt die Grösse seines Sehfeldes noch weit innerhalb der Grenze, welche der Anwendung des Heliumeters ohne Nachtheil gegeben werden kann. Der zweite Vorzug, nämlich der, dass das Heliumeter keine Fadenbeleuchtung erfordert, ist von vorzüglicher Wichtigkeit, wenn es auf die Beobachtung eines lichtschwachen Cometen ankömmt. Der dritte, dass die tägliche Bewegung keine Störung verursacht, machte das Heliumeter und andere ihm im Principe der Verdoppelung der Bilder ähnliche Instrumente früher zu den einzigen, mit welchen Entfernungen und Positionswinkel sicher gemessen werden konnten; nachdem aber die Anbringung des Uhrwerks an den Fernröhren den Fadenmikrometern gleichfalls eine ausgedehntere Anwendbarkeit gegeben hat, ist die Unabhängigkeit von der täglichen Bewegung nicht mehr ein dem Heliumeter ausschliesslich zukommender Vorzug. Ob das Uhrwerk die Störung des Gebrauchs eines Fadenmikrometers durch die tägliche Bewegung ganz oder nur zum Theil unschädlich macht, hängt offenbar davon ab, ob das Fernrohr durch dasselbe mehr oder weniger übereinstimmend mit der täglichen Bewegung bewegt wird; im günstigsten Falle werden alle Entfernungen, welche die Grenzen des deutlichen Sehfeldes nicht überschreiten, mit gleicher Sicherheit gemessen werden können, im ungünstigern werden die Fehler für kleinere Entfernungen kleiner, für grössere grösser sein.

Den Ansichten, welche ich hier dargelegt habe, zufolge war ich, als nach vollendeter neuer Ausrüstung der Königsberger Sternwarte für Meridianbeobachtungen der Wunsch entstand, ihr auch für mikrometrische Messungen einen ausgezeichneten Apparat zu erwerben,



Königsberger Helimeter.

Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

nicht zweifelhaft, einem Heliometer den Vorzug einzuräumen. Dieses Instrument musste aber, wenn es alles das leisten sollte, was meiner Meinung nach nöthig ist, um die Astronomie in dem zu lange vernachlässigten Zweige weiter auszubilden, eine weit grössere optische Kraft erhalten, als man den Helimetern sonst gegeben hat; es musste überdies in jeder Hinsicht eine Vollendung besitzen, geeignet, seinem Ausspruche, allenthalben wo es angewandt werden würde, eine beträchtliche Sicherheit zu geben. — Ein solches Instrument konnte nur FRAUNHOFER liefern; auch war Er, nachdem ich ihm die Gegenstände, zu deren Beobachtung es hinreichend stark sein sollte, angegeben hatte, bereit, demselben seine Kräfte zu widmen. Er bestimmte die Brennweite auf 8 Pariser Fuss, die Oeffnung auf 70 Linien; die Aufstellung sollte parallaktisch sein und das Fernrohr durch ein Uhrwerk bewegt werden. Es war nicht zu bezweifeln, dass ein solches Instrument der Astronomie manche nützliche Beobachtung liefern könne.

Des Königs Majestät hatte die Gnade, der Sternwarte den Besitz dieses grossen Helimeteters und später auch den Bau eines Thurmes für dasselbe zu bewilligen. — Um die Mitte des Jahres 1824 fing FRAUNHOFER an, an dem Instrumente zu arbeiten. Drei Objectivgläser wurden geschliffen, um unter denselben eine Auswahl zu haben und um, falls bei dem Durchschneiden eins verloren ginge, dasselbe ersetzen zu können; gleichzeitig wurden die Einrichtung zum Verschieben der Objectivhälften und die Aufstellung in Arbeit genommen. Bei FRAUNHOFER'S Tode (den 7. Juni 1826) war alles zum Fernrohre Gehörige fertig, allein das Durchschneiden des Objectivs, sowie auch die Vollendung der Aufstellung blieben Herrn von UTZSCHNEIDER überlassen, welcher das beste der drei vorhandenen Objective im Februar 1827 mit dem glücklichsten Erfolge durchschneiden liess und sich der Vollendung des Instruments mit solchem Eifer annahm, dass im Sommer desselben Jahres das Fernrohr, versehen mit seiner ganzen mikrometrischen Einrichtung, auf einem vorläufig eingerichteten Stative befestigt und seine Wirkung am Himmel versucht werden konnte. Zu dieser Zeit reiste ich nach München und hatte das Vergnügen, sowohl das Fernrohr und seinen Messapparat vorläufig kennen zu lernen, als auch Augenzeuge der Messregeln zu sein, welche Herr von UTZSCHNEIDER ergriff, um das ganze Instrument nicht nur in der demselben angemessenen Vollendung, sondern auch meinen besonderen Wünschen gemäss zu beendigen. Die grossen Hilfsmittel des optischen Instituts machten es möglich, das Instrument schon Anfangs October 1828

völlig fertig darzustellen, so dass mein theurer Freund, Herr Dr. von STENHEL in München, damit einige Beobachtungen anstellen konnte, welche ihn berechtigten, mir die wirkliche Erfüllung der von diesem grossen Instrumente gehegten Erwartungen anzuzeigen. Anfangs März 1829 kam es hier an, ohne auf dem langen Landtransporte den geringsten Schaden genommen zu haben; dieses verdanke ich der ausgezeichneten auf die Verpackung gewandten Sorgfalt und der getroffenen Veranstaltung, dass die 27 Kisten, welche das Instrument enthielten, ohne Aenderung der ihnen in München angewiesenen Oerter auf dem damit beladenen Fuhrwerke in Königsberg abgeliefert werden mussten. — Der Bau des Thurmes, auf welchem das Heliometer nach allen Punkten des Himmels freie Aussicht hat, war bei der Ankunft schon vorbereitet und wurde im Herbste beendigt, so dass das Instrument am 14. und 15. October 1829 aufgestellt werden konnte.

Eine genaue Beschreibung derjenigen Theile des Instruments, deren Kenntniss zur richtigen Würdigung der Beobachtungen nothwendig ist, behalte ich mir auf eine andere Gelegenheit vor. Sein Aeusseres zeigt die beiliegende Zeichnung; man sieht daraus, dass das Fussgestell und die Art der Bewegung bei dem Dorpater Instrumente und dem hiesigen ganz ähnlich sind, nur ist das erstere bei dem hiesigen 6 Zoll niedriger und die einzelnen Balken, woraus es besteht, sind 1 Zoll dünner. Die beiden Drehungsaxen und die daran befestigten Kreise sind bei beiden Instrumenten gleich. Der einzige Unterschied beider Einrichtungen, der sonst noch der Erwähnung werth ist, findet in der Aequilibrirung des Instruments in Beziehung auf die Declinationsaxe statt; statt des gekrümmten, durch den Declinationskreis hindurchgehenden Arms für das Gegengewicht, welchen das Dorpater Instrument hat, sind bei dem hiesigen zwei Hebel angebracht, deren feste Punkte sich an der Hülse für die Declinationsaxe befinden und deren kürzere Arme einen sehr starken Kreis von Glockenmetall haben, welcher die Declinationsaxe an ihrem an das Fernrohr stossenden Ende umgibt und dieses mittelst vier angebrachter Reibungsrollen trägt. Diese Aenderung macht die Anbringung zweier entgegengesetzter Nonien am Declinationskreise möglich und verstattet dem Fernrohre die vollständige Drehung um die Declinationsaxe. — Was STRUVE von der Leichtigkeit der Drehungen um beide Axen und von der Regelmässigkeit der Wirkung des Uhrwerks gesagt hat, gilt genau auch von dem Heliometer. Indem ich mich auf STRUVE'S deutliche und vollständige Beschreibung beziehe, ist es unnöthig, der übereinstim-

menden Theile beider Instrumente weiter zu erwählen, und ich kann sogleich zu dem Fernrohr und seiner Einrichtung zum Messen übergehen, welche bei dem hiesigen Instrumente, seinem verschiedenen Zwecke gemäss, ganz anders sind als bei dem Dorpater.

Das Fernrohr ist 8 Pariser Fuss lang und am obern Ende 10 Zoll, am untern 9 Zoll dick; sein Objectiv hat 70 Linien Oeffnung. Die Hebel, welche REICHENBACH anwandte, um die Biegung der Fernröhre zu verhindern, sind hier nicht vorhanden; man hat sie weggelassen, weil sie den Schlüsseln, womit die Schrauben beider Objectivhälften und der Trieb, welcher die ganze Heliometervorrichtung um die Axe des Rohrs bewegt, vom Ocular aus gedreht werden, hinderlich waren und weil man sie bei der im Verhältnisse zu der Länge beträchtlichen Dicke des Rohrs mit Recht für überflüssig hielt.

Der wesentliche Theil des Instruments, die beiden Objectivhälften, sind so angebracht, dass man jede derselben unabhängig von der andern in Beziehung auf die Axe des Rohrs berichtigen und den Parallelismus der Bewegungen erlangen kann; sie werden durch Schrauben bewegt, welche vom Oculare aus gedreht werden und welche zugleich zur Messung der Grösse der Bewegung dienen. Zu diesem Zwecke haben die mit einer Theilung in hundert Theile versehenen Köpfe dieser Schrauben einen so grossen Durchmesser, dass man die Tausendtheile eines Umganges, deren jedes etwa ein Zwanzigstel einer Secunde beträgt, mit völliger Sicherheit erkennt. Allein es ist noch eine zweite, von den bewegenden Schrauben unabhängige Einrichtung zum Messen der Entfernungen der Objectivhälften vorhanden: es sind nämlich auf den Schiebern, auf welchen die Objectivhälften fest sind, Theilungen auf Silber, und auf dem Rahmen, in welchem sie sich bewegen, Mikroskope mit Mikrometerschrauben angebracht, mit welchen man einzelne Hunderttheile der Secunden ablesen kann. Indessen finde ich die erste Beobachtungsart sowohl bequemer als sicherer, weshalb ich die zweite nur anwenden werde, um die Gleichheit der Schraubenrevolutionen zu prüfen und ihre etwaigen Verbesserungen zu bestimmen. Die Verschiebung der Objectivhälften geht auf einer vollkommenen, auf der Axe des Rohrs genau senkrechten Ebene vor sich und erstreckt sich bis auf 56 Minuten auf jeder Seite der Axe, so dass man einen übersehbaren Raum von $1^{\circ} 52'$ erhalten kann. Ich habe gefunden, dass die aus dem schiefen Durchgange der Lichtstrahlen durch die Objectivhälften entstehende Undeutlichkeit der Bilder selbst für die Grenze der Verschiebung noch nicht merklich ist; dieses ist wahr-

scheinlich eine Folge der Einrichtung des Objectivs, von welcher FRAUNHOFER mir mittheilte, dass sie so getroffen sei, dass die Abirrung für Strahlen ausser der Axe compensirt werde. Ein anderes Mittel, denselben Erfolg hervorzubringen, welches ich auch FRAUNHOFER vorschlug, wäre, die Verschiebung der Objectivhälften nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Cylinderoberfläche, deren Axe durch den Brennpunkt geht, zu bewirken; allein er zog die Ebene vor, weil die Einrichtung des Mechanismus der Verschiebung dadurch einfacher werde. — Der Positionskreis am Objectivende hat vier Nonien, welche die einzelnen Minuten unmittelbar angeben.

Das Ocular des Fernrohrs kann so wie das Objectiv und in derselben Ausdehnung verschoben werden; es kann gleichfalls um die Axe des Rohrs gedreht werden und hat einen eingetheilten Kreis, durch welchen die Drehung bis auf eine Minute angegeben wird. Zum gewöhnlichen Gebrauch sind fünf Oculare, welche 45, 91, 115, 179 und 290 Mal vergrössern, bestimmt. Ueberdies ist noch ein Kreismikrometer nach Fraunhofer'scher Art, welches 65 Mal vergrössert, vorhanden; endlich gehören zu dem Instrumente ein Ringmikrometer und ein Netzmikrometer, beide mit hellen Linien im dunkeln Sehelfelde und mit 66-, 92- und 165maliger Vergrösserung.

Die Bequemlichkeit der Anwendung dieses grossen und schweren Instruments ist, durch die Art seiner Aufstellung und das dabei angewandte Uhrwerk, bis zum höchsten Punkte getrieben; es ist wirklich so leicht auf einen Stern zu richten wie das kleinste Handfernrohr, und wenn derselbe im Sehelfelde ist, so übernimmt das Uhrwerk die Sorge, ihn darin zu erhalten. Obgleich ein Heliometer keines Uhrwerks bedarf, um den nachtheiligen Einfluss der täglichen Bewegung zu vermeiden, so trägt dasselbe doch zur Leichtigkeit des Gebrauchs bei: man bringt das zu beobachtende Gestirn durch die beiden Kreise, welche den Stundenwinkel und die Declination angeben, in das Sehelfeld und setzt das Uhrwerk in Bewegung; dann dreht man die Kuppel des Thurms und öffnet sie und macht nun die beabsichtigte Messung; um die Angaben der Schrauben und des Positionskreises abzulesen, steigt man nicht zu dem oft sehr hohen Objectiv hinauf, sondern man dreht das Fernrohr bei ununterbrochenem Gange des Uhrwerks um die Declinationsaxe, bis das Objectiv zum Beobachter herunterkömmt; nach vollendeter Ablesung reicht dann die alleinige Drehung um die Declinationsaxe hin, das Gestirn wieder in die Mitte des Sehelfeldes zu bringen, um die Beobachtung fortzusetzen. Der Zeitverlust, welchen der Mangel des Uhrwerks erzeugen würde,

würde höchst unangenehm sein. — Um das Instrument auch unabhängig von seinen beiden Kreisen auf einen Gegenstand richten zu können, hat es einen Sucher, welcher an einem das Rohr umgebenden, um dasselbe drehbaren Ringe befestigt ist, so dass seine Absehlenslinie stets der Axe des Rohrs parallel bleibt; diese Einrichtung ist nothwendig, weil die über das Rohr hervorstehende Vorrichtung am Objectiv den Gebrauch eines festen Suchers in vielen Fällen verhindern und weil derselbe auch den Schraubenschlüsseln im Wege stehen würde. Der Sucher hat 21 Linien Oeffnung und 21 Zoll Länge und ist ein verhältnissmässig mit diesen Maassen sehr schönes Fernrohr. Ueberhaupt muss ich zur Ehre des optischen Instituts in München anführen, dass auch an den minder wesentlichen Theilen des Instruments keine Mühe gespart ist, so dass dasselbe im Aeussern eben so schön, als im Innern vollendet ausgefallen ist. Von den wesentlichen Theilen verdient die Schieber- und Schraubenvorrichtung am Objectiv, welche mir ein Meisterstück von mechanischer Arbeit zu sein scheint, einer besonderen Erwähnung.

Für ein Instrument von der Grösse des Heliometers war in den vorhandenen Zimmern der Sternwarte kein Platz auszumitteln, welcher seine Anwendung nicht ungebührlich beschränkt hätte. Es musste also ein Gelas für dasselbe erbaut werden, und dieses geschah im Jahre 1829 unter der Leitung des Herrn Geheimen Regierungsraths MÜLLER, welcher früher die Sternwarte selbst erbaut hat. Es wurde für das Zweckmässigste erachtet, über dem nach Norden hervorstehenden Flügel der Sternwarte einen Thurm zu errichten, dessen Fussboden 40 Stufen über dem Fussboden der Sternwarte erhöht ist, wodurch das Fernrohr, dessen Mittelpunkt noch etwa 8 Fuss höher liegt, eine freie Aussicht über das Dach des Wohnhauses und damit ungehinderte Anwendung an allen Punkten des Himmels erlangte. Der Thurm wurde ganz von Holz erbaut; allein der ganze innere Raum des nördlichen Zimmers, über welchem er steht, wurde bis zu 5 Fuss Tiefe mit Mauerwerk ausgefüllt und dessen Oberfläche mit Platten von Sandstein belegt, wodurch den Schwellen, auf welchen die Tragbalken des Thurmes stehen, eine feste Unterlage gewährt wurde. Dieser Tragbalken sind sechs vorhanden, jeder aus drei einzelnen, durch eiserne Bolzen mit einander verbundenen Balken bestehend; sie gehen durch das Dach des Saals hindurch, sind an ihrem obern Ende wiederum äusserst fest mit einander verbunden und dienen nun dem Stuhle, worauf das Instrument steht, und welcher sehr zweckmässig und fest verbunden aus einem Balkenwerke zusammen-

gesetzt ist, zur Unterlage. Der Thurm hat 18 $\frac{1}{2}$ preuss. Fuss äussern und 17 Fuss innern Durchmesser und ragt mit dem höchsten Punkte seiner Kuppel 28 Fuss über das Dach der Sternwarte, 10 Fuss über das Dach des Wohnhauses und 44 Fuss über den Boden des Hügel, auf welchem die Sternwarte steht, hervor. Bei der Einrichtung desselben ist mehreres von dem früher in Dorpat erbauten Thurme entlehnt worden, namentlich dass nicht das Dach allein, sondern vereinigt mit einem Theile der senkrechten Wände gedreht wird; dass das Dach und die Wände mit Segeltuch bekleidet sind, um die Erwärmung des Innern durch die Sonnenstrahlen zu vermeiden; endlich die sinreiche Verbindung der durch den Durchschnitt erzeugten Lücke der Wand, welche durch einen sich um zwei Zapfen drehenden eisernen Rahmen hervorgebracht wird, so dass diese Verbindung nie ein Hinderniss der Anwendung des Instruments wird. Anderes dagegen ist der hiesigen Einrichtung eigenthümlich, und es wird nicht ohne einiges Interesse sein, dieses etwas näher zu beschreiben.

Die zwölf Rollen, auf welchen die Drehung der Kuppel vor sich geht, stehen auf dem festen Theile des Thurmes; unter dem Umfange des sich drehenden Theils ist ein ebener Ring von Gusseisen angebracht, welcher auf den Rollen liegt. Dieser Ring ist an seinem innern Rande gezähnt und kann daher, durch den Eingriff eines an einer senkrechten Drehungsaxe befestigten Triebrades, zugleich mit der Kuppel, welche auf ihm ruht, im Kreise herumbewegt werden; die senkrechte Axe hat am untern Ende ein Kamrad, welches vermittelt einer Kurbel gedreht wird. Durch diese Einrichtung erlangt man eine ununterbrochene Drehung der Kuppel, und zwar eine gleich leichte nach beiden Richtungen. Die Bewegung ist trotz der bedeutenden Schwere der Kuppel, welche einer directen Abwägung zufolge über 14000 Pfunde beträgt, so leicht, dass drittehalb Zeitminuten hinreichen, sie ohne lästige Kraftanstrengung ganz herum zu drehen. — Um der Bewegung möglichst grosse Leichtigkeit zu geben, sind die Axen der Rollen so dünn gemacht, als mit der Sicherheit bestehen konnte; es wurden Versuche darüber angestellt, welche ergaben, dass das mögliche Maximum der Belastung einer einzelnen Rolle, nämlich ein Drittel des Gewichts der Kuppel, von einer Axe von federhartem Stahl von 4 $\frac{1}{2}$ Linien Durchmesser getragen werden konnte. Diese Dicke wurde also den Axen gegeben, wie ich glaube mit voller Sicherheit, da sie in der Wirklichkeit weit weniger zu tragen haben, und unter den wirklich angefertigten zwölf Axen

keine einzige war, welche die angeführte Belastung nicht ohne die geringste Beschädigung getragen hätte. — Auch war die grösste Leichtigkeit der Bewegung nur dann zu erwarten, wenn die Rollen richtig konisch gearbeitet und so gestellt werden konnten, dass die Verlängerung ihrer Axen durch den Mittelpunkt des gezähnten Kreises ging; es wurde daher eine besondere Vorrichtung angewandt, ihnen die gehörige Richtung und Neigung gegen den Horizont mit Sicherheit zu geben. — Diese Massregeln, unterstützt von der Sorgfalt des Mechanikus Herrn STEINFURTH, welche sich in der Abschleifung der auf den Rollen liegenden Ebene des gezähnten Kreises, in der Abdrehung der Rollen und der Politur ihrer Axen, in der Ausführung des Triebwerks — kurz allenthalben gleich blieb, liessen allerdings erwarten, dass die Bewegung der Kuppel ohne vermeidlichen Kraftverlust zu bewirken sein werde; allein dennoch übertraf der Erfolg die Erwartung. Wenn man die Reibung dem sechsten Theile der Last gleich annimmt, so ergibt sich daraus eine Kraft an der Kurbel, welche zwischen 12 und 13 Pfund beträgt; ich kann die wirklich erforderliche Kraft nicht angeben, glaube aber nicht, dass sie grösser als halb so gross ist.

Das Dach der Drehkuppel ist ein Kugelsegment; es hat einen Einschnitt von 3 Fuss Breite, welcher nicht ganz durchgeht, sondern nur etwas über das Zenith hinausreicht. An den Rändern dieses Einschnitts, aussen auf dem Dache, liegen zwei eiserne Geleise, welche als parallele kleine Kreise auf der Dachoberfläche über die ganze Ausdehnung derselben fortgesetzt sind; auf ihnen bewegt sich durch sechs Rollen der den Einschnitt verschliessende Deckel, so dass er über das Zenith hinaus zurückgeschoben wird, wenn man die Kuppel öffnet. Da dieser Deckel wegen seiner Grösse ein starkes eisernes Gerippe erforderte, so hat er ein Gewicht von 450 Pfund erlangt, welches seiner Bewegung auf den eisernen Geleisen einige Schwierigkeit in den Weg legt; denn um ihn zu öffnen ist eine Kraft von mehr als einem Centner nöthig, welches sich, so wie er aufsteigt, vermindert, wenn er seinen höchsten Punkt erreicht hat verschwindet, und wenn er noch weiter geöffnet wird, in eine Kraft nach entgegengesetzter Richtung verwandelt, welche bis zu zwei Centnern anwächst; der Mechanismus zum Öffnen und Verschliessen des Deckels muss dieser grossen Veränderlichkeit der Kraft entgegenwirken. Wir haben, um dieses zu leisten, die Einrichtung getroffen, die Schnur an welcher man zieht, um das Öffnen oder Verschliessen zu bewirken, mit eisernen Kugeln zu belasten, welche bei der Be-

wegung des Deckels nach und nach von der einen Seite auf die andere übergehen; die Gewichte und Entfernungen dieser Kugeln sind so berechnet, dass sie in jeder Lage des Deckels völliges Gleichgewicht hervorbringen, so dass, um ihn zu bewegen, nur diejenige Kraft angewandt werden darf, welche nothwendig ist, um die Reibung zu überwinden.

Die Einrichtung des Deckels und Anderes in der Construction des Thurmes wurde mit vorzüglicher Rücksicht auf den festen und sichern Verschluss des Innern vor Schnee und Regen gemacht. Dieses ist völlig gelungen: in dem letzten Winter, welcher selbst für unser Klima reich an Schneestürmen war, ist weder eine Flocke Schnee, noch ein Tropfen Regen bis zum Instrumente durchgedrungen. — Man sieht hieraus, dass ich nicht nur die zweckmässige Anlage, sondern auch die sorgfältige Ausführung des beschriebenen Baues zu loben Ursache habe.

Von den Leistungen des Heliometers kann ich Einiges anführen, was zu einer genaueren Kenntniss desselben führen wird, als die eben gegebene Uebersicht seines Aeusseren und des Orts wo es steht.

Das was schon einige Tage nach seiner Aufstellung mir davon bekannt wurde, ist die Genauigkeit, mit welcher die beiden Kreise des Instruments den Punkt der Himmelskugel angeben, welcher von der Absehslinie getroffen wird. Nach einer näherungsweise Berichtigung des Instruments beobachtete ich Sterne in den verschiedensten Stundenwinkeln und Höhen, in der Absicht, aus den Unterschieden der wahren und der durch die beiden Kreise angegebenen Oerter derselben die noch anzubringenden weiteren Berichtigungen zu erkennen. Hierbei ergab sich eine Uebereinstimmung beider, welche allenthalben in den Grenzen der möglichen Ablesungsfehler der Kreise lag; ein einziges Mal stieg der Fehler des Stundenwinkels auf 2⁵, der Fehler der Declination auf 38'. Obgleich mit den Kreisen des Instruments nichts gemessen werden soll, sondern sie nur zur Richtung desselben dienen, also auch kleine Abweichungen der Angaben der Kreise von dem wahren Orte der Absehslinie nicht von wesentlicher Bedeutung wären, so war es doch angenehm, durch directe Versuche bestätigt zu sehen, dass die einzelnen Theile der Einrichtung die gehörige Stärke besitzen, um durch die grossen Massen, welche sie zu tragen haben, keine merklichen Biegungen zu erleiden. — Die Anfangs in Ordnung gebrachte Aufstellung des Instruments hat sich, obgleich es auf Holz steht, so gut gehalten, dass ich keine Aenderung daran haben machen dürfen; Schwankungen von einigen Secunden, von einer

Tages- und Jahreszeit zur ändern, werden ohne Zweifel stattgefunden haben, allein es sind weder die Mittel, kleine Abweichungen zu erkennen, am Instrumente selbst vorhanden, noch würde dieses Kenntniss ein Interesse haben. Wesentlich ist, dass Aenderungen der Aufstellung, von einer Grösse, welche auf den Positionswinkel zweier Sterne einen in der Beobachtung desselben bemerkbaren Einfluss erzielte, nicht unerkannt bleiben; so grosse Abweichungen würde man aber schon dadurch bemerken, dass das mittelst seiner Kreise auf einen Stern gerichtete Instrument denselben beträchtlich ausser seiner Absebenslinie zeigte.

Die optische Güte des Heliometers war mir früher als das Instrument hier ankam bekannt, denn Herr von STEINHEIL hatte, als er dasselbe in München versuchte, an zwei Abenden ausserordentlich schöne Luft, und füllte von der Reinheit der Bilder, welche es zeigte, das allergünstigste Urtheil. Ohne diesen Ausspruch eines zuverlässigen Kenners würde ich mich lange Zeit mit der Ueberzeugung haben begnügen müssen, dass ein von FRAUNHOFER für ein solches Instrument verfertigtes Objectiv nicht mangelhaft sein könne; denn der Himmel war hier im vorigen Herbst und Winter so unglücklich, dass ich ihm kaum einen Augenblick, wo die Luft ruhig gewesen wäre, abgewinnen konnte. Nur einmal sah ich den Saturn ruhig und schön; allein es war eine Störung vorhanden, welche das Aufsuchen anderer Objecte, namentlich feiner Doppelsterne, verhinderte, und als sie beseitigt war, war der Himmel bewölkt. Dieselbe Unruhe der Luft blieb auch während des Frühjahrs, so dass ich erst im Sommer, und zwar am Tage, einige Mal habe versuchen können, nach feinen Doppelsternen auszugehen. Ganz neuerlich, Anfangs September, haben auch die Nächte ruhige Stunden geliefert, allein das gegenwärtige ausserordentlich schlechte Jahr unterliess nie, sie mit bewölkten rasch abwechseln zu lassen. — Ich habe diese Einzelheiten hier erwähnt, weil sie die Ursachen sind, weshalb ich noch nicht genau angeben kann, bis zu welcher Grenze der Entfernung herab das Instrument Doppelsterne erkennen lässt. Der Stern ζ Bootis, dessen Entfernung ich = $1\frac{1}{2}$ gefunden habe und der daher zu den feineren Objecten dieser Art gehört, erscheint aus zwei gleichen, vollkommen rund begrenzten und mit ihren Rändern um $\frac{2}{3}$ Durchmesser getrennten Scheiben zusammengesetzt, woraus hervorgeht, dass das Instrument Sterne von dieser Helligkeit $0\frac{7}{2}$ gross darstellt. Der Doppelstern Nr. 2744 des grossen Struve'schen Catalogs, der *pervicinae* bezeichnet wird, erschien (bei Nacht) weiter getrennt als ζ Bootis, so dass ich ihn auch für

weniger fein halte als diesen Stern und für nicht feiner als γ Virginis, dessen Entfernung bekanntlich jetzt schnell abnimmt, so dass sie, meinen Messungen zufolge, auf $1\frac{1}{55}$ herabgekommen ist; und da sie in wenigen Jahren ganz verschwinden wird, ein willkommenes Mittel verheisst, die Leistungen der Fernröhre mit einander zu vergleichen.

Diese Anführungen werden Kennern andeuten, welchen Anblick der Gegenstände das Fernrohr gewährt. Ueber seine Lichtstärke führe ich an, dass ich keine Schwierigkeit gefunden habe, die Sterne δ Grösse in den Plejaden selbst am Mittage im Junius mit einer Objectivhälfte zu beobachten; dieser Erfolg war aber zu erwarten, da man weiss, dass dieselben Sterne mit dem Fernrohr des Meridiankreises, dessen Objectiv eine kleinere Oberfläche hat als jede Hälfte des Heliometerobjectivs, unter ähnlichen Umständen sichtbar sind.

Trotz dieser dem Instrumente, als blosses Scheininstrument betrachtet, sehr vortheilhaften Leistungen, ist aber nicht zu leugnen, dass ein Fernrohr mit nicht durchschnittenem Objective vor einem mit durchschnittenem einen Vortheil voraus habe: wenn das Sehen der Hauptzweck ist, so muss das erstere vorgezogen werden; wenn das Messen, so muss untersucht werden, ob das was am Sehen verloren wird, der vollständigen Erreichung dieses Zweckes im Wege steht. Ich werde den Unterschied beider näher angeben, damit man ein Urtheil fällen könne. Es scheint als ob beide Objectivhälften, wenn man sie so stellt, dass ihre Axen zusammenfallen, so dass sie ein einziges Bild zeigen, einem nicht durchschnittenen Objective gleich sein sollten: dieses ist aber nicht der Fall, denn Wallungen in der Luft bringen momentane Trennungen beider vereinigten Bilder hervor, wogegen bei einem nicht durchschnittenen Objective eine ähnliche Wirkung unruhiger Luft nie vorkommt. Diese bis jetzt nicht erklärte Erscheinung ist nicht etwa dem hiesigen Heliometer allein eigenthümlich, sondern sie scheint diesen Instrumenten allgemein zu sein; ich verdanke die erste Nachricht davon den Mittheilungen der Herren Hofrath GAUSS und Director HANSEN, welche sie an Fraunhofer'schen Heliometern von 34 Linien Oeffnung bemerkt haben; sie hat zur Folge, dass man bei unruhiger Luft mit dem Heliometer weniger gut sieht als mit einem andern Fernrohre. Als eine andere durch das Durchschneiden hervorgebrachte Wirkung betrachte ich, dass, wenn die Axen beider Hälften zusammenfallen, in der durch den Mittelpunkt des runden Bildes eines Fixsterns senkrecht auf die Durchschnittslinie gehenden Richtung zu beiden Seiten des Bildes etwas zerstreutes

Licht erscheint, welches für hellere Sterne merklicher ist als für weniger helle und wahrscheinlich von einer Inflexion der Lichtstrahlen an den Rändern des Durchschnitts herrührt; ich habe übrigens durch Anwendung einer besonderen Einrichtung gefunden, dass sowohl die äusseren als die inneren Oberflächen beider Hilfen (so gestellt, dass die beiden Bilder sich decken) in ununterbrochenen Kugeloberflächen liegen. Die dritte Wirkung des Durchschneidens zeigt sich, wenn man die Axen der Hilfen etwas von einander entfernt; die beiden Bilder, welche man dadurch erhält, erscheinen nämlich nicht mehr vollkommen rund, sondern in der auf den Durchschnitt senkrechten Richtung etwas verlängert.*) Dieses ist bei ruhiger Luft mit starken Vergrößerungen bemerkbar und wohl grösstentheils eine Folge davon, dass jede Hälfte eines ganzen Objectivs, welches so construirt ist, dass es alle Aberrationen compensirt, für sich allein nicht völlig compensiren kann; die Inflexion des Lichts an den Rändern des Durchschnitts ist aber wahrscheinlich Mitursache. — Der Einfluss der ersten Eigenthümlichkeit des Heliometers, welche sich ebensowohl zeigt wenn beide Bilder nebeneinander liegen, als wenn sie zur Deckung gebracht werden, ist der allgemeine, nämlich, dass Messungen bei unruhiger Luft nicht so gut gerathen als bei ruhiger; dass aber die Bewegungen der beiden Bilder gegen einander grösser sein sollten als die Bewegung eines einzelnen Bildes gegen das Fadenmikrometer eines andern Fernrohrs, ist weder wahrscheinlich noch meiner Erfahrung gemäss, welche im Gegentheil einen Vortheil auf Seiten des Heliometers zu ergeben scheint. Die zweite Eigenthümlichkeit ist offenbar von keinem Einflusse auf das Messen; die dritte kann, indem sie die Figur der Sterne parallel mit dem Durchschnitte nicht ändert, auf ihre Entfernung gleichfalls keinen Einfluss erlangen, wohl aber würde sie auf den Positionswinkel einen kleinen Zweifel werfen können, wenn man nicht, auch aus andern Gründen, die Regel befolgte, ihn auf beiden Seiten des Vereinigungspunktes der Bilder zu beobachten; geschieht dieses, so wird jeder Zweifel gehoben.

Welche Grenze von Genauigkeit sich mit dem Heliometer erlangen lässt, ist grösstentheils von der grössern oder geringern Ruhe der Luft abhängig; das Messen selbst ist nämlich immer sehr genau, allein wenn die zu messenden Gegenstände aus irgend einem Grunde nicht gehörig gesehen werden können, so wird

ihm dadurch entgegen gewirkt. Ich werde einige Beispiele anführen.

Doppelsterne beobachte ich so, dass ich die vier Sterne, welche im Fernrohr sichtbar werden, wenn man eine Objectivhälfte verschiebt, in gerade Linie und in gleiche Entfernungen bringe, und dieses durch eine Verschiebung nach der entgegengesetzten Richtung wiederhole. Die Bewegung der verschobenen Objectivhälfte misst dann die vierfache Entfernung der Sterne; das Mittel aus beiden Ablesungen am Positionskreise ist der Positionswinkel. Dieses ergibt eine vollständige Beobachtung, denn nur durch die Wiederholung der Operation auf entgegengesetzten Seiten kann man das Resultat von Zweifeln befreien. Dergleichen vollständige Beobachtungen habe ich gewöhnlich dadurch mehrere Male wiederholt, dass ich beide Objectivhälften abwechselnd verschoben habe; eigentliche Repetitionen, d. i. solche, zwischen welchen man nicht abläse, habe ich nie gemacht. Um näher anzudeuten, wie diese Beobachtungsart zu gelingen pflegt, führe ich meine sämtlichen bisherigen Beobachtungen von α Herculis so an, wie sie vom Instrumente abgelesen worden sind. Sie sind sämtlich bei günstiger, oder wenigstens nicht bei so ungünstiger Luft gemacht, dass ich sie für weniger genau halten könnte, als ähnliche Beobachtungen im Mittel ausfallen werden.

Juni 28.		August 31.	
Objectivhälfte I.	Positionswinkel II.	Objectivhälfte I.	Positionswinkel II.
60 ⁿ 000	59 ⁿ 733 60,101	60 ⁿ 000	59 ⁿ 727 60,106
60,3695	119 7	60,383	60,483
60,737	117 59	60,769	60,587
61,107	60,841	61,135	61,328
	61,210		
September 2.		September 4.	
60,010	59,735 60,106	60,303	60,031 60,400
60,380	116,23	60,678	119,22
	60,475		60,774
60,755	118,47	61,053	119,38
	60,852		61,162
61,133	119,21	61,433	118,59
	61,231		61,527
61,511	119,50		
	61,607		

Den Positionswinkel zähle ich stets so, dass er = 0 ist, wenn der zu bestimmende Stern im Decl.

*) [Vgl. die Abb. über ρ Ophiuchi unter Stellarastronomie.]

nationskreise des zum Grunde gelegten und zwar nördlich von demselben steht; er wähest von O an durch Osten, Süden, Westen bis 360°; — diese Art der Bezeichnung scheint mir bequemer zu sein als die übliche Die wahrscheinlichste Entfernung und der Positionswinkel folgen hieraus:

Juni 28. 0 ^h 09231 = 4 ^m 88	P = 118° 48'
Aug. 31. 0,09414 = 4,98	— —
Sept. 2. 0,09374 = 4,96	118 30
4. 0,09377 = 4,96	119 28

Hiermit findet sich die vortheilhafteste Darstellung der einzelnen Ablesungen bis auf

— 0 ^h 0008	+ 0 ^h 0001	— 0 ^h 0047	— 0 ^h 0044
— 0,0004	+ 0,0009	— 0,0021	+ 0,0011
+ 0,0004	— 0,0024	— 0,0007	+ 0,0017
— 0,0007	+ 0,0005	+ 0,0029	+ 0,0012
+ 0,0026	— 0,0028	+ 0,0052	+ 0,0028
+ 0,0010	— 0,0090	+ 0,0028	+ 0,0013
— 0,0012	— 0,0002	+ 0,0031	— 0,0001
+ 0,0002	+ 0,0016	— 0,0003	— 0,0036
— 0,0010	+ 0,0053	— 0,0009	0,0000
		— 0,0033	
		— 0,0020	

welche Zahlen man in Secunden verwandeln kann, indem man sie mit dem Werthe einer Revolution der Schrauben = 52^h91788 multiplicirt. Der mittlere Fehler einer Einstellung auf die doppelte Distanz findet sich hieraus = 0^h00355 = 0^m19, der mittlere Fehler einer aus einer vollständigen Beobachtung gefolgerten einfachen Distanz = 0^m07. Es versteht sich übrigens, dass diese mittleren Fehler, wenn man sie zur Grundlage eines Urtheils über die mit dem Heliometer erreichbare Genauigkeit machen wollte, aus weit zahlreicheren Beobachtungen abgeleitet werden müssten; indessen habe ich das Beispiel so gewählt, dass es weder zu den vortheilhaftesten noch zu den unvortheilhaftesten, welche ich hätte anführen können, gehört.

Ein anderes Beispiel kann ich von Messungen des Ringes und der Aequatoreal- und Polardurchmesser des Saturns hernehmen, welche ich im vorigen Winter gemacht habe. Dieses Beispiel gehört, weil der sehr kalte Winter nur besonders ungünstige Luft geliefert hat, zu den ungünstigen; auch beruht jede Angabe nur auf einer, nicht wiederholten Beobachtung. Dennoch ist die Schärfe, womit man beurtheilen kann, ob die Ränder beider Bilder sich berühren, vermuthlich die Ursache, weshalb die Beobachtungen meistens besser übereinstimmen, als ich unter diesen Umständen erwartete; die folgende Zusammenstellung derselben enthält die auf die mittlere Entfernung des Planeten reducirten Messungen:

		Ring.	Aequatordurchm.	Polardurchm.
1829. Dec. 11.	38 ^m 91	—	—	—
" 21.	39,32	17 ^m 31	15,77	15,95
1830. Jan. 12.	38,92	—	—	—
" 21.	39,31	16,76	15,80	15,70
" 25.	39,11	16,82	16,00	15,88
" 26.	39,57	16,97	16,00	15,88
		39,45	—	—
Febr. 1.	39,30	17,07	15,67	15,85
" 6.	39,03	16,89	15,85	15,88
" 9.	39,35	16,76	15,88	15,88
		39,26	—	—
" 14.	39,14	—	15,50	15,75
" 15.	39,47	16,93	15,75	15,87
" 16.	39,29	17,06	15,87	15,87
März 1.	39,32	17,01	15,87	15,87
		39,40	—	—
" 3.	39,33	16,89	15,85	15,85
		39,28	—	—
" 10.	39,62	17,13	15,77	15,76
" 14.	39,49	17,18	15,76	15,81
" 15.	39,40	17,13	15,81	15,78
" 16.	39,20	17,13	15,78	15,63
" 17.	39,41	17,06	15,63	15,63
April 13.	39,30	17,22	—	—
" 18.	39,41	—	—	—
" 19.	39,43	16,94	15,66	15,66
" 21.	39,25	16,95	15,69	15,69

Der mittlere Fehler einer Messung findet sich hieraus = 0^m15, vermuthlich eher zu gross als zu klein, wegen der angeführten Umstände. Die arithmetischen Mittel sind:

Ringdurchmesser	39 ^m 3125	28 Beob.
Aequatorealdurchmesser	17,0055	20 "
Polardurchmesser	15,7724	21 "

Die Polaraxe ist aber noch etwas kleiner, weil der sichtbare Durchmesser nicht die Axe selbst war. Das Dorpater Fernrohr hat die beiden ersten Durchmesser (Astr. Nachr. 139) 0^m78 und 0^m98 grösser ergeben; ich habe demzufolge versucht, die beiden Hälften des Objectivs eine Secunde über die von mir gefundenen Grössen hinaus zu entfernen, allein der Zwischenraum, der dadurch zwischen den Rändern der beiden Bilder entstand, erschien so gross, dass kein Zweifel darüber blieb, dass mit dem Heliometer nicht so gross gemessen werden könne, als geschehen müsste, um zwischen ihm und dem Dorpater Fernrohr Uebereinstimmung hervorzubringen. Ich erinnere bei dieser Gelegenheit, dass alle optischen Instrumente den Fixsternen Durchmesser geben, welche dieselben gewiss nicht haben, und dass hieraus wahrscheinlich wird, dass dieselbe

*) Diese Beobachtung ist von Herrn Professor Eschke gemacht, welcher mich mit einem Besuche beehrte.

Ursache, welche diese falschen Durchmesser erzeugt, auch die Durchmesser der Planeten vergrößert: man müsse dann nicht den wahren Durchmesser, sondern die Summe desselben und seiner falschen Vergrößerung, und es könnte erklärt werden, warum verschiedene Instrumente verschiedene Grössen angäben.

Diese Beispiele mögen hinreichen zu zeigen, was das Heliometer etwa leistet, wenn die zu messenden Winkel sehr klein sind. Indessen scheint es mir noch mehr Interesse zu haben, Proben von seiner Anwendung auf solche Beobachtungen zu geben, welche weiter von einander entfernte Gegenstände betreffen und daher entweder ausschliesslich oder doch mit besonderem Vortheile mit einem Heliometer gemacht werden können. Ich könnte eine zahlreiche Reihe von Entfernungen und Positionswinkeln des hellsten Saturnstrabanten anführen, allein zur Erkenntniss der Leistungen des Instruments würde sie noch nicht beitragen, indem die Beurtheilung ihrer Uebereinstimmung unter einander nicht eher möglich ist, als bis die Elemente der Bahn danach bestimmt sein werden, was noch nicht geschehen ist, weil noch nicht alles zur Reduction Gehörige genügend bekannt ist. Ich kann daher hier nur angeben, inwiefern das Heliometer die zu einer Untersuchung der Bahn des Trabanten nöthigen Beobachtungen zu liefern geeignet und wie es dazu angewandt worden ist.

Die Lichtstärke des Instruments ist zwar völlig hinreichend, den Trabanten sehr hell zu zeigen, allein da dieselbe Lichtstärke auch dem Planeten einen sehr hellen Glanz gibt, so hat sie nicht zur Folge, dass man das Bild des Trabanten an den Rand des Planeten bringen könnte, ohne dass es durch dessen Nähe bedeutend geschwächt würde; man muss daher, um den Trabanten genau beobachten zu können, das Licht des Planeten schwächen. Dieses geschieht durch Bedeckung der einen Objectivhälfte; die Art, wie ich dieses ausgeführt habe, werde ich bei einer andern Gelegenheit beschreiben;*) der Erfolg davon ist, dass man den Trabanten mit dem hinreichend verdunkelten Rande des Planeten oder seines Ringes in Berührung bringen kann, so dass er als ein kleines helles Scheibchen von diesem bissectirt wird und nun, wenn die Luft nicht ungünstig ist, sehr genau mit dem Planeten verglichen werden kann. — Ich habe stets die Entfernungen des Trabanten von den Scheitelpunkten der Ringellipse und seine Positionswinkel gegen diese Punkte beobachtet; oft auch dasselbe mit der Veränderung wiederholt, dass ich die beiden in der grossen Axe der Ringellipse liegenden Punkte des Saturnsrandes zur Vergleichung

*) [Vgl. die folgende Abb. 71, § 23.]

wählte. Durch diese Beziehung der Beobachtung auf zwei Punkte, welche auf einer durch den Mittelpunkt des Planeten gehenden geraden Linie liegen und von demselben gleich entfernt sind, erhält man den Unterschied der geraden Aufsteigung und Abweichung des Trabanten und des Planeten, ohne die Entfernung jener Punkte kennen zu dürfen; hieraus erwächst der Vortheil, dass, wenn die Luft auch nicht günstig genug ist, um den Trabanten als einen hellen Punkt und den Rand scharf begrenzt erscheinen zu lassen, dennoch die Beobachtung gemacht werden kann, indem man das Bild des Trabanten, welches unter diesen Umständen sich mit der Undeutlichkeit des Randes vermischen würde, nur in die Nähe desselben, in unbekannt, aber auf beiden Seiten gleiche Entfernungen bringt. — Da der Ort des Trabanten, bezogen auf den Mittelpunkt des Planeten, durch das Heliometer vollständig und in allen Punkten seiner scheinbaren Bahn mit gleicher Sicherheit angegeben wird, so lässt die Anwendung desselben für die Bestimmung sowohl der Elemente der Bahn, als auch der mittleren Entfernung, nichts zu wünschen übrig. Die Sicherheit, womit beides erlangt werden wird, muss, nach der Genauigkeit des Instruments zu urtheilen, sehr gross sein, denn ich glaube, dass der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung nicht ein Tausendstel des Halbmessers der Bahn betragen wird. — Die Ungunst der Witterung während der ganzen Zeit der letzten Sichtbarkeit des Saturns ist die Ursache, weshalb ich noch nicht bestimmt angeben kann, was sich durch das Heliometer für die Bewegung des äussersten Trabanten wird leisten lassen.)*

Die Proben von den Leistungen des Heliometers bei der Messung grösserer Winkel, welche ich von den Saturnstrabanten-Beobachtungen noch nicht anführen konnte, kann ich indessen von einigen Messungen der Hauptsterne der Plejaden hernehmen. Hier sind die Entfernungen so gross, dass jedes andere Mikrometer seine Dienste versagt. Bald nach der Aufstellung des Heliometers fing ich diese Beobachtungen an, theils in der Absicht, einen möglichst genauen Catalog der Plejaden dadurch zu erhalten, welcher die eigenen Bewegungen der Sterne gegen einander unseren Nachkommen früher zeigen sollte, als die auf Meridianbeobachtungen gegründeten Verzeichnisse es können; theils um durch die Vergleichung in der niedrigen Temperatur des Winters gemessener Entfernungen einiger Sterne mit später bei hoher Sommertemperatur wiederholt zu messenden, den Einfluss der Wärme auf den Werth der Schraubenrevolutionen zu erkennen. Dieser

*) [Vgl. die Abbb. 18, 19, 20 im I. Band.]

letzten Absicht ist zwar durch das ungewöhnlich schlechte Wetter, welches dieses Jahr auszeichnet, stark entgegen gewirkt worden, so dass ich das definitive Resultat noch nicht kenne; allein demohingachtet werden die folgenden Beobachtungen einiger Sterne den Zweck, weshalb ich sie hier anführe, erfüllen. Es sind Entfernungen von η Plejadum und Positionswinkel auf diesen Stern bezogen; beide sind schon von dem Einflusse der Strahlenbrechung befreit.

 δ Plejadum.

	Entfernung.	Positionswinkel.	Entfernung 1850.	Posit.-W. 1850.	Temperatur.
Dec. 13.	40 ^h 5161	270°29'	40 ^h 5143	270°27'	19° F.
" 21.	4986	5,3	4964	5,1	10
Jan. 12.	5056	3,6	5021	3,4	11
Juni 25.	5152	—	5176	—	64
" 25.	5147	—	5170	—	64
" 27.	5184	—	5208	—	65
" 29.	5206	0,8	5231	0,7	70

 e Plejadum.

Nov. 26.	43,0366	304 7,8	43,0362	304 7,6	12° F.
Dec. 3.	0391	6,4	0382	6,2	3
" 8.	0398	6,3	0385	6,1	14
" 17.	0361	10,0	0342	9,8	14
Jan. 12.	0226	10,7	0192	10,5	11
" 20.	0456	11,1	0419	10,9	15
Juli 1.	0552	7,1	0578	7,0	70

 c Plejadum.

Nov. 26.	31,3080	303 58,8	31,3075	303 58,6	12° F.
Dec. 3.	3155	56,7	3147	56,5	3
" 8.	3075	57,0	3065	56,8	14
" 17.	3172	62,8	3158	62,6	14
Jan. 12.	3077	61,9	3061	61,7	11
" 20.	3098	61,9	3070	61,7	16
Juli 1.	3219	58,5	3239	58,4	70

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass der Werth einer Schraubenrevolution sich mit zunehmender Wärme vermindert, oder dass die Verlängerung der Brennweite des Fernrohrs durch die Wärme grösser ist als die der Schrauben; die Einwirkung ist aber so gering, dass sie bei den meisten Messungen vernachlässigt werden kann. Sucht man den Factor, mit welchem man die bei der Angabe t des Fahrenheit'schen Thermometers gemessenen Entfernungen multipliciren muss, um sie mit dem Werthe jeder Schraubenrevolution $= 52^{\circ}91788$, welchen ich bei der Temperatur $49^{\circ}2$ gefunden habe, vergleichbar zu machen, so findet man ihn aus diesen Beobachtungen

$$= 1 - (t - 49^{\circ}2) 0,00000849,$$

oder der Werth einer Schraubenrevolution bei der Temperatur t° Fahr. ist:

$$R = 52^{\circ}91788 - (t - 49^{\circ}2) 0,0004493.$$

Hiermit findet man die Lage der drei Sterne gegen η Plejadum im Mittel aus den angeführten Beobachtungen:

b Plejadum	... 35° 43,95	... 270° 30'
e " "	... 37 58,05	... 304 8,3
c " "	... 27 37,35	... 303 59,5

und die übrigbleibenden Unterschiede der einzelnen:

b Plejadum.		e Plejadum.		c Plejadum.	
Entferng.	Winkel.	Entferng.	Winkel.	Entferng.	Winkel.
+0,52	-0,3	+0,95	-0,7	-0,10	-0,9
-0,32	+2,1	+0,33	-2,1	+0,41	-3,0
+0,02	+0,4	+0,14	-2,2	-0,18	-2,7
-0,12	—	-0,09	+1,5	+0,31	+3,1
-0,16	—	-0,83	+2,2	-0,21	+2,2
+0,03	—	+0,30	+2,6	-0,17	+2,2
+0,06	-2,3	+0,08	-1,3	-0,05	-1,1

Diese Unterschiede werden, obgleich sie hier nur bei einer geringen Zahl von Beobachtungen dargelegt sind, ein ziemlich richtiges Bild von dem Verhalten des Heliometers bei der Messung grösserer Entfernungen geben. Jede der hier angeführten Beobachtungen ist eine einzelne, auf zwei Einstellungen zu beiden Seiten des Coincidenzpunktes der beiden Objectivhälften beruhende. So grosse Abweichungen wie bei der fünften Beobachtung von e Plejadum sind äusserst selten und gehen sicher nicht aus dem Instrumente, sondern aus irgend einer zufälligen Ursache hervor: wenn nicht die Ablesung versehen oder verschrieben ist, so muss das oft sehr heftige Zittern der Sterne ihre Ursache sein, wirklich war dieses bei den Winterbeobachtungen der Plejaden meistens so gross, dass ich den Erfolg, wie er in der gegebenen Zusammenstellung sichtbar wird; nicht erwartet hätte. Man wird indessen bemerken, dass die Positionswinkel weniger gut übereinstimmen als die Entfernungen. Ich vermute aber, dass eine später vorgenommene Veränderung am Instrumente in der Folge einen günstigeren Erfolg herbeiführen wird; wenigstens ist aus den bisherigen Erfahrungen wahrscheinlich geworden, dass die Ursachen, welche Abweichungen der Positionswinkel erzeugen, auf mehrere aufeinander folgende Beobachtungen gemeinschaftlich wirken und keineswegs in den zufälligen Fehlern des Einstellens und Ablesens zu suchen sind; man sieht dieses auch aus den angeführten Beobachtungen e und c Plejadum, welche immer an denselben Tagen gemacht sind und welche in den Unterschieden der Positionswinkel beider Sterne weit kleinere Abweichungen zeigen, als in dem Positionswinkel jedes Sterns selbst. —

Ich würde wohl schon im Stande sein, von dem Erfolge der auf die Verbesserung der Beobachtungen der Positionswinkel abzweckenden Versuche etwas sagen zu können, wenn nicht die schon mehrere Male erwähnte ausserordentlich schlechte Witterung dieses Jahres sich fortgesetzten Prüfungen auf das Hartnäckigste widersetze.

Die letzte Probe, welche ich hier von den Leistungen des Heliometers anführen werde, sind die Beobachtungen des am 21. April 1830 von Herrn GAMBART entdeckten Cometen, von welchem ich am 8. Mai durch die Güte des Entdeckers selbst die Anzeige empfang. Der Comet fand sich am Abend dieses Tages sogleich und ich konnte einige Beobachtungen desselben zu Stande bringen, obgleich die dunstige Luft und der an diesem Tage noch stattfindende Mangel einer für diesen Fall geeigneten Bedeckung des Objectivs mir wenig Zutrauen zu denselben einflößten. Nachher habe ich den Cometen, so oft die Witterung es erlaubte, bis zum 28. Juni beobachtet. Um diese Zeit vereinigte die helle Dämmerung der hiesigen Sommernächte sich mit der Abnahme der Lichtstärke des Cometen so sehr, dass ein so kräftiges Instrument wie das hiesige nöthig war, um ihn mit dem Lichte der einen Objectivhälfte und in Berührung mit einem Fixstern zu zeigen; indessen würde ich ihn noch beträchtlich später haben beobachten können, wenn nicht eine Reise, welche mich von der Sternwarte bis zum 21. August entfernte, und nach meiner Rückkehr das schlechte Wetter, welches mir nur ein Mal erlaubte, den Cometen wenige Minuten lang zu sehen, es verhindert hätten.

[Es folgen die Einzelmessungen (je 4 bis 10) von 21 Tagen (Mai 8 bis Juni 28).]

Aus diesen Beobachtungen, mit Ausschluss der unsicheren vom 14. Juni, ergibt sich der mittlere Fehler einer einzelnen Messung der Entfernung dieses Cometen von einem Sterne, oder auch die mittlere Unsicherheit des durch den Positionswinkel angegebenen Orts = $\pm 1,45$; für eine vollständige Beobachtung der geraden Aufsteigung oder Abweichung beträgt der mittlere Fehler $\pm 1,02$ und für eine 2, 4 und 5 Mal wiederholte resp. $\pm 0,72$, $\pm 0,51$, $\pm 0,46$. Hiernach kann man den mittlern Fehler des aus den Beobachtungen jedes Tages gezogenen Mittels schätzen. — Die Sicherheit der Beobachtungen ist grösser, als man sie durch andere Mittel erlangen kann; sie übertrifft die Sicherheit, womit die Oerter der kleinen Sterne sowohl durch die hiesigen Zonenbeobachtungen als auch durch die Histoire céleste gegeben werden, so weit, dass diese

Angaben der Reduction der Heliometerbeobachtungen nicht zum Grunde gelegt werden können, ohne dieselben gänzlich zu verderben. Aus diesem Grunde können die Oerter des Cometen selbst nicht eher angegeben werden, als bis eine neue, sehr genaue Bestimmung sämtlicher verglichenen Sterne vollendet sein wird; diese wird zum Theil hier gemacht, zum Theil haben Herr Etatsrath SCHUMACHER und Herr Collegienrath STAUVE die Hülfe ihrer Sternwarten gütigst zugesagt. Sobald ich die Oerter der Sterne kennen werde, werde ich die geraden Aufsteigungen und Abweichungen des Cometen bekannt machen und bei dieser Gelegenheit die etwaigen Verbesserungen angeben, welche die angeführten Zahlen durch kleine Aenderungen der Reductionselemente noch erfahren können.*) — Dieser Comet zeichnete sich durch so starke Verdichtung seines Nebels um seine Mitte aus, dass er, mit schwachen Vergrößerungen gesehen, einen Kern zu besitzen schien, welcher aber verschwand, wenn man stärkere Vergrößerungen anwandte; die Beobachtungen sind theils mit 115-, theils mit 179maliger Vergrößerung gemacht. Die Bestimmtheit, womit man den Mittelpunkt des Cometen unterscheiden konnte, ist der Genauigkeit der Messungen sehr förderlich gewesen; — könnte man Beobachtungen von gleicher Genauigkeit von allen Cometen erhalten, so würde man ihre Bahnen mit einer Genauigkeit bestimmen können, welche die bisher erreichbare weit übertreffen würde; allein Cometen, deren Mittelpunkt weniger deutlich ist, werden, auch mit dem Heliometer, weniger genau beobachtet werden können. Immer aber wird dieses Instrument die Oerter der Cometen eben so genau angeben, als man den Mittelpunkt des Nebels erkennen kann; denn die aus dem Messapparate hervorgehenden Fehler kommen hier wegen ihrer aus den angeführten Fixsternbeobachtungen hervorgehenden Kleinheit nicht in Betracht; — die Lichtstärke des Instruments und die Entbehrlichkeit der Beleuchtung dagegen werden zur Folge haben, dass man den Mittelpunkt so gut wie möglich unterscheide.

Aus dem, was ich in dieser vorläufigen Nachricht angeführt habe, werden die Astronomen ersehen, dass die Königsberger Sternwarte gegenwärtig im Stande ist, Bestimmungen zu liefern, welche geeignet sind, noch vorhandene Lücken auszufüllen. Ich kann dieses nicht zu ihrer Kenntnis bringen, ohne das Glück zu preisen, einem Staate anzugehören, welcher keine Opfer scheut, wenn den Wissenschaften dadurch neue Hilfsmittel verheissen werden.

*) [Vgl. Astr. Nachr. 9, 165 (253 d. a. Verz.).]

69. Ueber ein Mittel zur Bestimmung der Brennweite des Objectivglases eines Fernrohrs.*)

(Astr. Nachr. 17, p. 289.)

Die Erfindung des Werthes einer Windung der Mikrometerschraube eines zum Winkel messen bestimmten Fernrohrs hat immer eine beträchtliche Schwierigkeit, wenn so grosse Genauigkeit davon gefordert wird, dass selbst bei den grössten, mit dem Instrumente messbaren Winkeln nichts zu wünschen übrig bleiben soll. Diese Schwierigkeit entsteht nicht aus Unvollkommenheiten der mikrometrischen Messungen, sondern aus der schwer zu beseitigenden Unzulänglichkeit der Mittel, durch welche man anderweitig zur Kenntniss von Winkeln gelangen kann, aus deren Vergleichung mit ihrer mikrometrischen Messung der gesuchte Werth hervorgehen muss. Ich habe diese Schwierigkeit bei der Bestimmung des Werthes einer Windung der Mikrometerschraube des Helimeters erfahren. Das Verfahren, wodurch ich die gewünschte Sicherheit endlich erlangt zu haben glaube, kann auch anderen Beobachtern nützlich werden, weshalb ich es hier mittheilen will.

Dieses Verfahren besteht in der Vergleichung der Länge einer Schraubenwindung mit der Brennweite des Objectivs. Die erstere kann durch eine Scale gemessen werden, welche durch die Mikrometerschraube, vor einem feststehenden Mikroskope vorüber, bewegt wird; und zwar mit sehr grosser Genauigkeit, wenn die Entfernung zweier Striche dieser Scale, in demselben Maasse ausgedrückt, wodurch die Brennweite gemessen werden soll, entweder schon genau bekannt ist, oder durch eine besondere Untersuchung bestimmt wird und wenn das Mikroskop stark und deutlich vergrössert. Die Messung der letztern scheint, wenn sie alle Genauigkeit erlangen soll, welche der Bestimmtheit des Brennpunktes des Objectivs selbst entspricht, auf ein Verfahren gegründet werden zu müssen, welches die Kenntniss des optischen Mittelpunktes des Objectivs nicht voraussetzt; denn diese wird, innerhalb einiger Hundertel einer Linie sicher, schwer zu erlangen sein. Ich habe daher die zu beschreibende Messungsart auf die bekannte Eigenschaft jedes Objectivs, an zwei verschiedenen Orten zwischen zwei in seiner Axe, weiter als die vierfache Brennweite von einander entfernten Punkten, den einen in dem anderen

deutlich abzubilden, gegründet; ich habe nämlich diese beiden Orte aufgesucht und die Brennweite des Objectivs, durch die Verbindung der Messung ihrer Entfernung mit der Messung der Entfernung beider Punkte von einander, erlangt.

Bekanntlich ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$$

wo d und d' die Entfernungen der beiden Punkte von dem optischen Mittelpunkte des Objectivs und f die Brennweite des letztern bedeuten; hieraus folgt

$$f = \frac{d+d'}{4} - \frac{(d-d')^2}{4(d+d')},$$

und $d+d'$ ist die Entfernung des abgebildeten Punktes von dem Bilde, so wie $d-d'$ die Entfernung der beiden, die deutlichen Bilder gewährenden Orte des Objectivs von einander. Es kommt also nur auf die Messung dieser beiden Entfernungen an, ich habe also nur das dazu angewandte Verfahren zu beschreiben und den Grad seiner Genauigkeit durch seine gemachten Anwendungen zur näheren Kenntniss zu bringen.

Offenbar musste das Fernrohr von dem Instrumente abgenommen werden. Nachdem seine Ocularröhre herausgenommen war, wurde es auf zwei Lager horizontal aufgelegt, welche sich auf einem Schlitten befinden, der sich auf einem niedrigen und festen Tische in zwei parallelen Bahnen verschieben lässt, so dass die Axe des Fernrohrs ihre Lage durch die Verschiebung nicht ändert. Ueber dem Fernrohre, parallel mit seiner Axe, wurde ein Balken, dessen Länge von 33 Pariser Fuss die vierfache Brennweite etwas übertraf, auf 6 festen Untersätzen so befestigt, dass eine seiner beiden oberen Kanten sich lothrecht über der Axe (und ihrer Verlängerung) befand, von ihr herabhängende Lothe also diese Axe durchschnitten. An dem einen Ende dieser Vorrichtung wurde ein Ocular aufgestellt, vor welchem ein Loth von dem Balken herab aufgehängt wurde, so dass man seinen Faden, durch die Verschiebung des Oculars in seiner Röhre, deutlich sehen konnte; ein anderes Loth hing von einem Punkte des Balkens in der Nähe seines anderen Endes herab. Das Fernrohr wurde nun so lange verschoben, bis man

*) [340 d. a. Verz. — Vgl. auch Abb. 71, §§ 28 und 30.]

**) [Vgl. GALLS: Dioptr. Untersuchungen pag. 27. 28.]

beide Lothfäden vollkommen deutlich im Oculare sah; die dieses leistende Lage des Fernrohrs wurde durch einen dritten, von dem Balken herabhängenden und eine am Fernrohre befestigte Scale berührenden Lothfaden bestimmt. Endlich wurde das Fernrohr in die zweite Lage geschoben, in welcher beide Lothfäden wieder deutlich erschienen und diese gleichfalls durch den Punkt der Scale, welchen der Lothfaden nun berührte, bestimmt. Offenbar ist die auf der Scale abgelesene Grösse der Verschiebung $= d - d'$; die Entfernung der beiden Punkte des Balkens, von welchen das erste und zweite Loth herabhängen $= d + d'$. Die letztere wurde durch die Toise auf der oberen sorgfältig eben gemachten Fläche des Balkens gemessen. Ich führe noch an, dass man, um beide Lothfäden vollkommen schwarz zu sehen, das Zimmer verfinstern und das nöthige Licht nur durch eine schmale Spalte in der Richtung des Sehens einfallen lassen muss. Als Lothfäden wurden Menschenhaare benutzt; das angeordnete Ocular vergrössert, in dem gewöhnlichen Zustande des Heliometers, etwa 85 Mal.

Die Bestimmung der Brennweite des Heliometers durch dieses Verfahren habe ich siebenmal wiederholt, indem ich von eben so vielen verschiedenen Entfernungen der beiden äusseren Lothe ausgegangen bin, welche ich jedesmal durch von einander unabhängige Messungen bestimmt habe. Die einzelnen Momente dieser Bestimmungen sind die folgenden:

$d + d'$	$d - d'$	Brennweite.	Therm. Cent.	Reduct. d. Maasses a. 16° 25.	Brennweite im wahren Par. Maasse.
4541,73	131,60	1134,48	11,6	- 0,06	1134,42
4544,54	169,75	4,55	12,5	+ 0,05	4,50
4546,12	190,60	4,43	12,6	- 0,05	4,38
4547,60	208,93	4,50	12,1	- 0,05	4,45
4548,77	223,85	4,44	13,8	- 0,03	4,41
4550,14	234,60	4,51	12,9	- 0,04	4,47
4553,53	267,30	4,46	14,0	- 0,03	4,43
Mittel			12,8		1134,44

Es geht also aus diesen Versuchen hervor, dass die Brennweite des Objectivs in der Wärme von 12,8 C. = 1134,44 Pariser Linien = 7 F. 10 Z. 6,44 Lin. ist. Der mittlere Fehler jedes Versuchs zeigt sich = $\pm 0,04$, der des Mittels aus den 7 Versuchen = $\pm 0,015$, welches etwa ein Fünftausendstel der ganzen Brennweite ist. Diese grosse Sicherheit der Bestimmung ist durch wenig zeitraubende Versuche und die Hülfe einer leicht ausföhrbaren Vorrichtung erlangt worden.

Ogleich ich die Absicht meiner heutigen Mittheilung hierdurch schon erreicht habe, so werde ich

den Vortheil, welchen die erlangte Kenntniss der Brennweite des Heliometers mir gewährt hat, doch noch näher angeben. Die Länge einer Windung der Schraube habe ich durch eine von den Herren A. u. G. REFSOLD mit der äussersten Sorgfalt und durch die Hülfe eines ausgezeichnet schönen Apparats, auf eine Stahlplatte aufgetragene Entfernung von 2 Pariser Zollen, welche sich durch nachherige, von den Künstlern selbst vorgenommene Vergleichungen = 24,00006 ergab, gemessen. Diese Stahlplatte habe ich auf den Schieber derjenigen der Objectivhälften des Heliometers, auf deren Bewegung ich vorzugsweise das Messen der Entfernungen gründe, befestigt; auf dem Schieber der anderen habe ich ein etwa 80mal deutlich vergrösserndes, von Herrn BAUMANN verfertigtes Mikroskop so angebracht, dass beide Endpunkte der auf der Stahlplatte bezeichneten Entfernung, durch Drehung der sie bewegenden Schraube, in die Abschenslinie des Mikroskops geführt werden konnten. Dem Ausdrucke der Entfernung in Schraubenwindungen, welchen diese Einrichtung ergab, konnte durch Wiederholung der Messungen von verschiedenen Anfangspunkten an und durch Berücksichtigung der anderweitig schon bekannt gewordenen Ungleichheiten der Schraube, eine Sicherheit gegeben werden, welche der in der Messung der Brennweite erlangten etwa gleich geschätzt werden kann; 16 so abgeänderte und zu verschiedenen Zeiten gemachte Messungen zeigten nämlich einen mittleren Fehler jeder von ihnen, welcher etwa ein Vierundzwanzigtausendtel des Ganzen, und dessen Viertel der mittlere Fehler des Mittels aus allen 16 Messungen ist. Diese Genauigkeit zweier Messungen, durch deren Verhältnis der Winkelwerth einer Schraubenwindung gegeben wird, muss diesem eine Sicherheit aneignen, welche weit grösser ist als die, die man durch Vergleichung anderweitig bekannter Winkel mit ihren heliometrischen Messungen zu erlangen hoffen darf.

Ich habe z. B. solche Winkel aus dem Gestirne der Plejaden nehmen wollen, dessen Hauptsterne ich durch Meridianbeobachtungen bestimmt hatte, zum Theil um durch Vergleichung ihrer daraus berechneten Entfernungen von einander mit heliometrischen Messungen, den Werth einer Schraubenwindung zu erkennen; allein selbst viele, auf die Meridianbeobachtungen verwandte Zeit hat nicht hervorgebracht, dass die Entfernungen bis auf eine Secunde sicher wären, noch weniger aber so sicher, dass dadurch ein Zweifel von einigen Zehntausendeln der gesuchten Grösse entfernt worden wäre. Einen bessern Erfolg hat zwar die Beobachtung von sechs, paarweise in dem Umfange der Heliometermess-

ungen und nahe in einem grössten Kreise liegenden Sternen, deren beide äusserste durch Meridianbeobachtungen bestimmt wurden, gehabt, allein auch auf diesem Wege habe ich die mir nothwendig erscheinende Sicherheit nicht erlangen können. Die durch einen Theodoliten erlangte Beobachtung der Winkel, welche zwischen zwei Bildern des Fadenkreuzes des Heliometers vor seinen auseinandergeschobenen Objectivhälften erscheinen, kann ebensowenig eine sichere Bestimmung des Winkelwerthes einer Schraubenwindung ergeben. Die Mitte des Objectivs des Theodoliten muss nämlich desto weiter von der Mitte einer der Objectivhälften entfernt werden, je weiter aus der Axe des Heliometers diese verschoben ist; es empfängt bei den grösseren mit diesem Instrumente messbaren Winkeln nur Strahlen, welche in der Nähe des Randes der verschobenen Objectivhälfte, und zwar in einem beträchtlichen Winkel mit ihrer Axe durchgehen, von welchen nicht mehr angenommen werden darf, dass sie parallel, sowohl unter einander, als auch mit der von dem Fadenkreuz nach dem optischen Mittelpunkte der Objectivhälfte gelegten geraden Linie, aus der letzteren heraustragen. Die aus dieser Ursache hervorgehende Unsicherheit des Winkelwerthes einer Schraubenwindung wächst im Verhältnisse des Quadrats des Winkels, aus dessen Beobachtung er abgeleitet wird; sie trifft also am meisten die aus den grösseren Winkeln zu ziehenden Bestimmungen, während sie für die kleineren, durch die Unvollkommenheiten der Winkelmessungen mit dem Theodoliten weniger Gewicht erhaltenden, von geringerer Bedeutung ist.

Ich muss mich hier begnügen, die Schwierigkeiten

nur angedeutet zu haben, welche durch eine genaue Bestimmung der Brennweite des Objectivs beseitigt werden können; eine durchgeführte Untersuchung über Alles was man kennen muss, um Beobachtungen mit dem Heliometer der Königsberger Sternwarte richtig benutzen zu können, werde ich bei einer anderen Gelegenheit bekannt machen. Dass aber eine weit getriebene Genauigkeit der Bestimmung des Werthes einer Schraubenwindung nicht ohne Interesse ist, wird unter andern anschaulich, wenn man die Bestimmung der Masse eines Planeten aus den Messungen der Entfernungen seiner Satelliten verfolgt: wenn der Berechnung dieser Messungen ein im Verhältnisse $1:1+\alpha$ fehlerhafter Winkelwerth einer Schraubenwindung zum Grunde gelegt wird, so werden damit die Entfernungen in denselben Verhältnisse, die Masse des Planeten aber im Verhältnisse $1:1+3\alpha$ fehlerhaft. Beträgt α ein Dreitausendtel, bis auf welche Grösse es wohl ohne die unmittelbare Messung der Brennweite und einer Schraubenwindung zurückgeführt werden kann, so ist z. B. sein Einfluss auf den Nenner des Bruchs, welcher das Verhältniss der Jupitersmasse zur Sonnenmasse ausdrückt, mehr als eine ganze Einheit; soll also versucht werden, eine bis auf Theile einer solchen Einheit gehende Genauigkeit herbeizuführen, so müssen vorher Mittel ergriffen werden, den Werth von α noch beträchtlich einzuschränken. Uebrigens ist die von den Messungen der Brennweite und einer Schraubenwindung ausgehende Bestimmung des Winkelwerthes der letzteren nicht allein erfolgreich, sondern sie empfiehlt sich auch durch die Leichtigkeit ihrer Ausführung.

70. Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatorealinstrumentes.*)

(Astr. Untersuchungen I, p. 1.)

1.

Das Heliometer ergibt die Messung des Winkels zwischen zwei Punkten, indem beide Hälften seines Objectivs so gegeneinander gestellt werden, dass die dadurch entstehenden doppelten Bilder eines jeden der Punkte so weit von einander entfernt erscheinen,

*) [Abb. I aus 350 d. a. Verz. — Vgl. auch Königsb. Beobacht. 15. und 17. Abth. Einleitung (259 und 291 d. a. Verz.), worin die Theorie des Heliometers in anderer und weniger ausführlicher Weise behandelt ist. — Ferner: HASEN, Methoden m. d. Fraunhofer'schen Heliom. anzustellen, Gotha 1827. — Theorie des Aequatoreals, Abb. d. sächs. Ges. d. W. 1855.]

als die Punkte selbst. Um dieses beurtheilen zu können, ist nöthig, dass beide Hälften des Heliometerobjectivs gemeinschaftlich um die Axe des Fernrohrs gedreht werden, damit die Richtung, in welcher die doppelten Bilder liegen, mit der Richtung der Punkte selbst zusammenfalle. Wenn das Instrument nicht allein zur Messung der Entfernung jeder der Objectivhälften von der Axe des Fernrohrs, sondern auch zur Messung des Winkels ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie mit einer, ihrer Lage nach bekannten, durch die Axe des Fernrohrs gelegten Ebene eingerichtet ist, so ergibt es zugleich die Entfernung der

Punkte und die Lage des durch dieselben gehenden grössten Kreises, also eine vollständige Bestimmung des einen Punktes durch den anderen. Wenn daher das Instrument allen Nutzen gewähren soll, den es seiner Natur nach gewähren kann, so muss es diese Einrichtung besitzen; überdies aber muss die Aufstellung und Bewegung des Fernrohrs eine solche Beziehung zu einem festen grössten Kreise der Himmelskugel haben, dass man aus der Angabe des Kreises am Objective den gegenseitigen Positionswinkel der beobachteten Punkte erkennen kann. Das Heliometer und seine Aufstellung müssen, aus diesem Grunde, als Ein Ganzes angesehen werden. Ich setze hier voraus, dass die Aufstellung in Beziehung auf den Aequator gemacht ist, habe also die Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatoralinstrumentes zu verfolgen.

Als Aequatoral hat das Instrument zwei Drehungsaxen, nämlich die Stundenaxe, um welche alle seine Theile, und die Declinationsaxe, um welche die zum Fernrohre gehörigen sich drehen; als Heliometer hat es eine dritte Axe, nämlich die Drehungsaxe beider Objectivhälften und des Oculars, welche ich die Heliometeraxe nennen werde. Die über dem Horizonte liegenden Pole der Weltaxe und der Stundenaxe werde ich P und P , bezeichnen und nenne; denjenigen Pol der Declinationsaxe, welcher in der Richtung von dem Fernrohre nach dem Declinationskreise des Instruments liegt Q ; den in der Richtung vom Oculare nach dem Objective liegenden Pol der Heliometeraxe R . Die Drehungen um die drei, dem Instrumente eigenthümlichen Pole werden resp. durch den Stundenkreis, den Declinationskreis und die Kreise am Objective und am Oculare, deren ersteren ich den Positionskreis nennen werde, gemessen. Ausser diesen Drehungen kommen noch die auf die Heliometeraxe senkrechten Bewegungen in Betracht, welche jeder der Objectivhälften und dem Oculare gegeben werden können; diese geben dem Fernrohre zwei verschiedene Absehenslinien, worunter ich die von einem bestimmten Punkte im Sehelfelde des Oculars (etwa einem Durchschnittspunkte zweier Fäden) durch die optischen Mittelpunkte*) beider Objectivhälften gelegten geraden Linien verstehe, in deren Richtungen zwei Punkte der Himmelskugel erscheinen, welche ich S

und S' bezeichnen und benennen werde, sowie die beiden Objectivhälften I und II.

2.

Sämmtliche Vorschriften, welche die hier zu entwickelnde Theorie liefern kann, sowohl die zur Berichtigung des Instruments, als die zur Berechnung damit gemachter Beobachtungen führenden, müssen aus der Auflösung Einer Aufgabe abgeleitet werden können, nämlich der Aufgabe, den Stundenwinkel t und die Declination d des Punktes S der Himmelskugel, welcher in der Absehenslinie einer der Objectivhälften (I) liegt, durch Angaben auszudrücken, welche theils am Instrumente abgelesen werden können, theils den jedesmaligen Zustand seiner Berichtigung und seiner Aufstellung bestimmen. Allein die Zahl dieser Angaben ist sehr gross, nämlich 18, und wenn man auch Biegungen der verschiedenen Axen des Instruments durch die Schwere in Betrachtung ziehen will, sogar 20, so dass eine sie alle zugleich enthaltende Aufgabe zu viele Grössen berücksichtigen muss, als dass ihre Auflösung ein sehr bequemes Mittel zur Ableitung der erforderlichen Vorschriften sein könnte. Man vermeidet aber diese Unbequemlichkeit, wenn man die Aufgabe in zwei Theile sondert. Zuerst werde ich daher das Aequatoralinstrument ohne Rücksicht auf seine Verbindung mit dem Heliometer abhandeln.

Die Stundenaxe hat eine feste, wenn das Instrument berichtigt ist, der Weltaxe parallele Lage. Um aber dieses nicht voraussetzen, werde ich die Entfernung ihres Pols vom Welpole (P, P) durch s bezeichnen; den Stundenwinkel von P , vom Scheitelpunkte Z an gezählt und nach der Richtung der täglichen Bewegung genommen, durch h ; seine Entfernung vom Scheitelpunkte P, Z durch $90^\circ - \varphi$; das Complement der Polhöhe PZ durch $90^\circ - \varphi$. Den Verticalkreis von P , werde ich den Meridian des Instruments nennen und den auf denselben und auf P , bezogenen Stundenwinkel des Welpols P durch $180^\circ + h$, oder den Winkel ZP, P durch $180^\circ - h$, bezeichnen. Endlich werde ich die sich auf den Meridian und den Pol des Instruments beziehenden Angaben für den in der Absehenslinie des Fernrohrs liegenden Punkt der Himmelskugel, den Stundenwinkel durch t , die Declination durch d , bezeichnen. — Eine Biegung der Stundenaxe durch die Schwere des Instruments darf nicht in Betracht gezogen werden, wenn der Schwerpunkt aller seiner sich um diese Axe drehenden Theile in ihr liegt. Denn dann ist die Biegung in allen Lagen des Instruments vollkommen gleich, und ihre Wirkung be-

*) Unter dieser Benennung verstehe ich den Punkt, wo die geraden Linien sich durchkreuzen, welche correspondirende Punkte eines unendlich entfernten Gegenstandes und seines Bildes miteinander verbinden.

steht nur darin, dass sie den Pol des Instruments an einen Punkt der Himmelskugel bringt, welcher der Richtung der Axenlager nicht entspricht, aber mit dieser unveränderlich ist. An dem, wenigstens sehr nahen Zusammenfallen des Schwerpunkts des ganzen Instruments mit der Stundenaxe ist aber wahrscheinlich in keinem Falle zu zweifeln, da das Instrument sich immer sehr leicht drehen muss und dennoch in keiner Lage fehlendes Gleichgewicht verrathen darf.

Die Declinationsaxe ist, beziehungsweise auf die Stundenaxe, fest und sollte senkrecht auf ihr stehen, oder ihr Pol Q sollte von dem Pole P , des Instruments einen Quadranten entfernt sein. Um dieses nicht vorauszusetzen, werde ich $P, Q = 90^\circ - i$ annehmen, so dass der Pol Q , wenn das Instrument um die Stundenaxe gedreht wird, einen Kreis um P , beschreibt, welcher $90^\circ - i$ von diesem Punkte entfernt ist. Diese Drehung wird durch den Stundenkreis des Instruments gemessen; wenn seine Nonie $90^\circ + c$ angeben, indem Q sich im Meridiane des Instruments, und zwar über dem Pole befindet, so ist für jede andere Lage von Q , welcher eine Angabe T der Nonie zugehört, der Ausdruck des Winkels $ZP, Q = T + c + 90^\circ$. — Eine Biegung der Declinationsaxe durch die Schwere bringt hervor, dass ihr Pol nicht wirklich in Q , sondern in einem anderen Punkte \bar{Q} , liegt, welcher sich in dem Verticalkreise ZQ befindet und dessen Entfernung von Q dem Sinuse von ZQ proportional angenommen werden soll. Ich werde das Maximum der Biegung durch α bezeichnen,

$$QQ, = \alpha \sin ZQ$$

und α positiv annehmen, wenn $ZQ, < Z\bar{Q}$. Versteht man unter Q denjenigen der beiden Pole der Declinationsaxe, welchem der Declinationskreis zugewandt ist, so ist also die Biegung positiv angenommen, wenn sie das diesem Kreise entgegengesetzte Ende der Axe erniedrigt.

Das Fernrohr ist, beziehungsweise auf die Declinationsaxe, fest und sollte senkrecht auf ihr stehen, oder, wenn R in der Richtung seiner Absehenslinie ist, sollte Q, R ein Quadrant sein, was ich aber nicht voraussetzen, sondern Q, R durch $90^\circ - i'$ bezeichnen werde. Die Drehung des Fernrohrs um die Declinationsaxe wird durch den Declinationkreis des Instruments gemessen, dessen Angabe, für den Fall, dass R sich in dem grössten Kreise P, Q , befindet, ich durch $90^\circ - c'$ bezeichne; woraus für jede andere Lage von R , welcher eine Angabe D der Nonien des Declinationskreises zugehört, der Winkel P, Q, R entweder $= 90^\circ - D - c'$, oder $= D + c' - 90^\circ$ folgt. Der erstere dieser Ausdrücke

ist der anzuwendende, wenn eine Bewegung der Absehenslinie, von dem dem Stundenwinkel $T + c$ entsprechenden Punkte des Aequators des Instruments, durch Norden hindurch, nach dem entgegengesetzten Punkte, die Ablesung des Declinationskreises von 0 bis 180° verändert; der andere, wenn die Theilungen dieses Kreises in entgegengesetzter Richtung gezählt werden. Jenes ist bei dem Königsberger Instrumente der Fall, weshalb ich hier $P, Q, R = 90^\circ - D - c'$, also positiv oder negativ, jenachdem dieser Ausdruck es fordert, annehmen werde. Indem der Pol Q der Declinationsaxe einen 90° grösseren Stundenwinkel besitzt als der $T + c$ entsprechende Punkt des Aequators, so tritt der erste Fall ein, wenn jener Pol dem Declinationskreise dieses Punkts vorgeht, der zweite, wenn er auf ihn folgt; man kann also die beiden Fälle hierdurch unterscheiden. — Wenn eine Biegung des Fernrohrs durch die Schwere Einfluss auf die Richtung seiner Absehenslinie erhält, so dass diese einem anderen Punkte R , des Himmels entspricht, so soll derselbe im Verticalkreise ZR liegend, und

$$RR, = \beta \sin ZR$$

angenommen werden, wo β das Maximum der Biegung bedeutet und positiv sein soll, wenn $ZR, < ZR$.

Ich werde jetzt die Gleichungen aufsuchen, durch welche die Angaben, sowohl der Kreise des Instruments als auch die seinen jedesmaligen Zustand bestimmenden, mit dem Stundenwinkel und der Declination des in der Absehenslinie des Instruments erscheinenden Punkts der Himmelskugel verbunden sind. Die die Grösse der Biegungen bestimmenden α und β sowohl, als auch i und i' , werde ich als kleine Grössen und ihre Quadrate und Producte als unmerklich annehmen. Aber von der Entfernung des Pols des Instruments vom Weltpole werde ich das Aehnliche nicht voraussetzen, indem es wohl vorkommen kann, dass man ein Aequatoralinstrument anwenden will, ohne seiner Stundenaxe näherungsweise die richtige Lage geben zu können.

Zur Bestimmung des Orts des Pols Q , der Declinationsaxe, bezogen auf den Pol und den Meridian des Instruments, hat man

$$P, Q = 90^\circ - i; \quad ZP, Q = 90^\circ + T + c$$

$$P, \bar{Q}, = P, Q - Q \bar{Q} \cos P, Q Z = 90^\circ - i - \alpha \sin ZQ \cos P, Q Z$$

$$ZP, \bar{Q}, = ZP, Q - Q \bar{Q}, \frac{\sin P, Q Z}{\sin T, Q} \\ = 90^\circ + T + c - \alpha \frac{\sin ZQ \sin P, Q Z}{\sin P, Q}$$

und wenn man die Ausdrücke

$$\sin ZQ \cos P, Q Z = \sin \varphi, \cos i + \cos \varphi, \sin i \sin (T + c) \\ \sin ZQ \sin P, Q Z = \cos \varphi, \cos (T + c)$$

substituirt, aber Alles weglässt, was die festgesetzte Näherungsgrenze überschreitet:

$$P, Q, = 90^\circ - i - \alpha \sin \varphi, \\ ZP, Q, = 90^\circ + T + c - \alpha \cos \varphi, \cos(T + c) \} \dots (1)$$

wofür ich, um abzukürzen, $90^\circ - i$, und $90^\circ + T$, schreiben werde.

Zur Bestimmung des in der Absehselinie des Instruments erscheinenden Punkts R , des Himmels, gleichfalls in Beziehung auf den Pol und den Meridian des Instruments, hat man im Dreiecke P, Q, R :

$$P, Q, = 90^\circ - i, \quad Q, R, = 90^\circ - i', \quad P, Q, R, = 90^\circ - D - c' \\ \text{woraus, mit der beabsichtigten Näherung,} \\ \cos P, R, = \sin(D + c') \\ \sin P, R \cos RP, Q, = i' - i, \sin(D + c') \\ \sin P, R \sin RP, Q, = \cos(D + c')$$

folgt, und ferner, wenn man übereinkommt P, R und $90^\circ - D - c'$ zugleich positiv oder negativ zu nehmen:

$$P, R, = 90^\circ - D - c' \\ RP, Q, = 90^\circ - \frac{i - i', \sin(D + c')}{\cos(D + c')}$$

oder, da $ZP, R, = ZP, Q, - RP, Q,$ ist:

$$ZP, R, = T, + \frac{i' - i, \sin(D + c')}{\cos(D + c')}$$

$$\left. \begin{aligned} d, &= D + c' + \beta \{ \sin \varphi, \cos(D + c') - \cos \varphi, \sin(D + c') \cos(T + c) \} \\ t, &= T + c + \frac{i' - i \sin(D + c')}{\cos(D + c')} - \frac{\alpha}{\cos(D + c')} \left\{ \sin \varphi, \sin(D + c') + \cos \varphi, \cos(D + c') \cos(T + c) \right\} \\ &\quad - \frac{\beta}{\cos(D + c')} \cos \varphi, \sin(T + c) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

erhält. Um nicht verschiedene Fälle unterscheiden zu dürfen, muss man d, \dots wenn sein eben gegebener Ausdruck es fordert, auch über 90° hinaus zählen. Ein 90° überschreitender Werth von d , und der mit ihm verbundene Werth von t , bestimmen einen Punkt am Himmel, dessen in gewöhnlicher Bedeutung genommene Declination und Stundenwinkel resp. $180^\circ - d$, und $180^\circ + t$, sind.

Die Vergleichung der auf den Pol und den Meridian des Instruments bezogenen Bestimmung des Punkts R, \dots mit der auf den Weltpol und den Meridian des Beobachtungsorts bezogenen, geht aus dem Dreiecke $P, P', R,$ hervor, in welchem:

$$P, P', R, = t - h \quad P, P', R, = t, - h, + 180^\circ \\ P, P', R, = 90^\circ - d, \quad P, P', R, = 90^\circ - d, \\ P, P', = \varepsilon$$

sind, und welches

$$\sin d = \cos \varepsilon \sin d, - \sin \varepsilon \cos d, \cos(t, - h) \\ \cos d \cos(t - h) = \sin \varepsilon \sin d, + \cos \varepsilon \cos d, \cos(t, - h) \} \dots (3) \\ \cos d \sin(t - h) = \cos d, \sin(t, - h)$$

Ferner hat man

$$P, R, = P, R, - RR, \cos P, R, Z \\ = 90^\circ - D - c' - \beta \sin ZR \cos P, R, Z \\ ZP, R, = ZP, R, - RR, \frac{\sin P, R, Z}{\sin P, R'} \\ = T, + \frac{i' - i, \sin(D + c')}{\cos(D + c')} - \beta \frac{\sin ZR \sin P, R, Z}{\cos(D + c')}$$

und wenn man die Ausdrücke:

$$\sin ZR \cos P, R, Z = \sin \varphi, \cos(D + c') \\ - \cos \varphi, \sin(D + c') \cos ZP, R \\ \sin ZR \sin P, R, Z = \cos \varphi, \sin ZP, R$$

substituirt und wieder das weglässt, was die Näherungsgrenze überschreitet:

$$P, R, = 90^\circ - D - c' - \beta \{ \sin \varphi, \cos(D + c') \\ - \cos \varphi, \sin(D + c') \cos(T + c) \} \\ ZP, R, = T, + \frac{i' - i, \sin(D + c')}{\cos(D + c')} - \beta \frac{\cos \varphi, \sin(T + c)}{\cos(D + c')}$$

Den schon augenommenen Bezeichnungen zufolge ist aber

$$P, R, = 90^\circ - d, \quad ZP, R, = t,$$

wodurch man, nachdem man für T , und i , ihre Ausdrücke geschrieben hat:

ergibt. Die Verbindungen zwischen $\varphi, h, \varepsilon, \varphi, h$, werden endlich durch das Dreieck $ZPP,$ gegeben, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi, &= \cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \varphi \cos h \\ \cos \varphi, \cos h, &= -\sin \varepsilon \sin \varphi + \cos \varepsilon \cos \varphi \cos h \\ \cos \varphi, \sin h, &= \cos \varphi \sin h \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

3.

Das Aequatoraal hat eine Eigenschaft, auf welche seine Berichtigung gegründet werden kann; die Eigenschaft nämlich, dass jeder Punkt am Himmel durch zwei verschiedene Stellungen des Instruments in seine Absehselinie gebracht werden kann; augenommen hiervon sind nur die Punkte, deren Entfernung vom Pole des Instruments kleiner ist als $P', Q, - Q, R = i' - i - \alpha \sin \varphi,$ welche gar nicht in die Absehselinie gelangen können. Indem sowohl d , und t , als auch $180^\circ - d$, und $180^\circ + t$, einem und demselben Punkte am Himmel angehören, gelangt nämlich dieser Punkt in die Absehselinie, nicht allein wenn D und T so bestimmt werden, dass sie, den Ausdrücken (2) ge-

müas, d , und t , ergeben, sondern auch so, dass sie $180^\circ - d$, und $180^\circ + t$, ergeben. Die dieses letztere leistenden Werthe von D und T werde ich durch D' und T' bezeichnen.

Wendet man die Ausdrücke (2) auf beide Stellungen des Instruments an, nämlich:

$$d = D + c + \beta \{ \sin \varphi, \cos (D + c) - \cos \varphi, \sin (D + c) \cos (T + c) \}$$

$$t = T + c + \frac{i' - i \sin (D + c)}{\cos (D + c)} - \frac{\alpha}{\cos (D + c)} \left\{ \sin \varphi, \sin (D + c) + \cos \varphi, \cos (D + c) \cos (T + c) \right\} - \frac{\beta}{\cos (D + c)} \cos \varphi, \sin (T + c)$$

und

$$180^\circ - d = D' + c' + \beta \{ \sin \varphi, \cos (D' + c') - \cos \varphi, \sin (D' + c') \cos (T' + c') \}$$

$$180^\circ + t = T' + c' + \frac{i' - i \sin (D' + c')}{\cos (D' + c')} - \frac{\alpha}{\cos (D' + c')} \left\{ \sin \varphi, \sin (D' + c') + \cos \varphi, \cos (D' + c') \cos (T' + c') \right\} - \frac{\beta}{\cos (D' + c')} \cos \varphi, \sin (T' + c')$$

so geht daraus hervor, dass ihnen durch die Annahmen:

$$D + c = d - \beta \{ \sin \varphi, \cos d - \cos \varphi, \sin d, \cos t, \}$$

$$T + c = t - \frac{i' - i \sin d}{\cos d} + \frac{\alpha}{\cos d} \left\{ \sin \varphi, \sin d + \cos \varphi, \cos d, \cos t, \right\} + \frac{\beta}{\cos d} \cos \varphi, \sin t, \} \dots \dots \dots (5)$$

und

$$D' + c' = 180^\circ - d + \beta \{ \sin \varphi, \cos d - \cos \varphi, \sin d, \cos t, \}$$

$$T' + c' = 180^\circ + t + \frac{i' - i \sin d}{\cos d} - \frac{\alpha}{\cos d} \left\{ \sin \varphi, \sin d + \cos \varphi, \cos d, \cos t, \right\} + \frac{\beta}{\cos d} \cos \varphi, \sin t, \} \dots \dots \dots (6)$$

genüegeleistet wird. Wenn alles, was zu der Kenntniss des Zustandes des Instruments erforderlich ist, als bekannt angenommen wird, so bestimmen diese Formeln sowohl jede der beiden Stellungen des Instruments auf einen Punkt, welcher durch d , und t , gegeben ist, als auch den jeder derselben entsprechenden Werth von d , und von t .

In den Summen und den Unterschieden der Ausdrücke (5) und (6) trennen sich verschiedene der zur Kenntniss des Zustandes des Instruments erforderlichen Grössen voneinander, so dass dadurch zu ihrer Bestimmung führende Gleichungen erlangt werden. Diese sind:

$$\left. \begin{aligned} 180^\circ = D + D + 2c' \\ 180^\circ - 2d = D - D \\ \quad - 2\beta \{ \sin \varphi, \cos d - \cos \varphi, \sin d, \cos t, \} \\ 180^\circ + 2t = T' + T + 2c + \frac{2\beta}{\cos d} \cos \varphi, \sin t, \\ 180^\circ = T' - T - 2 \frac{i' - i \sin d}{\cos d} \\ \quad + \frac{2\alpha}{\cos d} \left\{ \sin \varphi, \sin d + \cos \varphi, \cos d, \cos t, \right\} \end{aligned} \right\} (7)$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt den Indexfehler des Declinationskreises (c') unabhängig von jedem anderen Elemente, durch die beiden Einstellungen des Instruments auf einen festen Punkt am Himmel. — Der Indexfehler des Stundenkreises (c) kann, durch die dritte Gleichung, nur bestimmt werden wenn t , gegeben ist; im Allgemeinen ist seine Bestimmung von der

Biegung des Fernrohrs abhängig, aber sie wird frei davon, wenn der beobachtete Punkt sich im Meridian des Instruments befindet, oder $\sin t = 0$ ist. — Die vierte Gleichung bestimmt eine Verbindung zwischen i' , i und α , welche nur durch die Beobachtung wenigstens dreier Werthe von $T' - T$, an verschiedenen Punkten des Himmels, getrennt werden kann. — Die Biegung des Fernrohrs β zeigt ihren Einfluss in der zweiten und dritten Gleichung. Um sie durch die letztere, in welcher sie mit c verbunden ist, zu bestimmen, muss der Unterschied der auf den Pol und den Meridian des Instruments bezogenen Stundenwinkel, wenigstens eines Paares von Punkten am Himmel, bekannt sein, und mit den Angaben des Stundenkreises, in den beiden Stellungen des Instruments auf jeden derselben, verglichen werden; ihre Bestimmung durch die erstere fordert nur die Kenntniss der beiden Angaben des Declinationskreises für einen Punkt, dessen auf den Pol des Instruments bezogene Declination bekannt ist. Vortheilhafter ist aber die Vergleichung der bekannten d , zweier Punkte, welche sich in beträchtlichen Entfernungen vom Scheitelpunkte, in 180° voneinander verschiedenen Azimuten befinden, mit den beiden Angaben des Declinationskreises für jeden von ihnen. Am vortheilhaftesten und von der Voraussetzung der Kenntniss einer Declination frei, ist jedoch die Anwendung derselben Mittel, welche ich zur Bestimmung der Biegung des Fernrohrs eines Meridiankreises empfohlen und angewandt habe [vgl. Abb. 63, p. 43]. Da der Einfluss

der Biegung des Fernrohrs auf die Zenithdistanzen immer eine sehr kleine Grösse sein wird, so wird die Bestimmung seiner Grösse übrigens wohl nur dann für nöthig erachtet werden, wenn das Aequatorealinstrument, durch die Vollendung seines Baues und seiner Theilungen, Anspruch erhält, zur unmittelbaren Bestimmung der Declinationen angewandt zu werden.

4.

Wenn β entweder verschwindet, oder einen schon bekannt gewordenen Werth hat, so erlangt man, durch beide Einstellungen des Instruments auf einen Stern, sowohl d , als auch $t, -c$, durch die Ausdrücke, welche die 2. und 3. der Gleichungen (7) dafür geben; diese Bezeichnungen bedeuten dann die Mittel aus den zu beiden Beobachtungszeiten gehörigen Werthen der auf den Pol und Meridian des Instruments bezogenen, scheinbaren, d. h. mit der Strahlenbrechung behafteten Declination und des Stundenwinkels, die letzteren so genommen, wie die Ablesung des Stundenkreises sie angibt. Hat man auf diese Art die Werthe von d , und $t, -c$ für zwei Punkte am Himmel bestimmt, deren auf den Weltpol und den Meridian des Beobachtungsorts bezogene Declination und Stundenwinkel d, t und d', t' man anderweitig kennt, so kann man daraus die Lage der Stundenaxe kennen lernen.

Man findet die hierzu erforderlichen ε und h durch die Auflösung der beiden Gleichungen (3):

$$\left. \begin{aligned} \sin d, &= \sin d \cos \varepsilon + \cos d \sin \varepsilon \cos(t-h) \\ \sin d', &= \sin d' \cos \varepsilon + \cos d' \sin \varepsilon \cos(t'-h) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

und wenn sie gefunden sind, $t, -h$, aus den Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \cos d, \cos(t, -h) &= \sin d \sin \varepsilon - \cos d \cos \varepsilon \cos(t-h) \\ \cos d, \sin(t, -h) &= \cos d \sin(t-h) \end{aligned}$$

sowie auch h , und φ , aus (4). Da man hierdurch t , kennt, und $t, -c$ durch das Instrument bekannt geworden ist, so kennt man auch c . Die Auflösung der beiden Gleichungen (8) ist nicht verschieden von der Auflösung der bekannten Aufgabe, den Ort eines Punktes an der Himmelskugel aus seinen gemessenen Entfernungen von zwei anderen Punkten, deren Oerter gegeben sind, zu finden. Ich glaube, mich hier nicht dabei halten zu dürfen.

Dagegen werde ich den Fall, in welchem ε eine kleine Grösse ist, deren Quadrat man vernachlässigen kann, weiter entwickeln. Man wird diesen Fall, weil er jeder Anwendung des Aequatoreals die meiste Bequemlichkeit gibt, vorzugsweise herbeiführen, wenn nicht etwa der Ort, wo man das Instrument aufstellen muss, oder die Kürze der Zeit zwischen seiner Aufstellung

und Anwendung, seine Herbeiführung verhindert. Man erlangt die näherungsweise richtige Lage der Stundenaxe, oder die Kleinheit von ε , indem man das (übrigens schon berichtigte) Instrument zuerst auf die Declination eines culminirenden Sterns stellt und denselben, durch diejenigen seiner Fussesrauben, welche seine Drehung in der Ebene des Meridians bewirken, in die Absehlenslinie bringt; dann aber, bei einem 6 Stunden vom Meridiane entfernten Sterne, dasselbe wiederholt, indem man das Instrument entweder um die Lothlinie, oder um die in der Richtung des Meridians liegende horizontale Linie dreht, welches letztere durch die Fussesrauben geschieht. Um den Werth von ε , welchen die anfängliche Berichtigung der Stundenaxe übriggelassen haben mag, sowie auch das damit verbundene h , und endlich c mit grösserer Genauigkeit zu erkennen, kann man vollständige Beobachtungen an verschiedenen Punkten des Himmels machen, daraus für jeden dieser Punkte d , und $t, -c$ bestimmen (t'), ihre gefundenen Werthe mit den anderweitig bekannten d und t derselben Punkte vergleichen und diese Gleichungen zur Erlangung der gesuchten Bestimmung anwenden.

In dem hier zu folgenden Falle eines sehr kleinen ε ergeben die Gleichungen (3):

$$d = d, - \varepsilon \cos(t, -h),$$

$$t = t, + h - h, - \varepsilon t g d, \sin(t, -h),$$

und die Gleichungen (4):

$$h - h, = - \varepsilon t g \varphi \sin h,$$

Schreibt man, um abzukürzen, x, y, γ für $\varepsilon \cos h,$ $\varepsilon \sin h,$ $c - y t g \varphi$, so erhält man, durch Vergleichung mit (7), die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} d &= 90^\circ - \frac{1}{2}(D' - D) - x \cos t - y \sin t \\ &\quad + \beta \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \} \\ t &= -90^\circ + \frac{1}{2}(T' - T) + \gamma - x t g d \sin t \\ &\quad + y t g d \cos t + \beta \sec d \cos \varphi \sin t \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

welches also die zur Bestimmung von x, y, γ anzuwendenden Gleichungen sind.

Die Ausdrücke von d und t durch die von einer einzelnen Einstellung des Instruments gewährten Angaben, und durch alles, was zur Kenntniss seines Zustandes erforderlich ist, erhält man durch die Substitution von (5) und (6), nämlich:

$$\left. \begin{aligned} d &= D + c' - x \cos t - y \sin t \\ &\quad + \beta \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \} \\ t &= T + \gamma - x t g d \sin t + y t g d \cos t + i' \sec d - i t g d \\ &\quad - \alpha \{ \sin \varphi t g d + \cos \varphi \cos t \} - \beta \sec d \cos \varphi \sin t \end{aligned} \right\} (10)$$

wo d wieder, wie im 2. §, erforderlichenfalls über 90° hinausgezählt, und dann mit einem 180° veränderten Werthe von l verbunden wird.

5.

Sobald man die Werthe von x und y erkannt hat, ist ein sicheres und leicht anwendbares Mittel vorhanden, die Aufstellung des Instruments zu verbessern. Um x wegzuschaffen, richtet man das Fernrohr auf einen Punkt im Meridiane, verändert dann die Absehenslinie, durch ihre Mikrometerbewegung, in der Richtung des Meridians, um die Quantität x , und bringt den Punkt, durch nur in derselben Richtung wirkende Drehung der Fusschrauben des Instruments, in die Absehenslinie zurück; y wird auf ähnliche Art weggeschafft, wenn man einen Punkt in 90° oder 270° Stundenwinkel und die Fusschrauben so anwendet, dass sie das Instrument nur in der auf den Meridian senkrechten Ebene drehen. Wenn keine hierzu schicklichen Punkte im Horizonte sichtbar sind, so kann das Fadenkreuz eines vor dem Objectiv aufgestellten Fernrohrs ihre Stelle vertreten. Ob die Mikrometerbewegung der Absehenslinie, welche man bei dieser Berichtigungsart benutzen muss, durch das Objectiv eines Helioneters oder durch einen beweglichen Faden im Brennpunkte des Objectivs hervorgebracht wird, ist offenbar gleichgültig. —

Die senkrechte Lage der Absehenslinie auf der Declinationsaxe wird bei jedem Aequatoralinstrumente erlangt, oder der Werth von i' wird weggeschafft werden können, indem es nie an einer Einrichtung fehlen wird, die Lage, entweder des ganzen Fernrohrs, oder seiner Absehenslinie, beziehungsweise zu der Declinationsaxe, zu verändern. Dagegen wird es auf die bei dem Instrumente vorhandene Art der Verbindung der Declinationsaxe mit der Stundenaxe ankommen, ob der Winkel, welchen beide miteinander machen, geändert werden kann oder nicht; kann er nicht geändert werden, so muss man Verzicht darauf leisten, einen gefundenen Werth von i , durch eine Aenderung am Instrumente, zum Verschwinden zu bringen; man muss sich begnügen, seinen Einfluss auf die Resultate der Beobachtungen in Rechnung zu bringen, so wie dieses auch mit dem Einflusse der Grössen α und β geschehen muss. Ob die Indexfehler c und c' der beiden Kreise des Instruments mechanisch weggeschafft werden können oder nicht, hängt von der Einrichtung ab, welche die Nonien besitzen. — Uebrigens gewährt die mechanische Wegschaffung von Fehlern der Instrumente, oder von Unvollkommenheiten ihrer Berichtigung, nur

eine Erleichterung der Berechnung der Beobachtungen, nicht eine Vermehrung ihrer Sicherheit; vielmehr ist die Rechnung das sicherste Mittel, Fehler und Unvollkommenheiten von bekannter Grösse unschädlich zu machen, weshalb man sich auch vorzugsweise bemühen muss, Anordnungen zu treffen, welche die fortwährende Kenntniss ihrer Grössen herbeiführen.

6.

Ich werde noch zeigen, inwiefern man die verschiedenen, in den Formeln (10) vorkommenden unbekannt Grössen, unabhängig von der Genauigkeit der Eintheilungen und Ablesungen der beiden Kreise des Instruments bestimmen kann.

Die Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe, oder $90^\circ - i'$, kann man, unvermischt mit anderen unbekannt Grössen, dadurch kennen lernen, dass man in der rückwärts verlängerten Fernrohrlinie des auf einen irdischen Gegenstand gerichteten Aequatorals ein mit einem Fadenkreuz versehenes Hilfsfernrohr aufstellt, dieses nach dem Gegenstande, dann das Aequatoral nach seinem Fadenkreuz richtet, und endlich das Aequatoral, durch Drehung um die Declinationsaxe, auf den irdischen Gegenstand führt. Offenbar muss dieser in seiner Absehenslinie erscheinen, wenn $i' = 0$ ist; sonst in der Entfernung $2i'$ von derselben, welche Entfernung mikrometrisch gemessen werden kann. — Die Forderung, dass man das Hilfsfernrohr auf den irdischen Gegenstand richten soll, setzt voraus, dass die Aussicht dahin nicht unterbrochen sei; wenn die Absehenslinie neben der Stundenaxe vorbeigeht (wie bei dem Königsberger Instrumente der Fall ist), so kann die freie Aussicht durch Drehung des Aequatorals um die Stundenaxe erlangt werden; wenn aber die Absehenslinie die Stundenaxe durchschneidet, so wird nöthig, das Objectiv und das Ocular, vor der Beobachtung, aus dem Fernrohre des Aequatorals zu nehmen, um durch seine leere Röhre hindurch die Aussicht von dem Hilfsfernrohre nach dem irdischen Gegenstande zu erlangen. — Wenn man auch den Werth von β aufsuchen will, so kann es verbunden mit der Aufsuchung von i' geschehen; es wird dazu nur noch verlangt, dass man auch den Drehungswinkel um die Declinationsaxe, welcher die Absehenslinie des Aequatorals von dem Fadennetze des Hilfsfernrohrs auf den irdischen Gegenstand bringt, ablese.

Eine zur Bestimmung der Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe beitragende Gleichung kann man, ohne die Ablesung des Stundenkreises vorauszusetzen, durch den Ausdruck des Unterschiedes der

Stundenwinkel zweier Sterne, welche ihren Durchgangszeiten durch die Absehsenlinie bei ungeänderter Lage der Declinationsaxe zugehören, erlangen. Die zweite der Formeln (10) ergibt diesen Ausdruck:

$$= -\{x \sin t - y \cos t + i + \alpha \sin \varphi\} (\operatorname{tg} d' - \operatorname{tg} d) \\ + \{i' - \beta \cos \varphi \sin t\} (\sec d' - \sec d)$$

also, wenn sein Werth aus der Beobachtung der beiden Durchgangszeiten hervorgegangen ist, eine Gleichung zwischen $i + \alpha \sin \varphi$, i' , x , y , β . Wiederholt man aber diese Beobachtung bei entgegengesetzter Lage der Declinationsaxe, für welche $180^\circ - d$ und $180^\circ + t$ statt d und t zu setzen sind, so wird der Ausdruck des dann stattfindenden Unterschiedes der Stundenwinkel:

$$= -\{x \sin t - y \cos t - i - \alpha \sin \varphi\} (\operatorname{tg} d' - \operatorname{tg} d) \\ - \{i' + \beta \cos \varphi \sin t\} (\sec d' - \sec d)$$

und aus dem Unterschiede beider Gleichungen verschwinden x , y , β . — Bezeichnet man den Unterschied der beiden Beobachtungen des ersten Sterns entsprechenden Stundenwinkel, auf den ersten von beiden bezogen, durch $2\Delta t$, den ähnlichen Unterschied für den zweiten Stern durch $2\Delta t'$, so hat man also:

$$\Delta t' - \Delta t = (i + \alpha \sin \varphi) (\operatorname{tg} d' - \operatorname{tg} d) \\ - i' (\sec d' - \sec d) \dots \dots \dots (11)$$

wodurch, da i' schon bekannt ist, $i + \alpha \sin \varphi$ bestimmt wird. Statt des einen Sterns kann man auch einen festen Punkt am Horizonte wählen, auf welchen man die Absehsenlinie in beiden Lagen der Declinationsaxe einstellt. Wenn dieser Punkt als unendlich entfernt angesehen werden kann, oder wenn die Stundenaxe von der Absehsenlinie durchschnitten wird, ist $\Delta t = 0$; wenn diese aber, in einer Entfernung e , neben der Stundenaxe vorbeigeht und die Entfernung des irdischen Punkts vom Objective des Fernrohrs $= \varphi$ ist, ist

$$\Delta t = -\frac{ae}{\varphi \cos d} \dots (\omega = 206264''^8)$$

und daher

$$i + \alpha \sin \varphi = \frac{\cos d \cos d'}{\sin(d' - d)} \left\{ \Delta t' - \frac{ae}{\varphi \cos d} \right\} \\ + i' \frac{\sin \frac{1}{2}(d' + d)}{\cos \frac{1}{2}(d' - d)} \dots \dots \dots (12)$$

Die Verbindung $i + \alpha \sin \varphi$ der beiden unbekannt Grössen i und α kann nur durch Ablesungen des Stundenkreises getrennt werden.

Die Grössen von x und y kann man unabhängig von den Ablesungen des Declinationskreises kennen lernen, wenn man einen Stern, sowohl wenn $t = 0$ und $= 180^\circ$, als auch wenn $e = 90^\circ$ und $= 270^\circ$ ist, ohne das Fernrohr um die Declinationsaxe zu drehen, beob-

achtet und seine Entfernungen von der Absehsenlinie durch das Mikrometer misst. Für $t = 0$ und $t = 180^\circ$ sind, der ersten der Formeln (10) zufolge, die Declinationen, welchen die Absehsenlinie entspricht:

$$d_0 = D + c' - x + \beta \{\sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d\} \\ d = D + c' + x + \beta \{\sin \varphi \cos d + \cos \varphi \sin d\}$$

Die sich in beiden Culminationen zeigenden Declinationen des Sterns sind dagegen $(d) - \varphi_0$ und $(d) + \varphi_0$, wo (d) seine wahre Declination und φ_0 , φ , die Strahlenbrechungen bedeuten. Hat man die Entfernungen des Sterns von der Absehsenlinie, $(d) - \varphi_0 - d_0 = f_0$ und $(d) + \varphi_0 - d = f$, mit dem Mikrometer gemessen, so folgt daraus und aus den Ausdrücken von d_0 und d :

$$x = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi) + \frac{1}{2}(f_0 - f) - \beta \cos \varphi \sin d \dots (13)$$

Ferner sind die der Absehsenlinie entsprechenden Declinationen, wenn $t = 90^\circ$ und $t = 270^\circ$ ist,

$$d_0 = D + c' - y + \beta \sin \varphi \cos d \\ d = D + c' + y + \beta \sin \varphi \cos d$$

und wenn die Einflüsse der Strahlenbrechung auf die Declination durch φ_0 und φ^* bezeichnet werden, die des Sterns $= (d) + \varphi_0$ und $= (d) + \varphi$, also, wenn wieder $(d) + \varphi_0 - d_0 = f_0$ und $(d) + \varphi - d = f$, mikrometrisch gemessen werden:

$$y = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}(f_0 - f) \dots \dots \dots (14)$$

Man kann also, ohne die Theilungen der beiden Kreise des Instruments ablesen zu dürfen, durch sein Mikrometer allein x , y , i' und $i + \alpha \sin \varphi$ bestimmen; α von i getrennt und β aber nur durch diese Ablesung. Dass c' und c (oder γ) nur aus Ablesungen der Kreise hervorgehen können, versteht sich von selbst. — Aus der zweiten der Formeln (10) wird übrigens klar, dass die abgesonderte Kenntniss von α nicht erlangt zu werden braucht, wenn Unterschiede der Geradenaufstellungen der Sterne nur durch Unterschiede ihrer Durchgangszeiten durch die Absehsenlinie des Fernrohrs des Aequatorials, ohne seine Drehung um die Stundenaxe, beobachtet werden sollen; weshalb es auch angemessen ist, statt $i + \alpha \sin \varphi$ eine einfache Bezeichnung einzuführen. Schreibt man, wie schon im 2. §, i dafür, sowie auch γ , für die mit t veränderliche Grösse $\gamma - \alpha \cos \varphi \cos t$, so nehmen die Formeln (10) die Gestalt

*) Beide sind einander sehr nahe gleich; völlig, wenn die meteorologischen Instrumente zu den Zeiten beider Beobachtungen gleiche Stände besitzen.

$$\left. \begin{aligned} d &= D + c' - x \cos t - y \sin t \\ &+ \beta \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \} \\ t &= T + \gamma, -x \operatorname{tg} d \sin t + y \operatorname{tg} d \cos t \\ &+ i' \sec d - i, \operatorname{tg} d - \beta \sec d \cos \varphi \sin t \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

an, in welcher ich sie weiter anwenden werde.

7.

Nachdem ich das Aequatoralinstrument jetzt vollständig genug abgehandelt zu haben glaube, wende ich mich zu dem Heliometer, welches, statt des gewöhnlichen Fernrohrs, darauf angebracht ist. Was dadurch geleistet werden soll, ist die Erfindung der relativen Lage zweier Punkte an der Himmelskugel, nämlich ihrer Entfernung von einander ($=s$) und ihrer gegenseitigen Richtung; diese werde ich durch den Winkel bestimmen, in welchem der beide Punkte verbindende grösste Kreisbogen den durch seine Mitte gelegten Declinationskreis schneidet, welchen Winkel ich durch p bezeichnen und von dem Nordpole an, nach der Seite, nach welcher die Geradenaufsteigungen zunehmen, von 0 bis 360° zählen werde. Es muss also gezeigt werden, wie die am Heliometer abgelesenen Oerter seiner beiden Objectivhälften und die gleichfalls abgelesene Lage ihrer Durchschnittslinie, welche beide Punkte zugleich in die Absehsenlinie bringen, verbunden mit der Kenntniss des jedesmaligen Zustandes des ganzen Instruments und des Ortes der Mitte zwischen beiden Punkten an der Himmelskugel, s und p bestimmen. Die Angaben der beiden Kreise des Aequatorials müssen aus der Betrachtung geschafft werden, damit ihre jedesmalige Ablesung nicht gefordert werden darf.

Zuerst werde ich die Declination und den Stundenwinkel des in der Absehsenlinie des Instruments erscheinenden Punktes der Himmelskugel durch alles das ausdrücken, was zur Kenntniss, sowohl der Lage des Fernrohrs, als auch der jedesmaligen Absehsenlinie desselben erforderlich ist.

Das was in der Theorie des Aequatorials auf die Absehsenlinie des Fernrohrs bezogen worden ist, werde ich jetzt auf die Heliometeraxe beziehen, nämlich auf die Axe, um welche sowohl das Objectiv, als auch das Ocular gedreht werden können, in welcher alle die Spitzen der Kegel liegen, welche die mit den Stellungen jeder der Objectivhälften und des Oculars veränderlichen Absehsenlinien durch die Drehung beschreiben. Die Bezeichnung $90^\circ - i'$ gilt also nun für die Entfernung des Pols R der Heliometeraxe von dem Pole Q , der Declinationsaxe. Indem die Heliometeraxe in der Mitte zwischen beiden Richtungen der Absehsenlinie liegt, welche jedem Zustande des Fernrohrs, vor und nach einer halben Drehung, sowohl des Objectivs

als auch des Oculars entsprechen, bezieht sich das Mittel aus zwei, vor und nach einer solchen Drehung gemachten Beobachtungen eines in die jedesmalige Absehsenlinie gebrachten Punktes, unmittelbar auf die Heliometeraxe, selbst wenn die erstere der letzteren nicht ganz parallel ist; weshalb auch der Werth des in seiner jetzigen Bedeutung genommenen i' durch solche Paare von Beobachtungen ebenso bestimmt wird, wie der Werth des in seiner vorigen Bedeutung genommenen durch einzelne. — Die Formeln (15) drücken jetzt die Declination und den Stundenwinkel des in der Heliometeraxe liegenden Punktes der Himmelskugel aus.

Ich werde zuerst annehmen, dass jede der Objectivhälften die im Fernrohre sichtbaren unendlich entfernten Punkte auf einer auf der Heliometeraxe senkrechten Ebene vollkommen richtig abbilde; so dass, wenn jeder derselben mit seinem Bilde durch eine gerade Linie verbunden wird, alle diese Linien sich in einem Punkte O , dem optischen Mittelpunkte der Objectivhälfte, durchschneiden. Dieser Punkt wird durch die Mikrometerschraube der Objectivhälfte in einer auf der Heliometeraxe senkrechten Ebene bewegt, in einer geraden Linie, welche durch die Heliometeraxe gehen sollte; was aber nicht vorausgesetzt, sondern deren Entfernung von der Heliometeraxe unbestimmt gelassen und durch b bezeichnet werden soll. Der jedesmalige Ort des Punktes O auf dieser Linie wird durch die Angabe der Schraube bestimmt; ich werde ihn durch m , und den der kleinsten Entfernung dieses Punktes von der Heliometeraxe zugehörigen Werth von m durch a bezeichnen. Die Richtung der Bewegungslinie von O wird durch die Angabe n des Positionskreises bestimmt, welche ihren Winkel mit der durch die Heliometeraxe und die Declinationsaxe gelegten Ebene, nämlich $Q, R, O = 90^\circ + n + k$ ergibt, wenn k den Indexfehler des Positionskreises bedeutet, oder die Angabe dieses Kreises für den Fall des Verschwindens von $Q, R, O = -90^\circ - k$ ist. Die Richtung derselben Linie, von der Ebene des Declinationskreises an gezählt, ist $= Q, R, O - Q, R, P$, also durch $n + k$ und die Grössen gegeben, welche Q, R, P bestimmen. Dieser Winkel gehört zu dem Dreiecke Q, R, P , in welchem $PR = 90^\circ - d$, $ZPR, = t$ sind, sowie auch PQ , und ZPQ , durch die Reduction der Ausdrücke (1) von P, Q , und ZP, Q , auf den Weltpol,

$$PQ, = 90^\circ - i, -x \sin t + y \cos t$$

$$ZPQ, = 90^\circ + T, -y \operatorname{tg} \varphi = 90^\circ + T + \gamma,$$

gefunden werden. Aus dem Unterschiede der beiden Winkel folgt

$$R, PQ, = ZPQ, - ZPR, = 90^\circ + T + \gamma, - t$$

und die Formeln (15) ergeben

$$T + \gamma, - t = (x \sin t - y \cos t + i) \operatorname{tg} d \\ - i \operatorname{sec} d + \beta \operatorname{sec} d \cos \varphi \sin t.$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in die trigonometrischen Formeln:

$$\sin Q, R, \cos Q, R, P = \cos PQ, \sin PR, \\ - \sin PQ, \cos PR, \cos R, P, Q, \\ \sin Q, R, \sin Q, R, P = \sin PQ, \sin R, P, Q,$$

erhält man

$$\sin Q, R, \cos Q, R, P = (x \sin t - y \cos t + i) \operatorname{sec} d \\ - i' \operatorname{tg} d + \beta \operatorname{tg} d \cos \varphi \sin t \\ \sin Q, R, \sin Q, R, P = 1$$

also

$$Q, R, P = 90^\circ - \{x \sin t - y \cos t + i\} \operatorname{sec} d \\ + i' \operatorname{tg} d - \beta \operatorname{tg} d \cos \varphi \sin t$$

und den Winkel der Bewegungslinie von O mit der Ebene des Declinationskreises $= PR, O = Q, R, O - Q, R, P = n + k + (x \sin t - y \cos t + i) \operatorname{sec} d$

$$- i' \operatorname{tg} d + \beta \operatorname{tg} d \cos \varphi \sin t \dots \dots (16)$$

wofür ich, um abzukürzen, $n + k$, schreiben werde. Die Entfernungen des Punktes O von der Ebene des Declinationskreises und der darauf senkrechten sind daher:

$$\operatorname{tg} \mathcal{A} \sin \pi = \operatorname{tg} R \{ (m - a) \sin(n + k) + b \cos(n + k) - (\mu - \alpha) \sin(\nu + \kappa) - \beta \cos(\nu + \kappa) \} \\ \operatorname{tg} \mathcal{A} \cos \pi = \operatorname{tg} R \{ (m - a) \cos(n + k) - b \sin(n + k) - (\mu - \alpha) \cos(\nu + \kappa) + \beta \sin(\nu + \kappa) \} \dots \dots \dots (17)$$

Die Declination δ und der Stundenwinkel τ des in der Absehenslinie einer der Objectivhälften erscheinenden Punktes der Himmelskugel sind hierdurch und durch die Declination d und den Stundenwinkel t des der Heliometeraxe entsprechenden gegeben, nämlich:

$$\sin \delta = \sin d \cos \mathcal{A} + \cos d \sin \mathcal{A} \cos \pi \\ \cos \delta \cos(\tau - t) = \cos d \cos \mathcal{A} - \sin d \sin \mathcal{A} \cos \pi \\ \cos \delta \sin(\tau - t) = - \sin \mathcal{A} \sin \pi \dots \dots (18)$$

8.

Die eben erlangten Formeln (17) und (18) führen zu der Bestimmung der relativen Lage zweier Punkte S und S' , deren Bilder im Fernrohre, durch verschiedene Stellung der beiden Objectivhälften, zur Deckung gebracht werden. Ich werde diese relative Lage durch

$$\operatorname{tg} \mathcal{A}' \sin \pi' = \operatorname{tg} R \{ (m' - a') \sin(n + k) + b' \cos(n + k) - (\mu - \alpha) \sin(\nu + \kappa) - \beta \cos(\nu + \kappa) \} \\ \operatorname{tg} \mathcal{A}' \cos \pi' = \operatorname{tg} R \{ (m' - a') \cos(n + k) - b' \sin(n + k) - (\mu - \alpha) \cos(\nu + \kappa) + \beta \sin(\nu + \kappa) \} \dots \dots \dots (17')$$

$$(m - a) \sin(n + k) + b \cos(n + k) \\ \text{und} \dots \dots (m - a) \cos(n + k) - b \sin(n + k)$$

Wenn $\mu, \alpha, \beta, \nu, \kappa, \alpha^*$ dieselben Bedeutungen für den zweiten, die Absehenslinie bestimmenden und mit dem Oculare beweglichen Punkt o haben, welche resp. m, a, b, n, k, k' für den optischen Mittelpunkt O der Objectivhälfte gegeben worden sind, so haben auch

$$(\mu - \alpha) \sin(\nu + \kappa) + \beta \cos(\nu + \kappa) \\ \text{und} \dots \dots (\mu - \alpha) \cos(\nu + \kappa) - \beta \sin(\nu + \kappa)$$

die den obigen Ausdrücken ähnlichen Bedeutungen, und man erhält, zur Bestimmung der Lage der Absehenslinie oO , die Ausdrücke:

$$f \operatorname{tg} R, S \sin PR, S = (m - \alpha) \sin(n + k) + b \cos(n + k) \\ - (\mu - \alpha) \sin(\nu + \kappa) - \beta \cos(\nu + \kappa) \\ f \operatorname{tg} R, S \cos PR, S = (m - \alpha) \cos(n + k) - b \sin(n + k) \\ - (\mu - \alpha) \cos(\nu + \kappa) + \beta \sin(\nu + \kappa)$$

wo f die Entfernung der beiden Ebenen bedeutet, in welchen O und o sich bewegen. Nimmt man die GröÙe einer Windung der Mikrometerschraube zum gemeinschaftlichen Maasse von $f, m, a, b, \mu, \alpha, \beta$, so hat man den Winkel R , welcher einer dieser Windungen entspricht, aus dem Ausdrucke

$$\operatorname{tg} R = \frac{1}{f}$$

und wenn man \mathcal{A} für R, S, π für PR, S schreibt:

die Entfernung $SS' = s$ und durch den an der Mitte M zwischen beiden Punkten stattfindenden Positionswinkel $PMS' = p = 180^\circ + PMS$ angeben; die Declination δ_o und den Stundenwinkel τ_o von M werde ich als bekannt ansehen. So wie die Formeln (17) und (18) geschrieben sind, sollen sie sich auf die Objectivhälfte I und den durch sie abgebildeten Punkt S beziehen; schreibt man darin

$$\mathcal{A}', \pi', m', a', k', b', \delta', \tau'$$

statt $\dots \dots \mathcal{A}, \pi, m, a, k, b, \delta, \tau$

so sollen sie für die Objectivhälfte II und den Punkt S' gelten. Die Bedeutung von k' ist der von k , nämlich, nämlich $k'_1 - k' = k, -k$. Man hat also zur Bestimmung der Lage des Punktes S' die Formeln:

*) Die Bezeichnung β ist schon für die Constante der Biegung der Heliometeraxe angewandt worden; allein aus ihrer neuen Bedeutung wird keine Verwirrung entstehen können, obgleich auch die vorige im Folgenden noch vorkommt.

$$\begin{aligned} \text{und} \\ \sin \delta' &= \sin d \cos \mathcal{A}' + \cos d \sin \mathcal{A}' \cos \pi' \\ \cos \delta' \cos (\tau' - t) &= \cos d \cos \mathcal{A}' - \sin d \sin \mathcal{A}' \cos \pi' \\ \cos \delta' \sin (\tau' - t) &= -\sin \mathcal{A}' \sin \pi' \end{aligned} \quad (18^*)$$

Schreibt man un abzukürzen u und v statt tg d sin π und tg d cos π, sowie auch u' und v' statt tg d' sin π' und tg d' cos π', und ferner r und r' statt

$$\sqrt{1 + uu + vv} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + u'u' + v'v'}$$

wodurch die Formeln (18) und (18*) sich in:

$$\begin{aligned} r \sin \delta &= \sin d + v \cos d \\ r \cos \delta \cos (\tau - t) &= \cos d - v \sin d \\ r \cos \delta \sin (\tau - t) &= -u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r' \sin \delta' &= \sin d' + v' \cos d' \\ r' \cos \delta' \cos (\tau' - t) &= \cos d' - v' \sin d' \\ r' \cos \delta' \sin (\tau' - t) &= -u' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \sin \frac{1}{2} s \sin p &= -\cos d \sin (\tau_0 - t) - u \cos (\tau_0 - t) + v \sin d \sin (\tau_0 - t) \\ r \sin \frac{1}{2} s \cos p &= -\sin d \cos \delta_0 + \cos d \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) - u \sin \delta_0 \sin (\tau_0 - t) \\ &\quad - v \{ \cos d \cos \delta_0 + \sin d \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} \\ r \cos \frac{1}{2} s &= \sin d \sin \delta_0 + \cos d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) - u \cos \delta_0 \sin (\tau_0 - t) \\ &\quad + v \{ \cos d \sin \delta_0 - \sin d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} \end{aligned} \quad (19)$$

und

$$\begin{aligned} r' \sin \frac{1}{2} s \sin p &= \cos d' \sin (\tau_0 - t) + u' \cos (\tau_0 - t) - v' \sin d' \sin (\tau_0 - t) \\ r' \sin \frac{1}{2} s \cos p &= \sin d' \cos \delta_0 - \cos d' \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) + u' \sin \delta_0 \sin (\tau_0 - t) \\ &\quad + v' \{ \cos d' \cos \delta_0 + \sin d' \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} \\ r' \cos \frac{1}{2} s &= \sin d' \sin \delta_0 + \cos d' \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) - u' \cos \delta_0 \sin (\tau_0 - t) \\ &\quad + v' \{ \cos d' \sin \delta_0 - \sin d' \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} \end{aligned} \quad (19^*)$$

Aus diesen 6 Gleichungen kann man d und t eliminiren und s und p bestimmen. Multiplicirt man die drei ersten in r', die drei letzten in r und zieht man die ersten Producte von den letzten ab, so erhält man:

$$0 = (r+r') \cos d \sin (\tau_0 - t) + (r'u + r'u') \cos (\tau_0 - t) - (r'v + rv') \sin d \sin (\tau_0 - t)$$

$$0 = (r+r') \{ \sin d \cos \delta_0 - \cos d \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} + (r'u + r'u') \sin \delta_0 \sin (\tau_0 - t) + (r'v + rv') \{ \cos d \cos \delta_0 + \sin d \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \}$$

$$0 = \{ \cos d - \sin d \operatorname{tg} g \cos G \} \sin (\tau_0 - t) + \operatorname{tg} g \sin G \cos (\tau_0 - t) \\ \{ \sin d + \cos d \operatorname{tg} g \cos G \} \cot g \delta_0 = \{ \cos d - \sin d \operatorname{tg} g \cos G \} \cos (\tau_0 - t) - \operatorname{tg} g \sin G \sin (\tau_0 - t)$$

schreiben. Aus der Summe ihrer Quadrate verschwindet τ₀ - t; addirt man zu ihr, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, das Quadrat von sin d + cos d tg g cos G, so ergibt sie

$$\frac{\{ \sin d + \cos d \operatorname{tg} g \cos G \}^2}{\sin^2 \delta_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 g$$

oder, wenn man

$$\begin{aligned} (\sin d + \cos d \operatorname{tg} g \cos G) \cot g \delta_0 \cos (\tau_0 - t) &= \cos d - \sin d \operatorname{tg} g \cos G \\ (\sin d + \cos d \operatorname{tg} g \cos G) \cot g \delta_0 \sin (\tau_0 - t) &= -\operatorname{tg} g \sin G \end{aligned}$$

verwandeln, und eliminirt man dadurch sowohl δ und τ als auch δ' und τ' aus den Ausdrücken von s und p, welche sowohl das Dreieck PMS als auch das Dreieck PMS' ergeben, nämlich aus:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} s \sin p &= \cos \delta \sin (\tau - \tau_0) \\ \sin \frac{1}{2} s \cos p &= -\sin \delta \cos \delta_0 + \cos \delta \sin \delta_0 \cos (\tau - \tau_0) \\ \cos \frac{1}{2} s &= \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (\tau - \tau_0) \end{aligned}$$

und aus:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} s \sin p &= -\cos \delta' \sin (\tau' - \tau_0) \\ \sin \frac{1}{2} s \cos p &= \sin \delta' \cos \delta_0 - \cos \delta' \sin \delta_0 \cos (\tau' - \tau_0) \\ \cos \frac{1}{2} s &= \sin \delta' \sin \delta_0 + \cos \delta' \cos \delta_0 \cos (\tau' - \tau_0) \end{aligned}$$

so erhält man:

$$0 = (r-r') \{ \sin d \sin \delta_0 + \cos d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} + (r'u - r'u') \cos \delta_0 \sin (\tau_0 - t) - (r'v - rv') \{ \cos d \sin \delta_0 - \sin d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \}$$

Setzt man

$$\frac{r'u + r'u'}{r+r'} = \operatorname{tg} g \sin G$$

$$\frac{r'v + rv'}{r+r'} = \operatorname{tg} g \cos G$$

so kann man die beiden ersten dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \{ \cos d - \sin d \operatorname{tg} g \cos G \} \sin (\tau_0 - t) + \operatorname{tg} g \sin G \cos (\tau_0 - t) \\ &\quad - (r'v - rv') \{ \cos d \sin \delta_0 - \sin d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} \\ \operatorname{tg} \mu &= \operatorname{tg} g \cos G \end{aligned}$$

setzt:

$$\cos \mu \sin \delta_0 = \cos g \sin (d + \mu).$$

Multiplicirt man die erste Gleichung in sin (τ₀ - t), die zweite in cos (τ₀ - t); ferner die erste in -cos (τ₀ - t), die zweite in sin (τ₀ - t), so sind die Summen der Producte:

und man erlangt durch ihre Verbindung mit der vorigen Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_0 &= \frac{\cos g}{\cos \mu} \sin (d + \mu) \\ \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) &= \frac{\cos g}{\cos \mu} \cos (d + \mu) \\ \cos \delta_0 \sin (\tau_0 - t) &= -\sin g \sin G \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

welche Ausdrücke auch der noch nicht berücksichtigten

$$\left. \begin{aligned} (r' + r) \sin \frac{1}{2} s \sin p &= (u' - u) \cos (\tau_0 - t) - (v' - v) \sin d \sin (\tau_0 - t) \\ (r' + r) \sin \frac{1}{2} s \cos p &= (u' - u) \sin \delta_0 \sin (\tau_0 - t) + (v' - v) \{ \cos d \cos \delta_0 + \sin d \sin \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} \\ (r' + r) \cos \frac{1}{2} s &= 2 \{ \sin d \sin \delta_0 + \cos d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \} - (u' + u) \cos \delta_0 \sin (\tau_0 - t) \\ &\quad + (v' + v) \{ \cos d \sin \delta_0 - \sin d \cos \delta_0 \cos (\tau_0 - t) \}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

wo Alles was rechts von den Gleichheitszeichen steht gegeben ist, theils durch die Ablesungen am Instrumente, theils durch die, die Kenntniss seines jedesmaligen Zustandes gewährenden Grössen, endlich durch die Formeln (20).

9.

Wenn auch der Fall vorkommen kann, dass man die Formeln (21) vollständig anwenden muss, nämlich dann, wenn die beiden Punkte so nahe bei dem Pole stehen, dass u, v, u', v' , vergleichungsweise mit ihren Entfernungen vom demselben, nicht als kleine Grössen

$$\left. \begin{aligned} (r' + r) \sin \frac{1}{2} s \sin p &= (u' - u) \{ 1 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 \operatorname{tg} \delta_0^2 \} + (v' - v) \{ \frac{1}{2} (u' + u) \operatorname{tg} \delta_0 - \frac{1}{2} (u' + u) (v' + v) \} \\ (r' + r) \sin \frac{1}{2} s \cos p &= (v' - v) \{ 1 - \frac{1}{2} (v' + v)^2 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 \operatorname{tg} \delta_0^2 \} - (u' - u) \frac{1}{2} (u' + u) \operatorname{tg} \delta_0 \\ (r' + r) \cos \frac{1}{2} s &= 2 \{ 1 + \frac{1}{2} (u' + u)^2 + \frac{1}{2} (v' + v)^2 \} \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} s \sin p &= (u' - u) \{ 1 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 - \frac{1}{2} (v' + v)^2 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 \operatorname{tg} \delta_0^2 \} + (v' - v) \{ \frac{1}{2} (u' + u) \operatorname{tg} \delta_0 - \frac{1}{2} (u' + u) (v' + v) \} \\ 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} s \cos p &= (v' - v) \{ 1 - \frac{1}{2} (v' + v)^2 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 - \frac{1}{2} (u' + u)^2 \operatorname{tg} \delta_0^2 \} - (u' - u) \frac{1}{2} (u' + u) \operatorname{tg} \delta_0 \end{aligned} \right\} (22)$$

in welchen Ausdrücken $u' - u, v' - v, u' + u, v' + v$ nun durch zweckmässige Bezeichnungen zu ersetzen sind.

Bezeichnet man den Winkel zwischen den Bewegungslinien des Oculars und der Objectivhälfte II durch α , sodass $\nu + \alpha = n + k' - \alpha$ ist, und setzt man

$$\left. \begin{aligned} f \sin F &= \operatorname{tg} R \{ (m - a) \sin (k - k') + b \cos (k - k') \\ &\quad + (\mu - \alpha) \sin \alpha - \beta \cos \alpha \} \\ f \cos F &= \operatorname{tg} R \{ (m - a) \cos (k - k') - b \sin (k - k') \\ &\quad - (\mu - \alpha) \cos \alpha - \beta \sin \alpha \} \end{aligned} \right\} (23)$$

so erhält man, durch Multiplication in $\cos (n + k')$ und $\sin (n + k')$, sowie auch in $-\sin (n + k')$ und $\cos (n + k')$, und durch Addition der Producte (17):

$$\left. \begin{aligned} u &= f \sin (n + k' + F) \\ v &= f \cos (n + k' + F) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

wo f und $n + k' + F$ die § 7 durch $\operatorname{tg} d$ und α bezeichneten Grössen sind. Setzt man ferner

dritten Gleichung genügeleisten. Hierdurch sind d und t bestimmt, nämlich $\tau_0 - t$ wird durch

$$\sin (\tau_0 - t) = \frac{-\sin g \sin G}{\cos \delta_0}$$

bekannt und darauf d durch:

$$\operatorname{tg} (d + \mu) = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\cos (\tau_0 - t)}$$

Durch Addition der Gleichungen (19) und (19*) werden s und p bestimmt, nämlich:

angesehen werden können, so wird man sie doch gewöhnlich als solche Grössen betrachten, und dann statt der Formeln selbst eine näherungsweise richtige Entwicklung derselben anwenden können. Diese besitzt, wenn sie anwendbar ist, Vorzüge vor den Formeln selbst, weshalb ich sie jetzt aufsuchen werde. Sie beruht auf der Vernachlässigung aller über die dritte Ordnung von u, v, u', v' hinausgehenden Grössen, fordert also, dass man die in $u' - u, v' - v, u' + u, v' + v$ multiplicirten Ausdrücke (21) bis zu der zweiten Ordnung incl. entwickle.

Dadurch erhält man:

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin E &= \operatorname{tg} R \left\{ \begin{aligned} -(m - a) \sin (k - k') \\ + b' - b \cos (k - k') \end{aligned} \right\} \\ 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \cos E &= \operatorname{tg} R \left\{ \begin{aligned} m - a' - (m - a) \cos (k - k') \\ + b \sin (k - k') \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (25)$$

so folgt daraus, durch die eben angewandten Multiplicationen und Additionen,

$$\left. \begin{aligned} u' - u &= 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin (n + k' + E) \\ v' - v &= 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \cos (n + k' + E) \end{aligned} \right\} \dots \dots (26)$$

Aus (24) und (26) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (u' + u) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin (n + k' + E) + f \sin (n + k' + F) \\ \frac{1}{2} (v' + v) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \cos (n + k' + E) + f \cos (n + k' + F) \end{aligned} \right\} (27)$$

Setzt man die Ausdrücke (26) von $u' - u$ und $v' - v$ in die Formeln (22), multiplicirt man sie dann in $\frac{1}{2} \cot g \frac{1}{2} S \cos (n + k' + E)$, und $-\frac{1}{2} \cot g \frac{1}{2} S \sin (n + k' + E)$ sowie auch in

$$\frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} S \sin(n+k'+E) \text{ und } \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} S \cos(n+k'+E)$$

so erhält man die Summen der Producte:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} S} \sin(p-n-k'-E) &= \frac{1}{2}(n'+u) \operatorname{tg} \delta_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos(n+k'+E) \left[\{(u'+u)^2 - (v'+v)^2\} \sin(n+k'+E) + 2(u'+u)(v'+v) \cos(n+k'+E) \right] \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} S} \cos(p-n-k'-E) &= 1 - \frac{1}{2} \left[(u'+u)^2 + (v'+v)^2 + (u'+u) \operatorname{tg} \delta_0^2 + \{(u'+u) \sin(n+k'+E) + (v'+v) \cos(n+k'+E)\}^2 \right] \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} s &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \left[1 - \frac{1}{2} \left[(u'+u)^2 + (v'+v)^2 + \{(u'+u) \sin(n+k'+E) + (v'+v) \cos(n+k'+E)\}^2 \right] \right] \\ p &= n+k'+E + \frac{1}{2}(n'+u) \operatorname{tg} \delta_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos(n+k'+E) \left[\{(u'+u)^2 - (v'+v)^2\} \sin(n+k'+E) + 2(u'+u)(v'+v) \cos(n+k'+E) \right] \end{aligned}$$

und wenn die Ausdrücke (27) von $u'+u$ und $v'+v$ gesetzt werden:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} s = \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \left\{ 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2 - 2f \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \cos(F-E) - \frac{1}{2} ff(1 + \cos(F-E))^2 \right\} \\ p = n+k'+E + \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin(n+k'+E) + f \sin(n+k'+F) \right\} \operatorname{tg} \delta_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2 \sin 2(n+k'+E) \\ - f \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin(n+k'+F) \cos(n+k'+E) - \frac{1}{2} ff \sin(n+k'+2F-E) \cos(n+k'+E) \quad \dots (28)$$

Man kann aber diese Formeln noch vereinfachen, indem man die Beschaffenheit des Winkels E gehörig berücksichtigt. Den Formeln (25) zufolge ist $2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin E$ von der Ordnung von $k-k'$ und $b'-b$, und $2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \cos E$ ist nur in der Ordnung der Quadrate und Producte dieser Grössen von der Grösse $\frac{1}{2} \{m'-a'-m+a\}$ verschieden. Diese Grössen sind aber, indem die Bewegungslinien der optischen Mittelpunkte beider Objectivhälften sehr nahe zusammenfallen müssen, immer sehr kleine Grössen, und es folgt daraus, dass E im Allgemeinen entweder ein kleiner, oder ein wenig von 180° verschiedener Winkel ist, das erstere, wenn $m'-a'-m+a$ positiv, das letztere wenn es negativ

ist. Ausgenommen hiervon ist der Fall, in welchem die zu messende Entfernung so klein ist, dass sie selbst als eine Grösse von der Ordnung von $k-k'$ und $b'-b$ angesehen werden muss, in welchem Falle E jede Grösse, und die bei vorhandenen Werthen von $m-a, k-k', b', b$ messbare Entfernung eine kleinste Grenze, welche die erste der Formeln (25)

= $\operatorname{tg} R \{ -(m-a) \sin(k-k') + b'-b \cos(k-k') \}$ ergibt, erlangen kann. Wenn diese Ausnahme nicht stattfindet, kann man also, in den Gliedern der zweiten Ordnung der Formeln (28), E entweder $= 0$ oder $= 180^\circ$ setzen, sowie p statt $n+k'+E$ schreiben. Dadurch werden sie

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} s &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \left\{ 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2 \mp 2f \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \cos F - \frac{1}{2} ff(1 + \cos F^2) \right\} \\ p &= n+k'+E + \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin p \pm f \sin(p+F) \right\} \operatorname{tg} \delta_0 - \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2 \sin p \pm f \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin(p+F) + \frac{1}{2} ff \sin(p+2F) \right\} \cos p \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2 \sin 2p \pm f \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin(2p+F) + \frac{1}{2} ff \sin(2p+2F) \right\} \operatorname{tg} \delta_0^2 \end{aligned}$$

wo das obere oder das untere Zeichen genommen wird, je nachdem $m'-a'-m+a$ positiv oder negativ ist. Aber auch in dem Ausnahmefalle können diese Formeln angewandt werden, weil, bei einem sehr kleinen Werthe von S , die Glieder derselben, welche durch diesen Fall geändert werden, ohne merklichen Nachtheil sogar ganz

vernachlässigt werden könnten. Dividirt man noch die erste Formel durch $1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2$, schreibt man in den kleineren Gliedern $\frac{1}{2} s$ statt $\operatorname{tg} \frac{1}{2} S$ und setzt man für k' seinen Ausdruck (16), in diesem aber δ_0 und τ_0 statt d und t , was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, so erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} s &= 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \left\{ 1 + fs \cos F - \frac{1}{2} ff(1 + \cos F^2) \right\} \\ p &= n+k'+E + \left\{ x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0 + i \right\} \sec \delta_0 + \left\{ \frac{1}{2} s \sin p \pm f \sin(p+F) - i' + \beta \cos \varphi \sin \tau_0 \right\} \operatorname{tg} \delta_0 \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin p \pm \frac{1}{2} f s \sin(p+F) + \frac{1}{2} f f \sin(p+2F) \right\} \cos p - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin 2p \pm \frac{1}{2} f s \sin(2p+F) + \frac{1}{2} f f \sin(2p+2F) \right\} \operatorname{tg} \delta_0^2 \quad (29) \end{aligned}$$

Der Ausdruck von p bezieht sich auf die Richtung von dem durch die erste Objectivhälfte (I) abgebildeten Punkte nach dem durch die zweite (II) abgebildeten. Die Grössen von S und E , und ob das letztere kleiner oder grösser als 90° zu nehmen ist, werden durch die Formeln (25) bestimmt. Man darf aber bei der An-

wendung des Ausdrucks von p das nicht übersehen, was im 2. §. bei Gelegenheit der Formeln (2), gesagt worden ist: wenn der Pol Q der Declinationsaxe den durch die Beobachtung miteinander verglichenen Punkten vorgeht, so ist p der von dem Nordpol an, nach der Richtung, nach welcher die Geraden aufsteigungen

wachsen, gezählte Positionswinkel PMS' ; wenn er auf sie folgt, so ist unter δ_0 die Ergänzung der Declination zu 180° und unter τ_0 der um 180° veränderte Stundenwinkel zu verstehen, und p ist dann der um 180° veränderte Positionswinkel, oder der Positionswinkel PMS .

10.

Die Bilder der beiden Punkte S, S' können, bei jeder Stellung der beiden Objectivhälften und des Oculars, auf zwei verschiedene Arten an dem mit der Stellung des Oculars veränderlichen Punkte o (§ 7) zur Vereinigung gebracht werden; nämlich dadurch, dass man die Absehselinie der anderen Objectivhälfte, durch Verschiebung derselben, in entgegengesetzte Lagen gegen die der ersteren bringt. Durch die Verbindung der in diesen beiden Fällen gemachten Beobachtungen miteinander wird ihr Resultat frei von der Kenntniss von $a, a', b, b', k' - k$. Dieses werde ich jetzt entwickeln.

Lässt man die Objectivhälfte, von welcher in den Formeln des vorigen §'s angenommen worden ist, dass sie das Bild des Punktes S ergibt, ohne Aenderung, verschiebt man aber die andere bis die zweite Vereinigung der Bilder erfolgt, wozu auch eine gemeinschaftliche Drehung beider um die Heliometeraxe erforderlich sein kann, so macht diese Hälfte jetzt das Bild von S , die andere das Bild von S' . Bezeichnet man die durch diese zweite Beobachtung ergebenden Werthe von m' und n durch m'_1 und n_1 , sowie die sich auf sie beziehenden Werthe von S, E, p durch S_1, E_1, p_1 , so werden die hierdurch abgeänderten Formeln (25) und (29) für den gegenwärtigen Fall gültig.

1. Beobachtung.

$$\text{tg } s = \text{tg } R \frac{m' - a' - m + a}{\cos E} \{1 - fs \cos F - \frac{1}{2} ff(1 + \cos F^2)\}$$

$$p = n + k' + E + (x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0 + i) \sec \delta_0 + \left\{ \frac{1}{2} s \sin p + f \sin(p + F) - i' + \beta \cos \varphi \sin \tau_0 \right\} \text{tg } \delta_0 \\ - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin p + \frac{1}{2} f s \sin(p + F) + \frac{1}{2} ff \sin(p + 2F) \right\} \cos p - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin 2p + \frac{1}{2} f s \sin(2p + F) + \frac{1}{2} ff \sin(2p + 2F) \right\} \text{tg } \delta_0^2$$

2. Beobachtung ($180^\circ - E, 180^\circ + p$ statt E, p und die entgegengesetzte Annahme der zweideutigen Zeichen).

$$\text{tg } s = \text{tg } R \frac{m - a - m'_1 + a'}{\cos E} \{1 + fs \cos F - \frac{1}{2} ff(1 + \cos F^2)\}$$

$$p = n_1 + k' - E + (x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0 + i) \sec \delta_0 + \left\{ -\frac{1}{2} s \sin p + f \sin(p + F) - i' + \beta \cos \varphi \sin \tau_0 \right\} \text{tg } \delta_0 \\ - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin p - \frac{1}{2} f s \sin(p + F) + \frac{1}{2} ff \sin(p + 2F) \right\} \cos p - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin 2p - \frac{1}{2} f s \sin(2p + F) + \frac{1}{2} ff \sin(2p + 2F) \right\} \text{tg } \delta_0^2$$

Die aus beiden Beobachtungen zusammengenommenen hervorgehenden Werthe werden durch die halbe

$$\text{tg } s = \text{tg } R \frac{m' - m'_1}{2 \cos E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} ff(1 + \cos F^2) \right\}$$

$$p = \frac{n + n_1}{2} + k' + (x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0 + i) \sec \delta_0 + \left\{ f \sin(p + F) - i' + \beta \cos \varphi \sin \tau_0 \right\} \text{tg } \delta_0 \dots (30) \\ - \frac{1}{4} s s \sin 2p - \frac{1}{2} ff \cos p \sin(p + 2F) - \left\{ \frac{1}{2} s s \sin 2p + \frac{1}{2} ff \sin(2p + 2F) \right\} \text{tg } \delta_0^2$$

Man hat also, statt (25):

$$2 \text{tg } \frac{1}{2} S \sin E = \text{tg } R \{ -(m-a) \sin(k-k') + b' - b \cos(k-k') \} \\ 2 \text{tg } \frac{1}{2} S \cos E = \text{tg } R \{ m'_1 - a' - (m-a) \cos(k-k') + b \sin(k-k') \}$$

Da $m'_1 - a'$ und $m' - a'$ auf entgegengesetzten Seiten von $m - a$ sind, so haben $2 \text{tg } \frac{1}{2} S \cos E$, und $2 \text{tg } \frac{1}{2} S \cos E$ verschiedene Zeichen; $2 \text{tg } \frac{1}{2} S \sin E$, und $2 \text{tg } \frac{1}{2} S \sin E$ sind einander gleich. Da S , und S nur in Grössen der dritten Ordnung von einander abweichen können, so folgt daraus, dass E , nur in Grössen von der Ordnung des Products von $(k - k')$ $\sin E$ in ss, sf, ff von $180^\circ - E$ verschieden sein kann, welche Verschiedenheit als unmerklich betrachtet werden darf. Die Anwendung der Formeln (29) auf die zweite Beobachtung fordert daher, dass man den darin enthaltenen doppelten Zeichen die der ersten entgegengesetzte Bedeutung beilege. Indessen kann man die lästige Trennung der beiden Fälle, in welchen E für die erste Beobachtung entweder $< 90^\circ$ oder $> 90^\circ$ ist, dadurch vermeiden, dass man diejenige von beiden, für welche $E < 90^\circ$ ist, für die erste annimmt, für die auf welche die Bezeichnungen m' und n sich beziehen. Unter dieser Bedingung werden in den Formeln (29) die oberen Zeichen, in ihrer Anwendung auf die zweite Beobachtung die unteren gelesen; und die Bedeutung von p wird in der zweiten Beobachtung, indem nun die unverändert gelassene Objectivhälfte den Punkt S' abbildet, die von der vorigen um 180° verschiedene. — Der grösseren Deutlichkeit wegen werde ich die Anwendung der Formeln (29) auf beide Beobachtungen hierher schreiben, auch den Ausdruck von $2 \text{tg } \frac{1}{2} S$ (25) substituiren und daraus die immer unmerklichen Grössen weglassen:

Wenn die Declinationsaxe (ihr Pol Q) vorangeht, so drückt die letzte Formel den Positionswinkel der Richtung von dem Punkte, welcher in der am wenigsten vorderlichten Objectivhälfte, oder (im umgekehrt zeigenden Fernrohre) den Köpfen der Mikrometerschrauben am nächsten gesehen wird, nach dem in der am meisten vorderlichten erscheinenden aus; wenn sie folgt drückt die Formel den Positionswinkel der entgegengesetzten Richtung aus. Dann sind aber $180^\circ - \delta_0$ und $180^\circ + \tau_0$ statt δ_0 und τ_0 zu lesen.

Der Ausdruck von E wird durch den Unterschied der beiden Formeln für p erlangt, nämlich:

$$E = \frac{n_1 - n_2}{2} - \frac{1}{2} s \sin p \operatorname{tg} \delta_0 + \frac{1}{2} f s \cos p \sin(p + F) + \frac{1}{2} f s \sin(2p + F) \operatorname{tg} \delta_0^2 \dots \dots \dots (31)$$

Der Ausdruck von $\operatorname{tg} s$ setzt zwar E als bekannt voraus, allein da es nur für sehr kleine Werthe von s , für solche deren Grösse selbst vergleichungsweise mit den sehr kleinen $k - k'$ und $b - b'$ nicht beträchtlich ist, so gross werden kann, dass sein Cosinus merklich von 1 verschieden ist, so darf dieser nur berücksichtigt werden, wenn eine sehr kleine Entfernung durch die Beobachtungen bestimmt werden soll. In diesem Falle aber kann man $E = \frac{1}{2}(n_1 - n_2)$ annehmen.

Der Vortheil, welchen die jetzt entwickelte Methode, zwei zusammengehörige Beobachtungen zum Resultate zu vereinigen, gewährt, nämlich die Befreiung desselben von der Kenntniss von a, a', b, b' und $k - k'$, kann durch die Bestimmung dieser Grössen und die Berechnung ihrer Einflüsse auf einzelne Beobachtungen nicht ersetzt werden. Es ist nämlich zweifelhaft, ob ihre Werthe in allen Lagen des Instruments gegen den Horizont sich gleich bleiben. Wenn ein Helioneter angewandt werden soll, welches in dieser Beziehung noch nicht geprüft worden ist, so ist die Methode der zusammengehörigen Beobachtungspare nicht bloss bequem und vortheilhaft, sondern nothwendig. Ich glaube, dass man sich nicht leicht berechtigt finden wird, diese Nothwendigkeit zurückzuweisen.

11.

Stellt man die Absehnlinie der einen Objectivhälfte, derjenigen, welche man während der Beobachtung unverrückt lassen will, statt ihrer Lage durch willkürliche Werthe von m, μ und ν zu bestimmen, der Helioneteraxe parallel, welches durch $m - a = \mu - a$ und zugleich $\mu + k = \nu + k$, am einfachsten aber durch $m - a = \mu - a = 0$ geschieht, so vereinfachen sich die Formeln (30) beträchtlich, indem dann $f = 0$ wird.

Sie werden:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} s &= \operatorname{tg} R \frac{m' - m}{2 \cos E} \\ p &= \frac{n_1 + n_2}{2} + k' + (x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0 + i) \operatorname{sec} \delta_0 \\ &\quad - (i' - \beta \cos \varphi \sin \tau_0) \operatorname{tg} \delta_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} s s \sin 2p (1 + 2 \operatorname{tg} \delta_0^2) \end{aligned} \right\} (32)$$

Die Anwendung dieser Beobachtungsart empfiehlt sich also durch die Symmetrie die sie den Beobachtungen, und die Einfachheit die sie ihrer Berechnung gibt. Will man die Uebereinstimmung der beiden einzelnen Beobachtungen des Positionswinkels, welche zu der hier angenommenen vollständigen Beobachtung vereinigt worden sind, prüfen, so geschieht dieses durch die Formel (31), indem man darin, falls $b, b', k - k'$ durch Berichtigung des Instruments zum Verschwinden gebracht sind, $E = 0$ setzt; falls man ihre Werthe kennt, aber E nach (25) berechnet.

Ich erwähne noch einer zweiten Beobachtungsmethode, welche darin besteht, dass man $m = a$ macht, die Verschiebungslinien der Objectivhälften und des Oculars parallel stellt, das letztere aber zwischen beiden Beobachtungen nicht unverrückt lässt, sondern bei der einen so stellt, dass $\mu - a = \frac{1}{2}(m' - a')$, bei der anderen so, dass $\mu - a = \frac{1}{2}(m' - a')$ ist. Bei dieser Anordnung der Beobachtungen ist $f = \frac{1}{2}s$, und F für die eine Beobachtung $= 180^\circ$, für die andere $= 0$, und man erhält, indem man diese Aenderung in (29) und (30) macht, die Endformeln für die vollständige Beobachtung:

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} s &= \operatorname{tg} R \frac{m' - m}{2 \cos E} \\ p &= \frac{n_1 + n_2}{2} + k' + (x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0 + i') \operatorname{sec} \delta_0 \\ &\quad - (i' - \beta \cos \varphi \sin \tau_0) \operatorname{tg} \delta_0 \end{aligned} \right\} (33)$$

Dieses Verfahren unterscheidet sich dadurch von dem vorigen, dass es die Strahlen von beiden beobachteten Punkten in gleichen Winkeln ($= \frac{1}{2}s$) mit den Axen der beiden Objectivhälften einfallen lässt, während sie bei dem vorigen mit der Axe der einen Objectivhälfte den Winkel s machen, der anderen aber parallel einfallen; es erlangt hierdurch den Vorzug, dass es die Undeutlichkeit der Bilder vermindert, welche nothwendige Folge ihrer Entfernung von der Axe eines Objectivs ist, und in einem mit derselben schnell zunehmenden Verhältnisse wächst. Dagegen ist es in seiner Ausführung weniger einfach als das vorige, das Ocular unverrückt in der Helioneteraxe lassende Verfahren. Wenn die zu beobachtenden Punkte nicht über die Grenze des hinreichend deutlichen Sehens hinaus

von einander entfernt sind, so scheint mir im Allgemeinen kein Grund vorhanden zu sein, diese grössere Einfachheit der Beobachtungen aufzuopfern.

Ein drittes Verfahren vereinigt den Vorzug des zweiten mit der Einfachheit der Ausführung des ersten: es besteht darin, dass mau das Ocular in die Heliometeraxe, die beiden Objectivhälften aber in entgegengesetzte, gleich grosse Entfernungen von derselben stellt. Wenn ich ihm dennoch die beiden ersten Methoden vorziehe, so ist der Grund davon, dass man bei diesen alle Messungen durch eine der beiden Heliometerschrauben erlangen kann. Ich bin nämlich der Meinung, dass man diese Schrauben nicht als gleichförmig geschnitten annehmen soll, sondern sie einer Untersuchung unterwerfen muss, aus welcher Verbesserungen ihrer unmittelbaren Angaben hervorgehen können und, nach meinen Erfahrungen, hervorgehen werden; diese Untersuchung ist aber, wenn sie bis zu grosser Sicherheit getrieben werden soll, so schwierig, dass es mir wünschenswerther erscheint, alle Zeit, die man darauf zu verwenden beabsichtigt, einer der beiden Schrauben zu widmen, als sie auf beide zu vertheilen. — In Fällen, in welchen eine zu messende Entfernung sich schnell ändert, wird die stets symmetrische Stellung der beiden Objectivhälften nicht ohne einigen Zeitverlust erlangt werden können. Von dieser Unbequemlichkeit ist das erste Verfahren frei; das zweite erfährt sie in grösserem Maasse als das dritte. — Zur Berechnung der nach dem dritten gemachten Beobachtungen dienen auch die Formeln (33), in welchen aber $\frac{1}{2}(k+k')$ statt k' zu nehmen ist.

Wenn man das Resultat einer vollständigen Beobachtung auch von den Abweichungen der Declinationsaxe und der Heliometeraxe von ihren senkrechten Stellungen auf resp. der Stundenaxe und der Declinationsaxe, und eben so von dem Einflusse der Biegung der letzteren befreien will, ohne $i, i' = i + \alpha \sin \varphi$ und i' als bekannt voraussetzen, so muss man die Beobachtung in entgegengesetzten Lagen der Declinationsaxe wiederholen. Die Formeln (32) und (33) zeigen, dass i und i' aus dem Mittel dieser beiden Beobachtungen verschwinden.

12.

Die § 9—11 gegebenen Formeln setzen voraus, dass die Bilder der beiden Punkte S und S' in dem Punkte o , wofür man wohl immer den Mittelpunkt des Scheffeldes annehmen wird, zur Deckung gebracht seien. Diese Voraussetzung ist jedenfalls desto näher richtig, je stärker das Ocular vergrössert, je kleiner daher sein

Scheffeld ist. Nichtsdestoweniger aber ist es nöthig, die Einflüsse zu untersuchen, welche eine Abweichung von der Voraussetzung auf s und auf p hat.

Offenbar hört die ausser der Axe des Oculars beobachtete Deckung der Bilder nicht auf stattzufinden, wenn man diese Axe so verrückt, dass sie mit den sich deckenden Bildern zusammenfällt. Die Formeln (29) drücken daher s und p , auch wenn der Voraussetzung nicht entsprechen wird, richtig aus, allein f und F beziehen sich dann nicht auf die Axe des Oculars, sondern auf den Punkt des Scheffeldes, wo die Deckung der Bilder beobachtet worden ist. Bezeichnet man die Entfernung dieses Punktes (o') von der Axe des Oculars (o) durch h , den Winkel der Linie oo' mit der Linie SS' durch H , und zählt man H und α in gleicher Richtung, so sind die Aenderungen, welche $f \sin F$ und $f \cos F$ erfahren, den Formeln (23) zufolge:

$$= h \sin H \quad \text{und} \quad = -h \cos H.$$

Sieht man h als eine kleine Grösse an, deren Quadrat vernachlässigt werden kann, so erhält man seine Einflüsse (29):

$$\text{auf } \operatorname{tg} s = h k \{ (\pm s - 2f \cos F) \cos H - f \sin F \sin H \}$$

$$\begin{aligned} \text{auf } \dots p &= h \{ \pm (\operatorname{tg} \delta_0 - \frac{1}{2} s \cos p) \sin(p+H) \\ &\quad - f \cos p \sin(p+F+H) \\ &\quad - \{ \pm \frac{1}{2} s \sin(2p+H) + f \sin(2p+F+H) \} \operatorname{tg} \delta \} \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass der Einfluss von h auf die Messung der Entfernung, von der Ordnung des Products von h in s und $s f$, und, da h wohl nicht über einige Minuten steigen wird, selbst bei den grössten vorkommenden Werthen von s und f , von geringer Bedeutung ist. Der grösste Theil seines Einflusses auf den Positionswinkel ist der Tangente der Declination proportional; aber er verschwindet, wenn $\sin(p+H) = 0$, also H entweder $= -p$ oder $= 180^\circ - p$ ist, oder wenn der Punkt, wo die Bilder zur Deckung gebracht werden, in dem durch die Axe des Oculars gehenden Declinationskreise liegt. Wenn das Helimeter von einem Uhrwerke der täglichen Bewegung gemäss fortbewegt wird, so wird dadurch die Entfernung der einmal in die Axe des Oculars gebrachten Bilder von dem ihr entsprechenden Declinationskreise, verhindert. Je grösser die Declination der beobachteten Punkte ist, desto aufmerksamer muss man allerdings sein, die Deckung ihrer Bilder nicht beträchtlich ausser dem Declinationskreise der Axe des Oculars zu bewirken; allein dennoch wird die Schätzung der Mitte des Scheffeldes den Punkt, wo die Beobachtung gemacht werden soll, immer sicher genug andeuten, um nicht zu

der Anwendung eines beleuchteten Fadennetzes zu veranlassen.

13.

Ich werde jetzt zeigen, wie man $k-k'$, $b'-b$ und k' , sowie auch β und x durch Beobachtungen bestimmen kann. Beobachtet man den Positionswinkel eines Doppelsterns, so erlangen $k-k'$ und $b'-b$ desto grössere Einflüsse auf die beiden einzelnen Einstellungen des Positionskreises, welche zusammen eine vollständige Beobachtung ergeben, je näher bei einander die beiden, den Doppelstern zusammensetzenden Sterne sind. Es ist daher vortheilhaft, die Bestimmung von $k-k'$ und $b'-b$ auf solche Beobachtungen zu gründen.

Vernachlässigt man die Glieder der Formel (31), welche bei der vorausgesetzten Kleinheit von s von keiner Bedeutung sind, nimmt man also $E = \frac{1}{2}(n, -n)$, so erhält man, aus (25) und (31), für eine der beiden zusammengehörigen Beobachtungen hinreichend nahe:

$$s \cos \frac{1}{2}(n, -n) = R\{m' - a' - m + a\}$$

$$s \sin \frac{1}{2}(n, -n) = R\{(m-a)(k'-k) + b'-b\}$$

und für die andere:

$$s \cos \frac{1}{2}(n, -n) = R\{m - a - m' + a'\}$$

$$s \sin \frac{1}{2}(n, -n) = R\{(m-a)(k'-k) + b'-b\}$$

und aus der Verbindung dieser:

$$\frac{1}{2}(m' - m') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(n, -n) = (m-a)(k'-k) + b'-b. \quad (34)$$

Soleher Ausdrücke des eraten, aus der unmittelbaren Beobachtung hervorgehenden Gliedes, kann man so viele erhalten, als man die Beobachtungen auf verschiedene Werthe von m beziehen will. Man kann also die beiden, in diesen Ausdrücken enthaltenen unbekannt Grössen $k'-k$ und $b'-b$ vortheilhaft bestimmen. Ich bemerke hierbei, dass es weder nöthig noch vortheilhaft ist, das Bild, welches die eine Objectivhälfte von dem einen, mit dem Bilde welches die andere von dem anderen Sterne des Doppelsterns macht, zur Deckung zu bringen, sondern dass es hinreicht, die beiden Bilder des Doppelsterns in gerade Linie und auf beiden Seiten in gleiche Entfernung von einander zu legen.

Den Indexfehler des Positionskreises k' kann man bestimmen, indem man $m'-a'$ und $m-a$ beträchtlich verschieden von einander macht, und dann die Stellung des Positionskreises aufsucht, welche die beiden Bilder

eines festen Punktes, durch Drehung des Instruments, entweder um die Stundenaxe oder um die Declinationsaxe, nach einander in die Absehslinie gelangen lässt. Durch Wiederholung dieser Beobachtung, nach vorausgegangener beträchtlicher Veränderung von m' , kann das Resultat von dem Einflusse von $k'-k$ und $b'-b$ befreiet werden. Ich werde die Verbindung aufsuchen, welche zwischen den aus solchen Beobachtungen hervorgehenden Angaben n des Positionskreises und seinem Indexfehler k' stattfindet.

Wenn das Instrument um die Stundenaxe gedreht werden und ein fester Punkt dadurch in die Absehslinie jeder der Objectivhälften gelangen soll, so wird hierdurch gefordert, dass eine unbestimmte Veränderung von Z, P, Q , während P, Q, R ungeändert bleibt, die beiden Absehslinien durch jenen Punkt führt. Indem hier die Angabe des Declinationskreises des Instruments ungeändert bleibt, erlangt man die der Forderung entsprechende Gleichung, indem man die Ausdrücke der Declination δ des festen Punktes durch die Angabe des Declinationskreises des Instruments und die, die Lage jeder der beiden Objectivhälften bestimmenden Grössen einander gleich setzt. Ich werde die Formeln (18) von den unmittelbaren Angaben beider Kreise des Instruments abhängig machen, allein sie auf den Pol des Instruments beziehen, indem es eine Weitläufigkeit ohne Nutzen sein würde, wenn man die Lage der Stundenaxe, beziehungsweise auf die Weltaxe, in die Betrachtung aufnehmen wollte; diese Aenderung der Bedeutung der Formeln fordert, dass man x und y weglasse und unter φ die Polhöhe des Instruments verstehe. In dieser Bedeutung hat man (15):

$$\begin{aligned} d &= D + c' + \beta \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \} \\ t &= T + c + i' \sec D - i, \operatorname{tg} d \\ &\quad - \alpha \cos \varphi \cos t - \beta \cos \varphi \sec d \sin t \end{aligned}$$

wo man in den von i', i, α, β abhängigen Gliedern $D + c'$ und $T + c$ statt d und t schreiben kann. Führt man die abgekürzten Bezeichnungen D und T für $D + c'$ und $T + c$ ein, so hat man also:

$$\begin{aligned} d &= D + \beta \{ \sin \varphi \cos D - \cos \varphi \sin D \cos T \} \\ &= D + \beta D \\ t &= T + i' \sec D - i, \operatorname{tg} D - \alpha \cos \varphi \cos T - \beta \cos \varphi \sec D \sin T \\ &= T + \beta T \end{aligned}$$

und damit die Gleichungen (18):

$$\left. \begin{aligned} r \sin \delta &= \sin D + v \cos D + r \cos \delta \cos(\tau - T) \cdot \beta D \\ r \cos \delta \cos(\tau - T) &= \cos D - v \sin D - r \sin \delta \cdot \beta D - r \cos \delta \sin(\tau - T) \cdot \beta T \\ r \cos \delta \sin(\tau - T) &= -u + r \cos \delta \cos(\tau - T) \cdot \beta T \end{aligned} \right\} \dots \dots (35)$$

Aus der Anwendung der ersten dieser Gleichungen auf beide Objectivhälften geht der Ausdruck der Bedingung, dass die Drehung des Instruments um die Stundenaxe die Absehnslinien beider Objectivhälften durch den festen Punkt führt, hervor, nämlich:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{1}{r} \sin D + \frac{v}{r} \cos D + \cos \delta \cos(\tau - T) \cdot \Delta D \\ &= \frac{1}{r'} \sin D + \frac{v'}{r'} \cos D + \cos \delta \cos(\tau - T) \cdot \Delta D' \end{aligned}$$

Man kann aber die Producte der kleinen Grössen i' , i , α , β in die Quadrate und Producte von u , u' , v , v' vernachlässigen und daher $\cos \delta$ für $\cos \delta \cos(\tau - T)$ und $\cos \delta$ für $\cos(\tau - T)$ setzen, wodurch die Gleichung sich in

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \sin D + \frac{v}{r} \cos D + \cos \delta \cdot \Delta D \\ = \frac{1}{r'} \sin D + \frac{v'}{r'} \cos D + \cos \delta \cdot \Delta D' \end{aligned}$$

$$\text{oder } 0 = \left(\frac{v'}{r'} - \frac{v}{r} \right) \cos D + \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \sin D \\ + \beta \cos \varphi \sin D \cos \delta (\cos T - \cos T')$$

$$\cos(n+k'+E) = \{ \text{tg } \frac{1}{2} S + f \cos(F-E) \} \{ \text{tg } D + \text{tg } \frac{1}{2} S \cos(n+k'+E) + f \cos(n+k'+F) \} \\ - \beta \cos \varphi \text{tg } D \{ \sin D \cos \tau \cos(n+k'+E) + \sin \tau \sin(n+k'+E) \}$$

Es folgt daraus, dass $\cos(n+k'+E)$ von der Ordnung von S und f und daher $(n+k'+E)$ entweder nahe $= 90^\circ$ oder nahe $= 270^\circ$ ist. Da $m'-a'$ und $m-a$ beträchtlich von einander verschieden sind, so ist E , dessen Tangente den Ausdruck (25):

$$\frac{(m-a)(k'-k) + (b'-b)}{m'-a'-m+a}$$

hat, entweder sehr klein, oder sehr nahe $= 180^\circ$, das erstere wenn $m'-a' > m-a$, das letztere wenn $m'-a' < m-a$ ist. Ohne die beabsichtigte Annäherung zu beeinträchtigen, kann man in dem rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucke, $E = 0$ oder $= 180^\circ$ und $n+k'+E = 90^\circ$ oder $= 270^\circ$ setzen. In dem Falle, in welchem $n+k'$ nahe $= 90^\circ$ ist, erhält man also für beide Fälle von E :

$$\mp (n+k'-90^\circ) - \sin E = \{ \text{tg } \frac{1}{2} S + f \cos F \} \{ \text{tg } D - f \sin F \} \\ \mp \beta \cos \varphi \text{tg } D \sin \tau \dots (36a)$$

$$\text{und wenn } n+k' \text{ nahe } = 270^\circ \text{ ist:} \\ \pm (n+k'-270^\circ) + \sin E = \{ \text{tg } \frac{1}{2} S + f \cos F \} \{ \text{tg } D + f \sin F \} \\ \pm \beta \cos \varphi \text{tg } D \sin \tau \dots (36b)$$

Wenn man $k'-k$ und $b'-b$ als bekannt annehmen will, so ist auch E bekannt und k' kann durch eine Beobachtung von n gefunden werden; allein man wird ohne Zweifel vorziehen, zwei Beobachtungen bei verschiedenen Werthen von m' zu machen und durch ihre Verbindung mit einander die beiden gemeinschaftliche

verwandelt. Aus den beiden letzten Gleichungen (35) folgt, mit der erforderlichen Näherung:

$$\cos \delta \cos T = \cos D \cos \tau - v \sin D \cos \tau - u \sin \tau$$

also auch:

$$\cos \delta \cos T' = \cos D \cos \tau - v' \sin D \cos \tau - u' \sin \tau$$

und damit wird die Gleichung:

$$0 = \frac{v'}{r'} - \frac{v}{r} + \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \text{tg } D \\ + \beta \cos \varphi \text{tg } D \{ (v'-v) \sin D \cos \tau + (u'-u) \sin \tau \}$$

oder, anders geschrieben:

$$v' - v = \frac{2r-r'}{r'+r} \left\{ \text{tg } D + \frac{v+r}{2} \right\} \\ - \frac{2r'r'}{r'+r} \beta \cos \varphi \text{tg } D \{ (v'-v) \sin D \cos \tau + (u'-u) \sin \tau \}$$

Wenn man das weglässt was die dritte Ordnung überschreitet, auch die Ausdrücke (26) und (27) substituirt und durch $2 \text{tg } \frac{1}{2} S$ dividirt, verwandelt sie sich in:

$$\begin{aligned} \text{tg } \frac{1}{2} S \sin E &= \{ \text{tg } \frac{1}{2} S \cos(n+k'+E) + f \cos(n+k'+F) \} \\ &= \{ \text{tg } \frac{1}{2} S \sin E \cos(n+k'+E) + \sin \tau \sin(n+k'+E) \} \end{aligned}$$

Grösse $\text{tg } \frac{1}{2} S \sin E$ zu eliminiren. Die Biegung β der Heliometeraxe verschwindet übrigens aus den Gleichungen (36), indem ihr Einfluss derselbe ist, welchen sie auf den Werth von k' (16) geüsst hat; lässt man das sie enthaltende Glied aus den Gleichungen (36) weg, so bedeutet also das darin vorkommende k' die Grösse:

$$k' + i, \text{ sec } D - i' \text{tg } D \dots \dots \dots (37)$$

Ich habe diese Gleichungen entwickelt, ohne dabei die Absehnslinie der einen Objectivhälfte mit der Heliometeraxe zusammenfallend, oder ohne $m-a = 0$ und $\mu-a = 0$, also auch $f = 0$ vorauszusetzen, obgleich man diesen Fall wohl immer eintreten lassen wird, wenn man eine Beobachtungsreihe zur Bestimmung von k' zu machen beabsichtigt. Die Veranlassung dieser unnötig erscheinenden Verallgemeinerung der Aufsuchung der Gleichungen war, dass sie ohne Weiteres zeigen sollten, welchen Einfluss kleine Abweichungen von der Absicht, die eine Absehnslinie in die Heliometeraxe zu verlegen, auf das Resultat der Beobachtungen äussern. Setzt man, nachdem dieses erreicht worden ist, $f = 0$, so vereinfachen sich die Gleichungen (36) in:

$$\mp (n+k'-90^\circ) - \sin E = \text{tg } \frac{1}{2} S \text{tg } D \\ \pm (n+k'-270^\circ) + \sin E = \text{tg } \frac{1}{2} S \text{tg } D$$

Multipliziert man sie in

$$\pm (m'-a'-m+a) = \frac{2 \text{tg } \frac{1}{2} S}{\text{gt } H}$$

und bezeichnet man die unbekannte beständige Grösse

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S}{\operatorname{tg} R} \sin E \text{ durch } z$$

so verwandeln sie sich, wenn $n+k'$ nahe $= 90^\circ$ ist, in

$$(m'-a'-m+a)(n+k'-90^\circ)+z = -2 \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} S}{\operatorname{tg} R} \operatorname{tg} D \quad (38a)$$

und wenn $n+k'$ nahe $= 270^\circ$ ist, in

$$(m'-a'-m+a)(n+k'-270^\circ)+z = 2 \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} S}{\operatorname{tg} R} \operatorname{tg} D \quad (38b)$$

Wenn dagegen das Instrument um die Declinationsaxe gedreht werden, und dadurch ein fester Punkt in die Absehnslinien jeder der Objectivhälften gelangen soll, so wird hierdurch gefordert, dass eine unbestimmte Veränderung von P, Q, R , während Z, P, Q , ungeändert bleibt, die beiden Absehnslinien durch jenen Punkt führt. Die dieser Forderung entsprechende Gleichung erlangt man, wenn man die Ausdrücke, entweder von $\cos \delta \cos(r-T)$ oder von $\cos \delta \sin(r-T)$ (35) für jede der beiden Objectivhälften, einander gleich setzt; ich werde den letzten, einfacheren wählen. Man hat also die Gleichung

$$\sin(n+k'+E) = \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S + f \cos(F-E) \right\} \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \sin(n+k'+E) + f \sin(n+k'+E) \right\} \\ + \cos(n+k'+E) \{ i, \sec \delta - (i' - \beta \cos \varphi \sin T) \operatorname{tg} \delta \}$$

Da hieraus folgt, dass $n+k'+E$ entweder eine kleine Grösse der zweiten Ordnung, oder um eine solche von 180° verschieden ist, auch E entweder sehr klein oder sehr nahe $= 180^\circ$ ist, so kann man, rechts von dem

$$\pm(n+k') + \sin E = \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \pm f \cos F \right\} f \sin F \pm \{ i, \sec \delta - (i' - \beta \cos \varphi \sin T) \operatorname{tg} \delta \} \dots \dots (39a)$$

und wenn $n+k'$ nahe $= 180^\circ$ ist:

$$\mp(n+k'-180^\circ) - \sin E = - \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S \pm f \cos F \right\} f \sin F \mp \{ i, \sec \delta - (i' - \beta \cos \varphi \sin T) \operatorname{tg} \delta \} \dots (39b)$$

Die Bemerkungen, welche ich zu den Gleichungen (36) gemacht habe, gehören auch zu den gegenwärtigen. Lässt man auch hier das letzte, von i, i', β abhängige Glied weg, so bedeutet k' den Indexfehler k' des Positionskreises selbst (16). Fällt die Absehnslinie der einen Objectivhälfte mit der Heliometeraxe zusammen, oder ist $f=0$, so verschwindet daher Alles was rechts vom Gleichheitszeichen steht, und die Gleichungen werden:

$$\pm(n+k') + \sin E = 0 \\ \mp(n+k'-180^\circ) - \sin E = 0$$

Multipliziert man sie in

$$\pm(m'-a'-m+a) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S}{\operatorname{tg} R}$$

und wendet man die vorher durch z bezeichnete unbekannte Grösse wieder an, so werden die Gleichungen:

$$-\frac{u}{r} + \cos \delta \mathcal{A} T = -\frac{u'}{r'} + \cos \delta \mathcal{A} T'$$

oder

$$0 = \frac{u'}{r'} - \frac{u}{r} \cos \delta (\mathcal{A} T' - \mathcal{A} T);$$

wenn man den Ausdruck des letzten Gliedes, nämlich

$$-\cos \delta \{ -i, (\operatorname{tg} D' - \operatorname{tg} D) + \\ + (i' - \beta \cos \varphi \sin T) (\sec D' - \sec D) \}$$

oder mit hinreichender Näherung

$$-(v'-v) \{ i, \sec \delta - (i' - \beta \cos \varphi \sin T) \operatorname{tg} \delta \}$$

schreibt, wird sie

$$0 = \frac{u'}{r'} - \frac{u}{r} - (v'-v) \{ i, \sec \delta - (i' - \beta \cos \varphi \sin T) \operatorname{tg} \delta \}$$

oder, anders geschrieben

$$u' - u = \frac{r' - r}{r' + r} (u' + u) \\ + \frac{2r'r}{r' + r} (v' - v) \{ i, \sec \delta - (i' - \beta \cos \varphi \sin T) \operatorname{tg} \delta \}$$

Wenn man weglässt, was die dritte Ordnung überschreitet, die Ausdrücke (26) und (27) substituirt und durch $2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} S$ dividirt, verwandelt sich diese Gleichung in:

Gleichheitszeichen, sowohl das eine, als das andere entweder $= 0$ oder $= 180^\circ$ annehmen. Setzt man zuerst $n+k'$ sehr klein voraus, so hat man für beide Fälle von E :

$$\left. \begin{aligned} (m'-a'-m+a)(n+k') + z &= 0 \\ (m'-a'-m+a)(n+k'-180^\circ) + z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

Wenn man zu einer gemachten Beobachtung von n eine correspondirende macht, nämlich eine, bei welcher $m'-a'-m+a$ der Grösse nach $= m'-a'-m+a$, aber dem Zeichen nach ihm entgegengesetzt ist, so wird das Mittel des vorigen n und des sich aus dieser ergebenden n , sowohl von der unbekanntem Grösse z frei, als auch die bekannte, auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen der Formeln (38) befindliche Grösse daraus verschwindet. Man mag das Instrument also um die Stundenaxe, oder um die Declinationsaxe gedreht haben, so gewähren dergleichen correspondirende Beobachtungen den Vortheil, dass sie das gesuchte Resultat ohne alle Rechnung ergeben. Hat man deren mehrere angestellt, bezeichnet man die ihnen zukommen-

den Werthe von $\frac{1}{2}(m' - m')$ und $\frac{1}{2}(n + n')$ durch $M, M', M'' \dots$ und $N, N', N'' \dots$, und nimmt man Fehler von $N, N', N'' \dots$ als gleich wahrscheinlich an, wenn sie im Verhältnisse $\frac{1}{M} : \frac{1}{M'} : \frac{1}{M''} \dots$ sind, so hat man das Resultat aller Beobachtungen:

$$(N) = \frac{MN + M'N' + M''N'' + \dots}{M + M' + M'' + \dots}$$

und dann, im Falle der Drehung um die Stundenaxe: $k' + i, \sec \delta - i' \tan \delta = -(N) + 90^\circ$, oder $-(N) + 270^\circ$ und im Falle der Drehung um die Declinationsaxe:

$$k' = -(N), \text{ oder } = -(N) + 180^\circ.$$

Hat man die Drehung um die Stundenaxe angewandt, und will man k' frei von i , und i' daraus bestimmen, so muss man die Beobachtungen in der entgegengesetzten Lage der Declinationsaxe an dem vorher beobachteten festen Punkte wiederholen; dadurch erhält δ den von i zu 180° ergänzenden Werth, und die von i , und i' abhängigen Glieder erhalten entgegengesetzte Zeichen, so dass sie aus dem mittleren Resultate beider Beobachtungsreihen verschwinden.

Den Indexfehler α des Kreises am Oculare bestimmt man, wenn man das Objectiv in einer Richtung, welche durch die Ablesung des Positionskreises und seinen Indexfehler bekannt ist, beträchtlich von der Helio-
meteraxe entfernt, dem Oculare dieselbe Entfernung davon gibt und die Angabe seines Kreises abliest, bei welcher ein fester Punkt in seiner Absehenslinie erscheint; dann aber dieselbe Beobachtung, nachdem man die Entfernungen in gleich grosse, entgegengesetzte verwandelt hat, wiederholt: der gesuchte Indexfehler ist offenbar der Unterschied zwischen der bekannten Richtung der Verschiebung des Objectivs und dem Mittel der beiden Ablesungen des Kreises am Oculare. — Man wird auch den Index dieses Kreises so befestigen können, dass seine Angabe mit der Angabe der Nonien des Positionskreises übereinstimmt.

Die Entfernung β der Bewegungslinie des Oculars (des Punktes o § 7) von der Helio-
meteraxe kann man durch Ablesungen des Kreises am Oculare bestimmen. Wenn man das Ocular um eine, durch die Ablesung μ seiner Scale bekannte Quantität $\mu - \alpha$ von der Helio-
meteraxe entfernt, und dann einen festen Punkt in seine Absehenslinie bringt; wenn man ferner μ in μ' verändert, so dass $\mu' - \alpha = -(\mu - \alpha)$ wird, und das Ocular so weit um die Helio-
meteraxe drehet, dass der feste Punkt wieder in der Absehenslinie erscheint, auch beide Male die Angabe seines Kreises ν und ν' abliest, so ist

$$\pm \beta = \frac{\mu - \mu'}{2} \sin \frac{1}{2} \{180^\circ - \nu + \nu'\}$$

Ich begnüge mich, dieses nur anzudeuten, sowohl weil β immer nur einen geringen Einfluss auf die helio-
metrischen Messungen äussern kann, als auch weil man wohl vorziehen wird, das Ocular durch vorhandene Berichtigungsschrauben so zu stellen, dass seine Bewegungslinie den Punkt o durch die Helio-
meteraxe führt, dass also β verschwindet.

Es wird kaum nötig sein, das Mittel anzudeuten, wodurch man a, a', a finden kann; es besteht in der Drehung sowohl des Objectivs, als auch des Oculars um die Helio-
meteraxe. Sucht man die Stellung m der Objectivhälfte I, bei welcher ein durch sie abgebildeter Punkt seinen Ort im Sehefelde nicht verändert, während man sie um die Helio-
meteraxe drehet, so ist dieses $m = a$; eben so wird a' bestimmt, sowie a durch eine Drehung des Oculars.

Die Ansführung der Vorschriften, welche ich im gegenwärtigen § entwickelt habe, wird an Sicherheit und Leichtigkeit beträchtlich gewinnen, wenn man in dem Raume, wo das Instrument aufgestellt ist, die Einrichtung trifft, ein Fernrohr befestigen zu können, dessen Objectiv dem Helio-
meter zugewandt ist und dessen in die Neigung von 45° gegen die tägliche Bewegung gebrachtes Fadencross die Stelle des festen Punkts vertritt.

14.

Aus dem vorigen § geht hervor, dass der Index-
fehler des Positionskreises durch die Drehung des Instruments um die Declinationsaxe unmittelbar gefunden wird, d. h. ohne durch einen Einfluss der kleinen Grössen i, i', α, β entsetzt zu werden. Man sollte daher erwarten, durch abgeänderte Anwendungen dieses Verfahrens, z. B. durch seine Wiederholung in beiden Lagen des auf den festen Punkt gerichteten Instruments, stets auf einen gleichen Werth von k' geführt zu werden, auch wenn die Declinationsaxe auf der Stundenaxe und die Helio-
meteraxe auf der Declinationsaxe nicht ganz senkrecht stehen und das Instrument nicht frei von Biegungen ist. Allein das Königsberger Helio-
meter hat diese Erwartung nicht gerechtfertigt; vielmehr haben alle Bestimmungen des Positionskreises, wenn sie in entgegengesetzten Lagen der Declinationsaxe wiederholt wurden, einen beträchtlichen, bis auf etwa 4 Minuten steigenden, Unterschied gezeigt, dessen Ursache, da er durch das Vorige nicht erklärt wird, noch aufzusuchen ist.

Ich betrachte den Einfluss, welchen die Lage der

Declinationsaxe auf den Indexfehler des Positionskreises geäußert hat, als eine Wirkung der beträchtlichen Schwere des nicht symmetrisch zu der Declinationsaxe, sondern an einem Ende derselben befestigten Fernrohrs, welches, indem es von diesem Ende nur an einer Seite gehalten wird, sich um die gehaltene Seite zu drehen sucht, und sich wirklich so weit drehet, als die Elasticität seiner Materie erlaubt. Wenn man die Grösse dieser Drehung der sie erzeugenden Kraft proportional annimmt, so kann man das Gesetz, welchem sie in allen Lagen des Instruments folgt, leicht angeben. Die drehende Kraft ist nämlich der Theil der Schwere, welcher senkrecht auf die durch die Declinationsaxe und die Heliometeraxe gelegte Ebene wirkt; sie wird also durch den Cosinus der Zenithdistanz des Punktes ausgedrückt, dessen Stundenwinkel derselbe (t) ist, den der in der Richtung der Heliometeraxe befindliche Punkt besitzt, dessen Declination aber 90° nördlicher ist als die Declination dieses Punktes, also $= 90^\circ + d$. Sie ist also

$$= \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t$$

und die ihr proportionale Drehung ist

$$= \mu [\sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t] \dots (41)$$

wo μ ihr Maximum bedeutet. Eine im Fernrohre feste, durch die Heliometeraxe senkrecht auf die Declinationsaxe gelegte Ebene wird, durch diese Ursache, um die eben angegebene Grösse, und zwar so gedreht, dass ihr über der Heliometeraxe liegender rechter Winkel mit dem Pole Q der Declinationsaxe in einen grösseren verwandelt wird. Die beobachteten Positionswinkel gehen von dieser Ebene aus, und nicht von der Ebene des Declinationskreises, von welcher sie ausgehen sollten, und ihre Beziehung auf diese fordert, dass man ihnen die Grösse (41) hinzusetze, welche also den Formeln des 11. §s noch hinzuzusetzen ist, nachdem man δ_0 und τ_0 statt d und t darin geschrieben hat. Die beiden Lagen, in welchen das Instrument auf δ_0 und τ_0 gestellt werden kann, unterscheiden sich, nicht minder in der gegenwärtigen Beziehung wie im ganzen Verlaufe dieser Abhandlung, dadurch, dass, wenn die Declinationsaxe vorgeht δ_0 und τ_0 in der gewöhnlichen Bedeutung, wenn sie folgt aber $= 180^\circ - \delta_0$ und $= 180^\circ + \tau_0$ zu nehmen sind.

Die Grösse von μ wird durch die Vergleichung zweier Bestimmungen des Indexfehlers des Positionskreises, welche in verschiedenen Lagen der Declinationsaxe durch Drehung um sie erlangt werden, gefunden; z. B. in den beiden einander entgegengesetzten Lagen,

durch welche ein fester Punkt in die Absehsenlinie gebracht werden kann.

15.

In dem Vorhergehenden ist noch nicht von den Mitteln die Rede gewesen, welche zu der Kenntniss dessen führen können, was nothwendig ist, um von den Angaben einer der Mikrometerschrauben in beiden Momenten einer vollständigen Beobachtung, zu der in Kreistheilen ausgedrückten Entfernung der beiden beobachteten Punkte überzugehen. Diesen eben so schwierigen als wichtigen Theil der Theorie des Heliometers werde ich jetzt betrachten.

Zuerst muss untersucht werden, inwiefern das durch Drehung der die Objectivhälften bewegendes Mikrometerschrauben bewirkte Fortschreiten derselben dem Wachsen der Angaben ihrer Scalen und Trommeln proportional ist; ob es vielleicht nothwendig ist, diesen Angaben, ehe man das Fortschreiten ihnen proportional annimmt, Verbesserungen hinzuzufügen. — Eine Methode Mikrometerschrauben zu prüfen, habe ich in meinem Buche über die Einheit des Preussischen Längenmaasses bekannt gemacht und sie auch wieder angewandt, um die Ungleichheiten der Schrauben des Königsberger Heliometers kennen zu lernen. Ich werde das Nöthige über diese Anwendung und ihre Resultate in der folgenden, sich auf das Königsberger Instrument besonders beziehenden Abhandlung sagen, auch dann die zu der erfolgreichen Ausführung des Verfahrens nöthige Einrichtung beschreiben [Abh. 71, p. 141 ff.]. — Der letzte Zweck einer Untersuchung der Schrauben ist die Erlangung einer Tafel, welche die Ausgleichungen ihrer Unregelmässigkeiten angibt, so dass die durch ihre Hinzufügung veränderten unmittelbaren Ablesungen der ganzen Drehungen und ihrer Theile dem entsprechenden Fortschreiten der Objectivhälften wirklich proportional werden.

Zweitens muss ausgemittelt werden, welche Relation zwischen einer Entfernung einer der Objectivhälften von der Heliometeraxe, und der ihr entsprechenden Richtung der Absehsenlinie stattfindet. Im 7. § und der darauf gebauten weiteren Verfolgung der Theorie des Heliometers ist vorläufig angenommen worden, dass jede der Objectivhälften die im Fernrohre sichtbaren, unendlich entfernten Punkte auf einer auf der Heliometeraxe senkrechten Ebene vollkommen richtig abbilde, so dass, wenn jeder derselben mit seinem Bilde durch eine gerade Linie verbunden wird, alle diese Linien sich in Einem Punkte durchschneiden; welcher Annahme zufolge die Entfernung des Bildes von der

Heliometeraxe und die Tangente des Winkels zwischen dieser Axe und der Richtung nach dem abgebildeten Punkte des Himmels ein constantes Verhältniss haben. Allein diese Annahme ist nur eine Näherung an die Wahrheit, welche zwar für sehr kleine Winkel kann unrichtig sein kann, jedoch einer genaueren Untersuchung unterworfen werden muss, wenn man die Messungen mit dem Heliometer nicht auf solche Winkel beschränken, sondern sie bis zu der Grenze des deutlichen Sehens im Fernrohre ausdehnen will. Es ist bekanntlich unmöglich, ein Objectiv zu construiren, welches von seiner Axe entfernte Punkte als Punkte abbildet; sie müssen als Lichtmassen erscheinen, deren Ausdehnung etwa dem Cubus des Winkels proportional wächst, deren Mittelpunkt auch in Grössen dieser Ordnung von dem Punkte entfernt sein kann, wohin ihr Bild, der zum Grunde gelegten Annahme zufolge, fallen sollte.

Ich werde hier zwei in ihrem Principe von einander verschiedene Mittel andeuten, durch deren Anwendung man zur Kenntniss der Relation zwischen der Entfernung des optischen Mittelpunkts einer Objectivhälfte von der Heliometeraxe und dem ihr entsprechenden Winkel der Absehenslinie mit dieser Axe, gelangen kann, ihre Verfolgung bis zu dem Resultate aber der folgenden Abhandlung vorbehalten. Das eine dieser Mittel beruhet auf der Kenntniss der Construction des Objectivs, dessen vier Krümmungshalbmesser, sowie die Dicken und Brechungsverhältnisse beider, dasselbe zusammensetzenden Linsen und ihre Entfernung von einander, also bekannt sein müssen, wenn dieses Mittel soll angewandt werden können. Nimmt man eine cylindrische Masse unter sich paralleler Strahlen, deren Basis das Objectiv ist und welche einen Winkel ω mit seiner Axe machen, so kann man den Durchgang eines jeden von ihnen durch die vier Oberflächen des Objectivs durch trigonometrische Rechnung verfolgen und also finden, wo er eine Ebene trifft, welche senkrecht auf der Axe in dem Brennpunkte des Objectivs errichtet ist; man kann folglich die Figur bestimmen, welche durch einen leuchtenden, um den Winkel ω von der Axe des Objectivs entfernten Punkt auf dieser Ebene erleuchtet wird, sowie auch die Stärke der Erleuchtung an jedem Punkte in ihren Grenzen. Wählt man einen bestimmten Punkt dieses unendlichen Bildes zum Gegenstande der Beobachtung, oder erlangt einer, durch besondere Auszeichnung, vor allen übrigen Punkten diesen Vorzug, so kennt man, durch die ausgeführte Rechnung, seine Entfernung von der Axe des Objectivs, welche, wenn man

sie für verschiedene Werthe von ω sucht, auch die Kenntniss der Relation zwischen dieser Entfernung und dem Winkel ω herbeiführt.

Das zweite Mittel beruhet auf der Messung der Entfernung zwischen zwei Punkten am Himmel, in veränderten Lagen derselben gegen eine, der Heliometeraxe parallel durch das Ocular gelegte gerade Linie, welche veränderte Lagen man durch Verschiebungen des Oculars hervorbringen kann. Wenn man eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten annimmt, welche den Winkel zwischen dieser Linie und einem Punkte am Himmel durch die Entfernung seines Bildes von derselben ausdrückt, so kann man ihre Coefficienten durch solche Messungen bestimmen. Legt man die Bewegungslinien des Oculars und der Objectivhälfte in die Ebene der beiden Punkte, bringt man ihre Bilder durch Verschiebung einer der Objectivhälften zur Deckung, während die andere und das Ocular willkürlich gestellt sind, und liest man die Stellungen aller drei an ihren Scaln u. s. w. ab, so werden dadurch die Entfernungen der beiden Objectivhälften von der erwähnten Linie bekannt, und man kann nun den Winkel zwischen dieser Linie und jedem der Punkte durch eine Anwendung der Reihe ausdrücken, in welcher nur ihre Coefficienten unbekannt sind. Der Unterschied dieser Ausdrücke ist der Winkel zwischen beiden Punkten selbst, für welchen man also so viele abgeänderte Ausdrücke erhalten kann, als man durch Verschiebung des Oculars abgeänderte Beobachtungen machen will. Da alle einen gleichen Winkel darstellen, so ergibt ihre Vergleichung unter einander das Mittel, die unbekannt Coefficienten der Reihe zu bestimmen. —

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass man der gegenwärtigen Untersuchung ganz überhoben sein würde, wenn die Objectivhälften sich nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Cylinderfläche verschöben, deren Mittelpunkt mit dem Brennpunkte des Objectivs zusammenfiel. Bei dieser Einrichtung eines Heliometers würde die Axe jeder Objectivhälfte immer genau in der Richtung nach dem Punkte sein, welchen sie in der Heliometeraxe abbildet; sie würde ihn folglich, in grossen wie in kleinen Entfernungen von dieser, immer gleich vollkommen abbilden. Dieser wesentliche Vorzug der eben angedeuteten Einrichtung veranlasste mich, sie dem verewigten FRAUNHOFER vorzuschlagen, als er beschäftigt war, das Königsberger Heliometer zu verfertigen; er glaubte aber, dass die mechanische Ausführung der Bewegung der Objectivhälften auf einer Cylinderfläche Schwierigkeiten haben werde.

Drittens muss man untersuchen, ob er in Theilen

des grössten Kreises ausgedrückte Werth des, einer Windung der Schraube entsprechenden Fortschreitens der bewegten Objectivhälfte, in jeder Wärme gleich gross ist, oder ob er eine von Thermometerstande abhängige Ungleichheit besitzt, deren Grösse dann durch Beobachtungen bestimmt werden muss. Diese Bestimmung muss auf die Vergleichung der, in stark veränderter Wärme gemachten Messungen eines immer gleich bleibenden Winkels gegründet werden. — Wenn der Standpunkt des Heliometers Aussicht in eine beträchtliche Entfernung gewährt und man dasselbst Signale errichten kann, welche sich unter allen Umständen deutlich darstellen, und deren Entfernung von einander keine merkliche Veränderung erleiden kann, so werden diese Signale, indem man die Winkel zwischen ihnen im Sommer und im Winter misst, einen Einfluss der Wärme auf die Messungen, wenn er vorhanden ist, verrathen und seine Grösse zu erkennen geben. — Ich habe aber die Hauptsterne der Plejaden zu demselben Zwecke angewandt und werde in der folgenden Abhandlung auch davon Rechenschaft geben [Abh. 71 § 24].

Viertens muss, nachdem die drei vorigen Forderungen befriedigt worden sind, der Winkelwerth einer — ausgeglichenen und auf eine bestimmte Wärme bezogenen — Windung der Mikrometerschraube ausgemittelt werden. Ich habe zu diesem Zwecke vier verschiedene Methoden angewandt, deren Wesentliches ich hier nur andeuten werde, während ich ihre Verfolgung ins Einzelne, sowie aller im gegenwärtigen § berührten Materien, der folgenden Abhandlung vorbehalte.

• Eine dieser Methoden beruht auf dem Gaussischen Verfahren der Beobachtung eines Fadens im Brennpunkte eines Fernrohrs, durch sein Objectiv hindurch. Will man dadurch den Winkelwerth einer Schraubenwindung des Heliometers erfahren, so muss man, während der optische Mittelpunkt der einen Objectivhälfte sich in der Heliometeraxe befindet, den der anderen beträchtlich von ihr entfernen und dann den Winkel zwischen beiden Absehlenslinien durch ein möglichst nahe vor dem Objective aufgestelltes Winkelinstrument messen. Die Wiederholung dieser Messung, nachdem die zweite Objectivhälfte in die entgegengesetzte Lage gegen die Heliometeraxe gebracht worden ist, befreit das Resultat offenbar von der Voraussetzung der Kenntniss des Punktes, wo die optischen Axen beider Hälften zusammenfallen. Indem man den beiden Ablesungen der Schraube, welche die Oerter der bewegten Objectivhälfte ergeben, die schon bekannten Verbesserungen ihrer unmittelbaren Angaben hinzufügt, bezieht man das Resultat auf die daraus hervorgehende Anzahl

ausgeglichener Schraubenwindungen. Will man endlich die Voraussetzung gelten lassen, dass dieselbe Relation, welche zwischen dem Winkel einfallender paralleler Strahlen mit der Axe einer Objectivhälfte und der Entfernung des durch sie erzeugten Bildes von dieser Axe schon bekannt geworden ist, auch auf die Richtung anwendbar sei, welche Strahlen, von einem Punkte in der im Brennpunkte, senkrecht auf die Axe errichteten Ebene ausgehend, nach ihrem Durchgange durch das Objectiv zu haben scheinen, so kann man von dem beobachteten Winkelwerthe der von der Objectivhälfte durchlaufenen Anzahl von Schraubenwindungen auf den Winkelwerth einer einzelnen schliessen.

Eine andere Methode beruht auf der heliometrischen Messung anderweitig bekannt gewordener Winkel. Wenn aber von dem Heliometer grössere Genauigkeit gefordert wird, als durch andere Instrumente erreichbar ist, so wird es schwer sein, die gegenseitige Lage zweier Punkte durch die letzteren so genau zu bestimmen, dass sie zur Grundlage der Bestimmung des Werthes der Schraubenwindungen des ersteren gemacht werden dürfte. Ich habe mir viele Mühe gegeben, die relativen Oerter der Hauptsterne der Plejaden durch Meridianbeobachtungen auszumitteln, zum Theil in der Absicht, durch ihre Vergleichung mit den Heliometermessungen ihrer Entfernungen den Winkelwerth einer Schraubenwindung zu erfahren; allein ich habe ihnen nicht so grosse Genauigkeit geben können, dass das Resultat der beabsichtigten Anwendung dadurch die gewünschte Sicherheit erhalten hätte [Abh. 71, § 26].

Man vermindert diese Schwierigkeit durch die Anwendung einer dritten Methode, welche von der vorigen dadurch verschieden ist, dass sie statt einzelner Paare von Punkten mehrere Punkte anwendet, welche mehr oder weniger näherungsweise in einem grössten Kreise erscheinen. Bestimmt man nämlich die Entfernung zwischen den beiden äussersten dieser Punkte durch ein anderes Instrument, und vergleicht man damit die Summe der mit dem Heliometer gemessenen Entfernungen zwischen ihren einzelnen Paaren, nachdem man jede auf den durch die äussersten gelegten grössten Kreis reducirt hat, so wird der Einfluss des Fehlers der als bekannt angenommenen Entfernung im umgekehrten Verhältnisse der Zahl der Paare von Punkten verkleinert und kann also, durch Vermehrung dieser Zahl, in hinreichend enge Grenzen zurückgeführt werden [Abh. 71, § 27]. — Es wird immer gelingen, zu dieser Untersuchung geeignete kleine Fixsterne zu finden, deren äusserste dann durch Meridianbeobachtungen zu bestimmen sind. Auch kann man, wenn eine Reihe deutlich

erscheinender irdischer Signale in beträchtlicher Entfernung errichtet werden kann, diese zu demselben Zwecke benützen, indem man den Winkel zwischen den beiden äussersten durch einen Theodolithen, die Winkel zwischen je zwei auf einander folgenden aber durch das Heliumeter misst. Dass man auch die Mittel besitzen muss, die letzteren Messungen von den Punkten im Raume, wo die Bilder jedes Paares von ihnen im Fernrohr zusammenfallen, auf den Standpunkt des Theodolithen zu reduciren, um ihre Summe mit dem durch diesen gemessenen Winkel vergleichen zu können, wird oft die Schwierigkeit der Anwendung irdischer Signale beträchtlich vermehren.

Die vierte Methode besteht in der Messung sowohl der Brennweite des Objectivs = f , als einer Schraubenwindung = m , beide durch ein gleiches Längenmaass, wodurch man:

$$R = \frac{m}{f} 206264'' 8$$

erhält. Die Messung der Brennweite kann man auf die Ausmittelung der kleinsten Entfernung zwischen einem Punkte und seinem durch das Objectiv gemachten Bilde gründen, welche kleinste Entfernung man durch ein in der folgenden Abhandlung zu beschreibendes Verfahren mit grosser Genauigkeit messen kann. Der Werth von m kann gleichfalls mit grosser Genauigkeit gemessen werden, wenn man auf den Schieber der einen Objectivhälfte einen Maassstab, auf den der anderen ein Mikroskop befestigt, welches auf diesen gerichtet ist, und in dessen Absehlenslinie die Theilstriche des Maassstabes durch die ihn mit der Objectivhälfte zugleich bewegende Mikrometerschraube gebracht werden können [vgl. Abb. 69 und Abb. 71, § 28].

16.

Zum Schlusse werde ich noch verschiedener Formeln erwähnen, in welchen das Resultat einer Heliumeterbeobachtung dargestellt werden kann.

Die Formeln des 11. §s setzen die Declination δ_0 und den Stundenwinkel τ_0 des in der Mitte zwischen S und S' liegenden Punktes M als gegeben voraus und bestimmen die Entfernung $s = SS'$, sowie auch den Positionswinkel an M ; nämlich wenn die Declinationsaxe vorangeht, den Positionswinkel der Richtung von dem den Köpfen der Mikrometerschrauben am nächsten erscheinenden Punkte nach dem anderen; wenn sie folgt den der entgegengesetzten Richtung, in welchem letzteren Falle aber $180^\circ - \delta_0$ und $180^\circ + \tau_0$ statt δ_0 und τ_0 zu lesen sind. Damit man in keinem der vorkommenden Fälle diesen Abänderungen der Bedeutung

der Formeln weitere Aufmerksamkeit widmen dürfe, werde ich alle Fälle vollständiger Beobachtungen hier zusammenstellen. Wenn man unter δ_0 und τ_0 die in gewöhnlicher Bedeutung genommenen Declination und Stundenwinkel von M versteht und

$$(x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0) \sec \delta_0 + \beta \cos \varphi \sin \tau_0 \operatorname{tg} \delta_0 \dots \text{ durch } \lambda$$

$$i, \sec \delta_0 - i' \operatorname{tg} \delta_0 + \mu \{ \sin \varphi \cos \delta_0 - \cos \varphi \sin \delta_0 \cos \tau_0 \} \dots J$$

bezeichnet, so ist der Positionswinkel, welchen die Anwendung der ersten Beobachtungsmethode § 11 ergibt, den Formeln (32) und (41) zufolge:

a) wenn die Declinationsaxe vorangeht:

$$p = \frac{n+n'}{2} + k' - \frac{1}{2} s s \sin 2p (1 + 2 \operatorname{tg} \delta_0^2) + \lambda + J$$

und er gehört zu der Richtung von dem Punkte, welcher in der am wenigsten vorgerückten Objectivhälfte gesehen wird, oder den Schraubenköpfen am nächsten erscheint, nach dem anderen;

b) wenn die Declinationsaxe folgt:

$$p = \frac{n+n'}{2} + k' - \frac{1}{2} s s \sin 2p (1 + 2 \operatorname{tg} \delta_0^2) + \lambda - J$$

und er gehört zu der Richtung von dem Punkte, welcher in der am meisten vorgerückten Objectivhälfte gesehen wird, oder von den Schraubenköpfen am entferntesten erscheint, nach dem anderen.

Bei der Anwendung der zweiten oder dritten Beobachtungsmethode § 11 fällt das kleine Glied

$$- \frac{1}{2} s s \sin 2p (1 + 2 \operatorname{tg} \delta_0^2)$$

dieser Ausdrücke weg.

Wenn man statt des Positionswinkels am Punkte M die halbe Summe der Positionswinkel der Linie SS' an S und an S' , beide nach gleicher Richtung genommen, kennen lernen will, so muss zu dem ersten $\frac{1}{2} s s \sin 2p (1 + 2 \operatorname{tg} \delta_0^2)$ hinzugesetzt werden. Wenn man daher die erste Beobachtungsmethode anwendet, aber aus den Formeln a und b diese kleine Grösse weglässt, so drücken sie die halbe Summe der beiden Positionswinkel aus. Bei der Anwendung der zweiten oder dritten Beobachtungsmethode drücken dieselben Formeln den Positionswinkel am Punkte M aus.

Es hängt von der Art der Anwendung, welche von einer Heliumeterbeobachtung gemacht werden soll, ab, ob die in dieser Abhandlung gewählte Form ihres Resultats, oder eine andere, die zweckmässiger ist. Oft wird der Ort eines der beiden Punkte an der Himmelskugel bekannt sein, und der des anderen durch die Beobachtung gesucht werden. Versteht man unter p

die halbe Summe der Positionswinkel der Linie SS' an beiden Punkten, und zwar beide in der Richtung von dem bekannten nach dem unbekanntem Orte genommen; bezeichnet man den Positionswinkel an dem bekannten Orte durch $p - \mathcal{A}p$, an dem unbekanntem durch $p + \mathcal{A}p$, die Geradenaufsteigungen und Abweichungen des ersteren durch α, δ , des letzteren durch α', δ' , so hat man folgende Gleichungen:

$$\sin \frac{1}{2} s \cos p = \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta)$$

$$\sin \frac{1}{2} s \sin p = \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta)$$

$$\cos \frac{1}{2} s \cos \mathcal{A}p = \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \cos \frac{1}{2} (\delta' - \delta)$$

$$\cos \frac{1}{2} s \sin \mathcal{A}p = \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \sin \frac{1}{2} (\delta' + \delta)$$

Aus der 2. und 4. folgt:

$$\sin \mathcal{A}p = \operatorname{tg} \frac{1}{2} s \sin p \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta),$$

und aus der 1. und 3.:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta' - \delta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} s \frac{\cos p}{\cos \mathcal{A}p}$$

wo $\cos \mathcal{A}p$ in gewöhnlichen Fällen = 1 gesetzt werden kann, wenn dieses aber nicht erlaubt ist, aus der vorigen Formel hervorgeht. Wenn $\frac{1}{2} (\delta' - \delta)$ hierdurch bekannt ist, kennt man auch $\frac{1}{2} (\delta' + \delta) = \delta + \frac{1}{2} (\delta' - \delta)$ und damit durch die 2. Gleichung $\alpha' - \alpha$. Will man den Positionswinkel an dem bekannten Orte kennen lernen, so ist er, hinreichend nahe,

$$= p - \frac{1}{2} s \sin p \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta' + \delta).$$

In dieser ganzen Abhandlung ist nur von scheinbaren Orten der beobachteten Punkte, von die Strahlenbrechung enthaltenden, die Rede gewesen. Wie man die Resultate der Beobachtungen von der Strahlenbrechung befreien kann, werde ich in einer folgenden Abhandlung entwickeln.

71. Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte.*)

(Astron. Untersuchungen I, p. 55.)

Die Resultate, welche die mit dem Heliometer gemachten Beobachtungen ergeben sollen, nämlich die Entfernung zweier Punkte am Himmel und der ihre gegenseitige Richtung bestimmende Positionswinkel, fordern zu ihrer Berechnung aus den unmittelbaren Zahlenangaben der Mikrometerschrauben und des Positionskreises die Kenntniss nicht allein verschiedener, der Construction des Instruments eigenthümlicher, beständiger Elemente, sondern auch derjenigen von Zeit zu Zeit veränderlichen, welche den jedesmaligen Zustand seiner Berichtigung bestimmen. Es ist meine Absicht, gegenwärtig Alles mitzuthellen, was zur Reduction der Beobachtungen erforderlich ist, welche von der Zeit der Aufstellung des Königsberger Heliometers an bis zum Ende von 1840 gemacht worden sind.

Ich werde das Folgende in zwei Theile trennen, deren erster sich nur auf die Positionswinkel, der zweite nur auf die Entfernungen bezieht. Die Aufstellung des Instruments, die Winkel seiner Axen untereinander und ihre Biegungen durch die Schwere haben nur Einfluss auf die Positionswinkel, nicht auf die Entfernungen; weshalb der erste Theil von diesen verschiedenen, theils beständigen, theils veränderlichen Elementen Rechenschaft zu geben hat, während der

zweite es nur mit ein für allemal zu bestimmenden, nämlich den im 15. § [p. 129 fl.] der vorigen Abhandlung erwähnten, zu thun hat.

Erster Theil.

Positionswinkel.

1.

Ich werde zuerst das mittheilen, was über die Constanten α, β der durch die Schwere verursachten Biegungen der Declinationsaxe und der Heliometeraxe bekannt geworden ist. — Aus der letzten der Gleichungen (7) (Abh. I. § 3 [Abh. 70, p. 113]) geht hervor, dass man die Grösse α durch Vergleichung der beiden Einstellungen der Absehelinie des Fernrohrs auf einen festen Punkt bestimmen kann. Wenn man die Polhöhe des Instruments mit der wahren Polhöhe verwechseln kann, also immer wenn seine Stundenaxe der Weltaxe nahe parallel ist, hat der halbe Unterschied der beiden Ablesungen des Stundenkreises, in beiden Stellungen des Instruments auf den festen Punkt, den Ausdruck:

$$15 \mathcal{A}T = i' \sec d - i, \operatorname{tg} d - \alpha \cos \varphi \cos t \dots \dots \Theta$$

wo die Ablesung des Stundenkreises, wenn die Declinationsaxe vorgeht, durch $T - \mathcal{A}T$, und wenn sie folgt durch $12^h + T + \mathcal{A}T$ bezeichnet sind, d und t die Declination und den Stundenwinkel des festen Punkts

*) [Abh. II. aus 350 d. a. Verz. — Vgl. auch die frühere und kürzere Behandlung in Königsb. Beobacht. Abth. 16 und 17.]

bedeuten und $i = i + \alpha \sin \varphi$ ist. Die Trennung der unbekanntem Größen i' , i , α von einander fordert also die Wiederholung solcher Beobachtungen an verschiedenen festen Punkten und zwar in Beziehung sowohl auf d , als auch auf t verschiedenen.

Ich habe diese Beobachtungen so gemacht, dass ich die Durchgangszeiten von Sternen, während der Stundenkreis eine bestimmte Stellung erhalten hatte, und die Declinationsaxe ihnen voran ging, wahrnahm; dann das Instrument in seine zweite Lage brachte, die Ablesung des Stundenkreises und die Wahrnehmung der Durchgangszeit wiederholte, und endlich die halbe Zwischenzeit der beiden Beobachtungen zu der ersten Ablesung des Stundenkreises hinzufügte, von der zweiten abzog; wodurch also die Beobachtung auf den Fall eines unveränderlichen Stundenwinkels des beobachteten Sterns reducirt wurde. Um i' nicht auf die zufällige Lage der Absehslinie, sondern auf die Heliometeraxe bezogen zu erhalten, habe ich jede der beiden Beobachtungen vor und nach einer halben Drehung, sowohl des Objectivs als auch des Oculars um diese Axe, wiederholt (Abb. I. § 7 [Abb. 70 p. 117]); wenn es erforderlich war, habe ich die kleine, aus der Strahlenbrechung hervorgehende Veränderung der Geradenauflage eines beobachteten Sterns während der Zwischenzeit der 4 Beobachtungen (selten mehr als 15 Minuten) berücksichtigt. Diese Beobachtungen habe ich nur in den zur Bestimmung von α vortheilhaftesten Stundenwinkeln, nämlich im Meridiane und 90° von ihm entfernt, gemacht. Ich führe jetzt die aus einigen Wiederholungen derselben hervorgegangenen Werthe von ΔT an:

1830. Octbr. 19.

	ΔT	d	t
α Coronae . . .	- 2,69	+ 27° 19,3	18 ^h 0 ^m 0 ^s
α Tauri . . .	- 3,00	+ 16 12,7	6 0 0
α Aurigae . . .	- 5,25	+ 45 49,6	6 0 0
β Leonis . . .	- 3,50	+ 15 32,0	0 0 0
α Lyrae . . .	- 3,38	+ 38 39,4	18 0 0
α Ursae minoris	+ 138,75	+ 91 34,9	0 0 0

1830. Octbr. 20.

Nach einer vorgenommenen Aenderung von i' .

α Coronae . . .	+ 0,13	+ 27° 19,3	18 ^h 0 ^m 0 ^s
α Tauri . . .	+ 1,38	+ 16 12,7	6 0 0
α Aurigae . . .	- 2,90	+ 45 49,6	6 0 0
β Leonis . . .	- 1,68	+ 15 32,0	0 0 0
α Lyrae . . .	- 2,00	+ 38 39,4	18 0 0
α Ursae minoris	+ 88,90	+ 91 34,9	0 0 0

1832. April 20.

α Aurigae . . .	- 2,19	+ 45° 49,9	18 ^h 0 ^m 0 ^s
β Tauri . . .	- 0,32	+ 28 28,8	18 0 0
α Lyrae . . .	- 0,36	+ 28 38,9	6 0 0
α Ursae minoris	- 68,88	+ 88 24,0	0 0 0
α Cygni . . .	- 0,44	+ 44 41,6	6 0 0
α Tauri . . .	- 1,19	+ 16 10,5	0 0 0
β Orionis . . .	- 0,03	- 8 22,5	0 0 0
β Tauri . . .	- 1,45	+ 28 27,8	0 0 0
Meridianszeichen	+ 0,83	- 35 25,8	0 0 20,8

In den Gleichungen Θ , welche man durch diese Beobachtungen zur Bestimmung von i' , i , α erhält, ist der Werth der ersteren dieser Größen, in jeder der drei Reihen, als ein verschiedener anzusehen; i und α sind aber als gleichbleibend zu betrachten, indem die Declinationsaxe unveränderlich mit der Stundenaxe verbunden und daher ein bestimmter Werth von i dem Instrumente nicht minder eigenthümlich ist, als ein bestimmter Werth von α . Multiplicirt man die Gleichungen, um ihre ersten Glieder in Secunden des grössten Kreises zu verwandeln, in $\cos d^*$, und eliminiirt man aus den so erhaltenen Gleichungen die drei Werthe von i' , so ergeben sie:

$$i = + 25,9; \quad \alpha \cos \varphi = + 2,9.$$

Obleich diese Bestimmungen, wegen der nicht unter 4 Zeitsecunden herabgehenden unmittelbaren Angaben der Nonien des Stundenkreises, wohl einige Secunden unsicher sein können, so sind sie doch hinreichend, zu zeigen, dass $\alpha \cos \varphi$ zu klein ist, um bei der Reduction der Positionswinkel aus gemachten Beobachtungen am Positionskreise, welcher nur in ganzen Minuten abgelesen werden kann, Rücksicht zu verdienen. Ich halte auch für unnöthig, mehr ähnliche Beobachtungsreihen hier anzuführen.

Ein ähnliches Resultat habe ich für die Constante β der Biegung der Heliometeraxe, durch Vergleichung bekannter Declinationsunterschiede von Sternen, mit den beiden zusammengehörigen Angaben des Declinationskreises des Instruments (Abb. I. 2. Gleichung (T) [p. 113]) gefunden. Ich werde also beide Biegungen im Folgenden vernachlässigen.

2.

Ich werde ferner Beobachtungen anführen, welche den Werth von $i = i + \alpha \sin \varphi$ ergeben werden. Zwar ist dieser Werth schon im vorigen § bestimmt worden; allein da ich ihn für jederzeit beständig halte, er auch nicht so klein ist, dass er unbedingt als unter

*) [Die einzelnen Gleichungen sind weggelassen.]

der Kraft der Ablesungen des Positionskreises bleibend angesehen werden könnte, so scheint er, als ein zur Kenntniss des Instruments gehöriges Element, Anspruch auf wiederholte Bestimmung zu erhalten. Die Beobachtungen, welche ich zu diesem Zwecke benutzt habe, sind an dem Meridianzeichen der Sternwarte und einem der Polarsterne, während ihrer oberen oder unteren Culmination, gemacht. Jenes hat, auf den Standpunkt des Heliometers bezogen, die Declination $d = -35^{\circ} 28' 47''$ und den in Zeit angedrückten Stundenwinkel $0^{\text{h}} 0^{\text{m}} 20^{\text{s}}.8$; seine Entfernung ist = 2138 Toisen und die Entfernung der Heliometeraxe von der Stundenaxe = 13 Zolle, woraus folgt, dass der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel, wenn die Declinationsaxe vorgeht oder folgt, 1,43 grösser oder kleiner erscheint als $20^{\text{s}}.8$. Richtet man also die Heliometeraxe in beiden Stellungen des Instruments auf das Zeichen und bezeichnet man die ihnen entsprechenden Angaben des Stundenkreises durch $T - \Delta T$ und $12^{\text{h}} + T + \Delta T$, so hat man (Abb. I. (5) und (6) [p. 113]):

$$15 \{ \Delta T + 1,43 \} = i' \sec d - i, \text{tg } d.$$

Richtet man dagegen die Heliometeraxe auf einen der Polarsterne und bezeichnet man seine Declination, so wie das Instrument sie angibt (für untere Culminationen über 90° hinausgezählt), durch d' , die Angaben des Stundenkreises, während der Stern culminirt, durch $T' - \Delta T'$ und $12^{\text{h}} + T' + \Delta T'$, so hat man:

$$15 \Delta T' = i' \sec d' - i, \text{tg } d'$$

und durch Verbindung beider Gleichungen:

$$i' = (15 \Delta T + 21,45) \frac{\sin d' \cos d}{\sin d' - \sin d} - 15 \Delta T' \frac{\sin d \cos d'}{\sin d' - \sin d}$$

$$i_i = (15 \Delta T + 21,45) \frac{\cos d}{\sin d' - \sin d} - 15 \Delta T' \frac{\cos d'}{\sin d' - \sin d}$$

oder, wenn man $\sin d' = 1$ setzt, was die Nähe beider Polarsterne bei dem Pole hier voraussetzt:

$$i' = + 11,05 + 7,73 \Delta T + 5,509 \Delta T' \cos d'$$

$$i_i = + 11,05 + 7,73 \Delta T - 9,491 \Delta T' \cos d'$$

Aus 23 nach diesen Formeln berechneten Bestimmungen von i' und i_i , folgt im Mittel

$$i_i = + 28,35.*$$

Die ein Paar mal bis fast auf $10''$ steigenden Unterschiede von diesem Mittel sind wahrscheinlich den Beobachtungen von ΔT zuzuschreiben, welche, bei der nicht unter 4 Zeitsecunden herabgehenden Angabe der beiden Nonien des Stundenkreises, wohl bis auf eine Zeitsecunde fehlerhaft sein können. Indessen ist der

mittlere Werth von i_i sicher genng bestimmt, um der Rednction der beobachteten Positionswinkel zum Grunde gelegt werden zu dürfen.

In Beziehung auf i' bemerkt man, durch die Zahlen der vorletzten Columnne [die zwischen + $3,6$ und - $36,6$ schwanken], dass ich immer bemüht gewesen bin, die Heliometeraxe nahe senkrecht auf der Declinationsaxe zu erhalten. Da der Einfluss von i' auf die Positionswinkel der Tangente der Declination proportional ist, so kommt ein kleiner Werth dieser Grösse bei den Beobachtungen von Sternen, welche sich nicht sehr weit von dem Aequator entfernen, wenig in Betracht.

3.

Die Lage der Stundenaxe, beziehungsweise auf die Weltaxe, oder die Bestimmung der Grössen x und y (Abb. I. § 4 [p. 114]) habe ich gewöhnlich auf Beobachtungen des Meridianzeichens und eines der beiden Polarsterne gegründet. Indem die Ausdrücke der Declination d eines festen Punkts, durch die Angaben des Declinationskreises des Instruments, in beiden Stellungen der Heliometeraxe auf ihn (Abb. I. § 4 (10) [p. 114]):

$$d = D + c' - x \cos t - y \sin t \\ + \beta \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \}$$

$$180^{\circ} - d = D + c' + x \cos t + y \sin t \\ - \beta \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \}$$

sind, erhält man, wenn man β vernachlässigt (§ 1):

$$d = 90^{\circ} - \frac{1}{2}(D - D) - x \cos t - y \sin t,$$

also, durch die beiden zusammengehörigen Beobachtungen jedes Punkts von bekannter Declination, eine Gleichung zwischen den unbekanntenen Grössen x und y . — Indem man ferner die Ausdrücke des Stundenwinkels t eines festen Punkts, durch die Angaben des Stundenkreises des Instruments, in beiden Stellungen der Heliometeraxe auf ihn (ebendasselbst):

$$t = 15(T + \gamma) - x \text{tg } d \sin t + y \text{tg } d \cos t + i' \sec d \\ - i, \text{tg } d - \alpha \cos \varphi \cos t - \beta \cos \varphi \sec d \sin t$$

$180^{\circ} + t = 15(T + \gamma) - x \text{tg } d \sin t + y \text{tg } d \cos t - i' \sec d \\ + i, \text{tg } d + \alpha \cos \varphi \cos t - \beta \cos \varphi \sec d \sin t$ hat, erhält man, wenn man wieder β vernachlässigt und die oben eingeführten Bezeichnungen $T - \Delta T$ und $12^{\text{h}} + T + \Delta T$ statt T und T' anwendet,

$$t = 15 T + 15 \gamma - (x \sin t - y \cos t) \text{tg } d.$$

Man muss also wenigstens zwei solche Gleichungen besitzen, also wenigstens zwei feste Punkte von bekannten Stundenwinkeln beobachtet haben, um γ von den Angaben des Stundenkreises trennen und eine Gleichung zwischen x und y erhalten zu können.

*) [Einzelwerthe weggelassen.]

Ich habe, wie schon gesagt, gewöhnlich nur das Meridianzeichen und einen der beiden Polarsterne beobachtet. Bezeichnet man um abzukürzen $90^\circ - \frac{1}{2}(D - D)$ durch D und bezieht man D und T auf das erstere, D' und T' auf den letzteren; bezeichnet man ferner die anderweitig bekannten Declinationen und Stundenwinkel beider durch d, t, d', t' ; macht man die Beobachtungen des Polarsterns zur Zeit der Culmination, oder wenn $t' = 0$ ist; vernachlässigt man endlich die Producte $x \sin t$ und $y \sin t$, was wegen der Nähe des Zeichens bei dem Meridiane erlaubt ist, so erhält man, indem man für d und t ihre im vorigen § angegebenen Werthe setzt:

$$-35^\circ 28' 47'' = D - x \dots \text{oder } x = D + 35^\circ 28' 47''$$

und

$$d' = D' - x \dots \dots \dots x = D' - d'$$

$$0 = 15(T + \gamma - 20;8) + y \operatorname{tg} d$$

$$0 = 15(T + \gamma) + y \operatorname{tg} d'$$

also

$$y = \frac{15(T - 20;8 - T')}{\operatorname{tg} d' - \operatorname{tg} d} = \frac{15(T - 20;8 - T')}{\operatorname{tg} d' + 0,713}$$

Will man die Declination, in welcher das Meridianzeichen erscheint, immer $= -35^\circ 28' 47''$ annehmen, so kann man auch das Mittel aus beiden Ausdrücken von x , nämlich

$$x = \frac{1}{2}(D' - d' + D + 35^\circ 28' 47'')$$

für seinen Werth ansehen. Die immer unbekanntenen Veränderungen der irdischen Strahlenbrechung machen jedoch diese Annahme unsicher und würden der Anwendung von $x = D' - d'$ den Vorzug aneignen, wenn einerseits in der Entfernung des Zeichens, von nur 2138 Toisen, über wenige Secunden hinausgehende Veränderungen der Strahlenbrechung zu erwarten wären, und andererseits die Aufsuchung von x einen anderen Zweck erfüllen sollte, als zur Reduction der beobachteten Positionswinkel zu dienen, wobei einige Secunden wirklich ohne Interesse sind. Ich habe immer das Mittel beider Ausdrücke von x angewandt, zumal die Ablesungen der Angaben des Declinationskreises weniger sicher sind, als die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Strahlenbrechung des Zeichens. Im 1. § ist schon gefordert worden, dass man die Beobachtungen nicht auf die zufällige Lage der Absehenslinie gegen die Heliometeraxe, sondern auf diese selbst beziehen solle, was durch ihre Wiederholung vor und nach einer halben Drehung, sowohl des Objectivs als auch des Oculars, erlangt wird; sowie diese Forderung bei den § 2 angeführten Beobachtungen erfüllt worden ist, so kann sie auch jetzt erfüllt werden, obgleich ihre Erfüllung hier nicht wesentlich ist. Der im Ausdrücke

von y vorkommende Werth von T' ist dann das Mittel aus den auf die Culminationszeit reducirten vier Angaben des Stundenkreises, wovon zwei kurz vor ihr, zwei kurz nach ihr abgelesen werden; unter ihrer Reduction auf die Culminationszeit ist die Hinzufügung der Unterschiede zwischen den Beobachtungszeiten und der Culminationszeit zu den unmittelbaren Ablesungen zu verstehen.

Es ist wünschenswerth, dass man Mittel beschreibe, die Unveränderlichkeit der durch das eben beschriebene Verfahren erlangten Werthe von x und y , oder der Lage der Stundenaxe des Instruments, zu prüfen und etwaige Veränderungen auf eine leichte und zu jeder Zeit anwendbare Art so kennen zu lernen, dass man gemachte Beobachtungen von Positionswinkeln immer richtig reduciren könne. Da das Fussgestell des Instruments aus Balken von Holz besteht, auch auf einem Unterbau von Holz ruhet, so sind Einflüsse von Aenderungen der Wärme und der Feuchtigkeit der Luft noch mehr zu fürchten, als wenn nur ihre Wirkungen auf Metall und auf Mauerwerk in Betracht kämen. Ich habe mich daher bemühet, solche Mittel zu finden und werde sie jetzt beschreiben.

Da jede Aenderung der Aufstellung als durch Drehungen des Instruments um ein beliebiges System dreier, aufeinander senkrechter Axen entstehend, angesehen werden kann, so kommt es nur darauf an, diese Axen so zu wählen, dass die Drehungen um dieselben, unabhängig von den astronomischen Beobachtungen, welche x und y unmittelbar bestimmen, erkannt werden können. Legt man zwei dieser Axen in den Horizont, die erste von Osten nach Westen, die andere von Norden nach Süden, so können die Drehungen um dieselben durch zwei in denselben Richtungen angebrachte Wasserwagen angegeben werden; die dritte Axe ist dann die Lothlinie, und die Drehung um sie kann nur durch die Richtung des Instruments auf einen gegen den Horizont festen Punkt erkannt werden. Damit alle Aenderungen des Fussgestells, welche Einfluss auf die Richtung der Stundenaxe erhalten, auf diese Art bekannt werden, müssen die Wasserwagen unmittelbar an den Lagern dieser Axe befestigt werden.

Ich habe zwei, von den Herren PISTOR und SCHEK verfertigte Wasserwagen, an dem starken Metallstücke, welchem die Stundenaxe parallel ist und worauf ihre Lager befestigt sind, so anbringen lassen, dass sie, beziehungsweise zu der Stundenaxe, als fest angesehen werden können. Der Werth eines Scalentheils beträgt für die von Norden nach Süden gerichtete $24'$, für die von Osten nach Westen gerichtete $26'$; empfindlichere

Wasserwagen habe ich nicht gewöhnt, theils weil eine Genauigkeit von einer oder einigen Secunden kein Interesse hat, theils weil ich wünschte, die Drehungen bis zu der Ausdehnung von einigen Minuten damit messen zu können. Zur Beobachtung der Drehungen um die lothrechte Axe habe ich das Meridianzeichen angewandt, welches (§ 2) in der Declination = $-35^{\circ}28'47''$ und dem Stundenwinkel $0^{\text{h}} 0^{\text{m}} 20^{\text{s}}.8$ erscheint.

Bezeichnet man die Drehungswinkel um die drei Axen durch p , q , r , und nimmt man p positiv wenn es den nördlichen, q wenn es den östlichen Theil des Instruments erhöht, r wenn es in der Richtung der täglichen Bewegung ist, so ist der Einfluss derselben auf x , y , $15c$, $15y$:

$$\delta x = p; \delta y = q \sin \varphi - r \cos \varphi;$$

$$15 \delta c = q \sec \varphi; 15 \delta y = q \cos \varphi + r \sin \varphi$$

und auf die, einer bestimmten Richtung des Instruments entsprechende Angabe seines Stundenkreises [Abh. 70 (10)]

$$15 \delta T = -15 \delta y + \delta x \operatorname{tg} d \sin t - \delta y \operatorname{tg} d \cos t$$

In diesen Ausdrücken ist $p = 24'' \xi$, $q = 26'' \eta$, wenn ξ die nach Norden positiv genommene Angabe der ersten Wasserwage, η die nach Osten positiv genommene der zweiten bezeichnen; r aber muss aus der Angabe des Stundenkreises des auf das Meridianzeichen gerichteten Instruments abgeleitet werden, nämlich aus der angeführten Gleichung zwischen δT , δy , δx , δy , welche, wenn man darin die Ausdrücke der drei letzteren Größen substituirt:

$$r = \frac{p \operatorname{tg} d \sin t - q (\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} d \cos t) - 15 \delta T}{\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} d \cos t}$$

ergibt. Befreit man hierdurch den Ausdruck von δy von der Grösse r , so wird er:

$$\delta y = \frac{-p \cos \varphi \operatorname{tg} d \sin t + q + 15 \cos \varphi \delta T}{\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} d \cos t}$$

Setzt man endlich statt p und q ihre Ausdrücke durch ξ und η , für d und t die dem Meridianzeichen zugehörigen Werthe, und $\varphi = 54^{\circ} 42' 50''.5$, so erhält man

$$\delta x = 24'' \xi$$

$$\delta y = 0''.01 \xi + 21''.17 \eta + 7,056 \delta T$$

wovon man aber den unbedeutenden, von ξ abhängigen Theil der letzten Formel weglassen kann.

Setzt man

$$x' = x - 24'' \xi$$

$$y' = y - 21''.17 \eta - 7,056 \delta T$$

so behalten also diese Grössen so lange beständige Werthe, als das Instrument nur Aenderungen erfährt, welche durch Bewegungen seines Fussgestells erklärt werden können; und zwar bleibt der Werth von T , von

BRASSI'S Abhandlungen. 2. Bd.

welchem an man δT zählen will, in Beziehung auf diese Eigenschaft willkürlich. Zählt man δT von dem Stundenwinkel an, in welchem das Meridianzeichen erscheint, nimmt man also $\delta T = T - 20^{\text{h}}.8$, wo T die jederzeit stattfindende Angabe des Stundenkreises des (in beiden Stellungen) auf das Meridianzeichen gerichteten Instruments bedeutet, so sind die Ausdrücke der beiden Constanten:

$$x' = x - 24'' \xi$$

$$y' = y - 21''.17 \eta - 7,056 (T - 20^{\text{h}}.8)$$

Wenn daher x und y durch die am Anfange dieses §'s erklärte Methode bestimmt, und zugleich ξ , η und T abgelesen worden sind, erhält man dadurch Werthe dieser Constanten, welche sich, durch Wiederholungen der Bestimmung zu anderen Zeiten, so lange ungeändert wiederfinden müssen, bis die Zusammensetzung des Instruments eine, absichtlich herbeigeführte oder ohne bekannte Ursache entstandene, Aenderung erfährt. Man besitzt also hierdurch ein Mittel, zu verschiedenen Zeiten gemachte Bestimmungen von x und y untereinander zu vergleichen und sie zu einer genaueren zu vereinigen.

Wenn x' und y' bekannt sind, hat man daraus die zu der Reduction der Beobachtungen der Positionswinkel erforderlichen Werthe von x und y , nämlich:

$$x = x' + 24'' \xi$$

$$y = y' + 21''.17 \eta + 7,056 (T - 20^{\text{h}}.8)$$

Die Werthe von ξ und η werden, zur Zeit jeder Beobachtung, von den beiden Wasserwagen abgelesen; der Werth von T braucht seltener aufgesucht zu werden, da sich gezeigt hat, dass er nur langsame und während längerer Zeit ihre Richtung beibehaltende Veränderungen erfährt. Die von Zeit zu Zeit bestimmten Werthe von x' und y' , sowie auch von

$$(y') = y' + 7,056 (T - 20^{\text{h}}.8)$$

findet man am Ende dieser Abhandlung in Tafel VI.

4.

Nachdem ich im Vorhergehenden gezeigt habe, wie ich zu der Kenntniss derjenigen Elemente des Aequatoralinstruments gelangt bin, welche Einfluss auf die Reduction der mit dem Heliometer beobachteten Positionswinkel haben, werde ich jetzt mittheilen, was mir in derselben Beziehung von dem Heliometer bekannt geworden ist. Ich fange mit der Theilung des Positionskreises und ihrer Ableitung an.

Dieser Kreis wird durch vier Nonien abgelesen, deren zwei in der Richtung des Durchschnitts des Ob-

jectivs, zwei senkrecht darauf stehen. Die beiden ersteren sind gewöhnlich so schwer abzulesen, dass nothwendig wurtle, sie unbeachtet zu lassen. Ich habe daher nur die beiden anderen Nonien, nämlich II und IV abgelesen; jener gibt 90° , dieser 270° mehr an als der Nonius I, welcher der den Schraubenköpfen der Mikrometervorrichtung entgegengesetzt ist. Das was ich in der vorigen Abhandlung durch α bezeichnet habe, ist das verbesserte Mittel aus II— 90° und IV— 270° . Von welcher Verbesserung ich hier rede und wie ich sie kennen gelernt habe, werde ich jetzt mittheilen.

Da das Mittel aus den Angaben jedes Paares von Nonien, welche einander entgegengesetzt angebracht sind, frei von der Excentricität ist, so würde der auf dem Positionskreise abgelesene Winkel zwischen den, beiden Paaren entsprechenden Durchmesser, wie sie auch gedreht werden mögen, keine Veränderung erfahren, wenn der Kreis frei von Theilungsfehlern wäre. Es zeigen sich aber solche Veränderungen wirklich; sie deuten also Theilungsfehler an und geben zugleich das Mittel, diese so zu bestimmen, dass die Ablesung eines Paares der Nonien, durch die Hinzufügung der Bestimmung der Fehler, eben so frei davon wird, wie das Mittel der Ablesungen beider Paare unmittelbar sein würde. Hierdurch wird erlangt, dass die Aufopferung der Ablesung des einen Nonienpaares keinen Verlust hervorbringt, ausser der wenig bedeutenden Vermehrung der zufälligen Ablesungsfehler im Verhältnisse $1:\sqrt{2}$.

Um alle 4 Nonien, rings um den Positionskreis herum, gehörig ablesen zu können, muss man die Schlüssel, welche die Bewegung des ganzen Objectivs und seiner beiden Hälften von dem Oculare aus vermitteln, von dem Instrumente abnehmen und dieses in eine geeignete Lage bringen. Liest man sie alle ab, so erhält man dadurch den Winkel zwischen den Durchmessern II—IV und I—III, so wie er auf der Theilung des Positionskreises erscheint. Wiederholt man dieses, indem man den ersten Nonius nach und nach auf $0^\circ, 10^\circ, \dots, 350^\circ$ der Theilung stellt, so erkennt man dadurch das Verhalten eines beständigen Winkels zu den Theilungen an 36 Punkten des Kreises. — Eine zweimal wiederholte Reihe von Ablesungen dieser Art habe ich 1830 gemacht; 1839 habe ich Herrn SCHLÜTER ersucht, das Aehnliche in zwei entgegengesetzten Lagen des Instruments zu wiederholen.

[Es folgen die drei Beobachtungsreihen und deren Mittel.]

Sucht man die Darstellung der Zahlen der letzten Columnen [Mittelwerthe] durch eine periodische Reihe,

$$\begin{aligned} \text{so findet man, dass der periodische Theil von } \frac{1}{4}\{II+IV\} \\ - \frac{1}{4}\{I+III\}, \text{ fñr die Angabe } u \text{ des Nonius I:} \\ = -1,893 \sin 2u - 1,556 \cos 2u + 0,0308 \sin 4u \\ + 0,0028 \cos 4u + \text{etc.} \end{aligned}$$

ist. Die Hälfte dieses Ausdruckes, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist die Verbesserung, welche man den an den Nonien II und IV allein gemachten Ablesungen von u hinzufügen muss, um dadurch das zu erhalten, was die Ablesung an allen vier Nonien gegeben haben würde. Gibt man dieser Verbesserung die Angabe u_2 des Nonius II zum Argumente, so wird ihr Ausdruck:

$$\begin{aligned} = -0,9465 \sin 2u_2 - 0,778 \cos 2u_2 - 0,0154 \sin 4u_2 \\ - 0,0014 \cos 4u_2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

wovon jedoch die auf die beiden ersten folgenden Glieder kein Vertrauen mehr verdienen, indem sie viel zu klein sind, um aus so wenig genauen Ablesungen, als der Positionskreis sie gewähren kann, mit einiger Sicherheit abgeleitet werden zu können; auch könnten dem Sinus und Cosinus des vierfachen Winkels proportionale Glieder des Ausdruckes eines Theilungsfehlers nicht durch Ablesungen zweier, senkrecht auf einander gestellten Nonienpaare entdeckt werden. — Eine von Grad zu Grad fortgehende Tafel des Werthes der beiden ersten Glieder findet man am Ende dieser Abhandlung (Taf. IV).

5.

Die Bestimmung des Indexfehlers des Positionskreises ist durch die im 13. § der Abhandlung I [p. 125] entwickelte Methode gemacht worden. Ich werde zuerst die deshalb getroffene Einrichtung beschreiben. In der Drehkuppel, unter welcher das Heliometer sich befindet, ist ein Fraunhofer'sches Fernrohr von 2½ Fuss so aufgestellt worden, dass sein Objectiv dem Heliometer, sein Ocular dem äusseren Tageslichte zugewandt und daher ein Fadenkreuz in seinem Brennpunkte durch das Heliometerfernrohr sichtbar ist; seine Aufstellung gestattet Bewegungen sowohl in der Höhe als im Azimuthe, wodurch seine Axe und die Heliometeraxe immer zum Zusammenfallen gebracht werden können, wenn die Richtung der letzteren durch seinen Mittelpunkt gelegt worden ist. Für gehörige Blendung des neben dem Fernrohre vorbeigehenden Lichts ist gesorgt worden.

Wenn der Indexfehler des Positionskreises bestimmt werden soll, so werden zuerst die Axen beider Objectivhälften des Helimeters in die Heliometeraxe gestellt, und die Aufstellung des Hilfsfernrohres wird so

gemacht, dass beide Objectivhälften gleichviel Licht von ihm erhalten. Lässt man dann die Hälfte I ferner mit der Heliometeraxe zusammenfallen, verschiebt man aber die andere II bis an die eine Grenze ihrer Bewegung, oder bis 0^{ter} ihrer Schraube, so kann man beide Objectivhälften gemeinschaftlich so um die Heliometeraxe drehen, dass eine Drehung des Heliometers selbst um eine der Axen des Aequatorials, die beiden, von den beiden Hälften gegebenen Bilder des Fadenkreuzes des Hilfsfernrohrs durch das Fadenkreuz des Heliometers führt; die Erlangung der dann stattfindenden Angabe der Nonien des Positionskreises ist das, was durch die Beobachtung beabsichtigt wird. Sie muss aber, aus dem im 13. § der vorigen Abhandlung angeführten Gründen, nothwendig mit einer correspondirenden, d. h. in gleich grosser, aber entgegengesetzt liegender Entfernung der Axe der Objectivhälfte II von der Heliometeraxe gemacht, verbunden werden. — Ich habe beide zusammengehörigen Beobachtungen immer fünfmal, in verschiedenen Entfernungen der Axe der Objectivhälfte II von der Heliometeraxe, wiederholt, nämlich in den Entfernungen 20^{a} , 30^{a} , 40^{a} , 50^{a} , 60^{a} , wovon die letztere der Grenze der Verschiebung entspricht; wenn das Mittel der beiden zusammengehörigen Ablesungen des Positionskreises, für jede dieser Wiederholungen, nach seiner Berichtigung durch den Theilungsfehler (§ 4), durch N_1, N_2, \dots, N_6 bezeichnet wird, ist das anzunehmende Mittel aller 5 Beobachtungen:

$$(N) = \frac{1}{5} \{ 2N_1 + 3N_2 + 4N_3 + 5N_4 + 6N_5 \}$$

Die im 14. § der vorigen Abhandlung erwähnte, der Schwere zuzuschreibende Drehung des Fernrohrs um die Heliometeraxe fordert aber, dass man allen Ablesungen am Positionskreise die Grösse dieser Drehung, oder den daselbst gegebenen Ausdruck

$$\mu \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \}$$

hinzusetze, worin d und t die Declination und den Stundenwinkel eines Punktes in der Richtung der Heliometeraxe bedeuten, und wenn die Declinationsaxe vorgeht auf gewöhnliche Art, wenn sie folgt als $180^{\circ} - d$ und $180^{\circ} + t$ verstanden werden. Man hat also das berichtigte Resultat der 5 Beobachtungen:

$$= (N) + \mu \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \}$$

Hat nun das Instrument diese Beobachtungen durch Drehung um seine Stundenaxe gegeben, so ist der daraus hervorgehende Werth des Indexfehlers des Positionskreises, für die Objectivhälfte II, dem im 13. § der vorigen Abhandlung dafür gegebenen Ausdrucke zufolge:

$$k' = \frac{90^{\circ}}{270^{\circ}} - (N) - i, \sec d + i' \operatorname{tg} d \\ - \mu \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \}$$

und wenn es sie durch Drehung um seine Declinationsaxe gegeben hat:

$$k' = \frac{0^{\circ}}{180^{\circ}} - (N) - \mu \{ \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos t \}$$

Dass die Angaben des Positionskreises die von der Lage der Declinationsaxe abhängige Einwirkung erfahren, welche ich einer Drehung des Fernrohrs um die Heliometeraxe zugeschrieben habe, wurde zuerst im März 1833 bemerkt, als ich die sich damals hier aufhaltenden Herren Doctor PETERS (jetzt in Pulkowa) und Professor SELANDER (jetzt in Stockholm) ersuchte, den Indexfehler des Positionskreises, in beiden Stellungen des Instruments auf das Fadenkreuz des Hilfsfernrohrs zu bestimmen: es zeigte sich in diesen Bestimmungen ein Unterschied, welcher viel zu gross war, um ihn einer Unvollkommenheit der Beobachtungen zuschreiben zu können, und welcher auch in der Folge immer wieder hervorgetreten ist, so häufig und so verschiedenartig die Veranlassungen seines Hervortretens waren. Er hat sich in der That nicht allein in der Bestimmung des Indexfehlers des Positionskreises gezeigt, sondern auch in der Beobachtung der Positionswinkel von Sternenpaaren, z. B. der Plejaden. Die Grösse dieses Einflusses, oder μ , kann durch Vergleichung von Bestimmungen des Indexfehlers des Positionskreises, bei vorgehender und bei folgender Declinationsaxe gemacht, am leichtesten erlangt werden; auch mit hinreichender Sicherheit, indem das beschriebene Verfahren, wodurch der Indexfehler bestimmt wird, darin die grösste, erreichbare Genauigkeit herbeiführt.

Ich werde jetzt die Bestimmungen mittheilen, aus welchen ich die Grösse von μ abgeleitet habe. Ich wende zu diesem Zwecke nur die durch Drehung des Instruments um die Declinationsaxe erlangten Bestimmungen des Indexfehlers an, weil sie ihn unabhängig von der Kenntniss anderer Elemente ergeben, während seine durch Drehung um die Stundenaxe erlangten Bestimmungen i , und i' als bekannt voraussetzen. Die beiden Bestimmungen des Indexfehlers, aus deren Vergleichung mit einander μ hervorgehen sollte, sind immer im Meridiane des Heliometers gemacht; das Hilfsfernrohr befand sich entweder bei der einen gegen Süden, bei der anderen gegen Norden, und die Declinationsaxe blieb in unveränderter Lage; oder es befand sich bei beiden entweder gegen Süden oder gegen Norden und die Lage der Declinationsaxe wurde zwischen beiden in die entgegengesetzte verwandelt. Wenn das Hilfs-

fernrohr sich gegen Süden befindet, so sieht man sein Fadenkreuz in der Declination = $-27^{\circ} 7'$, wenn es sich gegen Norden befindet in $+43^{\circ} 30'$; in dem ersten Falle ist der Coefficient von $\mu = \pm 0,98985$, in dem zweiten = $\mp 0,98973$. Der Unterschied zwischen den beiden, mit einander zu vergleichenden Bestimmungen des Indexfehlers ist daher, wenn das Hülf fernrohr sich bei der einen gegen Süden, bei der andern gegen Norden befand = $1,97958\mu$; wenn bei beiden gegen Süden = $1,97970\mu$, gegen Norden = $1,97946\mu$; welche Ausdrücke so wenig von einander verschieden sind, dass man alle gleich und zwar = $1,9796\mu$ annehmen kann. Der Werth dieses Unterschiedes ist, bis zum 15. Novbr. 1840, 50mal bestimmt worden*); das Mittel dieser 50 Bestimmungen ist:

$$1,9796\mu = 3,789$$

und es folgt daraus

$$\mu = 1,914.$$

Den Indexfehler des Positionskreises selbst habe ich dagegen stets auf das mittlere Resultat der Drehungen um die Stundenaxe und um die Declinationsaxe gegründet, nicht wie die Bestimmung von μ auf die letzteren allein. So wie die eben angeführten Zahlen aus Wiederholung der Drehungen des Instruments um seine Declinationsaxe, unter das Zeichen des Einflusses von μ umändernden Umständen beobachtet, hervorgegangen sind, so sind mit diesen Beobachtungen immer auch Drehungen um die Stundenaxe verbunden worden. Seit dem März 1833, wo die jedesmalige Wegschaffung von μ aus dem Werthe des Indexfehlers wünschenswerth wurde und daher die Wiederholung seiner Bestimmung in zwei verschiedenen Lagen des Instruments zur Folge hatte, sind also immer vier Reihen von Drehungen vorhanden, aus deren Mittel der Indexfehler des Positionskreises frei von μ und entweder ganz, oder grossentheils frei von i , und i' hervorgeht. Es wird ganz frei von i , und i' , wenn das Hülf fernrohr sich in beiden Beobachtungsreihen entweder gegen Süden oder gegen Norden befindet, in welchem Falle die Declinationsaxe entgegengesetzte Lagen erhält; wenn sich dagegen das Hülf fernrohr zuerst gegen Süden in $d = -27^{\circ} 7'$, dann gegen Norden in $d = 180^{\circ} - 43^{\circ} 30'$ befindet, erfährt der durch die Drehungen um die Stundenaxe gefundene Werth des Indexfehlers, dem oben gegebenen Ausdrücke zufolge, die Einflüsse von i , und i' :

$$\begin{aligned} & -i, \sec 27^{\circ} 7' - i' \operatorname{tg} 27^{\circ} 7' \\ \text{und} \dots & +i, \sec 43^{\circ} 30' - i' \operatorname{tg} 43^{\circ} 30' \end{aligned}$$

*) [Einzelwerthe weggelassen.]

wovon die Viertelsumme:

$$= 0,0638 i, - 0,3653 i'$$

der Einfluss von i , und i' auf das Mittel der vier Bestimmungen ist. Die Zeichen dieser Formel entsprechen dem Falle, in welchem die Declinationsaxe der ersten Richtung des Fernrohrs vorgeht, also der zweiten folgt; im entgegengesetzten Falle müssen sie entgegengesetzt gelesen werden. — Ich habe im 2. § gezeigt, dass $i = +28,735 = +0,473$, und dass i' immer ein kleiner Bruch einer Minute gewesen ist; die Verbesserung des Mittels ist daher

$$= \pm 0,03 \mp 0,3653 i'.$$

Man vermeidet sie aber, wie ich schon erinnert habe, ganz, wenn man das Hülf fernrohr beidemale in Süden, oder beidemale in Norden aufstellt.

Vor dem März 1833 beruht jede vorhandene Bestimmung des Indexfehlers auf zwei Beobachtungsreihen, deren Resultat nur dadurch frei von μ wird, dass man den später bekannt gewordenen Werth dieser Grösse in Rechnung bringt. — Alle nach und nach bestimmten Werthe des Indexfehlers des Positionskreises, beziehungsweise auf die Objectivhälfte II, findet man am Ende dieser Abhandlung in Taf. V.

6.

Nachdem ich Alles mitgetheilt habe, was Einfluss auf die Reduction der Beobachtungen der Positionswinkel erhält, werde ich es zusammenstellen und die darauf beruhenden Rechnungsvorschriften angeben.

Ich setze voraus, dass nur von der Aufsuchung des Resultats zusammengehöriger Beobachtungen die Rede ist (Abh. I § 10 [p. 122]), nämlich solcher, welche gleichen aber entgegengesetzt liegenden Entfernungen der Axe der Hälfte II des Objectivs von der Axe der Hälfte I wiederholt worden sind, sowie auch, dass diese Beobachtungen nach der ersten der im 11. § Abh. I [p. 123] angeführten Methoden gemacht sind. Wenn die halbe Summe der Angabe des Non. II und der um 180° verminderten oder vermehrten des Non. IV des Positionskreises für die erste der beiden zusammengehörigen Beobachtung durch n , für die zweite durch n , bezeichnet wird, und wenn bedeuten:

ϵ ... den Theilungsfehler des Positionskreises ... Taf. IV
 K ... den Indexfehler des Positionskreises Taf. V
 ferner δ_0 und τ_0 die Declination und den Stundenwinkel des Punktes in der Mitte zwischen beiden mit einander verglichenen Punkten SS' und
 $\lambda = (x \sin \tau_0 - y \cos \tau_0) \sec \delta_0$
 $J = i, \sec \delta_0 - i' \operatorname{tg} \delta_0 + \mu (\sin \varphi \cos \delta_0 - \cos \varphi \sin \delta_0 \cos \tau_0)$

so ist:

die halbe Summe der Positionswinkel an den Endpunkten von SS' , in der Richtung von dem Punkte, welcher durch die am wenigsten vortretende Objectivhälfte gesehen wird, (welcher auch den Schraubenköpfen am nächsten erscheint) nach dem andern genommen:

a) wenn die Declinationsaxe vorangeht:

$$= \frac{1}{2}(n + n_1) - 90^\circ + \epsilon + k' + \lambda + J$$

b) wenn die Declinationsaxe folgt:

$$= \frac{1}{2}(n + n_1) + 90^\circ + \epsilon + k' + \lambda - J$$

Die Grössen x und y haben die Ausdrücke $x' + 0,4 \xi$ und $y' + 7,056 (T - 20,8) + 0,353 \eta = (y') + 0,353 \eta$ (§ 3) und man findet

$$x', y', (y') \text{ in } \dots \dots \dots \text{ Taf. VI.}$$

Wenn man, im Ausdrücke von J , für i , und μ ihre beständigen Werthe setzt, nämlich

$$i = + 28,735 = + 0,473 (\S 2), \quad \mu = 1,914 (\S 5),$$

so wird dieser Ausdruck:

$$J = + 0,473 \sec \delta_0 + 1,562 \cos \delta_0 \\ - 1,106 \sin \delta_0 \cos \tau_0 - i' \operatorname{tg} \delta_0$$

Seine Berechnung wird durch Taf. VII und Taf. VIII erleichtert. Man erhält nämlich

$$a = + 0,473 \sec \delta_0 + 1,562 \cos \delta_0, \text{ m. d. Arg. } \delta_0 \text{ aus Taf. VII}$$

$$b = + 0,553 \sin(\tau_0 - \delta_0), \text{ m. d. Arg. } \dots \tau_0 - \delta_0 \text{ Taf. VIII}^*)$$

$$c = + 0,553 \sin(\tau_0 + \delta_0), \dots \dots \dots \tau_0 + \delta_0 \text{ Taf. VIII}^*)$$

und dadurch

$$J = a + b - c - i' \operatorname{tg} \delta_0$$

Für meine Beobachtungen war i' immer so klein, dass es unnöthig war, das letzte Glied dieses Ausdruckes zu berücksichtigen.

Zweiter Theil.

Entfernungen.

7.

Die Schrauben, welche die Objectivhälften des Heliometers verschieben, dienen zugleich zu der Messung der Grösse ihrer Bewegung. Die ganzen Drehungen jeder der beiden Schrauben werden durch eine Scale gezählt, die Theile derselben durch die Schraubentrommel, auf welche die Hundertel unmittelbar aufgetragen sind und welche die Tausentel durch sichere Schätzung ergibt. Ich habe alle meine Messungen mit dem Heliometer durch die Schraube der Objectivhälfte II gemacht. Die Untersuchung, welche ich jetzt mit-

zutheilen im Begriffe bin, bezieht sich daher allein auf diese Schraube.

Zuerst muss untersucht werden, inwiefern das Fortschreiten des Schiebers, in welchen die Objectivhälfte II eingefasst ist, dem Wachsen der Angaben der Scale und Trommel der Schraube proportional ist. Dass diese Proportionalität in aller Schärfe stattfindet, kann nicht erwartet werden; man muss vielmehr Mittel suchen, solche Ausgleichungen der unmittelbaren Angaben der Schraubentrommel zu bestimmen, dass diese durch ihre Hinzufügung den Bewegungen des Schiebers wirklich proportional werden.

Wenn man ein Mittel besitzt, von beliebigen Anfangspunkten aus, eine immer gleich grosse Bewegung der Objectivhälfte hervorzubringen, so kann diese Bewegung mit dem Unterschiede der ihrem Anfange und Ende entsprechenden Angaben der Schraube verglichen werden. Sind keine Ausgleichungen der Angaben der Schraube nöthig, so müssen diese Unterschiede einander gleich sein, von welchen Anfängen die Messung der gleich grossen Bewegung durch die Schraube auch ausgehen möge. Sind aber Ausgleichungen erforderlich, so muss ihre Grösse und die Art ihres Fortganges an den Tag gelegt werden können, indem dieser Messung nach und nach verschiedene Anfänge gegeben werden. Die Grundlage der Untersuchung der Schraube ist daher ein Apparat, durch dessen Hilfe dem Schieber, von beliebigen Anfangspunkten aus, eine Bewegung von beliebiger, aber, so lange man sie nicht abändern will, gleicher Grösse gegeben werden kann.

Herr THEODOR BAUMANN in Berlin, derselbe Künstler, der sich durch die Verfertigung sämmtlicher, bei Gelegenheit der Festssetzung der Einheit des Preussischen Längenmaasses angewandter Apparate, grosse Ehre erworben hat, hat mir auch die Einrichtung geliefert, welcher ich zur Untersuchung der Schraube des Heliometers bedurfte. Sie besteht aus zwei abgesonderten Theilen, welche auf die Schieber der beiden Objectivhälften aufgeschraubt werden können. Der auf dem Schieber I zu befestigende trägt zwei nach entgegengesetzten Seiten wirkende Fühlhebel; der auf den Schieber II aufzuschraubende trägt zwei quadratische, senkrecht auf ihre gemeinschaftliche Axe abgeschnittene Prismen von hartem Stahl, welche in einer der Bewegungslinie der Schieber parallelen Bahn einzeln bewegt und an beliebigen Stellen derselben befestigt werden können, so dass die Entfernung ihrer Endflächen von einander willkürlich geändert werden kann. Die beiden Fühlhebel des ersten Theils befinden sich zwischen diesen Endflächen, sodass ebensowohl der eine

*) Alle Tafeln sind hier weggelassen.]

gegen eine derselben, als der andere gegen die andere wirken kann. — Wenn der Schieber I so gestellt wird, dass der eine Fühlhebel die ihm entgegenstehende Endfläche gehörig berührt; wenn dann der Schieber II so weit bewegt wird, dass bei dem anderen Fühlhebel und der anderen Endfläche dasselbe eintritt, so hängt die Grösse der dazu erforderlichen Bewegung offenbar nur von der Entfernung der Endflächen der beiden Prismen ab; und von welchem Punkte sie auch ausgehen möge, ist sie so lange beständig, als diese Entfernung nicht geändert wird. — Diese Einrichtung leistet also das, was zu einer Untersuchung der Heliometerschraube erforderlich ist. — Ausser ihr hat Herr BAUMANN mir noch eine andere geliefert, bei welcher die beiden Fühlhebel durch ein achromatisches Mikroskop und die beiden Endflächen der Prismen durch zwei auf Silber gezogene Striche vertreten werden, welche man in jede beliebige Entfernung von einander bringen kann.

8.

Ich habe die beschriebene Einrichtung zuerst benutzt um zu untersuchen, inwiefern die, einer ganzen Umdrehung der Schraube entsprechende Fortbewegung des Schiebers, durch die auf der Schraubentrommel abgelesenen Theile einer Drehung richtig eingetheilt wird. Ich stellte die Prismen so, dass ihre Entfernung ein Fortschreiten von etwa der halben Grösse einer halben Schraubenwindung bedingte, und beobachtete dieses Fortschreiten dann, indem ich jedes Zehntel der Angabe der Schraubentrommel zwischen 55^h0 und 64^h0 nach und nach zum Anfange wählte. Diese 100 Beobachtungen haben folgende Ausdrücke des immer gleichen Fortschreitens, durch auf der Schraubentrommel abgelesene Theile ihres ganzen Umfanges, ergeben:

55 ^h 0	0 ^h 4985	57 ^h 0	0 ^h 5030	59 ^h 0	0 ^h 4985
1	4945	1	4970	1	4955
2	4930	2	4940	2	4950
3	4895	3	4915	3	4915
4	4930	4	4915	4	4925
5	4945	5	4945	5	4950
6	4985	6	4990	6	4985
7	5005	7	5010	7	5010
8	5025	8	5020	8	5025
9	5025	9	5020	9	5030
56,0	4995	58,0	5005	60,0	4985
1	4960	1	4955	1	4965
2	4905	2	4940	2	4955
3	4905	3	4925	3	4930
4	4910	4	4910	4	4935
5	4955	5	4940	5	4960
6	4995	6	4985	6	4990
7	5005	7	5005	7	5015
8	5020	8	5020	8	5030
9	5020	9	5015	9	5045

61 ^h 0	0 ^h 4980	62 ^h 0	0 ^h 5020	63 ^h 0	0 ^h 5015	64 ^h 0	0 ^h 5045
1	4965	1	4985	1	4990	1	5000
2	4945	2	4955	2	4960	2	4970
3	4920	3	4940	3	4950	3	4945
4	4920	4	4935	4	4930	4	4950
5	4965	5	4965	5	4970	5	4960
6	5000	6	4995	6	4990	6	4990
7	5015	7	5040	7	5015	7	5020
8	5045	8	5045	8	5040	8	5070
9	5045	9	5050	9	5045	9	5055

Ferner habe ich 100 ähnliche Beobachtungen, von denselben Anfangspunkten aus, nach einer Verkleinerung des Zwischenraums bis auf etwa ein Viertel einer Schraubenwindung gemacht:

55 ^h 0	0 ^h 2630	58 ^h 0	0 ^h 2670	61 ^h 0	0 ^h 2660	64 ^h 0	0 ^h 2640
1	2615	1	2640	1	2630	1	2670
2	2630	2	2650	2	2650	2	2640
3	2610	3	2620	3	2610	3	2620
4	2565	4	2555	4	2585	4	2600
5	2560	5	2560	5	2580	5	2580
6	2580	6	2585	6	2610	6	2570
7	2600	7	2630	7	2615	7	2605
8	2650	8	2620	8	2640	8	2650
9	2630	9	2700	9	2640	9	2670
56,0	2660	59,0	2670	62,0	2665		
1	2640	1	2650	1	2660		
2	2630	2	2650	2	2660		
3	2620	3	2600	3	2630		
4	2580	4	2590	4	2580		
5	2570	5	2560	5	2560		
6	2605	6	2610	6	2590		
7	2625	7	2600	7	2620		
8	2630	8	2660	8	2650		
9	2675	9	2640	9	2680		
57,0	2680	60,0	2665	63,0	2670		
1	2645	1	2695	1	2650		
2	2655	2	2640	2	2670		
3	2600	3	2620	3	2630		
4	2590	4	2685	4	2675		
5	2570	5	2570	5	2570		
6	2570	6	2560	6	2570		
7	2665	7	2640	7	2600		
8	2645	8	2660	8	2635		
9	2660	9	2655	9	2650		

Wenn man beide Verzeichnisse betrachtet, so fällt eine Aehnlichkeit des Verhaltens auf, welche die einzelnen Schraubenwindungen von der 55. bis 65. zeigen: der erste Zwischenraum ist, von dem 8. oder 9. Zehntel der Theilung der Schraubentrommel aus, immer am kleinsten gemessen worden, der zweite Zwischenraum erscheint im Ganzen am grössten, wenn er vom 0. Zehntel aus gemessen wird, am kleinsten wenn von dem 5. aus. Diese Aehnlichkeit des Verhaltens der Schraube, durch mehrere Windungen hindurch, ist für die Er-

langung der Kenntniss ihrer Ausgleichen nicht unbedeutend, indem sie verstatet, die mittleren Werthe der Ausgleichen mehrerer untersuchten Windungen, als Näherung an die jeder einzelnen von ihnen zukommenden zu betrachten. Auch zeigt die Schraube diese Aehnlichkeit ihres Verhaltens nicht von der 55. bis zu der 65. Windung allein, sondern sie zeigt sie auch noch an vier anderen, auf gleiche Art untersuchten Stellen, nämlich zwischen der 15. und 25., der 35. und 45., der 75. und 85., der 95. und 105. Windung. Ich habe sie sogar bei allen Mikrometerschrauben gefunden, welche näher zu untersuchen ich Veranlassung gehabt habe; man findet Beispiele davon in meinem Buche über die Einheit des Preussischen Längenmaasses.

Dieser Bemerkung zufolge gelangt man zu einer besseren Ueberzeugung über das Verhalten der Schraube zwischen ihrer 55. und 65. Windung, wenn man aus allen gleichen Zehnteln der mitgetheilten Verzeichnisse das arithmetische Mittel nimmt. Man findet dadurch, dass die beiden gewählten Zwischenräume, von den einzelnen Zehnteln der Schraubentrommel aus, durch diese gemessen, in folgenden Grössen erscheinen:

	1. Zwischenraum.	2. Zwischenraum.
Anfang 0 Zehntel	0 ^m 50045	0 ^m 26610
1 "	49690	26495
2 "	49440	26465
3 "	49240	26160
4 "	49260	25805
5 "	49555	25680
6 "	49905	25850
7 "	50140	26200
8 "	50340	26440
9 "	50350	26690

9.

Man kann die Ausgleiche φ_n einer Angabe u der Schraubentrommel aus diesen Zahlen so erkennen, dass durch ihre Anbringung sowohl an den Anfang als an das Ende jeder Messung, die Veränderungen verschwinden, welche die Zahlen durch die Veränderungen des Anfangs der Messungen erfahren haben. Wenn der Anfang einer von ihnen auf die Angabe u der Schraubentrommel fällt, das Ende auf u' , so ist die Bedingung, aus deren Verfolgung die Kenntniss von φ_n hervorgehen muss, die, dass $u' + \varphi_n - u - \varphi_n$ von u unabhängig werde. — Setzt man

$$\varphi_n = \alpha \cos u + \beta \sin u + \alpha' \cos 2u + \beta' \sin 2u + \dots$$

und bezeichnet man den gemessenen Zwischenraum durch f , so hat man also seinen Ausdruck:

$$f = u' - u + \alpha(\cos u' - \cos u) + \beta(\sin u' - \sin u) + \alpha'(\cos 2u' - \cos 2u) + \text{etc.}$$

aus dessen Vergleichung mit beiden Reihen von Messungen sowohl α , β , α' , β' , ..., als auch die, beiden zugehörigen Werthe von f abzuleiten sind.

Wenn, wie in dem gegenwärtigen Falle, α , β , ... sehr kleine Grössen sind, kann man das Mittel aller beobachteten Werthe von $u' - u$ für f annehmen und $\cos(u + f)$, $\sin(u + f)$ u. s. w. statt $\cos u'$, $\sin u'$, u. s. w. schreiben. Auf diese Art erhält man, durch jeden beobachteten Werth von $u' - u$, die Gleichung:

$$u' - u - f = 2\alpha \sin \frac{1}{2}f \sin(u + \frac{1}{2}f) - 2\beta \sin \frac{1}{2}f \cos(u + \frac{1}{2}f) + 2\alpha' \sin f \sin(2u + f) - 2\beta' \sin f \cos(2u + f) + \dots$$

und aus allen Gleichungen jeder Reihe:

$$10\alpha \sin \frac{1}{2}f = \Sigma(u' - u - f) \sin(u + \frac{1}{2}f)$$

$$10\beta \sin \frac{1}{2}f = -\Sigma(u' - u - f) \cos(u + \frac{1}{2}f)$$

$$10\alpha' \sin f = \Sigma(u' - u - f) \sin(2u + f)$$

$$10\beta' \sin f = -\Sigma(u' - u - f) \cos(2u + f)$$

Wendet man dieses auf die erste Reihe der Beobachtungen an, so findet man $f = 0^m 497965 = 179^s 16,04$ und

$$10\alpha = + 0^m 013056$$

$$10\beta = - 0,024874$$

$$0,128\alpha' = + 0,000147$$

$$0,128\beta' = + 0,000337$$

Die zweite Reihe der Beobachtungen ergibt

$$f = 0^m 262305 = 94^s 25,79$$

und

$$7,339\alpha = + 0^m 015015$$

$$7,339\beta = - 0,016126$$

$$9,970\alpha' = - 0,004987$$

$$9,970\beta' = - 0,000576$$

Die Verbindung der aus beiden Reihen gezogenen Bestimmungen ergibt:

$$\alpha = + 0^m 001608$$

$$\beta = - 0,002386$$

$$\alpha' = - 0,000499$$

$$\beta' = - 0,000057$$

oder, die ausgeglichene Angabe der Schraubentrommel, zwischen der 55. und 65. Windung der Schraube, ist:

$$= u + 0^m 001608 \cos u - 0^m 002386 \sin u - 0,000499 \cos 2u - 0,000057 \sin 2u$$

Die Anwendung dieser Formel auf den Anfang und das Ende jeder Messung sollte den Unterschied beider $= f$ ergeben; inwiefern sie dieses wirklich leistet, zeigen die

folgenden Verzeichnisse der übrigbleibenden Abweichungen von f :

	1. Zwischen- raum.	2. Zwischen- raum.
Anfang 0 Zehntel	- 0 ⁰ ,0007	+ 0 ⁰ ,0007
1 "	- 0,0009	+ 0,0002
2 "	- 0,0001	+ 0,0012
3 "	+ 0,0000	+ 0,0007
4 "	+ 0,0001	- 0,0002
5 "	+ 0,0009	- 0,0004
6 "	+ 0,0009	- 0,0007
7 "	- 0,0001	- 0,0007
8 "	- 0,0002	- 0,0009
9 "	+ 0,0002	+ 0,0001

Da diese Unterschiede wohl nicht grösser sind als die Unvollkommenheiten der Messungen, so halte ich die Absicht dieses Theils der Untersuchung der Schraube für erreicht, nämlich die Absicht, den periodischen Theil ihrer Ausgleichungen zwischen ihrer 55. und 65. Windung kennen zu lernen.

10.

Ich habe schon erwähnt, dass noch vier andere,

$$\begin{aligned} \text{von } 15^R \text{ bis } 25^R \dots &+ 0^0001778 \cos u - 0^002384 \sin u - 0^0000577 \cos 2u + 0^0000373 \sin 2u \\ \text{,, } 35 \text{ ,, } 45 \dots &+ 0,001263 \cos u - 0,002358 \sin u - 0,000373 \cos 2u + 0,000207 \sin 2u \\ \text{,, } 55 \text{ ,, } 65 \dots &+ 0,001608 \cos u - 0,002386 \sin u - 0,000499 \cos 2u - 0,000057 \sin 2u \\ \text{,, } 75 \text{ ,, } 85 \dots &+ 0,002810 \cos u - 0,001575 \sin u - 0,000305 \cos 2u + 0,000370 \sin 2u \\ \text{,, } 95 \text{ ,, } 105 \dots &+ 0,002535 \cos u - 0,001450 \sin u - 0,000180 \cos 2u + 0,000085 \sin 2u \end{aligned}$$

Obgleich die Coefficienten dieser Formeln hier so wie die Rechnung sie ergeben hat, bis auf 6 Decimalstellen angeführt sind, so ist doch schon die vierte vielleicht einige Einheiten unsicher. Ein Fehler von 0⁰,0002 beträgt auch nur ein Hundertel einer Secunde. — Es ist zwar nicht zu bezweifeln, dass die periodischen Ausgleichungen an den 5 untersuchten Stellen der Schraube nicht ganz gleiche Werthe haben; aber dennoch findet ihre schon bemerkte Eigenschaft, in vielen aufeinanderfolgenden Windungen der Schraube nahe gleiche Werthe zu behalten, in den drei ersten Ausdrücken sowohl, als auch in den zwei letzten, eine neue und in der Ausdehnung über eine so grosse Zahl von Windungen vielleicht nicht erwartete Bestätigung.

Wenn gleichmässiges Steigen der Windungen einer Schraube in Beziehung auf eine Axe stattfindet, welche der ihrigen nicht parallel ist, so können dadurch die von dem einfachen Drehungswinkel abhängigen Theile der Ausgleichungen erklärt werden; aber auch die Mutter der Schraube muss eine ähnliche Beschaffenheit haben, indem ihre Windungen, wenn sie vollkommen gleichmässig stiegen, stets von derselben Stelle der Windungen der Schraube berührt werden würden, und diese

auch 10 Windungen lange Stellen der Schraube auf ähnliche Art untersucht worden sind. Nachdem ich den ganzen Hergang dieser Untersuchung für Eine solche Stelle, durch Anführung aller seiner einzelnen Momente, anschaulich gemacht habe, glaube ich die Mittheilung der Untersuchungen der übrigen Stellen abkürzen zu dürfen.

[Folgt Mittheilung der einzelnen Messungen beider Zwischenräume für jedes Zehntel des Schraubenumfangs.]

Ich bemerke hierbei, dass die Beobachtungen zu verschiedenen Zeiten gemacht worden sind, und dass der Apparat oft von den Schiebern entfernt werden musste, um das Instrument seinen fortlaufenden Anwendungen nicht entziehen zu dürfen. Hierdurch haben die Werthe von f Aenderungen erfahren; ihre aus den Messungen hervorgehenden Unterschiede sind ganz oder zum Theil dieser Ursache zuzuschreiben.

[Mittheilung der Coefficienten für die verschiedenen Theile der Schraube.]

Die periodischen Theile der Angleichung der Angaben der Schraubentrommel sind:

sich also, bei der Drehung der Schraube, in einem gleichmässig steigenden Gewinde vorwärts bewegen würde. Eine sich zeigende Ungleichheit der Schraubendrehungen beweiset also Fehler der Schraube selbst und ihrer Mutter. — Es ist indessen bei einer gewissen Beschaffenheit der Einrichtung auch möglich, dass eine Ungleichheit aus der Fläche entsteht, gegen welche die Schraube sich bei ihrer Drehung stützt.

Wenn man aus den fünf gefundenen Formeln für φ_{2n} Nutzen für die Reduction einer Beobachtung ziehen will, so wird man einige Willkür in der Interpolation für Windungen der Schraube, welche nicht unmittelbar untersucht worden sind, nicht vermeiden können. Am einfachsten wäre es, wenn man das arithmetische Mittel aus allen 5 Formeln, nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_{2n} &+ 0^0001999 \cos u - 0^0002071 \sin u \\ &- 0,000387 \cos 2u + 0,000196 \sin 2u \end{aligned}$$

für die ganze Länge der Schraube anwendete. Um genauer zu erfahren, welchen Erfolg man dadurch erlangen würde, habe ich die 10 einzelnen Reihen der Beobachtungen eben so mit dieser Formel verglichen, wie am Ende des 9. §s zwei von ihnen mit der aus

diesen selbst abgeleitet und gefunden, dass diese Beobachtungen dadurch mit dem mittleren Fehler $= \pm 0^{\circ}001145$ dargestellt werden. Ihre Vergleichung mit den fünf, den einzelnen untersuchten Theilen der Schraube zukommenden Formeln, stellt sie mit dem mittleren Fehler $= \pm 0^{\circ}000678$ dar, ohne alle Ausgleichung würde ihr in F. $= \pm 0^{\circ}00393$ erscheinen.

Diese Untersuchungen der Schraube würden übrigens noch viel weiter fortgesetzt werden müssen, wenn sie so weit getrieben werden sollten, dass die periodische Ausgleichung der Angabe der Schraubentrommel allenthalben bis auf $0^{\circ}0002$, oder bis auf etwa ein Hundertel einer Secunde sicher, bekannt würde; was jedoch sehr schwer durchzuführen sein würde. Man kann aber den Beobachtungen eine Anordnung geben, welche ihr Resultat von der periodischen Ausgleichung der Schraube befreit und also die Kenntniss derselben unnöthig macht. Dieses wird geleistet, wenn man ein Mittel aus mehreren Wiederholungen einer Beobachtung nimmt, welche von verschiedenen Angaben der Schraubentrommel anfangen und sich also auch mit ebensoviel verschiedenen endigen. Entfernt man die, während der Beobachtung unverrückt bleibende Objectivhälfte I, $0^{\circ}25$ von der Heliometeraxe und macht man dann eine Beobachtung, sowie eine zweite in gleich grosser, aber entgegengesetzter Entfernung dieser Objectivhälfte von der Heliometeraxe, so ist das mittlere Resultat beider Beobachtungen offenbar frei von den von α und β abhängigen Theilen der Ausgleichung. Um auch α' und β' aus dem Resultate zu schaffen, muss dieses das Mittel aus wenigstens vier Beobachtungen sein, z. B. aus vier in den Entfernungen der Objectivhälfte I von der Heliometeraxe $= -0^{\circ}375, -0^{\circ}125, +0^{\circ}125, +0^{\circ}375$ gemachten; oder auch das Mittel aus fünf in den Entfernungen $-0^{\circ}4, -0^{\circ}2, 0, +0^{\circ}2, +0^{\circ}4$ gemachten. Um diese Verschiebungen der Objectivhälfte I aus der Heliometeraxe keinen Einfluss auf den Positionswinkel einzuräumen, kann man den Oculare dieselben Verschiebungen geben. — Obgleich diese Beobachtungsmethode wesentlich Wiederholungen fordert, so glaube ich doch nicht, dass dieses von ihrer Anwendung abhalten wird: wenn man eine so grosse Sicherheit sucht, dass einige Hundertel der Secunde nicht unerheblich erscheinen, muss man ohnehin die Beobachtung wiederholen, und wird dann in der jedesmaligen Verschiebung der Objectivhälfte I keine wesentliche Vermehrung der Mühe sehen. — Ich muss jedoch bemerken, dass ich auf diese Beobachtungsmethode erst später aufmerksam geworden bin und sie also früher nicht angewandt habe.

11.

Ausser den periodischen Ausgleichungen erfordert die Angabe der Schraubentrommel noch andere, welche von nicht vollkommener Gleichheit der Grösse der Windungen, an verschiedenen Stellen der Schraube, herühren. Ihre sorgfältige Untersuchung ist desto notwendiger, da ihr Einfluss auf die Messungen mit dem Heliometer nicht durch eine Anordnung der Beobachtungen vermieden werden kann, wie dieses bei dem Einflusse der periodischen Ausgleichungen möglich ist.

Zur Untersuchung dieses Theils der Ausgleichungen der Schraube habe ich den im 7. § erwähnten mikroskopischen Apparat angewandt, indem er mir bequemer dazu erschein als der andere. Wenn man die beiden Striche dieses Apparats in eine Entfernung J voneinander bringt, die zu untersuchende Schraube der Objectivhälfte II auf einen willkürlichen Anfangspunkt m stellt, dann die Schraube der Objectivhälfte I benutzt, um dadurch das Mikroskop auf den einen der beiden Striche zu bringen, endlich die Schraube von II anwendet, um den anderen Strich unter das Mikroskop zu führen, und ihre Angabe m' abliest, so ist $m' + fm' - m - fm = J$, wenn fm und fm' die Ausgleichungen der Schraube am Anfangspunkte und am Endpunkte der Messung bedeuten. Wenn man dieselbe Beobachtung von anderen Anfangspunkten aus m_1, m_2, m_3, \dots wiederholt und dadurch auf die Endpunkte m'_1, m'_2, m'_3, \dots gelangt, so erhält man dadurch

$$J = m' - m + fm' - fm = m'_1 - m_1 + fm'_1 - fm_1 \\ = m'_2 - m_2 + fm'_2 - fm_2 = \text{u. s. w.}$$

also eine Vergleichung der verschiedenen Stellen der Schraube untereinander, welche man so anordnen kann, dass daraus die Werthe der verschiedenen fm, fm_1, \dots hervorgehen.

Ich habe J nach und nach, nahe $= 10^{\circ}, 20^{\circ}, 30^{\circ}, 40^{\circ}, 50^{\circ}, 60^{\circ}$ gemacht, für m, m_1, m_2, \dots aber alle die Zelner der Schraubenwindungen genommen, auf welche der Anfang der Messungen verlegt werden konnte, ohne dass ihr Ende über das Ende der Schraube (120°) hinausging. Um diese Messungen ganz von den periodischen Ausgleichungen zu befreien, habe ich sie nicht allein von einem beabsichtigten Anfangspunkte m , sondern von $m - 0^{\circ}4, m - 0^{\circ}2, m, m + 0^{\circ}2, m + 0^{\circ}4$ anfangen lassen und aus diesen fünf Wiederholungen das Mittel genommen. Jede der Messungsreihen habe ich zu verschiedenen Zeiten zweimal wiederholt.

[Messungsreihen für die 6 Entfernungen $J = 10^{\circ} + i$, bis $J = 60^{\circ} + i$, für die Anfangspunkte $0^{\circ}, 10^{\circ}, \dots$]

12.

Betrachtet man die Ausgleichungen der Angaben der Schraubentrommel, für 0^R , 10^R , 20^R , ... 120^R , als die aus diesen Messungen zu bestimmenden Grössen, so haben die 57 aus ihnen hervorgehenden Gleichungen 19 unbekannte Grössen, nämlich diese 13 und die sechs Werthe von i_1, i_2, \dots, i_6 . Zwei davon kann man aber willkürlich annehmen, indem durch diese Messungen nur das Verhältniss eines willkürlich angenommenen Theils der Schraube zu den übrigen bestimmt werden kann; ich setze demzufolge $f0 = 0$ und $f120 = 0$.

Von den 57 Gleichungen werde ich die sich aus der 4. Messungsreihe, in welcher $J = 40^R + i_4$ ist, ergebenden als Beispiel hierhersetzen:

$$\begin{aligned} i_4 &= + 0,0707 + f 40 \\ &= + 0,0704 + f 50 - f 10 \\ &= + 0,0688 + f 60 - f 20 \\ &= + 0,0661 + f 70 - f 30 \\ &= + 0,0607 + f 80 - f 40 \\ &= + 0,0574 + f 90 - f 50 \\ &= + 0,0535 + f 100 - f 60 \end{aligned}$$

Zwischenraum ...	10^R	20^R	30^R	40^R	50^R	60^R
	+ 0,0015	- 0,0009	- 0,0010	- 0,0011	+ 0,0005	+ 0,0015
	+ 0,0008	- 0,0006	- 0,0012	- 0,0009	+ 0,0018	+ 0,0010
	- 0,0004	- 0,0009	- 0,0003	- 0,0006	+ 0,0006	+ 0,0012
	- 0,0008	- 0,0013	- 0,0014	+ 0,0006	+ 0,0007	+ 0,0004
	- 0,0014	+ 0,0001	- 0,0020	- 0,0006	- 0,0003	+ 0,0003
	- 0,0013	+ 0,0015	- 0,0014	+ 0,0006	- 0,0016	- 0,0011
	- 0,0001	+ 0,0010	+ 0,0011	+ 0,0013	+ 0,0003	- 0,0034
	+ 0,0010	+ 0,0004	+ 0,0016	+ 0,0005	- 0,0020	
	- 0,0010	+ 0,0003	+ 0,0026	+ 0,0001		
	- 0,0012	+ 0,0003	+ 0,0019			
	+ 0,0005	+ 0,0002				
	+ 0,0025					

Die Aufmerksamkeit, welche ich auf diese Messungen verwandt habe, liess mich eine grössere Uebereinstimmung erwarten. Allein schon während ihres Verlaufes wurden fremde Einwirkungen bemerkbar, deren Ursache ich zum Theil in einem Einflusse der Körperwärme des Beobachters auf das Mikroskop und die Entfernung der beiden Striche suche, zum Theil aber auch in Fettigkeit und Staub, welche sich zwischen die Schraube und ihre Mutter setzen. Ich erwähne diese kleinen Unterschiede hier, weniger weil ich fürchtete, dass sie eine erhebliche Unsicherheit der Bestimmung der gesuchten Ausgleichungen zur Folge hätten, als um darauf aufmerksam zu machen, dass es wesentlich ist, die Schraube stets möglichst rein und mit unverdicktem Oele versehen, zu erhalten. Wenn man dieses vernachlässigt,

$$\begin{aligned} &= + 0,0524 + f 110 - f 70 \\ &= + 0,0563 \quad - f 80 \end{aligned}$$

Die gehörige Auflösung aller vorhandenen ähnlichen Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} i_1 &= + 0^R 01108 \\ i_2 &= + 0,02449 \\ i_3 &= + 0,04515 \\ i_4 &= + 0,06310 \\ i_5 &= + 0,08196 \\ i_6 &= + 0,09776 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f 0 &= 0^R 00000 & f 60 &= - 0^R 01070 \\ f 10 &= - 0,00163 & f 70 &= - 0,00925 \\ f 20 &= - 0,00444 & f 80 &= - 0,00694 \\ f 30 &= - 0,00682 & f 90 &= - 0,00349 \\ f 40 &= - 0,00874 & f 100 &= + 0,00023 \\ f 50 &= - 0,00981 & f 110 &= + 0,00194 \\ f 60 &= - 0,01070 & f 120 &= 0,00000 \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen der unbekannt Grössen stimmen die 57 Gleichungen einzeln folgendermassen überein:

so können, nach meiner Erfahrung, Fehler erzeugt werden, welche bis auf mehrere Tausentel einer Schraubenwindung steigen.

Die Beobachtungsmethode, welche ich befolge, lässt die Objectivhälfte I unverrückt und bringt also die Objectivhälfte II in entgegengesetzte, gleich grosse Entfernungen von der Heliometeraxe. In dieser befindet sich ihr optischer Mittelpunkt, wenn die Schraube 60^R angibt; der Index ist stets so gesetzt worden, dass dieses sehr nahe stattfand. Man kann daher aus den angegebenen Werthen der Ausgleichungen die bei allen vollständigen Beobachtungen anzuwendenden ableiten, nämlich wenn die Entfernung, in Schraubenwindungen ausgedrückt, durch F bezeichnet wird, ist die ihrer Messung hinzuzusetzende Ausgleichung

$$= \frac{1}{4} f(60 + F) - \frac{1}{4} f(60 - F)$$

Die Werthe dieser Grösse für $F = 0, 10^R, 20^R, \dots 60^R$, gehen aus den schon angegebenen Werthen von f_0, f_{10}, f_{20} , u. s. w. folgendermassen hervor:

Entfernung α^R	Ausgleichung.	
	α^R	α^R
10	0,00000	+ 0,00088
20	+ 0,00099	+ 0,00166
30	+ 0,00166	+ 0,00233
40	+ 0,00233	+ 0,00179
50	+ 0,00179	0,00000
60	0,00000	

13 — 16.

[Ableitung der Grundformeln der Dioptrik, s. die betr. Abhandlung unter „Physik.“]

17.

Zunächst werde ich die Relation zwischen der durch die Schraube gemessenen Entfernung einer Objectivhälfte von der Heliometeraxe und dem ihr entsprechenden Winkel untersuchen.

Ich habe schon bemerkt (Abb. I. § 15 [Abb. 70, p. 129]), dass die Entfernung des optischen Mittelpunktes der Objectivhälfte von der Heliometeraxe und die Tangente des Winkels zwischen dieser Axe und dem in ihr abgebildeten Punkte des Himmels, ein constantes Verhältniss haben würden, wenn die Objectivhälfte unendlich entfernte Gegenstände vollkommen richtig abbildete; zugleich aber habe ich den Grund angegeben, welcher die vollkommene Richtigkeit des Bildes solcher Gegenstände unmöglich macht und also eine genauere Untersuchung seiner Beschaffenheit fordert. Diese werde ich aus den Elementen der Construction des Objectivglases des Heliometers abzuleiten suchen.

Von dem Optischen Institute in München, in welchem das Glas noch zu FRAUNHOFER'S Zeit verfertigt wurde, sind mir die Elemente seiner Construction folgendermassen angegeben worden:

r	+ 838,164	} $n = 1,529130;$
d	6,000	
ϱ	— 333,768	} $dn : dn_1 = 1 : 2,025$
e	0,000	
r_1	— 340,536	} $n_1 = 1,639121;$
d_1	4,000	
ϱ_1	— 1172,508	

Hieraus folgen, nach den Bezeichnungen des 15. §s:

- (1) = $\frac{n-1}{r}$; $\log(1) = 6,8002333,8$
- (2) = $-\frac{d}{n}$; $\log(2) = 0,5937068,4n$
- (3) = $\frac{1-n}{\varrho}$; $\log(3) = 7,2001176,8$
- (4) = $-e$; $\log(4) = -\infty$
- (5) = $\frac{n_1-1}{r_1}$; $\log(5) = 7,2734200,7n$
- (6) = $-\frac{d_1}{n_1}$; $\log(6) = 0,3874489,9n$
- (7) = $\frac{1-n_1}{\varrho_1}$; $\log(7) = 6,7364672,8$

und ferner durch eine Rechnung, welche man durch die Hülfe der Logarithmentafeln von MATTHESEN vorzüglich leicht führt

- $\log(1) = 6,8002334$ $\log(7) = 6,7364673$
- „ (1,2) = 9,9989229 „ (7,6) = 9,9994219
- „ (1,3) = 7,3449210 „ (7,5) = 7,1235980n
- „ (1,4) = 9,9989229 „ (7,4) = 9,9994219
- „ (1,5) = 6,5321583 „ (7,3) = 6,4048167
- „ (1,6) = 9,9985609 „ (7,2) = 9,9898884
- „ (1,7) = 6,9463628 „ (7,1) = 6,9463627

Nimmt man das Mittel aus den durch beide Rechnungen gegebenen Werthen von (1,7) und (7,1), welche übereinstimmen sollten, so erhält man dadurch

$$f = \frac{1}{(1,7)} = \frac{1}{(7,1)} = 1131,4548;$$

ferner erhält man (§ 16 J und K)

$$c = \frac{-(7,2) + 1}{(1,7)} = + 2,6323$$

$$\gamma = \frac{(1,6) - 1}{(1,7)} = - 3,7430$$

Der durch f bestimmte Vereinigungspunkt der Axe paralleler Strahlen ist aber (unter der Voraussetzung der Richtigkeit der zu seiner Berechnung angewandten Werthe der Elemente) nur dann der dem Objective wirklich zugehörige, wenn dieses alle, parallel mit seiner Axe, auf seine ganze Oberfläche fallenden Strahlen in demselben Punkte vereinigt, in welchem die der Axe unendlich nahe einfallenden vereinigt werden. Um den dem ganzen Objective entsprechenden Werth von f zu finden, muss man die Entfernungen von dem Objective bestimmten Punkte suchen, in welchen Strahlen die Axe treffen, die parallel mit ihr, in verschiedenen Entfernungen von ihr, von dem Mittelpunkt bis zum Rande des Objectiva, in dieses einfallen; wenn diese Entfernungen aus den Formeln A (§ 13) hervorgegangen sind, muss man den Punkt der Axe aus ihnen ableiten, wo das Licht am meisten zusammengedrängt ist,

welcher Punkt als der Brennpunkt des Objectivs anzunehmen ist.

Das Objectiv hat 70,2 Linien Oeffnung, woraus der seinem Rande entsprechende Werth von t (§ 13):

$$r \sin t = 35,1; \quad t = 2^\circ 24,0$$

hervorgeht. Nimmt man der Axe parallele Strahlen an, welche auf Punkte des Objectivs auffallen, welchen die Werthe von $t = 0, 36', 72', 108', 144'$ zugehören, so findet man durch die Formeln A , dass sie, nach erlittenen Brechungen, die Axe in folgenden Entfernungen (ξ) von dem optischen Mittelpunkte durchschneiden:

$t = 0'$	$\xi = 1131,4548$
36'	4489
72'	4388
108'	4254
144'	4087

Da hieraus hervorgeht, dass alle der Axe parallel einfallende Strahlen wirklich nicht in einem Punkte zusammentreffen, muss der Ableitung des Brennpunkts die Erklärung vorangehen, was unter der grössten Zusammendrängung des Lichts verstanden werden soll. Ich halte jedoch diese Erklärung für willkürlich, indem ich glaube, dass ein Beobachter das Ocular eines Fernrohrs nicht nach einem Principe, dessen er sich deutlich bewusst wäre, sondern nach einem mehr oder weniger unbestimmten Gefühle, in die das beste Sehen gewährende Entfernung von dem Objective bringen wird. Ich halte für das Plausibelste, die grösste Zusammendrängung des Lichts auf einer die Axe senkrecht durchschneidenden Ebene da anzunehmen, wo das Product der auf jeden Punkt fallenden Lichtmenge und des Quadrats seiner Entfernung von der Axe ein Minimum wird. — Ein um den Mittelpunkt des Objectivs gelegter Ring, dessen beiden Grenzkreisen t und $t + dt$ zugehören, empfängt die Lichtmenge $2\pi r r \cos t \sin t dt$; wenn er sie in der Entfernung ξ von dem optischen Mittelpunkte in die Axe bringt, so ist sie in einer anderen Entfernung α in einem Ring enthalten, dessen Halbmesser $(\xi - \alpha) \operatorname{tg} \omega$ ist, wenn ω den Winkel bedeutet, in welchem die Strahlen die Axe durchschneiden. Der Annahme zufolge muss also α so bestimmt werden, dass das von $t = 0$ bis $t = 144'$ genommene Integral

$$2\pi r r f(\xi - \alpha)^2 \operatorname{tg} \omega^2 \cos t \sin t dt$$

ein Minimum wird, was durch

$$\alpha = \frac{\int \xi \operatorname{tg} \omega^2 \cos t \sin t dt}{\int \operatorname{tg} \omega^2 \cos t \sin t dt}$$

geleistet wird.

Wendet man dieses auf die mitgetheilten Werthe von ξ an, setzt man, der Rechnung woraus sie hervorgegangen sind zufolge,

$$\omega = 0; \quad 26' 40,066; \quad 53' 19,945; \quad 79' 59,445; \quad 106' 38,361$$

und sucht man die Integrale durch die vierte der Cotesischen Formeln:

$$\frac{1}{6} \{ 7R + 32R' + 12R'' + 32R''' + 7R^{(4)} \}$$

so findet man für α , oder die Brennweite des ganzen Objectivs, welche ich jetzt durch f , bezeichnen werde, den Werth

$$f = 1131,4216.$$

Dass die angegebene Construction des Objectivs alle Strahlen nicht genau in einen Punkt vereinigt und daher f , von f um 0,0332 verschieden ist, muss übrigens von einer kleinen Ungenauigkeit der Rechnung herrühren, durch welche FRAUNHOFER die Elemente der Construction bestimmt hat, falls er nicht etwa die Absicht verfolgt hat, andere Strahlen des Farbenspectrums als die, worauf die angegebenen Werthe von n und n' , sich beziehen, zur vollkommenen Vereinigung zu bringen.

18.

Nachdem der Brennpunkt des Objectivs bestimmt worden ist, kann das Bild näher untersucht werden, welches durch dasselbe von einem leuchtenden, unendlich entfernten, ausser seiner Axe liegenden Punkte, auf einer die Axe im Brennpunkte senkrecht durchschneidenden Ebene entworfen wird. Will man die Wirkung des Objectivs vollständig kennen lernen, so muss man nicht nur die Figur dieses Bildes und seine Lichtstärke an jedem Punkte, sondern auch die Entfernung von der Axe aufsuchen, in welcher derjenige seiner Punkte erscheint, den man zum Gegenstande der Messungen macht.

Theilt man das Objectiv in unendlich viele um seinen Mittelpunkt beschriebene Ringe, so muss das Licht, welches jeder dieser Ringe von dem leuchtenden Punkte empfängt, auf der die Axe im Brennpunkte senkrecht durchschneidenden Ebene den Raum erleuchten, welcher zwischen zwei einander unendlich nahen geschlossenen Curven liegt, deren eine der inneren Grenze des Ringes, die andere der äusseren entspricht. Die Curve, welche diese von allen Ringen des Objectivs herrührenden erleuchteten Räume einschliesst, ist die Figur des Bildes des Punkts auf der Ebene — die Figur, in welcher das Ocular den Punkt zeigt. — Die Formeln A § 13 sind aber nicht hinreichend zur Grundlage der Bestimmung der Figur der Curven, deren Zwischenraum jeder Ring des Objectivs erleuchtet; denn sie be-

ruhen auf der Voraussetzung, dass durch den einfallenden Strahl und die Axe eine Ebene gelegt werden könne, und können also nur zur Bestimmung der beiden Punkte jeder dieser Curven angewandt werden, welche in der durch die Axe und den leuchtenden Punkt gehenden Ebene liegen. Es hat zwar keine Schwierigkeit, Formeln zu entwerfen, welche nicht voraussetzen, dass der einfallende Strahl in einer durch die Axe gehenden Ebene liege; allein ich halte die Ausdehnung der Rechnungen auf von anderen Strahlen erzeugte Punkte jeder Curve für unnöthig, da die in dieser Ebene einfallenden die beiden Grenzen der Ausdehnung der Curve bestimmen, und nur diese zur Beurtheilung der Entfernung von der Axe erforderlich sind, in welcher das von ihr herrührende Bild erscheint.

Hat man nämlich diese beiden Grenzen für jeden Ring des Objectivs gefunden, so kann die dem ganzen Ringe entsprechende Curve als eine Ellipse angesehen werden, deren eine Axe die Entfernung dieser Grenzen ist und deren andere Axe unbestimmt bleiben kann, indem nur die Ausdehnung des Bildes des leuchtenden Punkts nach beiden Seiten der dasselbe symmetrisch theilenden Ebene davon abhängt. In Beziehung auf die Entfernung des von jedem Ringe des Objectivs gewährten Bildes von seiner Axe, mag man sich vorstellen, dass die zweite Axe der Ellipse verschwinde, oder dass alles in ihr enthaltene Licht in der allein in Betracht kommenden Ebene liege.

Für der Axe parallel einfallende Strahlen, oder für $\omega = 0$, liegt das Bild des Punkts, von welchem sie kommen, offenbar in der Axe. Die Annahmen $\omega = 24'$ und $\omega = 48'$ sind aber durch die Formeln A verfolgt worden und haben für $t = -144', -108', -72', \dots +108', +144'$ die Zahlen ergeben, welche ich hier mittheilen werde:

	t	η		t	η
$\omega = 24'$	- 144'	7 ⁷ 90803		- 144'	15 ¹ 82254
	- 108	90421		- 108	81401
	- 72	90154		- 72	80731
	- 36	89983		- 36	80223
	0	89894		0	79864
	+ 36	89872		+ 36	79639
	+ 72	89901		+ 72	79532
	+ 108	89965		+ 108	79526
	+ 144	90048		+ 144	79602
$\omega = 48'$	- 144'	15 ¹ 82254		- 144'	15 ¹ 82254
	- 108	81401		- 108	81401
	- 72	80731		- 72	80731
	- 36	80223		- 36	80223
	0	79864		0	79864
	+ 36	79639		+ 36	79639
	+ 72	79532		+ 72	79532
	+ 108	79526		+ 108	79526
	+ 144	79602		+ 144	79602

Diese Zahlen sind die Entfernungen von der Axe, in welchen die mit beiden Werthen von ω auf verschiedene Punkte des Objectivs auffallenden Strahlen die Bildfläche treffen. Man sieht aus ihnen nicht unbedeutliche Aenderungen, dass die Undeutlichkeit

des Bildes für grössere Entfernungen des leuchtenden Punkts von der Axe keineswegs unbedeutend ist; unter den Werthen von η für $\omega = 24'$ findet sich ein Unterschied von 0⁰00931; für $\omega = 48'$ ein Unterschied von 0⁰02728; diese Unterschiede zeigen, dass ein 24' von der Axe entfernter Punkt 1⁷7, ein 48' entfernter 5¹1 gross abgebildet wird.

19.

Wenn man aus den berechneten Werthen von η Nutzen für die Ableitung der Resultate von Messungen ziehen will, so muss man wissen, welcher Punkt des undentlichen Bildes der Gegenstand der Messung ist. — Ein Fernrohr, dessen Objectiv oder Ocular in einer auf der Axe senkrechten Ebene verschoben werden kann, gewährt eine Anschauung der Beschaffenheit dieses undentlichen Bildes; — ich habe der einen oder der anderen dieser Verschiebungen am Heliometer oft eine solche Grösse gegeben, dass das Licht von einem Fixsterne sich über einen Raum zerstreut zeigte, dessen Ausdehnung hinreichend war, die Art seiner Vertheilung anschaulich zu machen. Dadurch bin ich veranlasst worden, zu glauben, dass ein Beobachter den Fixstern nicht leicht in eine andere Entfernung von der Axe versetzen wird als in die, in welcher das meiste Licht von ihm erscheint. Ich werde indessen zwei Hypothesen über den Punkt des Bildes, welcher der Gegenstand der Messung ist, verfolgen; nämlich die Hypothese I, welche den Schwerpunkt alles Lichts dafür annimmt, und die Hypothese II, die ich eben erwähnt habe.

Die Verfolgung der Hypothese I fordert sehr wenige Rechnung. Der Schwerpunkt des von jedem Ringe des Objectivs auf die Bildfläche geworfenen Lichts liegt in einer Entfernung von der Axe, welche die halbe Summe der beiden, den entgegengesetzten Punkten des Ringes zugehörigen Werthe von η ist; ich werde sie durch (η) bezeichnen. Seine Beschwerung durch Licht ist dem Producte $\cos t \sin t$ oder $\sin 2t$ proportional (§ 17). Man hat also die Entfernung des Schwerpunkts alles Lichts von der Axe:

$$y = \frac{\int (\eta) \sin 2t \cdot dt}{\int \sin 2t \cdot dt}$$

wo die Integrale von $t = 0$ bis zu dem der äusseren Grenze des Objectivs zugehörigen Werthe T von t zu nehmen sind. Das obere derselben wird durch die vierte Cotesische Formel, das untere auf gewöhnliche Art gesucht.

Die zweite Hypothese, die Bestimmung der Entfernung von der Axe, in welche das meiste Licht fällt,

fordert mehr Rechnung, deren Theorie ich erläutern werde. Der Ring des Objectiva, dessen beide Grenzkreise durch t und $t + dt$ gegeben sind, erleuchtet auf der Bildfläche den Raum zwischen zwei, einander unendlich nahen Ellipsen, deren eine Axe sich von dem zu $-t$ gehörigen Werthe von η bis zu dem zu $+t$ gehörigen erstreckt, welche beide Werthe ich durch η und η_1 ($> \eta$) bezeichnen werde. Dieser erleuchtete Raum enthält alles Licht, welches der Ring des Objectiva durchgehen lässt, also eine $\pi \sin 2t \cdot dt$ proportionale Quantität desselben; davon liegt zwischen zwei Entfernungen β und $\beta + d\beta$ von der Axe, welche beide $> \eta$ und $< \eta_1$ sind,

$$\frac{\sin 2t \cdot dt \cdot d\beta}{V(\eta_1 - \beta)(\beta - \eta)}$$

oder die Lichtstärke in der Entfernung β , insofern sie von dem betrachteten Ringe herrührt, ist

$$\frac{\sin 2t \cdot dt}{V(\eta_1 - \beta)(\beta - \eta)}$$

und also die von dem ganzen Objective erzeugte:

$$J = \int \frac{\sin 2t \cdot dt}{V(\eta_1 - \beta)(\beta - \eta)}$$

welches Integral von dem kleinsten positiven Werthe von t für welchen es reell wird, bis zu dem grössten für welchen es aufrüth reell zu sein, oder, wenn dieser über den Grenzwert T hinausgehen sollte, bis zu diesem genommen wird.

Durch die Differenzen der 9 angeführten Werthe von η bemerkt man leicht, dass sie sowohl für $w = 24'$, als auch für $w = 48'$ sich durch ganze, rationale Functionen von t vom dritten Grade sehr nahe darstellen lassen. In der That kommt der Ausdruck

$$\eta = a - bt + ct^2 - dt^3$$

wenn der Zwischenraum von $36'$ als Einheit von t angenommen wird und wenn

für w	24'	48'
a	7:8989424	15:7986448
b	0,0005258	0,0028850
c	0,0003321	0,0006652
d	0,00002617	0,0000270

gesetzt werden, ihnen so nahe, dass für $w = 24'$ kein Unterschied eine Einheit, und für $w = 48'$ keiner zwei Einheiten der 5. Decimale beträgt. Ich werde ihn daher statt der Zahlenwerthe der verschiedenen η anwenden, indem ich dadurch den Vortheil erlange, die Integration analytisch, ohne Quadraturen, ausführen zu können.

Aus jedem der Ausdrücke, sowohl aus dem für $w = 24'$, als aus dem für $w = 48'$ geltenden, folgt ein

Minimum von η , wenn

$$t_1 = +0,8840 \dots \dots + 2,5710$$

ist, und ein Maximum, wenn

$$t_2 = +7,7589 \dots \dots + 13,8536$$

ist; die Werthe dieser Minima und Maxima von η sind:

$$7:898719 \dots \dots 15:795166$$

$$7,902641 \dots \dots 15,81456$$

Wenn β zwischen diesen beiden Grenzen von η liegt, so hat daher die cubische Gleichung

$$\beta = a - b\tau + c\tau^2 - d\tau^3$$

drei reelle Wurzeln, wovon eine kleiner als t_1 , eine zwischen t_1 und t_2 , und eine grösser als t_2 ist. Da t_2 schon grösser ist als der dem Rande des Objectiva entsprechende Werth von t (nämlich $T = 4$), so geht die dritte Wurzel noch mehr über diesen Werth hinaus. Ich bezeichne sie durch τ_1 , die beiden anderen durch τ_2 und τ_3 .

Da die Ausdrücke von $\eta_1 - \beta$ und $\beta - \eta$ resp.

$$b(t + \tau) + c(t^2 - \tau^2) + d(t^3 - \tau^3)$$

$$b(t - \tau) - c(t^2 - \tau^2) + d(t^3 - \tau^3)$$

sind, so haben diese Grössen resp. die Factoren $t + \tau$ und $t - \tau$; und da man eben so erkennt, dass sie auch die Factoren $t + \tau_1$ und $t - \tau_1$, sowie auch $t + \tau_2$ und $t - \tau_2$ haben, so sind sie:

$$\eta_1 - \beta = d(t + \tau)(t + \tau_1)(t + \tau_2)$$

$$\beta - \eta = d(t - \tau)(t - \tau_1)(t - \tau_2)$$

Wenn man den constanten Factor d weglässt, indem es nur auf Vergleichung der Werthe von J für verschiedene Werthe von β ankommt, auch $2t$ für $\sin 2t$ schreibt, was ohne erheblichen Fehler geschehen kann, so wird also

$$J = \int \frac{2t \cdot dt}{V(t^2 - \tau^2)(t^2 - \tau_1^2)(t^2 - \tau_2^2)}$$

Indessen ist t^2 immer kleiner als τ_2^2 und daher für alle Werthe von t , für welche der Nenner reell ist, einer der beiden anderen Factoren negativ, der andere positiv, weshalb es zweckmässig ist, das Integral

$$J = \int \frac{2t \cdot dt}{V(t^2 - \tau^2 + (\tau^2 + \tau_1^2)t^2 - \tau_1^2)(\tau_2^2 - t^2)}$$

oder

$$J = \int \frac{2t \cdot dt}{V\left(\frac{\tau_2^2 - t^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\tau_2^2 + \tau^2}{2} - t^2\right)^2 (\tau_2^2 - t^2)}$$

zu schreiben. Setzt man

$$\frac{\tau_2^2 + \tau^2}{2} - t^2 = \frac{\tau_2^2 - \tau^2}{2} \cos 2u$$

also auch

$$t \cdot dt = (\tau_2^2 - \tau^2) \sin 2u \cdot du$$

so wird

$$J = \int \frac{2 du}{\sqrt{(r_2^2 - r^2) \cos u^2 + (r_1^2 - r_2^2) \sin u^2}}$$

Versteht man unter r_2^2 das grössere, unter r^2 das kleinere dieser beiden Quadrate, so folgt aus dem Ausdrucke von $\cos 2u$:

$$\cos u^2 = \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \sin u^2 = \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Wenn r_2^2 und folglich auch r^2 kleiner ist als T^2 , so kann u alle Werthe zwischen r^2 und r_2^2 haben, ohne dass u aufhört reell zu sein: in diesem Falle ist also das Integral von $u = 0$ bis $u = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen. Wenn aber r_2^2 grösser ist als T^2 , so ist seine erste Grenze $u = 0$, die andere wird durch die Formeln

$$\cos u = \sqrt{\frac{r_2^2 - T^2}{r_2^2 - r_1^2}}, \quad \sin u = \sqrt{\frac{T^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}}, \quad \operatorname{tg} u = \sqrt{\frac{T^2 - r_1^2}{r_2^2 - T^2}}$$

gegeben. Die Mittel, die Integration, welche J erfordert auszuführen, haben bekanntlich durch die Bemühungen von LEGENDRE, GAUSS und JACOBI um die elliptischen Transcendenten die äusserste Einfachheit erhalten.

Sowie hierdurch der Fall beseitigt werden kann, in welchem der Punkt des Bildes, dessen Lichtstärke man sucht, zwischen dem Minimum und dem Maximum von η liegt, so sollte auch noch der Fall verfolgt werden, in welchem β kleiner ist als das erstere, oder grösser als das letztere. In diesem Falle hat die cubische Gleichung

$$\beta = a - br + cr^2 - dr^3$$

offenbar nur eine reelle Wurzel. Nicht allein der Wunsch, den hier zu suchenden Vorschriften Vollständigkeit zu geben, sondern auch das Vorkommen dieses Falles bei dem Objective des Königsberger Heliometers, könnte seine Verfolgung rechtfertigen; denn die im vorigen § angeführten Werthe von η zeigen, dass diese Grösse für $\varepsilon = 24'$ zweimal und für $\varepsilon = 48'$ einmal über das Maximum hinausgeht. Allein zwischen dem Maximo und diesen darüber hinausgehenden Werthen ist die Lichtstärke des undeutlichen Bildes schon so klein, dass ihre Berechnung kein Interesse mehr hat, wenn dieses nur in der Bestimmung des Werthes von β gesucht wird, auf welchen die grösste fällt. Ich glaube daher, die Verfolgung des erwähnten Falles hier sparen zu müssen.

20.

Ich muss nun beide im vorigen § verfolgte Hypothesen für das Objectiv des Königsberger Heliometers durchführen.

Die erste, welche die Bestimmung der Entfernung des Schwerpunktes des über das undeutliche Bild ver-

theilten Lichts von der Axe fordert, kann auf die schon angedeutete Art, durch die Anwendung einer der Cotesischen Formeln, beseitigt werden, oder auch, wenn man in den y ausdrückenden Integralen $2t$ für $\sin 2t$ schreiben will, durch die Anwendung der im vorigen § gegebenen Ausdrücke von η . Diese ergeben nämlich

$$(\eta) = a + ctt$$

und damit

$$y = a + \frac{1}{2}cT^2 = a + 8c$$

Beide Wege führen zu Resultaten, welche in der 6. Decimalstelle noch nicht verschieden sind, nämlich zu

$$\varepsilon = 24' \dots y = 7,901599$$

$$\varepsilon = 48' \dots y = 15,803967$$

Die zweite Hypothese fordert zuerst die Aufsuchung der drei Wurzeln der Gleichung:

$$\beta = a - br + cr^2 - dr^3$$

in welcher β die Entfernung von der Axe bedeutet, für welche man J kennen lernen will. In dem verfolgten Falle, in welchem sie drei reelle Wurzeln hat, werden diese durch die Formeln

$$k = \frac{2}{3d} \sqrt{cc - 3bd}$$

$$\sin \varphi = \frac{-2c^2 + 9bcd + 27dd(\beta - a)}{2(cc - 3bd)^{3/2}} = l + \lambda(\beta - a)$$

$$\tau, \tau_1, \tau_2 = \frac{c}{3d} + k \sin \frac{1}{3}\varphi$$

gefunden, wo, wenn φ kleiner als 90° genommen wird, statt $\frac{1}{3}\varphi$ die drei Werthe $\frac{1}{3}\varphi$, $\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ$, $\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ$ anzuwenden sind. Die Substitution der schon mitgetheilten Werthe von a, b, c, d verwandelt diese Formeln in:

$$\varepsilon = \frac{24'}{\dots\dots\dots} \frac{48'}{\dots\dots\dots}$$

$$a = 7,8989424 \dots\dots\dots 15,7986448$$

$$\log l = 2,707575 \dots\dots\dots 2,013447$$

$$\sin \varphi = -0,88608 + \lambda(\beta - a) = -0,64114 + \lambda(\beta - a)$$

$$\log k = 0,825561 \dots\dots\dots 1,052416$$

$$\tau, \tau_1, \tau_2 = 4,23003 + k \sin \frac{1}{3}\varphi = 8,21235 + k \sin \frac{1}{3}\varphi$$

Wenn zwei der hierdurch gefundenen Wurzeln der Gleichung (τ und τ_1) zwischen $-T$ und $+T$, d. h. zwischen -4 und $+4$ liegen, so hat man, der bekannten Gaussischen Vorschrift zur Berechnung des Zahlenwerthes einer vollständigen elliptischen Transcendente der ersten Gattung zufolge:

$$J = \frac{\pi}{\mu}$$

wo μ die Grenze ist, welcher sich $m^{(0)}$ und $n^{(0)}$ desto mehr nähern, je weiter die Reihe

$$m = \sqrt{r_2^2 - r^2} \quad n = \sqrt{r_1^2 - r^2}$$

$$m' = \frac{1}{2}(m+n) \quad n' = \sqrt{mn}$$

$$m'' = \frac{1}{2}(m'+n') \quad n'' = \sqrt{m'n'}$$

u. s. w.

fortgesetzt wird. Wenn dagegen nur eine der Wurzeln der Gleichung (r) zwischen -4 und $+4$ liegt, so ist*)

$$J = \frac{2T}{\mu}$$

wenn

$$m = \sqrt{r_2^2 - r^2}; \quad n = \sqrt{r_1^2 - r^2}; \quad J = \sqrt{r_2^2 - T^2}$$

$$J' = \sqrt{mm' \frac{J+n}{J+m}}; \quad J'' = \sqrt{m'm'' \frac{J'+n'}{J'+m'}}; \quad \text{u. s. w.}$$

$$\operatorname{tg} U = \frac{J'}{m} \cdot \frac{J''}{m'} \cdot \frac{J'''}{m''} \dots \sqrt{\frac{T^2 - r^2}{r_1^2 - T^2}}$$

bedeuten.

Nach diesen Formeln habe ich einige Werthe von J berechnet, welche hinreichen werden, die Vertheilung des Lichts über das undeutliche Bild eines Fixsterns in so weit kennen zu lehren, als es hier erforderlich ist. Für $\varepsilon = 24'$ gehören zusammen:

$\beta = 7^{\text{h}} 898719$	$J = 0,28824 \dots$ Minimum von β .
7,895999	0,30388
7,900479	0,32488 \dots Maximum der Lichtstärke.
7,901560	0,17610
7,902641	0,16198 \dots Maximum von β .

Für $\varepsilon = 48'$:

$\beta = 15^{\text{h}} 795166$	$J = 0,16257 \dots$ Minimum von β
15,796020	0,16402 \dots Maximum der Lichtstärke.
15,796500	0,111925
15,797000	0,10551
15,799000	0,08106
15,801000	0,06866
15,803000	0,05985
15,805000	0,05292
15,814560	0,02843 \dots Maximum von β .

Man sieht hieraus, wie etwa die undeutlichen Bilder beschaffen sind: von dem Minimo von β bis zu dem Maximo der Lichtstärke ändert diese sich sehr wenig; dann nimmt sie schnell, aber stetig ab und wird bald so viel kleiner, dass das Auge ihre Abnahme nicht unbemerk lassen kann. Ich glaube, dass die geringe Zunahme der Lichtstärke zwischen dem Minimo von β und ihrem Maximo nicht wahrgenommen werden kann, oder dass der kleine Raum, in welchem sie stattfindet (für $\varepsilon = 24'$ nur $0^{\text{h}} 00176 = 0,32$, für $\varepsilon = 48'$ nur $0^{\text{h}} 000854 = 0,16$) gleichmässig beleuchtet gesehen wird; allein obgleich man, durch die scheinbar gleichmässige Beleuchtung dieses hellsten Raums veranlasst

werden könnte, das Bild des Sterns in seiner Mitte liegend anzunehmen, und obgleich diese Annahme sich auch würde rechtfertigen lassen, wenn das Licht für grössere Werthe von β plötzlich abnähme, so meine ich doch, dass diese Bemerkung eine Abweichung von der Hypothese, dass man den Stern in die Entfernung von der Heliometeraxe versetzt, in welcher das meiste Licht erscheint, nicht rechtfertigen kann: denn wenn auch das Licht in grösseren Entfernungen von ihr schneller abnimmt als es zugenommen hat, so ist diese Abnahme doch stetig, und der schwächer erleuchtete Raum wird seinen Eindruck auf das Auge auch durch seine grössere Ausdehnung verstärken. Ich werde daher die Hypothese rein durchführen oder annehmen:

$$\text{für } \varepsilon = 24' \dots y = 7^{\text{h}} 900479$$

$$\varepsilon = 48' \dots y = 15,796020$$

21.

Will man aus den gefundenen Werthen von y die Gesetze ableiten, welche diese Entfernungen und die ihnen entsprechenden Winkel, in beiden Hypothesen, mit einander verbinden, so muss man vorher das jeder von ihnen angemessene Centrum der Winkel, so wie es für das ganze Objectiv ist, aufsuchen. Für Strahlen, welche dem Mittelpunkte des Objectivs unendlich nahe einfallen, ist dieses Centrum der Winkel der oben schon durch γ bestimmte Punkt, von welchem auch die Entfernung der Bildfläche gezählt worden ist; aber wenn das ganze Objectiv parallel, in einem unendlich kleinen Winkel mit seiner Axe einfallende Strahlen nicht genau in einem Punkte vereinigt, also der Ort des Bildes nicht unbedingt, sondern nur in Folge einer Erklärung über den Punkt, der für das Bild angenommen werden soll, bekannt wird, hängt das Centrum der Winkel von dieser Erklärung ab; denn immer ist es der Punkt, wo die Axe des Objectivs von der geraden Linie durchschnitten wird, welche von dem Bilde aus den einfallenden Strahlen parallel gelegt wird. Ich werde es, den beiden verfolgten Hypothesen angemessen, aufsuchen.

Wenn man die Entfernungen von der Axe, in welchen ein ihr parallel einfallender und ein den unendlich kleinen Winkel ε mit ihr machender Strahl die Bildfläche treffen, für einen angenehmen Werth von t , durch η_0 und η bezeichnet, sowie beide für den gleich grossen, aber entgegengesetzt genommenen Werth von t durch $-\eta_0$ und η , so hat man

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \psi t$$

$$\eta = -\eta_0 + \varepsilon \psi t$$

*) JACOBI, Fundamenta nova theoriae Funct. Ellipt. Regiomonti 1829. Pag. 97.

wo ψt den in Beziehung auf π genommenen Differentialquotienten von η , für den Fall $\pi = 0$ bedeutet. Hieraus folgt die halbe Summe beider η , oder, nach der früheren Bezeichnung (§ 19),

$$(\eta) = \pi \cdot \psi t$$

und also in der Hypothese I, welche das Bild des um den Winkel π von der Axe entfernten Punktes dahin versetzt, wo der Schwerpunkt alles Lichts auf der Bildfläche liegt,

$$y = \pi \frac{f \psi t \cdot \sin 2t \cdot dt}{f \sin 2t \cdot dt}$$

Wenn man den Quotienten der beiden Integrale durch $-f_2$ bezeichnet, so ist f_2 offenbar die dem ganzen Objectiv, der Hypothese I zufolge, entsprechende Brennweite.

Die Hypothese II versetzt das Bild eines Punktes dahin, wo die Helligkeit des von ihm erleuchteten Raums der Bildfläche am grössten ist. Wenn er sich in der Axe befindet, so erleuchtet ein um den Mittelpunkt des Objectivs gelegter Ring, dessen beiden Grenzkreisen t und $t + dt$ zugehören, einen kreisförmigen Ring auf der Bildfläche, dessen Halbmesser η_0 ist; die im 17. § mitgetheilten Zahlen ergeben die Werthe von $\eta_0 = (\xi - \alpha) \operatorname{tg} \omega$:

für $t = 0 \dots \eta_0 = 0,400000$	$= 0,0000$
36'	$+ 0,000212 = + 0,039$
72'	$+ 0,000267 = + 0,049$
108'	$+ 0,000088 = + 0,016$
144'	$- 0,000400 = - 0,073$

Machen die Richtungen des leuchtenden Punktes und der Axe einen Winkel ω mit einander, der so klein ist, dass sein Cubus nicht in Betracht kommt, so werden dadurch Grösse und Figur der erleuchteten Ringe nicht geändert, aber der vorher in der Axe liegende Mittelpunkt des zu t gehörigen Ringes erhält die Entfernung $\pi \psi t$ von ihr. Die Ringe sind aber so klein, dass man sie gewiss nicht als Ringe, sondern nur als erleuchtete Punkte würde sehen können, selbst wenn jeder ihrer stetigen Reihenfolge nicht in andere eingriffe und die zahlreichen vorhandenen Ursachen fehlten, welche zur Folge haben, dass das wirkliche Bild der Rechnung nicht genau entspricht. Das Bild zeigt sich also als eine erleuchtete Linie, deren hellster Punkt der Hypothese gemäss aufzusuchen ist. — Ein zu gehöriger Punkt dieser Linie empfängt das Licht von dem Ringe des Objectivs, dessen Grenzkreisen t und $t + dt$ zugehören, also eine $\sin 2t \cdot dt$ proportionale Menge desselben; da seine Entfernung von der Axe $(\eta) = \pi \psi t$

ist und sie sich um $\pi d\psi t$ ändert, wenn t um dt geändert wird, so ist die angegebene Lichtmenge über den Raum $\pi d\psi t$ vertheilt oder die Lichtstärke der Linie an dem zu t gehörigen Punkte ist

$$\frac{\sin 2t}{dt} \frac{d\psi t}{dt}$$

proportional. Wenn man den Werth von t , für welchen dieser Ausdruck seinen grössten Werth erhält, durch π bezeichnet, so ist, der Hypothese II zufolge,

$$y = \pi \psi \pi,$$

oder $f_2 = -\psi \pi$ die dem ganzen Objectiv entsprechende Brennweite.

Die Bestimmung von f_2 in der einen oder der anderen Hypothese setzt also die Werthe von ψt als bekannt voraus. Man findet sie durch Differentiirung der auf beide Linsen des Objectivs angewandten Formeln A (§ 13). Hat man dadurch $d\omega$, und $d\alpha$, gefunden, so erhält man

$$\frac{d\eta}{d\omega} = d(\alpha, -f, -r) \operatorname{tg} \omega = \frac{d\alpha}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + \frac{\alpha, -f, -r}{\cos \omega} \frac{d\omega}{d\omega}$$

und der Werth hiervon, für $\pi = 0$ genommen, ist der gesuchte von ψt . Wenn man aus den sich unmittelbar ergebenden Differentialen der Formeln A die Differentiale $db = d\beta$, $d\alpha = da$ eliminiert, erhält man:

$$\begin{aligned} d(t - \pi) &= m \, d\pi + m \frac{da \cdot \operatorname{tg} \pi}{a - r} \\ d(t - r) &= n \, d(t - r) \\ d(r - v) &= o \, d(t - r) + o' \cdot d\pi \\ d(r - \omega) &= p \, d(r - v) \\ d(t, -\pi) &= q \, d(t - \omega) + q' \cdot d\omega \\ d(t, -r) &= n, \, d(t, -\pi) \\ d(r, -v) &= o, \, d(t, -r) + o', \, d\pi \\ d(r, -\omega) &= p, \, d(r, -v) \\ d\alpha \cdot \operatorname{tg} \omega &= \frac{\theta \cdot \cos(\pi, -\omega)}{\cos \omega} d(r, -\omega) - (\alpha, -\theta) d\omega, \end{aligned}$$

und die Ausdrücke der hier eingeführten Grössen sind:

$$\begin{aligned} m &= \frac{(a-r) \cos \pi}{r \cos(t-\pi)} \\ n &= \frac{\cos(t-\pi)}{n \cos(t-v)} \\ o &= \frac{r \cos(t-r)}{q \cos(r-r)} & o' &= \frac{r - q - d}{q} \frac{\cos r}{\cos(r-r)} \\ p &= \frac{n \cos(r-r)}{\cos(r-\omega)} \\ q &= \frac{q \cos(r-\omega)}{r \cos(t-\pi)} & q' &= \frac{(q-r+c)}{r} \frac{1}{\cos(t-\pi)} \\ n_r &= \frac{\cos(t, -\pi)}{n \cos(t, -r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{r_1 \cos(t_1 - \epsilon_1)}{\rho_1 \cos(r_1 - \epsilon_1)} & \rho_1' &= \frac{r_1 - \rho_1 - d_1 \cos \epsilon_1}{\rho_1 \cos(r_1 - \epsilon_1)} \\ \rho_2 &= \frac{n_2 \cos(r_2 - \epsilon_2)}{\cos(r_2 - \omega_2)} \end{aligned}$$

Die erste Formel, wodurch dt bestimmt werden soll, gebraucht man hier nicht, da nur der Einfluss untersucht werden soll, welchen eine Aenderung von w auf den Weg eines Strahls äussert, der an einem bestimmten Punkte des Objectiva einfällt; in den folgenden Formeln ist also auch $dt = 0$ anzunehmen. Die Winkel und Vereinigungsweiten, von welchen m , n , $o \dots$ abhängen, sind schon durch die Berechnung des Durchganges der Axe paralleler Strahlen, deren Resultate ich § 17 mitgetheilt habe, bekannt geworden; ich habe also die folgenden Werthe von ψt leicht genug finden können:

$t = 0'$	$\psi t = -1131,4216$
$36'$	$-1131,4665$
$72'$	$-1131,5094$
$108'$	$-1131,8204$
$144'$	$-1132,1290$

In der Hypothese I erhält man hieraus, der dafür angegebenen Formel gemäss, $f_2 = 1131,7760$. Die Hypothese II setzt $\frac{d\psi t}{dt}$ als bekannt voraus. Ich finde, dass die oben mitgetheilten Werthe von ψt sich durch die Formel

$$-\psi t = 1131,42156 + 0,000098t + 0,043975tt$$

darstellen lassen, in welcher $36'$ zur Einheit von t genommen ist, welcher Formel zufolge

$$\frac{d\psi t}{dt} = -0,000098 - 0,08795t$$

ist. Diese Grösse ist so nahe t proportional, dass die Lichtstärke der erleuchteten Linie, an ihrem t entsprechenden Punkte, nämlich

$$\frac{\sin 2t}{dt}$$

als eine beständige Grösse angesehen werden kann. Diese Linie erscheint also gleichmässig erleuchtet; man sieht den leuchtenden Punkt in ihrer Mitte, oder man hat

$$\psi r = \frac{1}{2}[\psi 0 + \psi T] = -1131,7753.$$

In der Hypothese II ist also $f_2 = 1131,7753$; welcher Werth von dem für Hypothese I gefundenen nicht weiter verschieden ist, als sich durch die Verwechslung der kleinen, auf der Bildfläche erleuchteten Ringe mit Punkten erklären lässt. Ich werde für beide Hypothesen $f_2 = 1131,776$ annehmen.

22.

Ich werde nun das Gesetz aufsuchen, welches die Messungen mit dem Heliometer und die ihnen entsprechenden Winkel mit einander verbindet. Zuerst werde ich diese Verbindung, so wie jede der beiden verfolgten Hypothesen sie ergibt, betrachten. Für Hyp. I ist in den beiden vorigen Paragraphen gefunden:

$$\text{für } w = 24' \dots y = 7,901599$$

$$w = 48' \dots y = 15,803967$$

$$f_2 = 1131,776$$

Setzt man

$$y = 1131,776\{w + \alpha w^2 + \beta w^3 + \dots\}$$

so erhält man daraus für $w = 24'$ und $w = 48'$:

$$7,901599 = 7,901287\left\{1 + \alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + \beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \dots\right\}$$

$$15,803967 = 15,802574\left\{1 + 4\alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + 16\beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \dots\right\}$$

welchen beiden Gleichungen man, durch Berücksichtigung von α allein, sehr nahe Genüge leisten kann; nämlich durch $\alpha = +0,4918$, wodurch ihnen bis auf $\mp 0,000122 = \mp 0,00222$ entsprechen wird. Man kann also, wenn der Schwerpunkt des Lichts, welches über das undeutliche Bild eines nicht in der Richtung der Axe befindlichen, unendlich entfernten Punktes zerstreut ist, der Gegenstand der Beobachtung ist, seine Entfernung von der Axe näherungsweise

$$= 1131,776w\{1 + 0,4918w\}$$

annehmen. Sollte diese Formel für $48'$ überschreitende Werthe von w auch grössere Fehler besitzen als bis zu $w = 48'$ (was sehr wahrscheinlich ist), so würde man diese doch für weniger erheblich ansehen müssen, indem die Undeutlichkeit oder Unbestimmtheit des Bildes eines noch weiter von der Axe entfernten Punktes seiner genaueren Beobachtung unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg legt.

Die Hypothese II hat dagegen folgende Werthe ergeben:

$$\text{für } w = 24' \dots y = 7,900479$$

$$w = 48' \dots y = 15,796020$$

$$f_2 = 1131,776$$

woraus man die Gleichungen:

$$7,900479 = 7,901287\left\{1 + \alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + \beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \dots\right\}$$

$$15,796020 = 15,802574\left\{1 + 4\alpha\left(\frac{\pi}{450}\right)^2 + 16\beta\left(\frac{\pi}{450}\right)^4 + \dots\right\}$$

erhält, denen durch $\alpha = -2,1241$, bis auf die unerblicklichen Unterschiede $\mp 0,000010 = \mp 0,00018$, entsprechen wird. Man hat also, wenn der hellste Punkt

des undeutlichen Bildes eines nicht in der Axe befindlichen, unendlich entfernten Punktes der Gegenstand der Beobachtung ist, seine Entfernung von der Axe:

$$= 1131,776 \text{ sr} [1 - 2,1241 \text{ sr} \text{ sr}]$$

Nachdem beide Hypothesen jetzt vollständig entwickelt worden sind, können sie mit Beobachtungen zusammengehalten werden, welche in der Absicht sie zu prüfen angestellt worden sind. Diese Beobachtungen sind wiederholte Messungen der Entfernung eines Paares von Fixsternen; dadurch abgeändert, dass dem Oculare nach und nach verschiedene Entfernungen von der Heliometeraxe gegeben werden, während seine Verschiebungslinie und die beiden Sterne in einer Ebene liegen. — Werden die in gleicher Richtung gezählten Entfernungen der Axen der beiden Objectivhälften und des Oculars von der Heliometeraxe durch m, m', μ bezeichnet, der Winkelwerth des Maasses dieser Grössen (einer Schraubenwindung) durch R , so ist

$$y = f_2 \text{sr} (1 + \alpha \text{sr} \text{ sr}) = f_2 \text{tg} R(m - \mu)$$

$$y' = f_2 \text{sr}' (1 + \alpha \text{sr}' \text{ sr}') = f_2 \text{tg} R(m' - \mu)$$

und man erhält durch den Unterschied dieser Ausdrücke:

$$(y' - y) [1 + \alpha (\text{sr}' \text{ sr}' + \text{sr} \text{ sr})] = \text{tg} R(m' - m)$$

und wenn man $-3\alpha(\text{sr}' - \text{sr}) \text{sr}' \text{ sr}$ auf beiden Seiten zusetzt

$$\text{sr}' - \text{sr} + \alpha(\text{sr}' - \text{sr})^2 = \text{tg} R(m' - m) - 3\alpha(\text{sr}' - \text{sr}) \text{sr}' \text{ sr}$$

Da $\text{sr}' - \text{sr}$ die Entfernung beider Sterne ist, also für alle Beobachtungen denselben Werth hat, so ist die links von dem Gleichheitszeichen stehende Grösse constant; wenn man $C \text{tg} R$ dafür schreibt, und in dem in 3α multiplicirten Gliede auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die 5. Dimension von sr und sr' vernachlässigt, so erhält man:

$$C = m' - m - 3\alpha \text{tg} R^2 (m' - m)(m' - \mu)(m - \mu)$$

Eine Reihe von Messungen, welche $m' - m$ für verschiedene Werthe von $m - \mu$ angibt, muss daher die den Beobachtungen entsprechende Hypothese dadurch rechtfertigen, dass der dieser zugehörige Werth von α dem rechts von dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucke eine Reihe von Werthen gibt, welche keine Abhängigkeit von $m - \mu$ zeigen. — Ich habe im August und September 1830 bei ausgezeichnet günstiger Luft zwei Messungsreihen dieser Art an dem Doppelsterne θ Serpentis und einem ihm südlich vorgehenden Sterne 7. Grösse *) gemacht. Von den Einflüssen der Strahlenbrechung befreit haben sie ergeben:

μ	m	Aug. 31.	Sept. 20.	Mittel.
		$m' - m$	$m' - m$	
0 ^h	0 ^h	51 ^m 7239	51 ^m 7262	51 ^m 7251
10	0	7292	7263	7278
20	0	7235	7263	7249
30	0	7278	7274	7276
40	0	7262	7270	7266
50	0	7205	7185	7195
60	0	7169	7006	7088
70	0	7103	6857	6980
80	0	7007	6838	6923

Setzt man der letzten Columne die Grösse

$$-3\alpha \text{tg} R^2 (m' - m)(m' - \mu)(m - \mu)$$

hinzu, indem man für α die beiden Werthe annimmt, welche beiden verfolgten Hypothesen entsprechen, so erhält man die Reihe der Werthe von C :

μ	Hyp. I.	Hyp. II.
0	51,7251	51,7251
10	7299	7187
20	7281	7111
30	7309	7135
40	7290	7164
50	7199	7176
60	7063	7196
70	6916	7257
80	6809	7414

Man sieht hieraus, dass der Gegenstand dieser Beobachtungen weder der Schwerpunkt noch der hellste Punkt der undeutlichen Bilder der Sterne gewesen ist. Die Abweichungen der Hypothesen von den Beobachtungen finden im entgegengesetzten Sinne statt, so dass eine dritte Hypothese, welcher ein zwischen 0,4918 und $-2,1241$ liegender Werth von α zukommt, ihnen angemessener ist, als jede der vorigen. Man kann den Werth von α , welcher den Beobachtungen am angemessensten ist, durch die Vergleichung der in beiden verfolgten Hypothesen erlangten Werthe von C leicht bestimmen; man findet ihn dadurch $= -1,304$ und die ihm entsprechenden Werthe von C wirklich in so naher Uebereinstimmung mit einander, dass man das daran noch fehlende den Beobachtungen zur Last legen kann, nämlich:

0	51 ^m 7251
10	7221
20	7164
30	7190
40	7204
50	7183
60	7154
70	7150
80	7224

20*

*) Zone 174. 18^h 47^m 34^s.25.

Die sich auf den Anblick des undeutlichen Bildes eines weit von der Axe entfernten Sterns gründende, im 19. § geäußerte Vermuthung, dass man die Entfernung von der Axe, in welche das meiste Licht fällt, zum Gegenstande der Beobachtung machen werde, wird hierdurch nicht völlig bestätigt; diese Entfernung ist den angeführten Beobachtungen indessen weniger unangemessen als die des Schwerpunkts. — Die Bestimmung von α durch die Beobachtungen selbst hat die Schwierigkeit, dass sie nur auf Messungen gegründet werden kann, deren aus der Undeutlichkeit der Bilder entstehende Unsicherheit in demselben Maasse anwächst, in welchem der Einfluss von α sich entwickelt. Auch wird die Bestimmung eines Beobachters wahrscheinlich nicht für einen andern gelten, indem Beide verschiedene Punkte der Bilder wählen können. Ich selbst habe bemerkt, dass, trotz der Absicht, stets denselben Punkt zu wählen, von einem Tage zum andern Verschiedenheiten darin vorgekommen sind, welche mir von Aenderungen der Helligkeit der Sterne sowohl als des Himmels herzurühren scheinen; die Unterschiede, welche sich zwischen den angeführten Messungen vom 31. Aug. und 20. Sept. von α an zeigen, wo die Undeutlichkeit der Bilder anfängt beträchtlich zu werden, sind ein Beispiel hiervon.

Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass ich die Bestimmung von α nicht für sehr sicher halte. Ich bin zweifelhaft gewesen, ob ich der Hypothese II, oder dem Resultate der Beobachtungen den Vorzug geben sollte. Um zu einer Entscheidung zu gelangen, habe ich ein Paar, fast einen Grad von einander entfernte Sterne zur Deckung gebracht, indem ich zuerst $\mu = \frac{1}{2}(m + m')$ machte; dann aber μ beträchtlich und m' so viel änderte, als die Hypothese II es forderte; wonach sich zeigte, dass der Punkt des undeutlichen Bildes, welcher nun von dem deutlichen getroffen wurde, nicht der war, den ich zum Gegenstande einer Beobachtung gewählt haben würde. Ich habe also dem Resultate der Beobachtungen den Vorzug eingeräumt und bemerke darüber nur noch, dass die meiner Meinung nach dadurch so klein als möglich gemachte Unsicherheit erst dann grössern Einfluss erhält, wenn die Undeutlichkeit der Bilder auffallend wird und die Sicherheit der Beobachtung vermindert. Der Unterschied der Hypothese II entsprechenden Werthes von α von dem angenommenen ist $= 0,8201$ und sein Einfluss auf die Messung eines Winkels $\omega = n \cdot 10'$ ist $= n^3 \cdot 0,004164$. Könnte man zum Punkt des undeutlichen Bildes, welchen man zum Gegenstande der Beobachtungen wählt, unabhängig von diesen bestimmen, und wollte man

dieser Bestimmung folgen, so würde eine allgemeinere Untersuchung jenes Bildes, als die im 19. § enthaltene, nothwendig werden. Diese beruhet nämlich auf der Voraussetzung, dass jeder unendlich wenig breite Ring des Objectiva einen elliptischen Ring gleichmässig erleuchte, welche Voraussetzung vielleicht nicht bis zu grösseren Werthen des Winkels ω ausgedehnt werden darf.

Man würde die ganze, das Gesetz, welches die Messungen mit dem Heliometer und die ihnen entsprechenden Winkel mit einander verbindet, betreffende Untersuchung haben sparen können, wenn die Objectivhälften sich nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Cylindersfläche bewegten, deren Axe durch den Brennpunkt geht (Abb. I [70] § 15). Aber es ist nicht sowohl diese Ersparung, als die Vermeidung jeder Undeutlichkeit der Bilder und der daraus hervorgehenden Schwierigkeiten, welche mich veranlasst, die Bewegung der Objectivhälften auf einer Cylindersfläche als eine wahre und immer, wenn man sich nicht auf die Messung kleinerer Winkel (zum Beispiel bis zu $24'$ oder $30'$ gehender) beschränken will, nicht unerhebliche Verbesserung des Instruments zu betrachten.

23.

Setzt man, dem vorigen § zufolge, die Entfernung von der Axe, in welcher das Bild eines nennlich entfernten, mit ihr den Winkel ω machenden Gegenstandes erscheint,

$$y = f_2 \omega \{ 1 - 1,304 \omega^2 \}$$

so kann man aus der Verbindung dieser Bestimmung mit den § 11 und 12 bestimmten, nicht-periodischen Ausgleichungen der Mikrometerschraube, die Vorschrift ableiten, nach welcher die Entfernung s zweier, mit dem Heliometer beobachteter Punkte aus den Angaben des Instruments berechnet werden muss. Wenn die Objectivhälften I und das Ocular in der Heliometeraxe erhalten werden, der Objectivhälfte II aber die einander entgegengesetzten, die Bilder der beiden Punkte zur Deckung bringenden Stellungen (m' und m) gegeben werden, so wie die von mir immer befolgte Beobachtungsmethode es fordert, so ist y dem ausgeglichenen Werthe von $\frac{1}{2}(m' - m)$ proportional, oder

$$y = f_2 \left\{ \frac{m' - m}{2} + f \left(\frac{m' - m}{2} \right) \right\} \operatorname{tg} R$$

wo die Ausgleichung $f \left(\frac{m' - m}{2} \right)$ aus der kleinen Tafel am Ende des 12. § genommen wird. Ferner ist $\omega = 0$ und $\omega' = s$, also auch

$$y = f_2 s (1 - 1,304 s^2)$$

und aus beiden Ausdrücken zusammengenommen folgt, hinreichend nahe:

$$s = R \left\{ \frac{m'-m''}{2} + f \left(\frac{m'-m''}{2} \right) \right\} + 1,304 \text{ tg } R^2 \left(\frac{m'-m''}{2} \right)^3$$

Das letzte Glied dieses Ausdrucks werde ich im Folgenden die optische Verbesserung nennen.

Ich setze die Werthe der Summe der beiden letzten Glieder dieser Formel für $\frac{m'-m''}{2} = 10^R, 20^R, \dots 60^R$ hierher; der durch ihre Hinzufügung verbesserte Werth des beobachteten, jedoch von dem periodischen Fehler der Schraube befreieten $\frac{m'-m''}{2}$ ergibt, durch seine Multiplication in R , unmittelbar die Entfernung.

$\frac{m'-m''}{2}$	Verbesserung.
0	+ 0,00000
10	+ 0,00037
20	+ 0,00159
30	+ 0,00398
40	+ 0,00782
50	+ 0,01253
60	+ 0,01853

Wenn die Helligkeiten der beiden Punkte, deren Entfernung gemessen werden soll, sehr verschieden sind, so wird es nöthig, die Objectivhülfe, welche den helleren abbildet, zu bedecken. Wenn man aber ihre Öffnung durch eine halbkreisförmige, ihr concentrische Blending verkleinert, so wird dadurch, den Untersuchungen § 18—20 zufolge, der Ort des Bildes verändert und zwar desto stärker, je weiter der Punkt, von welchem es herrührt, von der Axe entfernt ist. Eine solche Bedeckung hat also eine Aenderung des Werthes von α zur Folge. Ich habe, um dieses zu vermeiden, eine andere Art der Bedeckung gewählt, nämlich durch Gewebe von Metallfäden, welche das Licht vermindern, ohne die Öffnung des Objectivs zu ändern. Diese Gewebe bringen die durch FRAUNHOFER, HERSHEL und SCHWED vollständig bekannt gewordenen und erklärten Diffractionerscheinungen hervor — farbige Nebengebilde, welche das Hauptbild umgeben. Sie vermindern aber, wenn ihre sich senkrecht durchschneidenden Fäden parallel und gleich weit entfernt von einander sind, die Deutlichkeit des Hauptbildes nicht merklich.

24.

Ich komme nun zu der Untersuchung des Einflusses, welchen die Wärme auf den Winkelwerth einer Schraubendrehung äussert. Ich habe sie auf die Vergleichung der in sehr verschiedener Wärme gemachten Messungen der Entfernungen von 10 Sternen der Plejaden von ihrem Hauptsterne η gegründet. Diese Messungen selbst

und die zu ihrer Reduction auf 1840 angewandten Mittel werde ich in einer folgenden, die Plejaden betreffenden Abhandlung mittheilen,^{*)} hier aber nur die gegenwärtig notwendigen Resultate derselben anführen.

Wenn die Wärme Einfluss auf die Messungen äussert, so zeigt er sich dadurch, dass die in verschiedenen Wärme gemachten, von der Strahlenbrechung befreieten und auf 1840 reducirten nicht übereinstimmen. Bezeichnet man eine in der Wärme τ des Fahrenheit'schen Thermometers gemessene, in Schraubenwindungen ausgedrückte Entfernung durch e und nimmt man den Einfluss der Wärme den Thermometergraden proportional an, so ist der Ausdruck der auf einen bestimmten Thermometerstand, wofür ich 50° F. annehmen werde, bezogenen Entfernung

$$e = \frac{e}{1 + \alpha(\tau - 50)} \quad \text{oder} \quad c = e + \alpha(\tau - 50)e$$

wo α die Aenderung des Einflusses der Wärme auf die Einheit von e für jeden Grad der Aenderung des Thermometerstandes bedeutet. Eine Reihe von n Beobachtungen zweier Punkte von unveränderlicher Entfernung ergibt daher die Gleichungen:

$$e = e + \alpha(\tau - 50)e$$

$$c' = e + \alpha(\tau' - 50)e$$

$$c'' = e + \alpha(\tau'' - 50)e$$

u. s. w.

$$e^{(n-1)} = e + \alpha(\tau^{(n-1)} - 50)e$$

und ferner, der Methode der kleinsten Quadrate gemäss, zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x \cdot e \{ n(aa) - (a)(a) \} = e \{ n(ac) - (a)(c) \}$$

wo a, a', a'', \dots um abzukürzen für $\tau - 50, \tau' - 50, \tau'' - 50, \dots$ geschrieben, $(a), (c), (aa), \dots$ aber die bekannten Gaussischen Bezeichnungen der Summen sind.

Eine ähnliche Gleichung habe ich aus den Messungen der Entfernung jedes der 10 Sterne der Plejaden von η abgeleitet und x durch die Summe aller 10 Gleichungen bestimmt. Die einzelnen Sterne haben ergeben:

		$e \{ n(aa) - (a)(a) \}$	$e \{ n(ac) - (a)(c) \}$
g Plejadum	31 Beob.	16024000	+ 38,677
b "	40 "	29274000	+ 138,264
e "	35 "	22891000	+ 93,944
c "	34 "	12008000	+ 57,583
k "	30 "	12137000	+ 68,749
l "	27 "	8864000	+ 1,384
d "	28 "	2358000	- 2,462
s "	28 "	4569000	+ 16,256
f "	29 "	5976000	+ 19,770
h "	29 "	3620000	+ 12,509
Summe . . .		117721000	+ 444,374

^{*)} [Vgl. die betr. Abb. unter „IV. Stellarastromie“.]

Den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung habe ich = $\pm 0^{\text{m}}007238$ gefunden. Man hat also:

$$x = + 0,0000037765; \text{ m. F.} = \pm 0,000000667^*)$$

Die Uebereinstimmung, womit die einzelnen Sterne den Werth von x angeben, scheint mir befriedigend zu sein: obgleich er sehr klein ist, stimmen 9 Sterne in seinem Zeichen überein und nur einer ergibt, aber mit einem sehr geringen Gewichte, das entgegengesetzte. Jede als einzeln angeführte Beobachtung ist das Mittel aus 6, zu drei vollständigen Messungen verbundenen Einstellungen der Objectivhälfte II. Von einer solchen Beobachtung wäre vielleicht eine grössere Genauigkeit zu erwarten, als die, welche der mittlere Fehler = $\pm 0^{\text{m}}007238 = \pm 0^{\text{m}}383$ andeutet; sie würde wahrscheinlich auch grösser sein, wenn nicht viele der Beobachtungen bei heftiger Kälte hätten gemacht werden müssen, welche der Bestimmung einer von der Wärme abhängigen Grösse auf der einen Seite zwar vorthellhaft, auf der anderen aber nachtheilig ist, indem sie mit starkem Zittern der Sterne verbunden ist und, durch die Verhärtung des Oels an der Mikrometerschraube, eine Fehlerursache herbeiführt, welche ohne sie nicht, oder doch in einem geringeren Maasse vorhanden ist.

Wenn man den Winkelwerth einer Schraubendrehung, so wie er in der Wärme $\tau = 50^{\circ}$ ist, durch R , den in einer anderen Wärme τ stattfindenden durch R' bezeichnet, so ist

$$R' = \frac{R}{1 + (\tau - 50) 0,0000037765}$$

wodurch also, wenn R ein für allemal bekannt ist, der für jede Beobachtung anzuwendende Winkelwerth einer Schraubendrehung gefunden wird. Aus seiner Verkleinerung mit zunehmender Wärme geht hervor, dass diese kleineren Einfluss auf die Mikrometerschraube, als auf die Brennweite äussert; was vielleicht durch eine Verschiedenheit ihrer Einflüsse auf das Kronglas der äusseren und das Flintglas der inneren Linse erklärt werden kann, wenn auch beide kleiner sind als ihr Einfluss auf den Stahl der Schraube. Bezeichnet man die Ausdehnung für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers für Stahl, Kronglas und Flintglas durch α , β , β_1 , und setzt man voraus, dass die Wärme keinen Einfluss auf die Brechungsverhältnisse äussere, so findet man, nach den Formeln und Angaben § 13—17, die aus den beiden letzteren hervorgehende Veränderung der Brennweite:

$$\begin{aligned} df &= f \left\{ \frac{(1,3)(6,7)}{(1,7)} \beta + \frac{(1,2)(6,7)}{(1,7)} \beta_1 \right\} \\ &= f \{ 2,74(0)2 \beta - 1,54(0)2 \beta_1 \} \end{aligned}$$

*) [Vgl. auch (At vena) Astr. Nachr. 59, p. 260.]

und damit

$$R' = R \frac{1 + (\tau - 50) \frac{\alpha}{\beta}}{1 + (\tau - 50) \left\{ \frac{2,74002}{\beta} - 1,54002 \frac{\beta_1}{\beta} \right\}}$$

sowie durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem auf die Beobachtungen der Plejaden gegründeten:

$$2,5002 \beta - 1,5002 \beta_1 = \alpha + 0,0000067977$$

Setzt man α , so wie ich es bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über das Preussische Maass gefunden habe, = $0,00001013^*$, so erhält man die Gleichung zwischen β und β_1 :

$$2,5002 \beta - 1,5002 \beta_1 = + 0,0000169277;$$

welche jedoch, indem sie auf der Beobachtung einer sehr kleinen Grösse, und auch auf der Voraussetzung keines Einflusses der Wärme auf die Brechungsverhältnisse beruhet, keinen Anspruch auf grosse Sicherheit besitzt.

25.

Nachdem nun die Ausgleichungen der messenden Schraube, die optische Verbesserung und der Einfluss der Wärme auf die Messungen festgesetzt worden sind, kann ich die verschiedenen Versuche mittheilen, welche ich gemacht habe, um zur Kenntniss des Winkelwerthes einer Schraubendrehung zu gelangen. Ich fange mit dem Versuche an, welcher auf das Gaussische Verfahren, nämlich auf die Beobachtung eines Fadens im Brennpunkte des Heliometers, durch die verschiednen gestellten Objectivhälften hindurch, gegründet worden ist.

Das Heliometer wurde in den Meridian gestellt und ihm eine fast senkrechte Richtung gegeben, so dass das Objectiv unten, das Ocular oben war; auf dem Fussgestelle des Instruments wurde ein Szolliger Reichenbach'scher Theodolit, als Höhenkreis, gleichfalls in der Ebene des Meridians so aufgestellt, dass das Objectiv seines Fernrohrs das Heliometerobjectiv fast berührte, und der Winkel zwischen den beiden Bildern des (gegen die Ebene des Meridians 45° geneigten) Fadenkreuzes, durch Bewegung des Fernrohrs des Theodoliten im Verticalkreise, gemessen werden konnte. Eine der Objectivhälften (I) wurde in die Heliometeraxe gestellt, in welcher sich auch das Fadenkreuz befand, die andere (II) aber nach und nach -5 und $+5$, -10 und $+10$, ... -60 und $+60$ Schraubendrehungen von derselben entfernt, und jeder hiedurch entstandene Winkel zu verschiedenen Zeiten fünf Mal, immer durch fünf Wiederholungen gemessen. Auf diese Art haben

*) Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln u. s. w. Berlin 1839. S. 68. [334 d. a. Verz.]

die einzelnen Resultate eine sehr gute Uebereinstimmung erhalten, welches ich der in jeder Hinsicht vortheil-

haften Einrichtung zuschreibe; ich stelle sie hier zusammen:

	1830	τ	5^R	10^R	15^R	20^R	25^R	30^R	35^R	40^R	45^R	50^R	55^R	60^R
März 22	35,75	—	529,47	—	1059,16	—	1587,46	—	2116,86	—	2646,08	—	—	3174,15
April 27	51	—	—	—	8,08	1323,00	7,13	1851,19	7,31	2380,44	—	—	—	—
30	55	—	—	783,44	7,94	3,94	0,94	2,56	6,84	2,31	—	—	—	—
Mai 1	45	264,16	—	1,00	—	—	—	—	1,88	—	0,25	—	—	—
4	50	—	8,38	—	8,50	—	8,10	—	7,06	—	—	5,56	—	—
3	54	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2916,38	5,06
5	56	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,90	09,75	4,50
6	65	4,63	8,56	3,36	8,44	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	49	—	—	—	—	—	—	1,50	5,75	0,88	5,69	09,69	—	5,00
8	49	—	8,88	3,04	—	—	3,44	—	—	—	—	—	11,17	—
9	43	4,56	8,63	3,94	—	—	3,44	8,19	—	—	—	—	—	—
10	46	5,13	—	—	—	—	—	—	1,67	—	—	—	—	—
12	49	4,94	—	—	—	—	—	—	—	—	1,63	6,63	10,50	4,13
Mittel . . .		264,74	528,78	793,74	1058,42	1323,46	1587,56	1851,76	2116,76	2381,10	2645,99	2916,30	3174,57	
Thermom. . .		49,76	48,75	51,74	51,73	48,76	40,79	19,72	48,71	40,78	47,79	51,74	48,77	

Ich habe im 22. § den Punkt bestimmt, welchen ich als den Vereinigungspunkt unter sich parallel, aber gegen die Axe geneigt einfallender Strahlen ansehe. Da nicht alle solche Strahlen in diesen Punkt treffen, so werden von ihm ausgehende, nach ihrem Durchgange durch das Objectiv, auch nur näherungsweise parallel. Nimmt man aber von der Richtung, in welcher man sie in dem Fernrohre des Theodoliten gesehen hat, an, dass sie dieselbe sei, in welcher parallele Strahlen einfallen müssen, damit sie den angenommenen Vereinigungspunkt haben, so muss man den gemessenen Zwischenräumen von 5, 10, 15 . . . 60 Schraubenwindungen die in der Tafel § 23 vereinigten Verbesserungen hinzufügen, um sie mit den Messungen durch den Theodoliten vergleichbar zu machen. Ferner muss man sie sämmtlich auf $\tau = 50^p$ reduciren. Beides ist in der folgenden Zusammenstellung zu sehen.

	Verbesserung.	Wärme.	
5^R	+ 0,00009	- 0,00001	5,00008 R = 264,74
10	+ 0,00037	- 0,00006	10,00031 R = 528,78
15	+ 0,00085	+ 0,00008	15,00093 R = 793,74
20	+ 0,00159	+ 0,00010	20,00169 R = 1058,42
25	+ 0,00262	- 0,00013	25,00249 R = 1323,46
30	+ 0,00398	- 0,00035	30,00363 R = 1587,56
35	+ 0,00576	- 0,00011	35,00565 R = 1851,76
40	+ 0,00782	- 0,00029	40,00753 R = 2116,76
45	+ 0,01094	- 0,00003	45,01091 R = 2381,10
50	+ 0,01252	- 0,00040	50,01212 R = 2645,99
55	+ 0,01533	+ 0,00029	55,01562 R = 2916,30
60	+ 0,01853	- 0,00029	60,01824 R = 3174,57

Der diesen 12 Gleichungen am meisten Genüge leistende Werth von R ist

$$R = 52,90290; \text{ m. F.} = \pm 0,00275.$$

26.

Ein zweiter Versuch, den Werth von R zu bestimmen, wurde auf die Vergleichung der schon im 24. § angewandten Messungen der Entfernungen verschiedener Sterne der Plejaden, von η , mit den Bestimmungen derselben Entfernungen, welche ich durch Beobachtungen mit dem Meridiankreise erhalten habe, gegründet.

Einige der Messungen der Plejaden mit dem Heliometer fallen in die Zeit bald nach der Aufstellung dieses Instruments, die meisten aber in die Jahre 1838 — 40; die ersteren wende ich nicht für den gegenwärtigen Zweck an, indem ihr Zusammennehmen mit den letzteren eine Kenntniss der eigenen Bewegungen erfordert haben würde, deren Voraussetzung vermieden werden konnte, da die späteren Messungen allein zahlreich genug sind. Ich führe hier nur das arithmetische Mittel der Messungen jeder Entfernung an, so wie es nach ihrer Befreiung von den Einflüssen der Strahlenbrechung, den Ausgleichungen der Schraube, der optischen Verbesserung, der Veränderlichkeit von R durch die Wärme und der von der Aberration herrührenden Veränderung, für 1840 gefunden wird, verweise aber wegen aller Einzelheiten auf die später folgende Abhandlung über die Plejaden.* Diese Abhandlung wird auch von den Meridianbeobachtungen die nöthigen Umstände angeben, so dass ich auch von diesen jetzt nur die hierhergehörigen Resultate anführen darf.

* [Vgl. „IV. Stellarastronomie.“]

		Heliometer.	Meridianbeobacht.
<i>g</i>	Plejadam	29 Beob.	43 ^o 45498
			2296 ^o 16
<i>b</i>	"	35 "	40,52343
			2143,30
<i>e</i>	"	30 "	43,05269
			2277,42
<i>c</i>	"	29 "	31,32024
			1656,52
<i>k</i>	"	27 "	39,14988
			2067,59
<i>l</i>	"	24 "	36,37815
			1922,16
<i>d</i>	"	24 "	20,92191
			1105,60
<i>s</i>	"	25 "	28,24508
			1496,68
<i>f</i>	"	25 "	26,30039
			1391,48
<i>h</i>	"	25 "	26,32060
			1402,95

Die sich aus dieser Vergleichung der Messungen mit dem Heliometer mit den durch die Meridianbeobachtungen bestimmten Entfernungen ergebenden Gleichungen zur Bestimmung von R , haben sehr ungleiche Gewichte, deren Aufsuchung der Ableitung des Resultats vorangehen muss. Den mittleren Fehler jeder der ersten Messungen habe ich (§ 24) schon angeführt; er ist $= \pm 0^{\circ}007238 = \pm 0^{\circ}3829 = \epsilon$. Den auf den grössten Kreis bezogenen m. F. jeder Beobachtung einer geraden Aufsteigung eines Plejadensterns habe ich $\epsilon' = \pm 1,7996$, den einer Declinationsbeobachtung $\epsilon'' = \pm 1,7304$ gefunden. Wenn daher die Anzahlen der Meridianbeobachtungen des Sterns η Plejadum, in AR. und in Decl., durch b, c , eines anderen Sterns durch b', c' bezeichnet werden, so ist das Quadrat des mittleren Fehlers der aus so vielen Beobachtungen gefolgerten Entfernung beider Sterne:

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) \epsilon' \epsilon' + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right) \epsilon'' \epsilon''$$

und das Quadrat des m. F. des Mittels aus a Heliometermessungen

$$\frac{\epsilon \epsilon}{a}$$

Das Quadrat des m. F. jeder der Vergleichungen ist daher

$$\frac{1}{a} \cdot \epsilon \epsilon + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) \epsilon' \epsilon' + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right) \epsilon'' \epsilon''$$

und ihr Gewicht ist das Reciproke dieses Ausdrucks. Den Werth von a für jeden der Sterne habe ich oben schon angegeben; b ist = 18 und $c = 16$; b' und c' enthält die folgende Tafel zugleich mit dem Gewichte jeder Vergleichung:

<i>g</i>	Plejadam	b'	c'	Gewicht.
		11	11	1,3321
	<i>b</i>	11	10	1,3057
	<i>c</i>	9	7	1,1014
	<i>e</i>	6	6	0,8848
	<i>k</i>	5	5	0,7708

		b'	c'	Gewicht.
<i>l</i>	Plejadam	3	3	0,5087
<i>d</i>	"	5	5	0,7704
<i>s</i>	"	12	12	1,3820
<i>f</i>	"	14	14	1,5293
<i>h</i>	"	12	12	1,4014

Die diesen Gewichten angemessene Auflösung der aus den Messungen der einzelnen Sterne hervorgehenden Gleichungen ergibt:

$$R = 52^{\circ}88127; \text{ m. F. } = \pm 0^{\circ}00880,$$

welcher Bestimmung zufolge die durch die Meridianbeobachtungen gefundenen Entfernungen von den heliometrisch gemessenen folgendermassen abweichen:

<i>g</i>	Plejadam		<i>l</i>	Plejadam	
		-1,814			-1,563
<i>b</i>	"	+0,369	<i>d</i>	"	-0,777
<i>c</i>	"	+0,739	<i>s</i>	"	+3,044
<i>e</i>	"	+0,266	<i>f</i>	"	+0,782
<i>k</i>	"	-2,706	<i>h</i>	"	+0,507

27.

Wenn die Ableitung des Werthes von R aus der Vergleichung der Heliometermessungen mit den Meridianbeobachtungen der Plejaden noch etwas zu wünschen übrig lässt, so ist der Grund davon die Schwierigkeit, den letzteren eine Sicherheit zu geben, welche der der ersteren gleich oder wenigstens nahe kommt; wäre es gelungen, ihre Genauigkeit so gross zu machen, als die der ersteren ohne Zweifel ist, so würde die eben mitgetheilte Vergleichung viel kleinere Unterschiede darbieten. Man vermindert diese Schwierigkeit, wenn die durch das Heliometer gemessenen Entfernungen nicht unzusammenhängenden Sternepaaren zu gehören, sondern mehreren, in einem grössten Kreise liegenden, und wenn man dann ihre Summe mit der durch Meridianbeobachtungen erlangten Bestimmung der beiden äussersten Sterne vergleicht. Dass man mehrere, ganz genau in einem grössten Kreise liegende Sterne nicht finden wird, ist kein wesentliches Hinderniss der Ausführung dieser Idee, indem man ihre Abweichungen von dem durch die beiden äussersten gehenden grössten Kreise, durch die Beobachtungen ihrer Positionswinkel bestimmen und dadurch ihre unmittelbar gemessenen Entfernungen auf diesen grössten Kreis reduciren kann.

Von dieser Art ist der dritte Versuch, den Werth von R zu bestimmen. Er ist auf sechs, ziemlich nahe in einem grössten Kreise liegende Sterne gegründet worden, welche Herr SCHLÜTER am Himmel aufgesucht und nachher auch mit dem Heliometer beobachtet hat. Zuerst theile ich [das Mittel aus] 13 Beobachtungen

drei von diesen Sternen mit, welche Herr Doctor Busch an dem Meridiankreise der Königsberger Sternwarte gemacht hat. *)

	AR. 1840.	Decl.
Mittel von Stern <i>a</i>	55° 59' 15,03"	25° 12' 6",15
" " " <i>b</i>	55 13 57,72	24 0 12,69
" " " <i>c</i>	54 29 18,63	22 25 18,37

Hieraus folgen die Entfernung

$$af = 3^{\circ} 5' 58,955 = 11158,955$$

und die auf den grössten Kreis reducirten Entfernungen

	<i>r</i>	<i>a</i> '	<i>bc</i>	<i>cd</i>	<i>de</i>	<i>ef</i>
Mittel aus 10 Beobachtungen	18 ^m 32	40 ^m 70714	53 ^m 23436	49 ^m 35744	31 ^m 10959	37 ^m 17302
Periodische Ausgleich der Schraube		+ 0,03195	+ 0,00151	- 0,00189	- 0,00059	- 0,00100
Fortschr. Ausgl. + opt. Verbesserung		+ 0,00812	+ 0,01429	+ 0,01218	+ 0,00434	+ 0,00664
Reduction wegen Aberration		- 0,00271	- 0,00355	- 0,00329	- 0,00207	- 0,00218
Gemessene wahre Entfernung		40,7145	53,2466	49,3644	31,1113	37,1762

Den Positionswinkel, an dem in der Mitte jedes Paares der Sterne liegenden Punkte, nach seiner Befreiung von dem Einflusse der Strahlenbrechung, dem

Mittel aus 10 Beobachtungen	209° 57,11	209° 42,08	207° 49,07	196° 35,00	208° 9,98
Reduction auf 1840	- 0,05	- 0,05	- 0,05	- 0,05	- 0,05
Positionswinkel 1840	209 57,06	209 42,03	207 49,02	196 34,95	208 9,93

Aus diesen Bestimmungen der Positionswinkel folgen die Entfernungen der Sterne *b*, *c*, *d*, *e* von dem grössten Kreise *af*:

des Sterns *c* von *a* und von *f*, nämlich *ac*, = 4962',146, *cf* = 6196',809. Der mittlere Fehler jeder dieser Entfernungen geht aus den vorkommenden Abweichungen der einzelnen Rectascensions- und Declinations-Unterschiede von dem mittleren = ± 0',7774 hervor.

Die Entfernungen der sechs Sterne von einander hat Herr SCULTEr an 10 Tagen [1839 Dec. 9 — 1840 Febr. 11] mit dem Heliometer gemessen, nach ihrer Befreiung von dem Einflusse der Strahlenbrechung folgendermassen: *)

Teilungsfehler des Positionskreises und den von der Aufstellung des Instruments u. s. w. herrührenden Einflüssen ergaben dieselben Beobachtungen: *)

+ 129',7, + 294',7, + 360',3, + 97',5, und ferner die auf diesen grössten Kreis und auf die Wärme = 50°F. reducirten Entfernungen *ab*, *bc*, . . . *ef*:

	<i>ab</i>	<i>b,c</i>	<i>c,d</i>	<i>d,e</i>	<i>e,f</i>
Gemessene Entfernungen	40 ^m 7145	53 ^m 2466	49 ^m 3644	31 ^m 1113	37 ^m 1762
Reduction auf den grössten Kreis	- 0,0740	- 0,0916	- 0,0292	- 0,4258	- 0,0447
" " auf <i>r</i> = 50°	+ 0,0049	+ 0,0069	+ 0,0059	+ 0,0037	+ 0,0044
Reducirte Entfernungen	40,6454	53,1614	49,3501	30,6892	37,1359

Den mittleren Fehler einer Messung der Entfernung zwischen einem Paare dieser Sterne nehme ich so an, wie ihn die — auf ganz gleiche Art gemachten — Plejadenbeobachtungen ergeben haben (§ 24); daraus folgt der m. F. jeder der eben gefundenen reducirten Entfernungen = ± $\frac{0',3829}{\sqrt{10}}$ = ± 0',1211.

Man hat also, durch die Vergleichung der aus den Meridianbeobachtungen berechneten Entfernungen mit den durch das Heliometer gemessenen, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} ac, \dots &= 4962',146 = 93,8068 R \\ cf, \dots &= 6196',809 = 117,1752 R \\ af, \dots &= 11158',955 = 210,9820 R \end{aligned}$$

deren erste Glieder den, für alle drei gleichen, mittleren Fehler = ± 0',7774, die zweiten ± 0',1211 $\sqrt{2}$, + 0',1211 $\sqrt{3}$, ± 0',1211 $\sqrt{5}$ besitzen. Setzt man, um nicht mit grossen Zahlen rechnen zu dürfen, $R = 52',890555 + x$, so verwandeln sie sich in:

$$\begin{aligned} + 0',652 &= 93,8068 \cdot x \\ - 0,652 &= 117,1752 \cdot x \\ 0 &= 210,9820 \cdot x \end{aligned}$$

Sie sind aber nicht unabhängig von einander, sondern durch die Bedingung verbunden, dass die Summe der in *ac*, und *cf* übrigbleibenden Unterschiede dem in *af* übrigbleibenden gleich sein muss. Man kann statt ihrer, um Alles gehörig zu berücksichtigen, folgende sechs Gleichungen annehmen:

*) [Einzelbeobachtungen weggelassen.]

*) [Einzelbeobachtungen weggelassen.]

$$\left. \begin{aligned} + 0,652 = z \\ - 0,652 = z' \\ 0 = z + z' \end{aligned} \right\} \text{m. F.} = \pm 0,7774$$

woraus z und z' , den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate gemäss, zu eliminiren sind und x zu bestimmen ist. Ich finde die Gleichungen, durch welche dieses geschehen muss:

$$\begin{aligned} + 1,0789 &= 51,0425 \cdot z + 15,2928 \cdot z' - 6075,7 \cdot x \\ - 1,0789 &= + 15,2928 \cdot z + 39,6775 \cdot z' - 5540,8 \cdot x \\ 0 &= - 6075,7 \cdot z - 5540,8 \cdot z' + 1219197 \cdot x \end{aligned}$$

und durch ihre Auflösung $x = - 0,000199$, oder

$$R = 52,80036; \text{ m. F.} = \pm 0,00314.$$

28.

Der vierte Versuch der Bestimmung des Werthes von R , welchen ich gemacht habe, beruhet auf der unmittelbaren Messung der beiden Grössen, deren Verhältniss R ist, nämlich der Brennweite des Helimeterobjectivs und der Länge einer Schraubenwindung. Beiden Messungen habe ich eine Genauigkeit geben können, welche mich glauben lässt, durch ihre Verbindung mit einander bis zu der erreichbaren Grenze der Sicherheit der Bestimmung von R geführt worden zu sein. Ich werde zuerst die Messung der Brennweite verfolgen.

Ein Punkt A in der Axe eines Objectivs wird an einem Punkte B derselben Axe abgebildet, dessen Entfernung AB von dem ersten von dem Orte O abhängt, wo zwischen beiden das Objectiv sich befindet. Im Allgemeinen sind zwei Oerter O und O' vorhanden, welchen eine gleiche Entfernung AB entspricht; aber beide vereinigen sich, wenn diese ihr Minimum — etwa die vierfache Brennweite — ist. Die von mir angewandte Methode beruhet auf der Messung dieses Minimums und der Ausmittelung seines Verhältnisses zu der gesuchten Brennweite. Die erstere habe ich dadurch erlangt, dass ich für gemessene, das Minimum sehr wenig überschreitende Entfernungen AB , die Entfernungen OO' gesucht und durch die Verbindung beider miteinander das Minimum berechnet habe. Die Einrichtung, wodurch ich diese Messungen ausgeführt habe, ist die folgende.

[Die folgende Darstellung ist dieselbe wie in Abh. 69, p. 107, 2. Spalte Zeile 20 ff. Den Grössen $d + d'$ und $d - d'$ entsprechen hier AB und OO' , deren Reduction auf die Normalwärme der Toise (16°25 C.) ergibt:

$$\begin{aligned} z &= 93,8068 \cdot x; \text{ m. F.} = \pm 0,1211\sqrt{2} \\ z' &= 117,1752 \cdot x; \dots \pm 0,1211\sqrt{3} \\ z + z' &= 210,9820 \cdot x; \dots \pm 0,1211\sqrt{5} \end{aligned}$$

E	e
4541,49	131,59
4544,35	169,74
4545,93	195,59
4547,39	208,92
4548,64	223,84
4549,97	234,59
4553,41	267,29

29.

Die im 17. § angeführten und den schon mitgetheilten Untersuchungen zum Grunde gelegten Elemente der Construction des Objectivs können nur als die Absicht andeutend angesehen werden, welcher gemäss es verfertigt werden sollte; kleine Abweichungen von dieser Absicht sind zu erwarten, und der Zweck der gegenwärtigen Messung der Brennweite ist, ihren Einfluss da zu vermeiden, wo er nachtheilig werden würde. Wenn die aus den angegebenen Elementen berechnete Brennweite von der etwas verschieden ist, welche den eben mitgetheilten Messungen entspricht, so ist es, bei mangelnder Kenntniss der Abweichung jedes einzelnen der Elemente, am einfachsten und am wenigsten willkürlich, alle Abmessungen in einem gleichen Verhältnisse $= 1 : \lambda$ zu verändern, so dass das, den im vorigen § mitgetheilten Messungen entsprechend geänderte Objectiv dem vorausgesetzten ähnlich bleibt. Diese Aehnlichkeit hat zur Folge, dass alle bisher für das vorausgesetzte Objectiv erlangten Resultate, wenn sie Winkel sind, ungeändert bleiben, wenn sie Entfernungen sind, im Verhältnisse $1 : \lambda$ geändert werden.

Ich werde zuerst die Formeln für das ganze Objectiv geltend annehmen, welche für den seinen Mittelpunkt zunächst umgebenden Theil richtig sind (§ 16), später aber die Verbesserung hinzusetzen, welche von der Grösse des Objectivs herrührt. — Wenn man in der Formel L unter a die positiv genommene Entfernung des Punkts A von der äusseren Fläche des Objectivs, unter α die Entfernung des Bildes von der inneren versteht, so ist sie:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{\alpha-y}$$

Wenn die Dicke des ganzen Objectivs ($= d + c + d'$) durch δ bezeichnet wird, so ist $E = a + \alpha + \delta$, wo durch diese Formel sich in

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{E-\delta-y-\alpha}$$

verwandelt; indem man den zweiten Werth $a + c$ von a setzt, welcher das Bild in gleiche Entfernung bringt, hat man auch:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a + \epsilon + c} + \frac{1}{E - \delta - \gamma - a - \epsilon}$$

Aus der Vergleichung beider Ausdrücke folgt:

$$(a + c)(E - \delta - \gamma - a) = (a + \epsilon + c)(E - \delta - \gamma - a - \epsilon)$$

oder

$$0 = \epsilon \{ E - \delta - \gamma - c - 2a - \epsilon \}$$

welcher Gleichung, ausser durch $\epsilon = 0$, auch durch $\epsilon = E - \delta - \gamma - c - 2a$ genügegeleitet wird. Führt man ϵ , diesem Ausdrucke gemäss, statt a in den Ausdruck von f ein, so erhält man

$$4f = E - x - \frac{\epsilon\epsilon}{E - x}$$

wo $x = \delta + \gamma - c$, also die Entfernung der beiden optischen Mittelpunkte des Objectivs von einander ist.

Durch diese Formel wird die Brennweite gefunden, wenn E und ϵ gemessen sind und x durch die Construction des Objectivs bekannt ist. Die kleinste Entfernung eines Punktes von seinem Bilde, nämlich $4f + x$, welche ich nun durch (E) bezeichnen werde, wird durch gemessene Werthe von E und ϵ mittelst der Formel

$$(E) = E - \frac{\epsilon\epsilon}{E - x}$$

so gut wie unabhängig von irgend einer Kenntniss der Construction des Objectivs bestimmt; denn x beträgt immer nur wenige Linien (für das Objectiv des Königsberger Heliometers 3^l.6247 (§ 17)), deren Berücksichtigung im Nenner des letzten, für kleine Werthe von ϵ sehr kleinen Gliedes unterbleiben könnte, ohne dass es dadurch merklich geändert werden würde.

Unter der verfolgten Voraussetzung, dass das ganze Objectiv den entfernteren Lothfaden da abgebildet habe, wo sein den Mittelpunkt zunächst umgebender Theil ihn abbildet, ist durch die gegenwärtige Bestimmung von (E) , verbunden mit der im 21. § erlangten von f_2 , die gesuchte wahre Brennweite des Objectivs gegeben. Denn $f_2 = 1131^l.776$ bedarf nur noch der Veränderung im Verhältnisse 1 : λ und λ wird durch die Gleichung $\lambda(4f + x) = (E)$, in welcher f und x die den angenehmen Constructionselementen des Objectivs entsprechenden Werthe dieser Grössen bedeuten, gefunden. Man erhält also die wahre Brennweite des ganzen Objectivs:

$$F = \frac{f_2}{4f + x}(E) = \frac{1131,776}{1132,361} \cdot \lambda(E)$$

Dieser Ausdruck ist richtig, wenn für (E) die kleinste Entfernung eines Punktes von dem Bilde,

welches der dem Mittelpunkte nächstliegende Theil des Objectivs von ihm macht, gesetzt wird. Die kleinste Entfernung, welche die Anwendung der im vorigen § mitgetheilten Messungen von E und ϵ in dem Ausdrucke von (E) ergibt, ist aber die für das ganze Objectiv stattfindende und muss daher, vor ihrer Anwendung in dem Ausdrucke von F , auf die vorige reducirt werden. — Man kann durch die Formeln A (§ 13) die Entfernungen von der inneren Fläche des Objectivs berechnen, in welchen Strahlen die Axe durchschneiden, die von einem um etwa die doppelte Brennweite entfernten Punkte der Axe ausgehen und die äussere Fläche des Objectivs an Punkten treffen, welchen die Winkel $t = 0, 36^l, 72^l, 108^l, 144^l$ zugehören. Aus den Resultaten dieser Rechnung kann man den Punkt der Axe ableiten, wo das Licht am meisten zusammengedrängt ist; aus seiner Vergleichung mit dem den Centralstrahlen allein zugehörigen Vereinigungspunkte erkennt man die Reduction, welche dem unmittelbar durch die Messungen von E und ϵ gegebenen Werthe von (E) anzubringen ist. Die einzelnen Momente dieser Rechnungen werde ich jetzt mittheilen: zuerst die Entfernungen ξ von der inneren Fläche des Objectivs, in welchen, von einem 2258^l.4648 von seiner äusseren Fläche entfernten Punkte der Axe ausgehende Strahlen die Axe durchschneiden:

$t = 0$	$\xi = 2260^l.9820$
36^l	$60,8828$
72^l	$60,5640$
108^l	$60,0441$
144^l	$59,5325$

Die Durchschnittswinkel dieser Strahlen und der Axe sind

$\omega = 0, 13^l 20', 360, 26^l 40', 862, 40^l 1', 640, 53^l 22', 784$ und aus der Verbindung von t, ω, ξ folgt, nach der Theorie, welche ich des ähnlichen Zweckes wegen schon im 17. § angewandt habe, die Entfernung von der inneren Oberfläche des Objectivs, in welcher das Licht am meisten zusammengedrängt ist, in welcher man also das Bild des strahlenden Punktes sieht:

$$a = 2259^l.8450.$$

Man hat also die Entfernung dieses Punktes von seinem durch das ganze Objectiv gemachten Bilde

$$= 2258^l.4648 + 10^l 0 + 2259^l.8450 = 4528^l.3098$$

und, da sie für die Centralstrahlen allein = 4529^l.4468 ist, die anzubringende Reduction des Werthes von $(E) = + 1^l.137$.

Hierdurch wird

$$F = \frac{1131,776}{1132,361} \{ \frac{1}{4}(E) + 0,284 \}$$

oder, ohne bemerkbaren Fehler

$$F = \frac{1}{4}(E) - 0,302.$$

Die Berechnung der mitgetheilten 7 Messungen von E und ε nach dieser Formel hat ergeben:

$$F = 1134,12; \text{ W\ddot{a}rme} = 11,6^\circ \text{C}$$

$$4,20 \dots \dots 12,5$$

$$4,08 \dots \dots 12,6$$

$$4,14 \dots \dots 12,1$$

$$4,10 \dots \dots 13,8$$

$$4,17 \dots \dots 12,9$$

$$4,13 \dots \dots 14,0$$

$$\text{Mittel} \dots F = 1134,134; \text{ W\ddot{a}rme} = 12,8^\circ \text{C}.$$

30.

Die Messung der L\ddot{a}nge einer Schraubenwindung fordert, ausser dem Besitze des in 7. § erw\dd{a}hnten, auf dem Schieber der Objectivh\dd{a}lfte I befestigten Mikroskops, auch noch die Kenntniss der Entfernung zweier Striche auf der Fl\dd{a}che eines Metallst\dd{u}ckes, welches auf dem Schieber der Objectivh\dd{a}lfte II befestigt wird. Wenn man erst den einen, dann den anderen dieser Striche durch die Schraube dieser Objectivh\dd{a}lfte in die Absehnlinie des Mikroskops bringt, so erlangt man durch die Ablesungen der Scale und Trommel der Schraube den Ausdruck ihrer Entfernung durch Schraubenwindungen; durch ausgeglichene Schraubenwindungen, wenn man den unmittelbaren Ablesungen die periodischen (§ 10) und die von der Periode unabh\dd{a}ngigen Ausgleichungen (§ 12) hinzusetzt.

Wenn man den Nutzen der genauen Bestimmung der Brennweite, welche ich mitgetheilt habe, nicht verlieren will, so muss die Entfernung der Striche verh\dd{a}ltnissm\dd{a}ssig eben so genau bekannt sein. Ich habe dieses durch die g\dd{u}tige H\dd{a}lfte der Herren A. und G. REPSOLD in Hamburg erlangt, welche eine mit sehr grosser Genauigkeit getheilte Scale von drei Pariser Fuss besitzen, deren einzelne Abtheilungen sie mit der gr\dd{o}sten Sorgfalt, von einem vortrefflichen Apparate unterst\dd{u}tzt, gep\dd{r}uft haben, um dadurch die kleinsten Ungleichheiten, welche die Operation der Eintheilung noch \dd{u}brig gelassen hatte, mit aller dem gesch\dd{a}rftesten Sehen erreichbaren Sicherheit zu bestimmen. Von dieser Scale haben sie zwei Zolle auf ein Stahlbl\dd{a}ttchen \dd{u}bertragen und durch nachherige Vergleichen mit verschiedenen Abtheilungen derselben gefunden, dass die wahre Entfernung der beiden aufgetragenen Striche, in der Normalw\dd{a}rme des Pariser Maasses

$$= 24,00006$$

ist.

Die Entfernung dieser Striche von einander habe ich durch die Mikrometerschraube der Objectivh\dd{a}lfte II gemessen, indem ich erst 0^{h} , 5^{h} , 10^{h} , \dots 35^{h} zum Anfange, dann 85^{h} , 90^{h} , 95^{h} , \dots 120^{h} zum Ende der Messungen machte. Um die periodischen Ausgleichungen der Schraube ganz zu vermeiden, habe ich jede dieser Messungen f\dd{u}nfmal wiederholt, indem ich sie von $-0^{\text{h}}4$, $-0^{\text{h}}2$, 0 , $+0^{\text{h}}2$, $+0^{\text{h}}4$ verschiedenen Punkten der Schraubentrommel anfang (§ 10 am Ende [p. 145]). Solcher Messungsreihen habe ich zwei gemacht.

[Folgt die ausf\dd{u}hrliche Mittheilung derselben.]

Die als Resultat dieser Messungen gefundene Zahl von Schraubenwindungen [82,5212] ist von der W\dd{a}rme unabh\dd{a}ngig, indem die Striche auf Stahl gezogen sind und auch die Schraube von Stahl gemacht ist, so dass angenommen werden kann, dass beide gleiche Ver\dd{a}nderungen durch die W\dd{a}rme erfahren. In derjenigen W\dd{a}rme, in welcher die Entfernung der Striche = 24,00006 ist, d. h. in der Normalw\dd{a}rme der Toise = $16,25^\circ \text{C}$, sind also 82,5212 ausgeglichene Windungen der Mikrometerschraube II eben so lang, oder eine solche Windung ist

$$= \frac{24,00006}{82,5212}$$

31.

Der Werth von R — der Winkelwerth einer Schraubenwindung in der W\dd{a}rme von 50°F . — kann jetzt, aus der Verbindung der Resultate der beiden letzten Paragraphen und seiner schon bekannten Ver\dd{a}nderung durch die W\dd{a}rme, abgeleitet werden. — In der W\dd{a}rme von $12,8^\circ \text{C}$, in welcher die Brennweite des Objectivs = 1134,134 gemessen worden ist, ist die L\dd{a}nge von 82,5212 Windungen der Schraube

$$= 24,00006 \cdot \frac{1 + 12,8 \cdot 0,00001013}{1 + 16,25 \cdot 0,00001013} = 23,99922;$$

in derselben W\dd{a}rme (= $55,04^\circ \text{F}$) ist daher der Werth von R

$$= \frac{23,99922 \cdot 206264,8}{82,5212 \cdot 1134,134} = 52,89228$$

und in der W\dd{a}rme von 50°F . ist er $0,00101$ gr\dd{o}sser (§. 24), also

$$R = 52,89329$$

Ich werde die Resultate der jetzt vollst\dd{a}ndig mitgetheilten Versuche, den Werth von R zu bestimmen, zusammenzustellen:

1. Beobachtungen eines Fadens im Brenn-

- punkte, durch das Objectiv hindurch . . . $52',90299$ m. F. = $\pm 0',00275$
2. Vergleichung der Messungen v. 10 Entfernungen in den Plejaden mit ihrer Bestimmung durch Meridianbeobachtungen $52,88127 \dots \dots \dots 0,00880$
 3. Vergleichung d. Messungen von 5 Entfernungen mit der Bestimmung ihrer Summe durch Meridianbeobachtungen . . . $52,89036 \dots \dots \dots 0,00314$
 4. Messungen d. Brennweite und der Länge einer Schraubenwindung $52,89329$

Unter den Unterschieden der drei ersten Bestimmungen von der letzten, nämlich

$$+ 0',00970; - 0',01212; - 0',00293$$

überschreitet nur der zweite den 5000^{ten} Theil des Ganzen, die beiden übrigen erreichen diese Grösse nicht. Ich glaube, dass man eine noch weiter gehende Uebereinstimmung nicht erwarten darf. Der Unterschied der zweiten, am meisten abweichenden Bestimmung ändert die grösseren Entfernungen, worauf sie beruht, kaum eine halbe Secunde, während die am Ende des 26. § mitgetheilte Vergleichung der aus den Meridianbeobachtungen gefolgerten Entfernungen von 10 Sternen der Plejaden mit ihren Heliometermessungen zeigen, dass jene keinesweges bis auf eine so kleine Grösse sicher sind. Der auf das Gaussische Verfahren gegründeten ersten Bestimmung könnte die Kleinheit ihres mittleren Fehlers Zutrauen erwerben; allein diese Kleinheit deutet nur die gute Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen, angewandten Beobachtungen an, die Richtigkeit des aus ihnen gezogenen Resultats aber nur unter der Bedingung, dass die Beobachtungen damit in Verbindung setzende Theorie vollständig ist. Die hier in Betracht kommende ist, wie ich schon § 25 bemerkt habe, von einer Voraussetzung nicht frei, deren völlige Rechtmässigkeit auch dadurch zweifelhaft wird, dass die Strahlen, welche das Objectiv des Theodoliten von dem Faden im Brennpunkte des Heliometerobjectivs empfängt, durch einen excessiven Theil des letzteren gehen. Man hätte sie vermuthlich, durch weitere Verfolgung durch Rechnung, entweder vervollkommen, oder als zureichend erkennen können; ich habe dieses

aber nicht versucht, weil die übrigen Bestimmungen, und namentlich die letztere, mir grösseres Zutrauen einflössen, als Messungen — wenn auch gut untereinander übereinstimmende — mit einem so kleinen Instrumente wie der angewandte Theodolit ist. — Gegen die Richtigkeit der Schätzung des Werthes der dritten Bestimmung durch ihren mittleren Fehler, ist meiner Meinung nach nichts einzuwenden; auch stimmt sie, bis auf die unerhebliche Kleinigkeit von einem 18000^{ten} ihrer Grösse, mit der vierten überein. — Dieser allein glaube ich folgen zu müssen. Ich würde in der That die drei früheren Bestimmungen nicht gemacht haben, wenn sich die § 28—29 mitgetheilte Methode die Brennweite des Objectivs befriedigend zu bestimmen, nicht erst später dargeboten hätte; ich suchte und fand sie erst, als sich zeigte, dass der Aufwand vieler Zeit und einer Menge, sowohl mit dem Meridiankreise als mit dem Heliometer gemachter Beobachtungen der Sterne der Plejaden, nicht hingereicht hatte, den mittleren Fehler der darauf gegründeten Bestimmung von R so klein zu machen, als ich ihn wünschte.

Ich nehme also den Winkelwerth einer ausgeglichenen Windung der Schraube II, in der Wärme von 50° F., an:

$$R = 52',89329;$$

in einer anderen Wärme = t Fahr. (§ 24)

$$R' = \frac{52',89329}{1 + (t - 50) 0,0000937765}$$

und die aus einer vollständigen Beobachtung zweier Punkte hervorgehende Entfernung derselben

$$s = \frac{\left(\frac{m' - m''}{2} + \psi \left(\frac{m' - m''}{2}\right)\right) 52',89329}{1 + (t - 50) 0,0000937765}$$

wo m' und m'' die schon wegen der periodischen Ausgleichen (§ 10) verbesserten beiden Angaben der Scale und Trommel der Schraube und $\psi \left(\frac{m' - m''}{2}\right)$ die Zahl der Tafel § 20 bedeuten.

Zur Erleichterung der Berechnung der Entfernung aus den unmittelbaren Angaben der Schraube dienen die angehängten Tafeln I, II, III. Die periodische Ausgleiche jeder Angabe der Schraubentrommel nach der Formel (§ 10):

$$+ 0',001999 \cos u - 0',002071 \sin u - 0',000387 \cos 2u + 0',00196 \sin 2u$$

berechnet, findet man in Taf. I. In Taf. II ist

$$A = \log \left\{ \frac{m' - m''}{2} + \psi \left(\frac{m' - m''}{2} \right) \right\} - \log \frac{m' - m''}{2} + \log 52',89329$$

enthalten; in Taf. III.

$$B = -\log[1 + (r - 50)0,0000037765]$$

Man hat also

$$\log s = \log\left(\frac{m' - m''}{2}\right) + A + B.$$

[Es folgen noch die Tafeln zur Reduction der Messungen am Königsberger Heliometer, der Instanzen; Taf. I—III, der Positionswinkel; Taf. IV, VII, VIII; die Indexfehler des Positionskreises 1829 Nov. 26 bis 1840 Decbr. 27 (Taf. V); die Bedingungen der Aufstellung des Instruments in derselben Zeit (Taf. VI).]

72. Ueber die Theorie des Steinheil'schen Prismenkreises.*)

(Astr. Nachr. 11, p. 229.)

Der Prismenkreis, dessen Erfindung wir Herrn DR. VON STEINHEIL verdanken, ist von Herrn Etatsrath SCHUMACHER (Astr. Nachr. Nr. 247) so günstig beurtheilt worden, dass die allgemeine Aufmerksamkeit auf ihn gerichtet sein muss. Wirklich war von dem Talente des Erfinders für mechanische Einrichtungen nur etwas Sinreiches zu erwarten, während seine Kenntniss der Astronomie die Bürgschaft für die Anwendbarkeit leistete. Ich habe weder die Absicht ein vollgültiges Urtheil zu verstärken, noch eine durch diesen Erfolg schon gerechtfertigte Erwartung geltend zu machen; allein da beide dem Instrumente Eingang verheissen, so glaube ich einigen Lesern der Astr. Nachr. eine Mühe zu ersparen, wenn ich die theoretische Betrachtung des Instruments, welche ich vorgenommen habe um dasselbe selbst genauer kennen zu lernen, hier mittheile. Ich werde zuerst das Instrument unberichtigt annehmen und den Einfluss der Fehler auf die Messungen untersuchen; dann werde ich die Mittel zur Berichtigung, welche zum Theil auf dem Vorigen beruhen, aufsuchen.

1.

Ich werde die Glaskörper, durch welche die Strahlen gebrochen und reflectirt werden, zwar als Prismen, jedoch nicht als gleichschenklige ansehen; die Axen derselben als nicht parallel mit der Axe des Instruments; die Absehnslinie des Fernrohrs als nicht senkrecht auf diese Axe. Die aufzulösende Aufgabe ist dann: „Die „Erfindung des Winkels zweier Strahlen, welche sich durch ihren Durchgang durch die Prismen, bei irgend einer „Stellung derselben, in der Absehnslinie des Fernrohrs „vereinigen.“ — Ich werde sie in zwei Theile theilen, indem ich zuerst eins der Prismen allein betrachte.

Um die Richtungen der verschiedenen hier in Betracht kommenden Linien anschaulich darstellen zu

können, werde ich den Mittelpunkt des Instruments mit einer Kugel von willkürlichem Halbmesser umgeben annehmen, und eine Richtung durch den Punkt der Kugel, durch welchen der Richtung parallele Radius geht, bezeichnen. Die Richtung der Absehnslinie des Fernrohrs, jedoch umgekehrt, vom Objective nach dem Fadennetz genommen, werde ich auf der Kugel durch f bezeichnen; die ursprüngliche Richtung des Strahls, welcher nach seinem Durchgange durch das Prisma in die Absehnslinie gelangt, gleichfalls umgekehrt genommen, durch f' ; die Richtungen der Perpendikel auf die drei Ebenen des Prismas durch p, P, p' . Der Punkt p gehört zu der dem Fernrohre zugewandten brechenden Ebene, p' zu der dem Objecte zugewandten, P zu der spiegelnden; p und p' liegen auf den Seiten der Luft, P liegt auf der Seite des Glases.

Die Bedingungen, welchen der Strahl (den man willkürlich entweder von dem Fernrohre nach dem Objecte oder von dem Objecte nach dem Fernrohre gehend annehmen kann) bei seinem Durchgange durch das Prisma folgt, lassen sich durch die Punkte der Kugel f, p, P, p', f' , und durch zwei neue Punkte q und q' , welche die Richtung darstellen, die er im Innern des Prismas erhält, leicht angeben. Nach dem Gesetze der Brechungen ist nämlich notwendig:

- I. dass f, p, q in einem grössten Kreise liegen und dass

$$\sin pq = k \sin fp$$

ist, wo k das Brechungsverhältniss für den Uebergang eines Strahls von Luft in Glas bedeutet;

- II. dass f', p', q' in einem grössten Kreise liegen und dass

$$\sin p'q' = k \sin f'p'$$

ist. Das Gesetz der Spiegelung fordert ferner

- III. dass q, P, q' in einem grössten Kreise liegen und dass $qP = Pq'$ ist.

Diese Bedingungen enthalten die Relation zwischen

* [273 d. a. Verz.]

den Richtungen des Strahls vor seinem Eintritte in das Prisma und nach dem Austritte aus demselben; es ist aber noch nöthig, sie auf den festen grössten Kreis der Kugel zu beziehen, der den Eintheilungen Kreis des Instruments darstellt. Die Richtung der Drehungsaxe des Instruments bestimmt die Pole dieses grössten Kreises, deren auf der Seite der Eintheilungen liegenden ich durch a , sowie den grössten Kreis selbst durch A bezeichnen werde. Die Entfernungen der Punkte f und f' von a werde ich durch $af = 90^\circ - \beta$, $af' = 90^\circ - \beta'$ bezeichnen; die Winkel um a , von einem willkürlichen Anfangspunkte O an gezählt, durch $Oaf = \alpha$, $Oaf' = \alpha'$. Ausser diesem grössten Kreise A werde ich noch einen zweiten (B) in die Betrachtung ziehen, den auf die Axe des Prismas senkrechten, durch die Punkte p , P , p' gehenden, dessen Pole durch die Richtung der Axe des Prismas gegeben werden. Denjenigen dieser Pole, welcher sich auf derselben Seite von A befindet, auf welcher a liegt, werde ich durch b bezeichnen; die Entfernungen bf und bf' durch $90^\circ - b$ und $90^\circ - b'$; die Winkel abf und abf' durch α und α' . Auf den grössten Kreis B bezogen werden die Oerter der Punkte p , P , p' durch $abp = P - m$, $abP = P$, $abp' = P + m'$ bezeichnet werden, sodass m und m' die Winkel der brechenden Ebenen des Prismas mit der spiegelnden bedeuten.

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man durch das sphärische Dreieck fbp :

$$\begin{aligned} \sin fp \sin bpf &= \cos b \sin (P - m - \alpha) \\ \sin fp \cos bpf &= \sin b. \end{aligned}$$

Indem f , p , q in einem grössten Kreise liegen, ist $bpf + bpq = 180^\circ$, und man erlangt dadurch für das Dreieck pbq die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin pq \sin bpf &= \sin bq \sin pbq \\ \sin pq \cos bpf &= -\cos bq. \end{aligned}$$

Multiplirt man die ersten beiden Gleichungen mit k , so wird der links von Gleichheitszeichen stehende Theil derselben, der obigen ersten Bedingung zufolge, dem äh-

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \cos (\alpha - n) &= -\sin \beta' \cos \alpha' - \cos \beta' \sin \alpha' \cos (\alpha' - n) \\ \frac{1}{k} \sin (m - \alpha) &= \sin (P - m) [\sin \beta \sin \alpha - \cos \beta \cos \alpha \cos (\alpha - n)] + \cos (P - m) \cos \beta \sin (\alpha - n) \\ \frac{1}{k'} \sin (m' - \alpha) &= -\sin (P + m') [\sin \beta' \sin \alpha - \cos \beta' \cos \alpha \cos (\alpha' - n)] - \cos (P + m') \cos \beta' \sin (\alpha' - n) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

2.

Diejenige Anwendung dieser Gleichungen, von welcher hier die Rede ist, setzt voraus, dass β , β' , i kleine Grössen sind, oder dass das Instrument näherungsweise

lichen Theile der letzten beiden Gleichungen gleich und man erhält als Resultat der beiden Bedingungen (I.):

$$\begin{aligned} \sin bq \sin pbq &= k \cos b \sin (P - m - \alpha) \\ \cos bq &= -k \sin b. \end{aligned}$$

Ebenso ergeben die beiden Bedingungen (II.):

$$\begin{aligned} \sin bq' \sin q'bp' &= k \cos b' \sin (\alpha' - P - m') \\ \cos bq' &= -k \sin b'. \end{aligned}$$

Endlich erfordern die beiden Bedingungen (III), dass $bq + bq' = 180^\circ$ ist, und dass $qbP = m - pbq$ und $Pbq' = m' - q'bp'$ einander gleich sind. Schreibt man u für $qbP = Pbq'$, so erhält man also aus allen drei Bedingungen zusammengenommen:

$$\cos bq = -\cos bq' = -k \sin b = k \sin b'$$

oder

$$b' = -b$$

und ferner:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b'} \sin (m - u) &= k \cos b \sin (P - m - \alpha) \\ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b'} \sin (m' - u) &= k \cos b' \sin (\alpha' - P - m') \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Die Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen gibt die Relation der beiden Richtungen f und f' zu einander; allein um diese auf den festen grössten Kreis A zu beziehen, ist noch nöthig, dass α , α' und b durch α , β ; α' , β' ausgedrückt werden. Dieses erhält man durch die Dreiecke abf und abf' , welche, wenn man ab durch i , Oab durch n bezeichnet:

$$\begin{aligned} \cos b \cos \alpha &= \sin \beta \sin i - \cos \beta \cos i \cos (\alpha - n) \\ \cos b \sin \alpha &= -\cos \beta \sin (\alpha - n) \\ \sin b &= \sin \beta \cos i + \cos \beta \sin i \cos (\alpha - n) \\ \cos b \cos \alpha' &= \sin \beta' \sin i - \cos \beta' \cos i \cos (\alpha' - n) \\ \cos b \sin \alpha' &= -\cos \beta' \sin (\alpha' - n) \\ \sin b &= -\sin \beta' \cos i - \cos \beta' \sin i \cos (\alpha' - n) \end{aligned}$$

ergeben. Wenn man dieses in (1) setzt, dabei aber abgekürzt $\frac{k}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 b}}$ durch k' bezeichnet, so erhält man die Relation zwischen den Richtungen f und f' in der gewünschten Form:

berichtigt ist. Vernachlässigt man die dritte Ordnung dieser Grössen, so verwandeln die eben gefundenen Gleichungen sich in:

$$\beta + \beta' = -2i \cos\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - n\right) \cos\frac{\alpha - \alpha'}{2}$$

$$\frac{1}{k} \sin(m - n) = -\sin(P - m + n - \alpha) + \frac{1}{2} ii \sin(P - m) \cos(\alpha - n) + \frac{1}{2} \beta \beta' \sin(P - m + n - \alpha) + i \beta \sin(P - m)$$

$$\frac{1}{k} \sin(m' - n) = \sin(P' + m' + n - \alpha') + \frac{1}{2} ii \sin(P + m') \cos(\alpha' - n) - \frac{1}{2} \beta' \beta' \sin(P' + m' + n - \alpha') - i \beta' \sin(P + m')$$

Zieht man die zweite Gleichung von der dritten ab, und vernachlässigt man auch $(m' - m)^2$ und $k' - k$, so erhält man dadurch:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} (m' - m) \cos\left(\frac{m' + m}{2} - n\right) &= \sin(P - m + n - \alpha) + \sin(P + m' + n - \alpha') \\ &\quad - \frac{1}{2} ii [\sin(P - m) \cos(\alpha - n) + \sin(P + m') \cos(\alpha' - n)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta \beta' \sin(P - m + n - \alpha) - \frac{1}{2} \beta' \beta' \sin(P + m' + n - \alpha') \\ &\quad - i \beta \sin(P - m) - i \beta' \sin(P + m) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

eine Gleichung, welche, wenn sie in den Quadraten der in ihr vorkommenden kleinen Grössen richtig sein soll, n bis zu der ersten Ordnung dieser Grössen incl.

bekannt voraussetzt. Diese Annäherung an den Werth von u erlangt man durch die Summe der beiden ersten Glieder der Gleichungen, welche

$$2 \sin\left(\frac{m' + m}{2} - n\right) = k [\sin(P + m' + n - \alpha') - \sin(P - m + n - \alpha)]$$

ergibt.

Aus der vorher entwickelten Gleichung geht hervor, dass $\sin(P - m + n - \alpha)$ und $-\sin(P + m' + n - \alpha')$ bis auf eine kleine Grösse von der Ordnung $(m' - m)$, ii , $\beta \beta$, $i \beta$ einander gleich sind; die Summe der ihnen zugehörigen Winkel

$$2(P + n) + m' - m - (\alpha + \alpha')$$

ist also bis auf eine Grösse dieser Ordnung entweder 0 oder 360° ; hieraus entstehen zwei Fälle, deren Bedeutung vor der weiteren Verfolgung der Rechnung aufgesucht werden muss.

Die Entfernung des Punktes P (welcher durch den brechenden Winkel des Prismas verinnlicht wird) von dem Anfangspunkte O der Winkel, in demselben Sinne genommen in welchem die Winkel fortschreiten, ist bis auf eine Grösse von der Ordnung ii

$$= Oab + abP = P + n - 180^\circ;$$

andererseits ist dieselbe Entfernung entweder $= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ oder $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') - 180^\circ$, und das erste findet statt, wenn der brechende Winkel des Prismas zwischen α und α' , das andere wenn er zwischen α' und α liegt, den Uebergang von dem ersteren zu dem letzteren beidemale in der Richtung, in welcher die Winkel fortschreiten, und wenn das folgende α kleiner ist als das vorhergehende, jenes über den Anfangspunkt der Winkel hinaus gezählt angenommen. Liegt also der brechende Winkel des Prismas zwischen α und α' , so ist, bis auf die oben näher angegebenen kleinen Grössen

$$\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = P + n - 180^\circ;$$

liegt er zwischen α' und α , so ist $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = P + n$.

Beide Fälle können bei der Anwendung des Instruments vorkommen, wie daraus hervorgeht, dass

man die Absehslinie des Fernrohrs und die Richtung, in welcher sich der in derselben erscheinende Punkt wirklich befindet, miteinander verwechseln kann. In dem die Eintheilung des Instruments, auf welcher die Winkel α und α' gezählt werden, von der Linken zur Rechten fortschreitet, setzt der erste Fall voraus, dass die spiegelnde Ebene des Prismas, durch welches der Durchgang eines Strahls betrachtet werden soll, sich auf der rechten Seite des vor dem Fernrohre angenommenen Beobachters befindet; der zweite Fall das Entgegengesetzte. Wenn das Prisma das auf dem Kreise des Instruments feste ist, und wenn dieser Kreis so gedreht wird, dass der Anfangspunkt der Theilungen auf seinem äusseren Rande sich in der Nähe des Fernrohrs befindet, so ist der erste Fall vorhanden; wenn er dagegen so gedreht ist, dass der 180ste Grad der Theilungen in die Nähe des Fernrohrs gelangt, so ist der zweite Fall eingetreten. Allein der Gebrauch des Instruments findet nur innerhalb gewisser Grenzen von α statt, welche ich, ehe ich weiter gehe, näher angeben werde.

Wenn man das Prisma als ein gleichschenkliges Dreieck und die Axe desselben als mit der Axe des Instruments zusammenfallend ansieht, fernern den Anfangspunkt der Winkel so annimmt, dass der brechende Winkel des Prismas einen Quadranten auf ihn folgt, endlich den Kreis, auf dem das Prisma fest ist, so dreht, dass der nach dem Anfangspunkte der Winkel gehende Radius der Absehslinie des Fernrohrs parallel wird, so ist diese Absehslinie offenbar der spiegelnden Ebene des Prismas parallel und ein in der Absehslinie erscheinender Gegenstand befindet sich

zugleich wirklich in derselben. Diese Lage des Kreises kann man durch Drehung nach beiden Seiten verändern. Allein eine Drehung, durch welche auf der negativen Seite des Anfangspunktes liegende Punkte der Theilung der Absehnlinie entsprechend werden, bringt, wenn sie eine gewisse Grösse erlangt, den Winkel des Prisma zwischen der dem Fernrohr zugewandten brechenden und der spiegelnden Ebene vor das Objectivglas des Fernrohrs und erzeugt dann einen Lichtverlust, welcher anfängt, sobald ein Theil des Objectivglases verdeckt ist und daher der Drehung des Kreises nach dieser Seite eine, jedoch nicht genau anzugebende, Grenze setzt; mehrere Grade auf der negativen Seite des Anfangspunktes der Winkel sind aber noch frei vom Lichtverlust. Eine Drehung nach der entgegengesetzten Seite erlangt dagegen ihre Grenze da, wo das Prisma aufhört Strahlen zu reflectiren, also bei einem Winkel, welcher von dem Brechungsverhältnisse des Glases, woraus das Prisma gemacht ist, abhängt; bei einem in dieser Beziehung untersuchten Exemplare des Instruments fällt diese Grenze etwa auf $\alpha = 50^\circ$. In dem ersten Falle liegt also die eine Grenze einige Grade jenseits des Anfangspunktes der Winkel, die andere bei $\alpha = 50^\circ$; in dem zweiten Falle, welcher aus der Verwechslung des in das Prisma einfallenden Strahls mit dem ausgehenden und umgekehrt entsteht, sind die Grenzen $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ und $180^\circ +$ einige Grade.

3.

Es ist indessen nur nöthig, einen der Fälle durch die Rechnung zu verfolgen, indem der andere dadurch aus ihm entsteht, dass die Richtung der Absehnlinie und die Richtung des Objectes mit einander vertauscht werden. Ich werde den ersten vornehmen, in welchem

$$2(P+n) + (m'-m) - (\alpha' + \alpha) = 360^\circ$$

ein kleiner Winkel ist.

Die Gleichung zwischen β und β' verwandelt sich, wenn man

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} - n = P - 180^\circ$$

setzt, in

$$\beta' + \beta = 2i \cos P \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}.$$

Der Fehler dieser Formel ist von der Ordnung $i(m'-m)$, $(m'-m) \varphi \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right) = 360^\circ - 2(P+n) - (m'-m) +$

Diese Gleichung erhält einen einfacheren Ausdruck, wenn man die darin vorkommenden Winkel α und α' von demjenigen Punkte der Eintheilung des äusseren Randes des Instruments an rechnet, welcher dem Index dieser Eintheilung entspricht, indem das Bild eines

also, wenn $m' - m$ als eine Grösse der ersten Ordnung betrachtet wird, von der zweiten. Dieser Fehler erlangt jedoch auf die Gleichung zwischen α und α' nur einen Einfluss der dritten Ordnung, weshalb es, in Beziehung auf diese Gleichung, erlaubt ist ihn zu begehren; für β' selbst hat die schärfere Angabe so viel ich sehe kein Interesse; auch ist $m' - m$, wenn das Prisma so sorgfältig gearbeitet ist, wie bei den mit der Aufschrift „STEINHEIL und ERTEL“ versehenen Instrumenten, so klein, dass die vernachlässigte Grösse unmerklich wird. Ich werde es daher bei der angegebenen Gleichung zwischen β und β' bewenden lassen.

Wenn man dieser Gleichung zufolge

$$\begin{aligned} \frac{\beta' - \beta}{2} + i \cos P \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} &\text{ für } \beta \\ - \frac{\beta' - \beta}{2} + i \cos P \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} &\text{ für } \beta \end{aligned}$$

schreibt, so reducirt man die Glieder der zweiten Ordnung der Gleichung (3) leicht auf

$$i \cos P \cos \left\{ \frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right\} \left\{ i \sin P + (\beta' - \beta) \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} \right\},$$

wo μ zur Abkürzung für $\frac{1}{2}(m' + m)$ geschrieben ist. Die Summe der beiden Sinus, welche in derselben Gleichung unmittelbar auf das Gleichheitszeichen folgen, ist

$$= 2 \sin \left(P + n + \frac{m' - m}{2} - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right)$$

und zur Erklärung von $\mu - n$ hat man

$$\sin(\mu - n) = k \cos \left(P + n + \frac{m' - m}{2} - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right) \sin \left(\mu - \frac{\alpha' - \alpha}{2} \right)$$

also, da der Cosinus $= -1$ gesetzt werden kann,

$$\sin(\mu - n) = k \sin \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right).$$

Führt man nun eine abgekürzte Bezeichnung ein, nämlich

$$\varphi x \text{ für } \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x'}{\cos x},$$

wobei x' aus der Gleichung x

$$\sin x' = k \sin x$$

hervorgegangen ist und stets in demselben Quadranten genommen wird, in welchem x liegt, so erhält man aus der Gleichung (3):

$$\alpha' + \alpha - ii \sin P \cos P - i(\beta' - \beta) \cos P \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}. \quad (4)$$

in der Absehnlinie des Fernrohrs befindlichen Gegenstandes auch durch das Prisma in dieselbe gebracht wird. Man hat nämlich für diesen Fall $\alpha = 0$, und indem der Gegenstand selbst sich in der Absehnlinie befindet, $\alpha' = 180^\circ$, wodurch man erhält:

$$\beta' + \beta = 0 \\ (m' - m) \varphi (90^\circ - \mu) = 360^\circ - 2(P + n) - (m' - m) + 180^\circ \\ - ii \sin P \cos P + 2i\beta \cos P.$$

Zieht man diese letzte Gleichung von (4) ab, so erlangt man:

$$\alpha' + \alpha = 180^\circ + (m' - m) \left\{ \varphi \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right) - \varphi (90^\circ - \mu) \right\} \\ + 2i\beta \cos P + i(\beta' - \beta) \cos P \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}; \\ \alpha' + \alpha = 180^\circ + (m' - m) \{ \varphi (90^\circ - \alpha - \mu) - \varphi (90^\circ - \mu) \} + 2i\beta \cos P (1 - \cos \alpha) + ii \cos P^2 \sin 2\alpha \} \dots (5) \\ \beta' + \beta = 2i \cos P \sin \alpha$$

Die Gleichungen für den zweiten Fall erhält man aus den eben gegebenen, wenn man α , β und α' , β' miteinander verwechselt; allein indem die Winkel nun von der Richtung, welche vorher dem Objecte zugehörte, nach der vorher der Absehnlinie zugehörigen in demselben Sinne fortgezählt werden, in welchem

$$\alpha' + \alpha = 540^\circ + (m' - m) \{ \varphi (-90^\circ + \alpha - \mu) - \varphi (90^\circ - \mu) \} + 2i\beta \cos P (1 + \cos \alpha) + ii \cos P^2 \sin 2\alpha \} \dots (5^*) \\ \beta' + \beta = -2i \cos P \sin \alpha$$

Die hier vorausgesetzte Bestimmung des Anfangspunktes der Winkel verlangt, dass man einen Gegenstand zugleich direct und durch das erste Prisma in die Absehnlinie des Fernrohrs bringe; der Punkt der Theilung auf dem äusseren Rande des Instruments, welchen der Index anzeigt, indem dieses stattfindet, ist der gesuchte Anfangspunkt. Man findet ihn leicht, wenn man das auf der Alhidade feste Prisma abnimmt, um über das auf dem Kreise feste mit dem halben Objective hinwegsehen zu können, während die andere Hälfte des Objectivs das ihr durch das Prisma zugehende Bild zeigt. Allein da man auch den Träger des Fernrohrs so weit in die Höhe schieben kann, dass man über beide Prismen hinwegsehen, so kann man auch dadurch zu demselben Ziele gelangen; wenn man dieses will, so ist nöthig, das Instrument fest aufzulegen, damit die Richtung des Fernrohrs sich nicht verändere, während man es wieder herunterschiebt, um den vorher in die Absehnlinie gebrachten Gegenstand auch durch das Prisma sehen und durch Drehung des Kreises gleichfalls in dieselbe bringen zu können. Der die Winkel angegebende Index des äusseren eingetheilten Randes kann, durch vorhandene Berichtigungsschrauben, so gestellt werden, dass er dem Anfangspunkte der Eintheilungen unmittelbar, d. h. ohne Zurechnung eines Indexfehlers, entspricht. Uebrigens ist bei der Kleinheit der von α abhängigen Glieder eine beiläufige Bestimmung des Anfangspunktes hinreichend.

4.

So wie die Gleichungen (5) und (5*) den Durchgang eines Strahls durch das auf dem Kreise des In-

verbindet man dieses mit

$$\beta' + \beta = 2i \cos P \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}$$

und setzt man in den kleinen Gliedern der Gleichung $180^\circ - \alpha$ für α' , so findet man die vollständig entwickelten Gleichungen für den ersten Fall:

vorher von der letzteren nach der ersteren gezählt wurde, ist jene um 360° grösser anzunehmen als vorher. Man hat also, um die Gleichung für den ersten Fall auf den zweiten zu übertragen, α für α' und $\alpha' - 360^\circ$ für α zu schreiben. Hierdurch erhält man für den zweiten Fall:

struments feste Prisma bestimmen, leisten ähnliche Gleichungen dasselbe für das auf dem Alhidadenkreise befestigte und mit demselben bewegliche. Ausser den Unterschieden, welche durch die von der vorigen verschieden anzunehmende Construction des Prismas und durch anders zu bezeichnende Werthe von P , n , i entstehen, sind die für das zweite Prisma geltenden Gleichungen nur dadurch von den vorigen verschieden, dass die Winkel α und α' , welche sich jetzt auf einen auf dem Alhidadenkreise willkürlich anzunehmenden Anfangspunkt beziehen, auf den vorigen Anfangspunkt reducirt werden müssen. Wenn man den Punkt der Eintheilung auf dem inneren Rande des Kreises, welchen der Index des Alhidadenkreises anzeigt, durch δ bezeichnet, der Anfangspunkt dieser Theilung aber mit dem Punkte h der Theilung auf dem äusseren Rande übereinstimmt, so ist der Ort des Index des Alhidadenkreises auf der letzteren Theilung $= h + \delta$; wenn daher der Index der letzteren α angibt, so ist seine der Ordnung der Theilungen nach gemessene Entfernung von dem Index des Alhidadenkreises $= \alpha - h - \delta$. Es müssen also die in der Gleichung (4) vorkommenden Winkel um $h + \delta$ vermindert werden, indem sie sich auf den Index des Alhidadenkreises beziehen sollen. Ich werde nun für α und β die vorige Bezeichnung beibehalten, für α' und β' aber α'' und β'' schreiben, wodurch diese neue Richtung diejenige wird, von welcher Strahlen durch das zweite Prisma gleichfalls in die Absehnlinie des Fernrohrs gebracht werden. Für dieses Prisma schreibe ich m' , P' , n' , i' statt der vorigen ähnlichen Zeichen.

Man hat also für das zweite Prisma, vorausgesetzt, dass es sich im ersten Falle befindet

$$\left. \begin{aligned} & \beta' + \beta = 2i \cos P \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} \\ & \text{und statt der Gleichung (4)} \\ & (m' - m) \varphi \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right) = 360^\circ - 2(P + n) - (m' - m) + \alpha' + \alpha - 2h - 2\delta \\ & - i, i \sin P \cos P, - i, (\beta' - \beta) \cos P \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, werde ich $P + n + h$ durch dasselbe Mittel, welches in gleicher Absicht im 3. Art. angewandt worden ist, fortschaffen. Ich nehme, nachdem der Kreis des Instruments so gestellt worden ist, dass $\alpha = 0$ ist, die Alhidade so gedreht an, dass beide Prismen die Bilder eines entfernten Gegenstandes in der Absehlinie des Fernrohres zur Deckung bringen, und werde den Punkt der Eintheilung, welchen der Index der Alhidade dann anzeigt, durch c bezeichnen. Diese Deckung der Bilder kann auf zwei

Arten hervorgebracht werden, dadurch nämlich, dass beide Prismen ihre brechenden Winkel nach einer Richtung oder nach entgegengesetzten Richtungen wenden; ich werde hier die letzte Art annehmen. Man hat also $\alpha = 0$ und $\alpha' = \alpha'$, und da dieses letztere $= 180^\circ$ ist, $\alpha' = 180^\circ$. Das Prisma der Alhidade befindet sich im zweiten Falle, weshalb man in der Gleichung (6), der Erklärung im 3. Art. zufolge, 0 für α' und $180^\circ - 360^\circ = -180^\circ$ für α zu schreiben hat und

$$(m' - m) \varphi (90^\circ - \mu) = 180^\circ - 2(P + n) - (m' - m) - 2h - 2c - i, i \sin P \cos P + 2i, \beta \cos P,$$

erhält. Zieht man diese Gleichung von (6) ab, so ergibt sich

$$\alpha' + \alpha = -180^\circ + 2(\delta - c) + (m' - m) \left\{ \varphi \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2} - \mu \right) - \varphi (90^\circ - \mu) \right\} + 2i, \beta \cos P + i, (\beta' - \beta) \cos P \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2};$$

verbindet man dieses mit

$$\beta' + \beta = 2i \cos P \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}$$

und setzt man in den kleinen Gliedern

$$\left. \begin{aligned} \alpha' + \alpha &= -180^\circ + 2(\delta - c) + (m' - m) \left\{ \varphi(-90^\circ - \alpha + d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \right\} \\ & \quad + 2i, \beta \cos P, [1 + \cos(\alpha - d)] + i, i \cos P^2 \sin 2(\alpha - d) \\ \beta' + \beta &= -2i \cos P \sin(\alpha - d). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Für den 2. Fall erhält man hieraus, indem man α für α' und $\alpha' - 360^\circ$ für α setzt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' + \alpha &= 180^\circ + 2(\delta - c) + (m' - m) \left\{ \varphi(90^\circ + \alpha - d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \right\} \\ & \quad + 2i, \beta \cos P, [1 - \cos(\alpha - d)] + i, i \cos P^2 \sin 2(\alpha - d) \\ \beta' + \beta &= 2i \cos P \sin(\alpha - d). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7^*)$$

5.

Aus den vier Gleichungen (5), (5*), (7), (7*) geht der Ausdruck des Winkels hervor, welchen beide durch $\alpha' \beta'$ und α, β bestimmte Richtungen einschliessen, desselben Winkels also, den man mit dem Instrument beobachtet. Bezeichnet man ihn durch D , so ist

$$\cos D = \sin \beta' \sin \beta + \cos \beta' \cos \beta \cos(\alpha' - \alpha')$$

woraus in Grössen der zweiten Ordnung richtig

$$D = \pm \left\{ \alpha' - \alpha + \frac{1}{2}(\beta' - \beta)^2 \cotg \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha') - \frac{1}{2}(\beta' + \beta)^2 \tg \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha') \right\}$$

folgt. Diese Formel werde ich in der Voraussetzung entwickeln, dass die brechenden Winkel beider Prismen gegen einander gewandt sind, oder dass, wenn das ein Prisma sich in dem einen Falle befindet, das andere in dem andern ist. Ist das Prisma auf dem Kreise in

dem Falle I, das auf der Alhidade in dem Falle II, so sind die Gleichungen (5) und (7*) anzuwenden. Ich werde jedoch das Resultat derselben dadurch abkürzen, dass ich schreibe:

$$\begin{aligned} \gamma & \text{ für } i \cos P; \quad \gamma, \text{ für } i, \cos P; \\ M & \text{ für } (m' - m) \left\{ \varphi(90^\circ - \alpha - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \right\} \\ & \quad - (m' - m) \left\{ \varphi(90^\circ + \alpha - d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \right\} \\ \xi & \text{ für } 2\beta \left\{ \gamma - \gamma \cos \alpha - \gamma + \gamma \cos(\alpha - d) \right\} \\ & \quad + \gamma \sin 2\alpha - \gamma, \gamma, \sin 2(\alpha - d) \\ \eta & \text{ für } \gamma \sin \alpha - \gamma, \sin(\alpha - d) \\ \zeta & \text{ für } \beta - \gamma \sin \alpha - \gamma, \sin(\alpha - d) \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man aus den angeführten beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 2(\delta - c) - M - \xi \\ \beta' - \beta &= -2\eta \\ \beta' + \beta &= -2\zeta \end{aligned}$$

wodurch

$$D = 2(\delta - c) - M - \xi + 2\eta\eta \cotg d - 2\xi\xi \operatorname{tg} d \dots (8)$$

wird.

Ist dagegen das Prisma auf dem Kreise in dem Falle II, das auf der Alhidade in dem Falle I, sodass die Gleichungen (5*) und (7) anzuwenden sind, so erhält man, indem man die Bezeichnungen

$$M' \text{ für } (m' - m) \{ \varphi(-90^\circ + \alpha - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ - (m' - m) \{ \varphi(-90^\circ - \alpha + d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ \xi' \text{ für } 2\beta\{\gamma + \gamma \cos \alpha - \gamma, -\gamma, \cos(\alpha - d)\} \\ + \gamma\gamma \sin 2\alpha - \gamma, \gamma, \sin 2(\alpha - d)$$

und η und ξ wie vorher anwendet

$$\alpha' - \alpha' = 720^\circ - 2(\delta - c) + M' + \xi' \\ \beta' - \beta' = -2\eta \\ \beta' + \beta' = -2\xi$$

wodurch

$$D = 720^\circ - 2(\delta - c) + M' + \xi' - 2\eta\eta \cotg d + 2\xi\xi \operatorname{tg} d. (8^*)$$

wird.

6.

Durch die beiden Formeln (8) und (8*) kann beurtheilt werden, inwiefern die verschiedenen Arten das Instrument anzuwenden, das Resultat von den angenommenen Unvollkommenheiten der Prismen und der Berichtigungen abhängig ergeben.

$$D = 2d - \left\{ \frac{(m' - m) - (m' - m)}{2} \right\} \{ \varphi(90^\circ - d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ + \beta(\gamma, -\gamma)(1 - \cos d) - \operatorname{tg} d \{ (\beta + \gamma, \sin d)^2 + (\beta - \gamma \sin d)^2 \} \dots (9)$$

Die andere Beobachtungsart setzt nur eine Messung voraus, welche gemacht wird, indem man den Kreis auf $\alpha = \frac{1}{2}d$ stellt. In diesem Falle ist:

$$M = \{ (m' - m) - (m' - m) \} \{ \varphi(90^\circ - \frac{1}{2}d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ \xi = -2\beta(\gamma, -\gamma)(1 - \cos \frac{1}{2}d) + (\gamma, \gamma) + \gamma\gamma \sin d'$$

$$D = 2d - \{ (m' - m) - (m' - m) \} \{ \varphi(90^\circ - \frac{1}{2}d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ + 2\beta(\gamma, -\gamma)(1 - \cos \frac{1}{2}d) - (\gamma, \gamma) + \gamma\gamma \sin d + (\gamma, \gamma)^2 \cos d \operatorname{tg} \frac{1}{2}d - 2\{\beta + (\gamma, -\gamma) \sin \frac{1}{2}d\}^2 \operatorname{tg} d \dots (10)$$

Diese beiden Formeln zeigen, inwiefern die Winkel, welche man nach der einen oder anderen dieser Beobachtungsarten misst, von angenommenen Unvollkommenheiten in der Construction der Prismen unabhängig sind. Sie sind davon frei, wenn $m' - m = m' - m$, ist. Um dieses zu bewirken, hat Herr von STEINHEIL beide Prismen in einem Stücke schleifen lassen und sie so auf das Instrument gesetzt, dass sie ähnlich liegen, wenn die brechenden Winkel beider nach derselben Richtung gewandt sind. Damit man indessen ohne Weiteres übersehen könne, wie grossen Einfluss auf den

Herr DR. VON STEINHEIL empfiehlt (Astr. Nachr. Nr. 247) zwei Beobachtungsarten, welche beide den Indexfehler c als bekannt voraussetzen. Ich nehme an, dass derselbe auf die Art gefunden ist, welche ich im 4. Artikel beschrieben habe, d. h. bei der Stellung des Kreises auf $\alpha = 0$.

Die eine Beobachtungsart gibt den zweiten Winkel durch das arithmetische Mittel aus zwei Messungen, deren eine angestellt wird wenn $\alpha = 0$ ist, die andere wenn es $= d$ ist. Für die erste dieser Messungen ist:

$$M = - (m' - m) \{ \varphi(90^\circ - d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ \xi = -2\beta\gamma(1 - \cos d) + \gamma, \gamma, \sin 2d \\ \eta = \gamma, \sin d \\ \xi = \beta + \gamma, \sin d;$$

für die andere:

$$M = (m' - m) \{ \varphi(90^\circ - d - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} \\ \xi = 2\beta\gamma(1 - \cos d) + \gamma\gamma \sin 2d \\ \eta = \gamma \sin d \\ \xi = \beta - \gamma \sin d.$$

Setzt man beides in die Formel (8) und nimmt man das arithmetische Mittel der beiden daraus hervorgehenden Ausdrücke, so ist dieses der Ausdruck des aus der hier untersuchten Beobachtungsart hervorgehenden Winkels, nämlich:

$$\eta = (\gamma, +\gamma) \sin \frac{1}{2}d \\ \xi = \beta + (\gamma, -\gamma) \sin \frac{1}{2}d$$

und der Ausdruck des beobachteten Winkels wird aus der Formel (8):

Winkel einer Ungleichheit der Prismen $x = (m' - m) - (m' - m)$, erhält, werde ich hier eine Tafel für die Werthe von

$x \{ \varphi(90^\circ - y - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \}$ mittheilen, welche unter den Annahmen $k = 0,665$, $\mu = 45^\circ$ berechnet worden ist.

$y = 0$	0,0000 x	$y = 30^\circ$	- 0,3432 x
5	- 0,1021 x	35	- 0,3601 x
10	- 0,1798 x	40	- 0,3698 x
15	- 0,2392 x	45	- 0,3730 x
20	- 0,2844 x	50	- 0,3698 x
25	- 0,3185 x		

Es geht aus dieser Tafel hervor, dass die erste Beobachtungsart das Resultat weniger von x abhängig ergibt, als die zweite; für $d = 45^\circ$ oder $D = 90^\circ$ z. B. ist der Einfluss von x auf den Winkel nach der ersten $= + 0,1865 x$, nach der zweiten $= + 0,3027 x$.

Herr Etatsrath SCHUMACHER zieht diesen beiden Beobachtungsarten eine dritte vor, welche die Bestimmung des Indexfehlers nicht voraussetzt. Nachdem nämlich eine Messung bei der Stellung des Kreises auf $\alpha = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}D$ gemacht ist, macht man noch eine zweite, indem man den Kreis auf $\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}D$ stellt, wodurch der Winkel auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes gemessen, also vom Indexfehler befreit wird. Die erste dieser Messungen ist bereits durch die Formel (10) untersucht worden; die andere

$$D = 720^\circ - 2\delta + 2c + \{(m' - m) - (m'_1 - m_1)\} \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ - 2\beta(\gamma - \gamma')(1 - \cos \frac{1}{2}D) - (\gamma, \gamma' + \gamma\gamma') \sin \frac{1}{2}D + (\gamma, \gamma')^2 \cos \frac{1}{2}D \operatorname{tg} \frac{1}{2}D - 2\{\beta - (\gamma - \gamma') \sin \frac{1}{2}D\}^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D.$$

Addirt man hierzu die Formel (10), nämlich:

$$D = 2\delta - 2c - \{(m' - m) - (m'_1 - m_1)\} \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ + 2\beta(\gamma - \gamma')(1 - \cos \frac{1}{2}D) - (\gamma, \gamma' + \gamma\gamma') \sin \frac{1}{2}D + (\gamma, \gamma')^2 \cos \frac{1}{2}D \operatorname{tg} \frac{1}{2}D - 2\{\beta - (\gamma - \gamma') \sin \frac{1}{2}D\}^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D$$

und halbt man die Summe, so erhält man nach einer leichten Zusammenziehung:

$$D = \delta + 360^\circ - \delta - \operatorname{tg} \frac{1}{2}D \{(\gamma, \gamma')^2 \sin \frac{1}{2}D^2 + (\gamma - \gamma')^2 \cos \frac{1}{2}D^2 + (\gamma - \gamma')^2 \sin \frac{1}{2}D \operatorname{tg} \frac{1}{2}D\} - 2\beta\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2}D \dots (11)$$

Diese dritte Beobachtungsart hat, wie der Ausdruck ihres Resultats zeigt, den wesentlichen Vorzug vor den beiden ersten, dass sie unabhängig von der Voraussetzung der Gleichheit beider Prismen zum Resultate führt. Will man den beiden ersten Beobachtungsarten denselben Vortheil aneignen, so muss man sie in beiden Lagen der Prismen, d. h. wenn α sowohl in der Nähe von 0 als von 180° ist (Art. 2), gleich oft anwenden und aus allen so erhaltenen Messungen eines Winkels das Mittel nehmen. Die dritte Beobachtungsart ist jedoch beträchtlich vortheilhafter, da sie auch dem Ablesungsfehler der Theilungen weniger Einfluss auf das Resultat verstatet und dieses von einer Unvollkommenheit der Bestimmung des Indexfehlers ganz befreit.

Dieselben Vortheile kann man auch erlangen, wenn man zwei Messungen mit einander verbindet, bei wel-

$$D = 720^\circ - 2\delta + 2c - (m' - m_1) \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} - 2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - 2(\beta - \gamma \sin \frac{1}{2}D)^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D$$

Die Summe beider Formeln gibt den Ausdruck:

$$D = \delta + 360^\circ - \delta - 2\gamma, \gamma \sin \frac{1}{2}D^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D - 2\beta\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2}D \dots \dots \dots (12)$$

Auch erlangt man dieselben Vortheile, wenn man zwei Messungen mit einander verbindet, bei welchen $\alpha = \frac{1}{2}D$ und $\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}D$ ist. Für die erste derselben

$$D = 2\delta - 2c - (m' - m) \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} - \beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - 2(\beta - \gamma \sin \frac{1}{2}D)^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D$$

erfordert, dass in (8*) $180^\circ - \frac{1}{2}D$ statt α gesetzt und für den Punkt der Theilung, welchen der Index der Alhidade nun zeigt, ein neues Zeichen (δ) eingeführt werde. Hierdurch wird, wenn man vorläufig keine Rücksicht auf die kleinen Glieder der Gleichung (8*) nimmt, $\delta - c = 360^\circ - \frac{1}{2}D$, welches also der in dieser Gleichung vorkommende Werth von d ist. Man erhält also für diese Anwendung derselben:

$$M' = \{(m' - m) - (m'_1 - m_1)\} \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ \xi' = -2\beta(\gamma - \gamma')(1 - \cos \frac{1}{2}D) - (\gamma, \gamma' + \gamma\gamma') \sin \frac{1}{2}D \\ \eta = -(\gamma, \gamma') \sin \frac{1}{2}D \\ \zeta = \beta - (\gamma - \gamma') \sin \frac{1}{2}D$$

und, indem man diese Ausdrücke in (8*) setzt:

$$D = 2\delta - 2c + \{(m' - m) - (m'_1 - m_1)\} \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ - 2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - (\gamma, \gamma' + \gamma\gamma') \sin \frac{1}{2}D + (\gamma, \gamma')^2 \cos \frac{1}{2}D \operatorname{tg} \frac{1}{2}D - 2\{\beta - (\gamma - \gamma') \sin \frac{1}{2}D\}^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D$$

chen $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^\circ$ ist. Für die erste derselben ist:

$$M = -(m' - m) \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ \xi = -2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) + \gamma, \gamma' \sin D \\ \eta = \gamma \sin \frac{1}{2}D \\ \zeta = \beta + \gamma \sin \frac{1}{2}D$$

und nach der Formel (8):

$$D = 2\delta - 2c + (m' - m) \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ + 2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - 2(\beta + \gamma \sin \frac{1}{2}D)^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D;$$

für die andere ist:

$$M' = -(m'_1 - m_1) \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} \\ \xi' = -2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - \gamma, \gamma' \sin D \\ \eta = -\gamma \sin \frac{1}{2}D \\ \zeta = \beta - \gamma \sin \frac{1}{2}D$$

und die Formel (8*) ergibt:

$$D = 720^\circ - 2\delta + 2c - (m' - m_1) \{\varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu)\} - 2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - 2(\beta - \gamma \sin \frac{1}{2}D)^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D$$

hat man die oben schon angeführten Ausdrücke für M, ξ, η, ζ , woraus nach (8):

hervorgeht. Für die andere ist

$$\begin{aligned} M' &= (m' - m) \{ \varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} & \eta &= -\gamma \sin \frac{1}{2}D \\ \xi' &= 2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - \gamma\gamma \sin D & \text{und} & \zeta = \beta + \gamma \sin \frac{1}{2}D \end{aligned}$$

$$D = 720^\circ - 2\delta, + 2c + (m' - m) \{ \varphi(90^\circ - \frac{1}{2}D - \mu) - \varphi(90^\circ - \mu) \} + 2\beta\gamma(1 - \cos \frac{1}{2}D) - 2(\beta + \gamma \sin \frac{1}{2}D)^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D$$

Die halbe Summe beider ergibt:

$$D = \delta + 360^\circ - \delta, - 2\gamma\gamma \sin \frac{1}{2}D^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}D - 2\beta\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2}D. \dots \dots \dots (13)$$

Ich bemerke noch, dass die drei letzten Beobachtungen nicht die einzigen sind, welche eine Ungleichheit beider Prismen gänzlich aus dem Resultate bringen; dieses geschieht allgemein, wenn man zwei Messungen

$$D = \delta + 360^\circ - \delta, - \gamma\gamma \sin 2\alpha + \gamma, \gamma, \sin(2\alpha - D) + 2 \left\{ \gamma \sin \alpha - \gamma, \sin(\alpha - \frac{1}{2}D) \right\}^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}D \dots \dots \dots (14)$$

Indessen ist die Voraussetzung $\alpha = \frac{1}{2}D$, welche bei der Schumacher'schen Beobachtungsart stattfindet, und deren Resultat die Formel (11) angibt, diejenige, welche der Anwendung des Instruments die grösste Ausdehnung, bis zu Winkeln von 200° gibt; die Voraussetzungen $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}D$, deren Resultate in den Formeln (12) und (13) angegeben sind, beschränken die Winkel auf 100° , gewähren dagegen aber die Bequemlichkeit, dass das Fernrohr nach einem der Punkte, zwischen welchen der Winkel gemessen werden soll, gerichtet wird, während es, bei anderen Voraussetzungen von α , anderen Punkten des durch beide gelegten grössten Kreises entspricht. Das erstere scheint die Anwendung des Instruments zur Messung der Entfernungen des Mondes von der Sonne oder Sternen, und überhaupt die Anwendungen zur See, zu erleichtern.

7.

Aus den Formeln (5) bis (7*) geht hervor, dass die Neigung der Prismen gegen die Ebene des Instruments ohne Einfluss auf die Messungen ist, wenn P und P' , entweder $= 90^\circ$ oder $= 270^\circ$ sind, oder wenn der die Pole a und b für das erste Prisma, sowie a und b , für das zweite verbindende grösste Kreis durch den jedem derselben zugehörigen Anfangspunkt der Winkel geht; dieses findet statt, wenn die spiegelnden Ebenen der Prismen der Axe des Instruments parallel sind. Es kommt also nicht sowohl darauf an, i und i , durch Berichtigung der Aufstellung des Prismas $= 0$ zu machen, als es erforderlich ist, die spiegelnden Ebenen der Prismen senkrecht auf die Ebene des Kreises des Instruments zu stellen. Wenn die Prismen gleichschenkelige Dreiecke sind, so ist diese alleinige Berichtigung der spiegelnden Ebenen nicht nur näherungsweise, sondern in aller Schärfe hinreichend. Denn setzt man in

mit einander verbindet, für deren erste der Index der Theilungen am äusseren Rande auf einen willkürlichen Punkt α , für die zweite dann aber auf $180^\circ - \alpha$ gestellt wird. Diese Verbindung gibt nämlich:

den Gleichungen (2) $m' = m$ und $P = 90^\circ$ oder 270° , so leisten ihnen $\beta + \beta = 0$ und $\alpha' + \alpha - 2\mu = 0$ Genüge, oder die Richtungen eines Strahls vor dem Eintritt und nach dem Austritt sind von i unabhängig. Die kleine Abhängigkeit dieser Richtungen von i , welche eintritt, wenn m und m' ungleich sind, ist also der Grund, welcher einer vollständigen Berichtigung der Prismen Interesse gibt.

Indessen sind leicht anwendbare Mittel vorhanden, alle drei Ebenen jedes Prismas zu berichtigen, oder die Axe desselben so zu stellen, dass sie der Drehungsaxe des Instruments parallel wird. Das mir am leichtesten erscheinende werde ich angeben.

Um zuerst das auf dem Kreise des Instruments feste Prisma zu berichtigen, schraubt man das zu der Alhidade gehörige ab und nimmt auch die bogenförmige Blendung hinter dem Kreisprisma weg, so dass Strahlen von allen Seiten freien Zugang erhalten. Dann befestigt man den Handgriff des Instruments in etwa senkrechter Lage, richtet das Fernrohr etwa 90° rechts oder links von einem deutlichen Gegenstande und bringt dessen von einer der brechenden Ebenen des Prismas unvollständig reflectirtes Bild an das Fadenkreuz des Fernrohrs; darauf dreht man den Kreis, bis das von der anderen brechenden Ebene reflectirte Bild in das Fernrohr gelangt. Erseht auch dieses Bild am Fadenkreuze, so haben beide brechende Ebenen eine gleiche Neigung gegen die Drehungsaxe; erseht es nicht am Fadenkreuze, so muss dieses durch eins der beiden sich vor den brechenden Ebenen befindenden Schraubenpaare hervorgebracht werden; sobald die gleiche Neigung dieser Ebenen gegen die Drehungsaxe erlangt ist, bringt man auch das von der spiegelnden Ebene des Prismas reflectirte Bild durch fortgesetzte Drehung des Kreises in das Fernrohr und bewirkt dessen

Erscheinen am Fadenkreuz durch die Berichtigungsschrauben hinter dieser Ebene. Indem man sowohl das unvollständig von der äusseren Seite der spiegelnden Ebene, als das vollständig von der inneren reflectirte Bild in das Fernrohr bringen kann, erlangt man den Vortheil, einen Fehler im Parallelismus dieser Ebene mit der Drehungsaxe in doppelter Grösse zu erkennen und dadurch desto schärfer wegschaffen zu können. Wenn das Prisma des Kreises auf diese Art vollständig berichtigt ist, setzt man das der Alhidade wieder auf und dreht die Alhidade so, dass die brechenden Winkel beider Prismen zusammenfallen. Obgleich die Blendungen des Prismas der Alhidade nicht weggenommen werden können, so ist doch auch seine vollständige Berichtigung möglich, indem ein zum Sehen des vorher benutzten Gegenstandes hinreichender Theil seines Lichtes neben der Blendung vorbei auf das Prisma und von diesem in das Fernrohr gelangt. Man wendet daher die Berichtigungsschrauben des Alhadenprismas an, um dadurch das Zusammenfallen der unvollständig reflectirten Bilder, sowohl von der einen brechenden Ebene beider Prismen als auch von der anderen zu erlangen, wodurch diese Ebenen selbst, und also auch die spiegelnde, zusammenfallen. Eine directe Prüfung dieses letzteren Zusammenfallens, worauf die Berichtigung, der oben gemachten Bemerkung zufolge, hauptsächlich beruht, erhält man, indem man auch die durch die vollständige Reflexion erzeugten Bilder in das Fernrohr gelangen lässt.

Dieses Verfahren empfiehlt sich durch die Leichtigkeit seiner Ausführung und durch die Schärfe der Berichtigung, welche es gewährt, sowie auch dadurch, dass es kein dem Instrumente selbst fremdes Hilfsmittel voraussetzt. Es kann mit gleichem Vortheile im Freien und im Zimmer, ja selbst auf dem Verdecke eines Schiffes ausgeführt werden.

Es ist nicht wahrscheinlich, dass das vor jeder Berührung geschützte untere Prisma, wenn es einmal berichtigt ist, Veränderungen seiner Stellung erfahren werde; das obere durch die Hilfe des unteren jederzeit vollständig zu berichtigen ist, wie ich gezeigt habe, leicht und kann durch irgend einen, etwa 90° von der Gesichtslinie entfernten Gegenstand am Himmel, wie auf der Erde, geschehen. Will man sich aber von der dauernden Berichtigung des unteren Prismas überzeugen, ohne das obere abzunehmen, so kann dieses dadurch geschehen, dass man untersucht, ob die Drehung des Kreises sowohl das von einer der brechenden Ebenen unvollständig, als auch das von der spiegelnden vollständig reflectirte Bild eines etwa 90° von der Gesicht-

linie entfernten Gegenstandes an das Fadenkreuz zu bringen vermag; diese Prüfung wird vollständig, wenn man sie an beiden brechenden Ebenen vornimmt, wozu erforderlich ist, dass die Gesichtslinie einmal rechts, das anderemale links von dem Gegenstande liege. Man könnte nicht nur die Prüfung der fortwährenden Berichtigung, sondern die Berichtigung selbst auf diese Art, ohne das Prisma der Alhidade zu entfernen, erhalten; allein man gelangt auf die vorher beschriebene Art leichter und schärfer zum Ziele.

Die Berichtigung der Absehsenlinie des Fernrohrs kann man genau so erhalten, wie man sie bekanntlich bei den Spiegelinstrumenten erhält. Da dieses Verfahren darauf beruht, dass der Einfluss einer Neigung β der Absehsenlinie auf einen Winkel D dem Quadrate von β proportional, nämlich der Formel des 6. Art. zufolge $= -2\beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} D$ ist, so gewährt es bei dem Prismenkreise, mit welchem man beliebig grosse Winkel messen kann, wegen der Grösse, die man der Tangente des halben Winkels geben kann, grössere Genauigkeit als bei den Spiegelinstrumenten. Nimmt man den Winkel $= 180^\circ$, so geht die der Ebene des Kreises parallele Linie im Fernrohre, in welcher allein man die Deckung der Bilder der Punkte hervorbringen kann (unter Voraussetzung der vorhergegangenen Berichtigung der Prismen) durch den Punkt, den das Fadenkreuz einnehmen soll. Will man diese Eigenschaft lieber zur Berichtigung der Absehsenlinie benutzen, als die gewöhnliche (jedoch völlig ausreichende) Methode, so gelangt man leicht zum Ziele, indem man ein mit einem Fadenkreuz versehenes Fernrohr nach einem entfernten Gegenstande richtet und das auf $\alpha = 45^\circ$, $d = 90^\circ$ gestellte Instrument zwischen das Objectiv dieses Fernrohrs und den Gegenstand hält. Wären die Prismen nicht berichtigt, so würde man durch das eine oder andere Verfahren nicht β , sondern das in den Formeln des 5. Art. vorkommende ξ zum Verschwinden bringen. In dem zuletzt erwähnten Falle $\alpha = 45^\circ$, $d = 90^\circ$ wäre dieses $= \beta + \frac{\gamma - \gamma'}{\sqrt{2}}$; in dem ähnlichen $\alpha = 135^\circ$, $d = 270^\circ$ würde es $\beta - \frac{\gamma - \gamma'}{\sqrt{2}}$ sein. Indem das Zusammenfallen der spiegelnden Ebenen beider Prismen $\gamma, + \gamma = 0$ ergibt, bemerkt man leicht, dass die Combination der dieses Zusammenfallen bewirkenden Operation mit der Beobachtung der Punkte im Fernrohre, in welchem die Bilder zweier einander diametral entgegengesetzten Punkte in beiden Lagen des Instruments zur Deckung gebracht werden können, die Mittel zur Berichtigung des Instruments vollständig

enthält. Vermuthlich ist die von Herrn von STEINHEIL angeordnete Berichtigmethode hierauf begründet, indem er zwei parallel aufgestellten Fern-

röhren, welche dasselbe leisten, was durch ein nach einem entfernten Gegenstande gerichtetes Fernrohr geleistet wird, darin eine Rolle einräumt.

73. Eine Bemerkung über die Aufstellungsart beweglicher Instrumente.*)

(Astr. Nachr. 15, p. 121.)

Unter den Instrumenten der hiesigen Sternwarte befindet sich ein von Herrn REPSOLD, dem Sohne, verfertigtes Passageninstrument von 20 Zoll Brennweite, welches ich für ein vortreffliches Instrument halte. Dieses Urtheil beruhet nicht nur auf dem schönsten Ebenmaasse, der meisterhaften Ausführung und der sorgfältigen Verbindung aller einzelnen Theile des Instruments, sondern auch auf Resultaten, welche ich dadurch in Fällen erhalten habe, in welchen die Erlangung einer beträchtlichen Sicherheit die Aufgabe war. Den ersten dieser Gründe würde ich nur durch genaue Zeichnung und Beschreibung des Instruments anschaulich machen können; über den andern aber kann ich das Urtheil feststellen, indem ich die Zenithdistanzen von 8 Sternen anführe, welche ich an den beiden äussersten Punkten der hier ausgeführten Gradmessung mit diesem Instrumente, durch seine auf den Meridian senkrechte Aufstellung erhalten habe. Ich führe sie, auf 1833 reducirt, hier an:

	Trunz.	Memel.	Polhöhen- unterschied.	Abw. vom Mittel.
β Dracon.	1° 47' 30",861	3° 18' 0",484	1° 30' 29",623	+ 0",643
γ "	2 42 30,270	4 12 58,909	28,639	- 0,341
XVIII. 170	3 10 41,985	3 41 11,128	29,143	+ 0,163
α Cygni	1 9 24,727	2 39 53,601	28,874	- 0,106
ζ "	2 14 13,625	3 44 41,932	28,307	- 0,673
ϵ "	2 50 35,174	4 21 4,354	29,180	+ 0,200
ϕ "	4 22 56,546	5 53 25,428	28,882	- 0,098
ψ "	2 15 18,144	3 43 47,337	29,193	+ 0,213
		Mittel	1° 30' 28",980	

Die Beobachtungen, worauf diese Bestimmungen beruhen, sind in Trunz in den heitern Nächten, welche zwischen dem 24. Juli und 11. August 1832 fielen, in Memel zwischen dem 15. und 30. Juli 1834 gemacht worden; das Buch über die Gradmessung, welches jetzt unter der Presse ist, wird die Beobachtungen selbst enthalten.

Indessen musste man bei der Anwendung des In-

strumentes auf die Bequemlichkeit Verzicht leisten, seinen Collimationsfehler durch Umlegung unmittelbar zu bestimmen oder zu berichtigen. Denn die Umlegung liess sich, auch mit der grössten Vorsicht, nicht bewerkstelligen, ohne dass man Gefahr lief, das Azimuth der Axe dadurch zu verändern. Versuche dieser Art, bei welchen das Instrument auf ein festes Zeichen gerichtet, dann umgelegt und wieder umgelegt wurde, zeigten gewöhnlich, dass es nicht genau, sondern nur mehr oder weniger näherungsweise zu dem Zeichen zurückkam. Aber beliebige Drehungen des Fernrohrs um seine Axe änderten ihre Lage nicht, wie das Zeichen und die Wasserwaage eben so oft zeigten, als man den Versuch wiederholte. Durch diese Bemerkungen war die Anwendungsart des Instruments bestimmt: man musste die Beobachtungen so anordnen, dass die Voraussetzung, die Axe habe vor und nach einer Umlegung eine gleiche Lage, nicht in ihr Resultat übergang. Die Befreiung von dieser Voraussetzung wurde bei den angeführten Anwendungen durch errichtete, bei Nacht erleuchtete Zeichen erlangt, auf welche man den mittleren Faden nach jeder Umlegung neu einstellte, unbekümmert darum, ob die Ursache einer wahrgenommenen Abweichung von dem Zeichen ein Collimationsfehler, oder eine Veränderung des Azimuths der Axe während der Umlegung sei. Die Absehnslinie des Fernrohrs schnitt also, im Horizonte, stets denselben Punkt und die Nivellirung der Axe brachte hervor, dass sie sich bei der Drehung um dieselbe in einem Kreise der Himmelskugel bewegte, welcher sich, falls ein Collimationsfehler vorhanden war, in beiden Lagen der Axe gleich weit, aber nach entgegengesetzten Seiten, von dem Verticalkreise des Zeichens entfernte. Dass das Mittel aus zwei Beobachtungen eines Sterns, in entgegengesetzten Lagen der Axe gemacht, eben so frei von dem Einflusse eines Collimationsfehlers wurde, als wenn sie mit dem von demselben befreiten Instrumente gemacht worden wären, auch dass durch ihre Vergleichung der Collimationsfehler bestimmt wurde, leuchtet ein. Der Einfluss der Veränderlichkeit des Azimuths während der Umlegung war also vollkommen und ohne

*) [313 d. n. Verz. — Vgl. auch 314 d. n. Verz.]

Nachtheil für die Resultate vermieden. So lange man den Grund der Veränderlichkeit nicht auffinden und wegschaffen konnte, musste man ihren Einfluss vermeiden; wenn man dieses nicht vernachlässigte, gab sie gar keinen Grund, die durch das Instrument erlangten Resultate für weniger zuverlässig zu halten, als sie ohne die Veränderlichkeit gewesen sein würden.

Da diese Vermeidung keine Schwierigkeit hat, auch ihre Nothwendigkeit nicht erst durch nachtheilige Erfahrungen erkannt werden durfte, sondern schon bekannt war, so hielt ich das Instrument für geeignet, auch den Zeitbestimmungen zum Grunde gelegt zu werden, welche meine im Jahre 1835 in Berlin zu machenden Pendelversuche erforderten. Herr Prof. ENCKE, der sich nicht nur zu diesen Zeitbestimmungen bereit erklärte, sondern sie auch mit einem Fleisse ausführte, von welchem meine Abhandlung über die Pendellänge von Berlin und das Astron. Jahrbuch für 1839 den Beweis liefern, nahm, da die eben fertig werdende neue Sternwarte noch keine festen Instrumente besass, das Anerbieten meines Instruments an und benutzte es auch während eines Monats, worauf er es, da er mit seinen Leistungen wenig zufrieden war, gegen ein kleineres, aber das Azimuth während der Umlegung nicht merklich veränderndes Instrument von ERTEL vertauschte. Uebrigens war die Veränderlichkeit des Azimuths der Axe des Repsold'schen Instruments während der Umlegung bei seiner Aufstellung auf der Berliner Sternwarte ebensowohl vorhanden, als sie in Trunz und Memel vorhanden gewesen war.

Als ich das Instrument hierher zurück erhielt, sollte es zu einer Reihe von Beobachtungen derselben Sterne benutzt werden, welche ich in Trunz und Memel beobachtet hatte. Um den Grund der Unbequemlichkeit aufzufinden, welche sein Gebrauch, durch die oft erwähnte Veränderlichkeit, besass, zerlegte ich es in seine einzelnen Theile und untersuchte jeden derselben möglichst aufmerksam, fand aber keinen, der mir einen Zweifel gegen die Festigkeit des Instruments selbst hätte beibringen können. Ich setzte es daher mit der Ueberzeugung wieder zusammen, dass der gesuchte Grund ausser dem Instrumente liegen müsse. Indem ich nun ausser dem Instrumente suchte, fand ich das Mittel gegen das Uebel. Die Mittheilung desselben ist eine der Veranlassungen dieses Aufsatzes. Ich halte sie für nicht überflüssig, da wenigstens ich lange vergebens gesucht habe.

Dieses Mittel besteht darin, dass ich die 3 Fussplatten, auf welchen das Instrument steht, lose auf den Pfeiler legte, während ich sie vorher darauf festge-

kittet hatte. Sobald dieses geschehen war, war die Veränderlichkeit während der Umlegung verschwunden, und man konnte jetzt auch diejenigen Anwendungen des Instruments machen, welche auf der Voraussetzung der Unveränderlichkeit während der Umlegung beruhen. Die Beobachtungen, welche diese neue Untersuchung des Instruments veranlassten und die Auffindung des Fehlers herbeiführten, konnten nicht besser gerathen, als die früheren gerathen waren; denn bei allen war der Fehler gleich vollständig vermieden. Sie wurden von Herrn Major BAEYER gemacht und es ergaben sich daraus die Zenithdistanzen, auf 1833 und auf den Meridiankreis der Sternwarte reducirt, folgendermaßen:

	Zen.-Dist.		Polhöhenunterschied.	
			Trunz.	Memel.
β Dracon.	2° 17'	0',922	- 0° 29' 39",061	+ 1° 0' 50",562
γ ..	3 12	1,191	38,921	49,718
XVIII. 170	2 40	21,519	39,531	49,609
× Cygni	1 39	3,614	38,887	49,987
7 ..	2 43	52,119	38,494	49,813
i ..	3 20	14,279	39,105	50,075
θ ..	4 52	35,598	39,052	49,830
ψ ..	2 42	57,365	39,221	49,972
	Mittel		- 0° 29' 39",034	+ 1° 0' 49",946

Um die Art, wie das Festkitten der Fussplatten des Instruments eine Veränderlichkeit erzeugen konnte, zu erläutern, muss ich etwas von seiner Einrichtung sagen. Es steht auf 3 Fusschrauben von Messing, deren in einer Neigung von 45° gegen ihre Axe abgedrehte kegelförmige Spitzen in ähnlich geformte Löcher der Unterlegeplatten passen. Diese sind gleichfalls von Messing und ruhen nicht, wie bei den Münchener Instrumenten und vielen anderen, auf drei Spitzen, sondern auf ihrer ebenen Grundfläche selbst. Die Absicht der Anbringung der 3 Spitzen scheint die Eindrückung derselben in das Holz, worauf man die Theodoliten oft aufstellt, zu sein; ihre Weglassung wird dadurch gerechtfertigt, dass ein Passageninstrument auf einer Grundfläche von Stein stehen soll. Indem ich die untere Fläche der Unterlegeplatten mit Kitt bestrich und sie so auf den Stein aufdrückte, beabsichtigte ich, sie gegen horizontale Verschiebungen zu schützen. Man bemerkt leicht, dass diese Befestigung so geschehen muss, dass die Axen der Fusschrauben mit den Axen der kegelförmigen Löcher zusammenfallen; denn wenn dieses nicht der Fall ist, so stehen die Schrauben nicht sowohl in den Löchern, als sie die im 45. Grade gegen den Horizont geneigte Fläche derselben nur an einem Punkte berühren. Ich glaubte für diese Cen-

trirung hinreichend zu sorgen, indem ich das Instrument aufstellte, während der Kitt noch weich war und nun seine Verhärtung abwartete. Allein dieses Mittel ist entweder nicht hinreichend gewesen, oder die Veränderungen der Wärme haben seinen Erfolg später vernichtet, oder die Drehung der Fussrauben nach der Verhärtung des Kitts hat eine Excentricität erzeugt; die Ursache mag eine von diesen oder eine andere sein, die Wirkung des Festkittens der Fussplatten war aber dieselbe, die erwartet werden konnte, wenn die Füße des Instruments nicht in den kegelförmigen Löchern standen, sondern an ihre Seitenflächen nur angelehnt waren. Das Abheben und Wiederauflegen des Fernrohrs, sowie auch die kleinen Erschütterungen, womit dieses wohl immer verbunden ist, konnten hinreichen, die unsicher stehenden Füße in Bewegung zu bringen. Vielleicht ist diese Bewegung weniger zu fürchten, wenn die Füße weniger stumpfe Kegel sind und wenn sie Spitzen von Stahl haben, welcher sich ohne Zweifel in das Messing der Unterlegeplatten eindrückt. Liegen

dagegen die Unterlegeplatten lose auf der Ebene des Steines, so ist nicht zu bezweifeln, dass sie ihren Ort, den Aenderungen der Entfernung der Füße gemäss, jedesmal verändern und nie eine Excentricität erhalten werden; das Gewicht des darauf stehenden Instruments ist aber hinreichend, sie vor denjenigen zufälligen Verschiebungen zu schützen, welche die Behandlung des Instruments während der Beobachtungen zu fürchten Veranlassung geben könnte.

Herr Prof. ENCKE erklärt sich, in dem Astron. Jahrb. 1839 S. 268—269, über diesen Gegenstand auf eine Art, welche auf den höchst ausgezeichneten Künstler, der das Instrument verfertigt hat, einen Schatten wirft. Mein gegenwärtiger Aufsatz wird ihn davon befreien, indem er zeigt, dass nicht „mangelhafte Festigkeit des Instruments an sich“, sondern eine äussere Ursache die Veränderlichkeit der Aufstellung erzeugte...

[Die noch folgende persönliche Bemerkung veranlasste ENCKE zu einer Erwiderung (p. 173), auf die E. mit einer kurzen Gegenerklärung (p. 231) antwortete.]

74. Neue Prüfung des Cary'schen Kreises.*)

(Königsberger Beobacht. 3. Abth., p. IV.)

Im November 1817 wurde eine ganz neue Prüfung des Kreises vorgenommen, die mir zur Bestätigung der früheren und zur Untersuchung der Unveränderlichkeit des Instruments notwendig zu sein schien. Sie beruht auf dem früher schon benutzten Verfahren, hat aber eine vollständigere Prüfung der Figur der Zapfen vor jener voraus, deren genaue Bestimmung wesentlich ist, wenn sie gleich keinen unmittelbaren Einfluss auf die Beobachtungen hat. Denn sie hat Einfluss auf die Winkel, die das Kreismikroskop A und das Prüfungsmikroskop O an dem Mittelpunkte der Axe einschliessen und damit auf die zu bestimmenden Theilungsfehler.

Ich gebe daher zuerst die Theorie des Einflusses der Abweichung der Zapfen von der kreisylindrischen Figur. Nimmt man auch, der Allgemeinheit wegen, beide Zapfen als ungleich an, so wird es dennoch nicht nöthig sein, die Figur eines jeden von ihnen zu kennen; wenn man nämlich die Punkte, wo beide zugleich die Lager berühren, durch gerade Linien verbindet, so wird durch alle diese Geraden aus der Ebene des Gradrandes

des Kreises eine Curve ausgeschnitten, deren Radien man allein betrachten darf. Nennt man diese Radien ρ und die dazu gehörigen Winkel, vom Nullpunkte des Kreises und nach der Richtung, nach welcher die Zenithdistanzen auf dem Gradrande gerechnet werden, gezählt, u , so hat man aus der I. Abtheilung die Gleichungen [Abh. 60, p. 26]:

$$\beta - \alpha = \sqrt{2} \cdot \rho [\sin u \cos(v - 45^\circ) - \cos u \sin(v - 45^\circ)]$$

$$\beta + \alpha = -\sqrt{2} \cdot \rho' [\sin u' \cos(v + 45^\circ) - \cos u' \sin(v + 45^\circ)]$$

Da aber, wenn ds und ds' die Differentiale der Bögen der Curve an den Berührungspunkten bezeichnen,

$$ds \cos(v - 45^\circ) = -d\rho \cos u + \rho du \sin u$$

$$ds \sin(v - 45^\circ) = -d\rho \sin u - \rho du \cos u$$

$$ds' \cos(v + 45^\circ) = d\rho' \cos u' - \rho' du' \sin u'$$

$$ds' \sin(v + 45^\circ) = d\rho' \sin u' + \rho' du' \cos u'$$

ist, so erhält man durch die Elimination von v :

$$\beta - \alpha = \rho \rho' \sqrt{2} \frac{du}{ds}; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\rho \rho' \frac{du'}{ds'} - \rho \rho' \frac{du}{ds} \right)$$

$$\beta + \alpha = \rho \rho' \sqrt{2} \frac{du'}{ds'}; \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\rho \rho' \frac{du'}{ds'} + \rho \rho' \frac{du}{ds} \right)$$

Nimmt man nun für ρ die Form

*) [Ausgang aus 121 d. a. Verz. — Bildet die Fortsetzung der Untersuchungen in Abh. 60, p. 24 ff.]

$$a + R'h' \sin(H' + u) + R'h'' \sin(H'' + 2u) + R'h''' \sin(H''' + 3u) + \text{etc.} \dots$$

wo R der Halbmesser des Kreises ist, und vernachlässigt man das Quadrat und die höheren Potenzen von $\varrho - a$, so hat man $u = x + 45^\circ$ und $u' = x - 45^\circ$ und damit

$$\alpha = -R\sqrt{2} \{ \sin 45^\circ . h' \cos(H' + x) + \sin 90^\circ . h'' \cos(H'' + 2x) + \sin 135^\circ . h''' \cos(H''' + 3x) + \text{etc.} \dots \}$$

$$\beta = a\sqrt{2} + R\sqrt{2} \{ \cos 45^\circ . h' \sin(H' + x) + \cos 90^\circ . h'' \sin(H'' + 2x) + \cos 135^\circ . h''' \sin(H''' + 3x) + \text{etc.} \dots \}$$

Wenn der Winkel, den das Kreismikroskop A und das Prüfungsmikroskop O an dem Punkte einschliessen, der in der den rechten Winkel der Lager halbirenden Linie $a\sqrt{2}$ von diesem entfernt liegt, durch ξ bezeichnet wird, so hat man den Winkel, den beide Mikroskope am Mittelpunkte der Axe einschliessen:

1) wenn O auf x und A auf $x + \xi$ gerichtet ist

$$= \xi - 2 \sin \frac{1}{2} \xi \{ \varphi(x + \xi) \sin \frac{1}{2} \xi + \varphi'(x + \xi) \cos \frac{1}{2} \xi \}$$

$$1) \psi(x + \xi) - \psi x = c + 2 \sin \frac{1}{2} \xi \{ \varphi(x + \xi) \sin \frac{1}{2} \xi + \varphi'(x + \xi) \cos \frac{1}{2} \xi \}$$

$$2) \psi(x) - \psi(x + \xi) = c' + 2 \sin \frac{1}{2} \xi \{ \varphi(x) \sin \frac{1}{2} \xi - \varphi'(x) \cos \frac{1}{2} \xi \}$$

woraus man erhält

$$0 = c + c' + 2 \sin \frac{1}{2} \xi \{ \varphi(x + \xi) + \varphi(x) \} + \sin \xi \{ \varphi'(x + \xi) - \varphi'(x) \}$$

und nach der Substitution der oben gefundenen Ausdrücke von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ etc.

$$0 = c + c' + 4\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \xi \Sigma \left[-\sin(n \cdot 45^\circ) \cos \frac{n}{2} \xi \sin \frac{1}{2} \xi + \cos(n \cdot 45^\circ) \sin \frac{n}{2} \xi \cos \frac{1}{2} \xi \right] . h^{(n)} \cos \{ H^{(n)} + nx + \frac{n}{2} \xi \}$$

oder

$$0 = -(c + c') + 4\sqrt{2} . \cos \xi \sin \frac{1}{2} \xi . h' \sin [H' + \xi + 90^\circ + 2\xi]$$

$$+ 4 \sin \frac{1}{2} \xi \sin 2\xi . h'' \sin [H'' + \frac{3}{2} \xi + 90^\circ + 3\xi]$$

$$+ 2\sqrt{2} . \sin \xi \sin 2\xi . h''' \sin [H''' + 2\xi + 90^\circ + 4\xi]$$

$$+ 4 \sin \frac{1}{2} \xi \sin 2\xi . h^{iv} \sin [H^{iv} + \frac{5}{2} \xi + 90^\circ + 5\xi]$$

etc. etc.

welche Gleichung also zur Bestimmung der Figur der Zapfen benutzt werden kann, wenn man die Beobachtungen mit dem Mikroskope O auf beiden Seiten von A angestellt hat. Bemerkenswerth ist es, dass für $\xi = 90^\circ$ alle von x abhängige Glieder dieser Gleichung verschwinden, wodurch also für jede Abweichung der Zapfen von der cylindrischen Figur $c = -c'$ ist. Für $\xi = 180^\circ$ bleiben nur h' , h'' , h^x u. s. w. in der Rechnung, so dass, wenn die Reihe so schnell convergirt, dass h^{iv} , h^x u. s. w. unmerklich sind, durch die diametralen Ablesungen in verticaler Richtung nur h'' ,

2) wenn A auf x und O auf $x + \xi$ gerichtet ist

$$= \xi + 2 \sin \frac{1}{2} \xi \{ \varphi(x) \sin \frac{1}{2} \xi - \varphi'(x) \cos \frac{1}{2} \xi \}$$

wo $R\varphi(x)$ und $R\varphi'(x)$ für α und $\beta - a\sqrt{2}$ gesetzt sind.

Bezeichnen c und c' die in den beiden eben unterschiedenen Fällen an dem Mikroskope A beobachteten Secunden, und $\psi(x)$ und $\psi(x + \xi)$ das, was man den Theilstrichen x und $x + \xi$ hinzufügen muss, um sie von den Theilungsfehlern zu befreien, so hat man

oder die Ellipticität, bestimmt werden kann. Wenn also diese diametralen Ablesungen auch mit der Hypothese der elliptischen Figur der Zapfen übereinstimmen, so ist die Nichtexistenz anderer Abweichungen dadurch keineswegs erwiesen. — Die Leichtigkeit und Sicherheit der vollständigen Bestimmung der Figur der Zapfen bei einem Kreise mit vier Mikroskopen gibt diesem einen nicht unwesentlichen Vorzug vor einem nur mit zweien versehenen.

Nachdem die Figur der Zapfen bekannt geworden ist, findet man die Theilungsfehler $\psi(x + \xi) - \psi(x)$

$$= c + 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{2} \xi \Sigma \left[-\sin(n \cdot 45^\circ) \sin \frac{1}{2} \xi \cos(H^{(n)} + nx + n\xi) + \cos(n \cdot 45^\circ) \cos \frac{1}{2} \xi \sin(H^{(n)} + nx + n\xi) \right] h^{(n)}$$

$$= -c' + 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{2} \xi \Sigma \left[\sin(n \cdot 45^\circ) \sin \frac{1}{2} \xi \cos(H^{(n)} + nx) + \cos(n \cdot 45^\circ) \cos \frac{1}{2} \xi \sin(H^{(n)} + nx) \right] h^{(n)}$$

oder

$$= c - 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{2} \xi h'' \cos(H'' + 2x + 2\xi) - 2 \sin \frac{1}{2} \xi h''' \sin(H''' + 3x + \frac{3}{2} \xi) - 2^{\frac{3}{2}} \sin \xi h^{iv} \sin(H^{iv} + 4x + 4\xi) \text{ etc.}$$

$$= -c' + 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{2} \xi h'' \cos(H'' + 2x) - 2 \sin \frac{1}{2} \xi h''' \sin(H''' + 3x - \frac{1}{2} \xi) - 2^{\frac{3}{2}} \sin \xi h^{iv} \sin(H^{iv} + 4x) \text{ etc.}$$

Aus der oben gegebenen Gleichung ist das von der einfachen Zenithdistanz abhängige Glied verschwunden; hier habe ich $h' = 0$ gesetzt, indem sich immer ein Punkt angeben lässt, für welchen es verschwindet. Diesen Punkt nimmt man daher für den Mittelpunkt

der Zapfen an, wenn man die Theilungsfehler nach den eben gegebenen Ausdrücken aus den Beobachtungen mit dem Prüfungsmikroskope berechnet; jedes Glied erscheint immer mit dem Theilungsfehler des Kreises vereinigt und wenn man $h' = 0$ setzt, so bezieht

sich die Excentricität des Kreises auf den dadurch bestimmten Mittelpunkt der Axe.

[Folgt die detaillierte Mittheilung der 5 Beobachtungsreihen.]

Aus den Beobachtungen findet man durch Anwendung des in der I. Abtheilung S. X [p. 24 ff.] gegebenen Verfahrens:

$$\begin{aligned} I. & 33,942h'' \sin H'' = +41,74425; & 33,942h'' \cos H'' = +0,0504 \\ III. & 7,029h'' \sin H'' = -13,7279; & 7,029h'' \cos H'' = +0,1717 \\ IV. & 14,142h'' \sin H'' = +18,3373; & 14,142h'' \cos H'' = +2,1308 \\ V. & 2,185h'' \sin H'' = +4,3982; & 2,185h'' \cos H'' = +0,4119 \\ & 57,298h'' \sin H'' = +50,3451; & 57,298h'' \cos H'' = +2,7648 \\ \\ III. & 18,369h''' \sin H''' = -4,5470; & 18,369h''' \cos H''' = +5,8377 \\ V. & 5,878h''' \sin H''' = -0,7348; & 5,878h''' \cos H''' = +1,4012 \\ & 24,247h''' \sin H''' = -5,2918; & 24,247h''' \cos H''' = +7,2389 \\ \\ III. & 24,000h^{IV} \sin H^{IV} = -2,0400; & 24,000h^{IV} \cos H^{IV} = -12,4883 \\ V. & 7,906h^{IV} \sin H^{IV} = -0,4412; & 7,906h^{IV} \cos H^{IV} = -1,0378 \\ & 31,906h^{IV} \sin H^{IV} = -2,4812; & 31,906h^{IV} \cos H^{IV} = -13,5261 \end{aligned}$$

und damit den Radius der Zapfen

$$\begin{aligned} \rho &= a + R \cdot 0,78817 \sin (80^\circ 52' + 2u) \\ &+ R \cdot 0,73696 \sin (323^\circ 53' + 3u) \\ &+ R \cdot 0,74317 \sin (190^\circ 23' + 4u) \end{aligned}$$

Die angenommene Figur der Zapfen gibt den Theilungsfehler des zwischen x und $z + \xi$ enthaltenen Bogen des Kreises, aus auf beiden Seiten von A gemachten Beobachtungen mit dem Mikroskope O ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(c - c') + 2^3 \sin \xi \sin \frac{1}{2} \xi^2 h'' \sin (H'' + 2z + \xi) \\ &- 2 \sin \frac{1}{2} \xi \cos 2\xi h'' \sin (H'' + 3z + \frac{3}{2} \xi) \\ &- 2 \sin \xi \cos 2\xi h'' \sin (H'' + 4z + 2\xi) \end{aligned}$$

Dieser Theilungsfehler mit entgegengesetztem Zeichen genommen ist, wenn $x = 0$ ist, die Verbesserung der beobachteten Zenithdistanz ξ . Hat man ebenso die Theilungsfehler für den Punkt $180^\circ + \xi$ bestimmt, so ist die halbe Summe beider mit dem Einflusse der Figur der Zapfen auf die an beiden Mikroskopen A und B beobachtete Zenithdistanz behaftet, welcher Einfluss daher ist

$$\begin{aligned} &= -2^3 \sin \xi \sin \frac{1}{2} \xi^2 h'' \sin (H'' + \xi) \\ &+ 2 \sin \xi \cos 2\xi h'' \sin (H'' + 2\xi) \end{aligned}$$

Bei der Wiederholung der Beobachtung, nach der Umwendung des Kreises, ist dieser Einfluss ($x = 360^\circ - \xi$)

$$\begin{aligned} &= -2^3 \sin \xi \sin \frac{1}{2} \xi^2 h'' \sin (H'' - \xi) \\ &+ 2 \sin \xi \cos 2\xi h'' \sin (H'' - 2\xi) \end{aligned}$$

und die halbe Summe beider ist endlich der Einfluss der Figur der Zapfen auf eine vollständige Beobachtung der Zenithdistanz ξ

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{2} \cdot \sin 2\xi \sin \frac{1}{2} \xi^2 h'' \sin H'' \\ &+ 2 \sin \xi \cos 2\xi^2 h'' \sin H'' \end{aligned}$$

Hieraus kann man beurtheilen, dass das von $4u$ abhängige Glied in unserem Falle gewöhnlich äusserst unbedeutenden Einfluss auf die Beobachtungen hat. Ich habe dieses entwickelt, um dadurch zu zeigen, dass die kleine Unsicherheit, die über die Figur der Zapfen noch stattfindet, im Wesentlichen von keinem Belange ist.

[Folgt Mittheilung der Theilungsfehler im Detail.]

Die Vergleichung der Theilungsfehler mit dem Ausdrucke

$$\begin{aligned} &u' \sin (U' + x) + u'' \sin (U'' + 2z) + u''' \sin (U''' + 3z) + \text{etc.} \\ &\text{woraus } \psi(x + \xi) - \psi(x) = \\ &2u' \sin \frac{1}{2} \xi \cos (U' + x + \frac{1}{2} \xi) + 2u'' \sin \frac{1}{2} \xi \cos (U'' + 2z + \xi) \\ &+ 2u''' \sin \frac{1}{2} \xi \cos (U''' + 3z + \frac{3}{2} \xi) + \text{etc.} \end{aligned}$$

folgt, ergibt^{*)}, den Theilungsfehler vom Nullpunkte aus gerechnet, und auf den Mittelpunkt der Zapfen bezogen

$$\begin{aligned} &+ 3,719 + 9,069 \sin (296^\circ 42' + z) + 0,7993 \sin (97^\circ 33' + 2z) \\ &+ 1,75717 \sin (241^\circ 12' + 3z) + 0,4834 \sin (290^\circ 50' + 4z) \end{aligned}$$

Wenn man diese Formel mit der früher [p. 30.] gefundenen vergleicht, so findet man den Unterschied

$$\begin{aligned} &+ 1,5234 \sin (356^\circ 59' + z) + 0,2603 \sin (203^\circ 8' + 2z) \\ &+ 0,4715 \sin (238^\circ 18' + 3z) + 0,1942 \sin (243^\circ 49' + 4z) \end{aligned}$$

Ausser dem ersten Gliede, welches, so wie alle ungeraden Glieder, keinen Einfluss auf die Zenithdistanzen hat, ist der Unterschied beider Formeln so gering, dass er mit Wahrscheinlichkeit den Beobachtungsfehlern und den zufälligen Unregelmässigkeiten der Theilungen zugeschrieben werden kann. Das erste Glied aber deutet auf eine Veränderung des Instruments; es wird der Mühe werth sein, dieser näher nachzuforschen. — Bekanntlich kann der von der einfachen Zenithdistanz abhängige Theil des Theilungsfehlers eines Instruments als Excentricität desselben angesehen werden; die bemerkte Veränderung kann also sowohl von einer Veränderung des Punktes, auf welchen sich die Bestimmung des Theilungsfehlers bezieht, d. i. des Mittelpunktes der Zapfen, als von einer Veränderung des Kreises selbst herrühren. Das letzte ist, bei der schon früher gerühmten Festigkeit des Baues und der sich in den übrigen Gliedern der Formel zeigenden Unveränderlich-

^{*)} [Die einzelnen Gleichungen für die 5 Beobachtungsreihen sind weggelassen.]

keit gerade nicht wahrscheinlich; das erste wird wahrscheinlich sein, wenn die Veränderung sich durch eine Abnutzung der Zapfen erklären lässt, die bei dem häufigen vierjährigen Gebrauche und dem bedeutenden Gewichte des sich ohne Gegengewichte drehenden Kreises, trotz aller Vorsicht, wohl nicht ganz hat vermieden werden können.

Nehmen wir in der That den Kreis selbst als unverändert an, so wird damit der vorige Mittelpunkt der Zapfen gegeben sein und wir haben die jetzigen Radien der Zapfen, auf jenen Punkt bezogen,

$$\rho = a + R \cdot 1,5234 \sin(266^{\circ}59' + u) + R \cdot 0,78817 \sin(86^{\circ}52' + 2u) + \text{etc.} \dots$$

vorher aber waren diese Radien

$$(\rho) = (a) + R \cdot 0,6167 \sin(104^{\circ}24' + 2u) + \text{etc.} \dots$$

woraus folgt

$$\rho - (\rho) = a - (a) + R \cdot 1,5234 \sin(266^{\circ}59' + u) + R \cdot 0,3475 \sin(54^{\circ}33' + 2u)$$

Will man diesen Unterschied durch die Abnutzung der Zapfen erklären, so darf er nie positiv sein; zwischen $u = 135^{\circ}$ und $u = 225^{\circ}$ sollte er = 0 sein, weil dieser Theil der Zapfen nie die Lager berührt. Setzt man, um dieses so nahe als möglich durch die Formel auszudrücken, $a - (a) = -1,44$, so findet man $\rho - (\rho)$ für

u	$\rho - (\rho)$	u	$\rho - (\rho)$
0°	- 2,68	360°	- 2,68
10	- 2,62	350	- 2,73
20	- 2,55	340	- 2,76
30	- 2,48	330	- 2,75
40	- 2,41	320	- 2,70
50	- 2,33	310	- 2,60
60	- 2,21	300	- 2,45
70	- 2,12	290	- 2,23
80	- 1,98	280	- 1,96
90	- 1,80	270	- 1,64
100	- 1,69	260	- 1,29
110	- 1,54	250	- 0,93
120	- 1,37	240	- 0,60
130	- 1,17	230	- 0,25

u	$\rho - (\rho)$	u	$\rho - (\rho)$
140°	- 0,747	220°	+ 0,703
150	- 0,20	210	+ 0,23
160	+ 0,65	200	+ 0,36
170	+ 0,24	190	+ 0,41
180	+ 0,36	180	+ 0,36

welches in der That so nahe mit der Voraussetzung einer Abnutzung der Zapfen übereinstimmt, als die Annahme nur zweier Glieder der Formel erwarten lässt. Ich halte es daher für sehr wahrscheinlich, dass die einzige merkliche Abweichung der neuen Bestimmung des Theilungsfehlers von der alten nicht dem Kreise selbst, sondern nur den Zapfen zuzuschreiben ist. Diese neue Prüfung lehrt uns daher die Unveränderlichkeit des Kreises kennen. Die Berechnung einer neuen Verbesserungstafel, die die Verbesserung der vollständig beobachteten Zenithdistanzen übrigens um einen im Maximo bis auf 0,24 steigenden Bruch einer Secunde grösser geben würde, halte ich für überflüssig, weil der Unterschied nicht die Grenzen der Unsicherheit beider Formeln überschreitet. Die vorige Tafel werde ich also desto lieber ferner anwenden, da durch eine neue die Gleichförmigkeit der Reductionen gestört werden würde.

Ich habe diese neue Prüfung des Kreises, obgleich sie der Zeit nach, in welcher sie vorgenommen wurde, in die folgende Abtheilung der Beobachtungen gehört, hier schon mitgetheilt, da der beständige Unterschied zwischen den mit dem Königsberger Kreise und den Kreisen von Greenwich, Palermo und Mailand beobachteten Declinationen, den Herr Professor LITTRON in Ofen durch die Berechnung eines Theils meiner Beobachtungen entdeckt hat^{*)}, so auffallend ist, dass die Bestätigung der früher gefundenen Theilungsfehler und der Unveränderlichkeit des Instruments nothwendig erwünscht sein muss.

^{*)} [Vgl. darüber Astr. Nachr. I, p. 327, 355 (160 d. a. Verz.), 430 (162 d. a. Verz.); die Abh. „über die Abweichungen der Fixsterne“ unter Stellarastronomie; Br. n. O. II. 27, 59, 68 (O.), 78.]

75. Ueber einen Fehler des Dollond'schen Heliometers der Königsberger Sternwarte.**)

(Königsberger Beobacht. 5. Abth., p. IV.)

An dem Objectivmikrometer des Dollond'schen Aequatorials, welches am 4. Mai [1818] zur Beobachtung der Sonnenfinsterniss angewandt wurde, wurde ein Fehler bemerkt, der wahrscheinlich auch anderen ähn-

lichen Instrumenten eigenthümlich, meines Wissens aber noch nicht bekannt ist. Wenn man den Punkt der Scale sucht, für welchen beide Bilder sich decken, so findet man ihn in verschiedenen Lagen der Durchschnittslinie der Objectivhälften verschieden. Diese

^{**)} [Auszug aus 139 d. a. Verz.]

Verschiedenheit rührt von der Lage der Durchschnittsline, nicht etwa gegen die Richtung der Schwere, sondern gegen das Objectivglas her, woraus folgt, dass sie aus einer Unregelmässigkeit dieses letztern entsteht, die man, bei der ausgezeichneten Deutlichkeit dieses Fernrohrs, ohne dieses Prüfungsmittel wohl nicht gemalt haben würde.

Um den Gang dieses Fellers näher zu bestimmen und auch den Gebrauch des Instruments weiter auszu dehnen, liess ich, nach dem Vorschlage des Herrn Hofrath GAUSS, am Objectivende des Fernrohrs einen Kreis anbringen, an welchem die Drehung des vorzuschiebenden durchschnittenen Objectivs gemessen werden kann. Mit Hilfe dieses Kreises bestimmte ich für verschiedene Winkel u (= dem Winkel der Durchschnittsline mit dem Declinationskreise des Instruments, von Norden nach Osten gezählt) die den gemessenen Entfernungen hinzuzufügenden Verbesserungen:

u	$\frac{r}{\sin u}$ Zoll.	u	$\frac{r}{\sin u}$ Zoll.	u	$\frac{r}{\sin u}$ Zoll.
0°	+ 1,84	120°	- 0,29	240°	- 1,32
15	+ 1,24	135	- 0,03	255	- 0,90
30	+ 0,69	150	+ 0,90	270	- 1,87
45	+ 0,36	165	+ 1,22	285	- 1,68
60	- 0,49	180	+ 1,42	300	- 0,49
75	- 1,80	195	+ 1,10	315	- 0,30
90	- 1,23	210	+ 1,29	330	+ 0,68
105	- 1,32	225	+ 1,56	345	+ 1,60

Dieses Täfelchen gibt die Mittel ans mehreren auf verschiedene Art abgeänderten Beobachtungsreihen an; diese wurden zum Theil an Fixsternen gemacht, zum Theil an einer besonderen Vorrichtung, welche die

Ueberzeugung gab, dass die Verbesserungen allein von den Winkeln u , von den Entfernungen aber nicht merklich geändert werden. Diese Vorrichtung besteht aus einem Lineal, welches um einen Mittelpunkt gedreht wird, den man in die verlängerte optische Axe des Fernrohrs bringt so dass die Ebene der Drehung auf diese Axe senkrecht steht; das Lineal hat drei Paare vom Mittelpunkt gleichweit entfernter Punkte, so dass sie in der Entfernung, in welcher die Vorrichtung aufgestellt wurde, die Winkel von 10', 20', 30' einschlossen. Eins von diesen Paaren wurde nun für $u = 0$ zur Deckung gebracht und die Entfernung der beiden Objectivhälften an der Scale abgelesen; dann das Lineal um 15° gedreht und die Beobachtung wiederholt n. s. w. — Durch die nahe Uebereinstimmung der Verbesserungen in den vier geprüften Entfernungen 0, 10', 20', 30' ist die nahe Richtigkeit des Mikrometerobjectivs bewiesen. Es ist überdies klar, dass eine Drehung von 180° wieder dieselbe Verbesserung geben muss, welches, soviel sich von diesen schwierigen Beobachtungen erwarten lässt, auch durch den Erfolg bestätigt wird. Will man die beobachteten Verbesserungen interpoliren, so kann dieses durch die Formel $+ 1,462 \cos 2u$ (oder in Secunden $+ 1',63 \cos 2u$) geschehen, ohne dass man dadurch einen Fehler begeht, der die Unsicherheit der in der obigen Tafel enthaltenen Zahlen merklich übersteigt. — Es ist bekannt, dass BOGGE das Axenverhältniss des Saturns mit einem Objectivmikrometer sehr fehlerhaft bestimmte; höchstwahrscheinlich war ein ähnlicher, von ihm weder erkannter noch vermiedener Fehler die Ursache davon.

76. Ueber die aus der Schwere hervorgehenden Veränderungen, die der Kreis eines astronomischen Instruments in der lothrechten Lage seiner Ebene erfährt. *)

(Astron. Nachr. 25, p. 1.)

Vorwort. Die Leser der Astron. Nachrichten erhalten hier BESSEL'S letzte Arbeit, deren Abdruck er in seinem letzten Willen ausdrücklich verordnete.

SCHUMACHER.

1.

Der Kreis eines astronomischen Instruments ist mit seiner Axe durch eine Anzahl Speichen verbunden,

deren Stärke von der Mitte nach dem Umfange hin abzunehmen pflegt, und zwischen welehen sich gewöhnlich, ausser dem Umfange, noch (gerade) Querverbindungen befinden. Der ganze aus einem elastischen Metalle gemachte Körper erfährt eine Formänderung, indem er aus der wagerechten Lage in die lothrechte gebracht wird: seine eigene Schwere verursacht, je nachdem sie drückend oder ziehend auf seine verschiedenen Theile wirkt, dass diese sich zusammenziehen oder ausdehnen, und dass die in wagerechter Lage seiner Ebene

*) [384 d. a. Verz.]

geraden Speichen und Querverbindungen, in lothrecht im Allgemeinen krumm werden, und der kreisförmige Umfang anders gekrümmt wird.

In der folgenden Untersuchung dieser aus der Schwere hervorgehenden Veränderungen des Ganzen werde ich seine Theile als Linien betrachten, die sich sämtlich in einer Ebene befinden, und denen dasselbe Gewicht und dieselbe Widerstandskraft gegen Biegung und Längenänderung beigelegt werden wird, welche die ihnen entsprechenden körperlichen Theile des Ganzen besitzen. Wenn auch die aufzulösende Aufgabe durch diese Reduction auf Linien vereinfacht wird, so bleibt sie nichtsdestoweniger sehr zusammengesetzt, indem die besonderen Punkte, wo zwei oder mehrere Linien zusammentreffen, die Stetigkeit ihrer Gleichungen unterbrechen und hierdurch die Zahl der verschiedenen, in die Betrachtung kommenden Curven sehr gross wird: diese Zahl ist die doppelte oder die vierfache der Speichen, je nachdem diese bloss durch den Umfang des Kreises verbunden sind, oder zwischen jedem Paare derselben noch eine Verbindung vorhanden ist.

Die Aenderung, welche die Figur des Ganzen in lothrecht Lage seiner Ebene erfährt, wird durch die Bedingung bestimmt, dass die Kraft, welche jeder Theil vermöge seiner Elasticität in den Zustand zurückzuführen strebt, in welchem er sich in wagerechter Lage befindet, der Schwere das Gleichgewicht hält. Diese Bedingung fordert nicht nur, dass die Kräfte, welche aus den von jeder Verbindungslinie zweier besonderen Punkte erfahrenen Veränderungen ihrer Figur und Länge entstehen, der an allen ihren Punkten wirkenden Schwere und den, nur an ihren Endpunkten vorhandenen, aus ihrer Verbindung mit dem Systeme hervorgehenden Kräften Gleichgewicht halten; sondern sie fordert auch, dass die Kräfte an den verschiedenen, in jedem besonderen Punkte zusammentreffenden Endpunkten unter einander im Gleichgewichte sind. Durch die Erfüllung der Forderungen der ersten Art werden die Relationen bekannt, welche zwischen Kräften an den Endpunkten jeder Linie des Systems, und sowohl den Coordinaten dieser Punkte, als auch den daselbst stattfindenden Richtungen der Linie vorhanden sind; die Erfüllung der Forderungen der zweiten Art gibt dann die Gleichungen, welche die Kräfte an den

Endpunkten, und damit die gesuchte Figur des ganzen Liniensystems bestimmen. Dem hier vorgezeichneten Wege wird die Auflösung der Aufgabe folgen.

2.

Ich muss zuerst die Forderungen der ersten Art verfolgen, also die Relationen aufsuchen, welche zwischen Kräften an den Endpunkten einer schweren, dehnbaren und biegsamen Linie und ihrer Figur, so wie auch den Oertern ihrer Endpunkte stattfinden. Wenn die Coordinaten eines unbestimmten Punktes dieser Linie durch x, y bezeichnet und x wagerecht, y lothrecht, unter der Axe des Kreises positiv, genommen werden; wenn ferner das Moment der Kraft, welche die Linie in Folge ihrer erlittenen Biegung an dem unbestimmten Punkte ausübt, durch F ; die Kraft, welche aus ihrer Zusammendrückung hervorgeht, durch F' ; ihr Längenelement zwischen den durch x, y und $x + dx, y + dy$ bestimmten Punkten, durch ds , sein Gewicht durch $k\mathcal{A}\omega ds$, sein Winkel mit der Axe der x durch φ bezeichnet werden, so fordert das Gleichgewicht der Linie, dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten gemäss, dass:

$$S[k\mathcal{A}\omega ds \cdot \delta y + F \cdot \delta \varphi + F' \cdot \delta ds] \dots (1)$$

verschwinde. Die Factoren k, \mathcal{A}, ω , welche in dem Ausdrucke des Gewichtes der Längeneinheit angewandt worden sind, beziehen sich auf die Beschaffenheit des Körperelements, statt dessen hier ein Linienelement betrachtet wird; k ist das Gewicht der Raumeinheit des dichtesten Wassers, \mathcal{A} die spezifische Schwere und ω die Fläche des Querschnitts des Körpers. Das Zeichen δ deutet willkürliche, jedoch mit dem Zusammenhange der Theile der Linie vereinbare Veränderungen an; die durch S angedeutete Integration ist die auf ihre ganze Länge ausgelehnte. Diese Zeichen sind, so wie auch die Gleichung (1), die Lagrange'schen.

Indem man statt $\delta \varphi$ und δds ihre Ausdrücke durch willkürliche Veränderungen von dx und dy , nämlich

$$\delta \varphi = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{ds^2} = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{ds^2}$$

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy$$

einführt und die Gleichung (1) theilweise integrirt, nimmt sie die Form an:

$$0 = E \cdot \delta \varphi + \left(\frac{dE}{ds^2} dy + F' \cdot \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \left(- \frac{dE}{ds^2} dx + F' \cdot \frac{dy}{ds} \right) \delta y \\ + S \left[- \left(d \cdot \frac{dE}{ds^2} dy + d \cdot \frac{F' dx}{ds} \right) \delta x + \left(k\mathcal{A}\omega ds + d \cdot \frac{dE}{ds^2} dx - d \cdot \frac{F' dy}{ds} \right) \delta y \right] \dots \dots \dots (2)$$

Da die Variationen δx , δy für unbestimmte Punkte der Linie willkürlich bleiben müssen, so müssen die Grössen, in welche sie unter dem Integralzeichen multiplicirt sind, verschwinden. Dadurch erhält man die beiden Gleichungen:

$$0 = d \cdot \frac{\delta E \delta y}{\delta s^2} + d \cdot \frac{F \delta x}{\delta s} \\ k \mathcal{A} \omega \delta s = -d \cdot \frac{\delta E \delta x}{\delta s^2} + d \cdot \frac{F \delta y}{\delta s},$$

deren Integrale, wenn c , c' willkürliche Constanten bedeuten,

$$c = \frac{\delta E y}{\delta s^2} + F \frac{\delta x}{\delta s} \\ c' + k f \mathcal{A} \omega \delta s = -\frac{\delta E x}{\delta s^2} + F \frac{\delta y}{\delta s}$$

sind. Man erlangt dadurch die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} dE &= c dy - c' dx - k dx f \mathcal{A} \omega \delta s \\ F &= c \frac{\delta x}{\delta s} + c' \frac{\delta y}{\delta s} + k \frac{\delta y}{\delta s} f \mathcal{A} \omega \delta s \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

und wenn man dE integrirt:

$$E = cy - c'x + c'' - k \int dx f \mathcal{A} \omega \delta s \dots (4)$$

Die Constanten c' , c'' hätte man weglassen, nämlich als in den auszuführenden Integrationen enthalten ansehen können; ihre eingeführten Bezeichnungen sollen dem Anfange der Integrale mit $s = 0$ angemessen verstanden werden.

Durch die Gleichungen (3) reducirt sich der ausser dem Integralzeichen befindliche Theil der Gleichung (2) auf:

$$E \delta \varphi + c \delta x + (c' + k f \mathcal{A} \omega \delta s) \delta y;$$

von dem Anfange bis zum Ende der Linie genommen ergibt er:

$E'' \delta \varphi'' + c \delta x'' + (c' + k f \mathcal{A} \omega \delta s) \delta y'' - E' \delta \varphi' - c \delta x' - c' \delta y'$
wo E' , φ' , x' , y' für den Anfang, E'' , φ'' , x'' , y'' für das Ende gelten. Wirken an diesen Punkten noch äussere Kräfte, nämlich A' , A'' nach der Richtung der x , B' , B'' nach der Richtung der y , und Drehungskräfte, deren Momente C' , C'' sind, so setzen diese dem Ausdrucke noch hinzu:

$$C'' \delta \varphi'' + A'' \delta x'' + B'' \delta y'' + C' \delta \varphi' + A' \delta x' + B' \delta y'$$

so dass er, vollständig,

$$(C'' + E'') \delta \varphi'' + (A'' + c) \delta x'' + (B'' + c' + k f \mathcal{A} \omega \delta s) \delta y'' \\ + (C' - E') \delta \varphi' + (A' - c) \delta x' + (B' - c') \delta y'$$

wird. Sollen die an den Endpunkten wirkenden Kräfte allen übrigen das Gleichgewicht halten, so muss dieser Ausdruck verschwinden, was, wegen der Unbestimmtheit der Werthe der 6 Variationen,

$$\left. \begin{aligned} A' &= c & B' &= c' & C' &= E' \\ A'' &= -c & B'' &= -c' - k f \mathcal{A} \omega \delta s & C'' &= -E' \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ergibt und dadurch die statische Bedeutung der durch die Integrationen eingeführten Constanten c , c' , c'' erklärt.

3.

Die Gleichung (4) führt zu der Kenntniss der Figur der Linie, wenn bekannt ist, welche Verbindung zwischen ihrer Krümmung und dem Momente E stattfindet. Wenn ihr Krümmungshalbmesser durch ρ bezeichnet und angenommen wird, dass er durch die Kräfte, welche die Linie gebogen haben, aus dem ohne ihre Wirkung stattfindenden ρ , entstanden ist, so setze ich als bekannt voraus, dass das Moment der Kraft, welche jene Krümmung in diese zurückzuführen strebt,

$$E = \frac{\delta x}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right)$$

ist. In diesem Ausdrucke bedeutet $\frac{1}{\rho}$ die Verkürzung, welche die Längeneinheit der Materie des Körpers, dem die hier betrachtete Linie entspricht, erfährt, indem die auf ihr senkrechte Flächeneinheit durch die Gewichtseinheit gedrückt wird; ich habe sie als einen Bruch bezeichnet, dessen Zähler λ ich als beständig annehmen werde, während die Annahme einer Abhängigkeit des Nenners δ von den Coordinaten das Mittel gibt, Verschiedenheiten der Elasticität des Körpers an verschiedenen Punkten in die Betrachtung aufzunehmen zu können. Doch scheinen vorhandene Versuche anzudeuten, dass δ für jedes Metall, trotz Verschiedenheiten seiner Dichtigkeit, Bearbeitung und Härtung, = 1 angenommen werden kann. Die Grösse ν hängt von der Figur und Grösse des Querschnitts ab, ist also beständig oder veränderlich, je nachdem der Körper gleichbleibende, oder mit s veränderliche Querschnitte hat. Die Krümmungshalbmesser ρ , ρ' sind positiv oder negativ anzunehmen, je nachdem der Mittelpunkt der Krümmung in der durch $\varphi + 90^\circ$ oder durch $\varphi - 90^\circ$ bestimmten Richtung liegt. — Indem man für ρ seinen Ausdruck setzt, wird also die Gleichung (4):

$$\frac{\delta x}{\lambda} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{dx^2 y}{\delta s^2} \right) = cy - c'x + c'' - k \int dx f \mathcal{A} \omega \delta s \dots (6)$$

Diese Gleichung werde ich in den beiden, hier Anwendung findenden Voraussetzungen, einer ohne den Einfluss der Schwere auf das System geraden, und einer kreisförmigen Linie integrieren. Indem man nicht weiss, ob die Linien des Systems, ohne ihre Verbindung mit einander, dieselben Figuren behalten würden, die sie in dieser Verbindung haben, berechtigt die erste Voraussetzung nicht, ρ , als unendlich gross,

die andere nicht, es als unveränderlich anzunehmen, was nur erlaubt sein würde, wenn das Nichtvorhandensein von Spannungen in dem wagrecht liegenden Kreise in der Untersuchung vorausgesetzt werden sollte. Ich werde daher φ , als eine veränderliche Grösse von unbekanntem Gesetze betrachten.

In dem Falle einer näherungsweise geraden Linie werde ich ihre Figur durch neue rechtwinklichte Coordinaten ξ , η bestimmen, deren Mittelpunkt der

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{d\xi d^2\eta}{ds^3} = \frac{1}{\delta} \frac{E'}{\nu} + (c \sin \varphi' - c' \cos \varphi') \frac{1}{\delta} \frac{k}{\nu} + (c \cos \varphi' + c' \sin \varphi') \frac{1}{\delta} \frac{\eta}{\nu} - \frac{k \lambda \cos \varphi'}{\delta \cdot \nu} \int d\xi \int \mathcal{A} \omega ds + \frac{k \lambda \sin \varphi'}{\delta \cdot \nu} \int d\eta \int \mathcal{A} \omega ds$$

verwandelt. Da aber die Linie in Folge sehr grossen Widerstandes, den sie ihrer Biegung leistet, oder des sehr kleinen Werthes von $\frac{1}{\delta \nu}$, sehr wenig von der geraden abweicht, und es kein Interesse hat, Grössen in

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\delta} \frac{E'}{\nu} - (c \sin \varphi' - c' \cos \varphi') \frac{1}{\delta} \frac{k}{\nu} + \frac{k \lambda \cos \varphi'}{\delta \cdot \nu} \int ds \int \mathcal{A} \omega ds$$

zusammenziehen. Ihre beiden Integrale sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{ds} &= \varphi - \varphi' = \int \frac{ds}{\varphi} - \lambda E' \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} - \lambda (c \sin \varphi' - c' \cos \varphi') \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} + k \lambda \cos \varphi' \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} \int ds \int \mathcal{A} \omega ds \\ \eta &= \int ds \int \frac{ds}{\varphi} - \lambda E' \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} - \lambda (c \sin \varphi' - c' \cos \varphi') \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} + k \lambda \cos \varphi' \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} \int ds \int \mathcal{A} \omega ds \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Sie sind vollständig, weil eine der im Allgemeinen erforderlichen Constanten, durch die Annahme des Anfanges, sowohl von s , als auch der Integrale, an dem durch x' , y' bestimmten Punkte, die andere durch die getroffene Wahl der Axe der ξ verschwindet.

Nachdem hierdurch die Curve bestimmt worden ist, in welche die, ohne die Wirkung der Schwere auf das System gerade Linie, durch diese Wirkung verwandelt wird, ist noch die Relation aufzusuchen, welche zwischen s und der Entfernung vom Anfangspunkte (σ) stattfindet, die der durch s bestimmte Punkt ohne dieselbe Wirkung besitzt. Die aus der Kraft F entstehende

$$d\sigma = ds + \lambda (c \cos \varphi' + c' \sin \varphi') \frac{d\xi}{\delta \cdot \omega} - \lambda (c \sin \varphi' - c' \cos \varphi') \frac{d\eta}{\delta \cdot \omega} + k \lambda \sin \varphi' \frac{d\xi}{\delta \cdot \omega} \int \mathcal{A} \omega ds + k \lambda \cos \varphi' \frac{d\eta}{\delta \cdot \omega} \int \mathcal{A} \omega ds$$

und durch Weglassung von Grössen, welche die allein zu berücksichtigende Ordnung überschreiten, in

$$d\sigma = ds + \lambda (c \cos \varphi' + c' \sin \varphi') \frac{ds}{\delta \cdot \omega} + k \lambda \sin \varphi' \frac{ds}{\delta \cdot \omega} \int \mathcal{A} \omega ds$$

verwandelt, wovon das von $s = 0$ anfangende Integral

$$\sigma = s + \lambda (c \cos \varphi' + c' \sin \varphi') \int \frac{ds}{\delta \cdot \omega} + k \lambda \sin \varphi' \int \frac{ds}{\delta \cdot \omega} \int \mathcal{A} \omega ds \dots \dots \dots (8)$$

ist.

In dem Falle einer näherungsweise kreisförmigen Linie soll ihre Figur durch eine Gleichung zwischen den Polarcordinaten r und u , welche mit x und y durch

$$x = r \cos u \quad y = r \sin u$$

Bessel's Abhandlungen. 2. Bd.

Anfangspunkt der Linie ist, und deren erstere auf der Tangente an diesen Punkt, die andere nach derselben Seite positiv gezählt wird, nach welcher der Winkel φ wächst. Ich werde also

$$\begin{aligned} \xi &= (x-x') \cos \varphi' + (y-y') \sin \varphi' \\ \eta &= -(x-x') \sin \varphi' + (y-y') \cos \varphi' \end{aligned}$$

einführen, wodurch (6) sich in

der Untersuchung beizubehalten, deren Ordnung höher ist als die Ordnung von η , so kann man den Unterschied zwischen ξ und s , und ebenso $\frac{1}{\delta \nu}$ vernachlässigen und dadurch die Gleichung in

Änderung der Längeneinheit verhält sich wie diese Kraft und die Ausdehnbarkeit des Materials, und umgekehrt wie die Fläche des Querschnitts des Körpers, der hier durch die Linie vertreten wird; oder zwischen ds und $d\sigma$ ist die Gleichung:

$$d\sigma = ds \left(1 + \frac{1}{\delta \cdot \omega} F \right),$$

oder dem Ausdrucke von F (3) gemäss:

$$d\sigma = ds + \frac{1}{\delta \cdot \omega} (c dx + c' dy + k dy \int \mathcal{A} \omega ds).$$

Durch die Einführung der Coordinaten ξ , η wird sie in

verbunden sind, bestimmt werden. Indem man den Ausdruck des Krümmungshalbmessers ρ durch Polarcordinaten, statt des in (6) angewandten durch rechtwinklichte, schreibt, ändert sich diese Gleichung in:

$$\frac{\delta v}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{1 + 2 \left(\frac{dr}{rdw} \right)^2 - \frac{d^2r}{r^2 dw^2}}{r \left(1 + \left(\frac{dr}{rdw} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} = cr \sin u - c'r \cos u + c'' + k'f(r \sin u du - \cos u dr) f \mathcal{A} \omega ds$$

und, nach Weglassung des die zu beobachtende Grenze der Näherung überschreitenden, in:

$$\frac{\delta v}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} + \frac{d^2r}{r^2 dw^2} \right\} = cr \sin u - c'r \cos u + c'' + kr f \sin u du f \mathcal{A} \omega ds$$

Wenn man den Halbmesser der Linie in ihrem nicht durch die Schwere veränderten Zustande, durch h , den ihrem Anfangspunkte zugehörigen Werth von u durch

$$r - h + \frac{d^2r}{dw^2} = h \left(1 - \frac{h}{\rho} \right) + \frac{\lambda h^3}{\delta \cdot v} [c \sin(u' + w) - c' \cos(u' + w)] + \frac{\lambda h h'}{\delta \cdot v} c'' + \frac{\lambda h h'}{\delta \cdot v} \int \sin(u' + w) dw f \mathcal{A} \omega ds$$

wofür ich, um abzukürzen,

$$r - h + \frac{d^2r}{dw^2} = h W$$

schreiben werde. Die beiden Integrale dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r}{h} &= 1 + f \cos w + f' \sin w + \sin w f W \cos w dw - \cos w f W \sin w dw \\ \frac{dr}{h dw} &= -f \sin w + f' \cos w + \cos w f W \cos w dw + \sin w f W \sin w dw \end{aligned}$$

bestimmen, das erste die Figur der Curve, das zweite ihre Winkel φ mit der Axe der x , welche man aus

$$\frac{dr}{h dw} = u + 90^\circ - \varphi$$

erhält. Für den Anfangspunkt der Curve, oder für $r = r'$ und $w = 0$, ergeben sie, wenn die beiden, noch

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{h} - 1 &= \left(\frac{r'}{h} - 1 \right) \cos w + (u' + 90^\circ - \varphi') \sin w + \sin w f W \cos w dw - \cos w f W \sin w dw \\ u + 90^\circ - \varphi &= - \left(\frac{r'}{h} - 1 \right) \sin w + (u' + 90^\circ - \varphi') \cos w + \cos w f W \cos w dw + \sin w f W \sin w dw \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Die Vergleichung der Bögen der ursprünglichen und der durch die Schwere veränderten Curve erhält man, wie in dem vorigen Falle, durch die Gleichung:

$$d\sigma = ds + \frac{1}{h \delta \omega} (cdx + c'dy + kdy f \mathcal{A} \omega ds),$$

welche, wenn die dw entsprechende Veränderung des Bogens der ursprünglichen Curve durch $h d\mu$ bezeichnet wird:

$$h d\mu = ds + \frac{1}{h \delta \omega} (cdx + c'dy + kdy f \mathcal{A} \omega ds)$$

$$\frac{1}{h \delta \omega} [cdx + c'dy + kdy f \mathcal{A} \omega ds] = \lambda [-c \sin(u' + w) + c' \cos(u' + w) + k \cos(u' + w) f \mathcal{A} \omega ds] \frac{dw}{\delta \omega}$$

und wenn man, um abzukürzen, $W dw$ dafür schreibt, auch, im Ausdrucke von $d\mu$, r durch seinen Ausdruck (9) ersetzt, und mit $w = 0$ anfangend integrirt:

$$\mu = w + \left(\frac{r'}{h} - 1 \right) \sin w + (u' + 90^\circ - \varphi') (1 - \cos w) - \cos w f W \cos w dw - \sin w f W \sin w dw + f(W + W') dw$$

Die Summe dieses Ausdrucks und des zweiten (9) ist: $u + 90^\circ - \varphi + \mu = w + u' + 90^\circ - \varphi' + f(W + W') dw$ und es folgt daraus, da $u = u' + w$ ist,

$$\varphi' - \varphi + \mu = f(W + W') dw \dots (10)$$

u' bezeichnet, und $u' + w$ für u schreibt, auch nur die Grössen der ersten Ordnung berücksichtigt, erhält man daraus:

auszuführenden Integrationen mit w anfangend gemacht werden, die Ausdrücke der beiden Constanten f, f' :

$$\frac{r'}{h} = 1 + f, \quad u' + 90^\circ - \varphi' = f'$$

durch deren Substitution man erlangt:

und, da

$$ds = rdw \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{rdw} \right)^2} = rdw$$

ist, auch

$$d\mu = \frac{r}{h} dw + \frac{1}{h \delta \omega} (cdx + c'dy + kdy f \mathcal{A} \omega ds)$$

geschrieben werden kann. Mit hier hinreichender Näherung hat man

4.

Die Ausdrücke (7) bis (10) setzen die Veränderungen, welche jede Linie des Systems durch die Einwirkung der Schwere erfährt, in Verbindung mit den

ihnen zugehörigen Constanten c, c', c'' , statt deren letzter auch $E' = cy' - c'x' + c''$ angewandt werden kann. Ehe ich diese Verbindung benutze, muss ich die Bezeichnungen erklären, wodurch ich das zu den vielen verschiedenen Theilen des Ganzen Gehörige unterscheiden werde.

Wenn m die Zahl der Speichen bedeutet und die geraden Verbindungen der Speichen ein regelmässiges m -Eck bilden, so hat das, statt des Körpers selbst angenommene Liniensystem, ausser den m -Anfangspunkten der Speichen, noch $2m$ besondere Punkte; nämlich die Punkte wo Speichen und Querverbindungen, und wo Speichen und Umfang zusammentreffen. Die Anfangspunkte der Speichen werde ich

$$C, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$$

nennen; die Punkte des Zusammentreffens der Speichen und Querverbindungen

$$B, B_1, B_2, \dots, B_{m-1}$$

und die Punkte des Zusammentreffens der Speichen und des Umfanges

$$A, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$$

Diese Punkte werden, in wagerechter Lage der Ebene des Systems, auf drei concentrischen Kreisen liegend angenommen, deren Halbmesser durch resp. h'', h', h bezeichnet werden sollen. In dieser Lage sind die Linien $CBA, C_1B_1A_1$ u. s. w. gerade, und ihre Winkel mit der Axe der x sollen durch

$$u, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$$

bezeichnet werden, so wie $u_1 - u = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \text{etc.}$. . . durch θ .

In der lothrechtchen Lage der Ebene, in welcher dieselben Linien im Allgemeinen krumm werden, sind u, u_1, u_2, \dots ihre Winkel mit der Axe der x , an ihren Anfangspunkten C ; ihre geänderten Werthe an den Punkten B sollen durch

$$u + \lambda q', u_1 + \lambda q'_1, u_2 + \lambda q'_2, \dots, u_{m-1} + \lambda q'_{m-1},$$

an den Punkten A durch

$$u + \lambda q, u_1 + \lambda q_1, u_2 + \lambda q_2, \dots, u_{m-1} + \lambda q_{m-1}$$

bezeichnet werden. Diese Punkte entfernen sich von den Tangenten an den Anfangspunkten C um Grössen, welche ich

$$\text{für die Punkte } B \text{ durch } \lambda h p', \lambda h p'_1, \lambda h p'_2, \dots, \lambda h p'_{m-1}$$

$$\text{,, ,, ,, } A \text{ ,, } \lambda h p, \lambda h p_1, \lambda h p_2, \dots, \lambda h p_{m-1}$$

$$q'_i = -[x'_i \sin u_i - y'_i \cos u_i] \int \frac{ds}{\delta \cdot v} - x'_i h \int \frac{ds}{\delta \cdot v} + \cos u_i k \int \frac{ds}{\delta \cdot v} \int ds \int \Delta \omega ds + \frac{1}{2} \int \frac{ds}{\phi}$$

$$h p'_i = -[x'_i \sin u_i - y'_i \cos u_i] \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot v} - x'_i h \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot v} + \cos u_i k \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot v} \int ds \int \Delta \omega ds + \frac{1}{2} \int ds \int \frac{ds}{\phi}$$

$$h r'_i = -[x'_i \cos u_i + y'_i \sin u_i] \int \frac{ds}{\delta \cdot \omega} - \sin u_i k \int \frac{ds}{\delta \cdot \omega} \int \Delta \omega ds$$

bezeichnen werde; für ihre geänderten Entfernungen vom Mittelpunkte sollen die Zeichen

$$h' + \lambda h r', h' + \lambda h r'_1, h' + \lambda h r'_2, \dots, h' + \lambda h r'_{m-1} \\ \text{und } h + \lambda h r, h + \lambda h r_1, h + \lambda h r_2, \dots, h + \lambda h r_{m-1}$$

angewandt werden.

Hierdurch sind $6m$ Bezeichnungen, sowohl für die Coordinaten der $2m$ besonderen Punkte, als auch für die Richtungen der in ihnen zusammentreffenden Linien eingeführt. Es sind noch $12m$ Bezeichnungen erforderlich, die die Werthe der Constanten c, c', E' , in ihrer Beziehung zu jeder der $4m$ Linien des Systems unterscheiden. Für die Theile BA der Speichen sollen

$$\text{statt } c \dots x, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$$

$$\text{,, } c' \dots y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$$

$$\text{,, } E' \dots h z, h z_1, h z_2, \dots, h z_{m-1}$$

eingeführt werden; für die Theile CB derselben:

$$\text{statt } c \dots x', x'_1, x'_2, \dots, x'_{m-1}$$

$$\text{,, } c' \dots y', y'_1, y'_2, \dots, y'_{m-1}$$

$$\text{,, } E' \dots h z', h z'_1, h z'_2, \dots, h z'_{m-1}$$

für die Bögen des Umfanges zwischen der 0^{ten} und 1^{ten} Speiche, zwischen der 1^{ten} und 2^{ten} u. s. w.:

$$\text{statt } c \dots x'', x''_1, x''_2, \dots, x''_{m-1}$$

$$\text{,, } c' \dots y'', y''_1, y''_2, \dots, y''_{m-1}$$

$$\text{,, } E' \dots h z'', h z''_1, h z''_2, \dots, h z''_{m-1}$$

für die Querverbindungen zwischen denselben Paaren der Speichen:

$$\text{statt } c \dots x''', x'''_1, x'''_2, \dots, x'''_{m-1}$$

$$\text{,, } c' \dots y''', y'''_1, y'''_2, \dots, y'''_{m-1}$$

$$\text{,, } F \dots h z''', h z'''_1, h z'''_2, \dots, h z'''_{m-1}$$

5.

Ich werde jetzt die Formeln des 3. §'s anwenden, um dadurch zur Kenntniss der Relationen zwischen den $6m$ Grössen q, p, r und den $12m$ Constanten x, y, z zu gelangen. Die Formeln (7) und (8) werden auf den Endpunkt des Theils CB der i^{ten} Speiche angewandt, wenn die in ihnen vorkommenden

$$c, c', E', \varphi', \sigma, s, \eta, \varphi$$

resp. in

$x'_i, y'_i, h z'_i, u_i, h - h'', h - h'' + \lambda h r'_i, \lambda h p'_i, u_i + \lambda q'_i$ verändert und die Integrale von $s = 0$ bis $s = h - h''$ genommen werden. Man erhält dadurch

Um diese Ausdrücke kürzer schreiben zu können, werde ich auch für die darin vorkommenden Integrale Bezeichnungen einführen, nämlich:

$$\frac{1}{h} \int \frac{ds}{\delta \cdot \omega} = a_i \quad \frac{k}{h} \int \frac{ds}{\delta \cdot \omega} \int \mathcal{A} \omega ds = f_i$$

$$\int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} = C_i \quad \frac{1}{h} \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} = c_i$$

$$h \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} = D_i \quad \int ds \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} = d_i$$

$$k \int \frac{ds}{\delta \cdot \nu} \int ds \int \mathcal{A} \omega ds = E_i \quad \frac{k}{h} \int ds \int ds \int \mathcal{A} \omega ds = e_i$$

$$\frac{1}{h} \int \frac{ds}{\nu} = T_i \quad \frac{1}{kh} \int ds \int \frac{ds}{\nu} = t_i$$

wodurch die drei Formeln:

$$\left. \begin{aligned} r_i' &= -a_i [x_i' \cos u_i + y_i' \sin u_i] \dots - f_i \sin u_i \\ p_i' &= -c_i [x_i' \sin u_i - y_i' \cos u_i] - d_i x_i' + e_i \cos u_i + t_i \\ q_i' &= -C_i [x_i' \sin u_i - y_i' \cos u_i] - D_i x_i' + E_i \cos u_i + T_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

werden.

Die Werthe von a_i, f_i, C_i u. s. w. sind für alle Speichen gleich, oder für die verschiedenen verschieden, je nachdem diese, in gleichen Entfernungen von dem Mittelpunkte, gleiche oder verschiedene Beschaffenheit haben. In dem Falle jedes sorgfältig gemachten Instruments kann eine gleiche Figur der Speichen, und damit die Gleichheit von ω und ν für alle vorausgesetzt werden; aber die Rechtmässigkeit der Voraussetzung ihrer gleichen Beschaffenheit in Beziehung auf \mathcal{A} und δ kann nicht äusserlich erkannt werden. Wenn man diese Voraussetzung machen will, so kann man daher die Ordnungszahlen i der Grössen a_i, f_i, C_i, \dots weglassen; aber T_i und t_i müssen, wenn sie nicht als verschwindend angenommen werden sollen, jedenfalls als wirklich von i abhängig betrachtet werden. Denn abgesehen von dem Fehlen eines Grundes, unabsichtlich entstandene Spannungen, aus welchen allein sie hervorgehen, in allen Speichen als gleich anzunehmen, würde

sogar diese Gleichheit das Verschwinden sämtlicher T und t zur offenbaren Folge haben.

Die auf die Theile CB der Speichen bezogenen Integrale a_i, f_i, C_i, \dots habe ich mit dem Accente versehen, um für die sich auf die Theile BA beziehenden gleiche Zeichen ohne Accent anwenden zu können. Bedeuten daher a_i, f_i, C_i, \dots die ähnlichen Integrale, auf die Theile BA der Speichen angewandt und von $s = 0$ bis $s = h - h'$ genommen, schreibt man sie statt $a_i', f_i', C_i' \dots$ in den Formeln (11), und eben so $x_i, y_i, z_i, u_i + \lambda q_i$ statt x_i', y_i', z_i', u_i , so drücken die rechts von den Gleichheitszeichen befindlichen Theile dieser Formeln die Veränderungen der Theile BA der Speichen, bezogen auf ihre Anfangspunkte B und die daselbst stattfindende Richtung aus; d. i.

$$r_i - r_i'; \quad p_i - p_i' - \left(1 - \frac{h}{h'}\right) q_i'; \quad q_i - q_i'.$$

Indessen kann man die Veränderung von u_i in $u_i + \lambda q_i'$ unterlassen, ohne dadurch einen Fehler der ersten Ordnung zu begehen. Man erhält also:

$$\left. \begin{aligned} r_i - r_i' &= -a_i [x_i \cos u_i + y_i \sin u_i] \dots - f_i \sin u_i \\ p_i - p_i' - \left(1 - \frac{h}{h'}\right) q_i' &= -c_i [x_i \sin u_i - y_i \cos u_i] - d_i x_i + e_i \cos u_i + t_i \\ q_i - q_i' &= -C_i [x_i \sin u_i - y_i \cos u_i] - D_i x_i + E_i \cos u_i + T_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Um die Formeln (7) und (8) auf die Querverbindung B_i, B_{i+1} der Speichen anzuwenden, müssen rechts von dem Gleichheitszeichen $x_i''', y_i''', h x_i'''$ statt $c, c', E'; u_i + \lambda q_i' + 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$ statt u_i geschrieben, und die in ihnen vorkommenden Integrale durch

$$a_i'', f_i'', C_i'', a_i', D_i'', a_i'', E_i'', c_i'', T_i'', t_i''$$

bezeichnet werden, welche Zeichen also die Integrale, auf die Querverbindung bezogen und auf ihre ganze Länge ausgedehnt, oder von $s = 0$ bis $s = 2h' \sin \frac{1}{2}\theta$ genommen, bedeuten. Die so veränderten Formeln (11) oder (12) drücken, die erste die Veränderung aus, welche die Länge der Querverbindung, in Theilen von h gemessen, erfährt; die zweite die eben so gemessene

Entfernung ihres Endpunktes B_{i+1} von der Tangente an ihren Anfangspunkt B_i ; die dritte den Winkel der Richtung ihres letzten Elements mit dieser Tangente. Man erhält also die verlangten Relationen, indem man diese Aenderungen durch die schon eingeführten $r_i, p_i, q_i, r_{i+1}, p_{i+1}, q_{i+1}$ ausdrückt und diese Ausdrücke den vorigen gleich setzt. Bezieht man den Punkt B_{i+1} auf neue Coordinatenaxen, welche sich im Punkte B_i durchschneiden, und deren erste die Tangente der Linie B_i, B_{i+1} an diesem Punkte ist, also den Winkel $u_i + \lambda q_i' + 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$ mit der Axe der x macht, die zweite der um 90° grösseren, so werden die ihnen parallelen Coordinaten der Punkte B_{i+1} :

$(h' + \lambda h r'_{i+1}) \sin(\frac{1}{2}\theta - \lambda q'_i) + \lambda h p'_{i+1} \cos(\frac{1}{2}\theta - \lambda q'_i) + (h' + \lambda h r'_i) \sin(\frac{1}{2}\theta + \lambda q'_i) - \lambda h p'_i \cos(\frac{1}{2}\theta + \lambda q'_i)$
 und $-(h' + \lambda h r'_{i+1}) \cos(\frac{1}{2}\theta - \lambda q'_i) + \lambda h p'_{i+1} \sin(\frac{1}{2}\theta - \lambda q'_i) + (h' + \lambda h r'_i) \cos(\frac{1}{2}\theta + \lambda q'_i) + \lambda h p'_i \sin(\frac{1}{2}\theta + \lambda q'_i)$
 und wenn das erste Ordnung Ueberschreitende weggelassen wird:

$$2h' \sin \frac{1}{2}\theta + \lambda (r'_i + r'_{i+1}) \sin \frac{1}{2}\theta - \lambda (p'_i - p'_{i+1}) \cos \frac{1}{2}\theta$$

und $\lambda (r'_i - r'_{i+1}) \cos \frac{1}{2}\theta + \lambda (p'_i + p'_{i+1}) \sin \frac{1}{2}\theta - \lambda q'_i \cdot \frac{2h'}{h} \sin \frac{1}{2}\theta$.

Hierdurch sind die links von den Gleichheitszeichen stehenden Theile der beiden ersten Gleichungen gegeben; der ähnliche Theil der dritten Gleichung ist offenbar $-\lambda (q'_{i+1} - q'_i)$. Indem man in den rechts von dem

$$\left. \begin{aligned} & (r'_{i+1} + r'_i) \sin \frac{1}{2}\theta + (p'_{i+1} - p'_i) \cos \frac{1}{2}\theta - a'' [x'' \sin(u_i + \frac{1}{2}\theta) - y'' \cos(u_i + \frac{1}{2}\theta)] - f'' \cos(u_i + \frac{1}{2}\theta) \\ & - (r'_{i+1} - r'_i) \cos \frac{1}{2}\theta + (p'_{i+1} + p'_i) \sin \frac{1}{2}\theta - g_i \frac{2h'}{h} \sin \frac{1}{2}\theta - c'' [x'' \cos(u_i + \frac{1}{2}\theta) + y'' \sin(u_i + \frac{1}{2}\theta)] - d'' z'' - e'' \sin(u_i + \frac{1}{2}\theta) + f'' \\ & q'_{i+1} - q'_i - C'' [x'' \cos(u_i + \frac{1}{2}\theta) + y'' \sin(u_i + \frac{1}{2}\theta)] - I'' z'' - E'' \sin(u_i + \frac{1}{2}\theta) + T'' \end{aligned} \right\} (13)$$

Diese Relationen zwischen den, die Aenderungen des Bogens A, A_{i+1} des Umkreises bestimmenden Constanten und den Coordinaten seiner Endpunkte, sowie auch den daselbst stattfindenden Richtungen, werden

$$\left(\frac{r''}{h} - 1 \right) - \left(\frac{r'}{h} - 1 \right) \cos \theta - (u' + 90^\circ - q') \sin \theta = \sin \theta f W \cos u' d u - \cos \theta f W \sin u' d u$$

$$u'' + 90^\circ - q'' + \left(\frac{r''}{h} - 1 \right) \sin \theta - (u' + 90^\circ - q') \cos \theta = \cos \theta f W \cos u' d u + \sin \theta f W \sin u' d u$$

$$\varphi' - \varphi'' + \theta = f(W + W') d u$$

und wenn die im 4. § eingeführten Bezeichnungen, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{r''}{h} - 1 &= \lambda r_{i+1} & \frac{r'}{h} - 1 &= \lambda r_i \\ u'' &= u_{i+1} + \lambda p_{i+1} & u' &= u_i + \lambda p_i \\ \varphi'' &= u_{i+1} + \lambda q_{i+1} + 90^\circ & \varphi' &= u_i + \lambda q_i + 90^\circ \end{aligned}$$

in ihnen substituiert werden:

$$\begin{aligned} r_{i+1} \cos \frac{1}{2}\theta - (p_{i+1} - q_{i+1}) \sin \frac{1}{2}\theta - r_i \cos \frac{1}{2}\theta - (p_i - q_i) \sin \frac{1}{2}\theta &= \frac{1}{\lambda} \int W \sin(\frac{1}{2}\theta - u) d u \\ r_{i+1} \sin \frac{1}{2}\theta + (p_{i+1} - q_{i+1}) \cos \frac{1}{2}\theta + r_i \sin \frac{1}{2}\theta - (p_i - q_i) \cos \frac{1}{2}\theta &= \frac{1}{\lambda} \int W \cos(\frac{1}{2}\theta - u) d u \\ -q_{i+1} + q_i &= \frac{1}{\lambda} \int (W + W') d u \end{aligned}$$

Substituiert man in diesen Ausdrücken die von W und W' (§ 3), nämlich:

$$W = \frac{1}{2} \frac{h \lambda}{\delta v} [c \sin(u' + w) - c' \cos(u' + w)] + \frac{1}{2} \frac{h}{\delta v} [E' - c h \sin u' + c' h \cos u'] + \frac{2 \lambda h h}{\delta v} \int \sin(u' + w) d u f c \omega d s + 1 - \frac{h}{\delta}$$

$$W' = -\frac{1}{\delta \omega} [c \sin(u' + w) - c' \cos(u' + w)] + \frac{h}{\delta \omega} \cos(u' + w) f c \omega d s$$

bezeichnet man die Werthe, welche die von $w = 0$ bis $w = \theta$ genommenen Integrale für die Bogen A, A_{i+1} haben, folgendermassen:

$$h h \int [\cos \frac{1}{2}\theta - \cos(\frac{1}{2}\theta - w)] \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta - w)}{\delta v} d w = a''$$

$$h h \int [\sin \frac{1}{2}\theta - \sin(\frac{1}{2}\theta - w)] \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta - w)}{\delta v} d w = b''$$

Gleichheitszeichen stehenden Theilen $\lambda q'_i$ vernachlässigt, also $u_i + 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$ statt $u_i + \lambda q'_i + 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$ schreibt, ändert man sie nicht in der in Betracht kommenden Grössenordnung, und erhält

durch die Formeln (9) und (10) gegeben. Diese Formeln, auf das Ende des Bogens angewandt, setzen die darin vorkommenden Integrale von $w = 0$ und $w = \theta$ genommen voraus, und werden:

$$\begin{aligned} r_{i+1} - r_i \cos \theta - (p_i - q_i) \sin \theta &= \frac{1}{\lambda} \int W \sin(\theta - u) d u \\ p_{i+1} - q_{i+1} + r_i \sin \theta - (p_i - q_i) \cos \theta &= \frac{1}{\lambda} \int W \cos(\theta - u) d u \\ -q_{i+1} + q_i &= \frac{1}{\lambda} \int (W + W') d u \end{aligned}$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$h h \int \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta - w)}{\delta v} d w = c''$$

$$h h \int \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta - w)}{\delta v} d w f \sin(\frac{1}{2}\theta - w) d u f c \omega d s = g_i$$

$$h h \int \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta - w)}{\delta v} d w f \cos(\frac{1}{2}\theta - w) d u f c \omega d s = g'_i$$

$$\begin{aligned}
 \int \left(1 - \frac{h}{\rho}\right) \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw &= t'' \\
 hh \int \left[\cos \frac{1}{2} \vartheta - \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)\right] \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta v} dw &= a'' \\
 hh \int \left[\sin \frac{1}{2} \vartheta - \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)\right] \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta v} dw &= b'' \\
 hh \int \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta v} dw &= c'' \\
 khh \int \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta v} dw f \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw f \mathcal{A} \omega ds &= g \\
 kh \int \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta v} dw f \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw f \mathcal{A} \omega ds &= g' \\
 \int \left(1 - \frac{h}{\rho}\right) \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw &= t''
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{aligned}
 \int \frac{hh}{\delta v} \left[\cos \frac{1}{2} \vartheta - \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)\right] + \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta \omega} \right] dw &= A'' \\
 \int \frac{hh}{\delta v} \left[\sin \frac{1}{2} \vartheta - \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)\right] + \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta \omega} \right] dw &= B'' \\
 hh \int \frac{dw}{\delta v} &= C'' \\
 k \int \frac{hh}{\delta v} \left[\sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw f \mathcal{A} \omega ds - \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta \omega} f \mathcal{A} \omega ds \right] dw &= G \\
 k \int \frac{hh}{\delta v} \left[\cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw f \mathcal{A} \omega ds + \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right)}{\delta \omega} f \mathcal{A} \omega ds \right] dw &= G' \\
 \int \left(1 - \frac{h}{\rho}\right) dw &= T''
 \end{aligned} \right.$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{l} \int W \sin \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw &= a'' [-c \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + c' \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta)] + b'' [c \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + c' \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta)] + c'' \frac{E'}{h} \\
 &\quad - g \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + g' \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + G \\
 \frac{1}{l} \int W \cos \left(\frac{1}{2} \vartheta - w\right) dw &= a'' [-c \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + c' \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta)] + b'' [c \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + c' \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta)] + c'' \frac{E'}{h} \\
 &\quad - g \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + g' \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + G' \\
 \frac{1}{l} \int (W + W'') dw &= A'' [-c \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + c' \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta)] + B'' [c \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + c' \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta)] + C'' \frac{E'}{h} \\
 &\quad - G \cos (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + G' \sin (u' + \frac{1}{2} \vartheta) + T''
 \end{aligned}$$

Indem diese Ausdrücke auf den Bogen A, A_{i+1} angewandt werden sollen, müssen $x''_i, y''_i, h x''_i, u$ statt c, c', E', u' geschrieben werden. Man erlangt dadurch die gesuchten Relationen:

$$\left. \begin{aligned}
 r_{i+1} \cos \frac{1}{2} \vartheta - (p_{i+1} - q_{i+1}) \sin \frac{1}{2} \vartheta - r_i \cos \frac{1}{2} \vartheta - (p_i - q_i) \sin \frac{1}{2} \vartheta &= a'' [-x''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + y''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta)] \\
 &\quad + b'' [x''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + y''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta)] + c'' z''_i - g_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + g'_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + t''_i \\
 r_{i+1} \sin \frac{1}{2} \vartheta + (p_{i+1} - q_{i+1}) \cos \frac{1}{2} \vartheta + r_i \sin \frac{1}{2} \vartheta - (p_i - q_i) \cos \frac{1}{2} \vartheta &= a'' [-x''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + y''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta)] \\
 &\quad + b'' [x''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + y''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta)] + c'' z''_i - g_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + g'_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + t''_i \\
 -q_{i+1} + q_i &= A'' [-x''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + y''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta)] \\
 &\quad + B'' [x''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + y''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta)] + C'' z''_i - G_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + G'_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \vartheta) + T''_i
 \end{aligned} \right\} (14)$$

6.

Da die 12 Gleichungen (11) bis (14) für jeden Werth von i von 0 bis $m-1$ incl. erfüllt werden müssen, so hat man dadurch 12m Gleichungen zwischen den vorhandenen 18m unbekanntem Grössen der Aufgabe, nämlich den 12m Constanten x, y, z und den 6m, den Zustand des Systems an den besonderen Punkten bestimmenden Grössen r, p, q . Diese Gleichungen sind der Ausdruck des Gleichgewichts jeder der 4m Verbindungslinien der besonderen Punkte; die noch erforderlichen 6m Gleichungen müssen die Bedingung ausdrücken, dass die Kräfte an den, in jedem besonderen Punkte zusammentreffenden Endpunkten verschiedener Linien untereinander im Gleichgewichte sind. Dadurch werden 3 Gleichungen für jeden dieser Punkte, also, da 2m derselben vorhanden sind, die noch fehlenden 6m Gleichungen erlangt. Ich werde sie jetzt aufsuchen.

Die Ausdrücke (5) zeigen, dass die Kraft nach der

Richtung der x , die Kraft nach der Richtung der y und das Moment der Drehungskraft, an dem Anfangspunkte jeder Linie des Systems

$$c, c', E''$$

sind; an ihrem Endpunkte

$$-c, -c' - kf \mathcal{A} \omega ds, -E''$$

Die ersteren sind die für jede dieser Linien im 4. § unterschiedenen x, y, z der Gleichungen (11) bis (14); die letzteren müssen noch ausgedrückt und angemessen bezeichnet werden. Das von dem Anfange bis zu dem Ende der Linie genommene (ihre Gewicht ausdrückende) Integral $kf \mathcal{A} \omega ds$, soll für die Theile C, B_i und B, A_i der i^{ten} Speiche durch m'_i und m_i , für die Querverbindung $B; B_{i+1}$ durch m''_i , für den Bogen $A_i A_{i+1}$ durch m'''_i bezeichnet werden. E'' ist dem Ausdrucke (4) zufolge:

$$E'' = E' + c(y'' - y') - c'(x'' - x') - kf dz f \mathcal{A} \omega ds. (15)$$

In den Fällen der näherungsweise geraden Linien des Systems kann dieser Ausdruck, ähnlich den Ausdrücken im 3. §, in

$E'' = E' + s(c \sin \varphi' - c' \cos \varphi') - k \cos \varphi' \int s' d\omega ds$
verwandelt werden. Wenn das Integral

$$\frac{k}{h} \int s' d\omega ds,$$

bezogen auf den Theil C, B_i der i^{ten} Speiche und von $s = 0$ bis $s = h' - h''$ genommen, durch l_i' bezeichnet wird; bezogen auf den Theil B_i, A_i derselben Speiche

$$\text{für } C, B_i, \dots (h' - h'') [x_i' \sin u_i - y_i' \cos u_i] + h z_i' - h l_i' \cos u_i$$

$$\text{für } B_i, A_i, \dots (h - h'') [x_i'' \sin u_i - y_i'' \cos u_i] + h z_i'' - h l_i'' \cos u_i$$

$$\text{für } B_i, B_{i+1}, \dots 2h \sin \frac{1}{2} \theta [x_i'' \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) + y_i'' \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta)] + h z_i'' + h l_i'' \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta)$$

In dem Falle eines der Bögen des Umkreises wird der Ausdruck (15):

$$E'' = E' + ch [\sin u' - \sin u''] - c' h [\cos u'' - \cos u'] + kh f \sin (u' + u'') d\omega f d\omega ds;$$

für den Bogen A_i, A_{i+1} , also für $u' = u_i, u'' = u_i + \theta$, verwandelt er sich in

$$E'' = 2h \sin \frac{1}{2} \theta [x_i'' \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) + y_i'' \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta)] + h z_i'' - h \lambda_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) + h \lambda_i' \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta)$$

wo λ_i, λ_i' die auf den Bogen A_i, A_{i+1} bezogenen und von $u = 0$ bis $u = \theta$ genommenen Integrale:

$$\lambda_i = k f \sin (\frac{1}{2} \theta - u) d\omega f d\omega ds$$

$$\lambda_i' = k f \cos (\frac{1}{2} \theta - u) d\omega f d\omega ds$$

bedeuten.

Eine der drei Gleichungen, welche die Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte an jedem besonderen Punkte ausdrücken, fordert, dass die Summe der im Sinne der x wirkenden Kräfte an den in diesem Punkte zusammentreffenden Endpunkten verschwindet; die andere, dass auch die im Sinne der y wirkenden Kräfte, die dritte, dass die Momente der Drehungskräfte dieselbe Bedingung erfüllen. Nachdem eben alle diese

$$- (h' - h'') [x_i' \sin u_i - y_i' \cos u_i] - h z_i' + h l_i' \cos u_i,$$

$$+ h z_i,$$

$$- 2h' \sin \frac{1}{2} \theta [x_{i-1}'' \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) + y_{i-1}'' \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)] - h z_{i-1}'' - h l_{i-1}'' \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)$$

$$+ h z_i''$$

und es folgen daraus die 3 Gleichungen, welche das Gleichgewicht der an dem Punkte B_i wirkenden Kräfte bedingen:

$$0 = x_i - x_i' + x_i'' - x_{i-1}''$$

$$0 = y_i - y_i' + y_i'' - y_{i-1}'' - m_i - m_{i-1}''$$

$$0 = z_i - z_i' + z_i'' - z_{i-1}'' - \frac{h' - h''}{h} [x_i' \sin u_i - y_i' \cos u_i]$$

$$- 2 \frac{h'}{h} \sin \frac{1}{2} \theta [x_{i-1}'' \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) + y_{i-1}'' \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)] + l_i' \cos u_i - l_{i-1}'' \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)$$

In dem Punkte A_i vereinigen sich drei Linien, indem er der Endpunkt von B_i, A_i , der Endpunkt von A_{i-1}, A_i und der Anfangspunkt von A_i, A_{i+1} ist. An diesem Punkte wirken also im Sinne der x und der y die Kräfte:

und von $s = 0$ bis $s = h' - h''$ genommen durch l_i ; endlich bezogen auf die Querverbindung B_i, B_{i+1} und von $s = 0$ bis $s = 2h' \sin \frac{1}{2} \theta$ genommen durch l_i'' ; wenn ferner für c, c', E', s, φ' die für diese verschiedenen Linien geltenden, schon eingeführten Bezeichnungen gesetzt werden, nämlich resp.

$$x_i, y_i, h z_i, h' - h'', u_i$$

$$x_i, y_i, h z_i, h - h', u_i$$

$$x_i'', y_i'', h z_i'', 2h' \sin \frac{1}{2} \theta, u_i + \frac{1}{2} \theta + 90^\circ$$

so wird der Ausdruck von E'' :

Kräfte durch die unbekannteren Größen der Aufgabe ausgedrückt worden sind, ist nur noch nöthig, dass die zu den verschiedenen besonderen Punkten gehörenden Summen aus diesen Ausdrücken zusammengesetzt werden.

In dem Punkte B_i treffen vier Linien zusammen, indem er der Endpunkt von C, B_i , der Anfangspunkt von B_i, A_i , der Endpunkt von B_{i-1}, B_i und der Anfangspunkt von B_i, B_{i+1} ist. Die an diesem Punkte im Sinne der x und der y wirkenden Kräfte sind also:

$$-x_i', \quad +x_i, \quad -x_{i-1}'', \quad +x_i''$$

$$\text{und } \dots -y_i' - m_i, \quad +y_i, \quad -y_{i-1}'' - m_{i-1}'', \quad +y_i''$$

und die Momente der Drehungskräfte:

$$-x_i, \quad -x_{i-1}'', \quad +x_i'',$$

$$\text{und } \dots -y_i - m_i, \quad -y_{i-1}'' - m_{i-1}'', \quad +y_i''$$

und die Momente der Drehungskräfte:

$$\begin{aligned}
 &-(h-h') [x_i \sin u_i - y_i \cos u_i] - h x_i + h l_i \cos u_i \\
 &- 2 h \sin \frac{1}{2} \theta [x'_{i-1} \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) + y'_{i-1} \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)] - h x'_{i-1} + h \lambda_{i-1} \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) - h \lambda'_{i-1} \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta) \\
 &+ h x'_i
 \end{aligned}$$

woraus die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts am Punkte A_i hervorgehen:

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= -x_i + x'_i - x'_{i-1} \\
 0 &= -y_i + y'_i - y'_{i-1} - m_i - m'_{i-1} \\
 0 &= -z_i + z'_i - z'_{i-1} - \frac{h-h'}{h} [x_i \sin u_i - y_i \cos u_i] - 2 \sin \frac{1}{2} \theta [x'_{i-1} \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) + y'_{i-1} \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)] \\
 &\quad + l_i \cos u_i + \lambda_{i-1} \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) - \lambda'_{i-1} \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)
 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

Da die 6 Gleichungen (16) und (17) für jeden Werth von i , von 0 bis $n-1$ incl., erfüllt werden müssen, also für $6m$ Gleichungen gelten, so hat man dadurch und durch die im 5. § erlangten $12m$ Gleichungen, die zur Bestimmung der $18m$ unbekannter Grössen der Aufgabe erforderlichen.

7.

Sämmtliche gefundenen Gleichungen kann man kürzer schreiben, wenn man statt der verschiedenen x und y andere unbekante Grössen wählt, nämlich:

$$\left. \begin{aligned}
 a'_i \xi'_i &= -r'_i - f'_i \sin u_i \\
 c'_i \eta'_i + d'_i z'_i &= -p'_i + e'_i \cos u_i + t'_i \\
 C'_i \eta'_i + D'_i z'_i &= -q'_i + E'_i \cos u_i + T'_i
 \end{aligned} \right\} \dots (11^*)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_i \xi_i &= r_i - r_i \dots \dots \dots - f_i \sin u_i \\
 c_i \eta_i + d_i z_i &= p_i - p_i + \left(1 - \frac{h''}{h}\right) q_i + e_i \cos u_i + t_i \\
 C_i \eta_i + D_i z_i &= q_i - q_i \dots \dots \dots + E_i \cos u_i + T_i
 \end{aligned} \right\} \dots (12^*)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a''_i \xi''_i &= -(r'_{i+1} + r_i) \sin \frac{1}{2} \theta - (p'_{i+1} - p_i) \cos \frac{1}{2} \theta \dots \dots \dots - f''_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\
 c''_i \eta''_i + d''_i z''_i &= (r'_{i+1} - r_i) \cos \frac{1}{2} \theta - (p'_{i+1} + p_i) \sin \frac{1}{2} \theta + q'_i 2 \frac{h''}{h} \sin \frac{1}{2} \theta - e''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) + t''_i \\
 C''_i \eta''_i + D''_i z''_i &= -(q'_{i+1} - q_i) \dots \dots \dots - E''_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) + T''_i
 \end{aligned} \right\} \dots (13^*)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a'_i \xi'_i + b'_i \eta'_i + c'_i z'_i &= r_{i+1} \cos \frac{1}{2} \theta - (p_{i+1} - q_{i+1}) \sin \frac{1}{2} \theta - r_i \cos \frac{1}{2} \theta - (p_i - q_i) \sin \frac{1}{2} \theta \\
 &\quad + g_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) - g'_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) - t'_i \\
 a''_i \xi''_i + b''_i \eta''_i + c''_i z''_i &= r_{i+1} \sin \frac{1}{2} \theta + (p_{i+1} - q_{i+1}) \cos \frac{1}{2} \theta + r_i \sin \frac{1}{2} \theta - (p_i - q_i) \cos \frac{1}{2} \theta \\
 &\quad + g_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) - g'_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) - t'_i \\
 A'_i \xi'_i + B'_i \eta'_i + C'_i z'_i &= -q_{i+1} + g_i \dots \dots \dots + G_i \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) - G'_i \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) - T'_i
 \end{aligned} \right\} \dots (14^*)$$

und die Gleichungen (16) und (17):

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \xi_i - \xi'_i - \xi''_i \sin \frac{1}{2} \theta + \eta'_i \cos \frac{1}{2} \theta - \xi'_{i-1} \sin \frac{1}{2} \theta - \eta''_i \cos \frac{1}{2} \theta - (m'_i + m'_{i-1}) \sin u_i \\
 0 &= \eta_i - \eta'_i - \xi''_i \cos \frac{1}{2} \theta - \eta''_i \sin \frac{1}{2} \theta + \xi'_{i-1} \cos \frac{1}{2} \theta - \eta'_{i-1} \sin \frac{1}{2} \theta + (m'_i + m'_{i-1}) \cos u_i \\
 0 &= z_i - z'_i + z''_i - z'_{i-1} - \frac{h''-h''}{h} \eta'_{i-1} - \eta'_{i-1} 2 \frac{h''}{h} \sin \frac{1}{2} \theta + l'_i \cos u_i - l'_{i-1} \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)
 \end{aligned} \right\} \dots (16^*)$$

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \xi_i + \xi'_i \sin \frac{1}{2} \theta - \eta'_i \cos \frac{1}{2} \theta + \xi'_{i-1} \sin \frac{1}{2} \theta + \eta'_{i-1} \cos \frac{1}{2} \theta + (m_i + m'_{i-1}) \sin u_i \\
 0 &= \eta_i + \xi'_i \cos \frac{1}{2} \theta + \eta'_i \sin \frac{1}{2} \theta - \xi'_{i-1} \cos \frac{1}{2} \theta + \eta'_{i-1} \sin \frac{1}{2} \theta - (m_i + m'_{i-1}) \cos u_i \\
 0 &= z_i - z''_i + z'_{i-1} + \eta_i \left(1 - \frac{h''}{h}\right) + \eta'_{i-1} 2 \sin \frac{1}{2} \theta - l_i \cos u_i - \lambda_{i-1} \cos (u_i - \frac{1}{2} \theta) + \lambda'_{i-1} \sin (u_i - \frac{1}{2} \theta)
 \end{aligned} \right\} \dots (17^*)$$

Aus diesen 18, wegen der vorhandenen m Werthe von i für 18 m geltenden Gleichungen, können die 12 m unbekannt Grössen ξ, η, z eliminiert, und dann die 6 m , sich auf die besonderen Punkte beziehenden r, p, q durch die noch übrigbleibenden 6 m Gleichungen bestimmt werden. Diese Reduction der Zahl der Gleichungen auf ihr Drittel ist ohne erhebliche Weitläufigkeit ausführbar, da aus den Gleichungen, (11*) bis (14*) sichtbar wird, dass ξ', ξ, ξ'' geradezu durch die verschiedenen r, p, q gegeben sind; $\eta', z, \eta, z, \eta'', z''$ in Folge der Auflösung von Gleichungen, die zwei unbekannt Grössen miteinander vermischt enthalten; ξ'', η'', z'' aber durch deren drei enthaltende. Die Substitution der hierdurch erlangten Ausdrücke der verschiedenen ξ, η, z durch r, p, q , in den Gleichungen (16*) und (17*), lässt diesem nur die 6 m unbekannt r, p, q , zu deren Bestimmung sie hinreichen.

$$\begin{aligned} &= \lambda [-r, \sin w + p, \cos w + q, (1 - \cos w) + \cos w \frac{1}{2} \int_0^w W \cos w \, dw + \sin w \frac{1}{2} \int_0^w W \sin w \, dw - \frac{1}{2} \int_0^w (W + W') \, dw] \\ &\text{oder} \\ &= \lambda [-r, \sin w + p, \cos w + q, (1 - \cos w) + \cos(\frac{1}{2}\vartheta - w) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} W \cos(\frac{1}{2}\vartheta - w) \, dw + \sin(\frac{1}{2}\vartheta - w) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} W \sin(\frac{1}{2}\vartheta - w) \, dw \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} (W + W') \, dw] \end{aligned}$$

Bezeichnet man dieselben Integrale, deren von $w = 0$ bis $w = \vartheta$ genommene Werthe im 5. § durch $a'', b'', \dots, t''; a', b', \dots, T'; A'', B'', \dots, T''$ bezeichnet worden sind, von $w = 0$ bis zu einem unbe-

$$\left. \begin{aligned} &\lambda \left\{ -r, \sin w + p, \cos w + q, (1 - \cos w) \right. \\ &\quad + \sin(\frac{1}{2}\vartheta - w) [a, \xi'' + b, \eta'' + c, z'' - g, \cos(w + \frac{1}{2}\vartheta) + g', \sin(w + \frac{1}{2}\vartheta) + t,] \\ &\quad + \cos(\frac{1}{2}\vartheta - w) [a, \xi' + b, \eta' + c, z' - g, \cos(w + \frac{1}{2}\vartheta) + g', \sin(w + \frac{1}{2}\vartheta) + t,] \\ &\quad \left. - \mathfrak{A}, \xi'' - \mathfrak{B}, \eta'' - \mathfrak{C}, z'' + \mathfrak{D}, \cos(w + \frac{1}{2}\vartheta) - \mathfrak{E}, \sin(w + \frac{1}{2}\vartheta) - \mathfrak{I}, \right\} \dots \dots \dots (18) \end{aligned} \right\}$$

Indem ξ'', η'', z'' , mittelst der Gleichungen (14*), durch $r, p, q, \eta, z, \eta', z, \eta'', z''$ ausgedrückt werden können, kann der gegenwärtige Ausdruck allein von den Änderungen abhängig gemacht werden, welche an den besonderen Punkten A_i und A_{i+1} , zwischen welchen der unbestimmte Punkt liegt, stattfinden.

Hieraus geht hervor, dass die Erreichung des angegebenen Ziels der Untersuchung allein die Kenntniss der den Punkten A zugehörigen Werthe von r, p, q voraussetzt, die Kenntniss der den Punkten B zugehörigen r', p', q' aber nicht fordert; dass also die letzteren unbekannt bleiben dürfen und es hinreicht, die 6 m Gleichungen (16*) und (17*) durch ihre Elimination auf 3 m zu reduciren, deren unbekannt Grössen allein die den Punkten A zugehörigen r, p, q sind. Diese Elimination kann ohne erhebliche Arbeit ausge-

8.

Indessen wird das endliche Ziel der gegenwärtigen Untersuchung durch diese Bestimmung der Änderungen, welche die Orter der besonderen Punkte und die daseibst stattfindenden Richtungen der sie verbindenden Linien durch die Schwere erfahren, noch nicht erreicht; sondern dieses Ziel ist die Erfindung der Änderung des Winkels des Radius eines unbestimmten Punktes des Unkreises mit der Axe der x . Ich werde diese Änderung jetzt aufsuchen. — Wenn der Winkel am Mittelpunkte, zwischen einem unbekanntem Punkte des Unkreises und dem Punkte A_i , ohne die Wirkung der Schwere $= \mu (< \vartheta)$ ist, durch sie aber in w verändert wird (§ 3), so ist die Änderung des von der Axe der x an gezählten Winkels des unbestimmten Punktes:

$$= \lambda p_i + w - \mu$$

also, der im 3. § gegebenen Vergleichung von μ und w gemäss:

$$\begin{aligned} &= \lambda [-r, \sin w + p, \cos w + q, (1 - \cos w) + \cos w \frac{1}{2} \int_0^w W \cos w \, dw + \sin w \frac{1}{2} \int_0^w W \sin w \, dw - \frac{1}{2} \int_0^w (W + W') \, dw] \\ &\text{oder} \\ &= \lambda [-r, \sin w + p, \cos w + q, (1 - \cos w) + \cos(\frac{1}{2}\vartheta - w) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} W \cos(\frac{1}{2}\vartheta - w) \, dw + \sin(\frac{1}{2}\vartheta - w) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} W \sin(\frac{1}{2}\vartheta - w) \, dw \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} (W + W') \, dw] \end{aligned}$$

stimmten Werthe von w genommen, durch

$$a, b, \dots, t; a', b', \dots, T; \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{I}$$

so wird dadurch der Ausdruck der gesuchten Änderung:

führt werden: indem jede der Gleichungen (17*) die den Zustand des Kreises an dem Punkte B_i bestimmenden r', p', q' nur in ξ, η, z enthält, und zwar die erste nur r' in ξ , die beiden anderen nur p' und q' miteinander vermischt in η und z , die übrigen darin vorkommenden Grössen aber sämtlich durch die den Punkten A_{i-1}, A_i, A_{i+1} zugehörigen r, p, q gegeben sind, so erlangt man durch die erste Gleichung allein den Ausdruck von r' durch diese Grössen, durch die beiden anderen Gleichungen zusammen die Ausdrücke von p' und q' ; die Substitution dieser Ausdrücke in den Gleichungen (16*) lässt diesem nur die, verschiedenen der Punkte A zugehörigen r, p, q , welche unbekannt Grössen also durch die aus dieser Substitution hervorgehenden 3 m Gleichungen gegeben sind.

9.

Die im 7. § gegebenen Gleichungen enthalten, für jedes i , 57 bestimmte Integrale, wovon 48 von der Figur, der Dichtigkeit und der Elasticität der Theile des Kreises, und 9 von den Spannungen abhängen,

$$a''_i, a'_i, A''_i; b''_i, b'_i, B''_i; c''_i, c'_i, C''_i;$$

von den letzteren gehören zwei zu jeder der drei näherungsweise geraden Linien, drei zu der näherungsweise kreisförmigen:

$$t_i, T_i; t'_i, T'_i; t''_i, T''_i; t'''_i, T'''_i.$$

Die Werthe dieser Integrale müssen so lange unbestimmt bleiben, als nicht, ausser der Figur jedes Theils des Kreises, \mathcal{A} , δ , φ , durch die Coordinaten seiner Punkte gegeben sind. Sie sind jedoch nur hiervon, d. h. von der Beschaffenheit des Kreises, nicht von seiner willkürlichen Lage in der lothrechten Ebene abhängig.

Diese Lage, von welcher der Winkel u , abhängt, kommt daher nicht in den Coefficienten der unbekanntem Grössen der Gleichungen des 7. §s, und auch nicht in ihren von den Spannungen erzeugten Gliedern, sondern allein in den von der Schwere erzeugten vor. Indem diese Glieder in die \cos oder \sin von u , $u + \frac{1}{2}\theta$, $u - \frac{1}{2}\theta$ multiplicirt, und alle u , durch eins davon gegeben sind, z. B. $u = u + i\theta$, können die von den unbekanntem Grössen freien Theile der Gleichungen sämtlich in die Form $A \cos u + B \sin u + C$ gebracht werden, wovon C nur aus den ursprünglichen Spannungen, B und A nur aus den Einflüssen der Schwere entstehen. Offenbar erhalten auch die unbekanntem Grössen der Gleichungen dieselbe Form, und es findet dieselbe Verschiedenheit der Ursachen ihrer in $\cos u$ und $\sin u$ multiplicirten Theile und des u nicht enthaltenden Theils statt. Hiermit wird klar, dass die ursprünglichen Spannungen keinen Einfluss auf die Aenderungen haben, welche der ganze Körper durch die Schwere erfährt, dass man also sämtliche i , T aus den Gleichungen (11*) bis (14*) weglassen darf.

Indem daher alle unbekanntem Grössen der Aufgabe die Form $A \cos u + B \sin u$ enthalten, erhält auch der Ausdruck (18) dieselbe Form, in welcher A und B von i und u abhängig, aber von der Lage des Kreises unabhängig sind. Hierdurch hat man den, von speciellen Werthen der oben angeführten bestimmten Integrale unabhängig — also allgemein — geltenden Satz erlangt:

dass der Winkel am Mittelpunkte, zwischen jedem Punkte des Umkreises und der Axe

die in ihm vorhanden sein können. Von den ersteren gehören 10 zu dem Theile BA der i^{ten} Speiche:

$a_i, c_i, C_i, d_i, D_i, e_i, E_i, f_i, m_i, l_i$,
10 ähnlich bezeichnete zu ihrem Theile CB , und wieder 10 zu der Querverbindung B, B_{i+1} ; ferner 18 zu dem Bogen A, A_{i+1} :

$$g_i, \dot{g}_i, G_i; g'_i, \dot{g}'_i, G'_i; m''_i, \lambda_i, \lambda'_i;$$

der x , durch die Schwere um eine Grösse geändert wird, deren Form $f v \cdot \cos u + f' v \cdot \sin u$ ist, worin $f v, f' v$ Functionen des Winkels v zwischen dem Radius des Punkts und einem im Kreise festen Radius, und u der Winkel zwischen diesem und der Axe der x bedeuten.

10.

Dieser Satz zeigt, dass die Kenntniss des Einflusses, welchen die Schwere auf jeden Punkt eines Kreises, in seiner beliebigen Lage in lothrechter Ebene, äussert, durch die beiden Functionen $f v, f' v$ gegeben wird, deren Bestimmung von der speciellen Beschaffenheit des Kreises abhängt. Ehe ich diese Abhängigkeit weiter verfolge, werde ich untersuchen, inwiefern die Kenntniss der Functionen $f v, f' v$ nützlich ist, um durch den Kreis Zenithdistanzen zu messen, welche von den Einflüssen der Schwere auf ihn frei sind.

Eins der Mikrometer (oder der anderen, zur Ableitung der Theilungen vorhandenen Mittel) kann so gestellt angenommen werden, dass es auf den Anfangspunkt der Theilungen trifft, wenn das Fernrohr nach dem Scheitelpunkte gerichtet ist; dass es also, die Theilungen ohne den Einfluss der Schwere als richtig angenommen, bei jeder Zenithdistanz z des Fernrohrs sich von dem Punkte z der Theilungen so weit entfernt, als er durch die Schwere verrückt wird. Wenn es sich, der Richtung der Theilungen des Kreises folgend gemessen, in der Zenithdistanz m befindet, also der vorher u genannte Winkel $= m - z - 90^\circ$, der v genannte $= z$ ist, so fordert die Ableitung an diesem Mikrometer die Verbesserung

$$f z \sin(m - z) - f' z \cos(m - z).$$

Die Verbesserung der Ableitung eines andern Mikrometers, dessen Lage durch m' bestimmt wird, ist dann $= f(z + m' - m) \sin(m - z) - f'(z + m' - m) \cos(m - z)$.

Die Beobachtungen eines Objects können vierfach abgeändert werden, indem das Fernrohr, in beiden entgegengesetzten Lagen der Axe des Instruments, sowohl auf das Object, als auf sein von einer Quecksilberfläche reflectirtes Bild gerichtet werden kann. Wenn

das in der Zenithdistanz m befestigte Mikrometer, von seiner um 180° veränderten Angabe für die Richtung des Fernrohrs nach dem Nadir an gezählt, in einem

$$= v + fr \sin(m-r) - f'v \cdot \cos(m-v) + f180^\circ \cdot \sin m - f'180^\circ \cdot \cos m;$$

und wenn r , statt durch eine Ablesung, durch das Mittel zweier Ablesungen an diametral entgegengesetzten Mikrometern (deren zweite um 180° verändert wird) bestimmt wird, was immer wird geschehen können

$$= v + \frac{1}{2}[fv + f(v+180^\circ)] \sin(m-v) - \frac{1}{2}[f'v + f'(v+180^\circ)] \cos(m-r) + \frac{1}{2}[f0 + f180^\circ] \sin m - \frac{1}{2}[f'0 + f'180^\circ] \cos m.$$

In den vier Fällen sind aber die der Ordnung der Theilungen nach gezählten Zenithdistanzen des Objects z und $360^\circ - z$, seines Bildes $180^\circ - z$ und $180^\circ + z$,

$$\left. \begin{aligned} z &= D + \frac{1}{2}[fz + f(x+180^\circ)] \sin(m-z) - \frac{1}{2}[f'z + f'(x+180^\circ)] \cos(m-z) + \alpha \\ 360^\circ - z &= D + \frac{1}{2}[f(-z) + f(-z+180^\circ)] \sin(m+z) - \frac{1}{2}[f'(-z) + f'(-z+180^\circ)] \cos(m+z) + \alpha \\ 180^\circ - z &= R - \frac{1}{2}[f(-z) + f(-z+180^\circ)] \sin(m+z) + \frac{1}{2}[f'(-z) + f'(-z+180^\circ)] \cos(m+z) + \alpha \\ 180^\circ + z &= R' - \frac{1}{2}[fz + f(x+180^\circ)] \sin(m-z) + \frac{1}{2}[f'z + f'(x+180^\circ)] \cos(m-z) + \alpha \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

wo α für

$$\frac{1}{2}[f0 + f180^\circ] \sin m - \frac{1}{2}[f'0 + f'180^\circ] \cos m$$

geschrieben ist.

Ist ausser dem Mikrometerpaare, dessen Lage durch m gegeben ist, noch eins vorhanden, welchem $m + 90^\circ$

$$\begin{aligned} z &= D + \frac{1}{2}[fz + f(x+90^\circ) + f(x+180^\circ) + f(x+270^\circ)] \sin(m-z) \\ &\quad - \frac{1}{2}[f'z + f'(x+90^\circ) + f'(x+180^\circ) + f'(x+270^\circ)] \cos(m-z) + \alpha' \end{aligned}$$

wo α' für

$$\frac{1}{2}[f0 + f90^\circ + f180^\circ + f270^\circ] \sin m - \frac{1}{2}[f'0 + f'90^\circ + f'180^\circ + f'270^\circ] \cos m$$

geschrieben ist. Dieselbe Formel wird für die übrigen Beobachtungsarten gültig, wenn $360^\circ - z$, $180^\circ - z$, $180^\circ + z$ statt z , und D , R , R' statt D geschrieben werden. Wenn man bezeichnet

$$\begin{aligned} \varphi z &= \frac{1}{2}[fz + f(x+90^\circ) + f(x+180^\circ) + f(x+270^\circ)] \\ \varphi' z &= \frac{1}{2}[f'z + f'(x+90^\circ) + f'(x+180^\circ) + f'(x+270^\circ)] \end{aligned}$$

so erhält man also:

$$\left. \begin{aligned} z &= D + \varphi z \sin(m-z) - \varphi' z \cos(m-z) + \varphi 0 \sin m - \varphi' 0 \cos m \\ 360^\circ - z &= D + \varphi(-z) \sin(m+z) - \varphi'(-z) \cos(m+z) + \varphi 0 \sin m - \varphi' 0 \cos m \\ 180^\circ - z &= R - \varphi(-z) \sin(m+z) + \varphi'(-z) \cos(m+z) + \varphi 0 \sin m - \varphi' 0 \cos m \\ 180^\circ + z &= R' - \varphi z \sin(m-z) + \varphi' z \cos(m-z) + \varphi 0 \sin m - \varphi' 0 \cos m \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

Wenn mehr als zwei Paare von Mikrometern, oder eine andere Stellung zweier Paare vorhanden sind, so erfahren diese Formeln am Tage liegende Aenderungen, mit deren Anführung ich mich nicht aufhalten werde. Die Formeln zeigen, dass man, um das Resultat jeder der vier Beobachtungsarten von dem Einflusse der Schwere auf den Kreis zu befreien, nicht die Functionen f und f' vollständig, sondern nur die, in φ und φ' allein

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(D + 360^\circ - D) + \frac{1}{2}[(\varphi z - \varphi(-z)) \cos z - (\varphi' z + \varphi'(-z)) \sin z] \sin m \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\varphi z + \varphi(-z)) \sin z + (\varphi' z - \varphi'(-z)) \cos z] \cos m \\ \text{oder } \dots z &= \frac{1}{2}(R' - R) \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\varphi z - \varphi(-z)) \cos z - (\varphi' z + \varphi'(-z)) \sin z] \sin m \\ &\quad + \frac{1}{2}[(\varphi z + \varphi(-z)) \sin z + (\varphi' z - \varphi'(-z)) \cos z] \cos m \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

dieser vier Fälle r angibt, so ist die von dem Einflusse der Schwere auf den Kreis befreite Zenithdistanz des Fernrohrs

nen, indem die Mikrometer immer in solchen Paaren vorhanden sein werden, so ist die von jenem Einflusse befreite Zenithdistanz:

und wenn man die beiden abgelesenen Angaben für das Object selbst durch D , D' , für sein Bild durch R , R' bezeichnet, hat man, der Formel gemäss:

statt m zugehört, und bedeuten D , D' , R , R' die Mittel der Angaben aller vier Mikrometer (um resp. 0 , -90° , -180° , -270° verändert), so hat man z . B. für die erste Beobachtungsart:

übrigbleibenden, in \cos und \sin von $4z$, $8z$, $12z$... multiplicirten Glieder ihrer Entwicklungen zu kennen braucht.

Ich werde die Formeln anführen, durch welche das mittlere Resultat zweier der Beobachtungsarten von diesem Einflusse befreit wird. Aus der Vergleichung der in beiden Lagen der Axe gemachten Beobachtungen, entweder des Objects selbst oder seines reflectirten Bildes, erhält man:

ferner aus der Vergleichung der Beobachtungen des Objects selbst und seines Bildes, entweder in der ersten oder in der zweiten Lage der Axe:

$$z = \frac{1}{2}(D + 180^\circ - R) + \frac{1}{2}\{(\varphi z + \varphi(-z)) \cos z - (\varphi' z - \varphi'(-z)) \sin z\} \sin m \left. \begin{array}{l} - \frac{1}{2}\{(\varphi z - \varphi(-z)) \sin z + (\varphi' z + \varphi'(-z)) \cos z\} \cos m \\ \text{oder} \dots z = \frac{1}{2}(R' + 180^\circ - D) - \frac{1}{2}\{(\varphi z + \varphi(-z)) \cos z - (\varphi' z - \varphi'(-z)) \sin z\} \sin m \\ \phantom{\text{oder}} \phantom{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\{(\varphi z - \varphi(-z)) \sin z + (\varphi' z + \varphi'(-z)) \cos z\} \cos m \end{array} \right\} \dots \dots \dots (21^b)$$

endlich aus der Vergleichung der Beobachtungen des Objects selbst in einer und seines Bildes in der andern Lage der Axe:

$$z = \frac{1}{2}(D + R' - 180^\circ) + \varphi 0 \sin m - \varphi' 0 \cos m \left. \begin{array}{l} \text{oder} \dots \dots \dots z = \frac{1}{2}(540^\circ - D' - R) - \varphi 0 \sin m + \varphi' 0 \cos m \end{array} \right\} \dots \dots \dots (21^c)$$

Das mittlere Resultat aller vier Beobachtungsarten ist völlig frei von einem Einflusse der Schwere auf den Kreis, indem es aus (20):

$$z = \frac{1}{4}(D + 360^\circ - D' + R' - R) \dots \dots (22)$$

hervorgeht. Für den Repsold'schen Meridiankreis der Königsberger Sternwarte ist $m = 135^\circ$, welche Stellung der Mikrometer immer die angemessenste sein wird, wenn das Instrument deren vier besitzt. Da ihr $\sin m = -\cos m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entspricht, so kann man statt der beiden in $\sin m$ und $\cos m$ multiplicirten Theile der Formeln (21) ihre durch $\sqrt{2}$ dividirte Summe schreiben.

Indessen setzt die richtige Anwendung des Kreises

$$m' - m + \mu = \delta + \varphi\beta - \varphi\alpha + (\beta - \alpha) \sin(m - \alpha) - (f\beta - f\alpha) \cos(m - \alpha)$$

worin $\alpha + \varphi\alpha$, $\beta + \varphi\beta$ die wahren, vom Anfange der Theilungen gezählten Winkel der Striche α , β bedeuten. Zur Bestimmung der unbekanntenen Grösse $m' - m - \delta$ macht man eine Reihe ähnlicher Beobachtungen, indem

nicht allein die Befreiung der Beobachtungen von dem Einflusse der Schwere voraus, sondern auch eine Anordnung der Untersuchung der Theilungen, welche diesen Einfluss gleichfalls beseitigt. Diese Untersuchung fordert, dass man zwei Mikrometer in Zenithdistanzen m und m' aufstelle, deren Unterschied dem zu untersuchenden Winkel δ zwischen zwei, die Winkel α und $\beta = \alpha + \delta$ darstellenden Strichen der Theilung nahe gleich ist. Wenn man den Strich α in die Absehslinie des ersten Mikrometers bringt und die Entfernung μ des Striches β von der Absehslinie des zweiten misst, erhält man dadurch, nach der Berücksichtigung des Einflusses der Schwere auf den Kreis, die Gleichung:

man statt α zuerst einen willkürlichen Theilstrich a , dann aber nach und nach $a + \delta$, $a + 2\delta$, $a + 3\delta$, ... nimmt. Man erhält dadurch die ähnlichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} m' - m + \mu_1 &= \delta + \varphi(a + \delta) - \varphi a + [f(a + \delta) - f a] \sin(m - a) - [f'(a + \delta) - f' a] \cos(m - a) \\ m' - m + \mu_2 &= \delta + \varphi(a + 2\delta) - \varphi(a + \delta) + [f(a + 2\delta) - f(a + \delta)] \sin(m - a - \delta) - [f'(a + 2\delta) - f'(a + \delta)] \cos(m - a - \delta) \\ m' - m + \mu_3 &= \delta + \varphi(a + 3\delta) - \varphi(a + 2\delta) + [f(a + 3\delta) - f(a + 2\delta)] \sin(m - a - 2\delta) - [f'(a + 3\delta) - f'(a + 2\delta)] \cos(m - a - 2\delta) \\ &\dots \dots \dots \\ m' - m + \mu_n &= \delta + \varphi(a + n\delta) - \varphi(a + (n - 1)\delta) + [f(a + n\delta) - f(a + (n - 1)\delta)] \sin(m - a - (n - 1)\delta) \\ &\quad - [f'(a + n\delta) - f'(a + (n - 1)\delta)] \cos(m - a - (n - 1)\delta) \end{aligned}$$

und durch ihr arithmetisches Mittel:

$$\begin{aligned} m' - m - \delta &= -\frac{1}{n} \Sigma \mu + \frac{1}{n} [\varphi(a + n\delta) - \varphi a] + \frac{1}{n} [f(a + n\delta) \sin(m - a - n\delta) - f a \sin(m - a)] + \frac{2}{n} S \sin \frac{1}{2} \delta \\ &\quad - \frac{1}{n} [f'(a + n\delta) \cos(m - a - n\delta) - f' a \cos(m - a)] + \frac{2}{n} S' \sin \frac{1}{2} \delta \end{aligned}$$

wobei S und S' die Summen

$$\begin{aligned} f(a + \delta) \cos(m - a - \frac{1}{2} \delta) + f(a + 2\delta) \cos(m - a - \frac{3}{2} \delta) + \dots + f(a + n\delta) \cos(m - a - \frac{2n-1}{2} \delta) \\ f'(a + \delta) \sin(m - a - \frac{1}{2} \delta) + f'(a + 2\delta) \sin(m - a - \frac{3}{2} \delta) + \dots + f'(a + n\delta) \sin(m - a - \frac{2n-1}{2} \delta) \end{aligned}$$

bedeuten. Wendet man diesen Ausdruck an, um den von $\varphi\beta - \varphi\alpha$ von $m' - m - \delta$ zu befreien, so erhält man:

$$\varphi\beta - \varphi\alpha = \mu - \frac{1}{n}\Sigma\mu + \frac{1}{n}[\varphi(a+n\delta) - \varphi a] - (\beta\beta - f\alpha)\sin(m-\alpha) + (f'\beta - f'\alpha)\cos(m-\alpha) \\ + \frac{1}{n}[f(a+n\delta)\sin(m-a-n\delta) - fa\sin(m-a)] - \frac{1}{n}[f'(a+n\delta)\cos(m-a-n\delta) - f'\alpha\cos(m-a)] + \frac{2\sin\frac{1}{2}\delta}{n}(S+S')$$

Hierin darf $\frac{1}{n}[\varphi(a+n\delta) - \varphi a]$ mit desto grösserem Rechte vernachlässigt werden, je grösser n ist; mit vollem Rechte, wenn $n\delta = 360^\circ$ oder ein Vielfaches davon ist. Die übrigen Glieder drücken den Einfluss der Schwere auf den durch diese Beobachtungen bestimmten Werth des Winkels α und β aus.

Wenn man diese Bestimmung wiederholt, indem man m und m' um 180° vergrössert, also beide Mikrometer in diametral entgegengesetzten Stellungen noch einmal auf gleiche Weise benützt, so ändern alle Glieder des Ausdruckes des Einflusses der Schwere ihre Zeichen, aber nicht ihre Grösse. Das mittlere Resultat beider Bestimmungen ist daher frei von dem Einflusse der Schwere. Da man den Beobachtungen immer diese Anordnung geben kann, so ist die Kenntniss der Functionen f und f' zur richtigen Bestimmung der Theilungsfehler des Kreises nicht erforderlich.

11.

Nach dieser Entwicklung der für die Anwendung eines Kreises wichtigen Folgen, welche der im § 9 mitgetheilte, unabhängig von den, jedem besonderen Falle angemessenen Ausdrücken der Functionen f, f', f'' geltende Satz hat, kehre ich zu der Aufsuchung dieser Ausdrücke zurück. Ich habe schon im § 8 bemerkt, dass man die ursprünglich vorhandenen $18m$ Gleichungen der Aufgabe, durch Auflösung von Gleichungen mit resp. einer, zwei oder drei unbekanntem Grössen, also ohne erhebliche Mühe, auf $3m$ reduciren kann, deren unbekante Grössen die den Punkten A zugehörigen r, p, q sind; jetzt werde ich die Beschaffenheit dieser Gleichungen näher angeben. Der Anblick der im § 7 zusammengestellten $18m$ Gleichungen zeigt, dass ζ_i, η_i, z_i allein durch die zu dem Punkte B_i gehörigen r', p', q' ausgedrückt werden; ζ_i, η_i, z_i durch die zu A_i gehörigen r, p, q und die zu B_i gehörigen r', p', q' ; $\zeta_i'', \eta_i'', z_i''$ durch die zu B_i und B_{i+1} gehörigen r', p', q' ; $\zeta_i''', \eta_i''', z_i'''$

durch die zu A_i und A_{i+1} gehörigen r, p, q . Die Substitution dieser Ausdrücke in den Gleichungen (17*) hat zur Folge, dass sie r_i, p_i, q_i und die zu den Punkten A_{i-1}, A_i, A_{i+1} gehörigen r, p, q enthalten; die Substitution derselben Ausdrücke in den Gleichungen (16*) gibt diesen die unbekanntem Grössen r_i, p_i, q_i und die zu den Punkten B_{i-1}, B_i, B_{i+1} gehörigen r', p', q' . Substituirt man in den letzteren Gleichungen die aus den ersteren folgenden Ausdrücke von r_i, p_i, q_i und die durch Veränderung von i in $i-1$ und $i+1$ daraus hervorgehenden, so werden ihre unbekanntem Grössen die zu den Punkten $A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$ gehörigen r, p, q . Diese 15 unbekanntem Grössen finden sich also in jeder der $3m$ Gleichungen mit einander vermischt; für das nächstgrössere i fehlen die drei ersten derselben und es kommen drei neue hinzu.

Ich glaube nicht, dass man diese unbekanntem Grössen im Wesentlichen anders als durch die gewöhnliche Auflösung der Gleichungen des ersten Grades von einander trennen kann, wenn nicht eine Verbindung zwischen den, verschiedenen i zugehörigen Werthen der § 9 angeführten bestimmten Integrale vorausgesetzt werden soll. Allein die Trennung gelingt in dem besonderen Falle, in welchem alle diese Integrale von i unabhängige Werthe haben; welcher Fall eintritt, wenn alle einander ähnlichen Theile des Kreises gleich sind, d. h. wenn nicht nur ihre Figur, sondern auch ihre Dichtigkeit und Elasticität gleichen Gesetzen folgen. Dass alles von den ursprünglichen Spannungen zwischen diesen Theilen Abhängige immer (also auch in diesem Falle) aus der Betrachtung geht, habe ich schon (§ 9) bemerkt.

Die in diesem Falle stattfindende Unabhängigkeit von i , sowohl der Coefficienten der unbekanntem Grössen der $18m$ Gleichungen (§ 9), als auch der in $\cos u_i, \sin u_i \cos(u_i \pm \frac{1}{2}\delta), \sin(u_i \pm \frac{1}{2}\delta)$ multiplicirten Grössen, bringt offenbar die ähnliche Beschaffenheit der $3m$ Endgleichungen hervor, so dass diese die Form:

$$\left. \begin{aligned} t \cos u_i + s \sin u_i &= a_{-2} r_{i-2} + a_{-1} r_{i-1} + a r_i + a_1 r_{i+1} + a_2 r_{i+2} \\ &+ b_{-2} p_{i-2} + b_{-1} p_{i-1} + b p_i + b_1 p_{i+1} + b_2 p_{i+2} \\ &+ c_{-2} q_{i-2} + c_{-1} q_{i-1} + c q_i + c_1 q_{i+1} + c_2 q_{i+2} \\ t' \cos u_i + s' \sin u_i &= a'_{-2} r_{i-2} + a'_{-1} r_{i-1} + a' r_i + a'_1 r_{i+1} + a'_2 r_{i+2} \\ &+ b'_{-2} p_{i-2} + b'_{-1} p_{i-1} + b' p_i + b'_1 p_{i+1} + b'_2 p_{i+2} \\ &+ c'_{-2} q_{i-2} + c'_{-1} q_{i-1} + c' q_i + c'_1 q_{i+1} + c'_2 q_{i+2} \\ t'' \cos u_i + s'' \sin u_i &= a''_{-2} r_{i-2} + a''_{-1} r_{i-1} + a'' r_i + a''_1 r_{i+1} + a''_2 r_{i+2} \\ &+ b''_{-2} p_{i-2} + b''_{-1} p_{i-1} + b'' p_i + b''_1 p_{i+1} + b''_2 p_{i+2} \\ &+ c''_{-2} q_{i-2} + c''_{-1} q_{i-1} + c'' q_i + c''_1 q_{i+1} + c''_2 q_{i+2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

haben. Da man nie wissen wird, welche (wahrscheinlich nie fehlende) Abweichungen von der Symmetrie eines gegebenen Kreises vorhanden sind, so wird die Durchführung der Untersuchung des Einflusses der Schwere auf ihn, bis zu einem Zahlenresultate, immer nur von der Voraussetzung der Symmetrie, also auch des gegenwärtigen Falles, ausgehen können. Seine weitere, die Auflösung der Gleichungen (23) fordernde, Verfolgung erscheint daher nicht ohne Interesse.

$$\begin{aligned} n &= ax + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} \\ n_1 &= a_{m-1} x + ax_1 + a_{m-1} x_2 + \dots + a_{m-2} x_{m-1} \\ n_2 &= a_{m-2} x + a_{m-1} x_1 + ax_2 + \dots + a_{m-3} x_{m-1} \\ &\dots \dots \dots \\ n_{m-1} &= a_1 x + a_2 x_1 + a_3 x_2 + \dots + ax_{m-1} \end{aligned}$$

die zweite Art hat 2m unbekante Grössen:

$$\begin{aligned} n &= ax + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} + by + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_{m-1} y_{m-1} \\ n_1 &= a_{m-1} x + ax_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{m-2} x_{m-1} + b_{m-1} y + by_1 + b_1 y_2 + \dots + b_{m-2} y_{m-1} \\ &\dots \dots \dots \\ n_{m-1} &= a_1 x + a_2 x_1 + a_3 x_2 + \dots + a x_{m-1} + b_1 y + b_2 y_1 + b_3 y_2 + \dots + b y_{m-1} \\ n' &= a'x + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \dots + a'_{m-1} x_{m-1} + b'y + b'_1 y_1 + b'_2 y_2 + \dots + b'_{m-1} y_{m-1} \\ n'_1 &= a'_{m-1} x + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \dots + a'_{m-2} x_{m-1} + b'_{m-1} y + b'_1 y_1 + b'_2 y_2 + \dots + b'_{m-2} y_{m-1} \\ &\dots \dots \dots \\ n'_{m-1} &= a'_1 x + a'_2 x_1 + a'_3 x_2 + \dots + a' x_{m-1} + b'_1 y + b'_2 y_1 + b'_3 y_2 + \dots + b' y_{m-1} \end{aligned}$$

Die dritte Art hat 3m unbekante Grössen u. s. w. Um alle diese Gleichungen kürzer schreiben zu können, werde ich unter $(\mu_i + \nu_i)$ die Summe

$$\mu_1 u + \mu_{i+1} u_i + \mu_{i+2} u_2 + \dots + \mu_{i+m-1} u_{m-1}$$

verstehen, wobei die Werthe zweier μ als überein-

12.
Ich werde diese Veranlassung benutzen, die Auflösung einer Classe von Gleichungen des ersten Grades mitzutheilen, von welcher die hier vorkommenden ein besonderer Fall sind. Die erste Art der in dieser Classe enthaltenen Gleichungen hat m unbekante (Grössen:

stimmend angenommen werden, wenn ihre Ordnungszahlen um m (oder ein Vielfaches davon) verschieden sind.

Dieser Bezeichnung zufolge werden die Gleichungen folgendermassen geschrieben:

1. Art.

$$n = (a, x), \quad n_1 = (a_{-1} x), \quad n_{m-1} = (a_{i+1} x) \dots \dots \dots (A')$$

2. Art.

$$\begin{aligned} n &= (a, x) + (b, y), & n_1 &= (a_{-1} x) + (b_{-1} y), & n_{m-1} &= (a_{i+1} x) + (b_{i+1} y) \\ n &= (a, x) + (b, y), & n'_1 &= (a'_{-1} x) + (b'_{-1} y), & n'_{m-1} &= (a'_{i+1} x) + (b'_{i+1} y) \end{aligned} \dots \dots \dots (A'')$$

3. Art.

$$\begin{aligned} n &= (a, x) + (b, y) + (c, z), & n_1 &= (a_{-1} x) + (b_{-1} y) + (c_{-1} z), & n_{m-1} &= (a_{i+1} x) + (b_{i+1} y) + (c_{i+1} z) \\ n' &= (a', x) + (b', y) + (c', z), & n'_1 &= (a'_{-1} x) + (b'_{-1} y) + (c'_{-1} z), & n'_{m-1} &= (a'_{i+1} x) + (b'_{i+1} y) + (c'_{i+1} z) \\ n'' &= (a'', x) + (b'', y) + (c'', z), & n''_1 &= (a''_{-1} x) + (b''_{-1} y) + (c''_{-1} z), & n''_{m-1} &= (a''_{i+1} x) + (b''_{i+1} y) + (c''_{i+1} z) \end{aligned} \dots \dots \dots (A''')$$

u. s. w.

Wenn k eine der Wurzeln der Gleichung $k^m = 1$ bedeutet und man die in 1, k, k² ... k^{m-1} multiplicirten

$$(n, k) = (a, k^{-1}) x + (a, k^{-i+1}) x_1 + (a, k^{-i+2}) x_2 \dots + (a, k^{-i+1}) x_{m-1}$$

oder, da die in x₁, x₂, x₃ ... multiplicirten Summen offenbar die Producte der in x multiplicirten in k, k², k³ ... sind,

$$(n, k') = (a, k^{-1}) (x, k) \dots \dots \dots (B')$$

Gleichungen der ersten Art summirt, so erhält man, nach den unbekanten Grössen geordnet:

Eben so geht aus den Gleichungen der zweiten Art hervor:

$$\begin{aligned} (n, k) &= (a, k^{-1}) (x, k) + (b, k^{-1}) (y, k) \\ (n', k) &= (a', k^{-1}) (x, k) + (b', k^{-1}) (y, k) \end{aligned} \dots \dots (B'')$$

aus denen der dritten Art:

$$\left. \begin{aligned} (n, k') &= (a, k^{-1})(x, k') + (b, k^{-1})(y, k') + (c, k^{-1})(z, k') \\ (n', k') &= (a', k^{-1})(x, k') + (b', k^{-1})(y, k') + (c', k^{-1})(z, k') \\ (n'', k') &= (a'', k^{-1})(x, k') + (b'', k^{-1})(y, k') + (c'', k^{-1})(z, k') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B''')$$

u. s. w. Die Gleichungen der ersten Art ergeben also unmittelbar den Ausdruck von (x, k') durch bekannte Größen; die der zweiten die Ausdrücke von (x, k') und (y, k') durch die Auflösung zweier Gleichungen des ersten Grades; die der dritten die Ausdrücke von (x, k') , (y, k') , (z, k') durch die Auflösung dreier Gleichungen u. s. w. Durch jeden dieser Ausdrücke werden m Gleichungen zwischen den in ihm vorhandenen m unbekannt Grössen erlangt, nämlich eine durch jeden der m , der Gleichung $k^m = 1$ genügende Werthe von k ; woraus hervorgeht, dass diese Gleichungen die ursprünglichen ersetzen, oder eine vollständige Umformung derselben sind.

Wenn man für k einen seiner Werthe:

$$\cos h\theta + \sin h\theta \sqrt{-1}$$

setzt, worin $\theta = \frac{1}{m} \cdot 360^\circ$ und h eine unbestimmte der Zahlen $0, 1, 2, \dots, m-1$ bedeutet, so erlangen die in den umgeformten Gleichungen enthaltenen Summen dadurch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (n, k') &= (n, \cos ih\theta) + (n, \sin ih\theta) \sqrt{-1} \\ (a, k^{-1}) &= (a, \cos ih\theta) - (a, \sin ih\theta) \sqrt{-1} \\ (x, k') &= (x, \cos ih\theta) + (x, \sin ih\theta) \sqrt{-1} \end{aligned}$$

u. s. w.

Die darin vorkommenden Summen $(n, \cos ih\theta)$, $(n, \sin ih\theta)$, $(a, \cos ih\theta)$, u. s. w. sind die in $\frac{m}{2}$ multiplicirten Coefficienten von $\cos ih\theta$ und $\sin ih\theta$, in den Entwicklungen von n, a, x, \dots nach \cos und \sin der Vielfachen von $i\theta$; woraus sichtbar wird, dass die ursprünglichen Gleichungen (A) sich durch die Umformung (B) in andere verwandelt haben, deren bekannte sowohl als unbekannt Grössen diese Coefficienten sind, und in welchen die zu jedem h gehörigen sich nicht mit anderen vermischen.

Wenn man durch Auflösung der Gleichungen (B) (x, k') , (y, k') , (z, k') , \dots durch die gegebenen Grössen der Gleichungen ausgedrückt, und ihre Ausdrücke in die Form

$$\alpha_1 + \alpha_1 \sqrt{-1}, \beta_1 + \beta_1 \sqrt{-1}, \gamma_1 + \gamma_1 \sqrt{-1}, \dots$$

gebracht hat, so erlangt man, durch die Vergleichung der reellen und der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theile:

$$\begin{aligned} (x, \cos ih\theta) &= \alpha_1 & (x, \sin ih\theta) &= \alpha_1 \\ (y, \cos ih\theta) &= \beta_1 & (y, \sin ih\theta) &= \beta_1 \\ (z, \cos ih\theta) &= \gamma_1 & (z, \sin ih\theta) &= \gamma_1 \end{aligned}$$

u. s. w.

und wenn man die Coefficienten von $\cos ih\theta$ der Entwicklungen von x, y, z, \dots durch $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots$ die von $\sin ih\theta$ durch $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2}{m} \alpha_1 & \xi_1 &= \frac{2}{m} \alpha_1 \\ \eta_1 &= \frac{2}{m} \beta_1 & \eta_1 &= \frac{2}{m} \beta_1 \\ \zeta_1 &= \frac{2}{m} \gamma_1 & \zeta_1 &= \frac{2}{m} \gamma_1 \end{aligned}$$

u. s. w.

Wenn man, durch die Annahme $h = 0, 1, 2, \dots, m-1$, alle Coefficienten der Entwicklungen kennen gelernt hat, kennt man dadurch sämtliche x, y, z, \dots . Es reicht übrigens hin, die Coefficienten bis $h = \frac{1}{2}m$ zu berechnen, indem $\alpha_1 = \alpha_{m-1}, \beta_1 = \beta_{m-1}, \gamma_1 = \gamma_{m-1}, \dots$ $\alpha_0 = -\alpha_{m-1}, \beta_0 = -\beta_{m-1}, \gamma_0 = -\gamma_{m-1}, \dots$ sind.

13.

Die hierdurch in allen ihren wesentlichen Theilen beendigte Untersuchung des Einflusses der Schwere auf einen Kreis werde ich auf den Repsold'schen Meridiankreis der Königsberger Sternwarte unter der Voraussetzung seiner Homogenität anwenden; durch welche Voraussetzung A beständig und $\delta = 1$ werden, auch die Ordnungszahlen (i) der im 5. § eingeführten Bezeichnungen der bestimmten Integrale wegfallen.

Die Zahl der Speichen dieses Kreises ist $m = 10$. Sie fangen in der Entfernung $h' = 39,0$ Pariser Linien vom Mittelpunkte an, werden in $h' = 137,7$ von ihren geraden Querverbindungen getroffen, und endigen sich in der Entfernung $(h) = 209,7$ an dem inneren Rande des Kreises. Ihre Durchschnittsfiguren sind Trapeze, deren, der Ebene des Kreises parallele Abmessungen, an Anfangspunkte $b = 11,1$ und $b' = 8,3$, am Endpunkte $b = 8,2$, $b' = 6,8$ sind, die Dicken $d = 15,1$ und $7,55$. Da sie durch Ebenen begrenzt sind, so ist, in jeder Entfernung s vom Anfangspunkte:

$$d = 15,1 - 1,55 \frac{s}{176,7}$$

$$b = 11,1 - 2,9 \frac{s}{170,7}$$

$$b' = 8,3 - 1,5 \frac{s}{170,7}$$

Die geraden Querverbindungen sind parallelepipedisch, $d = 10,7$, $b = 4,0$. Die Durchschnittsfigur des Umkreises ist ein Sechseck: seine auf der Ebene des Kreises senkrechte, dem Mittelpunkte nächste Seite ist $d = 7,85$, die entfernteste $d' = 2,93$; die in die Ebene des Kreises fallende Seite ist $b = 14,34$; die Höhe der Figur, von dem inneren Rande bis $\frac{1}{2}b = d$, von $\frac{1}{2}b$ bis zum äusseren Rande $= d'$, von $\frac{1}{2}b$ bis $\frac{3}{2}b$ gleichmässig abnehmend.

Ich nehme hier als bekannt an, dass die Linie in einem homogenen Körper, welche durch eine ihr normale Kraft gebogen wird, ohne ihre Länge zu ändern, die durch die Schwerpunkte seiner Durchschnittsfiguren gehende ist. Wenn diese Figuren durch die in der Ebene der Biegung liegende Abscisse u und die darauf senkrechte Ordinate φu gegeben sind, so sind die Ausdrücke der Abscisse u' ihres Schwerpunkts und der Grössen ω und ν :

$$\omega = \frac{1}{2}b(d + d'), \quad u' = b \frac{7d + 20d'}{27(d + d')}$$

wo u' von dem inneren Rande gezählt ist. Die Zahlenwerthe dieser Grössen sind:

$$\begin{aligned} \omega &= 77,2926 \\ u' &= 5,5944 \\ \nu &= 1132,63 \end{aligned}$$

Da $u' = h - (h)$ und $(h) = 209,7$ ist, erhält man $h = 215,3$.

Aus diesen Angaben gehen die in den Gleichungen § 7 angewandten Integrale folgendermassen hervor:

1. für die Theile CB der Speichen

$$\begin{aligned} a' &= 0,0397574 & c' &= 0,930266 & C' &= 6,95226 \\ f' &= 26,7274.kA & d' &= 5,37976 & D' &= 26,90058 \\ e' &= 3310,53.kA & E' &= 31850,0.kA \\ m' &= 11601,6.kA & l' &= 2870,42.kA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'' &= 0 & a''' &= -0,829434 & A'' &= -0,8296594 \\ b'' &= -0,829434 & b''' &= +7,81618 & B'' &= +7,946249 \\ c'' &= 0 & c''' &= +25,29370 & C'' &= +25,71460 \\ g &= +272,70.kA & g' &= +28,706.kA & G &= -41,803.kA \\ g'' &= -4336,24.kA & g''' &= +27332,67.kA & G' &= +27874,62.kA \\ m'' &= 10455,9.kA & l &= -340,60.kA & l' &= +3231,05.kA \end{aligned}$$

Die Auflösung der hierdurch gegebenen Gleichungen (11*) bis (14*) liefert folgende Ausdrücke der verschiedenen ξ , η , z durch r , p , q , r' , p' , q' ,

$$\begin{aligned} \xi_i &= -251,525 r_i' \dots \dots \dots - 6722,62.kA \sin u, \\ \eta_i &= +2,173463 p_i' - 0,434664 q_i' + 6648,74.kA \cos u, \\ z_i &= -0,561716 p_i' + 0,075162 q_i' - 534,33.kA \cos u, \end{aligned}$$

$$\omega = s \varphi u . du$$

$$0 = s \varphi u (u - u') . du$$

$$\nu = s \varphi u (u - u')^2 . du = s \varphi u . u u du - \omega . u u'$$

welche Integrale über die ganze Fläche der Figur ausgedehnt verstanden werden. Diese Formeln, auf die in Betracht kommenden Theile des Kreises angewandt, ergeben:

1. für die Speichen (deren Durchschnittsfigur aus zwei congruenten Hälften besteht, also den Schwerpunkt in ihrer Mitte hat):

$$\omega = \frac{1}{2}d(b + b'), \quad \nu = \frac{1}{2}d(b + b')(bb + b'b')$$

oder, wenn man die angegebenen Zahlen substituirt und 170,7 x für s schreibt:

$$\begin{aligned} \omega &= 16,61(2 - x)(\frac{3}{2} - x) \\ \nu &= 7,377608(2 - x)(\frac{3}{2} - x)[(4,187617 - x)^2 + 0,484498] \end{aligned}$$

2. für die geraden Querverbindungen:

$$\omega = db, \quad \nu = \frac{1}{2}db^2$$

und in Zahlen

$$\begin{aligned} \omega &= 42,8 \\ \nu &= 57,06967 \end{aligned}$$

3. für den Umkreis:

$$\nu = \frac{b^3}{108}(5d + 31d') - \omega u u'$$

2. für die Theile BA der Speichen

$$\begin{aligned} a &= 0,00513088 & c &= 0,974557 & C &= 9,27384 \\ f &= 16,6973.kA & d &= 7,16674 & D &= 45,61408 \\ e &= 1677,71.kA & E &= 20532,07.kA \\ m &= 5570,37.kA & l &= 1088,30.kA \end{aligned}$$

3. für die Querverbindungen

$$\begin{aligned} a''' &= 0,00923549 & c''' &= 8,36106 & C''' &= 63,4571 \\ f''' &= 16,8197.kA & d''' &= 63,4571 & D''' &= 321,076 \\ e''' &= 7613,62.kA & E''' &= 77045,8.kA \\ m''' &= 3642,42.kA & l''' &= 719,88.kA \end{aligned}$$

4. für die Bögen des Umkreises

$$\begin{aligned} \xi_i &= +194,898 (r'_i - r_i) \dots \dots \dots - 3254,28 . k \mathcal{A} \sin u_i \\ \eta_i &= -2,072458 (p'_i - p_i) - 0,421353 q'_i - 0,325618 q_i + 3208,62 . k \mathcal{A} \cos u_i \\ z_i &= +0,421353 (p'_i - p_i) + 0,107588 q'_i + 0,044279 q_i - 202,22 . k \mathcal{A} \cos u_i \\ \xi_i''' &= -33,4598 (r'_{i+1} + r_i) - 102,9788 (p'_{i+1} - p_i) \dots \dots \dots - 1821,21 . k \mathcal{A} \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ \eta_i''' &= -0,297497 (r'_{i+1} - r_i) + 0,073918 (p'_{i+1} + p_i) - 0,047276 (q'_{i+1} + q_i) - 1821,21 . k \mathcal{A} \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ z_i''' &= +0,041962 (r'_{i+1} - r_i) - 0,014609 (p'_{i+1} + p_i) + 0,006229 q'_{i+1} + 0,012458 q_i + 119,98 . k \mathcal{A} \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ \xi_i'' &= -23,13955 (r_{i+1} + r_i) - 71,21745 (p_{i+1} - p_i) - 2,43931 (q_{i+1} - q_i) - 5228,68 . k \mathcal{A} \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ &\quad - 6416,0 . k \mathcal{A} \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ \eta_i'' &= -1,146634 (r_{i+1} - r_i) + 0,372564 (p_{i+1} + p_i) - 0,372564 (q_{i+1} + q_i) - 328,78 . k \mathcal{A} \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ &\quad - 5227,96 . k \mathcal{A} \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) \\ z_i'' &= -0,39226 r_{i+1} - 2,41290 p_{i+1} - 0,00246 q_{i+1} \\ &\quad - 1,10092 r_i + 2,18264 p_i + 0,23272 q_i - 68,725 . k \mathcal{A} \cos (u_i + \frac{1}{2} \theta) + 324,52 . k \mathcal{A} \sin (u_i + \frac{1}{2} \theta) \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in den Gleichungen (17*) verwandelt diese in:

$$\begin{aligned} 194,898 r'_i &= +0,060 (r_{i+1} + r_{i-1}) + 211,380 r_i + 22,362 (p_{i+1} - p_{i-1}) + 0,3995 (q_{i+1} - q_{i-1}) - 8807,6 . k \mathcal{A} \sin u_i \\ 2,072458 p'_i &+ 0,421353 q'_i = -22,362 (r_{i+1} - r_{i-1}) - 67,617 (p_{i+1} + p_{i-1}) + 137,766 p_i - 2,435 (q_{i+1} + q_{i-1}) \\ &\quad + 4,084 q_i - 16782,2 . k \mathcal{A} \cos u_i \\ 0,325617 p'_i &+ 0,044279 q'_i = +0,3923 (r_{i+1} - r_{i-1}) + 2,4129 (p_{i+1} + p_{i-1}) - 4,0397 p_i + 0,0025 (q_{i+1} + q_{i-1}) \\ &\quad - 0,5385 q_i - 203,9 . k \mathcal{A} \cos u_i \end{aligned}$$

woraus die Ausdrücke von r'_i, p'_i, q'_i durch r, p, q hervorgehen:

$$\begin{aligned} r'_i &= 0,03109 (r_{i+1} + r_{i-1}) + 1,08457 r_i + 0,11474 (p_{i+1} - p_{i-1}) + 0,09205 (q_{i+1} - q_{i-1}) - 45,191 . k \mathcal{A} \sin u_i \\ p'_i &= +25,432 (r_{i+1} - r_{i-1}) + 88,276 (p_{i+1} + p_{i-1}) - 171,731 p_i + 2,396 (q_{i+1} + q_{i-1}) - 8,974 q_i + 14464,8 . k \mathcal{A} \cos u_i \\ q'_i &= -178,162 (r_{i+1} - r_{i-1}) - 594,671 (p_{i+1} + p_{i-1}) + 1171,632 p_i - 17565 (q_{i+1} + q_{i-1}) \\ &\quad + 53,834 q_i - 110975,8 . k \mathcal{A} \cos u_i \end{aligned}$$

Die Substitution derselben Ausdrücke in den Gleichungen (16*) ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= -194,898 r_i + 10,124 (r'_{i+1} + r'_{i-1}) + 467,537 r'_i + 31,893 (p'_{i+1} - p'_{i-1}) - 0,045 (q'_{i+1} - q'_{i-1}) - 11775,68 k \mathcal{A} \sin u_i \\ 0 &= +2,07246 p_i - 0,32562 q_i + 31,89251 (r'_{i+1} - r'_{i-1}) + 97,91583 (p'_{i+1} + p'_{i-1}) - 200,16894 p'_i \\ &\quad + 0,01461 (q'_{i+1} + q'_{i-1}) + 0,04253 q'_i + 11803,90 k \mathcal{A} \cos u_i \\ 0 &= -0,421353 p_i + 0,044279 q_i + 0,044962 (r'_{i+1} - r'_{i-1}) - 0,014609 (p'_{i+1} + p'_{i-1}) - 0,042530 p'_i \\ &\quad + 0,006229 (q'_{i+1} + q'_{i-1}) + 0,256609 q'_i + 228,70 k \mathcal{A} \cos u_i \end{aligned}$$

Die Endgleichungen (23) erhält man, wenn man aus den gegenwärtigen r', p', q' durch ihre eben erlangten Ausdrücke wegschafft:

$$\begin{aligned} +581828 . k \mathcal{A} \sin u_i &= +819,4 r_{i-2} + 25,5 r_{i-1} - 1325,4 r_i + 25,5 r_{i+1} + 819,4 r_{i+2} \\ &\quad - 2843,3 p_{i-2} + 5476,0 p_{i-1} \dots \dots \dots - 5476,0 p_{i+1} + 2843,3 p_{i+2} \\ &\quad - 77,2 q_{i-2} + 287,7 q_{i-1} \dots \dots \dots - 287,7 q_{i+1} + 77,2 q_{i+2} \\ +600964 . k \mathcal{A} \cos u_i &= -2488,6 r_{i-2} + 5063,7 r_{i-1} \dots \dots \dots - 5063,7 r_{i+1} + 2488,6 r_{i+2} \\ &\quad + 8638,0 p_{i-2} - 34493,5 p_{i-1} + 51689,7 p_i - 34493,5 p_{i+1} + 8638,6 p_{i+2} \\ &\quad + 234,4 q_{i-2} - 1358,2 q_{i-1} + 2266,9 q_i - 1358,2 q_{i+1} + 234,4 q_{i+2} \\ +30327 . k \mathcal{A} \cos u_i &= +1,48 r_{i-2} + 46,75 r_{i-1} \dots \dots \dots - 46,75 r_{i+1} - 1,48 r_{i+2} \\ &\quad - 4,99 p_{i-2} - 146,55 p_{i-1} + 297,54 p_i - 146,55 p_{i+1} - 4,99 p_{i+2} \\ &\quad - 0,14 q_{i-2} - 4,14 q_{i-1} + 13,95 q_i - 4,14 q_{i+1} - 0,14 q_{i+2} \end{aligned}$$

14.

Diese Gleichungen werden nach der im 12. § entwickelten Methode aufgelöst; sie gehören zu der dritten der daselbst abgeordneten Arten. Nimmt man

$k = \cos \vartheta + \sin \vartheta \sqrt{-1}$ an, und schreibt man $u + i\theta$ statt u_i , so erhält man aus den Gleichungen zugehörigen Zahlenwerthen:

$(n, k') = 5.581828. k \mathcal{A} (\sin u + \cos u \sqrt{-1})$; $(a, k'') = -777,7$; $(b, k'') = 1029,1 \sqrt{-1}$; $(c, k'') = 191,37 \sqrt{-1}$
 $(n', k') = 5.600964. k \mathcal{A} (\cos u - \sin u \sqrt{-1})$; $(a', k'') = 1219,1 \sqrt{-1}$; $(b', k'') = 1216,2$; $(c', k'') = 214,15$
 $(n'', k') = 5.32327. k \mathcal{A} (\cos u - \sin u \sqrt{-1})$; $(a'', k'') = 57,78 \sqrt{-1}$; $(b'', k'') = 57,33$; $(c'', k'') = 7,16$
 wodurch die drei aufzulösenden Gleichungen:

$$5.581828. k \mathcal{A} (\sin u + \cos u \sqrt{-1}) = -777,7 (r, k) + 1029,1 \sqrt{-1} (p, k) + 191,37 \sqrt{-1} (q, k)$$

$$5.600964. k \mathcal{A} (\cos u - \sin u \sqrt{-1}) = 1219,1 \sqrt{-1} (r, k) + 1216,2 (p, k) + 214,15 (q, k)$$

$$5.32327. k \mathcal{A} (\cos u - \sin u \sqrt{-1}) = 57,78 \sqrt{-1} (r, k) + 57,33 (p, k) + 7,16 (q, k)$$

werden. Ihre Auflösung ergibt

$$(r, k) = 5.317,20. k \mathcal{A} (\sin u + \cos u \sqrt{-1})$$

$$(p, k) = 5.938,12. k \mathcal{A} (\cos u - \sin u \sqrt{-1})$$

$$(q, k) = -5.714,72. k \mathcal{A} (\cos u - \sin u \sqrt{-1})$$

oder die Coefficienten von $\cos i\theta$ und $\sin i\theta$, in den Entwicklungen von

$$r, \dots 317,20. k \mathcal{A} \sin u \text{ und } 317,20. k \mathcal{A} \cos u$$

$$p, \dots 938,12. k \mathcal{A} \cos u \text{ und } -938,12. k \mathcal{A} \sin u$$

$$q, \dots -714,72. k \mathcal{A} \cos u \text{ und } +714,72. k \mathcal{A} \sin u$$

Die Annahme $k = \cos(m-1)\theta + \sin(m-1)\theta \sqrt{-1}$ bringt dieselben Werthe der Coefficienten von $\cos i(m-1)\theta = \cos i\theta$, und entgegengesetzte der Coefficienten von $\sin i(m-1)\theta = -\sin i\theta$ hervor, weshalb die eben gefundenen doppelt genommen werden müssen, wenn die Entwicklungen von r, p, q , nach \cos und \sin der Vielfachen von $i\theta$ nicht über das $\frac{m}{2}$ fache fortgesetzt werden sollen. Die den übrigen Annahmen von k entsprechenden Coefficienten von \cos und $\sin 2i\theta, 3i\theta, \dots (m-2)i\theta$ verschwinden offenbar, indem die Reihe der n nur \cos und \sin mit θ einfach wachsender Winkel enthält. Man hat daher die vollständigen Ausdrücke:

$$r, = 634,40. k \mathcal{A} \sin(u + i\theta)$$

$$p, = 1876,24. k \mathcal{A} \cos(u + i\theta)$$

$$q, = -1429,44. k \mathcal{A} \cos(u + i\theta)$$

Ich werde die hierdurch bekannt gewordenen Einflüsse der Schwere an den 10 besonderen Punkten des Umfanges des zum Beispiele gewählten Kreises noch durch eine anschauliche Einheit ausdrücken, nämlich durch die seinem Halbmesser entsprechende Secunde. Diese Einflüsse sind, den im 4. § eingeführten Bezeichnungen gemäss, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, $= \lambda r, \lambda p, \lambda q$, müssen also, um sie durch die Secunde ausgedrückt zu erhalten, noch in $\omega = 206265''$ multiplicirt werden; wodurch ihre Ausdrücke

$$\omega \lambda k \mathcal{A}. 634,40 \sin(u + i\theta)$$

$$\omega \lambda k \mathcal{A}. 1876,24 \cos(u + i\theta)$$

$$- \omega \lambda k \mathcal{A}. 1429,44 \cos(u + i\theta)$$

werden.

Zur Bestimmung von λ werde ich, der Angabe von SAVART und CHLADNI gemäss annehmen, dass die Ausdehnung des Metalls des Kreises, durch den Druck der Atmosphäre, in jeder Richtung um

$$\frac{1}{2123000}$$

verkleinert wird. Dieser Druck ist der bei dem Barometerstande 336'905 stattfindende, das Quecksilber in der Wärme des schmelzenden Eises angenommen; wenn die spezifische Schwere des Quecksilbers = 13,596 gesetzt wird, so ist es dem Drucke gleich, welchen der Körper durch das auf jeder Quadratlinie seiner Oberfläche vertheilte Gewicht 336,905 $k = 4580,56 k$ erfahren würde. Indem POISSON gezeigt hat, dass die angegebene Wirkung dieses Druckes nur die Hälfte von der ist, die er äussern würde, wenn er nur in einer Richtung, nicht in allen Richtungen wirkte, so folgt aus der obigen Angabe:

$$\lambda = \frac{2}{2123000. 4580,56 k}$$

Nimmt man die spezifische Schwere des Metalls des Kreises $\mathcal{A} = 8,45$, so erhält man:

$$\omega \lambda k \mathcal{A} = \frac{2. 8,45. 206265}{2123000. 4580,56}; \log = 6,55444 - 10$$

und damit:

$$\lambda r, = + 0,2274 \sin(u + i\theta)$$

$$\lambda p, = + 0,6726 \cos(u + i\theta)$$

$$\lambda q, = - 0,5124 \cos(u + i\theta)$$

[Literatur der Astr. Nachr. über Instrumente. — Passageninstrument: GAUSS, Bestimmung der Fädenabstände (Bd. 2); HANSEN, allgemeiner Gebrauch des P.-I. (6); Zeitbestimmung ausserhalb des Meridians (9, 48); HANSEN, Zeitbestimmung in gleichem Vertic. (6); STRUVE, kleines P.-I. (10), tragbares P.-I. mit Verticalkreis, von REPSOLD, in Dorpat (15), P.-I. im 1. Vert. in Pulkowa (17, 20); CLAUSEN, Gebrauch des P.-I. ohne Niveau, NOBERT, Fadennetz beim P.-I. (21); WICHMANN, Fehler der optischen Achse (30); KLEINKRUPPE, GAUSS'sche Reductionsmethode (43); KOWALSKI, Ungleichheit der Zapfen (54); STRUBERT, neues P.-I. (57). — Meridiankreis: SCHWEDER, M.-Kr. in Speier (6); REPSOLD, M.-Kr. der Hamburger Sternw. (15); HANSEN, neue Einrichtung des Seeberger M.-Kr. (17); STRUBERT, neuer M.-Kr. (29);

PETERS, Einfluss der Erschütterungen auf die Declinationen des Altonner M.-Kr., SCHUMACHER, Biegung des Altonner M.-Kr. (44); PETERS, über den Alt. M.-Kr. (45); PAPP, Mikroskop-Mikrom. (50), Biegung des Alt. M.-Kr., MERTZ, Poldistanzen des (Greenwicher M.-Kr. (53), Bestimmung der Biegung und Unregelmäßigkeit der Zapfen (57); MOKETA, Mikrom.-Schrauben des M.-Kr. in St. Jago (59); FÖRSTER, Zenithpunkte des Berliner M.-Kr. durch Mirenferröhre (60); ROSEN, Mikrom.-Vorrichtung bei Declin.-Beobb. am M.-Kr. (63); MARTENS, über Drehbarkeit der M.-Kr. (69). — Mikrometer: STRUYE, über Fraunhofer's Fadenn. (1); FRAUENHOFER, neues Kreisnl. (2); CLAUBEN, Irradiation beim Kreisnl. (4); ABOLANDER, Eigenbewegung beim Kreisnl., PETERS, Mondbeobb. am Kreisnl., STEINHEIL, Netzen für Himmelskarten, SCHWARZENBRUNNER, Winkel. (5); VALZ, M. zu Cometenbeobb. (7); CLAUSEN, neues M. (18); KLINCKEPUSS, Repsold's Streifenm. für die Göttinger Sternw. (43); KAISER, über Airy's Doppelbildm. (45); SEUBE, über ein Doppelbildm. (48); OUDEMANS, Adjustirung eines M.-Mikroskops (80). — Reflexionsinstrumente: GAUSS, Bemerkungen über den Heliotrop (1), Berichtigung des Hel. (5); HANSTRUP, Bemerkungen über Sextanten (11); ABOLANDER, Genauigkeit von Sext.-Beobb. (3); STRIMLING, neufr. (Prismen-)Kr. (11); ENCKE, neues Refl.-Instr. von Oertling (21); KAISER, neuer Prismenkr. (21); ENCKE, über das Diploidoskop (22). — Aequatoreale, Refractoren, Reflectoren: ENCKE, Reduction der Beobb. am Aequ. (3); FRAUENHOFER, STRUYE, über den Doppler Refr., J. HENDEL, SOUTH, über Refr. und Refl. (4); ENCKE, Fraunhofer'scher Refr. der Berliner Sternw., KEKEL, Fehlerbestimmung am Aequ. zu Kreuzmünster (13); BARFUS, Fernrohr mit Glasspiegel (18); STRUYE, Pulkwaer grosser Refr. (19); GRUNERT, Aufstellung eines Aequ. (38); STEINHEIL, Berichtigung des Aequ. (52); PETERS, über das Repsold'sche Aequ. der Altonner Sternwarte (58); REPSOLD, Aequ. der Gothaer Sternw. (59); LAIBELL, über seinen 4f. Refl. auf Malta (63). — Uhren: über KERSELL'S U. von BESSEL (6, 8, [Abb. 66], 9), KERSELL (6), SCHUMACHER (4, 9, 10), ZAHNTHANS (5, 14), GEBLINO (3), ENCKE, über andere U. von: SCHUMACHER (1, 9), STRUYE, JÜRGENSEN (3), ENCKE (10), LANG (15), KAISER (63); Preise der U. von: AUTE, MOLTSEK (3), BROUQUET (4); JÜRGENSEN, sur l'horlogerie exacte, Echappement libre à double roue (EARNshaw (1); BEAC-

FOY, Gang verschiedenartiger Pendel (4); GAJAS, Formel für die Schwingungszeit des Pendels (58); KRÜGER, Barometercompensation bei Pendeluhrn (62, 68). — Verschiedenes: LITTBOW, über die neueren Multiplicationskr., Collimationsfehlerbest. bei Kreisen (1); STRUYE, über die Reichenbach-Ertel'sche Univers.-Instr. (2); FRAUENHOFER, Reinigen achromatischer Objective, HANSTRUP, Zeitbest. durch Univers.-Instr. (3); BOHNEKROGER, Instr.-Fehlerbest., KATES, über dessen Collimator und Revers.-Pendel, STEINHEIL, Apparat zum Einzeichnen astron. bestimmter Sterne (4); BIELL, über die Instr. von AMICI, GEBLINO, parallakt. Stativ für Cometenrucher (5); BOHNEKROGER, Polarsetz als Merid.-Zeichen, GORING, Substitüt für Spinnenfäden (6); HARTMANN, Excentricität bei getheilten Kreisen, Brennweite der verschiedenen dioptr. Gläser (7); SCHULTEN (FOISSON), über Elasticität der Fäden (7, 8); VALZ, Vergröss. eines Fernr. (7); OLUFSEN, Greenwicher Mauerquadrant unter MARRALYX (9); SANTIINI, Theorie der optischen Instr. (9); STRUYE, Instr. von REPSOLD, MERE und MARLER für Pulkowa (16); SCHUMACHER, geschichtliche Notizen über Niveau, Fadenkreuz, Quecksilberhorizont (12); ENCKE, Aufstellung beweglicher Instr. (vgl. Abb. 73) (15); PETERS, Wirkung der Anziehung auf Lothlinie und Niveau (22); GAUSS, Fädenbeleuchtung bei Nadir-Bestimmungen (25); AIRY, über die Pulkwaer Sternw. (26, 27); STRUYE, Erwiderung gegen AIRY (27); WICHMANN, Collimationsfehler aus Reflexbestimmungen (29); SEIBEL, zur Theorie der Fernrohrobjective (35); WICHMANN, Lage des (2. Königsberger Meridianzeichens (vgl. Abb. 60, 61, 62) (38); SEIBEL, zur Dioptrik, mit Anwendung auf das Königsberger Heliometer (vgl. Abb. 71) (43); PETERS, Biegung eines horizontalen Spinnenfadens (45); LAUGIER, Empfindlichkeit des Auges bei astron. Pointirungen (46); D'ABBADE, über Airy's Zenithsector, PETERS, Registr.-App. für Durchgangsbeobb. (49); OUDEMANS, Krümmungshalbmesser spiegelnder sphärischer Flächen, PAPP, AR-Beobb. mit dem Chronograph (54); GIBBS, Registr.-App. bei Declin. Beobb. (58); KRÜGER, Veränderung der Brennweite der Objective durch Temperatur und Luftdruck (60); DEMOWSKI, Bestimmung seiner Schraubenrevolutionen (81); KATES, das Niveau in einer neuen und erweiterten Anwendung (83). —]

IV. Stellarastronomie.

77. Ueber die Parallaxe von α Herculis.*)

(Aus einem Briefe an OLBERS vom 30. Oct. 1806.)

... Ich habe die Messungen, die Herr Justizrath SCHRÖTER über einige Doppelsterne gemacht hat, untersucht, aber über die Parallaxe nichts daraus schliessen können.

Die vollständigste Reihe ist von Ras Algethi und sie scheint eine Parallaxe der halben Erdbahn von 0,586 zu verrathen. Ich setze Ihnen die ganze Reihe her und bemerke dabei, dass d der Abstand beider Sterne für 1800, m seine jährliche Zunahme, und π die gesuchte Parallaxe ist.

Gemessen	$4,677 = d - 2,165 m - 0,28 \pi$
	$4,394 = d - 2,165 m - 0,28 \pi$
	$4,530 = d - 1,111 m - 0,58 \pi$
	$4,57 = d - 1,111 m - 0,58 \pi$
	$3,82 = d - 1,048 m - 0,67 \pi$
	$3,95 = d - 1,029 m - 0,69 \pi$
	$4,67 = d - 0,205 m - 0,66 \pi$
	$4,23 = d - 0,983 m - 0,62 \pi$
	$3,496 = d - 0,665 m - 0,65 \pi$
	$3,910 = d + 0,232 m - 0,02 \pi$
	$4,612 = d + 0,447 m + 0,74 \pi$
	$5,189 = d + 0,447 m + 0,74 \pi$

$$\begin{aligned} 4,281 &= d + 0,922 m - 0,63 \pi \\ 4,423 &= d + 0,922 m - 0,63 \pi \\ 5,046 &= d + 0,713 m + 0,37 \pi \\ 4,960 &= d + 0,427 m + 0,78 \pi \end{aligned}$$

Hieraus habe ich

$$\begin{aligned} \pi &= + 0,586 - 1,20 m \\ d &= + 4,566 + 0,01 m \end{aligned}$$

geschlossen. Allein die Beobachtungsfehler machen dieses Resultat sehr unsicher, und ich glaube, dass es nicht viel Gewicht hat. Rigel und alle andern Sterne geben gar nichts und können auch wohl nichts geben, wenn die Doppelfterne Zwillingsterne sind. Die grosse Menge solcher Doppelsterne ist, dünkt mir, ein sehr fester Grund dieser Vermuthung, obgleich die Unwahrscheinlichkeit eines bloss optischen Doppelsterns wohl weit geringer ist, als sie HERSCHEL in seiner Abhandlung angibt. Ich habe für die Parallaxe des Abstandes zweier Sterne Formeln entworfen, die dann natürlich die vortheilhaftesten Zeitpunkte der Beobachtungen nicht in die Syzygien und Quadraturen versetzen.

78. Ueber die Parallaxen einiger Fixsterne aus Bradley'schen Beobachtungen.**)

(Mon. Corr. XIX, p. 183. — Aus einem Briefe an LINDENAU vom 5. Januar 1809.)

... Vor nicht gar zu langer Zeit habe ich auch eine auf Bradley'sche Beobachtungen gegründete Untersuchung der Parallaxe einiger Fixsterne beendigt und dabei eine Methode gewählt, die mir Vorzüge zu haben scheint, wenn der Beobachter im Besitze einer sehr vollkommenen Uhr ist. Früher hatten mir die Declinationen keine Spur einer Parallaxe verrathen; indessen legte ich auf dieses Resultat wenig Gewicht, da die

Beobachtungen trotz ihrer Feinheit mir doch nicht vollkommen genug schienen, einen so delicates Gegenstand zu entscheiden. Die Gründe, die dieses Urtheil veranlassen, liegen zum Theil in der Correction der Refraction wegen der Thermometerstände, die, wenn sie etwas fehlerhaft sein sollte, einen sehr nachtheiligen constanten Einfluss auf die zu suchende Parallaxe haben muss, indem die Maxima dieser Parallaxe sechs Monate auseinander liegen, also sich bei sehr verschiedenen Temperaturen der Luft ereignen; theils auch in der Construction der Instrumente, welches ich

*) [Briefw. mit OLBERS I, p. 47. — Vgl. SCHRÖTER's Bemerkung über die Parallaxe der Fixst. in BOUÉ's Jahrb. für 1805, p. 200.]

**) [40 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 197, 200, 220 (O.).]

in der Folge weiter auseinander setzen werde. Ich habe also zu meiner Untersuchung, so wie es von Ihnen neuerlich vorgeschlagen wurde, die Rectascensionen angewandt und solche Sterne mit einander verglichen, die 12 Stunden von einander abstehen, wodurch man immer die Summe zweier Parallaxen erhält, also noch eher hoffen darf, eine Grösse zu entdecken, deren Existenz nur deshalb noch problematisch ist, weil ihre Kleinheit sie unsern Sinnen entzog. So habe ich Sirius mit α Lyrae und Procyon mit α Aquilae verglichen; von andern Sternenpaaren fanden sich nicht hinlängliche Beobachtungen um die Zeit der grössten Parallaxen, und ich habe deshalb einige Sterne bei dieser Untersuchung ausnehmen müssen, die ich sonst gern auch bearbeitet hätte. Der lange Zeitraum von 12 Jahren, den BRADLEY'S Beobachtungen umfassen, der unermüdete Fleiss dieses bewunderungswürdigen Beobachters haben uns eine Reihe von Observationen verschafft, die an Genauigkeit und Vollständigkeit von keinem bis jetzt bekannt gemachten Diario einer Sternwarte übertroffen wird und die deshalb recht geeignet ist, einige noch immer problematische Punkte aufzuklären. — BRADLEY, der nicht daran dachte, aus seinen Beobachtungen die Parallaxe der Fixsterne zu bestimmen, beobachtete auf einander folgende Culminationen der beiden oben erwähnten Sternenpaare nur zufällig; dennoch fand ich für jedes mehr als 200 Beobachtungen, von denen ich Ihnen die mit Sorgfalt hergeleiteten Resultate hierhersetze, da sie mir ein allgemeines und vielleicht für Sie ein besonderes Interesse zu haben scheinen.

Wenn man die Parallaxen der verglichenen Sterne durch π , π' , die Declinationen durch δ , δ' bezeichnet und zur Abkürzung $\pi \sec \delta + \pi' \sec \delta' = a$ setzt, so erhält man aus 207 zwischen 1750 und 1762 angestellten Beobachtungen des Sirius und des α Lyrae folgende Unterschiede der auf den 1. Januar 1755 reducirten Rectascensionen:

53 Beobacht.	$11^{\text{h}} 54^{\text{m}} 17,694$	— 0,861 a
54 "	17,793	+ 0,322 a
50 "	17,759	+ 0,863 a
50 "	17,699	+ 0,984 a

Diese Beobachtungen sind so geordnet, dass die Coefficienten von a eine vortheilhafte Bestimmung dieser Grösse zulassen. Es ergibt sich das unerwartete Resultat, dass die Beobachtungen durch Annahme eines positiven Werthes von a (negativ kann er nicht sein) nicht besser dargestellt werden können, dass folglich BRADLEY'S Beobachtungen keine Parallaxe des Sirius

und der Wega verrathen. Es ist übrigens gewiss, dass sich der Einfluss von a schon geäußert haben müsste, wenn es auch nur 0,1 in Zeit betrüge, welches die Summe der Parallaxen beider Sterne = $14''$ voraussetzen würde. Ein Umstand, der die obigen Zahlen etwas zweifelhaft machen könnte und der mich veranlasst, die Grenzen von a so weit auszudehnen, liegt in dem grossen Declinationsunterschiede beider Sterne, der die Beobachtungen von der Lage des Mittagsfernrohres sehr abhängig macht. Zwar habe ich oft das Azimuth und die Culminationlinie des Fernrohres und das Nivellement der Axe durch Beobachtungen untersuchen können, allein es lässt sich dessenungeachtet nicht leugnen, dass doch noch kleine Unsicherheiten übrig geblieben sein können, die man fürchten muss, weil die Voraussetzung der Aufhebung dieser Fehler deshalb vielleicht nicht für völlig rechtmässig gehalten werden kann, weil die Aufstellung des Passageninstruments in der Zwischenzeit nicht so oft geändert wurde, als es diese Voraussetzung erfordern würde. Dieser Fehler ist eigentlich der einzige, dessen Einfluss man fürchten muss, denn Beobachtungsfehler und Fehler der Uhr werden sich der Wahrscheinlichkeit nach in einer Reihe von einigen hundert Beobachtungen fast bis zum Verschwinden aufheben. Aus dieser Ursache versprach ich mir von der Untersuchung der Parallaxe des Procyon und α Aquilae einen noch glücklicheren Erfolg, indem beide Sterne fast auf einerlei Parallel stehen und die Beobachtungen ihrer Ascensionsunterschiede von der Stellung des Instruments nur äusserst unerheblich afficirt werden. 200 Beobachtungen dieser Sterne gaben mir:

50 Beobacht.	$12^{\text{h}} 12^{\text{m}} 21,9588$	— 0,918 a
50 "	21,9018	+ 0,220 a
50 "	21,8774	+ 0,874 a
50 "	21,8836	+ 0,968 a

Man sieht sogleich, dass sich eine weit bessere Uebereinstimmung wird erhalten lassen, wenn man a einen positiven Werth beilegt. Nach der Methode des moindres carrés findet man:

$$\text{Diff. AR. 1755. } 12^{\text{h}} 12^{\text{m}} 21,91745 \\ a = + 0,04210$$

oder $0,6315$ im Bogen, welches die Summe der Parallaxen etwa $\frac{1}{2}''$ voraussetzt. Substituirt man diesen Werth von a in den Bedingungsgleichungen, so erhält man eine fast vollkommene Harmonie, indem die Fehler nur — 0,0027, + 0,0064, + 0,0032 und — 0,0069 betragen. Es scheint also in der That, dass die Beobachtungen fähig sind, selbst eine so äusserst kleine Parallaxe zu verrathen.

Der Punkt am Himmel, dessen Lage man am genauesten beobachten kann, ist ohne Zweifel der Polarstern. Seine obere und untere Culmination habe ich daher mit dem grössten Fleisse berechnet, aber nicht die geringste Spur einer Parallaxe daran wahrgenommen. Beide Bände der Bradley'schen Observationsen enthalten etwa 250 Beobachtungen, die ich zu diesem Endzwecke benutzen konnte und die, wie ich glaube, eine Parallaxe von $\frac{1}{2}$ Bogensekunde sicher verrathen haben müssten, wenn sie wirklich existirte. Indessen schreibe ich Ihnen die aus dieser Untersuchung hervorgekommene Lage dieses Sternes für den 1. Januar 1755 hier ab:

$$\begin{aligned} \text{AR.} &= 10^{\circ} 55' 48,44 \quad (250 \text{ Beobacht.}) \\ \text{Decl.} &= 87^{\circ} 59' 41,12 \quad (227 \quad \quad \quad) \end{aligned}$$

Die Präcession von 1755 an gerechnet, ist (die Constanten + 45,9335 und 20,028 angenommen):

$$\begin{aligned} \text{in AR.} &= + 154,396t + 0,385045t^2 + 0,000958148t^3 \\ &\quad + 0,00000251437t^4 + 0,0000000616t^5 + \text{etc.} \\ \text{in Decl.} &= + 19,06650t - 0,0014213t^2 - 0,0000040325t^3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Damit finde ich die eigene Bewegung aus von ZACH'S und DELAMBRE'S Beobachtungen in AR. = - 0,1127 und in Decl. + 0,0618. LA CAILLE'S Declination für 1750 stimmt vollkommen mit der aus BRADLEY'S Beobachtungen folgenden. Sie sehen aus dem Angeführten, dass die Parallaxen der Fixsterne viel kleiner sind, als man neuerlich vermuthete, und dass sie schwerlich durch die von PIAZZI und CALANDELLI angewandte Methode entdeckt werden können. *)

79. Formeln für die jährliche Parallaxe in Rectascension.**)

(Mon. Corresp. XIX, p. 245.)

. . . . Herr Inspector BESSEL theilte uns eine sehr elegante Auflösung für die jährliche Parallaxe in AR. mit, die unsern mathematischen Lesern gewiss Vergnügen machen wird.

Wird alles auf rechtwinklige Coordinaten gebracht, so ist

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha \cos \delta & x &= r \cos \alpha \cos \delta \\ Y &= R \sin \alpha \cos \delta & y &= r \sin \alpha \cos \delta \\ Z &= R \sin \delta & z &= r \sin \delta \\ \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) &= \frac{Y + y}{X + x} \end{aligned}$$

wo α , α die ARen von Sonne und Stern, d , δ die Declinationen, r , R die Entfernungen der Erde und des Sterns von der Sonne, $d\alpha$ die jährliche Parallaxe des Sterns in AR. bezeichnen. — Nun ist aber bekanntlich

$$\alpha + d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha)}{1 - \sqrt{-1} \cdot \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha)}$$

Wird nun $\beta = \frac{r \cos \delta}{R \cos \delta}$ gesetzt, so folgt

$$\alpha + d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left\{ \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + \beta e^{\alpha\sqrt{-1}}}{e^{-\alpha\sqrt{-1}} + \beta e^{-\alpha\sqrt{-1}}} \right\}^{***)}$$

*) [Schluss des Briefes vgl. die Bemerkung zu Abh. 85 „Ankündigung der Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen“.]

**) [Auszug aus der Abhandlung LUNDSTRA'S „Resultate der neuesten Untersuchungen über jährliche Parallaxe der Fixsterne“, Mon. Corr. XVIII und XIX (Nov. 1808, Jan. und März 1809).]

***) [Berichtigt nach Monat. Corresp. XX, p. 80.]

Allein es ist offenbar

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}}{e^{-\alpha\sqrt{-1}}}$$

und folglich

$$d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left\{ \frac{1 + \beta e^{-(\alpha-\alpha)\sqrt{-1}}}{1 + \beta e^{(\alpha-\alpha)\sqrt{-1}}} \right\}^{***)}$$

welches denn, in eine Reihe entwickelt, gibt

$$d\alpha = \beta \sin(\alpha - \alpha) - \frac{1}{2} \beta^2 \sin 2(\alpha - \alpha) + \frac{1}{4} \beta^3 \sin 3(\alpha - \alpha) - \dots$$

Wenn man den völlig genauen Ausdruck

$$\operatorname{tg} d\alpha = \frac{\cos d}{\cos \delta} \cdot \frac{\pi \sin(\alpha - \alpha)}{1 + \pi \frac{\cos d}{\cos \delta} \cos(\alpha - \alpha)},$$

wo π die absolute Parallaxe des Sterns, nach der von LAGRANGE in den Berliner Memoiren von 1774 dargestellten Methode entwickelt, so folgt dieselbe Reihe für $d\alpha$. Der Ausdruck für Declinations-Parallaxe wird eben so leicht durch diese Methode erhalten. Man hat

$$\operatorname{tg}(\delta + d\delta) = \frac{Z + z}{\sqrt{(X + x)^2 + (Y + y)^2}}$$

woraus denn nach gehöriger Substitution der Werthe dieser Coordinaten derselbe Werth für $d\delta$ wie oben folgt.

— Einen ganz genauen Ausdruck für die jährliche Parallaxe in AR. theilte uns Herr Dr. OLBES mit. Nennt man L Länge der Sonne, ε Schiefe der Ekliptik, so ist, mit Beibehaltung der vorigen Benennungen, in aller Schärfe

$$\lg da = \frac{\pi(\sin L \cos \varepsilon \cos \alpha - \cos L \sin \alpha)}{\cos \delta + \pi(\cos L \cos \alpha + \sin L \cos \varepsilon \sin \alpha)}$$

und mit Verwechslung von Tangente und Bogen

$$da = \frac{\pi \sin \alpha}{\cos \delta \sin \varphi} \sin(L - \varphi)$$

wo der Bogen φ durch die Gleichung $\cotg \varphi = \cos \varepsilon \cotg \alpha$

bestimmt wird. So lange α , δ und ε sich nicht merklich ändern, bleibt φ und der Coefficient von $\sin(L - \varphi)$ beständig, so dass also nach diesem Ausdruck sehr bequeme Tafeln construirt werden können [s. Briefw. m. O. I., p. 190].

80. Ueber den Doppelstern Nr. 61 (Cygni.*)

(Mon. Corresp. XXVI, p. 148.)

Wenn man das Heer der Sterne als zufällig an der Himmelskugel vertheilt annimmt, so kann man nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersuchen, wie sicher man hoffen darf, zwei oder mehrere, sich bis auf eine gewisse sehr geringe Entfernung nahe kommenden Sterne unter ihnen zu finden. Vergleicht man die so herausgebrachte Wahrscheinlichkeit mit der Menge der in HERSCHEL'S bewunderungswürdigen Verzeichnissen enthaltenen doppelten oder mehrfachen Sterne, so findet man diese so gross gegen jene, dass die Wahrscheinlichkeit der der Rechnung zum Grunde gelegten Hypothese fast als verschwindend betrachtet werden muss. Man wird dadurch berechtigt zu glauben, dass die Doppelsterne nicht durch die zufällige Stellung unseres Sonnensystems nahe bei den durch sie gezogenen geraden Linien doppelt erscheinen, sondern dass sie wirklich doppelt, d. i. nahe beisammen stehend, oder Systeme für sich sind. Die Zuversicht, womit man dieses sowohl von den eigentlichen Doppelsternen, als von weniger gedrängten Sterngruppen, z. B. der Praesepe, den Plejaden und andern, glauben kann, ist sehr gross. Zwar würde eine genauere Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieser Annahme Interesse haben; allein ihr stehen jetzt noch unübersteigliche Schwierigkeiten im Wege, indem wir keine Abzählung der Sterne der verschiedenen Grössen, die ein Element dieser Rechnung sein würde, besitzen. Es wäre zu wünschen, dass ein Liebhaber der Sternkunde eine solche Abzählung, bis zur siebenten Grösse inclusive, vom Nordpol bis zu der südlichsten Zone des Herschel'schen Doppelstern-Verzeichnisses übernehme; sie über die siebente Grösse anzudehnen, scheint mir fruchtlos zu sein, indem unsere Cataloge

bei weitem nicht alle Sterne der achten, oder geringerer Grössen, enthalten.

In der durch diese Gründe motivirten Ueberzeugung, die Doppelsterne bilden eigene Systeme für sich, hoffte ich längst, bei meiner Bearbeitung der Bradley'schen Observationen, einen directen Beweis dafür zu finden. In der That zeigten mehrere nahe bei einander stehende Sterne durch ihre gemeinschaftliche Bewegung eine Verbindung; allein der merkwürdigste von allen ist Nr. 61 Cygni nach FLAMSTEED'S Verzeichnisse, — ein Doppelstern, der sich mit grosser Geschwindigkeit fortbewegt, dessen Sterne offenbar durch das Band der Attraction mit einander verbunden sind, indem sie seit 60 Jahren einen nicht unbeträchtlichen Theil ihrer Bahnen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschrieben haben. Dieses merkwürdige Sternpaar bietet uns also die Erscheinung zweier um einander laufender Sonnen dar, und ist der sehr aufmerksamen Betrachtung der Astronomen würdig, indem es uns zu interessanten Folgerungen über das Fixsternengebäude führen kann.

Ich führe hier die mir bekannt gewordenen Beobachtungen des grösseren Sterns Nr. 61 Cygni mit so vielem Detail an, dass man sie und ihre Reduction beurtheilen kann.

I. HEVEL, Machina Coel. Pars posterior, p. 341 et 342.

Die Distanzen fand der Beobachter im Mittel wie folgt:

ε Pegasi Nr. 61 = 29° 51' 32,5	} 1. Nov. 1660
τ Cygni = 28 52 33,3	
σ „ = 30 6 30,0	16. Oct. 1659
β Pegasi Nr. 61 = 26 40 30,0	} 2. Nov. 1660
τ Cygni = 24 46 42,5	
σ „ = 24 40 41,7	

Aus τ und σ Cygni ergaben sich die Fehler des

* [77 d. a. Verz. — Auszug daraus in B.ox's Jahrb. f. 1815 p. 209 (74 d. a. Verz.). — Br. m. O. I, 328 (O.), 335 (O.), 341 (O.), 343 (O.), 345, 390.]

Instruments, unter Voraussetzung der Oerter der Sterne, wie ich sie aus meinem Bradley'schen Catalog unten anführen werde.

ϵ Pegasi τ Cygni	+ 84,1	β Pegasi τ Cygni	+ 36,8
σ Cygni	+ 45,4	σ Cygni	+ 88,6
Mittel + 64,8	+ 62,7

Hiermit die wahren Distanzen von Nr. 61 und

ϵ Pegasi	= 29° 52' 37,3
β "	= 26 41 32,7

und endlich der Ort des Sterns für 1661

AR.	= 313° 1' 44,0;	Decl.	37° 7' 19,5.
-----	-----------------	-------	--------------

II. FLAMSTEED, Hist. Coel. Britanna. p. 74.

d. 23. Sept. (3. Oct.) 1690.

Täglicher Gang der Uhr — 3^m 43^s.

Beobachtungen.

	Culminationszeiten.	Zenithdistanzen	
		per Lin. diag.	per Strias cochl.
γ Cygni 7 ^h	33 19,0	12° 12' 15"	12° 12' 11"
40 "	7 38 28,0	14 2 35	14 2 39
42 "	7 39 55,0	16 2 45	16 2 46
44 "	7 41 37,0	15 34 30	15 34 33
L "	7 44 15,5	17 16 45	17 16 44
v "	8 7 56,0	11 29 35	11 29 46
61 "	8 15 20,5	14 14 0	14 14 5
τ "	8 24 43,0	14 44 45	14 44 46
σ "	8 27 31,0	13 22 25	13 22 28

Hieraus ergaben sich folgende, auf die Culminationszeit von Nr. 61 reducirte Correctionen der Uhr und der Collimationsfehler des Instruments

γ Cygni	+ 12 ^h 37 ^m 46,45	— 1' 9,3
40 "	45,40	— 0 28,3
42 "	44,64	— 1 9,5
44 "	43,40	— 1 15,0
L "	43,41	— 1 15,7
v "	45,74	— 1 2,1
τ "	45,09	— 1 8,0
σ "	46,60	— 1 10,2

Da die nördlichen Sterne eine grössere Correction der Uhr geben, als die südlichen, so muss die Ebene des Instruments nicht ganz mit dem Meridian zusammengefallen sein. Die Mittel aus den vier äusseren Beobachtungen sind

für 12° 47' Zenithdistanz	+ 12 ^h 37 ^m 46,05
" 15 55 "	+ 12 37 44,14

und das der Collimationsfehler, mit Ausschluss von

Nr. 40 Cygni — 1' 10,0. Hiermit ergibt sich die scheinbare Position von Nr. 61 Cygni

AR.	313° 16' 25,05;	Decl.	37° 15' 32,5
-----	-----------------	-------	--------------

und aus dieser, mit der wahren Bewegung auf den Anfang des Jahres gebracht, für

1690 AR.	313° 15' 44,5;	Decl.	37° 15' 9,4.
----------	----------------	-------	--------------

III. BRADLEY, Astronomical Observations etc.

Die Rectascension wurde zweimal, die Declination viermal beobachtet.

	AR. appar.	AR. 1754.
1753 Sept. 25.	= 313° 58' 45,3	313° 58' 30,2
Oct. 8.	= 58 42,9	58 31,0
Mittel	313° 58' 30,6	2 Beobh.
	Decl. appar.	Decl. 1754.
1753 Sept. 29.	= 37° 33' 33,4	37° 33' 13,9
Oct. 17.	34,5	33 12,8
1754 Sept. 24.	46,3	33 11,3
" 27.	47,5	33 12,1
Mittel	37° 33' 12,5	4 Beobh.

IV. D'AGELET. Die erste Beobacht. in LALANDE Hist. cöl., die übrigen in Méém. de Paris 1790.

12. Juli 1783. Gang der Uhr — 1,7 gegen MZ.

α Lyrae	11 ^h 8 ^m 50,333	10° 17' 12,5	10° 17' 12,7
61 Cygni	13 36 1,800	11 11 8,1	11 11 10,2

Scheinbarer Ort von Nr. 61

AR.	314° 18' 31,86;	Decl.	37° 41' 31,70.
-----	-----------------	-------	----------------

24. Sept. 1784. Gang der Uhr + 1,46.

β Cygni	20 ^h 3 ^m 19,5	21° 21' 7,0	21° 21' 8,5
61 "	21 38 33,333	11 10 21	11 10 22,1
v "	21 50 22,0	14 52 16	14 52 18,6

Scheinbarer Ort von Nr. 61

AR.	314° 19' 12,71;	Decl.	37° 42' 16,26.
-----	-----------------	-------	----------------

15. Oct. 1784. Gang der Uhr — 2,83.

H Cygni	20 ^h 57 ^m 3,667	17° 22' 3"	17° 22' 1,6
v "	21 30 58,167	8 31 46	8 31 46,5
61 "	21 39 4,100	11 10 21	11 10 23,1

Scheinbarer Ort von Nr. 61

AR.	314° 19' 6,9;	Decl.	37° 42' 21,16.
-----	---------------	-------	----------------

16. Oct. 1784. Gang der Uhr — 2,83.

α Cygni	21 ^h 15 ^m 51,433	4° 21' 30"	4° 21' 29,5
61 "	21 39 1,500	11 10 23	11 10 23,1
v "	21 50 50,167	14 52 19	14 52 18,6

Scheinbarer Ort von Nr. 61

AR.	314° 19' 7,4;	Decl.	37° 42' 21,46.
-----	---------------	-------	----------------

28. Nov. 1784. Gang der Uhr — 1790.

α Cygni	21 ^h 14 ^m 42 ^s .000	4 ^o 21' 23"	4 ^o 21' 23 ^s .5
α "	21 18 7,433	15 41 54	15 41 54,6
61 "	21 37 52,463	11 10 19	11 10 17,1

Scheinbarer Ort von Nr. 61

AR. 314° 18' 51^s.15; Decl. 37° 42' 19^s.51.

Diese 5 Beobachtungen geben, mit Berücksichtigung der eigenen Bewegung, auf 1724 reducirt:

	AR.	Decl.
1783 Juli 12.	314° 18' 30 ^s .9	37° 41' 48 ^s .4
1784 Sept. 24.	24,9	52,0
Oct. 15.	24,3	54,1
" 16.	25,0	54,0
Nov. 24.	20,7	53,8
Mittel 1784 =	314° 18' 25 ^s .2	37° 41' 52 ^s .5; 5 Beobb.

V. LALANDE, Hist. céleste, p. 14.
5. August 1793.

Aus dieser Beobachtung ergibt sich, durch Vergleichung mit Nr. 34, 40, 67, 72 Cygni, für 1794 AR. 314° 25' 17^s.5; Decl. 37° 44' 46^s.0.

VI. PIAZZI.

Im grossen Catalog ist der Ort dieses Sterns für 1800 verzeichnet; wenn man dabei die den Ascensionen gemeinschaftliche Correction + 4" anbringt:

1800 AR. 314° 28' 38^s.8; Decl. 37° 46' 14^s.4.

Die diesen Reductionen zum Grade gelegten Sternpositionen schreibe ich hier aus dem auf die Bradley'schen Beobachtungen gegründeten Verzeichnisse her.

Rectascensionen.

	Process. ann.			Motus propr.	Beobb.
	1755.	1755.	1800.		
α Lyrae	277° 9' 41 ^s .61	30 ^s .087	30 ^s .079	+ 0 ^s .3138	174
β Cygni	290 12 42,1	36,16	36,15	+ 0,023	5
γ "	308 21 37,6	32,15	32,15	+ 0,007	5
<i>H</i> "	303 31 15,4	35,73	35,73	+ 0,070	5
40 "	304 37 30,5	33,22	33,20	+ 0,123	5
42 "	305 0 2,1	34,13	34,15	+ 0,082	5
44 "	305 25 20,4	34,92	34,01	- 0,079	5
<i>L</i> "	306 5 44,8	34,84	34,83	+ 0,067	5
α "	308 16 18,95	30,525	30,525	+ 0,0096	128
ϵ "	309 4 34,2	35,81	35,80	+ 0,451	5
ν "	312 0 45,3	33,34	33,37	+ 0,081	4
τ "	316 15 22,5	35,49	35,51	+ 0,171	5
α "	316 57 7,6	35,10	35,12	- 0,123	5
ν "	316 57 53,2	36,75	36,79	- 0,063	4
ϵ Pegasi	323 2 15,1	41,08	44,04	+ 0,167	5
β "	342 58 57,1	42,98	43,02	+ 0,142	6

Hesset's Abhandlungen. 2 Bd.

Declinationen.

	Process. ann.			Motus propr.	Beobb.
	1755.	1755.	1800.		
α Lyrae	38° 34' 11 ^s .44	+ 1 ^s .985	+ 2 ^s .088	+ 0 ^s .849	51
β Cygni	27 27 38,8	+ 6,92	+ 7,07	+ 0,112	4
γ "	39 29 3,2	+ 11,92	+ 11,13	+ 0,107	1
<i>H</i> "	31 24 44,1	+ 11,06	+ 11,19	+ 0,193	4
40 "	37 38 47,6	+ 11,38	+ 11,51	+ 0,557	3
42 "	35 38 57,3	+ 11,49	+ 11,61	+ 0,115	3
44 "	36 7 21,7	+ 11,61	+ 11,72	+ 0,051	3
<i>L</i> "	34 25 30,1	+ 11,80	+ 11,92	+ 0,213	1
α "	44 24 56,66	+ 12,404	+ 12,513	+ 0,0096	50
ϵ "	33 3 55,2	+ 12,63	+ 12,74	+ 0,535	2
ν "	40 14 3,2	+ 13,41	+ 13,51	+ 0,136	5
τ "	37 0 34,3	+ 14,47	+ 14,58	+ 0,493	4
α "	38 22 44,3	+ 14,64	+ 14,74	- 0,014	3
ν "	33 52 46,5	+ 14,64	+ 14,74	+ 0,132	4
ϵ Pegasi	8 45 48,3	+ 16,00	+ 16,12	+ 0,180	3
β "	26 45 31,2	+ 19,15	+ 19,20	+ 0,298	7

Von dem kleinern Nr. 61 begleitenden Sterne habe ich 5 ältere Beobachtungen aufgefunden, und diese durch eine eigene vermehrt.

I. BRADLEY.

AR. appar.	AR. 1754.
1753 Sept. 25. 313° 59' 0 ^s .3	313° 58' 45 ^s .2
Oct. 8. 313 58 56,7	44,8

Mittel 313° 58' 45^s.0

Decl. appar. Decl. 1754.

1753 Oct. 17. 37° 33' 40^s.2 Decl. 37° 33' 28^s.5.

Hieraus Unterschied mit dem grösseren Sterne 1753,8 in AR. + 14^s.4; in Decl. + 16^s.0.

II. HERSCHEL, Philosoph. Transact. 1782 p. 138.

1780 Sept. 20. Abstand der Sterne = 16^s.117 und Stellungswinkel = 36° 28' nördlich.

Es ergibt sich aus dieser Beobachtung der Unterschied für

1780,7 in AR. + 16^s.38; in Decl. + 9^s.58.

III. D'AGELET, Mém. de Paris 1790.

Die Beobachtung vom 15. Oct. 1784 gibt

apparens.	1784
AR. = 314° 19' 30 ^s .4	314° 18' 48 ^s .0
Decl. = 37 42 28,2	37 42 0,1

und hieraus der Unterschied für

1784,8 in AR. + 22^s.8; in Decl. + 7^s.6.

IV. LALANDE, Hist. céle. pag. 14.

Beobachteter Unterschied, 5. Aug. 1793:

1793,6 in AR. + 15^s.0; in Decl. + 9^s.0.

V. PIAZZI. Grosser Catalog.

Der Unterschied wird angegeben:

1800 in AR. + 25,0; in Decl. + 3,7.

VI. Eigene Beobachtung.

Aus 12 Beobachtungen mit einem 16zölligen Dollond'schen Heliumeter fand ich für den 8. Mai 1812 im Mittel die Distanz = 15,918 und den Stellungswinkel = 11° 2' 42" nördlich. Hieraus ergibt sich der Unterschied:

1812,4 in AR. + 19,79; in Decl. + 3,05.

Die Art, wie der Winkel gemessen wurde, verdient eine nähere Beschreibung, indem sie mir die sicherste von allen zur Beobachtung der Stellungswinkel sehr naher Gegenstände vorgeschlagenen Methoden zu sein scheint. Das zu der Instrumenten-Sammlung der jetzt hier werdenden Sternwarte gehörige Aequatorialinstrument von DOLLOND wurde genau berichtigt, und ein Faden im Fernrohre der täglichen Bewegung parallel gestellt. Darauf wurde die Polaraxe, bei unveränderter Neigung gegen den Horizont, so weit aus dem Meridian gebracht, bis der Faden im Fernrohre der durch beide Sterne gezogenen geraden Linie genau parallel war. Die auf den Kreisen des Instruments dann abgelesenen Declinationen und Stundenwinkel des Sterns nebst Azimuth der Axè, gaben nun die Data zur Berechnung des Winkels, den der Faden in seiner veränderten Lage mit dem Parallelkreise machte, d. i. den Winkel der Sterne mit diesem Parallelkreise. Die Vorschriften zur Berechnung solcher Beobachtungen kann man leicht entwickeln; man kann mehrere angeben, je nachdem man die bekannte Polhöhe, den wahren Stundenwinkel und die wahre Declination mit einer der vom Instrumente abgelesenen Angaben verbindet. Am sichersten und bequemsten scheinen mir, wenn φ die Polhöhe, α der Winkel, um welchen man den Meridian des Instruments westlich vom wahren Meridian gedreht hat, t und t' die wahren und vom Instrumente abgelesenen westlichen Stundenwinkel, δ und δ' ebenso die Declinationen bedeuten, folgende Formeln zu sein:

$$\sin \frac{1}{2} x = \cos \varphi \sin \frac{1}{2} \alpha$$

$$\cotg y = \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

$$\sin s = \frac{\sin x \sin(y + t)}{\cos \delta} = \frac{\sin x \sin(y - t')}{\cos \delta}$$

$$\text{AR.} = 314^{\circ} 29' 4,88 + [39,9283 + 0,000082(t - 1800)](t - 1800)$$

$$\text{Decl.} = 37^{\circ} 40' 30,27 + [17,3924 + 0,001400(t - 1800)](t - 1800)$$

Diese Formel stellt die vier zum Grunde gelegten Bestimmungen folgendermassen dar:

s ist hier der gesuchte Stellungswinkel; x der Abstand des wahren Pols von dem geändertes des Instruments; y einer der Winkel an der Basis des durch das Zenith und die beiden Pole gebildeten gleichschenkligen sphärischen Dreiecks. — Diese Methode scheint mir vor andern sicher zu sein, indem sie den Fehler, den man in der Schätzung des Parallelismus des Fadens und der durch die Sterne gezogenen Linie begeht, wegen der Grösse und Genauigkeit der Kreise, auf welchen man die zur Berechnung nöthigen Data abliest, nicht bedeutend vergrössert.

Die Bestimmung der eigenen Bewegung des Sterns Nr. 61 habe ich auf FLAMSTEED'S, BRADLEY'S, D'AGELET'S und LALANDE'S Beobachtungen gegründet. Die Beobachtungen von HEVEL und PIAZZI habe ich nicht berücksichtigt; jene, weil sie mit unbewaffneten Augen angestellt und nicht fein genug sind, um neben den übrigen einen Platz zu verdienen; diese weil sie vor 1800 angestellt, und auf diese Epoche nur mit der berechneten Präcession, ohne Berücksichtigung der eigenen Bewegung, also fehlerhaft reducirt wurden. Wenn man die Constanten der jährlichen Präcession = 45,9335 und 20,028 setzt, so erhält man die jährlichen Präcessionen des Sterns für die Zeit t

$$\text{in AR.} = 34,860 + 0,000164(t - 1800)$$

$$\text{in Decl.} = 14,034 + 0,002800(t - 1800)$$

und wenn man hiermit die angeführten Ortsbestimmungen auf 1800 reducirt:

1690	314° 19' 38,06	37° 40' 36,20
1754	25 13,98	43 55,14
1784	27 42,94	45 36,68
1794	28 46,66	46 10,16

Die grosse eigene Bewegung ist hier offenbar. Gibt man der Flamsteed'schen Beobachtung den Werth $\frac{1}{4}$, und jeder einzelnen der spätern den Werth 1, so erhält man, unter der Voraussetzung einer gleichförmigen eigenen Veränderung der Rectascension und Declination, nach der Methode der kleinsten Quadrate, den mittlern Ort für 1800:

$$314^{\circ} 29' 4,88 \text{ und } 37^{\circ} 46' 30,27;$$

die eigene jährliche Bewegung:

$$+ 5,0683 \text{ und } 3,3584$$

und hiermit den mittlern Ort für die Zeit t :

	AR	Decl.
1690 . . .	+ 9,31	- 15,35
1754 . . .	- 2,29	+ 0,64
1784 . . .	+ 0,85	- 0,14
1794 . . .	- 12,19	- 0,04

Bei HEVEL'S Beobachtung gibt sich die Rectascension 307,6 und die Declination 397,7 kleiner an; allein man kann dieser Beobachtung aus den angeführten Gründen nicht trauen; desto weniger, da das schwache Licht des Sterns seine Beobachtung mit unbewaffnetem Auge noch unsicherer machen musste, als HEVEL'S Beobachtungen ohnedies zu sein pflegen.

PIAZZI'S Rectascension würde nach der Formel auf 1794,86 und seine Declination auf 1795,17 fallen, in welcher Zeit in der That die meisten dem Cataloge zum Grunde liegenden Beobachtungen gemacht wurden.

Die durch die angeführten Beobachtungen erwiesene eigene Bewegung der beiden Sterne lässt keinen Zweifel mehr übrig, dass sie wirklich, und nicht blos scheinbar, einen Doppelstern ausmachen. Eine Bewegung der Sterne um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt ist also nothwendig, wenn sie nicht zusammenfallen sollen. Die sechs Beobachtungen ihrer relativen Lage [1753,8, 1789,7, 1784,8, 1793,6, PIAZZI, 1812,3], zeigen in der That diese Bewegung. Allein es ist zu belauern, dass sie zum Theil nicht in der Absicht angestellt wurden, die Lage der Sterne gegen einander mit grosser Genauigkeit dadurch festzusetzen; — nur beiläufig notirten D'ARKELET und LALANDE nach einzelnen Beobachtungen den Unterschied des kleinen Sterns und es darf uns nicht wundern, hier kleine Unregelmässigkeiten zu finden, deren Vermeidung weit grössere Sorgfalt gefordert haben würde, als wirklich angewandt wurde. Gegen die Bestimmung von PIAZZI kann man erinnern, dass die des kleinen Sterns auf wenigern Beobachtungen beruht, als die des grossen: also wahrscheinlich nicht gleichzeitig, und deshalb mit einem andern Reductionsfehler behaftet ist. Ohne Zweifel verdienen die drei Bestimmungen von BRADLEY, HERSCHEL und mir das meiste Vertrauen; auch weisen sie den Sternen eine ziemlich regelmässige Bewegung um einander an; allein sie sind doch nicht fein genug, um die Umlaufszeit und die übrigen Elemente der Bahn mit einiger Sicherheit jetzt schon angeben zu können. Offenbar zeigt sich dieses dadurch, dass die durch diese Beobachtungen gezogene Curve ihre erhabene Seite dem grösseren Sterne zuwendet, welches unvereinbar mit der Bewegung in Kegelschnitten ist. Der einzige Schluss, den man mit einiger Sicherheit aus den Beobachtungen

ziehen kann, ist, dass die Sterne, indem sie in ihren scheinbaren Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, seit BRADLEY'S Zeiten, der kleinen Axe zugehört zu sein scheinen, noch nicht über $\frac{1}{2}$ ihrer Bahn durchlaufen haben, woraus eine Umlaufszeit von mehr als 350 Jahren folgt.

Gelingt es uns, die jährliche Parallaxe dieses Sternpaares zu beobachten und aus ihren gegenseitigen Stellungen ihre mittlere Entfernung und Umlaufszeit zu erkennen, so würden wir daraus die Summe ihrer Massen berechnen können. Gäben uns die während einer langen Reihe von Jahren angestellten absoluten Beobachtungen beider Sterne überdies den Punkt zu erkennen, der zwischen beiden relativ ruhend ist, den Schwerpunkt, so würden wir auch das Verhältnis der Massen, und damit die Massen selbst bestimmen können. Es ist daher sehr zu wünschen, dass die mit vortrefflichen Hilfsmitteln versehenen Astronomen sich dieses merkwürdigen Sternpaares mit Eifer annehmen, um dadurch diese interessanten Bestimmungen, die sehr zur Kenntniss des Sternhimmels beitragen würden, zu erhalten.

Es scheint mir nicht unwahrscheinlich, dass wir schon nach einigen Decennien Data besitzen können, die Elemente der Bahn mit einiger Sicherheit zu bestimmen. Auch glaube ich, dass die jährliche Parallaxe dieses Sternpaares sich unsern Beobachtungen nicht entziehen wird. Meine Gründe dafür sind folgende: die starke Bewegung macht eine verhältnissmässig geringe Entfernung wahrscheinlich; desto mehr, da die Richtung der Bewegung in die Gegend des Himmels fällt, in welche wahrscheinlich die Directionslinie der Sonnenbewegung trifft, also parallactisch zu sein scheint, und, indem die Bewegung alsdann der Entfernung umgekehrt proportional ist, auf eine geringere Entfernung, als die der übrigen Sterne deutet. Einen zweiten Grund gibt mir die Theorie der Bewegung in Kegelschnitten, nach welcher bekanntlich

$$r^2 \mu = \left(\frac{a}{\pi}\right)^3$$

wenn r die Umlaufszeit, in Sideraljahnen ausgedrückt; μ die Summe der Massen; a den Winkel, unter welchem sich die halbe grosse Axe der Bahn uns darstellen würde, wenn sie senkrecht auf der Gesichtslinie stände; π die jährliche Parallaxe bedeuten. Wollte man es wagen, in der hieraus fliessenden Gleichung

$$\pi = \frac{a}{r^2 \mu^{\frac{1}{3}}}$$

$a = 25''$, $r = 400$ Jahre, und μ der Sonnenmasse gleich zu setzen, so würde man $\pi = 0,46$ erhalten [vergl.

p. 217, Note]. Das Maximum der Parallaxe in Rectascension ist für 61 Cygni $1,252\pi$, wenn man $\pi = 0,46$ setzt $= 0,58$, wodurch in den Grenzen ein Unterschied von $1,16$ entsteht, welchen sehr sorgfältige Beobachtungen allerdings schon verrathen können, obgleich der Stern zur Zeit des einen Maximums, den 4. Mai, nicht beobachtet werden kann, indem er bei Tage durch den Meridian geht. Ein geringerer Werth von μ und r und ein grösserer von a gibt eine grössere Parallaxe. Vielleicht darf man hoffen, die Parallaxe in der That grösser zu finden; denn die geringe Helligkeit der Sterne, verbunden mit ihrer geringen Entfernung, scheint auf eine geringere Masse als die der meisten übrigen Sterne, und wahrscheinlich auch der Sonne zu deuten. Dieses freilich noch hypothetische Resultat mag uns übrigens zeigen, wie wenig Hoffnung wir haben, an den helleren Sternen der Himmelskugel, die sich ungleich langsamer bewegen, und deshalb entfernter zu sein scheinen, eine merkliche Parallaxe zu beobachten; meine Untersuchungen über diesen Gegenstand, wovon ich einige Resultate im XIX. Bande der M. C. bekannt gemacht habe [Abb. 78], stimmen vollkommen hiermit überein.

Vielleicht wäre es interessant, wenn ein mit sehr

$$\text{in AR. } 314^{\circ} 29' 8,41 + [40,0350 + 0,000082 (t - 1800)] (t - 1800)$$

$$\text{in Decl. } 37^{\circ} 46' 28,01 + [17,2997 + 0,001400 (t - 1800)] (t - 1800)$$

womit die Beobachtungen so stimmen:

$$1690 + 1,05 - 7,42 \text{ FLAMSTED}$$

$$1754 - 3,63 + 2,69 \text{ BRADLEY}$$

$$1784 + 2,67 - 0,93 \text{ D'AGELET}$$

$$1794 - 9,30 - 1,74 \text{ LALANDE}$$

$$1805 + 0,09 - 0,96 \text{ PIAZZI}$$

Die Unterschiede der beiden Sterne habe ich noch einmal von CHR. MAVER beobachtet gefunden, so dass

lichtstarken Meridianinstrumenten versehener Beobachter nicht nur die beiden Sterne, die der Gegenstand dieser Abhandlung sind, sondern auch viele kleinere sie umgebende, sorgfältig beobachtete, indem es nicht unmöglich ist, dass auch diese zu dem Systeme gehören.

80b. Nachtrag.*)

(Monatl. Corresp. XXVI, p. 295. — Aus einem Schreiben an LINDENAU vom 18. August 1812)

. . . . Ich liefere Ihnen hier zu meiner Abhandlung über den Stern 61 Cygni einen kleinen Nachtrag. OLBERS hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass PIAZZI die Sterne von neuem für 1805 bestimmte und ihre Bewegung zuerst erkannte.

$$1805 = 314^{\circ} 32' 28,5 \quad 7 \text{ Beob. } 37^{\circ} 47' 54,6 \quad 12 \text{ Beob.}$$

$$\text{sequens} = 314 \quad 32 \quad 46,5 \quad 6 \quad \text{,,} \quad 37 \quad 47 \quad 57,5 \quad 8 \quad \text{,,}$$

Ziehe ich diese Beobachtungen mit zu Rathe, so finde ich die eigene Bewegung von Nr. 61

$$\text{in AR.} = + 5,1750$$

$$\text{in Decl.} = + 3,2637$$

und den Ort dieses Sterns:

das ganze Tableau folgendes ist:

1753,8	+ 14,4	2 Beob.	+ 16,0	1 Beob.	BRADLEY
1778	+ 15,0	6	+ 9,6	5	C. MAVER
1780,7	+ 16,4	—	+ 9,6	—	HERSCHEL
1784,4	+ 22,8	1	+ 7,6	1	D'AGELET
1793,6	+ 15,0	1	+ 9,0	1	LALANDE
1805	+ 18,0	6	+ 2,9	8	PIAZZI
1812,3	+ 19,8	—	+ 3,1	—	BESSEL

81. Ueber die Rectascension von 61 Cygni nach v. Lindenau's Beobachtungen.**)

(Monatl. Corresp. XXVII, p. 383. — Aus einem Schreiben an LINDENAU vom 8. Februar 1813.)

. . . Ihre schönen Beobachtungen von 61 Cygni stimmen vortreflich unter einander. Ich reducirte sie sogleich nach Empfang Ihres Briefes und theilte Ihnen hier das nöthige Detail mit.

Die AR. von ν Cygni hat PIAZZI für 1805 be-

stimmt, die von ξ Cygni nahm ich für 1800 aus dem grossen Catalog und addirte die Correction von $+ 4''$. Beide verglichen mit den Oertern in meinem Bradley'schen Catalog gaben mir:

*) [78 d. a. Verz. — Vgl. auch Bonn's Jahrb. f. 1816 p. 252 (79 d. a. Verz.)]

** [87 d. a. Verz. — Br. m. O. s. Abh. 80.]

	AR. 1812.	Variat.
ν	Cygni 312° 32' 27,63	33,39
ξ	" 316 49 17,90	35,68

Die Aberration fand ich:

ν	Cygni = + 25,628 sin(\odot - 40° 6')
ξ	" = + 24,345 sin(\odot - 44 22)
61	" = + 24,616 sin(\odot - 42 10)

Die Nutation:

ν	Cygni = + 13,258 sin(Ω - 155° 11')
ξ	" = + 13,881 sin(Ω - 157 20)
61	" = + 13,633 sin(Ω - 157 17)

und mit diesen Elementen für 61 Cygni:

Verglichen mit ξ Cygni.	
	appar. AR. 1813.
1812 Sept. 13.	314° 37' 48,72 43,78
" 14.	49,62 44,84
" 21.	49,08 45,61
Oct. 7.	45,50 45,93
" 11.	45,70 47,28
" 17.	42,68 46,07
Nov. 1.	37,99 46,16

Verglichen mit ν und ξ Cygni.	
	appar. AR. 1813.
1812 Nov. 12.	314° 37' 36,36 48,20
" 21.	32,20 46,94
" 24.	31,24 46,93
" 26.	31,12 47,44
" 29.	30,90 48,13

Bezeichne ich die Correctionen, die eine neue Bestimmung vielleicht den angenommenen Oertern der verglichenen Sterne hinzufügen wird, durch die Buchstaben dieser Sterne, so erhalte ich:

aus all. Vergleich.	314° 37' 46,44 + 0,208 ν + 0,792 ξ
" ν Cygni allein	48,57 + ν
" ξ " "	46,01 + ξ

Der kleine Stern folgt nach Ihren Beobachtungen 17,88 auf den grössern.

Meine Formel im Sept.-Heft 1812 der M. C. [vorangehende Abh. p. 210] gibt für 1813 AR. 314° 37' 48,70 Der Unterschied ist in der That gering genug; allein ändern mag ich an der früher bestimmten eigenen Bewegung nichts, bis Ihre eigenen Beobachtungen die Rectascensionen der verglichenen Sterne gegeben haben. Sollten Sie die AR. von ξ Cygni ein paar Secunden grösser finden, so könnte sogar der kleine Unterschied ganz verschwinden*). Doch sind solche Kleinigkeiten selbst mit Ihrem schönen Passageninstrument wohl schwer auszumitteln.

*) Die Anzahl der zu Bestimmung von ν und ξ Cygni neuerlich von mir gemachten Beobachtungen ist noch zu klein, um etwas Sicheres darüber sagen zu können; etwas grösser als nach PIAZZI geben meine dormaligen Beobachtungen die AR. ξ Cygni. In ein paar Monaten hoffe ich etwas Bestimmteres darüber unsern Lesern mittheilen zu können. Aus einem neuerlich von Herrn Prof. HANDBO'S erhaltenen Briefe hebe ich folgende hierher gehörige Stelle aus: „Vielleicht wissen Sie schon, dass ich auf Veranlassung des Herrn Ritter GAUSS angefangen habe, den merkwürdigen Stern 61 Cygni am Mauerquadranten zu beobachten. Ich habe diese Beobachtungen, deren bis jetzt aber erst 3 sind [1812 Sept. 14—16] reducirt und nehme mir die Freiheit, die Resultate davon herauszusetzen; [Folgt die Redaction der Beobachtungen im Detail; Endresultat:]

	61 Cygni AR.	Decl.	Seqvens AR.	Decl.
Bewegung in 1 Jahr	+ 0,009	+ 3,324	+ 5,083	+ 3,197
" nach BESSZ.	+ 5,250	+ 3,321	—	—

Die starke Bewegung dieses Sterns ist also auch aus diesen Beobachtungen sichtbar.“ — Die Differenz der Aken beider Sterne folgt aus Herrn Prof. HANDBO'S Beobachtungen 18,69. BESSZEL fand 19,78, meine Beobachtungen geben 17,88; wessen Bestimmung die richtigste ist, das werden die Beobachtungen künftiger Jahre lehren. Man sieht, dass es hier nur auf Grössen von 1—2" ankommt, und wie schwer es ist, sich einer solchen, sei es durch Zeit oder Hogenmessung zu versichern, weiss jeder Beobachter. v. LINDENAU.

†) [Vgl. indessen p. 210 und 212.]

82. Ueber die Parallaxe von 61 Cygni und μ Cassiopeae.**)

(Königsberger Beobacht., 2. Abth. p. V.)

... Ausser den fortlaufenden Beobachtungen der Sonne, des Mondes, der Planeten und der Fixsterne habe

**) [Auszug aus 116 d. a. Verz. — Br. m. O. I, 406, 435, 448; II, 2 (O.), 13 (O.), 15 ff., 21 (O.), 29, 32 (O.). Ueber die Versuche der Parallaxbestimmung von Fundamentalfixsternen vgl. Br. m. O. I, 399 (O.), 402, 410 (O.); II, 44 (O.), 49, 54 (O.); s. auch Abh. 83, Einleitung.]

ich die geraden Aufsteigungen der beiden merkwürdigen Fixsterne 61 Cygni und μ Cassiopeae zum Hauptgegenstande meiner diesjährigen Beobachtungen gemacht. Da man neuerlich an einigen Fixsternen eine sehr bedeutende Parallaxe zu bemerken glaubte, und da man einigen Grund hat, die Parallaxen der Sterne mit sehr grossen eigenen Bewegungen für verhältnissmässig sehr

gross zu halten, so glaube ich den Astronomen keine unwillkommene Mittheilung zu machen, wenn ich, zugleich mit den Originalbeobachtungen, ihre Resultate anführe.

Um dem Einflusse einer Unsicherheit in der Aufstellung des Mittagsfernrohrs ganz auszuweichen, wurden diese beiden Sterne nur mit anderen, ihrem Parallele nahe stehenden, verglichen. — Für 61 Cygni wurden, wenn das Wetter oder andere nothwendige Beobachtungen es nicht verhinderten, immer 6 Sterne, nämlich λ , ν , τ , σ Cygni und zwei anonyme Sterne in $313^{\circ} 9'$ und $313^{\circ} 59'$ AR. und $38^{\circ} 6'$ und $37^{\circ} 56'$ Decl. angewandt, deren Rectascensionen für 1815 ich durch gleichzeitige Vergleichenungen mit α Cygni zu bestimmen suchte.

λ Cygni . . .	$-0,2857 (t-1815) + 0,1466$	$\sin(\Omega - 43^{\circ} 43') + 0,2307 \sin(\odot - 27^{\circ} 42')$
ν " . . .	$-0,1905 (t-1815) + 0,0727$	$\sin(\Omega - 21 25) + 0,1722 \sin(\odot + 2 57)$
Anon. I. . . .	$-0,2674 (t-1815) + 0,1080$	$\sin(\Omega - 29 8) + 0,2273 \sin(\odot - 3 25)$
" II. . . .	$-0,2827 (t-1815) + 0,1110$	$\sin(\Omega - 26 16) + 0,2464 \sin(\odot - 0 11)$
61 Cygni . . .	$-0,6249 (t-1815) + 0,1137$	$\sin(\Omega - 24 7) + 0,2629 \sin(\odot + 2 41)$
τ " . . .	$-0,3463 (t-1815) + 0,1261$	$\sin(\Omega - 18 49) + 0,3193 \sin(\odot + 3 30)$
σ " . . .	$-0,2997 (t-1815) + 0,1117$	$\sin(\Omega - 9 33) + 0,3221 \sin(\odot + 14 17)$

Nach diesen Reductionen finden sich die Unterschiede von α Cygni:

λ Cygni.		
25. Juni bis 19. Aug. (10 Beob.)	$+ 5^m 4,685$	
22. Aug. " 9. Oct. (10 ")	4,727	Mittel
10. Oct. " 1. Nov. (10 ")	4,670	$5^m 4,685$
13. Nov. " 9. Dec. (6 ")	4,638	

ν Cygni.		
25. Juni bis 22. Aug. (10 Beob.)	$+ 15^m 9,116$	
25. Aug. " 10. Oct. (10 ")	9,167	
12. Oct. " 13. Nov. (10 ")	9,099	$15^m 9,127$
20. Nov. " 9. Dec. (9 ")	9,125	

Anonyma I.

25. Juni bis 10. Aug. (10 Beob.)	$+ 17^m 27,834$	
11. Aug. " 13. Sept. (10 ")	27,860	
4. Oct. " 28. Oct. (10 ")	27,967	$17^m 27,885$
29. Oct. " 6. Dec. (5 ")	27,869	

Anonyma II.

25. Juni bis 7. Aug. (10 Beob.)	$+ 20^m 46,818$	
8. Aug. " 9. Sept. (10 ")	46,815	
11. Sept. " 23. Oct. (10 ")	46,837	$20^m 46,821$
24. Oct. " 9. Dec. (10 ")	46,814	

61 Cygni.

25. Juni bis 6. Aug. (10 Beob.)	$+ 23^m 29,099$	
7. Aug. " 29. Aug. (10 ")	29,166	
9. Sept. " 23. Oct. (10 ")	29,243	$23^m 29,154$
24. Oct. " 9. Dec. (10 ")	29,106	

μ Cassiopeae wurde mit θ Cassiopeae verglichen; die Beobachtungen dieses Sterns endigen sich erst im J. 1816, weshalb einige derselben erst in der folgenden Abtheilung erscheinen werden.

61 Cygni.

Aus einer Vergleichung des Bradley'schen Verzeichnisses für 1755 mit dem Piazzischen für 1800 wurden die Reductionen bestimmt, die man bei den beobachteten Unterschieden der geraden Aufsteigungen von α Cygni und den erwähnten Sternen anbringen muss, um sie auf 1815 zu reduciren. Die folgenden Formeln enthalten diese Reductionen, in Zeitsecunden ausgedrückt:

λ Cygni . . .	$+ 32^m 17,092$	
13. Juli bis 11. Aug. (10 Beob.)	$+ 32^m 17,092$	
19. Aug. " 4. Oct. (10 ")	17,059	Mittel
9. Oct. " 29. Oct. (10 ")	17,070	$32^m 17,067$
1. Nov. " 9. Dec. (7 ")	17,036	

τ Cygni.

23. Juli bis 22. Aug. (10 Beob.)	$+ 35^m 1,692$	
25. Aug. " 10. Oct. (10 ")	1,699	
12. Oct. " 13. Nov. (10 ")	1,667	$35^m 1,693$
30. Nov. " 9. Dec. (5 ")	1,739	

σ Cygni.

23. Juli bis 22. Aug. (10 Beob.)	$+ 35^m 1,692$	
25. Aug. " 10. Oct. (10 ")	1,699	
12. Oct. " 13. Nov. (10 ")	1,667	$35^m 1,693$
30. Nov. " 9. Dec. (5 ")	1,739	

Die Summe der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von arithmetischen Mittel, sämmtlich mit gleichem Zeichen genommen, ist:

λ Cygni . . .	36 Beob.	. . . 3,958
ν " . . .	35 " . . .	2,801
Anon. I. . . .	35 " . . .	3,481
" II. . . .	40 " . . .	4,202
61 Cygni . . .	40 " . . .	3,957
τ " . . .	37 " . . .	3,610
σ " . . .	36 " . . .	2,944
Summe . . .	258 Beob.	. . . 24,953

woraus der mittlere Fehler einer, durch Vergleichung mit α Cygni, bestimmten Rectascension = $0,09671$ und der wahrscheinliche = $0,08175$ folgt. Hieraus ergeben sich ferner die wahrscheinlichen Fehler der obigen Bestimmungen:

λ Cygni . . .	0,01362
" " . . .	0,01382
Anon. I. . . .	0,01382
" II. . . .	0,01293
61 Cygni . . .	0,01293
τ " . . .	0,01344
σ " . . .	0,01382

Mit diesen Oertern der verglichenen 6 Sterne hat man nun die an den einzelnen Tagen beobachteten geraden Aufstiegsunterschiede zwischen α und 61 Cygni, auf 1815 reducirt:

Juni 25. 23 ^m 28,987 - 0,76 π	Sept. 9. 23 ^m 29,109 + 0,68 π
" 26. 29,153 - 0,74 π	" 18. 29,249 + 0,74 π
" 29. 29,109 - 0,70 π	Oct. 4. 29,154 + 1,03 π
Juli 4. 29,153 - 0,61 π	" 9. 29,220 + 1,08 π
" 13. 29,141 - 0,45 π	" 10. 29,284 + 1,09 π
" 15. 29,139 - 0,41 π	" 12. 29,167 + 1,11 π
" 21. 29,108 - 0,39 π	" 19. 29,276 + 1,16 π
" 28. 29,193 - 0,16 π	" 21. 29,212 + 1,17 π
Aug. 5. 29,930 - 0,00 π	" 22. 29,298 + 1,18 π
" 6. 29,255 + 0,02 π	" 23. 29,211 + 1,18 π
" 7. 29,073 + 0,04 π	" 24. 29,188 + 1,19 π
" 8. 29,313 + 0,06 π	" 28. 29,039 + 1,20 π
" 9. 29,031 + 0,08 π	" 29. 29,119 + 1,20 π
" 10. 29,164 + 0,10 π	Nov. 1. 29,388 + 1,21 π
" 11. 29,159 + 0,12 π	" 13. 29,126 + 1,20 π
" 19. 29,317 + 0,28 π	" 20. 29,113 + 1,17 π
" 22. 29,217 + 0,31 π	" 30. 29,254 + 1,09 π
" 25. 29,031 + 0,40 π	Dec. 6. 29,992 + 1,04 π
" 26. 29,126 + 0,42 π	" 7. 29,109 + 1,03 π
" 28. 29,253 + 0,46 π	" 8. 29,079 + 1,02 π
" 29. 29,110 + 0,48 π	" 9. 29,218 + 1,01 π

π bedeutet hier den Unterschied der Parallaxen von 61 Cygni und dem Mittel der übrigen Sterne. Nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man hieraus:

Unterschied der AR. für 1815 . . . 23^m 29,1353
 $\pi = -0,06077$ in Zeit $= -0,76$ in Bogentheilen.

Die erste Bestimmung hat das Gewicht von 25,97, die andere das von 17,75 directen Beobachtungen; — da aber aus der Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung $= 0,06109$ folgt, so ist die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Bestimmung des Unterschiedes der AR. $= 0,01199$, und der Parallaxe $= 0,01450$. — Statt der

$$-0,3219 \{t - 1815\} + 0,0398 \sin \{ \odot + 178^\circ 44' \} + 0,0119 \sin \{ \odot + 186^\circ 49' \}$$

Hiermit hat man diesen Unterschied für 1815, aus 80 Beobachtungen:

1814.	1814.
Nov. 1. $-3^m 52,025 + 0,63 \pi$	Dec. 22. $-3^m 52,214 + 1,51 \pi$
" 4. $-3^m 52,056 + 0,71 \pi$	" 24. $-3^m 52,036 + 1,53 \pi$
" 19. $-3^m 52,022 + 1,04 \pi$	

erwarteten grösseren Parallaxe 61 Cygni verrathen daher diese Beobachtungen eine geringere; obgleich die Wahrscheinlichkeit dieses Resultats nicht unbedeutend ist, so sind doch die Beobachtungen noch in zu geringer Anzahl vorhanden, und eine oder einige etwas stärker als gewöhnlich von der Wahrheit abweichende können das Resultat so merklich abändern, dass es etwas gewagt sein würde, aus diesen Rechnungen einen anderen Schluss zu ziehen als den: „dass die Parallaxe 61 Cygni nicht merklich grösser ist, als die der Sterne in seiner Nähe“.

Setzt man $\pi = 0$, so folgt der Unterschied der geraden Aufsteigung von α und 61 Cygni, aus 42 Beobachtungen

$$= 23^m 29,1612;$$

der wahrscheinliche Fehler einer Vergleichung mit den bestimmten 6 Sternen $= 0,06501$; der des eben angeführten Mittels $= 0,01003$. Wenn man durch den aus den Vergleichungen mit α Cygni abgeleiteten wahrscheinlichen Fehler den aus einer Vergleichung mit 6 Sternen entstehenden sucht, so findet man ihn $= 0,06333$, sehr nahe übereinstimmend mit der directen Bestimmung.

Legt man die gerade Aufsteigung α Cygni, so wie ich sie in der Einleitung der I. Abtheilung angegeben habe, zum Grunde, so hat man die Oerter für 1815 und ihre, durch Vergleichung mit dem Verzeichnisse für 1755 erhaltenen Unterschiede mit PIAZZI's neuem Cataloge:

	1815.	PIAZZI.
λ Cygni . . .	310° 3' 1,74 . . .	— 1,93
" " . . .	312 34 8,18 . . .	— 0,66
Anon. I. . . .	313 8 49,45 . . .	—
" II. . . .	313 58 33,59 . . .	— 3,11
61 Cygni . . .	214 39 8,75 . . .	— 3,69
τ " . . .	316 51 7,28 . . .	— 1,93
σ " . . .	317 32 16,67 . . .	— 6,73

μ Cassiopeae.

Die Formel, die zur Reduction der beobachteten Unterschiede der Rectascensionen von θ und μ Cassiopeae angewandt wurde, ist folgende:

1815.	1815.
Jan. 1. $-3^m 52,083 + 1,56 \pi$	Jan. 18. $-3^m 51,992 + 1,54 \pi$
" 1. $-3^m 52,314 + 1,56 \pi$	April 8. $-3^m 52,059 - 0,08 \pi$
" 2. $-3^m 51,804 + 1,56 \pi$	" 9. $-3^m 52,131 - 0,12 \pi$
" 4. $-3^m 52,166 + 1,57 \pi$	" 10. $-3^m 52,173 - 0,14 \pi$
" 5. $-3^m 52,217 + 1,57 \pi$	" 11. $-3^m 51,914 - 0,16 \pi$
" 7. $-3^m 52,069 + 1,57 \pi$	" 13. $-3^m 51,996 - 0,22 \pi$

1815.	
April 16.	- 3 ^m 52,261 - 0,29 π
" 17.	- 3 52,073 - 0,32 π
Mai 2.	- 3 52,314 - 0,69 π
" 8.	- 3 51,953 - 0,82 π
" 9.	- 3 52,105 - 0,85 π
" 12.	- 3 52,218 - 0,92 π
" 17.	- 3 52,084 - 1,02 π
" 19.	- 3 51,937 - 1,06 π
" 20.	- 3 51,758 - 1,08 π
" 22.	- 3 51,821 - 1,12 π
" 23.	- 3 51,812 - 1,13 π
" 24.	- 3 51,823 - 1,16 π
Sept. 10.	- 3 52,366 - 0,73 π
" 13.	- 3 52,276 - 0,66 π
" 21.	- 3 52,018 - 0,44 π
" 22.	- 3 52,018 - 0,44 π
" 23.	- 3 52,449 - 0,41 π
" 24.	- 3 52,149 - 0,39 π
" 25.	- 3 51,919 - 0,66 π
" 30.	- 3 51,650 - 0,23 π
Oct. 1.	- 3 51,880 - 0,20 π
" 4.	- 3 52,051 - 0,12 π
" 8.	- 3 52,191 - 0,04 π
" 9.	- 3 52,082 + 0,02 π
" 12.	- 3 52,082 + 0,09 π
" 20.	- 3 52,054 + 0,31 π
" 21.	- 3 52,155 + 0,34 π
" 23.	- 3 52,085 + 0,38 π
" 24.	- 3 51,945 + 0,41 π
Nov. 17.	- 3 52,054 + 0,99 π
Dec. 6.	- 3 51,515 + 1,34 π
" 19.	- 3 52,125 + 1,49 π
" 21.	- 3 52,129 + 1,53 π

1816.	
Jan. 1.	- 3 ^m 52,076 + 1,56 π
" 2.	- 3 51,737 + 1,56 π
" 17.	- 3 52,053 + 1,54 π
" 28.	- 3 51,997 + 1,45 π
März 14.	- 3 52,045 + 0,56 π
" 19.	- 3 52,702 + 0,43 π
" 26.	- 3 51,984 + 0,24 π
" 28.	- 3 52,117 + 0,19 π
" 29.	- 3 51,947 + 0,16 π
April 1.	- 3 52,298 + 0,08 π
" 2.	- 3 52,264 + 0,06 π
" 4.	- 3 52,357 + 0,00 π
" 9.	- 3 52,305 - 0,13 π
" 10.	- 3 52,077 - 0,16 π
" 11.	- 3 52,098 - 0,19 π
" 14.	- 3 52,273 - 0,26 π
" 16.	- 3 52,116 - 0,32 π
" 18.	- 3 52,039 - 0,37 π
" 19.	- 3 52,120 - 0,39 π
" 20.	- 3 52,182 - 0,42 π
" 21.	- 3 52,213 - 0,44 π
" 23.	- 3 52,236 - 0,50 π
" 24.	- 3 51,967 - 0,53 π
" 26.	- 3 52,270 - 0,57 π
" 27.	- 3 52,062 - 0,59 π
" 29.	- 3 52,014 - 0,64 π
" 30.	- 3 52,026 - 0,66 π
Mai 3.	- 3 52,231 - 0,73 π
" 17.	- 3 52,129 - 1,04 π
" 20.	- 3 52,022 - 1,10 π

sterne im Allgemeinen als unmerklich erkennen müssen [vgl. Br. m. O. II, 29].

82b. Nachtrag.*

(Königsberger Beobacht. 3. Abth. p. IX.)

Die Beobachtungen der Rectascensionsunterschiede zwischen α und 61 Cygni, die in der vorigen Abtheilung mitgetheilt wurden, wurden im Jahre 1816 wiederholt. Die Berechnung dieser neuen Beobachtungen, die ich hier mittheile, beruht auf der Bestimmung der 6 verglichenen Sterne, die ich aus den Beobachtungen von 1815 herleitete und in der vorigen Abtheilung anführte. 43 Beobachtungen auf 1816 reducirt, ergaben folgende Unterschiede:

Juli 9.	23 ^m 29,589 - 0,52 π	Aug. 27.	23 ^m 29,705 + 0,41 π
" 10.	29,511 - 0,51 π	Sept. 4.	29,808 + 0,50 π
" 16.	29,836 - 0,39 π	" 7.	29,808 + 0,61 π
" 17.	29,567 - 0,37 π	" 11.	29,832 + 0,71 π
" 18.	29,842 - 0,35 π	" 13.	29,980 + 0,73 π
" 19.	29,729 - 0,31 π	" 14.	29,901 + 0,76 π
" 20.	29,647 - 0,32 π	" 16.	29,842 + 0,79 π
" 21.	29,748 - 0,31 π	" 17.	29,786 + 0,81 π
" 22.	29,880 - 0,28 π	Oct. 5.	29,908 + 1,04 π
" 23.	29,577 - 0,26 π	" 8.	29,821 + 1,08 π
" 24.	29,645 - 0,24 π	" 26.	30,202 + 1,20 π
" 26.	29,428 - 0,20 π	" 27.	29,526 + 1,20 π
Aug. 5.	29,761 + 0,00 π	Nov. 5.	29,909 + 1,21 π
" 7.	29,824 + 0,04 π	" 9.	29,752 + 1,21 π
" 9.	29,657 + 0,08 π	" 17.	29,873 + 1,19 π
" 11.	29,647 + 0,12 π	" 20.	29,661 + 1,18 π
" 13.	29,544 + 0,16 π	" 23.	29,869 + 1,15 π
" 14.	29,696 + 0,18 π	" 25.	29,889 + 1,14 π
" 15.	29,832 + 0,21 π	Dec. 6.	29,690 + 1,01 π
" 21.	29,722 + 0,32 π	" 7.	29,644 + 1,03 π
" 24.	29,762 + 0,38 π	" 8.	29,780 + 1,02 π
" 26.	29,560 + 0,42 π		

Nach der Methode der kleinsten Quadrate findet sich hieraus

$$\begin{aligned} \text{Unterschied der AR. in 1815} &= - 3^m 52,0821 \\ \pi \dots &= - 0,00812 = - 0,7'' \text{ in Bogentheilen.} \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate der Fehler ist = 2,492, woraus der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung = 0,1492; der des ersten Resultats = 0,01676; der des anderen = 0,01954 folgt.

Für beide Sterne findet also, wie die angeführten Untersuchungen mit grosser Wahrscheinlichkeit zeigen, keine merklich grössere Parallaxe statt. Man wird also entweder die Voraussetzung, dass eine beträchtliche eigene Bewegung auf eine geringere Entfernung deutet, als ungegründet, oder die Parallaxe der Fix-

Nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man hieraus:

$$\begin{aligned} \text{Unterschied der AR. für 1816} &= 23^m 29,7214 \\ \pi \dots &= - 0,08800 \\ &= - 1,7'' \text{ in Bogentheilen.} \end{aligned}$$

Die erste Bestimmung hat das Gewicht von 28,07, die andere von 15,04 directen Beobachtungen. Für π = 0 würde der Unterschied der AR. für 1816 = 23^m 29,7581 sein.

* [Auszug aus 121 d. a. Verz.]

83. Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans.*

(Astron. Nachr. 16, p. 66.)

Als es BRADLEY gelungen war, seine Beobachtungen in Kew und Wansted, welche die Entdeckungen der Aberration und Nutation herbeiführten, durch diese allein genügend zu erklären, ohne dazu der Annahme einer jährlichen Parallaxe der beobachteten Fixsterne zu bedürfen, liess er nicht unbemerkt, dass ein über eine Secunde betragender Werth derselben, den Beobachtungen der Sterne ν Draconis und η Ursae majoris nicht entgangen sein würde. Indem er hinzusetzt, dass diese Sterne mehr als 400,000 Mal so weit als die Sonne von uns entfernt seien**, geht hervor, dass er unter jährlicher Parallaxe den Winkel versteht, welchen die ganze Erdbahn an den Sternen einschliesst.

Hierauf beruhet die später gewöhnlich gewordene Annahme, dass die jährliche Parallaxe der Fixsterne im Allgemeinen sehr klein sei. Wenn diese Annahme aber auch für die grosse Mehrheit der zahllosen Sterne dieser Art unbezweifelbar ist, so ist doch eben so wenig zu bezweifeln, dass einige darunter weit näher sind, als die grosse Menge der übrigen: bis zu welcher Grenze die jährliche Parallaxe dieser näheren Sterne steigen kann, kann aus der von BRADLEY erkannten Kleinheit

derselben für die beiden angeführten Sterne (denen man noch mehrere andere, bei derselben Gelegenheit beobachtete hinzusetzen kann), offenbar nicht gefolgt werden. Wenn man also auch des Mittels entbehrte, durch fortgehende Verbesserung der Apparate und Beobachtungsmethoden, Grössen bestimmbar zu machen, welche die von BRADLEY angegebene Grenze der jährlichen Parallaxen jener Sterne nicht überschreiten, so würde man dennoch die Hoffnung nicht verlieren, das Maass der Entfernungen anderer Sterne aus den Beobachtungen hervorgehen zu sehen.

Bei dem jetzigen Zustande unserer Kenntnisse des Weltgebäudes können wir nur zwei, in der That nicht sichere Gründe der Vermuthung, dass ein Fixstern verhältnissmässig nahe sei, anführen; nämlich den optischen Grund, seine ausgezeichnete Helligkeit, und den geometrischen, seine ausgezeichnete starke eigene Bewegung. Dass beide täuschen können, ist nicht zu bezweifeln; allein wenn eine Untersuchung über die jährliche Parallaxe eines Fixsterns unternommen werden soll, so sind sie dennoch die einzigen, welche seine Wahl leiten können.

Bekanntlich ist die jährliche Parallaxe einiger Sterne der ersten Grösse der Gegenstand mehrerer neueren Untersuchungen gewesen. PIAZZI fand im Jahr 1805 beträchtliche, von 2" bis 10" gehende Werthe dieser Parallaxen für α Tauri, α Canis maj., α Canis min. und α Lyrae, dagegen verschwindende für α Aurigae, α Bootis und α Aquilae; er selbst war mit der Sicherheit, mit welcher seine Beobachtungen diese Resultate ergaben, zwar nicht zufrieden, hielt aber einen Werth der jährlichen Parallaxe von α Canis maj. von 4" für wahrscheinlich. Sein Resultat für α Lyrae (2") wurde von dem von CALANDRELLI aus Zenithsectorbeobachtungen in Rom gezogenen (4,4) noch übertroffen. Obgleich diesen Bemühungen, zur Kenntniss der jährlichen Parallaxen einiger Fixsterne zu gelangen, genügende Sicherheit nicht beigelegt werden kann, indem PIAZZI die seinigen selbst verdächtig macht, und das von CALANDRELLI angewandte Instrument nicht geeignet ist, grosses Zutrauen zu seinen Leistungen zu erwecken, so standen sie doch ohne Widerspruch, und man konnte wirklich den Beobachtungen, welche zu ihnen geführt hatten, nichts ausser ihnen selbst Liegendes entgegen-

* [321 d. a. Vetz. — Auszüge dieser Abhandlung; von BESSEL selbst ist: Berliner Monatsberichte 1838 p. 157, Monthly Notices IV, p. 152; Comptes rendus 2. Sem. 1838 p. 785; ferner in: SILLMAN Am. Journ. XXXVI p. 200; vgl. auch BESSEL's populäre Vorlesungen p. 208 (SCHUMACHER's Jahrbuch f. 1839 p. 1). Ueber die Geschichte der Parallaxenbestimmungen bis 1842, s. PETERS, Recherches sur la parallaxe etc. (Mémoires Sc. math. et phys. de St. Petersburg T. V. p. 1—65); Fortsetzung der Untersuchungen über die Par. von 61 Cygni von: PETERS, Recherches etc. p. 66 ff. (absol. Par.), Astr. Nachr. Bd. 29, Ergänzungsheft (Neberechnung der R.'schen Beobh.); JOHNSON, Radcl. Observ. V. 14; O. STRUVE, Nouvelle détermination de la parall. etc.; ATWELL, Astr. Nachr. 59, p. 289—384; endlich des letzteren „Untersuchungen über die Beobh. von BESSEL und SCHLÜTER am Königl. Heliometer zur Bestimmung der Par. von 61 Cygni“ (Abh. d. Berliner Acad. 1868, vgl. auch VJS der Astr. Gesellschaft IV, p. 133 ff.); die Discussion sämmtlicher durch instrumentale Aenderungen in mehrere Gruppen zerfallender Beobh. von BESSEL und SCHLÜTER ergab hier: BESSEL erste 14 Monate 0,357; BESSEL letzte 3 Monate und SCHLÜTER 0,536; letzterer in naher Uebereinstimmung mit dem wahrscheinlich genauesten Werth der Parallaxe 61 Cygni von STRUVE 0,511. — Br. II. O. IV. 350, 419, 425, 428 (0.), 429 ff. 433 (0.)]

** RIGAUD, Miscellaneous works and Correspondence of JAMES BRADLEY. Oxford 1832, p. 15.

BESSEL's Abhandlungen. 2. Bd.

setzen. Indessen hatten die Beobachtungen der Unterschiede der Geradenaufsteigungen der Sterne, seit BRADLEY, nicht nur eine grosse Vollkommenheit erreicht, sondern es war auch eine so grosse Zahl von ihnen durch BRADLEY und MASKELYNE bekannt geworden, dass man darauf eine Untersuchung gründen konnte, deren Resultat wenigstens so viele Sicherheit versprach, dass sich auch beträchtlich kleinere jährliche Parallaxen, als die neuerlich angegebenen, dadurch bestätigt oder widerlegt finden mussten. Ich suchte daher alle von BRADLEY, in dem Laufe von 12 Jahren, auf der Greenwicher Sternwarte beobachteten Geradenaufsteigungsunterschiede von α Canis maj. und α Lyrae auf, indem sich, wegen ihrer Annäherung an 180° , in ihnen die Summe der Parallaxen beider Sterne verrathen musste; es fanden sich 207 Beobachtungen dieser Art und sie ergaben die Summe der Parallaxe von α Canis maj. und der mit 1.227 multiplicirten von α Lyrae = $0,044$ und den wahrscheinlichen Fehler dieser Bestimmung = $\pm 0,2430$. Obgleich der gefundene, fast verschwindende Werth der gesuchten Grösse wenig Gewicht besitzen haben würde, wenn es auf einige Zehntel einer Secunde angekommen wäre, so zeigte er doch mit entscheidender Sicherheit, dass die grossen in Palermo und Rom gefundenen Werthe der jährlichen Parallaxen beider Sterne nicht als wirklich vorhanden angenommen werden konnten. Für die Sterne α Canis min. und α Aquilae, welche, so wie die vorigen, in der Geradenaufsteigung nahe um 180° verschieden sind, fanden sich 200 Beobachtungen, welche die Summe der jährlichen Parallaxen = $0,9313$ und ihren wahrscheinlichen Fehler = $\pm 0,2085$ ergaben. Auch dieses Resultat trat beträchtlichen Werthen der jährlichen Parallaxen entscheidend entgegen; dass aber die Wahrscheinlichkeit, womit es den grösseren Werth der letzten Summe, vergleichungsweise mit der ersten, andeutet, gross genug wäre, um daraus allein auf eine geringere Entfernung eines der beiden letzteren Sterne folgern zu dürfen, glaube ich nicht.

BRADLEY'S Greenwicher Beobachtungen liessen also keinen Zweifel darüber, dass die jährlichen Parallaxen auch der vier angeführten Sterne der ersten Grösse eine Kleinheit besitzen, welche sie unter die Grössen versetzt, über deren wirkliches Vorhandensein auch die genauesten Meridianinstrumente der jetzigen Zeit nur mit grosser Schwierigkeit eine sichere Entscheidung herbeiführen können. Die Hoffnung, die jährliche Parallaxe von α Canis min. und α Aquilae aus Beobachtungen der Declinationen dieser Sterne hervorgehen zu sehen, musste als äusserst klein betrachtet

werden, da die Declinationen des ersteren nur um $0,314$, des anderen um $0,544$ der Grösse der ganzen jährlichen Parallaxe geändert werden können. Nichtsdestoweniger versuchte BRINKLEY die Kraft seiner, mit einem Kreise von 8 Fuss Halbmesser, im Trinity-College in Dublin angestellten Beobachtungen, auch in der Bestimmung der jährlichen Parallaxen von α Aquilae, welche er, im entschiedenen Widerspruche mit dem damals schon bekannten Resultate der Bradley'schen Beobachtungen, = $2,75$ fand. Für α Lyrae fand er $1,1$; für α Bootis und α Cygni sehr nahe dieselbe Grösse. Diese Resultate zog er aus lange fortgesetzten Beobachtungen, zu deren Sicherheit ihm das Bewusstsein der darauf verwandten Sorgfalt so grosses Zutrauen einflösste, dass er sie auch gegen alle ferneren Widersprüche, welche sie, vorzüglich von dem Königl. Astronomen POND erfuhren, in mehreren zwischen Beiden gewechselten Schriften, bis zum neunten Jahre nach ihrer Bekanntmachung (bis 1824) in Schutz nahm.

POND hat die vortrefflichen Meridiankreise der Greenwicher Sternwarte nicht nur fortwährend zur Untersuchung der jährlichen Parallaxen einiger Sterne der ersten Grösse angewandt, sondern auch noch andere Mittel, zu der lange gesuchten Entscheidung darüber zu gelangen, versucht. Dieses waren 10 Fuss lange Fernröhre, welche er an steinernen Pfeilern so befestigte, dass sie auf bestimmte Sterne gerichtet blieben und ihren Declinationsunterschied von anderen, ihrem Parallele nahen Sternen, durch ein Fadenmikrometer angaben. Wenn seine Beobachtungen auch zuweilen einen kleinen Werth der Parallaxen von α Lyrae, α Cygni und α Aquilae anzudeuten schienen, der aber immer weit unter dem von BRINKLEY gefundenen blieb, so gaben doch andere, namentlich die, die er für die von den Umständen am meisten begünstigten hielt, keine Spur davon zu erkennen. Am aufmerksamsten verfolgte er α Lyrae, erlangte aber dadurch keine Bestimmung der Parallaxe dieses Sterns, sondern nur die Ueberzeugung, dass sie zu klein sei, um sich durch die zu ihrer Aufsuchung angewandten Mittel verrathen zu können, obgleich er diesen eine Entscheidungskraft über ein oder zwei Zehntel einer Secunde zutrauet. Auch der Nachfolger POND'S, AIRY, ist zu demselben Resultate gelangt, indem er, einer neuerlich bekannt gewordenen Nachricht zufolge, die jährliche Parallaxe α Lyrae, aus den Beobachtungen mit einem der beiden Meridiankreise = $\pm 0,2$, mit dem anderen = $-0,1$ gefunden hat.

Weit entfernt, über die lange fortgesetzten Verhandlungen zwischen BRINKLEY und POND ein Urtheil

auszusprechen, welches immer nur von einer umsichtigen und vollständigen Untersuchung aller dabei in Betracht kommenden Beobachtungen beider Astronomen ausgehen könnte, glaube ich doch, dass eben diese Verhandlungen geeignet sind, Misstrauen gegen die Kraft der besten Meridianbeobachtungen einzuflössen, wenn sie bis zu der vollen Versicherung über ein oder einige Zehntel einer Secunde gehen soll. Ein Theil der Ursachen, welche das Zutrauen zu ihnen vermindern können, wirkt indessen auf gleiche Weise auf zwei Sterne, welche einander sehr nahe sind und gleichzeitig beobachtet werden. Dieser Theil begreift Alles in sich, was auf die Beziehung der Beobachtungen auf den Scheitelpunkt oder Pol Einfluss erhält, sowie auch die Ursachen, welche veranlassen können, dass eine gemessene Entfernung von dem einen oder dem andern dieser Punkte weniger genau ist, als die unmittelbare Beobachtung; z. B. Unregelmässigkeiten der Strahlenbrechung, ungleiche Wärme der verschiedenen Theile des Instruments, veränderliche Spannungen seines Metalls u. s. w. Da aber alle Fehlerursachen, welche auf die Beobachtungen zweier Sterne auf gleiche Weise wirken, aus der Beobachtung des Unterschiedes ihrer Oerter völlig verschwinden, so ist es nicht zweifelhaft, dass diese Beobachtungsart einer grösseren Genauigkeit fähig ist, als die Beobachtung der Oerter selbst. Da ferner ein Fernrohr stärker sein kann, wenn es nicht der, seine Grösse beschränkenden Bedingung, auf einem Meridianinstrumente angebracht zu werden, unterworfen wird, so gibt auch dieses der Beobachtung des Unterschiedes der Oerter einen Vortheil voraus, welcher auch noch durch den grösseren Radius der Mikrometertheilungen, vergleichungsweise mit dem der Gradbögen der Meridianinstrumente, vermehrt wird. Allerdings aber muss dafür gesorgt werden, dass die angeführten Vortheile, ungeschwächt durch nachtheilige Anordnungen oder mangelhafte Einrichtungen, zur Wirk-samkeit kommen.

Gründe dieser Art waren es, welche HERSCHEL I. veranlassten, die Beantwortung der schwierigen Frage nach der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, welche sich nur ihrer Kleinheit wegen der Bestimmung entzogen hatte, durch die Doppelsterne zu suchen. Unter der Voraussetzung, dass die Entfernungen der beiden einen Doppelstern zusammensetzenden Sterne, von unserem Sonnensysteme, ein beträchtlich von der Gleichheit verschiedenes Verhältniss haben, muss die jährliche Parallaxe periodische Einflüsse auf die scheinbare Entfernung des einen von dem andern erhalten, welche HERSCHEL aus Beobachtungen, zu verschiedenen Zeiten

des Jahres angestellt, hervorgehen zu sehen hoffte. Dieses war die Veranlassung seiner Aufsuchung der Doppelsterne, welche ihm aber bekanntlich zu der Entdeckung einer so grossen Zahl derselben führte, dass ihm die Unwahrscheinlichkeit der angeführten Voraussetzung dadurch klar wurde, und er dagegen zu der Ueberzeugung des Zusammengehörens der beiden Sterne eines Doppelsterns gelangte. Hiernit fiel der Grund der Hoffnung im Allgemeinen weg, die Parallaxen der Doppelsterne zu entdecken, er konnte nur für die wieder hervortreten, von welchen gezeigt werden konnte, dass ihre Bestandtheile nicht, wie bei der grossen Mehrzahl, zusammen gehörten, sondern durch ihre zufällige Stellung gegen unser Sonnensystem, nur scheinbar einen Doppelstern bildeten. Dieses ist bei dem Sterne α Lyrae und seinem kleinen Begleiter der Fall, wie HERSCHEL II. und SOUTH in ihrem 1825 erschienenen, gemeinschaftlichen Werke über die Doppelsterne gezeigt haben.

Indessen würde HERSCHEL'S Absicht zu seiner Zeit nur sehr unvollkommen haben erreicht werden können, selbst wenn die Beschaffenheit der Doppelsterne seiner anfänglichen Voraussetzung entsprochen hätte. So kräftig seine Fernrohre waren, eben so mangelhaft waren damals die Einrichtungen, welche sie haben müssen, um zuverlässige Messinstrumente für kleine Entfernungen zu werden. Es ist FRAUNHOFER vorbehalten gewesen, das mikrometrische Messen der Kraft selbst sehr starker Fernrohre angemessen zu machen. Ohne hier wiederholen zu wollen, was ich bei anderer Gelegenheit darüber gesagt habe*, muss ich doch der beiden Apparate erwähnen, welche dieses leisten. Der zuerst verfertigte ist das grosse Fernrohr der Dorpater Sternwarte, welches wie STRUVE'S häufige Anwendungen derselben zeigen, kleine Entfernungen mit beträchtlicher Uebereinstimmung misst; der andere ist das grosse Helio-meter der Königsberger Sternwarte, welches diese kleinen und grössere Entfernungen mit gleichem Vortheile ergibt. Instrumente der ersten Art sind später in München noch einigemal verfertigt worden; das angeführte der zweiten Art ist bis jetzt nur einmal vorhanden.

Diese Verbesserung der mikrometrischen Messungen hat STRUVE, wie aus seinem grossen Werke über die Messungen der Doppelsterne hervorgeht**, benutzt, um dadurch ein Urtheil über die jährliche Parallaxe α Lyrae zu erhalten, welcher Stern, nach der angeführten

*) Astron. Nachr. Nr. 189. [Abb. 68. p. 95 ff.]

** [Mens. micr. p. CLXII ff.]

Herschel- und South'schen Bemerkung, ein uneigentlicher Doppelstern ist und sich also zu der Ausführung des von HERSCHEL dem Vater beabsichtigten Versuchs eignet. Seine ausgezeichnete Helligkeit unterstützt die Aussicht, seine jährliche Parallaxe aus sehr genauen Beobachtungen hervorgehen zu sehen, wenn auch die POND'schen nicht wahrscheinlich erscheinen lassen, dass sie mehr als einen kleinen Bruch einer Secunde betragen wird; sie beeinträchtigt zwar die Genauigkeit der Messungen, indem sie die Schärfe der Einstellung des Mikrometerfadens vermindert, allein da die Beobachtungen selbst das Maass ihrer Genauigkeit angeben, so gewähren sie auch die Bestimmung der Sicherheit des aus ihnen zu ziehenden Resultats, und das ihm zu schenkende Vertrauen hängt nur hiervon, nicht von einer abgesonderten Schätzung der einzelnen Fehlerursachen ab.

Das angeführte Werk enthält den Anfang der Beobachtungen dieses Sterns, nämlich 17, zwischen dem 3. Nov. 1835 und dem Ende von 1837 gemachte Messungen, sowohl der Entfernung, als auch des Positionswinkels; allein STRUVE hat diesen Anfang fortgesetzt und wird die vollständige Beobachtungsreihe und ihre Resultate bald bekannt machen. Der angeführte Anfang ergibt den Werth der jährlichen Parallaxe $= 0''.125$; die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler der 34 Momente der 17 Beobachtungen ist $= 1.6225$, woraus der mittlere Fehler einer Beobachtung $= \pm 0''.2288$, und der mittlere Fehler des angeführten Resultats $= \pm 0''.081$ hervorgeht; unter der Annahme, dass das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler dasselbe sei, welches die Methode der kleinsten Quadrate zur wahrscheinlichsten macht, berechnet STRUVE den wahrscheinlichsten Fehler des Resultats $= \pm 0''.055$. Auf diesen Anfang gründet STRUVE die Hoffnung, die jährliche Parallaxe von α Lyrae auf diesem Wege in sehr enge Grenzen einschliessen zu können; eine Hoffnung, welche man für begründet erkennen muss*). Schon aus dem Anfange geht hervor, dass diese Beobachtungen sich entscheidend auf POND's Seite neigen, also gegen BRINKLEY's, für denselben Stern gefundene, viel grössere jährliche Parallaxe stimmen.

Die auf die Bestimmung der jährlichen Parallaxen der Fixsterne, nach BRADLEY, gerichteten Bemühungen, welche ich angeführt habe, verfolgen sämmtlich die Aussicht, sehr helle Sterne verhältnissmässig nahe zu

finden. Als aber die aus den Bradley'schen Beobachtungen abgeleiteten Oerter fast aller Flamstead'schen Sterne für 1755, und ihre Vergleichung mit den von PIAZZI für 1800 bestimmten, eine grosse Menge von kleineren Sternen kennen lehrten, welche beträchtliche eigene Bewegungen besaßen (wovon aber mehrere schon bekannt waren), konnte ich nicht mehr bezweifeln, dass auch unter den kleineren Sternen verhältnissmässig nahe sind. Ich hielt also dem, durch die stärkste eigene Bewegung ausgezeichneten Doppelstern 61 Cygni Fl., so wie er jeden Zweifel an der Richtigkeit der Herschel'schen Ansicht von der Natur der Doppelsterne augenfällig beseitigte, auch für vorzüglich geeignet zu einer Untersuchung über die jährliche Parallaxe*). Indessen waren zwei Beobachtungsreihen, welche ich 1815 und 1816 über seine Geradeaufsteigungsunterschiede von 6 benachbarten Sternen mit dem älteren Passageninstrumente von DOLLOND machte, nicht genau genug, seine jährliche Parallaxe zu verrathen; sie gaben, im Gegentheil, einen negativen Werth derselben von 1'', welcher nur unter der unwahrscheinlichen Voraussetzung, dass der Doppelstern weiter entfernt wäre, als die 6 zur Vergleichung gewählten Sterne, hätte stattfinden können**). Auch ARAGO und MATTHIEU haben diesen Stern im Jahre 1812, im August und November beobachtet, und daraus seine jährliche Parallaxe $= 0''.5$ abgeleitet; da die Beobachtungen selbst nicht bekannt geworden sind, und nur das daraus gezogene Resultat (im *Annuaire du Bureau des Longs* pour 1834 in einer Note p. 282) angeführt wird, so kann ich nichts Näheres darüber sagen.

Ich glaube nicht, dass durch alle die angeführten Versuche, die Parallaxen der Fixsterne zu entdecken, etwas anderes gewonnen ist, als die Ueberzeugung, dass sie sehr kleine, sich den gewöhnlichen Beobachtungsarten entziehende Grössen sind. Man konnte sie noch eben so gut für innerhalb einiger Tausendtel, als innerhalb einiger Zehntel einer Secunde liegend halten; und wirklich kann das sinnreichste der bisher entwickelten Mittel, zu der Kenntniss irgend einer kleinsten Grenze einer jährlichen Parallaxe zu gelangen, das von SAVARY entwickelte***), nur zu einer so kleinen führen, dass dadurch die Entfernung der Sterne nur zwischen zwei, vergleichungsweise mit ihr selbst, äusserst weit auseinanderliegende Grenzen eingeschlossen werden kann.

*) [Enderresultat $0''.262 \pm 0''.025$, s. *Additum* in mens. micr. Petrop. 1840.]

*) v. ZACH, *Monatl. Correspond.* August 1812. [Abb. 80, p. 207.]

***) [Abb. 82 und 82*].

***) *Connaissance des Temps* pour 1830, p. 169.

Als ich die Genauigkeit kennen lernte, welche den Beobachtungen, durch das am Ende von 1829 auf der Königsberger Sternwarte aufgestellte Heliometer, nicht allein in den kleinen Entfernungen der Doppelsterne, sondern auch in grösseren, gegeben werden konnte, erzeugte sie die Hoffnung, dass es gelingen werde, durch dieses Instrument, statt der Ueberzeugung von der Kleinheit der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, in günstigen Fällen ihre Bestimmung zu erhalten. Mein verehrter Freund *OLBERS* forderte mich wiederholt zu Versuchen hierüber auf; allein da eine Beobachtungsreihe, wenn sie ein unzweifelhaftes Resultat für die jährliche Parallaxe eines Fixsterns geben sollte, meiner Meinung nach, wenigstens ein Jahr lang ununterbrochen und mit Aufopferung mancher anderen Beobachtungen, fortgesetzt werden musste, in den ersten Jahren nach der Aufstellung des Instruments aber andere, dringende Anwendungen desselben vorhanden waren, auch die Ausföhrung der Ostpreussischen Gradmessung später meine häufige Abwesenheit forderte, so konnte ich vor dem Herbst 1834 nicht zu dem Anfange dieser Beobachtungen gelangen. Ich wählte den 61. Stern des Schwans zu ihrem Gegenstande, und zwar nicht allein wegen der grösseren Aussicht auf eine merkbare Parallaxe, die er, wegen seiner grossen eigenen Bewegung, darzubieten schien, sondern auch weil er ein Doppelstern ist, den man mit vorzüglicher Genauigkeit beobachten kann, indem man das Bild, welches die eine Hälfte des Heliometerobjectives von dem zu vergleichenden Stern macht, in die Mitte der beiden Sterne des von der andern Hälfte abgebildeten Doppelsterns legt; auch empfahl er sich durch seinen Ort am Himmel, der zu allen Jahreszeiten, einen Monat ausgenommen, bei Nacht in eine hinreichende Höhe über dem Horizonte gelangt; endlich durch die zahlreichen kleinen Sterne, die ihn umgeben, unter welchen man Vergleichungssterne nach Belieben auswählen konnte. Ich wählte darunter zwei, ihm am nächsten stehende Sternen der 11. Grösse, bemerkte aber bald, dass die Luft selten heiter genug war, um die häufige Beobachtung so lichtschwacher Sterne zu erlauben. Die Auswahl anderer, hellerer Vergleichungssterne und der neue Anfang der sich darauf beziehenden Beobachtungsreihe, wurden nun durch lange anhaltendes trübes Wetter, und dann durch den niedrigen Stand des Gestirns verhindert. Im Jahre 1835 war ich genöthigt, drei Monate in Berlin zuzubringen, um dort die Pendellänge durch eine Reihe von Versuchen zu bestimmen, welche lange fortgesetzt wurde, weil ich ihrem Resultate beträchtliche Genauigkeit zu geben beabsichtigte. Nach

ihrer Beendigung erschien der Halley'sche Comet, der jeden heitern Augenblick für sich verlangte. Das Jahr 1836 brachte andere Verhinderungen, allein im August 1837 konnte ich auf ununterbrochene Fortsetzung einer Beobachtungsreihe von 61 Cygni rechnen. Die Aussicht auf ihren Erfolg hatte durch die Hoffnung, welche *STRUVE* nach seinen Beobachtungen α Lyrae unterhielt, neue Unterstützung erhalten, so dass diese Hoffnung auch beitrug, die Zeitfolge der Beobachtungen zu Gunsten derer über die jährliche Parallaxe anzuordnen. Was ich jetzt davon mittheile, beruhet auf ihrer Fortsetzung bis zum 2. October 1838; sie werden noch weiter fortgesetzt und daher spätere Nachträge zur Folge haben.

1.

Zur Vergleichung mit dem Punkte, welcher zwischen beiden Sternen 61 Cygni in der Mitte liegt, wählte ich zwei Sterne *a* und *b*, deren zweiter zwar heller ist als der erste, die ich aber beide zwischen der 9. und 10. Grösse schätze. Der erste steht etwa senkrecht auf der Richtungslinie des Doppelsterns, der andere etwa in dieser Linie. Genauer geht dieses aus folgenden, für den Anfang 1838, aus meinen sämmtlichen Beobachtungen gefolgerten, sich auf den Mittelpunkt von 61 Cygni beziehenden Bestimmungen hervor:

	Entfernung.	Positionen.	
<i>a</i> . . .	461,6171	301° 29' 24"	85 Beobb.
<i>b</i> . . .	706,2791	109 22 10	98 „

Die für die Positionswinkel angegebenen Zahlen sind die halben Summen dieses Winkels an der Mitte von 61 Cygni und des um 180° veränderten an dem Vergleichungssterne. Für die beiden Sterne des Doppelsterns habe ich gefunden:

$$1838,38 \quad 167,204 \quad | \quad 95^{\circ} 19' 30'' \quad | \quad 10 \text{ Beobb.}$$

Die Anordnung, welche ich den Beobachtungen gegeben habe, ist die folgende. Zuerst wurde die Durchschnittslinie des Objectivs näherungsweise in die Richtung gebracht, in welcher der zu beobachtende Vergleichungsstern liegt, und die Mikrometerschraube der Objectivhälfte I auf 60⁰000 gestellt. Nach dieser Vorbereitung folgte eine Beobachtung sowohl der Entfernung als des Positionswinkels, wobei nur die Mikrometerschraube von II gedreht wurde, und gleich darauf eine zweite der Entfernung, die durch die, vorher etwas zurückgedrehte Mikrometerschraube I erlangt wurde. Beide Beobachtungen der Entfernung und die eine des Positionswinkels wurden abgelesen und dann noch einige-

male wiederholt; am Anfange der Beobachtungsreihe meistens dreimal, später immer viermal; wenn die Unruhe der Luft das Zutrauen zu ihrer Genauigkeit schwächte, auch öfter. Dieses ist die eine Hälfte der Beobachtung; ihre andere Hälfte ist genau so wie die erste gemacht, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Axe der Objectivhälfte II dabei auf der entgegengesetzten Seite der Axe von I war. Die aus einer solchen Beobachtung hervorgehende Entfernung beruht also auf 12 oder 16 Einstellungen, der Positionswinkel auf 6 oder 8. Ich habe, wie aus dieser Anordnung der Beobachtungen hervorgeht, den Positionswinkel als von geringer Bedeutung für die zu beantwortende Frage nach der jährlichen Parallaxe betrachtet; in der That würde es nicht möglich gewesen sein, seiner Beobachtung eine Genauigkeit zu geben, welche der der Entfernung gleich geachtet werden könnte, denn der Positionskreis des Instruments gibt nur ganze Minuten an, deren Werth in der Entfernung des Sterns $a = 0,134$, in der Entfernung des Sterns $b = 0,205$ beträgt, während die Ablesung der Entfernung an den Mikrometerschrauben bis auf viel kleinere Theile geht. Ich habe daher, wenn die Unruhe der Luft die Beobachtung schwierig machte, die Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Entfernung gerichtet, auch auf die Bestimmungen des Indexfehlers des Positionskreises und der jedesmaligen Lage der Stundenaxe des Instruments, nicht immer die Sorgfalt verwandt, welche erforderlich gewesen sein würde, wenn die Beobachtungen der Positionswinkel zu der Beantwortung der vorliegenden Frage entscheidend hätte beitragen sollen. Die angewandte Vergrößerung des Fernrohrs war immer eine 300malige.

Die Verwandlung der beobachteten Schraubenrevolutionen (S) in Secunden (s) ist nach der Formel*)

$$tg s = S \sin 52,91788$$

gemacht, oder vielmehr nach ihrer Entwicklung:

$$s = S \cdot 52,91788 - S^3 \cdot 0,000001161$$

Diese Formel gilt für die Wärme 49,2 F.; zeigt das Thermometer f , so muss der dadurch erhaltenen Entfernung noch

$$- 0,0003912 S (f - 49,2)$$

hinzugesetzt werden, welche Verbesserung auf einer Vermehrung der früher zu ihrer Erfindung gemachten Beobachtungen beruht. Der Einfluss der Strahlenbrechung ist nach den Formeln und Tafeln in der

XV. Abtheilung meiner Beobachtungen berechnet worden. Weitere Erklärungen werden die folgenden Verzeichnisse der Beobachtungen nicht bedürfen**).

Beobachtungen des Sterns α .

		Wahre Entfernung.			Wahre Entfernung.
1	1837 Aug. 18	460,425	44	1838 Juni 22	463,714
2	19	60,005	45	26	63,991
3	20	60,092	46	27	64,067
4	28	60,225	47	28	64,240
5	30	60,464	48	29	64,273
6	Sept. 4	60,498	49	30	64,321
7	8	60,477	50	Juli 1	63,956
8	9	60,245	51	8	64,030
9	11	60,307	52	10	64,203
10	14	60,491	53	14	63,957
11	20	60,298	54	17	64,214
12	23	60,637	55	29	64,484
13	24	60,427	56	Aug. 4	64,403
14	Oct. 1	60,537	57	11	64,476
15	2	60,695	58	20	64,364
16	16	60,817	59	21	64,631
17	28	60,767	60	25	64,555
18	Nov. 22	60,953	61	26	64,630
19	Dec. 1	60,990	62	29	64,713
20	30	61,244	63	Sept. 3	64,784
21	31	61,329	64	5	64,679
22	1838 Jan. 8	61,283	65	7	64,923
23	10	61,364	66	8	64,799
24	16	61,383	67	12	64,907
25	17	61,704	68	13	64,686
26	20	61,366	69	14	64,679
27	Febr. 1	61,885	70	15	64,732
28	5	62,060	71	16	64,873
29	10	61,546	72	17	64,699
30	Mai 3	63,131	73	18	64,593
31	4	63,347	74	20	64,694
32	6	63,302	75	21	64,882
33	12	63,248	76	22	64,944
34	16	63,524	77	23	64,850
35	17	63,636	78	24	64,739
36	19	63,468	79	25	65,015
37	21	63,571	80	26	64,880
38	22	63,521	81	27	64,801
39	23	63,671	82	28	64,790
40	Juni 1	63,680	83	29	64,962
41	2	63,913	84	30	64,982
42	12	63,801	85	Oct. 1	64,747
43	13	63,897			

** [Auszug. Im Original sind noch die Sternzeit der Beobachtung, Barometer, Thermometer, N , s , sowie die Correctionen wegen Wärme und Refraction angegeben. Die Originalbeob. finden sich in Königsb. Beob. XXIV. Abth., sowie auch (in anderer, zum Theil berichteter Form) in ATWEERS, Untersuchungen etc. (Abh. d. Berl. Akad. 1868) p. 32 ff.]

*) Astronom. Beobachtungen auf der K. Sternwarte in Königsberg XV. Abth., S. XXII.

Beobachtungen des Sterns δ .

		Wahre Entfernung.			Wahre Entfernung.
1	1837 Aug. 16	707,623	50	1838 Juni 13	705,066
2	" 18	7,471	51	22	5,262
3	19	7,813	52	26	4,925
4	20	7,707	53	27	4,854
5	28	7,114	54	28	5,040
6	30	7,357	55	29	5,012
7	Sept. 4	7,291	56	30	4,995
8	9	7,533	57	Juli 1	5,161
9	11	7,165	58	8	5,074
10	14	7,415	59	10	4,733
11	20	7,399	60	14	4,903
12	23	7,301	61	17	4,833
13	24	7,131	62	29	4,966
14	Oct. 1	7,274	63	Aug. 2	4,762
15	2	7,162	64	4	4,758
16	16	7,086	65	11	4,757
17	28	6,742	66	20	4,781
18	Nov. 22	6,551	67	21	4,866
19	Dec. 1	6,642	68	25	4,827
20	17	6,325	69	26	4,746
21	30	6,445	70	29	4,673
22	31	6,225	71	Sept. 3	4,401
23	1838 Jan. 5	6,267	72	4	4,486
24	6	6,103	73	5	4,482
25	8	6,208	74	6	4,726
26	10	6,080	75	7	4,815
27	14	5,865	76	8	4,584
28	17	6,076	77	12	4,514
29	20	6,183	78	—	4,539
30	Febr. 1	5,968	79	13	4,863
31	5	5,859	80	14	4,721
32	10	5,820	81	15	4,917
33	19	5,504	82	16	4,754
34	März 12	5,692	83	17	4,788
35	13	5,059	84	18	4,792
36	Mai 2	5,099	85	19	4,804
37	3	5,083	86	20	4,766
38	4	5,214	87	21	4,438
39	6	5,287	88	22	4,519
40	12	5,257	89	23	4,640
41	16	5,174	90	24	4,636
42	17	4,901	91	25	4,558
43	19	5,175	92	26	4,612
44	21	5,009	93	27	4,782
45	22	5,010	94	28	4,688
46	23	5,188	95	29	4,615
47	Juni 1	5,080	96	30	4,624
48	2	5,141	97	Oct. 1	4,621
49	12	5,035	98	2	4,618

2.

Ehe diese Beobachtungen zur Aufsuchung der jährlichen Parallaxe angewandt werden können, müssen sie,

durch Berechnung des Einflusses der eigenen Bewegung, auf eine bestimmte Zeit (wofür ich den Anfang von 1838 annehmen werde) reducirt, auch von einer kleinen Einwirkung der Aberration auf die Entfernungen befreit werden. Beide Reductionen werde ich jetzt näher angeben.

Die Oerter der beiden Sterne 61 Cygni sind neuerlich von ARGELANDER sehr genau bestimmt worden^{*)}, und es folgt daraus, für den in der Mitte zwischen beiden liegenden Punkt und für 1838:

$$\text{AR.} = 314^{\circ}54'45,9 \quad \text{Decl.} = + 37^{\circ}57'22,9;$$

ihre jährliche eigene Bewegung hat er aus der Vergleichung meiner, auf BRADLEY'S Beobachtungen beruhenden Bestimmung für 1755, mit der seinigen für 1830, unter der Voraussetzung, dass die Sterne der Zeit proportional fortschreiten,

$$\text{für den vorhergehenden} + 5,1075 \text{ und} + 3,232$$

$$\text{„ „ folgenden} \dots + 5,193 \text{ und} + 3,016$$

abgeleitet. Nur wenn der Schwerpunkt beider Sterne in der Mitte zwischen ihnen liegt, ist seine, der Zeit proportional anzunehmende Bewegung, das Mittel aus den Bewegungen beider Sterne; wenn er aber nicht in der Mitte liegt, ist die Bewegung der Mitte nicht der Zeit proportional, sondern nimmt Antheil an der Umlaufbewegung der beiden Sterne um ihn. Man kennt seine Lage aber nicht, und hat also keinen Grund anzunehmen, dass das Mittel aus beiden jährlichen Bewegungen, nämlich $+ 5,150$ und $+ 3,124$, der Mitte und der gegenwärtigen Zeit zugehöre. Indem man dieses dennoch, aus Unbekanntheit mit der Lage des Schwerpunkts annehmen muss, und indem man die Vergleichungssterne (deren Bewegungen man eben so wenig kennt), als unbeweglich betrachten muss, kommen den unter diesen Voraussetzungen berechneten jährlichen Veränderungen der Entfernungen und Positionswinkel dieser Sterne, noch unbekanntere Verbesserungen hinzu, deren Werthe durch ihre Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Ich werde die unter den zu machenden Voraussetzungen stattfindenden jährlichen Veränderungen zuerst aufsuchen. Verbindet man die im 1. Art. angeführten Entfernungen und Positionswinkel der Sterne a und b mit dem Orte der Mitte von 61 Cygni, so erhält man für 1838:

^{*)} DLX Stellarum fixarum positiones mediae, inaeunte anno 1830. Helsingforsiae 1835.

	AR	Decl.
61 Cygni	314°54' 45",90	+ 37°57' 22",90
<i>a</i>	314 54 11,60	50 13,36
<i>b</i>	315 8 50,58	53 28,66

Die jährlichen Veränderungen dieser Oerter sind, unter Annahme der angeführten eigenen Bewegung von 61 Cygni:

61 Cygni	+ 40",126	+ 17",284
<i>a</i>	+ 35,012	+ 14,145
<i>b</i>	+ 35,047	+ 14,218

Die Veränderungen der Entfernungen von 1838 bis 1838 + τ folgen hieraus:

$$a \dots + 4",3983 \cdot \tau + 0",0071 \cdot \tau \tau$$

$$b \dots - 2,8003 \cdot \tau + 0,0130 \cdot \tau \tau$$

und die Veränderungen der Positionswinkel:

$$a \dots + 19' 23",2 \cdot \tau - 11",2 \cdot \tau \tau$$

$$b \dots + 20 36,7 \cdot \tau + 4,9 \cdot \tau \tau$$

Die von mir gemachten Reductionen der Beobachtungen der Entfernungen auf den Anfang von 1838, sind nach den, von den eben gefundenen etwas verschiedenen Formeln:

$$a \dots (+ 4",392 + \alpha') \tau + 0",0071 \cdot \tau \tau$$

$$b \dots (- 2,825 + \beta') \tau + 0,0130 \cdot \tau \tau$$

berechnet, welche auf einer vorläufigen, von der jetzt verfolgten etwas verschiedenen Annahme der Werthe der Entfernungen und Positionswinkel beruhen. Die Einflüsse, welche die noch unbekannt Fehler der, der Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzungen, auf die Entfernungen haben, sind daher:

$$a \dots (- 0",0063 + \alpha'') \tau$$

$$b \dots (- 0,0247 + \beta'') \tau$$

Für die Einflüsse der Nutation und Aberration auf die Entfernungen und Positionswinkel werde ich die angewandten Formeln anführen, ohne mich bei ihrer Entwickelung aufzuhalten. Wenn A, B, C, D, τ die Bedeutung haben, unter welcher sie in der VIII. Tafel der Tab. Region. von 1750 bis 1850 berechnet, vorkommen, ist das was den Werthen der Entfernung und des Positionswinkels für den Anfang des Jahres hinzugesetzt werden muss, um die scheinbaren zu erhalten:

$$\text{Entfernung} \dots \gamma C + \delta D + \mu \tau$$

$$m' \cos M' = \frac{1}{\sin s} (\sin a \cos P - \cos a \sin d \sin P)$$

$$m' \sin M' = \frac{1}{\sin s} \left\{ - (\cos a \cos P + \sin a \sin d \sin P) \cos \omega + \sin d \sin P \sin \omega \right\}$$

angegeben wird.

Wenn also die Werthe der Entfernungen am Anfange von 1838 für den Stern a durch α , für b durch

$$\text{Positionswinkel} \dots \alpha' A + \beta' B + \gamma' C + \delta' D + \mu' \tau$$

wo μ und μ' die jährlichen, aus den eigenen Bewegungen entstehenden Veränderungen und

$$\gamma = - 2 \sin \frac{1}{2} s (\cos d \sin a + \text{tg } \omega \sin d)$$

$$\delta = 2 \sin \frac{1}{2} s \cdot \cos d \cos a$$

$$\alpha' = n \sec d \sin a$$

$$\beta' = \sec d \cos a$$

$$\gamma' = \text{tg } d \cos a$$

$$\delta' = \text{tg } d \sin a$$

bedeuten. Die Entfernung der beiden Sterne ist hier durch s bezeichnet, die Geradeaufsteigung des in ihrer Mitte liegenden Punktes durch a , seine Abweichung durch d , die Schiefe der Ekliptik durch ω . Für kleine Entfernungen, so wie sie bei heliometrischen Messungen vorkommen, können statt a und d die Geradeaufsteigung und Abweichung eines der beiden Sterne angenommen werden. Dann enthalten $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ den Positionswinkel nicht, und es folgt daraus, dass die Aberration die Entfernungen, in welchen Richtungen sie auch stattfinden mögen, in einem gleichen Verhältnisse ändert; die Richtungen sämmtlich um eine gleiche Grösse. Wenn die Peripherie eines Kreises von kleinem Halbmesser, um einen Stern beschrieben, mit anderen Sternen besetzt wäre, so würde der Kreis durch die Aberration nur vergrößert und verkleinert, sowie auch gedreht werden, ohne dass er aufhörte ein Kreis zu sein, ohne dass sein Mittelpunkt sich veränderte und ohne dass die Sterne auf seiner Peripherie die Radien verliessen, auf welchen sie sich befinden.

Der Einfluss der jährlichen Parallaxe p auf die Entfernung ist

$$p R m \cos (\odot - M)$$

wo R und \odot die Entfernung und die Länge der Sonne bezeichnen und m und M aus den Formeln:

$$m \cos M = \sin a \sin P + \cos a \sin d \cos P$$

$$m \sin M = (- \cos a \sin P + \sin a \sin d \cos P) \cos \omega - \sin d \cos P \sin \omega$$

hervorgehen. Ihr Einfluss auf den Positionswinkel P ist:

$$p R m' \cos (\odot - M')$$

wo die Bedeutung von m' und M' durch die Formeln

β bezeichnet werden, die Unterschiede der jährlichen Parallaxen dieser Sterne von der jährlichen Parallaxe

von 61 Cygni durch α' und β' und wenn α' und β' die oben angegebene Bedeutung haben, so erhält man die

$$\begin{aligned} a \dots \alpha + \alpha' r + \alpha'' R m \cos(\odot - M) + 4,392 r + 0,0071 r r + \gamma C + \delta D \\ b \dots \beta + \beta' r + \beta'' R m \cos(\odot - M) - 2,825 r + 0,0130 r r + \gamma C + \delta D \end{aligned}$$

3.

Die vier letzten, nichts Unbekanntes enthaltenden Glieder dieser Ausdrücke habe ich, mit entgegengesetzten Zeichen, den Beobachtungen hinzugesetzt und

Ausdrücke der im 1. Art. mitgetheilten Beobachtungen der Entfernungen:

dadurch die Zahlen erhalten, welche in den folgenden Verzeichnissen, als Entfernungen für 1838, angeführt sind; die drei ersten Glieder sind ihr Ausdruck durch die unbekanntes Grössen.

Beobachtungen des Sterns a.

Entfernung für 1838.			Ausdruck.			Entfernung für 1838.			Ausdruck.			Entfernung für 1838.			Ausdruck.		
1	462,050		$\alpha - 0,369$	$\alpha' + 0,636$	α''	30	461,675	$\alpha + 0,337$	$\alpha' + 0,514$	α''	59	461,783	$\alpha + 0,638$	$\alpha' + 0,604$	α''		
2	1,619		-0,367	+0,624		31	1,880	+0,340	+0,529		60	1,707	+0,649	+0,556			
3	1,693		-0,364	+0,611		32	1,811	+0,345	+0,553		61	1,770	+0,652	+0,543			
4	1,736		-0,342	+0,513		33	1,686	+0,361	+0,623		62	1,812	+0,660	+0,500			
5	1,940		-0,337	+0,487		34	1,915	+0,372	+0,561		63	1,822	+0,674	+0,452			
6	1,912		-0,323	+0,414		35	2,015	+0,375	+0,580		64	1,691	+0,679	+0,405			
7	1,841		-0,312	+0,363		36	1,813	+0,380	+0,701		65	1,911	+0,685	+0,377			
8	1,597		-0,309	+0,349		37	1,902	+0,386	+0,721		66	1,774	+0,687	+0,363			
9	1,633		-0,304	+0,321		38	1,840	+0,389	+0,730		67	1,832	+0,698	+0,304			
10	1,779		-0,296	+0,270		39	1,978	+0,392	+0,740		68	1,599	+0,701	+0,289			
11	1,502		-0,279	+0,184		40	1,879	+0,416	+0,817		69	1,579	+0,704	+0,273			
12	1,814		-0,271	+0,138		41	2,100	+0,419	+0,825		70	1,620	+0,707	+0,259			
13	1,591		-0,268	+0,123		42	1,867	+0,446	+0,886		71	1,748	+0,709	+0,244			
14	1,614		-0,249	+0,012		43	1,951	+0,449	+0,889		72	1,542	+0,712	+0,229			
15	1,760		-0,246	-0,003		44	1,658	+0,474	+0,919		73	1,443	+0,715	+0,214			
16	1,708		-0,208	-0,222		45	1,886	+0,485	+0,926		74	1,519	+0,720	+0,183			
17	1,512		-0,175	-0,398		46	1,940	+0,488	+0,928		75	1,695	+0,723	+0,168			
18	1,395		-0,107	-0,609		47	2,111	+0,490	+0,928		76	1,744	+0,726	+0,153			
19	1,321		-0,083	-0,779		48	2,132	+0,493	+0,928		77	1,638	+0,728	+0,138			
20	1,233		-0,063	-0,897		49	2,168	+0,496	+0,929		78	1,505	+0,731	+0,122			
21	1,306		-0,061	-0,897		50	1,790	+0,499	+0,928		79	1,778	+0,734	+0,106			
22	1,168		+0,023	-0,886		51	1,778	+0,518	+0,991		80	1,631	+0,737	+0,090			
23	1,326		+0,028	-0,881		52	1,927	+0,524	+0,917		81	1,540	+0,739	+0,075			
24	1,175		+0,044	-0,855		53	1,631	+0,534	+0,910		82	1,515	+0,742	+0,059			
25	1,485		+0,047	-0,852		54	1,851	+0,543	+0,892		83	1,675	+0,745	+0,043			
26	1,112		+0,056	-0,837		55	1,973	+0,575	+0,826		84	1,684	+0,748	+0,027			
27	1,491		+0,088	-0,751		56	1,817	+0,592	+0,778		85	1,436	+0,750	+0,011			
28	1,620		+0,099	-0,715		57	1,803	+0,611	+0,713								
29	1,048		+0,113	-0,665		58	1,579	+0,636	+0,616								

Beobachtungen des Sterns b.

Entfernung für 1838.			Ausdruck.			Entfernung für 1838.			Ausdruck.			Entfernung für 1838.			Ausdruck.		
1	706,678		$\beta - 0,375$	$\beta' + 0,436$	β''	13	706,354	$\beta - 0,368$	$\beta' + 0,823$	β''	25	706,238	$\beta + 0,023$	$\beta' + 0,104$	β''		
2	6,434		-0,369	+0,462		14	6,547	-0,249	+0,855		26	6,126	+0,028	+0,072			
3	6,783		-0,367	+0,474		15	6,442	-0,246	+0,859		27	5,944	+0,039	+0,011			
4	6,684		-0,364	+0,487		16	6,467	-0,208	+0,891		28	6,181	+0,047	-0,035			
5	6,147		-0,342	+0,585		17	6,210	-0,175	+0,876		29	5,312	+0,056	-0,083			
6	6,404		-0,337	+0,609		18	6,186	-0,107	+0,718		30	6,199	+0,088	-0,267			
7	6,373		-0,323	+0,653		19	6,367	-0,083	+0,625		31	6,123	+0,090	-0,236			
8	6,650		-0,309	+0,711		20	6,176	-0,041	+0,430		32	6,127	+0,113	-0,398			
9	6,296		-0,304	+0,725		21	6,400	-0,003	+0,241		33	5,887	+0,128	-0,519			
10	6,567		-0,296	+0,752		22	6,188	-0,001	+0,236		34	6,167	+0,195	-0,749			
11	6,594		-0,279	+0,795		23	6,272	+0,015	+0,160		35	5,633	+0,198	-0,756			
12	6,517		-0,271	+0,815		24	6,116	+0,018	+0,134		36	6,083	+0,334	-0,861			

Entfernung für 1838.		Ausdruck.		Entfernung für 1838.		Ausdruck.		Entfernung für 1838.		Ausdruck.	
37	706,075	$\beta + 0,337$	$\beta - 0,857 \beta'$	58	706,568	$\beta + 0,518$	$\beta - 0,135 \beta'$	79	706,831	$\beta + 0,701$	$\beta + 0,744 \beta'$
38	6,214	+ 0,340	- 0,852	59	6,241	+ 0,524	- 0,106	80	6,696	+ 0,704	+ 0,752
39	6,303	+ 0,345	- 0,842	60	6,437	+ 0,534	- 0,046	81	6,899	+ 0,707	+ 0,760
40	6,301	+ 0,361	- 0,806	61	6,391	+ 0,543	+ 0,000	82	6,743	+ 0,709	+ 0,767
41	6,270	+ 0,372	- 0,778	62	6,610	+ 0,575	+ 0,179	83	6,784	+ 0,712	+ 0,775
42	6,094	+ 0,375	- 0,771	63	6,430	+ 0,586	+ 0,230	84	6,795	+ 0,715	+ 0,782
43	6,294	+ 0,380	- 0,754	64	6,444	+ 0,592	+ 0,268	85	6,814	+ 0,718	+ 0,789
44	6,144	+ 0,386	- 0,737	65	6,493	+ 0,611	+ 0,365	86	6,783	+ 0,720	+ 0,796
45	6,152	+ 0,389	- 0,728	66	6,580	+ 0,636	+ 0,485	87	6,463	+ 0,723	+ 0,803
46	6,338	+ 0,392	- 0,719	67	6,671	+ 0,638	+ 0,496	88	6,551	+ 0,726	+ 0,810
47	6,399	+ 0,416	- 0,625	68	6,661	+ 0,649	+ 0,549	89	6,679	+ 0,728	+ 0,816
48	6,358	+ 0,419	- 0,618	69	6,587	+ 0,652	+ 0,560	90	6,682	+ 0,731	+ 0,822
49	6,337	+ 0,446	- 0,496	70	6,536	+ 0,660	+ 0,598	91	6,611	+ 0,734	+ 0,827
50	6,376	+ 0,449	- 0,486	71	6,399	+ 0,674	+ 0,650	92	6,672	+ 0,737	+ 0,833
51	6,639	+ 0,474	- 0,366	72	6,391	+ 0,676	+ 0,660	93	6,849	+ 0,739	+ 0,839
52	6,331	+ 0,485	- 0,310	73	6,394	+ 0,679	+ 0,671	94	6,762	+ 0,742	+ 0,844
53	6,267	+ 0,488	- 0,296	74	6,645	+ 0,682	+ 0,681	95	6,696	+ 0,745	+ 0,848
54	6,460	+ 0,490	- 0,282	75	6,741	+ 0,685	+ 0,690	96	6,713	+ 0,748	+ 0,852
55	6,440	+ 0,493	- 0,268	76	6,517	+ 0,687	+ 0,700	97	6,717	+ 0,750	+ 0,857
56	6,430	+ 0,496	- 0,253	77	6,475	+ 0,698	+ 0,735	98	6,721	+ 0,753	+ 0,861
57	6,603	+ 0,499	- 0,238	78	6,500	+ 0,698	+ 0,735				

4.

Behandelt man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, und setzt man dabei, um mit kleineren Zahlen rechnen zu können, $461,6 + \alpha$ und $706,3 + \beta$ statt α und β , so erhält man dadurch:

$$\begin{aligned} &\text{aus den Beobachtungen des Sterns } a \\ &+ 8,295 = 85 \alpha + 27,743 \alpha' + 24,399 \alpha'' \\ &+ 4,1016 = 27,743 \alpha + 21,4782 \alpha' + 13,5709 \alpha'' \\ &+ 11,1517 = 24,399 \alpha + 13,5709 \alpha' + 31,5999 \alpha'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{aus den Beobachtungen des Sterns } b \\ &+ 13,172 = 98 \beta + 32,645 \beta' + 23,593 \beta'' \\ &+ 7,9193 = 32,645 \beta + 24,5663 \beta' + 8,6625 \beta'' \\ &+ 12,0683 = 23,593 \beta + 8,6625 \beta' + 39,0826 \beta'' \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

Stern a		Stern b	
$\alpha = + 0,0094$		$\beta = - 0,0091$	
$\alpha' = - 0,0543$ Gew. = 11,145		$\beta' = + 0,2426$ Gew. = 13,672	
$\alpha'' = + 0,3690$ 24,065		$\beta'' = + 0,2605$ 33,356	

Wenn man α'' und β'' als verschwindend, oder die jährliche Parallaxe als unmerklich voraussetzen will, so können die Summen der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede zwischen den beobachteten Entfernungen und ihren, dieser Voraussetzung entsprechenden Ausdrücken, nur bis auf

$$4,4487 \text{ und } 4,7108$$

herabgebracht werden; wenn man aber α'' und β'' den

Beobachtungen gemäss bestimmt, werden diese Summen beträchtlich verkleinert, nämlich bis auf

$$1,4448 \text{ und } 2,4469$$

Hieraus folgen die mittleren Fehler einer Beobachtung:

$$= \pm 0,1327 \text{ und } \pm 0,1605$$

und die mittleren Fehler

$$\begin{aligned} \text{von } \alpha' &= \pm 0,0398 & \text{von } \beta' &= \pm 0,0434 \\ \alpha'' &= \pm 0,0283 & \beta'' &= \pm 0,0278 \end{aligned}$$

Diese Auflösung der Gleichungen und die Bestimmung der mittleren Fehler der daraus hervorgehenden Werthe von α'' und β'' lässt keinen Zweifel an der Merkhlichkeit der jährlichen Parallaxe von 61 Cygni. Sie zeigt zugleich, dass die die Beobachtungen am besten darstellenden Werthe von α'' und β'' um $0,1085$ von einander verschieden sind und dass dieser Unterschied grösser ist als der, den die zufälligen Unvollkommenheiten der Beobachtungen erwarten lassen. Die bisherigen Beobachtungen deuten also an, dass α'' , der Unterschied zwischen den jährlichen Parallaxen von 61 Cygni und a , grösser ist als der jährliche Unterschied β'' zwischen 61 Cygni und b , also dass, wenn nicht beide Vergleichssterne, doch wenigstens der Stern b selbst eine merkliche jährliche Parallaxe besitzt. Ich kenne keinen allgemeinen Grund, welcher sich der Annahme dieser Resultate widersetzt, bin aber keinesweges der Meinung, dass die bisherigen Beobachtungen ihm schon so grosse Wahrscheinlichkeit gäben, dass es grosses Zutrauen verdiente. Ich erwarte also von der

Fortsetzung meiner Beobachtungen, dass sie entweder diesem Resultate grösseres Gewicht verleihen oder seine Entstehung aus zufälligen Beobachtungsfehlern wahrscheinlich machen wird.

Wenn man aus der geringen Helligkeit der Sterne a und b einen Grund entnehmen will, ihre jährlichen Parallaxen, vergleichungsweise mit der von 61 Cygni, für unmerklich zu halten, so fordert diese Voraussetzung eine andre Auflösung der Gleichungen, denn ihr zufolge sind α'' und β'' nicht von einander unabhängige, unbekante Grössen, sondern einander gleich. Ich habe auch diese Voraussetzung verfolgt und wünsche, dass man das Resultat davon, bis auf Weiteres, als das aus meinen Beobachtungen hervorgehende ansehe; denn obgleich diese Beobachtungen nicht so gut darstellt, als sie ohne die Annahme der Gleichheit von α'' und β'' dargestellt werden können, so entfernt es sich, wie der folgende Art. zeigen wird, auch nicht beträchtlich von ihnen, und das Gewicht, womit sie den Unterschied von α'' und β'' bestimmen, ist auch nicht gross genug, um ihn als unzweifelhaft beobachtet erscheinen zu lassen.

Aus den vorigen Bestimmungen der mittleren Fehler der Beobachtungen der Sterne a und b geht hervor, dass eine Beobachtung des ersten Sterns grösseres Gewicht hat, als eine des zweiten. Da das Instrument und die auf die Beobachtungen gewandte Sorgfalt in beiden Fällen dieselben waren, so glaube ich diese vorhandene Verschiedenheit des Gewichts nur aus der Verschiedenheit der Stellung beider Sterne gegen die Richtung des Doppelsterns erklären zu können, indem ich annehme, dass die Unruhe der Luft, die Beobachtung der geraden Linie zwischen den beiden Sternen des Doppelsterns und einem Vergleichungssterne weniger beeinträchtigt, als die Beobachtung der Bisection ihres Zwischenraums durch denselben. Wenn dieses der Fall ist, so müssen die Beobachtungen des Sterns a genauer ausfallen, als die Beobachtungen des Sterns b , indem die nahe senkrechte Stellung des ersten auf der Richtungslinie des Doppelsterns verursacht, dass die Genauigkeit seiner Beobachtungen grösstentheils von der Schärfe abhängt, womit man beurtheilen kann, dass sein Bild in die gerade Linie zwischen beiden Sternen des Doppelsterns fällt; während die Genauigkeit der Beobachtungen des letzteren, nahe in der Richtungslinie stehenden Sterns grösstentheils von der Schärfe der Bisection abhängig ist. Dieser Grund der Verschiedenheit der Genauigkeit der Beobachtungen dieser Sterne mag indessen der richtige sein oder nicht, so bleibt immer nothwendig, ihrer Vereinigung zu

einem Resultate die Aufsuchung ihres relativen Gewichtes vorzugehen zu lassen. Setzt man das Gewicht einer Beobachtung von $a = 1$, so finde ich das Gewicht einer Beobachtung von $b = 0,6889$; multiplicirt man die drei, auf den Beobachtungen des Sterns b beruhenden Gleichungen mit diesem Gewichte, und vereinigt man sie mit den auf a beruhenden, so wie die Voraussetzung $\alpha'' = \beta''$ erfordert, so erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha &= + 0,0171 & \beta &= - 0,0209 \\ \alpha'' &= - 0,0293 & \beta'' &= + 0,2395 \\ \alpha'' &= \beta'' & &= + 0,3136. \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 wird $= \pm 0,1354$ und der mittlere Fehler von $\alpha'' = \beta''$ oder der jährlichen Parallaxe $= \pm 0,0202$.

Nachdem hierdurch der Grad der Genauigkeit der mit dem Heliometer zur Erfindung der jährlichen Parallaxe von 61 Cygni gemachten Beobachtungen bekannt geworden ist, scheint mir die Vergleichung der Ausichten lehrreich zu sein, welche Beobachtungen mit diesem Instrumente, und welche Beobachtungen von Zenithdistanzen, mit Meridianinstrumenten angestellt, gewähren, wenn es auf die Bestimmung sehr kleiner Grössen ankommt. Bekanntlich liefern, unter den vorhandenen und durch ihre Leistungen bekannt gewordenen Meridiankreisen, die beiden auf der Greenwicher Sternwarte befindlichen die am genauesten untereinander übereinstimmenden Beobachtungen; ich werde daher den mittleren Fehler, der sich aus den Unterschieden der Pond'schen Beobachtungen untereinander verrüth, aufsuchen, und, um die Leistungen des Instruments selbst so wenig als möglich durch fremde Einwirkungen zu schwächen, dabei nur Beobachtungen anwenden, welche in geringen Entfernungen vom Scheitelpunkte gemacht worden sind. In den Greenwicher Beobachtungen von 1814 findet man eine grosse Zahl einzelner Beobachtungen reducirt, und kann also leicht die Summen der Quadrate ihrer Unterschiede von ihren mittleren Resultaten aufsuchen. Ich habe sie folgendermassen gefunden:

110 Beobb.	β Ursae min.	62,998
70 "	β Cephei	33,821
70 "	α Ursae maj.	35,512
70 "	α Cephei	31,870
77 "	α Cassiopeae	43,659
60 "	γ Ursae maj. ...	27,224
140 "	γ Draconis	68,806
597 Beobb.	Summe	303,800

Hieraus folgt der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$= + \sqrt{\frac{803,890}{590}} = \pm 0,7177.$$

Da das Heliometer ihn für eine Messung der Entfernung 61 Cygni vom Sterne $a = \pm 0,1354$, und vom Sterne $b = \pm 0,1354$ ergeben hat, so ist die Anzahl Pond'scher, in der Nähe des Scheitelpunktes gemachten Meridianbeobachtungen, welche ein eben so genaues Resultat verspricht, als eine Heliometerbeobachtung von a und von b ,

$$= \left(\frac{0,7177}{0,1354}\right)^2 \text{ und } = \left(\frac{0,7177}{0,1354}\right)^2 \cdot 0,6889$$

oder . . = 28,10 und = 19,36.

Der Vortheil auf der Seite des Heliometers ist also so gross, dass es mit Leichtigkeit eben so viel gewähren muss, als die Meridianinstrumente nur mit grosser Schwierigkeit gewähren können. Es hat auch den Vorzug vor diesen Instrumenten, nicht auf die Culmination beschränkt und daher noch in Jahreszeiten anwendbar zu sein, in welchen die Tageshelligkeit die Meridianbeobachtungen unterbricht.

5.

Damit man unmittelbar übersehen könne, wie die einzelnen Beobachtungen mit den Annahmen, für den Stern a :

$$\text{I. } \alpha = + 0,0094 \quad \alpha' = - 0,0543 \quad \alpha'' = + 0,3680$$

und für den Stern b :

$$\text{I. } \beta = - 0,0091 \quad \beta' = + 0,2426 \quad \beta'' = + 0,2605$$

$$\text{II. } \beta = - 0,0209 \quad \beta' = + 0,2395 \quad \beta'' = + 0,3136$$

übereinstimmen, lasse ich ihre Vergleichen mit diesen Annahmen hier folgen; ich setze den beiden sie enthaltenden Columnen I und II noch eine Columnen III hinzu, welche nach den auch I zum Grunde liegenden Annahmen

$$\alpha = + 0,0094 \quad \alpha' = - 0,0543$$

$$\beta = - 0,0091 \quad \beta' = + 0,2426$$

berechnet ist, jedoch $\alpha'' = 0$ und $\beta'' = 0$, oder die jährliche Parallaxe als verschwindend voraussetzt.

Beobachtungen des Sterns a .

	I	II	III		I	II	III
1	+ 0,19	+ 0,22	+ 0,42	8	- 0,16	- 0,14	- 0,03
2	- 0,24	- 0,21	- 0,01	9	- 0,11	- 0,09	+ 0,01
3	- 0,16	- 0,13	+ 0,06	10	+ 0,05	+ 0,07	+ 0,15
4	- 0,09	- 0,06	+ 0,10	11	- 0,19	- 0,18	- 0,12
5	+ 0,13	+ 0,16	+ 0,31	12	+ 0,14	+ 0,15	+ 0,19
6	+ 0,13	+ 0,16	+ 0,28	13	- 0,08	- 0,07	- 0,03
7	+ 0,09	+ 0,11	+ 0,22	14	- 0,01	- 0,01	- 0,01

	I	II	III		I	II	III
15	+ 0,14	+ 0,14	+ 0,14	51	- 0,14	- 0,11	+ 0,20
16	+ 0,17	+ 0,16	+ 0,09	52	+ 0,01	+ 0,04	+ 0,35
17	+ 0,04	+ 0,03	- 0,11	53	- 0,28	- 0,26	+ 0,05
18	+ 0,04	- 0,01	- 0,22	54	- 0,06	- 0,03	+ 0,27
19	0,00	- 0,06	- 0,29	55	+ 0,09	+ 0,11	+ 0,39
20	- 0,05	- 0,10	- 0,38	56	- 0,05	- 0,03	+ 0,24
21	+ 0,03	- 0,03	- 0,30	57	- 0,04	- 0,02	+ 0,23
22	- 0,11	- 0,17	- 0,44	58	- 0,22	- 0,21	+ 0,01
23	- 0,06	- 0,11	- 0,38	59	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,25
24	- 0,12	- 0,17	- 0,43	60	- 0,07	- 0,06	+ 0,13
25	+ 0,19	+ 0,14	- 0,12	61	0,00	0,00	+ 0,20
26	- 0,19	- 0,24	- 0,49	62	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,24
27	+ 0,16	+ 0,11	- 0,11	63	+ 0,09	+ 0,09	+ 0,25
28	+ 0,28	+ 0,23	+ 0,02	64	- 0,03	- 0,03	+ 0,12
29	- 0,31	- 0,36	- 0,55	65	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,34
30	- 0,10	- 0,09	+ 0,08	66	+ 0,07	+ 0,06	+ 0,20
31	+ 0,10	+ 0,11	+ 0,30	67	+ 0,15	+ 0,14	+ 0,26
32	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,22	68	- 0,08	- 0,09	+ 0,03
33	- 0,13	- 0,12	+ 0,10	69	- 0,09	- 0,10	+ 0,01
34	+ 0,08	+ 0,10	+ 0,33	70	- 0,05	- 0,05	+ 0,05
35	+ 0,17	+ 0,20	+ 0,43	71	+ 0,09	+ 0,08	+ 0,18
36	- 0,03	- 0,01	+ 0,23	72	- 0,10	- 0,12	- 0,02
37	+ 0,05	+ 0,07	+ 0,31	73	- 0,21	- 0,22	- 0,13
38	- 0,02	0,00	+ 0,25	74	- 0,12	- 0,13	+ 0,05
39	+ 0,12	+ 0,14	+ 0,39	75	+ 0,06	+ 0,05	+ 0,12
40	- 0,01	+ 0,02	+ 0,29	76	+ 0,12	+ 0,10	+ 0,17
41	+ 0,21	+ 0,24	+ 0,51	77	+ 0,02	0,00	+ 0,07
42	- 0,04	- 0,02	+ 0,28	78	- 0,11	- 0,13	- 0,06
43	+ 0,04	+ 0,07	+ 0,37	79	+ 0,17	+ 0,15	+ 0,21
44	- 0,26	- 0,23	+ 0,07	80	+ 0,03	+ 0,01	+ 0,06
45	- 0,04	- 0,01	+ 0,30	81	- 0,06	- 0,08	- 0,03
46	+ 0,01	+ 0,05	+ 0,36	82	- 0,08	- 0,10	- 0,05
47	+ 0,19	+ 0,22	+ 0,53	83	+ 0,09	+ 0,07	+ 0,11
48	+ 0,31	+ 0,24	+ 0,55	84	+ 0,11	+ 0,08	+ 0,11
49	+ 0,24	+ 0,27	+ 0,59	85	- 0,14	- 0,16	- 0,13
50	- 0,14	- 0,10	+ 0,21				

Beobachtungen des Sterns b .

	I	II	III		I	II	III
1	+ 0,26	+ 0,24	+ 0,37	21	+ 0,05	+ 0,05	+ 0,11
2	+ 0,11	+ 0,10	+ 0,23	22	- 0,16	- 0,17	- 0,10
3	+ 0,46	+ 0,44	+ 0,58	23	- 0,06	- 0,06	- 0,02
4	+ 0,35	+ 0,34	+ 0,48	24	- 0,21	- 0,21	- 0,18
5	- 0,21	- 0,23	- 0,06	25	- 0,09	- 0,08	- 0,06
6	+ 0,04	+ 0,02	+ 0,20	26	- 0,19	- 0,18	- 0,17
7	- 0,11	- 0,03	+ 0,16	27	- 0,36	- 0,35	- 0,36
8	+ 0,25	+ 0,22	+ 0,43	28	- 0,11	- 0,10	- 0,12
9	- 0,11	- 0,14	+ 0,08	29	+ 0,03	+ 0,05	+ 0,01
10	+ 0,15	+ 0,12	+ 0,35	30	- 0,04	- 0,02	- 0,11
11	+ 0,16	+ 0,13	+ 0,37	31	- 0,11	- 0,08	- 0,19
12	+ 0,08	+ 0,05	+ 0,29	32	- 0,09	- 0,05	- 0,19
13	- 0,09	- 0,12	+ 0,13	33	- 0,30	- 0,25	- 0,44
14	+ 0,09	+ 0,06	+ 0,32	34	+ 0,02	+ 0,08	- 0,17
15	- 0,01	- 0,05	+ 0,21	35	- 0,51	- 0,45	- 0,71
16	- 0,01	- 0,04	+ 0,23	36	- 0,06	- 0,01	- 0,29
17	- 0,27	- 0,30	- 0,04	37	- 0,08	- 0,02	- 0,30
18	- 0,27	- 0,29	- 0,08	38	+ 0,06	+ 0,12	- 0,16
19	+ 0,07	- 0,09	+ 0,10	39	+ 0,15	+ 0,21	- 0,07
20	- 0,22	- 0,23	- 0,11	40	+ 0,13	+ 0,19	- 0,08

	I	II	III	I	II	III	
41	+ 0',10	+ 0',15	- 0',11	70	- 0',07	- 0',09	+ 0',09
42	- 0,09	- 0,03	- 0,29	71	- 0,32	- 0,34	- 0,16
43	+ 0,11	+ 0,16	- 0,09	72	- 0,24	- 0,26	- 0,06
44	- 0,05	0,00	- 0,24	73	- 0,24	- 0,26	- 0,06
45	- 0,04	+ 0,01	- 0,23	74	+ 0,01	- 0,01	+ 0,19
46	+ 0,14	+ 0,19	- 0,05	75	+ 0,10	+ 0,08	+ 0,28
47	+ 0,07	+ 0,12	- 0,09	76	- 0,12	- 0,15	+ 0,06
48	+ 0,14	+ 0,18	- 0,03	77	- 0,18	- 0,20	+ 0,02
49	+ 0,07	+ 0,11	- 0,06	78	- 0,15	- 0,18	+ 0,04
50	+ 0,10	+ 0,14	- 0,02	79	+ 0,18	+ 0,15	+ 0,37
51	+ 0,33	+ 0,36	+ 0,23	80	+ 0,04	+ 0,01	+ 0,23
52	0,00	+ 0,03	- 0,08	81	+ 0,24	+ 0,21	+ 0,43
53	- 0,06	- 0,04	- 0,14	82	+ 0,08	+ 0,05	+ 0,38
54	+ 0,12	+ 0,15	+ 0,05	83	+ 0,12	+ 0,09	+ 0,32
55	+ 0,10	+ 0,13	+ 0,03	84	+ 0,13	+ 0,10	+ 0,33
56	+ 0,08	+ 0,11	+ 0,02	85	+ 0,14	+ 0,11	+ 0,35
57	+ 0,25	+ 0,28	+ 0,19	86	+ 0,11	+ 0,08	+ 0,32
58	+ 0,19	+ 0,21	+ 0,15	87	- 0,21	- 0,24	0,00
59	- 0,15	- 0,13	- 0,18	88	- 0,13	- 0,16	+ 0,08
60	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,02	89	0,00	- 0,03	+ 0,21
61	- 0,03	- 0,02	- 0,03	90	0,00	- 0,03	+ 0,21
62	+ 0,13	+ 0,14	+ 0,18	91	- 0,07	- 0,10	+ 0,14
63	- 0,06	- 0,06	- 0,00	92	- 0,02	- 0,05	+ 0,20
64	- 0,06	- 0,06	+ 0,01	93	+ 0,16	+ 0,13	+ 0,38
65	- 0,04	- 0,05	+ 0,05	94	+ 0,07	+ 0,04	+ 0,29
66	+ 0,01	0,00	+ 0,13	95	0,00	- 0,03	+ 0,22
67	+ 0,09	+ 0,08	+ 0,23	96	+ 0,02	- 0,01	+ 0,24
68	+ 0,07	+ 0,06	+ 0,21	97	+ 0,02	- 0,01	+ 0,24
69	- 0,01	- 0,02	+ 0,14	98	+ 0,02	- 0,01	+ 0,25

Die Vergleichung der 2. Columne dieser Tafeln mit der 1. zeigt, wieviel an der Uebereinstimmung der Beobachtungen durch die Voraussetzung $\alpha'' = \beta''$ aufgeopfert wird; meiner Meinung nach ist es nicht beträchtlich genug, um als ein erheblicher Grund gegen diese Voraussetzung angesehen werden zu können. Ich bin daher der Meinung, dass nur die jährliche Parallaxe = 0',3136 als das Resultat der bisherigen Beobachtungen zu betrachten ist, und dass es ihrer Fortsetzung überlassen werden muss, festzusetzen, ob beziehungsweise auf die beiden Vergleichungssterne a und b , wirklich eine Verschiedenheit vorhanden ist.

Dagegen zeigt die Vergleichung der 3. Columne mit beiden vorhergehenden, dass die Vernachlässigung der jährlichen Parallaxe eine so ungenügende Darstellung der Beobachtungen zur Folge hat, dass das Vorhandensein eines merklichen Werthes derselben augenfällig wird. Hält man die Zahlen dieser Columne mit den Coefficienten der jährlichen Parallaxe, welche man in den Verzeichnissen des 3. Art. findet, zusammen, so bemerkt man, dass beide im Ganzen zugleich positiv oder negativ sind, so dass die von den Beobachtungen ergebene Ungleichheiten im Ganzen dem von der Theorie vorgeschriebenen Gange folgen; die Ueberein-

stimmung ist, in dieser Beziehung, für den Stern a grösser als für den Stern b , allein sie scheint mir für beide so gross zu sein, als der Grad der Genauigkeit der Beobachtungen zu erwarten berechtigt. Die aus unbekannt eigenen Bewegungen hervorgehenden jährlichen Aenderungen der Entfernung 61 Cygni von

$$a = - - 0',0293 - 0',0063 = - - 0',0356$$

und von

$$b = + 0',2395 - 0',0247 = + 0',2148$$

(Art. 2 und 4), können durch einjährige Beobachtungen nicht mit grosser Genauigkeit bestimmt werden, werden also durch ihre Fortsetzung vielleicht noch wesentliche Aenderungen erfahren.

6.

Obgleich die Beobachtungen der Positionswinkel der beiden Vergleichungssterne, den im 1. Art. darüber gemachten Bemerkungen zufolge, in der Untersuchung des Werthes der jährlichen Parallaxe kein Gewicht haben, so unterlasse ich ihre Mittheilung dennoch nicht; theils weil sie zu der Bestimmung der gegenseitigen Lagen der Mitte von 61 Cygni und der beiden Vergleichungssterne eben so wesentlich sind als die Entfernungen, theils weil die im 1. Art. angeführten Mittel aus allen Beobachtungen der Positionswinkel kaum ein Interesse haben können, wenn nichts hinzugesetzt wird, was das Urtheil über ihre Sicherheit leiten kann. Ich führe die Mittel aus immer 10 aufeinanderfolgenden Beobachtungen, nach ihrer Reduction auf den Anfang von 1838, und auch den Einfluss der jährlichen Parallaxe an; die letzte Columne setzt diese = 0',3136 voraus.

Beobachtungen des Sterns a .

10 Beobb.	von Aug. 18 bis Sept. 14	201'27,05 + 4,72a''	201'28,53
10 "	Sept. 20 " Dec. 30	28,61 + 5,98	30,39
10 "	Dec. 31 " Mai 3	29,97 - 1,43	29,52
10 "	Mai 4 " Juni 1	30,40 - 5,47	28,68
10 "	Juni 2 " Juli 1	28,04 - 2,46	27,27
10 "	Juli 8 " Aug. 25	27,98 + 1,73	28,52
10 "	Aug. 26 " Sept. 15	29,99 + 5,19	31,62
10 "	Sept. 16 " Sept. 26	28,51 + 6,02	30,40
5 "	Sept. 27 " Oct. 1	27,94 + 6,84	29,93
85 Beobb. Mittel			201'29,10

Beobachtungen des Sterns b .

10 Beobb.	von Aug. 16 bis Sept. 14	109'21,44 + 2,50b''	109'20,66
10 "	Sept. 20 " Nov. 22	21,96 + 0,15	22,01
10 "	Dec. 1 " Jan. 20	21,38 + 4,18	22,69
10 "	Febr. 1 " Mai 17	23,91 - 0,31	23,81
10 "	Mai 19 " Juni 26	22,76 - 3,85	21,55
10 "	Juni 27 " Juli 29	22,42 - 4,43	21,03
10 "	Aug. 2 " Sept. 4	23,74 - 2,98	22,80
10 "	Sept. 5 " Sept. 16	23,07 - 1,69	22,54
6 "	Sept. 17 " Sept. 26	22,58 - 0,92	22,29
6 "	Sept. 27 " Oct. 2	22,85 - 0,32	22,45
96 Beobb. Mittel			109'22,17

Die aus 10tägigen Beobachtungen gefolgerte gegen-
seitige Lage beider Sterne von 61 Cygni, welche ich
im 1. Art. angeführt habe, ist das Mittel aus den fol-
genden:

		Entfernung.		Pos.-Wkl.	
1837 Juni 11	1837,44	15,98	95°20'	5	Beob.
Aug. 18	7,63	16,14	94 52	5	„
Sept. 9	7,69	16,19	94 45	5	„
1838 Sept. 3	8,67	16,34	96 4	5	„
14	8,70	16,21	95 10	5	„
22	8,72	16,12	96 2	5	„
24	8,73	16,26	95 21	5	„
27	8,74	16,39	95 25	5	„
28	8,74	16,30	95 14	5	„
Oct. 1	8,75	16,11	95 2	5	„
Mittel . . .	1838,38	16,204	95 19,5		

7.

Wenn man die jährliche Parallaxe von 61 Cygni
= 0,3136 annimmt, so erhält man seine Entfernung,
in mittleren Entfernungen der Erde von der Sonne aus-
gedrückt = 657700, und die Zeit, welche das Licht ge-
braucht, um diese Entfernung zu durchlaufen, = 10,28
Jahre. Hieraus und aus der beobachteten eigenen Be-
wegung des Sterns folgt ferner, dass er eine bestän-
dige Aberration von +52,9 in A.R. und von +32,1
in Decl. besitzt. Da diese jährliche eigene Bewegung
5,123 des grössten Kreises beträgt, so ist die relative
jährliche Bewegung unseres Sonnensystems und des
Sterns grösser als $\frac{5,123}{0,3136} = 16,33$ Halbmesser der Erd-
bahn; bis zu dieser Grenze würde sie herabkommen,
wenn sie senkrecht auf die Gesichtslinie vor sich ginge.

Wenn man die Elemente der Bahn des Doppel-
sterns um den Schwerpunkt seiner beiden Sterne kennt,
so würde man die Summe ihrer Massen finden können.
Die bisherigen Beobachtungen scheinen mir aber zu
der Bestimmung dieser Elemente noch ungenügend zu
sein. Ich stelle hier zusammen, was unter dem mir
davon Bekanntgewordenen wesentlich erscheint, ent-
weder durch die Zeit, welcher es zugehört, oder durch
die Genauigkeit, welche es besitzt:

1753,8	19,654	35°30'	BRADLEY	Fund. Astr.
1778,0	15,269	51 3	CHR. MAYER	M. C. XXVI. S. 206
1781,9	16,33	53 49	HERSCHEL I.	Astr. Soc. V. p. 43
1812,35	15,918	78 57	BRASSL	M. C. XXVI. S. 156
1821,62	11,87	84 23	STRUVE	Mens. micr. p. 299
1822,90	15,425	84 21	HERSCHEL II u. SCHUR.	H. u. S. Obs. p. 367
1829,47	15,430	89 56	HERSCHEL II.	Astr. Soc. V. p. 44
1830,84	15,638	90 21	BRASSL	Astr. Nachr. Nr. 240
1831,38	15,605	91 1	STRUVE	Mens. micr. p. 299
1835,65	15,967	93 50	STRUVE	(die 1. ist d. Mittel)
1836,57	16,080	94 24	STRUVE	aus drei Angaben)
1838,38	16,204	95 19,5	BRASSL	Art. 6.

Die Bestimmung für 1753,8 beruht auf zwei Beob-
achtungen der Geradenaufsteigung und einer der Ab-
weichung; auf einer Grundlage, welche zu schwach ist, um
nicht einen Fehler von einer Secunde in der Entfernung
und von mehreren Graden in der Richtung fürchten zu
lassen. Der Bestimmung für 1778 liegen zwar 6 Be-
obachtungen des Geradenaufsteigungsunterschiedes und
5 des Abweichungsunterschiedes zum Grunde, allein
CHRISTIAN MAYER hatte, wie aus den von ihm ange-
führten Beispielen seiner Beobachtungen hervorgeht,
die Gewohnheit, kleine Theile der Zeitsecunden oft nicht
anzugeben, sondern sich meistens mit ganzen und hal-
ben zu befriedigen; diese Bemerkung, verbunden mit
der Angabe des Geradenaufsteigungsunterschiedes =
einer ganzen Zeitsecunde, ist gleichfalls nicht geeignet,
grosses Zutrauen zu der Bestimmung für 1778 einzu-
flössen. Wenn man aber die beiden ersten der obigen
Bestimmungen des Positionswinkels als über einige
Grade desselben nicht entscheidend ansieht, so scheint
mir aus allen zusammengenommen nur gefolgert wer-
den zu können, dass die Veränderung der Richtung des
Doppelsterns ziemlich gleichförmig, etwa 40' jährlich,
gewesen ist. Aus den Beobachtungen der Entfernung
geht nur hervor, dass sie, um die Zeit des Anfangs dies-
es Jahrhunderts, ein Minimum, von etwa 15" gehabt
hat. Diese Resultate der bisherigen Beobachtungen
sind aber offenbar nicht hinreichend zur Bestimmung
der Elemente, und ich glaube, dass man daraus nur er-
kennen kann, dass die Umlaufzeit grösser als 540 Jahre.
und die halbe grosse Axe der Bahn grösser als 15".
Will man diese Grenzen als eine Annäherung an die
Werthe der Umlaufzeit und halben grossen Axe an-
sehen, so kann man aus ihnen und der bestimmten jäh-
rlichen Parallaxe eine Annäherung an die Summe der
Massen der beiden Sterne des Doppelsterns (= 0,61 der
Sonnenmasse) ableiten, und demzufolge für wahrschein-
lich halten, dass diese Summe von der Masse der Sonne
nicht so stark verschieden ist, dass die Sonne, ver-
gleichungsweise mit den Sternen 61 Cygni, als ein be-
sonders grosser oder besonders kleiner Körper erscheine.
Nur lange, mit den vollkommeneren mikrometrischen
Mitteln der jetzigen Zeit fortgesetzte Beobachtungen
des Doppelsterns können zu einem bestimmteren Resul-
tate führen. Wenn auch die Entfernungen und Posi-
tionswinkel benachbarter Sterne, beziehungsweise auf
den Mittelpunkt 61 Cygni, so wie ich sie jetzt für die
Sterne *a* und *b* bestimmt habe, sehr lange und genau
beobachtet werden, wird man dadurch zur Erkenntnis
des Punktes zwischen beiden Sternen des Doppelsterns
gelangen, welcher sich gleichförmig, d. h. ohne Theil-

nahme an der Umlaufbewegung dieser Sterne fortbewegt. Dieser Punkt ist ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt, und seine Kenntniss wird die abgesonderte Kenntniss der Massen beider Sterne zur Folge haben.

Allein vor dem Ablaufe mehrerer Jahrhunderte werden die Beobachtungen zu einem genügenden Urtheile hierüber nicht berechtigen.

84. Fernere Nachricht von der Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwans.*)

(Astron. Nachr. 17, p. 257.)

Ogleich die Mittheilung über diesen Gegenstand, welche ich Nr. 365 und 366 der Astr. Nachr. gemacht habe [Abb. 83], nicht zweifelhaft lässt, dass die jährliche Parallaxe des 61. Sterns des Schwans eine Grösse besitzt, welche sich den Beobachtungen, wenn sie mit einem geeigneten Apparate und oft wiederholt gemacht werden, sicher verräth, so habe ich doch für wünschenswerth gehalten, diese Beobachtungen noch beträchtlich weiter fortzusetzen. Sie sind jetzt bis zum Ende des März 1840 fortgesetzt worden, erstrecken sich über 2 Jahre und 7 Monate und liefern 188 Messungen der Entfernung der Mitte zwischen beiden Sternen des Doppelsterns 61 Cygni von dem Sternchen α , und 214 Messungen dieser Entfernung von dem Sternchen β . Durch diese mehr als verdoppelte Anzahl der Beobachtungen hoffe ich, eine noch genauere Bestimmung der jährlichen Parallaxe zu erhalten, auch den relativen eigenen Bewegungen der beiden mit 61 Cygni verglichenen Sternchen eine grössere Sicherheit zu geben. Was von dieser Fortsetzung der Beobachtungen zu berichten ist, werde ich jetzt als Nachtrag zu meiner früheren Abhandlung am a. O. der Astr. Nachr. mittheilen.

Der häufige Gebrauch, welcher seit 10 Jahren von dem grossen Heliometer gemacht worden war, veranlasste mich, gleich nach der Beendigung der schon bekannt gemachten Beobachtungen 61 Cygni, das Instrument in seine einzelnen Theile zerlegen und jeden davon sorgfältig untersuchen zu lassen, damit etwanige entstandene Beschädigungen in ihrem Fortgange gehemmt und dem Instrumente nicht verderblich werden möchten. Es fanden sich wirklich Einflüsse des langen Gebrauches, an der Hülse, in welcher die Declinationsaxe sich drehet, sowie auch an den Mikrometerschrauben, deren Spitzen sowohl selbst angegriffen waren, als auch die Platten von Glockenmetall, worauf

sie sich stützen, angegriffen hatten. Beides wurde durch den Mechanicus, Herrn STEINFURTH, wieder in den gehörigen Stand gesetzt; auch wurden die Unterlegeplatten von Glockenmetall durch andere von gehärtetem Stahl ersetzt, und Aenderungen des Mechanismus, welcher die Drehung der Mikrometerschrauben vermittelt, angebracht, deren Erfolg eine beträchtliche Erleichterung der Beobachtungen sein sollte und wirklich gewesen ist. Nachdem das Instrument wieder aufgestellt war, fing ich die neue Reihe der Beobachtungen 61 Cygni am 12. November an und trieb sie bis zum 9. Juli 1839; worauf ich sie, durch eine Reise nach Berlin. Altona und Bremen veranlasst, einem meiner Gehülfen, Herrn SCHLÜTER übergab, der sie ununterbrochen bis zum Ende des März 1840 fortgesetzt, auch dabei so grosse Genauigkeit und Unermüdlichkeit bewährt hat, dass ich das was er geleistet hat, für so gut und vollständig anerkenne, als es mit dem angewandten Apparate nur geleistet werden kann.

1.

Die fortgesetzten Beobachtungen theile ich jetzt in derselben Form mit, in welcher ihr Anfang (Astr. Nachr. Nr. 365, S. 73—82 [p. 222]) bekannt gemacht worden ist**).

Beobachtungen des Sterns α .

		Wahre Entfernung.			Wahre Entfernung.
86	1838 Oct. 10	465,125	94	1838 Dec. 12	465,901
87	Nov. 12	5,501	95	14	6,008
88	18	5,683	96	16	5,849
89	19	5,436	97	17	5,998
90	21	5,504	98	20	6,034
91	22	5,810	99	26	6,108
92	23	5,723	100	1839 Febr. 17	6,907
93	Dec. 12	6,072	101	19	6,992

*) [337 d. a. Verz. — Auszug dieser Abb.: Compt. Rend. 1. Sem. 1840, p. 703 (338 d. a. Verz.).]

**) [Vgl. die Bemerkung p. 222. Originalbeob. siehe auch ACHWAS Untersuchungen etc. p. 37 ff.]

		Wahre Entfernung.		Wahre Entfernung.		Wahre Entfernung.		Wahre Entfernung.
102	1839 Febr. 22	466,908	116	1839 Sept. 14	469,394	121	1839 Febr. 20	702,982
103	April 2	7,560	147	15	9,361	122	22	2,897
104	3	7,488	148	18	9,403	123	April 2	2,351
105	8	7,345	149	20	9,348	124	3	2,796
106	16	7,732	150	21	9,568	125	8	2,391
107	17	7,833	151	28	9,356	126	16	2,367
108	30	7,946	152	Oct. 9	9,960	127	30	2,996
109	May 1	7,925	153	10	9,801	128	May 1	2,513
110	6	8,053	154	13	9,470	129	4	2,821
111	8	8,174	155	14	9,447	130	6	2,579
112	9	8,048	156	15	9,371	131	8	2,433
113	13	8,162	157	16	9,579	132	8	2,509
114	25	8,067	158	17	9,569	133	9	2,163
115	June 1	8,424	159	18	9,513	134	11	2,259
116	9	8,563	160	19	9,423	135	13	2,226
117	10	8,238	161	20	9,590	136	25	1,703
118	13	8,687	162	21	9,394	137	June 1	1,971
119	17	8,417	163	28	9,599	138	9	1,987
120	18	8,588	164	29	9,697	139	10	2,217
121	19	8,628	165	30	9,793	140	13	1,925
122	23	8,461	166	Nov. 1	9,586	141	16	2,043
123	28	8,768	167	2	9,866	142	17	1,937
124	July 4	8,579	168	7	9,655	143	18	1,868
125	5	8,873	169	11	9,615	144	19	2,005
126	7	8,669	170	12	9,689	145	23	2,134
127	8	8,718	171	13	9,633	146	28	1,888
128	9	8,550	172	Dec. 4	9,926	147	July 4	2,160
129	12	8,566	173	5	9,688	148	5	1,786
130	14	8,764	174	9	9,957	149	7	2,205
131	15	8,946	175	1840 Jan. 9	470,234	150	8	1,918
132	20	8,711	176	15	9,199	151	9	1,970
133	23	8,811	177	16	9,353	152	12	2,045
134	28	8,184	178	Febr. 3	9,545	153	14	1,898
135	31	9,214	179	14	1,093	154	15	1,893
136	Aug. 10	9,388	180	15	9,591	155	20	2,121
137	11	9,022	181	28	1,417	156	23	1,682
138	15	9,386	182	März 2	1,331	157	28	1,979
139	19	9,405	183	3	1,338	158	31	1,844
140	26	9,940	184	9	1,406	159	Aug. 10	2,101
141	29	9,364	185	10	1,194	160	11	1,975
142	30	9,332	186	18	1,532	161	15	1,846
143	Sept. 6	9,321	187	22	1,332	162	19	2,099
144	10	9,536	188	23	1,770	163	26	1,805
145	13	9,412				164	28	2,210
						165	29	1,919
						166	30	2,024
						167	Sept. 5	1,780
								211
								212
								213
								214

Beobachtungen des Sterns β .

99	1838 Oct. 8	704,435	110	1838 Dec. 15	704,214
100	10	4,368	111	16	4,219
101	Nov. 12	4,033	112	17	4,228
102	18	4,060	113	20	3,857
103	19	3,990	114	25	3,669
104	20	4,100	115	26	3,749
105	21	4,240	116	1839 Jan. 3	3,685
106	22	3,931	117	Febr. 6	2,865
107	23	4,130	118	17	2,903
108	Dec. 12	3,695	119	17	2,939
109	14	3,904	120	19	3,082

2.
Der Aufsuchung der Resultate der früher und der gegenwärtig mitgetheilten Beobachtungen muss ich einige Erklärungen voranbringen lassen. Die aus den Angaben S der Mikrometerschraube abgeleiteten Entfernungen können (ausser den Beobachtungsfehlern) Fehler besitzen, welche sowohl aus der gemachten Annahme des diesen Angaben proportionalen Fortschreitens der

Objectivhälfte, als auch aus einer Unrichtigkeit des angenommenen Werthes einer Drehung der Schraube und seiner Veränderung durch die Wärme, und endlich aus Beschädigungen der Schraube und ihrer Unterlegeplatte entstanden sein können. In der ersten Beziehung hat eine Untersuchung, welche zur vollständigen Kenntniss der Schraube führen soll, mich zwar schon lange beschäftigt, allein auf unerwartete Schwierigkeiten geführt, deren vollständige Beseitigung bis jetzt noch nicht erlangt worden ist, bis zu deren Erlangung die gegenwärtige Mittheilung, insofern die Bestimmung der jährlichen Parallaxe als ihr Zweck angesehen wird, aber nicht verzögert zu werden braucht. Die Unvollkommenheiten der Schraube können nämlich in zwei Theile zerlegt werden, deren einer mit der Grösse der gemessenen Entfernung fortschreitet, und deren anderer von dem Drehungswinkel der Schraube, oder von der Angabe der Trommel abhängig und (entweder für alle Drehungen gleich, oder nach irgend einem Gesetze veränderlich) periodisch ist; offenbar vereinigt der erste Theil sich mit dem Werthe einer gemessenen Entfernung für eine bestimmte Zeit und dem Werthe ihrer, aus den eigenen Bewegungen hervorgehenden, der Zeit proportionalen Veränderung, und erhält also, da auch die letztere aus den Beobachtungen selbst bestimmt wird*), keinen Einfluss auf die jährliche Parallaxe; allein auch der zweite Theil verliert diesen Einfluss, indem auch die Angaben der Schraubentrommel, sowohl für den Anfang als für das Ende des bei jeder Beobachtung durch die Schraube gemessenen Zwischenraumes zwischen den beiden Oertern der bewegten Objectivhälfte, sich der Entfernung, also auch, wenigstens sehr nahe, der Zeit proportional und zwar, während der Dauer eines Jahres oder zweier Jahre, nicht so stark ändern, dass der Einfluss ihrer Aenderungen nicht gleichfalls der Zeit proportional angenommen werden könnte. Eine kleine Unrichtigkeit des angenommenen Werthes einer Schraubendrehung hat gleichfalls fast nur Einfluss auf die Entfernung, allein keinen merklichen auf die jährliche Parallaxe. Eine Unvollkommenheit der Kenntniss des Einflusses der Wärme auf die Messungen, welche für die Angabe f des Fahrenheit'schen Thermometers**):

$$\Delta n = - 0,0003912 S (f - 40)^2$$

angenommen ist, werde ich dadurch in Rechnung bringen, dass ich ihre, in der Berechnung der Beobachtungen angewandte Grösse mit dem Factor $1 + k$ multiplicire, in welchem k so lange unbestimmt bleibt, bis

*) Astr. Nachr. Nr. 366, S. 81 [p. 223]

***) Astr. Nachr. Nr. 368, S. 74 [p. 222].

Bessel's Abhandlungen, 2. Bd.

eine neue und vollständigere Untersuchung, welche vor dem Wiedereintritte der Sommerwärme nicht geschlossen werden kann, seinen, der früheren Untersuchung zufolge verschwindenden Werth festgesetzt haben wird. Die früher schon erwähnte, am Schlusse der ersten Periode der Beobachtungen bemerkte Beschädigung der Mikrometerschraube kann endlich auch einen Einfluss auf die Messungen der Entfernungen gehabt haben; ein ähnlicher Einfluss ist auch in der zweiten Periode wahrscheinlich, denn an ihrem Ende zeigte eine ähnliche Beschädigung die Unzulänglichkeit der in der Unterlegeplatte von gehärtetem Stahl gesuchten Verbesserung, weshalb nun ein neues Mittel versucht worden ist, dessen Erfolg der Fortgang der Zeit zeigen wird. Aus diesen Erklärungen geht hervor, dass beide Perioden der Beobachtungsreihe nicht als eine zusammenhängende betrachtet werden dürfen, sondern dass wenigstens die mittleren daraus hervorgehenden Entfernungen für eine bestimmte Zeit unterschieden werden müssen. Dass die Beschädigungen der Mikrometerschraube notwithstanding ohne allen Einfluss auf die jährliche Parallaxe wären, kann zwar nicht behauptet werden, allein ich lasse nicht unbemerkt, dass ein der Zeit proportionaler Fortgang derselben destoweniger einen Einfluss darauf geäußert haben kann, als beide Abtheilungen der Beobachtungen beträchtlich über die jährliche Periode der Parallaxe hinaus fortgesetzt worden sind.)*

3.

Ich habe sämtliche Beobachtungen, sowohl die früher als die gegenwärtig mitgetheilten, durch Hinzufügung von**):

$$a \dots - 4,4125 \tau - 0,0071 \tau \tau - \gamma C - \delta D$$

$$b \dots + 2,7743 \tau - 0,0130 \tau \tau - \gamma C - \delta D$$

wo τ die von 1839 an gezählte Zeit bedeutet, auf den Anfang von 1839 reducirt. Bezeichnet man die mittlere Entfernung für diese Zeit, so wie sie beiden Abtheilungen der Beobachtungsreihe entspricht,

$$\text{für } a \text{ durch } \dots 466,1 + \alpha \pm \Delta \alpha,$$

$$\text{für } b \text{ durch } \dots 703,6 + \beta \pm \Delta \beta,$$

und die resp. um 466,1 und 703,6 verminderten, auf 1839 reducirt, beobachteten Entfernungen, nach der Berücksichtigung der noch unbestimmten, später anzubringenden Verbesserung des angewandten Einflusses der Wärme durch $n + \Delta n.k$; so ergibt jede Beobachtung eine Gleichung von der Form:

*) [Vgl. hier übrigens Arcturus a. a. O. p. 92 R.]

***) Astr. Nachr. Nr. 366, S. 82 [p. 224].

$$a \dots n + \Delta n \cdot k = a \cdot \Delta \alpha + b \cdot \alpha + c \cdot \alpha' + d \cdot \alpha''$$

$$b \dots n + \Delta n \cdot k = a \cdot \Delta \beta + b \cdot \beta + c \cdot \beta' + d \cdot \beta''$$

Die Werthe von Δn , die zur Reduction der Beobachtungen angewandten Einflüsse der Wärme auf die Entfernungen, sind im 1. § sowohl der früheren als der gegenwärtigen Abhandlung schon angegeben worden; a ist für die früheren 86 Beobachtungen des Sterns $a = 1$, für die späteren 102 $= -1$, für die früheren 100 Beobachtungen des Sterns $b = 1$, für die späteren 114 $= -1$; b ist immer $= 1$; c ist die von 1839 an

gezählte Zeit; d der Coefficient der jährlichen Parallaxe, nämlich*):

$$Rm \cos (\odot - M) r.$$

[Es folgen die (402) Werthe von n , c , d für die beiden Sterne a und b]

4.

Behandelt man die Gleichungen, für welche ich die Werthe von n , Δn , a , b , c , d jetzt angegeben habe, so wie die Methode der kleinsten Quadrate es fordert, so ergeben sie

für den Stern a :

$$(nn) = 14,5822 - 2,2542k + 0,7766kk$$

$$(an) = -12,907 - 2,557k; (aa) = 188; (ab) = -16; (ac) = -117,159; (ad) = +21,937$$

$$(bn) = +12,677 + 4,439k; (bb) = 188; (bc) = +2,195; (bd) = +26,599$$

$$(cn) = +5,0160 + 0,829k; (cc) = 99,2927; (cd) = +10,3709$$

$$(dn) = +22,9914 - 4,643k; (dd) = 72,3365$$

für den Stern b :

$$(nn) = 17,9708 - 1,2796k + 2,1638kk$$

$$(an) = -4,564 - 3,472k; (aa) = 214; (ab) = -14; (ac) = -128,305; (ad) = +9,407$$

$$(bn) = +12,102 + 8,474k; (bb) = 214; (bc) = -3,317; (bd) = +41,307$$

$$(cn) = +8,7851 + 0,066k; (cc) = 106,1609; (cd) = -3,9749$$

$$(dn) = +28,9978 - 0,925k; (dd) = 88,1044$$

Die hieraus folgenden Werthe der unbekanntenen Grössen sind für den Stern a :

$$\Delta \alpha = -0,2101 - 0,0079 \cdot k; \text{Gewicht} = 46,88$$

$$\alpha = +0,0007 + 0,0338 \cdot k; \text{ " } = 171,83$$

$$\alpha' = -0,1600 - 0,0096 \cdot k; \text{ " } = 25,65$$

$$\alpha'' = +0,3584 - 0,0756 \cdot k; \text{ " } = 64,66$$

und für den Stern b :

$$\Delta \beta = +0,0774 - 0,0428 \cdot k; \text{Gewicht} = 56,46$$

$$\beta = +0,0011 + 0,0413 \cdot k; \text{ " } = 187,69$$

$$\beta' = +0,1886 - 0,0508 \cdot k; \text{ " } = 28,39$$

$$\beta'' = +0,3289 - 0,0276 \cdot k; \text{ " } = 78,89$$

$$a \dots \dots 4,4245 + 0,2579 \cdot k + 0,2637 \cdot kk = 4,3614 + 0,2637 [k + 0,489]^2$$

$$b \dots \dots 7,1171 - 0,1768 \cdot k + 1,6426 \cdot kk = 7,1123 + 1,6426 [k - 0,054]^2$$

Insofern man auch k aus diesen Beobachtungen bestimmen wollte, würden die des ersten Sterns die Verkleinerung des angenommenen Einflusses der Wärme auf die Messungen, im Verhältnisse 1:0,511, die des zweiten Sterns seine Vergrößerung im Verhältnisse 1:1,054 liefern. Das Gewicht des ersteren dieser Resultate ist aber, bei der Kleinheit des Coefficienten 0,2637 des Quadrats, viel zu gering, um dieser Bestimmung Zutrauen erwerben zu können, welches eine Folge des nahen Zusammenfallens der Jahreszeiten der grös-

Die angeführten Ausdrücke von (nn) werden, durch die den Gleichungen gemässe Bestimmung der drei ersten unbekanntenen Grössen, also unter der Voraussetzung des Verschwindens der jährlichen Parallaxe, auf

$$a \dots 12,7282 - 3,2445 \cdot k + 0,6330 \cdot kk$$

$$b \dots 15,6507 - 1,6094 \cdot k + 1,7029 \cdot kk$$

gebracht, verkleinern sich aber beträchtlich durch die Berücksichtigung auch der letzten unbekanntenen Grösse, nämlich auf:

ten und kleinsten Wärme mit denen des grössten positiven und negativen Einflusses der jährlichen Parallaxe auf die Entfernung des Sterns a ist; aber auch das Gewicht der zweiten Bestimmung ist bei weitem nicht so gross, als man es erhalten kann, wenn man k durch Beobachtungen viel grösserer Entfernungen, im Sommer und im Winter, sucht. Ich führe dieses nur an, um dadurch zu zeigen, dass die Beobachtungen, welche der

*) Astr. Nachr. Nr. 366, S. 83 und 84 [p. 224].

Gegenstand dieser Abhandlung sind, keinen erheblichen Grund zur Annahme eines nicht verschwindenden Werthes von k geben. Seine endliche Bestimmung bleibt der schon erwähnten, noch nicht geschlossenen, vollständigeren Untersuchung vorbehalten, bis wohin $k = 0$ gesetzt werden mag.

Unter dieser Annahme ist der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen:

$$a \dots = \pm \sqrt{\frac{4,4245}{184}} = \pm 0,1551$$

$$b \dots = \pm \sqrt{\frac{2,1171}{210}} = \pm 0,1841$$

und man erlangt hierdurch die mittleren Fehler der aus den Beobachtungen gezogenen Ausdrücke:

$$\alpha'' = 0,3584 - 0,0756 \cdot k; \text{ mittl. Fehler} = \pm 0,01928$$

$$\beta'' = 0,3289 - 0,0276 \cdot k; \text{ " " " " } = \pm 0,02073$$

Vergleicht man diese Resultate mit den früher (Astr. Nachr. Nr. 366, S. 87 [p. 226]) aus der ersten Abtheilung der Beobachtungen allein erhaltenen, so bemerkt man leicht, dass der sich früher zeigende Unterschied von α'' und β'' durch die zweite Abtheilung derselben nicht bestätigt wird, vielmehr diese einen kleinen Unterschied im entgegengesetzten Sinne ergibt. Es ist also noch mehr Grund als früher vorhanden, die Voraussetzung $\alpha'' = \beta''$ zu machen, oder aus den Beobachtungen beider Sterne a und b ein Resultat für die jährliche Parallaxe abzuleiten. Dieses ist, unter gehöriger Berücksichtigung der mittleren Fehler der durch die beiden Sterne ergebenen Resultate:

$$= 0,3483 - 0,0533 k; \text{ m. F.} = \pm 0,0141.$$

Die längere Fortsetzung der Beobachtungen hat also eine Vergrößerung der jährlichen Parallaxe von 0,0347 herbeigeführt. Der jetzigen Bestimmung entspricht die Entfernung = 592200 mittleren Entfernungen der Erde von der Sonne, welche das Licht in 9½ Jahren durchläuft.

5.

Durch die Fortsetzung der Beobachtungen ist die Anzahl der Bestimmungen der Positionswinkel des Sterns a auf 183, des Sterns b auf 207 gebracht worden. Ich habe alle diese Beobachtungen durch Hinzufügung von*)

$$a \dots - 19 \ 18,8 \tau + 11,2 \tau \tau - \alpha' A - \beta' B - \gamma' C - \delta' D$$

$$b \dots - 21 \ 4,5 \tau - 4,9 \tau \tau - \alpha' A - \beta' B - \gamma' C - \delta' D$$

auf 1839 reducirt, wo τ die von 1839 gezählte Zeit

bedeutet und zu den in den Tab. Reg. gegebenen Werthen von A , um sie auf dieselbe Epoche zu beziehen, für 1837, 1838, 1840 resp. $-2, -1, +1$ hinzugefügt worden sind; die in τ und $\tau \tau$ multiplicirten Glieder dieser Formeln entstehen aus der Beziehung der a. a. O. S. 82 gegebenen auf 1839, nachdem der durch die Grösse α' in Rechnung gebrachte Einfluss der Precession davon getrennt ist. Die arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen habe ich

$$a \dots 201^{\circ} 50,24 + 1,380 \alpha''$$

$$b \dots 109 \ 45,52 - 0,568 \beta''$$

erhalten, also nach der Annahme $\alpha'' = \beta'' = 0,3483$

$$a \dots 201^{\circ} 50,72$$

$$b \dots 109 \ 45,32$$

Die erste dieser beiden Bestimmungen ist 1,81, die andere 2,16 grösser als die früher*) mitgetheilten; zum Theil rühren diese Unterschiede von Berichtigungen einer früher etwas verschiedenen Annahme der jährlichen Veränderungen und anderer Reductionselemente her, grösstentheils aber wohl von eigenen noch unbekanntem Bewegungen der beiden verglichenen Sterne, beziehungsweise auf die angenehme Bewegung der Mitte des Doppelsterns 61 Cygni. Von den letzteren sind die neueren Bestimmungen frei, indem das Mittel aller Beobachtungszeiten sehr nahe auf die Zeit trifft (1839), auf welche dieselben sich beziehen.

Die durch α' und β' bezeichneten Verbesserungen der angenommenen relativen Veränderungen der Entfernungen sind durch die erste Abtheilung der Beobachtungen allein**) = $-0,0356$ und $= +0,2148$, durch beide Abtheilungen zusammen aber = $-0,1600$ und $= +0,1886$ gefunden worden. Ohne Zweifel verdient die neuere Bestimmung den Vorzug vor der älteren, allein ein hinreichendes Gewicht wird die Kenntniss der relativen Veränderungen, sowohl der Entfernungen als auch der Positionswinkel, erst erhalten, wenn man die jetzt erlangten Bestimmungen für 1839 mit mehrere Jahre später zu erlangenden wird vergleichen können; dem was die Beobachtungen in dieser Beziehung bis jetzt ergeben haben, darf kein grosser Werth beigelegt werden. Jene Bestimmung ist, dem Vorhergehenden zufolge, für 1839:

	Entfernung.	Positionswkl.
Stern $a \dots$	466,101	201° 50,72
$b \dots$	703,601	109 45,32

Es ist zu erwarten, dass die bevorstehende letzte Fest-

*) Astr. Nachr. Nr. 366, S. 83 [p. 224].

*) Astr. Nachr. Nr. 366, S. 93 [p. 229].

**) Ebendasselbst S. 92 [p. 229].

setzung der Reductionselemente (§ 2) den Entfernungen noch kleine Aenderungen hinzusetzen wird; die Positionswinkel sind die halben Summen der an der Mitte der beiden Sterne 61 Cygni und der um 180° veränderten, an den Sternen a und b stattfindenden.

Dass es für jetzt ein beträchtliches Interesse hätte, die Beobachtungen 61 Cygni fortzusetzen; sehe ich nicht, da ich jetzt auch an der nahen Richtigkeit der Bestimmung der jährlichen Parallaxe dieses Sterns ebensowenig zweifle, als ich zur Zeit des Schlusses der ersten Abtheilung der Beobachtungen an ihrer für das angewandte Instrument wahrnehmbaren Grösse gezweifelt habe. Ich habe also die Beobachtungen vorläufig geschlossen.

[Literatur der Astr. Nachr. über Fixsternparallaxen: STRUVE, Parallaxe Lyrae (Bd. 17); HOUDEAU, P. p. Ophiuchi (21); ESCKE, P. der STRUVE'schen Etudes stell. (26); WICHMANN, P. des Argelander'schen Sterns (26, 36, 43); PETERS, über STRUVE's Ableitung der Fixsternentfernungen (35); über BESSEL's P. von 61 Cygni (s. Abh. 83, 84), (29, Ergänzungsheft); MACLEAY, P. von α Cent. (32); GRUNERT, zur Entfernung der Fixst., PETERS, P. des Argelander'schen Sterns (37); ARGELANDER, zu WICHMANN's P. von Lal. 21185, WINNEKE, P. von Lal. 21185 (40); PLANA, Formeln zur P.-Bestimmung, über GALLILI's Ansichten über P. (49); KEGELER, P. von β Ophiuchi (51, 59); ATWERN, P. des PROCYON (55), P.-Bestimmungen am Königsb. Heliom. [zu Abh. 83 u. 84] (59); MOESTA, P. von α und β Centauri aus Mer.-Kreis-Beob. (71)].

85. Ankündigung einer vollständigen Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen.*)

(Zeitschr. f. Astronomie I, p. 360.)

Die Untersuchung der Beobachtungen des grossen BRADLEY, die mich seit dem Jahre 1807 beschäftigt und seit fast zwei Jahren vollendet ist, hat eine Menge von Resultaten gegeben, die für die Astronomie Interesse und Wichtigkeit besitzen. Die bis jetzt unüberflossene Beobachtungskunst BRADLEY's, verbunden mit der Vortrefflichkeit seiner Instrumente, hat es möglich gemacht, in die Resultate eine Genauigkeit zu legen, die doppelt schätzbar ist, da die Beobachtungen über ein halbes Jahrhundert vor unserer Zeit gemacht wurden und deshalb nicht entbehrt werden können, wenn

*) [109 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 97 (O.). 99. 112. 113. 165. 205. 206 (O.). 212. 240 (O.). 247. 251. 346 ff. 354. 357 (O.). II. 19. 34. 37. ff., 84. 90 (O.). 93 (O.). 91 (O.). — Vgl. 90, 101, 115, 130 d. a. Verz.]

[Ueber die Veröffentlichung seiner Bearbeitung der Bradley'schen Beobachtungen schreibt BASEL unter dem 5. Jan. 1809 an v. LINDENAU (Mon. Corresp. XIX, p. 188): „Von jeher hat es auf mich einen unangenehmen Eindruck gemacht, wenn jemand eine Arbeit verspricht, ohne sie auszuführen; verargen Sie mir es daher nicht, wenn ich nicht eher etwas bekannt machen wollte, bis ein beträchtlicher Theil dieser unermesslichen Rechnungen beendigt und dadurch wenigstens so viel gesichert war, dass das Versprechen selbst im Falle von Unterbrechungen erfüllt werden konnte. Die Resultate, die schon in meinem Pulte liegen, sind mannigfaltig und zum Theil interessant. Ich arbeite jetzt am Sternencatalog, dem die Natur der Beobachtungen und die Art, wie ich sie benutzen konnte, einige Vorschläge geben werden, die die neuere Cataloge nicht haben. Es gehört, ich gestehe es, einige Aufopferung zu dieser Arbeit; allein die Vortrefflichkeit der Beobachtungen und der glückliche Erfolg, der schon einige der angestellten Untersuchungen krönte, lassen sie leicht vergessen.“]

es darauf ankommt, die Bewegungen der Himmelskörper mit Genauigkeit zu bestimmen.

Das Werk, welches ich über diesen Gegenstand ausgearbeitet habe, enthält eine, allein auf BRADLEY's Beobachtungen gegründete Untersuchung aller auf die astronomischen Beobachtungen Einfluss habender Elemente; ein Verzeichniss von 3166 Sternen für 1755; ein ähnliches von 108 Sternen, die nur einmal beobachtet wurden und die in keinem andern Verzeichnisse vorkommen; eine Untersuchung des Vorrückens der Nachtgleichen, der Constante der Aberration, der eignen Bewegung fast aller Flamsteed'schen Sterne, der Parallaxe einiger Fixsterne u. s. w. Die einzelnen Abschnitte dieses Werks sind folgende:

1. Untersuchung der Instrumente und ihrer Berichtigungen.
2. Sonnenbeobachtungen in der Nähe der Nachtgleichenpunkte.
3. Polhöhe von Greenwich.
4. Strahlenbrechung. [Abh. 32, Bd. I, p. 244.]
5. Weitere Untersuchungen der Sonnenbeobachtungen in der Nähe der Solstitial- und Aequinoctialpunkte, mit der bekannten Polhöhe und Strahlenbrechung.
6. Untersuchung des alten Mauerquadranten; Gesetz seiner Veränderlichkeit; neue Untersuchungen der absoluten Rectascensionen.
7. Allgemeine und specielle Aberrations- und Nutationstafeln.
8. Register der Uhr von 1750—1762.

9. Jährliche Parallaxe einiger Fixsterne, Constante der Aberration etc. [Abh. 39, Bd. I, p. 286.]
10. Verzeichniß aller von BRADLEY beobachteten Sterne; 3166. Sterne deren Existenz am Himmel durch neuere Verzeichnisse erwiesen ist, und 108 Sterne, die nur einmal beobachtet sind und sonst nirgends vorkommen. Unter diesen können also neue Planeten sein; Uranus ist nur einmal darunter.
11. Vorrückung der Nachtgleichen. [Abh. 37, Bd. I, p. 262.]
12. Eigene Bewegung der Fixsterne.
13. Vergleichung dieser Untersuchungen mit Fremden.

Das Werk wird etwa 90—100 Bogen in Folio stark werden und in lateinischer Sprache unter dem Titel:

Fundamenta Astronomiae pro anno 1755 deducta ex observationibus viri incomparabilis JAMES BRADLEY in specula astronomica Grenovicensi per annos 1750—1762 institutis.

Da aber ein solches, nur den Astronomen interessantes Werk einen viel zu geringen Absatz verspricht, als dass eine Buchhandlung seinen Verlag übernehmen könnte, so bin ich gezwungen den Weg der Subscription einzuschlagen. Sobald dadurch ein Theil der Kosten des Drucks gesichert ist, wird dieser seinen Anfang nehmen und so schnell als möglich gefördert werden. Der Subscriptionspreis ist auf 10 Thaler Conv. Cour. gesetzt, die bei Ablieferung des Exemplares bezahlt werden. Aufträge zu sammeln haben, ausser meinen verehrten Freunden, den Herren Professor BODE in Berlin, Professor GAUSS in Göttingen, von LINDENAU in Gotha und Doctor OLBERS in Bremen, die Herren Buchhändler Fr. NICOLIVICUS in Königsberg und W. REIN in Leipzig gütigst übernommen.

Königsberg, den 16. Januar 1816.

F. W. BESSEL.

Nachschrift.

Für den Astronomen bedarf die vorstehende Ankündigung keines Zusatzes; jeder der mit dem Bedürfnisse seiner Wissenschaft bekannt ist und selbst durch eigene Arbeit zu deren Ausbildung mitwirken will, wird den hohen Werth, ja das Unentbehrliche dieses Werkes und damit zugleich die Nothwendigkeit fühlen, nach Kräften zu dessen baldigen Erscheinen beizutragen. Allein für Besitzer größerer Bibliotheken, für Vorsteher solcher Anstalten, für die Reichen und Mächtigen dieser Erde und überhaupt für solche, die wenn auch nicht durch eigene Thätigkeit, doch mittelbar, das Gedeihen unserer deutschen Geistesbildung zu befördern, des ed-

len Sinnes sind, dürfte eine erläuternde Anmerkung über die Nothwendigkeit dieser Subscriptionsanzeige nicht unpassend sein, da es vielleicht Manchem und vorzüglich dem Ausländer unbegreiflich scheinen könnte, warum die Herausgabe eines Buches von anerkanntem Werthe nur einer solchen Aufforderung bedarf.

Der Grund davon liegt leider in dem herrschenden Geschmack dieser Zeit und in dem Zustand unseres wissenschaftlichen Verkehrs in Deutschland überhaupt. Nur Romane, Handbücher, politische Flugschriften, Journale, Conversations-Lexica und im allgemeinen Werke, die den ganzen Kreis des menschlichen Wissens zu lehren und den Unwissenden mit leichter Mühe zum scheinbar Vielwissenden umzustempeln versprechen, sind heutzutage, wo die gepriesene Vielseitigkeit an der Tagesordnung ist, eines starken Absatzes sicher; den Verlag grösserer, den exacten Wissenschaften gewidmeter Bearbeitungen, kann jetzt kein Buchhändler, ohne die grösste Wahrscheinlichkeit des Verlustes übernehmen und da wir nicht so wie in England und Frankreich Fonds besitzen, eigens dazu bestimmt um die Druckkosten für umfassendere wissenschaftliche Untersuchungen zu bestreiten, auch die meisten unserer deutschen Millionäre mit allem Geistigen eben nichts zu schaffen haben mögen, so bleibt dem vaterländischen Gelehrten, wenn er die Frucht seiner Anstrengung zu der Wissenschaft und Anderer Bestem zu Tage fördern will, nichts übrig, als die Herausgabe auf eigene Kosten zu beginnen und zu versuchen, ob es durch eine Subscriptionsaufforderung vielleicht gelingt, wenigstens einen Theil des eigenen Aufwandes wieder ersetzt zu erhalten.

So geht es unserm BESSEL; während sieben ganzer Jahre hatte dieser mit seltmem Fleisse die Bradley'schen Beobachtungen bearbeitet und damit ein Werk vollendet, was durch reiche Ausbeute auf den Dank der Mit- und Nachwelt gerechten Anspruch macht; allein kein Buchhändler will den Verlag übernehmen, trotzdem dass BESSEL, den schönsten Lohn im Genuss der vollbrachten Arbeit selbst findend, auf jeden andern durchaus Verzicht leistet; dass der Gelehrte, dessen ganzes Leben auf seinen Ideenkreis und auf sein Arbeitszimmer beschränkt ist, sich auch mit dem ihm fremdartigen Detail des mercantilen Geschäftes befassen soll, ist hart, aber leider in dem jetzigen Zustand der Dinge fast unvermeidbar; doch ist es dabei wieder eine höchst erfreuliche Erscheinung für uns und unser deutsches Vaterland, dass wir kleiner Gelehrtenverein, ohne sonderliche Aufmunterung von aussen, blos durch unser inneres Treiben und Wirken, einander und die Wissenschaft selbst freudig aufrecht erhalten.

Der Druck des Besselschen Werkes wird einen Aufwand von circa 1000 Thalern erfordern; die kleine Zahl von hundert Subscribenten ist also hinreichend, um die Herausgabe unternehmen zu können. Allerdings ist das Buch blos für den Astronomen bestimmt, allein jeder Begüterte müsste, dünkte ich, gern den unbedeutenden Beitrag liefern, um zur Erscheinung eines Werkes mitzuwirken, was das Gebiet einer ganzen Wissenschaft bereichert und erweitert und wofür noch nach Jahrhunderten die Nachwelt unserer Zeit danken wird; denn Tausende würde die kleine Zahl deutscher Astronomen gern zum Opfer bringen, könnten wir damit für eine frühere Epoche ein Werk, wie das Bradley-Besselsche ist, erkaufen. Wir werden die Namen der Subscribenten treulich in dieser Zeitschrift aufbewahren, damit unsere späten Nachkommen sich noch mit Dank derer erinnern mögen, die in unsern Zeiten eines Opfers für die Wissenschaften fähig waren.

Und verdient denn nicht eine Wissenschaft, die uns mit dem Zustand des Himmels, mit der ganzen Schöpfung, für Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft bekannt macht, die uns das wahrhaft Ueberirdische lehrt, die nur das Geistige in Anspruch nimmt und uns ganz über das niedere Leben erhebt, verdient eine solche Wissenschaft es nicht, dass jeder Edlere zu dem Ausbildung beitrage!

O quam contempta res est homo, nisi supra humana surrexerit!

Quanto potius Deorum opera celebrare quam Philippi aut Alexandri atrocina

Seneca quaest. nat. lib. I et III.

Sternwarte Seeberg, am 9. April 1816.

VON LINDENAU.

86. Bestimmung der geraden Aufsteigungen der 36 Maskelyne'schen Fundamentalsterne für 1815, auf Königsberger Beobachtungen gegründet.*)

(Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1818—19. Math. Classe p. 19.)

1.

Die gegenwärtige Untersuchung beruht auf fünfjährigen Beobachtungen mit den Instrumenten der Königsberger Sternwarte, auf die Art angestellt, die ich in den Einleitungen der verschiedenen Abtheilungen meiner Beobachtungen angezeigt habe. Diese Instrumente sind ein 4flüssiges Dollond'sches Mittagsfernrohr und ein 25zölliger Cary'scher Kreis; ich wage damit neben den grösseren Instrumenten aufzutreten, auf welche MASKELYNE und PIAZZI dieselbe Bestimmung gründeten. Allein die genaue Untersuchung dessen, was meine Hilfsmittel in dieser Beziehung geleistet haben, ist nothwendig, indem sich nur dadurch der Grad des Zutrauens würdigen lässt, welcher der neuen Bestimmung gebührt; doppelt nothwendig ist sie, weil von einem Gegenstande die Rede ist, den solche Vorgänger mit grossem Fleisse festgesetzt haben.

Die Fehler der astronomischen Beobachtungen zerfallen bekanntlich in zwei Classen: die eine enthält die eigentlichen Beobachtungsfehler, die von unzähligen zufälligen Ursachen abhängen und deshalb als den all-

gemeinen Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgend angesehen werden können; die andere begreift die von beständig einwirkenden Ursachen herrührenden, der Abweichung der Instrumente von ihrer mathematischen Idee, oder ihrer Behandlungsart zuzuschreibenden. Die erstern können aus den Abweichungen der Beobachtungen unter sich erkannt, und sowohl ihre wahrscheinliche Grösse, als die ihres Einflusses auf die Bestimmungen, nach den Vorschriften geschätzt werden, die LAPLACE, GAUSS und ich gegeben haben; die letzteren stören die Beobachtungen nur nach gewissen Gesetzen und verschwinden, sobald man diese erkennt. Jene werden verkleinert durch die Geschicklichkeit des Beobachters und die Güte des Instruments; diese durch die Einsicht des Beobachters und die Strenge der Prüfung des Instruments und der Beobachtungsart. Beide sind von einander unabhängig; ein Schluss von der Grösse der einen auf die der andern ist unstatthaft: während jene klein sind, können diese gross sein, oder umgekehrt.

Jede Untersuchung selbst bringt immer die Angabe des wahrscheinlichen aus den zufälligen Beobachtungsfehlern entstandenen Fehlers mit sich; ist Grund vorhanden, ihr hinsichtlich der beständigen Fehler zu

*) [136 d. n. Verz. — Gelesen in der Akademie den 17. Juni 1819. — Br. m. O. II. 97. 110 — 115. 129. Vgl. auch 134 und 139 d. n. Verz.]

vertrauen, so mag sie immerhin nehen ähnlichen Untersuchungen auftreten, selbst wenn diese auf weit vorzüglichern Hilfsmitteln ruheten und einen weit geringeren wahrscheinlichen Fehler darböten. In diesem Falle würde die neue Bestimmung die älteren nur sehr wenig ändern, immer aber die Sicherheit vermehren. Bei diesem Zustande der Kunst die astronomischen Beobachtungen zu berechnen, bedarf es keiner Entschuldigung, wenn man Bestimmungen, die auf grössere Instrumente gegründet wurden, auch durch kleinere zu erlangen sucht; die grösste Gefahr, der man sich dadnrch aussetzt, ist die, zu der Sicherheit der bessern Bestimmungen nur wenig beizutragen, nie aber wird der Beitrag diese Sicherheit verringern.

Neuere Erfahrungen haben aber leider! gezeigt, dass beständige Fehler vorhanden sind, wo wir sie nicht vermutheten; oft so versteckt, dass selbst nach der Entdeckung ihres Daseins ihre Ursache verborgen blieb. Während es durch das gültigere Zeugniß der Beobachtungen selbst überflüssig gemacht wird, die Sorgfalt zu erwähnen, die der Beobachter bei jeder einzelnen Beobachtung anzuwenden sich gewöhnt hat, wird die Nachforschung nach den möglichen Ursachen der beständigen Fehler daher höchst notwendig. Der Beobachter, der eine vorher nicht erkannte Ursache solcher Fehler auffindet und zu vermeiden lehrt, vermehrt wirklich unsere Beobachtungskunst; sobald man dahin gelangt sein wird, aus den zufälligen Fehlern das Maass der wahrscheinlichen Fehler richtig zu bestimmen, wird auch das Ziel der Beobachtungskunst erreicht sein.

2.

Der Kreis gibt bekanntlich die Declinationen aller südlich vom Zenith culminirenden Sterne mehrere Secunden südlicher an, als POND'S und PIAZZI'S Verzeichnisse (vgl. Abb. 88); auf diesen Unterschied lasse ich mich hier nicht ein; theils weil ich die dadurch veranlassten Prüfungen in den Einleitungen meiner Beobachtungen mitgetheilt habe, theils weil es bei der gegenwärtigen Untersuchung nur auf die Unveränderlichkeit des Instruments ankommt, und jeder beständige Fehler der Zenithdistanzen aus der Rechnung verschwindet; sodass also jener Unterschied, selbst wenn er entschieden ein Fehler meines Instruments oder meiner Beobachtungsmethode wäre, keine Unsicherheit erzeugen könnte.

Die Unveränderlichkeit des Kreises hat sich aber auf eine ausgezeichnete Weise bewährt: zuerst durch die nach vierjährigem Gebrauche wiederholte Prüfung seiner Theilungsfehler; dann durch die zu verschiedenen Zeiten gemachten Bestimmungen der Polhöhe; endlich

und am sichersten für den jetzigen Zweck, durch 10 bisher heohachtete Sonnenwenden. Diese Sonnenwenden, deren Uehereinstimmung vielleicht grösser ist, als die durch irgend eine vorhandene ähnliche Beobachtungsreihe dargebotene, scheinen mir zu zeigen, dass der Kreis ein für die gegenwärtige Untersuchung sich vorzüglich eignendes Instrument ist; ich führe sie hier an, nach einer neuen Reduction mit der jährlichen Veränderung $= -0,457$ und der, in der ganzen folgenden Untersuchung angewandten, sich aus der (Fundamenta Astr. pro A. 1755, p. 128 [Bd. I, p. 288]) entwickelten Theorie und der Annahme von $i = -0,069541$ nach von LINDENAU ergebenden Nutation:

	Beobachtete Schiefe.	Mittlere Schiefe 1815.
1814 Sommer	23°27' 43,34	23°27' 47,19
Winter	44,60	47,22
1815 Sommer	45,78	47,13
Winter	47,75	47,81
1816 Sommer	48,98	47,79
Winter	50,22	47,85
1817 Sommer	51,24	47,82
Winter	52,86	48,50
1818 Sommer	53,04	47,98
Winter	51,91	46,32
Mittel		23°27' 47,56

Bei allen Sonnenbeobachtungen, ohne Ausnahme, wurde das Instrument durch einen Schirm gedeckt. Den wahrscheinlichen Fehler einer vollständigen, d. i. an beiden Rändern und nach einer Drehung des Instruments wiederholten Beobachtung, mit Einfluss der Unregelmässigkeiten der Theilung, finde ich (unten Art. 7) $= 1,4926$. Früher hatte ich den wahrscheinlichen Fehler einer Fixsternbeobachtung unter den vortheilhaftesten Umständen und mit Ausschluss der Theilungsfehler $= 0,6845$ gefunden. Die Vergleichung beider zeigt, dass ein Instrument, welches eine solche Wiederholung der Sonnenbeobachtungen zulässt, das gewöhnliche Zittern der Ränder unschädlicher macht als man glauben sollte; der letzte zeigt die Sicherheit, mit welcher man das Bleiloth einstellen, einen Stern bissectiren und die Beobachtung ablesen kann.

3.

Es ist den Astronomen bekannt, dass POND auf einen Fehler des Mittagsfernrohrs der Greenwicher Sternwarte aufmerksam machte, der daraus entsteht, dass die Collimationslinie aufhört auf der Axe senkrecht zu sein, wenn man das Instrument aus der horizontalen Lage in eine andere bringt. Die Bemerkung dieses Fehlers,

der von einer Biegung der Theile des Instruments herrührt, ist ohne Zweifel von bedeutender Wichtigkeit für die beobachtende Astronomie; es ist nöthig, dass wir das Königsberger Mittagsfernrohr in dieser Beziehung prüfen.

Die Tagebücher der Sternwarte bieten die Mittel dazu dar; das Instrument wurde, um etwaige Fehler auf verschiedene Seiten zu bringen und um die Abnutzung der Zapfen zu vermeiden, nach BRADLEY'S Beispiele, am 12. Mai 1817 in seinen Lagern umgelegt, das Rohr aus der Axe gezogen und in der umgekehrten Richtung wieder eingesteckt, in welchem Zustande es bis jetzt verblieb. Wenn der erwähnte Fehler stattfände, so muss er sich in den Entfernungen vom Pole äussern, die das berichtigte und nach dem Meridianzeichen gerichtete Instrument vor und nach der Veränderung angab. Vorher fand ich aber diese Entfernung vom Pole, aus 9 Beobachtungen des Jahres 1815 = 1,02 westlich, und aus 8 Beobachtungen des Jahres 1816 = 0,35 westlich, im Mittel = 0,69; nachher aus 11 Beobachtungen des Jahres 1817 = 1,77 westlich. Wollte man das Maximum der Biegung im Scheitelpunkte und ihren Einfluss proportional dem Cosinus der Zenithdistanz annehmen, so würde hieraus folgen, dass dieses Maximum 0,66 im grössten Kreise beträgt, und dass das Meridianzeichen ein östliches Azimuth = 1,8 hat. Erwägt man aber, dass diese Bestimmung nicht auf grosse Sicherheit Anspruch machen kann, indem sie auf 4 Elementen beruht, deren drei erste nicht mit grosser Genauigkeit gefunden werden können, auf der Schätzung der Lage der Absehnslinie gegen das Meridianzeichen, auf der Richtigkeit der Collimation, auf der Horizontalität der Axe und auf den durch den Polarstern beobachteten Entfernungen vom Pole, so wird man die gefundene Biegung von 0,66 vielleicht nicht als einen Beweis annehmen wollen, dass das Königsberger Mittagsfernrohr wirklich einen Fehler dieser Art besitzt; aber man wird zugeben müssen, dass dieser Fehler, wenn er vorhanden ist, weit geringer ist, als der ähnliche des Greenwicher Instruments, bei welchem er etwa 9" beträgt. Folgt übrigens der Fehler dem oben angenommenen Gesetze, oder ist er, allgemeiner, von der Form $a \cos z + b \sin z$, so verschwindet sein Einfluss auf die geraden Anstiege völlig; vorausgesetzt, dass man die den Culminationszeiten hinzuzufügenden Verbesserungen durch die Beobachtungen des Polarsterns bestimmt, so wie es auf der Königsberger Sternwarte immer geschieht. Dass ein Fehler dieser Art ganz oder grösstentheils diesem Gesetze folgt, ist nicht unwahrscheinlich: die Berichtigung

der Mittagsfernrohre durch den Polarstern hat also, ausser dem Vortheile der grösseren Genauigkeit, noch den, eine Biegung ganz oder grösstentheils unschädlich zu machen. Dass wenigstens dieses letzte bei den Königsberger Beobachtungen stattfindet, wird durch die übereinstimmenden über und unter dem Pole beobachteten geraden Aufstiege vieler Sterne bewiesen, z. B. durch die des α Aurigae, welcher nach 173 obem Culminationen (für 1815) $9^h 21^m 16^s.982$ auf α Aquilae folgt, und nach 54 untern Culminationen $9^h 21^m 17^s.002$, wo der Unterschied geringer ist als der wahrscheinliche Fehler. — Endlich muss die Umlegung des Instruments einen Fehler dieser Art zum Theil vernichtet haben.

Den wahrscheinlichen Fehler eines beobachteten Unterschieds der AR. zweier Sterne finde ich = 0,1446⁷⁾, aus 1000 Vergleichen α Aquilae mit einem andern der Fundamentalsterne, ohne Rücksicht auf den Declinationsunterschied und die Zwischenzeit der Beobachtungen genommen; so dass diese Bestimmung die Unregelmässigkeit der Uhr und den Fehler der berechneten Reduction der Durchgangszeiten auf den Meridian mit einschliesst. Ein Versuch, den eigentlichen Beobachtungsfehler von den eben genannten Fehlern zu trennen, schlug fehl, indem oft in Rectascension oder Declination bedeutend entfernte Sterne einen nicht grösseren oder gar kleineren wahrscheinlichen Fehler ergaben, als nähere. Dieses kann uns über die Güte der zur Berichtigung des Mittagsfernrohres angewandten Methode, und über die Zulänglichkeit der Uhr völlig beruhigen, indem daraus hervorgeht, dass die aus diesen Ursachen entspringenden Fehler weit kleiner sind als der eigentliche Beobachtungsfehler.

Ein beständiger Fehler der Sonnenbeobachtungen kann durch die ungleiche Erwärmung des Mittagsfernrohres erzeugt werden; am Anfange der Beobachtungen, war ich nicht aufmerksam hierauf, oder setzte voraus, dass die Strahlen der Sonne das ihnen nur etwa 5 bis 6 Minuten ausgesetzte Instrument nicht merklich ändern könnten. Diese Meinung habe ich später als ungegründet erkannt, und deshalb, vom Jahr 1816 an, einen Schirm angewandt, der nur Sonnenstrahlen auf das Objectivglas fallen lässt. Die Anwendung eines solchen Schirms halte ich für sehr wesentlich. MASKELYNE umfasste die Axen des Mittagsfernrohres mit Holz, um die Sonnenstrahlen abzuhalten; es kann aber

⁷⁾ Hieraus folgt der wahrscheinliche Fehler jeder Beobachtung = $0,1446 : \sqrt{2} = 0,1022$; wenn eine gerade Aufstiege durch Vergleichung mit n Sternen bestimmt wird, so ist ihr wahrscheinlicher Fehler daher = $0,1022 \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

sein, dass der Einfluss auf das Rohr selbst merklich ist, indem die früher und länger beschienene Ostseite dasselbe nach Westen krümmt und die geraden Aufsteigungen zu gross erscheinen lässt. Diese Bemerkung verdanke ich der gütigen Mittheilung des Prof. TRALLES.

4.

Die in dem Vorigen enthaltenen Bemerkungen scheinen zu zeigen, dass die auf die Königsberger Beobachtungen gegründete Untersuchung der geraden Aufsteigungen der 36 Fundamentalsterne, in Absicht ihrer Sicherheit im Ganzen, Zutrauen verdient; von ihrem aus den Beobachtungsfehlern entstehenden wahrscheinlichen Fehler werde ich unten Rechenschaft geben.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich zuerst mit der, auf die willkürliche Annahme Einer Rectascension gegründeten Bestimmung der übrigen; dann mit der Erfindung des gemeinschaftlichen Fehlers aller dieser Rectascensionen durch Sonnenbeobachtungen. Jene willkürliche Annahme war die der AR. α Aquilae = $19^{\circ} 41' 45''$ für 1815; durch diese wurde α Canis minoris bestimmt, und alle übrigen Sterne nur durch unmittelbare Vergleichung mit einem von diesen beiden: wenn α Aquilae beobachtet wurde, bezog die Vergleichung der übrigen an demselben Tage vorkommenden Sterne sich auf diesen, wenn er fehlte, auf α Canis minoris. Diese beiden Sterne eignen sich besonders zu Vergleichungspunkten; theils wegen ihrer Entfernung von 12 Stunden, welche erlaubt, wenigstens einen von ihnen immer zu bequemer Zeit zu beobachten, theils wegen ihrer ununterbrochenen Sichtbarkeit bei Tage; endlich wegen ihrer Nähe beim Aequator; auch wurden sie in der Absicht, sie als Vergleichungspunkte zu benutzen, vom Anfange der Beobachtungen an so häufig als möglich observirt.

Zur Reduction wurden die verbesserte Nutation und die Aberrationsconstante = $20'',255$ angewandt; den Beobachtungen wurden die kleinen von der täglichen Aberration herrührenden Verbesserungen (Eiuleit. IV. Abth. p. I) angebracht. Keine Beobachtung wurde ausgeschlossen, ausser den wenigen, die als ganz zweifelhaft angegeben sind. Auf diese Weise entstand folgendes, auf fünf vollständige Jahrgänge, von der Entstehung der Sternwarte bis zum Ende von 1818 gegründetes Verzeichniss.

	Anzahl der Beob.	AR. 1815.	Wahrscheinlicher Fehler.
γ Pegasi	87	$0^{\circ} 3^m 43^s,173$	0,0159
α Arietis	45	1 56 45,945	0,0216
α Ceti	30	2 52 37,071	0,0264
α Tauri	69	4 25 18,751	0,0174
α Aurigae	173	5 3 2,189	0,0110
β Orionis	159	5 5 38,799	0,0115
β Tauri	65	5 14 36,066	0,0179
α Orionis	94	5 45 9,226	0,0149
α Canis majoris	159	6 36 59,320	0,0115
α Geminorum	94	7 22 46,222	0,0149
α Canis minoris	75	7 29 36,479	0,0167
β Geminorum	216	7 33 58,542	0,0099
α Hydrac	24	9 18 29,960	0,0295
α Leonis	80	9 58 30,240	0,0162
β "	65	11 39 36,699	0,0179
β Virginis	34	11 41 3,347	0,0248
α "	120	13 15 27,386	0,0132
α Bootis	174	14 7 13,386	0,0110
1 α Librae	32	14 40 28,250	0,0256
2 α "	32	14 40 39,651	0,0256
α Coronae	54	15 26 51,221	0,0197
α Serpentis	43	15 35 9,599	0,0221
α Scorpii	30	16 18 4,789	0,0264
α Herculis	63	17 6 12,794	0,0182
α Ophiuchi	89	17 26 20,835	0,0153
α Lyrae	141	18 30 40,247	0,0122
γ Aquilae	186	19 37 27,646	0,0106
α "	—	19 41 45,157	—
β "	199	19 46 13,345	0,0103
1 α Capricorni	79	20 7 22,971	0,0163
2 α "	79	20 7 46,759	0,0163
α Cygni	158	20 35 7,484	0,0115
α Aquarii	56	21 56 16,564	0,0193
α Piscis austr.	55	22 47 24,164	0,0195
α Pegasi	49	22 55 33,935	0,0206
α Andromedae	52	23 58 50,629	0,0201

5.

Die diesem Verzeichnisse beigezeichneten wahrscheinlichen Fehler sind aus dem einer einzelnen Beobachtung = $0,1446$ unter der Voraussetzung berechnet, dass α Canis minoris ohne Fehler bestimmt ist; diese Voraussetzung gründet sich darauf, dass der unmittelbar gefundene Unterschied zwischen α Aquilae und α Canis min. durch die mittelbaren Bestimmungen durch andere, mit beiden verglichene Sterne, bestätigt wird. Inzwischen glaube ich, dass noch uns unbekannt, irgend einem Gesetze folgende Ursachen vorhanden sind, die Unterschiede zwischen der Rechnung und der Beobachtung erzeugen; in diesem Falle wird der angegebene wahrscheinliche Fehler zu klein sein. Diese Ursachen können theils in den Oertern der Sterne selbst, z. B. in einer kleinen Parallaxe oder

einer kleinen Aenderung der Aberration u. s. w., oder in der Beobachtung, z. B. in einer kleinen Verschiedenheit zwischen Nacht- und Tagebeobachtungen, in einer durch die tägliche Veränderung der Wärme hervorgerufenen Beweglichkeit der Zapfenlager des Mittagsfernrohrs u. s. w. liegen;*) ihr Dasein wird durch die folgende Zusammenstellung der Unterschiede der auf α Canis min. gegründeten Rectascensionen, von den auf α Aquilae gegründeten, wahrscheinlich gemacht.

	Beobachtungen.	Unterschied.	Wahrsch. Fehler.
γ Pegasi	76 und 11	- 0,061	0,050
α Tauri	37 „ 32	- 0,146	0,039
α Aurigae	77 „ 96	- 0,992	0,028
β Orionis	71 „ 85	- 0,947	0,029
β Tauri	26 „ 39	- 0,151	0,041
α Orionis	37 „ 57	- 0,221	0,031
α Canis minoris	52 „ 107	- 0,908	0,029
α Geminorum	24 „ 70	- 0,919	0,038
β „	49 „ 166	+ 0,912	0,029
α Leonis	29 „ 51	+ 0,906	0,038
β „	19 „ 46	+ 0,915	0,042
α Virginis	54 „ 66	+ 0,967	0,031
α Bootis	122 „ 52	+ 0,973	0,029
α Coronae	21 „ 33	+ 0,962	0,043
α Herculis	42 „ 21	+ 0,114	0,042
α Ophiuchi	62 „ 27	+ 0,996	0,037
α Cygni	141 „ 17	+ 0,959	0,041

Die dieser Zusammenstellung beigetzten wahrscheinlichen Fehler sind aus der Formel

$$0:1446 \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} + \frac{1}{75}}$$

berechnet, in welcher a und a' die Anzahlen der Vergleichen mit α Aquilae und α Canis min. sind, und 75 = gleich der Anzahl der unmittelbaren Vergleichen dieser beiden Sterne ist. Da die wirklichen Unterschiede meistentheils (12 Mal unter 17) grösser sind als die wahrscheinlichen, da in ihren Zeichen eine gewisse Regelmässigkeit zu herrschen scheint, so scheint das Vorhandensein noch unbekannter, gewissen Gesetzen folgender Einwirkungen sehr wenig Zweifel unterworfen zu sein. Wie gross ihr Einfluss auf die Angaben des Verzeichnisses sein kann, kann bei unserer

*) Wenn ein Fehler dieser Art vorhanden ist, so wie er auf einen Sternwarten wirklich vorhanden zu sein scheint, so ist es klar, dass er auf die aus Rectascensionbeobachtungen gefolgerte Grösse der Aberration fast seinen ganzen Einfluss äussert, indem er dieselbe Periode und seine Maxima fast zu derselben Zeit hat, wie die Aberration. Man wird diese Rectascensionbeobachtungen nur mit der grössten Vorsicht zur Untersuchung der Aberration anwenden können; nie ohne die sorgfältigste Prüfung der Beständigkeit der Aufstellung des Instruments während eines Tages.

Unbekanntheit mit ihren Ursachen nicht geschätzt werden. Uebrigens bemerke ich, dass α Ceti mir am wenigsten sicher bestimmt zu sein scheint, indem die Unterschiede unter den einzelnen Beobachtungen grösser als gewöhnlich sind. α Geminorum ist ein zu naher Doppelstern, als dass er mit dem nur 44 Mal vergrössernden Fernrohr sehr genau beobachtet werden könnte; die Angabe des Verzeichnisses gilt für die Mitte, allein ich muss anderen Astronomen, die stärker vergrössernde Instrumente anwenden, die genauere Bestimmung seiner einzelnen Sterne überlassen.

Einige Angaben des Verzeichnisses erhalten eine sehr erwünschte Bestätigung durch die Resultate, die STRUVE aus seinen schönen Beobachtungen zog: in den Observationibus Dorpatensibus kömmt nämlich die Bestimmung der Unterschiede von α Aurigae und α Lyrae und von α Lyrae und α Cygni, die erste auf entgegengesetzte Culminationen gegründet, vor. Mit der hier angewandten Nutation sind diese Unterschiede:

22 Beob.: $13^h 27^m 38:226$; 7 Beob.: $2^h 4^m 27:127$
wofür mein Catalog angibt:

$13^h 27^m 38:208$ und $2^h 4^m 27:137$.

Nimmt man hierzu den im 3. Art. angeführten, aus der unteren Culmination bestimmten Unterschied zwischen α Aurigae und α Aquilae, so hat man willkommene Bestätigungen der Rectascensionen, selbst für Sterne, die einen halben Tag von einander entfernt sind.

G.

Mit den Sternörter des Verzeichnisses und der verbesserten Nutation wurden nun alle in meinen Tagebüchern angegebenen Uhrstände neu berechnet, und damit die seit dem Tage, an welchem das Mittagsfernrohr eine Besichtigung vor den Sonnenstrahlen erhielt, beobachteten geraden Aufsteigungen der Sonne berechnet. Diese Beobachtungen umfassen drei Jahrgänge, und die Anzahl der Tage, an welchen zugleich die gerade Aufsteigung und Zenithdistanz der Sonne beobachtet wurden, ist 290. Man hätte diese Zahl durch die frühern beiden Jahrgänge vermehren können; allein da ich nicht behaupten kann, dass sie von der immer in demselben Sinne wirkenden Sonnenwärme nicht gestört wurden, so schloss ich sie, als nichts beweisend, aus.

Mittelst der im 2. Art. angegebenen Schiefe der Ekliptik wurden aus den geraden Aufsteigungen der Sonne ihre Declinationen berechnet und diese, wegen der Breite der Sonne B , um $+ B \frac{\cos \delta}{\cos \omega}$ verbessert, wobei der Theil der Breite, der von dem Monde

abhängt, mit der Masse 1 : 88,737 berechnet wurde, welche der angewandten Nutation entspricht. Die aus dieser Rechnung, der Polhöhe = $54^{\circ} 42' 50,0''$ und der mittleren Horizontalparallaxe = $8,77$ folgenden Zenithdistanzen haben, mit den beobachteten verglichen, folgende Fehler:

1816	März	16 bis	Mai	31.	+ 2,19	(43	Beob.)
	Juni	1	Aug.	16.	- 0,05	(31	"
	Sept.	6	Nov.	23.	- 0,08	(17	"
	Dec.	5	Febr.	23.	0,00	(15	"
1817	März	12	Mai	28.	+ 2,28	(23	"
	Juni	2	Aug.	16.	- 0,18	(29	"
	Sept.	5	Nov.	18.	- 1,37	(29	"
	Dec.	2	Jan.	5.	- 0,80	(9	"
1818	März	22	Mai	31.	- 0,33	(24	"
	Juni	3	Aug.	27.	- 0,21	(35	"
	Sept.	1	Dec.	30.	+ 0,29	(35	"*)

7.

Die aus diesen 290 Beobachtungen entwickelten 290 Bedingungengleichungen für die Verbesserung der AR. = $\Delta\alpha$, der Polhöhe = $\Delta\varphi$, und der Schiefe der Ekliptik = $\Delta\omega$, haben nicht alle gleichen Werth; da die Zenithdistanzen aus den beobachteten Rectascensionen berechnet wurden, diese aber mit einem wahrscheinlichen Beobachtungsfehler behaftet sind, so ist es klar, dass die Unsicherheit, die aus diesem und dem eigenthümlichen Fehler der Zenithdistanzen zusammengesetzt ist, desto grösser wird, je grösser der Einfluss der Rectascensionen auf die Declinationen ist. Nimmt man den wahrscheinlichen Fehler einer Zenithdistanz der Sonne ϵ'' , und den einer geraden Aufsteigung derselben $\mu\epsilon'' \sec \delta$, so findet man leicht den wahrscheinlichen Fehler der Vergleichung einer beobachteten und aus einer beobachteten geraden Aufsteigung berechneten Zenithdistanz

$$= \epsilon'' \sqrt{1 + \mu^2 \operatorname{tg} \omega^2 \cos^2 \delta \cos^2 \alpha}.$$

Nach den bisherigen, auf der Königsberger Sternwarte gesammelten Erfahrungen muss das von der verhältnissmässigen Güte beider Instrumente abhängige μ sehr nahe = $\frac{1}{2}$ sein; so wurde es hier angenommen. — Durch die Hilfe bequemer, die Quadrate und Producte der Coefficienten enthaltender Tafeln konnte jede der 290 Bedingungengleichungen, ohne lästige Rechnung, einzeln angewandt werden, wodurch sich folgende drei Endgleichungen ergaben:

*) Dreimonatliche Mittelwerthe; Schwankung zwischen + $6,9''$ und - $7,6''$; der m. F. eines einzelnen „Fehlers“ beträgt ca. $\pm 2,4$.

$$\begin{aligned} 0 &= -65,22 + \Delta\alpha, 18,9035 + \Delta\varphi, 4,858 + \Delta\omega, 8,151 \\ 0 &= + 72,77 + \Delta\alpha, 4,858 + \Delta\varphi, 245,701 - \Delta\omega, 88,602 \\ 0 &= -46,10 + \Delta\alpha, 8,151 - \Delta\varphi, 88,602 + \Delta\omega, 146,258 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= + 3,617; \text{ Anzahl der Beob.} = 17,949 \\ \Delta\varphi &= - 0,418; \text{ " " " " } = 186,824 \\ \Delta\omega &= - 0,140; \text{ " " " " } = 109,081 \end{aligned}$$

Ferner findet sich $\epsilon'' = 1,4926$; woraus also folgt die allgemeine Verbesserung des Verzeichnisses

$$\text{im 4. Artikel} = + 0,241; \epsilon'' = 0,235$$

$$\text{Polhöhe} = 54^{\circ} 42' 49,58; \dots 0,169$$

$$\text{Schiefe der Ekliptik für 1815: } 23^{\circ} 27' 47,42; \dots 0,143$$

Man kann die Frage aufwerfen, ob es zweckmässig ist, alle Beobachtungen zur Erfindung von $\Delta\alpha$ in Eine Summe zu vereinigen, da man doch nur dann den Fehler des Instruments und der Refraction vollständig aus der Rechnung schafft, wenn man gleiche Scheitelabstände mit einander vergleicht. Offenbar würde dieses mit der Eintheilung in nach den Declinationen geordnete Classen genau gleichgültig sein, wenn die Beobachtungen der Sonne in den aufsteigenden Zeichen eben so vertheilt wären, als in den niederstehenden. In Königsberg ist dieses nicht der Fall, indem zwischen der Herbstnächtegleiche und der Wintersonnenwende weit mehr heiteres Wetter zu sein pflegt, als zwischen dieser und der Frühjahrsnachtgleiche. Obgleich daher bei den angestellten Prüfungen des Kreises und der Menge der Theilstriche (= 16), auf welchen jede Sonnenbeobachtung beruht, ferner bei der vielfältig bestätigten nahen Richtigkeit der angewandten Refraction kaum ein merklicher Einfluss der Veränderung des Fehlers der Zenithdistanzen zu fürchten ist, so wurde doch, um die Untersuchung von diesem Vorwurfe zu befreien, statt der ersten Gleichung eine neue gesetzt, die die wenigen und ungleich vertheilten Beobachtungen der Sonne bei grösseren südlichen Declinationen ganz ausschloss; ihre Auflösung gab aber das vorige Resultat nur $0,022$ grösser. Ich habe das vorige beibehalten, theils des geringen Unterschiedes wegen, theils weil die mittlere Epoche der Beobachtungen auf 1817,5 fällt, und daher die gefundene Verbesserung verkleinert werden muss, wenn sie für 1815 gelten soll.

8.

Verbessert man alle Zahlen des Verzeichnisses (Art. 4) um + $0,241$, so ergibt sich das folgende für 1815. Die jährliche Veränderung, die es enthält, und mittelst welcher es mit den beiden Verzeichnissen von

MASKELYNE und PIAZZI für 1815, und mit dem des den Fundamentis Astronomiae pro 1755 gegebenen letzteren für 1800 verglichen wurde, ist aus den in Rectascensionen abgeleitet.

	Zahl der Beob.	AR. für den Anfang von 1815.	Jährl. V. eränderung für 1815.		Unterschiede d. Verzeichn. von		
			Säcular-Änderung.	MASKELYNE 1805.	PIAZZI 1805.	PIAZZI 1800.	
7 Pegasi	87	0 ^h 3 ^m 43 ^s .414	3,0803	+ 0,0096	- 0,266	- 0,196	- 0,168
α Arietis	45	1 56 46,186	3,3565	+ 0,0200	- 0,251	- 0,264	- 0,276
α Ceti	30	2 52 37,312	3,1243	+ 0,0096	- 0,334	- 0,200	- 0,179
α Tauri	69	4 25 18,992	3,4290	+ 0,0108	- 0,127	- 0,214	- 0,218
α Aurigae	173	5 3 2,380	4,4119	+ 0,0185	- 0,120	- 0,157	- 0,176
β Orionis	159	5 5 39,040	2,8780	+ 0,0043	- 0,132	- 0,062	- 0,050
β Tauri	65	5 14 36,307	3,7855	+ 0,0093	- 0,087	- 0,110	- 0,082
α Orionis	94	5 45 9,467	3,2443	+ 0,0033	- 0,086	+ 0,001	+ 0,025
α Canis majoris	159	6 36 59,561	2,6433	+ 0,0004	- 0,058	+ 0,045	+ 0,035
α Geminor. (med.)	94	7 22 46,463	3,8452	- 0,0121	+ 0,016	- 0,068	- 0,090
α Canis minoris	75	7 29 36,720	3,1478	- 0,0043	- 0,140	- 0,060	- 0,048
β Geminorum	215	7 33 58,783	3,6861	- 0,0124	- 0,136	- 0,163	- 0,161
α Hydrae	24	9 18 29,601	2,9462	- 0,0015	- 0,068	- 0,085	- 0,058
α Leonis	80	9 58 30,481	3,2057	- 0,0102	- 0,159	- 0,146	- 0,149
β "	65	11 39 36,940	3,0680	- 0,0079	- 0,126	- 0,116	- 0,105
β Virginis	34	11 41 3,588	3,1259	- 0,0007	- 0,309	- 0,176	- 0,178
α "	120	13 15 27,657	3,1446	+ 0,0111	- 0,117	- 0,064	- 0,089
α Bootis	174	14 7 13,627	2,7329	+ 0,0012	- 0,129	- 0,192	- 0,196
1 α Librae	32	14 40 28,491	3,3004	+ 0,0156	- 0,125	-	- 0,154
2 α "	32	14 40 39,892	3,3032	+ 0,0156	- 0,188	- 0,141	- 0,108
α Coronae	54	15 26 51,562	2,5379	+ 0,0024	- 0,204	- 0,351	- 0,318
α Serpentis	43	15 35 9,840	2,9499	+ 0,0064	- 0,194	- 0,164	- 0,123
α Scorpii	30	16 18 5,030	3,6621	+ 0,0157	- 0,307	+ 0,030	+ 0,019
α Herculis	63	17 6 13,055	2,7311	+ 0,0037	- 0,156	- 0,259	- 0,269
α Ophiuchi	89	17 26 21,076	2,7722	+ 0,0034	- 0,186	- 0,179	- 0,184
α Lyrae	141	18 30 40,588	2,0307	+ 0,0016	- 0,112	- 0,262	- 0,170
7 Aquilae	186	19 37 27,887	2,8561	- 0,0009	- 0,126	- 0,093	- 0,084
α "	-	19 41 45,398	2,9295	- 0,0015	- 0,202	- 0,102	- 0,086
β "	199	19 46 13,586	2,9515	- 0,0015	- 0,170	- 0,150	- 0,110
1 α Capricorni	79	20 7 23,212	3,3348	- 0,0081	- 0,247	- 0,110	- 0,115
2 α "	79	20 7 47,000	3,3393	- 0,0081	- 0,193	- 0,070	- 0,055
α Cygni	168	20 35 7,725	2,0417	+ 0,0022	- 0,259	- 0,269	- 0,284
α Aquarii	56	21 56 16,805	3,0852	- 0,0043	- 0,261	- 0,144	- 0,119
α Piscis australis	55	22 47 24,406	3,3424	- 0,0218	- 0,292	- 0,130	- 0,089
α Pegasi	49	22 55 33,276	2,9825	+ 0,0052	- 0,254	- 0,207	- 0,188
α Andromedae	52	23 58 50,870	3,0780	+ 0,0176	- 0,249	- 0,292	- 0,293

9.

Unter den drei Bestimmungen, die in dieser Abhandlung aus den Königsberger Sonnenbeobachtungen gezogen wurden, ist die des Fehlers der vorausgesetzten geraden Aufsteigung des α Aquilae die wichtigste, indem sie auf die Bewegung aller Himmelskörper und auf die Präcession einen merklichen Einfluss hat. Es würde daher sehr wünschenswerth sein, wenn man dieser Bestimmung, durch Verbindung mit den ähnlichen von MASKELYNE und PIAZZI, noch grössere Sicherheit

geben könnte, als sie für sich schon hat. Dieses ist aber bis jetzt unthunlich, indem die beiden eben erwähnten Bestimmungen vor der Entwicklung der Theorie der wahrscheinlichen Fehler gemacht sind, und daher die Angabe derselben entbehren.

Dass diesen früheren Bestimmungen kleinere wahrscheinliche Fehler zugekommen sein würden als der gegenwärtigen, halte ich für unwahrscheinlich, theils weil sie auf resp. 6 und 5 Nachtgleichen beruhen, während die meine sich auf drei volle Jahrgänge gründet,

theils weil der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen meiner Beobachtungen wohl nicht grösser sein möchte, als der der Maskelyne'schen oder Piazzischen. Zwar sind diese letzteren bis jetzt nicht bestimmt worden, allein eine aus meinen Beobachtungen durch unmittelbare Vergleichung mit der Sonne zur Zeit der Nachtgleichen gefolgte Rectascension hat den wahrscheinlichen Fehler (Art. T)

$$\frac{9^{\circ}.4926}{15} \sqrt{\frac{1}{4} + \cot^2 \omega} = 0;2736$$

und dieser ist kaum grösser als der aus BRADLEY'S Beobachtungen (Fund. Astr. p. 19) bestimmte = 0;2637, welcher die wahrscheinlichen Fehler der Maskelyne'schen und Piazzischen Beobachtungen gewiss nicht übersteigt. Eine neue Berechnung könnte diese näher angeben; wenn aber Jemand sie unternähme, so würde es zu wünschen sein, dass er sich eine genaue Nachricht über die von beiden Beobachtern angewandte Art der Beschirmung der Instrumente vor den Sonnenstrahlen verschaffe. Diese muss nämlich nach meinen darüber angestellten Beobachtungen als sehr wesentlich angesehen werden; ihre Unterlassung kann einen beständigen Fehler von einer halben Zeitsecunde oder vielleicht noch mehr erzeugen.

Wenn man aus dem angeführten Grunde die neue Bestimmung auch nicht mit den beiden ältern verbinden kann, um den wahrscheinlichen Fehler dadurch zu vermindern, so wird es doch interessant sein zu untersuchen, wie alle drei zusammenstimmen.

Nimmt man aus allen Unterschieden des Maskelyne'schen Verzeichnisses für 1805 von dem meinigen

das Mittel, so hat man es = - 0;176, welches als eine Annäherung an den Unterschied der beiderseitigen Bestimmungen des Frühlingsnachtgleichenpunktes angesehen werden kann. Allein MASKELYNE'S Beobachtungen wurden in den Nachtgleichen von 1804, 1805 und 1806 gemacht und mit einer Nutation berechnet, deren von den Oertern der Sterne unabhängiger Theil = - 16;4" sin \odot ist. Die neue Bestimmung der Nutation macht daher eine Verbesserung der Rectascensionen von - 1;005 sin \odot nothwendig, welche für die angeführten Nachtgleichen + 0;062 beträgt, und den Unterschied auf - 0;114 verringert.

PIAZZI bestimmte α Canis min. und α Aquilae durch unmittelbare Vergleichungen mit der Sonne, in den Herbstnachtgleichen von 1803, 1804 und 1805 und den Frühlingsnachtgleichen von 1804 und 1805 beobachtet? Nach der v. Lindenau'schen Bestimmung der Nutation erfordert daher PIAZZI'S Rechnung die Verbesserungen für α Canis minoris + 0;066; für α Aquilae + 0;058, welche, mit den im vorigen Art. angegebenen Unterschieden beider Verzeichnisse, nämlich - 0;060 und - 0;102 verglichen, den verbesserten Unterschied der Piazzischen Bestimmungen von den meinigen = + 0;006 und - 0;044, im Mittel - 0;019 übrig lässt.

Wenn man diese nähere Uebereinstimmung, die die neue Nutation in den drei Verzeichnissen herbeigeführt hat, mit den grossen Unterschieden vergleicht, die mit der älteren gefunden sein würden, so hat man eine neue Bestätigung der v. Lindenau'schen Nutation; die Königsberger Beobachtungen des Polarsterns haben eine andere, noch sicherere gegeben.

87. Prüfung des Reichenbach'schen Meridiankreises.*)

(BOZE'S Jahrbuch für 1824, p. 232.)

Ich hoffe Ihnen eine vollständige Nachricht über die mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise bisher gemachten Beobachtungen mittheilen zu können; allein verschiedene Prüfungen, welche mir nothwendig scheinen, haben noch nicht beendigt werden können, theils wegen des äusserst schlechten Wetters in diesem Jahre, theils wegen des späten Empfanges eines besonderen

mikroskopischen Apparats, welchen Herr Geheimrath PISTOR für mich eben so zweckmässig eingerichtet, als vollkommen ausgeführt hat. Dieser Apparat ist zwar seit einem Monate in meinem Besitze, und ich habe den dadurch beabsichtigten Zweck bereits erreicht, allein es fehlt mir doch noch Einiges, was ich kennen muss, ehe ich behaupten darf, dass meine Declinationen so sicher bestimmt sind, als dieses vortreffliche Instrumente zu gewähren vermag. Ich könnte zwar zahlreiche Beobachtungen anführen, so wie das Instrument sie gegeben hat; ich könnte hinzufügen, dass mehrere noch

*) [145 d. a. Verz. — Den 23. August 1821 eingesandt. — Hr. m. O. II. 159 (O.), 164, 167. Vgl. auch Abh. 62 p. 34 ff. und Königsb. Beob. VI. und VII. Abth.]

nicht angebrachte Verbesserungen sehr gering sein werden; ich könnte dieselben sogar näherungsweise anbringen — allein dennoch würden alle meine Angaben nur vorläufig sein, und diese scheinen mir wenig interessant, da wir bereits mehrere ähnliche, die innere Sicherheit mehr oder weniger entbehrende Angaben besitzen. Es sei mir daher erlaubt, von den Declinationen noch ganz zu schweigen.

Dagegen habe ich eine sehr strenge Prüfung des Instruments in Beziehung auf die Rectascensionen vollendet; ich werde sie in der unter der Presse befindlichen VI. Abtheilung meiner Beobachtungen mittheilen [s. Abb. 62], und es wird daraus hervorgehen, dass aus dem Instrumente und seiner Berichtigungsart kein constanter Fehler entstehen kann. Diesen Theil der Beobachtungen halte ich also für bereits vollendet, bis auf die eigentlichen zufälligen Beobachtungsfehler, welche, vergleichungsweise mit den möglichen beständigen Fehlern, unerheblich sind, und übrigens aus den Beobachtungen selbst deutlich genug hervorgehen. Ich glaube daher Ihnen einige Resultate mittheilen zu dürfen.

Herr POND hat in dem Nautical-Almanac für 1823 einen neuen Catalog der Rectascensionen der Hauptsterne für 1820, auf eigene Sonnenbeobachtungen gegründet, mitgetheilt; reducirt man ihn mit der aus seiner Vergleichung mit dem Verzeichnisse für 1755 folgenden eigenen Bewegung auf 1815, so hat er folgende Unterschiede von dem meinigen, wobei ich bemerke, dass ich α Geminorum um $-0^{\circ}20$ verändert habe, indem Herr POND den folgenden Stern, ich aber die Mitte beider beobachtete, ferner α Scorpii um $+1'$, wegen eines offenbaren Druckfehlers im Nautical-Almanac.

γ Pegasi . . .	+0,021	λ Liberae . . .	+0,032
α Arietis . . .	+0,936	μ „ . . .	+0,055
α Ceti	—0,942	α Coronae . . .	+0,081
α Tauri	+0,131	α Serpentis . . .	+0,074
α Aurigae . . .	+0,137	α Scorpii	—0,105
β Orionis . . .	+0,119	α Herculis . . .	+0,128
β Tauri	+0,161	α Opibuchi . . .	+0,183
α Orionis . . .	+0,213	α Lyrae	+0,137
α Canis maj. . .	+0,113	γ Aquilae	+0,104
α Geminorum . .	+0,296	α „	+0,088
α Canis min. . .	+0,196	β „	+0,062
β Geminorum . .	+0,146	1 α Capricorni . .	+0,014
α Hydrae	+0,257	2 „	—0,042
α Leonis	+0,214	α Cygni	+0,116
β „	+0,158	α Aquarii	+0,028
β Virginis . . .	+0,123	α Piscis austr. . .	—0,142
α „	+0,073	α Pegasi	+0,047
α Bootis	+0,137	α Andromedae . .	+0,090

Das Mittel aus diesen Unterschieden ist $+0^{\circ}093$; um diese Quantität etwa hat also Herr POND die Rectascensionen im Ganzen grösser als ich. Sie werden sich erinnern, dass meine mit den früheren Instrumenten gemachten Beobachtungen mich veranlassten, zu MASKELYNNE'S Bestimmung von α Aquilae $+0^{\circ}241$ zu addiren: Herr POND hat nun noch mehr addirt, und beide Bestimmungen haben noch nicht die Uebereinstimmung, welche bei einem so wichtigen Gegenstande, der Grundlage aller astronomischen Beobachtungen, zu wünschen wäre. Der wahrscheinliche Fehler von Herrn POND'S Bestimmung ist nicht angegeben; der der meinigen ist $0^{\circ}0235$; es ist daher noch zweifelhaft, ob hier ein beständiger oder blos zufälliger Unterschied ist, welcher sich bei fortgesetzten Beobachtungen verlieren würde. Inzwischen war ich begierig zu sehen, was der Reichensbach'sche Meridiankreis hierüber geben würde, und berechnete daher 65 Sonnenbeobachtungen, vom 27. März bis 16. Sept. 1820. Diesen Beobachtungen zufolge wäre die Verbesserung meines früheren Catalogs um $+0^{\circ}006$, also absolut unmerklich; wodurch ich aber nicht berechtigt zu sein glaube, über den Unterschied zwischen POND und mir abzusprechen, indem die Beobachtungen eines Jahres, wenn sie auch von allen beständigen Fehlern des Instruments frei sind, wie ich von dem meinigen zu glauben Ursache habe, doch nicht hinreichen, um einen so feinen und schwierigen Gegenstand zu entscheiden. Nach meinen Erfahrungen ist eine lange Fortsetzung der Beobachtungen notwendig, wenn man möglichst sichere Resultate haben will; ich habe zuweilen gefunden, dass gut übereinstimmende Reihen von Beobachtungen eines Gegenstandes weiter von anderen Reihen abweichen, als die aus ihnen hervorgehenden oder sonst bekannten wahrscheinlichen Fehler vermuthen lassen würden. Aus der Abwechslung der täglichen und jährlichen Wärme, der Helligkeit und Dunkelheit u. s. w., aus den bei den Beobachtungen anzubringenden Reductionen können kleine Fehler entstehen, welche wir vielleicht nie in Rechnung zu bringen lernen werden, wohl aber, durch eine Fortsetzung durch mehrere Jahreszeiten hindurch, unschädlicher machen können.

Zieht man den mittleren Unterschied beider Verzeichnisse von den einzelnen Sternen ab, so zeigt sich das Verhalten der einzelnen POND'schen Bestimmungen gegen die meinigen deutlicher; da es zu verschiedenen Bemerkungen Anlass gibt, so fühle ich diese Vergleichung hier an:

γ Pegasi	- 0,072	1 α Librae	- 0,061
α Arietis	- 0,057	2 α "	- 0,038
α Ceti	- 0,135	α Coronae	- 0,012
α Tauri	+ 0,038	α Serpentis	- 0,019
α Aurigae	+ 0,043	α Scorpii	- 0,198
β Orionis	+ 0,026	α Herculis	+ 0,035
β Tauri	+ 0,068	α Ophiuchi	+ 0,090
α Orionis	+ 0,120	α Lyrae	+ 0,044
α Canis maj.	+ 0,020	γ Aquilae	+ 0,011
α Geminorum	+ 0,113	α "	- 0,005
α Canis min.	+ 0,103	β "	- 0,031
β Geminorum	+ 0,053	1 α Capricorni	- 0,079
α Hydrae	+ 0,164	2 α "	- 0,135
α Leonis	+ 0,121	α Cygni	+ 0,023
α "	+ 0,065	α Aquarii	- 0,065
β Virginis	+ 0,030	α Piscis austr.	- 0,235
α "	- 0,020	α Pegasi	- 0,016
α Bootis	+ 0,044	α Andromedae	- 0,063

Es wird zwar äusserst schwer sein, eine Uebereinstimmung in den einzelnen Hunderttheilen der Zeitsecunde herbeizuführen, und bei der Hälfte der Sterne sind die Unterschiede kleiner als 0,05; allein dass diese Unterschiede sämmtlich aus zufälligen Beobachtungsfehlern entstanden sein sollten, ist höchst unwahrscheinlich. Auch zeigt sich in ihrem Gange eine Regelmässigkeit, denn in der Umgebung des α Canis min. herrscht das Positive deutlich vor, und bei den südlichen Sternen das Negative.

Der erste Unterschied würde sich erklären, wenn in meinem Cataloge α Canis min., welcher Stern ein Vergleichungspunkt für andere ist, unrichtig und zwar ein Zehntel-Secunde zu klein, bestimmt wäre. Dieses ist zwar unwahrscheinlich, indem dieser Bestimmung 75 Beobachtungen zum Grunde liegen; allein es lässt sich auch nicht leugnen, dass die 12 Stunden von einander entfernten Sterne gerade die grössten Schwierigkeiten darbieten, theils wegen des Ganges der Uhren, theils wegen der Einwirkung der Tageswärme auf die Aufstellung der Instrumente. Ich habe zwar in meiner Abhandlung über den Fundamental-Catalog [Abb. 86] Data angeführt, welche die Richtigkeit der Bestimmung bestätigen, allein dennoch war mir die Gelegenheit zu einer neuen Prüfung, welche die vorzügliche Güte der neuen Aufstellung und die bewunderungswürdige Regelmässigkeit der Repsold'schen Uhr mir darboten, sehr willkommen. Ich habe daher 25 bisher gelungene Beobachtungen reducirt, und für 1820 gefunden:

1820 März 22. 7 ^h 29 ^m 52 ^s ,70	1820 Aug. 8. 7 ^h 20 ^m 32 ^s ,44
Juni 23. 52,37	29. 52,62
Juli 28. 52,37	Sept. 8. 52,47
30. 52,44	9. 52,40
Aug. 5. 52,52	11. 52,44

1820 Sept. 13. 7 ^h 29 ^m 52 ^s ,37	1821 März 23. 7 ^h 29 ^m 52 ^s ,45
15. 52,32	24. 52,64
Dec. 30. 52,58	25. 52,63
1821 Febr. 8. 52,49	26. 52,50
9. 52,69	29. 52,56
11. 52,54	30. 52,59
13. 52,57	31. 52,33
27. 52,32	

Im Mittel 7^h 29^m 52^s,494 oder nur 0,003 grösser als meine Bestimmung für 1815, so dass die Richtigkeit der früheren Angabe hierdurch bestätigt wird. Auch glaube ich, dass die von POND angewandte Methode vor einem beständigen Fehler bei gegenüberstehenden Sterngruppen nicht ganz schützt; nach dieser Methode wird nämlich ein Stern mit dem Mittel aus allen an demselben Tage beobachteten, nach dem Maske-lyne'schen Cataloge berechneten Uhrständen reducirt, und der dadurch entstandene neue Catalog in Beziehung auf die Nachtgleichen orientirt. Diese Methode würde streng richtig sein, wenn an jedem Tage alle 36 Sterne beobachtet würden; allein da weit mehr Tage vorkommen, wo die Sterne in einer Gegend allein, als wo sie mit den gegenüberstehenden zugleich beobachtet werden, so ist es klar, dass ein in dieser Gegend stattfindender Fehler nur zum Theil verschwinden kann; desto weniger, je häufiger die Sterne in der als fehlerhaft angenommenen Gegend vorkommen, weil dadurch der Fehler ein grösseres Uebergewicht erhält. Da POND's Angabe auf 151 Beobachtungen mit einem ausgezeichneten Instrumente, von einem eben so ausgezeichneten Astronomen gemacht, beruht, und auch meine Bestimmung unverfälschte Bestätigungen erfahren hat: so glaube ich in der versuchten Erklärung fast das einzige Vereinigungsmittel zu sehen.

Der andere Unterschied beider Verzeichnisse, dass nämlich die südlichen Sterne bei POND merklich kleinere Rectascensionen haben als bei mir, scheint von einem constanten Fehler in der Aufstellung eines der beiden Mittagsfernrohre herzuführen. Dieser Unterschied spricht sich in der Vergleichung sehr bestimmt aus und steigt bei α Piscis austr. bis auf 0^s235; er könnte in einer Biegung oder in einer unrichtigen Bestimmung der Collimation (vielleicht durch jene verlasst) seinen Grund haben, indem hierdurch eine fehlerhafte Reduction auf den Meridian entstehen muss. Nimmt man an, dass das Mittagsfernrohr einen grössten Kreis beschreibt, so hat ein Fehler der Collimation = $\mathcal{L}c$ auf die Reduction den Einfluss $\mathcal{L}c \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\delta)$, vorausgesetzt, dass man die Verbesserungen durch den Polarstern bestimmt; dieser Fehler der Collimation

müsste also so gross sein, dass er den Beobachtern wohl nicht hätte entgehen können, weshalb es nicht unwahrscheinlich ist, dass noch andere Ursachen eine Abweichung vom Meridian verursacht haben.

Die strenge, oben erwähnte Prüfung des Reichensbach'schen Meridiankreises war vorzüglich auf diesen Gegenstand gerichtet, und ich glaube darthun zu können, dass die von mir befolgte Methode keinen merklichen Zweifel in der Bestimmung der Collimation übrig lassen kann; ich habe daher meine früheren Angaben auch in dieser Hinsicht durch neue Beobachtungen prüfen können, und führe das, was ich für α Scorpii und α Piscis austr. erhalten habe, hier an, nämlich für 1820)

α Scorpii 16^h 18^m 23.249 25 Beob.

α Piscis austr. 22 47 41,197 21 „

von meiner früheren Bestimmung — 0,088 und + 0,077, von der Pond'schen + 0,112 und + 0,330 verschieden so dass auch hier die neuern Beobachtungen den Königsberger Catalog stimmen.

In einigen Jahren hoffe ich, einen ganz neuen Fundamental-Catalog geben zu können [s. Abb. 89]; die gegenwärtige vorläufige Untersuchung einiger Sterne habe ich nur vorgenommen, um eine Andeutung darüber zu erhalten, ob bei meinem früheren Cataloge, aller Vorsicht ungeachtet, sich constante Fehler eingeschlichen haben; ich glaube dieses gegenwärtig noch weniger fürchten zu dürfen als früher.

88. Ueber die Abweichungen der Fixsterne.*)

(Bode's Jahrbuch für 1825, p. 207.)

Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts wurde durch BRADLEY eine Vollkommenheit der astronomischen Beobachtungen herbeigeführt, welche nach dem Tode dieses grossen Astronomen nicht vermehrt, sondern nach und nach vermindert zu sein scheint. Auf der Greenwicher Sternwarte wurden zwar die Beobachtungen mit denselben Instrumenten fortgesetzt, aber diese Instrumente hatten durch den häufigen Gebrauch an Güte verloren, und gaben bei MASKELYNE'S Tode bereits sehr unrichtige Resultate; andere Sternwarten aber besaßen entweder nicht genügende Hilfsmittel, oder sie vertrauten zu fest auf den Greenwicher Catalog, welcher, bis zur Erscheinung von PIAZZI'S grossem Werke, die einzige Quelle war, aus welcher die beobachtenden Astronomen schöpften. Durch PIAZZI aber wurden uns Declinationen geliefert, welche die früheren verdächtig machten; in der That erkannte MASKELYNE den Fehler seines Mauerquadranten, welcher, zum grossen Nachtheile der Astronomie, viel zu lange ohne gründliche Prüfung geblieben war. Um diese Zeit fingen die Beobachtungen mit Instrumenten, von welchen man grosse Genauigkeit erwarten durfte, an, häufiger zu werden, und in der That boten die

von PIAZZI, ORIANI, POND und BRINKLEY bestimmten Abweichungen der Sterne eine Uebereinstimmung dar, welche nicht grösser erwartet werden kann; allein es zeigte sich auch, dass noch Fehler vorhanden sein können, wo man dieselben nicht zu suchen gewohnt war: denn nicht alle Beobachtungsreihen stimmten überein, und es gelang dem trefflichen BOHNENBERGER, eine Fehlerursache bei den Wiederholungskreisen wirklich nachzuweisen (vgl. p. 8). Den ersten Argwohn solcher Fehler erzeugten die Unterschiede der in beiden Solstitien beobachteten Schiefen der Ekliptik: die kleineren Wiederholungskreise gaben die Winterschiefe 8 bis 16", die grösseren und die Kreise von PIAZZI und POND 4 bis 8" kleiner an, als die Sommerschiefe, und die Beobachtungen BRADLEY'S, GROOMBRIDGE'S und meine eigenen gaben beide gleich. Die Declinationen der Sterne, welche ich mit dem Cary'schen Kreise beobachtete, waren sämtlich südlicher, als die in den oben erwähnten übereinstimmenden Verzeichnissen enthaltenen; allein hier standen die meinigen ganz allein, denn BRADLEY'S Beobachtungen waren zu weit entfernt, um sie vergleichen zu können, und GROOMBRIDGE hat, so viel ich weiss, seine Declinationen der Fundamentalsterne nicht angegeben.

BRADLEY hat in seiner berühmten Abhandlung über die Nutation geäussert, dass es sehr schwierig ist, Beobachtungen zu machen, welche in jeder Beziehung zuverlässig sind. Die Richtigkeit dieses Ausspruchs

*) [157 d. a. Verz. — Br. m. O. I, 382; II, 23 (O.), 27, 52, 53 (O.), 59 ff., 68 (O., GAISE), 78, 159 (O.), 179, 183 ff., 193, 199 ff., 226, 253 (O.), 272. — Vgl. Königsb. Beob. VII. Abth. und Tabul. Regiment. Tab. X; ferner 159, 160, 167, 198 und 204 d. a. Verz.]

habe ich während meiner eigenen Praxis zu erkennen häufige Gelegenheit gehabt, und würde daher auf die Abweichung meiner eigenen Beobachtungen kein sonderliches Gewicht gelegt haben, wenn ich nicht geglaubt hätte, zu der Sicherheit derselben, durch die vorgenommenen Prüfungen meines Kreises, etwas beigetragen zu haben; mein Zutrauen wurde durch die Einfachheit des Instruments vermehrt, welche dem Beobachter erlaubt, jedes einzelnen Schrittes sich vollkommen bewusst zu sein, welche ihm auch, durch die Vergleichung der, in beiden Lagen des Kreises gemachten Beobachtungen, eine Prüfung gewährt, deren er beim Gebrauche des Wiederholungskreises gänzlich entbehrt. — Selbst nachdem der Zweifel gegen die Richtigkeit meiner Bestimmungen sich gezeigt hatte, konnte ich bei den angestrengtesten Untersuchungen des Instruments und der Beobachtungsmethode nichts entdecken, was einen beständigen Fehler von mehr als einer Secunde hätte erzeugen können, und selbst diese Grenze würde ich für viel zu weit gehalten haben, wenn ich meinen früheren Vorsatz, die speciellen Theilungsfehler für jeden der Fundamentalsterne nach meiner Wiederholungsmethode zu bestimmen, ausgeführt hätte, woran aber andere Geschäfte und die Aussicht auf den baldigen Empfang des Reichenbach'schen Meridiankreises hinderten. Von diesem war nämlich eine grosse Genauigkeit im Einzelnen zu erwarten, weshalb ich glaubte, mich bei dem Cary'schen Kreise auf diejenigen Maassregeln beschränken zu dürfen, welche auf die Erlangung der Sicherheit im Ganzen abzielten. — Ich glaubte daher, dass die Zeit das Räthsel lösen, und dadurch zur Vervollkommnung unserer Beobachtungskunst einen Beitrag liefern würde.

Diese Hoffnung erhielt noch mehr Grund durch die Meridiankreise, durch deren Verfertigung REICHENBACH seine unsterbliche Verdienste gekrönt hat. So gross aber die Vollendung dieser Instrumente ist, so glaube ich doch nicht, dass der Astronom die Mühe der eigenen Untersuchung derselben sparen darf, vorausgesetzt, dass er die Mittel besitzt, diese Untersuchung mit einer Genauigkeit zu machen, welche der grossen Vollendung des Instruments angemessen ist. Meiner Ansicht nach muss aus allen Beobachtungen das Instrument gewissermassen eliminiert werden, und nur wenn dieses nachgewiesen werden kann, können die Resultate als selbstständig betrachtet werden. Diesen Gesichtspunkt habe ich stets und auch hier verfolgt; ob ich dem Ziele dadurch näher gekommen bin, wird die Folge lehren, aber ich darf versichern, dass ich keinen Zweifel, dessen Möglichkeit ich einsehen konnte, ungeprüft ge-

lassen habe. Aus diesen Prüfungen ist nun hervorgegangen, dass die Angaben des Kreises nur zweier Verbesserungen bedürfen: wegen der Theilungsfehler und wegen der Biegung des Fernrohrs. Allein wenn man hoffen darf, dem Meridiankreise noch sicherere Bestimmungen abzugewinnen, als BRADLEY'S Mauerquadranten, so wird es nöthig, auch die auf diesen gegründete Bestimmung der Strahlenbrechung durch eine neue zu ersetzen, weshalb ich auch diese gesucht und bei meinen folgenden Resultaten angewandt habe.

In der Einleitung der VII. Abtheilung meiner Beobachtungen, welche jetzt unter der Presse ist, habe ich mein ganzes Verfahren dargelegt; hier führe ich nur soviel davon an, als mir unumgänglich nothwendig zu sein scheint. Die Theilungsfehler habe ich durch einen sehr schönen Apparat von vier Mikroskopen bestimmt, welchen Herr Geheimrath PISTOR ausgeführt hat; es hat sich dadurch ergeben, dass diese Fehler sehr klein, aber dennoch nicht ganz unregelmässig sind. Die Unregelmässigkeiten betragen für jeden Strich wahrscheinlich nur $\pm 0,3251$, woraus folgt, dass wahrscheinlich unter etwa 26 Strichen nur einer um 1" oder mehr, unter den 7200 Strichen des Kreises aber nur zwei zwischen 1,75 und 2" abweichen. Durch diese kleinen Unregelmässigkeiten hindurch erkennt man regelmässige Theilungsfehler, deren Maximum nie $1\frac{1}{4}$ " erreicht, welche sich aber, durch die Anwendung der vier Nonien, zum Theil noch gegenseitig vernichten, so dass die daraus hervorgehende Verbesserung nicht 0,33 übersteigt. Diese fast ungläubliche Vollkommenheit einer Theilung von 18 Zoll Halbmesser muss die Bewunderung aller Kennr erregen. — Die Biegung des Fernrohrs finde ich im Horizonte = $1,11$, allein sie ist, nach meinen Untersuchungen, nicht gerade im Zenith = 0. — Die Strahlenbrechung habe ich durch sehr zahlreiche Beobachtungen von 59 Circumpolarsternen bestimmt, und dieselbe sehr wenig von der in den Fundamentis Astronomiae enthaltenen Tafel verschieden gefunden; nämlich für die Temperatur von 48,75 F. im Verhältnisse 1 : 1,003282 grösser, welcher Unterschied sogar fast ganz verschwunden sein würde, wenn ich die an BRADLEY'S Thermometer angebrachte Verbesserung von $-1,925$ F. weggelassen hätte, so wie es die, von Herrn Professor TRALLES mir mitgetheilte Bemerkung, dass die Thermometer im schmelzenden Schnee, wenn derselbe bereits mit Wasser vermischt ist, den Gefrierpunkt stets zu hoch angeben, zu erfordern scheint. — Aber auch die Einwirkung des Thermometerstandes auf die Strahlenbrechung habe ich aus meinen Beobachtungen untersucht und dieselbe etwa ein 35stel kleiner

gefunden, als sie nach dem Verhältnisse 1 : 1,375 sein würde; wegen der Gründe, weshalb sie kleiner zu erwarten war, muss ich auf die VII. Abtheilung der Beobachtungen verweisen.

Der Erfolg von diesen Untersuchungen ist gewesen, dass die Declinationen der Sterne, vom Pol bis zu α Lyræ, man mag sie aus den Beobachtungen in der östlichen oder westlichen Lage des Kreises, in der oberen oder unteren Culmination ableiten, stets so nahe übereinstimmen, als die kleinen zufälligen Beobachtungsfehler erwarten lassen. Dieselbe Uebereinstimmung in

beiden Lagen des Instruments bewährt sich auch bei den südlich vom Scheitelpunkte culminirenden Fundamentsternen.

Ich gebe hier zwei Verzeichnisse der Declinationen dieser Sterne; das erste für 1820 ist aus den neuen Beobachtungen bis zum Ende von 1821 abgeleitet; das andere für 1815 haben die Herren ROSENBERGER und SCHERCKE aus meinen sämmtlichen Beobachtungen mit dem Cary'schen Kreise sehr genau berechnet, unter Anwendung der neuen Bestimmung der Refraction.

	Abweichung 1820.	Wahrsch. Fehler.	Abweichung 1815.	Wahrsch. Fehler.	Jährl. Veränd. 1820.
α Aurigæ . . .	+ 45° 48' 9",12	0,18	+ 45° 47' 44",72	0,57	+ 4,778
α Cygni . . .	+ 44 38 28,47	0,18	+ 44 37 26,21	0,58	+ 12,563
α Lyræ . . .	+ 38 37 17,77	0,24	+ 38 37 4,01	0,75	+ 2,962
α Geminorum . .	+ 32 16 21,05	0,23	+ 32 16 54,66	0,75	— 7,190
β " . . .	+ 28 27 5,54	0,22	+ 28 27 44,14	0,75	— 8,987
β Tauri . . .	+ 28 26 40,40	0,23	+ 28 26 20,09	0,76	+ 3,712
α Andromedæ . .	+ 28 5 46,59	0,22	+ 28 4 3,28	0,76	+ 19,906
α Coronæ . . .	+ 27 19 34,44	0,22	+ 27 20 34,61	0,76	— 12,483
α Arietis . . .	+ 22 36 22,32	0,23	+ 22 34 56,11	0,80	+ 17,350
α Bootis . . .	+ 20 7 25,43	0,21	+ 20 9 0,75	0,75	— 19,009
α Tauri . . .	+ 16 8 17,10	0,22	+ 16 7 37,29	0,77	+ 7,855
β Leonis . . .	+ 15 34 40,04	0,24	+ 15 36 20,92	0,79	— 20,083
α Herculis . . .	+ 14 36 10,45	0,24	+ 14 36 32,52	0,76	— 4,614
α Pegasi . . .	+ 14 14 19,05	0,24	+ 14 12 41,94	0,77	+ 19,258
γ " . . .	+ 14 10 56,22	0,23	+ 14 9 13,02	0,75	+ 20,028
α Leonis . . .	+ 12 50 33,58	0,22	+ 12 51 59,71	0,75	— 17,310
α Ophiuchi . . .	+ 12 41 55,66	0,21	+ 12 42 10,37	0,77	— 3,125
γ Aquilæ . . .	+ 10 10 53,97	0,23	+ 10 10 12,28	0,76	+ 8,286
α " . . .	+ 8 24 0,69	0,21	+ 8 23 14,89	0,74	+ 9,002
α Orionis . . .	+ 7 21 50,69	0,22	+ 7 21 45,21	0,76	+ 1,267
α Serpentis . . .	+ 6 59 54,84	0,23	+ 7 0 53,37	0,77	— 11,791
β Aquilæ . . .	+ 5 57 50,84	0,23	+ 5 57 9,29	0,75	+ 8,488
α Canis min. . .	+ 5 40 40,32	0,31	+ 5 41 23,13	0,75	— 8,737
α Ceti . . .	+ 3 22 37,67	0,24	+ 3 21 28,46	0,89	+ 14,491
β Virginis . . .	+ 2 46 42,81	0,29	+ 2 48 23,90	0,77	— 20,289
α Aquarii . . .	— 1 11 25,48	0,23	— 1 12 48,98	0,89	+ 17,195
α Hydrae . . .	— 7 53 1,68	0,23	— 7 51 44,39	0,83	— 15,273
β Orionis . . .	— 8 25 4,22	0,24	— 8 25 27,36	0,80	+ 4,661
α Virginis . . .	— 10 13 7,69	0,22	— 10 11 33,88	0,73	— 19,027
1 α Capricorni . .	— 13 3 25,59	0,35	— 13 4 20,91	0,78	+ 10,581
2 α " . . .	— 13 5 43,49	0,35	— 13 6 40,64	0,89	+ 10,609
1 α Librae . . .	— 15 14 33,27	0,25	— 15 13 14,64	0,84	— 15,405
2 α " . . .	— 15 17 15,05	0,25	— 15 15 58,17	0,82	— 15,374
α Canis maj. . .	— 16 28 37,15	0,23	— 16 28 14,68	0,73	— 4,483
α Scorpii . . .	— 26 1 23,00	0,26	— 26 0 39,17	0,85	— 8,649
α Piscis austr. . .	— 30 34 28,68	0,37	— 30 36 2,81	0,91	+ 18,836

Um zu zeigen, wie andere Verzeichnisse sich zu dem meinigen für 1820 verhalten, theile ich hier eine Vergleichung derselben mit; von den beiden Pond'schen

Verzeichnissen ist das erste der bekannte Standard-Catalogue und das andere das im Naut. Alman. 1821 sich findende.

	BESSEL	PIAZZI	ORIANI	BRINKLEY	POND	
	1815.	1800.	1811.	1813.	1813.	1821.
α Aurigae . . .	-1'98	-0'81	—	+1'67	+1'88	-0'12
α Cygni . . .	+0'53	+2'14	+1'02	+1'08	+2'42	+1'53
α Lyrae . . .	+1'01	+1'69	+1'86	+2'05	+2'89	+2'23
α Geminorum . . .	-2'27	+1'30	—	+1'31	+2'05	-0'06
β " . . .	-1'77	+0'60	—	+1'92	+1'67	-0'64
β Tauri . . .	-1'68	+0'42	+1'69	+1'44	+2'02	+0'60
α Andromedae . . .	-3'78	+0'52	—	+2'43	+3'15	+0'41
α Coronae . . .	-2'28	+2'31	+2'10	+2'60	+2'71	+2'06
α Arietis . . .	+0'57	+1'67	—	+2'43	+2'69	+0'68
α Bootis . . .	+0'25	+2'26	+1'35	+2'07	+2'45	+1'67
α Tauri . . .	-0'54	+2'86	+2'79	+1'96	+2'54	-0'16
β Leonis . . .	+0'47	+3'07	—	+2'95	+2'09	+1'95
α Herculis . . .	-1'05	+4'20	+2'25	+2'64	+3'12	+2'55
α Pegasi . . .	-0'83	+2'28	+2'51	+2'23	+4'13	+1'95
γ " . . .	-3'06	+0'27	—	+2'80	+2'96	+2'78
α Leonis . . .	-0'39	+2'69	+2'60	+2'25	+2'10	+2'42
α Ophiuchi . . .	-0'97	+4'04	+3'47	+1'88	+3'27	+2'24
γ Aquilae . . .	-0'31	+2'40	—	+2'60	+3'24	+4'03
α " . . .	-0'84	+2'78	+2'51	+2'38	+2'45	+2'31
α Orionis . . .	+0'91	+0'60	+2'76	+2'36	+3'60	+1'31
α Serpentis . . .	-0'47	+2'24	+2'12	+2'73	+3'24	+2'16
β Aquilae . . .	+0'84	+2'38	—	+3'27	+4'39	+5'16
α Canis minoris . . .	-0'82	+4'28	+3'04	+3'29	+4'22	+0'68
α Ceti . . .	-1'72	+1'69	—	+1'61	+3'15	+4'33
β Virginis . . .	-1'05	+1'48	—	—	—	+2'19
α Aquarii . . .	+2'45	+2'23	—	+4'04	+4'19	+4'48
α Hydrae . . .	+0'96	+2'27	—	+3'85	+3'64	+4'68
β Orionis . . .	+0'22	+1'86	+2'78	+2'68	+3'15	+4'22
α Virginis . . .	-1'34	+2'84	+3'00	+3'13	+3'16	+4'69
1 α Capricorni . . .	-2'47	+4'89	—	+3'47	+4'16	+4'89
2 α " . . .	-4'16	+4'65	+3'68	+5'62	+5'35	+6'49
1 α Librae . . .	+1'57	+2'44	—	—	+6'66	+7'27
2 α " . . .	-0'03	+2'24	—	+4'76	+4'65	+5'05
α Canis majoris . . .	+0'10	+2'05	+5'36	+1'69	+5'16	+1'10
α Scorpii . . .	+0'52	+3'05	+2'65	+5'27	+5'74	+4'00
α Piscis austr. . .	+0'03	+3'80	+3'71	—	—	+2'68

Diese Vergleichung zeigt, dass mein neues Verzeichniss sich etwa eben so gegen die übrigen verglichenen verhält, als das ältere; dieses letztere gibt im Ganzen die Sterne etwas südlicher an als jenes, aber die Unterschiede sind nur selten viel grösser, als die wahrscheinlichen Fehler. Die Verbesserungen, welche ich wegen der Biegung und Strahlenbrechung ange-

bracht habe, haben, statt meine Declinationen für 1820 den in Palermo, Mailand, Dublin und Greenwich beobachteten zu nähern, sie nur noch weiter entfernt, so dass durch dieses Verzeichniss also kein Schritt zur Vereinigung geschehen ist. Ob von anderen Seiten diese Vereinigung erfolgen, oder die Verschiedenheit ferner bestehen wird, ist nun zu erwarten.

89. Neue Untersuchungen über die geraden Aufsteigungen der 36 Fundamentalsterne.*

(Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1825. Math. Classe p. 23.)

1.

Bereits im Jahre 1819 legte ich der Akademie eine Bestimmung der Fundamentalsterne vor, welche

auf fünfjährigen, mit den ältern Instrumenten der Sternwarte gemachten Beobachtungen beruhte.***) Jetzt theile 1825. — S. auch Astr. Nachr. 4, p. 27; Bonn's Jahrb. für 1828, p. 182; Königl. Beob. X. Abth. (202, 203, 202 d. a. Verz.)

*) [200 d. a. Verz. — Der Akademie vorgelegt am 24. März

**) [Vgl. Abh. 86.]

ieh ein neues Verzeichniss dieser Art mit, berechnet aus gleichfalls fast fünfjährigen Beobachtungen mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise, welche vom März 1820 bis gegen das Ende des October 1824 gehen. — Herr ROSENBERGER, dessen Hilfe bei den Geschäften der Sternwarte ich mich erfreue, hat die Berechnung dieses Verzeichnisses geführt und auch dabei die Genauigkeit und Sorgfalt angewandt, welche seinen Arbeiten eigen sind.

Die Beobachtungsart selbst, so wie die an den unmittelbaren Angaben des Instruments angebrachten Verbesserungen, und die zur Reduction erforderlichen Elemente, darf ich hier mit Stillschweigen übergehen, indem die Einleitungen von VI. und VII. Abtheilung meiner Beobachtungen darüber alle nothwendigen Nachweisungen geben.*) Die Berechnungsart war im Ganzen dieselbe, welcher ich bei dem früheren Cataloge folgte: Herr ROSENBERGER bestimmte zuerst die Rectascensionen der Sterne, welche unter der Annahme von α Aquilae = $19^{\text{h}} 42^{\text{m}} 14^{\text{s}}.692$ für 1825 stattfinden; dann reducirte er mit dem daraus entstandenen Cataloge die Rectascensionen der Sonne, und bestimmte durch Vergleichung der daraus folgenden Declinationen mit den beobachteten die Lage des Ganzen gegen die Nachtgleichenpunkte. Von den einzelnen Elementen dieser Rechnung, sowie von den Aenderungen, durch welche das frühere Verfahren den Eigenthümlichkeiten der neuen Beobachtungsreihe angemessen gemacht wurde, werde ich jetzt mittheilen.

2.

Bei der geringen Grösse der zufälligen Fehler einer Beobachtung mit dem Reichenbach'schen Kreise hängt die Genauigkeit eines Resultats weniger von der grossen Zahl der Beobachtungen, als von der sorgfältigen Vermeidung aller fremden Fehlerursachen ab; es wurden daher nicht alle Beobachtungen ohne Unterschied zur Erfindung der relativen Rectascensionen angewandt, sondern diejenigen ausgeschlossen, für welche der Gang der Uhr, durch vorübergehende und folgende Beobachtungen, nicht so sicher bestimmt werden konnte, dass die aus dieser Ursache hervorgehende Unsicherheit einigermaßen erheblich ersähen. Durch die Befolgung dieser Regel wurde die Anzahl der zum Resultate gezogenen Beobachtungen, vorzüglich bei unbeständigem Wetter, welches die Prüfung des Uhrgangs durch ununterbrochene Beobachtungen nicht gestattete, vermin-

*) [Vgl. Abh. 62 und 88.]

dert, allein die Vermehrung der Sicherheit derselben scheint einen vollständigen Ersatz zu gewähren.

Weil ich, wenn das Wetter oder andere Beobachtungen nicht hinderten, die Culminationen der drei Sterne im Adler sowohl, als die des Procyon und der beiden hellen in den Zwillingen, ungen versämnte und weil bei Sternen, welche nur wenige Minuten Rectascensionsunterschied haben, selten eine Störung durch den bewölkten Himmel vorkömmt, welche nicht gemeinschaftlich wäre, so finden sich in den Tagebüchern der Sternwarte häufige Beobachtungen, wodurch die Unterschiede zwischen den drei ersten Sternen sowohl, als zwischen den drei letzten, bestimmt werden können. Diesen Umstand benutzte Herr ROSENBERGER, die Culminationszeiten von α Aquilae und α Canis minoris noch sicherer zu erhalten, als sie unmittelbar beobachtet wurden, dadurch, dass er nicht die Beobachtungen dieser Sterne allein nahm, sondern die von γ und β Aquilae auf α Aquilae, und die von β Geminorum auf α Canis min. reducirte; mit α Geminorum verfuhr er nicht ähnlich, weil dieser ein Doppelstern ist, dessen Beobachtungen vielleicht etwas weniger sicher sein mögen, als die der andern Sterne. Da die Lichtstärke des Instruments erlaubt, die drei Sterne im Adler zu allen Zeiten des Jahres im Meridiane zu beobachten und da der Besitz und die Anwendung der Mittel, die Abweichung des Instruments vom Meridiane immer mit der grössten Genauigkeit berechnen zu können, dem grossen Declinationsunterschiede von α Canis min. und β Geminorum keinen erheblich nachtheiligen Einfluss auf die Uebereinstimmung der Beobachtungen gelassen hat, so ist auch die grössere Genauigkeit, womit man die Culminationszeiten von α Aquilae und α Canis min. erhalten konnte, ein Grund mehr, diese Sterne zu Vergleichungspunkten für die übrigen zu wählen.

3.

Herr ROSENBERGER fing also damit an, γ und β Aquilae und β Geminorum in Beziehung auf α Aquilae und α Canis min. zu bestimmen, und durch die Anwendung dieser Bestimmungen die Culminationszeiten der beiden letzten Sterne genauer zu suchen. Dann erhielt er, aus 50 Vergleichen mit α Aquilae, die gerade Aufsteigung α Canis min. = $7^{\text{h}} 30^{\text{m}} 8^{\text{s}}.227$. Die übrigen Sterne verglich er, wenn sowohl α Aquilae als α Canis min. an einem Tage vorkamen, mit denjenigen von beiden, welcher der nächste ist; wenn aber nur einer derselben vorkam, mit diesem. Dadurch entstand eine doppelte Bestimmung der meisten Sterne, welche ich hier mittheile.

	α Aquilae.	Be- obb.	α Canis minoris.	Be- obb.	Mittel.	Be- obb.
γ Pegasi	0 ^h 4 ^m 14 ^s .184	31	14 ^h 03 ^m 27 ^s	27	0 ^h 4 ^m 14 ^s .113	58
α Arietis	1 57 19,727	13	19,642	22	1 57 19,674	35
α Ceti	2 53 8,522	21	8,427	28	2 53 8,468	49
α Tauri	4 25 53,364	23	53,296	43	4 25 53,320	66
α Aurigae	5 3 46,614	11	46,555	66	5 3 46,577	107
β Orionis	5 6 7,891	10	7,885	42	5 6 7,886	52
β Tauri	5 15 14,208	17	14,175	49	5 15 14,183	66
α Orionis	5 15 42,005	13	42,021	58	5 15 42,018	71
α Canis maj. . . .	6 37 26,038	4	26,107	59	6 37 26,103	63
α Gemm. (med.) . .	7 23 —	—	24,902	118	7 23 24,902	118
α Canis min. . . .	7 30 8,227	50	—	—	7 30 8,227	50
β Gemmiorum . . .	7 34 —	—	35,699	172	7 34 35,699	172
α Hydrae	9 18 59,174	13	59,217	57	9 18 59,209	70
α Leonis	9 59 2,556	13	2,618	58	9 59 2,607	71
β „	11 40 7,590	16	7,652	34	11 40 7,632	50
β Virginis	11 41 34,770	9	34,908	23	11 41 34,798	32
α „	13 15 59,152	32	59,183	64	13 15 59,173	96
α Bootis	14 7 41,091	41	40,938	51	14 7 40,966	92
1 α Librae	14 41 —	—	1,422	17	14 41 1,422	17
2 α „	14 41 12,747	13	12,848	11	14 41 12,793	24
α Coronae	15 27 16,880	42	16,875	35	15 27 16,878	77
α Serpentis	15 35 39,293	50	39,311	27	15 35 39,299	77
α Scorpii	16 18 41,532	28	41,641	16	16 18 41,572	44
α Herculis	17 6 40,329	34	40,363	18	17 6 40,341	52
α Ophiuchi	17 26 48,874	34	48,872	15	17 26 48,873	49
α Lyrae	18 31 0,891	31	0,836	3	18 31 0,886	34
γ Aquilae	19 37 56,436	131	—	—	19 37 56,436	131
α „	19 42 14,692	—	—	—	19 42 14,692	—
β „	19 46 43,079	132	—	—	19 46 43,079	132
1 α Capricorn. . . .	20 7 56,550	29	—	—	20 7 56,550	29
2 α „	20 8 20,382	23	—	—	20 8 20,382	23
α Cygni	20 35 28,144	52	28,142	31	20 35 28,143	83
α Aquarii	21 56 47,661	36	47,567	12	21 56 47,635	48
α Piscis austr. . . .	22 47 57,858	29	57,926	4	22 47 57,866	33
α Pegasi	22 56 3,064	28	2,988	26	22 56 3,028	54
α Andromedae . . .	23 59 21,639	34	21,514	42	23 59 21,570	76

4.

Diese Zusammenstellung zeigt, dass auch hier, so wie bei meiner früheren Untersuchung, noch kein Grund vorhanden ist, die Abwesenheit aller, den Beobachtungen selbst fremden Fehlerursachen anzunehmen. Der wahrscheinliche Fehler eines Rectascensionsunterschieds zweier Sterne, ohne Rücksicht auf die Grösse desselben genommen, findet sich = 0^o0806, welches für jede einzelne Beobachtung 0^o0570 gibt; diese geringe Unsicherheit hätte die beiderseitigen Bestimmungen der Sterne äusserst übereinstimmend machen müssen, was sie, nach dem Erfolge, aber nicht immer sind. Den Grund hiervon glaube ich in einer Veränderlichkeit der Aufstellung des Instruments, welche mit so vieler Vorsicht als möglich eingerichtet wurde, nicht suchen zu dürfen; ob aber ein kleiner mittlerer Unterschied ent-

steht, wenn die Nacht oder der Tag zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen liegt, ist schwierig zu entscheiden. Ein kleiner Fehler in der Compensation der Uhr, oder in der Aberration, oder eine kleine jährliche Parallaxe der Sterne, würden Wirkungen dieser Art erzeugen, und man würde diese so bestimmen können, dass die gefundenen Unterschiede verkleinert würden oder verschwinden; die Ueberzeugung, dadurch die Wahrheit getroffen zu haben, würde aber schwer zu erlangen sein.

Da die Unterschiede, von welchen ich hier rede, durch eine Veränderung der geraden Aufsteigung des Procyon nicht merklich verkleinert werden, so bleibt nichts übrig, als das Mittel, mit Berücksichtigung der Anzahl der Beobachtungen, zu nehmen; dieses gibt die in der letzten Columne enthaltenen Zahlen. Es ist

	Be- obb.	AR. 1825.	Jährl. Veränderung 1825.	Säcul. Aenderung.	Untersch. d. Catalogs für 1825.
α Leonis . . .	58	9 ^h 59 ^m 2 ^s .53	3 ^s .2060	- 0 ^s .0102	- 0 ^s .016
β " . . .	50	11 40 7,577	3,0667	- 0,0077	+ 0,034
β Virginis . . .	32	11 41 34,743	3,1244	- 0,0006	+ 0,089
α " . . .	96	13 15 59,118	3,1459	+ 0,0112	- 0,008
α Bootis . . .	92	14 7 40,911	2,7323	+ 0,0012	+ 0,038
1 α Librae . . .	17	14 41 1,368	3,3090	+ 0,0156	+ 0,115
2 α Librae . . .	24	14 41 12,738	3,3020	+ 0,0155	+ 0,166
α Coroneae . . .	77	15 27 16,823	2,5364	+ 0,0024	+ 0,102
α Serpentis . . .	77	15 35 39,245	2,9491	+ 0,0063	+ 0,083
α Scorpis . . .	44	16 18 41,517	3,6616	+ 0,0157	+ 0,121
α Herculis . . .	52	17 6 40,286	2,7306	+ 0,0037	+ 0,053
α Ophiuchi . . .	49	17 26 48,818	2,7771	+ 0,0085	+ 0,027
α Lynae . . .	31	18 31 0,831	2,9090	+ 0,0016	+ 0,056
γ Aquilae . . .	131	19 37 56,371	2,8549	- 0,0008	+ 0,065
α " . . .	—	19 42 14,637	2,9286	- 0,0014	+ 0,048
β " . . .	132	19 46 43,025	2,9501	- 0,0015	+ 0,063
1 α Capricorni . . .	29	20 7 56,495	3,3331	- 0,0081	+ 0,052
2 α " . . .	23	20 8 20,327	3,3775	- 0,0081	+ 0,052
α Cygni . . .	83	20 35 28,088	2,0413	+ 0,0024	+ 0,049
α Aquarii . . .	48	21 56 47,581	3,0838	- 0,0043	+ 0,064
α Pictis austr. . .	33	22 47 57,812	3,3402	- 0,0217	+ 0,006
α Pegasi . . .	54	22 56 2,973	2,9812	+ 0,0053	+ 0,112
α Andromedae . . .	76	23 59 21,515	3,0777	+ 0,0177	+ 0,123

7.

Die letzte Columnne dieses Catalogs zeigt, dass die Unterschiede der geraden Aufsteigungen der einzelnen Sterne, in dem früheren Cataloge und in dem gegenwärtigen, oft mehr von einander abweichen, als nach den wahrscheinlichen Fehlern beider Bestimmungen zu erwarten gewesen sein würde, wenn nicht schon die Vergleichung mit beiden zum Grunde gelegten Sternen ähnliche grössere Abweichungen gezeigt hätte. Indessen ist der Unterschied beider Cataloge, wenn man den für α Aquilae stattfindenden abzieht, 16 Mal unter einer halben Bogensekunde, 11 Mal zwischen 0^s.5 und 1^s.0, 7 Mal zwischen 1^s.0 und 1^s.5 und 2 Mal zwischen 1^s.5 und 1^s.9. Diese Unterschiede sind meistens unerheblich und, selbst in den äussersten Fällen, nicht sehr bedeutend; hätte man die Sicherheit beider Cataloge nach der Uebereinstimmung der Mittel aus immer zehn aufeinanderfolgenden Beobachtungen beurtheilen wollen, so würde man sie noch grösser haben schätzen müssen, als sie sich jetzt zeigt. Meiner Meinung nach sind die Angaben des neuen Catalogs denen des ältern vorzuziehen. Der Unterschied der Lage der beiden Cataloge gegen die Nachtgleichen beträgt nur 0^s.82 und ist nicht grösser, als man bei dieser schwierigen Bestimmung erwarten durfte. Ein Theil derselben hat

übrigens einen bestimmten Grund darin, dass die Declinationen der Sonne, bei der frühern Rechnung, mit der Refractionstafel in den Fundamentis Astronomiae pro A. 1755, bei der gegenwärtigen aber mit der Königsberger Refractionstafel reducirt wurden, in welcher letzteren die Aenderungen für die Temperatur etwas kleiner angenommen worden sind, so wie die Beobachtungen es erfordern. Da nämlich das Maximum der Jahreswärme lange nach der Sonnenwende eintritt, und der Unterschied der Temperatur für beide Nachtgleichen in Königsberg im Mittel etwa 20^o F. beträgt, so sind, bei der frühern Rechnung, die Declinationen beim Aufsteigen der Sonne, vergleichungsweise mit dem Niedersteigen, etwas südlicher angenommen, als die berichtigte Refractionstafel hier gegeben haben würde; hieraus musste in der That eine kleine Vergrösserung der absoluten Rectascensionen folgen. Ich glaube daher, dass auch hier der neue Catalog den Vorzug vor dem älteren verdient; nach der Uebereinstimmung zu urtheilen, welche die einzelnen, von Herrn ROSENBERGER abgesondert verglichenen Jahre gegeben haben, muss die übrig gebliebene Unsicherheit ganz unerheblich sein. Die Schiefe der Ekliptik für 1825 folgt aus dem gefundenen Werthe von $\Delta\omega$

$$= 23^{\circ} 27' 43''.78;$$

aus den Beobachtungen mit dem Cary'schen Kreise nahm ich, in meiner frühern Abhandlung, für 1815, 23^o 27' 47^s.56, welches 0^s.79 weniger ist. Von diesem Unterschiede kommt wiederum ein Theil auf Rechnung der verbesserten Strahlenbrechung.

Die allgemeine Verbesserung der Declinationen der Sonne, welche = + 0^s.79 gefunden wurde, deutet an, dass diese Declinationen um so viel nördlicher sind, als sie, nach denselben Reductionselementen, welche meinem Cataloge der Declinationen der Fundamentsterne zum Grunde liegen, aus den Beobachtungen berechnet werden. Nimmt man an, dass diese Verbesserung auch den Sternen zukömmt, so werden diese, in der Gegend des Aequators, so viel nördlicher; allein man ist dann gezwungen, sich von den Beobachtungen über die Biegung des Fernrohrs, welche ich 1820 und 1821 gemacht habe, zu entfernen, weshalb über die wahre Ursache dieser kleinen Verschiedenheit noch nicht entschieden werden kann. [Es folgt noch die Vergleichung von 395 beobachteten Sonnendecinationen (1820 März 27 — 1824 Oct. 15) mit den mittelst der neuen Aen. der Fundamentsterne bez. der Sonne berechneten.]

90. Neue Untersuchung der Reductionselemente der Declinationen und Bestimmung der Declinationen der Fundamentalsterne.*

(Astron. Nachr. 18, p. 217.)

Es sind jetzt zwanzig Jahre verstrichen, seitdem ich meine, auf Beobachtungen mit dem Reichenbachschen Meridiankreise der Königsberger Sternwarte gegründeten Untersuchungen über die Reductionselemente der Declinationen bekannt machte und ihre Resultate zur Bestimmung der Declinationen der Fundamentalsterne und einer Anzahl von Circumpolarsternen anwandte (vgl. Abb. 88). Diese Untersuchungen beruhen auf einer grossen Anzahl von Beobachtungen und einer Vertheilung derselben, welche erwarten liessen, dass die Sicherheit ihrer Resultate durch Anwendung desselben Apparats nicht leicht vermehrt werden könne. Indessen ist seit ihrer Aufsuchung so lange Zeit verflossen, dass sowohl Fehler der Bestimmung der Declinationen für 1820 sich schon merklich vergrössert haben, als auch Fehler der Bestimmung für 1755, durch deren Vergleichung mit der ersteren die Reduction auf die gegenwärtige Zeit (1840) erlangt werden muss, schon merklich hervortreten. Wenn nämlich die Fehler der Bestimmungen für 1820 und für 1755 durch ϵ und ϵ' bezeichnet werden, so geht daraus für 1840 der Fehler $\frac{1}{3}\epsilon - \frac{1}{4}\epsilon'$ hervor. Man musste daher die Sicherheit der Kenntniss der Declinationen für 1840 wesentlich vermehren können, wenn man denselben Apparat, der ihre Bestimmung für 1840 ergeben hat, zu einer neuen Bestimmung anwendete. Aber man konnte auch von zwei Verbesserungen der Beobachtungsart, welche ich unten näher angeben werde, einen günstigen Erfolg erwarten.

Ich veranlasste daher Herrn Observator Dr. BUSCH, welcher die Meridianbeobachtungen auf der Königsberger Sternwarte seit dem Jahre 1831 ausführt, eine der früheren ähnliche Untersuchung vorzunehmen. Wie er diesem Wunsche entsprochen hat, wird das Folgende zeigen. Denn alle dazu angewandten Beobachtungen hat er allein ausgeführt, sowie er auch ihre Reduction auf 1840 selbst vorgenommen hat. Diese Arbeiten des Herrn Dr. BUSCH sind es, wodurch ich den Astronomen gegenwärtig eine nicht uninteressante Mittheilung zu machen glaube.

§ 1. Veränderungen der früheren Beobachtungsart.

Bekanntlich hat BOHNENBERGER ein sehr elegantes Verfahren angegeben, wodurch die Beobachtungen an Instrumenten, welche zur Bestimmung der Declinationen dienen, unmittelbar auf die Richtung der Lothlinie ihres Standpunkts bezogen werden können. Es besteht in der Beobachtung des von einer, im Gleichgewichte befindlichen Quecksilberfläche reflectirten Bildes des Fadennetzes des senkrecht auf sie gerichteten Fernrohrs, und gibt unmittelbar die Stellung, in welcher seine Absehnslinie auf den Nadir gerichtet ist. Dieses Verfahren ist jederzeit und so leicht ausführbar, dass ich es für einen werthvollen Zusatz zur Beobachtungskunst halte. Ein Mittel, das Fadennetz von oben so stark zu beleuchten, dass man sein reflectirtes Bild sehen kann, verdanke ich der Mittheilung meines sinnreichen Freundes, Prof. von STREINEL; es besteht in einem kleinen Planglase, welches, im 45. Grade gegen die Axe des Fernrohrs geneigt, auf der Fassung des Oculars aufgestellt wird, durch welche hindurch man in das Fernrohr sieht, und welches zugleich, wenn es dem durch ein Fenster einfallenden Tageslichte zugewandt wird, Licht genug in das Fernrohr reflectirt, um die beabsichtigte Wirkung hervorzubringen. Als Herr BAUMANN in Berlin hier häufige Anwendungen dieser Einrichtung sah, war er der Meinung, dass man das Licht verstärken könne, wenn man einen, die Augenöffnung nur zum Theil verdeckenden Metallspiegel, statt des Planglases, anwende; er hatte auch die Güte, mir einen solchen Spiegel zu verfertigen, welcher wirklich ein weit lebhafteres Licht gibt, als das, seinen grössten Theil durchgehende lassende unbelegte Planglas.

Die Anwendung dieses Mittels, die lothrechte Lage der Absehnslinie des Meridiankreises unmittelbar zu erkennen, führt zur Kenntniss der Entfernungen beobachteter Sterne von dem Scheitelpunkte. Da diese früher nur durch die Verbindung von Beobachtungen in beiden entgegengesetzten Lagen der Axe des Instruments erlangt werden konnten, so konnte einer neuen Beobachtungsreihe der Vorzug vor der älteren gegeben werden, dass jede einzelne Beobachtung eines Sterns, von anderen Sternbeobachtungen ganz unabhängig, auf

* [346 d. n. Verz.]

die Richtung der Schwere bezogen werden konnte. Die ältere Beobachtungsreihe bestimmte dagegen zunächst die Entfernungen der Sterne von dem Pole, welcher durch Beobachtungen von Circumpolarsternen erkannt wurde. Vor diesen hat die Beobachtung der Nadirs die Vorzüge, dass sie von der Heiterkeit des Himmels nicht abhängig ist, also jederzeit vorgenommen werden kann, und dass das reflectirte Bild der Fäden dem Zittern der Luft nie unterworfen ist, welches die Sicherheit der Beobachtungen von Sternen häufig vermindert. Ich halte also die regelmäßige und häufige Anwendung des Bohnenberger'schen Verfahrens für eine wesentliche Verbesserung der Beobachtungsart.

Durch die Bekanntmachung meiner früheren Untersuchung des auch gegenwärtig verfolgten Gegenstandes, ist die Beobachtung der von einer horizontalen Fläche reflectirten Bilder der Sterne in die Praxis der Sternwarten eingeführt worden. Damals benutzte ich zu diesem Zwecke die Oberfläche des in einem drei Fuss Durchmesser habenden Gefässe enthaltenen Wassers; allein auf der Greenwicher Sternwarte hat POND eine weit kleinere Quecksilberfläche angewandt und dadurch vollkommen gelungene Beobachtungen erhalten. Ich bin diesem Beispiele gefolgt, indem ich die horizontale Fläche gleichfalls durch Quecksilber, in einer amalgamirten, sehr wenig tiefen Schale von Kupfer enthalten, hervorgebracht habe. Dadurch gewinnt die Bequemlichkeit der Anwendung des Verfahrens beträchtlich; auch verliert es seine frühere Beschränkung auf die Wärme der Luft, in welcher das Wasser nicht gefriert; endlich sind Schwankungen, welche durch Luftzug oder andere zufällige Bewegungen entstehen, in dem wenig tiefen Quecksilbergefässe von weit kürzerer Dauer, als in dem tieferen Wassergefässe. Ich wünschte, dass die durch diese Einrichtung erlangte Erleichterung der Beobachtungen der reflectirten Bilder der Sterne häufige und namentlich bis zu grösseren Entfernungen vom Scheitelpunkte fortgesetzte Anwendungen zur Folge haben möchte; allein wenn man sehr tiefe Sterne auf diese Art beobachten wollte, so war es nöthig, die untere Hälfte der Durchschnitteklappen zu öffnen, wodurch dem Luftzuge freierer Zutritt eröffnet wurde, welchen Herr Dr. BUSCH selten schwach genug fand, um solche Sterne häufig beobachten zu können. Im Jahre 1840 ist ein beträchtlicher Bau auf der Sternwarte vorgenommen worden, wodurch sie zu dem Empfange eines neuen Meridiankreises, welchen ich der Kunst der Herren A. & G. REPSOLD verdanken werde, vorbereitet worden ist. Diese Gelegenheit habe ich benutzt, um auch dem Verschlusse der Meridiandurchschnitte eine

Einrichtung zu geben, welche den Luftzug ungleich besser ausschliessen wird, als die frühere. Die häufigere und allgemeinere Beobachtung der reflectirten Bilder der Sterne war die zweite beabsichtigte Veränderung der früheren Beobachtungsart.

§ 2. Beobachtungen der Circumpolarsterne.

Von 59 Sternen, welche bei der früheren Untersuchung in beiden Culminationen beobachtet worden sind, sind für die gegenwärtige 30 ausgewählt worden, wovon jedoch drei (γ Bootis, η Herculis, α Aurigae) in der unteren Culmination unbeobachtet geblieben sind. Ihre Zahl wurde auf etwa die Hälfte vermindert, um die zur allgemeineren Beobachtung ihrer reflectirten Bilder nöthigere Zeit zu gewinnen. Alle Beobachtungen sind, durch Vergleichung mit der um 180° veränderten Bestimmung des Nadirs und durch Hinzufügung des Theilungsfehlers des Kreises, so wie die auf meine frühere Prüfung seiner Theilungen gegründete, S. VIII der Abtheilung VII der Königsberger Beobachtungen vorkommende Tafel ihn angibt, auf scheinbare Zenithdistanzen, und diese durch die Strahlenbrechungstafel, welche sich in den Tabulis Regiomontanis findet, auf wahre Zenithdistanzen reducirt worden. Die früher bestimmte Biegung des Fernrohrs ist dabei nicht berücksichtigt worden, weil ihre neue Bestimmung einer der Gegenstände der Untersuchung ist. Das der Strahlenbrechung wegen angewandte äussere Thermometer ist durch die Methode untersucht worden, welche ich früher (Abth. VII. S. IX)*) bekannt gemacht habe; nachdem ich die inneren Ungleichheiten seiner Röhre dadurch erkannt hatte, haben die Herren PISTOR und SCHIEK ihm eine neue, ihnen angemessene Scale gegeben, so dass es die wahre Temperatur so lange unmittelbar angibt, als die Bestimmung seiner beiden festen Punkte nicht eine Aenderung erfährt. Das Barometer ist noch das früher benutzte, und seinen Höhen ist (Abth. VIII. S. IX) eine Pariser Linie hinzugesetzt worden. Ferner sind die Entfernungen der reflectirten Bilder der Sterne, durch Hinzufügung von $0,063$ tg Zen.-Dist., von dem 3 Fuss unter der Axe des Instruments stehenden Quecksilbergefässe auf die Lothlinie des Instruments reducirt worden. Endlich ist Alles, durch die in den Tab. Regiom. enthaltenen Hilfsmittel, auf 1840 gebracht, welche Epoche gewählt wurde, indem die Beobachtungen in die Zeit von 1836 bis zum Ende von 1840 fallen. In der folgenden Zusammenstellung trenne ich die in beiden entgegengesetzten Lagen des Instruments gemachten Beobachtungen, sowohl der Sterne selbst als ihrer reflectirten Bilder von einander.

*) [Vgl. die betr. Abb. unter VII. Physik.]

		Obere Culminationen.		Der reflectirten Bilder					
		Entfernung vom Scheitelpunkte.		Entfernung vom Fusspunkte.					
		Ost.	West.	Ost.	West.				
30	α Lyrae S.	16° 4' 32",53	9	31",81	30	31",94	6	32",95	5
29	γ Bootis	15 42 9,71	13	8,51	16	10,13	9	10,10	21
28	η Herculis	15 29 2,38	8	0,77	10	1,98	4	3,65	14
27	ϵ Persei	15 10 21,84	2	23,96	8	—	—	—	—
26	γ Cygni	14 57 58,85	2	58,07	23	58,71	10	59,46	13
25	β Persei	14 22 49,80	1	47,47	8	—	—	—	—
24	γ Andromedae	13 9 20,17	5	20,24	18	20,51	18	—	—
23	α Cygni	10 0 9,61	27	9,23	38	9,15	6	10,70	12
22	α Aurigae	8 53 12,78	12	15,01	9	16,26	15	—	—
21	δ Persei	7 26 39,47	3	42,98	9	—	—	—	—
20	α "	5 25 42,45	7	44,20	13	—	—	—	—
19	θ Cygni	4 51 —	—	39,43	29	—	—	—	—
18	η Ursae majoris	4 35 59,10	10	59,86	12	—	—	—	—
17	i Cygni	3 19 —	—	21,95	12	—	—	—	—
16	γ Draconis	3 12 —	—	15,10	27	—	—	—	—
15	ζ Cygni	2 43 —	—	2,97	13	—	—	—	—
14	ψ "	2 41 —	—	52,40	22	—	—	—	—
13	XVIII. 170	2 39 —	—	59,75	17	—	—	—	—
12	β Draconis	2 17 —	—	31,18	9	—	—	—	—
11	κ Cygni	1 38 —	—	20,09	24	—	—	—	—
10	γ Ursae majoris	0 7 45,68	16	46,97	18	—	—	—	—
9	α Cassiopeae N.	0 56 40,91	5	39,03	16	—	—	—	—
8	α Cephei	7 11 —	—	42,07	20	46,68	4	44,91	10
7	α Ursae majoris	7 53 57,22	20	57,12	13	60,18	13	58,63	9
6	β Cephei	15 8 —	—	42,22	22	44,36	4	43,83	11
5	γ Ursae minoris	17 41 21,19	9	21,25	27	22,11	5	22,08	11
4	β "	20 5 42,66	8	43,48	20	43,81	8	43,78	11
3	γ Cephei	22 1 31,95	10	32,39	12	32,20	3	35,15	4
2	δ Ursae minoris	31 52 38,11	20	39,36	68	—	—	39,97	7
1	α "	33 44 30,85	80	30,91	71	30,76	27	30,37	17
Untere Culminationen.									
1	α Ursae minoris N.	36 49 46,81	83	47,11	74	47,02	20	48,21	12
2	δ "	38 41 38,84	22	39,41	25	—	—	—	—
3	γ Cephei	48 32 46,11	19	48,16	7	49,63	6	47,40	8
4	β Ursae minoris	50 28 34,00	9	34,57	11	36,65	7	40,14	3
5	γ "	52 52 57,47	6	55,80	8	56,59	2	58,63	3
6	β Cephei	55 25 35,60	16	34,79	8	37,85	6	34,98	1
7	α Ursae majoris	62 40 20,02	9	21,47	11	20,70	1	20,64	4
8	α Cephei	63 22 35,54	13	34,43	7	37,35	6	—	—
9	α Cassiopeae	69 37 37,33	19	37,57	3	39,70	7	41,84	1
10	γ Ursae majoris	70 42 3,75	8	5,36	14	—	—	7,88	3
11	κ Cygni	72 12 36,20	10	33,55	2	—	—	—	—
12	β Draconis	72 51 47,87	9	43,97	3	—	—	—	—
13	XVIII. 170	73 14 16,34	1	12,00	2	—	—	—	—
14	ψ Cygni	73 16 8,57	13	7,96	2	—	—	—	—
15	ζ "	73 17 18,72	8	14,59	2	—	—	—	—
16	γ Draconis	73 46 32,13	8	27,98	3	—	—	—	—
17	i Cygni	73 53 38,78	12	—	—	—	—	—	—
18	η Ursae majoris	75 10 20,69	1	16,11	10	—	—	—	—
19	θ Cygni	75 25 54,74	12	52,73	2	—	—	—	—
20	α Persei	76 0 2,40	10	4,20	11	—	—	—	—
21	δ "	78 0 62,30	5	58,76	10	—	—	—	—
22	α Cygni	80 34 26,74	12	26,29	2	—	—	—	—
23	γ Andromedae	83 43 41,14	9	40,36	7	—	—	—	—
24	β Persei	84 57 7,35	7	5,14	11	—	—	—	—
25	γ Cygni	85 32 17,51	10	—	—	—	—	—	—
27	ϵ Persei	85 44 42,52	6	42,56	10	—	—	—	—
30	α Lyrae	86 38 50,30	8	44,97	3	—	—	—	—

§ 3. Beobachtungen der Fundamentalsterne.

Die Beobachtungen der drei nördlichsten der Fundamentalsterne α Aurigae, α Cygni, α Lyrae sind schon

in der vorigen Zusammenstellung angeführt; von den übrigen Sternen finden sich die folgenden.

	Entfernung vom Scheitelpunkte.				Der reflectirten Bilder Entfernung vom Fusspunkte.			
	Ost.		West.		Ost.		West.	
31 α (Geminorum*)	22° 28' 55",45	34	55,78	44	53,95	5	54,25	3
32 β Tauri	26 14 56,96	53	55,29	44	56,97	17	—	—
33 β Geminorum	26 18 27,40	59	26,14	47	27,22	5	27,75	5
34 α Andromedae	26 30 26,37	25	24,47	40	—	—	—	—
35 α Coronae	27 27 25,51	43	24,07	73	24,67	7	25,04	21
36 α Arietis	32 0 11,40	46	40,71	27	41,78	7	—	—
37 α Bootis	34 41 44,88	51	43,60	61	44,40	5	44,96	10
38 α Tauri	38 31 57,66	52	56,49	29	—	—	—	—
39 β Leonis	39 14 52,04	11	51,61	21	—	—	—	—
40 α Herculis	40 8 11,05	18	10,08	34	11,94	6	10,45	7
41 α Pegasi	40 22 6,97	31	4,86	35	—	—	—	—
42 γ " "	40 25 13,86	36	12,12	38	—	—	—	—
43 α Leonis	41 58 3,39	41	2,64	23	4,90	16	3,40	4
44 α Ophiuchi	42 1 36,88	24	55,56	42	56,88	6	56,85	14
45 γ Aquilae	44 29 9,40	31	8,07	106	10,46	11	—	—
46 α " "	46 15 49,34	43	17,14	118	47,75	11	—	—
47 α Orionis	47 20 35,29	40	34,04	37	35,99	16	—	—
48 α Serpentis	47 46 60,48	38	48,82	65	50,32	5	49,82	17
49 β Aquilae	48 42 8,82	26	6,99	111	9,20	10	—	—
50 α Canis minoris	49 5 4,16	48	2,48	57	2,82	5	3,80	5
51 α Ceti	51 15 23,35	18	22,77	14	—	—	—	—
52 β Virginis	52 2 53,68	18	51,50	13	—	—	—	—
53 α Aquarii	55 48 31,34	28	30,50	47	—	—	—	—
54 α Hydrae	62 40 57,62	37	56,14	19	59,90	3	—	—
55 β Orionis	63 6 22,23	55	20,93	60	—	—	—	—
56 α Virginis	65 2 17,68	18	16,14	34	—	—	—	—
57 1 α Capricorni	67 42 43,68	23	42,56	42	—	—	—	—
58 2 α " "	67 44 —	—	59,21	8	—	—	—	—
59 1 α Librae	70 2 32,68	10	29,93	12	—	—	—	—
60 2 α " "	70 5 13,97	6	11,54	11	—	—	—	—
61 α Canis majoris	71 12 57,41	23	57,20	25	61,85	3	—	—
62 α Scorpii	80 47 6,14	14	5,87	9	—	—	—	—

§ 4. Verbindung der Beobachtungen mit den Reductionselementen und Declinationen.

Die Angaben der beiden vorigen §§ entsprechen den Ueberschriften der sie enthaltenden Columnen nur unter der Bedingung, dass die Ablesungen des Kreises, ausser der schon angebrachten Verbesserung der Theilungsfehler, keiner weiteren Berichtigung bedürfen und dass die angewandte Strahlenbrechungstafel richtig sei. Ich werde aber eine durch die Schwere erzeugte Biegung des Fernrohrs des Instruments annehmen und ihre Grösse, so wie auch die Grösse eines Factors, womit die angewandten Strahlenbrechungen zu multipliciren sind, als unbekannte Grössen betrachten, und deren

Bestimmung durch jene Angaben suchen. Die Grösse des Einflusses des Thermometerstandes auf die Strahlenbrechung ist einer der Gegenstände der früheren Untersuchung gewesen, auf den ich diesmal nicht zurückkommen werde.

Wenn man von der Biegung des Fernrohrs des Meridiankreises nur annehmen will, dass sie in jeder Lage desselben durch unveränderliche Gegengewichte vernichtet werden könne, nicht aber, dass sie in lothrechter Lage des Fernrohrs verschwinde, so ist die durch sie nothwendig gemachte Verbesserung der beobachteten Zenithdistanzen von der Form

$$\alpha \sin z + \beta \cos z$$

wobei z die wahre Zenithdistanz bedeutet. Damit diese Formel für alle Punkte des Meridians gelte, muss z

*) Der hellste von den beiden Sternen des Doppelsterns.

von 0 bis 360° gezählt werden. Zählt man x von dem Scheitelpunkte durch Süden, den Fusspunkt und Norden, bis wieder zum Scheitelpunkte, so ist eine nördliche Zenithdistanz $x' = 360^\circ - x$ und ihre Verbesserung wegen der Biegung, die mit entgegengesetzten Zeichen genommene von $360^\circ - x$, oder

$$\alpha \sin x' - \beta \cos x'.$$

Alein die eine Lage der horizontalen Drehungsaxe des Instruments hat zu der einen Hälfte des Meridians dieselbe Beziehung, welche die andere zu der anderen hat; oder wenn die Formel $\alpha \sin x + \beta \cos x$ für die eine dieser Lagen geltend angenommen wird, so gilt $\alpha \sin x - \beta \cos x$ für die andere. Ich werde daher die anzubringende Verbesserung

$$\varphi x = \alpha \sin x \pm \beta \cos x$$

und das obere Zeichen für die östliche Lage des Kreises, das untere für die westliche annehmen. Die Zenithdistanzen werden dann vom Scheitelpunkte durch Süden von 0 bis 360° gezählt, oder, was damit gleichbedeutend ist, die nördlichen werden als negativ angesehen.

Die als Entfernungen vom Scheitelpunkte ange-

$$\alpha \sin x + \beta(1 + \cos x), \quad \alpha \sin x - \beta(1 + \cos x),$$

und wenn er im nördlichen Quadranten in der Zenithdistanz x culminirt, resp.

$$\alpha \sin x - \beta(1 + \cos x), \quad \alpha \sin x + \beta(1 + \cos x),$$

hinzuzusetzen.

Den Factor, womit die angewandten Strahlenbrechungen ρ zu multipliciren sind, werde ich durch $1 + k$ bezeichnen, also jeder Angabe der beiden Verzeichnisse ρk hinzusetzen, wo ρ das arithmetische Mittel aus allen Werthen der Strahlenbrechung, welche Behufs der Erlangung der Angabe aus den Tafeln berechnet worden sind, bedeutet.

Die Ausdrücke der Entfernung eines Sterns vom Scheitelpunkte und seines reflectirten Bildes vom Fusspunkte, durch seine Declination δ und die Polhöhe φ , sind:

Stern südlich vom Scheitelpunkte $-\delta + \varphi$

„ nördlich „ „ obere Culm. $\delta - \varphi$

„ „ „ „ untere „ $-\delta + 180^\circ - \varphi$

Setzt man sie den Ausdrücken der für die Biegung des Fernrohrs und den Fehler der Strahlenbrechung verbesserten Angaben der Verzeichnisse § 2 und 3 gleich, so erlangt man dadurch die Gleichungen, welche die unbekanntenen Grössen δ , φ , α , β , k mit diesen Angaben in Verbindung bringen. Die erste dieser Grössen ist für jeden anderen Stern eine andere; es ist aber bequemer, $\delta - \varphi \pm \rho k$, wo ρ die Strahlenbrechung eines Sterns in seiner oberen Culmination bedeutet und das

gegebenen Zahlen sind die um 180° verminderten Bewegungen der Absehlenslinie des Fernrohrs von dem Fusspunkte bis zu den Sternen, in der Richtung genommen, welche die Formel voraussetzt. Sie fordern also die Verbesserung $\varphi x - \varphi \cdot 180^\circ = \alpha \sin x \pm \beta(1 + \cos x)$, welche, wenn auch nördliche Zenithdistanzen als positiv angesehen werden sollen, für diese mit entgegengesetzten Zeichen, nämlich $-\alpha \sin x \mp \beta(1 + \cos x)$ genommen werden muss. Die als Entfernungen vom Fusspunkte angegebenen Zahlen sind dagegen die Bewegungen der Absehlenslinie des Fernrohrs, wenn sie südlich sind, von dem Sterne bis zu dem Fusspunkte, wenn nördlich von diesem bis zu jenem. Der erste Fall fordert also die Verbesserung $\varphi \cdot 180^\circ - \varphi(180^\circ - x) = -\alpha \sin x \mp \beta(1 - \cos x)$; der zweite die Verbesserung $\varphi x - \varphi \cdot 180^\circ = \alpha \sin x \pm \beta(1 + \cos x)$, welche durch den Ausdruck von x durch die nördliche Zenithdistanz x' , nämlich $x = 180^\circ + x'$, sich in $-\alpha \sin x' \pm \beta(1 - \cos x')$ verwandelt. Man hat daher den Angaben in den vier Columnen der beiden vorigen §§, wenn der Stern in dem südlichen Quadranten des Meridians, in der Zenithdistanz x culminirt, resp.

$$-\alpha \sin x - \beta(1 - \cos x), \quad -\alpha \sin x + \beta(1 - \cos x)$$

und wenn er im nördlichen Quadranten in der Zenithdistanz x culminirt, resp.

$$-\alpha \sin x + \beta(1 - \cos x), \quad -\alpha \sin x - \beta(1 - \cos x)$$

obere Zeichen genommen wird wenn diese südlich, das untere wenn sie nördlich vom Scheitelpunkte stattfindet, zu einer, jedem der beobachteten Sterne eigenthümlichen unbekanntenen Grösse zu vereinigen, indem man für ρ das arithmetische Mittel aus allen, für die obere Culmination in Rechnung gebrachten Werthen der Strahlenbrechung annimmt. Wenn derselbe Stern auch in der unteren Culmination beobachtet ist, für welche die ähnlich vereinigte unbekanntene Grösse $\delta - 180^\circ + \varphi + \rho k$ ist, so kann man statt derselben die vorige $-180^\circ + 2\varphi + (\rho \mp \rho)k$ schreiben, wodurch den aus den Beobachtungen dieser Culmination hervorgehenden Gleichungen, ausser α und β , drei unbekanntene Grössen gegeben werden, nämlich die vorige, φ und k . Für ρ' kann das arithmetische Mittel aller für die untere Culmination berechneten Werthe der Strahlenbrechung genommen werden; denn diese Werthe, so wie die von ρ , verändern sich nur durch die Schwankungen der Barometer- und Thermometerstände und zwar nicht so stark, dass ihre Veränderungen einen erheblichen Beitrag zur Bestimmung von k liefern könnten.

Damit man mit kleineren Zahlen zu thun habe, kann man $d + \Delta d$ statt δ und $54^\circ 42' 50'' + \Delta \varphi$ statt φ schreiben und unter d eine Näherung an den Werth

von δ verstehen. Bezeichnet man dann den unbekanntem Werth, welchen $\Delta d = \Delta \varphi \pm \rho \cdot k$ für jeden der 62 Sterne der Verzeichnisse § 2 und 3 besitzt, durch die Zahl (m), welche diesem Sterne dort beigelegt ist; ferner das was von jeder zu der oberen Culmination gehörigen Angabe in den vier Columnen der Verzeichnisse übrig bleibt, wenn man $\mp(54^\circ 42' 50'' - d)$ hinzusetzt, durch n, n_1, n_2, n_3 , so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Col. } \dots n &= \mp(m) - \alpha \sin z \mp \beta(1 + \cos z) \\ 2. \text{ ,, } \dots n_1 &= \mp(m) - \alpha \sin z \pm \beta(1 + \cos z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Col. } \dots u' &= -(m) - \alpha \sin z' + \beta(1 + \cos z') - 2\Delta\varphi - (\rho' \mp \rho)k \\ 2. \text{ ,, } \dots n'_1 &= -(m) - \alpha \sin z' - \beta(1 + \cos z') - 2\Delta\varphi - (\rho' \mp \rho)k \\ 3. \text{ ,, } \dots n'_2 &= -(m) + \alpha \sin z' - \beta(1 - \cos z') - 2\Delta\varphi - (\rho' \mp \rho)k \\ 4. \text{ ,, } \dots n'_3 &= -(m) + \alpha \sin z' + \beta(1 - \cos z') - 2\Delta\varphi - (\rho' \mp \rho)k \end{aligned}$$

Die aus einer beobachteten Zenithdistanz abgeleitete wahre verliert desto mehr von ihrer Sicherheit, je grösser sie ist. Ich habe dieses früher (Abth. VII. S. XIII) näher untersucht, indem ich das Gewicht einer wahren Z. D. durch

$$\left(\frac{0',7126}{s}\right)^2$$

ausgedrückt und die Grösse von ϵ , für verschiedene Zenithdistanzen, durch die sich in ihrer Beobachtung zeigenden Unterschiede bestimmt habe. Man muss das Gewicht jeder Beobachtung, oder die Grösse ϵ , von welcher es abhängig gemacht worden ist, kennen, ehe man die auf den Beobachtungen der verschiedenen Sterne beruhenden Gleichungen, zur Bestimmung der ihnen gemeinschaftlichen unbekanntem Grössen $\alpha, \beta, \Delta\varphi, k$ und der der oberen und unteren Culmination jedes Sterns gemeinschaftlichen (m) anwenden kann. Ich stelle daher in der folgenden Tafel die Logarithmen der Gewichte ($= p$) zusammen, welche Herr Dr. BUSCH, der angeführten früheren Untersuchung gemäss, den Beobachtungen der verschiedenen Sterne beigelegt hat. Diese Tafel enthält zugleich die angewandten Näherungswerte d der Declinationen, und die Werthe von $\sin z, \cos z, \varphi, \rho' \mp \rho$, also Alles was zur Bildung der Gleichungen nothwendig ist.

[Folgen die Tafeln für die Circumpolar- und Fundamentalsterne.]

§ 5. Auflösung der durch das Vorige gegebenen Gleichungen.

Diese Gleichungen haben die, jedem Sterne eigenthümlichen unbekanntem Grössen (1), (2), (3) . . . (62), die beiden allen Sternen gemeinschaftlichen α, β , und

$$\begin{aligned} 3. \text{ Col. } \dots n_2 &= \mp(m) + \alpha \sin z + \beta(1 - \cos z) \\ 4. \text{ ,, } \dots n_3 &= \mp(m) + \alpha \sin z \mp \beta(1 - \cos z) \end{aligned}$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn die obere Culmination südlich von dem Scheitelpunkte, die unteren, wenn sie nördlich von demselben stattfindet. Wenn das, was von jeder zu der unteren Culmination gehörigen Angabe in den vier Columnen des Verzeichnisses § 2 übrig bleibt, nachdem $d = 125^\circ 17' 10''$ hinzugesetzt ist, durch n', n'_1, n'_2, n'_3 bezeichnet wird, erhält man durch diese Angaben die Gleichungen:

die beiden nur bei den zu der unteren Culmination beobachteten Sternen vorkommenden $\Delta\varphi$ und k . Obgleich die Gewichte der Beobachtungen in verschiedenen Zenithdistanzen, mit Rücksicht auf ihre, dem Horizonte zu, stark wachsenden Fehler bestimmt worden sind, so habe ich doch für angemessen erachtet, die hierdurch sehr gering werdenden Beiträge, welche die in 75° überschreitenden Zenithdistanzen gemachten Beobachtungen zu der Bestimmung von α, β und $\Delta\varphi$ liefern könnten, ganz zu vernachlässigen, sowie auch die, den in ihrer unteren Culmination über diese Grenze hinausgehenden Sternen zugehörigen (m) der oberen Culmination allein gemäss zu bestimmen. Nachdem also die Gleichungen, nach der Anschliessung der aus den unteren Culminationen der Sterne 18 bis 30 hervorgehenden, auf die der Methode der kleinsten Quadrate gemässe Art, zur Erlangung der Ausdrücke von (1), (2), (3), . . . (62) angewandt worden waren, wurden sie, nach fernerer Ausschliessung des Sterns 62, auch in Beziehung auf die unbekanntem Grössen $\alpha, \beta, \Delta\varphi$ so behandelt, wie diese Methode es fordert, in Beziehung auf k aber ohne Ausschliessung einer Gleichung. Die hierdurch erlangten, zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \Delta\varphi, k$ führenden Gleichungen wurden dann, durch Substitution der schon bekannt gewordenen Ausdrücke von (1), (2), (3), . . . (61), von diesen unbekanntem Grössen befreit, und ergaben so die nothwendigen vier Gleichungen zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \Delta\varphi, k$.

Ich lasse jetzt die Resultate dieser Rechnungen, so wie Herr Dr. BUSCH sie gefunden hat, hier folgen.

[Mittheilung der 62 Bedingungsgleichungen.]

Die vier, zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \Delta\varphi$ und k dienenden Gleichungen sind:

$$\begin{aligned}
 &+ 733,56 = 519,86 \alpha - 5,59 \beta + 345,56 \Delta\varphi + 20586 k \\
 &- 2041,20 = - 5,58 \alpha + 8915,75 \beta + 233,02 \Delta\varphi + 10896 k \\
 &+ 968,20 = + 345,56 \alpha + 233,02 \beta + 1009,28 \Delta\varphi + 56239 k \\
 \text{und} &+ 82937,3 = 32821,3 \alpha + 22668,9 \beta + 84672,6 \Delta\varphi + 9201460 k
 \end{aligned}$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= + 0,9498 \\
 \beta &= - 0,2465 \\
 \Delta\varphi &= + 0,7054 \\
 k &= - 0,0002583.
 \end{aligned}$$

§ 6. Vergleichung der jetzt und im J. 1820 bestimmten Werthe der Reductionselemente der Declinationen.

Der jetzt bestimmte Ausdruck der von der Wirkung der Schwere auf den Meridiankreis herrührenden Verbesserung einer beobachteten südlichen Zenithdistanz ist, je nachdem der Kreis gegen Osten oder gegen Westen gewandt ist:

$$+ 0,9498 \sin z \mp 0,2465 \cos z$$

oder die Verbesserung seiner beobachteten Angabe u ist:

$$= + 0,9498 \sin(u + 1^\circ 33') - 0,2465 \cos(u + 1^\circ 33').$$

Früher fand ich den Ausdruck derselben Verbesserung (Abth. VII. p. XIX)

$$= + 1,1 \sin(u + 1^\circ 33') + 0,26 \cos(u + 1^\circ 33').$$

Das erste Glied beider Ausdrücke ist so nahe übereinstimmend, als man zu erwarten berechtigt sein kann, das zweite ist aber eine halbe Secunde verschieden. Zufällige Beobachtungsfehler lassen eine so grosse Verschiedenheit nicht erwarten. Ich würde glauben, dass das Instrument in der Zwischenzeit eine kleine Aenderung erfahren habe, wenn nicht ein Grund vorhanden wäre, dem angenommenen Gesetze der Biegung zu misstrauen. Diesen Grund gibt die, durch zwei etwa horizontal gerichtete Fernröhre erlangte Bestimmung der Biegung, aus welcher sie nahe verschwindend hervorging (Abth. X. p. IV).*) während sie, beiden auf die Beobachtung der Sterne und ihrer reflectirten Bilder gegründeten Bestimmungen zufolge, in der horizontalen Lage des Fernrohrs nahe eine Secunde gross erscheint. Ist das Gesetz der Biegung anders als das angenommene, so muss ihre neue Bestimmung von der älteren abweichen, indem sie den beobachteten Ort des Nadirs, die frühere den des Pols, zum Ausgangspunkte wählt, auch auf der bis zu grösseren Zenithdistanzen fortgesetzten Beobachtung der reflectirten Bilder beruhet. Dass die neue Bestimmung den vom Orte des Nadirs

*) [Vgl. Abth. 63, p. 43.]

ausgehenden Beobachtungen der Sterne angemessener ist als die frühere und auch als die Annahme einer verschwindenden Biegung, ist nicht zweifelhaft.

Die Polhöhe des Meridiankreises geht aus der neuen Bestimmung

$$= 54^\circ 42' 50,705''$$

hervor, während die frühere sie $= 54^\circ 42' 50,52''$, also $0,185''$ kleiner ergab. Ich glaube nicht, dass man berechtigt ist, eine grössere Uebereinstimmung zu erwarten, zumal die über die Biegung gemachte Bemerkung zeigt, dass die übrigbleibende Unsicherheit nicht nach den zufälligen Beobachtungsfehlern allein beurtheilt werden darf.

Die Strahlenbrechung ist, durch die neue Bestimmung, im Verhältnisse 1:1 — 0,0002583 verändert worden. Diese Veränderung beträgt in der Zenithdistanz von 45° nur $-0,016''$; sie ist nicht grösser, als eine Veränderung des Thermometerstandes um ein Achtel Grad der Fahrh. Scale, oder des Barometerstandes um ein Zehntel Linie, sie hervorbringen würde. Sie ist viel zu klein, um eine Veränderung der auf der früheren Untersuchung beruhenden, in den Tabulis Region. abgedruckten Strahlenbrechungstafel rechtfertigen zu können, denn sie liegt in den Grenzen der Unsicherheit, sowohl der einen als der anderen Bestimmung; so dass die so nahe Uebereinstimmung beider als ein glücklicher Zufall erscheint.

§ 7. Bestimmung der Declinationen der beobachteten Sterne für 1840.

Man erlangt diese Bestimmung, indem man, in den § 5 mitgetheilten Ausdrücken von Δd , die gefundenen Werthe von α , β , $\Delta\varphi$, k substituirt und die dadurch gefundenen Werthe von Δd den § 4 angeführten Annahmen von d hinzufügt. Dadurch erhält man:

	Decl. 1840.	Decl. 1840.
1 α Ursae min.	88° 27' 21,784 10	γ Ursae maj. 54° 35' 3,98
2 δ "	86 35 29,97 11	α Cygni 53 4 30,66
3 γ Cephei	76 41 22,59 12	β Draconis 52 25 20,32
4 β Ursae min.	74 48 33,95 13	XVIII. 170 52 2 50,87
5 γ "	72 24 12,90 14	ϕ Cygni 52 0 58,34
6 β Cephei	69 51 33,31 15	" 51 59 48,20
7 α Ursae maj.	62 30 48,55 16	γ Draconis 51 30 35,49
8 α Cephei	61 54 33,69 17	γ Cygni 51 23 28,65
9 α Cassiopeae	55 39 30,32 18	η Ursae maj. 50 6 51,07

Declinationen und der jetzigen, dass sie, den Erfahrungen zufolge, welche ähnliche Fälle mir früher gegeben haben, nicht grösser erwartet wurde. Unter den Fundamentalsternen weicht α Canis minoris am meisten, nämlich $-1^m 64$ ab; was wirklich auffallend ist, da die Beobachtungen dieses Sterns, sowohl früher als jetzt, hinreichend oft wiederholt sind und genügend erscheinen. Nächst dieser Abweichung des früheren Verzeichnisses von dem gegenwärtigen, findet sich die grösste ($+1^m 15$) bei α Aurigae; allein die neuere Bestimmung beruhet auf einer geringeren Zahl von Beobachtungen, worunter die durch Reflexion von der horizontalen Quecksilberfläche gemachten mehr als $2''$ von den übrigen abweichen; was vermuthlich dem Umstände zuschreiben

ist, dass das nahe senkrecht stehende Fernrohr den grössten Theil des Quecksilbers verdeckte und nur Strahlen zum Bilde des Sterns vereinigte, welche in der Nähe des Randes des Objectivs einfielen. Ich halte daher die neuere Bestimmung für weniger sicher, als häufiger wiederholte directe, und von einem weiter entfernten Quecksilbergefässe genommene Reflexionsbeobachtungen sie ergeben haben würden. Von den Bestimmungen der übrigen Fundamentalsterne für das J. 1820 entfernt sich keine eine Secunde von der gegenwärtigen; die meisten nähern sich ihr bis auf weniger als eine halbe Secunde. Indessen behalte ich mir vor, nächstens eine ausgedehntere Vergleichung verschiedener Verzeichnisse der Declinationen bekannt zu machen.*)

91. Declinationen der Fundamentalsterne aus Bessel's letzten Beobachtungen.

(Astr. Nachr. 45, p. 305.)

[Aus den Beobachtungen BESSEL'S mit dem Repsold'schen Meridiankreise, 1842—44, hat Herr Prof. E. LUTHER die Zenithdistanzen der Fundamentalsterne und

des Polarsterns abgeleitet; dieselben ergaben ihm, mit den Constanten $9^m 223$ und $20^m 445$ auf 1843,0 reducirt, die folgenden Zahlen (vgl. auch Kgsb. Beob. 27. u. 33. Abth.)]

Stern.	Decl. 1843.	Anzahl d. Beob. direct.	refl.	Präcess.	Säcular-Äend.	Eig. Bew.	Verzeichniss 1840.	Naut. Alm. 1843.
α Scorpii	$-26^{\circ} 4' 38''.41$	31	—	$- 8',492$	$+ 0',488$	$- 0',018$	$- 3',26$	$- 0',20$
α Canis majoris	$-16 30 18,46$	34	26	$- 3,330$	$- 0,384$	$- 1,210$	$- 2,78$	$- 2,23$
2α Librae	$-15 23 6,85$	22	19	$-15,239$	$+ 0,321$	$- 0,049$	$- 1,67$	$+ 2,88$
1α	$-15 20 25,65$	14	—	$-15,249$	$+ 0,321$	$- 0,055$	$- 1,59$	—
2α Capricorni	$-13 1 36,84$	13	20	$+ 10,727$	$+ 0,405$	$- 0,008$	$- 0,71$	$+ 3,45$
1α	$-12 59 18,88$	17	—	$+ 10,697$	$+ 0,406$	$+ 0,002$	$- 2,23$	—
α Virginis	$-10 20 22,91$	20	19	$-18,936$	$+ 0,161$	$- 0,030$	$- 1,09$	$- 0,64$
β Orionis	$- 8 23 17,15$	22	22	$+ 4,597$	$- 0,411$	$- 0,019$	$- 0,80$	$+ 1,66$
α Hydrae	$- 7 58 61,80$	21	30	$-18,355$	$- 0,269$	$+ 0,043$	$- 1,23$	$+ 0,90$
α Aquarii	$- 1 4 47,78$	20	20	$+ 17,268$	$+ 0,220$	$- 0,005$	$- 1,41$	$- 1,37$
β Virginis	$2 38 57,77$	11	16	$-19,997$	$- 0,025$	$- 0,277$	$- 1,26$	—
α Ceti	$3 28 12,35$	20	14	$+ 14,543$	$- 0,321$	$- 0,102$	$- 2,07$	$+ 1,38$
α Canis minoris	$5 37 22,30$	39	39	$- 7,762$	$- 0,425$	$- 1,927$	$- 1,80$	$- 1,27$
β Aquilae	$6 1 8,29$	28	28	$+ 9,074$	$+ 0,379$	$- 0,482$	$- 0,13$	$+ 1,73$
α Serpentis	$6 55 26,24$	21	20	$-11,750$	$+ 0,353$	$+ 0,050$	$- 0,66$	$+ 1,31$
α Orionis	$7 22 19,17$	28	25	$+ 1,165$	$- 0,473$	$0,000$	$- 0,30$	$+ 1,48$
α Aquilae	$8 27 29,02$	29	26	$+ 8,723$	$+ 0,376$	$+ 0,373$	$- 0,28$	$- 3,15$
γ	$10 14 6,00$	29	28	$+ 8,380$	$+ 0,374$	$- 0,008$	$+ 0,45$	$+ 2,03$
α Ophiuchi	$12 40 45,25$	20	20	$- 2,822$	$+ 0,402$	$- 0,205$	$- 0,29$	$+ 4,93$
α Leonis	$12 43 55,21$	22	22	$- 17,369$	$- 0,226$	$+ 0,113$	$- 0,27$	$- 0,73$
γ Pegasi	$14 18 38,03$	25	24	$+ 20,050$	$- 0,020$	$- 0,014$	$- 0,79$	$+ 0,94$
α	$14 21 42,23$	25	25	$+ 19,301$	$+ 0,116$	$- 0,017$	$- 0,15$	$- 0,26$
α Herculis	$14 34 25,12$	18	17	$- 4,555$	$+ 0,390$	$+ 0,051$	$+ 0,03$	$+ 1,64$
β Leonis	$15 26 58,44$	20	19	$- 19,987$	$- 0,028$	$- 0,097$	$- 0,44$	$- 0,17$
α Tauri	$16 11 16,52$	20	20	$+ 7,923$	$- 0,463$	$- 0,176$	$- 0,03$	$+ 1,64$
α Bootis	$20 0 9,10$	20	20	$- 16,985$	$+ 0,226$	$- 1,961$	$+ 0,07$	$- 0,59$
α Arietis	$22 43 1,52$	21	18	$+ 17,441$	$- 0,249$	$- 0,118$	$- 0,30$	$+ 2,62$
α Coronae	$27 14 48,33$	21	20	$- 12,345$	$+ 0,397$	$- 0,068$	$+ 0,64$	$- 0,39$
α Andromedae	$28 13 24,75$	26	27	$+ 20,055$	$- 0,010$	$- 0,149$	$- 0,05$	$+ 2,48$
β Geminorum	$28 23 59,12$	34	37	$- 8,133$	$- 0,494$	$- 0,058$	$- 0,28$	$- 0,31$
β Tauri	$28 28 5,08$	21	20	$+ 3,795$	$- 0,544$	$- 0,193$	$- 0,32$	$+ 3,91$
α Geminorumsequi	$32 18 34,42$	20	29	$- 7,234$	$- 0,521$	$- 0,073$	$- 0,44$	$- 0,07$
α Lyrae	$38 36 27,28$	19	19	$+ 2,758$	$+ 0,289$	$+ 0,276$	$+ 0,10$	$- 1,22$
α Cygni	$44 43 18,91$	50	12	$+ 12,627$	$+ 0,225$	$- 0,063$	$- 0,06$	$+ 1,16$
α Aurigae	$45 49 50,53$	37	16	$+ 4,758$	$- 0,627$	$- 0,424$	$- 1,37$	$+ 2,05$
Polaris	$88 28 19,83$	153	99	—	—	—	$- 0,06$	$+ 0,45$

*) [Vgl. Bessel, Astr. Nachr. 18, p. 305.]

Die Präcession wurde nach der Formel

$$+ 20,0554 \cos \alpha,$$

ihre Sæcularänderung nach der Formel

$$- 0,19500 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha^2 - 0,44782 \sin \alpha - 0,00970 \cos \alpha$$

berechnet; die E.-B. aus der Vergleichung der Declinationen für 1755 und 1843 abgeleitet. Die beiden letzten Columnen enthalten die Unterschiede der Bessel'schen Declinationen für 1840 (Abh. 90 p. 262, 263) und des Nautical Almanac für 1843 von den hier ge-

gebenen. — Die Polhöhe von Königberg folgt aus den Beobachtungen von

$$1843 \dots 54^{\circ} 42' 50,733, \text{ m. F. } \pm 0,157$$

$$1840 \dots 50,705 \text{ (Abh. 90 p. 262)}$$

$$1820 \dots 50,520 \text{ (Astr. Nachr. I, p. 247, Königsh. Beob. 5. Abth.)}$$

Aus den Beobachtungen von Polaris allein (Frühling 1842 bis Herbst 1844) ergab sich:

$$54^{\circ} 42' 50,559, \text{ m. F. } \pm 0,029.]$$

92. Vorschlag einer schicklichen Reductionsart der Histoire Céleste.*)

(Astron. Nachr. I, p. 22.)

Unter den astronomischen Beobachtungen der neueren Zeit ist die grosse, auf der École militaire unternommene Arbeit über die kleineren Sterne, deren Früchte uns LALANDE in der Histoire Céleste Française geliefert hat, eine der erfolgreichsten für die Erweiterung der Wissenschaft gewesen. Diesem wichtigen Werke verdanken wir zahlreiche Beobachtungen älterer und neuer Cometen, welche ohne dasselbe nicht hätten berechnet werden können; wir verdanken ihm die Himmelskarten von HARDING, ein Werk, welches uns die erste, ins Einzelne gehende Darstellung des Sternenhimmels gibt, und dessen Ausführung unmöglich gewesen sein würde, wenn der deutsche Fleiss, der sich an dasselbe wagte, nicht durch den Sternenreichtum der Histoire Céleste unterstützt worden wäre.

Die 50000 Beobachtungen, welche die Histoire Céleste enthält, haben alle die Vorzüge, welche den Originalbeobachtungen eigenthümlich sind; sie können stets nach den zuverlässigsten Elementen reducirt werden, und geben also immer vollkommene Orter der Sterne, je später man dieselben aus ihnen ableitet. Nachdem wir aber das bewunderungswürdige neue Piazzische Verzeichniss besitzen, welches aus jeder Zone der Histoire Céleste mehrere Sterne enthält, kann man bereits jeden wünschenswerthen Grad von Genauigkeit der Reduction erlangen. Denn die Sicherheit dieses Verzeichnisses überschreitet die einer einzelnen Beobachtung so weit, dass der Vortheil, welcher aus noch genaueren Vergleichungspunkten hervorgehen könnte, als unerheblich zu betrachten ist. Etwaige allgemeine Verbesserungen dieses Verzeichnisses könnten aber auch in der

Folge noch bei den reducirtten Oertern der Sterne der Histoire Céleste angebracht werden.

Dennoch scheint eine vollständige Reduction der Beobachtungen der Histoire Céleste nicht wünschenswerth: sie würde von vielen Schreib- und Druckfehlern entsetzt werden, welche bei einmaligen Beobachtungen immer, und bei dem schnellen Aufeinanderfolgen derselben besonders zu fürchten, auch von allen Astronomen, welche die Histoire Céleste häufig gebraucht haben, hin und wieder aufgefunden sind. Diese Fehler kann man aber im Originale weit besser finden und abändern, als in einer Reduction.

Bei dem häufigen Gebrauche, welchen die Astronomen von der Histoire Céleste machen, wäre indessen ein Hilfsmittel, welches die nicht unbedeutende Mühe vermindert, die jetzt mit der Anwendung eines einzelnen Sterns verbunden ist, sehr wünschenswerth. Ich glaube daher, ein solches vorschlagen zu dürfen, welches die Vortheile der Originalbeobachtungen nicht vernichtet; — ich hätte zwar gewünscht, meinen Vorschlag selbst ausführen zu können, allein ich habe darauf Verzicht leisten müssen, da mir so viele astronomische Geschäfte zugewachsen sind, dass ich durchaus unfähig bin, auch dieses zu übernehmen. Man hat die AR. in Zeit für 1800 (α) eines in der Hist. Cél. vorkommenden Sterns, wenn man der Durchgangszeit durch den mittlern Faden (t) eine Verbesserung hinzufügt, welche ich durch K bezeichnen werde; seine Declination für 1800 (δ), wenn man die Angabe des Quadranten (z) von einer andern Zahl, welche ich durch P bezeichnen werde, abzieht; oder

$$\alpha = t + K$$

$$\delta = P - z$$

*) [146 d. a. Verz.]

Bessel's Abhandlungen. 2. Bd.

Diese Zahlen K und P werden, wegen der zonenweisen Anordnung der Beobachtungen, für alle an einem Tage vorkommenden Sterne nicht sehr grosse Veränderungen erleiden, sodass sie in eine Tafel gebracht werden können, aus welcher man leicht interpoliren kann. Ich werde diesen Zahlen die Form

$$K = k + k' \frac{(z - Z)}{100}$$

$$P = p + p' \frac{(z - Z)}{100}$$

geben, wo Z die Angabe des Quadranten für die Mitte der Zone bedeutet und $z - Z$ in Minuten ausgedrückt ist; k' und p' sind also die Differentialquotienten von k und p , 100 Minuten als Einheit der Veränderungen von z angenommen. Es versteht sich daher, dass z nicht so weit von Z entfernt sein darf, dass die Glieder der höhern Ordnungen merklich werden, welches, die nächste Umgebung des Pols ausgenommen, für Zonen von 2° Breite auch nicht stattfindet.

Mein Vorschlag besteht nun darin, dass die Werthe von k , k' , p , p' für jede Zone und jede zehnte Minute der Durchgangszeit durch den mittlern Faden berechnet werden sollen, wodurch für jede Zone eine kleine Tafel entstehen wird, durch deren Hilfe man, ohne weitere Rechnung, alle Sterne auf 1800 reduciren kann; wendet man diese Tafel auf die Piazzischen Sterne an, so hat man dadurch, dass sie mit dem Verzeichnisse in Mittel stimmen, eine Bestätigung ihrer Richtigkeit.

Wenn man die Verbesserung der Uhrzeit zur Zeit T durch u , ihre stündliche Veränderung durch u' , die Verbesserung der Ebene des Quadranten für die Mitte der Zone durch ϵ , ihre Veränderung für 100' der Zenithdistanz durch ϵ' bezeichnet, so hat man

$$\text{AR. app.} = t + u + \epsilon + u'(t - T) + \epsilon' \frac{(z - Z)}{100}$$

und ferner

$$\text{Decl. app.} = \varphi - c - z - \varrho - \varrho' \frac{(z - Z)}{100}$$

wo φ die Polhöhe, c den Collimationsfehler, ϱ die Strahlenbrechung für Z und ϱ' ihre Veränderung für 100' der Zenithdistanz bedeuten. Nennt man daher die Reductionen der AR. und Decl. von 1800 auf die Beobachtungszeit $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, so ist

$$\alpha = t + u + \epsilon + u'(t - T) + \epsilon' \frac{(z - Z)}{100} - \Delta\alpha$$

$$\delta = \varphi - c - z - \varrho - \varrho' \frac{(z - Z)}{100} - \Delta\delta.$$

Man kann aber auch, wenn $D = \varphi - c - Z - \varrho$,

$$\Delta\alpha = m + m' \frac{\delta - D}{100} = m - m' \frac{z - Z}{100}$$

$$\Delta\delta = n + n' \frac{\delta - D}{100} = n - n' \frac{z - Z}{100}$$

setzen, wo also m und n die Reductionen der AR. und Decl. für die Mitte der Zone bedeuten; und hiernit hat man:

$$k = u + \epsilon + u'(t - T) - m$$

$$k' = \epsilon' + m'$$

$$p = \varphi - c - \varrho - n$$

$$p' = n' - \varrho'.$$

Die Verbesserung der Uhrzeit ist zwar in der Histoire Céleste für jede Zone, und zwar für die nördliche und südliche Grenze derselben angegeben; allein diese Zahlen geben, wenn man sie zu der Reduction anwendet, weit weniger sichere Resultate, als wenn man die im Piazzischen Cataloge enthaltenen Rectascensionen der in der Zone befindlichen Sterne zum Grunde legt; dasselbe gilt von den Declinationen, welche man gleichfalls mittelst der angegebenen Collimationsfehler reduciren könnte. Ich nehme daher an den Angaben der Verbesserungen der Uhrzeit nur ϵ' , ϱ' aber aus den Strahlenbrechungstafeln; wobei zu bemerken ist, dass diese beide Zahlen, insofern die erste nicht durch eine Aenderung der Lage des Quadranten geändert wird, in derselben Zone stets dieselben bleiben. Die erstere liesse sich vielleicht aus den Angaben p. XI der Vorrede der H. C. genauer herausbringen, als aus den den Zonen beigezeichneten.

Unter Annahme der Bezeichnungen p. 69 und 70 der Fundamenta Astronomiae ist, wenn man die für alle an Einem Tage beobachteten Sterne gleichen Glieder weglässt, für 1800 + τ :

$$m = + 1,3364 \tau \sin \alpha \operatorname{tg} \delta + b \frac{\operatorname{tg} D}{15} + a \frac{\sec D}{15}$$

$$m' = + 0,0389 \tau \frac{\sin \alpha}{\cos D} + b \frac{0,001939}{\cos D} + a \frac{0,001939 \sin D}{\cos D}$$

$$n = + 20,0455 \tau \cos \alpha + b' + A \cos D + a' \sin D^*)$$

$$n' = - A, 022909 \sin D + a', 022909 \cos D,$$

wo also die Multiplicatoren von $\tau \sin \alpha$, A , a , a' , b , b' wiederum für jede Zone gleich bleiben und daher, sowie ϵ' und ϱ' , ein für allemal berechnet werden können.

Nachdem man auf diese Art $u'(t - T) - m$, $\epsilon' + m'$, $- n$, $n' - \varrho'$ etwa von 40 zu 40 Zeitminuten berechnet und daraus von 10 zu 10 Minuten interpolirt hat, geben die Piazzischen Sterne $u + \epsilon$ und $\varphi - c - \varrho$, wodurch man k und p vollständig erhält. Das folgende Beispiel wird den Nutzen dieser Reducionsart näher vor Augen legen.

*) Das Glied $A \cos D$ kann weggelassen werden, indem es für die ganze Zone gleich bleibt; das correspondirende Glied von n' wird selten 0,1, nie 0,16 übersteigen.

Zone von 14° bis 16°. Juli 14. 1797 = 1797,551.

Angegebene Verbesserung der Uhr für 14° — 0;5; für 16° = 1;3. Hieraus $e' = -0;667$. Täglicher Gang der Uhr — 1;4, also $n' = +0;058$, $q' = 1;808$, $Z = 15°$, wahre ZD = 15° 2' 5", D = 33° 49'.

t	19 ^b 0 ^m	19 ^b 40 ^m	20 ^b 20 ^m
a	284° 59' 45"	294° 59' 45"	304° 59' 45"
n	+ 19,90	+ 19,95	+ 19,51
b	+ 6,42	+ 5,73	+ 4,93
A	+ 3,13	+ 3,13	+ 3,13
a'	+ 2,13	- 1,37	- 4,87
b'	- 3,31	- 4,40	- 5,33
n'(t-T)	0,000	+ 0,039	+ 0,077
m	+ 3,922	+ 3,720	+ 3,515
m'	+ 0,183	+ 0,170	+ 0,154
n	- 12,25	- 23,31	- 33,59
n'	0,00	- 0,08	- 0,17

Hieraus folgt durch Interpolation:

t	n'(t-T) - m	k'	n	p'
19 ^b 0 ^m	-3,922	-0,484	+ 12,25	-1,781
10	-3,884	-0,487	+ 15,09	-1,83
20	-3,839	-0,490	+ 17,88	-1,85
30	-3,788	-0,493	+ 20,62	-1,87
40	-3,731	-0,497	+ 23,31	-1,89
50	-3,667	-0,501	+ 25,96	-1,91
20 0	-3,597	-0,505	+ 28,55	-1,93
10	-3,521	-0,509	+ 31,10	-1,95
20	-3,438	-0,513	+ 33,59	-1,98

In dieser Zone befinden sich 8 Piazzische Sterne:

	t	z
8 Cygni	19 ^b 24 ^m 17,10	14° 47' 10"
XIX. 207	28 41,41	14 2 40
" 221	30 34,50	14 0 17
" 278	38 20,42	14 17 51
z Cygni	38 46,32	15 33 25
XIX. 295	41 9,93	15 52 33
η Cygni	48 44,80	14 15 48
m "	20 10 54,48	14 27 35

Fügt man diesen Beobachtungen die aus der obigen Tafel genommenen Verbesserungen hinzu, so verandern sie sich in:

8 Cygni	19 ^b 24 ^m 13,34	14° 46' 50,7"
XIX. 207	28 37,90	14 2 18,6
" 221	30 31,02	13 59 55,2
" 278	38 16,89	14 16 57,3
z Cygni	38 42,41	15 32 42,5
XIX. 295	41 5,94	15 52 10,4
η Cygni	48 41,35	14 15 21,5
m "	20 10 51,13	14 27 3,1

Piazzis Verzeichniß enthält die Rectascensionen und Declinationen für 1800*):

8 Cygni	19 ^b 24 ^m 20,24	34° 2' 10,0"
XIX. 207	28 44,87	34 46 36,5
" 221	30 38,27	34 48 59,0
" 278	38 23,80	34 32 0,6
z Cygni	38 50,10	33 16 13,8
XIX. 295	41 12,70	32 56 43,1
η Cygni	48 45,00	34 33 37,8
m "	20 10 58,15	34 21 56,2

Es ist daher der Tafel hinzuzufügen:

8 Cygni	+ 6,90	48° 49' 0,7"
XIX. 207	+ 6,97	48 55,2
" 221	+ 7,25	54,2
" 278	+ 6,91	57,9
z Cygni	+ 7,69	56,3
XIX. 295	+ 6,76	58,5
η Cygni	+ 6,65	59,3
m "	+ 7,02	59,3
Mittel	+ 7,019	48° 48' 57,05"

wodurch man die Tafel für diese Zone erhält:

t	k	k'	p	p'
19 ^b 0 ^m	+ 3,097	- 0,484	48° 49' 9,3"	- 1,781
10	+ 3,135	- 0,487	12,1	- 1,83
20	+ 3,180	- 0,490	14,9	- 1,85
30	+ 3,231	- 0,493	17,7	- 1,87
40	+ 3,288	- 0,497	20,4	- 1,89
50	+ 3,352	- 0,501	23,0	- 1,91
20 0	+ 3,422	- 0,505	25,6	- 1,93
10	+ 3,498	- 0,509	28,2	- 1,95
20	+ 3,581	- 0,513	30,6	- 1,98

Um auch von der Anwendung dieser Tafel ein Beispiel zu geben, reducire ich die ersten 10 Sterne der Zone auf 1800:

	K'	AR. 1800	P'	δ 1800
8,9 ^m	+ 3,718	18 ^b 58 ^m 56,716	48° 49' 9,3"	+ 34° 6' 47,3"
-	+ 3,18	19 0 14,18	9,6	+ 34 5 9,6
7,8	+ 3,28	1 27,75	10,4	+ 34 26 55,4
9	+ 3,24	1 42,74	10,3	+ 34 16 32,3
7,8	+ 3,24	1 44,74	10,3	+ 34 16 32,3
9	+ 3,28	1 26,22	10,4	+ 34 26 55,4
8	+ 2,88	3 28,88	9,3	+ 33 0 13,3
8	+ 3,19	4 50,19	10,9	+ 34 2 57,9
8	+ 3,22	4 57,72	11,4	+ 34 8 56,4
8,9	+ 3,19	6 23,19	11,3	+ 34 4 8,3

*) Wäre es nöthig, bei einigen dieser Sterne die eigene Bewegung zu berücksichtigen, so würde man statt α und δ : $\alpha + \mu t$, $\delta + \mu' t$ nehmen, wo μ , μ' die jährlichen eigenen Bewegungen bezeichnen.

93. Ueber die Berechnung von Zonenbeobachtungen.*)

(Astr. Nachr. 1, p. 273.)

Die Nachricht, dass die Herren NISSEN und HANSEN die Beobachtungen der Histoire Céleste bereits reduciren, ist mir höchst erwünscht gewesen. Sagen Sie den unerschrockenen Herren viel Schönes von mir, dass sie sich durch den dicken Quartband nicht abhalten liessen. Es ist so sehr Mode geworden, dass Alles gesehen soll, und wenig geschieht, dass ich kaum gehofft hätte, dass so bald wirklich Hand angelegt worden wäre. — Die Herren N. und H. verdienen den Dank aller Astronomen, und den meinigen bringe ich ihnen mit der Ueberzeugung, dass diese bedeutende Arbeit eine der allernützlichsten ist, welche sie hätten übernehmen können. — Ich habe auch einige Tage auf ähnliche Art Rechnungen verwandt, indem ich nämlich die im Jahr 1821 von mir beobachteten Zonen auf eine ähnliche Art reducirt habe, was aber hier leichter war, da meine Beobachtungen absolute, nicht Differential-Beobachtungen sind. Der Rechnung habe ich dabei eine etwas verschiedene Form gegeben, welche ich Ihnen umständlich hersetzen will, falls etwa die Herren NISSEN und HANSEN etwas davon gebrauchen könnten.

Wenn die Beobachtungszeit = $1800 + \tau$ und

$$A = \tau - 0,3334 \sin \Omega - 0,02475 \sin 2\Omega$$

$$B = -8,97707 \cos \Omega + 0,08768 \cos 2\Omega - 0,57998 \cos 2\Omega$$

$$C = -20,255 \cos \omega \cos \Omega$$

$$D = -20,255 \sin \Omega$$

also wie bei meinen Reductionstafeln, mit Ausnahme der veränderten Epoche, so ist das, was ich in dem (durch Sie in Nr. 2 abgedruckten) Aufsätze durch A und B bezeichnet habe [Abh. 92, p. 266]:

$$A\alpha = A \cdot 3,96742 + \{A \cdot 20,0455 \sin \alpha + B \cos \alpha\} \frac{\lg \delta}{15} \\ + \{C \cdot \cos \alpha + D \cdot \sin \alpha\} \frac{\sec \delta}{15}$$

$$A\delta = C \lg \omega \cos \delta + \{A \cdot 20,0455 \cos \alpha - B \cdot \sin \alpha\} \\ - \{C \cdot \sin \alpha - D \cdot \cos \alpha\} \sin \delta$$

Ich nehme nun an, dass man für A und B eine Tafel für die Beobachtungszeit, sowie die bereits bekannte Tafel für C und D besitzt. Aus der ersten machte ich mir eine andere, dadurch, dass ich

$$A \cdot 20,0455 = g \cos G$$

$$B = g \sin G$$

setzte und nun $\log g$ und G in die Tafel brachte; ferner setze ich

$$D = h \cos H$$

$$C = h \sin H$$

was auch ein für allemal in eine Tafel gebracht werden kann, welche aber wohl, um bequemer zu sein als die unmittelbare Rechnung, von Tag zu Tag fortgehen muss. Dadurch werden

$$A\alpha = A \cdot 3,96742 + g \frac{\lg \delta}{15} \sin(G+\alpha) + h \frac{\sec \delta}{15} \sin(H+\alpha)$$

$$A\delta = g \cos(G+\alpha) + h \cos(H+\alpha) \sin \delta + h \sin H \cos \delta \lg \omega$$

oder das was am A. O. [p. 266] dafür gegeben ist,

$$m = g \sin(G+\alpha) \frac{\lg D}{15} + h \sin(H+\alpha) \frac{\sec D}{15}$$

$$+ m' = g \sin(G+\alpha) \frac{100'}{15 \cos D} + h \sin(H+\alpha) \frac{100' \lg D}{15 \cos D}$$

$$n = g \cos(G+\alpha) + h \cos(H+\alpha) \sin D + h \sin H \lg \omega \cos D$$

$$n' = + h \cos(H+\alpha) 100' \cos D - h \sin H \lg \omega 100' \sin D$$

Wenn man nun die für jede Zone von gleicher Declination gleichbleibenden Quantitäten ein für allemal in eine Tafel bringt, so wird die Rechnung höchst einfach. — So unbedeutend dieses ist, so mag es doch den Herren HANSEN und NISSEN wenigstens meinen Wunsch, ihnen meine Theilnahme zu zeigen, andeuten. — Die kleinen Glieder in A und B braucht man zu diesem Zwecke eigentlich nicht, indem sie sich durch die Differential-Beobachtungen fast ganz wegheben; in der Nähe des Pols müsste man die Voraussetzung der ganz gleichförmigen Präcession vielleicht verbessern.

*) [156 d. a. Verz. — Aus einem Briefe an SCHUMACHER VOM Juli 1822. — Vgl. auch Tab. Region. p. XXXV.]

94. Nachricht von einer auf der Königsberger Sternwarte angefangenen allgemeinen Beobachtung des Himmels.*)

(Astron. Nachr. 1, p. 257.)

Die Histoire Céleste hat uns den Sternenhimmel mit einer Vollständigkeit kennen gelehrt, welche alles, was vorher in dieser Hinsicht geleistet worden ist, weit übertrifft; sie hat die Sterne bis zur 8. Grösse incl., vom Nordpole bis zum südlichen Wendekreise, fast vollständig und auch noch viele kleinere angegeben, während früher von den teleskopischen Sternen nur die bekannt waren, welche sich den Astronomen zufällig dargeboten hatten. Die in der Histoire Céleste enthaltenen Beobachtungen sind an sich so genau, als man nur erwarten kann; auch können aus denselben die Oerter der Sterne so genau abgeleitet werden, dass sie zu den meisten astronomischen Zwecken genügen, wenn man nämlich die H. C. mit dem zweiten grossen, den Sternenhimmel betreffenden Unternehmen unserer Zeit, dem Piazzischen Verzeichnisse, verbindet. Die Histoire Céleste begründet daher eine neue Epoche für den Theil der Astronomie, welcher die Kenntniss des gestirnten Himmels in sich begreift, und welcher, sowohl für sich betrachtet, als wegen seines vielfältigen Einflusses auf andere Theile der Wissenschaft, von jeher der grössten Aufmerksamkeit der Astronomen theilhaftig wurde.

So viel aber die Histoire Céleste geleistet hat, so sind die Forschungen damit keineswegs erschöpft: es ist im Gegentheil nothwendig, dass die Beobachtungen wiederholt, und wünschenswerth, dass sie auf kleinere Sterne ausgedehnt werden, damit wir vollständige Verzeichnisse und Charten aller Sterne bis zur 9. Grösse incl. erhalten.

Die Wiederholung wird nothwendig, um den Bestimmungen noch mehr Genauigkeit zu geben, um über die eigenen Bewegungen der Sterne eine Andeutung zu erhalten, und endlich um Schreib- und Druckfehler zu entdecken, welche sich nur zu leicht einfinden. Die Ausdehnung der Untersuchung auf alle Sterne der 9. Grösse ist dagegen eine willkürliche Forderung, welche aber erfüllt werden kann und erfüllt werden muss, wenn wir für das Bedürfniss der jetzigen Astronomie vollständiger sorgen, und unseren Nachkommen eine unseren Hilfsmitteln entsprechende Kenntniss des Himmels hinterlassen wollen. Diese Vollständigkeit ist

das eigentlich Wünschenswerthe, aber sie ist durch Meridianbeobachtungen allein nicht zu erlangen, denn stets werden, vorzüglich in sternreichen Gegenden, viele Sterne unbemerkt oder unbeobachtet vorbeigehen; man kann aber so viele beobachten, dass die übrigen ohne bedeutende Unsicherheit, nach dem Augenmaasse in Charten gezeichnet werden können, wodurch wenigstens diese die gewünschte Vollständigkeit erlangen. Will man dann weiter gehen, und von allen verzeichneten Sternen die Oerter genau wissen, so müssen die Charten die ferneren Beobachtungen leiten.

Dieses ist ein Plan, dessen Ausführung grosse Anstrengungen kostet, aber auch grossen Nutzen herbeiführen wird. Wenn derselbe ausgeführt wäre, so würde es nie an vortheilhaften Vergleichungspunkten für Cometen und Planeten fehlen; eine einzelne Vergleichung einer Stelle des Himmels und der ihr entsprechende der Charte würde jeden freundartigen Gegenstand verathen, und ohne Zweifel noch manchen neuen Planeten aus der Verborgenheit hervorziehen; endlich hat die vollständige Kenntniss des Sternenhimmels ein für sich bestehendes Interesse, welches, mir wenigstens, so gross erscheint, dass es, durch Aufzählung anderer, daraus hervorgehender wissenschaftlicher Vortheile, nicht verstärkt zu werden braucht. — Dass ich die Grenze, welche irgendwo festgesetzt werden muss, nicht auf die 8. Grösse setze, dafür führe ich die Gründe an, dass viele Gegenden des Himmels dann sehr arm an bestimmten Sternen sein würden; auch dass die Hoffnung, durch Vergleichung des Himmels mit den Charten neue Planeten zu entdecken, fast verschwinden würde, indem von den vier bekannten neuen Planeten drei meistens nicht die 8. Grösse erreichen. Die Grenze nicht auf die 10. Grösse zu setzen, dafür spricht theils die Ueberfüllung der Charten und Verzeichnisse, welche daraus folgen würde; theils die ungeheure Vermehrung einer Arbeit, welche selbst in ihrer beschränkteren Grösse bereits eine Schwierigkeit darbietet, welche nur durch den angestrengtesten Fleiss überstiegen werden kann; endlich die Schwierigkeit der Beobachtungen selbst, welche bei sehr geringer Beleuchtung der Fäden in den Instrumenten gemacht werden müssten.

Ich habe nie daran gedacht, diesen Plan selbst ganz auszuführen, wohl aber habe ich stets gehofft

*) [165 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 188 (O.). 205. 224. 228 (O.). 231. 247. 256. 266 (O.). 305.]

dazu beitragen zu können, und zwar durch eine neue, nach Zonen der Abweichung geordnete Beobachtungsreihe. Ich habe demzufolge stets dahin gestrebt, mir Hilfsmittel zu verschaffen, welche zu diesem Zwecke mit Erfolg angewandt werden können; als die Freigebigkeit des hohen Königlichen Ministeriums mich in den Stand setzte, die Sternwarte mit einem Reichenbach'schen Hauptinstrumente zu versehen, hat dieser Zweck die Wahl desselben geleitet, und ich habe mich glücklich geschätzt, in der Erfindung der Reichenbach'schen Meridiankreise ein Mittel zu sehen, denselben mit allen anderen astronomischen Zwecken so vereinigen zu können, dass auf keiner Seite etwas zu wünschen übrig bleibt.

Dieses Instrument wurde im März 1820 aufgestellt und am 19. August 1821 konnte die erste Zone beobachtet werden. Die Zwischenzeit von etwa anderthalb Jahren wurde fast ausschliesslich auf eine Beobachtungsreihe der Circumpolarsterne gewandt, durch welche die Eigenthümlichkeiten des Instruments und die bei den Beobachtungen anzuwendenden Reductionen bestimmt werden sollten; ich hielt es für passend, diese Beobachtungen vorangehen zu lassen, ohne sie durch andere zu unterbrechen, indem sie sehr zahlreich sein mussten, wenn sie die gewünschte Sicherheit gewähren sollten, und es auch nicht vortheilhaft gewesen sein würde, die Kenntniss der wahren Reductionsart gar zu weit hinauszuschieben. Im August 1821 waren aber diese Vorbereitungen und andere, wovon ich unten reden werde, beendet und überdies besass ich an Herrn Dr. ARGELANDER einen Gehülfen, auf dessen Sorgfalt und Eifer bei dem ihm zufallenden Theile des Geschäfts sicher gerechnet werden konnte. Dem Anfange stand also nichts mehr im Wege, und da der Fortgang nicht anders als durch das (freilich ausgezeichnet schlechte) Wetter gestört worden ist, so schiebe ich nicht länger auf, meinen astronomischen Freunden eine genauere Nachricht von der neuen Beobachtungsreihe zu ertheilen. Die ersten Beobachtungen mit dem neuen Instrument zeigten bald, dass der Zeitverlust, welchen das Ablesen der vier Nonien und der Wasserwaage verursacht, viel zu bedeutend ist, um die Menge der sich durch den Meridian drängenden Sterne auch nur einigermaßen vollständig zu beobachten; selbst ein einzelner Nonius und die Wasserwaage rauben zu viele Zeit, und die Vernachlässigung der letzteren zu viele Genauigkeit. Ich war daher gezwungen, auf ein Hilfsmittel zu denken, wodurch die Genauigkeit erhalten und der Zeitaufwand vermindert wird; beides erreichte ich dadurch, dass ich an jeden der Pfeiler des Instruments ein grosses Mi-

roskop befestigte, dessen Abschenslinie senkrecht auf die Ebene des Kreises steht und in dessen Brennpunkte die Kreuzfäden sich durch Drehung einer Mikrometerschraube bewegen, so dass man mit diesen Mikroskopen (in beiden Lagen des Instruments) unmittelbar die Unterschiede der Zenith- oder Polardistanzen beobachten kann, also auch Zenith- oder Polardistanzen selbst, sobald eine derselben gegeben ist. Da man aber diese Mikroskopen ein so grosses Sefeld nicht geben kann, dass man in allen Fällen erkennen könnte, auf welchen Strich des Kreises man die Kreuzfäden bringt, so war es nöthig, noch einen besondern mit Zahlen versehenen Hilfsbogen von 5° Ausdehnung durch eine Klemmschraube an die Stelle des Kreises zu befestigen, auf welcher man beobachten will; ferner war eine Einrichtung nöthig, welche die Grenzen der Zonen angibt und den Beobachter, durch das Aufschlagen eines kleinen Hammers, von dem Ueberschreiten dieser Grenzen benachrichtigt. Diese verschiedenen Einrichtungen, welche durch eine einzelne, nur wenige Secunden raubende Ablesung die sonst nothwendigen fünf ersetzen, hat Herr FRAUNHOFER in der grössten Vollkommenheit, genau nach meinem Vorschlage auszuführen die Güte gehabt.

Aus den mit diesen Mikroskopen gemachten Ablesungen lässt sich leicht ableiten, was die unmittelbare Beobachtung der vier Nonien und der Wasserwaage für jeden Stern gegeben haben würde: man sucht nämlich den Ort des Anfangspunkts der Scale des Mikroskops durch Ablesung eines willkürlichen Punkts im Umfange der Zone sowohl mit dem Mikroskope, als an den Nonien etc.; mit diesem Orte vergleicht man die Ablesungen für jeden Stern, wodurch also die Declinationen nicht durch Differenzen von bekannten Sternen, sondern durch absolute Beobachtungen gefunden werden. Die Rectascensionen werden, indem die Lage des Instruments gegen den Meridian stets auf das Genaueste bekannt ist, unmittelbar durch die Fundamentalsterne gegeben, so dass die Beobachtungen der Zonen genau dieselben Grundlagen erhalten, auf welchen alle anderen Beobachtungen auf meiner Sternwarte beruhen. In dieser alleinigen Abhängigkeit von den allerzuverlässigsten Bestimmungen liegt ohne Zweifel ein wesentlicher Vorzug der neuen Beobachtungsreihe, deren Einzelheiten ich jetzt etwas näher beschreiben will.

Diese Beobachtungen erfordern zwei Beobachter, deren einer die Rectascension und das Einstellen der Mitte der Horizontalfäden auf den Stern besorgt, während der andere das Mikroskop abliest; der erste bin ich selbst, der andere ist Herr Dr. ARGELANDER. Soll

eine Zone beobachtet werden, so wird der Hammer so aufgeschraubt, dass er die Grenzen derselben bezeichnet, der Hülfsbogen so, dass seine Mitte auf die Mitte der Zone fällt; dann werden die nördlichen und südlichen Grenzen der Zone an den 4 Nonien und der Wasserwaage und zugleich am Mikroskope abgelesen und die Angabe der meteorologischen Instrumente angemerkt. Nach diesen Vorbereitungen bewege ich das Fernrohr langsam auf- und abwärts, bis ein Stern in demselben erscheint; die Horizontalfäden werden eingestellt und dieses dem zweiten Beobachter durch ein Top bezeichnet, die Durchgangszeit durch einen Faden wird observirt, die Grösse oder sonstige Eigenthümlichkeit*) des Sterns wird angemerkt und nun von jedem Beobachter sein Theil der Observation aufgeschrieben, wobei eine Anordnung befolgt wird, welche theils die möglichst grosse Zeitersparnis, theils die Sicherung vor Irrthümern bezweckt. — Auf diese Weise werden die Beobachtungen ununterbrochen (falls nicht Wolken dazwischen kommen) wenigstens anderthalb Stunden lang fortgesetzt und mit der Wiederholung der Ablesungen des Mikroskops und der meteorologischen Instrumente geschlossen. Falls nicht andere Beobachtungen hindern, wird nach einer halben oder ganzen Stunde eine neue Zone vorgenommen, so dass in der Regel in jeder Nacht drei Stunden der Rectascension beobachtet werden.

Die Zonen sind so angeordnet, dass ihre Mitte auf die geraden Grade der Declination fällt; damit zwischen zwei zusammenstossenden keine Lücke bleibe, im Gegentheile stets einige doppelt beobachtete Sterne vorkommen, habe ich die Breite der Zonen etwas grösser als 2°, nämlich 2° 12' angenommen. Am Anfang wurde das 66 Mal vergrössernde Ocular angewandt; allein ich bemerkte bald, dass dasselbe für das sehr lichtstarke Fernrohr zu schwach ist, und nahm daher, von der 11. Zone an, das 107 Mal vergrössernde, welches in der That weniger überfließendes Licht hat, und etwas genauere Beobachtungen liefert.

Bei einem Geschäfte dieser Art, welches eine Thätigkeit von vielen Jahren fordert, ist eine strenge Zeitökonomie nothwendig; auch muss häufig eine andere Beobachtung denselben aufgeopfert werden, was

jedoch bei den Gegenscheinern der Planeten weder der Fall gewesen ist noch sein wird. Dennoch hat die Anzahl der Zonen vom 19. August bis Ende 1821 nur auf 39, und bis heute (17. Juni 1822) auf 89 gebracht werden können, woraus man abnehmen kann, wie ungewöhnlich schlecht das Wetter in diesem Jahre gewesen ist. Diese Beobachtungen fallen, ein paar Ausnahmen abgerechnet, sämmtlich zwischen -5° und $+15^\circ$ der Abweichung und gehen nur selten über Sterne der 9. Grösse hinaus.

Es wird aber nöthig sein, etwas näher anzugeben, welche Lichtstärke der Sterne ich durch die 9. Grösse bezeichne, indem bei verschiedenen Astronomen die grössten Verschiedenheiten vorkommen. TOBIAS MAYER, PIAZZI und die Histoire Céleste scheinen im Ganzen zu stimmen, aber BRADLEY notirt die Sterne meistens um eine Grösse heller; MASKELYNE dagegen hat Sterne beobachtet, denen er die 10., 11. und 12. Grösse beilegt, welches letztere er, bei einem mit der Histoire Céleste übereinstimmenden Massstabe, in dem erleuchteten Fernrohrs seines Mauerquadranten zuverlässig gar nicht hätte sehen können. Ich habe mich bemüht, der Hist. Cél. zu folgen und stimme auch oft mit derselben überein: ich gebe allen Sternen die 9. Grösse, welche ich, bei hinlänglich starker Erleuchtung der Fäden, noch so gut sehen kann, dass es schwer ist, sie, bei der Bewegung des Fernrohrs, unbemerkt durchs Schfeld gehen zu lassen; Sterne 9. bis 10. Grösse sind schon schwieriger aufzufinden, und für die 10. Grösse würde, selbst in meinem Fernrohr von 4 Zoll Öffnung, die Beleuchtung so geschwächt werden müssen, dass die Fäden nicht mehr deutlich erscheinen. Welche Sterne ich mit den verschiedenen Grössen bezeichne, wird man genauer aus dem unten folgenden [hier weggelassenen] Verzeichnisse sehen; ich werde aber in der Folge den Rath meines verehrten Freundes TRALLES ausführen, und in einer kenntlichen Gegend des Himmels, etwa den Plejaden, eine Anzahl von Sternen angeben, welchen ich die verschiedenen Grössen beilegen würde. Sehr erwünscht würde es mir und auch Anderen sein, wenn Herr Dr. OLBERS, der mit dem Sternhimmel so genau bekannt ist, seine Meinung über diesen Gegenstand öffentlich aussprechen wollte.

Diejenigen Astronomen, für welche diese Nachricht über die angefangene Beobachtungsreihe einiges Interesse hat, werden auch das Resultat einer Untersuchung der bei der nothwendigen Schnelligkeit des Aufeinanderfolgens erreichten Genauigkeit gern sehen. Die erstere ist so, dass in sternreichen Gegenden im Durchschnitt häufig 3 Sterne in einer Minute, nie aber mehr, beob-

*) Doppelsterne der ersten Classe zeigt die 107malige Vergrösserung des bewunderungswürdigen Fernrohrs bei günstigen Umständen auf den ersten Blick; mehrere sind bereits gefunden, sowie Doppelsterne der übrigen Classen. Bei weniger günstiger Luft können aber die feineren der ersten Classe leicht unbemerkt durchgehen; oft sind die Sterne so undeutlich, dass an Entdeckungen dieser Art gar nicht zu denken ist (vgl. Abh. 100).

achtet sind; wollte man die AR. an zwei Fäden observiren, was jetzt nur ausnahmsweise, oder wenn ich des ersten Fadens nicht ganz sicher zu sein glaube, geschieht, so würde man kaum mit zwei Sternen in der Minute fertig werden. Es frägt sich nun, wie viel durch die Beobachtungen an einem Faden geleistet wird, und diese Frage ist nur durch häufige Vergleichen zu beantworten, indem der Zustand der Luft dabei sehr in Betracht kömmt: sind die Sterne unendlich und wallen sie sehr stark, wie es leider häufig ist, so vermehrt dieses die Unsicherheit einer einzelnen Fadenbeobachtung sehr merklich, wie ich auch durch Vergleichung von Beobachtungen bei günstigen und ungünstigen Umständen gefunden habe. Da man aber, bei einem Unternehmen von so grosser Ausdehnung, unter dem 55. Grade der Breite in der Wahl der Umstände nicht gar zu ängstlich sein darf, sondern das heitere Wetter benutzen muss, so wie es vorkömmt, so bleibt nichts anderes übrig, als durch Vergleichung sehr vieler Beobachtungstage einen mittlern Werth des wahrscheinlichen Fehlers zu bestimmen; um hierbei keine Willkür obwalten zu lassen und den wahrscheinlichen Fehler so anzugeben, wie er wirklich, nicht wie er den Beobachtungen am günstigsten ist, habe ich alle im Jahre 1821 vorkommenden, seit der Anwendung des stärkeren Oculars, doppelt oder mehrmals beobachteten Sterne auf den Anfang von 1825 reducirt und das Verzeichniss davon dieser Nachricht beigelegt. Es folgt daraus, dass der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung

$$\text{in AR.} = \pm 0,1548, \text{ Decl.} = \pm 1,013$$

ist; BRADLEY'S Beobachtungen geben den ersten $0,1426$, den anderen $0,98$, also beide etwas kleiner; ich bin aber mit diesem Resultate, rücksichtlich der Schnelligkeit, mit welcher die Beobachtungen gemacht werden müssen, wohl zufrieden, und glaube auch, dass diese Genauigkeit für die meisten Anwendungen hinreichend ist. — Dasselbe Instrument gibt, wenn es durch die Nonien abgelesen und mit vollkommener Musse angewandt wird, den w. F. der Declinationen in der Nähe des Aequators $= 0,76$; dass derselbe bei den Zonenbeobachtungen nur um $\frac{1}{3}$ grösser ist, beweiset einestheils die Güte meines Apparates, andernteils aber auch die vorzügliche Sorgfalt meines braven ARKELANDER, ohne welche der Apparat eben so wenig geleistet haben würde, als sonst wohl gute Hilfsmittel in schlechten Händen.*)

Für die Bekanntmachung der Beobachtungen wird

*) (Ueber zufällige und systematische Fehler vgl. auch die Bemerkungen ARKELANDER'S, BONNER Beob. 4. Bd., § 4 der Einleitung.)

jährlich gesorgt werden; die ersten 39, im J. 1821 beobachteten Zonen, sind bereits unter der Presse. Die Form, welche ich dabei beobachte, ist zwar nicht ganz die ursprüngliche, welche zu viel Raum eingenommen haben würde, aber es ist nicht schwer, die unmittelbar beobachteten Zahlen daraus wieder herzustellen, welches in einigen Fällen Werth haben kann. Ich gebe nämlich in der ersten Columne die Grösse des Sterns, in der andern den beobachteten Faden, in der dritten die auf den mittlern Faden reducirte Beobachtungszeit, in der 4. und 5. die Angaben des Hilfsbogens und des Mikroskops, und endlich in der 6. die scheinbare, d. i. mit der Refraction behaftete Declination. Diese letzte erhält man, wenn man die in Grade, Minuten und Secunden verwandelten Zahlen der 4. und 5. Columnen zu der scheinbaren Declination des Nullpunkts des Mikroskops hinzufügt, welche durch die (jedemal angeführten) Ablösungen und den Ort des Aequators auf dem Instrumente gefunden wird; dieser aber ist stets durch die Beobachtungen der beiden Polarsterne bestimmt, und die Verbesserungen, welche aus den kleinen Theilungsfehlern des Kreises, der Biegung des Fernrohrs und dem Gewichte des Hilfsbogens und des Hammers entstehen, sind dabei angebracht. Endlich ist bei jeder Zone noch die Verbesserung der Uhrzeit mit Einschluss der Abweichung des Instruments vom Meridiane, für die mittlere Declination, angeführt.

Um die Benutzung der rohen Originalbeobachtungen so sehr als möglich zu erleichtern, hoffe ich, stets mit den Beobachtungen zugleich Reductionstabellen bekannt zu machen, denen ähnlich, welche ich für die Histoire Céleste vorgeschlagen habe. Für die im Jahre 1821 beobachteten 39 Zonen habe ich diese Tafeln bereits berechnet und auch schon die 194 Sterne, deren Verzeichniss dieser Nachricht beiliegt, damit auf 1825 reducirt.

Diese Nachricht mag für jetzt genügen. Aus dem zehnmonatlichen Fortgange der Arbeit habe ich die Schwierigkeiten kennen gelernt, welche die successive Beobachtung des ganzen Himmels, unter dem Himmelsstrieche von Königsberg, haben wird. Die Reihe von Jahren, welche bis zum Ende verstreichen wird, ist, selbst unter der Annahme, dass der Himmel mir Kraft und Gesundheit erhält, noch nicht zu bestimmen; aber es ist wünschenswerth, dasselbe nicht gar zu weit hinausgeschoben zu sehen, und daher ist es mir erfreulich, die Herren Prof. STRUVE in Dorpat und Dr. WALBECK in Åbo bereitwillig gefunden zu haben, einen Theil der Arbeit zu übernehmen, sobald sie die dazu nöthigen

Hilfsmittel besitzen werden. Andere Theilnehmer, mit gleich guten und starken Meridiankreisen versehen, würden mir sehr willkommen und ich sehr bereit sein, über die Vertheilung der Gegenden des Himmels die nöthigen Verabredungen zu treffen. — Zu einer Zeit, wo eine astronomische Societät gestiftet worden

ist, deren Hauptzweck die Erforschung des Himmels ist, halte ich die Hoffnung, den Plan in seinem ganzen Umfange einmal realisiert zu sehen, nicht für ausschweifend.

[Es folgen noch die Oerter von 194 Zonen-Sternen für 1825.0.]

95. Ueber eine vollständigere Darstellung des gestirnten Himmels.*)

(Bode's Jahrbuch f. 1828, p. 222.)

Mit Vergnügen benutze ich Ihr gütiges Anerbieten, durch das astronomische Jahrbuch eine Nachricht von den Maassregeln bekannt zu machen, welche die Königl. Akademie der Wissenschaften ergriffen hat, um eine vollständigere Kenntniss des Himmels herbeizuführen. Zwar wird die Akademie selbst den Astronomen das Nöthige mittheilen [s. Abh. 96], sobald eine Karte, welche als Probe hier gestochen wird, und deren Vollendung der Kupferstecher unerwartet lange verzögert, ausgegeben werden kann; allein dennoch wird eine Nachricht in Ihrem vielgelesenen Jahrbuche am rechten Orte sein.

Die Kenntniss aller Fixsterne, welche man mit einem Fernrohre von der Lichtstärke der vortrefflichen Fraunhofer'schen Cometensucher unter günstigen Umständen sehen kann, gewährt ohne Zweifel ein sehr erhebliches astronomisches Interesse. Wenn die allgemeine Aufgabe der Astronomie ist, die vollständige Kenntniss aller am Himmel sichtbaren Gegenstände herbeizuführen, so dürfen auch die Fixsterne nicht so unbekannt bleiben, als sie bis jetzt sind, und sie würden einen gegründeten Anspruch auf die Aufmerksamkeit der Astronomen haben, selbst wenn sie nicht so häufig benutzt würden, um Planeten und Cometen damit zu vergleichen u. s. w. — Es ist auch bekannt, dass die Astronomen theils wirklich bemüht gewesen sind, die Fixsterne stets vollständiger kennen zu lernen, theils Vorschläge dazu gemacht haben. Dieses war der Zweck der Lilienthaler astronomischen Gesellschaft, und auch die Londoner Astronomical Society stellte sich diese Aufgabe. Vielleicht haben wir es der ersten Anregung zu verdanken, dass HARDING grosse Anstrengungen machte um ein vollständigeres Bild des Himmels zu geben, indem er alle Sterne, deren Oerter beobachtet waren, und noch manche andere auf seine vortrefflichen Karten brachte.

Allein selbst dieses neueste und grösste Verdienst um die Verzeichnung der Sterne ist weit entfernt, Vollständigkeit bis zu der angegebenen Grenze zu gewähren; auch war die Anzahl der beobachteten Sterne nicht hinreichend, um einer so vollständigen Verzeichnung zum Grunde gelegt zu werden, und man kann dieses als Grund geltend machen, weshalb Niemand versuchte, den angegebenen Zweck der Lilienthaler Gesellschaft in seiner ganzen Ausdehnung zu erreichen. Die Eintheilung des Himmels in kleinere Theile, welche jene Gesellschaft beabsichtigte, erscheint nothwendig, indem die Grösse der Arbeit unmöglich macht, dass ein Einzelner sie kräftig fördere.

Die Schwierigkeit, dass nicht genug Sterne beobachtet waren, um sie der Verzeichnung zum Grunde zu legen, ist für die Zone von -15° bis $+15^{\circ}$ Declination jetzt gehoben, indem die (theils schon bekannt gemachten, theils in der bald erscheinenden X. Abtheilung enthaltenen) Königsberger Beobachtungen sich bereits vollständig über diese Zone erstrecken, und über 32000 Sterne enthalten, wodurch alle Gegenden derselben mit bekannten Sternen angefüllt werden.

Um indessen über die Hinlänglichkeit dieser Anzahl entscheiden zu können, und um die Schwierigkeit einer darauf zu gründenden vollständigen Verzeichnung genau kennen zu lernen, habe ich den Sommer 1824 angewandt, eine der sternreichsten Gegenden des Himmels, von $18^{\circ} 56''$ bis $20^{\circ} 4''$ AR. und von -15° bis $+15^{\circ}$ Decl., so zu bearbeiten, dass eine Karte davon alle Sterne bis zu der angegebenen Grenze enthalten sollte. Ich bin nicht ganz damit fertig geworden, sondern nur von der nördlichen Grenze bis zu -1° Decl. gelangt, hoffe aber, das ganze Blatt von 510 Quadratgraden im nächsten Jahre zu vollenden. Es hat sich indessen schon gezeigt, dass die Schwierigkeiten, wenn man zweckmässige Mittel anwendet, überwinden werden können, und dass selbst

* [206 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 3 (O.). 262. 266 (O.). 271. 277. 282. 284 (O.). 291. 296 (O.). 315 (O.). 330. 334 (O.).]

Bode'st. Abhandlungen. 2. Bd.

das grosse Detail einer solchen Sternkarte, ohne Undeutlichkeit oder Ueberfüllung, bei einem Maassstabe von $\frac{5}{4}$ Pariser Linien für einen Grad, dargestellt werden kann. — Zuerst wurden, durch einen vortrefflichen Schüler von mir, Herrn Baron von STEINHILF, alle in Paris, Palermo und Königsberg beobachteten Sterne in das Netz der Karte gezeichnet; dann verglich ich diese stellenweise mit dem Himmel und trug alle Sterne ein, welche sich ausserdem noch vorfanden. Dieses geschah nach dem Augenmaasse, allein die Sicherheit desselben wurde durch eine Einrichtung vermehrt, welche dem Beobachter die Richtung der Declinations- und Parallellkreise stets andeutet [vgl. Abh. 97, p. 278]. Auf diese Art suchte ich dem Blatte die Vollständigkeit zu geben, dass jeder mit einem Fraunhofer'schen Cometsucher sichtbare, allein nicht verzeichnete Stern, sogleich als ein neuer Planet, oder als veränderlich erkannt werden kann. Damit man schützen könne, wie gross die Anzahl der vorhandenen Sterne ist, führe ich an, dass 100 Quadratgrade, in deren Mitte die drei hellen Sterne des Adlers stehen (von $19^{\circ} 20''$ bis $20^{\circ} 0''$ AR. und von $+ 3^{\circ}$ bis $+ 13^{\circ}$ Decl.) 439 beobachtete und 404 durch das Augenmaass bestimmte, also im Ganzen 843 Sterne enthalten; die Beobachtungen in der *Histoire Céleste* geben auf demselben Raume, wie man aus HARDING'S Karte sehen kann, nur 207 Sterne.

Die grosse Menge der zu verzeichnenden Sterne macht es nothwendig, eine Bezeichnungsart zu wählen, welche der Deutlichkeit und Uebersicht nicht nachtheilig ist; ich habe alle nur mit Fernröhren sichtbare Sterne durch runde Punkte, nach der Grösse derselben verschieden, angedeutet; die mit blossen Augen sichtbaren haben Strahlen erhalten, wodurch man den Vortheil erlangt, diese letzteren auf den ersten Anblick der Karte unterscheiden zu können. Da es für den astronomischen Gebrauch der Karten wünschenswerth ist, dass man die durch Meridianbeobachtungen bestimmten Sterne erkenne, so ist auch dieses auf schickliche Weise angedeutet: Doppelsterne und andere welche zu nahe beisammen stehen, um auf dem Maassstab der Karte noch deutlich getrennt werden zu können, sind von den übrigen unterschieden.

Die Hauptschwierigkeit, welche sich der allgemeinen Entwerfung solcher Karten entgegensetzt, ist der grosse Zeitaufwand, welchen dieselbe erfordert. Die Vorsteher der grossen Sternwarten, welchen die heitern Nächte kostbarer sein müssen, als anderen, weniger voll-

ständig ausgerüsteten Astronomen, werden sich einem Unternehmen dieser Art weniger leicht hingeben können, als die letzteren; allein wenn ein Einzelnr auch alle seine Zeit darauf verwenden wollte, so würde die Arbeit doch nur so langsam fortschreiten, dass erst unsere Nachkommen das zu Stande bringen würden, wovon die Astronomie schon früher (z. B. durch die höchst wahrscheinlich dadurch herbeigeführt werdende Entdeckung neuer Planeten) Nutzen ziehen kann. Aus diesem Grunde kömmt es darauf an, die Theilnahme Mehrerer an einem so nützlichen Unternehmen anzuregen, und es scheint, dass gerade unsere Zeit, welche den astronomischen Wissenschaften viele thätige Theilnehmer erweckt hat, vorzüglich günstig ist, dasselbe so zu befördern, dass die Zone, für welche jetzt die Grundlage vorhanden ist, in einer mässigen Reihe von Jahren bearbeitet werden kann. Nach ihrer wirklichen Vollendung hoffe ich, wenn der Himmel mir fernere Kräfte schenkt, die nächste nördliche Zone von 30° Breite, von $+ 15^{\circ}$ bis $+ 45^{\circ}$ Decl., welche ich jetzt im Meridian beobachte, gleichfalls vollendet zu haben und dadurch die Grundlage zu einer Fortsetzung der Karten zu liefern.

Ich habe hier die Gründe darzustellen gesucht, welche die Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin bewegen haben, sich dieses Unternehmens anzunehmen. Sie hat beschlossen, die Astronomen aufzufordern, 24 Blätter (von Stunde zu Stunde der geraden Aufsteigung und von $- 15^{\circ}$ bis $+ 15^{\circ}$ Abweichung) zu bearbeiten, nach dem Muster der oben erwähnten 100 Quadratgrade, welche der Einladungsschrift beigelegt wird; sie wird jedes eingehende Blatt, unter dem Namen des Verfassers, sogleich in Kupfer stechen lassen und auch eine Prämie dafür aussetzen; sie hat eine Commission ernannt, welche das ganze Geschäft führen und mit den Theilnehmern correspondiren wird. Das Nähere über die getroffenen Anordnungen wird den Astronomen sehr bald durch den Prospectus bekannt werden, welchen die Akademie mittheilen wird; es wird daher unnöthig sein, hier etwas darüber zu sagen, allein ich glaube mit Ihnen, dass es den Astronomen angenehm sein wird, von den grossen Beförderungen unserer Wissenschaft, welche wir dieser Maassregel der Akademie verdanken werden, vorläufige Kenntniss zu erhalten*).

*) Bei mir eingegangen den 30. Septbr. [1825]. S. auch *Astronomisches Jahrb.* 1827, Seite 226. 227. BODE.

96. Entwurf zu einer Herausgabe neuer Himmelskarten.*

(Astron. Nachr. 4, p. 297.)

Die Himmelskarten der neueren Zeit, von FLAMSTEED, BODE und HARDING enthalten diejenigen Fixsterne, deren Oerter zur Zeit ihrer Verfertigung astronomisch bestimmt waren; die Zahl derselben ist von etwa 3000, welche im Flamsteed'schen Cataloge und dem darauf gegründeten Atlas verzeichnet sind, nach und nach vermehrt worden und durch die Histoire Céleste und den Piazzî'schen Catalog bis auf etwa 50000 gestiegen, welche sämmtlich HARDING in seinen Karten dargestellt hat. Trotz dieses so sehr vermehrten Reichthums der Himmelskarten sind dieselben aber weit entfernt, alle durch Fernröhre sichtbare Sterne, deren Zahl unermesslich zu sein oder mit der Lichtstärke der Fernröhre unbegrenzt zu wachsen scheint, zu enthalten. Absolut vollständige Himmelskarten kann man nie erhalten, und wenn man dennoch eine Vollständigkeit zu erlangen strebt, so kann sich diese nur auf eine für die Helligkeit der Sterne angenommene Grenze beziehen.

Vor der Entdeckung der Fernröhre war eine solche Grenze durch die Kraft des Auges gegeben und die Himmelskarten konnten die sich darauf beziehende Vollständigkeit erlangen. FLAMSTEED aber blieb, obgleich er viele Sterne hinzufügte, von der zu seiner Zeit erreichbaren Vollständigkeit weit entfernt; die Unzählbarkeit der Sterne war die Ursache, weshalb weder dieser grosse Astronom noch einer seiner Nachfolger versuchte, die Himmelskarten bis zu einer gewissen Grenze vollständig zu machen und weshalb man sich begnügte, alle astronomisch bestimmte Sterne zu verzeichnen, ohne Rücksicht auf andere von derselben Helligkeit, welche bis dahin unbeachtet geblieben waren.

Es ist aber ohne Zweifel sehr wünschenswerth, Himmelskarten zu besitzen, welche bis zu einer gewissen Grenze vollständig sind; um so wünschenswerther, je weiter hinaus diese Grenze gesetzt wird. Wenn man dieselbe durch die kleinsten Sterne bestimmt, welche mit einem Cometensucher von FRAUNHOFER von 34 Linien Öffnung und zehnmaliger Vergrößerung noch gesehen und mit den Meridiankreisen von REICHENBACH und ERTEL (welche mit Fraunhofer'schen Fernröhren von 48 Linien Öffnung versehen sind) im erleuchteten Sehfeld ohne Schwierigkeit beobachtet werden kön-

nen, so wird nicht nur bei den astronomischen Anwendungen der Himmelskarten selten oder nie noch etwas zu wünschen, sondern auch eine Ausführlichkeit erlangt sein, deren Ueberschreitung sowohl äusserst schwierig, als auch wegen der gar zu grossen Menge der Sterne, deren Verzeichnung dieselbe zur Folge haben musste, der Uebersicht nachtheilig sein würde. Erlangt man aber diese Ausführlichkeit, so werden die Karten, durch Vergleichung einer Gegend derselben mit dem Himmel, alles Neue schon durch den blossen Anblick zu erkennen geben, insofern seine Helligkeit nicht geringer ist, als für die angenehme Grenze. Dergleichen Karten werden also, ausserdem dass eine so genaue Kenntniss des Himmels ein eigenthümliches Interesse gewährt und viele astronomische Beobachtungen erleichtert, auch das wahre Mittel darbieten, die Kenntniss unseres Sonnensystems durch Entdeckung neuer Planeten zu erweitern; sie werden diese sogar sicher herbeiführen können, während ohne specielle Himmelskarten nur ein günstiger Zufall die Auffindung veranlassen kann.

In der That hat man bereits wiederholt Maassregeln ergriffen, welche die Verfertigung von Karten dieser Art bezwecken; sie haben aber nicht den gewünschten Erfolg gehabt, indem sich Schwierigkeiten fanden, deren nähere Anführung zeigen wird, dass sie jetzt nicht mehr unübersteiglich sind. Die Vollständigkeit der Himmelskarten bis zu der angegebenen Grenze ist nur dadurch zu erlangen, dass man so viele durch Meridianbeobachtungen bestimmte Sterne in das Netz zeichnet, dass alle übrigen durch Schätzung nach dem Augenmaasse, etwa durch ein dieselbe erleichterndes Hilfsmittel unterstützt, nachgetragen werden können; durch zonenweis geordnete Meridianbeobachtungen allein kann man, selbst wenn sie mehrere Male wiederholt werden, nicht die Sicherheit erlangen, alle Sterne bis zu der angenommenen Grösse bestimmt zu haben. Selbst die Histoire Céleste enthält aber weit weniger Sterne, als zur Grundlage der vollständigen Karten nothwendig sind, weshalb eine neue, noch zahlreichere Reihe von Meridianbeobachtungen vorangehen musste; eine solche ist auf der Königsberger Sternwarte gegenwärtig über die Zone von -15° bis $+15^{\circ}$ Abweichung ausgedehnt, und enthält etwa 32000 Sterne, welche, nach einem mit einer der sternreichsten Gegenden des Himmels vorgenommenen Versuche, vollkommen hinreichend sind.

*) [1807 d. a. Verz. — Programm der Berliner Akademie.]

Ausser dieser für die angeführte Zone von 30° Breite nun beseitigten Schwierigkeit ist noch die vorhanden, dass die Vervollständigung der Karten nach dem Augenmaasse so mühsam und zeitraubend ist, dass ein Einzeler nur langsam Fortschritte darin machen könnte; diese kann nur durch das Zusammenwirken Mehrerer gehoben werden, und der gegenwärtige thätige Eifer der Freunde der Astronomie gibt die Hoffnung, dass Viele beitragen werden, ein so grosses und nützlichcs Unternehmen zu befördern.

Die Akademie der Wissenschaften wünscht daher die Freunde der Astronomie zu diesem Zwecke zu vereinigen, und ihnen alle Erleichterungen zu verschaffen, welche sie darbieten kann. Sie ladet die Astronomen ein, diejenigen 24 Blätter eines vollständigen Himmelsatlases zu entwerfen, zu welchen jetzt die Grundlage vorhanden ist, nämlich von -15° bis $+15^\circ$ der Abweichung und für die 24 Stunden der geraden Aufsteigung. Sie stellt folgende dabei zu beobachtende Regeln fest:

1. Das Netz besteht aus Quadraten für die Grade der Aufsteigung und Abweichung, so dass jeder Grad $5\frac{1}{2}$ Pariser Linien misst; es geht von 4 Zeitminuten vor dem Anfang einer Stunde bis zu 4 Zeitminuten nach dem Ende derselben und enthält also 510 Quadrate.

2. In dieses Netz werden die in Palermo, Paris und Königsberg beobachteten Sterne für den Anfang des Jahres 1800 gezeichnet.

3. Die Grössen derselben werden so angedeutet, wie der beiliegende Theil eines zum Versuch der Ausführbarkeit verfertigten Blattes sie angibt; die nur durch Fernröhre sichtbaren Sterne durch grössere und kleinere schwarze Kreise, die mit blossem Auge sichtbaren durch hinzugefügte Strahlen.

4. Wenn ein Stern nur einmal beobachtet ist, so wird dieses durch einen Strich an einer Seite desselben angedeutet; wenn er zwei oder mehrere Male beobachtet ist, durch zwei Striche zu beiden Seiten desselben. Für die mit blossem Auge sichtbaren Sterne, wo diese Bezeichnung undeutlich werden würde, ist sie unnöthig, indem diese sämmtlich im Piazzischen Cataloge vorkommen und daher schon ihre Strahlen andeuten, dass sie mehrere Male beobachtet sind.

5. Die so entworfenen Blätter werden mit dem Himmel verglichen, und alle Sterne, bis zu der aus dem Probeblatte hervorgehenden Grenze, nach dem Augenmaasse, möglichst genau gezeichnet, wobei zu bemerken ist, dass man alle Sterne der Karte mit einem Fraunhofer'schen Cometensucher von 34 Linien Oefnung und zehnmaliger Vergrösserung unter vortheilhaften Umständen noch sehen kann.

6. Wenn Sterne zu nahe beisammen stehen, um sie in der Zeichnung deutlich trennen zu können, so wird nur der hellere derselben gezeichnet und ihre Anzahl durch eine gleiche Anzahl unter demselben gezogenen Striche angedeutet, so wie auf dem Probeblatte 19^b 29^m und $+11^\circ 55'$, wo sich zwei Sterne finden. Doppelsterne, d. i. solche, welche nicht über 15 bis $20''$ von einander entfernt sind, werden durch ihre beigeschriebene Entfernung unterschieden, z. B. 19^b 52^m und $+10^\circ 12'$.

7. Das auf diese Weise vervollständigte Blatt wird wiederholt mit dem Himmel verglichen, theils um während der Zeichnung vorgefallene Veränderungen zu erkennen, theils um die Grössen so festzusetzen, wie der Beobachter sie endlich anzugeben geneigt ist. Die schärferen Unterscheidungen unter den Grössen der kleineren Sterne, welche auf dem Probeblatte mit der 9. und 9. bis 10. Grösse bezeichnet sind, werden sich in der Zeichnung nicht mehr deutlich genug darstellen lassen und scheinen auch nicht sehr wesentlich zu sein.

Durch das Probeblatt, welches eine der sternreichsten Gegenden des Himmels darstellt, kann man sich überzeugen, dass die Befolgung dieser Regeln ausführbar ist, und dass die grosse Menge der darauf verzeichneten Sterne, bei der gewählten Art der Darstellung, weder den Raum überfüllt, noch die Leichtigkeit der Uebersicht beeinträchtigt. Die Benennung und Bezeichnung, sowohl der Sternbilder und ihrer Grenzen als der Sterne selbst, würde bei solchen Karten unnütz und nachtheilig sein.

Die Akademie hat einen Ausschuss ernannt, welcher aus den Herren IDELER, OLTSMANN, DIRKSEN, ENCKE und Prof. BESSEL in Königsberg besteht. Jeder, der ein Blatt der Karten auszuarbeiten übernehmen will, kann sich an eines der Mitglieder dieses Ausschusses wenden, welches ihm dann eine Gegend anzeigen wird, welche noch nicht von Andern bearbeitet wird. Diese Gegend bleibt dem Besitzer zwei Jahre lang vorbehalten, und erst wenn derselbe nach deren Ablaufe den Ausschuss nicht überzeugt, dass bereits wesentliche Fortschritte in der Bearbeitung gemacht sind, kann sie einem Andern zugetheilt werden.

Sobald eine Karte vollendet ist, wird sie dem Ausschusse zugesandt, von diesem geprüft, wenn sie dem Plane angemessen gefunden wird, zum Stich befördert, und ohne auf andere Blätter zu warten, bekannt gemacht. Der Name des Verfertigers wird darauf bemerkt und die Bemerkungen, welche derselbe zu machen Gelegenheit gehabt hat, namentlich über Schreib- und Druckfehler in den Beobachtungsverzeichnissen, über

wirklich beobachtete aber nicht mehr vorhandene Sterne, über veränderliche u. s. w. werden in den Abhandlungen der Akademie gedruckt.

Obgleich die Akademie von der Voraussetzung ausgeht, dass der Reiz, ein so grosses und nützlichcs Unternehmen ohne bedeutende Hülfsmittel befördern zu können, sowie die Aussicht, schon bei der Verfertigung der Karten neue Planeten zu entdecken, die Freunde der Astronomie zur Theilnahme anregen wird, so setzt sie doch dem Verfasser einer jeden den Forderungen entsprechenden Karte eine Belohnung von 25 Holländischen Ducaten aus.

Bei der Correspondenz mit den Mitgliedern des Ausschusses und bei der Einsendung der Karten kann

die Portofreiheit der Akademie im Bereiche der Preussischen Posten benutzt werden.

Berlin, den 1. November 1825.

Zusatz.

Vorstehenden Entwurf zu einer Herausgabe neuer Himmelskarten erhielt ich unter dem 3. November d. J. durch Herrn Professor ENCKE, der von der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin beauftragt war, ihn mir zur Einrückung in die Astronomischen Nachrichten nebst der beifolgenden Probekarte*) zu übersenden. Möge dies grosse und kühne Unternehmen bald in dem Geiste ausgeführt werden, in dem es entworfen ist!

SCHUMACHER.

97. Einige Bemerkungen über die Entwerfung der vollständigen Himmelskarten.**)

(Astron. Nachr. 4, p. 437.)

Die Erfahrungen, welche ich bei der Entwerfung desjenigen Blattes dieser Karten gemacht habe, durch welches die Ausführbarkeit dieses Unternehmens geprüft und die Art der Ausführung näher bestimmt werden sollte, können vielleicht den Theilnehmern an dieser grossen Nutzen und vielfältigen Gewinn verheissenden Arbeit angenehm sein, weshalb ich sie hier mittheile.

Die Entwerfung der Grundlage meiner Karte, d. i. der astronomisch bestimmten Sterne, geschah durch Herrn Dr. VON STEINHEIL; der Apparat, welchen er dazu verfertigen liess, gibt dieser Grundlage eine nichts zu wünschen übrig lassende Genauigkeit, welche mit der äussersten Leichtigkeit in der Anwendung verbunden ist. Auf meine Bitte hat mein hochgeschätzter junger Freund diesen Apparat in dem beiliegenden Aufsatze [p. 443] beschrieben; ich zweifle nicht, dass alle Theilnehmer des Kartenunternehmens die Beschreibung mit Vergnügen kennen lernen werden, denn die Genauigkeit der Grundlage ist, bei der Menge der Sterne und der Kleinheit des Maassstabes der Karten, desto nothwendiger, als es sich gezeigt hat, dass selbst so kleine Fehler, als bei der Entwerfung durch Cirkel und Maassstab kaum zu vermeiden sein werden (z. B. eine Bogenminute), die Configurationen sehr naher Sterngruppen oft augenfällig einstellen. Die Schnelligkeit, womit Herr Dr. v. St. diesen Apparat anwandte, war mir überraschend, und ich glaube, dass der dadurch

erlangte Zeitgewinn allein hinreichend wäre, den Apparat zu empfehlen, selbst wenn er nicht den weit erheblicheren Vortheil der grösseren Genauigkeit vor dem Auftragen der Sterne mit dem Cirkel voraus hätte. Durch diesen Apparat werden zuerst die Sterne auf das Papier getragen, dann die Punkte am Rande der Karte, durch welche die Linien des Netzes gelegt werden sollen; dieses erhält man also zuletzt.

Um die fehlenden und nach dem Augenmaasse einzuzzeichnenden Sterne gehörig zu erkennen und ihren Ort zu schätzen, fand ich die 10malige Vergrösserung eines Fraunhofer'schen Cometensuehers zu schwach; bei ganz günstiger Luft zeigt zwar diese Vergrösserung alle Sterne der Karte, doch ist es vortheilhaft, bei der Entwerfung derselben eine stärkere Vergrösserung zu benutzen, etwa eine 15- bis 20malige desselben Instruments. Da der Cometensucher des Herrn BRAUER, dessen Benutzung mir derselbe gefälligst erlaubte, nur Ein Ocular für 10malige Vergrösserung besitzt, so wandte ich zur Entwerfung der Karte ein Dollond'sches Fernrohr an, von 16 Zoll Brennweite, 2 Zoll Oeffnung und 20maliger Vergrösserung, welches ein Schfeld von $1\frac{1}{4}^{\circ}$ hat; dieses war völlig hinreichend, indem es selbst die kleinsten Sterne, welche nach der angenommenen Grenze noch auf die Karte gehören, auch unter nicht ganz günstigen Umständen und bei etwas Mondehein,

*) [Die, hier weggelassene, Probekarte der „Berliner Akademischen Sternkarten“ enthält die Gegend zwischen 19° $20''$ bis 20° $0''$ und zwischen $+3^{\circ}$ bis $+13^{\circ}$.]

***) [213 d. a. Verz. — Vgl. die vorangehende Abb. 96.]

mit der nothwendigen Bestimmtheit zeigte. Auch ein Fraunhofer'sches Fernrohr von 30 Zoll Brennweite, allein mit einem nicht eigentlich dazugehörigen, etwa 20 Mal vergrößernden Oculare versehen, leistete noch gute Dienste, obgleich es doch schon fast zu stark war. Durch diese zu grosse Stärke wird nämlich die Unbequemlichkeit erzeugt, dass man schwieriger erkennt, ob ein Stern nicht zu lichtschwach ist, um noch auf die Karte gezeichnet werden zu dürfen; — bei den letzten Revisionen der Karte, welche, nach der Vorschrift der Königl. Akademie der Wissenschaften, mit einem Fraunhofer'schen Cometensucher von 10maliger Vergrößerung gemacht werden müssen, wird man zwar die etwa eingezeichneten zu kleinen Sterne nicht sehen und daher wieder auslöschten, allein da die Schätzung des Orts und die Einzeichnung immer sehr mühsam und zeitraubend sind, so ist es eine bedeutende Erleichterung, wenn man die Einzeichnung vieler zu kleinen Sterne gleich Anfangs vermeidet. — Doch glaube ich nicht, dass der Besitz eines zu starken Fernrohrs ein wesentliches Hinderniss ist, indem man sich auch daran gewöhnen kann; Herr VON STEINHEIL wandte z. B. hier ein Fernrohr von FRAUNHOFER von 42 Zoll Brennweite an, bei welchem er das Ocular eines Cometensuchers anbrachte.

Das oben erwähnte Fernrohr von DOLLOND ist auf einem Aequatorialinstrumente befindlich und gewährt

durch diese Aufstellung einen Vortheil, welchen man allgemein wird benutzen müssen, um die richtige Orientirung der einzuzeichnenden Sterngruppen zu erhalten: es wurde nämlich mit zwei Metallfäden im Brennpunkte versehen, wovon einer den Declinationskreis, der andere den Parallelkreis darstellte; sie waren so stark, dass sie selbst bei dunkler Nacht ohne Beleuchtung gesehen werden konnten, und zeigten daher immer die Richtung des Netzes der Karte an, wodurch die Einzeichnung der Sterne viel sicherer und leichter gemacht wird. — Inzwischen wurde zugleich ein Versuch gemacht, denselben Vortheil auch durch ein gewöhnlich aufgestelltes Fernrohr zu erlangen; dazu wurde ein Tisch eingerichtet, dessen Ebene in die Ebene des Aequators gebracht werden konnte, und auf welchen die Füsse des Stativs des Fernrohrs befestigt wurden. Die Berichtigung dieser Einrichtung und der beiden Fäden im Fernrohre, mit der geringeren hier ausreichenden Genauigkeit, hat keine Schwierigkeit; — Herr Dr. VON STEINHEIL hat diese Einrichtung häufig angewandt und sie vollkommen zweckmässig gefunden.

Auf diese Weise wird man den in dem Programm der Königl. Akademie der Wissenschaften ausgesprochenen Zweck erreichen können; allein ich hoffe, dass mein oft erwähnter hochgeschätzter Freund uns bald das Resultat seiner jetzigen Versuche, dieses noch auf eine andere Weise zu leisten, mittheilen wird.

98. Bemerkungen über die Königsberger Zonenbeobachtungen.*)

(Astron. Nachr. 7, p. 369.)

Die Sternbestimmungen, welche die Königsberger Zonen ergeben, sind gegenwärtig schon häufig angewandt worden, sowohl um Cometen damit zu vergleichen, als auch um den Himmelskarten, welche die Berliner Akademie der Wissenschaften veranlasst hat, zur Grundlage zu dienen. Durch diese Anwendungen sind hin und wieder Fehler in den gedruckten Zonen bekannt geworden, über welche ich hier einige Erläuterungen geben werde, da dieselben vielleicht dienen können, die zur Berichtigung einer entstellten Beobachtung zu machenden Conjecturen zu leiten.

Die wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen, sowohl der Rectascensionen als der Declinationen, habe ich Nr. 17 der Astronomischen Nachrichten zu bestimm-

men gesucht [Abh. 94, p. 272]. Obgleich hier eigentlich nicht von dieser Art der Fehler, sondern nur von zufälligen Entstellungen der Beobachtungen die Rede ist, so benutze ich doch diese Gelegenheit, auf einige zu berücksichtigende Umstände aufmerksam zu machen, welche im Laufe der Beobachtungen stärker hervorgetreten sind. Das oft sehr starke Zittern der Sterne, ihre Undeutlichkeit und Blässe, haben die Beobachtungen, welche unter diesen Umständen gemacht worden sind, oft so sehr erschwert, dass der wahrscheinliche Fehler der verschiedenen Zonen sehr ungleich sein muss; dieses ist mehr der Fall bei kleinen Sternen als bei grösseren, indem die ersteren, unter den angeführten Umständen, im erleuchteten Felde des Fernrohrs oft schwierig zu sehen sind, auch wohl in einzelnen Augenblicken ganz verschwinden, wodurch die

* [235 d. a. Verz. — Vgl. auch Königsb. Beob. X. Alth.]

Bemerkung der Stetigkeit ihres Fortschreitens an Sicherheit verliert. Hierzu kömmt noch, dass für die höheren Zonen, über 15° der nördlichen Declination hinaus, ein zusammengesetztes Ocular mit einem Spiegelpolus angewandt werden musste, welches lichtschwächer ist als die geraden Oculare des Instruments, und welches daher zur Vermehrung der Schwierigkeit des Sehens der kleinen Sterne beträchtlich beiträgt. Alle nachtheilige Umstände zusammen bringen oft die Wirkung hervor, dass man sowohl über die Durchgangszeit eines sehr kleinen Sterns, als auch über sein Einstellen in die Mitte des Zwischenraums der beiden horizontalen Fäden weit unsicherer bleibt, als bei grösseren Sternen und unter günstigen Umständen der Fall ist. Inzwischen hängt der wahrscheinliche Fehler der Rectascensionen von der Uebung eines Beobachters ab; der der Declinationen von dem Zusammenwirken zweier Beobachter, des einen der das Fernrohr einstellt, und des anderen der am Mikroskope abliest. Auch hierdurch kann eine Ungleichheit entstehen, indem die Person des zweiten Beobachters dreimal geändert worden ist. Obgleich ich mich des Glückes erfreue, in den Herren ARGLANDER, ROSENBERGER und ANGER sehr sorgfältige Gehülfen besessen zu haben und noch zu besitzen, so lässt sich doch nicht annehmen, dass bei dem Eintritte eines neuen Gehülfen schon alle die Uebung vorhanden war, welche in der Folge erworben wird.

Unter den zufälligen Entstellungen einer Beobachtung der Durchgangszeit eines Sterns scheint mir ein Fehler von einer Zeitsecunde im Zählen der Uerschläge der gefährlichste zu sein, indem seine Existenz sich schwerer mit Sicherheit ausmitteln lässt, als dieses für grössere Fehler der Fall ist. Bei den gewöhnlichen Beobachtungen ist ein Fehler dieser Art nicht zu fürchten, indem vor und nach jeder derselben Zeit genug vorhanden ist, sich von der Richtigkeit zu überzeugen und indem man durch Uebung leicht eine so grosse Sicherheit im Zählen erlangt, dass die Vergleichung der gezählten Secunde mit der von dem Zeiger der Uhr angezeigten, nach Vollendung der Beobachtung, meistens ganz unnötig und nur dann wünschenswerth wird, wenn zufälliges Geräusch eine Störung hervorgebracht hat. Bei den Beobachtungen der Zonen aber folgen die Sterne oft so schnell hintereinander, dass die Zwischenzeiten kaum hinreichen, die Beobachtungen niederzuschreiben; man muss dann eine längere abwarten, ehe man die gezählte Secunde mit der Uhr vergleichen kann, wodurch man zwar gewöhnlich die gewünschte Bestätigung erhält, allein auch getäuscht werden kann, zumal wenn heftiger Wind oder Geräusch

auf dem neben der Sternwarte vorbeiführenden Spaziergange stören. In diesen Fällen habe ich zuweilen einen Fehler von einer Secunde oder 10 Secunden bemerkt und denselben durch die beigetzten Noten: Zeitec. ? $\pm 1'$? $\pm 10'$? angedeutet; zuweilen ist auch das Fortzählen durch dieselben Störungen ganz unterbrochen worden und dadurch die Controlle seiner Richtigkeit verloren gegangen. Aus der Entstehungsart dieser Zweifel geht hervor, dass dieselben nicht nur bei dem Sterne, bei welchem sie bemerkt sind, sondern auch bei einigen der vorhergehenden stattfinden können; in der Columnne der Durchgangszeiten wird aber, wenn ein Zweifel vorhanden ist, immer die Zahl angegeben, welche mir die wahrscheinlichste zu sein scheint. Fehler von $1'$ oder $10'$, welche von einer irrigen Reduction der an den Seitenfäden gemachten Beobachtungen auf den mittleren Faden herrühren, werden häufiglich sehr selten vorkommen; wenigstens fehlt es nicht an der zu ihrer Vermeidung nöthigen Vorsicht. Ein Fehler von einer ganzen Zeitminute hat sich häufiger, und dann gewöhnlich bei mehreren Sternen zugleich gefunden; er entsteht, so wie die Zählungsfehler, aus dem Mangel der zum jedesmaligen Vergleichen der Minute erforderlichen Zeit und kömmt in den früheren Zonen häufiger vor als ich erwartete, weshalb bei den späteren die Aufmerksamkeit darauf vermehrt worden ist. Zuweilen wird man diesen Fehler dadurch entdecken können, dass die Beobachtungen stets in der Zeitfolge fortschreiten müssen; z. B. in Zone 175 kömmt ein am 2. Faden beobachteter Stern $18^h 44^m 57.11$ vor, nach demselben ein am 1. Faden beobachteter $18^h 44^m 41.59$, welche beide Angaben nicht zusammen bestehen können, indem das Beobachtungsmoment für den ersten $18^h 44^m 42.3$, für den anderen $18^h 44^m 12.2$ sein würde, was mit der Zeitfolge nicht vereinbar ist; es ist also ein Fehler vorhanden, und zwar ist anderweitig ausgemittelt worden, dass die erste Minute 43 gelesen werden muss. Endlich können die Durchgangszeiten noch dadurch entstellt sein, dass ein falscher Faden auf den mittleren reducirt worden ist; ich glaube, die zu der Vermeidung dieses Fehlers nöthige Aufmerksamkeit mir angewöhnt zu haben, allein dennoch habe ich denselben zuweilen begangen, was ich mehr einer Verwechslung der Columnne des Papiers, auf welches die Beobachtung niedergeschrieben wird, als einer Verwechslung des Fadens selbst zuschreiben zu müssen glaube.

Die Schreibfehler, welche bei den Declinationen am häufigsten vorkommen, sind eine Windung der Schraube des Mikroskops = 100 Theilen = 34.2 , und

ein Theilstrich des Kreises = 3'; seltener finden sich Fehler von 5, 10, 30 Theilstrichen = 15', 30', 1° 30'. Käme ein Fehler von einer Minute, 5 oder 10 Minuten, oder überhaupt von einer nicht durch drei theilbaren Anzahl von Minuten vor, so könnte es kein Schreibfehler im Originale, sondern nur ein Fehler in der Verwandlung der Angabe des Mikroskops in Grade, Minuten und Secunden, oder ein Druckfehler sein, welche beide sich durch die beige druckte unmittelbare Angabe des Mikroskops erkennen und berichtigen lassen. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass die Herren ARGE-LANDER, ROSENBERGER und ANGER eine Art der Verwandlung der Mikroskop-Angaben in die gewöhnlichen Theile des Kreises angewandt haben, welche ihre Controlle stets mit sich führt.

Indem meine Zonen etwas mehr als zwei Grad Breite haben, ihre Mitten aber zwei Grade von einander entfernt sind, so finden die Sterne an einer Grenze der einen, sich häufig auch an der antostossenden Grenze der anderen beobachtet. Hierdurch erhält man das Mittel zur Erkennung einiger vorgefallenen Fehler, und in der That sind die Verbesserungen längst gedruckter Zonen, welche ich in jedem neu erscheinenden Bande meiner Beobachtungen anzugeben pflege, meistens auf diese Art entdeckt worden. Unter den von Herrn INGHIRAMI bei Gelegenheit der Verfertigung seiner Karte vermissten Sternen finden sich einige, welche schon als fehlerhaft angezeigt waren; auch der Stern Zone 2. 19^h 54^m 47^s 64, welchen unser hochverehrter OLBERS vermisste (A. N. Nr. 150), ist, der Anzeige der Verbesserungen am Ende der IX. Abtheilung der Königsberger Beobachtungen zufolge, 30 Minuten nördlicher als er in der 2. Zone angegeben ist. Ich bitte jeden Besitzer meiner Tage-

bücher, die Verbesserungen, welche ich, so wie sie mir bekannt werden, stets anzeige, jedesmal abzuändern, weil dadurch hin und wieder eine vergebliche Nachsuchung erspart werden wird.*)

In Nr. 17 der Astr. Nachr. [Abb. 94] habe ich den ganzen Mechanismus der Zonenbeobachtungen erläutert; ich habe denselben so gewählt, dass dadurch Unrichtigkeiten so sehr vermieden werden, als mir bei einmaligen, sehr schnell aufeinander folgenden Beobachtungen möglich schien. Inwiefern dieses gelungen ist, kann man durch die Fehleranzeigen beurtheilen, welche Herr Professor HARDING und Herr INGHIRAMI ihren vortrefflichen Karten der Stunden XV und XVIII beigegeben haben. Der erstere hat 12, der andere 10 Sterne nicht an den Oertern gefunden, an welchen sie den gedruckten Zonen zufolge (nach Verbesserung der von mir selbst angezeigten Fehler) stehen sollten; die Zahl der Beobachtungen, unter welchen diese Sterne vermisst worden sind, wird für jede Karte 1500 bis 2000 betragen. Die 12 vermissten Sterne des Herrn Professor HARDING hat er grösstentheils selbst richtig gedeutet, über zweifelhaft bleibende haben die Originale der Beobachtungen Anschluss gegeben; dasselbe ist der Fall mit den Sternen des Herrn INGHIRAMI; jedoch findet sich einer darunter: Zone 174. 8,9 Gr. 18^h 50^m 7^s 40 + 3° 34' 19,7, für welchen ich keine wahrscheinliche Auslegung der Beobachtung finden kann. Dieser Stern war auch am 19. Juni d. J., wo ich ihn suchte, nicht vorhanden. Andere, welche Herr INGHIRAMI vermisste, habe ich wiedergefunden. Es sind gewiss noch viele kleine Sterne am Himmel, welche Lichtwechsel haben; HARDING hat mehrere derselben entdeckt.

99. Nachricht von der Vollendung bis zum 45. Grade der Declination der allgemeinen auf der Königsberger Sternwarte unternommenen Beobachtung des Himmels.**)

(Astron. Nachr. 11, p. 13.)

Zu den, den Astronomen zu verschiedenen Zeiten ertheilten Berichten über den Fortgang der allgemei-

nen Beobachtung des Himmels, welche seit 11 bis 12 Jahren eins der Hauptgeschäfte der Königsberger Sternwarte gewesen ist, kann ich jetzt die Anzeige hinzufügen, dass die Zone des Himmels zwischen dem 15. Grade der südlichen und dem 45. der nördlichen Declination ganz vollendet ist.

Die erste Zone beobachtete ich am 19. Aug. 1821;

*) [208 d. a. Verz. — Br. m. O. II. 367. 370 (O.). — Die Zonen selbst finden sich in den Königsb. Beob. Abth. VII (1—39), VIII (—134), IX (—206), X (—272), XI (—329), XII (—373), XIII (—394), XIV (—448), XV (—488), XVI (—496), XVII (—536, nebst vollständigem Register). Fehlerverzeichnisse von BASSAL selbst in Königsb. Beob. XIV.—XVII. Abth., ausführlicher von ANGE-LANDER in Bonner Beob. 4. Bd., p. 1—XLVII, 5. Bd. p. XXXII.]

*) [Vgl. Bemerkung zur folgenden Abb. 99.]

die 536, durch welche die letzte sich unterhalb dem 45. Grade der Declination noch findende Lücke ausgefüllt worden ist, am 21. Jan. 1833. Die Zahl aller in diesen 536 Sitzungen gemachten Beobachtungen ist 75011.

Schon seit einigen Jahren war bei weitem der grösste Theil des zwischen -15° und $+45^\circ$ der Declination liegenden Raumes nach und nach durch das Fernrohr meines Instruments gegangen; allein es fanden sich noch Lücken, vorzüglich von 2 bis 5 Uhr der Geradenanfeigung, deren gänzliche Ausfüllung erst in diesem Winter gelungen ist. Dieser Theil des Himmels geht in den Herbst- und Wintermonaten bei Nacht durch den Meridian und ist daher in einem Lande, welches in dieser Zeit des Jahres meistens trübes Wetter hat, schwer zu beobachten. Hierzu kommt noch, dass die Luft so unruhig wird, dass es oft unmöglich ist, kleine Sterne bei der geringsten Beleuchtung der Fäden zu sehen, geschweige denn, gehörig zu beobachten. Auch ist in den letzten Jahren notwendig geworden, die heitern Nächte zwischen dem Heliometer und den Zonenbeobachtungen zu theilen. Endlich ist ein, im Winter 1830—31 gemachter Versuch, beide Beobachtungsreihen gleichzeitig fortgehen zu lassen, ohne Erfolg geblieben.

Im folgenden Winter 1831—32 gelang es mir, einen beträchtlichen Theil des noch Fehlenden dem Himmel abzugewinnen. Im gegenwärtigen reichten die seltenen heiteren Nächte so genau zur Ausfüllung der noch übrigbleibenden Lücken aus, dass, wenn auch nur eine einzige derselben gefehlt hätte, oder auf andere Beobachtungen verwandt worden wäre, ich die Befriedigung noch nicht würde haben können, die Vollendung der langen Beobachtungsreihe bis zum 45. Grade der Declination den Astronomen anzuzeigen.

Hierdurch habe ich nun das Ziel erreicht, welches ich mir zu erreichen vorgesetzt hatte. Ich hoffe, ein eigenes Buch bekannt zu machen, welches bestimmt sein wird, die Benutzung meiner 75000 Beobachtungen so leicht und sicher wie möglich zu machen; ich werde erst den Abdruck der Beobachtungen auf meiner Sternwarte für 1832, unter welchen sich die letzten Zonen finden werden, abwarten und dann das eben gegebene Versprechen erfüllen.

Ich gebe indessen die Hoffnung nicht auf, die seit

1821 im Gange befindliche Beobachtungsreihe auf dieser Sternwarte noch weiter, und bis zum Pole, fortgesetzt zu sehen. Ich selbst werde die Beobachtungen zwar nicht machen, indem es dringend notwendig wird, diejenigen Untersuchungen, welche von Beobachtungen mit dem Heliometer ausgehen, mit ungetheilte Kraft zu treiben; allein ich habe das Glück, auf meinen jetzigen Gehülfen, Herrn BUSCH, auch in dieser Beziehung Hoffnungen gründen zu können, deren Verwirklichung nur noch einige Schwierigkeiten im Wege stehen, welche in Kurzem wegräumen zu können ich hoffe.

[Literatur der Astr. Nachr. über Fundamentalsterne, Stern-cataloge, Sternkarten: LITROW, Declinat. einiger Fundamentalsterne und Vergl. mit BESSEL, POND etc. (1); BRINKLEY, Catalog von Fund.-St. (4); RUMKER, Földist. südlicher St. (4, 5); POND, Posit. der Fund.-St. (5), Vergl. des Bessel'schen Catalogs von 1820 mit dem GREENV. von 1826 (s. Abh. 88 und 90) (6); SCHWAB, Declin. der Fund.-St. (6); POND, über dessen Catalog von 720 Hauptst. (8); RUMKER, über dessen Prelimin. Catal. (10); Bericht über den Fortgang der Acad. Sternk. (s. Abh. 95. 96. 97) (11); WESSELE, über seine Reduction der Bessel'schen Zonen (8, 12, 16); HARDING, über dessen Himmelskarten, PETERSEN, Zenith-St. am Altoner M.-Kr. bestimmt (12); HENDERSON, Declination. von 172 Fixst. (14); RUMKER, Fehler in der 488. Bessel'schen Zone, ABGELANDER, Vergl. des Wrottesley'schen Catal. mit dem ABOER (17); BUSCH, Vergl. der neuen Königsb. Declin. (s. Abh. 90) (18); HARDING, Fehler in dessen Himmelsatlas (20); BUSCH, Beob. d. Polarsterns am Königsb. Repsold'schen Mer.-Kr. (29); MAJLER, Vergl. von St.-Catal. in Declin. (32); LUTBER, Declinationen der Fund.-St. nach BESSEL's letzten Beob. (Abh. 91) (45); LAIBNER, Földist. von 140 Fund.-St. (46); PETERS, Correct. der AREN. im Berliner Jahrb. (47); WOLFFER, Fortsetzung der Tab. Regionum. (47), Vergl. der Tab. Reduct. mit MAYER, LAIBNER, JOHNSON (50), MAURY 2 (51), den PAPA'schen AR.-Differ. der Fund.-St. (54), GOLD'S Standard Catal. (59), Pulkowa in AR. (75), Leiden, Washington in AR. (81); WINCKEL, Fehler der Reduct.-Taf. d. Bessel'schen Zonen Königsb. Beob. 17. Abth. (49); ALWERTS, Reduct. der Vergleichstafeln. Fund.-Catal. (55); WOLFFER, Verbes. zu seiner Reduct. von D'ARLES's Beob. (69); GYLDES, Declin. der Fund.-St. am Pulkow. Vert.-Kr. (71); Leidener Declination. von 57 Fund.-St. (80); WILLOCK, Allen von 156 Fund.-Sternen in Cambridge (Mes.) (80); YARRELL's Fund.-St.-Beob. in Washington (82). — Vgl. auch SCHEFFLER's, Genährte Fixsternörter der Astr. Nachr. Bd. 1—66 (Publicat. der Astron. Gesellsch. VIII, Leipzig 1867).]

100. Verzeichniss von 257 auf der Königsberger Sternwarte beobachteten Doppelsternen.*)

(Astron. Nachr. 4, p. 301.)

Gr.	Entf.	AR.	Decl.		Gr.	Entf.	AR.	Decl.	
9	5"	0 ^b 0 ^m 52 ^s	+ 7 ^m 29 ^s		8.9	10"	5 ^b 17 ^m 2 ^s	- 11 ^m 29 ^s	H. C. p. 563
7	III. C.	1 3	+ 10 10		9	7	20 35	+ 10 53	
9	8	23 16	+ 14 41		9	5	22 32	- 2 14	
7	18	25 34	- 5 31		7	5	26 52	- 4 29	
6.7	8	30 44	+ 20 29		7	4	28 3	- 6 11	
9	7	56 16	+ 14 28		8.9	10	35 30	+ 3 45	
8	3	58 15	- 2 40	H. C. p. 392	7	6	37 23	- 4 21	Struve
9	3	1 7 28	- 8 4		6.7	2	38 36	+ 6 23	I. 20
8.9	8	9 2	- 13 16		8	7	39 11	+ 4 38	
8.9	8	17 40	- 14 48		9.10	10	46 3	+ 4 41	
9	10	21 1	+ 11 45		9	5	46 9	+ 8 57	
8	15	25 35	+ 11 40	IV. 131	9	8	49 18	- 7 41	
6.7	5	33 6	- 12 11	H. C. p. 244	8.9	2	58 35	+ 13 59	
8	7	35 0	+ 8 36		9	I. C.	58 53	+ 3 18	
8.9	I. C.	42 46	+ 9 57		9	10	6 2 39	- 0 44	
8		59 47	- 1 16	H. C. p. 392	8.9	8	1 44	+ 14 38	H. C. p. 313
8.9	4	2 1 24	+ 12 51		9	6	12 15	+ 11 3	
6	12	3 52	- 3 13	IV. 25	9	15	17 39	+ 4 10	
9	7	16 1	- 2 55		8.9	2	24 22	+ 14 54	
8	4	25 25	- 6 25		9	4	31 34	+ 5 52	
9	6	40 31	+ 8 12		8	8	31 35	+ 9 8	S
8	3	43 25	+ 5 45		8.9	8	39 45	- 10 55	
9.10	12	48 53	- 0 18		8	2	48 17	- 5 15	
8.9	9	54 10	- 2 47		8	15	50 16	- 11 12	
7.8	10	3 21 35	+ 4 33		9	4	56 20	- 5 31	
7	5	27 49	+ 0 1	III. 45	8	1	59 17	- 4 25	S
6		38 41	+ 10 36	III. 66	9	3	7 0 34	- 13 43	
5	8	45 30	- 3 29	II. 36	9	2	0 56	- 8 3	
9	12	52 35	- 10 57		8	5	3 57	- 2 53	
8.9	9	4 26 42	+ 8 51		8	4	5 19	- 8 38	
7	12	26 54	- 10 6	III. 100	8	4	6 45	- 1 34	
7.8	15	28 53	- 13 23		8.9	12	16 9	+ 14 26	
9	6	29 44	- 0 45		9	10	17 51	+ 9 6	
9.10	10	30 58	+ 2 58		9	5	20 39	- 13 28	
7	10	35 12	- 9 8	III. 99	8.9	9	20 44	+ 14 13	H. C. p. 314
9	5	35 32	+ 4 58		8	5	21 15	+ 5 37	H. C. p. 261
8	10	37 41	- 12 16		9	12	24 25	- 12 31	
9	5	46 9	- 0 50		7.8	8	28 33	- 14 6	II. 63
8	5	52 37	- 13 46		7	2	30 19	+ 5 38	I. 23
9	(?)	53 0	+ 13 5		9	4	33 51	- 3 37	
7.8	3	54 39	- 8 55		7	3	39 45	- 11 46	S
9	5	55 16	- 3 7		8.9	2	49 57	+ 14 9	
7	20	59 58	- 8 54	Struve	9	4	55 13	- 12 43	
6	12	5 4 8	- 12 5	III. 67	8	4	56 5	+ 6 19	S
5		4 9	+ 2 39		9	4	57 59	+ 1 51	
8.9	5	4 39	+ 8 14		8.9	8	8 3 21	+ 10 6	S
9	8	7 29	- 5 48		8	2	3 58	+ 11 22	
9	3	8 23	+ 4 29		8	12	6 40	+ 3 30	S
8	10	11 7	- 10 56	H. C. p. 313	8	1,5	24 45	+ 2 11	
7	4	14 56	- 8 35	II. 102	9	12	26 21	+ 10 30	

*) [208 d. a. Verz. — Vgl. auch Königsb. Beob. 10. Abth.]

Gr.	Entf.	AR.	Decl.		Gr.	Entf.	AR.	Decl.	
8	6"	9 ^h 32 ^m 22 ^s	- 11° 33'	H. C. p. 270	8.9	3"	14 ^h 7 ^m 15 ^s	+ 11° 8'	
8	4	36 30	- 1 58	PIAZZI	8	5	13 24	- 6 58	PIAZZI
8.9	12	37 37	+ 11 48	H. C. p. 218	6	8	14 47	+ 9 15	H. C. p. 334
9	5	44 49	+ 0 4	S	8.9	3	21 25	+ 7 4	
8	(7)	44 54	+ 0 2		8	8	36 12	+ 8 27	II. 82
7	5	46 55	- 7 18	II. 77	9	4	41 37	+ 0 42	
6	(7)	49 24	- 4 11		7.8	10	55 26	+ 6 11	
9	2	52 7	+ 3 25		8	4	59 6	+ 9 54	H. C. p. 472
8.9	10	57 31	+ 3 31	H. C. p. 258	9	8	15 0 23	+ 5 53	
8	3	9 18 4	+ 7 0	H. C. p. 273	7	13	10 19	+ 11 4	H. C. p. 470
7.8	5	22 24	+ 2 14	STRUVE	7	10	29 14	- 8 13	Uranogr.
8	5	23 41	- 10 5		9	10	36 22	- 0 47	
9	15	26 17	- 11 50		7.8	5	46 51	- 1 39	II. 85
8	5	47 0	+ 11 30		8	10	48 30	+ 3 55	III. 103
9	6	55 22	- 0 51	S	7.8	3	48 33	+ 13 0	
9.10		58 27	+ 7 12		9	6	52 1	+ 12 10	
8.9	5	10 7 45	+ 10 59		5	5	54 46	- 10 53	I. 33
8	7	11 22	+ 7 19	II. 43	8	9	54 50	- 10 58	STRUVE
8	4	16 22	+ 9 20	I. 29	9	10	58 30	- 2 10	
8	12	20 59	- 3 1	S.	8.9	7	16 3 54	+ 12 22	
9	10	28 12	- 12 38		7	4	5 9	+ 14 0	I. 82
8	14	28 17	+ 2 9	S.	9	12	9 6	- 1 50	
7	9	34 16	+ 5 40	PIAZZI	8	3	21 3	- 12 45	
7	2	40 25	- 3 6	S.	8	6	23 3	+ 5 49	
9	(7)	44 14	+ 12 29		9	9	31 45	+ 0 12	
8	9	55 50	- 3 16	S.	9	12	34 41	+ 13 57	
7	10	11 10 29	- 0 41	H. C. p. 498	9	10	35 18	+ 0 13	
8.9	6	10 52	- 5 57		4	5	17 6 40	+ 14 56	II. 2
9	12	23 11	- 2 34	S.	9	4	10 8	- 11 10	
7	5	29 28	- 1 28	S.	8	1	19 38	- 9 51	
9	15	47 41	- 3 38	S.	9	4	27 30	- 6 45	
7.8	15	12 0 26	- 10 53		6.7		35 48	+ 2 40	IV. 32
8	8	6 11	- 6 17	H. C. p. 152	8	12	36 29	- 13 14	H. C. p. 348
9	12	12 8	- 10 30		9	8	38 44	+ 11 51	
8	18	22 35	- 10 6		9	6	49 53	- 6 50	
9	8	27 10	+ 12 22		8.9	3	50 12	+ 2 3	
8	16	29 16	- 10 33		8.9	3	50 55	+ 12 28	
9	10	29 10	- 4 22		5	4	56 37	+ 2 33	II. 4
7	5	32 12	- 12 3		9	10	18 14 3	+ 11 21	
3	4	32 48	- 0 29	III. 18	8	8	21 5	+ 1 4	
9	10	40 43	+ 4 47	H. C. p. 230	6.7	10	21 44	- 10 55	
8	6	47 14	- 3 55	II. 42	8	4	22 55	+ 6 21	
9	10	47 50	+ 7 58		9	10	23 10	+ 6 19	
9	10	53 19	+ 8 13		8.9	12	24 56	- 14 50	
8	8	58 24	+ 1 32		8	10	28 47	+ 7 24	
9	7	59 37	+ 2 3		9		31 50	+ 2 58	
5	7	13 0 4	- 4 36	III. 50	7.8	4	36 11	- 10 40	H. C. p. 296
8.9	4	13 56	- 14 0		7	15	37 37	- 1 8	" " 176
9	4	16 13	- 6 40		7	4	42 32	+ 10 47	" " 170
9	4	28 20	- 9 54		9	10	44 39	+ 3 11	
7.8	3	28 26	- 6 59	I. 80	6.7		51 3	+ 13 24	III. 32
7	12	28 51	+ 3 17		9	7	56 5	+ 14 32	
7	2	45 48	- 7 12		7	10	57 15	+ 6 18	
8	3	55 39	- 5 42		7.8	10	57 53	+ 6 54	III. 109
8	4	58 38	- 12 5		9	7	19 1 39	+ 8 25	
8.9	4	14 1 10	+ 4 51		9	8	14 56	+ 9 11	
8.9	5	4 39	+ 6 13		8.9	12	18 38	- 9 53	H. C. p. 111

Gr.	Entf.	AR.	Decl.	Gr.	Entf.	AR.	Decl.
8	15"	19 ^h 28 ^m 40 ^s	+ 7°56'	8	4"	21 ^h 54 ^m 52 ^s	+ 12°48'
9	5	35 30	- 13 39	8.9	8	57 47	+ 19 57
9	10	48 29	- 13 48	8.9	3	58 8	- 0 17
8	II. C.	53 6	+ 10 16	8	12	22 1 21	+ 7 6
8	8	55 24	+ 14 59	8.9	3	18 39	+ 14 16
8	8	20 1 36	+ 16 17	7.8	10	19 42	+ 16 22
7	12	2 13	+ 20 24	3.4	II. C.	19 49	- 0 55
9	10	2 26	- 5 6	8	9	21 20	- 9 1
7	12	6 0	- 4 2	9	11	23 48	+ 6 31
9	3	16 23	- 8 52	8	6	30 15	- 13 31
8	10	27 14	- 13 20	7	3	33 53	- 9 14
8.9	I. C.	28 39	+ 11 27	8	5	38 48	- 5 8
8.9	4	35 24	+ 16 19	8.9	10	50 38	- 5 18
8	8	35 44	+ 19 6	9	9	53 13	- 12 15
8.9	II. C.	38 4	+ 15 16	8	3	23 2 50	- 12 53
8	15	50 23	+ 15 46	7.8	10	14 41	- 9 25
8	3	21 2 27	+ 8 50	9	9	21 46	+ 4 17
7	18	2 39	+ 21 45	7.8	10	22 36	+ 15 15
8.9	3	7 24	- 8 23	—	—	35 —	+ 6 13
8	2	10 56	+ 8 48	9	II. C.	38 12	+ 9 11
8.9	4	37 58	- 13 56	8	3	38 58	+ 16 6
9	15	52 16	- 12 50				

Die allgemeine Beobachtung des Himmels auf der Königsberger Sternwarte, welche mit der 272., am 12. Februar 1825 observirten Zone die ganze Zone von -15° bis $+15^{\circ}$ vollendet, hat eine Anzahl Doppelsterne kennen gelehrt, welche ich hier vollständig mittheile; es sind deren 257, allein aus den von Herrn Prof. STRUVE zusammengestellten Verzeichnisse*) aller früher bekannten Doppelsterne sieht man, dass 75 derselben nicht neu sind; diese habe ich als früher beobachtet angemerkt. — Die schönen Arbeiten, welche die Doppelsterne neuerlich veranlasst haben, namentlich die Beobachtungen derselben von STRUVE und das neuere vortreffliche Werk von HERSCHEL II und SOUTH zeigen, dass mein in den Fundamentis Astronomiae geüsserter Wunsch bereits erfüllt und die Aufmerksamkeit der Astronomen auf diesen erhebliche Aufschlüsse versprechenden Gegenstand gerichtet ist; daher mag auch dieser Beitrag einiges Interesse haben, wenn er auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen kann.

Diese Vollständigkeit wurde hier weder beabsichtigt, noch kann sie bei der Art, wie das Verzeichniss entstanden ist, stattfinden. Der Zweck der Beobachtungsreihe war die Bestimmung einer grossen Anzahl bisher unbekannter Sterne, und die erwähnten 272 Zonen enthalten 36000 Beobachtungen, wodurch, wenn man die über

15° hinausliegenden und die Wiederholungen abrechnet, zwischen -15° und $+15^{\circ}$ Abweichung etwa 32000 verschiedene Sterne bestimmt worden sind. Diese Beobachtungen wurden immer, wenn der Himmel heiter war, gemacht; auf so ruhige Luft, als zur Erkennung feiner Doppelsterne nothwendig ist, konnten sie nicht beschränkt werden. Daher müssen manche Doppelsterne unerkannt durchs Fernrohr gegangen und andere gar nicht ins Fernrohr gekommen sein, indem nicht alle Sterne in der Breite von 2° zugleich beobachtet werden können; ferner wurde immer mit 106maliger Vergrößerung beobachtet, welche für sehr feine Doppelsterne oft nicht stark genug ist.

Dass aber dieser ungünstigen Umstände ungeachtet so viele Doppelsterne, und unter diesen sehr feine, gefunden worden sind, verdanke ich allein der ausgezeichneten Güte des bekanntlich von FRAUNHOFER verfertigten Fernrohrs des Meridiankreises, welches selbst bei der angeführten Vergrößerung Doppelsterne, welche nur 1 bis $2''$ entfernt sind, oft genng gezeigt hat. — Die gute Beschaffenheit der Luft ist bei Beobachtung der Doppelsterne aber bekanntlich sehr wesentlich, und die Kraft eines Fernrohrs kann keineswegs das Zittern und die Undeutlichkeit der Sterne unschädlich machen. Dieses ist vermuthlich der Grund, weshalb man in der von Herrn Professor STRUVE angefangenen, eigens auf die Auffindung der Doppelsterne gerichteten Beobachtungsreihe — welcher man einen ununterbrochenen Fort-

*) [STRUVE, Catalogus novus stellarum duplicium. Dorpat 1827.]

gang angelegentlich wünschen muss! — viele Doppelsterne nicht findet, welche das obige Verzeichniss enthält. Dieselbe Zone nämlich, über welche meine Beobachtungen sich erstrecken, ist von Herrn Professor STRUVE zum Theil, von 6^h bis 12^h AR. und von -15° bis $+10^\circ$ Decl., in Beziehung auf die Doppelsterne durchsucht und das Resultat davon in Nr. 77 der Astr. Nachr. angegeben worden; die bei STRUVE und mir gemeinschaftlich vorkommenden Doppelsterne habe ich im Verzeichnisse durch S. bezeichnet, wodurch man sogleich übersehen kann, dass es auch hier sehr schwer ist, Vollständigkeit zu erlangen. Aus diesem Grunde mag selbst mein nur gelegentlich entstandenes Verzeichniss neben der angefangenen, ausschliesslich auf diesen Zweck berechneten grossen Arbeit von STRUVE, einiges Interesse haben.

Dieses Verzeichniss gibt zu einer Bemerkung Anlass, welche ich nicht stillschweigend übergehen zu dürfen glaube, nämlich dass die Eigenschaft Doppelsterne zu sein, den grösseren Sternen weit mehr zukömmt, als den kleineren. Aus HERSCHEL's reichen Catalogen geht nämlich hervor, dass etwa der 15. Stern des Flamsteed'schen Verzeichnisses ein Doppelstern der vier ersten Classen ist; nach diesem Verhältnisse soll-

ten meine 272 Zonen über 2000 Doppelsterne angegeben haben, während kaum der achte Theil davon sich wirklich gezeigt hat. Wenn man nun auch auf die oft un günstige Luft und die nicht allgemein hinreichende Vergrösserung rechnet, so gestehe ich doch, dass die Zahl der unter den kleineren Sternen vorhandenen Doppelsterne weit unter meiner Erwartung ist. Man muss hieraus schliessen, dass entweder die helleren Sterne sich wegen geringerer Entfernung leichter als Doppelsterne erkennen lassen, oder aus einem physischen Grunde häufiger doppelt sind, als die weniger hellen.

Das Verzeichniss enthält in der ersten Columne die Grösse des helleren Sterns, in der zweiten eine beiläufige Schätzung der Entfernung, in der dritten und vierten den Ort für 1825. Wenn mir die Entfernung zweier Sterne grösser als $15''$ zu sein schien, so habe ich dieselben selten als Doppelsterne angemerkt. Wo ein (?) in der zweiten Columne steht, ist es zweifelhaft, ob der Stern wirklich doppelt ist; unruhige Luft verhinderte dann die Entscheidung und es fehlte später an Gelegenheit, dieselbe durch nochmalige Beobachtung herbeizuführen.

101. Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen.*)

(Astron. Untersuchungen I, p. 280.)

Seitdem Sir WILLIAM HERSCHEL bemerkt hat, dass das häufige Vorkommen der Doppelsterne mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit erwarten lässt, dass ein doppelt oder mehrfach erscheinender Stern ein zusammengehöriges System von zwei oder mehreren Sternen ist, und nicht etwa, durch zufällig in eine gerade Linie fallende Stellung der Sterne woraus er besteht und des Punktes von welchem wir ihn sehen, von der Erde aus so erscheint — seit der Zeit dieser Bemerkung haben diese Sterne neue Ansprüche auf die Aufmerksamkeit der Astronomen erhalten. HERSCHEL selbst hat die gegenseitige Stellung vieler derselben in Zwischenzeiten von beträchtlicher Länge beobachtet, und in den wahrgenommenen Aenderungen der Entfernungen und Positionswinkel die Bestätigung der Wahrscheinlichkeit gefunden. Das wirkliche Zusammengehören der beiden,

den 61. Stern des Schwans zusammensetzenden Sterne, ist dadurch augenscheinlich geworden, dass dieses Sternpaar die grösste fortschreitende Bewegung, welche man bis jetzt unter den Fixsternen gefunden hat, gemeinschaftlich besitzt; andere Doppelsterne haben, während der Dauer ihrer Beobachtungen, schon so grosse Bewegungen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt gezeigt, dass man sogar versucht hat, die Elemente ihrer relativen Bahn durch die vorhandenen Angaben zu bestimmen. Es tritt nun das Bedürfniss hervor, Beobachtungen zu sammeln, aus welchen die gegenseitigen Bewegungen der zusammengehörigen Systeme unter den Fixsternen mit der Zeit genügend bestimmt werden können.

Sir JOHN HERSCHEL und Sir JAMES SOUTH haben grossen Fleiss auf eine Beobachtungsreihe dieser Art gewandt, und setzen diese Bemühungen jetzt mit vollkommeneren Instrumenten fort. In der That sind die vorzüglichsten Hilfsmittel erforderlich, wenn man Be-

*) [Auszug aus Abb. VII von 350 d. a. Verz. — Vgl. die folgende Abb. 102.]

obachtungen anstellen will, welche zur Bestimmung von Bahnen führen sollen, welche uns meistens nur einige Sekunden gross erscheinen. Wenn man das Misstrauen, mit welchem man während langer Zeit die Mikrometerbeobachtungen betrachtet hat, für rechtmässig ansieht, so kann man nicht zweifeln, dass die für die Doppelsterne erforderliche Genauigkeit nur durch sehr beträchtliche Verbesserungen der Beobachtungsmethoden erlangt werden könne. Wirklich waren diese Methoden, wenn sie die gegenseitige Stellung einander sehr naher Punkte der Himmelskugel betrafen, zurückgeblieben, während sie, für andere Seiten der beobachtenden Astronomie, verschiedene Male wesentliche Vervollkommenungen erhalten hatten. Ihr Zurückbleiben war so gross, dass die Astronomen allen auf Mikrometerbeobachtungen gegründeten Bestimmungen kein Zutrauen schenken, und lieber den weitesten Umweg machten, als die Resultate dieser Beobachtungen anwandten. Als Beispiel hiervon führe ich die auf die Veranlassung von LAPLACE von BOUVARD unternommene Bestimmung der Massen des Jupiters und Saturns an, welche auf der Beobachtung der durch diese Planeten hervorgebrachten Störungen beruht, ohne dass das am geradesten und sichersten zum Ziele führende Mittel — die Messungen der Entfernungen ihrer Satelliten — dabei berücksichtigt worden wäre. Wenn man ferner die grossen Unterschiede betrachtet, welche in den verschiedenen Messungen der Durchmesser der Planeten, und in den Angaben für die Doppelsterne vorkommen, so kann man nicht mehr zweifeln, dass die Beobachtungsmethoden selbst das Misstrauen rechtfertigen.

FRAUNHOFER hat indessen wirklich zwei Vorschritte in dieser dringenden Angelegenheit der Astronomie gethan. Für das Messen in ganz geringen Entfernungen hat er dadurch gesorgt, dass er seine grossen und starken Fernrohre mit Uhrwerken versehen hat, welche zwischen den zu beobachtenden Gestirnen und den Fäden des Mikrometers relative Ruhe hervorbringen und dadurch die, durch die tägliche Bewegung der Erde erzeugte Schwierigkeit aufheben sollen. Für das gleich genaue Messen in den kleinsten, so wie in grösseren Entfernungen, bis etwa zu der Grenze eines Grades, hat er, auf meinen Wunsch, zum ersten Male die Verfertigung eines grösseren Heliometers unternommen, welches, indem es seine, ausschliesslich auf genaues und vollständiges Messen berechnete Einrichtung, durch die Kraft eines Fernrohrs von 8 Fuss Länge und 6 Zoll Öffnung unterstützt, die allerbefriedigendsten Resultate nicht nur verhiesst, sondern auch wirklich liefert.

Unter den Beobachtungen, welche ich mit diesem

Instrumente gemacht habe, befindet sich auch die Reihe von Messungen der Doppelsterne, welche ich gegenwärtig mittheile. Die Wahl dieser Sterne ist zwischen Herrn Etatsrath STRUVE und mir verabredet worden; dem wir beabsichtigten, dieselben Sterne auf unseren beiderseitigen Sternwarten zu beobachten, um, ausser der gewünschten Bestimmung derselben, auch eine Vergleichung des Verhaltens der zu den beiderseitigen Beobachtungen angewandten Apparate zu erlangen. Damit Keiner von uns durch die Resultate des Anderen gestört werden möge, sind wir übereingekommen, die gegenseitige Mittheilung derselben erst nach der öffentlichen Bekanntmachung auszuwechseln.*)

Ueber meine Beobachtungen habe ich, nachdem ich Erläuterungen, welche das Instrument und die Art seiner Anwendung im Allgemeinen betreffen, bei anderen Gelegenheiten schon gegeben habe [Abh. 68, 71], wenig Erklärendes zu sagen. Jede Angabe ist das Mittel aus mehreren Beobachtungen der vierfachen Entfernung der Sterne. Während eine der Objectivhälften (I) des Instruments willkürlich gestellt war, wurde ihr die andere (II) so weit genähert, und beide gemeinschaftlich wurden so um die Axe des Fernrohrs gedreht, dass die beiden, im Fernrohre erscheinenden Bilder des Doppelsterns, vier, in gerader Linie und in gleichen Entfernungen liegende einzelne Sterne darstellten. Nachdem die Angaben des Positionskreises und der Schraube (II) abgelesen waren, wurde die Objectivhälfte (II) fortbewegt und auch das Heliometer gedreht, bis die beiden Bilder, die nun voreinander vorübergegangen waren, wieder so erschienen wie vorher. Die durch die Schraube gemessene Bewegung der Objectivhälfte, durch den Cosinus des halben Unterschiedes der beiden Ablesungen des Positionskreises dividirt, ist die vierfache Entfernung der beiden Sterne, in Revolutionen der Schraube ausgedrückt; die halbe Summe der beiden Ablesungen des Positionskreises, vom Indexfehler befreit, ist der Positionswinkel. — Eine Beobachtung dieser Art ist meistens 4 oder 5 Mal wiederholt worden, ehe das Instrument auf einen andern Doppelstern gerichtet wurde. Bei diesen Wiederholungen blieb immer die Objectivhälfte II, durch welche die vorangegangene Beobachtung gemacht war, unverändert auf dem Punkte, auf welchen sie durch diese gekommen war: beide Hälften wurden also abwechselnd bewegt, wodurch zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen eine gemeinschaftliche Ablesung der Schraube erhielten, und alle zusammen, nach bekannten Formeln, auf die vor-

*) Das Gegenwärtige ist am 16. August 1833 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelesen.

theilhafteste Art berechnet werden konnten. — Nur in wenigen Fällen habe ich doppelte Entfernungen, statt vierfacher, gemessen; es ist nur geschehen, wenn die Entfernung der Sterne grösser war, denn es gibt eine Grenze, wo der bei kleinen Entfernungen sehr grosse Vortheil des letzteren Verfahrens sich in Nachtheil verwandelt und daher das erstere ihm vorgezogen werden muss. — Die angewandte Vergrößerung ist ohne Ausnahme die stärkste vorhandene, von 280 Mal. Der

Positionswinkel ist der Winkel der Richtung von dem helleren Sterne nach dem weniger hellen mit dem Declinationskreise, von Norden links herum, von 0° bis 360° gezählt; wenn ich keinen Unterschied der Helligkeiten bemerken konnte, kann willkürlich, entweder der angegebene Positionswinkel, oder der um 180° grössere oder kleinere genommen werden.

[Es folgen die Beobachtungen im Detail, deren Resultate sich in folgender Abhandlung 102, p. 288, 289 finden.]

102. Vergleichung der gegenseitigen Stellungen von 37 Doppelsternen, welche sowohl in Königsberg als in Dorpat beobachtet sind.*)

(Astr. Nachr. 10, p. 389.)

Das Interesse, welches die Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen der Doppelsterne durch die von Sir WILLIAM HERSCHEL gemachte und später durch directe Wahrnehmungen vielfach bestätigte Bemerkung, „dass diese Sterne zusammengehörige Systeme sind“, erhalten haben, veranlasste auf den Sternwarten in Königsberg und Dorpat neue Beobachtungsreihen einer ausgewählten Anzahl derselben. Die Apparate dieser Sternwarten laden ein zu versuchen, ob man Resultate werde erlangen können, welche selbst in diesem Falle, wo die Elemente von Bahnen, die wir meistens nur einige Secunden gross sehen, zu bestimmen sind, die notwendige Feinheit besitzen.

Die Erfahrungen, welche sowohl Herr Etatsrath STRUVE über die Mikrometermessungen mit seinem Fraunhofer'schen Fernrohre, als ich über die Messungen mit meinem Heliometer gemacht hatten, schienen uns Beiden Erfolg zu versprechen. Allein wir wüchsen nichtsdestoweniger, durch die Resultate der auf dieselben Objecte gerichteten Beobachtungen mit Bestimmtheit zu erfahren, ob beide Apparate für Sterne von sehr kleinen Entfernungen wirklich, innerhalb der durch die zufälligen Fehler der Beobachtungen angedeuteten Grenze, in Uebereinstimmung sind, oder ob noch Grund vorhanden ist, einen beständigen Unterschied anzunehmen, der dann mit Entschiedenheit zeigt, dass wenigstens von einer Seite noch etwas zu wünschen ist. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Fällen wollten wir mit dem Hauptzwecke, nämlich der Bestimmung der gegenseitigen Stellungen einer Anzahl

Doppelsterne, vereinigen, und aus diesem Grunde wählten wir 37 dieser Sterne als gemeinschaftliche Beobachtungsobjecte aus. STRUVE, der sich mit der Messung der Doppelsterne im Allgemeinen beschäftigt, wollte diese 37 vorzüglich häufig beobachten; ich wollte dasselbe thun; und wenn unsere Beobachtungen uns hinreichend scheinen würden, zuverlässige Resultate zu geben, wollten wir sie zur öffentlichen Bekanntmachung redigiren und erst dann uns in gegenseitige Kenntniss derselben setzen. Das erstere ist nun geschehen: STRUVE hat seine Beobachtungen der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg vorgelegt; ich die meinigen der königlichen Akademie in Berlin. Die gegenseitige Mittheilung unter uns selbst ist darauf erfolgt. Was die Vergleichung ergeben hat, theile ich jetzt mit der Einwilligung des Herrn Etatsrath STRUVE den Lesern der Astr. Nachr. mit.

1. Königsberger Beobachtungen.

Die befolgte Beobachtungsart habe ich bei einer früheren Gelegenheit (Astr. Nachr. Nr. 189, p. 412 [Abh. 68, p. 102]) durch Anführung des Beispiels des Doppelsterns α Herculis erläutert. Indem ich mich darauf beziehen kann, darf ich hier nur anführen, dass jeder Stern an wenigstens 5 Tagen, an jedem derselben meistens 4 oder 5 Mal beobachtet ist. Die Zahl der dadurch erlangten Beobachtungen halte ich für hinreichend, eine beträchtlich genaue Bestimmung zu geben. Allein die Genauigkeit hängt so sehr von dem Zustande der Atmosphäre ab, dass ich angeben muss, wie ich an einem Orte, der den günstigsten Zustand sehr selten gewährt, in dieser Hinsicht verfahren bin. Den ungünstigsten Zustand der Luft, bei welchem man die

*) [267 d. a. Verz. — Vgl. die vorangehende Abh. 101. — Br. m. O. II. 349. 384. 421 ff.]

Sterne unbegrenzt und in starker Bewegung sieht, betrachte ich als Beobachtungen über Doppelsterne ganz ausschliessend; unter solchen, leider nicht seltenen Umständen habe ich also nicht beobachtet. Allein wenn ich nur bei dem günstigsten Zustande hätte beobachten wollen, so würde eine lange Reihe von Jahren erforderlich gewesen sein, um eine Zahl von 37 Sternen mehrmals wiederholt zu beobachten. Es muss also schon beobachtet werden, wenn der Zustand der Luft nur mittelmässig günstig war; wenn dieses aber der Fall war und ich mich zum Beobachten entschloss, habe ich das dadurch Erlangte jedesmal in das Tagebuch aufgenommen und im Verhältnis der Anzahl der einzelnen Beobachtungen zum Resultate stimmen lassen; selbst dann, wenn ich nach vollendeter Beobachtung bezweifelte, ob der Gewinn den Werth einer unter günstigen Umständen erlangten Bestimmung wesentlich vermehren könne. Ich hielt die Befolgung einer festen Vorschrift dieser Art für nöthig, weil ich nicht glaube, dass es rathsam ist, einer willkürlichen Schätzung des Stimmwerthes der unter verschiedenen Umständen gemachten Beobachtungen Einfluss auf das Resultat, und noch mehr auf seinen mittleren Fehler, einzuräumen. Hätte man einen sicheren Maassstab für diese Schätzung, so würde man dadurch den Vortheil erlangen, es mit den äusseren Umständen noch weniger genau nehmen zu dürfen und also häufiger beobachten zu können. Indessen ist noch Etwas vorhanden, welches noch grösseren Einfluss auf die Güte der Beobachtungen hat als die verschiedenen atmosphärischen Umstände, unter welchen man in unserem Klima messen muss. Dieses ist die Beschaffenheit der Sterne selbst: wenn sie von sehr ungleicher Lichtstärke sind und der hellere ein lebhaft glänzender Stern ist, so wird die Beobachtung schwierig, und häufig muss man, zumal wenn die beiden Sterne nur zwei oder drei Sekunden von einander entfernt sind, schon dann darauf Verzicht leisten, wenn andere Doppelsterne noch mit Erfolg beobachtet werden können. Aus diesem Grunde kann man die mittlere Unsicherheit der Beobachtungen nicht für alle Doppelsterne gleich annehmen; und überhaupt scheint sie meinen Beobachtungen zufolge von so vielen verschiedenen Ursachen abzuhängen, dass es schwer sein wird, die Sicherheit des für einen Doppelstern erhaltenen Resultats anders zu schätzen, als durch eine Untersuchung der in der Beobachtungsreihe, aus welcher es hervorgegangen ist, wirklich vorgekommenen Unterschiede.

Dem Verzeichnisse, welches ich hier folgen lasse, habe ich unter der Benennung des mittlern Fehlers,

sowohl für die Entfernung als für den Positionswinkel, Zahlen beigesetzt, welche die Übereinstimmung der Beobachtungen insoweit beurtheilen lassen, als ohne Angabe der einzelnen möglich ist. Wenn an den verschiedenen Beobachtungstagen die Anzahlen p, p', p'', \dots der Messungen die mittleren Resultate a, a', a'', \dots gegeben haben, so ist das in Verzeichnisse enthaltene Mittel

$$x = \frac{ap + a'p' + a''p'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots}$$

und wenn $a - x, a' - x, a'' - x, \dots$ durch v, v', v'', \dots , und $p + p' + p'' + \dots$ durch n bezeichnet werden, der mittlere Fehler

$$= \sqrt{\frac{p v^2 + p' v'^2 + p'' v''^2 + \dots}{n}}$$

Man wird aus diesen mittleren Fehlern sehen, dass das Instrument in den Entfernungen und den Positionswinkeln etwa gleichviel geleistet hat, so dass kein dringender Grund vorhanden ist, die eine Bestimmung im Allgemeinen für genauer anzunehmen als die andere.

Das Verzeichniss enthält 38 Sterne, ausser den gemeinschaftlichen noch ξ Bootis. Der entfernteste von allen, β Cygni, ist nach einer anderen Methode, nämlich durch Einstellung der Entfernung selbst, beobachtet; die übrigen durch Einstellung der doppelten Entfernung, so wie das angeführte Beispiel zeigt. Einmal habe ich beide Methoden angewandt, um mich durch ihren Erfolg zu überzeugen, dass die erstere, deren Vorzug desto mehr hervortritt je kleiner die Entfernung der Sterne ist, die aber für Entfernungen, welche eine gewisse Grenze überschreiten, nicht mehr angewandt werden kann, wirklich nicht über diese Grenze hinaus angewandt worden ist.

Stern.	Zeit.	Entfernung.	Mittl. Fehler.	Positionswinkel.	Mittl. Fehler.	Anzahl d. Beob.
η Cassiopeae	1830,75	10,073	0,020	$86^{\circ}14'$	2,3	24
ξ Picium	1830,90	23,364	0,041	$63^{\circ}55'$	4,3	29
γ Arietis	1830,93	8,987	0,036	$178^{\circ}55'$	15,3	28
α Picium	1830,93	3,776	0,015	$332^{\circ}59'$	30,2	24
γ Andromedae	1830,76	10,552	0,032	$62^{\circ}17'$	10,6	24
δ Trianguli	1831,06	3,877	0,030	$78^{\circ}13'$	15,2	28
δ Camelopardalis	1830,83	10,461	0,031	$307^{\circ}4'$	8,2	25
118 Tauri	1830,83	5,100	0,032	$195^{\circ}18'$	8,7	23
1 Orionis	1831,05	4,525	0,028	$43^{\circ}59'$	19,2	25
ξ Orionis	1831,93	2,727	0,024	$147^{\circ}52'$	47,5	31
41 Aurigae	1830,85	8,156	0,015	$353^{\circ}47'$	10,4	24
38 Geminorum	1831,60	6,133	0,018	$172^{\circ}46'$	5,6	24
20 Lyncis	1831,17	15,137	0,033	$253^{\circ}12'$	5,5	24
α Geminorum	1831,06	4,730	0,015	$259^{\circ}23'$	16,0	27
ξ Cancri. Com. B	1832,19	1,323	0,026	$31^{\circ}20'$	56,7	34
„ C	1832,19	5,565	0,021	$147^{\circ}38'$	19,4	24

Stern.	Zeit.	Entfernung.	Mittl. Fehler.	Positionswinkel.	Mittl. Fehler.	Anzahl Beob.
2 ϕ Cancri	1831,33	4,792	0,074	33° 32'	14,7	24
1 ν "	1831,67	6,101	0,010	38 25	11,2	25
γ Leonis	1830,80	2,621	0,022	102 13	12,1	37
§ Ursae maj.	1831,08	1,863	0,029	201 32	54,3	26
γ Virginis	1830,59	1,586	0,016	82 10	24,2	29
§ Ursae maj.	1831,01	14,435	0,041	147 19	9,8	27
π Bootis	1831,05	6,181	0,031	98 49	11,5	32
§ "	1831,18	1,288	0,031	130 41	71,8	17
ϵ "	1831,56	2,959	0,020	316 13	45,4	28
§ "	1831,40	7,304	0,018	331 15	5,0	20
§ Coronae bor.	1830,68	6,178	0,024	300 42	10,8	27
α Herculis	1830,92	4,994	0,030	118 34	12,7	30
ρ Ophiuchi	1830,50	5,474	0,014	135 49	9,5	34
Derselbe	1831,53	5,679	0,018	133 57	12,3	30
Derselbe	1832,69	5,794	0,041	132 59	17,1	25
100 Herculis	1830,95	14,024	0,035	2 40	5,6	32
ϵ Lyrae	1830,72	3,313	0,029	25 11	11,5	24
δ "	1830,72	2,817	0,012	156 6	25,1	25
§ Serpentis	1830,75	21,712	0,048	103 41	4,8	25
β Cygni	1831,81	34,327	0,081	55 38	4,9	28
π Aquilae	1830,82	1,582	0,010	121 46	28,1	26
γ Delphini	1830,89	12,016	0,027	272 53	9,5	28
61 Cygni	1830,84	15,638	0,039	90 21	4,1	38
β Cephei	1830,96	13,694	0,024	249 57	13,7	25
§ Aquarii	1830,98	3,525	0,019	355 44	15,4	32

In den Sternenpaaren γ Arietis und 2 ϕ Cancri konnte ich keinen Unterschied der Helligkeit beider Sterne bemerken, weshalb der Positionswinkel durch Hinzufügung von 180° mit gleichem Rechte auf den anderen Stern bezogen werden kann. Bei allen anderen Sternen schien mir ein, wenn auch einmal sehr geringer Unterschied der Helligkeiten einen Grund anzugeben, den Positionswinkel auf denjenigen Stern zu beziehen, auf welchen ich ihn im Verzeichnisse bezogen habe.

2. Dorpater Beobachtungen.

Das mir von Herrn Etatsrath STRUVE gesandte Verzeichniss, welches ich hier in genauer Copie mittheile, ist von dem meinigen seiner Form nach nur darin verschieden, dass es statt der mittleren Fehler wahrscheinliche (etwa $\frac{2}{3}$ von jenen) angibt. Die Positionswinkel gibt es in Graden und Hunderteln derselben.

Stern.	Epoche.	Distanz.	Wahrscheinl. Fehler.	Richtungswinkel.	Wahrscheinl. Fehler.	Beob. Tage.
η Cassiopeae	1832,05	9,780	0,036	87,60	0,15	5
§ Pictoris	1832,83	23,540	0,036	63,73	0,06	5
γ Arietis	1830,84	8,631	0,030	309,98	0,15	7
α Pictoris	1831,16	3,636	0,036	335,72	0,41	5
γ Andromedae	1830,03	10,382	0,033	62,44	0,13	6
ϵ Trianguli	1830,98	3,598	0,036	77,86	0,42	5
1 Coronae borealis	1830,57	10,133	0,030	307,07	0,13	7

BESSEL'S A. Abhandlungen 2. Bd.

Stern.	Epoche.	Distanz.	Wahrscheinl. Fehler.	Richtungswinkel.	Wahrscheinl. Fehler.	Beob. Tage.
118 Tauri	1829,63	4,894	0,036	196,77	0,31	5
1 Orionis	1830,81	4,236	0,036	40,32	0,36	5
§ "	1831,22	2,347	0,033	151,30	0,62	6
γ Ursae maj.	1829,71	7,983	0,036	333,44	0,19	5
38 Geminorum	1829,24	5,756	0,036	174,88	0,26	5
20 Lyncis	1830,55	10,036	0,036	253,40	0,19	5
Castor	1826,23	4,404	0,036	222,54	0,34	5
"	1827,28	4,417	0,040	222,32	0,38	4
"	1828,30	4,355	0,057	222,15	0,54	2
"	1829,29	4,360	0,046	220,40	0,44	3
"	1831,31	4,464	0,036	259,36	0,34	3
"	1832,35	4,563	0,046	258,00	0,44	3
§ Cancri A et B	1828,22	1,140	0,046	57,63	1,72	3
"	1828,99	0,977	0,046	38,83	2,00	3
"	1831,29	1,032	0,032	29,80	1,34	6
"	1832,27	1,150	0,040	27,02	1,47	4
§ Cancri A et C	1826,22	5,900	0,046	154,68	0,37	3
"	1828,99	5,313	0,046	161,38	0,37	3
"	1831,29	5,402	0,032	148,57	0,26	6
"	1832,27	5,520	0,030	118,60	0,31	4
η^+ Cancri	1829,46	4,563	0,030	212,04	0,28	7
η^- Cancri	1829,46	5,826	0,030	36,84	0,22	7
γ Leonis	1830,18	2,479	0,021	102,80	0,46	14
§ Ursae maj.	1826,90	1,747	0,046	238,75	1,14	3
"	1827,28	1,715	0,040	228,27	1,00	4
"	1829,35	1,671	0,030	213,59	0,74	7
"	1831,45	1,706	0,036	203,82	0,88	5
"	1832,41	1,750	0,036	195,94	0,88	5
γ Virginis	1825,33	2,380	0,033	277,92	0,92	6
"	1828,37	2,070	0,030	271,50	1,64	1
"	1829,39	1,782	0,036	268,26	0,85	5
"	1831,36	1,492	0,036	260,92	1,02	5
"	1832,52	1,262	0,040	253,50	1,34	4
§ Ursae maj.	1830,64	14,368	0,033	147,60	0,10	6
π Bootis	1830,32	5,833	0,027	99,20	0,19	9
§ "	1830,19	1,190	0,025	308,87	0,90	10
ϵ "	1828,89	2,652	0,020	320,88	0,32	16
§ Coronae	1829,71	6,002	0,036	300,85	0,25	5
α Herculis	1829,64	4,648	0,023	118,48	0,21	12
ρ Ophiuchi	1825,56	3,985	0,021	148,14	0,23	14
"	1827,02	4,375	0,057	146,15	0,55	2
"	1828,71	4,782	0,040	140,21	0,73	4
"	1829,59	5,087	0,033	138,07	0,27	6
"	1830,85	5,310	0,057	136,75	0,45	2
"	1831,68	5,410	0,036	134,71	0,28	5
"	1832,76	5,553	0,046	133,87	0,35	3
100 Herculis	1831,72	13,847	0,033	182,88	0,10	6
ϵ Lyrae	1831,45	3,034	0,030	26,06	0,42	7
δ Lyrae	1831,45	2,570	0,030	155,17	0,50	7
§ Serpentis	1830,05	21,647	0,028	103,86	0,06	8
β Cygni	1832,12	34,292	0,036	56,75	0,04	5
π Aquilae	1830,97	1,502	0,033	180,75	0,92	6
γ Delphini	1830,89	11,904	0,036	263,76	0,13	5
61 Cygni	1831,38	15,605	0,033	91,04	0,10	6
β Cephei	1832,26	13,574	0,030	250,03	0,09	7
§ Aquarii	1830,79	3,499	0,030	356,59	0,37	7

„An jedem Beobachtungstage ist die gedoppelte Distanz bald nur einmal, bald zwei bald drei Mal, selten mehrere Male beobachtet, im Mittel genommen zwei Mal. Der Winkel ist ebenso in der Regel durch zweimaliges Einstellen der Fäden an jedem Tage bestimmt. W. STRUVE.“

3. Vergleichung beider Verzeichnisse.

Die oft nicht unbeträchtliche gegenseitige Bewegung der beiden Sterne, aus welchen ein Doppelstern zusammengesetzt ist, ist noch zu wenig sicher bekannt, um die Vergleichung beider Verzeichnisse genau machen zu können. Ich kann daher nur ihren Unterschied und den Einfluss der jährlichen Bewegungen im Sinne der Bewegung = δ und im Sinne des Positionswinkel = π hier anführen. Für α Geminorum ist das Mittel der drei im Dorpater Verzeichnisse für 1829, 31, 32 angegebenen Bestimmungen, mit Rücksicht auf ihren Werth, mit der meinigen verglichen; für ζ Cancri (B—C) das Mittel aus den Angaben für 1831 und 32; für ξ Ursae maj. das Mittel aus den Jahren 1829, 31, 32; für γ Vir-

ginis das Mittel aus den Jahren 1828, 29, 31, 32; für p Ophiuchi habe ich das Mittel der vier letzten Bestimmungen von STRUVE mit dem Mittel der drei meinigen verglichen. Das Zeichnen eines Unterschiedes ist so zu verstehen, dass der Unterschied, zu der Angabe meines Verzeichnisses hinzugesetzt, die Struve'sche ergibt.

Bekanntlich haben Sir JAMES SOUTH und Sir JOHN HERSCHEL sehr grossen Fleiss auf die Bestimmung der Doppelsterne gewandt und uns ausgedehnte und schätzbare Verzeichnisse davon geliefert. Diese mit dem meinigen zu vergleichen habe ich unterlassen, weil sie der Zeit nach so entfernt sind, dass ihre Unterschiede von dem meinigen eher zur Bestimmung der Bewegungen dienen, als ein Urtheil über die Uebereinstimmung der Beobachtungen geben können. Nur Sir JOHN HERSCHEL'S in den Jahren 1829 und 30 gemachte, in der Abhandlung „Micrometrical Measures of 364 Double Stars“ verzeichnete Beobachtungen habe ich mit dem meinigen auf dieselbe Art wie die Dorpater verglichen.

Stern.	STRUVE.		HERSCHEL.	
	Entfernung.	Positionen.	Entfernung.	Positionen.
γ Cassiopeae *)	-0,293 - 1,30 δ	+ 1'22" - 1,30 π	+ 0,307 + 1,09 δ	+ 0'10" + 1,00 π
ζ Piscium	+ 0,986 - 1,93 δ	- 0 11 - 1,93 π	- 0,690 - 0,05 δ	- 0 24 - 0,05 π
γ Arietis	- 0,326 + 0,09 δ	+ 1 4 + 0,09 π	+ 0,011 + 0,90 δ	- 0 15 + 1,39 π
α Piscium	- 0,139 - 0,23 δ	+ 2 44 - 0,23 π		
γ Andromedae	- 0,220 + 0,73 δ	+ 0 9 + 0,73 π		
ϵ Trianguli	- 0,279 + 0,07 δ	- 0 21 + 0,07 π	- 0,277 + 0,10 δ	- 0 18 + 0,10 π
1 Camelopardalis	- 0,328 + 0,26 δ	0 0 + 0,26 π		
118 Tanri	- 0,206 + 1,20 δ	+ 1 28 + 1,20 π		
1 Orionis	- 0,289 + 0,21 δ	- 3 40 + 0,24 π		
ζ „	- 0,380 + 0,71 δ	+ 3 26 + 0,71 π	- 0,127 + 1,75 δ	- 2 0 + 1,75 π
41 Aurigae	- 0,168 + 1,14 δ	- 0 21 + 1,14 π		
38 Geminorum	- 0,377 + 2,36 δ	+ 2 7 + 2,36 π		
20 Lyncis	- 0,101 + 0,62 δ	+ 0 12 + 0,62 π		
α Geminorum	- 0,267 + 0,02 δ	- 0 1 + 0,02 π	- 0,130 + 0,77 δ	+ 0 37 + 0,86 π
ζ Cancri Com. B.	- 0,244 + 0,51 δ	- 2 27 + 0,51 π	- 0,313 + 1,70 δ	+ 4 15 + 1,80 π
„ C.	- 0,106 + 0,51 δ	+ 0 59 + 0,51 π		
2 ϕ Cancri	- 0,325 + 1,87 δ	- 1 30 + 1,87 π		
1 v „	- 0,275 + 2,21 δ	- 1 35 + 2,21 π	+ 0,584 + 1,49 δ	+ 0 10 + 1,49 π
γ Leonis	- 0,142 + 0,62 δ	+ 0 35 + 0,62 π	+ 0,409 + 0,52 δ	+ 1 22 + 0,72 π
ξ Ursae majoris	- 0,168 + 0,25 δ	+ 3 59 + 0,25 π	+ 0,372 + 0,47 δ	- 0 38 + 0,10 π
γ Virginis	- 0,020 + 0,22 δ	- 0 4 + 0,22 π	+ 0,527 - 0,38 δ	+ 1 20 - 0,50 π
ζ Ursae majoris	- 0,067 + 0,37 δ	+ 0 17 + 0,37 π	- 0,230 + 0,57 δ	+ 0 30 + 0,57 π
κ Bootis	- 0,348 + 0,73 δ	+ 0 23 + 0,73 π		
ζ „	- 0,098 + 0,99 δ	- 1 49 + 0,99 π	- 0,045 + 0,88 δ	+ 2 22 + 0,92 π
η „	- 0,307 + 2,67 δ	+ 4 40 + 2,67 π	+ 0,684 + 1,22 δ	+ 6 4 + 1,29 π
ξ „			+ 0,316 + 1,09 δ	+ 2 12 + 1,11 π
ζ Coronae bor.	- 0,176 + 0,97 δ	+ 0 9 + 0,97 π		
α Herkulis	- 0,346 + 1,28 δ	- 0 5 + 1,28 π		

*) Bei Gelegenheit dieses Sterns bemerke ich, dass eine in den Phil. Transactions für 1824 mir zugeschriebene Bestimmung des Positionswinkels für 1814 nicht von mir herrührt.

Stern.	STRUV.		HERSCHEL.	
	Entfernung.	Positionen.	Entfernung.	Positionen.
ρ Ophiuchi	-0,265 + 0,02 δ	+ 1° 10' + 0,18 π	+ 0',382 + 0,65 δ	+ 4° 35' + 1,20 π
100 Herculis	-0,177 - 0,77 δ	+ 0 13 - 0,77 π
ϵ Lyrae	-0,279 - 0,73 δ	+ 0 53 - 0,73 π	+ 0,247 + 1,40 δ	- 0 59 + 1,40 π
δ	-0,247 - 0,73 δ	- 0 56 - 0,73 π	+ 0,663 + 1,02 δ	+ 2 10 + 1,02 π
ϕ Serpentina	-0,065 + 0,70 δ	+ 0 10 + 0,70 π
θ Cygni	-0,035 - 0,31 δ	+ 0 7 - 0,31 π	- 0,497 + 1,14 δ	+ 0 45 + 1,14 π
π Aquilae	-0,080 + 0,85 δ	- 1 1 + 0,85 π
γ Delphini	-0,112	+ 0 53
61 Cygni	-0,033 - 0,54 δ	+ 0 41 - 0,54 π	- 0,038 + 0,28 δ	+ 0 28 + 0,28 π
β Cephei	-0,020 - 1,46 δ	+ 0 5 - 1,46 π
ζ Aquarii	-0,026 + 0,19 δ	+ 0 51 + 0,19 π	+ 1,205 + 1,50 δ	+ 0 39 + 1,87 π

Obgleich diese Unterschiede erst dann vollständig beurtheilt werden können, wenn man die Mittel besitzen wird, sie von dem Einflusse der Bewegungen zu befreien, so geht doch schon daraus hervor, dass die in Dorpat gemessenen Entfernungen im Allgemeinen kleiner sind, als die in Königsberg gemessenen. Es ist also, wenigstens in einer der Beobachtungsarten, noch ein beständiger

Fehler vorhanden. Welche von beiden ihn besitzt, ist vorläufig nicht zu entscheiden. Die Unterschiede der Positionswinkel sind grösstentheils nicht grösser als erwartet werden musste; mehrere derselben werden durch die Bewegungen der Sterne erklärt werden, allein ich will dieses lieber der Zeit überlassen, als unsichere Annahmen der Bewegungen zur Reduction anwenden.

103. Ueber den Doppelstern ρ Ophiuchi.*)

(Astron. Untersuchungen I, p. 296.)

Der Stern ρ Ophiuchi gehört bekanntlich zu den vorzugsweise merkwürdigen Doppelsternen, welche eine fortschreitende Bewegung und zugleich eine Umlaufsbewegung, beide von ungewöhnlicher Schnelligkeit, zeigen. Die letztere änderte, zwischen den beiden äussersten, etwa 25 Jahre von einander entfernten Beobachtungen HERSCHEL'S I., den Positionswinkel um 131° und hat ihn auch ferner sehr beträchtlich geändert. Zwar ist ρ Ophiuchi nicht der einzige Doppelstern, welcher eine so schnelle Umlaufsbewegung besitzt, allein er ist der einzige bis jetzt bekannt gewordene, welcher sie verbunden mit einer beträchtlicheren Entfernung der beiden, ihn zusammensetzenden Sterne gezeigt hat; so dass kleine Fehler der Beobachtungen ihrer gegenseitigen Lage, vergleichungsweise mit den Abmessungen ihrer Bahn um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt und der Bewegung in ihr, bei ihm kleiner sind als bei anderen Doppelsternen. Die Auszeichnung, welche dieser Stern hierin vor anderen besitzt, begründet die Erwartung, dass seine Bahn früher wird

bestimmt werden können, als die Bahnen anderer Doppelsterne. Allein der höchste Grad der durch die Hilfsmittel der gegenwärtigen Zeit erreichbaren Genauigkeit der Beobachtungen wird kaum hinreichen, einer Angabe der gegenwärtigen gegenseitigen Stellung der beiden Sterne des Doppelsterns so viel Gewicht zu geben, dass sie als ein werthvoller Beitrag zu den Grundlagen der schwierigen, in späterer Zeit zu versuchenden Bestimmung der sieben Elemente einer, in dem ebenen Raume weniger Secunden vor sich gehenden Bewegung erscheinen kann.

Ich habe das Heliometer der Königsberger Sternwarte häufig in der Hoffnung angewandt, einen solchen Beitrag zu den Beobachtungen des Doppelsterns ρ Ophiuchi zu erlangen; auch habe ich verschiedene Methoden der Beobachtung versucht, in der Absicht, dadurch zu einer Prüfung der Richtigkeit der aus der gewöhnlichen, auch bei den in der vorigen Abhandlung mitgetheilten Messungen angewandten, hervorgehenden Resultate zu gelangen. Das Folgende wird nicht nur das was sich auf den Doppelstern bezieht, welcher seine Veranlassung ist, angeben, sondern auch die Beobachtungsart der Doppelsterne im Allgemeinen näher erläutern.

*) [Abh. VIII aus 350 d. a. Verz. — Dieselbe Abhandlung findet sich, fast unverändert, Astr. Nachr. 15, p. 105 (312 d. a. Verz.)]

1.

Die Beobachtungen von 38 Doppelsternen, welche die vorige Abhandlung [s. Abb. 102] enthält, beruhen, mit einigen Ausnahmen, auf Messungen der vierfachen Entfernung der Sterne, deren Hergang ich S. 282 [Abb. 101, p. 286] schon angegeben habe. Auf dieselbe Art habe ich *p* Ophiuchi von 1830 bis 1837 an 50 verschiedenen Tagen beobachtet und dadurch Folgendes erhalten.

		Ent- fernung.	Positionswinkel.	
1830 Mai	16	1830,37	5,49	136° 2' 2 Messungen
	18	0,38	5,41	134 28 2 "
	24	0,39	5,40	135 38 4 "
Juni	6	0,43	5,50	136 33 2 "
	7	0,43	5,45	136 19 3 "
	8	0,44	5,44	135 67 3 "
	11	0,44	5,48	136 26 4 "
	16	0,46	5,50	135 21 5 "
	Sept. 2	0,67	5,52	136 2 5 "
	20	0,72	5,51	135 23 4 "
1831 Mai	19	1,38	5,62	133 0 4 "
	22	1,39	5,76	133 14 4 "
	23	1,39	5,65	134 10 4 "
	24	1,40	5,69	134 35 4 "
Juli	21	1,55	5,70	134 4 5 "
Oct.	9	1,77	5,70	134 27 5 "
	10	1,77	5,76	133 56 4 "
1832 Juli	10	2,52	5,68	134 3 5 "
	13	2,53	5,73	133 11 5 "
Oct.	13	2,78	5,83	132 53 5 "
	18	2,80	5,83	132 36 5 "
	19	2,80	5,90	132 12 5 "
1834 Juni	23	4,48	6,11	129 50 5 "
	25	4,48	6,05	130 23 5 "
Juli	3	4,50	6,13	130 35 5 "
	8	4,52	6,14	131 14 5 "
Sept.	19	4,72	6,18	131 18 5 "
Oct.	5	4,76	6,13	131 42 5 "
	12	4,78	6,15	130 17 5 "
1836 Juni	23	6,48	6,28	128 6 5 "
Juli	4	6,51	6,36	129 56 5 "
	7	6,52	6,38	130 23 5 "
	13	6,53	6,36	130 11 5 "
	21	6,55	6,34	129 9 5 "
1837 Juni	14	7,45	6,49	128 48 5 "
	17	7,46	6,50	128 44 5 "
	28	7,49	6,28	128 39 5 "
Juli	6	7,51	6,51	129 9 5 "
	20	7,55	6,39	128 44 5 "
Aug.	3	7,59	6,46	129 15 5 "
	6	7,60	6,44	129 1 5 "
	18	7,63	6,50	127 55 5 "
	20	7,63	6,56	128 3 5 "
	28	7,66	6,49	127 23 5 "
Sept.	8	7,69	6,49	128 15 5 "
	9	7,69	6,46	128 7 5 "

		Ent- fernung.	Positionswinkel.	
1837 Sept.	11	1837,70	6,54	127° 55' 5 Messungen.
	20	7,72	6,47	127 50 5 "
Oct.	2	7,75	6,48	128 4 5 "
	3	7,76	6,44	127 40 5 "

Vereinigt man die in jedem der früheren Jahre gemachten Beobachtungen in ein arithmetisches Mittel, die in letzten Jahre gemachten aber in zwei arithmetische Mittel, so erhält man:

	Ent- fernung.	Positionswinkel.	
1830,50	5,474	135° 49'	34 Messungen.
1831,53	5,679	133 57	30 "
1832,69	5,794	132 59	25 "
1834,61	6,127	130 47	35 "
1836,52	6,344	129 33	25 "
1837,52	6,439	128 54	35 "
1837,69	6,470	127 55	45 "

2.

STRUVE hat, in seinem grossen Werke über die Messungen der Doppelsterne, seine Beobachtungen *p* Ophiuchi gleichfalls in arithmetische Mittel zusammengezogen. Davon werde ich die hier anführen, welche der Zeit nach, mit den meinigen nahe zusammentreffen und daher mit diesen verglichen werden können:

	Ent- fernung.	Positionswinkel.	
1830,34	5,310	135° 45'	2 Tage
1831,68	5,410	134 42	5 "
1832,75	5,553	133 58	3 "
1834,47	5,852	131 9	4 "
1835,60	6,108	130 46	5 "

Diese Beobachtungen stimmen in der Zunahme der Entfernung und der Abnahme des Positionswinkels, welche sie andeuten, nahe mit den vorher angeführten überein, allein sie ergeben die Entfernung immer kleiner und den Positionswinkel immer grösser, die Unterschiede sind im Mittel etwa $-0,23$ und $+4'$. Dass ein Unterschied der gemessenen Entfernungen sich nicht etwa bei diesem Sterne allein, sondern bei den Doppelsternen im Allgemeinen findet, geht aus der Vergleichung hervor, welche zwischen den Königsberger und Dorpater Messungen von 37 Doppelsternen, in Nr. 240 von SCHUMACHER'S Astronomischen Nachrichten [s. Abb. 102] und auch in der Einleitung des Struveschen Werkes (p. CXL) gemacht worden ist: die Dorpater Entfernungen sind im Allgemeinen kleiner als die Königsberger, und STRUVE bemerkt darüber, dass sich ein gewisses Gesetz in den Unterschieden zu zeigen scheint, nach welchem sie für ganz kleine Entfernungen, so wie auch wieder für Entfernungen von $20''$ und darüber, fast verschwinden, und bei der Entfernung von

6" ihr etwa 0,27 betragendes Maximum erreichen. So klein diese Unterschiede an sich sind, so lassen ihr Vorkommen bei so vielen Sternen und die nahe Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungen untereinander, doch nicht bezweifeln, dass sie aus einer bestimmten Ursache hervorgehen, deren Folge war, dass entweder in Königsberg zu gross, oder in Dorpat zu klein gemessen wurde. — Dass der beständige Unterschied zwischen den an beiden Orten beobachteten Positionswinkeln ρ Ophiuchi sich bei allen Doppelsternen, und stets in demselben Sinne zeigen sollte, ist weder zu erwarten, noch wird es durch die Vergleichung der 37 Doppelsterne angedeutet. Ich werde aber unten auf die Positionswinkel zurückkommen und darüber Etwas mittheilen, was, wenn auch vielleicht nicht beständige, doch grössere zufällige Fehler der einzelnen Beobachtungen hat erzeugen können, als der Kraft des in Königsberg angewandten Apparats angemessen erscheinen.

Wenn man an dem Stattfinden eines beständigen Unterschiedes der von STRUVE und von mir gemessenen Entfernungen nicht zweifeln kann, so kann man auch nicht zweifeln, dass wenigstens einer der beiderseitigen Apparate den dadurch erlangten Resultaten nicht alle die Genauigkeit gibt, welche die Kleinheit der zufälligen Beobachtungsfehler erwarten lässt. So klein der Unterschied ist, so kann man ihn dennoch nicht für unerheblich halten; denn die Auffindung seiner Ursache wird entweder eine Vervollkommnung der Beobachtungsmethode der kleinen Entfernungen ergeben, oder, wenn der Fehler sich von dem einen der Apparate unzertrennlich zeigen sollte, zur vorzugsweisen Benutzung des anderen auffordern. In Beziehung auf die Doppelsterne ist der Unterschied auch nicht unerheblich, da er, trotz seiner Kleinheit, ein nicht kleines Verhältniss zu den kleinen Grössen besitzt, bei welchen er sich zeigt und welche der eigentliche Gegenstand der Beobachtungen sind.

Dieses ist auch die Absicht gewesen, welche STRUVE verfolgt hat, indem er der Ursache des Unterschiedes weiter nachgespürt hat. Er hat weisse Punkte auf schwarzem Grunde, in bekannten Entfernungen von einander und von dem Fernrohre angebracht, und sich durch Messung der Winkel zwischen ihnen überzeugt, dass das Fadenmikrometer seines Fernrohrs diese Winkel richtig angibt. Die unmittelbare Prüfung der Richtigkeit der Angaben des Fadenmikrometers, welche man hierdurch erhält, ist ohne Zweifel wünschenswerth, indem sie eine der Möglichkeiten beseitigt, durch deren Verfolgung man die Erklärung des Fehlers zu versuchen geneigt sein könnte. Allein die Messung des

Winkels zwischen zwei festen Punkten wird durch das Fadenmikrometer durch ein so einfaches Verfahren ergeben, dass ich glaube, die Möglichkeit eines beständigen Fehlers derselben zu den unwahrscheinlicheren zählen zu müssen. Das von STRUVE angewandte Verfahren bei der Messung der Entfernung zweier fester Punkte ist nämlich folgendes: man drehet das Mikrometer zuerst so um die Axe des Fernrohrs, dass die gerade Linie zwischen beiden Punkten senkrecht auf seinen beiden Fäden steht; dann bringt man einen, in der Mitte zwischen beiden zu messenden Punkten befindlichen dritten Punkt unter den festen Faden, den beweglichen aber zuerst auf den einen, dann auf den anderen der beiden äusseren Punkte und liest die Angaben der Schraube ab. Der Unterschied zwischen beiden Ablesungen ist die doppelte Entfernung jedes der äusseren Punkte von dem mittleren. Vorausgesetzt dass man die Schraube immer in einer Richtung drehet, glaube ich nicht, dass die Messung durch etwas anderes, als durch Unvollkommenheit des Sehens im Fernrohre und durch Unregelmässigkeiten der Schraube unrichtig gemacht werden kann; diese Ursachen können zufällige, übrigens bei dem schönen Dorpater Apparate nur kleine, nicht aber beständige Fehler erzeugen. Dieses ist auch das Ergebnis von STRUVE's unmittelbaren Versuchen, welche also auch den leisensten Zweifel an der Richtigkeit des Mikrometers selbst verschuehen.

Dagegen macht STRUVE eine Bemerkung, welche einen Zweifel an der Richtigkeit der Messungen mit dem Königsberger Heliometer erzeugt. Er erinnert, dass, indem die Beobachtungsart der vierfachen Entfernungen auf der, durch Augenmass erlangten Vergleichung des zweiten Zwischenraumes zwischen den vier, sich im Fernrohre zeigenden Sternen, mit den beiden äusseren Zwischenräumen beruhet, und die letzteren nicht, wie der zweite, beiderseits durch zwei Sterne eingeschlossen sind, bezweifelt werden kann, ob das Augenmass ein durch diese Verschiedenheit nicht beeinträchtigt Urtheil ablege. Diese Bemerkung würde, wenn ich selbst sie gemacht hätte, mich veranlassen haben, vor dem Anfange der Beobachtungen der Doppelsterne unmittelbare Prüfungen vorzunehmen, aus welchen sich hätte ergeben müssen, ob ein Einfluss der angegebenen Ursache wirklich vorhanden ist, oder nicht. Solche Prüfungen habe ich, nachdem ich die Bemerkung kennen gelernt habe, vorgenommen und werde ihr Ergebnis in den beiden folgenden §§ mittheilen. Vorher aber werde ich den Grund angeben, welcher mich veranlasst hat, meine Messung auf die Vergleichung des mittleren Zwischenraumes mit den

beiden äusseren zu bauen. Ich hätte nämlich jenen auch mit einem der äusseren vergleichen und den anderen absichtlich ganz übersehen können; denn es ist gar nicht schwierig, dem vierten Sterne, vielleicht mit der Ausnahme sehr naher Doppelsterne, die Aufmerksamkeit ganz zu entziehen und sich eben so wenig dadurch stören zu lassen, als wenn er gar nicht vorhanden wäre. Dass ich nicht diese Beobachtungsart, sondern die andere, welche von der Struve'schen Bemerkung getroffen wird, gewählt habe, geschah, weil bekanntlich die Entfernung zweier Punkte desto kleiner beurtheilt wird, je näher sie bei dem Scheitelpunkte stehen, welches falsche Urtheil sowohl bei dem Sehen im Fernrohre, als bei dem Sehen mit blossen Augen stattfinden kann und dann in der Beurtheilung der Gleichheit zweier Entfernungen, falls sie nicht in horizontaler Richtung liegen, einen Fehler erzeugen muss. Um diesen Fehler zu vermeiden, verglich ich den mittleren Zwischenraum mit beiden äusseren. Allein seitdem mir der Zweifel gegen diese Beobachtungsart bekannt geworden ist, habe ich die Beobachtungen von p Ophiuchi, vom 18. August 1837 an, so gemacht, dass ich immer nur den Zwischenraum zwischen beiden Bildern des kleineren Sterns, durch das zwischen ihnen liegende Bild des grösseren, in zwei gleiche Hälften getheilt und das zweite Bild des letzteren gar nicht berücksichtigt habe. Bemerkbaren Einfluss auf die Messung der Entfernung hat diese Aenderung aber nicht hervorgebracht, wie die Vergleichung der beiden letzten arithmetischen Mittel im vorigen § zeigt. Ich glaube überzeugt zu sein, dass mich das unbeachtet gelassene Bild des grösseren Sterns, bei diesen Beobachtungen, bei welchen ich es nicht beachten wollte, wirklich nicht im Mindesten gestört hat und bin daher geneigt, in der Uebereinstimmung der durch beide Methoden erlangten Resultate einen Grund der Annahme zu finden, dass es auch die Richtigkeit der Beurtheilung der Entfernungen nicht stört, wenn man es nicht übersehen will.

3.

Die Natur des Heliometers bringt mit sich, dass man grössere Entfernungen mit derselben Genauigkeit messen kann, mit welcher kleinere gemessen werden. Hieraus kann man Vortheil ziehen, wenn es darauf ankommt, unmittelbar zu prüfen, ob die Messung einer kleinen Entfernung richtig, oder mit einem, aus einer unbekanntem Ursache hervorgehenden, immer wiederkehrenden Fehler behaftet ist: man kann nämlich die kleine Entfernung aus dem Unterschiede zweier grösse-

ren ableiten und dadurch den etwanigen beständigen Fehler der Messung der ersteren ganz umgehen. Sowohl dieser Prüfung wegen, als auch um eine neue, von den angeführten Beobachtungen und der dabei angewandten Methode ganz unabhängige Bestimmung der Entfernung beider Sterne p Ophiuchi zu erlangen, habe ich eine zweite Beobachtungsart angewandt, welche ich jetzt beschreiben werde.

Ich suchte einen Stern in der Nähe des Doppelsterns und näherungsweise in der Richtung seiner beiden Sterne, in der Absicht, die Entfernungen beider Sterne des Doppelsterns von ihm zu messen und von ihrem Unterschiede auf die Entfernung der letzteren von einander zu schliessen. Ein solcher Stern (a) der 7,8. Grösse findet sich in der Entfernung $45' 12''$ und im Positionswinkel $116^\circ 49'$, also wenn man für den Positionswinkel des Doppelsterns das letzte der im 1. § enthaltenen Resultate annimmt, $11^\circ 6'$ aus seiner Richtung ausweichend. Die eine Objectivhälfte des Heliometers wurde etwa um die Hälfte der Entfernung rechts, die andere eben so weit links von seiner Axe gestellt, wodurch ein Bild von a in die Nähe des Bildes des Doppelsterns gebracht wurde; dann wurde, durch Drehung des Heliometers und durch Drehung der Schraube der zweiten Objectivhälfte, das Bild von a in die Richtungslinie des Doppelsterns und in dieselbe Entfernung von seinem Hauptsterne gebracht, in welcher der Gehülte auf der anderen Seite stand, so dass die drei Bilder einen dreifachen Stern in gerader Linie und beiderseits gleichen Entfernungen darstellten; nach der Ablesung der Schraube der Objectivhälfte II wurde sie weiter vorwärts gedreht und auch das ganze Heliometer so um die Axe des Fernrohrs bewegt, dass sich wieder ein dreifacher Stern, wie vorher, nun aber in der Ordnung p , Comes, a zeigte. Der Unterschied der vorigen Ablesung von der jetzigen ist die Projection der dreifachen Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit a verbindende Linie. Um die Beobachtung zu wiederholen, wurden die Schraube der Objectivhälfte I und das Heliometer selbst gedreht, so dass die erste Erscheinung wieder hervorgebracht wurde; dann die Objectivhälfte II u. s. w., um die zweite hervorzubringen. Auf diese Art wurden an jedem Tage 5 Beobachtungen der dreifachen Projection der Entfernung gemacht, nach deren Beendigung die Objectivhälften auf entgegengesetzte Seiten der Axe des Fernrohrs gebracht und nun wieder zu 5maliger Wiederholung der Beobachtung angewandt wurden. Ich habe im Jahre 1837 10 Reihen solcher Sätze von 10 Beobachtungen gemacht und werde die daraus hervorgehenden 100 einzelnen

Messungen der dreifachen Projection der Entfernung jetzt anführen:

Aug. 3.	Aug. 6.	Aug. 7.	Aug. 16.	Aug. 18.
$0^{\text{h}}371$	$0^{\text{h}}350$	$0^{\text{h}}362$	$0^{\text{h}}368$	$0^{\text{h}}360$
0,363	0,358	0,358	0,346	0,360
0,366	0,366	0,360	0,360	0,352
0,353	0,365	0,370	0,359	0,351
0,371	0,358	0,360	0,364	0,356
0,371	0,362	0,357	0,372	0,363
0,354	0,360	0,362	0,360	0,347
0,350	0,358	0,350	0,350	0,345
0,378	0,353	0,370	0,356	0,355
0,370	0,356	0,370	0,347	0,355

Aug. 20.	Aug. 28.	Aug. 30.	Sept. 4.	Sept. 8.
$0^{\text{h}}360$	$0^{\text{h}}368$	$0^{\text{h}}369$	$0^{\text{h}}360$	$0^{\text{h}}359$
0,364	0,366	0,362	0,358	0,357
0,355	0,360	0,370	0,357	0,371
0,352	0,362	0,362	0,365	0,360
0,368	0,358	0,370	0,359	0,361
0,380	0,366	0,365	0,359	0,362
0,361	0,353	0,361	0,368	0,368
0,364	0,364	0,360	0,360	0,369
0,360	0,355	0,365	0,350	0,365
0,365	0,349	0,347	0,350	0,365

Das arithmetische Mittel dieser 100 Messungen ist $= 0^{\text{h}}36062$ und sein mittlerer Fehler $= \pm 0^{\text{h}}000716$. Die Projection der Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit dem Sterne α verbindende Linie ist also:

$$0^{\text{h}}12021; \text{ m. F. } = \pm 0^{\text{h}}000239,$$

und die Entfernung selbst, in Secunden ausgedrückt:

$$1837,63 \dots = 6^{\text{m}}482; \text{ m. F. } = \pm 0^{\text{m}}0129.$$

Ich bemerke bei diesem Resultate, dass die vier ersten Beobachtungsreihen bei sehr unruhiger Luft gemacht worden sind, so wie sie bei ungewöhnlicher, damals stattfindender Wärme gewöhnlich ist; später wurde es kühler und die Luft ruhiger; allein ich zweife nicht, dass Beobachtungen dieser Art noch beträchtlich besser unter einander übereinstimmen würden, wenn sie bei ganz ruhiger (in Königsberg freilich seltener) Luft gemacht werden könnten.

4.

Ich habe noch eine dritte Beobachtungsart angewandt, um der Entfernung des Doppelsterns noch sicherer zu werden. Diese beruht, wie die vorige, auf der Vergleichung desselben mit dem Sterne α , ist aber dadurch von jener verschieden, dass das Bild dieses Sterns nicht in Entfernungen von dem Hauptsterne und dem Gefährten, welche der Entfernung des Doppelsterns gleich sind, gebracht, sondern im Zusammenfallen mit

beiden beobachtet wurde. Diese Beobachtungsart gibt also die einfache Projection der Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit α verbindende Linie. Es versteht sich, dass die Bilder der Sterne nicht unmittelbar zur Deckung gebracht wurden, sondern dass ich das Stattfinden derselben durch kleine Drehungen des Heliometers um die Axe des Fernrohrs beurtheilte, welche den Bildern kleine Bewegungen gaben, deren Annäherung und Entfernung in einer Linie nach weit genauer beobachten kann, als ihre Deckung selbst. Auch diese Beobachtungsart habe ich an 10 Tagen, an jedem 10mal, angewandt und dadurch Folgendes erhalten:

Juli 28.	Juli 29.	Sept. 11.	Sept. 14.	Sept. 20.
$0^{\text{h}}121$	$0^{\text{h}}120$	$0^{\text{h}}115$	$0^{\text{h}}117$	$0^{\text{h}}122$
0,123	0,120	0,121	0,125	0,115
0,116	0,120	0,119	0,118	0,121
0,121	0,122	0,112	0,112	0,114
0,116	0,121	0,121	0,126	0,123
0,126	0,122	0,117	0,120	0,121
0,116	0,125	0,117	0,110	0,120
0,125	0,121	0,124	0,127	0,126
0,111	0,125	0,119	0,116	0,119
0,115	0,115	0,124	0,120	0,117

Sept. 31.	Sept. 24.	Sept. 25.	Oct. 2.	Oct. 3.
$0^{\text{h}}122$	$0^{\text{h}}123$	$0^{\text{h}}121$	$0^{\text{h}}111$	$0^{\text{h}}121$
0,111	0,124	0,112	0,118	0,115
0,116	0,114	0,119	0,124	0,123
0,126	0,118	0,120	0,120	0,122
0,124	0,124	0,121	0,125	0,119
0,120	0,120	0,117	0,119	0,119
0,115	0,109	0,120	0,116	0,118
0,117	0,116	0,123	0,122	0,117
0,133	0,117	0,116	0,118	0,119
0,113	0,121	0,128	0,117	0,124

Diesen Beobachtungen zufolge ist die Projection der Entfernung des Doppelsterns auf die ihn mit dem Sterne α verbindende Linie:

$$0^{\text{h}}11945; \text{ m. F. } = \pm 0^{\text{h}}000434,$$

und die Entfernung selbst, in Secunden ausgedrückt:

$$1837,70 \dots = 6^{\text{m}}442; \text{ m. F. } = \pm 0^{\text{m}}0234.$$

5.

Reducirt man alle im Jahre 1837 gemessenen Entfernungen auf 1837,69, indem man die jährliche Aenderung $= + 0^{\text{m}}12$ annimmt, und treunt man die bis 6. August nach der gewöhnlichen Beobachtungsart gemachten von den späteren, bei welchen die im 2. § angezeigte Aenderung derselben stattfand, so erhält man folgende Zusammenstellung:

1. Beobachtungsart.	6,495	m. F. =	$\pm 0,0250$	140	einige Klein- ungen.
2. "	6,470		$\pm 0,0220$	180	
3. "	6,489		$\pm 0,0129$	300	
	6,441		$\pm 0,0234$	100	

Die beiden letzten dieser Resultate, welche mir entscheidend zu sein scheinen, vereinigen sich mit dem zweiten, um die Annahme eines beständigen Fehlers des ersten so unwahrscheinlich erscheinen zu lassen, als Etwas durch Beobachtungen gemacht werden kann. Ich glaube wirklich, dass die Richtigkeit der Beobachtungsart, welche diesem zum Grunde liegt, keine strengere Prüfung als die gegenwärtige erfahren konnte, und zweifle also nicht länger, dass der, wenn auch mit Recht befürchtete, Einfluss der beiden äusseren Zwischenräume auf die Beurtheilung des mittleren Zwischenraumes, nicht wirklich vorhanden ist.

Für den Doppelstern ρ Ophiuchi wird hierdurch eine Bestimmung der Entfernung gewonnen, deren Genauigkeit, bei den gegenwärtig vorhandenen Beobachtungsmitteln, schwer wird übertroffen werden können, nämlich:

$$1837,69 \dots 6,474; \text{ m. F. } = \pm 0,00935.$$

Der Ursache des Unterschiedes zwischen den Dorpater und Königsberger Messungen der Entfernungen der Doppelsterne aber kommt man durch diese Untersuchung nur insofern näher, als daraus hervorgeht, wo sie nicht zu suchen ist.

Ich glaube, jetzt zu der Aufklärung dieses Gegenstandes beigetragen zu haben, was ich von meiner Seite dazu beitragen konnte. STRUVE hat gleichfalls einen Beitrag dazu geliefert, indem er gezeigt hat, dass sein Fadenmikrometer an sich selbst richtig misst. Was noch zu wünschen ist, scheint mir die Untersuchung zu sein, ob die mit dem richtig messenden Fadenmikrometer erlangte Messung der Entfernung zweier festen Punkte und die Messung der Entfernung zweier Sterne aus einander so gleichen Verfahrensarten hervorgehen, dass das was in dem ersteren Falle stattfindet, auch in dem anderen als gültig angenommen werden muss. Ein Unterschied zwischen den, in beiden Fällen anzuwendenden Verfahrensarten ist aber, wenn das Fernrohr, durch sein Uhrwerk, den Sternen nicht vollkommen, sondern nur näherungsweise folgend gemacht werden kann, offenbar vorhanden; dann wird nämlich nothwendig, die Bisection beider Sterne durch die Fäden zugleich zu beurtheilen, statt dass die Bisection jedes der festen Punkte, ohne Rücksicht auf den anderen beurtheilt wird. Während man in dem letzten Falle das Auge immer nur auf einen Punkt, nämlich

auf den jedesmal biseirten, zu richten braucht, muss es, in dem ersten, in zwei Richtungen zugleich sehen und ein Urtheil über das Gesehene vermittelnd. Dass es wirklich nothwendig ist, die Bisectionen der beiden Sterne eines Doppelsterns zugleich im Auge zu haben, geht aus verschiedenen Stellen der Einleitung des grossen STRUVE'schen Werkes hervor; ganz unzweideutig aus der Angabe (p. LIX), dass sie desto sicherer beobachtet werden kann, je kleiner die Entfernung der Sterne ist; so dass 24" bis 32" von einander entfernte Sterne auch nicht mehr mit den stärker vergrössernden Ocularen gemessen werden können, indem die Richtung des Auges nach zwei weit von einander entfernten Punkten des Sehfeldes der Genauigkeit der Messung zu sehr schaden würde. Die grössere oder geringere Entfernung fester Punkte hat dagegen, wenn sie nur den Raum des deutlichen Sehens im Fernrohr nicht überschreitet, keinen Einfluss auf die Genauigkeit ihrer Messung, was sowohl zu erwarten ist, als auch durch STRUVE's unmittelbare Versuche bestätigt wird. Was also, meiner Meinung nach, vorzüglichem Anspruch auf Untersuchung hat, ist die Frage, ob der zwischen den Messungsarten der Entfernungen der festen Punkte und der Doppelsterne wirklich vorhandene Unterschied, nur grössere zufällige Fehler oder auch beständig wirkende erzeugt. Die Möglichkeit, dass das Auge entweder eines Beobachters, oder aller Beobachter, zwei gleichzeitig und daher ausser der Richtung seiner Axe wahrzunehmende Bisectionen an verschiedenen Punkten des Sehfeldes als vorhanden annimmt, wenn die Fäden nicht central, sondern entweder innerhalb oder ausserhalb der Mittelpunkte sind, ist wenigstens denkbar, vorausgesetzt, dass nur von einem so kleinen Unterschiede die Rede ist, wie der, um welchen es sich hier handelt. Ob aber dieser Unterschied wirklich vorhanden ist, kann nur durch Versuche mit dem Apparate selbst, dessen unmittelbare Angaben von der Voraussetzung seines Nichtvorhandenseins befreit werden sollen, entschieden werden. Wenn STRUVE die hier angedeutete Möglichkeit der Ausgleichung eines vorhandenen Widerspruchs der Verfolgung werth hält, so werden wir von seiner Seite noch einen Beitrag zu den Verhandlungen über diesen Gegenstand erwarten dürfen. Ich lasse in dieser Beziehung nicht unerwähnt, dass das Verschwinden des Unterschiedes in grösseren Entfernungen, von 20" und darüber, gegen die Wahrscheinlichkeit der hier angedeuteten möglichen Erklärung zu sein scheint. Um auch diese Uebereinstimmung in dem einen Falle mit dem Unterschiede in dem anderen zu vereinigen, müsste man annehmen, dass ent-

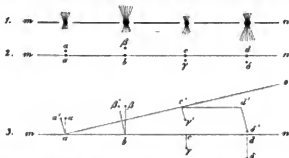
weder die erste nur scheinbar, bei einer verhältnissmässig kleinen Anzahl von Sternen stattfindet und durch die in beiden Beobachtungsarten bei grösseren Entfernungen grösser werdenden zufälligen Fehler hervorgerufen ist; oder dass das Fadenmikrometer grössere Entfernungen durch ein anderes Verfahren ergibt, als kleinere. Wenn die Entfernung die Grenze überschreitet, bis zu welcher man beide Sterne noch zugleich sehen kann, muss die hierauf gegründete Beobachtungsart verlassen und dagegen eine andere gewählt werden, welche darin besteht, dass man zuerst den einen Stern an einen der Fäden bringt, dann den anderen an den anderen Faden, und nun darauf rechnet, dass die Bewegung des Fernrohrs auch den ersteren auf dem Faden erhalten habe; findet sich dieses, bei der Wiederholung des Blickes nach diesem, nicht bestätigt, so ist die Beobachtung nicht gelungen und man versucht eine neue; findet es sich bestätigt, so wird die erlangte Messung wenigstens nicht durch einen Fehler entstellt, welchen man für beständig in gleichem Sinne wiederkehrend ansehen könnte.

6.

Bei Gelegenheit einer allgemeinen Beschreibung des Heliometers*) habe ich schon bemerkt, dass die beiden Bilder eines Sterns, welche man, bei einer kleinen Entfernung der Axen beider Objectivhälften, nebeneinander erhält, nicht mehr vollkommen rund, sondern durch zerstreutes Licht, welches sich in der auf den Durchschnitt derselben senkrechten Richtung zeigt, etwas entstellt erscheinen; dieses ist vorzüglich bei ruhiger Luft und mit starken Vergrösserungen bemerkbar und entsteht aus der unvollkommenen Compensation der optischen Aberration in der Hälfte eines Objectivs und der Reflexion des Lichts an den Rändern seines Durchschnitts. Inwiefern diese Unvollkommenheit der Bilder Einfluss auf die Beobachtungen der Doppelsterne erhält, werde ich jetzt näher untersuchen.

Aus dieser Ursache stellt ein, aus zwei Sternen zusammengesetzter Doppelstern, wenn der Durchschnitt der beiden Objectivhälften sich in der Ebene der beiden Sterne befindet und ihre Axen noch einmal so weit von einander entfernt sind als die Sterne, sich etwa so dar, wie Fig. 1 (der Deutlichkeit wegen stark vergrössert) zeigt; nämlich es ist mehr zerstreutes Licht nach der Seite der Objectivhälfte, als nach der entgegengesetzten vorhanden; und mehr bei dem helleren Sterne

als bei dem weniger hellen. Wenn dieses zerstreute Licht auch nur bei ruhiger Luft deutlich unterschieden werden kann, so ist doch auch an seinem Vorhandensein nicht zu zweifeln, wenn es, bei zitternder Luft, sich mit der Unbestimmtheit der Begrenzung der Bilder



vermischt. Sein Einfluss muss darin bestehen, dass die Mittelpunkte der links gezeichneten Bilder beider Sterne über der Linie mn , auf welcher sie wirklich liegen, angenommen werden, während das Entgegengesetzte bei den rechts gezeichneten Bildern stattfindet; ihre Ausweichungen aus dieser Linie sind bei dem helleren Sterne grösser als bei dem weniger hellen. Man glaubt also, die vier Bilder nicht in der Linie mn , sondern ausser derselben zu sehen, etwa wie Fig. 2 darstellt.

Durch die Bewegungen des Heliometers, sowohl jeder der beiden Hälften des Objectivs, als auch des ganzen um seine Axe, kann man dem Bilde der beiden Sterne, welches die eine Objectivhälfte macht, beziehungsweise auf das durch die andere gemachte, eine beliebige Lage geben, ohne dass jedoch dadurch der Winkel, in welchem die Richtungen βa und $\delta \gamma$ sich durchschneiden, erheblich geändert würde. Man kann also nicht hervorbringen, dass alle vier Sterne in gerader Linie erscheinen, ausser in dem Falle der gleichen Helligkeit derselben, in welchem Falle $aa = bb = cc = dd$ sein würde. Sehr oft ist diese Ausweichung der vier Sterne aus einer geraden Linie nicht zu bemerken; oft und zwar gerade unter den Umständen, welche einer Beobachtung am günstigsten sind, ist sie mir aber aufgefallen und würde eine Verlegenheit erzeugt haben, wenn nicht vorher eine bestimmte Erscheinung, als die zu beobachtende, ausgewählt worden wäre.

Um die Beobachtungsart der Doppelsterne durch ein Heliometer vollständig zu verstehen, muss man die Ortsveränderungen der vier Sterne aufsuchen, welche durch Verschiebung der einen Objectivhälfte und durch Drehung des ganzen Heliometers um seine Axe hervorgerufen werden. Die durch die erstere erlangte Entfernung der Axen der beiden Objectivhälften werde ich

*) SCHUMACHER'S Astron. Nachr. Nr. 189, p. 410 [Abh. 68, p. 102].
 BASEL'S Abhandlungen. 2. Bd.

durch e , den Winkel, um welchen die Drehung ihrer Durchschnittslinie von der durch beide Sterne des Doppelsterns gehenden Ebene entfernt hat, durch u bezeichnen, die Entfernung der beiden Sterne durch d , die Entfernungen $aa = -c\gamma$ durch k , $b\beta = -d\delta$ durch $k+i$. Die dritte Figur ist, um ihre Deutlichkeit zu vermehren, unter der Annahme sehr grosser Werthe von k und i gezeichnet.

Drehet man die Durchschnittslinie der Objectivhälften, während man ihren Axen die Entfernung $ac = e$ gegeben hat, um die Axe der einen a , so würde hieraus keine Ortsveränderung des Bildes $\alpha\beta$ entstehen, wenn das Heliometer die Sterne nicht entstellte, also ihre Mittelpunkte in a und b gesehen würden; unter derselben Voraussetzung würde c nach c' gelangen ($ac = ac'$), und d nach d' , wo $c'd'$ gleich und parallel cd ist. Da aber die Objectivhälften die Mittelpunkte der vier Sterne senkrecht auf die Durchschnittslinie um $aa = k$, $b\beta = k+i$, $c\gamma = -k$, $d\delta = -k-i$ verrücken, ohne parallel mit ihr eine Aenderung hervorzubringen, so erhält man die Orter, wo die Bilder wirklich gesehen werden, indem man die Linien aa , $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ senkrecht auf die neue Durchschnittslinie, an die Punkte a, b, c', d' ansetzt. Hierdurch findet man die Punkte $a', \beta', \gamma', \delta'$, wo die vier Sterne erscheinen. Die Coordinaten dieser Punkte, bezogen auf die neue Durchschnittslinie, welche mit der vorigen den Winkel $oan = u$ macht, sind:

$$\begin{aligned} x &= 0 & y &= k \\ x' &= d \cos u & y' &= -d \sin u + k + i \\ x'' &= e & y'' &= -k \\ x''' &= d \cos u + e & y''' &= -d \sin u - k - i \end{aligned}$$

Nachdem hierdurch die Punkte bestimmt sind, wo man die vier Sterne sieht, kann man jede gewählte Beobachtungsart leicht verfolgen. Die welche ich angewandt habe, besteht darin, dass ich die vier Bilder so gelegt habe, dass 1) das 2. und 4. von der durch das 1. und 3. gelegten geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten gleichweit entfernt erschienen und 2) der Zwischenraum zwischen dem 2. und 3. so gross wurde wie das Mittel der Zwischenräume zwischen dem 1. und 2. und zwischen dem 3. und 4. Ich habe schon bemerkt, dass sich gewöhnlich keine Ausweichung der vier Bilder aus der geraden Linie zeigt; glaubte ich aber sie zu sehen, so war es die zuerst ausgesprochene Regel, welcher gemäss ich den Positionswinkel zu beobachten suchte; es versteht sich, dass in den Fällen, in welchen eine Ausweichung aus der geraden Linie sichtbar wurde, die zweite sich auf die Beobachtung der Entfernung

beziehende Regel, nicht auf die Bilder selbst, sondern auf ihre Projectionen auf die angegebene Linie angewandt wurde.

Legt man eine gerade Linie durch a' und γ' , d. h. durch die beiden Bilder des kleineren Sterns, so sind die auf sie projectirten Entfernungen:

$$\begin{aligned} \alpha'\beta' &= \frac{d}{r}(e \cos u + 2k \sin u) - \frac{2ki}{r} \\ \beta'\gamma' &= \frac{ee}{r} - \frac{d}{r}(e \cos u + 2k \sin u) + \frac{2k(2k+i)}{r} \\ \gamma'\delta' &= \frac{d}{r}(e \cos u + 2k \sin u) + \frac{2ki}{r} \end{aligned}$$

wo r für $\sqrt{e^2 + 4kk}$ geschrieben ist, und die Entfernungen des 2. und 4. Bildes von ihr

$$\begin{aligned} \frac{d}{r}(-e \sin u + 2k \cos u) + \frac{ei}{r} \\ \text{und} \\ \frac{d}{r}(-e \sin u + 2k \cos u) - \frac{ei}{r} \end{aligned}$$

Die befolgte Beobachtungsart fordert also: 1) dass die beiden letzten Ausdrücke von gleicher Grösse, aber entgegengesetzten Zeichen seien, und 2) dass $\frac{1}{2}(\alpha'\beta' + \gamma'\delta') = \beta'\gamma'$ sei. Durch diese Bedingungen erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= e \sin u - 2k \cos u \\ 0 &= ee - 2d(e \cos u + 2k \sin u) + 2k(2k+i) \end{aligned}$$

welche

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u &= \frac{2k}{e} \\ 2d &= \frac{e}{\cos u} + \frac{2ki}{e} \cos u = \frac{e}{\cos u} + i \sin u \end{aligned}$$

ergeben. Die Beobachtung, welche ich hier verfolgt habe, ist die erste Hälfte einer vollständigen; die andere Hälfte derselben wird auf genau gleiche Art erlangt, nachdem die Axe der einen Objectivhälften vor der anderen vorüberbewegt worden ist. Für diese zweite Hälfte verwandeln sich k und i in $-k$ und $-i$, also auch u in $-u$; der Ausdruck von d bleibt ungeändert. Indem man das Mittel der beiden abgelesenen Positionswinkel annimmt, erhält man also die Richtung des Doppelsterns richtig; allein die Division der abgelesenen Entfernung durch den Cosinus des halben Unterschiedes der beiden Ablesungen des Positionswinkels gibt immer eine zu kleine Entfernung, falls nicht entweder k oder i verschwinden, welches der Fall ist, wenn einer der Sterne sehr klein ist, oder beide von gleicher Helligkeit sind. Die noch hinzuzufügende Verbesserung kann man nicht berechnen, da man i nicht kennt; auf die Erfindung seiner Grösse für Sternpaare von allen Helligkeitsverhältnissen auszugehen, halte ich zwar nicht für unmöglich, aber für unausführbar.

Jedenfalls ist die Grösse, um welche die befolgte Beobachtungsart die Entfernungen zu klein gibt, unter der Grenze, bis zu welcher man die Genauigkeit der Beobachtungen zu treiben hoffen kann.

Ich hätte noch eine andere Beobachtungsart wählen, nämlich den Positionswinkel so beobachten können, dass der 2. Stern auf die gerade Linie zwischen dem 1. und 3., und die Entfernung so, dass er in die Mitte dieser Linie gelegt worden wäre. Diese Beobachtungsart erfüllt die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}x' - x &= x'' - x' \\ y' - y &= y'' - y'\end{aligned}$$

und ergibt, wenn man die obigen Ausdrücke dieser Grössen setzt,

$$\begin{aligned}d \cos u &= e - d \cos u \\ -d \sin u + i &= d \sin u - 2k - i\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} u &= \frac{2(k+i)}{e} \\ 2d &= \frac{e}{\cos u}\end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass der Unterschied des in beiden Hälften einer vollständigen Beobachtung gesehenen Positionswinkels zwar grösser ist, als bei der vorigen Beobachtungsart, jedoch auf das mittlere Resultat beider Hälften keinen Einfluss behält, und dass die Entfernung durch die Division mit dem Cosinus des halben Unterschiedes vollständig gefunden wird.

Den Grund, welcher mich veranlasst hat, der ersten Beobachtungsart, insofern es sich um die Messung der Entfernung handelt, den Vorzug zu geben, habe ich im 2. § angeführt; auch in Beziehung auf den Positionswinkel glaubte ich, sie, der grösseren Länge der Linie wegen, deren Richtung das Auge auffasst, vorziehen zu müssen. In dieser Beziehung fürchte ich aber jetzt, mich geirrt und den beobachteten Positionswinkel (Abh. VII [Abh. 102]) dadurch geschadet zu haben. Wenigstens ist mir die zweite Beobachtungsart der Positionswinkel, welche ich dem 2. § zufolge, bei meinen letzten Beobachtungen *p* Ophiuchi befolgt habe, so viel leichter geworden als die erste, dass ich sie auch für sicherer zu halten geneigt bin. Auch scheint dieses durch bessere Uebereinstimmung der dadurch erhaltenen, § 1 angeführten Resultate bestätigt zu werden. Dass das Mittel aus diesen letzten Beobachtungen, dem aus den früheren des Jahrs 1837 gezogenen, etwa 47' grösseren vorzuziehen ist, bezweifle ich nicht; wenn auch der Beobachtungsart kein Vorzug eingeräumt wird, so besitzen die späteren Beobachtungen ihn doch sicher in der weit günstigeren Beschaffenheit der Luft, welche, wie ich schon angeführt habe, nach der Mitte des Augusts eintrat. Für Sternepaare von gleicher Helligkeit sind beide Beobachtungsarten nicht von einander verschieden.

104. Beobachtungen verschiedener Sterne der Plejaden.*)

(Astron. Untersuchungen I, p. 209.)

Die Sterne der Plejaden sind, auf der Königsberger Sternwarte, sowohl mit dem Heliometer, als auch mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise häufig beobachtet worden. Sie haben aus mehreren Gründen vorzügliche Ansprüche auf genaue Bestimmung. Wenn die relativen Orter der einzelnen Sterne dieses ausgedehnten und sich durch seine Helligkeit auszeichnenden Haufens genau bekannt sind, so kann man dadurch verschiedene astronomische Zwecke vollständiger oder leichter erreichen, als durch einzeln stehende Sterne, oder einzelne Paare derselben möglich ist. Hieher

gehört die Bestimmung des Mittagsunterschiedes weit von einander entfernter Orter, wo Durchgänge des Mondes durch die Plejaden mit einiger Vollständigkeit beobachtet sind; denn solche Beobachtungen geben das Mittel, das Resultat von den Einflüssen der Fehler der aus den Mondstafeln genommenen Elemente der Rechnung ganz oder fast ganz zu befreien, und werden dadurch für die Bestimmung der Mittagsunterschiede der Sternwarten sehr wichtig. Ferner gehört hierher die Bestimmung der Grössen der verschiedenen Kreise eines Kreismikrometers, welche, wenn sie so sicher als möglich gemacht werden soll, die genaue Kenntniss von Declinationsunterschieden fordert, welche nur sehr wenig kleiner sind als die dadurch zu bestimmenden Grössen,

*) [Abh. V aus 350 d. a. Verz. — S. auch 331 und 347 d. a. Verz. Originalbeobachtungen in Königsberger Beob. 28. Abth.]

und wofür man, unter den häufigen Sternen der Plejaden, immer passende finden wird. Auch die Bestimmung des Werthes der Windungen einer Mikrometerschraube wird sehr leicht, wenn man, je nachdem sie zur Messung von Declinationsunterschieden oder von Entfernungen angewandt wird, die Declinationsunterschiede oder die Entfernungen der Plejadensterne als bekannt voraussetzen kann. — Ich habe auch, wie man in einer früheren Abhandlung (II. § 24 [Abh. 71, p. 157]) gesehen hat, die Sterne der Plejaden beobachtet, um dadurch zur Kenntniss der Einwirkung der Wärme auf die Messungen mit dem Heliometer zu gelangen. — Endlich habe ich einer möglichst sicheren Bestimmung der relativen Orter dieser Sterne einen für sich selbst bestehenden Werth beigelegt, indem ich glaube, dass eine Zeit kommen wird, für welche die Frage nach den inneren Bewegungen dieses merkwürdigen Sternhaufens ein Interesse gewinnen wird, welches, bei der äussersten Kleinheit dieser Bewegungen, nur durch frühere Beobachtungen befriedigt werden kann, wenn sie durch die Anwendung der dazu geeigneten Mittel erlangt worden sind und daher die grösste erreichbare Genauigkeit besitzen. — In dieser Beziehung stehen die Beobachtungen mit dem Heliometer desto höher über den auf Meridianinstrumente gegründeten, je schwieriger es ist, durch die letzteren zahlreiche Beobachtungen der einzelnen Sterne einer so gedrängten Gruppe, deren Culminationszeiten wenig von einander verschieden sind, zu erlangen.

Ich werde zuerst die zahlreicheren Heliometerbeobachtungen, durch welche die 10 helleren Sterne der Plejaden mit ihrem Hauptsterne η verglichen worden sind, mittheilen; dann die weniger zahlreichen von 42 kleineren Sternen; endlich die Meridianbeobachtungen. Was ich als eine Heliometerbeobachtung anführen werde, ist immer das mittlere Resultat aus 6, zu drei vollständigen Messungen verbundenen Einstellungen der Objectivhälfte II. Wenn für einen Tag zwei Bestimmungen vorkommen, so ist das Instrument zwischen ihnen umgekehrt worden, so dass einmal seine Declinationsaxe vorging, das andere Mal folgte, was ich durch v und f bezeichnen werde. Die Beobachtungen sind zum Theil von mir selbst gemacht, zum Theil von Herrn PLANTAMOUR (jetzt Professor in Genf), zum Theil von Herrn SCHLÜTER, welcher, seit dem Juli 1839, ausgezeichneten Fleiss darauf verwandt und auch die Berechnung des Beobachteten nicht zurückgelassen hat. Diese verschiedenen Beobachter werde ich durch die Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnen.

1.

Beobachtungen der 10 helleren Sterne der Plejaden.

Den beobachteten Quantitäten, welche ich angeben werde, sind die nöthigen Reductionen schon hinzugesetzt worden, nämlich den Entfernungen:

1. die periodische Ausgleichung der Angaben der Schraubentrommel (II. § 10. Taf. I. [p. 144]);
2. die Summe der Ausgleichung der Grösse der Windungen der Schraube und der optischen Verbesserung (II. § 23. [p. 156, 157]);
3. der Einfluss der Strahlenbrechung (III. § 6);
4. die Reduction auf 1840 (IV. [Bd I, Abh. 46, p. 313]).

Die angegebenen Entfernungen sind daher die auf ausgeglichene Schraubengewindungen und auf 1840 reducirten; allein sie enthalten noch den Einfluss der Wärme auf die Messungen, so dass man die Grundlage der Untersuchung der Grösse dieses Einflusses (II. § 24. [p. 157]) dadurch kennen lernt. Eine folgende Columne gibt den Unterschied jeder Beobachtung von dem arithmetischen Mittel aller Beobachtungen, in Theilen der Secunde ausgedrückt und wegen des Einflusses der Wärme berichtet (II. § 24). Die Positionswinkel sind vollständig auf 1840 reducirt; sie beziehen sich auf die Richtung von η Plejadum nach dem zu bestimmenden Sterne und sind die halben Summen der an beiden Sternen stattfindenden.

η —	Entfernung.	Thermomet.	Positionswinkel.	Beobch.*)
g Plejadum	43 ^h 43805	18 ^m 25	285°56'27	Σ und 2
	43280	36,69	58,62	29 " 22
	40,52140	45,10	269 58,65	5 " 3
b "	52235	42,93	58,92	35 " 22
	43,05048	22,30	304 6,13	5 " 5
c "	04991	32,91	6,94	30 " 22
	31,31358	22,30	303 56,93	5 " 5
c "	81833	33,88	59,57	29 " 22
	39,14910	14,33	320 33,59	3 " 3
k "	14722	31,99	34,25	27 " 22
	36,37023	16,00	321 27,36	3 " 3
	37588	33,48	27,68	24 " 22
d "	20,91783	17,13	238 31,10	4 " 4
	92072	35,00	31,94	24 " 22
s "	28,23130	14,17	125 46,52	3 " 3
	24318	32,19	46,47	25 " 22
	26,28820	13,63	96 52,78	4 " 4
f "	29906	36,60	52,14	25 " 20
	26,51253	13,63	84 32,14	4 " 4
h "	51884	32,42	31,88	25 " 22

*) [Einselmessungen weggelassen. Die ersten Werthe sind immer die Mittel der Beobachtungen von 1830, die zweiten die Mittel der Beobachtungen von 1836 — 1840.]

2.

Die in der Columne für den Positionswinkel nicht ausgefüllten Stellen deuten nicht sowohl auf fehlende, oder an sich weniger zuverlässige Beobachtungen, als auf fehlende Mittel zu ihrer sichern Reduction. Man sieht aus der oben (Abb. H. Taf. V) mitgetheilten Zusammenstellung aller, von der Aufstellung des Helimeters an bis zum Ende von 1840 gemachten Bestimmungen des Indexfehlers seines Positionskreises, dass diese Bestimmungen erst vom Sept. 1838 an häufiger gemacht worden sind; früher hielt ich eine weniger häufige Wiederholung für hinreichend, indem ich den Indexfehler für beständiger hielt als er ist, auch nicht so weit als die Plejadensterne von einander entfernte Gegenstände beobachtete und daher weniger Veranlassung hatte, die äusserste erreichbare Sicherheit der Reductionselemente der Positionswinkel zu wünschen. Ich habe aus diesem Grunde die späteren Beobachtungen dieser Art nicht mit früheren, weniger sicheren, vermischen wollen und diese daher weggelassen; jedoch habe ich die in die Jahre 1829 und 1830 fallenden nicht unterdrückt, sowohl weil ich die Bestimmung des Indexfehlers für diese Zeit für ziemlich genügend halte, als auch weil diese, 10 Jahre älteren Beobachtungen eine Andeutung der Kleinheit der aus

eigenen Bewegungen der Sterne entstehenden Aenderungen geben können.

Wenn man die angeführten Unterschiede der einzelnen Beobachtungen der Entfernungen eines Sternenspaars von dem mittleren Resultate aller betrachtet, so bemerkt man, dass sie einigemal weit grösser sind, als die Beobachtungsart erwarten lässt. Man findet dieses fast nur bei heftiger Kälte, selten wenn das Thermometer höher als der Gefrierpunkt stand. Ich glaube, dass der Grund solcher ungewöhnlich grossen Fehler grösstentheils in der von der Kälte erzeugten Verhärtung des Oels an der Mikrometerschraube gesucht werden muss; aber das bei heftiger Kälte immer sehr grosse Zittern der Sterne mag auch dazu beigetragen haben. Den mittleren Fehler einer Beobachtung der Entfernung habe ich durch die angeführten Beobachtungen $= \pm 0^{\circ}07238 = \pm 0^{\circ}3829$ gefunden.

Die mittleren Resultate der Beobachtungen für 1840, sowohl die aus den früheren, als die aus den späteren abgedondert gezogenen, werde ich jetzt zusammenstellen, nachdem die in ausgeglichenen Windungen der Schraube angegebenen und von dem optischen Einflusse schon befreieten Entfernungen, durch Multiplication mit

$$\frac{52^{\circ}89329}{1 + (r - 50) 0,0000037765}$$

in Kreistheile verwandelt worden sind.

	Entfernungen.			Unterschied.	Positionswinkel.		
	Frühere Beob.	Spätere Beob.			Frühere Beob.	Spätere Beob.	Unterschied.
$\eta - g$ Plejadum	2297,901	2 2298,475	29	+ 0,574	285°58'27	2 285°58'68	22 + 0,35
- b "	2143,354	5 2143,420	35	+ 0,066	269 58,65	3 269 58,92	22 + 0,27
- e "	2277,320	5 2277,200	30	- 0,120	304 6,13	5 304 6,94	22 + 0,81
- c "	1656,452	5 1656,630	29	+ 0,178	303 58,93	5 303 59,57	22 + 0,64
- k "	2071,094	3 2070,768	27	- 0,236	320 33,59	3 320 34,25	22 + 0,66
- l "	1923,989	3 1924,159	24	+ 0,170	321 27,36	3 321 27,68	22 + 0,32
- d "	1106,650	4 1106,629	24	+ 0,079	238 31,10	4 238 31,94	22 + 0,84
- s "	1493,418	3 1493,976	25	+ 0,528	125 46,52	3 125 46,47	22 - 0,05
- f "	1390,660	4 1391,114	25	+ 0,454	96 52,78	4 96 52,44	20 - 0,34
- h "	1402,528	4 1402,762	25	+ 0,234	84 32,14	4 84 31,88	22 - 0,26

Wenn man den Ort von η Plejadum für 1840

$$\text{AR.} = 54^{\circ} 29' 45,46; \text{Decl.} = + 23^{\circ} 36' 16,43$$

annimmt, erhält man aus den auf die späteren Beobachtungen allein gegründeten Bestimmungen:

Plejadum	Unterschiede für 1840.		AR. 1840.	Decl. 1840.
	AR.	Decl.		
g	- 40' 13,076	+ 10' 32,666	53° 49' 32,38	23° 46' 48,10
b	- 38 59,133	- 0 0,673	50 46,33	23 36 15,76
c	- 34 20,251	+ 21 17,214	55 25,21	23 57 33,64
e	- 25 0,414	+ 15 26,209	44 4 4,05	23 51 42,64

Plejadum	Unterschiede für 1840.		AR. 1840.	Decl. 1840.
	AR.	Decl.		
k	- 25 57,727	+ 26' 39,490	44° 5' 47,73	24° 2' 55,92
l	- 21 50,393	+ 25 5,059	7 55,07	24 1 21,49
d	- 17 9,438	- 9 37,681	12 36,02	23 26 38,75
s	+ 22 1,554	- 14 53,376	51 47,01	23 21 43,05
f	+ 25 6,957	- 2 46,498	54 52,12	23 33 29,93
h	+ 25 24,095	+ 2 13,686	55 9,50	23 38 30,12

3.

Beobachtungen von 42 kleineren Sternen der Plejaden.

Diese Beobachtungen sind von Herr SCHLÜTER gemacht; einige wenige davon, welche Herr PLANTAMOUR und ich gemacht haben, sind durch P und B bezeichnet. Ihre Resultate werde ich vollständig auf 1840 reducirt angeben; die Entfernungen nicht zuerst in Schraubenwindungen, sondern sogleich in Secunden ausgedrückt. Denn das Interesse der ersten Art der Angabe, welches aus der Benutzung der Beobachtungen der 10 helleren Sterne zur Ausmittlung des Einflusses der Wärme auf die Messungen und zur Bestimmung des Werthes einer Schraubenwindung entstand, ist hier nicht vorhanden.

m Plejadum.

Dieser Stern ist zu weit von η Plej. entfernt, um unmittelbar damit verglichen werden zu können, weshalb ihn Herr S. mit 5 anderen Sternen verglichen hat.

Plejad.	1841.	Mittel.	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$
1. g - m	Jan. 26. 1999,94	7 ^h 29,98	+ 4' 52",18	+ 33' 2",06
2. e - m	Febr. 22. 1839,295	357 36,06	- 1 1,44	+ 22 18,12
3. c - m	" 22. 1781,81	381 27,38	- 10 30,75	+ 28 9,30
4. k - m	" 18. 1192,30	328 28,68	- 11 23,31	+ 16 66,28
5. l - m	" 18. 1334,58	326 20,44	- 13 20,82	+ 18 30,84

Hieraus und aus den Unterschieden der verglichenen Sterne von η Plejadum findet man die auf den letzteren bezogenen Unterschiede des Sterns m:

1	- 35' 20",90	+ 43' 34",73
2	21,69	35,33
3	21,16	35,51
4	21,04	35,77
5	21,21	35,90
Mittel	- 35' 21",90	+ 43' 35",45

η - Anonyma *)

	Mittel.	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$	Beob.	
1	1701,69	260 ^h 42,795	- 30' 32",20	- 4' 31",61	4
2	2029,475	308 40,38	- 28 51,47	+ 21 8,18	4
3	1557,41	266 18,55	- 28 15,91	- 1 40,26	4
4	1732,765	297 48,45	- 27 54,06	+ 13 28,32	4
5	2397,675	320 50,615	- 27 35,50	+ 30 59,23	4
6	1613,83	293 22,725	- 26 57,69	+ 10 40,39	4
7	1351,94	259 5,28	- 24 11,57	+ 4 16,30	4
8	1090,145	286 38,84	- 18 49,74	+ 5 9,44	6**)

*) [Einzelbeobachtungen weggelassen; die weitaus meisten sind 1840 und 41, nur wenige 1838 und 39 angestellt.]

***) [Zwei Beobachtungen von P.]

	Mittel.	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$	Beob.	
9	1044,85	236 ^h 10,265	- 18' 15",48	+ 4' 51",00	4
10	1002,495	301 44,645	- 15 30,89	+ 8 47,44	4
11	680,135	268 37,58	- 12 22,01	- 0 16,31	4
12	1547,56	344 1,41	- 7 45,58	+ 24 47,79	4
13	521,375	219 55,95	- 6 5,07	- 6 39,79	4
14*)	1197,19	191 38,01	- 4 23,13	- 19 32,60	4
15	189,82	295 7,14	- 3 7,58	+ 1 20,58	4
16	1050,045	188 26,55	- 2 48,06	- 17 18,67	4
17	1374,075	185 40,45	- 2 28,05	- 22 47,34	6
18	180,205	311 46,79	- 2 26,67	+ 2 0,07	4
P	116,80	289 5,65	- 2 0,46	+ 0 35,21	4
19	1092,045	185 3,35	- 1 44,90	- 18 7,80	6**)
20	1741,02	356 57,045	- 1 41,86	+ 28 58,55	8**)
21	1986,03	358 17,39	- 1 4,82	+ 33 5,15	6
22	688,92	184 30,93	- 0 59,15	- 11 26,78	6***)
23	1536,80	180 21,19	- 0 10,32	- 25 36,77	6†)
24	659,59	359 39,93	- 0 4,20	- 10 59,58	10††)
25	1785,86	175 64,89	+ 2 18,58	+ 29 41,32	6†††)
26	2032,03	174 1,97	+ 3 50,04	- 33 41,02	6
27	979,07	37 35,85	+ 10 62,42	+ 12 55,73	4
28	2561,575	163 6,14	+ 13 30,45	- 40 50,98	6
29	1201,87	43 10,635	+ 11 58,32	+ 14 36,45	6
30	1616,47	118 15,73	+ 25 52,52	- 12 45,41	6
31	1807,68	53 ^h 47,625	+ 26 33,60	+ 17 47,79	6†††)
32	1833,47	56 24,05	+ 27 48,39	+ 16 64,51	6†††)
33	1780,94	71 24,90	+ 28 58,82	+ 8 55,45	6†††)
34	2252,84	126 42,785	+ 33 50,00	- 23 9,22	6
35	1941,35	74 18,18	+ 34 0,74	+ 8 45,24	6
36	2035,61	77 48,905	+ 36 12,42	+ 7 9,66	6
37	2200,64	65 42,00	+ 36 30,91	+ 15 5,60	6†††)
38	2240,59	113 31,01	+ 37 19,97	- 14 54,05	4
39	2819,28	59 21,77	+ 44 11,28	+ 23 56,72	6
40	2832,48	99 42,89	+ 50 45,25	- 7 57,97	6

4.

Die durch die angeführten Beobachtungen bestimmten Sterne sind die helleren von denen, welche sich innerhalb eines mit dem Halbmesser 47' bis 48' um η Plejadum beschriebenen Kreises befinden; nur der Stern m steht ausser diesem Kreise und der Stern Anonyma 16 ist nicht heller als mehrere andere in ihm stehende. Die Helligkeiten grösserer Sterne lassen sich bekanntlich durch den Anblick, welchen sie bei Nacht im Fernrohre gewähren, schwer richtig vergleichen; am Tage ist ihre Vergleichung leichter, weshalb ich anführe, dass sie mir, am 18. Juni 1839, in der Reihen-

*) [Verbessert nach WISSNER, Astr. Nachr. 48, p. 331.]

***) [3 Beob. von B.]

****) [2 Beob. von P., 2 von B.]

†) [2 Beob. von B.]

††) [2 Beob. von P.]

†††) [2 Beob. von B.]

folge η, f, b, c, e, h erschienen, d und g aber damals nicht aufgesucht wurden. Die übrigen Sterne hat Herr SCHLÜTER am 15. März 1841 bei Nacht mit einander verglichen und sie in folgende Classen eingetheilt:

- 7^a. 28.
 7.8. $k, l, s, p, 12, 34, 40.$
 8. 1, 4, 7, 10, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 29, 31, 32, 37, 38, 39.
 8.9. 2, 8, 9, 11, 13, 15, 21, 23, 25, 27, 30, 33.
 9. 3, 5, 6, 14, 26, 35, 36.
 9.10. 16.

Die Sicherheit der Bestimmungen der auf η Plejadum bezogenen Unterschiede der geraden Aufsteigungen und Abweichungen der 10 häufiger beobachteten Sterne (§ 2) wird wenig zu wünschen übrig lassen; allein die 42 weniger häufig beobachteten (§ 3) sind, wie aus der Anführung ihrer einzelnen Beobachtungen hervorgeht, nicht so sicher bestimmt, dass man alle für innerhalb einer halben Secunde richtig halten dürfte. Zu den § 2 angegebenen Ursachen des Vorkommens grösserer Beobachtungsfehler gesellt sich auch die Schwierigkeit, welche die Vergleichung von Sternen von so verschiedenen Helligkeiten wie η Plejadum und die meisten der gegenwärtigen sie zeigen, immer darbietet, wenn die Luft unruhig ist, was in der Jahreszeit, in welche die Beobachtungen fallen, mit seltenen Ausnahmen der Fall ist. — Indessen würde es sehr schwer sein, denselben Grad von Sicherheit der relativen Bestimmungen der mit η Plej. verglichenen 52 Sterne, welchen das

mitgetheilte Verzeichniss gewährt, durch Meridianbeobachtungen herbeizuführen.

5.

Bestimmung von 27 Sternen der Plejaden durch Meridianbeobachtungen.

Diese Sterne habe ich von J. 1820 an, mit dem Reichenbachschen Meridianreise so häufig beobachtet, als die Witterung und andere Beschäftigungen es erlaubten. Später, von 1831 an, hat Herr Doctor Busch die Meridianbeobachtungen übernommen und nicht versäumt, die meinigen der Plejaden noch zu vervollständigen. Die Reduction aller dieser Beobachtungen auf 1825 hat folgendes Verzeichniss ergeben, in welchem die eigenen Bewegungen durch Vergleichung mit den Oertern für 1755, so wie sie in den Fundamentis Astronomiae pro A. 1755 enthalten sind, erlangt wurden.*)

	Grösse.	AR. 1825.	Jährl. Präcession. 1825.	Säculare Aenderg.	Eigene Bewegung.	Decl. 1825.	Jährl. Präcession. 1825.	Säculare Aenderg.	Eigene Bewegung.	Anzahl der Beob.
16 <i>g</i> (Celaeno)	5.6	53°36' 17",16	53",149	+ 0",273	+ 0",076	23°43' 52",41	11",901	- 0",422	- 0",081	11 11
17 <i>b</i> (Electra)	4.5	37 29,67	53,092	+ 0,272	+ 0,016	23 33 19,58	11,895	- 0,421	- 0,055	10 10
18 <i>m</i>	7	41 8,60	53,242	+ 0,278	- 0,025	24 16 55,09	11,878	- 0,424		10 10
19 <i>e</i> (Taygeta)	5	42 6,59	53,218	+ 0,275	0,000	23 54 37,60	11,874	- 0,423	- 0,065	9 7
Plejaden III. 135	8	48 31,03	53,184	+ 0,273		23 46 47,86	11,844	- 0,423		3 3
20 <i>c</i> (Maia)	5	51 27,06	53,200	+ 0,273	+ 0,025	23 48 47,13	11,830	- 0,423	- 0,060	6 6
"	8	52 29,95	52,793	+ 0,262		22 35 38,54	11,825	- 0,420		5 5
21 <i>k</i> (Asterope)	7.8	52 32,62	53,264	+ 0,275	+ 0,104	23 59 59,21	11,824	- 0,424	- 0,072	5 5
22 <i>l</i>	7.8	54 37,70	53,259	+ 0,274	+ 0,021	23 58 24,68	11,816	- 0,424	- 0,074	3 3
23 <i>d</i> (Merope)	6	59 20,37	53,071	+ 0,269	+ 0,090	23 23 44,18	11,793	- 0,423	- 0,053	6 5
Plejaden III. 147	7.8	54 8 39,40	53,279	+ 0,273		23 58 8,88	11,749	- 0,420		5 5
24 <i>p</i>	7.8	14 28,99	53,151	+ 0,269	+ 0,017	23 34 0,82	11,721	- 0,425		5 5
25 <i>q</i> (Acyone)	3.4	16 27,80	53,150	+ 0,269	+ 0,007	23 33 22,32	11,711	- 0,425	- 0,072	18 16
Anonyma 28	7	30 1,26	52,941	+ 0,262	- 0,026	22 52 32,29	11,647	- 0,425	- 0,066	2 2
Plejaden III. 153	8	31 28,78	53,255	+ 0,270	+ 0,068	23 47 58,08	11,640	- 0,427		2 2
26 <i>s</i>	7.3	38 34,06	53,101	+ 0,265	+ 0,039	23 18 50,93	11,606	- 0,427		12 12

*) [Vgl. Astr. Nachr. 17, p. 33 (331 d. A. Verz.). Bessel gibt daselbst noch die folgenden Unterschiede ($P - E$) des Verzeichnisses von POISSON für 1830:

	AR.	Decl.
<i>g</i> Plejadum	- 1",3	+ 1",6
<i>b</i> "	- 0,8	+ 0,8

	AR.	Decl.
<i>e</i> Plejadum	+ 1",5	+ 1",5
<i>c</i> "	0,0	+ 0,5
<i>d</i> "	- 1,0	+ 0,4
<i>q</i> "	+ 0,3	+ 2,1
<i>f</i> "	+ 1,2	+ 1,6

	Größe.	AR. 1825.	Jährl. Präcession. 1825.	Säculare Aenderg.	Eigene Beweg- ung.	Decl. 1825.	Jährl. Präcession. 1825.	Säculare Aenderg.	Eigene Beweg- ung.	Anzahl der Beob.
27 <i>f</i> (Atlas)	4.5	54°41'34",74	53",172	+0",267	+0",001	23°30'37",47	11",593	-0",428	-0",087	14 14
28 <i>A</i> (Plejone)	5.6	41 51,36	53,201	+0,268	-0,008	23 35 37,74	11,591	-0,428	-0,095	12 12
Piazzi III. 161	8.9	42 18,77	53,117	+0,265		23 20 38,91	11,589	-0,427		3 3
" 163	7.8	50 25,20	53,070	+0,263		23 10 15,13	11,550	-0,427		2 2
" 164	8	53 2,14	53,291	+0,269		23 48 30,18	11,538	-0,429		3 3
" 165	8	53 48,85	53,121	+0,264		23 18 32,22	11,534	-0,428		2 2
" 170	7	57 10,87	53,723	+0,279		25 2 31,63	11,518	-0,433		7 7
" 171	8	55 0 36,95	53,352	+0,269		23 57 20,89	11,501	-0,431		4 4
" 172	7.8	7 17,34	53,180	+0,264		23 25 28,97	11,469	-0,430		2 2
" 175	7.8	14 19,76	53,605	+0,274		24 37 33,96	11,436	-0,434		2 2
" 179	7.8	26 11,95	53,636	+0,273		24 38 20,37	11,379	-0,435		3 3

Zur Beurtheilung des Maasses der Sicherheit dieser Bestimmungen führe ich an, dass sich die mittlere Fehler einer Beobachtung der AR. = $\pm 1,7096$ sec δ , der Declination = $\pm 1,7304$ ergeben hat.

6.

Wenn man die durch die Heliometerbeobachtungen bestimmten Unterschiede der geraden Aufsteigung und Abweichung zwischen η und den übrigen Sternen der Plejaden als richtig annehmen will, so kann man die gerade Aufsteigung und Abweichung jedes der letzteren auf den ersteren übertragen, und diesen Stern durch das arithmetische Mittel aus allen Meridianbeobachtungen sicherer bestimmen, als durch die ihn unmittelbar betreffenden allein. Ich habe daher die Angaben des Verzeichnisses des vorigen §s auf 1840 reducirt und ihnen die durch das Heliometer bestimmten Unterschiede mit entgegengesetzten Zeichen hinzugefügt; die dadurch erlangten verschiedenen Bestimmungen von η und ihre Unterschiede von dem arithmetischen Mittel aus allen führe ich hier an. Die letzteren sind, unter der gemachten Annahme der Richtigkeit der Heliometerbeobachtungen, die Summen der Fehler, welche die Meridianbeobachtungen und ihre Reduction auf 1840 übrig gelassen haben.

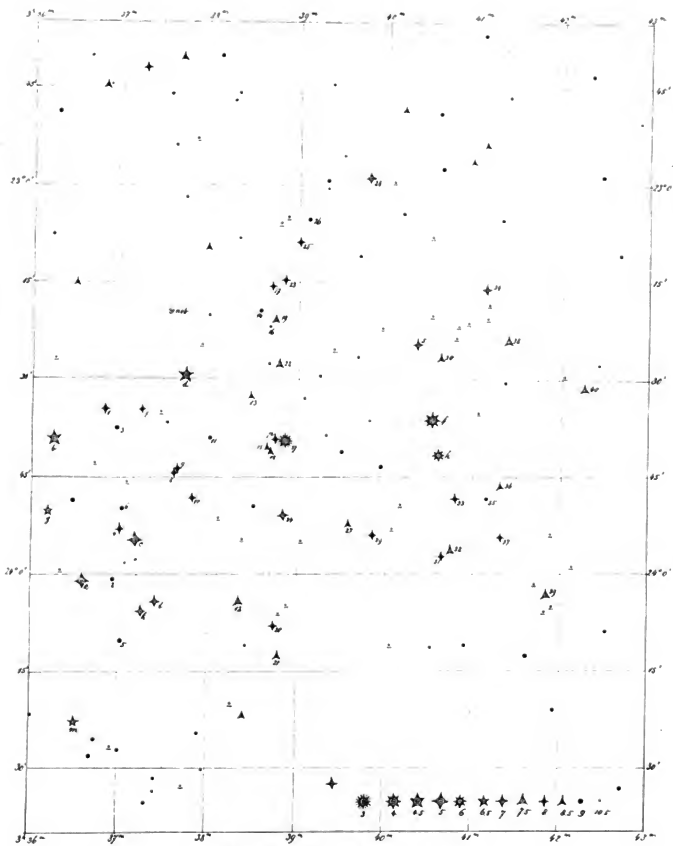
	AR. 1840.	Fehler.	Decl. 1840.	Fehler.
<i>g</i>	54°29'48",92	11 + 0,290	23°36'18",06	11 + 1,15
<i>b</i>	45,73	10 - 0,99	17,38	10 + 0,47
<i>m</i>	45,24	10 - 1,48	16,96	10 + 0,05
<i>e</i>	45,42	9 - 1,30	17,20	7 + 0,29
Anon. 4.	43,16	3 - 3,56	16,72	3 - 0,19
<i>c</i>	46,15	6 - 0,57	16,99	6 + 0,08
<i>k</i>	51,12	5 + 4,10	15,51	5 - 1,40
<i>l</i>	47,56	3 + 0,83	15,26	3 - 1,65
<i>d</i>	47,53	6 + 0,81	17,48	5 + 0,57
Anon. 12.	44,47	5 - 2,25	16,85	5 - 0,06
<i>p</i>	47,27	5 + 0,55	17,95	5 + 1,04
η	45,46	18 - 1,26	16,43	16 - 0,48
Anon. 28.	44,83	2 - 1,89	16,51	2 - 0,40
" 29.	50,61	2 + 3,89	15,75	2 - 1,16
<i>s</i>	49,91	12 + 3,19	17,92	12 + 1,01
<i>f</i>	45,68	14 - 1,04	16,98	14 - 0,83
<i>h</i>	45,46	12 - 1,26	16,01	12 - 0,90
Anon. 30.	43,30	3 - 3,42	16,78	3 - 0,13
" 34.	51,55	2 + 3,83	17,12	2 + 0,31
" 37.	50,99	3 + 4,16	17,17	3 + 0,26
" 38.	45,99	2 - 0,73	18,80	2 + 1,89
" 39.	46,25	4 - 0,47	16,20	4 - 0,71
" 40.	50,99	2 + 3,37	18,49	2 + 1,58
Mittel	54 29 46,72 149		23 36 16,91 144	

Legt man diesen Ort des Sterns η zum Grunde, so erhält man folgendes, übrigens nur auf Heliometerbeobachtungen gegründetes

Verzeichniß von 53 Sternen der Plejaden.*

	Größe.	AR. 1840.	Jährl. Präcession. 1840.	Säculare Aenderg.	Eigene Beweg- ung.	Decl. 1840.	Jährl. Präcession. 1840.	Säculare Aenderg.	Eigene Beweg- ung.	An- zahl.
16 <i>g</i> (Celaeno)	5.6	53°49'33",61	53",190	+0",273	+0",050	23°46'49",58	11",838	-0",423	-0",078	—
17 <i>b</i> (Electra)	4.5	50 17,59	53,132	+0,271	+0,028	23 36 16,24	11,832	-0,423	-0,062	—
18 <i>m</i>	7	54 25,92	53,384	+0,277	-0,004	24 19 52,36	11,815	-0,425		10
19 <i>e</i> (Taygeta)	5	55 26,47	53,259	+0,274	+0,015	23 57 34,12	11,810	-0,424	-0,058	—
Anonyma 1.	8	59 14,52	53,119	+0,270		23 31 42,30	11,792	-0,423		4
" 2.	8.9	54 0 55,25	53,267	+0,274		23 57 25,09	11,784	-0,425		4

*) (S. auch Astr. Nachr. 18, p. 343 (347 d. a. Verz.)]



Karte der Plejaden.
(1855.0)

R. E. 446

	Ordnung.	AR. 1840.	Jahrl. Präcession. 1840.	Eigene Beweg- ung.	Decl. 1840.	Jahrl. Präcession. 1840.	Säkulare Aenderg.	Eigene Beweg- ung.	An- zahl.
Anonyma 3	9	64° 1' 30,81	53,199	+ 0,270	23° 34' 36,65	11,782	- 0,424		4
" 4	8	1 52,66	53,225	+ 0,272	23 49 45,23	11,780	- 0,425		4
" 5	9	2 11,22	53,325	+ 0,275	24 7 16,14	11,778	- 0,425		4
" 6	9	2 49,03	53,210	+ 0,272	23 46 57,30	11,775	- 0,424		4
20 c (Maja)	5	4 46,31	53,240	+ 0,272	23 51 43,12	11,766	- 0,425	+ 0,062	—
Anonyma 7	8	5 35,15	53,131	+ 0,270	23 32 04,11	11,762	- 0,424		4
21 k (Asterope)	7.8	5 48,99	53,305	+ 0,274	24 2 56,10	11,761	- 0,425	+ 0,051	—
22 l	7.8	7 56,33	53,300	+ 0,274	24 1 21,97	11,751	- 0,425	+ 0,011	—
Anonyma 8	8.9	10 56,98	53,192	+ 0,271	23 41 26,35	11,737	- 0,425		6
" 9	8.9	11 31,24	53,191	+ 0,270	23 41 7,91	11,734	- 0,425		4
23 d (Merope)	5	12 37,28	53,111	+ 0,268	23 26 39,23	11,729	- 0,425	+ 0,070	—
Anonyma 10	8	14 15,83	53,217	+ 0,271	23 45 4,35	11,731	- 0,426		4
" 11	8.9	17 24,71	53,171	+ 0,269	23 36 0,60	11,706	- 0,425		4
" 12	7.8	22 1,14	53,319	+ 0,278	24 1 4,70	11,685	- 0,427		4
" 13	8.9	23 41,65	53,144	+ 0,268	23 29 37,12	11,676	- 0,426		4
" 14	9	25 23,59	53,074	+ 0,266	23 16 44,31	11,668	- 0,425		4*)
" 15	8.9	26 39,14	53,194	+ 0,269	23 37 37,49	11,662	- 0,426		4
" 16	9.10	26 58,66	53,089	+ 0,266	23 18 58,24	11,661	- 0,426		4
" 17	8	27 18,67	53,059	+ 0,266	23 13 29,57	11,659	- 0,426		6
" 18	8	27 20,05	53,198	+ 0,269	23 38 16,98	11,659	- 0,426		6
24 p	7.8	27 46,36	53,191	+ 0,269	23 36 55,12	11,657	- 0,427	+ 0,011	4
Anonyma 19	8	28 1,82	53,086	+ 0,266	23 18 9,11	11,656	- 0,426		6
" 20	8	28 5,16	53,353	+ 0,273	24 5 15,46	11,656	- 0,428		8
" 21	8.9	28 41,90	53,377	+ 0,273	24 9 22,06	11,653	- 0,428		6
" 22	8	28 47,57	53,124	+ 0,267	23 24 50,13	11,652	- 0,426		6
" 23	8.9	29 36,40	53,046	+ 0,265	23 10 40,14	11,648	- 0,425		6
" 24	8	29 42,52	53,253	+ 0,270	23 47 16,49	11,648	- 0,427		12
25 q (Aleyone)	3.4	29 46,72	53,191	+ 0,268	23 36 16,91	11,648	- 0,427	+ 0,021	—
Anonyma 25	8.9	32 5,30	53,027	+ 0,264	23 6 35,59	11,637	- 0,425		6
" 26	9	33 36,76	53,006	+ 0,263	23 2 35,89	11,629	- 0,425		6
" 27	8.9	40 39,14	53,290	+ 0,270	23 49 12,64	11,596	- 0,428		4
" 28	7	43 17,17	53,980	+ 0,262	22 55 25,93	11,583	- 0,426	- 0,061	6
" 29	8	44 45,01	53,296	+ 0,269	23 50 53,36	11,576	- 0,429	+ 0,021	6
26 s	7.8	51 48,27	53,140	+ 0,265	23 21 43,53	11,543	- 0,428	+ 0,002	—
27 f (Atlas)	4.5	54 53,68	53,212	+ 0,266	23 33 30,41	11,528	- 0,429	+ 0,013	—
28 h (Plejone)	5.6	55 10,82	53,241	+ 0,267	23 38 30,60	11,527	- 0,429	+ 0,007	—
Anonyma 30	8.9	55 39,24	53,166	+ 0,265	23 23 31,50	11,524	- 0,429		6
" 31	8*	56 20,32	53,331	+ 0,269	23 54 4,70	11,521	- 0,430		6
" 32	8	57 35,11	53,328	+ 0,269	23 63 71,52	11,515	- 0,430		6
" 33	8.9	58 45,54	53,284	+ 0,268	23 45 12,36	11,509	- 0,430		6
" 34	7.8	58 3 36,72	53,109	+ 0,263	23 13 7,69	11,486	- 0,429		6
" 35	9	3 47,46	53,290	+ 0,267	23 45 2,15	11,485	- 0,430		6
" 36	9	5 59,14	53,285	+ 0,267	23 43 26,57	11,475	- 0,430		6
" 37	8	6 17,63	53,331	+ 0,268	23 51 22,51	11,473	- 0,431		6
" 38	8	7 6,69	53,161	+ 0,264	23 21 22,86	11,469	- 0,430		4
" 39	8	13 58,90	53,393	+ 0,269	24 0 13,68	11,436	- 0,432		6
" 40	7.8	20 31,97	53,220	+ 0,264	23 28 18,94	11,405	- 0,431		6

[Die bestehende Karte der Plejaden enthält, für 1855,0, die Positionen der meisten Sterne zwischen 3^h 36^m bis 43^m und + 22° 35' bis 24° 40', welche in einem Fernrohr von 10—11^m Oeffnung bequem sichtbar sind (etwa bis zur 10. 11. Grösse); die nicht in der Bonner Durchmusterung (Bd. IV) enthalten sind — unterstrichen.]

*) [Verbessert nach Astr. Nachr. 48, p. 332.]

105. Ueber Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Fixsterne.*

(Astron. Nachr. 22, p. 145.)

Die zweite hiesige Bestimmung der Declinationen der Fundamentalsterne (für 1840), welche ich, auf die Bestimmungen und Rechnungen des Herrn Dr. BUSCH gegründet, in Nr. 422 der Astr. Nachr. [Abh. 90] bekannt gemacht habe, entfernt sich in dem Falle des Procyon so weit von der ersten Bestimmung (für 1820), dass sie, durch Vergleichung mit der aus BRADLEY'S Beobachtungen abgeleiteten Declination für 1755, den Stern 1,64 nördlicher angibt als er für 1820 festgesetzt wurde. Eine ähnliche Abweichung von den früheren Bestimmungen für 1815 und 1825 ist in der Rectascension des Sirius, seit etwa 1834, dadurch auffallend geworden, dass die aus seinen Beobachtungen hervorgehenden Verbesserungen der Uhrzeit, mit Anfangs seltenen, jetzt ganz fehlenden Ausnahmen, wenn positiv kleiner, wenn negativ grösser sind, als die aus den Beobachtungen anderer Fundamentalsterne abgeleitet; so dass Sirius, seit 10 Jahren, in grösserer Rectascension erscheint, als die auf der Vergleichung der Bestimmungen für 1755 und 1825 beruhenden Tabulae Regiomontanae ihm anweisen. Der Unterschied ist bis auf fast 5", oder ein Drittel Zeitsecunde angewachsen.

Ich beabsichtige gegenwärtig nachzuweisen, dass diese Unterschiede nicht etwa Folgen von Unvollkommenheiten der Bestimmungen, aus welchen sie hervorgehen, sondern in der Veränderlichkeit der Bewegungen der Sterne selbst begründet sind. Ich könnte noch andere ähnliche, wenn auch sich in geringerer Grösse offenbarende Fälle aufzählen; der Nachweisung ihrer Ursache aber kann ich nur in den beiden angeführten Fällen diejenige Unzweideutigkeit geben, welche vorhanden sein muss, ehe man geneigt sein kann, die für die praktische Astronomie so wichtige und für die Erkenntniss der physischen Beschaffenheit des Fixsternensystems so interessante Erscheinung veränderlicher eigener Bewegungen von Fixsternen, als in der Natur vorhanden anzunehmen.

* [570 d. a. Verz. — Anzeiger dieser Abb. von BESSEL in: Berliner Monatsberichte 1844, p. 314; Monthly Notices R. A. S. VI, p. 136. — Fortsetzung der Untersuchungen von PETERS: Astron. Nachr. Bd. 31 und 32, SAFFORD: Astron. Notices Nr. 28, ACWERS: Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen (J. Th. Königsberg 1862, II. Th. Leipzig 1868.)]

Ihre Wichtigkeit für die praktische Astronomie erlangt diese Erscheinung, indem es dadurch unstatthaft wird, den Ort eines Sterns für eine unbestimmte Zeit aus seinen für zwei bestimmte Zeiten festgesetzten Oertern zu folgern; wodurch z. B. die, bis jetzt für gerechtfertigt gehaltene, Uebertragung des Resultats zweier Fundamentalcataloge auf andere Epochen so lange unsicher wird, als man nicht zur Kenntniss der Art der Veränderlichkeit der Bewegungen der darin enthaltenen Sterne gelangt sein wird. Ihr Interesse für die Erkenntniss der physischen Beschaffenheit des Fixsternensystems erlangt sie, indem sie auf die Annahme zurückweist, dass Sterne, deren veränderliche Bewegungen bemerkbar werden, Theile von Systemen sind, welche vergleichungsweise mit den grossen Entfernungen der Sterne von einander, auf kleine Räume beschränkt sind.

Der Nachweisung, die ich gegenwärtig beabsichtige, werde ich eine Darstellung der theoretischen Betrachtungen vorangehen lassen, welche die eben ausgesprochene Behauptung rechtfertigen. Bezeichnet man die rechtwinkligen, auf ein festes Axensystem bezogenen Coordinaten des Sterns O , dessen Bewegung untersucht werden soll, durch x, y, z , seine Masse durch m ; das Aehnliche für einen anderen Stern S , durch x_s, y_s, z_s, m_s ; für die Sonne durch ξ, η, ζ, μ ; die Entfernungen $O-S$, durch r_s , $O-Sonne$ durch ρ , $S-Sonne$ durch ρ_s , so hat man folgende Differentialgleichungen der Bewegungen, sowohl des Sterns, als der Sonne:

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x-\xi}{\rho^2} + m_s \frac{x-x_s}{r_s^2}$$

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y-\eta}{\rho^2} + m_s \frac{y-y_s}{r_s^2}$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z-\zeta}{\rho^2} + m_s \frac{z-z_s}{r_s^2}$$

und

$$0 = \frac{d^2\xi}{dt^2} + m \frac{\xi-x}{\rho^2} + m_s \frac{\xi-x_s}{\rho_s^2}$$

$$0 = \frac{d^2\eta}{dt^2} + m \frac{\eta-y}{\rho^2} + m_s \frac{\eta-y_s}{\rho_s^2}$$

$$0 = \frac{d^2\zeta}{dt^2} + m \frac{\zeta-z}{\rho^2} + m_s \frac{\zeta-z_s}{\rho_s^2}$$

und durch Subtraction der letzteren von den ersten die Differentialgleichungen der relativen Coordinaten $x-\xi, y-\eta, z-\zeta$:

$$0 = \frac{d^2(x-\xi)}{dt^2} + (m+\mu) \frac{x-\xi}{\varrho^2} + m_s \left\{ \frac{x-x_s}{r_s^2} - \frac{\xi-x_s}{\varrho_s^2} \right\}$$

$$0 = \frac{d^2(y-\eta)}{dt^2} + (m+\mu) \frac{y-\eta}{\varrho^2} + m_s \left\{ \frac{y-y_s}{r_s^2} - \frac{\eta-y_s}{\varrho_s^2} \right\}$$

$$0 = \frac{d^2(z-\zeta)}{dt^2} + (m+\mu) \frac{z-\zeta}{\varrho^2} + m_s \left\{ \frac{z-z_s}{r_s^2} - \frac{\zeta-z_s}{\varrho_s^2} \right\}$$

wo das letzte Glied, auf jeden der anziehenden Sterne

$$0 = \frac{d[(y-\eta)d(x-\xi) - (x-\xi)d(y-\eta)]}{dt^2} + m_s [(x_s-x)(\eta-y) - (y_s-y)(\xi-x)] \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right)$$

$$0 = \frac{d[(x-\xi)d(z-\zeta) - (z-\zeta)d(x-\xi)]}{dt^2} + m_s [(x_s-x)(\zeta-z) - (z_s-z)(\xi-x)] \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right)$$

$$0 = \frac{d[(x-\xi)d(y-\eta) - (y-\eta)d(x-\xi)]}{dt^2} + m_s [(y_s-y)(\zeta-z) - (z_s-z)(\eta-y)] \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right)$$

Wenn die Winkelbewegung des Sterns *O* an der Sonne während des Zeittheilchens *dt* durch $d\varphi$ bezeichnet wird und α, β, γ die Winkel der Axen der *x, y, z* mit der Ebene der Bewegung bedeuten, so sind die ersten Glieder dieser Gleichungen bekanntlich:

$$0 = -\frac{d(\varrho\varphi \frac{d\varphi}{dt})}{dt} + m_s \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right) \left\{ [(x_s-x)(\eta-y) - (y_s-y)(\xi-x)] \cos \alpha + [(x_s-x)(\zeta-z) - (z_s-z)(\xi-x)] \cos \beta + [(y_s-y)(\zeta-z) - (z_s-z)(\eta-y)] \cos \gamma \right\}$$

Diese Gleichung kann, durch geeignete Wahl der willkürlichen Coordinatenaxen, unmittelbar in ihre einfachste Form gebracht werden. Legt man die Axe der *x* in

$$0 = -\frac{d(\varrho\varphi \frac{d\varphi}{dt})}{dt} + m_s \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right) [(x_s-x)(\eta-y) - (y_s-y)(\xi-x)]$$

Legt man ferner die Axe der *y* in die Ebene der Bewegung, die der *x* senkrecht auf diese und auf die Axe der *z*, und macht man *O* zum Mittelpunkte dieses Axensystems, so werden

$$\eta - y = 0, \quad \xi - x = \varrho, \quad y_s - y = r_s \sin s_s \cos p_s,$$

wenn s_s den Winkel $S_s O$ Sonne, und p_s die Neigung seiner Ebene gegen die der Bewegung bedeuten. Man erhält dadurch:

$$\frac{d(\varrho\varphi \frac{d\varphi}{dt})}{dt} = m_s \left(\frac{1}{\varrho_s^2} - \frac{1}{r_s^2} \right) r_s \varrho \sin s_s \cos p_s.$$

Indem eine Aenderung von ϱ ein unbedeutendes Verhältniss zu ϱ selbst hat, kann man $\varrho\varphi$ als beständig betrachten und daher

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = m_s \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right) \frac{r_s}{\varrho} \sin s_s \cos p_s$$

annehmen.

Diese Formel drückt die Veränderung aus, welche die Geschwindigkeit der sichtbaren Bewegung des Sterns

angewandt, also so oft wiederholt gedacht wird, als solche Sterne in Betracht gezogen werden sollen. Multiplicirt man diese Gleichungen in

$$\begin{array}{ccc} y-\eta & | & x-\xi & | & - \\ -(x-\xi) & | & - & | & x-\xi \\ - & | & -(x-\xi) & | & -(y-\eta) \end{array}$$

so erhält man die Summen der Producte:

$$-\frac{d(\varrho\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha)}{dt}, \quad -\frac{d(\varrho\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos \beta)}{dt}, \quad -\frac{d(\varrho\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos \gamma)}{dt}$$

Die Summe der Producte der drei Gleichungen in $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ist daher:

die Richtung O — Sonne, so werden $\alpha = 0, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$, und die Gleichung wird:

O, durch die Anziehung jedes Sterns S_s , in einer Zeiteinheit erfährt. Wenn die Werthe der Differentialquotienten von φ für eine bestimmte Zeit *T* genommen werden, so ist der Ausdruck dieser Bewegung zwischen *T* und einer anderen Zeit *T* + *t*

$$= \frac{d\varphi}{dt} t + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} t^2 + \text{etc.},$$

also der Ausdruck des Unterschiedes derselben von der im Falle der Unveränderlichkeit der anfänglichen Geschwindigkeit stattfindenden:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} t^2 + \text{etc.} = \frac{m_s t t}{2} \left(\frac{1}{r_s^2} - \frac{1}{\varrho_s^2} \right) \frac{r_s}{\varrho} \sin s_s \cos p_s + \text{etc.}$$

und sein dem Quadrate der Zeit proportionaler Theil:

$$= \frac{m_s t t}{2\varrho r_s r_s} \left(1 - \frac{r_s^2}{\varrho_s^2} \right) \sin s_s \cos p_s.$$

Wenn man ϱ, ϱ_s, r_s durch die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, m_s durch die Masse der letzteren misst und für *t* ein Jahrhundert annimmt, so hat man für das letztere 36525 *k* zu schreiben ($\log k = 8,2355814$,

GAUSS Theoria m. C. C. p. 2). Um aber leichter zu überschende Grössen in die Rechnung einzuführen, werde ich 206265 mittlere Entfernungen der Erde von der Sonne zur Einheit des Maasses machen, oder ϱ , ϱ_a , r_a durch die Entfernung messen, welche der jährlichen Parallaxe = 1" entspricht. Schreibt man demgemäss

$$\frac{\varrho}{\sin 1''}, \quad \frac{\varrho_a}{\sin 1''}, \quad \frac{r_a}{\sin 1''}, \quad \text{statt } \varrho, \varrho_a, r_a$$

und gibt man die hundertjährige Veränderung der anfänglichen Bewegung in Secunden an, so wird ihr Ausdruck:

$$= \frac{m_a (36525 k)^2 \sin 1''^2}{2 \varrho r_a r_a} \cdot \left(1 - \frac{r_a^2}{\varrho_a^2}\right) \sin s_a \cos p_a$$

$$= 0,000046394 \cdot \frac{m_a}{\varrho r_a r_a} \cdot \left(1 - \frac{r_a^2}{\varrho_a^2}\right) \sin s_a \cos p_a$$

Aus dem, in dem letzten Ausdrucke angegebenen Zahlenwerthe des beständigen Factors geht hervor, dass ein Stern S_a nur dann eine, hundertjähriger Beobachtung merklich werdende Veränderlichkeit der eigenen Bewegung von O hervorbringen kann, wenn entweder

1. seine Masse m_a , vergleichungsweise mit der der Sonne, sehr gross, oder
2. seine Entfernung r_a von O , vergleichungsweise mit der der jährlichen Parallaxe = 1" entsprechenden, sehr klein, oder endlich
3. seine Entfernung ϱ_a von der Sonne von dieser Beschaffenheit ist.

Ogleich auch die Entfernung ϱ des Sterns O von der Sonne sich in dem Nenner des Ausdruckes befindet, so habe ich ihre Kleinheit doch nicht als Ursache eines merklichen Werthes desselben anführen dürfen, weil sie als Factor der Grösse

$$1 - \frac{r_a^2}{\varrho_a^2}$$

betrachtet werden kann. Aber auch wenn keiner der abgezählten 3 Fälle vorhanden ist, wenn also alle m_a , $\frac{1}{r_a}$, $\frac{1}{\varrho_a}$ mässig grosse Werthe besitzen, kann eine merkliche Veränderlichkeit der eigenen Bewegung doch

4. aus dem Zusammenwirken der vorhandenen unzähligen Sterne hervorgehen.

Ich werde diese möglichen Entstehungsarten einer merklichen Veränderlichkeit der eigenen Bewegung eines Sterns jetzt näher untersuchen. Das Vorhandensein einer Masse m_a , vergleichungsweise mit welcher die der Sonne unbedeutend ist, kann zwar nicht dadurch bestritten werden, dass wir keinen Gegenstand im Sternensystem

kennen, dem sie beizulegen wir vorzugsweise geneigt sein könnten; aber die auf sie gegründete Erklärung (1) würde Bewegungen der Sterne zur Folge haben, welche die Beobachtungen nicht zeigen. Wenn nämlich die merkliche Veränderlichkeit die Wirkung der Anziehung einer sehr grossen, aber nicht in einer sehr kleinen Entfernung r_a befindlichen Masse wäre, so würde sie sich, während geraumer Zeit, nahe in gleicher Richtung und Grösse äussern, indem die diese bestimmende gegenseitige Stellung der Masse, des Sterns und der Sonne, sich selbst in so langer Zeit nicht erheblich ändert; sie würde sich also bis zu beträchtlicher Grösse anhäufen, und die anfangs vorhandene scheinbare Bewegung des Sterns im Laufe der Zeit beträchtlich verändern. Die kleinen Bewegungen der Sterne, die wir sehen, würden also mit der Voraussetzung ihrer in kurzer Zeit merklich werdenden Veränderlichkeit nur unter der Annahme vereinbar sein, dass diese Veränderlichkeit die früher gross gewesen eigenen Bewegungen in gerade jetzt kleine verwandelt habe, so wie später wieder in grosse entgegengesetzte verwandelt werde. Diese Annahme ist schon für einen Stern sehr wenig wahrscheinlich; die Wahrscheinlichkeit ihrer gleichzeitigen Richtigkeit für verschiedene Sterne kann als verschwindend betrachtet werden. Aber abgesehen von der der Annahme fehlenden Wahrscheinlichkeit, berechtigen auch die ältesten Beobachtungen der Oerter der Fixsterne zu ihrer Zurückweisung. Wenn nämlich die Rectascension des Sirius im Jahre 1843 um 5" grösser ist, als sie aus der Vergleichung seiner Rectascensionen für 1755 und 1825, unter vorausgesetzter unveränderlicher eigenen Bewegung hervorgeht, und wenn dieser Unterschied durch die von der Annahme bedingte beständige Veränderlichkeit der eigenen Bewegung erklärt werden soll, so beträgt diese jährlich + 0,006314*, und ihr Einfluss auf die vor 2000 Jahren bestimmte Rectascension des Sterns etwa viertheil Grad; welche Grösse weit ausserhalb der Grenze der Unsicherheit des Hipparch'schen Verzeichnisses liegt. — Derselbe Grund, den ich hier gegen die erste Erklärungsart einer in kurzer Zeit merklich werdenden Veränderung der eigenen Bewegung eines Sterns geltend gemacht habe, trifft auch die vierte.

Es bleiben also nur die 2. und 3. Erklärungsart übrig, nämlich entweder r_a oder ϱ_a muss sehr klein,

* Dieses ist mehr als Zehnmillionen mal mehr, als in der Voraussetzung $m_a = 1$, $r_a = 1$, $\frac{1}{\varrho} \left(1 - \frac{r_a^2}{\varrho_a^2}\right) = 1$ erklärt werden kann.

d. h. der anziehende Körper muss entweder dem Sterne, der die merkliche Veränderung zeigt, oder der Sonne sehr nahe sein. Da aber ein anziehender Körper von beträchtlicher Masse in sehr kleiner Entfernung von der Sonne, sich in den Bewegungen unseres Planetensystems nicht verrathen hat, so wird man auf seine sehr kleine Entfernung von dem Sterne, als auf die einzig statthafte Erklärung der im Laufe eines Jahrhunderts merklich werdenden Veränderung der eigenen Bewegung des letzteren, zurückgewiesen. Der Stern, der diese Veränderung zeigt, ist also ein Theil eines auf kleinen Raum beschränkten Systems; die Veränderung kehrt periodisch wieder, wie die Bewegungen des letzteren, und ihre periodische Wiederkehr ist nothwendig, um sie mit dem Fehlen in das Unbestimmte fortgehender Anhäufung ihres Einflusses vereinbar zu machen. — Wenn das System als Doppelstern bekannt ist, so kann die Beobachtung einer Veränderlichkeit der Bewegung eines seiner Bestandtheile nicht überraschen, indem ihr Vorhandensein und ihre Wiederkehr in der Periode der Umlaufbewegung beider Bestandtheile um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt nothwendig sind. Wenn sie dagegen an einem einfach erscheinenden Sterne bemerkt wird, so führt sie auf die Annahme, dass er der einzige sichtbare der Theile eines kleinen Systems ist; auf eine Annahme, deren Statthaftigkeit nur bestritten werden könnte, wenn Grund vorhanden wäre, die Eigenschaft des Leuchtens für eine wesentliche der Masse zu halten. Dass zahllose Sterne sichtbar sind, beweiset offenbar nichts gegen das Dasein zahlloser unsichtbarer. Dass der berühmte Tychonische Stern in der Cassiopeja unsichtbar vorhanden ist, ist nicht zweifelhaft.

Das hier mitgetheilte, die physische Beschaffenheit des Sternengebäudes berührende Raisonnement, beruht auf der Voraussetzung, dass die in ihm wirkenden Kräfte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen sind. Ich glaube nicht, dass man diese Voraussetzung bezweifeln kann, und ebensowenig kann ich in bekanten Principien oder wahrscheinlichen Annahmen eine andere Erklärung entdecken. Ob aber Veranlassung zu diesem Raisonnement, und ob Grund vorhanden ist, das, wie vorher erwähnt, für die praktische Astronomie wichtige Vorhandensein merklich veränderlicher eigener Bewegungen der Sterne anzunehmen, das kann nur aus ihren vorhandenen Beobachtungen hervorgehen, deren Untersuchung ich daher jetzt mit allen den Einzelheiten mittheilen werde, deren Kenntniss mir erforderlich scheint, ein Urtheil über die Sicherheit ihrer Resultate zu begründen.

Declination des Procyon.

Die in den Fundamentis Astronomiae angegebene Declination für 1755 = + 5° 49' 59",3 beruht auf 50 wie immer sehr gut untereinander übereinstimmenden Bradley'schen Beobachtungen; und ich habe ihr, nachdem die innere Sicherheit der aus den Bradley'schen Zenithdistanzen gezogenen Resultate, in den F. A. schon untersucht worden ist, nur die Bemerkung hinzuzufügen, dass nochmalige Durchsicht der Rechnungen, aus welchen ich sie abgeleitet habe, weder einen Fehler derselben, noch eine Unrichtigkeit des Druckes ihres Resultats, hat bemerken lassen. — Die aus meinen Beobachtungen mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise abgeleitete Declination für 1820 = + 5° 40' 40",32, stützt sich auf 33 Beobachtungen in östlicher und 48 in westlicher Lage des Kreises, deren erstere 0,09 mehr, die anderen 0,09 weniger ergeben haben. — Der aus den Beobachtungen, welche später Herr Dr. Busch mit demselben Instrumente gemacht hat, in Nr. 422 der Astron. Nachr. [Abh. 90] abgeleitete Declination für 1840 = + 5° 37' 46",85, liegen 48 Beobachtungen des Sterns selbst in der östlichen, und 57 in der westlichen Lage des Kreises, so wie auch 5 Beobachtungen seines von Quecksilber reflectirten Bildes in jeder der beiden Lagen zum Grunde. Diese verschiedenen Beobachtungsarten, nach den am a. O. mitgetheilten Reductionselementen berechnet, ergeben einzeln:

48 Beob.	+ 5° 37' 46",26
57 " 47,12
5 " 48,53
5 " 47,72

Aber, das Mittel der Zeiten dieser Beobachtungen fällt 2 Jahre vor die Epoche, für welche ihr Resultat angegeben ist, auf den Anfang von 1838; von welcher Zeit die beobachtete Declination, durch Anwendung der in den Tab. Reg. angenommenen Aenderung bis 1840, auf die letztere gebracht ist. Man bezieht sie also auf ihre wahre Epoche, indem man ihr diese Aenderung (= - 17",635) wieder, mit entgegengesetztem Zeichen hinzufügt. Das eigentliche Resultat der Beobachtungen ist daher:

$$\text{Decl. 1838} = + 5^{\circ} 38' 4",48.$$

Diesen Bestimmungen kann jetzt noch eine hinzugesetzt werden; nämlich die, die ich aus dem bis jetzt vorhandenen Theile einer mit dem Repsold'schen Meridiankreise der Königsberger Sternwarte angefangenen Beobachtungsreihe ableiten kann. Was über das Instrument und die Art, wie ich es anwende, aus Nr.

481—482 der Astr. Nachr. [Abh. 65] schon bekannt ist, kann ich jetzt noch durch einen, für die Beobachtungskunst erheblichen Zusatz ergänzen. Durch Verfolgung der mathematischen Theorie des Einflusses der Schwere auf die Figur eines astronomischen Kreises habe ich nämlich erkannt, dass die damit beobachtete Zenithdistanz eines Sterns von diesem Einflusse vollständig frei wird, wenn sie das Mittel aus vier Beobachtungen ist, wovon zwei in jeder der beiden Lagen des Instruments, die eine am Sterne selbst, die andere an seinem von einer horizontalen Ebene reflectirten Bilde, gemacht werden*). Dieses gilt für jede individuelle Beschaffenheit des Apparats. Indem dadurch das Resultat vollständiger Beobachtungen von der unsicheren Voraussetzung befreit wird, dass der Einfluss der Schwere der Form $a \sin s + b \cos s$ folge, wird dadurch auch die allein noch übrige der mir bekannten beständig wirkenden Fehlerursachen der Beobachtung von Zenithdistanzen beseitigt. Indem ich das, was mich sonst noch über ihre Richtigkeit beunruhigte, durch die a. a. O. angegebenen Massregeln entfernt habe, ist mir also nichts mehr bekannt, was das Zutrauen zu dem arithmetischen Mittel folgender vier Bestimmungen der Zenithdistanz des Procyon für 1844 schwächen könnte:

Kreis Ost. Direct . . .	49° 5' 37",31.	13 Beob.
Reflectirt	37,90.	14 "
" West. Direct	36,94.	17 "
Reflectirt	37,48.	18 "
Mittel	49° 5' 37",33	
Polhöhe	54 42 50,56	
Declination 1844 = +	5° 37' 13",23.	

Die für den Anfang jedes Jahrs, von 1750 bis 1850, in den Tabulis Region. angegebenen Declinationen der Fundamentalsterne sind aus ihren Bestimmungen für 1755 und 1820, unter der Voraussetzung unveränderlicher eigener Bewegungen der Sterne gefolgert. Sie sind also für 1755 und 1820 die für diese

Zeiten bestimmten selbst. Aber die Erwartung, dass sie ferner den Beobachtungen getreu bleiben würden, ist nicht gerechtfertigt worden, denn die beiden späteren Bestimmungen ergeben Declinationen, welche

1838	+ 2",11
1844	+ 3,81

von den in den Tabb. Reg. enthaltenen abweichen. Als der Unterschied der ersten dieser Bestimmungen bekannt wurde, bezeichnete ich ihn (A. N. Nr. 422 S. 236 [p. 264]) als auffallend. Dieses war dem Zutrauen angemessen, welches ich zu der Vermeidung beständiger Fehler der Bestimmungen für 1820 und 1840 hegte, indem ich keinen Grund ihrer Entstehung kannte, ausser der in dem angenommenen Gesetze des Einflusses der Schwere übrigbleibenden, vermuthlich nicht sehr grossen Unsicherheit; welche übrigens auch beseitigt worden sein würde, wenn ich damals schon die Theorie dieses Einflusses entwickelt, und in ihr die schon erwähnte, als vollständig eliminirende Beobachtungsmethode entdeckt hätte. Aber ich fand mich im Jahre 1840 noch bei weitem nicht so berechtigt, als ich jetzt zu sein glaube, den durch die Declination des Procyon, und eben so durch die Rectascension des Sirius, erregten Verdacht gegen die Unveränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Sterne auszusprechen.

Durch das Hinzukommen der Bestimmung für 1844 und ihre Vergleichung mit den früheren für 1755, 1820, 1838, scheint mir die Veränderlichkeit der eigenen Bewegung des Procyon in Declination so sicher bewiesen zu sein, als etwas durch hiesige Beobachtungen bewiesen werden kann. Da ich aber damit nicht der Meinung bin, dass eine, von der hiesigen Beobachtungsart ganz unabhängige Prüfung dieses Resultats nicht sehr wünschenswerth sein sollte, so habe ich 10 Verzeichnisse der Declinationen der 36 Sterne mit den Angaben der Tabb. Reg. verglichen, in der Hoffnung, dadurch zu jenem unabhängigen Urtheile zu gelangen. Ich setze diese Vergleichen hierher:

	MAKELYN. 1770.	PIZZI. 1800.	POSD. 1822 I. 1822 II.		STRUVE. 1824.	ABELANDER. 1830.	POSD. 1830.	ABT. 1830.	HENDERSON. 1833.	BURCH. 1840.
γ Pegasi	- 0',54	+ 0',97	—	+ 0',72	+ 0',68	+ 1',20	+ 1',80	+ 1',82	+ 1',18	+ 0',37
α Arietis	+ 0,86	+ 1,65	+ 0',92	+ 0,89	- 0,97	+ 0,90	+ 1,50	+ 0,27	+ 0,23	+ 0,41
α Ceti	+ 8,91	+ 1,58	+ 1,90	+ 1,74	+ 1,19	+ 1,48	+ 1,98	+ 1,10	+ 1,27	+ 0,09
α Tauri	+ 0,70	+ 2,89	+ 1,65	+ 0,72	+ 0,32	+ 0,50	+ 1,70	+ 0,18	+ 0,70	- 0,15
α Aurigae	- 0,96	- 0,78	+ 0,48	+ 0,12	+ 0,19	- 0,11	+ 1,09	- 0,73	+ 1,29	- 1,54

*) Die Entwicklung der Theorie des Einflusses der Schwere auf die Instrumente werde ich bei einer anderen Gelegenheit bekannt machen. [S. Abh. 76.]

	MASKELYNE.	PIAZZI.	POND.		STRUCV.	ABOGLÄNDER.	POND.	AIRY.	HENDERSON.	BURCH.
	1770.	1800.	1822 I.	1822 II.	1824.	1830.	1830.	1830.	1833.	1840.
β Orionis	+ 2,23	+ 1,87	+ 1,73	+ 0,74	+ 1,01	+ 1,41	+ 2,21	+ 1,59	+ 1,11	+ 0,71
β Tauri	- 1,74	+ 0,42	+ 1,45	+ 1,16	+ 0,07	+ 0,75	+ 2,56	+ 1,08	+ 0,56	+ 0,97
α Orionis	+ 2,10	+ 0,61	+ 1,31	- 0,02	+ 0,37	+ 0,57	+ 1,97	+ 0,59	+ 0,33	+ 0,25
α Canis majoris	+ 1,66	+ 2,06	+ 1,68	+ 0,33	+ 0,26	+ 0,97	+ 1,77	- 0,05	- 0,40	- 0,07
α Gemisor	- 5,49	+ 1,19	+ 1,08	+ 0,36	+ 0,29	- 0,08	+ 1,92	+ 0,56	+ 0,11	- 0,31
α Canis minoris	+ 3,31	+ 4,29	+ 2,34	+ 1,26	+ 1,12	+ 1,66	+ 3,26	+ 1,91	+ 2,15	+ 2,11
β Geminorum	- 1,74	+ 0,51	+ 1,10	+ 0,61	- 0,03	+ 0,57	+ 2,07	+ 1,07	+ 0,42	+ 0,57
α Hydrae	+ 3,64	+ 2,27	+ 2,82	+ 1,22	+ 0,83	+ 1,75	+ 3,05	+ 1,58	+ 1,07	+ 0,58
α Leonis	+ 0,64	+ 2,69	+ 2,87	+ 1,74	+ 0,04	+ 0,53	+ 2,83	+ 0,80	+ 0,71	+ 0,08
β "	+ 1,94	+ 3,06	+ 2,14	+ 0,54	- 0,15	+ 0,51	+ 1,81	+ 0,33	+ 0,88	- 0,05
β Virginis	- 0,05	+ 1,47	-	-	+ 1,42	+ 1,60	+ 2,40	- 0,67	+ 0,85	+ 0,37
α "	+ 0,53	+ 2,84	+ 2,95	+ 1,29	+ 1,45	+ 1,88	+ 2,98	+ 2,28	+ 1,19	+ 0,83
α Bootis	- 0,50	+ 2,25	+ 2,42	+ 0,67	+ 0,09	+ 0,95	+ 1,85	+ 0,96	- 0,50	+ 0,34
1 α Librae	-	+ 2,56	-	+ 1,15	+ 0,83	+ 2,36	+ 3,26	+ 2,39	+ 0,48	- 0,57
2 α "	+ 4,82	+ 2,93	+ 4,82	+ 0,45	+ 0,89	+ 2,04	+ 3,04	+ 1,49	+ 0,34	- 0,73
α Coronae	+ 1,80	+ 3,30	+ 2,40	+ 0,49	+ 0,78	+ 1,14	+ 1,64	+ 0,93	+ 0,03	+ 0,85
α Serpentis	+ 0,27	+ 2,35	+ 3,73	+ 1,39	+ 1,70	+ 1,89	+ 3,49	+ 2,31	+ 1,66	+ 0,94
α Scorpii	+ 4,61	+ 3,06	+ 4,88	+ 1,12	+ 2,46	+ 2,75	+ 5,65	+ 2,44	+ 0,69	- 1,11
α Herculis	-	+ 4,21	+ 3,14	+ 1,14	+ 1,51	+ 2,19	+ 2,79	+ 1,97	+ 1,60	+ 0,72
α Ophiuchi	+ 2,32	+ 4,05	+ 3,12	+ 1,71	+ 0,97	+ 1,38	+ 2,58	+ 0,02	+ 0,56	+ 0,09
α Lyrae	- 0,92	+ 1,68	+ 2,11	+ 0,97	+ 0,68	+ 1,87	+ 1,97	+ 3,03	+ 1,21	+ 0,70
γ Aquilae	+ 0,85	+ 2,40	-	-	+ 0,86	+ 1,38	+ 2,38	+ 1,82	+ 0,83	+ 0,87
α "	- 2,41	+ 3,77	+ 2,93	+ 0,95	+ 1,21	+ 1,70	+ 2,40	+ 2,85	+ 1,54	+ 0,48
β "	+ 3,26	+ 3,39	-	+ 1,25	+ 1,83	+ 2,19	+ 3,49	+ 3,03	+ 1,69	+ 1,06
1 α Capricorni	- 4,18	+ 4,90	-	-	+ 2,19	+ 2,67	+ 4,17	+ 4,09	+ 2,07	- 0,05
2 α "	- 1,99	+ 4,65	-	+ 2,90	+ 2,38	+ 2,89	+ 4,69	+ 4,19	+ 2,08	+ 0,80
α Cygni	+ 0,52	+ 2,13	+ 1,47	+ 0,46	+ 0,75	+ 1,39	+ 1,09	+ 0,98	+ 2,18	+ 0,81
α Aquarii	+ 1,22	+ 2,84	+ 1,96	+ 1,26	+ 1,60	+ 2,21	+ 2,91	+ 1,39	+ 1,94	+ 0,14
α Piscis australis	+ 0,64	+ 3,81	-	+ 5,12	-	-	+ 5,74	+ 6,22	+ 4,60	-
α Pegasi	+ 2,52	+ 2,99	+ 1,59	+ 0,49	+ 0,40	+ 1,11	+ 2,31	+ 0,78	+ 0,87	- 0,22
α Andromedae	- 1,33	+ 0,54	+ 1,30	+ 0,37	+ 0,42	+ 0,55	+ 0,85	+ 0,13	- 0,11	+ 0,27

Ueber die verglichenen Cataloge bemerke ich Folgendes:

1. MASKELYNE 1770. Tables for comp. the appar. places of the fixed Stars. Die den Declinationen zum Grunde liegende Zahl von Beobachtungen ist im Allgemeinen klein, meistens nicht über 3 bis 5; was jedoch, der Uebereinstimmung gemäss, welche BRADLEY's mit demselben Instrumente gemachte Beobachtungen gewähren, nicht genügender Grund zur Erklärung so grosser und keinem Gesetze folgender Unterschiede ist, als die Vergleichung in einigen Fällen zeigt. Vermuthlich ist die Berechnung der Beobachtungen, die damals weit schwerfälliger war als jetzt, nicht frei von Unvollkommenheiten. Die späteren Declinationsbestimmungen MASKELYNE's habe ich nicht verglichen, weil ihnen die, mit der Zeit sich vergrössernde, bekannte Unrichtigkeit des Quadranten alles Gewicht raubt.
2. PIAZZI 1800. Stellarum inerrantium positiones med. Panormi 1814.

3. POND 1822 I. Bekanntlich hat POND nach und nach viele Verzeichnisse der Declinationen veröffentlicht, welche, ohne dass die Ursache genau bekannt wäre, beträchtliche und weit ausser den Grenzen der zufälligen Beobachtungsfehler liegende Abweichungen von einander zeigen. Ich habe ein von POND's eigener Hand mit Verbesserungen versehenes Verzeichniss verglichen, dasselbe, welches in Nr. 28 der Astron. Nachrichten abgedruckt ist. Die ihm zum Grunde liegenden Beobachtungen sind sowohl an den Sternen selbst als an ihren von Quecksilber reflectirten Bildern gemacht.
4. POND 1822 II. Dieses ist das Verzeichniss, welches Herr OLUFSEN, auf meine Bitte, unter Anwendung der Königsberger Strahlenbrechungstafel, aus den Greenwicher Beobachtungen des J. 1822 reducirt hat und welches sich in Nr. 73 der Astr. Nachr. findet. Die Einrichtung des Instruments erlaubt seine Umlegung nicht, weshalb die Beobachtungen von dem Einflusse der Schwere nur

zum Theil befreiet werden können. Ich habe vergebens erwartet, dass die Vergleichung dieses Verzeichnisses mit dem vorigen, die seit länger als 20 Jahren bekannt ist, einen unserer jungen Astronomen veranlassen würde, die ganze Reihe der POND'schen, sich durch Apparat und Sorgfalt auszeichnenden Beobachtungen, einer neuen und consequenter Rechnung zu unterwerfen, indem sie, ohne umsichtige und mit Genauigkeit durchgeführte Untersuchung, den ihr angemessenen Nutzen für die Astronomie nicht haben kann.

5. STRUVE 1824. *Observationes* Dorpat. VI.
6. ARGELANDER 1830. *DLX Stellarum Fixarum Positiones mediae*. Helsingfors 1835.
7. POND 1830. *Catalogue of 1112 Stars*. London 1833. Der Titel dieses Verzeichnisses sagt, dass es auf Beobachtungen von 1816 bis 1833 gegründet ist.
8. AIRY 1830. *Memoirs of the Royal Astr. Soc.* Vol. XI. Dieses Verzeichniss ist aus Beobachtungen in Cambridge abgeleitet. Die angewandte Strahlenbrechung ist die Königsberger.
9. HENDERSON 1833. *Memoirs of the Royal Astr. Soc.* Vol. X. p. 75. Aus Beobachtungen am Vorgebirge der guten Hoffnung abgeleitet, welche mit der Königsberger Strahlenbrechungstafel reducirt wurden, deren Richtigkeit sie bestätigt hatten.
10. BUSCH 1840. *Astr. Nachr.* Nr. 422 [Abh. 90]. Dieses Verzeichniss ist auf eine neue Untersuchung der Reductionselemente, durch Beobachtungen zwischen 1836 und 1840 gegründet, also in dieser Beziehung von dem früheren für 1820 unabhängig. Beide Verzeichnisse sind aber durch Anwendungen desselben Instruments erlangt worden, weshalb Fehler seiner Theilungen, insofern sie durch ihre Untersuchung nicht vollständig beseitigt sind, gleichen Einfluss auf beide haben. Die Declination α Aurigae ist, aus einem a. a. O. p. 236 [p. 264] angeführten Grunde, unsicher.

Die in der Tafel angegebenen Unterschiede der verschiedenen Verzeichnisse von der, die Bestimmungen für 1755 und 1820, unter der Voraussetzung unveränderlicher eigener Bewegungen, verbindenden Formel, können theils aus Fehlern dieser Bestimmungen, theils aus Fehlern der damit verglichenen, theils aus Fehlern der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der eigenen Bewegungen, entstanden sein. Offenbar ist es nicht möglich, sie von den zufälligen Fehlern der Beobachtungen zu befreien; aber wenn angenommen werden kann, dass einem Gesetze folgende Fehler für andere

Sterne eben so gross sind als für Procyon, so wird der Unterschied der diesem Sterne zugehörigen Zahl jeder Spalte der Tafel, von den jenen anderen Sternen zugehörigen Zahlen, von ihnen frei. STRUVE und ARGELANDER haben ihre Verzeichnisse in Folge der Anwendung derselben Methode und derselben Art der Untersuchung ihrer Instrumente erlangt, welche ich zur Erlangung des meinigen für 1820 angewandt und in der VII. Abtheilung meiner Beobachtungen bekannt gemacht habe. Nichtsdestoweniger würden diese drei Verzeichnisse nur ganz frei von beständigen Fehlern sein, wenn zwei Bedingungen erfüllt wären, nämlich:

1. wenn die Methode jeden möglichen, beständig wirkenden Fehler wegschaffen könnte, und
2. wenn die Elemente, deren Kenntniss die Reduction der Beobachtungen voraussetzt, als fehlerfrei angenommen werden könnten.

Aber weder die eine, noch die andere dieser Bedingungen wird wirklich erfüllt. Die erste nicht, weil Beobachtungen mit einem durch Nonien abgelesenen Instrumente, also auch mit einem, diese Einrichtung besitzenden Reichenbach'schen Meridiankreise, nur von dem gesetzmässig fortschreitenden Theile seiner Theilungsfehler befreiet werden können, indem es unausführbar ist, den Fehler jedes, mit einem Striche der Nonien zur Coincidenz gelangenden Theilstriches zu bestimmen; und ferner, weil die Methode noch nicht die schon erwähnte, die Resultate vollständig von den Einflüssen der Schwere befreiende Beobachtungsart verlangt, sondern auf der, vermuthlich in keinem Falle richtigen, Annahme der Form dieser Einflüsse $= a \sin z + b \cos z$ beruhet. Die zweite Bedingung wird nicht erfüllt, weil kleinere oder grössere Spuren der unvermeidlichen Unvollkommenheit der Beobachtungen, sowie auch Folgen der Nichterfüllung der ersten Bedingung, in die Bestimmung aller, auf alle Sterne zugleich Einfluss ausübenden Elemente übergehen und dadurch gesetzmässig fortschreitende Fehler der letzten Resultate der Untersuchung erzeugen.

Die Voraussetzung, dass diese drei Verzeichnisse, und ebenso das Verzeichniss für 1840, keine gesetzmässig fortschreitende Fehler besitzen, würde daher unbegründet sein. Noch weniger berechtiget die übrigen Verzeichnisse zu der Annahme derselben, weil die ihnen zum Grunde gelegten Apparate und Reductionselemente weniger vollständig untersucht worden sind; auch, im Falle die ersteren — wie die Kreise nach TROUGHTON'S Einrichtung — nicht umgelegt werden können, nicht so vollständig untersucht werden konnten. Man muss diese Voraussetzung also ver-

meiden, was, wie ich schon bemerkt habe, durch die Vergleichung von α Canis min. mit anderen Sternen geschieht, wenn man Grund hat, den gesetzmässig fortschreitenden Fehler der Declinationen der letzteren eben so gross anzunehmen, als den des ersteren. Eine Abweichung der dann noch für α Canis min. übrigbleibenden Unterschiede von dem der Zeit proportionalen Fortschreiten, entsteht nur aus den zufälligen Fehlern der Verzeichnisse und den Fehlern der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Sterne. Ich werde den Ausdruck dieser Unterschiede mittheilen. Wenn die zu einer Zeit $1820 + t$ beobachtete Declination eines Sterns durch δ , ihr Fehler durch ε , die wahre also durch $\delta - \varepsilon$ bezeichnet wird, ferner ihr in den Tab. Regiom. angegebener Werth durch d , seine erforderliche Verbesserung durch $a + bt + \theta$, wo θ ihren von der Veränderlichkeit der eigenen Bewegung herrührenden Theil bedeutet; endlich der für $1820 + t$ in der obigen Tafel enthaltene Unterschied $\delta - d$, durch u , so ist:

$$u - u_n = \theta - \theta'' - (\theta_n - \theta_n'') - \frac{t}{65} (\theta'' - \theta' - (\theta_n'' - \theta_n')) + (\varepsilon - \varepsilon_n) + \frac{t}{65} (\varepsilon' - \varepsilon_n') - \left(\frac{t}{65} + 1 \right) (\varepsilon'' - \varepsilon_n'')$$

Man legt dadurch nicht die Veränderlichkeit der Bewegung des Procyon an den Tag, sondern ihren Unterschied von der Veränderlichkeit der Bewegung des verglichenen Sterns, oder, wenn mehrere verglichen sind, von dem Mittel der ihnen zugehörigen Veränderlichkeiten. Der Ausdruck zeigt auch, wie grossen Einfluss die zufälligen, in $\varepsilon - \varepsilon_n$, $\varepsilon' - \varepsilon_n'$, $\varepsilon'' - \varepsilon_n''$ allein übrigbleibenden, Fehler auf dieses Resultat erlangen.

Ich habe von den Zahlen der Tafel für Procyon das Mittel der für α Ceti, α Orionis, β Virginis, α Serpentis, γ , α , β Aquilae, α Aquarii geltenden abgezogen, indem das Mittel der Declinationen dieser 8 Sterne bis auf wenige Minuten die Declination des ersteren ist. Die übrigbleibenden Unterschiede sind:

MÄSKELVE . . .	1770	+ 1,54
PIAZZI	1800	+ 1,99
POND I	1822	- 0,03
II	1822	+ 0,16
STRUVE	1824	- 0,15

*) Ausgeschlossen.

	1829.	1830.	1831.	1832.	1833.	1834.	1835.
α Ceti	+ 1,97	- 0,01*)	+ 2,15	+ 2,65	+ 2,68	+ 2,65	+ 2,46
α Orionis	+ 1,89	+ 1,81	+ 1,80	+ 1,94	+ 1,85	+ 1,77	+ 1,36
β Virginis	+ 2,00	+ 2,18	—	—	—	—	—
α Serpentis	+ 2,49	+ 2,72	+ 2,75	+ 2,92	+ 2,91	+ 2,76	+ 3,21
γ Aquilae	+ 1,90	+ 1,60	+ 2,59	+ 2,54	+ 2,91	+ 2,96	+ 2,31
α "	+ 2,70	+ 1,52	+ 2,52	+ 3,22	+ 3,16	+ 2,78	+ 2,84
β "	+ 3,48	+ 2,57	+ 3,91	+ 3,89	+ 3,66	+ 3,77	+ 3,36
α Aquarii	+ 1,74	+ 2,11	+ 2,32	+ 3,35	+ 2,77	+ 2,68	+ 2,96
Mittel	+ 2,27	+ 2,07	+ 2,58	+ 2,89	+ 2,79	+ 2,64	+ 2,64
α Canis minoris	+ 3,44	+ 3,37	+ 3,51	+ 3,67	+ 3,31	+ 3,21	+ 3,27
Unterschied	+ 1,17	+ 1,30	+ 0,93	+ 0,78	+ 0,52	+ 0,57	+ 0,63

Bessel's Abhandlungen. I. Bd.

$u = a + bt + \theta + \varepsilon$.
Für 1755 und 1820 verschwindet u , weil die Formel, nach welcher die in den Tab. Regiom. angegebenen Declinationen berechnet sind, sich den Bestimmungen für diese Zeiten anschliesst, wodurch man die Gleichungen:

$$0 = a - 65.b + \theta' + \varepsilon'$$

$$0 = a + \theta'' + \varepsilon''$$

erhält, in welchen θ' , ε' und θ'' , ε'' die Werthe von θ , ε für 1755 und 1820 bedeuten. Nach der durch diese Gleichungen erlangten Elimination von a und b wird:

$$u = \theta - \theta'' - \frac{t}{65} (\theta'' - \theta') + \varepsilon + \frac{t}{65} \varepsilon' - \left(\frac{t}{65} + 1 \right) \varepsilon''.$$

Gilt dieser Ausdruck für α Canis min., und gibt man ihm für einen anderen Stern, oder für das arithmetische Mittel verschiedener Sterne, die Bezeichnung

$$u_n = \theta_n - \theta_n'' - \frac{t}{65} (\theta_n'' - \theta_n') + \varepsilon_n + \frac{t}{65} \varepsilon_n' - \left(\frac{t}{65} + 1 \right) \varepsilon_n'',$$

so wird der Ausdruck des Unterschiedes des ersteren von dem letzteren:

ABOELANDER . . .	1830	+ 0,03
POND	1830	+ 0,63
ARH	1830	+ 0,47
HENDERSON . . .	1833	+ 0,89
BEUCH	1838	+ 1,59

Die aus dem Pond'schen Verzeichnisse für 1830 abgeleitete Bestimmung bedarf einer weiteren Untersuchung. Indem dieses Verzeichniss die Resultate von Beobachtungen enthält, welche von 1816 bis 1833 gemacht wurden, seine Epoche aber weit später ist als die Mitte dieses Zeitraums, so ist zu erwarten, dass eine Veränderlichkeit der Bewegung des Procyon die Reduction seiner Beobachtungen auf 1830 entstellt haben wird. Um dieser Unsicherheit auszuweichen, habe ich dem Verzeichnisse für 1830 die aus den Beobachtungen jedes Jahrs, von 1829 bis 1835, abgeleiteten Verzeichnisse vorgezogen, welche Herr POND in den Supplementen seiner Tagebücher mittheilt. Durch ihre Vergleichung mit den Tab. Regiom. finden sich folgende Unterschiede:

Das Mittel der Bestimmungen für diese 7 Jahre:

$$1832 \dots + 0',84$$

werde ich statt der aus dem Verzeichnisse für 1830 abgeleiteten annehmen.

Die Verzeichnisse von LACAILLE für 1750 und von TOBIAS MAYER für 1756 habe ich nicht mit aufgeführt, weil ihre Sicherheit zu gering erscheint, um einen werthvollen Beitrag zu einer Untersuchung, welche über kleine Grössen entscheiden soll, liefern zu können. Indessen mögen sie doch hinreichen, ein von meiner Reduction der Bradley'schen Beobachtungen unabhängiges Urtheil darüber zu gewähren, dass diese keinen viele Secunden betragenden Fehler besitzt; einen Beitrag, welcher zwar für die Erkenntniss der Art der Bewegung des Procyon keinen Werth hat, jedoch als unabhängige Bestätigung, dass ein Irrthum der Declination für 1755 nicht die Ursache der sich später zeigenden Abweichungen von der auf sie gegründeten Bestimmung der eigenen Bewegung sein kann, vielleicht nicht ganz zu vernachlässigen ist. Ich führe daher die Vergleichung auch dieser beiden Verzeichnisse hier an:

	1750.	1756.
α Ceti . . .	+ 0',72	+ 4',60
α Orionis . .	+ 4,63	- 0,97
β Virginis .	+ 3,47	- 4,98
α Serpentis .	+ 5,57	+ 4,12
γ Aquilae . .	+ 0,66	-
α " . . .	+ 5,11	+ 4,15
β " . . .	+ 4,60	-
α Aquarii . .	+ 1,31	+ 5,95
Mittel . . .	+ 3,26	+ 2,00
α Canis min.	+ 0,64	+ 0,46
Unterschied .	- 2,62	- 1,54

Die grösste Wichtigkeit für die gegenwärtige Untersuchung wird aber der, der spätesten Zeit zugehörige Beitrag haben, den die Beobachtungsreihe, welche ich mit dem Repsold'schen Meridiankreise angefangen habe, ihr liefern wird. Was sie bis jetzt vom Procyon geliefert hat, habe ich oben schon angeführt; auch von den acht hier mit diesem zu vergleichenden Sternen kann ich ähnliche Anfänge mittheilen, welche zwar sämmtlich auf wenigeren Beobachtungen beruhen, jedoch schon jetzt hinreichen werden, keine Abweichung von dem definitiven Resultate hervorzubringen, welche wenige Zehntel einer Secunde überschritte. Ich führe daher das vorläufige Resultat an:

	1844.
α Ceti . . .	+ 3',26
α Orionis . .	+ 0,60
β Virginis . .	+ 1,32
α Serpentis .	+ 1,42
γ Aquilae . .	+ 0,39
α " . . .	+ 0,78
β " . . .	+ 1,22
α Aquarii . .	+ 1,60
Mittel . . .	+ 1,19
α Canis min.	+ 3,51
Unterschied .	+ 2,62

Was ich aus jedem der Verzeichnisse abgeleitet habe, ist der Unterschied seiner Abweichung von den Tab. Reg. für Procyon, von dem arithmetischen Mittel seiner Abweichungen für die verglichenen 8 Sterne. Dieser Unterschied ist insoweit frei von dem gesetzmässig fortschreitenden Fehler des Verzeichnisses, als er ohne neue Untersuchung der diesem zum Grunde liegenden Beobachtungen gemacht werden kann. Abgesehen von den zufälligen Fehlern des Verzeichnisses, entsteht das, was davon nicht durch der Zeit proportionalen Fortgang erklärt werden kann, allein aus Fehlern der in den Tab. Reg. verfolgten Voraussetzung der Unveränderlichkeit der eigenen Bewegungen. Die folgende Zusammenstellung aller erlangten Resultate dieser Art wird also die Grundlage eines Urtheils über die Rechtmässigkeit dieser Voraussetzung sein.

FUNDAM. ASTR.	1755	0',00
MAKELVINE . .	1770	+ 1,54
PIAZZI	1800	+ 1,99
BESSLER	1820	0,00
POSD I	1822	- 0,03
" II	1822	+ 0,16
STRUVE	1824	- 0,15
ANGELANDER .	1830	+ 0,03
AIRY	1830	+ 0,47
POSD	1832	+ 0,84
HENDERSON . .	1853	+ 0,89
BURCH	1858	+ 1,59
BESSLER	1844	+ 2,62

Das Fortschreiten dieser Unterschiede zwischen der Declination des Procyon und den Declinationen der acht verglichenen Sterne ist, von 1820 an, zu offenbar, und die Genauigkeit jeder der Zahlen, unter welchen es stattfindet, ist durch den Fleiss und die Hilfsmittel, deren Ergebniss das ihr zum Grunde liegende Verzeichniss war, zu gut verbürgt, als dass seine Erklärung durch zufällige Fehler der Verzeichnisse statthaft erscheinen könnte. Indem die als unveränderlich angenommenen eigenen Bewegungen, durch deren Anwendung die in den Tab. Reg. enthaltenen Declina-

tionen erlangt worden sind, auf der Vergleichung der Verzeichnisse für 1755 und 1820 beruhen, könnten die von 1820 an allmählich anwachsenden Unterschiede nur durch fehlerhafte Bestimmung der Werthe jener Bewegungen erklärt werden, wenn es möglich wäre, die relative Declination des Procyon für 1755 mit dieser Erklärung zu vereinigen; denn dass sie für 1820 äusserst nahe richtig ist, verbürgen die um 2 und 4 Jahre späteren Verzeichnisse von POND und STRUVE hinreichend. Dass aber die Bestimmung für 1755, mit einem, von 1820 bis 1844, also in 24 Jahren 2',62, oder jährlich 0',11 betragenden Fehler der eigenen Bewegung, nicht vereinbar ist, geht aus der Grösse des Fehlers, den man ihr dann zuschreiben müsste, nämlich 7',1, hervor. Ein so grosser Fehler kommt aber bei einer Bradley'schen Declinationsbeobachtung nie vor, geschweige denn bei dem Mittel aus 50 Mal wiederholter, und noch weit weniger bei dem häufig beobachteten Declinationsunterschiede eines Sterns von 8 anderen, nahe auf demselben Parallel stehenden, auf welchen auch die Reductionselemente etc. keinen Einfluss ausüben. Verlangt man noch Sicherheit, welche von BRADLEY'S Beobachtungen ganz unabhängig ist, so können die Verzeichnisse von LACAILLE und TOB. MAYER sie geben, die zwar nicht genau genug sind, um über zwei, wohl aber um über sieben Secunden zu entscheiden.

Ich nehme also als ein unzweifelhaftes Resultat der Beobachtung an, dass die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Declinationsbewegung des Procyon, beziehungsweise zu den verglichenen 8 Sternen, unrichtig ist.

Ueber die Art der Veränderlichkeit geben die vorhandenen Beobachtungen nur eine Andeutung, nämlich die von PIAZZI für 1800; denn das Verzeichniss von MASKELYNE, für 1770, ist nicht sicher genug, um seiner Angabe erhebliches Gewicht beilegen zu dürfen. Wenn man die Angabe für 1800 als genügend betrachtet, so erkennt man darin, dass der Unterschied zwischen der Annahme der unveränderlichen Bewegung und der Wirklichkeit, zwischen 1755 und 1820 ein Maximum gehabt hat, dass Procyon durch den nördlichsten Theil seiner Bahn am Himmel gegangen ist, während er jetzt wieder darauf zugeht. Es sind indessen noch mehrere Angaben von PIAZZI über die Declinationen der Fundamentalsterne vorhanden, welche ich anführen werde, damit man hier Alles finde, was das Urtheil über die Bestimmung für 1800 leiten kann. Im Libro V. della Specola di Palermo finden sich die aus den Beobachtungen von 1791—93 abgeleiteten Declina-

tionen für 1792; ferner in dem Anhang der ersten Ausgabe des grossen Sternverzeichnisses die aus den einzelnen Jahrgängen der Beobachtungen, von ihrem Anfange 1791 bis 1802, abgeleiteten für 1800, und zwar mit der Erklärung, dass ihr (mittleres) Resultat grösseres Zutrauen verdiene als das im Cataloge selbst enthaltene, durch mangelhafte Kenntniss der eigenen Bewegungen entstellte; endlich findet sich im Libro VI. ein auf Beobachtungen in den Jahren 1803—5 beruhendes Verzeichniss für 1805. Aus diesen Quellen habe ich folgende Declinationen der 9 in Betracht kommenden Sterne gezogen:

	1792.	1800.	1805.
α Ceti . . .	+ 3° 15' 57,57	+ 3° 17' 49,13	+ 3° 19' 1,7
α Orionis . .	+ 7 21 15,39	+ 7 21 26,90	+ 7 21 31,9
β Virginis . .	+ 2 56 15,58	+ 2 58 31,54	+ 2 51 48,9
α Serpentis . .	+ 7 5 30,07	+ 7 3 53,56	+ 7 2 54,1
γ Aquilae . .	+ 10 7 9,72	+ 10 8 12,36	+ 10 8 52,9
α " . . .	+ 8 19 57,24	+ 8 21 4,87	+ 8 21 50,3
β " . . .	+ 5 54 4,17	+ 5 55 6,96	+ 5 55 47,2
α Aquarii . .	- 1 19 19,92	- 1 17 4,88	- 1 15 40,4
α Canis min.	+ 5 44 47,47	+ 5 43 39,77	+ 5 42 55,8

Ihre Unterschiede von den Tab. Reg. sind:

	1792.	1800.	1805.
α Ceti . . .	+ 6',88	+ 1',91	+ 1',75
α Orionis . .	+ 2,05	+ 2,51	+ 0,76
β Virginis . .	+ 4,81	+ 3,01	+ 1,79
α Serpentis . .	+ 3,73	+ 2,21	+ 2,01
γ Aquilae . .	+ 5,29	+ 3,36	+ 2,80
α " . . .	+ 6,09	+ 3,44	+ 4,20
β " . . .	+ 9,55	+ 5,14	+ 3,27
α Aquarii . .	+ 6,15	+ 4,06	+ 2,76
Mittel . . .	+ 5,90	+ 3,20	+ 3,42
α Canis min.	+ 4,17	+ 5,56	+ 4,90
Unterschied	- 1,73	+ 2,36	+ 2,48

Die Ursache der beträchtlichen Abweichung des Resultats für 1792 von den drei späteren scheint hauptsächlich in zu geringer Zahl der, nicht sehr grosse Uebereinstimmung gewährenden Beobachtungen gesucht werden zu müssen. In dem Anhang zur ersten Ausgabe des grossen Verzeichnisses befinden sich, unter den daselbst zusammengestellten Resultaten der einzelnen Jahre, auch die früheren oft etwas abgeändert; so dass die, auf zahlreicheren Beobachtungen beruhende, angeführte Angabe für 1800 die für 1792 einschliesst, diese also überstimmt. Der Unterschied der Abweichung der Beobachtungen des Procyon von den Tab. Reg., von den ähnlichen Abweichungen der 8 verglichenen Sterne, den ich, der neueren Ausgabe des grossen Sternverzeichnisses gemäss, vorher = + 1',99 gefunden habe, 40*

ist also, dem Anhang der älteren Ausgabe nach, aus den Beobachtungen von 1791 bis 1802 = + 2',36, und dem auf den Beobachtungen von 1803–5 beruhenden Verzeichnisse für 1805 zufolge = + 2',48. Die Vergleichung der verschiedenen Angaben PIAZZI'S ist daher nicht geeignet, Verdacht gegen die von der neueren Ausgabe seines Sternverzeichnisses gegebene Andeutung einer kurzen Periode der Bewegung des Procyon zu erregen. Doch muss die Zeit die Art der Veränderlichkeit der Bewegung erst weit vollständiger entwickeln, ehe sie berechtigten kann, die Erlangung ihrer näheren Kenntniss zu versuchen.

Rectascension des Sirius.

Die in den Fundamentis Astronomiae angegebene Rectascension des Sirius für 1755 = $98^{\circ} 35' 14,6$, oder in Zeit ausgedrückt = $6^{\text{h}} 34^{\text{m}} 20,973$, ist durch 191 unmittelbare Vergleichungen mit der Sonne bestimmt worden. Für 1815 habe ich sie durch eigene Beobachtungen, welche mit einem 4flüssigen Dollond'schen Passageninstrumente und einem 25zölligen Cary'schen Kreise gemacht wurden, = $6^{\text{h}} 36^{\text{m}} 59,561$ bestimmt*). Für 1825, durch Beobachtungen mit dem Reichenbach'schen Meridiankreise, = $6^{\text{h}} 37^{\text{m}} 26,048$ **). Die Formel, aus welcher die in den Tab. Reg. enthaltenen Rectascensionen für die Anfänge aller Jahre von 1750 bis 1850 abgeleitet sind, schliesst sich an die Bestimmungen für 1755 und 1825 an, indem sie die Voraussetzung der unveränderlichen eigenen Bewegung des Sirius verfolgt. Von der ihr gemässen Angabe der Rectascension für 1815 entfernt sich die für diese Zeit bestimmte um $-0,9465$. Auch sehr viele spätere Beobachtungen der Fundamentalsterne erzeugten keinen Verdacht gegen ihre Richtigkeit, indem die aus verschiedenen dieser Sterne abgeleiteten Correctionen der Uhrzeit nicht wahrnehmen liessen, dass einer derselben fortwährend eine grössere oder kleinere als die übrigen ergäbe. Allein gegen 1834 fing ich an, einen Fehler der in den Tab. Reg. enthaltenen Rectascension des Sirius in den Uhr correctionen zu bemerken. Die später vorgenommene Untersuchung seiner Grösse zeigte, dass nun die Rectascension für 1835 um $+0,188$ vergrössern muss, um sie mit 50, von 1833 bis 1836 gemachten Beobachtungen des Herrn Dr. BUSCH in Uebereinstimmung zu bringen. Diese Untersuchung geht von den Rectascensionen der Sterne β und α Orionis und

*) Abhandl. der Königl. Akademie der Wissensch. in Berlin für 1818–19. Mathemat. Cl. p. 19. [Abh. 86.]

**) Desselben Werkes Band für 1825 p. 23. [Abh. 89.]

α Canis min. aus, welche Sterne ich zur Vergleichung gewählt habe, weil sie unter den Fundamentalsternen dem Sirius am nächsten sind, auch auf allen Sternwarten häufig beobachtet zu werden pflegen. Die Resultate aus immer 10, in der Zeitfolge genommenen Beobachtungen sind:

10 Beobachtungen	+ 0,2036
10 "	+ 0,1434
10 "	+ 0,1685
10 "	+ 0,1857
10 "	+ 0,2408
Mittel für 1835	= + 0,188

Dieser Fehler der relativen Rectascension, welche die Tab. Reg. für Sirius, beziehungsweise auf die drei angeführten Sterne, angeben, hat sich noch beträchtlich vergrössert. Im Jahre 1843 habe ich seine Grösse durch Beobachtungen mit dem Repsold'schen Meridiankreise, sowohl an den Sternen; als auch an ihren von Quecksilber reflectirten Bildern gemacht, bestimmt, und sie durch

34 Vergleichungen mit β Orionis	= + 0,308
34 " " α	= + 0,341
38 " " α Canis min.	= + 0,324
Mittel für 1843 = + 0,324

gefunden. Um diese Bestimmung noch durch ein zweites Instrument zu prüfen, habe ich auch 50 mit dem älteren gemachte Beobachtungen des Herrn Dr. BUSCH, welche das J. 1843 darbietet, berechnet und dadurch für 1843

$$\text{für 1843} \dots + 0,318$$

gefunden. Das Mittel aus beiden Bestimmungen = + 0,321

zeigt, von 1835 bis 1843, also in 8 Jahren, eine Vergrösserung des Fehlers um mehr als ein Achtel Zeitsecunde.

Um auch die Bestimmung für 1815 mit den übrigen vergleichbar zu machen, muss man den Unterschied zwischen ihrer Abweichung von den Tab. Reg. und dem Mittel der Abweichungen der drei verglichenen Sterne, als ihr Resultat annehmen. Die Abweichung der Bestimmung für 1815 von den Tab. Reg. ist:

β Orionis - 0,008
α " " - 0,044
α Canis min. + 0,020
Mittel - 0,011
α Canis maj. - 0,047
Unterschied. - 0,036

Die durch meine Untersuchungen und die hiesigen Beobachtungen erlangten, auf β und α Orionis und α Ca-

nis min. bezogenen Rectascensionen des Sirius entfernen sich also von den Tabulis Regionis:

1755	0,000
1815	- 0,036
1825	0,000
1835	+ 0,188
1843	+ 0,321

Wenn man die Sicherheit berücksichtigt, welche alle diese Bestimmungen, durch häufige Wiederholung der Beobachtungen, verbunden mit vollständiger Berichtigung der Instrumente, erlangt haben, so kann man nicht zweifeln, dass eine Unrichtigkeit der Voraussetz-

ung der Unveränderlichkeit der Bewegungen, wenigstens grösstentheils, die Ursache ihrer Abweichungen von den auf diese gegründeten Tabulis Regionis ist. Indessen fordert die Begründung der Behauptung, dass dieser Voraussetzung von den Beobachtungen widersprochen werde, die Nachweisung, dass alle ausser den angeführten vorhandenen, den von diesen erhobenen Widerspruch nicht entkräften, vielmehr alle, insofern ihr Zeugniß unzweideutig ist, ihn verstärken. Ich werde zuerst die Unterschiede von den Tab. Reg. mittheilen, welche 10 Verzeichnisse der Rectascensionen der Fundamentalsterne zeigen:

	LACAILLE. 1750.	MARKELYNE. 1770.	MARKELYNE. 1790.	PIAZZI. 1800.	MARKELYNE. 1805.	FOND. 1819.	STRUYE. 1825.	ANGELANDER. 1828.	FOND. 1830.	AIRY. 1830.
γ Pegasi	+ 0,033	+ 0,079	- 0,193	- 0,054	- 0,148	+ 0,178	+ 0,047	- 0,015	+ 0,085	-
α Arietis	- 0,230	- 0,063	- 0,373	- 0,168	- 0,148	+ 0,183	+ 0,087	+ 0,028	+ 0,086	+ 0,076
α Ceti	- 0,179	+ 0,016	- 0,270	- 0,076	- 0,228	+ 0,126	+ 0,100	+ 0,026	+ 0,060	+ 0,070
α Tauri	- 0,170	- 0,091	- 0,209	- 0,194	- 0,111	+ 0,164	+ 0,048	+ 0,012	+ 0,095	+ 0,075
α Aurigae	- 0,455	- 0,605	- 0,128	- 0,172	- 0,131	+ 0,128	- 0,023	- 0,033	+ 0,015	+ 0,055
β Orionis	+ 0,604	- 0,187	- 0,239	- 0,054	- 0,139	+ 0,129	+ 0,140	+ 0,009	+ 0,086	+ 0,066
β Tauri	- 0,683	+ 0,111	- 0,083	- 0,053	- 0,062	+ 0,204	+ 0,051	+ 0,013	+ 0,082	+ 0,062
α Orionis	+ 0,108	- 0,058	- 0,216	- 0,007	- 0,123	+ 0,178	+ 0,056	+ 0,017	+ 0,090	+ 0,090
α Canis majoris	+ 0,379	+ 0,120	- 0,068	0,000	- 0,097	+ 0,100	+ 0,082	- 0,003	+ 0,032	+ 0,102
α Geminorum	- 0,222	- 0,307	- 0,008	- 0,062	+ 0,056	+ 0,434*	+ 0,107	+ 0,111	+ 0,429*	+ 0,365*
α Canis minoris	- 0,212	- 0,022	- 0,271	- 0,037	- 0,124	+ 0,243	+ 0,069	- 0,027	+ 0,174	+ 0,094
β Geminorum	- 0,376	- 0,202	- 0,283	- 0,173	- 0,139	+ 0,226	+ 0,070	+ 0,044	+ 0,179	+ 0,129
α Hydrae	+ 0,598	- 0,905	- 0,366	- 0,118	- 0,133	+ 0,218	+ 0,121	+ 0,044	+ 0,179	+ 0,025
α Leonis	- 0,381	- 0,236	- 0,337	- 0,170	- 0,173	+ 0,196	+ 0,071	+ 0,012	+ 0,135	+ 0,025
β "	- 0,286	- 0,053	- 0,326	- 0,086	- 0,098	+ 0,207	+ 0,092	+ 0,042	+ 0,131	+ 0,071
β Virginis	- 0,169	- 0,252	- 0,225	- 0,111	- 0,234	+ 0,265	+ 0,089	+ 0,022	+ 0,305	+ 0,085
α "	+ 0,136	- 0,203	- 0,340	- 0,086	- 0,123	+ 0,086	+ 0,035	- 0,026	+ 0,011	+ 0,031
α Bootis	- 0,087	- 0,091	- 0,397	- 0,166	- 0,097	+ 0,182	+ 0,055	+ 0,008	+ 0,057	+ 0,057
1 α Librae	-	-	- 0,212	- 0,066	- 0,028	+ 0,171	+ 0,027	- 0,052	+ 0,020	-
2 α "	+ 0,014	- 0,014	- 0,184	+ 0,030	- 0,050	+ 0,238	+ 0,050	- 0,008	+ 0,110	+ 0,050
α Coronae	- 0,178	- 0,137	- 0,203	- 0,240	- 0,120	+ 0,199	+ 0,092	+ 0,036	+ 0,085	+ 0,085
α Serpentis	+ 0,523	+ 0,002	- 0,224	- 0,056	- 0,125	+ 0,194	+ 0,096	- 0,002	+ 0,059	+ 0,069
α Scorpii	+ 0,338	+ 0,026	- 0,216	+ 0,122	- 0,206	+ 0,037	+ 0,073	- 0,055	- 0,067	+ 0,033
α Herculis	- 0,494	-	- 0,237	- 0,225	- 0,111	+ 0,178	+ 0,089	+ 0,006	+ 0,040	+ 0,010
α Ophiuchi	- 0,427	- 0,190	- 0,351	- 0,161	- 0,163	+ 0,228	+ 0,138	+ 0,073	+ 0,136	+ 0,106
α Lyrae	- 0,350	- 0,178	- 0,183	- 0,127	- 0,065	+ 0,203	+ 0,009	+ 0,006	+ 0,089	+ 0,039
γ Aquilae	- 0,382	+ 0,072	- 0,314	- 0,035	- 0,071	+ 0,175	+ 0,076	+ 0,007	+ 0,054	-
α "	+ 0,175	- 0,032	- 0,287	- 0,050	- 0,162	+ 0,154	+ 0,053	- 0,005	+ 0,080	+ 0,030
β "	+ 0,296	+ 0,074	- 0,182	- 0,067	- 0,120	+ 0,142	+ 0,036	- 0,034	+ 0,055	- 0,055
1 α Capricorni	- 0,318	- 0,172	- 0,297	- 0,082	- 0,207	+ 0,073	+ 0,090	- 0,007	+ 0,031	+ 0,071
2 α "	- 0,156	- 0,114	- 0,290	- 0,021	- 0,148	+ 0,040	+ 0,067	- 0,058	+ 0,006	+ 0,084
α Cygni	- 0,666	- 0,169	- 0,321	- 0,246	- 0,219	+ 0,174	- 0,026	- 0,019	+ 0,086	+ 0,016
α Aquarii	- 0,059	- 0,130	- 0,543	- 0,074	- 0,208	+ 0,118	+ 0,054	- 0,026	+ 0,091	+ 0,041
α Piscis austr.	+ 0,126	- 0,273	- 0,472	- 0,099	- 0,285	- 0,155	-	-	- 0,180	- 0,210
α Pegasi	- 0,366	+ 0,012	- 0,314	- 0,100	- 0,160	+ 0,173	+ 0,037	+ 0,007	+ 0,100	+ 0,020
α Andromedae	- 0,465	- 0,087	- 0,233	- 0,187	- 0,146	+ 0,231	+ 0,021	+ 0,041	+ 0,114	+ 0,104

Ueber die verglichenen Cataloge ist Folgendes zu bemerken:

1. LACAILLE 1750. Herr BAILY hat in seinem neuen

Abdrucke dieses Catalogs (Mem. of the R. Astr. Soc. Vol. V.) eine Verwechslung der Rectascensionen der Sterne 1 α und 2 α Capricorni berichtigt,

welches ich in der Vergleichung benutzt habe. So einsichtsvoll LACAILLE auch seinen Apparat anwandte, so war diesem doch der Bradley'sche zu sehr überlegen, um, von BRADLEY angewandt, nicht weit genauere Bestimmungen der Rectascensionen hervorzubringen. Der sehr grosse Zeitaufwand, welchen die Bestimmung der Culminationen durch correspondirende Zenithdistanzen, vergleichungsweise mit der Anwendung des Passageninstrumentes, fordert, war die Ursache, dass LACAILLE's bewundernswürdiger Fleiss nicht durch so genue Resultate belohnt wurde, dass sie, neben den etwa gleichzeitig auf der Greenwich Sternwarte erlangten, noch erheblichen Werth hätten. Man muss die häufige nahe Uebereinstimmung des Catalogs für 1750 mit dem für 1755 zu LACAILLE's Ehre geltend machen, ohne den — auch vorkommenden — grösseren Abweichungen einen Einfluss einzuräumen, welcher des künftigen Beobachters Ehre nachtheilig berührte.

2. MASKELYNE 1770. Tables for computing the apparent Places of the fixed Stars. London 1774.
3. MASKELYNE 1790. Ich habe diese Rectascensionen aus ZACH's Tabulae motuum Solis, Gothae 1792, genommen, da ich WOLLASTON'S Werk, wo sie, so viel ich weiss, zuerst gedruckt sind, nicht besitze.
4. PIAZZI 1800. Stellarum inerrantium positiones mediae. Panormi 1814.
5. MASKELYNE 1805. Greenwich Observations 1807.
6. POND 1819. Greenwich Observations 1820. In diesem Verzeichnisse und in dem späteren von POND, sowie in dem von AIRY, ist die A. R. α Gemin. auf den folgenden Stern des Doppelsterns bezogen, während die Angaben der Tab. Region. für die Mitte beider Sterne gelten.
7. STRUYE 1825. Observations Dorpat. VI.
8. ARGELANDER 1828. Ich habe nicht die Rectascensionen, so wie sie in dem Verzeichnisse von 560 Sternen für 1830 angegeben sind, verglichen, sondern die Unterschiede von den Tab. Region. angegeben, die Herr Prof. ARGELANDER, für 1828, unmittelbar aus seinen Beobachtungen gefolgert und mir handschriftlich mitgetheilt hat. Er hat zuerst die Angaben der Tab. Reg. zur Bestimmung der Uhr correction angewandt; für α Gemin. allein eine 0;12 grössere. Die daraus hervorgegangene mittlere Uhr correction für jeden Tag hat er dann zur Reduction aller Beobachtungen an diesem Tage, auch derer der Fundamentalsterne,

angewandt. Dieses Verfahren, welches der Aufindung relativer Fehler zwischen entgegengesetzten Theilen des Himmels weniger günstig ist, ist desto vortheilhafter für ihre Bestimmung zwischen Sternen, deren Rectascensionsunterschiede klein sind. Obgleich die Vergleichung des, nur ganze Hundertel der Secunden berücksichtigenden Verzeichnisses für 1830, von der hier mitgetheilten nie mehr als 0;005 abweicht, so habe ich doch vorgezogen, die ursprünglich erlangten Bestimmungen des umsichtigen und sorgfältigen Beobachters anzuwenden.

9. POND 1830. Catalogue of 1112 Stars. London 1833.

10. AIRY 1830. Memoirs of the R. Astr. Soc. Vol. XI.

Zieht man wieder, wie vorher, das Mittel der in jeder Spalte der Tafel zu β , α Orionis und α Canis min. gehörigen Zahlen, von der zu α Canis maj. gehörigen ab, so erhält man, vereinigt mit den schon früher angeführten, folgende Abweichungen der relativen Rectascension des Sirius von den Tab. Region.:

LACAILLE . . .	1750	+ 0;212
FUDD. ASTR. . .	1755	0,000
MASKELYNE . .	1770	+ 0,209
"	1790	+ 0,174
PIAZZI	1800	+ 0,033
MASKELYNE . .	1805	+ 0,032
BESEEL	1815	- 0,036
POND	1819	- 0,083
BESEEL	1825	0,000
STRUYE	1825	- 0,006
ARGELANDER . .	1828	- 0,003
POND	1830	- 0,085
AIRY	1830	+ 0,049
HUCH	1835	+ 0,188
BESEEL	1843	+ 0,321

Ausser von der Lacaille'schen Bestimmung für 1750 kann noch von einigen anderen der hier zusammengestellten bezweifelt werden, ob ihre Sicherheit hinreichend ist, ihre Aufnahme unter die Grundlagen einer Untersuchung zu rechtfertigen, in welcher ein Zehntel einer Zeitsacunde entscheidend sein kann. Dieses bezieht sich zunächst auf die 3 Bestimmungen von MASKELYNE, von dessen Instrumente und seiner Anwendungsart wir Einiges wissen, was Verdacht gegen sie erregen kann. Aber ein sich unbestimmt aussprechender Zweifel ist nicht hinreichend, die gänzliche Weglassung von Beobachtungen zu rechtfertigen, die durch die lange Zeit, in welcher sie die einzig vorhandenen sind, nicht minder in dem gegenwärtigen Falle, als für die Kenntniss vieler anderen Bewegungen, grosse Wichtigkeit erlangen.

Ich habe daher eine nähere Kenntniß des Apparats gesucht, und darauf die hier erforderlichen relativen Rectascensionen des Sirius aus den Beobachtungen selbst abgeleitet. Wenn auch die Darstellung der von der ersten Absicht veranlaßten Schritte von der Bewegung des Sirius weiter entfernen wird, so halte ich sie doch sowohl in Beziehung auf diese für nöthig, als auch, als ersten Versuch die Beschaffenheit der Maskelyne'schen Beobachtungen der Culminationszeiten aufzuklären, des Interesses der Astronomen für würdig. Ich werde daher nicht unterdrücken, was diese Untersuchung ergeben hat.

Zuerst muß ich an einige Aenderungen erinnern, welche der Zustand des Bradley'schen Mittagsfernrohrs nach und nach erfahren hat. Am 11. Juli 1772 liess MASKELYNE das frühere einfache Objectivglas durch ein achromatisches ersetzen, welches vermuthlich schwerer ist als jenes, und, indem es den Einfluss der Schwere auf das Instrument veränderte, nicht verstatet, frühere und spätere Beobachtungen als mit einem Instrumente gemacht zu betrachten. — Am 4. Sept. 1803 wurden die stark abgeriebenen Zapfen der Axe von TROUGHTON abgeschliffen; aber, da dieses nicht die Sicherheit ihrer kreisylindrischen Figur verbürgen konnte, schon am 12. des folgenden Monats auf die Drehbank gebracht und dadurch zu ihrer rechten Form zurückgeführt. Welchen Einfluss die fehlerhafte Figur der Zapfen auf die Anwendungen des Instruments geäußert hat, und wann derselbe anfängt merklich zu werden, davon kann nur so viel bekannt werden, als etwa eine Vergleichung vor der Berichtigung der Zapfen gemachter Beobachtungen mit späteren zu verrathen vermag. Denn MASKELYNE hat nie etwas gethan, was die Voraussetzung, dass die in horizontaler Lage des Fernrohrs berichtigte Absehsenlinie bei seiner Drehung einen grössten Kreis um die Pole der Axe beschreibe, einer Prüfung hätte unterwerfen können. Alle seine Beobachtungen sind in gleicher Lage der Axe gemacht, und diese war nur in der entgegengesetzten, während die Richtigkeit der Collimationslinie untersucht wurde.

MASKELYNE'S Nachfolger, POND, liess es eine seiner ersten Sorgen sein, das Mittagsfernrohr, in beiden Lagen seiner Axe, zur Beobachtung der Rectascensionen einiger Circumpolarsterne in ihren beiden Culminationen anzuwenden. Die Absicht, die er verfolgte, war, die Zeiten der beiden Durchgänge dieser Sterne durch die Curven zu bestimmen, welche die Absehsenlinie des Instruments in beiden Lagen der Axe beschreibt, wenn seine Collimation durch ein horizontales Object, und die Horizontalität der Axe durch die Wasserwaage be-

richtet sind, und seine Absehsenlinie auf ein festes Zeichen (das südliche Meridianzeichen) zugeht. Die in dem Bande der Beobachtungen für 1811 — 12 mitgetheilten Resultate dieser Untersuchung zeigen, dass die von der so berichtigten Absehsenlinie beschriebene Curve kein grösster Kreis, also noch viel weniger der auf der Axe senkrechte Verticalkreis ist. Das erstere wird durch den zufälligen Umstand offenbar, dass die in der ersten Lage der Axe beschriebene Curve, dem Zeugnisse der Beobachtungen des Polarsterns zufolge, fast genau durch den Pol geht, dennoch aber die Parallellkreise, welche von dem Pole entferntere Sterne beschreiben, nicht in Hälften theilt. Die in der anderen Lage der Axe beschriebene Curve entfernt sich 3',6 östlich von dem Pole. Offenbar ist sie der in der ersten Lage beschriebenen vollkommen gleich, nur in Beziehung auf den Verticalkreis des Zeichens entgegengesetzt liegend, während die eine sich für südliche Zenithdistanzen ebenso gegen ihn verhält, wie die andere für nördliche; so dass auch die der ersten Lage entsprechende Curve, in der südlichen, dem Elemente der Polhöhe gleichen Zenithdistanz = $38^{\circ} 31'$, oder der nördlichen Declination = $12^{\circ} 57'$, sich 3',6, und zwar westlich, von dem Verticalkreise entfernen muss.

Hieraus geht allerdings hervor, dass das Instrument weder die Culminationszeiten, noch ihre Unterschiede unmittelbar richtig angibt. Aber dennoch halte ich eine andere Form der Untersuchung der Beobachtungen für angemessener. Das Interesse, die Culminationszeiten selbst kennen zu lernen, kann als ein untergeordnetes betrachtet werden; wesentlichler ist es, unmittelbar die Fehler an den Tag zu legen, welche die Voraussetzung der Bewegung der Absehsenlinie in einem grössten Kreise, unbekümmert um die Horizontalität der Axe und die Richtung nach dem Meridianzeichen, in den Unterschieden der Culminationszeiten übriglässt, wenn die Absehsenlinie durch den Pol gelegt wird; auch wird die Entfernung der von der Absehsenlinie beschriebenen Curve von dem Pole durch die Beobachtungen des Polarsterns sicherer bekannt, als ihre Lage gegen den Horizont durch die Voraussetzungen der stets stattfindenden Horizontalität der Axe und der Richtung nach dem Zeichen. Je nachdem diese Fehler, durch eine einfache Annahme über den Einfluss der Schwere auf das Instrument, weggeschafft werden können oder nicht, wird dann entgegengesetzt Mittel, aus den vom 11. Juli 1772 an gemachten Beobachtungen, trotz dieses Einflusses, richtige Resultate zu ziehen, aus der Untersuchung hervorgehen; oder

sie wird zu der Ueberzeugung führen, dass eine Unsicherheit vorhanden ist, welche nicht mehr beseitigt werden kann.

Ich habe also zuerst die Pond'schen Beobachtungen der Circumpolarsterne, in der Voraussetzung, dass die Absehnlinie einen grössten Kreis beschrieben habe, auf den Anfang von 1812 reducirt. Die jedesmalige Entfernung derselben vom Pole habe ich durch die Beobachtungen des Polarsterns bestimmt, also auch Beobachtungen der übrigen Sterne nur berücksichtigt, wenn nahe gleichzeitige des Polarsterns vorhanden sind. Die mit ihnen verglichenen Rectascensionen der Fundamentalsterne sind aus den Tab. Regiom. genommen. Auf diese Art habe ich folgende Resultate erhalten:

1. Lage der Axe

zwischen Octbr. 14. 1811 und Jan. 26. 1812.

	Oberer Culmination.	Decl.	Untere Culmination.
β Ursae min.	14 ^h 51 ^m 22 ^s .537	11 74° 55'	14 ^h 51 ^m 22 ^s .432 11
δ Draconis . .	19 12 28,225	6 67 30	19 12 28,194 10
ζ " . .	17 8 15,710	4 65 57	17 8 15,455 10
β " . .	17 26 11,223	6 52 27	17 26 10,996 8
γ " . .	17 52 14,413	10 51 31	17 52 14,312 10
η Ursae maj.	13 40 7,205	10 50 15	13 40 6,788 11
α Cygni . .	20 35 1,421	29 44 37	20 35 1,135 6

2. Lage der Axe

zwischen März 20. 1812 und Juni 13. 1812.

α Ursae maj.	10 52 0,914	11 62 46	10 52 0,925 4
α Cephei . .	21 14 4,456	8 61 48	21 14 4,705 11
α Persei . .	3 10 57,220	7 49 11	3 10 57,425 6
α Cygni . .	20 35 1,272	9 44 37	20 35 1,426 7

Diese Resultate sind nicht unwesentlich von denen verschieden, welche ich, den Rechnungen des Herrn POND zufolge, zu finden erwartete; wovon der Grund, wenn nicht in Unvollkommenheiten der Rechnung, nur in Abweichungen von der, der früheren zum Grunde liegenden Voraussetzung der stets vorhandenen Horizontalität der Axe und der Richtung der Absehnlinie nach dem Zeichen, gesucht werden kann. Dieselben Sterne, mit Ausnahme von δ und ζ Draconis, sind von mir für 1820 bestimmt*), von ARGELANDER, mit einziger Ausnahme des letzteren, für 1830**). Beide Bestimmungen, durch Vergleichung mit den Fundamentis Astr. auf 1812 reducirt, ergeben:

*) Beob. auf der Königsberger Sternwarte. VI. Bth.

**) DLX Stellarum fixarum Positiones mediae.

AR. in Zeit für 1812.

	HESSSEL.	ARGELANDER.
β Ursae min.	14 ^h 51 ^m 22 ^s .977	14 ^h 51 ^m 22 ^s .920
δ Draconis .	—	19 12 28,771
β " . .	17 26 11,430	17 26 11,439
γ " . .	17 52 14,627	17 52 14,607
η Ursae maj.	13 40 7,160	13 40 7,126
α Cygni . .	20 35 1,554	20 35 1,544
α Ursae maj.	10 52 1,239	10 52 1,269
α Cephei . .	21 14 5,002	21 14 4,983
α Persei . .	3 10 57,659	3 10 57,627

Die nahe Uebereinstimmung beider Bestimmungen und der Anspruch auf Sicherheit, welchen jede von ihnen macht, lassen erwarten, dass ihr Mittel nur sehr wenig unrichtig sein wird; weshalb ich kein Bedenken gehabt habe, es anzuwenden, um dadurch die Fehler kennen zu lernen, welche die auf die Voraussetzung der Bewegung der Absehnlinie des Maskelyne'schen Mittagsferuohrs im grössten Kreise gegründete Berechnung der Beobachtungen, in jeder der beiden Culminationen übrig lässt. Diese sind demnach:

1. Lage der Axe.

	Ob. Culm.	Unt. Culm.
β Ursae min.	-0,412	-0,517
δ Draconis .	-0,546	-0,577
β " . .	-0,212	-0,439
γ " . .	-0,304	-0,305
η Ursae maj.	+0,062	-0,355
α Cygni . .	-0,128	-0,414

2. Lage der Axe.

α Ursae maj.	-0,340	-0,329
α Cephei . .	-0,537	-0,288
α Persei . .	-0,423	-0,218
α Cygni . .	-0,277	-0,123

Der Zusammenhang zwischen Abweichungen von der verfolgten Voraussetzung und den ihr gemäss reducirt Rectascensionen der Sterne wird aus folgender Entwicklung hervorgehen. Wenn die Entfernung der Absehnlinie von dem Pole der Axe, welcher in ihrer ersten Lage der östliche ist, für die Richtung nach der (südlich positiv, nördlich negativ zu nehmenden) Zenithdistanz z , durch $90^\circ - c - [z]$ bezeichnet wird, also für den Pol durch $90^\circ - c - [\varphi - 90^\circ]$, so wird ihre Entfernung von dem vorausgesetzten grössten Kreise, $c + [\varphi - 90^\circ]$, als Entfernung des letzteren vom Pole angesehen. Indem die Beobachtungen des Polarsterns sie verrathen, veranlasst sie also die Hinzufügung von $(c + [\varphi - 90^\circ]) \operatorname{tg} \delta$ zu der Durchgangszeit eines

Sterns, dessen Declination = δ ist. Statt derselben sollte aber $(c + [x]) \sec \delta$ hinzugefügt werden. Die der Voraussetzung gemäss gemachte Reduction einer Beobachtung des Sterns auf den Meridian fordert daher die Verbesserung:

$$(c + [x]) \sec \delta - (c + [\varphi - 90^\circ]) \operatorname{tg} \delta.$$

Indessen zeigt die Absehnslinie in beiden Lagen der Axe nach dem Zeichen, woraus

$$c + [90^\circ] = -c - [-90^\circ],$$

oder $c = -\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])$ hervorgeht und wodurch der Ausdruck der Verbesserung

$$-\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])(\sec \delta - \operatorname{tg} \delta) + [x] \sec \delta - [\varphi - 90^\circ] \operatorname{tg} \delta \\ - \frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])(1 - \sec \delta + \operatorname{tg} \delta)$$

ist der vollständige Ausdruck der Verbesserung, welche den, der Voraussetzung gemäss, aus den Beobachtungen berechneten Rectascensionen noch hinzuzusetzen ist. Er gilt für obere und für untere Culminationen, wenn man

wird. Diese Verbesserung fordern alle, der Voraussetzung gemäss reducirten Beobachtungen, also auch die der Fundamentalsterne, durch deren Vergleichung die Rectascension eines anderen Sterns aus seinen Beobachtungen abgeleitet worden ist. Nimmt man nur Fundamentalsterne zur Vergleichung, welche dem Aequator nahe sind, so kann man, ohne wesentlichen Fehler, die ihnen zugehörige Declination = 0, und damit die Verbesserung für sie

$$-\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ]) + [\varphi]$$

annehmen. Ihr Unterschied von der Verbesserung für den Stern, dessen Rectascension durch die Beobachtungen bestimmt werden soll, nämlich:

$$[\varphi] + [x] \sec \delta - [\varphi - 90^\circ] \operatorname{tg} \delta$$

für die letzteren die Declination über den Pol hinaus zählt, oder $180^\circ - \delta$ statt δ schreibt. Indem x für jene = $\varphi - \delta$, für diese = $\varphi + \delta - 180^\circ$ ist, wird es also:

1. Lage der Axe.

obere Culm. . . . $\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])(1 - \sec \delta + \operatorname{tg} \delta) - [\varphi] + [\varphi - \delta] \sec \delta - [\varphi - 90^\circ] \operatorname{tg} \delta$

untere Culm. . . . $\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])(1 + \sec \delta - \operatorname{tg} \delta) - [\varphi] - [\varphi + \delta - 180^\circ] \sec \delta + [\varphi - 90^\circ] \operatorname{tg} \delta$

In der 2. Lage der Axe werden $[-\varphi]$, $[\delta - \varphi]$, $[90^\circ - \varphi]$, $[180^\circ - \varphi - \delta]$ statt $[\varphi]$, $[\varphi - \delta]$, $[\varphi - 90^\circ]$, $[\varphi + \delta - 180^\circ]$ geschrieben und die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt, woraus folgt:

2. Lage der Axe.

obere Culm. . . . $-\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])(1 - \sec \delta + \operatorname{tg} \delta) + [-\varphi] - [\delta - \varphi] \sec \delta + [90^\circ - \varphi] \operatorname{tg} \delta$

untere Culm. . . . $-\frac{1}{2}([90^\circ] + [-90^\circ])(1 + \sec \delta - \operatorname{tg} \delta) + [-\varphi] + [180^\circ - \varphi - \delta] \sec \delta - [90^\circ - \varphi] \operatorname{tg} \delta$

Welchem Gesetze auch die durch $[x]$ bezeichnete Grösse folgen mag, so kann es immer der Form

$$a \sin(x + A) + b \sin(2x + B) + \text{u. s. w.}$$

entsprechend angenommen werden. Substituirt man diese in den eben gegebenen 4 Ausdrücken, so verschwindet ihr von der einfachen Zenithdistanz abhängiges Glied, und muss verschwinden, weil es nicht die Natur der, der Voraussetzung gemäss von der Absehnslinie beschriebenen Curve, sondern nur ihre Lage ändern kann. Durch die Vergleichung der aus der Substitution der folgenden Glieder hervorgehenden Ausdrücke, mit ihren durch die Beobachtungen gegebenen Werthen, können zwar so viele der unbekanntenen Grössen

$$b \sin B = \beta, \quad b \cos B = \beta'$$

$$c \sin C = \gamma, \quad c \cos C = \gamma'$$

u. s. w.

bestimmt werden, als erforderlich sind den Beobachtungen hinreichend nahe zu genügen; aber wenn dieses nicht durch sehr wenige derselben geleistet wird, so wird der Einfluss der Unvollkommenheiten der Beobachtungen auf ihre Werthe zu gross, um diese als

sicher bestimmt ansehen zu dürfen. Ich habe durch die Verfolgung dieses Weges gefunden, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen der gemachten Voraussetzung und den Beobachtungen, welche 2,671 ist, durch die Bestimmung des von $2x$ abhängigen Gliedes von $[x]$, nämlich $\beta = + 0',965$, $\beta' = - 0',222$, nur bis auf 1,579 verkleinert werden kann, und dass man durch das von $3x$ abhängige nur noch eine Verkleinerung von 0,069 gewinnt; woraus hervorgeht, dass die Convergenz des Ausdrucks von $[x]$ zu gering ist, um ihn durch die vorhandene Beobachtungsreihe gehörig kennen lernen zu können. Diese hat daher zwar wohl verrathen, dass die Absehnslinie des Maskelyne'schen Mittagsfernrohrs sich nicht im grössten Kreise bewegte, aber die nähere Untersuchung ihrer Bewegung ist fruchtlos geblieben.

Nichtsdestoweniger habe ich nicht für unnütz gehalten, die Beobachtungen des Sirius in der Voraussetzung neu zu berechnen, dass die Absehnslinie einen grössten Kreis beschrieben habe. Jedenfalls musste daraus hervorgehen, inwiefern die in den Verzeichnissen für 1770, 1790 und 1805 angegebenen Rectascensionen

den Beobachtungen gemäss sind; auch konnte, zwar nicht mit genügendem, doch mit einigem Grunde angenommen werden, dass die Aenderung des Fehlers der Voraussetzung, zwischen dem Parallel des Sirius und den Parallelen der drei, mit ihm zu vergleichenden Sterne, nicht sehr gross sein werde; endlich hatten die vor dem 11. Juli 1772 gemachten Beobachtungen Anspruch an eine neue Berechnung, weil sie als eine Fortsetzung der Bradley'schen angesehen werden können, indem das Instrument bis dahin in unverändertem Zustande war. — MASKELYNE'S Beobachtungsmethode beruhte auf der Voraussetzung, dass das Instrument den Meridian beschreibe, wenn seine Collimation durch Umlegung berichtigt, die Axe horizontal, die Absehsenlinie auf das Meridianzeichen gerichtet war. Die Unveränderlichkeit der Collimation erhält von allen drei Beobachtern, die das Instrument angewandt haben — BRADLEY, MASKELYNE, POND — das günstigste Zeugnis; die Festigkeit seiner Aufstellung war wenigstens nicht kleiner, als man sie irgendwo später hat hervorbringen können. Indessen war sie damit nicht von Aenderung von 2–3" frei, welche die Wasserwage oder das Meridianzeichen verriethen, und welche, wenn sie bemerkt wurden, MASKELYNE stillschweigend verbesserte, ausser wenn sie zu ungewöhnlicher Grösse gelangten, was nur selten vorkam^{*)}. Der Absicht gemäss, das Instrument durch die Wasserwage und das Meridianzeichen im berichtigten Zustande zu erhalten, beobachtete MASKELYNE den Polarstern nur ausnahmsweise; wovon die Folge ist, dass nur ein kleiner Theil seiner Beobachtungen unabhängig von den Annahmen der völligen Berichtigung des Instruments und der fehlerfreien Stellung des Zeichens reducirt werden kann. Da aber, in einer Untersuchung von der Art der gegenwärtigen, eine Unsicherheit von der Grösse derer, die diese Annahme, den vorhandenen Beobachtungen des Polarsterns zufolge, oft wirklich übriglassen, nicht als unerheblich anzusehen ist, so habe ich nur diejenigen Beobachtungen des Sirius berechnen zu dürfen geglaubt, welche ich, durch Verbindung mit nahe gleichzeitigen Polarsternbeobachtungen, von den Annahmen befreien konnte.

Vor der Aenderung des Instruments durch das achromatische Objectiv habe ich 24 Beobachtungen von dieser Beschaffenheit gefunden; von da an bis zum Abschleifen der Zapfen der Axe 149; von der sichereren Berichtigung derselben auf der Drehbank bis zum Schlusse 29. Diese 202 Beobachtungen haben, ver-

glichen mit β , α Orionis, α Canis min., folgende Unterschiede der Rectascension des Sirius von den Tabb. Regiom. ergeben:

von 1765 Mai 18 bis 1765 Juli 31	— 0,071	12 Beob.
" 1765 Aug. 10 " 1771 Mai 24	— 0,687	12 "
" 1773 Mai 21 " 1777 Febr. 17	— 0,979	10 "
" 1777 Febr. 19 " 1777 März 20	— 0,637	10 "
" 1777 März 21 " 1781 Mai 29	— 0,014	10 "
" 1782 Jan. 25 " 1782 März 23	+ 0,043	10 "
" 1782 April 5 " 1782 Juni 25	+ 0,092	10 "
" 1782 Juni 26 " 1782 Oct. 24	+ 0,166	10 "
" 1782 Nov. 12 " 1783 Mai 1	+ 0,089	10 "
" 1783 Mai 4 " 1783 Dec. 3	+ 0,106	10 "
" 1784 Mai 3 " 1785 Juli 2	+ 0,115	10 "
" 1785 Juli 4 " 1787 Mai 5	+ 0,224	10 "
" 1787 Mai 9 " 1787 Aug. 22	+ 0,179	10 "
" 1787 Aug. 25 " 1793 Sept. 24	+ 0,296	10 "
" 1794 Juni 18 " 1795 Aug. 17	+ 0,383	10 "
" 1795 Oct. 30 " 1802 Sept. 17	+ 0,258	10 "
" 1803 Febr. 18 " 1803 Aug. 19	+ 0,194	9 "
" 1804 März 27 " 1805 März 25	+ 0,012	10 "
" 1805 März 26 " 1806 Mai 18	+ 0,010	10 "
" 1806 Mai 20 " 1809 Mai 14	+ 0,028	9 "

Diese Rechnungen zeigen ein fortgehendes beträchtliches Anwachsen der relativen Rectascension des Sirius, vergleichungsweise mit den Tabulis Regiom., während des grössten Theils der 30jährigen Periode 1773 bis 1803. Wenn die Zapfen der Axe des Instruments sich zu der letzten Zeit nicht verdorben gezeigt hätten, so würde dieser Gang der Unterschiede ein höchst wichtiger Beitrag zu der Erkenntnis der Art der relativen Bewegung des Sirius sein, denn die übrigens vorhandene Unsicherheit der Anwendung des Instruments kann keinen Einfluss darauf geüsst haben, indem sie nur alle Beobachtungen gleichviel entstellt haben kann. Aber die alleinige Erklärung dieser Beobachtungen durch die relative Bewegung des Sirius wird nicht allein unsicher, sondern sogar unwahrscheinlich, indem die Verbesserung der abgenutzten Zapfen den Unterschied plötzlich auf eine sehr kleine Grösse zurückbringt und dadurch den Antheil des früheren Fehlers an dem Unterschiede ausser Zweifel stellt. Ich kann bei dieser Gelegenheit die Bemerkung nicht unterdrücken, dass MASKELYNE Unrecht gehabt hat, dem Beispiele seines umsichtigen Vorgängers nicht zu folgen, und nicht, wie dieser, durch abwechselnde Anwendungen des Instruments in entgegengesetzten Lagen der Axe, die Einflüsse beständigwirkender Fehler auf entgegengesetzte Seiten zu bringen. Aufmerksamkeit auf jedes einzelne Moment einer Beobachtung, welche unnöthige Vergrößerung ihres zufälligen Fehlers vermeidet, ist zwar eine gute Eigenschaft des Beobachters;

^{*)} Observations 1770 1771. Preface p. V & VI.

aber sie ist die am wenigsten wichtige unter denen die er besitzen soll, während die wichtigste seine Fruchtbarkeit in der Auffindung von Mitteln ist, jeder möglichen Abweichung des ihm zur Verfügung stehenden Apparats von seiner mathematischen Idee erfolgreich entgegenzutreten. Während die lange Beobachtungsreihe MASKELYNE'S seinen Anspruch auf den Besitz der ersten Eigenschaft begründet, zeigt sie die wichtigere nicht. Auch aus den Beobachtungen mit dem Mittagsfernrohre kann man nur sicherere Resultate zu ziehen hoffen, wenn man die Rectascensionen der Fundamentalsterne als anderweitig bekannt geworden voraussetzt, auch grosse Unterschiede der Declinationen der miteinander zu vergleichenden Gestirne vermeidet.

Die gemachten Bemerkungen nöthigen, die zwischen 1773 und 1803 beobachteten Rectascensionen des Sirius, wenn auch nicht als erweislich unrichtig, doch als unsicher zu betrachten. Die vor und nach dieser Periode gemachten Beobachtungen ergeben, zu zwei mittleren Resultaten vereinigt, die Unterschiede von den Tab. Region.

1767 - 0,079 24 Beob.
1806 + 0,016 29 "

Da keine Bemerkung in den Greenwicher Tagebüchern andeutet, dass die Zapfen der Axe des Instruments schon vor 1772 beschädigt gewesen wären, so sehe ich kein erhebliches Bedenken gegen die Sicherheit des ersten dieser Resultate. Um es mit der Bestimmung für 1755 ganz vergleichbar zu machen, hätte zwar die Axe zwischen 1765 und 1772 umgelegt werden müssen; da aber die Untersuchung der Bradley'schen Beobachtungen nicht zu der Bemerkung eines Einflusses der Umlagungen geführt hat, so glaube ich ihn wenig fürchten zu dürfen. Zur Erklärung der grossen Verschiedenheit zwischen diesem Resultate für 1767 und dem aus dem Verzeichnisse für 1770 oben abgeleiteten (- + 0,209), kann ich übrigens von meiner Seite nur durch die Angabe beitragen, dass die Ursache derselben nicht in meiner Rechnung zu suchen ist. — Das Resultat für

1806 beruht auf Beobachtungen, welchen die Verbesserung der Zapfen der Axe voranging, welche aber in dem Zustande des Instruments gemacht wurden, den Herrn POND'S Beobachtungen als ungenügend bezeichnen, ohne zu seiner hinreichenden Kenntniss zu führen. Dass die Anbringung des achromatischen Objectivs einen beträchtlichen Einfluss auf die Bestimmung der relativen Rectascension des Sirius geäußert hätte, verrieth übrigens der Anfang der Periode 1773—1803 nicht, indem er sich, ohne eine plötzliche Aenderung zu zeigen, an die frühere anzuschliessen scheint. Dass die geringe Zahl der Beobachtungen, auf welchen diese Bemerkung beruht, ihr kein grosses Gewicht verleihen kann, ist zu beklagen, weil dadurch eine Bestätigung des Resultats für 1806 geschwächt wird.

Aus dem Verzeichnisse des Herrn POND für 1830 habe ich oben den Unterschied der relativen Rectascension des Sirius von den Tab. Region. = - 0,085 abgeleitet; aus dem des Herrn AIRY für dieselbe Zeit = + 0,049. Die erstere dieser beiden Zahlen würde einen Widerspruch gegen das gegenwärtige Anwachsen des Unterschiedes erheben, wenn sie richtig wäre; aber ihre Verschiedenheit von der zweiten ist zu gross, als dass beide nebeneinander bestehen könnten. Die wahrscheinliche Ursache dieser Verschiedenheit ist leicht zu entdecken: das POND'sche Verzeichniss für 1830 gründet sich auf die Beobachtungen von 1816 bis 1833, welche nur durch die Annahme unveränderlicher eigener Bewegungen auf 1830 reducirt werden können, deren Mittel also, im Falle einer positiven Veränderung der Bewegung des Sirius, eine zu kleine Rectascension dieses Sterns für 1830 ergeben musste. Dass Herrn POND'S Beobachtungen, ebensowohl wie alle übrigen, für diese Zeit die Rectascension des Sirius grösser angeben als die Tab. Region., geht aus den Sternverzeichnissen hervor, welche er, so wie er sie aus den Beobachtungen jedes Jahres ableitete, in den Supplementen der Jahrgänge der Tagebücher, von 1829 an, bekannt machte. Die Unterschiede dieser Verzeichnisse*) von den Tab. Reg. sind:

	1829.	1830.	1831.	1832.	1833.	1834.	1835.
β Orionis	+ 0,265	+ 0,136	+ 0,167	+ 0,168	+ 0,089	+ 0,076	+ 0,042
α "	+ 0,021	+ 0,050	+ 0,085	+ 0,042	+ 0,074	+ 0,058	+ 0,092
α Canis min. . . .	+ 0,030	- 0,036	+ 0,057	+ 0,010	+ 0,024	+ 0,051	+ 0,020
Mittel	+ 0,105	+ 0,050	+ 0,103	+ 0,073	+ 0,062	+ 0,062	+ 0,051
α Canis maj. . . .	+ 0,136	+ 0,082	+ 0,228	+ 0,193	+ 0,198	+ 0,118	+ 0,141
Unterschied . . .	+ 0,031	+ 0,052	+ 0,125	+ 0,120	+ 0,136	+ 0,056	+ 0,090

*) Ich habe einige Irrthümer in den arithmetischen Mitteln der einzelnen Beobachtungen verbessert, nämlich:

1829 α Orionis	5 ^h 45 ^m 54,966	statt 54,90
1832	5 46 4,723	4,77

1833. α Canis maj.	6 37 47,399	statt 47,32
1834. β Orionis	5 6 35,815	35,78
α Canis maj.	6 37 49,963	39,37
α Canis min.	7 36 36,644	36,53

Das Mittel aus allen 7 Jahren:

$$1832 \dots + 0^{\circ}084$$

ist also statt der auf dem Catalog von 1112 Sternen beruhenden, obigen Angabe des Resultats der Pondsehen Beobachtungen für 1830, anzunehmen. Um beurtheilen zu können, ob das Pond'sche Verzeichniss für 1819 aus gleicher Ursache entstellt sein möchte, habe ich die Beobachtungen von 1818 und 1819 selbst neu berechnet, aber keine erhebliche Aenderung der aus dem Verzeichnisse abgeleiteten relativen Rectascension des Sirius dadurch erlangt.

Ich habe jetzt die nähere Untersuchung beendigt, welcher einige der oben zusammengestellten Unterschiede zwischen den beobachteten relativen Rectascensionen des Sirius und den Tabulis Region. unterworfen werden mussten. Durch Weglassung der als unsicher erkannt und durch Aenderung der entstellten, verwandelt sich die frühere Zusammenstellung in folgende:

Fundam. Astr.	1755	0 ^o 000
MASKELYNE . . .	1767	- 0,079
PIAZZI	1800	+ 0,033
MASKELYNE . . .	1806	+ 0,016
BESSEL	1815	- 0,036
POND	1819	- 0,083
BESSEL	1825	0,000
SIRIUS	1825	- 0,006
ARÖGLANDER . . .	1828	- 0,003
ARY	1830	+ 0,019
POND	1832	+ 0,084
BESSEL	1835	+ 0,188
BESSEL	1843	+ 0,321

Die Richtigkeit der relativen Rectascension des Sirius für 1825 wird hier, so wie früher die Richtigkeit der relativen Declination des Procyon für 1820, durch die so gut als völlige Uebereinstimmung dreier nahe gleichzeitiger Verzeichnisse verbürgt. Das fast regelmässige Fortschreiten der, die Unsicherheit ihrer Bestimmung weit überschreitenden Unterschiede, von 1815 an, ist offenbar. Um den Unterschied für 1843 durch einen Fehler der Grösse der unveränderlich vorausgesetzten eigenen Bewegung zu erklären, muss dieser von 1825 bis 1843, also in 18 Jahren, 0^o321, oder jährlich 0^o178 betragen, was der Bestimmung für 1755 einen Fehler von mehr als einer Zeitsecunde aufbürden würde. Diese Bestimmung verdient aber nicht weniger Vertrauen als eine der späteren; auch wird sie durch die früher angeführte von LACAILLE für 1750, nämlich + 0^o212, und die aus TOBIAS MAYER'S Verzeichnisse für 1756 folgende — 0^o374, insoweit es hier erforderlich ist, bestätigt, so wenig beide auch über ein Viertel einer Zeitsecunde entscheiden könnten.

Ich setze also der aus den Beobachtungen der Declination des Procyon gezogenen Folgerung die zweite ähnliche hinzu, dass die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Rectascensionsbewegung des Sirius, beziehungsweise zu den Sternen β , α Orionis und α Canis min., mit den Beobachtungen unvereinbar ist.

Ueber die Art der Veränderlichkeit der relativen Bewegung des Sirius würde man schon jetzt ein bestimmteres Urtheil erlangen können, wenn die unglückliche Beschädigung der Zapfen der Axe des Greenwicher Mittagsfernrohrs, ihr durch MASKELYNE'S Beobachtungen zwischen 1790 und 1800 angedeutetes positives Maximum nicht mehr oder weniger unsicher erscheinen liesse. Obgleich der blosse Anblick der eben gemachten Zusammenstellung der Beobachtungen mit der Annahme unveränderlicher eigener Bewegungen hinreicht, bemerken zu lassen, dass die Unterschiede zwischen beiden, sowie auch ihr Maximum zu der angegebenen Zeit, durch eine Periode von etwa einem halben Jahrhundert erklärt werden können, so muss, meiner Ansicht nach, doch jeder Versuch zu ihrer näheren Kenntniss zu gelangen, so lange unterbleiben, bis fernere Beobachtungen die Erscheinung selbst beträchtlich vollständiger entwickelt haben werden. — Die Astronomie gewinnt erst durch neue Resultate, wenn ihre Unzweideutigkeit vollständig vertreten werden kann; nicht das frühzeitige Errathen derselben, sondern die Erwerbung der Grundlagen ihrer genügenden Kenntniss, muss Gegenstand der Bemühungen sein.

Nachschrift.

Während des Druckes des vorstehenden Aufsatzes erfreute mich der Empfang des neuesten der Bände, welche jährlich, in steigender Wichtigkeit für die Astronomie, von der Königl. Sternwarte in Greenwich ausgehen. Dieser Band (1842) enthält ein Verzeichniss von 1439 Sternen für 1840, durch dessen Ableitung aus häufiger und genauer, von 1836 bis 1841 incl. gemachten Beobachtungen, Herr ARY der Wissenschaft einen sehr werthvollen Beitrag liefert. Ausser diesem Verzeichnisse enthält er noch ein allein auf die Beobachtungen von 1842 gegründetes. Beide Verzeichnisse sind auch für die gegenwärtige Untersuchung sehr willkommen, indem die späten Zeiten, denen sie angehören, sie eignen, das allein aus den neuesten hiesigen Beobachtungen erkannte, jetzige starke Anwachsen des Fehlers der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Bewegungen der Sterne, unabhängig zu bestätigen. Ihre Resultate sind:

Relative Declination des Procyon.

1838 + 1,776

1842 + 2,78

Relative Rectascension des Sirius.

1838 + 0,218

1842 + 0,264

Alle diese Resultate passen vollkommen zu dem Fortschreiten der oben zusammengestellten. Uebrigens ist die Zahl der Beobachtungen von 1842 nicht gross genug, um über einige Zehntel einer Secunde in Declination und über einige Hundertel einer Zeitsecunde in Rectascension entscheiden zu können.

[Literatur der Astron. Nachr. über Doppelsterne: Messungen von STRUVE (Bd. 1, 12, 14, 15) (Nachricht über die Doppelsterne Beobb. der D.-St. Bd. 4), (Vergl. mit BESSEL's, s. Abb. 102, Bd. 10), J. HERMEL (10), CAPBEBOB. 12), BEER u. MÄDLER (12), MÄDLER (13, 14, 18); O. STRUVE (18, 19); KAIMER (Vergl. mit BESSLER u. STRUVE, 18, 61), (*p. Oph.* 20); WICHMANN (Königsb. Beobb. 1833—47, s. Abb. 102, 29, Ergänz.-Heft); SECCHI (43, 68); PETERS (44); LUTHER (Königsb. Beobb. 46); DEMBOWSKI (46, 47, 50, 51, 53, 73, 76, 77, 79, 83); AUWERS (Königsb. Beobb., 59); ENGELMANN (64, 70); WINNECKE (73). Bahnbestimmungen von SAVARY (12); MÄDLER (12, 13, 14, 15, 16, 19); BÄRMANN (64); SCHUR (71, 73). STRUVE, über das Trapez des Orion (6), über die Messungen der Mens. micr. (13); KEMCKER, Position von 19 D.-St. (16); MÄDLER, Helligkeitsverhältnisse von D.-St.-Paaren (16); HOUVEAU, Wirkung der Aberration in D.-St.-Systemen (21); SUTCHI, über Beobachtungs-Fehler bei D.-St. (41); KLINKERFELS, Methode der Berechnung von D.-St.-Bahnen (47); geometrischer Satz bei Berech-

nung von D.-St.-Bahnen von THEILK (52), SCHJELLERUP (55); SCHJELLERUP, 34 neue D.-St. (62); STRICKHEIL, Trennung heller D.-St. (64). — Eigenbewegungen: ARGLANDER, über die E.-B. des Sonnensystems (14, 16, 17), Ortsbestimmung von 61 Cygni (16), über 1830 Groombr. (20); AIRY, über denselben (20); LUNDH, E.-B. des Sonnensystems (17); PETERS, über MÄDLER's Untersuchungen über die E.-B. der Fixst., über STRUVE's Ableitung der Fixst.-Entfernungen (28); MÄDLER, Bemerkungen zu PETERS' Bericht (29); FEDORENKO, GURSEW, über die E.-B. der Fixsterne und Beziehungen zu den Größenklassen (45); FEDORENKO, E.-B. der Fixst. (48); SCHJELLERUP, 22 Sterne mit starker E.-B. (62). — Veränderliche E.-B.: BLANCHI (21, 22); AIRY, POND's Untersuchungen (25); BOUSSIA, v. E.-B. d. Siriana (29, Erg.-Heft); GOULD, über die Schubert'schen v. E.-B. von α Virg. und Sirius (31); PETERS, v. E.-B. und Bahn d. Sirius, v. E.-B. von α Virg. (31), v. E.-B. des Sirius (32); MÄDLER, v. E.-B. des Procyon, FAYE, über v. E.-B. u. DILLAN's Bearbeitung d. Königsb. Beobb. 1820—21 (32); LAUCHER, E.-B. des Sirius in Poldistabz. (48); AUWERS, über v. E.-B. (58), über die Bahn des Sirius (63). — Siriusabgleiter: Entdeckung von CLARE, PETERS, über die Identität mit dem Bessel'schen (57); Beobachtungen von: CRACORNAI, LAPPEL (57), BOND (58), ENGELMANN (64, 71), FÜRSTER, TIETJEN, (64, 67), EASTMAN (66, 70), HALL (66, 79, 81), NEWCOMB (66), BREHNS (67, 71), VOGEL (71, 74, 76), JUNER (77), PERHILLER (78). — Verschiedenes: WERN, Hauptsterne der Plejaden (3), OLBERG, Schätzen Bessel'scher Sterne (8); WERN, über gleichförmige Bezeichnung der Sterne und ein allgem. St.-Verzeichn., ARGLANDER, Bemerkungen über Flamsteed'sche Sterne (10); HEMKER, Plejadenverz. aus Hamburger Mer.-Beobb. (18); ARGLANDER, über seine Uranometrie (21); BOND, Stellar-Photographie (47, 48, 49); WINNECKE, Berichtigung zum Bessel'schen Plejadenverz. (Abb. 104) (48); AUWERS, Position eines Plejadensterns (51), ARGLANDER, Abhängigkeit der Declination von der Helligkeit der St. (75); SCHULTZ, Micr. Best. d. St.-Haufens 20 Vulpec. (60.)]

V. Mathematik.

106. Ueber das Integral $\int \frac{dx}{1-x^a}$ *)

(Mon. Corresp. XXII, p. 395. — Aus einem Schreiben an LINDENAU vom 26. Aug. 1810.)

... Vielleicht interessirt Sie das berichtigte Integral $\int \frac{dx}{1-x^{**}}$, über welches Herr SOLDNER neuerlich eine französische Schrift herausgegeben hat. Es ist dieses Integral nichts anderes, als eine transcendente Grösse, welche man eben so wie die Kreisfunctionen und Logarithmen, in eine Tafel bringen muss; hat man eine solche, so sind alle Probleme die auf $\int \frac{dx}{1-x}$ führen, dadurch aufgelöst. Die Schwierigkeit besteht in der Berechnung einer solchen Tafel für grosse Werthe von x , wo die Reihen sehr langsam convergiren; SOLDNER, der eine Tafel bis $x = 1280$ gab, hat sie nach einem Verfahren, welches dem Taylor'schen Lehrsatz nicht unähnlich ist, so hoch gebracht, indem er von Glied zu Glied hinaufstieg. Indess sehen Sie leicht, dass diese Methode nichts weniger als gut ist, indem man dadurch die Rechnung nicht controlliren kann und überhaupt endlose Rechnungen machen muss, wenn man den l.i (so bezeichnet SOLDNER die Function, die er Logarithme intégral nennt) für eine sehr grosse Zahl sucht. Mich führte folgender Kunstgriff schneller zum Ziele.

Ich setzte

$$\ln \frac{x}{a} = \ln x + Fx \left[A^0 + \frac{A'}{1x} + \frac{A''}{(1x)^2} + \frac{A'''}{(1x)^3} + \text{etc.} \right] + C$$

welche Form offenbar rechtmässig ist, wenn Fx nach Potenzen von x entwickelt, mit der ersten Potenz

*) [58 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 234 fl. 240. 243 fl. 321.

** Die grosse Schwierigkeit dieses Integrals, mit dem sich die grössten Analysten schon beschäftigt haben, besteht in der geringen Convergenz der dafür erhaltenen Reihen. Sehr leicht erhält man

$$\int \frac{dx}{1-x} = 1.1x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1x)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1x)^3}{1.2.3} + \dots$$

Allein wie unzureichend diese Reihe bei grossen Werthen von x ist, fällt auf den ersten Anblick in die Augen.

VON LINDENAU.

anfängt; dann enthält $\ln \frac{x}{a} - \ln x$ alle Potenzen von x , und die Coefficienten von A^0, A', A'', \dots lassen sich bestimmen. Die willkürliche Function Fx führte ich übrigens nur ein, um mehrere Bedingungen als die Lösung des Problems erfordert, zu erhalten; wodurch dann eine Bestimmung meiner Willkür überlassen blieb; ich subordinirte diese der Bedingung der leicht möglichsten Entwicklung. Durch das Differentiren der Gleichung erhielt ich:

$$\frac{1}{a(1x-1a)} = \frac{1}{1x} + \left(\frac{dFx}{dx} \right) \left[\frac{A^0}{1x} + \frac{A'}{1x^2} + \frac{A''}{(1x)^3} + \frac{A'''}{(1x)^4} + \dots \right] - \frac{Fx}{1x} \left[\frac{A'}{(1x)^2} + \frac{2A''}{(1x)^3} + \frac{3A'''}{(1x)^4} + \dots \right]$$

Aeusserst einfach wird die Gestalt dieses Differential's, wenn man $Fx = x$ setzt; dadurch ist also die oben gemachte Bedingung erfüllt und ich erhalte:

$$\frac{1}{a(1x-1a)} = \frac{1}{1x} + A^0 + \frac{A'}{1x} + \frac{A''}{1x^2} + \frac{A'''}{1x^3} + \frac{A^{IV}}{1x^4} + \dots - \frac{A'}{1x^2} - \frac{2A''}{1x^3} - \frac{3A'''}{1x^4}$$

Dividirt man links wirklich, so hat man ohne Mühe:

$$0 = A^0$$

$$\frac{1}{a} - 1 = A'$$

$$\frac{1a}{a} = A'' - A'$$

$$\frac{(1a)^2}{a} = A''' - 2A''$$

$$\frac{(1a)^3}{a} = A^{IV} - 3A''' \text{ etc.}$$

und nach einer bekannten Eigenschaft der Differentiale von $\frac{a-1}{a.1a}$, nach welcher

$$\frac{(1a)^n}{a} = + (-1)^n + 1 \cdot \frac{d^n \left(\frac{a-1}{a.1a} \right)}{(d1a)^n} - n (-1)^n \cdot \frac{d^{n-1} \left(\frac{a-1}{a.1a} \right)}{(d1a)^{n-1}}$$

aligemein

$$+ A^n = (-1)^n \frac{d^{n-1} \left(\frac{a-1}{a \cdot 1a} \right)}{(d1a)^{n-1}}$$

$$\text{li. } \frac{x}{a} = \text{li}x + x \left[\frac{1-a}{a1a} \left(\frac{1a}{1x} \right) - \frac{d \cdot 1-a}{d1a} \cdot \left(\frac{1a}{1x} \right)^2 + \frac{d^2 \cdot 1-a}{(d1a)^2} \cdot \left(\frac{1a}{1x} \right)^3 - \dots \right]$$

wo $c = 0$ gesetzt ist, indem es für $a = 1$ verschwindet. Es würde sehr leicht sein, die Coefficienten einen nach dem andern aus der obigen Relation zwischen ihnen zu berechnen; indess würde ein geringer Fehler in dem ersten, durch die immer fortgehende Multiplication mit der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . über alle Grenzen wachsen und selbst die sorgfältigste Rechnung schlecht belohnen; man muss also einen hohen Coefficienten zuerst suchen und von diesem zu den niedrigeren herabsteigen. Diese Bemerkung führt unmittelbar zu einer Bestimmung der Coefficienten, denn es ist

$$\left(\frac{1a}{a} \right)^n = A^{(n+1)} - n A^{(n)}$$

oder

$$A^n = \frac{(1a)^n}{a \cdot n} + \frac{A^{n+1}}{n}$$

Setzt man statt A^{n+1} seinen Werth, so ist

$$A^{(n)} = \frac{(1a)^n}{a \cdot n} - \frac{(1a)^{n+1}}{a \cdot n \cdot n+1} + \frac{A^{n+2}}{n \cdot n+1} \\ = \frac{(1a)^n}{a \cdot n} - \frac{(1a)^{n+1}}{a \cdot n \cdot n+1} - \frac{(1a)^{n+2}}{a \cdot n \cdot n+1 \cdot n+2} + \frac{A^{n+3}}{n \cdot n+1 \cdot n+2}$$

so dass man für das Integral folgende sehr elegante Reihe erhält:

Setzt man dieses bis ins Unendliche fort, so hat man:

$$A^n = - \frac{(1a)^n}{a} \left[\frac{1}{n} + \frac{1a}{n \cdot n+1} + \frac{(1a)^2}{n \cdot n+1 \cdot n+2} + \text{etc.} \dots \right]$$

woraus man denn fast ohne Mühe $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$ etc. findet. Diese Untersuchung, die ich noch beträchtlich weiter ausgedehnt und in Zahlen berechnet habe, hat mir unter andern

$$\begin{aligned} \text{li. } 100000 &= 9629,809041 \\ 200000 &= 18036,052159 \\ 300000 &= 26080,215589^*) \\ 400000 &= 33922,621995 \\ 1000000 &= 78627,549277 \end{aligned}$$

und folglich eine vollständige Auflösung des Problems gegeben.

Ich bemerke noch, dass meine Reihe immer convergirt, wenn $a < x$ und dass $a = x$ die Grenze der Convergenz ist. Das Integral ist, dünkt mir, eine sehr merkwürdige analytische Function, und nicht ohne Nutzen in der Physik.

*) [Richtige Zahl: 26086,69223, s. p. 329.]

107. Aus einem Schreiben an Lindenau vom 11. Januar 1811.*)

(Mon. Corresp. XXIII, p. 192.)

. . . Aus Herrn SOLDNER'S Briefe**) [v. 9. December

*) [Aus 61 d. a. Verz. — Vgl. die vorangehende und folgende Abhandlung.]

**) [Unter dem 9. December 1810 schreibt SOLDNER an LINDENAU (Mon. Corresp. XXIII, p. 182): „Im Octoberhefte der M. C. finde ich Bemerkungen von Herrn Prof. BESSEL über meine Théorie d'une nouvelle fonction etc., welche mich zu diesen Zeilen veranlassen [s. Abb. 106].

Die von BESSEL angegebene Reihe ist mir wohl bekannt. Ueberhaupt habe ich über diese Function weit mehr ausgearbeitet, als ich habe drucken lassen; ich dürfte, aus bekannten Gründen, das Werk nicht zu sehr ausdehnen. Was diese Reihe anbelangt, finde ich in meinen Papieren folgendes:

$$\text{li. } ax = a \int \frac{dx}{1x+1a} = a \int \frac{dx}{1x} \left\{ 1 - \frac{1a}{1x} + \left(\frac{1a}{1x} \right)^2 - \left(\frac{1a}{1x} \right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

Dies integrirt und nach den Potenzen von $\frac{1}{1x}$ geordnet, auch zuletzt die Reihen der Coefficienten summiert, erhält man:

1810) habe ich gesehen, dass er die Reihe für die Integral-

$$\begin{aligned} \text{li. } ax &= \text{li}x + \frac{ax}{1x} \left\{ 1 - \frac{1}{a} \right\} + \frac{ax}{(1x)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{a} - 1a \right\} \\ &+ \frac{ax}{(1x)^3} \left\{ 1 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 2}{a} - 1 \cdot 2 \cdot 1a + (1a)^2 \right\} \\ &+ \frac{ax}{(1x)^4} \left\{ 1 \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{a} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1a + 3(1a)^2 - (1a)^3 \right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\text{li. } ax = \text{li}x + A' \frac{ax}{1x} + A'' \frac{ax}{(1x)^2} + A''' \frac{ax}{(1x)^3} + \text{etc.}$$

so ist

$$\begin{aligned} A' &= 1 - \frac{1}{a} \\ A'' &= A' - 1a \\ A''' &= 2A'' + (1a)^2 \\ A^{IV} &= 3A''' - (1a)^3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

welches mit der Reihe der Herrn BESSEL identisch ist.

Logarithmen, die Sie im Octoberhefte der M. C. haben abdrucken lassen, schon früher gekannt hat; es ist

Nach dieser Reihe ist wirklich der grösste Theil meiner Tabelle berechnet worden. Die Reihe 6 pag. 19 habe ich weit später, durch folgende Veranlassung gefunden. Ich habe einmal in der obigen Reihe $n+y$ anstatt ax gesetzt; dadurch kam sie, der Form nach, den Taylor'schen Theoreme näher, nur dass diese Reihe nach Potenzen des Logarithmus der Zunahme fortging, anstatt dass sie in TAYLOR'S Theorem nach den Potenzen der Zunahme selbst fortgeht. Die Reihe hatte so ein sehr einfaches Gesetz, dahingegen das Taylor'sche Theorem in gegenwärtigem Falle eine äusserst verwickelte Reihe geben würde. Dies brachte mich auf den Gedanken, dass obige Reihe gewissermassen ein besonderer Fall eines noch weit allgemeineren Theorems sein müsse als das Taylor'sche; eines Theorems nämlich, wo die Reihe nach Potenzen einer willkürlichen Function der Zunahme fortgeht. So fand ich das Theorem in Nr. 12.

Bei dieser Gelegenheit will ich bemerken, dass der Nutzen dieses Theorems sehr umfassend zu sein scheint. Z. B. wenn man macht:

$$z' = \frac{dx Fx}{dfx}, \quad z'' = \frac{d^2x}{dfx^2}, \quad z''' = \frac{d^3x}{dfx^3} \text{ etc.}$$

so hat man:

$$f dx Fx = fx \cdot z' - \frac{(fx)^2}{1.2} \cdot z'' + \frac{(fx)^3}{1.2.3} \cdot z''' - \text{etc.}$$

also eine allgemeine Reihe für das Integral $\int dx Fx$, die nach den Potenzen einer willkürlichen Function von $x (fx)$ fortgeht. Freilich ist diese Reihe auch wieder nur ein besonderer Fall der Reihe in Nr. 4.

Ferner wenn

$$z' = \frac{dFx}{dfx}, \quad z'' = \frac{d^2x}{dfx^2}, \quad z''' = \frac{d^3x}{dfx^3} \text{ etc.}$$

so ist

$$Fx = F + fx \cdot z' + \frac{(fx)^2}{1.2} \cdot z'' + \frac{(fx)^3}{1.2.3} \cdot z''' + \text{etc.}$$

wo F die Fx für den Fall $x = 0$ und in z', z'', z''' etc. nach der Differentiation x Null gesetzt wird. Diese Reihe ist also ein Entwicklungstheorem einer Fx in eine Reihe, welche nach Potenzen einer beliebigen Function von x fortgeht. (Man vergleiche „Théorie des fonctions analytiques par M. de LA GRANGE“ Nr. 45.) Die Ableitung dieser zwei Sätze aus dem allgemeinen Theoreme ist leicht.

Ferner ist dies Theorem allgemein anwendbar in Fällen, wo es darauf ankommt, die Differenz zweier gleichnamigen Functionen von zwei verschiedenen Grössen durch die Differenz zweier andern gleichnamigen Functionen derselben Grössen auszu drücken. Z. B. Herr Professor MOLLWEIDT hat in der Correspond. Ausdrücke gegeben für $\alpha - \beta$ durch $\sin \alpha - \sin \beta$; macht man $\alpha = \beta + \omega$, so wird

$$F(\alpha + \beta) - F\alpha = (\beta + \omega) - \beta = \omega \\ f\alpha = \sin \beta \\ z = \sin(\beta + \omega) - \sin \beta$$

wodurch sich das Uebrige leicht ergibt. Diese letzte Bemerkung hat mir mein gelehrter Freund, der Professor HENCKEN in Ansbach, zuerst gemacht. Ein Analyst, der noch weit bekannter sein könnte und sollte, als er es durch Umstände bis jetzt ist.

Ich komme wieder zur Sache zurück. Die Reihe (6) hatte nun im (tauzen) die nämliche Convergenz wie diejenige, nach welcher ich bisher gerechnet hatte. Herr BESSEL scheint das Gegenheil zu glauben; man kann sich aber leicht überzeugen, dass dem nicht so ist. Ich habe also die neue Reihe im Drucke

zu bedauern, dass er sie nicht in seiner Schrift aufgenommen hat, da sie doch brauchbarer ist, als die Reihe,

um so mehr vorgesehen, da sie mir Gelegenheit gab, eine Anwendung des allgemeinen Theorems in Nr. 12 zu zeigen. Aber eine Eigenschaft hat die ältere Reihe, welche ich erst nach dem Abdrucke der Abhandlung bemerkt habe, und die, hätte ich sie früher gesehen, mir die Berechnung der Tafel sehr erleichtert und mich mithin wohl bestimmt haben würde, sie in die Abhandlung aufzunehmen. Sie besteht darin: wenn man die Coefficienten A', A'' etc. für ein gewisses a berechnet hat, so gelten diese für jeden Theil der Tafel, z. B. wenn $a = 2$ (grösser als 2 kann man a nicht wohl machen, weil man sonst zu viele Glieder berechnen müsste, besonders wo x noch nicht sehr gross ist), so hat man:

$$li \cdot 2x = li \cdot x + A' \cdot \frac{2x}{1x} + A'' \cdot \frac{2x}{(1x)^2} + \text{etc.}$$

wo

$$A' = \frac{1}{2} \\ A'' = A' - 12, \text{ etc.}$$

Hat man also ein für allemal diese A', A'' etc. berechnet, so findet man mit denselben Coefficienten jeden $li \cdot 2x$, wenn $li \cdot x$ gegeben ist. Wenn nun die li für die Zahlen $2, 4, x, 8, x$ etc. bestimmt sind, so lassen sich die darzwischen fallenden leicht finden, weil dann die Reihen stärker convergiren. Auch könnte man noch die A', A'' etc. für $a = 1,5, a = 1,25$ etc. berechnen. Herr BESSEL hat diesen Umstand, ebenso wie ich, Anfangs auch nicht bemerkt. Ich hätte ihn durch die Zahlenrechnung nothwendig gewahr werden müssen; aber leider hatte ich die Reihe zum wirklichen Gebrauche eine etwas veränderliche [?] Form gegeben, welche dieses verhindert. Es ist auffallend, wie man zuweilen Dinge nicht bemerkt, die so ganz am Tage liegen!

Der Gedanke des Herrn BESSEL, einen Coefficienten $A^{(a)}$ für ein grosses a unmittelbar zu berechnen und aus diesem die niedrigeren zu bestimmen, wo man dann, wenn man bis auf die ersten zurückgekommen ist, die unmittelbar gegeben sind, eine Controle für die Rechnung hat, ist vortrefflich und hat auch allgemein gefreut. Seine Methode lässt sich überall bei dependenten Coefficienten anwenden, wo man für $A^{(a)}$ eine convergirende Reihe erhalten kann. Freilich ist die Arbeit etwas mühsam, weil man der Controle wegen die hohen Coefficienten mit eben so viel Decimalstellen berechnen muss, als man ansondem nur für die niedrigeren nöthig hätte. Aber eine Verification der Rechnung bezahlt man in solchen Fällen nicht zu theuer.

Dass Herr BESSEL Willens zu sein scheint, die Tafel der Integral-Logarithmen fortzusetzen, ist mir nun so erforderlich, da ich in meinen jetzigen Verhältnissen an eine solche Arbeit nicht denken kann. Ich bitte Herrn BESSEL gelegentlich zu ersuchen, dass er meine Tafel von $li \cdot 10$ an prüfen möchte; ich fürchte sehr, es werde Rechnungsfehler darin sein (s. pag. 26).

Ich kann es Ew. Hochwohlgebornen nicht bergen, dass mir eine Aeusserung des Herrn BESSEL etwas aufgefallen ist. Er sagt nämlich: Die Schwierigkeit bei dieser Function bestünde nur darin, die Tafel für grosse Werthe von x zu berechnen. Aber es ist Ihnen bekannt, dass die Schwierigkeiten bei dieser Function mancherlei waren, so dass sie selbst dem grossen EULER räthselhaft blieb. Die grössten Schwierigkeiten waren zu überwinden, ehe ich an die Berechnung einer Tafel denken konnte, und ich gestehe, dass ich den glücklichen Erfolg nur dem Zufalle und einem längern Studium verdanken zu müssen glaube“

die er dort gibt. So wenig das, was ich Ihnen über diese Function schrieb, zum Drucke bestimmt war, indem es wohl weniger als eine Skizze der ganzen Untersuchung ist, so ist mir sein Abdruck doch lieb, da er uns von Herrn SOLDNER die Versicherung eingebracht hat, er habe weit mehr über diese Function ausgearbeitet, als seine Schrift enthält. Laden Sie Herrn SOLDNER doch ein, uns dieses in der Monatl. Corresp. mitzutheilen. Ich meines Theils habe zur Untersuchung dieser Function durch eine Abhandlung [Abb. 108] beizutragen gesucht, die zur Presse bereit ist, und die in einer Sammlung von Abhandlungen erscheinen wird, welche einige meiner hiesigen Collegen und ich zur Ostermesse herausgeben werden; vielleicht enthält sie doch etwas, was sich in Herrn SOLDNER's Papieren nicht findet. — Herr SOLDNER thut mir übrigens Unrecht, wenn er glaubt, ich halte seine Reihe

$$li(a+x) = li.a + \frac{a}{1^n} - \frac{1.a.A''}{1.2.(a)^2} y^2 + \frac{2.a.A'''}{1.2.3.(a)^3} y^3 - \text{etc.}$$

für weniger convergent als sie ist; da das n^{te} Glied dieser Reihe

$$= \left(\frac{y}{1a}\right)^n \frac{a}{n} \left\{ 1 - 1a + \frac{(1a)^2}{1.2} - \frac{(1a)^3}{1.2.3} + \dots + \frac{(-1a)^{n-2}}{1.2..n-2} \right\}$$

so nähern sich ihre Glieder immer mehr der Grenze

$$\left(\frac{y}{1a}\right)^n \frac{a}{n} e^{-1a} = \frac{1}{n} \left(\frac{y}{1a}\right)^n;$$

sie convergirt also immer, wenn y oder

$$li\left(1 + \frac{x}{a}\right) < 1a, \text{ oder } x < a(a-1).$$

Man kann mit dieser Reihe, welche SOLDNER auf ein schönes analytisches Theorem gründet, unmittelbar von $li.a$ auf $li.a^3$ steigen, allein höher nicht; und selbst für diesen Fall stellt sich die Convergenz bei einem etwas grossen a nicht gleich am Anfange ein, sie ist hier in einem ähnlichen Falle mit der Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \dots$$

die immer convergirt, aber erst spät anfängt, sich zu nähern, wenn x etwas gross ist. — Dagegen convergirt meine Reihe immer, wenn die dem zum Grunde gelegten Integral-Logarithmen zugehörige Zahl nur auf derselben Seite der Einheit liegt, auf welcher die Zahl

für welche man den Integral-Logarithmus sucht, sich befindet; ihre Glieder nehmen gleich Anfangs ab, obgleich für ein grosses a langsam. Ich führe dieses nicht an, um den Werth der Soldner'schen Entwicklung zu schmälern; nur glaube ich, mein oben über beide Reihen geäussertes Urtheil Ihnen begründen zu müssen. — Auch thut mir Herr SOLDNER Unrecht, wenn er sagt, ich habe nicht bemerkt, dass meine Entwicklung für alle Werthe von x gelte (so muss ich wenigstens die Stelle seines Briefes verstehen); diese Aeusserung ist mir sogar unbegreiflich, da es Herrn SOLDNER's Meinung wohl nicht gewesen sein kann, mir vorzuwerfen, „ich glaube, eine allgemein für x gefundene Entwicklung sei nur für einen bestimmten Werth von x wahr“. — In meiner erwähnten Abhandlung werden Sie sehen, dass man noch eine ganz gut convergirende Reihe erhält, wenn man $a=10$ setzt; dieser Reihe Coefficienten lasse ich dort abdrucken, und habe sie benutzt $li. 1000, 10000, 100000, 1000000$ zu berechnen, wovon die beiden letzten schon im Octoberhefte der M. C. stehen. Es waren 16 Glieder nöthig, um von $li. 100$ auf $li. 1000000$ zu steigen. — Der Zahlenwerth von $li. 300000$ ist in der M. C. unrichtig [s. p. 327]; nach der Verbesserung des dabei vorgefallenen Fehlers finde ich ihn (Art. 16 meiner Abb.) = 26086,69223.

Allerdings war es wohl meine Meinung die Hauptschwierigkeit bei dieser Function in der Entwicklung der Zahlenwerthe für grosse x zu suchen. Ob ich darin Recht habe, kann ich in der That nicht beurtheilen, da es überhaupt unmöglich ist, über die Schwierigkeit einer schon gemachten Entdeckung zu urtheilen; — bei einem Art. 6 meiner Abhandlung gegebenen Ausdrucke des Integrals werden die Schwierigkeiten ganz umgangen; setzt man diesen als gefunden voraus, so macht die Erfindung der Integral-Logarithmen für grosse Zahlen, die einzige, jedoch durch ebendenselben Ausdruck schon grösstentheils beseitigte, Schwierigkeit. — Es würde mich zu weit führen, wenn ich Ihnen hier noch mehr von den Untersuchungen über $\int \frac{dx}{1x}$ mittheilen wollte; wenn sie Ihnen interessant sind, so werden Sie dieselben in unserm Archive vielleicht aufsuchen.

108. Untersuchung der durch das Integral $\int \frac{dx}{1x}$ ausgedrückten transcendenten Function.*)

(Königsberger Archiv für Naturwissenschaft. und Mathem. 1812, 1. Bd. p. 1.)

1.

Unter der unendlich grossen Zahl der transcendenten Grössen sind fast nur die Logarithmen und Kreisfunctionen von den Mathematikern näher untersucht; ihr häufiger Gebrauch in der Mathematik erzwang erschöpfende Nachforschungen nach ihrer Natur und die Construction von Tafeln, bestimmt, ihre Anwendung zu erleichtern. Obgleich diese Transcendenten ungleich öfter in analytischen Untersuchungen vorkommen, als irgend eine andere Classe von Reihen, deren Summe man nicht auf diese zurückführen oder durch algebraische Ausdrücke erhalten kann, so hätten doch auch einige andere eine genauere Betrachtung verdient; es ist daher noch eine Pflicht der Mathematiker, das Versäumte nachzuholen und die Analyse auch von dieser Seite zu bereichern.

KRAMP, als er den Weg eines Lichtstrahls durch unsere Atmosphäre untersuchte, stiess auf eine transcendente Quantität, die durch $\int e^{-t} dt$ ausgedrückt wird, und deren Werthe, von t bis ∞ genommen, er in eine seinem Werke angehängte Tafel brachte. Ausser dieser existirt noch eine von SOLDNER gegebene Tafel für das Integral $\int \frac{dx}{1x}$; — mehr Zahlenberechnungen der Transcendenten sind mir nicht bekannt. Das Integral $\int \frac{dx}{1x}$ hat schon früh die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen, und wegen der Schwierigkeiten, auf die es führt, eine gewisse Celebrität erhalten*); da sie noch immer nicht überwunden sind, so wird man mir es hoffentlich verzeihen, dass ich es zum Gegenstande der folgenden Blätter mache.

2.

Unter den Arten, das Integral in Reihen zu ent-

*) [81 d. a. Verz. — S. Abhh. 106 und 107.]

**) EULER sagt Inst. Calc. Integr. I. Cap. IV. § 219: „Haec ergo integratione pendet a formula — — — $\int \frac{dx}{1x}$, cuius integrale, si assignare possent, amplissimum usum in analysi esset allaturum, verum nullis adhuc artificis neque per logarithmos, neque angulos exhiberi potuit: quomodo autem per seriem expressi possit, infra ostendemus (§ 227). Videtur ergo haec formula $\int \frac{dx}{1x}$ singularum speciem functionum transcendentium suppletur, quae utique accuratorem evolutionem meretur.“

wickeln, ist die natürlichste und leichteste folgende. Es ist bekanntlich:

$$x = e^{1x} = 1 + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3} + \frac{(1x)^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$dx = d.1x + 1x.d1x + \frac{(1x)^2 d1x}{1.2} + \frac{(1x)^3 d1x}{1.2.3} + \dots$$

$$\int \frac{dx}{1x} = C + 1(\pm 1x) + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \dots$$

Das doppelte Zeichen vor $1x$ ist die Folge einer Zweideutigkeit, die die Analyse nicht heben kann und die durch fremde Bedingungen beseitigt werden muss.

Es ist nämlich $\frac{dy}{y}$ sowohl das Differential von $1y$, als von $1(-y)$, und deshalb auch $\frac{d.1x}{1x} = d1(\pm 1x)$: die Analyse allein kann also nicht über das Zeichen entscheiden; soll aber $\int \frac{dx}{1x}$ in seinem ganzen Umfange eine reelle Grösse haben, so muss man $1(+1x)$ nehmen, wenn $1x$ positiv oder x grösser als 1, dagegen $1(-1x)$, wenn x kleiner als 1 ist. Nach dieser Bemerkung, die man nicht genug beachtet zu haben scheint, leidet das, was EULER sagt*), eine Berichtigung.

Die hier gefundene Reihe enthält eine allgemeine Auflösung der Aufgabe, denn sie convergirt in allen Fällen, man mag x so gross oder so klein annehmen als man will; auch haben alle Analysten, die sich mit dem Integrale beschäftigten, sie gefunden. Indessen wenn x sehr gross oder sehr klein, folglich $1x$ beträchtlich grösser als 1 ist, so stellt sich die Convergenz der Reihe erst spät ein und ist dann so langsam, dass die Berechnung sehr mühsam werden und selbst den eifrigsten Rechner ermüden würde. Die Constante C ist, wenn man das Integral mit 0 anfangen lässt, die bekannte, bei der Summation der harmonischen Reihe

*) Inst. Calc. Integr. I. Cap. IV. § 228:

$$\int \frac{dx}{1x} = C + 11x + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \dots$$

quod integrale si debeat evanescere, sumto $x = 0$, constans C sit infinita, unde pro reliquis casibus nihil concludi potest. Idem incommodum locum habet, si evanescent reddamus casu $x = 1$, quia $11x - 10$ fit infinitum. Caeterum patet, si integrale sit reale, pro valoribus ipsis x unitate minoribus, ubi $1x$ est negativus, tum pro valoribus unitate maioribus fieri imaginarium, et vicissim. Hinc ergo natura huius functionis transcendentis parum cognoscitur.

vorkommende Zahl, wie MASCHERONI*) und SOLDNER**) erwiesen haben, nach des ersteren Rechnung

$$= 0,57721566490153286061811209008239.$$

3.

Integriert man das Differential theilweise, so ist

$$\int \frac{dx}{1x} = \frac{x}{1x} + \int \frac{dx}{(1x)^2} = \frac{x}{1x} + \frac{x}{(1x)^3} + 1.2 \int \frac{dx}{(1x)^4}$$

und wenn man dieses bis ins Unendliche fortsetzt:

$$\int \frac{dx}{1x} = \frac{x}{1x} \left\{ 1 + \frac{1}{1x} + \frac{1.2}{(1x)^3} + \frac{1.2.3}{(1x)^5} + \dots \right\} + C'$$

Diese Reihe divergirt immer, so wie die erste immer convergirt; denn von dem Gliede, dessen Dimension grösser ist als $1x$, an gerechnet, wachsen die Coefficienten schneller als die Potenzen von $1x$. Wenn in-deasem x kleiner als 1, oder $1x$ negativ ist, wechseln in der Reihe die Zeichen und man kann einen continuirlichen Bruch angeben, aus dessen Entwicklung eine gleiche Reihe erzeugt wird; und dieser findet sich, wenn man zur Abkürzung $1x = \frac{-1}{q}$ setzt***):

*) LACROIX, Traité des différences et des séries. § 1117.

**) SOLDNER, Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, à Munic, chez LISDACKER 1809.

***) SOLDNER, l. c., p. 16. — Eine sehr bequeme Art, Reihen in continuirliche Brüche oder diese in Reihen zu verwandeln, deren Mittheilung ich mir bis zu einer andern Zeit vorbehalte, gibt für den gegenwärtigen Fall, wo die Reihe

$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \dots$$

und der continuirliche Bruch

$$\frac{a}{1 + \frac{a'x}{1 + \frac{a''x}{1 + \frac{a'''x}{\text{etc.}}}}}$$

mit einander verglichen werden sollen, folgende Relationen zwischen den Coefficienten:

$$a = c$$

$$-a a' = c'$$

$$a a' a'' = c'' + c' a'$$

$$-a a' a' a''' = c''' + c''(a' + a'')$$

$$a a' a' a' a'' = c'' + c''(a' + a'' + a''') + c' a' a''$$

$$-a a' a' a' a' a'' = c'' + c''(a' + a'' + a'' + a''') + c' a' a' a''$$

n. s. w.

Das Gesetz der Fortschreitung liegt klar am Tage, sowie der Nutzen, den man aus diesen Gleichungen ziehen kann; über jenes lassen sich nicht uninteressante Untersuchungen anstellen. — Der continuirliche Bruch für $1x$ ergibt sich hieraus fast ohne Mühe.

$$\int \frac{dx}{1x} = q \cdot x \frac{1}{1+q} \frac{1}{1+\frac{2q}{1+q}} \frac{1}{1+\frac{2q}{1+\frac{2q}{1+3q}}} \frac{1}{1+\frac{2q}{1+\frac{2q}{1+3q}}} \dots$$

Er verschwindet für $x = 0$, woraus man die Constante = 0 erhält. Für ein $x > 1$ lehrt diese Entwicklung nichts, da die Reihe sowohl als der continuirliche Bruch für diesen Fall divergirt.

4.

Man fühle das Bedürfniss eines andern Ausdrucks, geschickt den Werth des Integrals für grosse x anzugeben, und MASCHERONI, der sich viel mit diesem Gegenstande beschäftigte, dessen Arbeit ich aber nur aus der angeführten Stelle des Lacroix'schen Werkes kenne, verfiel auf folgenden, dessen Analyse ich hier als bekannt voraussetze:

$$\int \frac{dx}{1x} = x \left\{ \frac{1}{1x} + \frac{1}{(1x)^2} + \frac{1.2}{(1x)^3} + \dots + \frac{1.2.3 \dots n-1}{(1x)^n} \right\} + 0,57721 \dots - \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\} - \frac{1.2.3 \dots n}{n(1x)^n} - \frac{2.3 \dots n}{(n-1)(1x)^{n-1}} - \dots - \frac{n}{1x} + 11x + \frac{1x}{n+1} + \frac{(1x)^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{(1x)^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

Wie man sieht, besteht der Ausdruck aus drei endlichen Reihen und einer unendlichen; will man ihn benutzen, so berechnet man so viele Glieder der ersten Reihe, bis sie anfängt zu divergiren: danach bestimmt man das willkürliche n und befolgt ferner die Vorschrift. Die letzte Reihe wird immer convergiren, desto schneller, je grösser n ist. Obgleich man mit diesem Ausdrucke weiter reicht als mit dem vorigen, so ist seine Anwendung doch immer noch sehr ermüdend, und im Ganzen genommen wird nicht viel dabei gewonnen.

5.

SOLDNER, der das Integral zum Gegenstande einer eigenen, oben angeführten Schrift machte, ging in der That weiter als seine Vorgänger. Er gab der Function

$\int \frac{dx}{1x}$ den Namen „Logarithme integral“, welchen ich, da er mir passend erscheint, beibehalten und durch Integrallogarithme übersetzen werde; auch SOLDNER'S Bezeichnung (li. x) werde ich in der Folge benutzen. Ausser den erwähnten Formeln und zwei leicht zu findenden für $li(1+x)$ und $li(1-x)$, bequem wenn

x ein kleiner Bruch, gab er die folgende, die er zur Berechnung seiner Tafel anwendet:

$$li(a+x) = li.a + \frac{x}{1a} - \frac{1.a.A''}{1.2(1a)^2} y^2 + \frac{2.a.A'''}{1.2.3(1a)^3} y^3 - \dots$$

$$\text{wo } y = 1\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

$$A'' = 1$$

$$A''' = A'' - 1a$$

$$A^{IV} = 2A''' + (1a)^2$$

$$A^V = 3A^{IV} - (1a)^3 \text{ etc. etc.}$$

Dieser Ausdruck convergirt immer, wenn x kleiner ist als $a(a-1)$, und schnell, wenn $\frac{x}{a}$ ein kleiner Bruch ist; da ich ihn in der Folge nicht weiter benutzen werde, so verweise ich wegen seiner bemerkenswerthen Herleitung auf die angeführte Schrift.

SOLDNER berechnete seine Tafel nach den directen Formeln bis zu $x = 10$, und von hier schritt er von Glied zu Glied mit dem eben angeführten Ausdrucke bis zur Grenze der Tafel, $x = 1280$, fort. Er selbst erkennt dieses Verfahren für gewagt*) und das ist es auch in der That; sogar unstatthaft, wenn man nicht den ganzen Calcul doppelt führt. Ueberdies ist die Berechnung höchst langweilig, und fast unmöglich kann sie bis zu sehr grossen Werthen von x fortgesetzt werden; es existirte also bis jetzt kein Mittel, den Integrallogarithmen für eine sehr grosse Zahl bequem zu finden.

6.

Die Ursache, warum die oben angeführte Reihe

$$li.x = C + 1(\pm 1x) + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \dots$$

so wenig convergirt, wenn x sehr gross oder sehr klein ist, liegt in der geringen Convergenz der Reihe

$$x = 1 + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3} + \dots$$

Könnte man diese Reihe convergirender machen, oder $1x$ durch eine sich schnell nähernde Reihe ausdrücken, so würde man dadurch einen brauchbaren Werth des Integrals erhalten. Das letzte Mittel bietet uns in der That einen Ausdruck dar, den ich hier entwickeln

*) S. 26: „On voit par ce qui précède, que ma table est destinée d'une vérification directe, au delà de 10; ce qui est un grand défaut. J'ai pris toutes les précautions possibles; mais cependant on n'est jamais sûr de ne pas se tromper dans un si long calcul. Le seul moyen, peut-être, de se procurer une vérification pour cette partie de la table, serait de sommer la série $li.a + li.2a + li.3a + \dots + li.xa$ par la méthode qu'EUCLER a donnée dans son Traité du Calcul différentiel (II. Art. 130); mais l'application en deviendrait très fastidieuse.“

werde, indem er völlig allgemein ist und das gesuchte li. x unmittelbar gibt. Es ist bekanntlich:

$$1x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \text{etc.}$$

und $1x = i1x^{\frac{1}{i}}$, so ist auch

$$1x = i\left\{(x^{\frac{1}{i}}-1) - \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \frac{1}{3}(x^{\frac{1}{i}}-1)^3 - \dots\right\}$$

welche Reihe man durch Annahme des willkürlichen i nach Belieben convergent machen kann. Man hat also

$$\frac{1}{1x} = \frac{1}{i}\left\{(x^{\frac{1}{i}}-1) - \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \frac{1}{3}(x^{\frac{1}{i}}-1)^3 - \dots\right\}^{-1}$$

$$= \frac{1}{i(x^{\frac{1}{i}}-1)} + \frac{A''}{i} + \frac{A'''}{i}(x^{\frac{1}{i}}-1) + \frac{A^{IV}}{i}(x^{\frac{1}{i}}-1)^2 + \dots$$

und

$$li.x = C + \int \frac{dx}{i(x^{\frac{1}{i}}-1)} + \frac{A''}{i}x + \frac{A'''}{i} \int (x^{\frac{1}{i}}-1)dx + \frac{A^{IV}}{i} \int (x^{\frac{1}{i}}-1)^2 dx + \dots$$

$$= C + 1\left\{\pm(x^{\frac{1}{i}}-1)\right\} + x^{\frac{1}{i}} + \frac{1}{2}x^{\frac{2}{i}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{i}} + \dots + \frac{1}{i-1}x^{\frac{i-1}{i}}$$

$$+ A'' \frac{x}{i}$$

$$+ A' \frac{x}{i} \left\{ \frac{x^{\frac{1}{i}}}{1 + \frac{1}{i}} - 1 \right\}$$

$$+ A'' \frac{x}{i} \left\{ \frac{x^{\frac{2}{i}}}{1 + \frac{2}{i}} - \frac{2x^{\frac{1}{i}}}{1 + \frac{1}{i}} + 1 \right\}$$

$$+ A''' \frac{x}{i} \left\{ \frac{x^{\frac{3}{i}}}{1 + \frac{3}{i}} - \frac{3x^{\frac{2}{i}}}{1 + \frac{2}{i}} + \frac{3x^{\frac{1}{i}}}{1 + \frac{1}{i}} - 1 \right\}$$

etc. etc.

Die Coefficienten sind dieselben, die aus der Entwicklung von

$$\frac{1}{1(1+\alpha)} = (\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \dots)^{-1}$$

in eine nach Potenzen von α steigende Reihe entstehen; ihr allgemeines Gesetz findet sich durch die Betrachtung des Binomii $(1+\alpha)^n = n$. Es ist nämlich

$$1u = n1(1+\alpha)$$

$$\left(\frac{d^n}{dn}\right) = n1(1+\alpha)$$

$$n + \text{const.} = 1(1+\alpha)fn \cdot dn$$

Nimmt man das Integral $\int n \cdot dn$ zwischen zwei Grenzen von n , N und N' , so hat man es

$$= \frac{(1+\alpha)^{N'} - (1+\alpha)^N}{1(1+\alpha)}$$

folglich, wenn man, um die leichteste Rechnung zu erhalten, $N' = 1$, $N = 0$ setzt:

$$\frac{\alpha}{1+(1+\alpha)^n} = \int_{\text{bis } n=1}^{\text{von } n=0} (1+\alpha)^n \cdot d n$$

oder

$$\frac{1}{1+(1+\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + \int n \cdot d n + \alpha \int \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot d n + \alpha^2 \int \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot d n + \dots$$

es ist also der n^{te} Coefficient

$$A^{(n)} = \int \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r+1} \cdot d n \quad \left[\begin{array}{l} \text{von } n=0 \\ \text{bis } n=1 \end{array} \right]$$

Auf diese Weise findet man

$$A^0 = \frac{1}{2} \dots \dots \dots = \frac{+1}{2}$$

$$A^1 = \frac{1}{1 \cdot 2} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right\} \dots \dots \dots = \frac{-1}{12}$$

$$A^2 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{3} + \frac{2}{2} \right\} \dots \dots \dots = \frac{+1}{24}$$

$$A^3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ \frac{1}{5} - \frac{6}{4} + \frac{11}{3} - \frac{6}{2} \right\} \dots \dots \dots = \frac{-19}{720}$$

$$A^4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{10}{5} + \frac{35}{4} - \frac{50}{3} + \frac{24}{2} \right\} = \frac{+3}{160}$$

etc. etc.

Die Relation zwischen zwei auf einander folgenden Coefficienten ergibt sich unmittelbar aus der Art ihrer Entstehung.

7.

Die in diese Coefficienten multiplicirten Functionen von x lassen sich auch sehr einfach und auf eine Art ausdrücken, die ihre Berechnung ausserordentlich erleichtert. Man denke sich die Reihe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}; \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ & \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}; \left(1 + \frac{2}{x}\right) \\ & \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}; \left(1 + \frac{3}{x}\right) \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

und nehme ihre successiven Differenzen, so wird man, wenn man die obersten Glieder in den Differenzreihen durch $A', A'', A''', A^{IV}, \dots$ bezeichnet, haben

$$\begin{aligned} A^0 &= 1 \\ A^1 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - 1 \\ A^2 &= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{2}{x}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{x}} + 1 \end{aligned}$$

$$A^{III} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{2}{x}} + \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{x}} - 1$$

$$A^{IV} = \frac{x^{\frac{4}{2}}}{1 + \frac{4}{x}} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{6x^{\frac{2}{2}}}{1 + \frac{2}{x}} - \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{x}} + 1$$

etc. etc.

also für li. x den äusserst einfachen, für $x=0$ verschwindenden Ausdruck:

$$\text{li. } x = 1 \left\{ \left(\frac{1}{x^i} - 1 \right) \right\} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{2}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \dots + \frac{x^{i-1}}{i-1} + \frac{x^i}{i} \left\{ A^0 A^0 + A^1 A^1 + A^2 A^2 + A^3 A^3 + \dots \right\}$$

Die Differenzen A^0, A^1 etc. convergiren immer, wenn $x^{\frac{1}{2}}$ kleiner ist als 2; um dieses zu zeigen, darf man nur die beiden dabei möglichen Fälle von einander sondern und zuerst $x^{\frac{1}{2}}$ zwischen 1 und 2, dann zwischen 0 und 1 annehmen. Im ersten Falle ist das Zunehmen der Reihe größer als das Zunehmen Abnehmen der Reihe $1, x^{\frac{1}{2}}, x^2, \text{ etc. } \dots$, folglich sind die n^{te} Differenzen kleiner als $(x^{\frac{1}{2}} - 1)^n$; sie convergiren also im ersten Falle, weil $x^{\frac{1}{2}} - 1$ ein eigentlicher Bruch, und weil ihre Convergenz grösser ist als die seiner Potenzen; im zweiten, weil sie sich schneller der Grenze 0 nähern als die Reihe der $(x^{\frac{1}{2}} - 1)^n$. Man kann also allgemein das Integral erhalten, wenn man i so gross annimmt, dass $x^{\frac{1}{2}}$ kleiner wird als 2. — Die höheren Glieder der Soldner'schen Tafel würde man hierdurch verificiren können.

8.

Wenn man sich das Integral als den Flächenraum zwischen einer durch Abscissen x und Ordinaten $\frac{1}{1-x}$ bestimmten Curve und der Axe denkt, so wird man sich das analytisch Gefundene auch sinnlich darstellen können. Es gehe senkrecht durch die Abscissenslinie, bei $x=1$, die Axe der Ordinaten auf beiden Seiten bis ins Unendliche; links von ihr liegen die Abscissen zwischen 0 und 1, rechts die übrigen bis ins Unendliche; über der Axe die positiven, unter derselben die negativen Ordinaten. Dieses angenommen, wird die Curve bei $x=0$ anfangen (indem negativer Zahlen

Logarithmen nicht existieren), ihren Zug unter der Axe der x nehmen und sich der Axe der Ordinaten asymptotisch nähern, indem $1.1 = 0$, also hier die Ordinate unendlich ist. Der zwischen der Curve und den Axen eingeschlossene Raum ist negativ und unendlich gross; nach Art. 2 = $C + 1.0$. Für $x > 1$ ist die Curve über der Axe der Abscissen; die Axe der Ordinaten ist, auch auf dieser Seite, ihre Asymptote, und die Räume, von $x = 1$ an gezählt, sind positiv unendlich gross. Das Integral für alle $x > 1$ ist also der Unterschied zweier unendlich grosser Räume. Es ist für $x < 1$ negativ, wird für $x = 1$ unendlich, allein für $x > 1$ wieder endlich; es bleibt anfangs negativ, wird dann = 0 und geht positiv weiter, bis es für ein unendliches x auch unendlich wird. Man hat also hier den in der Analyse nicht sehr gewöhnlichen Fall, dass zwei unendlich grosse Räume durch ihren Unterschied eine endliche und bestimmte Function bilden. Da, wenn x nur wenig grösser ist als 1, das Integral negativ, für ein sehr grosses x hingegen positiv ist, so muss es irgendwo = 0 sein und die Gleichung

$$0 = 1 \left\{ \pm x^{\frac{1}{i}} - 1 \right\} + x^{\frac{1}{i}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{i}}} + \frac{3}{x^{\frac{1}{i}}} + \dots + \frac{i-1}{x^{\frac{1}{i}}} \\ + \frac{x}{i} (A^0 \mathcal{P}^0 + A^1 \mathcal{D}^1 + A^2 \mathcal{D}^2 + \text{etc.})$$

muss zwei mögliche Wurzeln, $x = 0$ und $x = p$ haben, wo man p durch leicht zweckmässig anzuordnende Versuche

$$= 1,45136923495$$

findet. Es ist offenbar gleichgültig, ob man $\int \frac{dx}{1-x}$ von 0 oder von p bis x nimmt.

9.

Wenn x eine sehr grosse Zahl ist, so ist die Mühe, die die Berechnung ihres Integrallogarithmen nach der Methode Art. 6 verursacht, nicht unbedeutlich; sie wächst in gleichem Verhältnisse mit der Zahl i , und diese wird desto grösser, je grösser x wird. Es wird also gut sein, wenn wir dieser Methode noch eine andere an die Seite setzen; die folgende scheint allen billigen Forderungen zu entsprechen, indem sie einen erprobten Erfolg durch eine leichte Rechnung gewährt.

Man setze

$$\text{li. } x = \text{li. } \frac{x}{a} + Fx \left\{ A^0 + \frac{A^1}{1x} + \frac{A^2}{(1x)^2} + \frac{A^3}{(1x)^3} + \dots \right\} + C,$$

wo A^0, A^1, A^2, \dots unbestimmte Coefficienten sind und die eben so unbestimmte Function von x, Fx , nur eingeführt ist, um eine Gleichung mehr zu erhalten als Coefficienten zu bestimmen sind, und um dadurch ihre

Bestimmung einer fremden Bedingung, der der leichtesten Entwicklung, unterordnen zu können.

Man gehe nun von diesem Integrale zum Differentiale zurück, so wird man haben:

$$\frac{1}{1x} = \frac{1}{a(1x-1a)} + \left(\frac{dFx}{dx} \right) \left\{ A^0 + \frac{A^1}{1x} + \frac{A^2}{(1x)^2} + \frac{A^3}{(1x)^3} + \dots \right\} \\ - Fx \left\{ \frac{A^1}{(1x)^2} + \frac{2A^2}{(1x)^3} + \frac{3A^3}{(1x)^4} + \frac{4A^4}{(1x)^5} + \dots \right\}$$

Man wird die Coefficienten ausserordentlich leicht bestimmen können, wenn man $Fx = x$ setzt; also $Fx = x$ und

$$\frac{1}{1x} = \frac{1}{a(1x-1a)} + A^0 + \frac{A^1}{1x} + \frac{A^2}{(1x)^2} + \frac{A^3}{(1x)^3} + \frac{A^4}{(1x)^4} + \dots \\ - x \left\{ \frac{A^1}{(1x)^2} + \frac{2A^2}{(1x)^3} + \frac{3A^3}{(1x)^4} + \dots \right\}$$

woraus man, wenn man $\frac{1}{a(1x-1a)}$ in die Reihe

$$\frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{1x} + \frac{1a}{(1x)^2} + \frac{(1a)^2}{(1x)^3} + \dots \right\}$$

verwandelt, unmittelbar hat

$$0 = A^0$$

$$0 = A^1 - 1 + \frac{1}{a}$$

$$0 = A^2 - A^1 + \frac{1a}{a}$$

$$0 = A^3 - 2A^2 + \frac{(1a)^2}{a}$$

$$0 = A^4 - 3A^3 + \frac{(1a)^3}{a}$$

etc. etc.

$$0 = A^{(n+1)} - nA^{(n)} + \frac{(1a)^n}{a}$$

Es ist also allgemein

$$A^{(n+1)} = nA^{(n)} - \frac{(1a)^n}{a}$$

$$\text{oder } A^{(n)} = \frac{1}{n} A^{(n+1)} + \frac{1}{n} \frac{(1a)^n}{a}$$

Man kann auf diese Weise von einem Coefficienten zu dem nächst höheren oder niedrigeren übergehen und ihrer so viele finden, als man zur Berechnung von $\text{li. } x$ gebraucht. Indess würde selbst die schärfste Rechnung äusserst unbefriedigende Resultate geben, wenn man von dem niedrigsten Coefficienten $A^1 = 1 - \frac{1}{a}$ zu den höheren emporsteigen wollte; man würde die niedrigeren Coefficienten mit immer grösser werdenden Zahlen multipliciren müssen, und Fehler in der Rechnung, z. E. die vernachlässigten Decimalen der Logarithmen, würden sich enorm anhäufen. Man muss also den entgegengesetzten Weg gehen, von einem hohen Coefficienten muss man bis zum ersten herabsteigen, dessen

Werth $= 1 - \frac{1}{a}$ zur Controlle der Rechnung dienen wird. Hierdurch werden sich die Fehler, die sich bei dem entgegengesetzten Gange der Rechnung immer anhäufen, in demselben Maasse verkleinern; es ist also nicht gar zu sicher auf die vorgeschlagene Controlle zu rechnen, denn kleine Fehler in den höheren Coefficienten verlieren sich beim Herabsteigen, bis zum Verschwinden.

10.

Wir müssen nach diesen Bemerkungen den allgemeinen Werth des Coefficienten $A^{(n)}$ aufsuchen und dazu bieten sich mehrere Mittel dar. Es ist allgemein

$$v \cdot \frac{d^n \left(\frac{e^v + 1}{v} \right)}{d^n v^n} + n \cdot \frac{d^{n-1} \left(\frac{e^v - 1}{v} \right)}{d^n v^{n-1}} = e^v$$

folglich auch, wenn man statt v , $-la$ schreibt

$$-la \cdot \frac{d^n \left(\frac{a-1}{(-la)^n} \right)}{d^n (-la)^n} + n \cdot \frac{d^{n-1} \left(\frac{a-1}{(-la)^{n-1}} \right)}{d^n (-la)^{n-1}} = \frac{1}{a}$$

und wenn man mit $(la)^n$ multiplicirt

$$li \cdot x = li \cdot \frac{x}{a} + x \left\{ \frac{a-1}{dla} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{d \left(\frac{a-1}{dla} \right)}{dla} \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \frac{d^2 \left(\frac{a-1}{dla} \right)}{(dla)^2} \left(\frac{1}{x} \right)^3 - \dots \right\}$$

Da man hieraus für $a = 1$, $li \cdot x = li \cdot x$ erhält, so ist $C = 0$ und deshalb hier weggelassen.

Man kann nun leicht für $A^{(n)}$ einen endlichen von allen Differentialen befreiten Werth erhalten, allein durch die unendlichen Reihen wird man kürzer zum Ziele gelangen, weshalb ich nur diese hier untersuchen werde. Bekanntlich ist, x für la gesetzt:

$$\frac{a-1}{ala} = 1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^3}{1.2.3.4} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \dots$$

und hieraus

$$A' = x \left\{ 1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$A'' = x^2 \left\{ \frac{1}{1.3} - \frac{x}{1.3.4} + \frac{x^2}{1.2.3.5} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$A''' = x^3 \left\{ \frac{1}{1.4} + \frac{x^2}{1.2.5} - \frac{x^3}{1.2.3.6} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$A^{(4)} = x^4 \left\{ \frac{1}{1.5} - \frac{x}{1.5.6} + \frac{x^2}{1.2.3.7} + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$A^{(n)} = \frac{x^n}{n!} \left\{ 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right\}$$

erhält; die dieser Reihe beizufügende Ergänzung

$\frac{A^{(n+m)}}{n(n+1) \dots (n+m-1)}$ ist offenbar unendlich klein, wenn man $m = \infty$ setzt.

$$-(1a)^{n+1} \cdot \frac{d^n \left(\frac{a-1}{(dla)^n} \right)}{d^n (dla)^n} - n(1a)^n \cdot \frac{d^{n-1} \left(\frac{a-1}{(dla)^{n-1}} \right)}{d^n (dla)^{n-1}} = \frac{(1a)^n}{a}$$

Vergleicht man dieses mit der allgemeinen Relation unter den Coefficienten

$$-A^{(n+1)} + nA^{(n)} = \frac{(1a)^n}{a}$$

so ist es klar, dass, wenn man einmal für irgend ein n

$$+A^{(n)} = -(-1a)^n \cdot \frac{d^{n-1} \left(\frac{a-1}{(dla)^{n-1}} \right)}{(dla)^{n-1}}$$

hat, man für alle n denselben Ausdruck haben muss.

Es ist aber für $n = 1, 2, \dots$ dieser Ausdruck $= \frac{a-1}{a}$, $\frac{a-1}{a} + \frac{1a}{a}$, \dots gleich den aus der im vorigen Art. gegebenen Relation gefolgerten A', A'', \dots ; also allgemein

$$A^{(n)} = -(-1a)^n \cdot \frac{d^{n-1} \left(\frac{a-1}{(dla)^{n-1}} \right)}{(dla)^{n-1}}$$

und hieraus erhalten wir für $li \cdot x$ den eleganten Ausdruck:

$$\text{und allgemein ist}$$

$$A^{(n)} = x^n \left\{ \frac{1}{n} - \frac{x}{1(n+1)} + \frac{x^2}{1.2(n+2)} - \frac{x^3}{1.2.3(n+3)} + \text{etc.} \dots \right\}$$

Einen noch bequemern Ausdruck für $A^{(n)}$ findet man unmittelbar aus der Relation zwischen den Coefficienten:

$$A^{(n)} = \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n} A^{(n+1)}$$

$$A^{(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n+1} A^{(n+2)}$$

$$A^{(n+2)} = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{1}{n+2} A^{(n+3)}$$

etc. etc.

woraus man, wenn man immer den folgenden im vorhergehenden substituirt und dieses bis ins Unendliche fortsetzt, die Reihe

11.

Es ist klar, dass $\frac{A^{(n)}}{x^n}$ desto kleiner wird, je größer n ist; für ein negatives x ergibt sich dieses unmittelbar aus dem ersten, für ein positives aus dem

zweiten Reihenwerthe. Die für li. x gefundene Reihe wird also immer convergiren, wenn la kleiner ist als lx; allein ist la = lx, so hört ihre Convergenz auf, und für la grösser als lx divergirt sie; man kann daher keinen Integralalgorithmus für eine Zahl auf der einen Seite der 1 benutzen, um unmittelbar nach der gegebenen Methode einen für eine Zahl auf der andern daraus zu berechnen. Für 1 wird der Integralalgorithmus ∞ , und diese Scheidewand bleibt uns unübersteiglich, indem hier die Stetigkeit der Curve unterbrochen ist.

12.

Oben fanden sich zwei verschiedene Reihenwerthe für $A^{(n)}$, woraus man erhält:

$$S = \frac{1}{n} - \frac{x}{1(n+1)} + \frac{x^2}{1.2(n+2)} - \frac{x^3}{1.2.3(n+3)} + \dots$$

$$= e^{-x} \left\{ \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^3}{n(n+1)(n+2)} + \dots \right\}$$

Es schien mir interessant, diese bemerkenswerthe Gleichung allgemeiner und unabhängig von der Bedingung, dass n, wie hier, eine ganze Zahl ist, herzuleiten. Ich werde zu diesem Ende beide Reihen nach Potenzen von n ordnen und die erste

$$S = \frac{\alpha'}{n} + \frac{\alpha''}{n^2} + \frac{\alpha'''}{n^3} + \frac{\alpha^{iv}}{n^4} + \text{etc.}$$

setzen, wo also

$$\alpha' = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$\alpha'' = +x - \frac{2.x^2}{1.2} + \frac{3.x^3}{1.2.3} - \frac{4.x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$\alpha''' = -x + \frac{2^2.x^2}{1.2} - \frac{3^2.x^3}{1.2.3} + \frac{4^2.x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

etc. etc.

Diese Reihen können leicht summiert werden, denn es ist:

$$\alpha' = e^{-x}$$

$$\alpha'' = -z \left(\frac{d\alpha'}{dz} \right) = e^{-z}.z$$

$$\alpha''' = -z \left(\frac{d\alpha''}{dz} \right) = e^{-z}.z(z-1)$$

$$\alpha^{iv} = -z \left(\frac{d\alpha'''}{dz} \right) = e^{-z}.z(z^2-3z+1)$$

$$\alpha^v = -z \left(\frac{d\alpha^{iv}}{dz} \right) = e^{-z}.z(z^3-6z^2+7z-1)$$

$$\alpha^{vi} = -z \left(\frac{d\alpha^v}{dz} \right) = e^{-z}.z(z^4-10z^3+25z^2-15z+1)$$

etc. etc.

Entwickelt man nun auch die Reihe

$$S' = \frac{\beta'}{n} + \frac{\beta''}{n(n+1)} + \frac{\beta'''}{n(n+1)(n+2)}$$

$$+ \frac{\beta^{iv}}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}$$

nach Potenzen von n, so wird man, wenn man beide gleich setzt, aus einer Vergleichung mit $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ die Coefficienten $\beta', \beta'', \beta''', \dots$ bestimmen können. Ich werde dieser Entwicklung die des Bruchs

$$T = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+r)}$$

auf welche sie sich gründet, vorangehen lassen. Man setze den Bruch

$$T = \frac{y^r}{n} + \frac{y'}{n+1} + \frac{y''}{n+2} + \dots + \frac{y^{(r)}}{n+r}$$

so wird der aus seiner Entwicklung in eine rückkehrende Reihe entstehende Coefficient von $\left(\frac{1}{n}\right)^\mu$

$$= (-1)^{\mu-1} \{ 0^{\mu-1}y^0 + 1^{\mu-1}y' + 2^{\mu-1}y'' + \dots + r^{\mu-1}y^{(r)} \}$$

sein. Da aber das niedrigste Glied von $T = \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}$ ist, folglich die Coefficienten aller vorhergehenden Potenzen von $\frac{1}{n}$ verschwinden, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$0 = y^0 + y' + y'' + \dots + y^{(r)}$$

$$0 = y' + 2.y'' + 3.y''' + \dots + r.y^{(r)}$$

$$0 = y'' + 2^2.y''' + 3^2.y^{(4)} + \dots + r^2.y^{(r)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 = y' + 2^{r-1}.y'' + 3^{r-1}.y''' + \dots + r^{r-1}.y^{(r)}$$

$$1 = y' + 2^r.y'' + 3^r.y''' + \dots + r^r.y^{(r)}$$

Ihre Anzahl ist so gross, als die der zu bestimmenden $y, = r+1$. Völlig ähnliche Gleichungen kann man aus dem Binomio $(r+y)^r = \lambda$ entwickeln; es ist nämlich

$$\lambda = 1 + \frac{r}{1}.y + \frac{r(r-1)}{1.2}.y^2 + \dots + y^r$$

$$\lambda' = y \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) = \frac{r}{1}.y + \frac{r(r-1)}{1.2}.2.y^2 + \dots + r.y^r$$

$$\lambda'' = y \left(\frac{d\lambda'}{dy} \right) = \frac{r}{1}.y + \frac{r(r-1)}{1.2}.2^2.y^2 + \dots + r^2.y^r$$

$$\lambda''' = y \left(\frac{d\lambda''}{dy} \right) = \frac{r}{1}.y + \frac{r(r-1)}{1.2}.2^3.y^2 + \dots + r^3.y^r$$

etc. etc.

und wenn man hierin $y = -1$ setzt:

$$0 = 1 - \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2} - \dots + (-1)^r$$

$$0 = -\frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2}.2 - \dots + r(-1)^r$$

$$0 = -\frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2}.2^2 - \dots + r^2(-1)^r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 = -\frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2}.2^{r-1} - \dots + r^{r-1}(-1)^r$$

$$1.2.3\dots r = -\frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2}.2.r - \dots + r^r(-1)^r$$

Also ist allgemein

1. 2. 3. . . . r. $\gamma^{(k)} = \frac{r(r-1)\dots r-k+1}{1.2\dots k} (-1)^k$ | Man hat also

$$T = \frac{1}{1.2.3\dots r} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{r}{n+1} + \frac{r(r-1) \cdot 1.2}{n+2} - \frac{r(r-1)(r-2) \cdot 1.2.3}{n+3} + \dots \right\}$$

folglich den aus der Entwicklung von T entstehenden Coefficienten von $\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\dots r} \left\{ 0^{n-1} - r \cdot 1^{n-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot 2^{n-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} \cdot 3^{n-1} + \dots \right\}$$

Es verwandelt sich demnach die Reihe S' in

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta'}{n} + \frac{\beta''}{n^2} - \beta'' \right\} \frac{1}{n^2} + \left. \begin{aligned} \beta'' \\ + \beta''' \end{aligned} \right\} \frac{1}{n^3} - \left. \begin{aligned} \beta'' \\ + \beta'''' \end{aligned} \right\} \frac{1}{n^4} + \left. \begin{aligned} \beta'' \\ + \beta'''' \end{aligned} \right\} \frac{1}{n^5} \text{ etc.} \\ \left. \begin{aligned} -3\beta''' \\ + \beta^{IV} \end{aligned} \right\} -15\beta'''' \\ \left. \begin{aligned} -6\beta^{IV} \\ + \beta^V \end{aligned} \right\} +25\beta^V \\ \left. \begin{aligned} + \beta^V \end{aligned} \right\} -10\beta^V \\ \left. \begin{aligned} + \beta^V \end{aligned} \right\} + \beta^V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta' &= e^{-x} \\ \beta'' &= x e^{-x} \\ \beta''' &= x^2 e^{-x} \\ \beta^{IV} &= x^3 e^{-x} \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

folglich allgemein, n mag sein was man will:

$$\frac{1}{n} - \frac{x^2}{1(n+1)} + \frac{x^3}{1.2(n+2)} - \frac{x^3}{1.2.3(n+3)} + \dots = e^{-x} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{x^1}{n(n+1)} + \frac{x^2}{n(n+1)(n+2)} + \dots \right\}$$

13.

Diese Transformation führt zu noch einer Bestimmung von $li.x$. Lässt man nämlich in den eben angeführten Reihen n unendlich abnehmen, so wird die obere

$$\frac{1}{n} - x + \frac{x^2}{1.2.2} - \frac{x^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.4} - \text{etc.} \dots$$

und die ihr gleichgültige

und da man oben $S =$

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{-x}}{n} + \frac{x e^{-x}}{n^2} + x^2 \frac{e^{-x}}{n^3} + x^3 \frac{e^{-x}}{n^4} + x^4 \frac{e^{-x}}{n^5} \text{ etc.} \\ -x \end{aligned} \right\} -3x^2 \left\} -6x^3 \left\} -10x^4 \left\} \dots \right. \\ \left. \begin{aligned} +x \\ +7x^2 \\ -x \end{aligned} \right\} +25x^3 \left\} +15x^2 \left\} \dots \right. \\ \left. \begin{aligned} +x \end{aligned} \right\} +x \end{aligned}$$

fand, so ist, wenn man $S = S'$ setzt, offenbar

$$\frac{e^{-x}}{n} \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \right\} - e^{-x} \cdot x \left\{ 1 + \frac{(1+x)}{1.2} x + \frac{(1+\frac{1}{2}+x)}{1.2.3} x^2 + \frac{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+x)}{1.2.3.4} x^3 + \dots \right\}^*$$

Es folgt hieraus

$$-x + \frac{x^2}{1.2.2} - \frac{x^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.4} - \dots = -e^{-x} \left\{ x + \frac{(1+\frac{1}{2})}{1.2} x^2 + \frac{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{1.2.3} x^3 + \dots \right\}$$

*) Für ein unendlich kleines n ist $T(12) =$

$$= \frac{1}{1.2.3\dots r \cdot n} \left\{ 1 + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{r}}{n} \right\} = \frac{1}{1.2.3\dots r \cdot n} - \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{r}}{1.2.3\dots r}$$

Entwickelt man es dagegen nach der Zerfällung in Factoren, so hat man aus einer Vergleichung mit dem hier gefundenen Werthe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} = r \left\{ 1 - \frac{r-1}{2^r} + \frac{(r-1)(r-2) \cdot 1.2}{3^r} - \frac{(r-1)(r-2)(r-3) \cdot 1.2.3}{4^r} + \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{r^r} \right\}$$

Es folgt hieraus, dass die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}$,

durch r dividirt, die erste $(r-1)$ Differenz der Reihe $1, \frac{1}{2^r},$

$\frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \dots$ ist; jedoch für ein gerades r mit verkehrtem Zeichen genommen. Auch gibt diese Umformung der harmonischen Reihe eine Bestimmung der Art 2 erwähnten Constante. Es ist nämlich, wenn $li.0$ verschwinden soll,

$$0 = C + 1.1x - 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} - \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \dots$$

für ein unendlich grosses $1x$, welches wir durch m bezeichnen wollen, oder

$$C = -1m - \int \frac{e^{-x} - 1}{x} dx \left[\begin{array}{l} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = m \end{array} \right]$$

Für ein endliches x ist bekanntlich $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$; allein selbst für ein unendliches x , wenn dieses nur kleiner ist als $2m$ (so dass $1 - \frac{x}{m}$ ein eigentlicher Bruch ist, dessen unendliche Potenz = 0), hat man $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$, folglich:

und wenn man statt $-x$, $1x$ setzt und sich an den Art. 2 gegebenen Reihenausdruck für $1x$ erinnert:

$$1x = C + 1(\pm 1x) + x \left\{ 1x - \frac{(1x)^2}{1 \cdot 2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{(1x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \frac{(1x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \text{etc.} \dots \right\}$$

Man kann diese Reihe in einen continuirlichen Bruch verwandeln, der, so wie sie selbst, immer convergiren wird. Seine Fortschreitung ist aber nichts weniger als einfach und seine Entwicklung deshalb wohl nicht der Mühe werth, desto weniger, je bequemer die vorher angeführten Methoden zur Berechnung der Integrallogarithmen sind.

14.

Will man sehr schnell zu dem Integrallogarithmen einer sehr grossen Zahl emporsteigen, so wird man am bequemsten die Methode Art. 10 dazu benutzen. Man

setze zu diesem Ende $x = a^m$, so hat man

$$1i.a^m = 1i.a^{m-1} + a^m \left\{ \frac{A'}{m1a} + \frac{A''}{m^2(1a)^2} + \frac{A'''}{m^3(1a)^3} + \dots \right\}$$

oder wenn man $\frac{A'}{(1a)'} = B^{(r)}$ setzt:

$$1i.a^m = 1i.a^{m-1} + a^m \left\{ \frac{B'}{m} + \frac{B''}{m^2} + \frac{B'''}{m^3} + \dots \right\}$$

Aber man hat auch

$$1i.a^{m-1} = 1i.a^{m-2} + a^{m-1} \left\{ \frac{B'}{(m-1)} + \frac{B''}{(m-1)^2} + \frac{B'''}{(m-1)^3} + \dots \right\}$$

und ähnliche Ausdrücke für $1i.a^{m-2}$, $1i.a^{m-3}$, etc. woraus man erhält:

$$1i.a^m = 1i.a^{m-r} + B' \left\{ \frac{a^m}{m} + \frac{a^{m-1}}{m-1} + \frac{a^{m-2}}{m-2} + \dots + \frac{a^{m-r+1}}{m-r+1} \right\} \\ + B'' \left\{ \frac{a^m}{m^2} + \frac{a^{m-1}}{(m-1)^2} + \frac{a^{m-2}}{(m-2)^2} + \dots + \frac{a^{m-r+1}}{(m-r+1)^2} \right\} \\ + B''' \left\{ \frac{a^m}{m^3} + \frac{a^{m-1}}{(m-1)^3} + \frac{a^{m-2}}{(m-2)^3} + \dots + \frac{a^{m-r+1}}{(m-r+1)^3} \right\} \\ \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Ich habe diese Abänderung der Methode benutzt, die Integrallogarithmen für die Potenzen der 10 zu berechnen und deshalb die Zahlenwerthe von B' , B'' , ... für $a = 10$ entwickelt. Ich gebe diese Zahlen hier, weiter fortgesetzt als man sie bedarf, bis zur 29^{ten}.

B'	= 0,39086503417	Log B'	= 9,5920268207
$2 B^{(2)}$	= 0,26264215837	" $B^{(2)}$	= 9,1014758273
$3 B^{(3)}$	= 0,19887494129	" $B^{(3)}$	= 8,8214588097
$4 B^{(4)}$	= 0,17176336560	" $B^{(4)}$	= 8,6328706499
$5 B^{(5)}$	= 0,15583216811	" $B^{(5)}$	= 8,4936871088
$6 B^{(6)}$	= 0,14548561489	" $B^{(6)}$	= 8,3846688036
$7 B^{(7)}$	= 0,13827906057	" $B^{(7)}$	= 8,2956583803
$8 B^{(8)}$	= 0,13299507826	" $B^{(8)}$	= 8,2207455829
$9 B^{(9)}$	= 0,12896622378	" $B^{(9)}$	= 8,1562334741
$10 B^{(10)}$	= 0,12579871136	" $B^{(10)}$	= 8,0996761928
$11 B^{(11)}$	= 0,12324661784	" $B^{(11)}$	= 8,049823249
$12 B^{(12)}$	= 0,12114684485	" $B^{(12)}$	= 8,0041308618

$13 B^{(13)}$	= 0,11939145445	Log $B^{(13)}$	= 7,9630298905
$14 B^{(14)}$	= 0,1179024232	" $B^{(14)}$	= 7,9263946988
$15 B^{(15)}$	= 0,11662385488	" $B^{(15)}$	= 7,8906961334
$16 B^{(16)}$	= 0,11551437509	" $B^{(16)}$	= 7,8585160504
$17 B^{(17)}$	= 0,1145427234	" $B^{(17)}$	= 7,8285185983
$18 B^{(18)}$	= 0,11368487260	" $B^{(18)}$	= 7,8004301743
$19 B^{(19)}$	= 0,11292202840	" $B^{(19)}$	= 7,7740250696
$20 B^{(20)}$	= 0,11223931261	" $B^{(20)}$	= 7,7491150026
$21 B^{(21)}$	= 0,11162478426	" $B^{(21)}$	= 7,7255413377
$22 B^{(22)}$	= 0,11106875489	" $B^{(22)}$	= 7,7031692225
$23 B^{(23)}$	= 0,11056328093	" $B^{(23)}$	= 7,6818830817
$24 B^{(24)}$	= 0,11010179091	" $B^{(24)}$	= 7,6615883416
$25 B^{(25)}$	= 0,10967880164	" $B^{(25)}$	= 7,6421826880
$26 B^{(26)}$	= 0,10928970172	" $B^{(26)}$	= 7,6236058927
$27 B^{(27)}$	= 0,10893088702	" $B^{(27)}$	= 7,6057860799
$28 B^{(28)}$	= 0,10859812838	" $B^{(28)}$	= 7,5886643092
$29 B^{(29)}$	= 0,10828947173	" $B^{(29)}$	= 7,5721882364

$$C = -1m + \int \frac{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m - 1}{x} dx \quad \left[\begin{array}{l} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = m \end{array} \right] \\ = -1m + m \left\{ 1 - \frac{m-1}{2 \cdot 3^2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3^2} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4^3} + \dots \right\} \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - 1m = \text{der von MACHIONNI und SOLENER gefundene Zahl.}$$

Um mit der Hilfe dieser Coefficienten die Integrallogarithmen bis auf 6 Decimalstellen des den Ganzen folgenden Bruchs zu berechnen, gebraucht man bei dem Uebergange

von	10	zu	100	...	19	Glieder
"	100	"	1000	...	16	"
"	1000	"	10000	...	14	"
"	10000	"	100000	...	14	"
"	100000	"	1000000	...	13	"

u. s. w.

Mehr als 19 Glieder darf man also nie berechnen, selbst wenn man von 10 unmittelbar zu 100000 oder noch höher steigen wollte. Man kann hiernach die Convergenz der Reihe, die selbst für ein so grosses a ($= 10$) sich ziemlich schnell nähert, beurtheilen.

15.

Für $a = 2, \frac{3}{2}$ und $\frac{7}{6}$ habe ich eine ähnliche Rechnung ausgeführt, doch nicht für die Reihe der B', B'', \dots , sondern für die in diesem Falle bequemer anzuwendenden A', A'', \dots ; ihre Resultate lasse ich hier folgen.

Coefficienten für $a = 2$. Coefficienten für $a = \frac{3}{2}$.

$A^{(1)} = 0,6$	$A^{(1)} = 0,3333333333$
$A^{(2)} = 0,163426409780$	$A^{(2)} = 0,063023261261$
$A^{(3)} = 0,066626312481$	$A^{(3)} = 0,016445199285$
$A^{(4)} = 0,033366611448$	$A^{(4)} = 0,004896155776$
$A^{(5)} = 0,018048896602$	$A^{(5)} = 0,001565954806$
$A^{(6)} = 0,010243133632$	$A^{(6)} = 0,000523892739$
$A^{(7)} = 0,006006092374$	$A^{(7)} = 0,000180692159$
$A^{(8)} = 0,003605757430$	$A^{(8)} = 0,000063734089$
$A^{(9)} = 0,002203638075$	$A^{(9)} = 0,000022664102$
$A^{(10)} = 0,001365623418$	$A^{(10)} = 0,000008311932$

Coefficienten für $a = \frac{7}{6}$.

$A^{(1)} = 0,142857142857$
$A^{(2)} = 0,010727988720$
$A^{(3)} = 0,001088178502$
$A^{(4)} = 0,000124825453$
$A^{(5)} = 0,000015513373$
$A^{(6)} = 0,000001959829$

Die Convergenz dieser Reihen wird man aus dem folgenden Täfelchen beurtheilen; seine erste Column enthält die Zahl, für welche man den Integrallogarithmen bis auf 1 Milliontheilchen einer Einheit genau berechnen will, und die folgenden geben die Anzahl der Glieder, die man dazu anwenden muss:

$a = 2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$
100	8	6
1000	7	6
10000	7	6
100000	8	7
1000000	8	6

Die Potenzen des natürlichen Logarithmen von 2, die bei dieser Rechnung gebraucht wurden, mögen, da sie vielleicht auch sonst noch benutzt werden können, hier einen Platz finden:

$12 = 0,69314 71805 69945$	$(12)^7 = 0,07687 37783 72053$
$(12)^8 = 0,49045 30139 17221$	$(12)^8 = 0,05328 48427 37468$
$(12)^9 = 0,33302 46519 88043$	$(12)^9 = 0,03693 42385 10034$
$(12)^{10} = 0,23083 50985 82469$	$(12)^{10} = 0,02560 08632 89359$
$(12)^{11} = 0,16000 26977 56390$	$(12)^{11} = 0,01774 51682 08890$
$(12)^{12} = 0,11090 54188 31757$	$(12)^{12} = 0,01230 00119 26247$

16.

Die Construction einer speziellen Tafel der Integrallogarithmen wird nun verhältnissmässig wenig Mühe verursachen, denn mit den gegebenen Coefficienten kann man die Integrallogarithmen für alle Vielfachen der Potenzen der 10, von 2 bis 9, berechnen. Es ist nämlich:

$li. 2 \cdot 10^a = li. 2 \cdot 10^a$
$li. \frac{1}{2} (2 \cdot 10^a) = li. 3 \cdot 10^a$
$li. 2 (2 \cdot 10^a) = li. 4 \cdot 10^a$
$li. \frac{1}{2} \cdot 10^{a+1} = li. 5 \cdot 10^a$
$li. 2 (3 \cdot 10^a) = li. \frac{1}{2} (4 \cdot 10^a) = li. 6 \cdot 10^a$
$li. \frac{1}{2} (6 \cdot 10^a) = li. 7 \cdot 10^a$
$li. 2 (4 \cdot 10^a) = li. 8 \cdot 10^a$
$li. \frac{1}{2} (6 \cdot 10^a) = li. 9 \cdot 10^a$

Auf diese Weise habe ich, als ein Specimen, die folgende Tafel construiert, der der Integrallogarithme von 100 = 30,1261416 zum Grunde liegt:

$li. 1000 = 177,609658^*)$
$li. 10000 = 1246,137249$
$li. 100000 = 9529,86904$
$li. 200000 = 18036,05216$
$li. 300000 = 26086,69223$
$li. 400000 = 33932,62200$
$li. 500000 = 41606,05007$
$li. 600000 = 49172,92711$
$li. 1000000 = 78627,54928$

*) Aus SÖLDNER'S Tafel findet sich durch Interpolation aus den Integrallogarithmen von 800, 880, 960, 1040, 1120, 1200, 1280, $li. 1000 = 177,60965$. Die nahe Uebereinstimmung beweist SÖLDNER'S Sorgfalt, ohne welche seine Methode nicht so gute Resultate gegeben haben würde. $li. 100$ ist nach SÖLDNER'S Rechnung = 30,126139; — meine Angabe gründet sich sowohl

Die Ausfüllung der Zwischenräume ist leicht, da die Reihe sehr schnell convergirt, wenn a nur wenig grösser ist als 1.

17.

Eine Art von Verbindung zwischen den Integrallogarithmen und der Quadratur des Kreises, die EULER so eifrig suchte, existirt wirklich. Es ist nämlich (Art. 2):

$$\text{li. } x = C + 1(\pm 1x) + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \dots$$

$$\text{li. } \frac{1}{x} = C + 1(\pm 1x) - 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} - \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \dots$$

und wenn man beide Werthe von einander abzieht und mit $21x$ dividirt:

$$\frac{\text{li. } x - \text{li. } x^{-1}}{21x} = 1 + \frac{(1x)^2}{1.2.3.3} + \frac{(1x)^4}{1.2.3.4.5.5} + \dots$$

Der Logarithme hiervon enthält nur gerade Potenzen von $1x$, oder es ist

$$1 \left\{ \frac{\text{li. } x - \text{li. } x^{-1}}{21x} \right\} = \Sigma \varepsilon^{(n)} (1x)^{2n}$$

ebenso ist

$$1 \left\{ \frac{\text{li. } x^2 - \text{li. } x^{-2}}{2.1x} \right\} = \Sigma \varepsilon^{(n)} (1x)^{2n} \cdot 2^{2n}$$

$$1 \left\{ \frac{\text{li. } x^3 - \text{li. } x^{-3}}{3.21x} \right\} = \Sigma \varepsilon^{(n)} (1x)^{2n} \cdot 3^{2n}$$

u. s. w.

Da aber bekanntlich

$$0 = 1 - 2^{2^n} + 3^{2^n} - 4^{2^n} + 5^{2^n} - \dots \text{ ad infin.}$$

so ist, wenn man zur Abkürzung $\text{li. } x^2 - \text{li. } x^{-2}$ durch F_k bezeichnet:

$$0 = 1 \left(\frac{F_1}{21x} \right) - 1 \left(\frac{F_2}{2.21x} \right) + 1 \left(\frac{F_3}{3.21x} \right) - 1 \left(\frac{F_4}{4.21x} \right) + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \dots = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_3}{F_4} \cdot \frac{F_5}{F_6} \dots$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \dots = \frac{F_1}{1x} \cdot \frac{F_3}{F_2} \cdot \frac{F_5}{F_4} \dots$$

und wenn man beide Ausdrücke mit einander multiplicirt und sich an den von WALLIS gefundenen Satz

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \dots$$

erinnert, wo π wie gewöhnlich den halben Umfang des Kreises bedeutet:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{F_1}{1x} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_3}{F_2} \cdot \frac{F_3}{F_4} \cdot \frac{F_5}{F_4} \cdot \frac{F_5}{F_6} \cdot \frac{F_7}{F_6} \dots$$

auf den als bekannt angenommenen $\text{li. } 10 = 6.165996048$ und die Coefficienten des Art. 14, als auch auf eine directe Rechnung: — beide Methoden gaben die angeführte Zahl.

18.

Die grosse Anzahl von Differentialen, die sich auf $\frac{dx}{1x}$ zurückführen lässt, kann man als integrirt betrachten, wenn man eine Tafel der Integrallogarithmen besitzt. Eine weit ausgedehnte Classe solcher Differentiale ist in dem allgemeinen Ausdruck

$$\frac{a^x x^p + a^x x^q + \dots + r x^t}{b + b^1 x + b^2 (1x)^2 + \dots + b^{(k)} (1x)^k} \cdot dx$$

begriffen. Man kann ihn in eine Summe von Gliedern von der Form

$$\frac{c^x \cdot x^n \cdot dx}{(c + c^1 x)^m}$$

verwandeln, die sich, wenn man

$$(n+1) \left(\frac{c}{c^1} + 1x \right) = x$$

setzt, auf

$$\frac{c^x \cdot (n+1)^{m-1}}{c^x \cdot c^x \cdot c^x} \cdot \frac{dx \cdot c^1}{x^m}$$

reduciren, und wenn man die Integration von $\frac{dx \cdot c^1}{x}$ als bekannt annimmt, durch endliche Ausdrücke integrirt werden können.

Specielle Fälle hiervon sind:

$$\int \frac{x^n \cdot dx}{c + c^1 x} = \frac{\text{li. } c^{\frac{(n+1)}{c^1} x} \cdot c^{\frac{n+1}{c^1}}}{c^1 \cdot c^{\frac{n+1}{c^1}}}$$

$$\int \frac{x^n \cdot dx}{1x} = \text{li. } x^{n+1}$$

oder wenn man statt $1x$, x^m schreibt und damit einige leicht zu übersehende Veränderungen vornimmt:

$$\int \frac{e^{(n+1)x} \cdot x^{m-1} \cdot dx}{c + c^1 x^m} = \frac{\text{li. } e^{\left(\frac{c}{c^1} + x\right)^{m+1}}}{m \cdot c^1 \cdot e^{\frac{(n+1)c}{c^1}}}$$

$$\int \frac{e^{(n+1)x} \cdot dx}{z} = \frac{\text{li. } e^{(n+1)x}}{m}$$

$$\int \frac{e^{x^2} \cdot dx}{c + c^1 z} = \frac{\text{li. } e^{\left(\frac{c}{c^1} + z\right)^2}}{c^1 \cdot e^{\frac{c}{c^1}}}$$

$$\int \frac{e^{x^2} \cdot dx}{z} = \text{li. } c^{x^2}$$

$$\int e^{c^1 x} \cdot dx = \frac{1}{c^1} \text{li. } e^{c^1 x}$$

$$\int e^{x^2} \cdot dx = \text{li. } e^x$$

Eine andere Classe von Integralen, die durch unere Transcendente aufgelöst werden, ist unter der Form

$$\int dx \int dx \int dx \dots \int dx$$

begriffen. Es ist nämlich

$$\int li. x^n \cdot x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} li. x^n - \frac{li. x^{n+1}}{n+1}$$

und hieraus, wenn man der Kürze wegen die nach jeder Integration hinzuzufügende Constante = 0 setzt:

$$\int \frac{dx}{1-x} = li. x$$

$$\int dx \int \frac{dx}{1-x} = x li. x - li. x^2$$

$$\int dx \int dx \int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2} (x^2 li. x - 2x li. x^2 + li. x^3)$$

$$\int dx \int dx \int dx \int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{6} (x^3 li. x - 3x^2 li. x^2 + 3x li. x^3 - li. x^4)$$

u. s. w.

Es würden sich noch mehr Anwendungen von den Integrallogarithmen machen lassen, allein mit Unrecht würden sie hier mehr Raum einnehmen. Ich bemerke daher nur noch, dass das specielle Integral $\int (x^m - x^n) \frac{dx}{1-x}$ von 0 bis 1 genommen, welches EULER schon fand, aus dem Ausdrücke

$$\int \frac{x^m dx}{1-x} = li. x^{m+1}$$

leicht folgt. Man hat nämlich (Art. 2): $li. x^{m+1} - li. x^{n+1}$

$$= 1.1. x^{m+1} - 1.1. x^{n+1}$$

$$+ (m+1)x + \frac{(m+1)^2 (1-x)^2}{1.2.2} + \dots$$

$$- (n+1)x - \frac{(n+1)^2 (1-x)^2}{1.2.2} - \dots$$

und wenn man hierin x der Einheit unendlich nahe, folglich $1-x$ unendlich klein annimmt:

$$\int (x^m - x^n) \frac{dx}{1-x} = 1 \left(\frac{m+1}{n+1} \right) \dots \left[\begin{matrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{matrix} \right]$$

welcher Ausdruck, nach der Art. 2 gemachten Bemerkung, selbst dann als reell angesehen werden kann, wenn m oder n negativ und grösser als 1 ist.

So wie die Logarithmen mit den Kreisfunctionen, so hängen auch die Integrallogarithmen mit einer anderen transcendenten Function, dem Integrale von $\frac{dx}{x} \sin x$ zusammen. Man hat nämlich:

$$\int \frac{dx}{x} \sin x = \frac{li. e^{x\sqrt{-1}} - li. e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x} \cos x = \frac{li. e^{x\sqrt{-1}} + li. e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

Diese Function und ihre Vergleichung mit den Integrallogarithmen ist einer genaueren Untersuchung nicht unwerth und gibt mir vielleicht in der Folge die Veranlassung zur Fortsetzung des Gegenwärtigen.

19. Anhang.

Zum Schluss dieser Untersuchung mag hier noch eine Anwendung der Integrallogarithmen auf eine Aufgabe aus der Physik einen Platz finden. Man hat bekanntlich in der neueren Zeit die aus der Luft gefallenen Steine als aus dem Weltraume kommend betrachtet, allein vergebens die Geschwindigkeit zu bestimmen gesucht, mit welcher sie in dieser Voraussetzung die Erde erreichen. Die Auflösung dieser Aufgabe hängt von den Integrallogarithmen ab*) und kann ohne diese nicht erhalten werden; mit ihrer Hülfe ist sie, unter einigen Einschränkungen, nicht schwierig.

Ich nehme einen kugelförmigen Körper, dessen Dichte ρ und Durchmesser D ist, sich in gerader Linie dem Mittelpunkte der Erde nähernd, an; die Erde als ruhend und von einer Flüssigkeit umgeben, deren der Höhe z zugehörige Dichte

$$d' = \Delta e^{-z: a}$$

ist; den mittlern Halbmesser der Erde nenne ich a , die Fallhöhe der Körper in der ersten Secunde g .

Nach NEWTON ist der Widerstand, den die mit der Geschwindigkeit v bewegte Kugel erleidet

$$= \frac{v^3 D^3 \pi e^{-z: a}}{32 g} \Delta,$$

die in ihr enthaltene Masse aber ist

$$= \frac{1}{2} D^3 \pi \rho$$

und daher die ihre Bewegung störende Kraft

$$= \frac{3 \Delta e^{-z: a}}{16 g D g} v^3.$$

Man hat also, wenn man um abzukürzen $\frac{3 \Delta}{8 g D} = \alpha$ setzt:

$$0 = \frac{dz}{dt^2} + \left(\frac{a}{a+z} \right)^2 - \frac{\alpha}{2g} e^{-z: a} v^3$$

und wenn man mit $2dz$ multiplicirt und statt $\frac{dz \cdot ddz}{dt^2} \frac{d \cdot v^3}{2}$ schreibt:

$$0 = d \cdot v^3 + \left\{ 2 \left(\frac{a}{a+z} \right)^2 - \frac{\alpha}{g} e^{-z: a} v^3 \right\} dz$$

Soll v die Geschwindigkeit in einer Secunde ausdrücken, so muss man die Kraft mit $2g$ multipliciren, wodurch sich die Gleichung in

$$0 = d \cdot v^3 \left\{ 4g \left(\frac{a}{a+z} \right)^2 - 2\alpha e^{-z: a} \right\} dz$$

verwandelt. Ihr Integral, von Z und V bis z und v genommen, ist:

$$v^3 e^{3\alpha z: a} - V^3 e^{3\alpha Z: a} = -4g \left\{ \int e^{3\alpha z: a} \left(\frac{a}{a+z} \right)^2 dz \right\}$$

*) SOLJNER hat dieses für eine ähnliche Aufgabe gezeigt.

Wenn $\frac{z}{a}$ ein kleiner Bruch, so wird man ohne merklichen Fehler $\frac{a}{a+z} = 1$ setzen können und dann reducirt sich der Ausdruck nach Art. 18 auf

$$v^{2g^{2ak} - z^k} - v^{2g^{2ak} - z^k} = 4gh \{ \text{li}. e^{2ak} - z^k - \text{li}. e^{2ak} - z^k \}$$

Die Geschwindigkeit v an der Erdoberfläche findet sich hieraus ($z = 0$):

$$v^2 = v^{2g^{2ak}(-z^k - 1)} + 4gh \{ \text{li}. e^{2ak} - \text{li}. e^{2ak} - z^k \}$$

Die Geschwindigkeit V in der Höhe Z hängt von den Bedingungen, welchen die Bewegung des Körpers unterworfen ist, ab. Man wird Z so gross annehmen dürfen, dass es die Grenze der Atmosphäre übersteigt, und hier wird man V unter irgend einer Voraussetzung bestimmen.

Man nehme z. B. $Z = 10h = 43429$ Toisen, und den Körper als aus unendlicher Entfernung frei zur Erde fallend an, so ist bekanntlich

$$V = \left(\frac{4a^2g}{a+Z} \right)^{\frac{1}{2}} = 5694,97 \text{ Toisen in 1 Secunde.}$$

Dieses V wollen wir der Rechnung zum Grunde legen und ausserdem noch

$$D = 3,9173 \text{ Zoll}$$

$$\rho = 7,955 \text{ (Dichte des Wassers = 1)}$$

(hieraus Gewicht des Körpers = 10 Pfund)

$$\frac{e}{\beta} = 6500$$

$$h = 4342,945 \text{ Toisen}$$

$$g = 2,5152133 \text{ Toisen}$$

$$a = 3266302 \text{ Toisen.}$$

Man erhält hieraus:

$$\log \alpha = 7,0254609 - 10$$

$$2\alpha h = 9,21034037$$

$$e^{2\alpha h} = 10000 \dots \text{li.} = 124,137249$$

$$e^{2\alpha h - z^k} = 1,0004182367 \dots \text{li.} = \dots - 7,207097$$

und ferner:

$$\text{das erste Glied von } v^2 = 3244,42$$

$$,, \text{ zweite } ,, ,, v^2 = 5476,28$$

$$- v^2 = 8720,70$$

$$v = 93,38 \text{ Toisen.}$$

Das erste Glied 3244,42 ist das, was vom Quadrate von V noch übrig geblieben ist, das andere ist der der fort-dauernden Wirkung der Schwere zugehörige Zuwachs des Quadrats der Geschwindigkeit.

Ohne den Widerstand der Luft würde die Geschwindigkeit des Körpers bei seiner Ankunft auf der Erdoberfläche 5732,5 Toisen betragen haben, jetzt ist sie nur der 61. Theil davon; — sie wird noch kleiner wenn der Körper keine Kugel ist und folglich einen grösseren Widerstand erleidet; wenn er weniger wiegt; wenn V kleiner ist; endlich wenn er die Schichten der Atmosphäre nicht senkrecht durchschneidet.

Wollte man die Aufgabe umkehren und die Geschwindigkeit suchen, mit welcher der erwähnte Körper aufwärts geworfen werden müsste, um bis ins Unendliche fortzugehen, so würde man sie = 572135 Toisen in einer Secunde finden; ohne den Widerstand der Luft würde sie nur etwa ein Hundertheil davon sein. — Hätte der Körper die Dichte $\beta\rho$, so würde, bei einem gleichen Widerstande, sein Durchmesser = $3,9173 : \beta$ und sein Gewicht = $10 : \beta^2$ Pfund sein; — für die Meteorsteine würde man $\beta = \frac{1}{4}$ setzen können, und daraus das Gewicht eines unter den angegebenen Umständen mit der berechneten Geschwindigkeit zur Erde gelangenden Körpers dieser Art = 40 Pfund erhalten.

109. Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten.*)

(Königsberger Archiv f. Naturwiss. und Mathem. 1812. 1. Bd., p. 241.)

1.

Von drei verschiedenen Classen ohne Ende fortgehender Ausdrücke, die man in die Analyse eingeführt hat, ist die der unendlichen Reihen am vollständigsten untersucht und am häufigsten benutzt; die andere, der continirlichen Brüche, ist weniger bearbeitet;

* [83 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 262—268. 279 (O.). 283. 320.]

die dritte, der Producte aus unendlich vielen Factoren, am wenigsten. Der grosse Nutzen aller dieser Ausdrücke macht sie der ganzen Aufmerksamkeit der Analysten würdig.

Schon früh gelangten die Geometer durch die Hülfe der zuletzt genannten Classe zu sehr schönen Resultaten; allein ihre allgemeine Theorie datirt sich erst von der Zeit der Erscheinung der vortrefflichen „Analyse

des réfractations“ von KRAMP, in welcher der Verfasser ihr ein ausgedehntes Capitel widmete. Die dadurch auf eine des Gegenstandes würdige Weise in die Analyse eingeführte Function erhielt von KRAMP die Benennung, mit welcher diese Abhandlung überschrieben ist. — Die Resultate, die er auf diesem Wege fand, sind wichtig und elegant und allen Geometern aus diesen Gründen bekannt; allein der betretene Weg führte auf Schwierigkeiten und Widersprüche, die KRAMP veranlassten, unserer Theorie der Potenzen und Logarithmen der negativen Zahlen ein nochmaliges strenges Examen zu wünschen. Diese sind die erste Veranlassung der gegenwärtigen Abhandlung, die ich desto lieber bekannt mache, da sie zeigen wird, dass die Analyse auch hier, so wie überall, vorwurfsfrei ist. — Ich werde KRAMP'S Benennungen und Bezeichnungen überall getreu bleiben, weil dadurch die Nachweisung der Quelle der Irrthümer erleichtert wird; eine Behandlung der Theorie auf einem anderen, alle scheinbare Paradoxien vermeidenden Wege würde wahrscheinlich an Kürze und Eleganz gewinnen; — allein dieses schien mir nicht hinreichender Grund zu sein, die von mir gewählte Darstellungsart zu verlassen.

2.

Eine Facultät ist nach KRAMP'S Bestimmung ein Product von Factoren, die in arithmetischer Progression fortgehen, z. E.

$$a \cdot a + r \cdot a + 2r \dots a + (m - 1)r;$$

die dafür gewählte Bezeichnung ist $a^{m|r}$; a die Basis, m der Exponent, r die Differenz.

Wenn ausser m auch n eine ganze positive Zahl ist, so hat man folgende Relationen zwischen den Facultäten:

$$a^{m+n|r} = a^{m|r} (a + mr)^{n|r} = a^{n|r} (a + nr)^{m|r} \dots (1)$$

$$a^{m|r} = (a + mr - r)^{m-1|r} \dots (2)$$

$$a^{m|r} = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot A^{\frac{m}{r}} \dots (3)$$

$$a^{m|r} = \left(\frac{r}{R}\right)^m \cdot \left(\frac{aR}{r}\right)^{m|R} \dots (4)$$

Sehr gross ist die Anzahl der Transformationen, die man durch diese Sätze erhalten und ausgedehnt der Nutzen, den man aus ihnen ziehen kann.

3.

Die gegebene Erklärung ist vollständig, wenn m eine ganze positive Zahl ist. Jedoch kann man die Existenz ähnlicher Functionen allgemeiner für jedes m annehmen; da aber die Erklärung auf sie durchaus

nicht passt, so ist ihre Bedeutung an sich nicht klar, und man muss aus fremden Bedingungen, denen die Facultäten entsprechen sollen, herleiten, was man sich allgemein unter $a^{m|r}$ zu denken hat. Es ist übrigens klar, dass der allgemeine Werth immer sich in

$$a \cdot a + r \cdot a + 2r \dots a + (m - 1)r$$

verwandeln muss, wenn m eine ganze positive Zahl ist.

Die natürlichsten und fruchtbarsten Bedingungen, die man zur Erfindung des allgemeinen Werthes von $a^{m|r}$ benutzen kann, liegen in den Sätzen (1) und (2); bestimmt man die Bedeutung der Facultät durch diese, so wird man dadurch eine Function erhalten, welche nicht nur (1) und (2), sondern auch allen Relationen entspricht, die man aus (1) und (2) herleiten kann: also eine Facultät im Sinne KRAMP'S. Diese Bedingungen aber geben eine völlig directe Bestimmung; es ist nämlich aus (1):

$$a^{m|r} = \frac{a^{n|r}}{(a + m)r^{n|r}} (a + nr)^{m|r};$$

ferner ist

$$\frac{(a + nr)^{m|r}}{(a + nr)^m} = 1 \left(1 + \frac{r}{a + nr}\right) \left(1 + \frac{2r}{a + nr}\right) \dots \left(1 + \frac{(m-1)r}{a + nr}\right)$$

desto näher = 1, je grösser n und je kleiner m ist; also für ein unendlich grosses n und ein endliches m

$$\frac{(a + nr)^{m|r}}{(a + nr)^m} = 1.$$

Man hat daher für ein solches n :

$$a^{m|r} = \frac{a^{n|r}}{(a + m)r^{n|r}} (a + nr)^m$$

wofür man auch, wenn h eine willkürliche endliche Zahl ist,

$$a^{m|r} = \frac{a^{n|r}}{(a + m)r^{n|r}} (h + nr)^m \dots (5)$$

schreiben kann.

Aus der Verbindung mit (2) folgt ein zweiter Werth:

$$a^{m|r} = \frac{(a + m - r)^{m-1|r}}{(a - r)^{m-1|r}} (h - nr)^m \dots (6)$$

Beide Werthe, die, wenn m eine ganze positive Zahl ist, der Erklärung entsprechen, bestehen aus unendlich vielen Factoren, von welchen aber in diesem Falle die des Nenners gegen gleiche im Zähler verschwinden*. Trotz dieser Uebereinstimmung lässt es sich

* In einem ganz ähnlichen Falle sind EULER'S Functiones inexplicabiles; ihre Untersuchung ist nichts anderes als die Aufsuchung eines allgemeinen Ausdrucks, oder mehrerer, welche in einem speciellen Falle dem gegebenen speciellen Ausdrucke entsprechen.

leicht zeigen, dass beide Werthe, allgemein genommen, ungleich sind; wären nämlich (5) und (6) einander gleich, so würde man haben:

$$a^{n/r}(a-r)^{n/r} = (-1)^m (a+mr)^{n/r} (a+mr-r)^{n/r},$$

oder nach (2):

$$a^{n/r}(a-nr)^{n/r} = (-1)^m (a+mr)^{n/r} (a+mr-nr)^{n/r},$$

und nach (1):

$$(a-nr)^{2n/r} = (-1)^m (a+mr-nr)^{2n/r},$$

welche Gleichung, indem sie nur auf der einen Seite m enthält, so lange nicht existieren kann, so lange man m völlig unbestimmt lässt.

Die beiden gefundenen Werthe der Facultät (5) und (6) sind also ungleich: man muss daher einen von ihnen zur Erklärung von $a^{n/r}$ wählen. Am bequemsten wird es sein, wenn man den für ein positives r immer reellen Ausdruck (5) annimmt und sich daher unter einer Facultät mit negativer Differenz immer das denkt, was (2) fordert. Unter dieser Voraussetzung verschwindet das Widersprechende der Forderungen (1) und (2). In der Folge dieser Abhandlung werden daher die Facultäten als Symbole der Ausdrücke

$$a^{n/r} = \frac{a^{n/r}}{(a+mr)^{n/r}} (h+nr)^m \dots \dots (5)$$

$$a^{n/r} = \frac{(a-mr+r)^{n/r}}{(a+r)^{n/r}} (h+nr)^m \dots \dots (7)$$

zu betrachten sein.

Durch die Wahl des Ausdruckes (6) für $a^{n/r}$ würde man keinen Vortheil erreichen, den die hier getroffene nicht auch gewähren könnte, denn es ist sehr leicht, beide Ausdrücke auf einander zu reduciren. Hätte man indes diese Erklärung gewählt, so würde man haben:

$$a^{n/r} = \frac{(a+mr-r)^{n/r}}{(a-r)^{n/r}} (h-nr)^m \dots \dots (6)$$

$$a^{n/r} = \frac{a^{n/r}}{(a-mr)^{n/r}} (h-nr)^m \dots \dots (8)$$

Es folgt hieraus der bemerkenswerthe Satz, dass man die Reihe der für ganze Exponenten stattfindenden Facultäten durch zwei verschiedene Functionen interpoliren kann, deren eine aber nur immer reell ist.

4.

Unter den Facultäten existiren ausser (1) und (2) noch viele Relationen, die sich aus (5) und (7) herleiten lassen. Hier mögen nur die merkwürdigeren davon einen Platz finden.

Man hat aus (1) und (2):

$$a^{m+n/r} = a^{m/r} (a+mr)^{n/r} = (a+mr-r)^{m/r} (a+mr)^{n/r};$$

setzt man $m+n=0$, so folgt hieraus:

$$\begin{aligned} 1 &= a^{m/r} (a+mr)^{-m/r} \\ 1 &= (a-r)^{m/r} a^{-m/r} \\ 1 &= (a-r)^{-m/r} a^{m/r} \end{aligned} \dots \dots (9)$$

Ferner ist aus (1) und (2):

$$\begin{aligned} (a-m'r)^{m+n/r} &= (a-m'r)^{m/r} \cdot a^{n/r} \\ (a-m'r-m'r+r)^{m+n/r} &= (a-m'r-m'r+r)^{m/r} \cdot a^{n/r} \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} a^{m/r} &= \frac{(a-m'r)^{m+n/r}}{(a-m'r)^{m/r}} \\ a^{m/r} &= \frac{(a-m'r-m'r+r)^{m+n/r}}{(a-m'r-m'r+r)^{m/r}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

Man kann das willkürliche m' so bestimmen, dass die Basis der Facultäten in (10) $= r$ wird; alsdann hat man:

$$\left. \begin{aligned} a^{m/r} &= \frac{r^{m+a/r-1/r}}{r^{m-1/r}} = r^{m-1} \frac{1+m+a/r-1}{1+r-1} \\ a^{m/r} &= \frac{r^{m+1/r}}{r^{m-1/r}} = r^{m-1} \frac{1}{1+r-1} \end{aligned} \right\} \dots (10)''$$

Es folgt übrigens aus (5) und (7), dass bei der angenommenen Bedeutung der Facultäten die Sätze (3) und (4) nur so lange richtig sind, so lange die neuen Differenzen das Zeichen der alten haben. Ist dieses nicht der Fall, so verfällt man durch diese Transformationen auf Facultäten, wie (6) und (8) sie voraussetzen.

5.

In den gegebenen Ausdrücken der Facultäten lassen sich die unendlich grossen Factoren die sie enthalten so in einander verschmelzen, dass ihre Berechnung in Zahlen möglich wird. Es ist nämlich

$$\frac{h+nr}{h} = \frac{(h+r)^{n/r}}{h^{n/r}}$$

folglich

$$(h+nr)^m = h^m \left\{ \frac{(h+r)^{n/r}}{h^{n/r}} \right\}^m$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} a^{m/r} &= h^m \cdot \frac{a}{a+mr} \left(\frac{h+r}{h} \right)^m \cdot \frac{a+r}{a+mr+r} \left(\frac{h+2r}{h+r} \right)^m \cdot \text{etc.} \\ a^{m/r} &= h^m \cdot \frac{a-mr+r}{a+r} \left(\frac{h+r}{h} \right)^m \cdot \frac{a-mr+2r}{a+2r} \left(\frac{h+2r}{h+r} \right)^m \cdot \text{etc.} \end{aligned} \right\} (11)$$

Die Factoren dieser Ausdrücke, deren allgemeine Form

$$\frac{a+ir}{a+mr+ir} \left(\frac{h+r+ir}{h+ir} \right)^m \frac{a-mr+ir}{a+ir} \left(\frac{h+r+ir}{h+ir} \right)^m$$

nähern sich der Einheit bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{i^2}$; weun also die Ausdrücke bis an ein unendlich

grosses i fortgesetzt gedacht werden, sind ihre Fac-
toren nur um ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung
von der Einheit verschieden, und lassen demnach die
Facultäten sich immer einer durch Approximation ange-
gebenen Grenze nähern.

Ogleich es möglich ist, die Zahlenwerthe der Fac-
ultäten nach diesen Ausdrücken zu berechnen, so wird
dieses doch äusserst mühsam sein, wenn m nicht eine
ganze positive Zahl ist. Ungleich leichter gelangt man
zum Ziele, wenn man die Facultäten oder ihre Loga-
rithmen in Reihen entwickelt. Ehe ich aber hierzu
übergehe, sei es mir erlaubt, im Allgemeinen etwas über
die Reihen zu bemerken, welches man nicht immer un-
verrückt genug im Auge hatte und durch dessen Vernachlässigung schon mehr als einmal ein scheinbarer
Widerspruch erzeugt worden ist.

6.

Nimmt man die Reihenentwicklung nach dem
Taylor'schen Lehrsatz

$$f(x+\lambda) = f(x) + \frac{dfx}{dx} \cdot \lambda + \frac{d^2fx}{dx^2} \cdot \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{d^3fx}{dx^3} \cdot \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

für allgemein richtig an, so wird man auch haben

$$f(x+\lambda) = f(x+\lambda-1) + \frac{df(x+\lambda-1)}{dx} \cdot 1 + \frac{d^2f(x+\lambda-1)}{dx^2} \cdot \frac{1^2}{1.2} + \text{etc.}$$

denn diese Reihe folgt unmittelbar aus der vorher-
gehenden, wenn man $\lambda - \lambda' + \lambda'$ für λ schreibt und alle
Coefficienten der Potenzen von λ' durch jene summiert.
So lange nun beide Entwicklungen neben einander
existiren können, was für Werthe man auch λ und λ'
beilegen mag, so lange werden wir ihre Richtigkeit
nicht in Zweifel ziehen können: findet sich aber, dass
sie für irgend eine Annahme von λ und λ' sich wider-
sprechen, so ist die erste und damit auch die zweite
Entwicklung unrichtig, und es ist dadurch erwiesen,
dass wir $f(x+\lambda)$ allgemein nicht in eine nach Potenzen
von λ fortgehende Reihe verwandeln können, oder dass
es eine durch die erwählte Annahme bestimmte Grenze
gibt, über welche hinaus die Reihe nicht mehr statt-
findet. — Der Widerspruch findet sich immer, wenn
die Function zwischen x und $x+\lambda$ einen verschwin-
denden, zu einer Potenz, deren Exponent μ kleiner als
1 oder negativ ist, erhobenen Factor einschliesst; denn

$$1^{(a^m r)} = m!r + m! \left(\frac{h}{r} + n\right) + 1 \frac{a}{r} + 1 \left(\frac{a}{r} + 1\right) + \dots + 1 \left(\frac{a}{r} + n - 1\right) \\ - 1 \left(\frac{a}{r} + m\right) - 1 \left(\frac{a}{r} + m + 1\right) - \dots - 1 \left(\frac{a}{r} + m + n - 1\right)$$

Bezeichnet man nun die Function
 $(x+n-\frac{1}{2})!n-n-1x-1(x+1)-\dots-1(x+n-1)$
durch Ωx , so hat man unmittelbar:

Bessel's Abhandlungen. 2. Bd.

in diesem Falle, angenommen dass er für $x+\lambda-\lambda' = a$
stattfindet, ist die Function von der Form

$$P(x+\lambda-\lambda'-a)^{\mu}$$

und es enthalten die Differentialquotienten von

$$f(x+\lambda-\lambda')$$

Glieder von der Form

$$P \cdot dx^{\mu-1},$$

oder die zweite Reihenentwicklung enthält das Diffe-
rential von x , welches widersinnig ist. — Es ist hier-
aus unter andern klar, dass man keine Reihen-
entwicklung über die Grenzen ausdehnen darf,
für welche die Function selbst unendlich wird.
Da die gegebene Entwicklung von $f(x+\lambda)$ die einzig
mögliche, nach Potenzen von λ fortgehende ist, so gilt
der Satz, man mag die Function ausdrücklich nach
dem Taylor'schen Lehrsatz oder nach einer anderen
Methode entwickeln.

Die Analyse bietet uns unzählige Anwendungen
dieser Bemerkung dar. Es wird durch sie erklärt, war-
um die Reihe

$$\int \frac{dx}{1x} = \frac{x}{1x} \left\{ 1 + \frac{1}{1x} + \frac{1.2}{(1x)^2} + \frac{1.2.3}{(1x)^3} + \text{etc.} \right\} + C$$

(Königsb. Archiv für Naturwissensch. und Mathem. I.
St. p. 4 [Abb. 108 p. 331]) für ein positives $1x$ falsch
und für ein negatives richtig sein kann, und warum man
bei der Reihe (ebendasselbst p. 3 [p. 330])

$$\int \frac{dx}{1x} = C + 1(\pm 1x) + 1x + \frac{(1x)^2}{1.2.2} + \frac{(1x)^3}{1.2.3.3} + \text{etc.} \dots$$

für $x > 1$ und $x < 1$ verschiedene Zeichen in dem
Gliede $1(\pm 1x)$ annehmen darf, wenn man nur die im-
mer reelle Form $1x$ untersucht. Ferner liegt in ihr
der Grund, warum man nicht die Tangenten in diesel-
ben Factoren zerlegen kann, aus welchen die Sinus
zusammengesetzt sind; denn die Zerfallung der Sinus
erhält erst ihre volle Evidenz durch die Bemerkung,
dass hier von einer nie unendlich werdenden Func-
tion der zugehörigen Bögen die Rede ist.

7.

Die Logarithmen der Facultäten kann man sehr
leicht in Reihen entwickeln, oder durch eine Hilfsgrösse,
die man in eine Tafel bringen kann, ausdrücken. Man
hat nämlich aus (5):

$$1^{(a^m r)} = m!r + \Omega \left(\frac{a}{r} + m\right) - \Omega \frac{a}{r} \dots (12)$$

und wenn man hier nach (2) für a , $a - mr + r$ schreibt:

$$1(a^{m-r}) = m1r + \Omega\left(\frac{a}{r} + 1\right) - \Omega\left(\frac{a}{r} - m + 1\right) \dots (13)$$

Die hier vorkommende Function Ωx gibt, wie man sieht, ein sehr leichtes Mittel, den Zahlenwerth der Facultäten zu berechnen; sie ist daher einer genauern Betrachtung werth, weshalb ich unten zu ihr zurückkehren werde.

Die bekannte Summation der Reihe $1x + 1(x+1) + 1(x+2) + \dots + 1(x+n-1) = (x+n-\frac{1}{2})1n + x - (x-\frac{1}{2})1x - n - \Gamma\frac{1}{x}$ in welcher KRAMP's Bezeichnung

$$\Gamma\frac{1}{x} = \frac{B1}{1.2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{B3}{3.4} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{B5}{5.6} \cdot \frac{1}{x^5} - \text{etc.} \dots$$

angenommen ist, zeigt den einfachen Zusammenhang der Functionen Γ und Ω ; es folgt daraus:

$$\Gamma\frac{1}{x} = x - (x-\frac{1}{2})1x + \Omega x,$$

$$1(a^{m \pm r}) = m1a \pm \frac{r}{a} \left\{ \frac{m^3}{1.2} - \frac{m}{2.1} \right\} - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left\{ \frac{m^3}{2.3} - \frac{m^2}{2.2} + \frac{B1}{1.2} m \right\} \pm \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left\{ \frac{m^4}{3.4} - \frac{m^3}{2.3} + \frac{B1}{1.2} m^2 \right\} - \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left\{ \frac{m^5}{4.5} - \frac{m^4}{2.4} + \frac{B1}{1.2} m^3 - \frac{B3}{3.4} \cdot \frac{3}{1} m \right\} \pm \left(\frac{r}{a} \right)^5 \left\{ \frac{m^6}{5.6} - \frac{m^5}{2.5} + \frac{B1}{1.2} m^4 - \frac{B3}{3.4} \cdot \frac{3.4}{1.2} m^2 \right\} - \left(\frac{r}{a} \right)^6 \left\{ \frac{m^7}{6.7} - \frac{m^6}{2.6} + \frac{B1}{1.2} m^5 - \frac{B3}{3.4} \cdot \frac{3.4.5}{1.2.3} m^3 + \frac{B5}{5.6} \cdot \frac{5}{1} m \right\} \pm \text{etc.} \dots \dots \dots (14)$$

Bei einiger Aufmerksamkeit sieht man sogleich, dass man wenigstens die ersten Glieder dieser Entwicklung willkürlich convergirend machen kann, wenn man sie nicht mit dem ersten Factor der Ausdrücke (5) und

$$1(a^{m'r}) = 1 \left\{ \frac{a^{m'r}}{(a+m)^{m'r}} \right\} + m1(a+ir) + A \frac{r}{a+ir} + A' \left(\frac{r}{a+ir} \right)^2 + \text{etc.} \dots \dots \dots (15)$$

$$1(a^{m-r}) = 1 \left\{ \frac{(a-mr+r)^{m'r}}{(a+r)^{m'r}} \right\} + m1(a+ir) - A \frac{r}{a+ir} + A' \left(\frac{r}{a+ir} \right)^2 - \text{etc.} \dots \dots \dots$$

wo $A, A', A'', \text{etc.} \dots$ die bei (14) vorkommenden Coefficienten sind.

8.

Die Reihenentwicklung der Facultäten selbst, die man wie es scheint am bequemen durch das von KRAMP § 129 gebrauchte Verfahren erhält, ist folgende:

$$a^m \pm r = a^m \times 1 \pm \frac{r}{a} \cdot \frac{m \cdot m-1}{1.2} + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1.2.3} \left(\frac{3m-1}{4} \right) -$$

welche Gleichung so lange richtig ist, so lange $\Gamma\frac{1}{x}$, nach KRAMP's Definition genommen, wirklich die Summe der Reihe der Logarithmen gibt. Unten wird dieser Punkt näher beleuchtet werden, und es wird sich daraus zeigen, dass KRAMP's $\Gamma\frac{1}{x}$ nur für ein positives x ist, was es sein soll.

Entwickelt man die Ausdrücke (12) und (13) nach einer vorhergegangenen Substitution der Gammas für die Omegas, oder directer die am Anfange dieses Artikels befindliche Gleichung, nachdem man die Summe der Logarithmen durch die Bernoulli'schen Zahlen ausgedrückt hat, ganz in eine nach Potenzen von $\frac{r}{a}$ fortgehende Reihe, so hat man nach sehr leichten Reductionen:

(7), sondern mit einem höheren anfangen lässt und dann die vorhergehenden besonders berechnet. Man wird so erhalten:

$$\pm \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-3}{1.2 \cdot \dots \cdot 4} \left(\frac{m^3 - m}{2} \right) + \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-4}{1.2 \cdot \dots \cdot 5} \left(\frac{10m^2 - 30m^2 + 5m + 2}{48} \right) \pm \left(\frac{r}{a} \right)^5 \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-5}{1.2 \cdot \dots \cdot 6} \left(\frac{3m^4 - 10m^4 + 5m^4 + 2m}{16} \right) + \text{etc. etc.} \dots \dots \dots (16)$$

Auch hier kann man, sowie bei der Entwicklung der Logarithmen, eine stärkere Convergenz erhalten, wenn man unter der Voraussetzung, dass $a, a', a'', \text{etc.}$ die bei (16) vorkommenden Coefficienten bedeuten, für die Facultäten die folgenden Werthe schreibt:

$$a^{nr} = \frac{a^{lr}}{(a+mr)^{lr}} (a+ir)^n \left\{ 1 + \alpha \frac{r}{a+ir} + \alpha' \left(\frac{r}{a+ir} \right)^2 + \text{etc.} \dots \right\}$$

$$a^{n-lr} = \frac{(a-mr+r)^{lr}}{(a+r)^{lr}} (a+ir)^n \left\{ 1 - \alpha \frac{r}{a+r} + \alpha' \left(\frac{r}{a+r} \right)^2 - \text{etc.} \dots \right\}$$

9.

Die im 6. Art. gegebene Bedingung der Statthaf-
 tigkeit der Reihenentwicklungen gibt die Grenzen, über
 welche (14) und (16) nicht ausgedehnt werden dürfen.
 So oft in (5) und (7) im Zähler oder Nenner ein Factor
 = 0 wird, wird der Logarithme der Facultät unendlich
 gross; so oft der Factor 0 nur im Nenner vorkommt,
 wird die Facultät selbst unendlich gross. Nimmt man
 dieses mit dem Umstande zusammen, dass die Entwick-
 lungen richtig sind für $r = 0$, und dass r allenthalben nur
 als positiv vorausgesetzt ist: so fliesst daraus folgende
 Bedingungen, unter welchen die Entwicklungen in nach
 Potenzen von $\frac{r}{a}$ fortgehende Reihen nur stattfinden:

1. $l(a^{nr})$; a positiv und $a > -mr$
2. $l(a^{n-lr})$; a positiv und $a > (m-1)r$
3. a^{nr} ; a positiv und $a > -mr$
4. a^{n-lr} ; a positiv.

Diese Bedingungen ergeben sich leicht aus (5) und (7).
 Wäre z. B. im ersten Falle a negativ und $a < -mr$,
 folglich $a+mr < 0$ oder negativ, so würde irgendwo
 zwischen 0 und dem angenommenen Werthe der Diffe-
 renz ein r existiren, welches die Factoren

$$a+kr \text{ oder } a+mr+kr,$$

wo k eine ganze positive Zahl bedeutet, verschwinden
 lassen würde; dieses darf aber nicht sein, wenn die
 Reihe stattfinden soll.

Wollte man die Ausdrücke (6) und (8) in Reihen
 entwickeln, sowie die im vorigen Art. vorkommenden
 nach Potenzen von $\frac{r}{a}$ fortgehend, so würden diese Reihen
 nur richtig sein, oder den Ausdrücken wirklich ent-
 sprechen können für

$$a^{nr}, \text{ wenn } a \text{ negativ}$$

$$a^{n-lr}, \text{ wenn } a \text{ negativ und } a < -mr.$$

Es lassen sich die Reihenentwicklungen der ver-
 schiedenen Ausdrücke des 3. Art. nun unter eine nicht
 uninteressante Uebersicht bringen. Man hat nämlich aus
 (5) .. $a^{nr} = a^n \left\{ 1 + \alpha \frac{r}{a} + \alpha' \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \alpha'' \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \text{etc.} \right\}$

$$(7) .. a^{n-lr} = a^n \left\{ 1 - \alpha \frac{r}{a} + \alpha' \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \alpha'' \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

und indem (6) von (7) und (8) von (5) nur dadurch
 verschieden sind, dass r verschiedene Zeichen hat,
 folgt aus

$$(6) .. a^{nr} = a^n \left\{ 1 + \alpha \frac{r}{a} + \alpha' \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \alpha'' \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

$$(8) .. a^{n-lr} = a^n \left\{ 1 - \alpha \frac{r}{a} + \alpha' \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \alpha'' \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

Damit aber diese Reihen wirklich den Ausdrücken des
 dritten Artikels entsprechen, ist es, wie gezeigt wor-
 den, nothwendig, dass bei der

$$\left. \begin{array}{l} \text{ersten } a \text{ und } a+mr \\ \text{zweiten } a \\ \text{dritten } a \\ \text{vierten } a \text{ und } a-mr \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \\ \\ \text{negativ} \end{array}$$

sind; ist dieses nicht der Fall, so ist die Uebereinstim-
 mung mit den erwähnten Ausdrücken nicht mehr noth-
 wendig. Die Entwicklungen selbst zeigen nun, was
 aus den Reihen wird, wenn die ihnen zum Grunde lie-
 genden Bedingungen überschritten werden: nimmt man
 in allen a $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$, so hören die $\left\{ \begin{array}{l} \text{dritte und vierte} \\ \text{erste und zweite} \end{array} \right\}$ auf
 $\left\{ \begin{array}{l} (6) \text{ nad } (8) \\ (5) \text{ und } (7) \end{array} \right\}$ zu entsprechen und verwandeln sich da-
 gegen in die aus $\left\{ \begin{array}{l} (5) \text{ und } (7) \\ (6) \text{ nad } (8) \end{array} \right\}$ folgenden.

10.

Diese Bemerkungen enthalten den Grund der von
 KRAMP § 40 u. s. w. gefundenen Widersprüche. Die
 Gleichung

$$\text{tg } x = \frac{(+x)^{\frac{1}{2}}}{(-x)^{\frac{1}{2}-1}}$$

selbst ist dem bekannten Ausdrücke der Tangente durch
 ihre Factoren conform: denn sie wurde aus diesem durch
 Operationen hergeleitet, die dieselben sind, aus welchen
 sich die Bedeutung der Facultäten erklärte; sie lässt
 sich daher nach (5) und (7) wieder in dieselben Fac-
 toren zerlegen. Auch die Reihenentwicklungen des
 Zählers und Nenners sind an sich richtig; jedoch ge-
 hört die zweite, indem hier die Basis x negativ ist,
 nicht zum Ausdruck (7), sondern zu (8), welches, wie
 aus dem 3. Art. erhellet, keineswegs der ist, den man
 sich unter $(-x)^{\frac{1}{2}-1}$ denken soll. Es ist unmöglich,
 diese Facultät in eine nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ geordnete
 Reihe zu entwickeln, die wirklich (7) entspräche.

Die anscheinende Sonderbarkeit, die darin liegt,
 dass § 144 und 150 die vorhin auf Widersprüche füh-
 renden Entwicklungen nun richtig werden, fällt weg,

indem die Ursache der Unrichtigkeit, die negative Basis, hier verschwunden ist.

Eine ganz ähnliche Ursache haben die Widersprüche, die sich § 197 u. s. w. bei der Untersuchung der Γ darbotten. Auch hier ist die Summation der Reihe, aus welcher die Γ als entstanden angesehen werden können,

$$1x + 1(x+1) + 1(x+2) + \dots + 1(x+i) = (x+i+\frac{1}{2})1(x+i) - (x-\frac{1}{2})1x - i + \Gamma\frac{1}{x+i} - \Gamma\frac{1}{x}$$

über die Grenzen ihrer Rechtmässigkeit ausgedehnt. Definiert man nämlich $\Gamma\frac{1}{x}$ mit KRAMP durch die Reihe

$$\frac{B_1}{1.2} \frac{1}{x} - \frac{B_3}{3.4} \frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5.6} \frac{1}{x^5} - \text{etc.} \dots,$$

so ist die Summation, nach Art. 6, nur so lange richtig, so lange x positiv ist; — wollte man sie weiter ausdehnen, so müsste man die Definition

$$\Gamma\frac{1}{x} = (x+n+\frac{1}{2})1(x+n) - (x-\frac{1}{2})1x - n - 1x - 1(x+1) - 1(x+2) \dots - 1(x+n)$$

(Art. 7) wählen, deren Allgemeinheit nicht beschränkt ist und die deshalb nie auf Irrthümer führen kann.

11.

Obleich diese Abhandlung sich keineswegs mit Anwendungen der Facultäten auf analytische Untersuchungen beschäftigen soll, so werden hier doch einige Vergleichen der Facultäten mit den trigonometrischen Linien nicht am unrechten Orte stehen, indem sie auf die fernere Untersuchung derselben oder der eingeführten Function Ω Einfluss haben. Durch die Sätze des 3. und 4. Art., verbunden mit der bekannten Zerfallung der Sinus in ihre Factoren, findet man leicht noch einige Ausdrücke, die KRAMP'S Abhandlung nicht enthält:

$$\left. \begin{aligned} \sin x\pi &= \frac{(+x)^{\frac{1}{2}-x-1}}{(-x)^{\frac{1}{2}-x-1}} = \frac{x\pi}{1^{\frac{1}{2}-x} \cdot 1^{-x-1}} \\ \cos x\pi &= \frac{(\frac{1}{2}-x)^{x-1}}{(-\frac{1}{2}+x)^{x-1}} = \frac{(\frac{1}{2}-x)\pi}{1^{\frac{1}{2}-x-1} \cdot 1^{x-\frac{1}{2}-1}} \\ \text{tg } x\pi &= \frac{(+x)^{\frac{1}{2}}}{(-x)^{\frac{1}{2}-1}} = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

Man kann diese Relationen noch auf vielfache Weise verändern; z. E. nach (10^a)

$$\sin x\pi = \frac{\pi}{1^{x-1} \cdot 1^{-x-1}} = \frac{-\pi}{x \cdot 1^{x-1} \cdot 1^{-x-1}} \dots (19)$$

u. s. w.

Setzt man in den Ausdrücken des Sinus $x = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$\pi = 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = (1^{-\frac{1}{2}})^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \text{etc.}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} 1^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ 1^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\pi} \\ 1^{-\frac{3}{2}} &= -2\sqrt{\pi} \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

12.

Die Function Ω hat ähnliche Relationen wie die Facultäten und die ihr verwandten Γ . Setzt man im 7. Art. $x = 1$, so ist

$$\Omega 1 = (n+\frac{1}{2})1n - n - 1(1.2.3 \dots n).$$

Bekanntlich ist

$$2\pi = 4 \cdot \frac{2.2.4.4 \dots 2n.2n}{1.3.3.5 \dots 2n-1.2n+1} = \frac{2^{2n+2}}{2n+1} \left(\frac{1.2.3 \dots n}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \dots 2n} \right)^2$$

oder

$$\frac{1}{2}12\pi = (2n+1)12 - \frac{1}{2}1(2n+1) + 1(1.2.3 \dots n) - 1(n+1 \cdot n+2 \dots 2n)$$

Man hat aber

$$1(n+1 \cdot n+2 \dots 2n) = (2n+1)12n - (n+\frac{1}{2})1(n+1) - n+1$$

und wenn man dieses substituirt

$$\frac{1}{2}12\pi = -(n+\frac{1}{2})1n + n + 1(1.2.3 \dots n)$$

Also ist

$$\Omega 1 = -\frac{1}{2}12\pi \dots (20)$$

Setzt man in die erste Gleichung (18) für die Facultäten ihre Werthe (12) und (13) und für das dann darin vorkommende Ωx : $-1x + \Omega(1+x)$ nach (12), so erhält man

$$1 \frac{\sin x\pi}{x} = 2\Omega \frac{1}{2} - \Omega(1+x) - \Omega(1-x) \dots (21)$$

und hieraus für $x = 0$

$$1\pi = 2\Omega \frac{1}{2} - 2\Omega 1$$

welches mit (20) verbunden gibt

$$\Omega \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}12 \dots (22)$$

Aus den beiden hier gefundenen Ω für $\frac{1}{2}$ und 1 folgen durch die Hülfe der Sätze (12) und (13) viele andere durch endliche Ausdrücke angebliche. Allgemein ist nach jenen Sätzen:

$$\left. \begin{aligned} \Omega(x+m) &= \Omega x + 1x^{m-1} \\ \Omega(x-m) &= \Omega x - 1(x-1)^{m-1} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

Setzt man hier $x = 1$ und $= \frac{1}{2}$ und für m alle ganze Zahlen, so ist

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= -\frac{1}{2}12\pi \\ \Omega_3 &= -\frac{1}{2}12\pi + 1(1.2) \\ \Omega_4 &= -\frac{1}{2}12\pi + 1(1.2.3) \\ \Omega_5 &= -\frac{1}{2}12\pi + 1(1.2.3.4) \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} \Omega_{\frac{3}{2}} &= -\frac{1}{2}12 + 1\frac{1}{2} \\ \Omega_{\frac{5}{2}} &= -\frac{1}{2}12 + 1\left(\frac{1.3}{2}\right) \\ \Omega_{\frac{7}{2}} &= -\frac{1}{2}12 + 1\left(\frac{1.3.5}{2.2}\right) \\ \Omega_{\frac{9}{2}} &= -\frac{1}{2}12 + 1\left(\frac{1.3.5.7}{2.2.2}\right) \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} \Omega_{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}12 - 1\left(\frac{-1}{2}\right) \\ \Omega_{-\frac{3}{2}} &= -\frac{1}{2}12 - 1\left(\frac{1.3}{2}\right) \\ \Omega_{-\frac{5}{2}} &= -\frac{1}{2}12 - 1\left(\frac{-1.3.5}{2.2.2}\right) \\ \Omega_{-\frac{7}{2}} &= -\frac{1}{2}12 - 1\left(\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\right) \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Ω aller ganzen negativen Zahlen sind unendlich gross.

13.

Die letzte der Gleichungen (19) gibt, wenn man die Facultäten durch (12) ausdrückt

$$\Omega x + \Omega(-x) = -1(-2x \sin x\pi) \dots (24)$$

Es folgt hieraus, dass $\Omega(-x)$ immer reell ist, wenn x zwischen einer ungeraden und der nächst grösseren geraden Zahl liegt; im umgekehrten Falle ist es zwar imaginär, allein nichtsdestoweniger zur Berechnung des Zahlenwerthes der Facultäten immer anwendbar. Denn man hat die immer reelle Gleichung

$$e^{\Omega(-x)} = \frac{e^{-\Omega x}}{2x \sin x\pi}$$

die in jedem Falle, wo man auf ein Ω einer negativen Zahl stösst, angewandt werden kann. Es ist klar, dass man auch ungestört eine Facultät nach den Ausdrücken (12) und (13) berechnen kann, wenn man nicht versäumt, sie immer negativ zu nehmen, wenn ein darin vorkommendes Ω nach (24) imaginär wird; wären beide imaginär, so würde die Facultät positiv sein.

Die Gleichung (24) und die folgenden

$$\begin{aligned} \Omega(x+m) &= \Omega x + 1(x.x+1.x+2 \dots x+m-1) \\ \Omega(x-m) &= \Omega x - 1(x-1.x-2.x-3 \dots x-m) \end{aligned} \quad (23^*)$$

sind von Wichtigkeit, indem sie uns ein sehr leichtes Mittel geben, aus einem bekannten Ωx alle für $x+$ oder $-$ einer ganzen Zahl und für $-x$ stattfindenden zu schliessen. Durch sie verliert die Tafel dieser Function, welche unter der Zahl der merkwürdigeren mathematischen Zahlen einen Platz verdient, sehr an Ausdehnung, indem es dadurch unnöthig gemacht wird, diese Tafel für ein grösseres Intervall als das zwischen zwei ganzen Zahlen stattfindende zu berechnen. Mit gleichem Vortheile würde man eine Tafel für den Logarithmen von $1^{x!}$, die von der für die Function Ω nur um eine Constante verschieden sein würde, haben einführen können; jene Function aber wurde nur ihrer etwas einfacheren Bezeichnung und Erklärung wegen gewählt.

Die dieser Abhandlung angehängte Tafel ist für alle Hunderttheile zwischen 1 und 2 construir; sie enthält nicht die Ω selbst, sondern diese Functionen mit dem Modul des Briggs'schen Logarithmensystems multiplicirt, indem es bequemer ist, durch die Formeln (12) und (13) unmittelbar die Briggs'schen Logarithmen der Facultäten zu berechnen. Sie wurde durch die Methoden, die ich im folgenden Artikel auseinandersetzen werde, bis auf 12 Decimalstellen berechnet, so dass ich glaube, die 10 Decimalstellen, die sie enthält, verbürgen zu können. Das Intervall von 1 bis 2 wurde vorzugsweise gewählt, weil hier die Differenzen am kleinsten sind.

14.

Setzt man in (21) für $\Omega \frac{1}{2}$ seinen Werth (22) und verwandelt man die Facultäten im Ausdrücke des Cosinus $x\pi$ in die zugehörigen Ω , so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Omega(1+x) + \Omega(1-x) &= 1 \frac{x}{2 \sin x\pi} \\ \Omega\left(\frac{1}{2}+x\right) + \Omega\left(\frac{1}{2}-x\right) &= -1.2 \cos x\pi \end{aligned}$$

Diese geben:

$$\begin{aligned} \Omega(1+x) &= \frac{1}{2} \frac{x}{\sin x\pi} + \frac{1}{2} \{ \Omega(1+x) - \Omega(1-x) \} \\ \Omega(1-x) &= \frac{1}{2} \frac{x}{\sin x\pi} - \frac{1}{2} \{ \Omega(1+x) - \Omega(1-x) \} \\ \Omega\left(\frac{1}{2}+x\right) &= -\frac{1}{2} 1.2 \cos x\pi - \frac{1}{2} \{ \Omega\left(\frac{1}{2}-x\right) - \Omega\left(\frac{1}{2}+x\right) \} \\ \Omega\left(\frac{1}{2}-x\right) &= -\frac{1}{2} 1.2 \cos x\pi + \frac{1}{2} \{ \Omega\left(\frac{1}{2}-x\right) - \Omega\left(\frac{1}{2}+x\right) \} \end{aligned} \quad (25)$$

Man kann

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \{ \Omega(1+x) - \Omega(1-x) \} \\ U' &= \frac{1}{2} \{ \Omega\left(\frac{1}{2}-x\right) - \Omega\left(\frac{1}{2}+x\right) \} \end{aligned}$$

in schnell convergirende Reihen entwickeln und durch ihre Hülfe die Ω leicht berechnen. Es ist nämlich:

$$U = \frac{d\Omega x}{dx} \cdot x + \frac{d^2\Omega x}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^3\Omega x}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}$$

$$U' = -\frac{d\Omega x}{dx} \cdot x - \frac{d^2\Omega x}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{d^3\Omega x}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

Im ersten Falle wird in den Differentialquotienten $x = 1$, im andern $x = \frac{1}{2}$ gesetzt. Die Differentialquotienten finden sich aus der im 7. Art. gegebenen Erklärung von Ωx :

$$\frac{d\Omega x}{dx} = 1n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \dots - \frac{1}{x+n-1}$$

$$\frac{d^2\Omega x}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \dots - \frac{1}{(x+n-1)^2}$$

$$\frac{d^3\Omega x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+2)^3} \dots - \frac{1}{(x+n-1)^3}$$

etc. etc.

Hieraus hat man

$$U = x \left\{ 1n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} \right\} \\ - \frac{1}{2} x^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right\} \\ - \frac{1}{6} x^3 \left\{ 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right\} \\ - \frac{1}{24} x^4 \left\{ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} \right\} \\ \text{etc. etc.}$$

Schreibt man statt der ersten Reihe die bekannte Con-

$$U' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+2x \cdot 2-x}{1-2x \cdot 2+x} \right\} + x \left(H + 212 - \frac{3}{2} \right) + \frac{7}{8} x^2 \left(\Sigma 3 - \frac{9}{8} \right) + \frac{31}{5} x^3 \left(\Sigma 5 - \frac{33}{32} \right) + \frac{127}{7} x^4 \left(\Sigma 7 - \frac{129}{128} \right) + \text{etc.} \quad (27)$$

Setzt man für H und $\Sigma 3, \Sigma 5, \dots$ die Zahlenwerthe aus EULER Inst. Calc. Differ. Pars II. C. VI. § 151, so hat man

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-x}{1+x} + x \cdot 0,42278 \ 43350 \ 98 \right. \\ - x^2 \cdot 0,06735 \ 23010 \ 53 \\ - x^3 \cdot 0,00738 \ 55510 \ 21 \\ - x^4 \cdot 0,00119 \ 27539 \ 12 \\ - x^5 \cdot 0,00022 \ 31547 \ 58 \\ - x^{11} \cdot 0,00004 \ 49262 \ 37 \\ - x^{13} \cdot 0,00000 \ 94402 \ 57 \\ - x^{15} \cdot 0,00000 \ 20392 \ 16 \\ \left. \text{etc. etc.} \dots \dots \dots (26^*) \right.$$

$$U' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+2x \cdot 2-x}{1-2x \cdot 2+x} \right\} + x \cdot 0,46351 \ 00260 \ 21 \\ + x^2 \cdot 0,17979 \ 94407 \ 06 \\ + x^3 \cdot 0,03520 \ 20816 \ 63 \\ + x^4 \cdot 0,000973 \ 86754 \ 43$$

stante H , und bezeichnet man die übrigen durch $\Sigma 3, \Sigma 5, \Sigma 7$ u. s. w., sondert man ferner, um die Reihe schneller convergirend zu machen, von den einzelnen Reihen die Zahl 1 ab, so erhält man

$$U = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} + x(1-H) - \frac{1}{3} x^2 (\Sigma 3 - 1) \\ - \frac{1}{5} x^3 (\Sigma 5 - 1) - \text{etc.} \quad (26)$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$U' = x \left\{ -1 \left(\frac{2n+1}{2} \right) + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) \right. \\ + \frac{1}{3} x^2 \cdot 2^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} \\ + \frac{1}{5} x^3 \cdot 2^3 \left\{ 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^3} \right\} \\ + \frac{1}{7} x^4 \cdot 2^4 \left\{ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^4} \right\} \\ \left. \text{etc. etc.} \right.$$

Es ist aber

$$2^n \left\{ 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.} \dots \right\} = (2^n - 1) \Sigma n$$

wofür man, damit die Reihe schneller convergire,

$$(2^n - 1) (\Sigma n - 1 - 2^{-n}) + 2^n - 2^{-n}$$

schreiben und die in $2^n - 2^{-n}$ multiplicirten Glieder besonders summiren kann. Auf diese Weise erhält man die Reihe

$$+ x^2 \cdot 0,00313 \ 79843 \ 47 \\ + x^{11} \cdot 0,00109 \ 93049 \ 02 \\ + x^{13} \cdot 0,00041 \ 14623 \ 37 \\ + x^{15} \cdot 0,00015 \ 43504 \ 29 \\ \text{etc. etc.} \dots \dots \dots (27^*)$$

Für die unmittelbare Berechnung der Briggs'schen Logarithmen der Facultäten ist hieraus:

$$Uk = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-x}{1+x} + x \cdot 0,18361 \ 29037 \ 68 \right. \\ - x^2 \cdot 0,02925 \ 07326 \ 91 \\ - x^3 \cdot 0,00320 \ 75040 \ 54 \\ - x^4 \cdot 0,00051 \ 80063 \ 42 \\ - x^5 \cdot 0,00009 \ 69148 \ 80 \\ - x^{11} \cdot 0,00001 \ 95112 \ 17 \\ - x^{13} \cdot 0,00000 \ 40998 \ 52 \\ - x^{15} \cdot 0,00000 \ 08856 \ 20 \\ \left. \text{etc. etc.} \dots \dots \dots (26^{**}) \right.$$

$$U^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2x, 2-x}{1-2x, 2+x} \right) + x \cdot 0,20129 \ 98466 \ 08$$

$$+ x^2 \cdot 0,07808 \ 59049 \ 48$$

$$+ x^3 \cdot 0,01528 \ 80598 \ 18$$

$$+ x^4 \cdot 0,00422 \ 94530 \ 06$$

$$+ x^5 \cdot 0,00136 \ 28092 \ 86$$

$$+ x^{11} \cdot 0,00047 \ 74220 \ 53$$

$$+ x^{13} \cdot 0,00017 \ 86958 \ 23$$

$$+ x^{15} \cdot 0,00006 \ 70335 \ 40$$

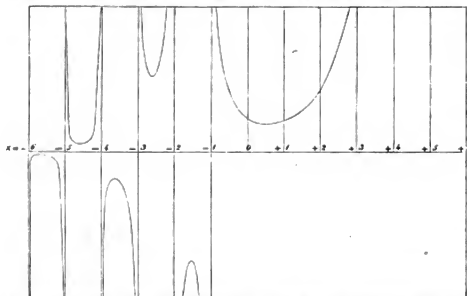
etc. etc. (27**)

So leicht man durch die Reihen (26) und (27) und die Gleichungen (23)* das Ω einer nicht sehr grossen Zahl berechnen kann, so mühsam wird die Berechnung, wenn der entgegengesetzte Fall stattfindet. Allein alsdann

führt die Reihe Art. 7 sehr schnell zum Ziele, indem $\Omega x = (x - \frac{1}{2})! x - x + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{B_3}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{B_5}{5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{x^5} - \text{etc.} (28)$ in diesem Falle sehr schnell convergirt.

15.

Aus dem Vorhergehenden hat man gesehen, dass die Function Ω sehr allgemein in der Analyse verbreitet ist und dass selbst die trigonometrischen Linien als aus ihr zusammengesetzt betrachtet werden können. Eine Menge von Aufgaben, — alle die sich auf die Facultäten reduciren lassen, — werden durch die Tafel der Ω aufgelöst; die allgemeine Definition die von ihr gegeben wurde, macht sie auch in den Fällen brauchbar, wenn die bekannten speciellern Methoden nicht zu-



Zur Veranschlichung der hier untersuchten Functionen ist beistehend eine Curve dargestellt, deren Abscissen = x und Ordinaten = $1^{x+1} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\Omega(1+x)}$.

Tafel der transcendenten Function $k\Omega x$ oder des Briggs'schen Logarithmen von $\frac{1^{x-1}}{\sqrt{2\pi}}$.

x	$k\Omega x$	Diff. I.	II.	III.	x	$k\Omega x$	Diff. I.	II.	III.
1,00	-0,39908 99342	- 247 12693	+ 7 04106	-10030	1,10	-0,42074 92602	- 180 93546	+ 6 14503	- 7799
1,01	0,40156 19035	240 08587	6 94076	9770	1,11	0,42355 86148	174 79043	6 06704	7616
1,02	0,40396 20622	233 14511	6 84306	9517	1,12	0,42436 65191	168 72339	5 99088	7438
1,03	0,40629 35133	226 30205	6 74789	9275	1,13	0,42599 37530	162 73251	5 91650	7267
1,04	0,40855 65338	219 65416	6 65514	9042	1,14	0,42762 10781	156 81601	5 84388	7102
1,05	-0,41075 20754	- 212 89902	+ 6 56472	- 8813	1,15	-0,42918 92382	- 150 97218	+ 5 77281	- 6940
1,06	0,41288 10656	206 33450	6 47659	8597	1,16	0,43069 89600	145 19937	5 70341	6789
1,07	0,41494 44086	199 85771	6 39062	8389	1,17	0,43215 09537	139 49596	5 63552	6635
1,08	0,41694 29857	193 46709	6 30673	8183	1,18	0,43354 59133	133 86044	5 56917	6489
1,09	0,41887 76566	187 16036	6 22490	7987	1,19	0,43488 45177	128 29127	5 50428	6352
1,10	-0,42074 92602				1,20	-0,43616 74304			

x	$k \Omega x$	Diff. I.	II.	III.	x	$k \Omega x$	Diff. I.	II.	III.
1,20	- 0,43616 74304	- 122 78699	+ 5 44076	- 6212	1,65	- 0,44479 10588	+ 74 79603	+ 3 55313	- 2766
1,21	0,43739 53003	117 34623	5 37864	6080	1,66	0,44404 30985	78 34916	3 52547	2721
1,22	0,43856 87686	111 96759	5 31784	5954	1,67	0,44325 96069	81 87463	3 49826	2683
1,23	0,43968 84385	106 67475	5 25830	5825	1,68	0,44244 08606	85 37289	3 47143	2643
1,24	0,44075 49360	101 39145	5 20005	5709	1,69	0,44158 71317	88 84432	3 44500	2605
1,25	- 0,44176 88505	- 96 19140	+ 5 14296	- 5589	1,70	- 0,44069 96885	+ 92 28932	+ 3 41895	- 2566
1,26	0,44273 07645	91 04844	5 08707	5476	1,71	0,43977 57953	95 70827	3 39329	2529
1,27	0,44364 12389	85 96137	5 03231	5363	1,72	0,43881 87126	99 10156	3 36800	2495
1,28	0,44450 08626	80 92906	4 97868	5260	1,73	0,43782 76970	102 46956	3 34305	2457
1,29	0,44531 01532	75 95038	4 92608	5153	1,74	0,43680 30014	105 81261	3 31848	2421
1,30	- 0,44606 96570	- 71 02430	+ 4 87455	- 5052	1,75	- 0,43574 48753	+ 109 13109	+ 3 29427	- 2393
1,31	0,44677 99000	66 14975	4 82403	4953	1,76	0,43465 35644	112 42536	3 27034	2354
1,32	0,44744 13975	61 32572	4 77450	4859	1,77	0,43352 93108	115 69570	3 24680	2321
1,33	0,44806 46547	56 55122	4 72591	4764	1,78	0,43237 23539	118 94250	3 22359	2294
1,34	0,44862 01669	51 82531	4 67827	4674	1,79	0,43118 29288	122 16609	3 20065	2257
1,35	- 0,44913 84200	- 47 14704	+ 4 63153	- 4587	1,80	- 0,42996 12679	+ 125 36674	+ 3 17808	- 2231
1,36	0,44960 98904	42 51551	4 58566	4499	1,81	0,42870 76905	128 54482	3 15577	2197
1,37	0,45003 50455	37 92985	4 54067	4419	1,82	0,42742 21523	131 70059	3 13380	2170
1,38	0,45041 43140	33 38918	4 49648	4334	1,83	0,42610 51464	134 83439	3 11210	2140
1,39	0,45074 82558	28 89270	4 45314	4258	1,84	0,42475 68025	137 94649	3 09070	2112
1,40	- 0,45103 71628	- 24 43956	+ 4 41056	- 4179	1,85	- 0,42337 73376	+ 141 03719	+ 3 06958	- 2083
1,41	0,45128 15584	20 02900	4 36877	4104	1,86	0,42196 69657	144 10677	3 04875	2058
1,42	0,45148 18484	15 66028	4 32773	4033	1,87	0,42052 58980	147 15552	3 02817	2028
1,43	0,45163 84507	11 33250	4 28740	3961	1,88	0,41905 43428	150 18369	3 00789	2005
1,44	0,45175 17757	7 04510	4 24779	3889	1,89	0,41755 25059	153 19158	2 98784	1977
1,45	- 0,45182 22267	- 2 79731	+ 4 20890	- 3824	1,90	- 0,41602 05901	+ 156 17942	+ 2 96807	- 1952
1,46	0,45185 01998	+ 1 41159	4 17066	3759	1,91	0,41445 87959	159 14749	2 94855	1928
1,47	0,45183 60839	5 58225	4 13307	3692	1,92	0,41286 73210	162 09604	2 92927	1903
1,48	0,45178 02614	9 71532	4 09615	3630	1,93	0,41124 63606	165 02531	2 91034	1879
1,49	0,45168 31082	13 81147	4 05985	3570	1,94	0,40959 61075	167 93555	2 89145	1856
1,50	- 0,45154 49355	+ 17 87132	+ 4 02415	- 3509	1,95	- 0,40791 67320	+ 170 82700	+ 2 87289	- 1832
1,51	0,45136 62803	21 89547	3 98906	3451	1,96	0,40620 84820	173 69989	2 85457	1811
1,52	0,45114 73256	25 88453	3 95455	3396	1,97	0,40447 14831	176 55446	2 83646	1787
1,53	0,45088 84803	29 83908	3 92059	3336	1,98	0,40270 59385	179 39092	2 81859	1765
1,54	0,45059 00895	33 75967	3 88723	3286	1,99	0,40091 20293	182 20951	2 80094	1746
1,55	- 0,45025 24928	+ 37 64690	+ 3 85437	- 3232	2,00	- 0,39908 99342	+ 185 01045	+ 2 78348	- 1723
1,56	0,44987 60238	41 50127	3 82205	3179	2,01	0,39723 98297	187 79393	2 76625	1702
1,57	0,44946 10111	45 32332	3 79026	3130	2,02	0,39536 18904	190 56018	2 74933	1682
1,58	0,44900 77779	49 11358	3 75896	3080	2,03	0,39345 62886	193 30941	2 73241	1664
1,59	0,44851 66421	52 87254	3 72816	3031	2,04	0,39152 31945	196 04182	2 71577	1641
1,60	- 0,44798 79167	+ 56 60070	+ 3 69785	- 2986	2,05	- 0,38956 27763			
1,61	0,44742 19097	60 29855	3 66799	2937					
1,62	0,44681 89242	63 96654	3 63862	2894					
1,63	0,44617 92588	67 60516	3 60968	2849					
1,64	0,44550 32072	71 21484	3 58119	2806					
1,65	- 0,44479 10588								

110. Beweis des Moivre'schen Satzes.*)

(Briefwechsel mit OLBERS I, p. 255.)

... Einiges Vergnügen hat mir vor einigen Tagen ein kleiner mathematischer Fund gemacht, der sich mir bei meinen Vorlesungen darbot. Der berühmte Satz

$$(\cos \alpha \pm \sqrt{-1} \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm \sqrt{-1} \sin n\alpha$$

ist nämlich in der gemeinen Algebra und Trigonometrie begründet, und man darf dabei nicht an das Unendliche denken. Es ist $\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1$, folglich

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)(\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha) &= 1 \\ = (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^n (\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha)^n, \text{ und} \\ \text{ebenso } 1 &= (\cos n\alpha + \sqrt{-1} \sin n\alpha)(\cos n\alpha - \sqrt{-1} \sin n\alpha), \text{ oder} \end{aligned}$$

$$\frac{(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^n}{\cos n\alpha \pm \sqrt{-1} \sin n\alpha} = \frac{\cos n\alpha - \sqrt{-1} \sin n\alpha}{(\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha)^n} = N$$

Man multiplicire nun Zähler und Nenner mit $\cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{-1}$, so hat man

$$\begin{aligned} N &= \frac{(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^{n \pm 1}}{\cos(n \pm 1)\alpha \pm \sqrt{-1} \sin(n \pm 1)\alpha} \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^{n \pm 1}}{\cos(n \pm 2)\alpha \pm \sqrt{-1} \sin(n \pm 2)\alpha} = \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn n nun eine ganze Zahl ist, so findet man unter diesen Ausdrücken von N einige, wo $n \pm r = 1$, $0, -1, \dots$ ist; für diese ist $N = 1$, also allgemein, wenn n eine ganze Zahl

$$(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + \sqrt{-1} \sin n\alpha$$

ebenso

$$(\cos \frac{1}{n} \alpha + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} \alpha)^n = \cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$$

oder

$$\cos \frac{1}{n} \alpha + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} \alpha = (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^{\frac{1}{n}}$$

Man setze nun $a = mb$, so hat man

$$\cos \frac{m}{n} b + \sqrt{-1} \sin \frac{m}{n} b = (\cos mb + \sqrt{-1} \sin mb)^{\frac{1}{n}}$$

allein für ein ganzes m ist

$$(\cos b + \sqrt{-1} \sin b)^m = \cos mb + \sqrt{-1} \sin mb;$$

also

$$\cos \frac{m}{n} b \pm \sqrt{-1} \sin \frac{m}{n} b = (\cos b \pm \sqrt{-1} \sin b)^{\frac{m}{n}}$$

Der Satz ist also allgemein gefunden, $\frac{m}{n}$ mag sein was man will; selbst irrational kann der Exponent sein, da man ihn immer als den Quotienten zweier rationalen Zahlen betrachten kann. Ich weiss nicht, ob man aus diesem Ausdrucke auch die Reihe für den Bogen a , durch seine Tangente ausgedrückt, hergeleitet hat; er enthält ihn in der That, denn wenn man

$$\sin \frac{1}{n} a = \frac{(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^{\frac{1}{n}} - (\cos a - \sqrt{-1} \sin a)^{\frac{1}{n}}}{2\sqrt{-1}}$$

für ein unendlich grosses n entwickelt, so kommt

$$a = \operatorname{tg} a - \frac{1}{3} \operatorname{tg} a^3 + \dots \text{etc.} \dots$$

Ueberhaupt muss dieser Ausdruck Alles enthalten, was auf den Kreis Bezug hat, ohne dass man den ähnlichen

$$e^{\pm \sqrt{-1} a} = \cos a \pm \sqrt{-1} \sin a,$$

der offenbar durch Hyperbel und Logarithmen führt, mit welchen die Lehre vom Kreise nichts zu thun hat, anwenden dürfte. Man findet diesen zweiten Satz leicht aus dem ersten, wenn man als bekannt voraussetzt, dass das erste Glied von $1(1+a)$, a ist; denn man hat

$$(\cos \frac{1}{n} a \pm \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} a)^n = \cos a \pm \sqrt{-1} \sin a$$

$$n! (\cos \frac{1}{n} a \pm \sqrt{-1} \sin \frac{1}{n} a) = 1 (\cos a \pm \sqrt{-1} \sin a)$$

und wenn n unendlich gross

$$\pm a \sqrt{-1} = 1 (\cos a \pm \sqrt{-1} \sin a)$$

oder

$$e^{\pm \sqrt{-1} a} = \cos a \pm \sqrt{-1} \sin a.$$

111. Attraction eines Parallelepipedums.**)

(Mon. Corresp. XXVII, p. 82. — Aus einem Briefe an LINDBEAU vom 30. Oct. 1812.)

.... Ich habe die Aufgabe, die Attraction eines Parallelepipedums auf ein anderes, ihm nach zwei Dimen-

sionen gleiches, und nach der dritten durch parallele Ebenen getrenntes, zu bestimmen, aufgelöst und folgende Ausdrücke gefunden:

Rechnet man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Theilchens des anziehenden Parallelepipedums von

*) [Aus einem Briefe an OLBERS vom 12. Jan. 1811.]

**) [Aus 85 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 344.]

EULER'S Abhandlungen. 2 Bd.

einer seiner Ecken an, und bezeichnet man die Coordinaten eines angezogenen Punktes, von demselben Anfangspunkte gerechnet, durch x', y', z' ; ferner die Dichte des Parallelepipeds durch \mathcal{A} , und seine Dimensionen (die Coord. der dem Anfangspunkte diametral gegenüberstehenden Ecke) durch a, b, c ; setzt man ferner:

$$q = [X^2 + Y^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, Z) = & -YZl(q-X) + X^2 \operatorname{arc} \left[\operatorname{tg} \frac{q-Y-Z}{X} \right] \\ & -XZl(q-Y) + Y^2 \operatorname{arc} \left[\operatorname{tg} \frac{q-X-Z}{Y} \right] \\ & -XYl(q-Z) + Z^2 \operatorname{arc} \left[\operatorname{tg} \frac{q-X-Y}{Z} \right] \end{aligned}$$

so ist die Summe aller Theilchen des Parallelepipeds, jedes durch seinen Abstand von angezogenen Punkte dividirt, oder nach LAPLACE'S Bezeichnung $V = \mathcal{A}\varphi(X, Y, Z)$

$$\begin{aligned} \text{von } X = & x' \text{ bis } x' - a \\ Y = & y' \text{ bis } y' - b \\ Z = & z' \text{ bis } z' - c \end{aligned}$$

genommen; oder es ist

$$V = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi(x', y', z') - \varphi(x', y', z' - c) \\ -\varphi(x', y' - b, z') + \varphi(x', y' - b, z' - c) \\ -\varphi(x' - a, y', z') + \varphi(x' - a, y', z' - c) \\ +\varphi(x' - a, y' - b, z') - \varphi(x' - a, y' - b, z' - c) \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich bekanntlich die Attraction des Parallelepipeds nach den Richtungen

$$\begin{aligned} \text{von } x = & -\left(\frac{dV}{dx'}\right) \\ \text{von } y = & -\left(\frac{dV}{dy'}\right) \\ \text{von } z = & -\left(\frac{dV}{dz'}\right) \end{aligned}$$

Noch ungleich weitläufiger finde ich den Ausdruck für die Attraction, die das Parallelepipedium auf das ganze angezogene äussert. Schreibt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} q &= [a^2 + b^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}} \\ q' &= [a^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}} \\ q'' &= [b^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi Z = & -aZ(b^2 - \frac{1}{2}Z^2)l\left(\frac{q-a}{q+a}\right) - \frac{1}{2}Z^2al\left(\frac{q'-a}{q'+a}\right) \\ & - bZ(a^2 - \frac{1}{2}Z^2)l\left(\frac{q-b}{q+b}\right) - \frac{1}{2}Z^2bl\left(\frac{q''-b}{q''+b}\right) \\ & + [\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}b^4 - a^2b^2](q-Z) - \frac{1}{2}a^4(q-Z) - \frac{1}{2}b^4(q''-Z) \\ & - \frac{3}{2}ab^2 \left[\operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{q-Z+a}{b} \right) - \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{q-Z-a}{b} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{3}{2}a^2b \left[\operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{q-Z+b}{a} \right) - \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{q-Z-b}{a} \right) \right] \\ & + 2abZ^2 \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} \frac{qZ}{ab} \right) \\ & - \frac{1}{2}qZ(a^2 + b^2 - \frac{3}{2}Z^2) + \frac{1}{2}q'Z(a^2 - \frac{3}{2}Z^2) \\ & \quad + \frac{1}{2}q''Z(b^2 - \frac{3}{2}Z^2) + \frac{1}{2}Z^3 \end{aligned}$$

Ferner ψZ von $Z = z'$ bis $z' - c$ und von $z' = c'$ bis $z' = c''$ genommen, (wo c' und c'' die Coordinaten z der beiden das angezogene Parallelepipedium begrenzenden Ebenen sind) oder

$$\psi(c'' - c) - \psi(c' - c) + \psi c'' - \psi c' = A$$

so ist das Gewicht, welches man in der der Anziehung entgegengesetzten Richtung an das angezogene Parallelepipedium anbringen muss, um die Attraction, die es erfährt, aufzuheben

$$= \mathcal{A}^2 A$$

und (indem die Masse des angezogenen Parallelepipeds $= \mathcal{A}ab(c'' - c')$ ist) die Kraft mit welcher es angezogen wird

$$= \frac{\mathcal{A}^2 A}{ab(c'' - c')}$$

Wenn man die mittlere Dichte der Erde $= 1$ setzt, und die Coordinaten der Parallelepiden in Theilen des Erdhalbmessers ausdrückt, so sind die gefundenen Resultate unmittelbar mit der Schwere vergleichbar. Ich unterlasse es, Ihnen hier mehr Detail mitzutheilen und die Integrationen, die auf diese Ausdrücke führten, und die weiter keine Schwierigkeit haben, als die einer etwas mühsamen Rechnung, auseinander zu setzen. — Interessant, obgleich nicht unerwartet, ist übrigens eine Folgerung, die man aus dieser strengen Auflösung des Problems ziehen kann: nämlich dass die Annahme eines vollkommen gleichförmig mit Materie erfüllten Raums, sowie ihn die Auflösung voraussetzt, und der Attraction nach dem Newton'schen Gesetze, beide zusammen nicht mit den Phänomenen der Attraction in kleinen Entfernungen, die man unter unzähligen Modificationen beobachtet, vereinbar sind. Diese Voraussetzungen geben die Attraction unvergleichlich viel kleiner als sie wirklich ist; und es wird dadurch bewiesen, dass wenigstens eine von beiden Voraussetzungen, entweder die der Continuität der Körper, oder der selbst in unendlich kleinen Entfernungen noch stattfindenden Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes, unrichtig ist. Allein welche von beiden es ist, oder ob es beide zugleich sind, lässt sich, in dem Sinne genommen, in welchem die Mathematiker zu reden pflegen, schwerlich je entscheiden.

112. Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie.*

(Mon. Corresp. XXVII, p. 222.)

Die Aufgabe, über welche ich mir erlaube noch einige Worte zu sagen, betrifft die Bestimmung der Lage eines Punkts, von welchem man drei andere, ihrer Lage nach bekannte sehen, und die Winkel zwischen ihnen messen kann. Sie ist ohne Zweifel sehr nutzbar, und deshalb auch von mehreren Mathematikern betrachtet. — Die, für den wirklichen Gebrauch bequemste Auflösung gab BURCKHARDT im IV. Bande dieser Zeitschrift S. 359. Allein noch anwendbarer würde eine Auflösung sein, die unmittelbar aus den bekannten rechtwinkligen Coordinaten der drei gegebenen Punkte die des vierten finden lehrte; alsdann würde man sie mit Bequemlichkeit und ohne Umwege zur Entwerfung des nach den Weltgegenden orientirten Plans einer Gegend, in welcher drei Punkte ihrer Lage gegen den Meridian nach bekannt sind, gebrauchen können.

In der That findet man leicht eine geschmeidige Auflösung der so gefassten Aufgabe. Nennt man die Coordinaten dreier Punkte, auf beliebige senkrecht auf einander stehende Axen in der Ebene des Horizonts, x, x', x'' und y, y', y'' ; die des vierten X und Y ; die Winkel, welche die Abscissenlinie mit den von dem vierten Punkte nach den drei bekannten gezogenen Linien macht, $\alpha, \alpha', \alpha''$: so werden die Unterschiede dieser drei Winkel als durch die Beobachtung gegeben, und die Coordinaten der drei ersten Punkte als bekannt vorausgesetzt und man hat folgende nur drei Unbekannte enthaltende, also das Problem vollständig bestimmende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (x - X) \sin \alpha &= (y - Y) \cos \alpha \\ (x' - X) \sin \alpha' &= (y' - Y) \cos \alpha' \\ (x'' - X) \sin \alpha'' &= (y'' - Y) \cos \alpha'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Multiplirt man diese Gleichungen mit

$$\left. \begin{aligned} -\alpha &= \frac{1}{2} [A + B - \alpha' - \alpha''] - \frac{1}{2} [B + A - (\alpha'' - \alpha) - (\alpha' - \alpha)] \\ A - \alpha' &= \frac{1}{2} [A + B - \alpha' - \alpha''] - \frac{1}{2} [B - A - (\alpha'' - \alpha')] \\ B - \alpha'' &= \frac{1}{2} [A + B - \alpha' - \alpha''] + \frac{1}{2} [B - A - (\alpha'' - \alpha')] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

damit aus (2) $x - X$ und aus (1) $y - Y$.

Die Rechnung lässt sich also nach folgenden Formeln führen:

$$\text{tg } A = \frac{y' - y}{x' - x}; \quad \text{tg } B = \frac{y'' - y}{x'' - x}$$

$$\begin{array}{r|l} -\cos \alpha' & -\cos \alpha'' \\ +\cos \alpha & 0 \\ 0 & +\cos \alpha \end{array}$$

und addirt, so hat man

$$\begin{aligned} (x - X) \sin(\alpha' - \alpha) &= \cos \alpha [(y' - y) \cos \alpha' - (x' - x) \sin \alpha'] \\ (x - X) \sin(\alpha'' - \alpha) &= \cos \alpha [(y'' - y) \cos \alpha'' - (x'' - x) \sin \alpha''] \end{aligned}$$

oder wenn man zwei Hälftswinkel A und B einführt, so dass

$$\text{tg } A = \frac{y' - y}{x' - x}; \quad \text{tg } B = \frac{y'' - y}{x'' - x},$$

$$\left. \begin{aligned} (x - X) &= \frac{(x' - x) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} \cdot \frac{\sin(A - \alpha')}{\cos A}}{(y' - y) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} \cdot \frac{\sin(A - \alpha')}{\sin A}} \\ (x - X) &= \frac{(x'' - x) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\sin(B - \alpha'')}{\cos B}}{(y'' - y) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\sin(B - \alpha'')}{\sin B}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man die folgende:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(A - \alpha')}{\sin(B - \alpha'')} &= \frac{x' - x}{x'' - x} \cdot \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\cos A}{\cos B} \\ &= \frac{y' - y}{y'' - y} \cdot \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\sin A}{\sin B} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

und wenn man den rechts stehenden ganz bekannten Theil = $\text{tg } N$ setzt, nach einer sich von selbst darbietenden trigonometrischen Transformation:

$$\begin{aligned} \text{tg } \frac{1}{2} [A + B - \alpha' - \alpha''] &= \\ &= \text{tg } (45^\circ + N) \text{tg } \frac{1}{2} [B - A - (\alpha'' - \alpha')] \dots (4) \end{aligned}$$

Hieraus findet man die in (2) vorkommenden Winkel, nämlich:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{x' - x}{\sin(\alpha' - \alpha) \cos A} = \frac{y' - y}{\sin(\alpha' - \alpha) \sin A} \\ B' &= \frac{x'' - x}{\sin(\alpha'' - \alpha) \cos B} = \frac{y'' - y}{\sin(\alpha'' - \alpha) \sin B} \\ \text{tg } N &= \frac{B'}{A'} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2m &= A - (\alpha' - \alpha); \quad 2n = B - (\alpha'' - \alpha) \\ \text{tg } z &= \text{tg } (45^\circ + N) \text{tg } (n - m) \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

*) [88 d. a. Verz. — Br. m. O. I. 344. — Pothenot'sche Aufgabe.]

$$x - X = A' \sin(x - n + \alpha) \cos(x - n - m) = B' \sin(x + n - m) \cos(x - n - m) \dots \dots \dots (2)$$

$$y - Y = -A' \sin(x - n + m) \sin(x - n - m) = -B' \sin(x + n - m) \sin(x - n - m) \dots \dots \dots (1)$$

Die Quadranten, in welchen man die Hilfswinkel A und B zu nehmen hat, bestimmen sich durch die Zeichen der Zähler und Nenner wie immer; x ist so zu nehmen, dass die Distanz des ersten und vierten Punkte

$$A' \sin(x - n + m) = B' \sin(x + n - m)$$

positiv wird.

Zum Rechnungsbeispiele wähle ich das schon von BURCKHARDT am angeführten Orte der M. C. gegebene.

	Abstände vom	
	Meridian	Perpendikel
Dome des Invalides	$x = + 904,0$	$y = + 1067,0$
Pyramide de Montmartre	$x' = - 0,2$	$y' = + 2931,3$
Notre Dame	$x'' = - 471,2$	$y'' = + 955,3$

und die auf dem Collège de France gemessenen Winkel

$$\alpha' - \alpha = 65^\circ 12' 12'',0$$

$$\alpha'' - \alpha' = 36 16 45,0$$

$$\alpha'' - \alpha = 101 28 57,0$$

$$1(y' - y) = 3,2705158 \quad 1(y'' - y) = 2,0480532n$$

$$1(x' - x) = 2,9562645n \quad 1(x'' - x) = 3,1383659n$$

$$1 \operatorname{tg} A = 0,3142513n \quad 1 \operatorname{tg} B = 8,9090873$$

$$A = 115^\circ 52' 28'',48 \quad B = 184^\circ 38' 37'',06$$

$$\alpha' - \alpha = 65 12 12,00 \quad \alpha'' - \alpha = 101 28 57,00$$

$$m = 25 20 6,74 \quad n = 41 34 50,03$$

$$1(x' - x) = 2,9562645n \quad 1(x'' - x) = 3,1383659n$$

$$c.1 \sin(\alpha' - \alpha) = 0,0420089 \quad c.1 \sin(\alpha'' - \alpha) = 0,0087803$$

$$c.1 \cos A = 0,3601257n \quad c.1 \cos B = 0,0014279n$$

$$1A' = 3,3583991 \quad 1B' = 3,1485741$$

$$1 \operatorname{tg} N = 9,7901750 \quad 45^\circ + N = 76^\circ 40' 5'',13$$

$$1 \operatorname{tg}(45^\circ + N) = 0,6252918 \quad 1A = 3,3583991$$

$$1 \operatorname{tg}(n - m) = 9,4644680 \quad 1 \sin(x - n + m) = 9,7546007$$

$$1 \operatorname{tg} z = 0,0897598 \quad 3,1129998$$

$$z = 50^\circ 52' 45'',20 \quad 1 \cos(x - n - m) = 9,9827621$$

$$x - n + m = 34 38 1,91 \quad 1 \sin(x - n - m) = 9,4413020$$

$$x - n - m = -16 2 11,57 \quad 1(x - X) = 3,0957619$$

$$1(y - Y) = 2,5543028$$

$$x - X = 1246,700$$

$$y - Y = 358,346$$

$$X = -342,700 \text{ Tois.}$$

$$Y = +708,654$$

Ein bedeutender Theil der Rechnung bleibt un geändert, wenn man die Winkel zwischen denselben Gegenständen an einem andern Orte beobachtet; sodass die Rechnung noch bequemer wird, wenn man aus drei bekannten Punkten mehrere unbekannt zugleich bestimmen will.

113. Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie.*

(Astron. Nachr. 3, p. 199 und 221.)

Die vielen bekannten Auflösungen der Aufgabe „aus der bekannten Lage dreier Punkte und den von einem vierten aus gemessenen Winkeln zwischen denselben die Lage des vierten zu finden“ scheinen alles erschöpft zu haben, was sich über die Berechnung dieser Aufgabe sagen lässt; allein ich glaube, dass die Constructionsmethoden, welche mehrere Schriftsteller vorschlagen, um den vierten Punkt auf den Messtisch niederzulegen, noch verbessert werden können. — LEHMANN legt, in seiner Anleitung zum vortheilhaftesten

und zweckmässigsten Gebrauche des Messtisches, grosses Gewicht auf die Auflösung dieser Aufgabe mittelst des Messtisches, und lehrt ein Verfahren, welches durch Versuche zum Ziele führt; die andern mir bekannt gewordenen Auflösungen setzen entweder mechanische Hilfsmittel oder die Construction eines Kreises, oder zweier Kreise, auf dem Messtische voraus; was meines Erachtens nicht verstattet werden kann, indem auf freiem Felde nur die allereinfachsten Operationen gut gelingen können. Der Messtisch selbst gibt nur das Mittel, den Winkel zwischen zwei sichtbaren Objecten an jeden Punkt einer beliebigen geraden Linie auf dem Papiere

* [189 und 190 d. a. Verz.]

zu verzeichnen; durch dieses Mittel allein muss also die Aufgabe aufgelöset werden.

Ich nehme drei Punkte auf dem Felde an, welche ich, so wie man sie von der linken Hand nach der rechten erscheinen sieht, durch A, B, C bezeichne; die Projectionen dieser Punkte auf dem Messtische bezeichne ich durch a, b, c ; den vierten Punkt durch D und seine Projection durch d . Es kommt nun darauf an, den Messtisch so zu stellen, dass die Seiten des Dreiecks $a b c$

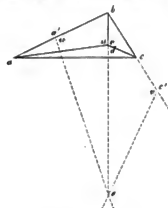


Fig. 1.

den Seiten des Dreiecks ABC parallel sind; sobald er diese Stellung hat, findet man den Punkt d dadurch, dass man die Schärfe des Dioptrials erst auf a , dann auf b legt, und in den Richtungen DA und DB gerade Linien zieht, deren Durchschnitt der Punkt d ist.

Verfährt man ebenso in Beziehung auf den Punkt c , so müssen die zwei neuen Durchschnitte, welche man dadurch erhält, mit dem vorigen zusammenfallen; — die Erfüllung oder Nichterfüllung dieser Bedingung zeigt, ob der Messtisch richtig orientirt war oder nicht.



Fig. 2.

Um diese Orientierung zu erhalten, nehme ich ausser den 3 Punkten a, b, c noch zwei andere auf dem Messtische an, nämlich a' auf der Seite ba oder ihrer Verlängerung, sodass $ba' = bc$, und c' auf der Seite bc oder ihrer Verlängerung, sodass $bc' = ba$; legt man dann durch a' eine Linie, welche mit $a'b$, nach der Seite des Beobachters, den Winkel ADB macht, durch c' eine andere, welche mit $c'b$ ebenso den Winkel CDB macht, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte e , welcher auf der geraden Linie bd liegt und daher unmittelbar

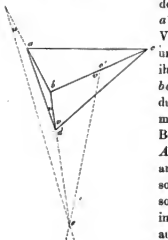


Fig. 3.

de Orientierung des Messtisches gibt. In Fig. 1, 2, 3 habe ich die drei möglichen Fälle der Aufgabe dargestellt; die Auflösung ist für alle dieselbe.

Will man die Dimensionen der Figur auf dem Messtische auf der Charte nicht vernachlässigen, so muss man Sorge tragen, beim Anlegen der Winkel die Punkte a' und c' senkrecht über D zu stellen; doch wird der aus der Vernachlässigung dieser Forderung entstehende Fehler auf dem Maasstabe der Charte wohl immer unmerklich sein, wenn nur der Mittelpunkt des Messtisches senkrecht über D ist. — Sollte die Schwierigkeit eintreten, dass der Punkt e ausser den Grenzen des Papierses auf dem Messtische liegt, so kann man sie dadurch vermeiden, dass man die Winkel ADB und BDC nicht an a' und c' , sondern an ein paar andere Punkte legt, welche näher an b auf einer mit $a'e'$ parallelen Linie liegen. — In dem Falle, wo die Aufgabe beinahe unbestimmt wird, wird die Figur dieses dadurch andeuten, dass die Linien, deren Durchschnitt den Punkt e bestimmt, sich in einem sehr spitzen Winkel, oder sehr nahe an b durchschneiden.

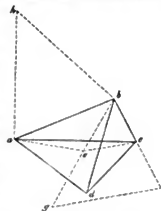


Fig. 4.

Diese Auflösung beruht auf einer Eigenschaft der Figur, von der ich nicht weiss, ob sie früher bemerkt worden ist; ich werde sie an einem der drei Fälle erläutern. Legt man nämlich (Fig. 4) an a den Winkel $bae = bdc$ und an c den Winkel $bce = bda$, und zieht man die Linie be , so ist

$$W. bce = W. abd \text{ und } W. cba = W. cbd.$$

Der Beweis davon ist leicht: man verlängert bc bis f , sodass $bf = ba$ und zieht fg parallel mit ce ; das Dreieck bfg legt man an ba , so dass f mit a und g mit h zusammenfallen. Dann hat man, in den Vierecken $ahbc$ und $abcd$,

$$W. hab = W. atb$$

$$W. bac = W. bdc$$

$$W. hbc = W. abc$$

$$hc:bc = bg:be = bf:bc = ba:bc$$

also die beiden Vierecke ähnlich und folglich

$$W. ebc = W. hba = W. abd$$

$$W. eba = W. cbd.$$

Man sieht hieraus, dass die Punkte a' und c' nur in die

Construction gebracht sind, um den Durchschnittspunkt e in der Lage zu erhalten, in welcher er wirklich vorkommt; man könnte die Auftragung dieser Punkte vermeiden, wenn man den Winkel nach cbd übertragen wollte, welches entweder mit dem Zirkel, oder mittelst eines entfernten Hilfsobjects, welches mit einem andern Objecte diesen Winkel macht, geschehen könnte. Mir scheint aber die vorgetragene Auflösung zweckmässiger zu sein, zumal da man die beiden Punkte a' und c' , welche man bei der Aufnahme eines gewissen Theils der Charte zu benutzen gedenkt, nicht erst auf dem Felde aufzutragen braucht, sondern dieses vorher mit der grössten Genauigkeit bewerkstelligen kann.

113^b. Zusatz.

Die Orientierung des Messtisches, welche man, wie ich in dem Aufsatz zeigte, worauf das Gegenwärtige sich bezieht, durch die Auftragung der dort durch a' und c' bezeichneten Punkte leicht erhalten kann, kann auch unabhängig von diesen Punkten, oder irgend einer andern Vorbereitung, durch eine verschiedene Anwendung derselben geometrischen Eigenschaft, welche der dortigen Vorschrift zum Grunde liegt, gefunden werden. Ein ehemaliger, sehr geschätzter Schüler von mir, Herr Fährlich KULENKAMP, welcher die von mir auf die Erfindung der Richtungslinie db angewandte Vorschrift auch auf die beiden andern Richtungslinien de und dc ausdehnte, machte mich darauf aufmerksam, dass die beiden Hilfspunkte a' und c' füglich entbehrt werden können; — da dieses für die Praxis auf dem Felde ohne Zweifel eine wesentliche Verbesserung ist, so unterlasse ich nicht, eine zweite Vorschrift mitzutheilen, welche vor der ersten diesen Vortheil voraus hat.

Ich beziehe mich auf die vorigen Figuren und nenne die Winkel ADB und $BDC \dots u$ und v .

„Wenn man den Messtisch so vor sich hat, dass „ a, b, c von der linken Hand nach der rechten aufeinander folgen, so legt man den Winkel v an den Punkt a „der Linie ca , und u an den Punkt c derselben Linie, „beide vom Beobachter abwärts; der Punkt e , in welchem die Scheitel dieser Winkel sich schneiden, liegt „dann auf-der Linie bd , und gibt daher die Orientierung „des Messtisches.“

Die Richtigkeit dieser Vorschrift ist leicht zu beweisen: die Winkel e und d des Vierecks $aced$ ergänzen sich der Construction zufolge zu zwei Rechten; daher kann um dieses Viereck ein Kreis beschrieben werden, und man hat die den Seiten ae und be gegenüberstehenden Peripheriewinkel gleich, oder

$$W. ace = u = W. adb$$

$$W. cae = v = W. cdb \quad \text{Q. E. D.}$$

Unter den vielen ähnlichen Constructionen, welche man durch Verwechslung der drei gegebenen Punkte erhalten kann, wird es zweckmässig sein, sich an eine zu gewöhnen. Durch die Wahl einer andern wird man zwar oft die Unbequemlichkeit vermeiden können, dass der Punkt e über den Messtisch hinausfällt; allein da man mittelst des Diopterlineals eine Parallele mit ac so leicht ziehen kann, so scheint mir das dadurch gegebene Mittel, die Figur, wenn es nöthig ist, zu verkleinern, die Unbequemlichkeit leichter zu beseitigen. Ich glaube daher, dass es am zweckmässigsten sein wird, immer der oben gegebenen Vorschrift zu folgen, und, wenn es nöthig ist, eine Parallele mit ac zu Hilfe zu nehmen.

114. Ueber einen Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten.*)

(Briefwechsel mit OLBERS II, p. 133.)

... Das warum ich bitte, ist eine Auskunft über einen sehr merkwürdigen Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten, den ich im Apollonius nicht finde, und aus Mangel dahin gehöriger Bücher nirgends anders suchen kann; Sie aber, der Sie in der schönen Schule der alten Geometrie sich gebildet haben, werden mir leicht eine

*) [Aus einem Briefe an OLBERS vom 14. Febr. 1820. — Br. m. O. II, 140 (O.)]

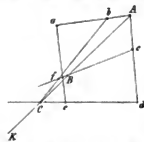
Nachricht geben können, ob er sich irgendwo findet, und auf welche Art er dargestellt ist. Dass er sich im Apollonius nicht vorfindet, wundert mich, da es ein Hauptsatz ist, zu welchem man leicht hundert Corollarien machen könnte. Doch zur Sache selbst: „Wenn man sechs Punkte a, b, c, d, e, f in willkürlicher Ordnung in einen Kegelschnitt macht, und durch ab, cd gerade Linien zieht, bis sie sich in einem Punkte A schneiden; ferner durch ae, cf ; endlich durch bf, de , deren Durch-

schnitte respective in B und C : so liegen ABC in gerader Linie."

Einer meiner Schüler glaubte gefunden zu haben, dass wenn man die Seiten eines im Kreise beschriebenen Sechsecks bis zu ihren Durchschnittspunkten verlängert, und zwar 1, 4; 2, 5; 3, 6; diese Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen. Ich fand bald einen Beweis dieses Satzes, erkannte aber zugleich, dass er 1) nur specieller Fall eines unendlich allgemeineren Satzes ist und immer gilt, wenn man die Verbindungen nach folgendem Schema macht



d. i. $ab, dc; ae, fc$; dann kreuzweise bf, de ; wodurch für jedes Sechseck 60 dem Satze Genüge leistende gerade Linien entstehen; 2) dass man statt des Kreises jeden beliebigen Kegelschnitt nehmen kann. Durch die letzte Erweiterung dient also der Satz, eine beliebige Menge von Punkten eines Kegelschnittes zu bestimmen, in welchem fünf gegeben sind; die für diesen Fall sonst vorkommende Construction beruht auf anderen Gründen und ist von dieser verschieden. Die letzte aber ist, wenn der Satz wahr ist, folgende:



Für andere AK erhält man andere.

Ich komme nun zum Beweise selbst, der, wenn man ihn nicht mit 60 verschiedenen Abänderungen führen will, analytisch geführt werden muss.

$$\left. \begin{aligned} k \sin \left(\frac{d+c}{2} - \frac{b+a}{2} \right) &= \cos \left(\frac{b-a}{2} \right) \sin \left(\frac{d+c}{2} - u \right) - \cos \left(\frac{d-c}{2} \right) \sin \left(\frac{b+a}{2} - u \right) \\ k \sin \left(\frac{f+c}{2} - \frac{e+a}{2} \right) &= \cos \left(\frac{e-a}{2} \right) \sin \left(\frac{f+c}{2} - u \right) - \cos \left(\frac{f-c}{2} \right) \sin \left(\frac{e+a}{2} - u \right) \\ k \sin \left(\frac{c+d}{2} - \frac{f+b}{2} \right) &= \cos \left(\frac{f-b}{2} \right) \sin \left(\frac{c+d}{2} - u \right) - \cos \left(\frac{e-d}{2} \right) \sin \left(\frac{f+b}{2} - u \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Allgemein aber ist

$$\begin{aligned} \cos(B-b) \sin(A+a+N) - \cos(A-a) \sin(B+b+N) &= \\ &= \sin(a-b) \cos(A+B+N) + \sin(A-B) \cos(a+b+N). \end{aligned}$$

(von welchem nutzbaren und eleganten trigonometrischen Satze ich zehn Varietäten finde, die ich sämmtlich dadurch beweise, dass ich die Producte auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in Sinus der Summen

Zuerst führe ich ihn für den Kreis:

Ich ziehe durch seinen Mittelpunkt eine willkürliche gerade Linie, auf der ich die Abscissen rechne; von dem Punkte, wo sie die Peripherie durchschneidet, zähle ich bis zu den sechs Punkten die Winkel a, b, c, d, e, f , wo diese sich in beliebiger Ordnung folgen können. Mache ich die Verbindungen nach dem obigen Schema, so habe ich zur Bestimmung der Coordinaten $xy, x'y', x''y''$ der drei Punkte ABC folgende Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \frac{b-a}{2} &= x \cos \frac{b+a}{2} + y \sin \frac{b+a}{2} \\ \cos \frac{d-c}{2} &= x \cos \frac{d+c}{2} + y \sin \frac{d+c}{2} \\ \cos \frac{e-a}{2} &= x' \cos \frac{e+a}{2} + y' \sin \frac{e+a}{2} \\ \cos \frac{f-c}{2} &= x' \cos \frac{f+c}{2} + y' \sin \frac{f+c}{2} \\ \cos \frac{f-b}{2} &= x'' \cos \frac{f+b}{2} + y'' \sin \frac{f+b}{2} \\ \cos \frac{e-d}{2} &= x'' \cos \frac{e+d}{2} + y'' \sin \frac{e+d}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Diese sollen der Gleichung der geraden Linie

$$0 = y''(x'-x) - y'(x''-x) + y(x''-x') \dots (2)$$

entsprechen: oder man muss den sechs Gleichungen (1) und dieser Gleichung (2) durch dieselben Werthe der Coordinaten Genüge leisten können. Dies geschieht aber bei der Gleichung (2) offenbar durch die Annahme

$$\begin{aligned} x &= k \cos u - \rho \sin u; & y &= k \sin u + \rho \cos u \\ x' &= k \cos u' - \rho' \sin u'; & y' &= k \sin u' + \rho' \cos u' \\ x'' &= k \cos u'' - \rho'' \sin u''; & y'' &= k \sin u'' + \rho'' \cos u'' \end{aligned}$$

Dass es auch bei den Gleichungen (1) der Fall ist, zeige ich wie folgt: ich eliminiere ρ, ρ', ρ'' , so habe ich statt der sechs, drei neue Gleichungen:

und Unterschiede verwandle, wo unmittelbar Alles gleich wird). Wendet man diesen Satz hier an, so verwandeln sich die Gleichungen (3) in

$$k \sin \left(\frac{d-b}{2} + \frac{c-a}{2} \right) = \sin \left(\frac{c-a}{2} \right) \cos \left(\frac{d+b}{2} - u \right) + \sin \left(\frac{d-b}{2} \right) \cos \left(\frac{c+a}{2} - u \right)$$

$$k \sin \left(\frac{f-e}{2} + \frac{c-a}{2} \right) = \sin \left(\frac{c-a}{2} \right) \cos \left(\frac{f+e}{2} - u \right) + \sin \left(\frac{f-e}{2} \right) \cos \left(\frac{c+a}{2} - u \right)$$

$$k \sin \left(\frac{c-f}{2} + \frac{d-b}{2} \right) = \sin \left(\frac{d-b}{2} \right) \cos \left(\frac{f+e}{2} - u \right) + \sin \left(\frac{c-f}{2} \right) \cos \left(\frac{d+b}{2} - u \right)$$

und wenn man diese mit

$$\sin \frac{f-e}{2}; \quad -\sin \frac{d-b}{2}; \quad +\sin \frac{c-a}{2}$$

multipliziert und addirt, kommt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, unabhängig von k und u , Null. Quod erat demonstrandum.

Dass der Satz auch für die Kegelschnitte im Allgemeinen gilt, wird klar, wenn man diese als Projectionen des Kreises auf durch den Kegel gehende Ebenen, und das Auge in der Spitze des Kegels annimmt. Die gerade Linie ABC bleibt dann gerade etc. Allein man kann den Beweis sehr leicht direct führen,

$$\text{Ellipse} \quad xb [\sin \alpha - \sin \beta] + ya [\cos \beta - \cos \alpha] = ab \sin (\alpha - \beta)$$

$$\text{Hyperbel} \quad xb [\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta] + ya [\sec \beta - \sec \alpha] = ab (\operatorname{tg} \alpha \sec \beta - \operatorname{tg} \beta \sec \alpha)$$

oder vielmehr

$$\left. \begin{aligned} \text{Ellipse} \quad xb \cos \frac{\beta+\alpha}{2} + ya \sin \frac{\beta+\alpha}{2} &= ab \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \\ \text{Hyperbel} \quad xb \cos \frac{\beta-\alpha}{2} + ya \sin \frac{\beta+\alpha}{2} &= ab \cos \frac{\beta+\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \cdot (1)^*$$

Der Gleichung für die gerade Linie (2) leistet man aber durch

$$k \left\{ \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \sin \frac{\delta+\gamma}{2} - \cos \frac{\delta-\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\alpha}{2} \right\} = \sin \left(\frac{\delta+\gamma}{2} - \frac{\beta+\alpha}{2} \right) \cos N + \left\{ \cos \frac{\beta+\alpha}{2} \cos \frac{\delta-\gamma}{2} - \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \frac{\delta+\gamma}{2} \right\} \sin N$$

wo man das erste Glied nach dem angeführten trigonometrischen Satze in

$$\cos (B-b) \cos (A+a+N) - \cos (A-a) \cos (B+b+N) =$$

$$= -\sin (A+B+N) \sin (a-b) - \sin (a+b+N) \sin (A-B)$$

$$\text{in} \quad + \left\{ \sin \frac{\gamma-\alpha}{2} \sin \frac{\delta+\beta}{2} + \sin \frac{\delta-\beta}{2} \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} \right\}$$

verwandeln kann. Nach dieser Verwandlung gibt aber die für den Kreis angewandte Multiplication und Addition auf beiden Seiten Null.

wenn man dabei das oben gebrauchte Mittel wieder anwendet. Die allgemeinen Gleichungen der Kegelschnitte sind nämlich:

$$yy = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \dots \text{Ellipse}$$

$$yy = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \dots \text{Hyperbel}$$

und leistet ihnen Genüge durch

$$x = a \cos \alpha; \quad x = b \sec \alpha$$

$$y = b \sin \alpha; \quad y = b \operatorname{tg} \alpha$$

womit man, statt der für den Kreis entwickelten Gleichung (1), ähnliche hat, nämlich

$$x = ak \cos u - \rho a \sin u$$

$$y = b k \sin u + \rho b \cos u$$

etc.

Genüge. Eliminiert man hierdurch ρ , so geben die sechs Gleichungen (1*) für die Ellipse genau die für den Kreis gefundenen Gleichungen (3), sodass dieser Fall bewiesen ist; für die Hyperbel verwandeln sie sich in:

$$\sin \frac{\gamma-\alpha}{2} \cos \frac{\delta+\beta}{2} + \sin \frac{\delta-\beta}{2} \cos \frac{\gamma+\alpha}{2}$$

und das letzte nach dem Satze

Wie man die speciellen Fälle dieses Satzes rein geometrisch beweisen kann, habe ich auch versucht; allein damit halte ich Sie nicht länger auf, da dieser Weg hier nicht der rechte zu sein scheint.

115. Ueber eine geometrische Aufgabe.*)

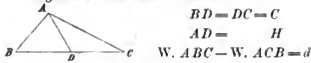
(Briefwechsel mit OLBRIS II, p. 137.)

Ich habe viele Zeit mit geometrischen Aufgaben hingebraht, die, wenngleich nichts Wesentliches dabei

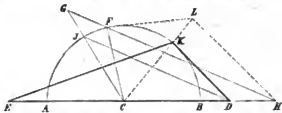
gewonnen wird, doch eine nützliche, wenigstens angenehme Uebung sind. Darunter ist mir eine aufgestossen, die sehr leicht zu sein scheint, allein mir doch etwas zu schaffen gemacht hat. Es ist die folgende:

*) [Aus einem Briefe an OLBRIS vom 14. Febr. 1820.]

Gegeben sind in einem Dreieck



Ich construire diese Aufgabe folgendermassen:



Man mache $AC = H$ und ziehe den Halbkreis $AJFB$; ferner $CE = CD = C$ und lege an D den $W. JDE = d$. Durch den dadurch bestimmten Punkt J ziehe man $CJG = C$; dann GH parallel JD ; FB halbiere man in K , so ist EKD das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man mache $CL = C$, ziehe CF, FL, LH .

$$FC:LC = LC:CH = H:C$$

$$\triangle FCL = \triangle LCH \text{ (durch die Halbiring)}$$

$$\triangle FCL \text{ \u00e4hnlich } \triangle LCH$$

$$FL:LH = FC:CL = H:C$$

$$W. FLH = W. ECK \text{ (n\u00e4mlich } = W. CLH + W. CHL)$$

$$\triangle FLH \text{ \u00e4hnlich } \triangle KCE$$

$$W. FHL = W. KED$$

$$HL \text{ parallel } DK \text{ (n\u00e4mlich } CH:CL = CD:DH)$$

$$HG \text{ " } DJ$$

$$W. KDJ = W. FHL = W. KED$$

$$W. KDE = W. KED + W. JDE = W. KED + d$$

Quod erat demonstrandum.

116. Ueber K. L. Struve's Parallellinien-Theorie.*)

(Briefwechsel mit OLBERS II, p. 170.)

... Sie werden eine neue Parallellinien-Theorie von unserm Director STRUVE wohl ein wenig n\u00e4her ansehen, da sie scharfsinnig genug ist. Leider f\u00fchrt sie nicht bei der Schwierigkeit vor\u00fcbir und kann dieses auch nicht, da sie f\u00fcr das Euklidische Kennzeichen der geraden Linie (Ax. 11) kein anderes substituirt. Ich will, da ich gerade die kleine Schrift**) gelesen habe, versuchen, Ihnen die Verfahrensart darzustellen.

STRUVE beweist zuerst, dass in einem Vierecke



$abcd$, in welchem man $W. a = W. b$ und $ac = bd$ gemacht hat,

$$W. c = W. d$$

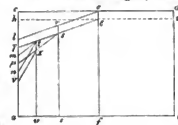
ist; ferner wenn man cd in e und ab in f halbiert und ef zieht, dass dieses senkrecht auf cd und ab steht; endlich, wenn die Winkel c und a ungleich sind, dass dann der gr\u00f6ssere der gr\u00f6sseren Seite gegen\u00fcbersteht.

Dann beweist er, dass wenn man $W. a = W. b = 90^\circ$ macht und cd wie vorher zieht, in einem beliebigen



Punkte von ef , z. B. g , ein Perpendikel errichtet, so dass dieses ca und db in h und i schneidet: dass die Winkel ahg und big gleich und zwar spitz, stumpf oder recht sind, je nachdem die Winkel ace und bde spitz, stumpf oder recht sind: dies gilt, so lange g nicht mit f zusammenf\u00e4llt.

Nun will er zeigen, dass die Winkel eca und edb



rechte sind: er macht dies folgendermassen: Hyp. 1 $W. c = W. d$ spitz. Weil cef recht und eca spitz, so ist $ca > ef$; man mache daher $al = ef$ und ziehe le , so sind die Winkel ale und fel gleich und beide spitz, indem cef recht und lef kleiner ist. Man halbiert nun el und af in r und s und zieht rs , welche auf le und af senkrecht stehen muss; allein aus dem vorigen Grunde ist $la > rs$ und man kann wieder $am = rs$ machen, auch diese Operation beliebig fortsetzen.

Der Zweck hiervon ist folgender: wenn man von l ein Perpendikel auf ca f\u00e4llt, so kann dieses wieder

*) [Aus einem Briefe an OLBERS vom 24. Oct. 1820.]

**) [Theorie der Parallellinien. K\u00f6nigsberg 1820.]

zwischen c und l fallen, noch zwischen l und m , noch zwischen m und n etc. . . indem in allen diesen Fällen Dreiecke stattfinden müssten, welche einen rechten und einen, stumpfen Winkel haben, was nicht angeht; auch kann es aus demselben Grunde nicht über c hinausfallen (weil ace spitz); auch nicht unter a , weil sonst ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln vorhanden wäre. Also muss, da doch ein Perpendikel gefällt werden kann, dasselbe auf einen Punkt treffen, welcher durch die oben beschriebene Operation nicht erreicht werden kann. Nun ist dieses der Punkt a nicht, indem alle rechte Winkel gleich sind, also das Perpendikel mit der Linie af zusammenfallen würde. Die Operation muss also eine Grenze haben, es muss ein Punkt existiren, welcher durch sie nicht erreicht werden kann; diesen nennt STRUVE den Punkt x und nimmt ihn so, dass alle vorherigen Punkte erreicht werden können. Dieser aber nicht.

Nun aber zeigt er, dass die Annahme eines solchen Punktes widersinnig ist: folglich, dass sich in der Hypothese I gar kein Perpendikel von e auf ac fallen lässt, was auch widersinnig ist. Dadurch wird also die Unwahrheit der Hypothese klar. Doch hic haeret aqua! Er nimmt einen willkürlichen Punkt γ zwischen m und l und macht $ay = fe$ und errichtet in ϵ Perpendikel nach beiden Seiten zh und ei , wo also $zha = \epsilon ib$ spitz sind, also h über γ hinausliegt; er zieht $\epsilon\gamma$, hal-

birt diese in ϕ , macht $a\mu = s\phi$ u. s. w. . . wo er beweist, dass μ, ν . . . näher an a liegen als die entsprechenden Punkte der vorigen Operation, nämlich m, n . . . Da nun zwei Möglichkeiten sind, nämlich, dass das Perpendikel in den Punkt x fällt, oder näher an a , so dient dieses Raisonnement die erste Möglichkeit auszuschliessen: denn wenn z. B. x zwischen n und ν läge, so würde das Perpendikel die Linie νt durchschneiden, also wieder ein Dreieck mit einem stumpfen und einem rechten Winkel stattfinden etc. . . Allein hier liegt der Fehler: der Punkt x kann nicht erreicht werden, der Forderung gemäss nicht durch die erste Operation; meiner Behauptung gemäss nicht durch die zweite; denn wenn auch erwiesen ist, dass diese Operation Punkte erreicht, welche stets näher an a liegen: so ist damit keinesweges erwiesen, dass der erste nicht erreichbare Punkt näher an a liegt als der erste durch die erste Operation nicht erreichbare. Ich behaupte daher, das Perpendikel von e fällt in den Punkt x , und damit ist aller Widerspruch gehoben. Die Hypothese II behandelt die stumpfen Winkel ebenso u. s. w. — Diese Theorie hat dem scharfsinnigen STRUVE viele Zeit und Anstrengung gekostet; sie ist, zum Theil auf meine Bemerkungen, häufig umgestossen und wieder aufgebaut worden: vor ihrem jetzigen Abdrucke habe ich sie nicht gesehen. . .

117. Ueber die Entwicklung der Functionen zweier Winkel u und u' in Reihen, welche nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von u und u' fortgehen.*

(Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1820, 21. Math. Classe p. 55.)

Die allgemeine Methode, Functionen von u in Reihen zu entwickeln, welche nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von u fortgehen, führt, wie ich in der, der Akad. d. Wissenschaften am 2. Juli 1818 vorgelegten Abhandlung [8, Bd. I.] bemerkt habe, zu einer Auflösung wichtiger astronomischer Aufgaben: ich führe dieses gegenwärtig weiter aus, indem ich die Anwendung dieser Methode auf zwei veränderliche Winkel u und u' zeige.

Wenn man die Function durch $\varphi(u, u')$ bezeichnet und ihre Entwicklung nach den Cosinussen und Sinussen von u durch

$$\begin{aligned} c^0(u') + c^1(u') \cos u + c^2(u') \cos 2u + \text{etc.} \\ + s^1(u') \sin u + s^2(u') \sin 2u + \text{etc.} \end{aligned}$$

so werden $c^0(u')$, $c^1(u')$, $c^2(u')$. . . $s^1(u')$, $s^2(u')$. . . Functionen von u' sein, welche man durch folgende, von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ genommene, u' als unveränderlich voraussetzende Integrale erhält:

$$c^0(u') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u, u') du$$

$$c^1(u') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u, u') \cos u du$$

$$c^2(u') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u, u') \cos 2u du$$

etc. etc.

* [143 d. a. Verz. — Der Akademie vorgelesen den 21. Juni 1821. — Br. m. O. II. 194.]

$$s^1(u') = \frac{1}{\pi} \int \varphi(u, u') \sin u \cdot du$$

$$s^2(u') = \frac{1}{\pi} \int \varphi(u, u') \sin 2u \cdot du$$

etc. etc.

Jede dieser Functionen kann in eine Reihe entwickelt werden, welche nach den Cosinussen und Sinussen von u' fortschreitet, und welche man bequem und deutlich folgendermassen bezeichnen kann:

$$c'(u') = (c^1 \varphi) + (c^2 \varphi) \cos u' + (c^3 \varphi) \cos 2u' + \text{etc.}$$

$$+ (c^4 \varphi) \sin u' + (c^5 \varphi) \sin 2u' + \text{etc.}$$

$$s'(u') = (s^1 \varphi) + (s^2 \varphi) \cos u' + (s^3 \varphi) \cos 2u' + \text{etc.}$$

$$+ (s^4 \varphi) \sin u' + (s^5 \varphi) \sin 2u' + \text{etc.}$$

Die Coefficienten dieser Reihen finden sich durch folgende, von $u' = 0$ bis $u' = 2\pi$ genommene Integrale:

$$(c^1 \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int c'(u') du' \quad (c^2 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int c'(u') \sin u' \cdot du'$$

$$(c^3 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int c'(u') \cos u' \cdot du' \quad (c^4 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int c'(u') \sin 2u' \cdot du'$$

$$(c^5 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int c'(u') \cos 2u' \cdot du' \quad \text{etc.}$$

etc.

$$(s^1 \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int s'(u') du' \quad (s^2 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int s'(u') \sin u' \cdot du'$$

$$(s^3 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int s'(u') \cos u' \cdot du' \quad (s^4 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int s'(u') \sin 2u' \cdot du'$$

$$(s^5 \varphi) = \frac{1}{\pi} \int s'(u') \cos 2u' \cdot du' \quad \text{etc.}$$

etc.

$$(c^1 \varphi) + (c^3 \varphi) + (c^5 \varphi) + \dots = \frac{1}{n} \Sigma c' \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$(c^2 \varphi) + (c^4 \varphi) + (c^6 \varphi) + \dots = \frac{2}{n} \Sigma c' \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \cos \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$(c^3 \varphi) + (c^5 \varphi) + (c^7 \varphi) + \dots = \frac{2}{n} \Sigma c' \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \cos \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} \right)$$

etc. etc.

wo das Summenzeichen sich auf alle Werthe von m , von 0 bis $(n-1)$ incl. erstreckt. Wenn daher die Reihe für $c'(u')$ convergirt, und n gross genug angenommen wird um $(c^1 \varphi)$ und die folgenden Glieder vernachlässigen zu können, so gibt die eben angedeutete Rechnung alle Coefficienten der Reihe $(c^1 \varphi)$ bis $(c^{n-1} \varphi)$ incl. — Wie gross n angenommen werden muss, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen, wird in vielen Fällen durch LAPLACES Methode, Integrale zu finden, welche sehr grosse Zahlen enthalten, geschätzt werden können; in verwickelteren Fällen aber wird man die Rechnung so anordnen können, dass man n

und damit nimmt die Function die Form

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \cos iu \{ (c^i \varphi) + (c^i \varphi) \cos u' + (c^i \varphi) \cos 2u' + \text{etc.} \\ \quad + (c^i \varphi) \sin u' + (c^i \varphi) \sin 2u' + \text{etc.} \} \\ + \sin iu \{ (s^i \varphi) + (s^i \varphi) \cos u' + (s^i \varphi) \cos 2u' + \text{etc.} \\ \quad + (s^i \varphi) \sin u' + (s^i \varphi) \sin 2u' + \text{etc.} \} \end{array} \right.$$

an, wo das Summenzeichen sich auf alle ganze positive i , 0 mit eingeschlossen, erstreckt.

Wenn man die hier vorkommenden bestimmten Integrale durch endliche Ausdrücke erhalten kann, so hat die Anwendung dieser Methode keine Schwierigkeit. Allein wenn dieses auch nicht der Fall ist, so kann man doch jedesmal durch die Methode, welche ich in der Einleitung der I. Abtheilung der Königsberger Beobachtungen gegeben habe [Abh. 60, p. 24], den Ersatz der fehlenden Integrale erlangen. Kann man die Integrale in Beziehung auf u' in endlicher Form finden, so kennt man dadurch, entweder unbestimmt für jedes u' , oder in Zahlen ausgedrückt, für jeden beliebigen Werth desselben, die Reihe der Functionen

$$c^0(u'), c^1(u'), c^2(u'), \text{etc.} \quad s^1(u'), s^2(u'), \text{etc.}$$

man kann daher den Zahlenwerth jeder derselben, z. B. $c^1(u')$, für

$$u' = 0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad 3 \cdot \frac{2\pi}{n} \dots (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

berechnen, und dadurch n Werthe von $c^1(u')$, nämlich

$$c^1(0); \quad c^1\left(\frac{2\pi}{n}\right); \quad c^1\left(2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right); \dots c^1\left(n-1 \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

finden, wodurch man erhält:

$$(c^1 \varphi) + (c^3 \varphi) + (c^5 \varphi) + \dots = \frac{2}{n} \Sigma c' \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$(c^2 \varphi) + (c^4 \varphi) + (c^6 \varphi) + \dots = \frac{2}{n} \Sigma c' \left(m \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(m \cdot \frac{4\pi}{n} \right)$$

etc. etc.

successive = 2, 4, 8, 16 ... oder 3, 6, 12, 24 ... setzt, wodurch man jede beliebige Genauigkeit, und überdies noch eine Prüfung der Rechnung erhält; die letzte dadurch, dass die höheren Coefficienten unmerklich werden müssen.

Kann dagegen keine der beiden Integrationen in endlicher Form erlangt werden, so sind selbst die Functionen

$$c^1(u'), c^2(u'), c^3(u'), \text{etc.} \quad s^1(u'), s^2(u'), \text{etc.}$$

unbekannt, und man muss auch diese durch die eben angewandte Methode bestimmen. Man berechnet nämlich die Zahlenwerthe von

$$\varphi(0, 0); \varphi\left(\frac{2\pi}{k}, 0\right); \varphi\left(\frac{4\pi}{k}, 0\right); \dots \varphi\left(\frac{2k-2}{k}\pi, 0\right) \quad \left| \quad \begin{matrix} c^0(0); c^1(0); c^2(0); \text{etc.} \dots s^1(0); s^2(0); \text{etc.} \dots \\ \text{ebenso, aus den Reihen} \end{matrix} \right.$$

und daraus die Zahlenwerthe von

$$\begin{array}{cccc} \varphi\left(0, \frac{2\pi}{n}\right); & \varphi\left(\frac{2\pi}{k}, \frac{2\pi}{n}\right); & \varphi\left(\frac{4\pi}{k}, \frac{2\pi}{n}\right); & \dots \quad \varphi\left(\frac{2k-2}{k}\pi, \frac{2\pi}{n}\right) \\ \varphi\left(0, \frac{4\pi}{n}\right); & \varphi\left(\frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{n}\right); & \varphi\left(\frac{4\pi}{k}, \frac{4\pi}{n}\right); & \dots \quad \varphi\left(\frac{2k-2}{k}\pi, \frac{4\pi}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi\left(0, \frac{2n-2}{n}\pi\right); & \varphi\left(\frac{2\pi}{k}, \frac{2n-2}{n}\pi\right); & \varphi\left(\frac{4\pi}{k}, \frac{2n-2}{n}\pi\right); & \dots \quad \varphi\left(\frac{2k-2}{k}\pi, \frac{2n-2}{n}\pi\right) \end{array}$$

die Zahlenwerthe von

$$\begin{array}{cccc} c^0\left(\frac{2\pi}{n}\right); & c^1\left(\frac{2\pi}{n}\right); & c^2\left(\frac{2\pi}{n}\right); & \text{etc.} \dots s^1\left(\frac{2\pi}{n}\right); \quad s^2\left(\frac{2\pi}{n}\right); \text{etc.} \\ c^0\left(\frac{4\pi}{n}\right); & c^1\left(\frac{4\pi}{n}\right); & c^2\left(\frac{4\pi}{n}\right); & \text{etc.} \dots s^1\left(\frac{4\pi}{n}\right); \quad s^2\left(\frac{4\pi}{n}\right); \text{etc.} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c^0\left(\frac{2n-2}{n}\pi\right); & c^1\left(\frac{2n-2}{n}\pi\right); & c^2\left(\frac{2n-2}{n}\pi\right); & \text{etc.} \dots s^1\left(\frac{2n-2}{n}\pi\right); \quad s^2\left(\frac{2n-2}{n}\pi\right); \text{etc.} \end{array}$$

woraus dann wiederum die einzelnen Coefficienten gefunden werden.

Die wichtigste Anwendung dieser Methode, die Function $\varphi(u, u')$ zu entwickeln, betrifft ohne Zweifel das grosse Problem der Störungen der Himmelskörper. Wenn die störenden Kräfte, nach drei auf einander senkrechten Richtungen, durch A, B, C bezeichnet werden, so erhält der Differentialquotient eines Elements p die Form

$$\frac{dp}{dt} = AP + BQ + CR,$$

wo P, Q, R bekanntlich vom gestörten Planeten abhängen; es kommt daher auf die Entwicklung von A, B, C an, und diese kann man nach der auseinandergesetzten Methode erhalten; man mag unter u und u' die mittleren, die excentrischen oder die wahren Anomalien verstehen. Nach der schönen Entdeckung, welche GAUSS am 17. Jan. 1818 der Kön. Societät von Göttingen

mitgetheilt hat [Werke, Bd. III, p. 331], können die Differentiale Adu, Bdu, Cdu von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ endlich integrirt werden, und die Verbindung dieser Untersuchung mit den von LEGENDRE über die elliptischen Transcendenten angestellten, gibt allgemein die Integration von

$$A \cos u \cdot du; \quad B \cos u \cdot du; \quad C \cos u \cdot du$$

wodurch also die Functionen $c^0(u), c^1(u), c^2(u)$ etc. in Zahlenwerthen, für jedes beliebige u' , bekannt werden. Ohne diese Integration würde man auch diese auf die oben angezeigte Weise bestimmen müssen, welches immer geschehen muss, wenn man durch wiederholte Annäherungen auch die höheren Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigen will. Eine weitere Verfolgung dieser Anwendung würde aber jetzt, wo wir Hoffnungen haben, die von GAUSS über die Störungen der Pallas angestellten Untersuchungen bald kennen zu lernen, unzeitig sein.

118. Ueber die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung.*)

(Astr. Nachr. 6, p. 333.)

1.

Es ist ein in der Natur sehr häufig vorkommender Fall, dass Erscheinungen, welche von einer veränderlichen Grösse abhängen, eine Periode befolgen, nach deren jedesmaliger Beendigung sie stets in derselben Ordnung und Grösse wiederkehren. Insofern sie stetig

*) [227 d. a. Verz.]

sind oder keine plötzliche Veränderungen erfahren, ist durch die Bedingung, dass sie die Periode befolgen, jedesmal die Form des mathematischen Ausdrucks gegeben, welcher sie darstellt; hierdurch gelingt es, ihre Beschaffenheit aus einer Reihe von Beobachtungen vollständiger zu erkennen, als dieses bei anderen von ganz unbekanntem Fortgangsgesetze möglich ist.

Wenn nämlich k den Umfang der Periode bezeich-

net, nach deren Beendigung die Erscheinung y stets wiederkehrt, und x die veränderliche Grösse, von welcher sie abhängt, so ist die angegebene-Eigenschaft,

$$y = n + u^{(1)} \sin \left(U^{(1)} + \frac{x}{k} 2\pi \right) + u^{(2)} \sin \left(U^{(2)} + \frac{x}{k} 4\pi \right) + \text{etc.} \dots \dots \dots (1)$$

geleistet, in welcher $u, u^{(1)}, u^{(2)} \dots U^{(1)}, U^{(2)} \dots$ beständige Grössen sind und 2π die Kreisperipherie oder 360° bedeutet. Auch Tangenten oder Secanten, statt der Sinus, geben periodische Formen, allein sie gehören nicht zu Erscheinungen, welche ohne Unterbrechungen fortgehen; diese aber lassen sich jedesmal in einen Ausdruck von der angegebenen Form entwickeln. Kann man daher $u, u^{(1)}, u^{(2)} \dots U^{(1)}, U^{(2)} \dots$ aus einer Reihe von Beobachtungen bestimmen, so erhält man dadurch die Entwicklung der mathematischen Theorie der Erscheinung, und wenn es darauf ankommt, diese so zu wählen, dass sie den Beobachtungen entspricht, so kann sie nun so gewählt werden, dass sie die aus den Beobachtungen gefolgte Entwicklung ergibt, welche in der That nichts anderes ist als das Resultat der Beobachtungen in conciserer Form.

Hieraus geht hervor, dass man, durch die Bestimmung der einer Erscheinung zugehörigen Entwicklung, der Theorie derselben auf halbem Wege entgegengeht. Die beobachteten Sonnenlängen z. B. würden, auf diese Art nach der jährlichen Periode entwickelt, eine Formel ergeben, aus welcher man, wenn KEPLER'S Entdeckung noch zu machen wäre, die elliptische Bewegung weit leichter erkennen würde, als unmittelbar aus den Beobachtungen. Andere periodische Erscheinungen bietet die Meteorologie dar: der jährliche und tägliche Gang der Temperatur, die täglichen Schwankungen des Barometers, der Einfluss des Windes auf den Stand der meteorologischen Instrumente sind Erscheinungen dieser Art, welche, wenn man die ihnen entsprechenden periodischen Formeln aus den Beobachtungen bestimmt, unter die kürzeste und vollständigste Uebersicht gebracht werden, so dass sich aus ihnen

$$\begin{aligned} \alpha &= p + p^{(1)} \cos z + q^{(1)} \sin z + p^{(2)} \cos 2z + q^{(2)} \sin 2z + \text{etc.} \\ \alpha^{(1)} &= p + p^{(1)} \cos z^{(1)} + q^{(1)} \sin z^{(1)} + p^{(2)} \cos 2z^{(1)} + q^{(2)} \sin 2z^{(1)} + \text{etc.} \\ \alpha^{(2)} &= p + p^{(1)} \cos z^{(2)} + q^{(1)} \sin z^{(2)} + p^{(2)} \cos 2z^{(2)} + q^{(2)} \sin 2z^{(2)} + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

in welchen $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots$ die bekannten Werthe von y bezeichnen, $z, z^{(1)}, z^{(2)} \dots$ die Werthe von $\frac{x}{k} 2\pi$ wozu sie gehören und $p, p^{(1)}, p^{(2)} \dots q^{(1)}, q^{(2)} \dots$ für $u, u^{(1)} \sin U^{(1)}, u^{(2)} \sin U^{(2)} \dots u^{(1)} \cos U^{(1)}, u^{(2)} \cos U^{(2)} \dots$ geschrieben sind. Will man $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \dots$ nicht vollständig darstellen, sondern nur eine gewisse Anzahl der

dass y für Werthe von x , welche um $k, 2k, 3k$ etc. vermehrt oder vermindert werden, stets eine gleiche Grösse behalte; dieses wird durch die Form

unmittelbarer ergibt, was die Theorie zu erklären hat, als aus den Beobachtungen selbst, oder aus den Curven, durch welche man Erscheinungen von unbekanntem Gesetzen zu versinnlichen pflegt. In dem letzten der angeführten Fälle wird die Periode nicht durch eine Zeit, sondern durch den Umkreis des Horizonts bestimmt; es ist aber nicht nöthig, darauf aufmerksam zu machen, dass das Maass, worin die Periode ausgedrückt ist, gleichgültig bleibt.

Die Bestimmung der unbekanntem Grössen $u, u^{(1)}, u^{(2)} \dots U^{(1)}, U^{(2)} \dots$ wird sehr einfach und elegant, wenn die empirisch gefundenen Werthe von y , auf welche man die Entwicklung gründen will, zu Werthen von x gehören, welche in arithmetischer Progression fortgehen und die ganze Periode ausfüllen. Dieses habe ich in der I. Abth. meiner Beobachtungen gezeigt [Abh. 60, p. 24], allein schon früher (Jenaische Liter.-Zeitung 1814, Nr. 231) eine Anwendung der Methode auf die täglichen Schwankungen des Barometers, so wie sie von den Herren von HUMBOLDT und HORNER beobachtet sind, mitgetheilt. Es ist aber noch Einiges hinzuzufügen, weshalb ich diese Materie von Neuem vornehme.

2.

Wenn von dem Gesetze von y , ausser der im Ausdruck (1) enthaltenen Bedingung der periodischen Wiederkehr, nichts bekannt ist, so ist die Anzahl der unbekanntem Grössen $u, u^{(1)}, u^{(2)} \dots U^{(1)}, U^{(2)} \dots$ unbegrenzt; man kann so viele davon bestimmen als man Werthe von y kennt und immer können diese dadurch vollständig dargestellt werden. Man erlangt diese Bestimmung durch Auflösung der Gleichungen

früheren Glieder des Ausdrucks auf die vortheilhafteste Weise bestimmen, so ist die Methode der kleinsten Quadrate zur Erfindung dieser Glieder anzuwenden.

Ich werde nun $z, z^{(1)}, z^{(2)} \dots$ in arithmetischer Progression und die Differenz derselben als einen aliquoten Theil der Kreisperipherie annehmen, ihre Anzahl = n ;

wiederkehren; die Periode fängt von Neuem an, wenn man in der Reihe der Winkel, deren Cosinusse und Sinusse die Coefficienten sind, auf $nms = m \cdot 360^\circ$ kömmt. Das Glied, bei welchem dieses stattfindet, vereinigt sich mit p , die folgenden resp. mit $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $p^{(2)}$, $q^{(2)}$ etc., wodurch also das, was man durch diese Buchstaben bezeichnet hat, im Falle des unbestimmten Fortganges der Reihe resp.

$$0 = -\alpha + A + A^{(1)} \dots \dots \dots + A^{(n-1)}$$

$$0 = -\alpha^{(1)} + A + A^{(1)} \cos z + B^{(1)} \sin z + \dots + B^{(n-1)} \sin (n-1)z$$

$$0 = -\alpha^{(n-1)} + A + A^{(1)} \cos (n-1)z + B^{(1)} \sin (n-1)z + \dots + B^{(n-1)} \sin (n-1)^2 z$$

aufgelöst worden. Allein da allgemein
 $\cos a = \cos (2\pi - a) = \cos (4\pi - a) = \text{etc.}$
 $\sin a = -\sin (2\pi - a) = -\sin (4\pi - a) = \text{etc.}$
 ist, so haben $A^{(1)}$ und $A^{(n-1)}$, $A^{(2)}$ und $A^{(n-2)}$ u. s. w.

$$0 = -\alpha^{(n)} + A + (A^{(1)} + A^{(n-1)}) \cos mz + (B^{(1)} - B^{(n-1)}) \sin mz + \text{etc.}$$

geschrieben werden können. Wenn n eine gerade Zahl ist, so kömmt in der Reihe der Winkel $0, z, 2z \dots$ der Winkel $\frac{1}{2}nz$ vor, welcher $=\pi$ ist; das von diesem Winkel abhängige Glied bleibt also abgesondert, wäh-

$$0 = -\alpha^{(n)} + A + (A^{(1)} + A^{(n-1)}) \cos mz + (B^{(1)} - B^{(n-1)}) \sin mz + \dots$$

$$+ (A^{(\frac{1}{2}n-1)} + A^{(\frac{1}{2}n+1)}) \cos (\frac{1}{2}n-1) mz + (B^{(\frac{1}{2}n-1)} - B^{(\frac{1}{2}n+1)}) \sin (\frac{1}{2}n-1) mz$$

$$+ A^{(\frac{1}{2}n)} \cos m\pi$$

erhält. Ist aber n eine ungerade Zahl, so kömmt $\frac{1}{2}nz$ unter $0, z, 2z \dots$ nicht vor und alle Glieder ver-

$$0 = -\alpha^{(n)} + A + (A^{(1)} + A^{(n-1)}) \cos mz + (B^{(1)} - B^{(n-1)}) \sin mz + \dots$$

$$+ (A^{(\frac{n-1}{2})} + A^{(\frac{n+1}{2})}) \cos \frac{n-1}{2} mz + (B^{(\frac{n-1}{2})} - B^{(\frac{n+1}{2})}) \sin \frac{n-1}{2} mz$$

erhalten.

In beiden Fällen ist die Anzahl der Unbekannten so gross wie die der Gleichungen $=n$; ihre vollständigen Ausdrücke sind nach dem eben gesagten

$$p + p^{(n)} + p^{(2n)} + \dots$$

$$p^{(1)} + p^{(n-1)} + p^{(n+1)} + p^{(2n-1)} + \dots$$

$$q^{(1)} - q^{(n-1)} + q^{(n+1)} - q^{(2n-1)} + \dots$$

$$p^{(2)} + p^{(n-2)} + p^{(n+2)} + p^{(2n-2)} + \dots$$

$$q^{(2)} - q^{(n-2)} + q^{(n+2)} - q^{(2n-2)} + \dots$$

u. s. w.

wozu im ersten Falle, d. i. für ein gerades n , noch

$$p^{(\frac{n}{2})} + p^{(\frac{2n}{2})} + p^{(\frac{3n}{2})} + \dots$$

hinzukömmt.

Aus fünf gegebenen Werthen von y z. B., welche zu den Winkeln

$$0, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$$

$$p + p^{(n)} + p^{(2n)} + \text{etc.}$$

$$p^{(1)} + p^{(n+1)} + p^{(2n+1)} + \text{etc.}$$

$$q^{(1)} + q^{(n+1)} + q^{(2n+1)} + \text{etc.}$$

$$p^{(2)} + p^{(n+2)} + p^{(2n+2)} + \text{etc.}$$

u. s. w.

wird. Schreibt man dafür $A, A^{(1)}, B^{(1)}, A^{(2)}, B^{(2)}, \dots$, so sind also die Gleichungen

gleiche Coefficienten, und $B^{(1)}$ und $B^{(n-1)}$, $B^{(2)}$ und $B^{(n-2)}$ u. s. w. Coefficienten von gleicher Grösse und entgegengesetzten Zeichen, weshalb dieselben Gleichungen auch

rend die über dasselbe hinausliegenden sich mit den früheren vereinigen, so dass man in diesem Falle die Gleichungen

einigen sich paarweise, so dass die Gleichungen dann die Form

gehören, findet man statt $p, p^{(1)}, p^{(2)}, q^{(2)}$ die folgenden:

$$p + p^{(2)} + p^{(4)} + \dots$$

$$p^{(1)} + p^{(3)} + p^{(5)} + p^{(7)} + \dots$$

$$q^{(1)} - q^{(3)} + q^{(5)} - q^{(7)} + \dots$$

$$p^{(2)} + p^{(4)} + p^{(6)} + p^{(8)} + \dots$$

$$q^{(2)} - q^{(4)} + q^{(6)} - q^{(8)} + \dots$$

Aus 6 gegebenen, zu den Winkeln

$$0, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

gehörenden, die folgenden:

$$p + p^{(6)} + p^{(12)} + \dots$$

$$p^{(1)} + p^{(5)} + p^{(7)} + p^{(11)} + \dots$$

$$q^{(1)} - q^{(5)} + q^{(7)} - q^{(11)} + \dots$$

$$p^{(2)} + p^{(4)} + p^{(8)} + p^{(10)} + \dots$$

$$q^{(2)} - q^{(4)} + q^{(8)} - q^{(10)} + \dots$$

$$p^{(3)} + p^{(9)} + p^{(15)} + \dots$$

und so in allen Fällen. Hierdurch wird es anschaulich, wie die unbekannt Grössen sich vereinigen, wenn ihre Zahl grösser ist als die der gegebenen Werthe von y ; ginge z. B. für $n = 6$ der Ausdruck bis zu den vielfachen Winkeln incl., so zeigt das letzte Beispiel, dass man zwar p , $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ getrennt, aber $p^{(2)} + p^{(4)}$, $q^{(2)} - q^{(4)}$ mit einander vereinigt erhält.

4.

Die Entwicklung des Ausdrucks, welcher die gegebenen Werthe von y darstellt, wird meistens nur dann ein Interesse haben, wenn er so schnell convergirt, dass nur wenige der früheren Glieder desselben merkliche Werthe erhalten. Man wird daher, wenn nicht aus andern Gründen bekannt ist, wie weit der Ausdruck fortgeht, die Aufsuchung der unbekannt

$$\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.} \dots = (\alpha\alpha) - (\alpha\alpha)x - (b\alpha)y - (c\alpha)z - \text{etc.} \dots$$

ist, wo $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\alpha)$, $(b\alpha)$, ... die bekannte von GAUSS eingeführte Bezeichnung für

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \dots$$

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \dots$$

$$b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \dots$$

u. s. w.

ist. In unserm Falle ist aber

$$(\alpha\alpha) = np$$

$$(b\alpha) = \frac{n}{2} p^{(1)}$$

$$(c\alpha) = \frac{n}{2} q^{(1)}$$

$$(d\alpha) = \frac{n}{2} p^{(2)}$$

u. s. w.

wodurch die Summe der Quadrate der Fehler

$$= (\alpha\alpha) - npp - \frac{n}{2} p^{(1)} p^{(1)} - \frac{n}{2} q^{(1)} q^{(1)} - \frac{n}{2} p^{(2)} p^{(2)} - \text{etc.} \quad (4)$$

wird. Zieht man also das n fache Quadrat von p von $(\alpha\alpha)$ ab, so enthält der Rest das durch $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ etc. noch zu erklärende; zieht man ferner $\frac{n}{2} p^{(1)} p^{(1)}$ ab, so bleibt das noch durch $q^{(1)}$, $p^{(2)}$, $q^{(2)}$ etc. zu erklärende übrig, u. s. w. Auf diese Weise wird die Summe der Quadrate der Fehler, welche nach der Hinzufügung jedes neuen Gliedes noch übrig bleibt, ohne Mühe gefunden und man hat nicht nöthig, die Rechnung weiter zu führen, als bis man zu derjenigen Verkleinerung dieser Summe gekommen ist, bei welcher man sich befriedigen will. Führt man die Rechnung bis zum Ende, so versteht es sich, dass die Fehler ganz ver-

Grössen meistens da aufhören lassen, wo die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler so klein geworden ist, dass man sie Fehlern der Beobachtungen oder sonstigen Störungen der Regelmässigkeit zuschreiben zu dürfen glaubt. Damit man dieses möglichst leicht beurtheilen könne, werde ich den Ausdruck der Summe der Quadrate der Fehler angeben.

Es ist bekannt, dass, wenn die Bezeichnung der Gleichungen

$$\varepsilon = -\alpha + \alpha x + b y + c z + \dots$$

$$\varepsilon' = -\alpha' + \alpha' x + b' y + c' z + \dots$$

$$\varepsilon'' = -\alpha'' + \alpha'' x + b'' y + c'' z + \dots$$

u. s. w.

angewandt wird, und x , y , z , ... die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannt Grössen bedeuten, die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler

schwinden: man kann also die wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen selbst aus den übrigbleibenden Unterschieden nur dann erkennen, wenn anderweitig bekannt ist, wo der Ausdruck abbricht.

5.

Es wird vorkommen, dass die Werthe von y nicht für alle Winkel

$$0, z, 2z \dots (n-1)z$$

bekannt sind, oder dass unter den Grössen

$$\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n-1)}$$

eine oder einige fehlen. Auch in diesem Falle kann die gegebene Auflösung, mit der gehörigen Aenderung, angewandt werden.

Wenn die Werthe von y für die Winkel $h z$, $i z$... nicht bekannt sind, so können $\alpha^{(h)}$, $\alpha^{(i)}$... nicht zu den Summen

$$(\alpha), (\alpha \cos m z), (\alpha \sin m z), \text{etc.}$$

gezogen werden; allein man kann sie den auf alle bekannten Werthe von y erstreckten Summen als unbekannt Grössen hinzufügen, wodurch p , $p^{(1)}$, $q^{(1)}$... in ihren Ausdrücken diese unbekannt Grössen enthalten. Man hat also

$$p = \frac{1}{n} (\alpha) + \frac{1}{n} \alpha^{(h)} + \frac{1}{n} \alpha^{(i)} + \dots$$

$$p^{(1)} = \frac{2}{n} (\alpha \cos z) + \frac{2}{n} \alpha^{(h)} \cos h z + \frac{2}{n} \alpha^{(i)} \cos i z + \dots$$

$$q^{(1)} = \frac{2}{n} (\alpha \sin z) + \frac{2}{n} \alpha^{(h)} \sin h z + \frac{2}{n} \alpha^{(i)} \sin i z + \dots$$

$$p^{(2)} = \frac{2}{n} (\alpha \cos 2z) + \frac{2}{n} \alpha^{(h)} \cos 2 h z + \frac{2}{n} \alpha^{(i)} \cos 2 i z + \dots$$

u. s. w.

Wenn man diese Ausdrücke von $p, p^{(1)}, q^{(1)}$ etc. in die Ausdrücke von $\alpha^{(4)}, \alpha^{(5)} \dots$ setzt, nämlich in

$$\begin{aligned} \alpha^{(4)} &= p + p^{(1)} \cos hz + q^{(1)} \sin hz + \text{etc.} \\ \alpha^{(5)} &= p + p^{(1)} \cos iz + q^{(1)} \sin iz + \text{etc.} \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so erhält man so viele Gleichungen als unbekannte Grössen $\alpha^{(4)}, \alpha^{(5)} \dots$, wodurch also diese gefunden und dann in die noch damit behafteten Ausdrücke von $p, p^{(1)}, q^{(1)} \dots$ gesetzt werden können. Man sieht leicht, dass diese Gleichungen dieselbe Form haben, welche die nach der Methode der kleinsten Quadrate anzulösenden besitzen.

Wenn kein Werth von y fehlt, so bleibt, wie oben gezeigt worden ist, die Bestimmung eines Gliedes des Ausdrucks dieselbe, dieser mag über dieses Glied hinaus fortgesetzt sein oder sich mit demselben schliessen. Dieser Vortheil geht verloren, wenn Werthe von y fehlen; man erhält andere Werthe der unbekannt Grössen, je nachdem man den Ausdruck früher oder später abbricht. Mit dem Gewichte derselben verhält es sich ebenso. Es folgt hieraus, dass eine ununterbrochene Folge der bekannten Werthe von y nicht nur die leichteste Rechnung gewährt, sondern auch nothwendig ist, um den Einfluss der unbekannt Begrenzung des Ausdrucks von y unschädlich zu machen.

Wenn Werthe von y fehlen, so erhält man das Gewicht von $p, p^{(1)}, q^{(1)} \dots$ auf ganz ähnliche Art, wie ihre Grösse. Man substituirt nämlich

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{n} P + \frac{1}{n} \alpha^{(4)} + \frac{1}{n} \alpha^{(5)} + \dots \\ p^{(1)} &= \frac{2}{n} P^{(1)} + \frac{2}{n} \alpha^{(4)} \cos hz + \frac{2}{n} \alpha^{(5)} \cos iz + \dots \\ q^{(1)} &= \frac{2}{n} Q^{(1)} + \frac{2}{n} \alpha^{(4)} \sin hz + \frac{2}{n} \alpha^{(5)} \sin iz + \dots \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

in den Ausdrücken

$$\begin{aligned} \alpha^{(4)} &= p + p^{(1)} \cos hz + q^{(1)} \sin hz + \dots \\ \alpha^{(5)} &= p + p^{(1)} \cos iz + q^{(1)} \sin iz + \dots \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und erhält dadurch so viele Gleichungen, als $\alpha^{(4)}, \alpha^{(5)} \dots$ unbekannt sind; diese ergeben $\alpha^{(4)}, \alpha^{(5)} \dots$ durch $P, P^{(1)}, Q^{(1)} \dots$ ausgedrückt, und wenn man diese Ausdrücke in

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} P + \frac{1}{n} \alpha^{(4)} + \frac{1}{n} \alpha^{(5)} + \dots \\ \frac{2}{n} P^{(1)} + \frac{2}{n} \alpha^{(4)} \cos hz + \frac{2}{n} \alpha^{(5)} \cos iz + \dots \\ \frac{2}{n} Q^{(1)} + \frac{2}{n} \alpha^{(4)} \sin hz + \frac{2}{n} \alpha^{(5)} \sin iz + \dots \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

setzt, so ist das Reciproke des Coefficienten von P in der ersten Formel, von $P^{(1)}$ in der zweiten, von $Q^{(1)}$ in der dritten n. s. w., das Gewicht resp. von $p, p^{(1)}, q^{(1)} \dots$

Man sieht leicht, dass diese Art die unbekannt Grössen und ihr Gewicht zu bestimmen leichter ist, als die Auflösung der Gleichungen, welche man erhält, wenn man $\alpha^{(4)}, \alpha^{(5)} \dots$ gar nicht in die Rechnung bringt, immer wenn die Zahl dieser letzteren kleiner ist, als die der zu bestimmenden $p, p^{(1)}, q^{(1)} \dots$

6.

Um diese Methode durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich die Formel von einjähriger Periode suchen, welche sich an die von dem verstorbenen Pfarrer SOMMER aus 24jährigen Beobachtungen (von 1799 bis 1822 incl.) gefolgerten mittleren Königsberger Temperaturen für jeden fünften Tag des Jahres anschliesst. Diese Angaben finden sich in Nr. 26 der Astr. Nachr.; es sind deren 73, für den 3., 8., 13. ... 363. Tag des Jahres. Da aber zwischen dem 363. Tage eines Jahres und dem 3. des folgenden nicht genau 5 Tage, sondern im Mittel 5,24222 Tage verstreichen, so habe ich den Unterschied den Beobachtungszeiten zugelegt und demnach jedes Intervall = 5,00332 Tage angenommen. Man hat also $z = \frac{360^\circ}{73} = 4^\circ 55' 53,425$ und hiermit findet man

$$\begin{aligned} (\alpha) &= + 368,32 \text{ (Réaumur)} \\ (\alpha \cos z) &= - 298,91 \\ (\alpha \sin z) &= - 89,51 \\ (\alpha \cos 2z) &= + 2,86 \\ (\alpha \sin 2z) &= + 2,05 \\ (\alpha \cos 3z) &= + 1,77 \\ (\alpha \sin 3z) &= - 3,90 \\ (\alpha \cos 4z) &= - 16,51 \\ (\alpha \sin 4z) &= + 11,68 \end{aligned}$$

Dividirt man die erste Zahl durch 73, die folgenden durch 36,5, so erhält man

$$\begin{aligned} p &= + 5,0454 \\ p^{(1)} &= - 8,1894 & q^{(1)} &= - 2,4523 \\ p^{(2)} &= + 0,0784 & q^{(2)} &= + 0,0726 \\ p^{(3)} &= + 0,0485 & q^{(3)} &= - 0,1068 \\ p^{(4)} &= - 0,4523 & q^{(4)} &= + 0,3200 \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate der beobachteten Temperaturen ist = 4547,78, das beständige Glied (die mittlere Temperatur) verkleinert sie (4) um 1858,30; $p^{(1)}$ und $q^{(1)}$ um 2667,40, so dass sie durch diese drei Glieder auf 22,08 reducirt wird. Die fernere Verkleinerung durch $p^{(2)}$ und $q^{(2)}$ beträgt nur 0,42; durch $p^{(3)}$ und $q^{(3)}$ nur 0,50; allein $p^{(4)}$ und $q^{(4)}$ haben grösseren Einfluss, indem sie eine Verkleinerung von 11,21 ergeben. Durch Anwendung aller dieser Glieder werden also die Beobachtungen so

dargestellt, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Unterschiede 9,95 beträgt. Wollte man die Rechnung noch weiter treiben, so würde man die gänzliche Erschöpfung der Unterschiede zwar erhalten können, aber sie würde so langsam von statten gehen, dass bei der Hinzufügung noch einiger Glieder wenig gewonnen werden würde. Die Ursachen, welche den regelmässigen Gang der Temperatur stören, sind zu gross, um auf die Mittel aus 24jährigen Beobachtungen nicht noch merklichen Einfluss zu behalten; auch würde selbst eine noch längere Reihe von Beobachtungen den von der jährlichen Periode abhängigen Gang der Tem-

peratur nur dann mit Zuverlässigkeit angeben können, wenn die Beobachtungen eines jeden Tages so angeordnet wären, dass ihr Resultat die mittlere Temperatur des Tages wäre. Ob der gefundene grössere Einfluss des vierfachen Winkels in der Natur der Erscheinung begründet, oder nur eine Folge der Störungen ihrer Regelmässigkeit ist, müssen andere Beobachtungen entscheiden. Damit man aber sogleich übersehen könne, wie die Formel mit den Beobachtungen übereinstimmt, gebe ich hier eine doppelte Vergleichung beider; nämlich (I) mit den drei ersten Gliedern der Formel allein, und (II) mit der bis zu $q^{(4)}$ fortgesetzten.

	Beobachtung.	Formel.			Beobachtung.	Formel.			
		I.	II.			I.	II.		
Jan. 3	8	-4,704	+0,990	+0,757	Juli 7	+13,763	-0,930	-0,764	
	8	-4,12	+0,79	+0,58		12	+13,64	-0,16	-0,30
	13	-3,72	+0,28	+0,22		17	+13,27	+0,30	+0,38
18	-2,45	-1,04	-0,94	22	+14,04	-0,45	-0,15		
	23	-3,36	-0,13	+0,13	27	+14,21	-0,66	-0,16	
	28	-2,61	-0,81	-0,41	Aug. 1	+14,12	-0,67	-0,62	
Febr. 2	-2,17	-1,12	-0,63	6	+14,01	-0,72	+0,02		
	7	-3,09	0,00	+0,53	11	+13,76	-0,73	+0,06	
	12	-3,21	+0,37	+0,88	16	+13,52	-0,74	-0,04	
17	-2,21	-0,31	+0,13	21	+12,56	-0,12	+0,46		
	22	-1,74	-0,41	-0,12	26	+12,42	-0,38	+0,02	
	27	-1,26	-0,47	-0,34	31	+11,98	-0,39	-0,21	
März 4	-0,72	-0,54	-0,58	Sept. 5	+10,62	+0,47	+0,42		
	9	-1,12	+0,38	+0,16	10	+10,46	+0,09	-0,19	
	14	-0,11	-0,06	-0,43	15	+9,46	+0,51	+0,04	
19	+0,05	+0,38	-0,10	20	+8,82	+0,53	-0,08		
	24	-0,25	+1,31	+0,78	25	+8,48	+0,22	-0,46	
	29	+0,80	+0,03	+0,41	30	+7,28	+0,74	+0,06	
April 3	+1,75	+0,67	+0,21	Oct. 5	+6,89	+0,43	-0,18		
	8	+3,02	+0,11	-0,22	10	+5,75	+0,84	+0,36	
	13	+3,95	-0,06	-0,27	15	+5,50	+0,38	+0,06	
18	+4,96	-0,37	-0,37	20	+5,47	-0,33	-0,45		
	23	+5,37	-0,05	+0,13	25	+4,55	-0,14	-0,07	
	28	+6,12	-0,07	+0,25	30	+3,34	+0,34	+0,58	
Mai 3	+7,40	-0,62	-0,19	Nov. 4	+3,28	-0,32	+0,05		
	8	+7,93	-0,44	+0,03	9	+2,90	-0,65	-0,20	
	13	+8,54	-0,35	+0,10	14	+1,48	+0,09	+0,55	
18	+9,54	-0,68	-0,30	19	+1,20	-0,29	+0,12		
	23	+9,75	-0,24	0,00	24	+0,82	-0,54	-0,23	
	28	+10,07	+0,04	+0,12	29	+0,20	-0,51	-0,34	
Juni 2	+10,33	+0,35	+0,25	Dec. 4	-0,84	-0,03	-0,01		
	7	+11,50	-0,28	-0,57	9	-1,21	-0,16	-0,30	
	12	+11,41	+0,29	-0,15	14	-1,79	-0,05	-0,32	
17	+11,02	+1,12	+0,57	19	-3,09	+0,74	+0,48		
	22	+11,45	+1,07	+0,47	24	-2,34	-0,26	-0,67	
	27	+12,05	+0,80	+0,22	29	-3,63	+0,73	+0,33	
Juli 2	+12,73	+0,39	-0,10						

Aus den oben angegebenen Werthen von $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ etc. folgt:

$$n^{(1)} = 8^{\circ}5487 \quad U^{(1)} = 253^{\circ}19,8$$

$$n^{(2)} = 0,1068 \quad U^{(2)} = 47 \ 12,0$$

$$n^{(3)} = 0^{\circ}1173 \quad U^{(3)} = 155^{\circ}34,6$$

$$n^{(4)} = 0,5542 \quad U^{(4)} = 305 \ 16,7$$

Ferner ist $k = 365,24222$ und $\frac{2\pi}{k} = 50^{\circ}8,33 = \text{der}$

täglichen mittleren Bewegung der Sonne; wenn x die vom 3. Januar an gerechnete Zeit, in Tagen ausgedrückt, bedeutet, so ist also die Formel für die Temperatur nach der Réaumur'schen Scale:

$$y = + 5,0454 + 8,95487 \sin(259^{\circ} 19',8 + x.59' 8'',33) \\ + 0,1068 \sin(47 12,0 + 2x.59 8,33) \\ + 0,1173 \sin(155 34,6 + 3x.59 8,33) \\ + 0,5542 \sin(305 16,7 + 4x.59 8,33).$$

Will man diese Formel von der mittleren Sonnenlänge $= m$ abhängig machen, so hat man

$$x.59' 8'',33 = m - m'$$

zu setzen, wo m' die mittlere Sonnenlänge für den 3. Januar bedeutet und im Mittel aus den Jahren 1799 bis 1822 $= 282^{\circ} 33',6$ ist. Man hat also

$$m - m' = m - 282^{\circ} 33',6 \\ 2(m - m') = 2m - 205 7,2 \\ 3(m - m') = 3m - 127 40,8 \\ 4(m - m') = 4m - 50 14,4$$

und daher die von der mittleren Sonnenlänge abhängig gemachte Formel:

$$y = + 5,0454 + 8,95487 \sin(m - 29^{\circ} 13',8) \\ + 0,1068 \sin(2m - 157 55,2) \\ + 0,1173 \sin(3m - 332 6,2) \\ + 0,5542 \sin(4m - 104 57,7)$$

Wenn man eine auf physikalischen Gründen beruhende mathematische Theorie dieser Erscheinung mit den Beobachtungen vergleichen wollte, so würden Formeln dieser Art, für verschiedene Oerter entwickelt, bequemer dazu angewandt werden können, als die unmittelbaren Beobachtungen. Dergleichen Formeln geben eine vollständige Kenntniss der regelmässigen Temperatur eines Orts und dienen also auch zur Auffindung der aus den Störungen entstehenden Unregelmässigkeiten. Sie sind vortheilhafter als graphische Darstellungen, indem sie von den Unregelmässigkeiten der Erscheinung freier sind.

7.

In dem gegebenen Beispiele ist die Entwicklung von y auf Beobachtungen gegründet; ich mache aber darauf aufmerksam, dass man auch periodische Functionen einer veränderlichen Grösse, deren mathematischer Ausdruck gegeben, allein zu sehr verwickelt ist, um ihm direct die Form

$$u + u^{(1)} \sin(U^{(1)} + x) + u^{(2)} \sin(U^{(2)} + 2x) + \text{etc.} \\ \alpha = a + a^{(1)} \\ \alpha^{(1)} = a + a^{(1)} \cos x' + b^{(1)} \sin x' \\ \alpha^{(2)} = a + a^{(1)} \cos 2x' + b^{(1)} \sin 2x' \\ \vdots \\ \alpha^{(n-1)} = a + a^{(1)} \cos (n-1)x' + b^{(1)} \sin (n-1)x' + \dots$$

geben zu können, auf dieselbe Art entwickeln kann, indem man von berechneten Werthen von y ausgeht.

Ueber die Ausdehnung derselben Methode auf die Entwicklung von Functionen von zwei Winkeln habe ich in den Berliner Abhandlungen für 1820—21 einen kleinen Aufsatz bekannt gemacht [Abb. 117]. Von dieser Art ist z. B. der Bruch, dessen Zähler = 1 und dessen Nenner die Entfernung zweier Himmelskörper ist, von dessen Entwicklung nach den Cosinussen und Sinussen der mittleren Längen beider Körper bekanntlich die Entwicklung ihrer gegenseitigen Störungen abhängt. Hier werde ich nur noch anführen, wie periodische Erscheinungen, welche von zwei oder mehreren Winkeln abhängen, aus den Beobachtungen derselben entwickelt werden können.

Bezeichnet man die beiden Winkel durch x und x' , so sind die im Ausdrucke

$$y = p + p^{(1)} \cos x + q^{(1)} \sin x + p^{(2)} \cos 2x + q^{(2)} \sin 2x + \text{etc.}$$

vorkommenden $p, p^{(1)}, q^{(1)}$ etc. nicht beständig, sondern von x' abhängig; weil sie aber periodische Functionen von x' sind, so hat jedes derselben einen Ausdruck von der Form

$$a + a^{(1)} \cos x' + b^{(1)} \sin x' + a^{(2)} \cos 2x' + b^{(2)} \sin 2x' + \text{etc.}$$

es ist also nöthig, diese Entwicklung von $p, p^{(1)}, q^{(1)}$ etc. aus den Beobachtungen abzuleiten.

Wenn die vorhandene Beobachtungsreihe die Werthe von y nicht nur für n in arithmetischer Progression fortgehende, die Periode ausfüllende Werthe von $x (0, x, 2x \dots (n-1)x)$ angibt, sondern auch für die Combination eines jeden dieser Werthe von x mit n' derselben Bedingung unterworfenen Werthen von $x' (0, x', 2x' \dots (n'-1)x')$, so hat die Entwicklung keine Schwierigkeit. Man bestimmt nämlich zuerst die Entwicklung von y nach der Periode von x , indem man nur die Beobachtungen anwendet, bei welchen $x' = 0$ ist; dann durch die Beobachtungen allein, bei welchen $x' = x'$ ist; ferner durch die zu $x' = 2x'$ gehörigen u. s. w., bis man zu den zu $x' = (n'-1)x'$ gehörigen gelangt. Hierdurch erhält man also n' Entwicklungen von y , also auch eben so viele, im Allgemeinen verschiedene Werthe jeder der Grössen $p, p^{(1)}, q^{(1)} \dots$ Bezeichnet man diese n' Werthe einer derselben durch

$$\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n'-1)},$$

so hat man dadurch die Gleichungen

$$\begin{matrix} + \alpha^{(2)} & & & & + \dots \\ + \alpha^{(2)} \cos 2x' & + b^{(2)} \sin 2x' & & & + \dots \\ + \alpha^{(2)} \cos 4x' & + b^{(2)} \sin 4x' & & & + \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + \alpha^{(n-1)} & & & & + \dots \\ + \alpha^{(n-1)} \cos 2x' & + b^{(n-1)} \sin 2x' & & & + \dots \\ + \alpha^{(n-1)} \cos 4x' & + b^{(n-1)} \sin 4x' & & & + \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + \alpha^{(n-1)} \cos (n-1)x' & + b^{(n-1)} \sin (n-1)x' & & & + \dots \end{matrix}$$

aus welchen man, wieder durch dieselbe Methode, a , $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $a^{(2)}$. . . erhält.

Ein Fall dieser Art wäre, wenn die Sommer'schen Beobachtungen der Temperaturen in Königsberg für jeden fünften Tag nicht eine Angabe, sondern mehrere, z. B. für 0, 4, 8, 12, 16, 20 Uhr enthielten. Man würde dann eine der im 6. Art. gegebenen ähnliche Formel für jede dieser Stunden bestimmen und die Coefficienten dieser 6 Formeln durch die tägliche Periode darstellen. Man könnte auch umgekehrt verfahren: mit der täglichen Periode anfangen und mit der jährlichen endigen. Dass beides ein gleiches Resultat gibt, folgt daraus, dass man auf beiden Wegen die vollständige Darstellung der Beobachtungen erlangen kann. — Ein anderer Fall derselben Art ist die tägliche Oscillation des Barometers, welche wahrscheinlich nicht zu allen Zeiten des Jahres gleich ist und dann ebenfalls sowohl der täglichen als der jährlichen Periode folgt.

Sind aber die Beobachtungen nicht so angeordnet wie hier vorausgesetzt worden ist, oder können sie, der Natur der Erscheinung nach, nicht so angeordnet werden, so wird die Entwicklung der ihnen entsprechenden Formel weniger einfach. Sind sie in Beziehung auf die Periode von x' regelmässig, d. i. immer für $x' = 0, x', 2x' \dots (n'-1)x'$ gemacht, in Beziehung auf die Periode von x aber unregelmässig, so kömmt es immer darauf an, die bei jedem Werthe von x' gemachten durch eine Formel von der Periode von x zu vereinigen und dann mit den n' so erhaltenen Formeln

weiter zu verfahren, wie oben angegeben ist. Ist die Beobachtungsreihe sehr lange fortgesetzt und kommen für jeden bestimmten Werth von x' sehr viele verschiedene Werthe von x vor, so wird man diese zu regelmässigen fortschreitenden Mitteln vereinigen und dadurch die Rechnung erleichtern können.

Wenn man nur die Glieder bestimmen will, welche von x und x' allein abhängen, nicht aber die, in welchen beide Winkel zugleich vorkommen, so wird man die Entwicklung durch fortgesetzte Annäherung am leichtesten erhalten. Man wird dann die Periode, welche den kleinsten Einfluss hat, zuerst ganz vernachlässigen und daher eine von der andern allein abhängige Formel suchen; dann wird man die sich aus dieser ergebenden Werthe von y von den beobachteten abziehen, die Reste als von der ersten Periode allein abhängig betrachten und dadurch eine zweite Formel bestimmen. Bringt man das Resultat dieser Formel in Rechnung, so erhält man die erste Formel genauer u. s. w. — Man sieht leicht, dass man so viele verschiedene Perioden befolgende Glieder bestimmen kann, als die Beobachtungen verstaten. Im Wesentlichen ist dieses das Verfahren, welches die Astronomen angewandt haben, um die Coefficienten der Mondtheorie aus den Beobachtungen abzuleiten. — Doch der Zweck dieses Aufsatzes ist, die Vortheile zu zeigen, welche die regelmässige Anordnung der bekannten Werthe von y in der Bestimmung der Entwicklung gewährt.

119. Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.*

(Astr. Nachr. 15, p. 369.)

Die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers kann von seiner Grösse abhängig angenommen werden, aber sie ist so lange unbekannt, so lange unbekannt ist, auf welche Art er aus seinen Ursachen entsteht. Wir verdanken indessen LAPLACE das merkwürdige Resultat, dass, aus einer grossen Anzahl gleichartiger Beobachtungen, die wahrscheinlichsten Folgerungen gezogen werden können, ohne dass es nöthig ist, das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler zu kennen.

Wenn man eine solche Reihe von Beobachtungen einer Erscheinung, deren mathematische Theorie bekannt ist, besitzt und wenn man die Constanten dieser

Theorie, diesem Resultate gemäss, bestimmt, so gibt ihre Vergleichung mit den einzelnen Beobachtungen der Reihe Unterschiede zu erkennen, durch welche man eine practische Bestimmung des Gesetzes der Wahrscheinlichkeit der Fehler der angewandten Beobachtungsart erlangen kann. Findet man nämlich, dass in m Fällen, unter der vorhandenen grossen Anzahl μ derselben, der Fehler zwischen zwei einander sehr nahe liegende Grenzen x und $x + \frac{1}{i}$ fällt, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, welche ich durch $\frac{1}{i} \varphi x$ bezeichnen werde, $= \frac{m}{\mu}$, oder

$$\varphi x = \frac{mi}{\mu}$$

* [317 d. a. Verz. — Berichtigungen s. Astr. Nachr. 16, p. 95.]

Macht man diese Bestimmung einer Anzahl Werthe von φx zu Ordinaten einer Curve, deren Abscissen die Fehler x sind, so stellt diese Curve das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler dar, und zwar desto richtiger, je grösser μ und i sind. Kann man dahin gelangen, die Ordinaten dieser Curve unbestimmt durch eine Function φx darzustellen, so ist hierdurch das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler der angewandten Beobachtungsreihe gegeben, und es ist kein Hinderniss mehr vorhanden, wenn es darauf ankommt, aus einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen derselben Art ihre wahrscheinlichsten Resultate zu ziehen und die wahrscheinlichen Fehler derselben zu berechnen. Das was ich hier gefordert habe, nämlich das Vorhandensein einer sehr zahlreichen Beobachtungsreihe einer Erscheinung, deren mathematische Theorie bekannt ist, kann aber nicht immer vorausgesetzt werden; wenn es fehlt, so kann der hier vorgezeichnete Weg zu der Bestimmung des Gesetzes der Wahrscheinlichkeit der Fehler nicht betreten werden.

Um in allen Fällen anwendbare Vorschriften zur Benutzung einer Beobachtungsreihe zu erhalten, hat GAUSS, in seiner anfänglichen Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate, die Annahme verfolgt, dass das arithmetische Mittel aus einer Anzahl gleichartiger Beobachtungen einer gleichbleibenden Grösse ihre wahrscheinlichste Bestimmung sei. Er hat gezeigt, dass diese Annahme gleichbedeutend ist mit der Bedingung, dass, auch in dem allgemeineren Falle, in welchem die beobachtete Grösse nach einem gegebenen Gesetze veränderlich ist, die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede zwischen den Beobachtungen und der darauf gegründeten Theorie den möglichst kleinsten Werth erhält; ferner, dass die eine wie die andere ein bestimmtes Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler, nämlich

$$\varphi x = \frac{1}{m \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{xx}{2mm}}$$

fordert, wo mm den mittleren Werth der Quadrate der Fehler, oder den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xx \varphi x dx$$

bedeutet. Wenn kein Grund vorhanden ist, in dem speciellen Falle die Annahme des arithmetischen Mittels zurückzuweisen, so ist also auch keiner vorhanden, in dem allgemeinen Falle von der Methode der kleinsten Quadrate abzuweichen; allein dieser Mangel eines Widerspruchs gegen das eine oder das andere ist kein Beweis des Stattfindens des angegebenen Ausdruckes von φx ,

und man muss sich anderweitig von seiner Anwendbarkeit auf eine gegebene Beobachtungsreihe überzeugen, ehe man geneigt sein kann, der darauf gegründeten Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers, sowohl der Beobachtungen selbst, als ihrer Resultate, irgend ein Gewicht beizulegen.

Da aber nicht bezweifelt werden kann, dass die Function φx von der Art der Beobachtungen, auf welche sie angewandt werden soll, abhängig ist, und man ihnen, dieser zugehörigen wahren Ausdruck, wenigstens im Allgemeinen, nicht kennt, so muss die Auflösung der Aufgabe, aus vorhandenen Beobachtungen einer Erscheinung, deren mathematische Theorie gegeben ist, die besten Resultate zu ziehen, auf die Betrachtung einer willkürlich bleibenden Function φx gegründet werden. Diesem Gesichtspunkte sind LAPLACE, GAUSS und POISSON in den bewunderungswürdigen Abhandlungen gefolgt, welche sie über die gegenwärtige Materie bekannt gemacht haben. Das Wesentlichste der Theorie dieser Materie hat schon LAGRANGE zum Gegenstande einer, in den Turiner Memoiren für 1770—1773 gedruckten Abhandlung gemacht.

Wenn ich, nach solchen Vorgängern, Untersuchungen über denselben Gegenstand anstelle, so muss ich zu ihrer Entschuldigung sagen, dass ich eine Aussicht verfolgen werde, deren Verfolgung ausser der Absicht der genannten grossen Geometer lag. Ich werde nämlich die Entstehungsart der Beobachtungsfehler aus ihren Ursachen zum Grunde des Folgenden machen. Wenn man anfangs die Fehler einer gewissen Beobachtungsart als aus einer, auf gegebene Art wirkenden Ursache hervorgehend betrachtet, so wird dadurch ihre jedesmalige Grösse x eine gegebene Function eines Arguments ξ , welches in derselben Art willkürlich ist, wie das Fallen eines Würfels. Aus dem Ausdrucke $x = f\xi$ kann aber der Ausdruck φx abgeleitet werden, und durch diesen wird man in den Stand gesetzt, alle Folgerungen, welche man aus der Beobachtungsreihe ziehen kann, der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemäss zu ziehen. Unter dieser Voraussetzung, welche fordert, dass das Argument einer gegebenen Function als willkürlich angesehen werde, würde man also mit Unrecht die Function des Fehlers, welche seine Wahrscheinlichkeit ausdrückt, als willkürlich betrachten. Ich werde diese Bemerkung verfolgen, auch auf einige Beispiele anwenden, durch welche zugleich anschaulich werden wird, dass Fälle vorkommen können, in welchen es ein Interesse hat, die gewöhnliche Voraussetzung der Willkür der Function φx zu verlassen. Gewöhnlich sind diese Fälle aber nicht, indem man meistens über die Function

$f\xi$ eben so zweifelhaft sein wird, als über die Function φx ; dann findet die Betrachtung der ersteren keine Anwendung, und die Voraussetzung der Willkür der letzteren tritt an deren Stelle. In der Wirklichkeit wird es aus selten erlaubt sein, die Fehler einer Ursache zuzuschreiben; vielmehr werden im Allgemeinen mehrere, meistens viele von einander unabhängige Ursachen zusammenwirken. Hierdurch wird es nöthig, die Zusammensetzung der wirklich vorkommenden Fehler aus mehreren Ursachen zu untersuchen. Ich bin dadurch zu dem merkwürdigen Resultate gelangt, dass viele von einander unabhängige Fehlerursachen von gleicher Ordnung durch ihr Zusammenwirken Fehler hervorbringen, deren Wahrscheinlichkeit näherungsweise dieselbe ist, welche durch die Voraussetzung des arithmetischen Mittels, oder durch die Bedingung der kleinsten Quadrate, gefordert wird. Hierdurch findet eine auffallende Uebereinstimmung zwischen diesem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler und der Verteilung derselben in wirklich gemachten Beobachtungsreihen ihre Erklärung; welche Uebereinstimmung ich in häufigen Fällen bemerkt und auch einigemal bekannt gemacht habe, z. B. in der am 29. Juni 1815 an den verstorbenen BOZE gesandten und in dem Astr. Jahrb. 1818 S. 234 gedruckten, frühesten öffentlichen Nachricht von einer Anwendung der Fehler zum Maasse der Genauigkeit der Beobachtungen*), und in den Fundamentis Astronomiae pro Ao. 1755 p. 19. Ich nenne diese Uebereinstimmung auffallend, weil sie auf eine allgemeine, das jeder Beobachtungsart Eigenthümliche überwiegende Eigenschaft deutet, indem nicht angenommen werden kann, dass die verschiedenartigsten Beobachtungsreihen, eben so verschiedenartige Gegenstände betreffend, ohne eine solche Eigenschaft, dem angeführten Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler sehr nahe entsprechen würden.

1.

Ich fange mit der Aufsehung der Wahrscheinlichkeit $= \varphi x \cdot dx$ an, mit welcher erwartet werden kann, dass ein Beobachtungsfehler zwischen x und $x + dx$ falle, wenn er, auf gegebene Art, von einer Ursache ξ abhängt, für welche jeder zwischen zwei Grenzen $-a$ und a liegende Werth gleich möglich ist.

Die zu x und $x + dx$ gehörigen Werthe der Ursache bezeichne ich durch ξ und $\xi + d\xi$, die gegebene Art der Abhängigkeit der ersten Grösse von der zweiten durch $x = f\xi$, wodurch $dx = df\xi$ wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen x und $x + dx$

*) [AR. des Polaris und w. F. derselben (98 d. a. Verz.)]

falle, ist einerseits $= \varphi x dx$, andererseits ist sie, der Annahme zufolge, dass jeder zwischen $-a$ und a liegende Werth von ξ gleich möglich ist $= \frac{d\xi}{2a}$. Man hat also:

$$\varphi x dx = \frac{d\xi}{2a}$$

und wenn man für dx seinen Ausdruck schreibt:

$$\varphi x = \frac{1}{2a} \cdot \frac{d\xi}{df\xi} \dots \dots \dots (1)$$

woraus ξ durch die Gleichung $x = f\xi$ weggeschafft werden kann.

Wenn die Elemente $p, q, r \dots$ aus einer Reihe von $n + 1$ Beobachtungen bestimmt werden sollen, so ist bekanntlich das System derselben das wahrscheinlichste, welches das Product

$$\Omega = \varphi x \cdot \varphi x' \cdot \varphi x'' \dots \varphi x^{(n)}$$

so gross als möglich macht, oder welches die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \varphi' x \cdot \frac{dx}{dp} + \varphi' x' \cdot \frac{dx'}{dp} + \varphi' x'' \cdot \frac{dx''}{dp} + \dots \\ 0 &= \varphi' x \cdot \frac{dx}{dq} + \varphi' x' \cdot \frac{dx'}{dq} + \varphi' x'' \cdot \frac{dx''}{dq} + \dots \\ 0 &= \varphi' x \cdot \frac{dx}{dr} + \varphi' x' \cdot \frac{dx'}{dr} + \varphi' x'' \cdot \frac{dx''}{dr} + \dots \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

u. s. w.

erfüllt, in welchen $\varphi' x, \varphi' x', \dots$ für

$$\frac{d\varphi x}{dx \varphi x}, \frac{d\varphi x'}{dx' \varphi x'}, \dots$$

geschrieben sind. Bei der Bestimmung der wahrscheinlichsten Elemente kommt also nicht sowohl φx , als $\varphi' x$ in Betracht; will man dieses, ohne in (1) ξ durch x ersetzt zu haben, also durch ξ ausdrücken, so erhält man, durch Differentiirung von (1):

$$\varphi' x = - \frac{d^2 f\xi}{(df\xi)^2} \dots \dots \dots (2)$$

woraus nun ξ , durch $x = f\xi$, wegzuschaffen ist.

Die Grenzen $\mp a$, zwischen welchen die möglichen Werthe von x eingeschlossen sind, sind $\mp fa$. Der Ausdruck des Quadrats des mittleren Fehlers einer Beobachtung ist

$$mm = \int_{-a}^a x \varphi x dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (f\xi)^2 d\xi \dots \dots (3)$$

der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung $= mk$ findet sich aus der Auflösung der Gleichung:

$$\int_0^{mk} x \varphi x \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^a x \varphi x dx$$

oder, nach der Einführung von ξ und unter der Voraussetzung, dass $x = 0$ und $\xi = 0$ zusammengehören und $f(-\xi) = -f\xi$ ist, aus der Gleichung:

$$\int_0^K \int_{\xi}^{\alpha} d\xi = \int_0^{\alpha} \int_{\xi}^K d\xi \dots \dots \dots (4)$$

woraus K gefunden und dann

$$mk = f/K$$

wird.

2.

Zur Erläuterung des Vorigen werde ich es auf zwei Beispiele anwenden.

Das erste Beispiel soll die Annahme

$$x = a \sin \xi$$

verfolgen, und für ξ soll jeder Werth gleich möglich, oder $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ sein. Man erhält ohne Weiteres aus den Formeln (1), (2) und (3):

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \sqrt{aa - xx}$$

$$\varphi' x = \frac{x}{aa - xx}$$

$$mm = \frac{1}{4} aa$$

Die Formel (4) ergibt

$$\int_0^K \sin \xi \, d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \xi \, d\xi$$

oder

$$1 - \cos K = \frac{1}{2},$$

woraus

$$K = 60^\circ$$

und

$$mk = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

hervorgehen.

Die wahrscheinlichsten Elemente folgen aus der Auflösung der Gleichungen (6), wenn darin

$$\varphi' x = \frac{x}{aa - xx}$$

gesetzt wird; für den einfachsten Fall, in welchem eine immer gleiche Grösse p durch die Beobachtungen

$$p = h, h', h'', \dots h^{(n)}$$

bestimmt werden soll, folgt p aus der Auflösung der Gleichung:

$$0 = \frac{h-p}{aa-(h-p)^2} + \frac{h'-p}{aa-(h'-p)^2} + \dots + \frac{h^{(n)}-p}{aa-(h^{(n)}-p)^2} \dots (5)$$

statt deren die Methode der kleinsten Quadrate die Auflösung der Gleichung

$$0 = h-p + h'-p + \dots + h^{(n)}-p \\ = \{h + h' + \dots + h^{(n)}\} - (n+1)p \dots (6)$$

fordert. Das Verhältniss des mittleren Fehlers zum wahrscheinlichen ist $= 1:k = 1:\sqrt{3} = 1:1,732$,

nach der gewöhnlichen Theorie, als wahrscheinlichste angenommen, würde es $1:0,4769364\sqrt{2} = 1:0,6745$ sein.

Ein diesem Beispiele entsprechender Fall würde vorhanden sein, wenn der Winkel zwischen zwei Punkten, von beliebigen und nicht angegebenen Punkten der Theilung eines Kreises an, gemessen wäre, welcher Kreis eine bekannte Excentricität und nur eine einfache Ablesung besitzt, übrigens aber fehlerfrei ist und fehlerfrei angewandt wird. Wird in diesem Falle der Anfangspunkt einer Messung durch π , der Punkt der Theilung, welcher in der Richtung von ihrem Mittelpunkte nach dem Mittelpunkte der Bewegung der Alhidade liegt, durch A , die Excentricität durch e bezeichnet, so ergibt die Messung, statt des wahren Winkels p :

$$p + 2e \sin \frac{1}{2} p \cos (\pi - A + \frac{1}{2} p)$$

Man hat also, den im Beispiele angewandten Beziehungen zufolge:

$$2e \sin \frac{1}{2} p = a; \quad \pi - 90^\circ - A + \frac{1}{2} p = \xi,$$

und π sowohl wie das davon abhängige ξ ist, der Annahme gemäss, vollkommen willkürlich. Man sollte also p durch die Auflösung der Gleichung (5), welche vom $2n + 1^{\text{ten}}$ Grade ist, bestimmen, und sein so bestimmter Werth würde der wahrscheinlichste sein, der aus den vorhandenen Beobachtungen gefolgert werden kann. Dass er desto weniger, je grösser n ist, von dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen abweicht, welches man durch (6) erhält, kann sowohl in dem vorhandenen Falle leicht nachgewiesen werden, als es auch aus der allgemeinen, von LAPLACE gefundenen Eigenschaft folgt, welcher zufolge die Bestimmung der Elemente desto freier von φx wird, je grösser die Anzahl der vorhandenen Beobachtungen ist. Der wahrscheinliche Fehler ist 2,568 Mal so gross, als man ihn durch Verfolgung der Hypothese, auf welcher die Methode der kleinsten Quadrate beruht, schätzen würde.

Weiss man nichts von der Ursache der Abweichungen der verschiedenen Messungen des Winkels p von einander, so erscheinen sie als wahre Beobachtungsfehler und es ist kein Grund vorhanden, welcher sich der Anwendung des arithmetischen Mittels, oder allgemeiner der Methode der kleinsten Quadrate, auch auf diese Beobachtungen widersetzt. Man erhält aber dadurch in dem betrachteten Falle nicht den wahrscheinlichsten Werth von p und eine viel zu kleine Bestimmung seines wahrscheinlichen Fehlers. Ein anderer, dem Beispiele gleichfalls entsprechender Fall ist mir in meiner eigenen Praxis vorgekommen: ich hatte den Unterschied zweier Längen durch eine Mikrometerschraube oft

wiederholt gemessen, und bemerkte, als ich die Beobachtungen unter einander verglich, dass grössere positive oder negative Abweichungen von dem mittleren Resultate der Messungen häufiger vorkamen als kleinere; was sowohl der Hypothese, auf welcher die Methode der kleinsten Quadrate beruht, als der gewöhnlichen Erfahrung widersprach. Ich konnte nicht zweifeln, dass in diesem Falle ein ganz anderes Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler stattfinden müsse, und fand wirklich bei einer hierdurch veranlassten näheren Prüfung des Apparats, dass die Mikrometerschraube, in dem Umfang jeder ganzen Drehung, sich nicht den Angaben ihrer Trommel proportional fortbewegte, aber in verschiedenen Drehungen wiederkehrende, dem Sinusse des von einem gewissen Anfangspunkte an gezählten Drehungswinkels proportionale Ungleichheiten zeigte. Dieser Fall entsprach also dem Beispiele. Als ich die erkannte Fehlerursache durch Rechnung beseitigte, hatte ich das Vergnügen, meine Messungen in sehr befriedigender Uebereinstimmung zu finden; woraus also hervorging, dass der Apparat nur geringe sonstige Fehlerursachen besass.

Das zweite Beispiel soll die Annahme

$$x = a\xi\xi$$

verfolgen, und jeder zwischen den Grenzen $-\alpha$ und α liegende Werth von ξ soll, gleich möglich sein. Die Formeln (1), (2) und (3) ergeben in diesem Falle:

$$\varphi x = \frac{1}{4a\sqrt{ax}}, \quad \varphi' x = -\frac{1}{2x}, \quad mm = \frac{1}{2}aa^2.$$

Die Formel (4) ergibt die Gleichung:

$$\int_0^k \xi\xi d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \xi\xi d\xi$$

oder

$$k^3 = \frac{1}{2}\alpha^3$$

und man erhält dadurch:

$$mk = \frac{a \cdot a\alpha}{\sqrt{4}}; \quad k = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$$

Beobachtungen dieser Art ergeben die wahrscheinlichsten Werthe der Elemente, wenn man in den Gleichungen (9)

$$\varphi' x = -\frac{1}{2x}$$

setzt; in dem einfachsten Falle, in welchem eine immer gleiche Grösse p durch die Beobachtungen

$$p = h, \quad h', \quad h'' \dots h^{(n)}$$

bestimmt werden soll, folgt also p aus der Auflösung der Gleichung:

$$0 = \frac{1}{h-p} + \frac{1}{h'-p} + \dots + \frac{1}{h^{(n)}-p}$$

oder, wenn man das Product

$$(h-p)(h'-p)(h''-p) \dots (h^{(n)}-p)$$

durch P bezeichnet, aus der Auflösung der Gleichung des n^{ten} Grades:

$$0 = \frac{dP}{dp} \dots \dots \dots (7^*)$$

Das Verhältniss des mittleren Fehlers zum wahrscheinlichen ist $= \sqrt{3} : \sqrt{5} = 1 : 1,409$.

Dieses Beispiel ist eins von denen, in welchen man nicht zu der Bestimmung von p , sondern zu der Bestimmung einer davon verschiedenen Grenze gelangt, nämlich der Grenze $p + \int x \varphi x dx$; man gelangt zwar immer nur zu einer Grenze, welche diesen Ausdruck hat, allein wenn $\varphi(-x) = \varphi x$ ist, so ist sie von p nicht verschieden, was hier, wo alle x gleiches Zeichen haben, nicht stattfindet. In dem gegenwärtigen Falle erhält man die Grenze

$$= p + \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \xi d\xi = p + \frac{1}{2} a \alpha \alpha.$$

Das Quadrat des mittleren, auf diese Grenze bezogenen Fehlers ist bekanntlich *)

$$= mm - \frac{1}{2} a \alpha^2 = \frac{1}{2} a \alpha \alpha^2$$

und den wahrscheinlichen Fehler findet man

$$= \frac{1,39}{24} a \alpha \alpha = 0,290 \cdot a \alpha \alpha.$$

Wenn das die Methode der kleinsten Quadrate ergebende Fehlergesetz auch hier angewandt werden sollte, würde man ihn $= 0,6745 \sqrt{\frac{1}{24}} \cdot a \alpha \alpha = 0,201 \cdot a \alpha \alpha$ finden.

Es ist nicht schwer, auch diesem Beispiele untergeordnete Fälle, welche wirklich vorkommen können, aufzufinden. Einer von ihnen ist vorhanden, wenn die Länge einer Stange, welche eine kugelförmig gekrümmte Endfläche hat, auf einem mikrometrischen Apparate gemessen werden soll, welcher den Fehler hat, dass der Mittelpunkt der kugelförmigen Fläche nicht sicher in die gerade Linie zwischen der Mikrometerspitze und dem Punkte, von welchem an die Länge gezählt wird, gebracht werden, sondern innerhalb der Grenzen $-\alpha$ und α willkürlich davon entfernt sein kann. Bezeichnet man den Halbmesser der Kugelfläche durch r , so ist,

*) GAUSS, Theoria combin. observationum etc. Gottingae 1823, p. 7. — Wenn man nicht den wahrscheinlichsten Werth dieser Grenze, sondern von p selbst verlangt, so ist es offenbar, von welchem die Beobachtungen, sämtlich mit dem Zeichen von a , am wenigsten abweichen; also entweder der kleinste oder der grösste der beobachteten Werthe.

für ein convexes Ende der Stange $x = -\frac{\xi\xi}{2r}$, für ein concaves $x = \frac{\xi\xi}{2r}$, und also $a = \mp \frac{1}{2r}$. Dass a und x stets gleiches Zeichen haben, liegt in der Natur der Sache.

In beiden Beispielen, welche ich gegenwärtig verfolgt habe, ist das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler beträchtlich verschieden von dem oft erwähnten Gesetze

$$\varphi x = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2m}}$$

In dem ersten derselben sind sogar die sich den Grenzen nähernden Fehler weit wahrscheinlicher als die kleinen, und für die Grenzen selbst wird $\varphi x = \infty$. Dieses findet in vielen, und vermuthlich auch häufig vorkommenden Fällen statt. Wenn jeder Fehler aus einer einzigen Ursache entstände, so würde, meiner Meinung nach, kein Grund vorhanden sein, zu erwarten, dass die Abnahme der Zahl der Fehler sich mit dem Zunehmen ihrer Grösse verbunden zeigen werde; so wie es, seltener, nur bei sehr einfachen Beobachtungsarten, vorkommender Ausnahmen nicht zu gedenken, in der Wirklichkeit der Fall ist. Da ich die Absicht erreichte zu haben glaube, welche mich zu der Verfolgung einiger Beispiele veranlasste, so verlasse ich diese, und bemerke darüber nur noch, dass jeder Versuch, das der Methode der kleinsten Quadrate (wenn man sie als wahrscheinlichste Methode betrachten will) zum Grunde liegende Gesetz allgemein als das wirklich vorkommende zu erkennen, nothwendig vergebens sein muss, da die Beispiele zeigen, dass Bedingungen, welche nicht bloß mathematisch möglich sind, sondern auch practisch erfüllt werden können, auf davon gänzlich verschiedene Gesetze führen.

3.

Ich werde nun die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers untersuchen, welcher aus der Zusammenwirkung mehrer, von einander unabhängiger Ursachen entsteht. Um nicht unnöthige Weitläufigkeit herbeizuführen, werde ich voraussetzen, dass jede dieser Ursachen so wirkt, dass sie positiven und negativen Fehlern von gleicher Grösse gleiche Wahrscheinlichkeit gibt; ferner werde ich, als Maass dieser Wahrscheinlichkeit, die Gewisheit des Vorhandenseins der Ursache, aus welcher ein Fehler entsteht, oder, was dasselbe ist, das zwischen den äussersten Grenzen des Fehlers genommene Integral $\int \varphi x . dx = 1$ annehmen. Indem ich schon gezeigt habe, wie aus einer gegebenen Art der Wirkung der einen Fehler erzeugenden Ursache, die seine Wahrscheinlichkeit ausdrückende Function hervorgeht, so

Bessel's Abhandlungen. 2. Bd.

ist es auch unnöthig, die erstere in dem Folgenden ferner zu betrachten.

Man erhält eine deutliche Vorstellung von dem Zusammenwirken verschiedener Fehlerursachen, wenn man die Einheit, durch welche die Wirkung jeder derselben, oder der Beitrag, den sie zu dem Gesamtfehler liefert, gemessen wird, in unendlich viele gleiche Theile (n^{te}) theilt und diese Wirkung von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ fortgehend annimmt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Ursachen die Wirkung x erzeuge, ist der Anzahl von Fällen proportional, in welchen diese Wirkung sich unter einer unendlich grossen Zahl N von Fällen zeigt. Bezeichnet man diese Anzahl durch $\frac{N}{i} \varphi_i x$, so ist der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von $x = \frac{1}{i} \varphi_i x$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine andere von der vorigen unabhängige Fehlerursache die Wirkung y hervorbringe, hat ebenso den Ausdruck $\frac{1}{i} \varphi_i y$; dass eine dritte die Wirkung z hervorbringe, den Ausdruck $\frac{1}{i} \varphi_i z$; u. a. w. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ursachen zugleich die durch x, y, z, \dots bezeichneten Wirkungen hervorbringen, ist das Product aller Wahrscheinlichkeiten der einzelnen, also, wenn die Anzahl der von einander unabhängigen Ursachen $= \mu + 1$ gesetzt wird,

$$= \frac{1}{i^{\mu+1}} \cdot \varphi_i x \cdot \varphi_i y \cdot \varphi_i z \dots$$

Wenn nun

$$x + y + z + \dots = n$$

gesetzt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtwirkung aller Ursachen, oder der Gesamtfehler, $= n$ sei, die Summe aller Werthe, welche der eben gegebene Ausdruck erhält, wenn für x, y, z, \dots alle von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ fortschreitende Werthe gesetzt werden, welche mit der Bedingung $x + y + z + \dots = n$ vereinbar sind. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit durch $\frac{1}{i} \psi n$, so hat man also

$$\psi n = \frac{1}{i^\mu} \Sigma \varphi_i x \cdot \varphi_i y \cdot \varphi_i z \dots \dots \dots (7)$$

in welchem Ausdrucke das Summenzeichen Σ die angegebene Bedeutung hat.

Die Aufgabe, die Function ψn zu finden, ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, die geforderte Summation auszuführen. Da die Summation einer Reihe von Werthen einer Function, deren Argument von einer Grenze zu einer anderen, in arithmetischer Progression,

und zwar durch unendlich kleine Aenderungen fortgeht, sich auf eine Integration zwischen diesen Grenzen reduziert, und unsere Aufgabe μ solcher Summationen, also auch μ successive Integrationen erfordert, so erhält sie hierdurch eine Schwierigkeit, welche nur in besonderen Fällen der Functionen $\varphi x, \varphi y, \varphi z, \dots$ übersteiglich ist. Wenn x, y, z, \dots nicht jede beliebige Grösse haben können, sondern der Bedingung unterworfen sind, dass sie sich in den Grenzen resp. $\mp a, \mp b, \mp c \dots$ befinden müssen, so gesellt sich zu dieser Schwierigkeit noch eine andere, gleichfalls sehr beträchtliche, nämlich die Schwierigkeit, jede Integration in ihren gehörigen Grenzen auszuführen. Offenbar ist dann ψn keine stetige Function von n , sondern sie erhält andere und andere Ausdrücke, je nachdem n sich zwischen den verschiedenen ihrer Grösse nach aufeinander folgenden Combinationen von $\mp a, \mp b, \mp c, \dots$ befindet.

4.

Obgleich das, was ich eben gesagt habe, nicht erwarten lässt, dass man, ohne die Aufgabe von einer andern Seite anzufassen, ein allgemein befriedigendes Resultat dadurch erhalten werde, so werde ich doch den Ausdruck (7) zu verfolgen anfangen. Man kann dadurch zu zwar speciellen, aber doch der Aufmerksamkeit nicht unwerth erscheinenden Resultaten gelangen.

Nimmt man zuerst nur zwei zusammenwirkende Fehlerursachen, so verwandelt sich (7) in

$$\psi n = \frac{1}{4} \sum \varphi x \varphi y$$

und die durch x und y zu erfüllende Bedingung ist

$$n = x + y.$$

Schafft man dadurch y fort, so wird

$$\psi n = \frac{1}{4} \sum \varphi x \varphi_i(n-x)$$

und diese Summe muss über alle, von $\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{4}$ fortschreitende Werthe von x ausgedehnt werden, welche x nicht ausserhalb der Grenzen $\mp a$, und zugleich $n-x$ nicht ausserhalb der Grenzen $\mp b$ bringen. Die Grenzen, über welche n nicht hinausgehen kann, sind offenbar $\mp(a+b)$.

Unter Vorbehalt der gehörigen Begrenzung des Integrals ist

$$\frac{1}{4} \sum \varphi x \varphi_i(n-x) = \int \varphi x \varphi_i(n-x) dx$$

Die Bedingung, dass x zwischen $-a$ und a liege, fordert, dass das Integral nicht über diese Grenzen hinaus ausgedehnt werde; die zweite Bedingung, dass $n-x$

zwischen $-b$ und b liege, fordert aber auch, dass das Integral nicht über die Grenzen $n-b$ und $n+b$ hinausgehe. Es geht hieraus hervor, dass man die gehörige Begrenzung des Integrals erhält, wenn man $-a, a, n-b, n+b$ nach ihrer Grösse ordnet und die beiden mittleren als Grenzen des Integrals annimmt. Das Integral geht nicht bis zu a , wenn $n-a < -b$ und $> b$, oder $n < a-b$ und $> a+b$ ist, wovon jedoch die Bedingung $n > a+b$ weggelassen werden kann, indem sie nur fordert, dass n die Grenze seiner möglichen Grösse nicht überschreite; es erlangt also die Grenze a nicht, sondern $n+b$ statt derselben, wenn $n < a-b$ ist. Dagegen fängt es nicht von $-a$ an, wenn $n+a < -b$ und $> b$, oder $n < -a-b$ und $> -a+b$ ist, wovon aus dem angeführten Grunde die Bedingung $n < -a-b$ weggelassen werden kann; es fängt also nicht von der Grenze $-a$ an, sondern von $n-b$ statt derselben, wenn $n > -a+b$ ist. Wenn man diejenige von beiden Functionen, deren Grenzen sich am weitesten ausdehnen, als die erste von beiden, also $a > b$ annimmt, erhält man also:

$$\psi n = \int_{-a}^{n+a} \varphi x \varphi_i(n-x) dx, \text{ wenn } n \text{ zwisch. } -a-b \text{ u. } -a+b \Bigg\} \\ = \int_{n-b}^{n+b} \varphi x \varphi_i(n-x) dx \dots \dots \dots -a+b \dots a-b \Bigg\} (8) \\ = \int_{n-b}^a \varphi x \varphi_i(n-x) dx \dots \dots \dots a-b \dots a+b \Bigg\}$$

Dass diese Formeln die Bedingung $\varphi n = \varphi(-n)$, der sie, der Ausnahme $\varphi x = \varphi(-x)$ und $\varphi y = \varphi_i(-y)$ gemäss, entsprechen müssen, wirklich erfüllen, bemerkt man leicht.

Ich werde diese Formeln auf einige Beispiele anwenden. Zuerst werde ich die beiden zusammenwirkenden Fehlerursachen so annehmen, dass die eine innerhalb der Grenzen $\mp a$, die andere innerhalb $\mp b$ liegenden Fehlern eine beständige Wahrscheinlichkeit gibt; also

$$\varphi x = \frac{1}{2a}, \quad \varphi_i y = \frac{1}{2b}$$

Die Formeln (8) ergeben für diesen Fall unmittelbar:

$$\psi n = \frac{n+a+b}{4ab} \text{ wenn } n \text{ zwischen } -a-b \text{ und } -a+b \\ = \frac{2b}{4ab} \dots \dots \dots -a+b \dots a-b \\ = \frac{-n+a+b}{4ab} \dots \dots \dots a-b \dots a+b$$

Indem n von $\mp(a+b)$ zu $\mp(a-b)$ übergeht, wächst

also ψn gleichförmig von 0 bis $\frac{1}{2a}$, welchen Werth es behält, während n sich zwischen $-a+b$ und $a-b$ befindet.

Als zweites Beispiel werde ich für eine der beiden zusammenwirkenden Fehlerursachen die in dem ersten Beispiele des 2. Art. abgeleitete, also

$$\begin{aligned} \psi n &= \frac{1}{2b\pi} \int_{-a}^{n+b} \frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{1}{2b\pi} (\frac{1}{2}\pi + u) \text{ wenn } n \text{ zwischen } -a-b \text{ und } -a+b \\ &= \frac{1}{2b\pi} \int_{n-a}^{n+b} \frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{1}{2b\pi} (u - u') \dots\dots\dots -a+b \dots a-b \\ &= \frac{1}{2b\pi} \int_{n-a}^n \frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{1}{2b\pi} (\frac{1}{2}\pi - u') \dots\dots\dots a-b \dots a+b \end{aligned}$$

wo die Winkel u und u' aus den Formeln:

$$\sin u = \frac{n+b}{a}; \quad \sin u' = \frac{n-b}{a}$$

hervorgehen.

Der in diesem Beispiele verfolgte Fall findet unter andern statt, wenn man der Ablesung der Theilungen des im 2. Art. zur Erläuterung gewählten excentrischen Kreises eine optische Parallaxe beilegt, und den Ort des Auges, von welchem ihre Grösse abhängt, innerhalb der Grenzen, zwischen welchen diese von $-b$ zu b übergeht, willkürlich annimmt.

Als drittes Beispiel werde ich beide zusammenwirkende Fehlerursachen, von der Art der im ersten Beispiele des 2. Art. abgeleiteten, also

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{aa-xx}}; \quad \varphi y = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{bb-yy}}$$

annehmen. Bei dieser Annahme setzt die Erfindung von ψn die Integration von

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{dx}{\sqrt{aa-xx} \sqrt{bb-(n-x)^2}}$$

zwischen den in den Formeln (8) angegebenen Grenzen voraus. Diese Function ist also eine elliptische Transcendente der ersten Gattung, deren Ausdruck unter die Form:

$$\frac{1}{M} \int \frac{dy}{\sqrt{1-yy} \sqrt{1-ky}}$$

gebracht werden kann. Man erlaubt diese Reduction sehr leicht, wenn man den, durch Eleganz und Vollständigkeit der Entwickelung des Meisters würdigen Formeln folgt, welche JACOBI*) gegeben hat. Wenn

*) Fundamenta nova theoriae funct. ellipt. Regiomonti 1829, p. 12. Man findet daselbst auch ähnliche Formeln für den Fall, in welchem der Nenner

$$\sqrt{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$

ist.

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{aa-xx}},$$

und für die andere die eben angewandte, also

$$\varphi y = \frac{1}{2b}$$

annehmen. Dadurch werden die Formeln (8):

man in diesen Formeln x für y und y für x schreibt, so lehren sie, dass

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} = \frac{dy}{\sqrt{1-yy} \sqrt{L^2-N^2yy}}$$

wird, wo (unter der Voraussetzung $\alpha > \beta > \gamma > \delta$) unter L und N die Ausdrücke

$$2L = \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} + \sqrt{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}$$

$$2N = \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} - \sqrt{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}$$

verstanden werden, und die Relation zwischen x und y die folgende ist:

- 1) wenn x nicht kleiner als α und nicht grösser als δ ist

$$\frac{L-Ny}{L+Ny} = \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}} \sqrt{\frac{x-\gamma}{x-\beta}}$$

- 2) wenn x nicht kleiner als γ und nicht grösser als β ist

$$\frac{L-Ny}{L+Ny} = \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}} \sqrt{\frac{\alpha-x}{x-\delta}}$$

Die vier Factoren des Quadrats des Nenners des Differentials, welches mit diesen Formeln verglichen werden soll, sind:

$$x-a, x+a, x-n+b, x-n-b.$$

Wenn erstens n zwischen $-a-b$ und $-a+b$ fällt, ist ihre Reihenfolge:

$$x-a, x-n-b, x+a, x-n+b$$

und das Integral wird von $-a$ bis $n+b$ genommen. Man hat also

$$\alpha = a, \quad \beta = n+b, \quad \gamma = -a, \quad \delta = n-b$$

und das Integral von γ bis β zu nehmen. Hieraus folgt

$$2L = \sqrt[4]{4ab} + \sqrt[4]{nn - (a-b)^2}$$

$$2N = \sqrt[4]{4ab} - \sqrt[4]{nn - (a-b)^2}$$

und die Grenzen des Integrals -1 und $+1$.

Wenn zweitens n zwischen $-a+b$ und $a-b$ fällt, ist ihre Reihenfolge:

$$x - a \cdot x - n - b \cdot x - n + b \cdot x + a$$

und das Integral wird von $n-b$ bis $n+b$ genommen. Man hat also

$$\alpha = a, \quad \beta = n+b, \quad \gamma = n-b, \quad \delta = -a$$

und das Integral von γ bis β zu nehmen. Hieraus folgt

$$2L = \sqrt[4]{(a+b)^2 - nn} + \sqrt[4]{(a-b)^2 - nn}$$

$$2N = \sqrt[4]{(a+b)^2 - nn} - \sqrt[4]{(a-b)^2 - nn}$$

und die Grenzen des Integrals -1 und $+1$.

Wenn drittens n zwischen $a-b$ und $a+b$ fällt, ist ihre Reihenfolge:

$$x - n - b \cdot x - a \cdot x - n + b \cdot x + a$$

und das Integral wird von $n-b$ bis a genommen. Man hat also

$$\alpha = n+b, \quad \beta = a, \quad \gamma = n-b, \quad \delta = -a$$

und das Integral von γ bis β zu nehmen. Das Uebrige folgt hieraus wie in dem ersten Falle, was auch eine Folge davon ist, dass $\psi n = \psi(-n)$ sein muss.

Man hat also in allen drei Fällen

$$\psi n = \frac{1}{\pi^2 L^2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-yy} \sqrt{1-kkyy}}$$

und wenn man

$$k = \left(\frac{N}{L}\right)^2 = \sin \vartheta$$

und $y = \sin \varphi$ setzt:

$$\psi n = \frac{2}{\pi^2 L^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi^2}} \dots \dots \dots (9)$$

Den Zahlenwerth des Integrals hat LEGENDRE, im 3. Theile der Exercices du calcul intégral, in eine Tafel gebracht, deren Argument ϑ ist.

5.

Ich habe diese Beispiele verfolgt, um dadurch in einigen speciellen Fällen anschaulich zu machen, in welcher Art die Beschaffenheit der Functionen φ und φ , durch ihr Zusammenwirken verändert wird. Die drei Beispiele sind dieser Absicht angemessen gewählt: das erste setzt zwei Fehlerursachen voraus, welche grösseren und kleineren Fehlern gleiche Wahrscheinlichkeiten beilegen; das zweite verbindet eine solche Fehler-

ursache mit einer anderen, deren Wirkungen desto wahrscheinlicher werden, je grösser sie sind und für welche φx , an den Grenzen von x , sogar bis ins Unendliche wächst; das dritte betrachtet endlich das Zusammenwirken zweier Fehlerursachen der letzteren Art. Um leichter als durch die erlangten Formeln das Resultat dieses Zusammenwirkens zweier von einander unabhängiger Fehlerursachen übersehen zu können, habe ich die Zahlenwerthe von $(a+b)\psi n$ zuerst für die Voraussetzung $a=5$ und $b=5$, dann für die Voraussetzung $a=6$ und $b=4$ berechnet und führe sie hier an:

$\pm n$	$a=5$ und $b=5$			$\pm n$	$a=6$ und $b=4$		
	I	II	III		I	II	III
0	1,0	1,00	∞	0	0,83	0,58	0,61
1	0,9	0,80	0,15	1	0,83	0,60	0,64
2	0,8	0,70	0,12	2	0,83	0,76	∞
3	0,7	0,63	0,11	3	0,73	0,69	0,60
4	0,6	0,56	0,10	4	0,63	0,63	0,51
5	0,5	0,50	0,09	5	0,52	0,56	0,46
6	0,4	0,44	0,08	6	0,42	0,49	0,42
7	0,3	0,37	0,08	7	0,31	0,42	0,39
8	0,2	0,30	0,07	8	0,21	0,33	0,36
9	0,1	0,20	0,07	9	0,10	0,23	0,34
10	0,0	0,00	0,06	10	0,00	0,00	0,32

Im Beispiele III ist eigentlich der Werth von ψn , an der Grenze von n , unbestimmt; allein für ein unendlich wenig kleineres n drücken ihn die berechneten Zahlen aus. Durch diese Tafeln wird anschaulich, wie das Zusammenwirken zweier Fehlerursachen grösseren Fehlern, im Allgemeinen, kleinere Wahrscheinlichkeiten gibt, selbst wenn die den einzelnen zugehörigen φ und φ , diese Eigenschaft nicht haben. In dem Beispiele II ist das starke Zusammendrängen der Fehler an den Grenzen der aus der einen ihrer Ursachen hervorgehenden, gänzlich verschwunden, und es zeigt sich darin im Ganzen ein mit dem Wachsen von n verbundenes Abnehmen von ψn . In dem Beispiele III drängen sich die Fehler in dem ersten berechneten Falle bei $n=0$, in dem zweiten bei $n=2$, noch stark zusammen, aber die Werthe von n , für welche dieses stattfindet, liegen nicht mehr an den Grenzen. Dass etwas Aehnliches aus dem Zusammenwirken zweier Fehlerursachen entstehen müsse, begreift man auch leicht ohne Rechnung; allein diese weist es in den ihr unterworfenen Fällen näher nach.

Man kann aus speciellen Fällen allerdings nichts Allgemeines folgern; allein ich bemerke, bei Gelegenheit der gegenwärtigen Verfolgung einiger derselben, dass die dadurch erlangten Resultate der Vermuthung nicht zuwider sind, dass das Zusammenwirken einer

grossen Anzahl von einander unabhängiger Fehlerursachen, die Gesetze der einzelnen mögen sein wie man will, einem Ausdrucke von ψn nähern könne, welcher die Eigenschaft besitzt, mit dem Wachsen der Werthe von n fortwährend abzunehmen.

6.

Man kann, durch weitere Verfolgung der Formel (7), leicht einen Ausdruck von ψn erhalten, welcher das Resultat des Zusammenwirkens dreier Fehlerursachen angibt. Für zwei Fehlerursachen φx und φy habe ich oben gefunden:

$$\psi n = \int_{-a}^a \varphi x \varphi y(n-x) dx$$

welcher Ausdruck aber die Hinzufügung der Bedingung

$$\psi n = \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(n-v) Fv dv = \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(n-v) dv \int_{-a}^a \varphi_1(v-x) \varphi x dx \dots \dots \dots (10)$$

und es wird klar, dass man dieses Verfahren auch auf vier oder jede grössere Zahl von Fehlerursachen ausdehnen kann, indem man immer die Bedingung hinzufügt, dass, statt der hinzukommenden $\varphi_3(n-v_1)$,

$$\psi n = \int_{-a-b-c}^{a+b+c} \varphi_3(n-v_1) dv_1 \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(v_1-v) dv \int_{-a}^a \varphi_1(v-x) \varphi x dx \dots \dots \dots (11)$$

Die hier geforderten successiven Integrationen sind aber nur in sehr eingeschränkten Fällen der Bedeutung von φ , φ_1 , φ_2 ... ausführbar, und selbst wenn sie ausführbar sind, wird die wirkliche Berechnung von ψn , durch die Nebenbedingungen, welche die Begrenzungen der Integrale erfordern, ausserordentlich erschwert. Um wenigstens den Anfang dieser Schwierigkeit anschaulich zu machen, werde ich den nächst-einfachen Fall, nämlich den Fall dreier Fehlerursachen, verfolgen. Die Formeln, welche ich dadurch erhalten werde, sind nicht nur hier anwendbar, sondern immer wenn ein Integral

$$\int \int \varphi_1 z \cdot \varphi_2 y \cdot \varphi_3 x \cdot dy \cdot dx$$

über alle Werthe der veränderlichen Grössen ausgedehnt werden soll, für welche $x+y+z$ einen gegebenen Werth n hat; sie können also noch anderweitige Anwendungen finden.

Um abzukürzen, werde ich das Integral

$$\int_a^i \varphi_1(v-x) \varphi x dx \text{ durch } [h, i]$$

bezeichnen. Daraus folgt, den Formeln (8) gemäss:

fordert, dass statt $\varphi_1(n-x)$ Null gesetzt werde, wenn $n-x$ ausserhalb $\mp b$ liegt. Führt man, um die Bezeichnungen n und ψn auch für das Zusammenwirken dreier Fehlerursachen beibehalten zu können, statt ihrer andere ein, nämlich v statt n und Fv statt ψn , oder schreibt man statt des obigen Ausdruckes:

$$Fv = \int_{-a}^a \varphi_1(v-x) \varphi x dx$$

so kann man, bei der Aufsuchung von ψn für drei Fehlerursachen, dieses Fv statt des vorigen φx und $\varphi_2 z = \varphi_2(n-v)$ statt des vorigen $\varphi_1(v-x)$ anwenden; unter der Bedingung, dass statt $\varphi_2(n-v)$ Null gesetzt werde, wenn $n-v$ ausserhalb $\mp c$ liegt, wird das Integral zwischen den Grenzen von $v = \mp(a+b)$ genommen. Man erhält also

$\varphi_1(n-v_1)$ u. s. w. Null gesetzt werde, sobald $n-v_1$, $n-v_2$, u. s. w. ausserhalb $\mp d$, $\mp e$, u. s. w. liegen. Für vier Fehlerursachen hat man z. B.:

- wenn $v > -a - b < -a + b \dots Fv = [-a, v+b]$
- $v > -a + b < a - b \dots Fv = [v-b, v+b]$
- $v > a - b < a + b \dots Fv = [v-b, a]$

Man sucht

$$\psi n = \int_{-a-b}^{a+b} \varphi_2(n-v) Fv \cdot dv$$

unter der Bedingung, dass statt $\varphi_2(n-v)$ Null gesetzt werde, wenn $n-v$ ausserhalb $\mp c$ liegt. Setzt man nach und nach für Fv die eben gegebenen Ausdrücke, so fordert die Anwendbarkeit des ersten derselben, dass $v > -a - b$ und $< -a + b$ sei; die jetzt hinzugekommene Bedingung fordert, dass $n-v > -c$ und $< c$, oder $v > n - c$ und $< n + c$ sei. Fällt $n - c$ zwischen $-a - b$ und $-a + b$, also n zwischen $-a - b + c$ und $-a + b + c$, so wird das Integral von $n - c$ an gerechnet, für kleinere n von $-a - b$. Fällt $n + c$ zwischen $-a - b$ und $-a + b$, also n zwischen $-a - b + c$ und $-a + b + c$, so wird das Integral bis zu $n + c$ genommen, für grössere n bis zu $-a + b$. Insofern der erste der drei Ausdrücke von Fv bei dem Integrale in Betracht kommt, hat man also, unter der Annahme $a > b > c$:

$$\begin{aligned} \psi n &= \int_{-a-b}^{n+c} \varphi_2(n-v)[-a, v+b] dv, \text{ wenn } n > -a-b-c < -a-b+c \\ &= \int_{n-c}^{n+c} \varphi_2(n-v)[-a, v+b] dv, \dots n > -a-b+c < -a+b-c \\ &= \int_{n-c}^{-a+b} \varphi_2(n-v)[-a, v+b] dv, \dots n > -a+b-c < -a+b+c \end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit des zweiten der Ausdrücke von Fv fordert, dass $v > -a+b$ und $< a-b$ sei; die hinzukommende Bedingung, dass $v > n-c$ und $< n+c$ sei. Fällt $n-c$ zwischen $-a+b$ und $a-b$, also n zwischen $-a+b+c$ und $a-b+c$, so wird das Integral von $n-c$ an gerechnet, für kleinere n von

$-a+b$. Fällt $n+c$ zwischen $-a+b$ und $a-b$, also n zwischen $-a+b-c$ und $a-b-c$, so wird das Integral bis zu $n+c$ genommen, für grössere n bis zu $a-b$. Insofern der zweite der drei Ausdrücke von Fv bei dem Integrale in Betracht kommt, hat man also, unter der Annahme $a > b+c$:

$$\begin{aligned} \psi n &= \int_{-a+b}^{n+c} \varphi_2(n-v)[v-b, v+b] dv, \text{ wenn } n > -a+b-c < -a+b+c \\ &= \int_{n-c}^{n+c} \varphi_2(n-v)[v-b, v+b] dv, \dots n > -a+b+c < a-b-c \\ &= \int_{n-c}^{a-b} \varphi_2(n-v)[v-b, v+b] dv, \dots n > a-b-c < a-b+c \end{aligned}$$

Wenn aber $a < b+c$ so widerspricht dieses der zweiten Bedingung $n > -a+b+c < a-b-c$ und die Reihenfolge der vier Grenzen ist dann $-a+b-c, a-b-c,$

$-a+b+c, a-b+c$, woraus, den angeführten Bedingungen gemäss, hervorgeht:

$$\begin{aligned} \psi n &= \int_{-a+b}^{n+c} \varphi_2(n-v)[v-b, v+b] dv, \text{ wenn } n > -a+b-c < a-b-c \\ &= \int_{-a+b}^{a-b} \varphi_2(n-v)[v-b, v+b] dv, \dots n > a-b-c < -a+b+c \\ &= \int_{n-c}^{a-b} \varphi_2(n-v)[v-b, v+b] dv, \dots n > -a+b+c < a-b+c \end{aligned}$$

Die Anwendbarkeit des dritten der Ausdrücke von Fv fordert endlich, dass $v > a-b$ und $< a+b$ sei; die hinzukommende Bedingung, dass $v > n-c$ und $< n+c$ sei. Fällt $n-c$ zwischen $a-b$ und $a+b$, also n zwischen $a-b+c$ und $a+b+c$, so wird das Integral von $n-c$ an gerechnet, für kleinere n von

$a-b$. Fällt $n+c$ zwischen $a-b$ und $a+b$, also n zwischen $a-b-c$ und $a+b-c$, so wird das Integral bis zu $n+c$ genommen, für grössere n bis zu $a+b$. Insofern der dritte der Ausdrücke von Fv bei dem Integrale in Betracht kommt, hat man also:

$$\begin{aligned} \psi n &= \int_{n-c}^{n+c} \varphi_2(n-v)[v-b, a] dv, \text{ wenn } n > a-b-c < a-b+c \\ &= \int_{n-c}^{a+b} \varphi_2(n-v)[v-b, a] dv, \dots n > a-b+c < a+b-c \\ &= \int_{n-c}^{a+b} \varphi_2(n-v)[v-b, a] dv, \dots n > a+b-c < a+b+c \end{aligned}$$

Sammelt man diese 9 Ausdrücke, und bezeichnet man, um abzukürzen,

$$\int_a^l \varphi_2(n-v) dv \int_a^l \varphi_1(v-x) \varphi x dx \text{ durch } [k, l; \bar{h}, \bar{i}]$$

so erhält man:

$\alpha.$ in dem Falle $a > \bar{b} + c:$

$$\left. \begin{aligned} \psi n &= [-a-b, n+c; -a, v+b] \text{ wenn } n > -a-b-c < -a-b+c \\ \psi n &= [n-c, n+c; -a, v+b] \dots n > -a-b+c < -a+b-c \\ \psi n &= [n-c, a+b; -a, v+b] \\ &+ [-a+b, n+c; v-b, v+b] \dots n > -a+b-c < -a+b+c \\ \psi n &= [n-c, n+c; v-b, v+b] \dots n > -a+b+c < a-b-c \\ \psi n &= [n-c, a-b; v-b, v+b] \\ &+ [a-b, n+c; v-b, a] \dots n > a-b-c < a-b+c \\ \psi n &= [n-c, n+c; v-b, a] \dots n > a-b+c < a+b-c \\ \psi n &= [n-c, a+b; v-b, a] \dots n > a+b-c < a+b+c \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$\beta.$ in dem Falle $a < \bar{b} + c:$

$$\left. \begin{aligned} \psi n &= [-a-b, n+c; -a, v+b] \text{ wenn } n > -a-b-c < -a-b+c \\ \psi n &= [n-c, n+c; -a, v+b] \dots n > -a-b+c < -a+b-c \\ \psi n &= [n-c, a+b; -a, v+b] \\ &+ [-a+b, n+c; v-b, v+b] \dots n > -a+b-c < a-b-c \\ \psi n &= [n-c, a+b; a-b; v-b, v+b] \\ &+ [a-b, n+c; v-b, a] \dots n > a-b-c < -a+b+c \\ \psi n &= [n-c, a-b; v-b, v+b] \\ &+ [a-b, n+c; v-b, a] \dots n > -a+b+c < a-b+c \\ \psi n &= [n-c, n+c; v-b, a] \dots n > a-b+c < a+b-c \\ \psi n &= [n-c, a+b; v-b, a] \dots n > a+b-c < a+b+c \end{aligned} \right\} \dots (12)^*$$

Es kann kein Interesse haben, die noch viel weitläufiger werdende, und die Unterscheidung mehrerer besonderer Fälle fordernde vollständige Entwicklung des Ausdruckes (11), oder gar eines, noch mehr als vier Fehlerursachen berücksichtigenden, zu verfolgen und die zahlreicheren Unterbrechungen der Stetigkeit von ψn anzuforschen. Dass der Fortgang auf diesem Wege in abschreckende Weitläufigkeiten führt, und doch kein eine Uebersicht gewährendes Resultat geben kann, wird durch die Formeln (12) und (12*) anschaulich, und damit ist die Absicht ihrer Entwicklung erreicht.

7.

Es sind indessen besondere Fälle vorhanden, in welchen das Zusammenwirken mehrerer Fehlerursachen zu einem einfachen Resultate führt. Mit diesen werde ich mich jetzt beschäftigen.

Einer von ihnen ist der Fall, in welchem die verschiedenen Fehlerursachen nach demselben Gesetze der Wahrscheinlichkeit wirken, welches zur vollständigen Rechtfertigung der Methode der kleinsten Quadrate

nothwendig ist. Ich werde zuerst nur zwei solcher Fehlerursachen annehmen, also

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x x}, \quad \varphi y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 y y}$$

setzen, und $\mp \infty$ als Grenzen von x und y betrachten. Dann ist (Art. 4)

$$\psi n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi x \cdot \varphi y (n-x) dx = \frac{h h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x x - h^2 (n-x)^2} dx$$

welcher Ausdruck auch

$$\psi n = \frac{h h e^{-\frac{(h h, n)^2}{h h + h h}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\{z \sqrt{h h + h h} - \frac{h h n}{\sqrt{h h + h h}}\}^2} dz$$

geschrieben werden kann, oder, wenn man

$$x \sqrt{h h + h h}, - \frac{h h n}{\sqrt{h h + h h}} = t$$

setzt:

$$\psi n = \frac{h h e^{-\frac{(h h, n)^2}{h h + h h}}}{\pi \sqrt{h h + h h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Da das Integral bekanntlich $= \sqrt{\pi}$ ist, so wird

$$\psi n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{hh}{\sqrt{hh+h,h,h}} \cdot c - \left(\frac{hh}{\sqrt{hh+h,h,h}} \right)^{n+1}$$

oder ψn erhält wieder dasselbe Gesetz, welches für die einzelnen Ursachen angenommen wurde, welches nun aber von der Constante

$$\frac{hh}{\sqrt{hh+h,h,h}}$$

statt der in φx und φ, y stattfindenden h und h_1 , abhängig geworden ist. Setzt man $\frac{1}{\alpha^2}$ für h , und $\frac{1}{\beta^2}$ für h_1 , wodurch also α und β die mittleren aus den einzelnen Ursachen entstehenden Fehler werden, so wird

$$\left(\frac{hh}{\sqrt{hh+h,h,h}} \right)^2 = \frac{1}{2(\alpha\alpha + \beta\beta)}$$

und es geht hieraus hervor, dass das Gesetz der Wahrscheinlichkeit des aus beiden Fehlerursachen zusammengesetzten Fehlers n , keinen andern Unterschied von den zum Grunde gelegten Gesetzen der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen hat, als den, dass der mittlere Werth des Quadrates von n die Summe der mittleren Werthe der Quadrate von x und y ist. Da diese Wiederherbringung des zum Grunde gelegten Gesetzes bei zwei Fehlerursachen eingetreten ist, so tritt sie auch bei der Verbindung des dadurch zusammengesetzten Fehlers mit einer neuen Fehlerursache derselben Art ein, u. s. w. Man hat also den mittleren Werth des Quadrats des aus einer beliebigen Anzahl ähnlicher Fehlerursachen zusammengesetzten Fehlers:

$$mm = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \text{etc.} \dots$$

und

$$\psi n = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot c - \frac{m^n}{2^{m-1}} \dots \dots \dots (13)$$

Ein anderer, der Aufmerksamkeit würdiger Fall ist der, in welchem die einzelnen zusammenwirkenden Fehlerursachen ihren Wirkungen von gleicher Grösse gleiche, übrigens aber einem beliebigen Gesetze folgende Wahrscheinlichkeiten geben. Dass die Summe aller Wirkungen $x + y + z + \dots$ den Werth n erhalte, ist dann offenbar genau so wahrscheinlich, als wahrscheinlich ist, dass die Summe der Fehler von eben so vielen Beobachtungen, als Fehlerursachen vorhanden sind, $= n$ werde. Die Aufgabe ψn zu bestimmen, ist also in diesem Falle von der von LAPLACE*) aufgelösten Aufgabe die Summe der Fehler einer Anzahl gleichartiger Beobachtungen zu finden, nicht verschieden; und sie führt, eben so wie diese, zu dem merkwürdigen

Resultate, dass eine Anzahl von einander unabhängiger, zwar nach einem willkürlichen, aber sämmtlich nach einem gleichen Gesetze wirkender Fehlerursachen, den Ausdruck von ψn der oft angeführten exponentiellen Formel (13) desto mehr nähert, je grössere sie ist. POISSON hat später*) eine meisterhafte Analyse derselben Aufgabe gegeben; auch die Recherches sur la probabilité des jugements desselben grossen Geometers enthalten Vieles, was sich darauf bezieht.

8.

Ich werde in diesem und dem folgenden Art. zeigen, dass beliebig wirkende Fehlerursachen, also willkürliche Annahmen der Functionen $\varphi x, \varphi_1 y, \varphi_2 z, \dots$ sowohl, als auch der Grenzen $\mp a, \mp b, \mp c, \dots$ von x, y, z, \dots , unter gewissen Bedingungen, zu der Erzeugung eines Beobachtungsfehlers zusammenwirken, dessen Gesetz der Wahrscheinlichkeit dasselbe ist (13), welches die Methode der kleinsten Quadrate zur wahrscheinlichsten macht.

Der Ausdruck (7):

$$\psi n = \frac{1}{\mu^n} \Sigma \varphi x \cdot \varphi_1 y \cdot \varphi_2 z \dots$$

in welchem $\mu + 1$ die Anzahl der von einander unabhängigen Fehlerursachen bezeichnet, würde von der Schwierigkeit, welche die gehörigen Begrenzungen von x, y, z, \dots seiner Verfolgung in den Weg legen, frei sein, wenn die durch die Bedingung $x + y + z + \dots = n$ hervorgebrachte Abhängigkeit dieser Grössen von einander nicht vorhanden wäre. Man kann ihn aber von dieser Bedingung befreien, also $x, y, z \dots$ als einander unabhängig betrachten, wenn man ihn, unter dem Summenzeichen, mit einer Function von $x + y + z \dots$ multiplicirt, welche die Eigenschaften hat, für jeden nichtverschwindenden Werth von $x + y + z + \dots - n$ zu verschwinden und für $x + y + z + \dots - n = 0$ den Werth 1 zu erlangen. Da x, y, z, \dots sich von $\frac{1}{i}$ zu $\frac{1}{i}$ verändern (Art. 4), so hat die Function

$$\frac{\sin i\pi(x+y+z+\dots-n)}{i\pi(x+y+z+\dots-n)}$$

diese Eigenschaften und man erhält durch ihre Einführung:

$$\psi n = \frac{1}{\mu^{n+1}} \Sigma \varphi x \cdot \varphi_1 y \cdot \varphi_2 z \dots \frac{\sin i\pi(x+y+z+\dots-n)}{\pi(x+y+z+\dots-n)}$$

wo das Summenzeichen sich geradezu auf die Grenzen $\mp a, \mp b, \mp c, \dots$ bezieht.

Man kann aber diesem Ausdrucke eine weit zweckmässige Form geben, indem man sich erinnert, dass

*) Theorie analytique des probabilités. Paris 1812, p. 304.

*) Connaissance des Tems 1827, p. 273.

$$\frac{\sin i\pi(x+y+z+\dots+n)}{\pi(x+y+z+\dots+n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\pi}^{i\pi} e^{i(x+y+z+\dots+n)\nu} \nu^{-1} d\nu$$

ist; denn dadurch werden x, y, z, \dots von einander abge- sondert, und der Ausdruck erhält die Form:

$$\psi n = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\pi}^{i\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \varphi x \cdot e^{i\nu x} \nu^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i} \varphi_1 y \cdot e^{i\nu y} \nu^{-1} \right) \dots e^{-i\nu n} \nu^{-1} d\nu$$

oder, da i unendlich gross ist und man die einzelnen Summen durch Integrale ausdrücken kann:

$$\psi n = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x \left(\int_{-a}^a \varphi x \cdot e^{i\nu x} \nu^{-1} dx \right) \left(\int_{-b}^b \varphi_1 y \cdot e^{i\nu y} \nu^{-1} dy \right) \dots e^{-i\nu n} \nu^{-1} d\nu.$$

Setzt man, statt der imaginären Exponentialgrößen unter den sich auf x, y, z, \dots beziehenden Integralzeichen, ihre Ausdrücke durch die trigonometrischen Linien, z. B.

$$e^{i\nu x} \nu^{-1} = \cos \nu x + \sqrt{-1} \cdot \sin \nu x$$

so kann man den in $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theil derselben weglassen, weil er aus den zwischen den Grenzen $\mp a, \mp b, \mp c, \dots$ genommenen Integralen (wegen

$$\psi n = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \varphi x \cdot \cos \nu x dx \right) \left(\int_{-b}^b \varphi_1 y \cdot \cos \nu y dy \right) \dots \cos \nu n \cdot d\nu \dots \dots \dots (14)$$

welcher Ausdruck für jede Anzahl Fehlerursachen und jede Annahme von $\varphi x, \varphi_1 y, \varphi_2 z, \dots$ richtig, auch nur der Form nach von dem im 6. Art. gegebenen Ausdrücken, z. B. (11), verschieden ist.

Ehe ich diesen Ausdruck weiter verfolge, werde ich seine Anwendung durch ein Beispiel erläutern. Ich werde das zweite der im 4. Art. ausgeführten Beispiele wieder vornehmen, also

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \{ \sin \nu(x+n+b) + \sin \nu(x-n+b) - \sin \nu(x+n-b) - \sin \nu(x-n-b) \} \frac{d\nu dx}{\nu |aa - xx}$$

Integriert man zuerst in Beziehung auf ν und erinnert man sich, dass

$$\int_{-x}^x \sin \nu u \cdot \frac{d\nu}{\nu} =$$

für jeden positiven Werth von $r = \pi$, für jeden negativen $-\pi$ ist, so wird z. B.

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a \sin \nu(x+n+b) \frac{d\nu dx}{\nu \sqrt{aa - xx}} = \pi \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{aa - xx}} - \pi \int_{-a-b}^{-a+b} \frac{dx}{\sqrt{aa - xx}}$$

wofür ich, um abzukürzen $\pi[-n-b, a] - \pi[-a, -n-b]$ schreiben werde. Man erhält also:

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi} \{ [-n-b, a] - [-a, -n-b] + [n-b, a] - [-a, n-b] - [-n+b, a] + [-a, -n+b] - [n+b, a] + [-a, n+b] \}$$

Wenn erstens

$n > -a - b$ und $< -a + b$, oder $-n > a - b$ und $< a + b$

$\varphi x = \varphi(-x)$, $\varphi_1 y = \varphi_1(-y)$ u. s. w.) verschwindet. Ferner kann man von

$$e^{-i\nu n} \nu^{-1} = \cos \nu n - \sqrt{-1} \cdot \sin \nu n$$

gleichfalls den in $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theil weglassen, da das von einer negativen bis zu einer gleich grossen positiven Grenze genommene Integral von

$$\cos \nu x \cdot \cos \nu y \cdot \cos \nu z \dots \sin \nu n \cdot d\nu$$

verschwindet. Man erhält also

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{aa - xx}}; \quad \varphi_1 y = \frac{1}{2b}$$

setzen. Man hat also nach (14), indem man zuerst nach y integriert:

$$\psi n = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-x}^x \left(\int_{-a}^a \frac{\cos \nu x}{\sqrt{aa - xx}} dx \right) \frac{\sin \nu b}{\nu b} \cos \nu n \cdot d\nu$$

oder

so ist $n - b < -a$ und $-n + b > a$, weshalb die dritte und sechste dieser Grössen $[-a, a]$ werden, die vierte und fünfte aber verschwinden. Setzt man, wie im 4. Art.

$$\sin \nu = \frac{n+b}{a}; \quad \sin \nu' = \frac{n-b}{a}$$

*) Auf eine ähnliche Formel, in welcher aber die Begrenzungen aller Integrale gleich sind, gelangt Poisson (probabilités des jugemens p. 256) bei der Auflösung einer andern Aufgabe.

Bessel's Abhandlungen. 2. Bd.

so wird also

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi} \{ (\frac{1}{2}\pi + u) - (\frac{1}{2}\pi - u) + \pi + \pi - (\frac{1}{2}\pi - u) + (\frac{1}{2}\pi + u) \};$$

wenn zweitens

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi} \{ (\frac{1}{2}\pi + u) - (\frac{1}{2}\pi - u) + (\frac{1}{2}\pi - u') - (\frac{1}{2}\pi + u') - (\frac{1}{2}\pi + u') + (\frac{1}{2}\pi - u') - (\frac{1}{2}\pi - u) + (\frac{1}{2}\pi + u) \}$$

wenn drittens

$n > a - b$ und $< a + b$, oder $-n > -a - b$ und $< -a + b$ so ist $-n - b < -a$ und $n + b > a$, weshalb das erste und achte der Glieder des Ausdrucks $= [-a, a]$ werden, das zweite und siebente aber verschwinden. Man erhält also

$$\psi n = \frac{1}{8b\pi} \{ \pi + (\frac{1}{2}\pi - u') - (\frac{1}{2}\pi + u') - (\frac{1}{2}\pi + u') + (\frac{1}{2}\pi - u') + \pi \}$$

Dieses alles ist übereinstimmend mit den im 4. Art. gefundenen Formeln.

Die früher auf die Begrenzungen fallende Schwierigkeit wird durch den Ausdruck (14) auf die in Beziehung auf n auszuführende Integration übertragen. Es ist kein Grund vorhanden, entweder der Form (11) oder der Form (14) im Allgemeinen einen Vorzug einzuräumen, sondern die vortheilhafteste Wahl zwischen beiden hängt von der Beschaffenheit der Functionen $\varphi x, \varphi_1 y, \varphi_2 z, \dots$ ab. Allein da der vollständige Ausdruck von ψn , immer wenn die Begrenzungen der einzelnen Fehlerursachen nicht $\mp \infty$ sind, nicht stetig ist, und seine Anwendung zur Bearbeitung einer Beobachtungsreihe, aus diesem Grunde, in unüberwindliche Weitläufigkeiten führen würde, so ist eine Näherung,

$$\left(\int_{-a}^a \varphi x \cdot \cos ux dx \right) \left(\int_{-b}^b \varphi_1 y \cdot \cos uy dy \right) \left(\int_{-c}^c \varphi_2 z \cdot \cos uz dz \right) \dots \dots$$

welches den grössten Werth, dessen er fähig ist, erlangt, wenn $u = 0$ gesetzt wird, für einigermassen beträchtliche Werthe von ux, uy, uz, \dots , deren Cosinusse merklich kleiner werden als 1, sehr klein werden muss.

Wenn man es daher als eine Function von u betrachtet, so ist es zweckmässig, ihr die Form Me^{-U} zu geben, in welcher U eine Function von u ist, die

$$e^{-U} = \left(\int_{-a}^a \varphi x \cos ux dx \right) \left(\int_{-b}^b \varphi_1 y \cos uy dy \right) \left(\int_{-c}^c \varphi_2 z \cos uz dz \right) \dots \dots \dots (15)$$

und werde nun U aufsuchen.

Entwickelt man $\varphi x \cdot \cos ux dx$ in die Reihe

$$\varphi x dx \left\{ 1 - \frac{u^2 x^2}{2} + \frac{u^4 x^4}{24} - \frac{u^6 x^6}{720} + \dots \right\}$$

und bezeichnet man:

$$\int_{-a}^a x \varphi x dx = a^2; \int_{-a}^a x^3 \varphi x dx = a_1^3; \int_{-a}^a x^5 \varphi x dx = a_2^5; \dots$$

$n > -a + b$ und $< a - b$ oder $-n > -a + b$ und $< a - b$ so geht keine der Grössen $-n - b, n - b, -n + b, n + b$, über die Grenzen $\mp a$ hinaus und alle Glieder des Ausdrucks bleiben ungeändert, so dass man erhält:

welche sich von dem Ausdrucke von ψn wenig entfernt und die Unterbrechungen seiner Stetigkeit nicht besitzt, wirklich wünschenswerther als der streng richtige Ausdruck. Kommt es darauf an, die Frage: ob eine solche Näherung möglich ist, zu beantworten, und, im Falle ihrer Bejahung, dieselbe aufzusuchen, so erscheint der Vorzug der gegenwärtigen Form, vor der früheren, sehr gross.

9.

LAPLACE hat bekanntlich gezeigt, dass die Entwicklung von Ausdrücken, welche als Functionen grosser Zahlen betrachtet werden können, durch die Berücksichtigung dieses Umstandes im Allgemeinen erleichtert werden kann. Sowohl er selbst, als auch POISSON, haben hieraus, bei der Auflösung vieler Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, grossen Nutzen gezogen, und auch die gegenwärtige wird dadurch, falls sie das Zusammenwirken vieler Fehlerursachen von nicht sehr ungleicher Grösse betrifft, näherungsweise auflöslich. In diesem Falle ist es klar, dass im Ausdrucke (14) enthaltene Product:

für $u = 0$ verschwindet und mit u wächst, und in welcher M den grössten Werth des Products, also da

$$\int_{-a}^a \varphi x dx = 1, \int_{-b}^b \varphi_1 y \cdot dy = 1, \text{ u. s. w. sind, die Zahl } 1$$

bedeutet. Ich wähle also die Form:

wo also a^2 den mittleren Werth des Quadrats des aus der ersten Ursache hervorgehenden Fehlers, a_1^3 den mittleren Werth seines Biquadrats u. s. w. bedeuten, so hat man

$$\int_{-a}^a \varphi x \cos ux dx = 1 - \frac{a^2}{2} u + \frac{a_1^3}{24} u^4 - \frac{a_2^5}{720} u^6 + \dots$$

und ebenso

$$\int_{-1}^1 \varphi_1 y \cos uy dy = 1 - \frac{\beta^2}{2} n n + \frac{\beta_1^2}{24} n^4 - \frac{\beta_2^2}{720} n^6 + \dots$$

$$\int_{-c}^c \varphi_2 z \cos uz dz = 1 - \frac{\gamma^2}{2} n n + \frac{\gamma_1^2}{24} n^4 - \frac{\gamma_2^2}{720} n^6 + \dots$$

u. s. w.

Nimmt man, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, die Logarithmen von (15) und setzt man

$$U = \frac{[\alpha]}{2} n n + \frac{3[\alpha^2] - [\alpha]}{24} n^4 +$$

Ich werde zuerst nur das erste Glied dieses Ausdruckes berücksichtigen, also, der Formel (14) gemäss,

$$\psi n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{[\alpha^2]}} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} n n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u = \frac{\sqrt{2\pi}}{([\alpha^2])^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} n n} \left(1 - \frac{n n}{[\alpha^2]}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^4 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u = \frac{\sqrt{2\pi}}{([\alpha^2])^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} n n} \left(3 - \frac{6 n n}{[\alpha^2]} + \frac{n^4}{([\alpha^2])^2}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^6 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u = \frac{\sqrt{2\pi}}{([\alpha^2])^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} n n} \left(15 - \frac{45 n n}{[\alpha^2]} + \frac{15 n^4}{([\alpha^2])^2} - \frac{n^6}{([\alpha^2])^3}\right)$$

Man erhält jede folgende dieser Formeln durch zweimalige Differentirung der vorangehenden in Beziehung auf n.

Der Ausdruck (17) verwandelt sich hierdurch in:

$$\psi n = \frac{1}{\sqrt{[\alpha^2]} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} n n} \dots \dots \dots (18)$$

welche Formel jedoch nur in den Fällen als eine Annäherung an den wahren Ausdruck von ψn angesehen werden kann, in welchen gezeigt werden kann, dass

$$\psi n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u - \frac{3[\alpha^2] - [\alpha]}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u - \frac{30[\alpha^2] - 15[\alpha^2] \cdot [\alpha] + [\alpha^2]}{1440\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^4 e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} u u} \cos u n . d u - \dots$$

und durch die Anwendung der angeführten Ausdrücke der hier vorkommenden Integrale:

$$\psi n = \frac{e^{-\frac{[\alpha^2]}{2} n n}}{\sqrt{[\alpha^2]} \sqrt{2\pi}} \left\{ 1 - \frac{3[\alpha^2] - [\alpha]}{24([\alpha^2])^2} \left(3 - \frac{6 n n}{[\alpha^2]} + \frac{n^4}{([\alpha^2])^2}\right) - \frac{30[\alpha^2] - 15[\alpha^2] \cdot [\alpha] + [\alpha^2]}{720([\alpha^2])^3} \left(15 - \frac{45 n n}{[\alpha^2]} + \frac{15 n^4}{([\alpha^2])^2} - \frac{n^6}{([\alpha^2])^3}\right) - \dots \right\} (19)$$

Hieraus geht hervor, dass der Ausdruck (18) eine Annäherung an ψn ist, wenn die jetzt hinzugekommenen Glieder, nämlich:

$$\begin{aligned} [\alpha^2] &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots \\ [\alpha^4] &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \dots \\ [\alpha_1^2] &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \dots \\ [\alpha^6] &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \dots \\ [\alpha^2 \alpha_1^2] &= \alpha^2 \alpha_1^2 + \beta^2 \beta_1^2 + \gamma^2 \gamma_1^2 + \dots \\ [\alpha_2^2] &= \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \dots \end{aligned}$$

so erhält man

$$30[\alpha^6] - 15[\alpha^2 \alpha_1^2] + [\alpha_2^2] n^6 + \dots \dots \dots (16)$$

annehmen. Das in diesem Ausdruck vorkommende bestimmte Integral hat LAPLACE, wie ich glaube zuerst, gefunden*); ausser diesem Integrale werde ich später noch einige andere, die darauf reducirt werden können, gebrauchen und deshalb alle zugleich hier anführen:

der Einfluss der weggelassenen Glieder von (16) von geringer Bedeutung ist.

Man vervollständigt den Ausdruck (17), indem man ihn unter dem Integralzeichen mit

$$e^{\frac{[\alpha^2]}{2} u u - U} = e^{-\frac{3[\alpha^2] - [\alpha]}{24} u^2} e^{-\frac{30[\alpha^2] - 15[\alpha^2] \cdot [\alpha] + [\alpha^2]}{720} u^4} - \dots \dots$$

oder mit

$$1 - \frac{3[\alpha^2] - [\alpha]}{24} u^2 - \frac{30[\alpha^2] - 15[\alpha^2] \cdot [\alpha] + [\alpha^2]}{720} u^4 - \dots \dots$$

multipliziert. Man erhält dadurch

*) Theorie analytique des probabilités, p. 96.

$$-\frac{\epsilon}{\sqrt{[\alpha^2]}} \frac{3[\alpha^2] - [\alpha_1^2]}{24[\alpha^2]^2} \left(3 - \frac{6nn}{[\alpha^2]} + \frac{n^2}{[\alpha^2]^2} \right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{[\alpha^2]}} \frac{30[\alpha^2] - 15[\alpha^2 \alpha_1] + [\alpha_1^2]}{720[\alpha^2]^3} \left(15 - \frac{45nn}{[\alpha^2]} + \frac{15n^2}{[\alpha^2]^2} - \frac{n^4}{[\alpha^2]^3} \right)$$

für alle Werthe von n sehr klein sind. Man bemerkt leicht, dass sie den grössten Werth, dessen sie fähig

sind, für $n=0$ erlangen, also für keinen Werth dieser Grösse die Grenze:

$$-\frac{1}{\sqrt{[\alpha^2]}} \frac{3[\alpha^2] - [\alpha_1^2]}{24[\alpha^2]^2} + \frac{30[\alpha^2] - 15[\alpha^2 \alpha_1] + [\alpha_1^2]}{48[\alpha^2]^3} + \text{etc.} \dots \quad (20)$$

überschreiten.

Die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ können immer als von gleicher Ordnung betrachtet werden, eben so $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots; \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ u. s. w. Wenn auch $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ als von gleicher Ordnung angesehen werden können, oder wenn die einzelnen Fehlerursachen mittlere Fehler von gleicher Ordnung hervorbringen, von der Ordnung einer Grösse k , und wenn die Anzahl der zusammenwirkenden Fehlerursachen, wie oben, durch $\mu + 1$ bezeichnet wird, so ist $[\alpha^2]$ von der Ordnung von $(\mu + 1)k^2; [\alpha^4]$ und $[\alpha_1^2]$ sind von der Ordnung von $(\mu + 1)k^4; [\alpha^6], [\alpha^2 \alpha_1^2]$ und $[\alpha_2^2]$ von der Ordnung von $(\mu + 1)k^6$, u. s. w. Man erhält also das erste Glied des eben entwickelten Ausdrucks von der Ordnung von $\frac{1}{\mu + 1}$, das zweite Glied

desselben von der Ordnung von $\frac{1}{(\mu + 1)^2}$, u. s. w. Wenn also die Annahme, dass $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ von gleicher Ordnung sind, statthalt ist, so ist der Ausdruck (18) mit desto grösserem Rechte als eine Annäherung an ψn anzusehen, je grösser die Anzahl der zusammenwirkenden Fehlerursachen ist. Es ist dagegen kein Grund vorhanden, ihn für eine Näherung zu halten, wenn eine oder einige der Fehlerursachen beträchtlich grössere Wirkungen äussern als die übrigen, oder wenn ihre Anzahl nicht gross ist. Uebrigens bemerkt man leicht, dass die Reihe (19) nicht convergiren, also auch nicht Folgerungen zum Grunde gelegt werden kann, welche nicht aus dem schnellen Kleinerwerden ihrer früheren Glieder allein gezogen werden können. Die Natur des Ausdrucks von ψn bringt nämlich, wie ich vorher gezeigt habe, mit sich, dass er eine nicht-stetige Function von n ist; dieser Eigenschaft kann die Reihe nur entsprechen, wenn sie nicht convergirt, und allgemein folgt hieraus, dass ψn nicht durch eine convergirende Reihe ausgedrückt werden kann. Andere Anwendungen, welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von dem Principe der grossen Zahlen gemacht worden sind und gemacht werden können, sind im Allgemeinen, in dieser Beziehung, in einem gleichen Falle.

10.

Fälle, in welchen nicht viele von einander unabhängige Ursachen zusammenwirkten, um einen Beob-

achtungsfehler zu erzeugen, sind wahrscheinlich sehr selten; selbst in sehr einfach erscheinenden Beobachtungsarten können oft zahlreiche Ursachen ihrer Fehler nachgewiesen werden. Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich annehmen, dass eine Reihe von Entfernungen eines Fixsterns von dem Scheitelpunkte oder Pole, mit einem nach Reichenbach'scher Art eingerichteten Meridiankreise beobachtet sei und versuchen, die Ursachen der Fehler aufzuzählen, welche sich in der Zusammenstellung ihrer Resultate verrathen. Das Instrument muss zuerst auf den Stern eingestellt werden, und diese Einstellung kann aus verschiedenen Ursachen fehlerhaft werden, nämlich 1, weil eine Grenze der Kraft des Fernrohrs vorhanden ist, innerhalb welcher seine Richtung willkürlich bleibt; 2. weil der Punkt des Bildes des Sterns, den man in die Absehslinie zu bringen beabsichtigt, innerhalb gewisser Grenzen willkürlich sein kann, welche bei grossen und hellen Sternen ohne Zweifel weiter auseinander liegen, als bei kleineren weniger hellen, und woraus hervorgehen kann, dass bei Nacht und bei Tage, oder bei hellerem und weniger hellem Himmel, verschiedene Punkte gewählt werden; 3. weil der Stern sich selten oder nie ruhig, sondern in zitternder, von dem Mangel des Gleichgewichts der Luft herrührender Bewegung zeigt, und also eine, zwischen den äussersten Grenzen dieser Bewegung liegende Wahl getroffen werden muss. Hiezugesellen sich Fehlerursachen, welche von der Einstellung des Instruments ganz unabhängig sind, z. B. 4. ein Einfluss der Elasticität seines Metalls, welcher zufälligen äusseren Umständen zufolge, bald diesen, bald jenen Werth erhalten, auch zur Folge haben kann, dass die Richtung des Fernrohrs, in dem Augenblicke des Ablesens der Beobachtung, nicht mehr dieselbe ist, welche sie bei seiner Einstellung war; 5. eine Unsicherheit der Angabe des Kreises, welche aus kleinen Ungleichheiten der Entfernungen seiner eigenen Theilstriche und der Theilstriche der Nonien hervorgeht, und welche sich als veränderlicher Fehler äussert, da gewöhnlich, bei jeder Wiederholung der Beobachtung, andere Theilstriche zur Coincenz gelangen; 6. die aus der begrenzten Schärfe des optischen Hilfsmittels, wodurch die Ablesungen erlangt werden, hervorgehende

Unsicherheit; 7. die aus dem Umstande hervorgehenden Fehler, dass die Schätzung der Angaben der Nonien nur z. B. bis auf die Hälfte des kleinsten Zwischenraumes von 2", welchen sie angeben, getrieben werden kann, wodurch alle an den vier Nonien dieser Instrumente abgelesenen Beobachtungen sich immer mit einer vollen, einer viertel, halben oder dreiviertel Secunde, nie aber mit anderen Theilen derselben schliessen. Ferner kommen dazu äussere Umstände, z. B. 8. der Einfluss der Körperwärme des Beobachters auf den Kreis oder andere Theile des Apparats; 9. der Einfluss einer, im Allgemeinen vorhandenen, Verschiedenheit der Wärme zwischen dem unteren und oberen Rande des Kreises, welcher Spannungen in seinem Metalle und Veränderungen seiner Figur erzeugt. Auch veranlasst 10. die Voraussetzung, dass die Wasserwage der Alhidade bei jeder Ablesung sich im nicht beeinträchtigten Zustande des Gleichgewichts befinde, einen zufälligen Fehler; 11. geht ein solcher aus der Annahme hervor, dass das Instrument zwischen zwei mit einander zu vergleichenden Beobachtungen in vollkommen gleichem Zustande geblieben sei, während doch die Bemerkung von Aenderungen, welche es in kürzerer oder längerer Zeit erfährt, nicht selten ist. Mit dem sogenannten Beobachtungsfehler vermischt sich auch 12. der Einfluss, welchen die fehlerhafte Annahme hat, dass der Zustand der Atmosphäre, so wie Barometer und Thermometer ihn angeben, genau der sei, wonach die Grösse der jedesmaligen Strahlenbrechung sich richtet, und 13. der Einfluss kleiner Unvollkommenheiten der Reductionselemente der Beobachtungen. Ich werde vermuthlich in dieser Aufzählung von Ursachen, welche zur Erzeugung eines scheinbaren Beobachtungsfehlers zusammenwirken, mehrere übersehen haben, so wie ich der zufälligen Unachtsamkeit in der Ausführung einzelner Momente der Beobachtungen, nicht vorteilhafter oder unruhiger Beleuchtung der Fäden und der Theilstriche, der Einflüsse der Kälte auf das Instrument u. s. w. nicht habe erwähnen wollen. Immer aber wird durch diese Aufzählung von Fehlerursachen der Zweck erreicht, bemerklich zu machen, dass selbst diese einfache Beobachtungsart einen Gesamtfehler zeigen muss, welcher aus zahlreichen Ursachen entsteht, deren jede von den übrigen unabhängig wirkt.

Es ist das Bestreben des Künstlers, welcher ein Instrument verfertigt, seine einzelnen Theile so anzuordnen, dass sie das was sie leisten sollen, mit gleichmässiger Genauigkeit leisten. Es würde unnütz sein, einem Kreise einen grossen Halbmesser und bis auf Kleinigkeiten sichere Theilungen zu geben, wenn er nur

ein kleines, wenig sichere Einstellungen gewährendes Fernrohr tragen sollte. Wenn es dagegen in der Absicht liegt, in den ersteren Beziehungen das Aeusserste zu leisten, so ist jedesmal auch die Absicht vorhanden, ein dieser Leistung angemessenes Fernrohr anzuwenden. Auch der Wasserwage, wodurch der Scheitelpunkt erkannt werden soll, gibt der Künstler gleichmässige Vollendung, und sein ganzes Nachdenken wendet er an, um alle Theile des Instruments so auszuführen, dass nicht die Mangelhaftigkeit des einen den Vortheil vernichte, welchen die Vollendung der übrigen hervorbringt. Der Beobachter, der das Instrument anwendet, bestrebt sich gleichfalls, dieser Anwendung eine der Genauigkeit des Instruments gleichmässige Sicherheit zu geben. Er wird Beobachtungen als ungenügend erkennen, wenn die äusseren Umstände so ungünstig sind, dass sie ihm Zweifel erzeugen, welche er für ungleichmässig mit der Genauigkeit des Apparats hält. Während er z. B. eine, bis auf einige Secunden gehende Unsicherheit, welche das Zittern der Luft verursacht, für sehr bedeutend hält, wenn er mit einem grossen und genauen Instrumente beobachtet, muss sie ihm unbedeutend erscheinen, wenn er ein mit einem schwachen Fernrohre versehenes Instrument von kleinem Halbmesser, welches, auch bei der ruhigsten Luft, viel grössere Unsicherheiten übrig lassen würde, anwendet. Es ist nicht die Grösse der Unsicherheit, welche diesen Unterschied veranlasst, sondern nur ihr verschiedenes Verhältniss zu andern vorhandenen Fehlerursachen.

Aus dieser Darstellung der Beobachtungen im Allgemeinen und der wesentlichen Beschaffenheit eines guten Apparats und einer ihm angemessenen Beobachtungsreihe, scheint mir hervorzugehen, dass man die beiden Annahmen, unter welchen das im 9. Art. erlangte Resultat näherungsweise richtig ist, nicht für so selten gerechtfertigt halten darf, als man, ohne genauere Betrachtung der Beobachtungsarten und Apparate, vielleicht geneigt sein möchte. Die erste dieser Annahmen ist, dass viele Ursachen zur Hervorbringung des Beobachtungsfehlers zusammenwirken; die zweite, dass unter den, aus den einzelnen Ursachen hervorgehenden mittleren Fehlern, keiner die übrigen beträchtlich übertreffe. Wenn diese Annahmen erlaubt sind, nähert sich immer die Wahrscheinlichkeit des Gesamtfehlers n einer Beobachtung der Form:

$$\psi n = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{an^2}{2m}}$$

d. h. demselben Gesetze, wovon GAUSS zuerst gezeigt hat, dass es das von der Vorschrift des arithmetischen Mittels geforderte ist.

11.

Ohne Ausnahme kann zwar die Richtigkeit der beiden Annahmen, worauf dieses Resultat beruhet, nicht vorausgesetzt werden, und ich habe selbst, im 2. Art. einen Fall angeführt, in welchem sie nicht stattfand; dort war eine, die übrigen beträchtlich übertreffende Fehlerursache vorhanden und sie folgte für sich allein einem ganz andern Gesetze, weshalb dieses in den Beobachtungen vorzugsweise hervortrat. Aber es scheint, dass die Beobachtungsarten, wenigstens die astronomischen, selten so einfach sind, dass sie nicht die Annahmen und ihr Resultat mehr oder weniger rechtfertigen sollten.

Ich halte für zweckmässig, hierüber das Zeugnis von astronomischen Beobachtungen selbst anzuführen. Ich habe (in den *Fundamenta Astronomiae pro Ao. 1755 p. 19*) abgezählt, wie viele Fehler sich, bei verschiedenen Beobachtungsreihen BRADLEY'S, innerhalb enger, von 0 bis zu den grössten Fehlern fortgehender Bezugsrichtungen fanden. Die eine dieser Abzählungen habe ich auf 300 Beobachtungen der Declinationen einiger häufig beobachteten Sterne gegründet; die andere auf 300 Beobachtungen der Rectascensionen in Zeit ausgedrückt; die dritte auf 470 Beobachtungen weit zusammengesetzterer Art, nämlich der Rectascensionen einiger Fixsterne, so wie sie aus ihren Rectascensionsunterschieden von der Sonne, deren Rectascensionen aus ihren beobachteten Declinationen berechnet worden sind, hervorgehen. Diese Abzählungen werde ich jetzt auf den Fall von 100 Beobachtungen reduciren, und sie mit der auf die Annahme

$$\psi n = \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{nn}{2m^2}}$$

gegründeten Theorie so vergleichen, dass ich mm durch die Summe der Quadrate der Fehler bestimme, während, in den *Fund. Astr. selbst*, eine andere Bestimmungsart angewandt worden ist.

1. Beobachtungen der Declinationen.

$$m = \pm 1,6237$$

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0,0 - 0,4	22,0	19,5	- 2,5
0,4 - 0,8	19,3	18,3	- 1,0
0,8 - 1,2	18,3	16,2	- 2,1
1,2 - 1,6	9,3	13,6	+ 4,3
1,6 - 2,0	9,0	10,6	+ 1,6
2,0 - 2,4	7,7	7,9	+ 0,2
2,4 - 2,8	3,3	5,5	+ 2,2
2,8 - 3,2	5,0	3,6	- 1,4
3,2 - 3,6	2,7	2,2	- 0,5
3,6 - 4,0	1,3	1,3	0,0
4,0 etc....	2,0	1,4	- 0,6

2. Beobachtungen der Rectascensionen.

$$m = \pm 0,2283$$

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0,0 - 0,1	38,0	33,5	- 4,5
0,1 - 0,2	28,0	28,0	0,0
0,2 - 0,3	17,7	19,2	+ 1,5
0,3 - 0,4	8,0	10,9	+ 2,9
0,4 - 0,5	4,7	5,1	+ 0,4
0,5 - 0,6	2,0	2,0	0,0
0,6 - 0,7	1,0	0,7	- 0,3
0,7 - 0,8	0,3	0,2	- 0,1
0,8 - 0,9	0,3	0,0	- 0,3

3. Beobachtung der absoluten Rectascensionen.

$$m = \pm 0,4033$$

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0,0 - 0,1	20,0	19,6	- 0,4
0,1 - 0,2	18,7	18,4	- 0,3
0,2 - 0,3	16,6	16,3	- 0,3
0,3 - 0,4	12,4	13,6	+ 1,2
0,4 - 0,5	10,8	10,6	- 0,2
0,5 - 0,6	7,7	7,8	+ 0,1
0,6 - 0,7	5,5	5,4	- 0,1
0,7 - 0,8	3,0	3,6	+ 0,6
0,8 - 0,9	2,1	2,1	0,0
0,9 - 1,0	1,5	1,3	- 0,2
1,0 etc....	1,7	1,3	- 0,4

Diese drei Beobachtungsreihen sind von sehr verschiedener Art; ich werde aber noch ein viertes Beispiel anführen, bei welchem die Fehler durch wieder andere Ursachen hervorgebracht sein müssen. Ich nehme es von 100 Rectascensionen des Polarsterns her, welche ich in den J. 1813—15 mit dem älteren Passagen-Instrumente der Königsberger Sternwarte beobachtet habe [vgl. p. 374 Note].

4. Rectascensionen des Polarsterns.

$$m = \pm 1,3093$$

Grenzen.	Beobb.	Theorie.	Untersch.
0,0 - 0,4	25	24,0	- 1,0
0,4 - 0,8	22	21,9	- 0,1
0,8 - 1,2	19	18,2	- 0,8
1,2 - 1,6	11	13,7	+ 2,7
1,6 - 2,0	9	9,5	+ 0,5
2,0 - 2,4	8	6,0	- 2,0
2,4 - 2,8	2	3,4	+ 1,4
2,8 - 3,2	3	1,8	- 1,2
3,2 - 3,6	1	0,9	- 0,1
3,6 etc....	0	0,6	+ 0,6

Die aus diesen vier Beispielen hervorgehende nahe Uebereinstimmung der Erfahrung mit der Forderung, welche die Theorie, unter der Voraussetzung des Stattfindens der beiden oft erwähnten Annahmen macht, ist geeignet, dieses zu rechtfertigen; und zwar desto geeig-

meter, je zahlreicher die von anderen Reihen astronomischer Beobachtungen hergenommenen Beispiele sind, welche ich für dasselbe hätte auführen können. Es ist nicht wahrscheinlich, dass die einzelnen Ursachen, aus deren Zusammenwirkung die Fehler so verschiedenartiger Beobachtungsreihen entstehen, jede für sich, dasselbe exponentielle Gesetz der Wahrscheinlichkeit ihrer Wirkungen haben sollten, und dass, aus diesem Grunde, dem 7. Art. zufolge, dieses Gesetz sich auch in ihrer Zusammenwirkung zeigte; vielmehr ist es wahrscheinlich, und durch die früher angeführten Verfolgungen specieller Fälle auch anschaulich geworden, dass diese einzelnen Ursachen nach sehr verschiedenen Gesetzen

wirken, und die nahe Uebereinstimmung zwischen der Erfahrung und dem exponentiellen Gesetze nur durch das Zusammenwirken einer grossen Zahl derselben hervorgebracht wird.

Diese Untersuchung führt also, im Allgemeinen (nicht ohne mögliche Ausnahmen, deren eine ich angeführt habe) zu dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler zurück, auf welches die Methode der kleinsten Quadrate Anfangs gegründet wurde, und welches spätere Betrachtungen über die Willkür, welche das Gesetz der Fehler immer hat, wenn die Art ihrer Entstehung aus einer Ursache nicht bekannt ist, wieder aufzugeben veranlassen.

120. Ueber die Summation der Progressionen.*

(Astron. Nachr. 16, p. 1.)

Ich habe hier kein neues Resultat mitzutheilen, sondern nur eine neue Entwickelungsart eines bekannten Resultats. Sie führt so vollständig zu demselben, dass sie mir die Mittheilung zu verdienen scheint.

Ich suche die Summe der Progression:

$$S = f\alpha + f(\alpha + \delta) + f(\alpha + 2\delta) + \dots + f(\alpha + n\delta) \dots (1)$$

Wenn man

$$\frac{1}{2} \{ f[\alpha + (\frac{1}{2} - x)\delta] + f[\alpha + (\frac{1}{2} + x)\delta] \} + \frac{1}{2} \{ f[\alpha + (\frac{3}{2} - x)\delta] + f[\alpha + (\frac{3}{2} + x)\delta] \} + \dots \\ \dots + \frac{1}{2} \{ f[\alpha + (n - \frac{1}{2} - x)\delta] + f[\alpha + (n - \frac{1}{2} + x)\delta] \} \dots \dots \dots (2)$$

durch φx bezeichnet, so ist

$$S = \frac{1}{2} f\alpha + \frac{1}{2} f(\alpha + n\delta) + \varphi(\frac{1}{2}) \dots \dots (3)$$

Die Function φx ist für positive und negative Werthe von x gleich, und kann daher durch die Reihe

$$\varphi x = A^0 + 2A' \cos 2\pi x + 2A'' \cos 4\pi x + \dots$$

ausgedrückt werden, welcher Ausdruck, wenn man ihn nach und nach mit $dx, \cos 2\pi x dx, \cos 4\pi x dx, \dots$ multiplicirt und von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$ integrirt:

$$\varphi x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x dx + 2 \cos 2\pi x \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 2\pi x dx + 2 \cos 4\pi x \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 4\pi x dx + \dots$$

und

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x dx - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 2\pi x dx + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 4\pi x dx \dots \dots \dots (4)$$

Die einzelnen Theile von (2) haben den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} \left\{ f \left[\alpha + \left(\frac{2h+1}{2} - x \right) \delta \right] + f \left[\alpha + \left(\frac{2h+1}{2} + x \right) \delta \right] \right\}$$

und ihre Summe, von $h = 0$ bis $h = n - 1$ genommen, ist $= \varphi x$. Man hat also

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 2m\pi x \cdot dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ f \left[\alpha + \left(\frac{2h+1}{2} - x \right) \delta \right] \cos 2m\pi x \cdot dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\alpha + \left(\frac{2h+1}{2} + x \right) \delta \right] \cos 2m\pi x \cdot dx \right\}$$

*) [318 d. a. Verz.]

wofür man, da beide Integrale offenbar einander gleich sind, auch

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 2m\pi x . dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\alpha + \left(\frac{2h+1}{2} + x \right) \delta \right] \cos 2m\pi x . dx$$

schreiben kann. Setzt man y für $x + \frac{1}{2}$, so wird dieser Ausdruck

$$= (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha + (h+y)\delta] \cos 2m\pi y . dy$$

oder, indem man das Argument des Cosinus um eine

$$= (-1)^n \left\{ \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha+y\delta] \cos 2m\pi y . dy + \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha+(1+y)\delta] \cos 2m\pi(1+y) . dy + \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha+(n-1+y)\delta] \cos 2m\pi(n-1+y) . dy \right\}$$

Die in den Klammern stehende Grösse ist nun offenbar

$$= \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha+y\delta] \cos 2m\pi y . dy$$

und man erhält dadurch

$$\int f[\alpha+y\delta] \cos 2m\pi y . dy = \frac{1}{2m\pi} f[\alpha+y\delta] \sin 2m\pi y - \frac{1}{2m\pi} \int \frac{df[\alpha+y\delta]}{dy} \sin 2m\pi y . dy$$

und wenn man dieses fortsetzt:

$$\frac{1}{2m\pi} f[\alpha+y\delta] \sin 2m\pi y + \frac{1}{(2m\pi)^2} \frac{d^2 f[\alpha+y\delta]}{dy^2} \cos 2m\pi y - \frac{1}{(2m\pi)^2} \int \frac{d^2 f[\alpha+y\delta]}{dy^2} \cos 2m\pi y . dy$$

Das von 0 bis zu der ganzen Zahl n genommene Integral ist daher:

$$\int_0^n f[\alpha+y\delta] \cos 2m\pi y . dy = \frac{\delta}{(2m\pi)^2} \frac{d^2 F}{d\alpha^2} - \frac{\delta^3}{(2m\pi)^4} \int_0^n \frac{d^4 f[\alpha+y\delta]}{d\alpha^4} \cos 2m\pi y . dy$$

wo statt der Differentialquotienten in Beziehung auf y , die Differentialquotienten in Beziehung auf α , oder

$$\frac{d f[\alpha+y\delta]}{dy} = \delta \frac{d f[\alpha+y\delta]}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2 f[\alpha+y\delta]}{dy^2} = \delta^2 \frac{d^2 f[\alpha+y\delta]}{d\alpha^2}$$

genommen worden sind und F , um abzukürzen, für $f[\alpha+y\delta] - f\alpha$ gesetzt ist. Man kann ferner für dasselbe Integral schreiben:

$$\frac{\delta}{(2m\pi)^2} \frac{d^2 F}{d\alpha^2} - \frac{\delta^3}{(2m\pi)^4} \frac{d^4 F}{d\alpha^4} + \frac{\delta^5}{(2m\pi)^6} \int_0^n \frac{d^6 f[\alpha+y\delta]}{d\alpha^6} \cos 2m\pi y . dy$$

und allgemein:

$$\frac{\delta}{(2m\pi)^2} \frac{d^2 F}{d\alpha^2} - \frac{\delta^3}{(2m\pi)^4} \frac{d^4 F}{d\alpha^4} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{\delta^{2i-1}}{(2m\pi)^{2i}} \frac{d^{2i-1} F}{d\alpha^{2i-1}} + (-1)^i \frac{\delta^{2i}}{(2m\pi)^{2i}} \int_0^n \frac{d^{2i} f[\alpha+y\delta]}{d\alpha^{2i}} \cos 2m\pi y . dy$$

Substituiert man diese Umformung in (5) und die Anwendung dieser Formel auf alle Werthe von m , von 1 bis ∞ , in (4), so erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^n f[\alpha+y\delta] dy + \frac{\delta}{2\pi^2} \frac{d^2 F}{d\alpha^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{\delta^3}{2^3 \pi^4} \frac{d^4 F}{d\alpha^4} \left\{ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right\} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{i-1} \delta^{2i-1}}{2^{2i-1} \pi^{2i}} \frac{d^{2i-1} F}{d\alpha^{2i-1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{4^{2i}} + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{(-1)^i \delta^{2i}}{2^{2i} \pi^{2i}} \int_0^n \frac{d^{2i} f[\alpha+y\delta]}{d\alpha^{2i}} \left\{ \cos 2\pi y + \frac{\cos 4\pi y}{2^{2i}} + \frac{\cos 6\pi y}{3^{2i}} + \dots \right\} dy \dots \dots (6) \end{aligned}$$

beliebige Anzahl ganzer Peripherien verändern kann,

$$= (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha+(h+y)\delta] \cos 2m\pi(h+y) . dy,$$

und wenn man die einzelnen Glieder, auf welche das Zeichen Σ sich bezieht, schreibt:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi x \cos 2m\pi x . dx = (-1)^n \int_{\nu}^{\nu+1} f[\alpha+y\delta] \cos 2m\pi y . dy \dots (5)$$

Man kann diesen Ausdruck in andere Formen bringen, indem man die Integration wiederholt theilweise ausführt; man erhält dadurch:

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist die Ergänzung der bei dem ihm vorangehenden Gliede abgebrochenen Reihe. Man kann dafür

$$+ \frac{(-1)^{i-1} \delta^{2i}}{2^{2i-1} \pi^{2i}} \int_0^{\delta} \frac{d^{2i} f[\alpha + y\delta]}{d\alpha^{2i}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{4^{2i}} + \dots - 2 \sin \pi y^2 - \frac{2 \sin 2 \pi y^2}{2^{2i}} - \frac{2 \sin 3 \pi y^2}{3^{2i}} - \dots \right\} dy$$

schreiben, wodurch sein von den Sinussen unabhängiger Theil dem vorangehenden Gliede gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen wird. Beide Glieder zusammengenommen sind daher:

$$\frac{(-1)^{i-1} \delta^{2i}}{2^{2i-2} \pi^{2i}} \int_0^{\delta} \frac{d^{2i} f[\alpha + y\delta]}{d\alpha^{2i}} \left\{ \sin \pi y^2 + \frac{\sin 2 \pi y^2}{2^{2i}} + \frac{\sin 3 \pi y^2}{3^{2i}} + \dots \right\} dy \dots \dots \dots (7)$$

und man erhält den vollständigen Ausdruck von $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, wenn man ihn hiermit, statt mit

$$\frac{(-1)^{i-1} \delta^{2i-1}}{2^{2i-1} \pi^{2i}} \cdot \frac{d^{2i-1} F}{d\alpha^{2i-1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{4^{2i}} + \dots \right\} \dots (8)$$

schliesst. Wenn

$$\frac{d^{2i} f[\alpha + y\delta]}{d\alpha^{2i}}$$

zwischen $y = 0$ und $y = \pi$ immer dasselbe Zeichen behält, so haben (7) und (8) offenbar gleiches Zeichen, und es geht hieraus hervor, dass alsdann die Summe der früheren Glieder einer Ergänzung bedarf, welche das Zeichen von (8) hat. Wenn diese Bedingung er-

füllt wird, und wenn die Zeichen des Ausdruckes (6) abwechseln, so gibt also sein Abbrechen bei einem positiven Gliede ein zu grosses, bei einem negativen ein zu kleines Resultat.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \text{ durch } S_2$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \text{ durch } S_4$$

$$1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots \text{ durch } S_6$$

u. s. w.

so erhält man, durch die Verbindung von (3) und (6):

$$S = \int_0^{\delta} f[\alpha + y\delta] dy + \frac{1}{2} f\alpha + \frac{1}{2} f[\alpha + n\delta] + \frac{S_2}{2\pi^2} \cdot \delta \cdot \frac{d^2 \{f[\alpha + n\delta] - f\alpha\}}{d\alpha} - \frac{S_4}{2^2 \pi^4} \delta^3 \frac{d^4 \{f[\alpha + n\delta] - f\alpha\}}{d\alpha^3} + \frac{S_6}{2^3 \pi^6} \delta^5 \frac{d^6 \{f[\alpha + n\delta] - f\alpha\}}{d\alpha^5} - \text{etc.} \dots \dots \dots (9)$$

oder, wenn man die bekannte Relation zwischen den reciproken Reihen und den Bernoulli'schen Zahlen, nämlich

$$S = \int_0^{\delta} f[\alpha + y\delta] dy + \frac{1}{2} f\alpha + \frac{1}{2} f[\alpha + n\delta] + \frac{B_2 \delta}{1 \cdot 2} \frac{d \{f[\alpha + n\delta] - f\alpha\}}{d\alpha} - \frac{B_4 \delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^3 \{f[\alpha + n\delta] - f\alpha\}}{d\alpha^3} + \frac{B_6 \delta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{d^5 \{f[\alpha + n\delta] - f\alpha\}}{d\alpha^5} - \text{etc.} \dots \dots \dots (10)$$

benutzt, um statt der ersteren die letzteren einzuführen:

Dieses ist die bekannte Formel für die Summation der Progressionen.

121. Ueber den Ausdruck einer Function φx durch Cosinusse und Sinusse der Vielfachen von x .^{*)}

(Astron. Nachr. 16, p. 229.)

1.

Wenn man

$$\varphi x = A^0 + 2A^1 \cos x + 2A^2 \cos 2x + 2A^3 \cos 3x + \dots + 2B^1 \sin x + 2B^2 \sin 2x + 2B^3 \sin 3x + \dots (1)$$

annimmt, diesen Ausdruck nach und nach mit

$$dx, \quad \cos x dx, \quad \cos 2x dx, \quad \cos 3x dx, \dots \\ \sin x dx, \quad \sin 2x dx, \quad \sin 3x dx, \dots$$

multiplicirt, und von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ integrirt, so erhält man:

^{*)} [326 d. a. Verz.]
Bessel's Abhandlungen. T. Bd.

$$2\pi A^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x dx, \quad 2\pi A^1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x \cos x dx, \quad 2\pi A^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x \cos 2x dx, \dots$$

$$2\pi B^1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x \sin x dx, \quad 2\pi B^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x \sin 2x dx, \dots$$

Schreibt man unter den Integralzeichen α statt x , so hat man also:

$$2\pi \varphi x = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha d\alpha + 2 \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha \cos \alpha d\alpha + 2 \cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha \cos 2\alpha d\alpha + \dots$$

$$+ 2 \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha \sin \alpha d\alpha + 2 \sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha \sin 2\alpha d\alpha + \dots \quad (2)$$

Wenn φx eine periodische Function von x ist, eine solche, deren Werthe durch die Veränderung von x in $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ... nicht geändert wird, so ist diese Entwicklung derselben, falls sie von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ richtig ist, offenbar für alle Werthe von x richtig. Ihre Form schliesst alle Functionen von x aus, welche zwischen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ nicht immer endlich bleiben. Da sie die Eigenschaft hat, periodisch zu sein, so kann sie nicht-periodische Functionen nicht für alle Werthe von x darstellen, sondern höchstens nur für innerhalb gewisser Grenzen liegende. Es tritt dann die Frage hervor, ob ihre Anwendung auf solche nicht-periodische Functionen überall statthaft ist, und innerhalb welcher Grenzen von x sie φx , und nicht eine davon verschiedene Grösse ausdrückt.

Herr Prof. DIRICHLET hat erwiesen^{*)}, dass die Entwicklung (2), wie auch die Beschaffenheit der Function φx sein möge, vorausgesetzt dass sie zwischen $-\pi$ und π nicht unendlich gross wird, für Werthe von x ,

$$2\pi \varphi_n x = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha d\alpha \left\{ 1 + 2 \cos(\alpha - x) + 2 \cos 2(\alpha - x) + \dots + 2 \cos n(\alpha - x) \right\}$$

oder, wenn man diese Reihe summirt:

$$2\pi \varphi_n x = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \alpha d\alpha \cdot \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha-x}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}}$$

und, wenn man das Integral in zwei von 0 anfangende Integrale zerlegt:

$$2\pi \varphi_n x = \int_0^{\pi} \varphi \alpha d\alpha \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha-x}{2}}{\sin\frac{\alpha-x}{2}}$$

$$+ \int_0^{\pi} \varphi(-\alpha) d\alpha \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha+x}{2}}{\sin\frac{\alpha+x}{2}}$$

Setzt man voraus, dass $2n+1$ der Cubus einer

^{*)} CRELLE Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. IV. S. 157.

welche grösser sind als $-\pi$ und kleiner als π , im Allgemeinen zu dem Werthe von φx convergirt, und nur für besondere Werthe von x , welche Unterbrechungen der Stetigkeit von φx entsprechen, zu anderen Grenzen. Die Strenge und Vollständigkeit dieses Beweises lassen nichts zu wünschen übrig. Ich kann also nicht die Absicht haben, mehr zu leisten, als der genannte scharfsinnige Geometer geleistet hat; ich kann nur wünschen, dass die Betrachtungen, worauf der neue Beweis der ausgesprochenen, wichtigen Eigenschaft der Entwicklung (2), dessen Darstellung meine Absicht ist, beruht, nicht minder evident erscheinen mögen, als die, worauf DIRICHLET den seinen gegründet hat. Jene scheinen mir wirklich, weniger im Wesentlichen als in ihrer Anordnung, von diesen verschieden zu sein.

2.
Bezeichnet man die Summe aller Glieder der Entwicklung (2), bis zu $\cos nx$ und $\sin nx$ incl. genommen, durch $\varphi_n x$, so ist der Ausdruck dieser Summe:

Zahl k ist, so wird dieser Ausdruck:

$$2\pi \varphi_n x = \int_0^{\pi} \varphi \alpha d\alpha \frac{\sin k^3 \frac{\alpha-x}{2}}{\sin \frac{\alpha-x}{2}} + \int_0^{\pi} \varphi(-\alpha) d\alpha \frac{\sin k^3 \frac{\alpha+x}{2}}{\sin \frac{\alpha+x}{2}}$$

und, wenn man eine neue veränderliche Grösse u einführt, welche für beide Integrale resp.

$$= k^3 \frac{\alpha-x}{2} \quad \text{und} \quad = k^3 \frac{\alpha+x}{2}$$

angenommen wird:

$$\pi \varphi_n x = \int_0^{k^3 \frac{\pi-x}{2}} \varphi \left(x + \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

$$+ \int_0^{k^3 \frac{\pi+x}{2}} \varphi \left(x - \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} \dots \quad (3)$$

Ich werde nun zuerst zeigen, dass, wenn x die Grenzen $\mp \pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ nicht überschreitet, die oberen Grenzen beider Integrale, mit desto grösserem Rechte je grösser k ist, mit $\frac{k}{2} \pi$ verwechselt werden können; und ferner, dass die Summe der beiden so begrenzten Integrale sich dem Werthe von φx im Allgemeinen, und einer anderen Grenze für besondere Werthe von x desto mehr nähert, je grösser k ist. Beide Annäherungen sind von der Art, dass sie sich, wenn $k = \infty$ gesetzt wird, in Richtigkeit verwandeln.

3.

Die Verwechslung der oberen Grenzen beider Integrale (3) mit $\frac{k}{2} \pi$ ist erlaubt, wenn

$$\int_{\frac{k}{2}\pi}^{k\pi - x} \varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}} + \int_{\frac{k}{2}\pi}^{k\pi + x} \varphi\left(x - \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}}$$

für einen unendlich grossen Werth von k verschwindet. Ich werde dieses von dem ersten Integrale zeigen; von dem zweiten gilt, mit sich von selbst ergebenden Abänderungen, alles was ich über das erste sagen werde. Verändert man die untere Grenze des ersten Integrals, welches ich durch ξ bezeichnen werde, in 0, so hat man $u + \frac{k}{2} \pi$ statt u , also, da k von der Form $4m + 1$ ist, $\cos u$ statt $\sin u$ zu schreiben und erhält dadurch:

$$\xi = \int_0^{l\pi} \varphi\left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\cos u \, du}{k^2 \sin\left(\frac{\pi}{k} + \frac{u}{k^2}\right)}$$

wo l für

$$k^2 \frac{\pi - x}{2} - \frac{k}{2} \pi = \frac{k}{2} \left\{ k - k \frac{x}{\pi} - 1 \right\} \pi$$

geschrieben ist. Die Grenze $l\pi$ dieses Integrals ist ein Vielfaches von π , wenn x ein gerades Vielfaches von $\frac{\pi}{k}$ ist; ich werde dieses, um unnöthige Weitläufigkeit zu vermeiden, annehmen, und ξ in l Theile theilen, nämlich in die von 0 bis π , von π bis 2π , von 2π bis 3π , u. s. w. genommenen Integrale. Ich setze also

$$\xi = \sum \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \varphi\left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\cos u \, du}{k^2 \sin\left(\frac{\pi}{k} + \frac{u}{k^2}\right)},$$

wo das Summenzeichen alle ganzen Zahlen l von 0 bis $l-1$ betrifft; oder, indem ich die untere Grenze des Integrals in 0 verändere:

$$\xi = \sum (-1)^l \int_0^{\pi} \varphi\left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2h\pi}{k^2} + \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\cos u \, du}{k^2 \sin\left(\frac{\pi}{k} + \frac{h\pi}{k^2} + \frac{u}{k^2}\right)} \quad (4)$$

wofür ich, um abzukürzen,

$$\xi = \sum (-1)^l \varphi^h$$

oder

$$\xi = \psi 0 - \psi 1 + \psi 2 - \dots + (-1)^{l-1} \psi(l-1) \dots \quad (5)$$

schreiben werde. Der Bogen, dessen Sinus in dem Ausdrucke von φ^h vorkommt, ist für $h=0$ und $u=0$ so klein als er werden kann, nämlich $= \frac{\pi}{2k}$; er wächst mit h , und wenn h seine Grenze erreicht und $u = \pi$ gesetzt wird, ist er so gross als er werden kann, nämlich $= \frac{1}{2}(\pi - x)$. Da x , der Annahme gemäss, die Grenzen $\mp \pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ nicht überschreitet, so kann er also nicht grösser werden als $\pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)$. Der Sinus im Nenner von (4) ist

also immer positiv und nicht kleiner als $\sin \frac{\pi}{2k}$. Das Integral in diesem Ausdrucke hat von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis π entgegengesetzte Zeichen, und ist daher unter der Annahme, dass der Quotient

$$\frac{\varphi\left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2h\pi}{k^2} + \frac{2u}{k^2}\right)}{k^2 \sin\left(\frac{\pi}{k} + \frac{h\pi}{k^2} + \frac{u}{k^2}\right)}$$

zwischen $u=0$ und $u=\pi$ entweder ununterbrochen wächst oder ununterbrochen abnimmt, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, kleiner als

$$\frac{\varphi\left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2h\pi}{k^2}\right)}{k^2 \sin\left(\frac{\pi}{k} + \frac{h\pi}{k^2}\right)} - \frac{\varphi\left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2(h+1)\pi}{k^2}\right)}{k^2 \sin\left(\frac{\pi}{k} + \frac{(h+1)\pi}{k^2}\right)}$$

wofür ich, um abzukürzen, $f, h - f(h+1)$ schreiben werde. Die einzelnen Theile von ξ sind also kleiner als resp. $f 0 - f 1, f 1 - f 2, f 2 - f 3$, u. s. w. Die Annahme, worauf dieses beruhet, ist erlaubt, da k beliebig gross, also $\frac{u}{k^2}$ beliebig klein gesetzt werden kann; aus demselben Grunde ist es auch unnöthig, des Falles, in welchem die Function φ zwischen h und $h+1$ ihre Zeichen ändert, als Ausnahme zu erwähnen.

Nehmen die Werthe von $f 0, f 1, f 2 \dots$, die bald abnehmen, bald wachsen können, zwischen zwei Grenzen n und n' von h , entweder ab oder zu, so dass ihr Abnehmen oder ihr Zunehmen mit fn anfängt und sich mit fn' endigt, so ist der sich über dieses Intervall erstreckende Theil von ξ , nämlich

$$(-1)^n \psi n + (-1)^{n+1} \psi(n+1) + \dots + (-1)^{n'-1} \psi(n'-1),$$

kleiner als die Summe aller seiner Glieder, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen genommen, und noch mehr klei-

ner als die Summe der, gleiches Zeichen besitzenden Grössen

$f(n - f(n + 1)), f(n + 1) - f(n + 2), \dots, f(n' - 1) - f(n'$,
oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als $f(n - f(n'$. Versteht man unter $m, m', \dots, m^{(i)}$ die Werthe von h , für welche jedes Abnehmen oder Zunehmen der Werthe von f h anfängt oder sich endigt, so ist daher ξ kleiner als die Summe der, mit gleichem Zeichen genommenen Grössen $f(0) - f(m), f(m) - f(m'), f(m') - f(m''), \dots, f(m^{(i)}) - f(l$. Da man aber nicht annehmen will, dass die Function φ stetig ist, so kann sie für m, m', \dots zwei Werthe haben, weshalb im Allgemeinen unter $f(m), f(m''), \dots$ in zwei aufeinanderfolgenden dieser Unter-schiede, verschiedene Werthe zu verstehen sind.

Die Grössen $f(0), f(m), f(m''), \dots, f(l$ haben die Nenner

$$k^2 \sin \frac{\pi}{2k}, k^2 \sin \left(\frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k^2} \right), \dots, k^2 \sin \frac{\pi - x}{2}.$$

Der erste derselben ist von der Ordnung von kk ; der letzte kann von derselben Ordnung sein, und ist es wirklich, wenn x entweder $= -\pi \left(1 - \frac{1}{k} \right)$, oder dieser Grenze so nahe ist, dass seine Entfernung von $-\pi$, obgleich sie grösser ist, als $\frac{\pi}{k}$, noch als eine Grösse derselben Ordnung angesehen werden kann; die übrigen sind im Allgemeinen von der Ordnung von k^2 und nie von einer niedrigeren als kk . ξ ist also kleiner als die angegebene Summe von $i + 1$ Grössen, deren keine die Ordnung von $\frac{1}{kk}$ überschreitet; welche Summe diese Ordnung gleichfalls nicht überschreitet, da die Anzahl ihrer Glieder ($i + 1$) von der Beschaffenheit der Function φ, x und von der Grösse von x abhängt, nicht aber durch Vergrösserung von k vermehrt wird, also als ein beliebig kleiner Theil von k angesehen werden kann. Die Grenze von ξ , und damit ξ selbst, wird also desto kleiner, je grösser k ist und verschwindet für $k = \infty$. Ich bemerke noch, dass die Betrachtung, woraus dieses hervorgegangen ist, nicht minder zu denselben Ziele führt, wenn im Ausdrücke von ξ , am Anfange des gegenwärtigen §s, unter dem Functionenzeichen φ statt x eine andere Grösse geschrieben wird.

Uebrigens verschwindet ξ völlig, wenn $x = \pi \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ angenommen wird, denn dann erreicht das bis $\frac{kk}{2} \pi$ ge-

oder

$$U = \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{u} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u \, du}{u} + \dots + \int_{(i-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin u \, du}{u} + \int_{k\pi}^{i\pi + x} \frac{\sin u \, du}{u}$$

$$U = \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{u} - \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{\pi + u} + \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{2\pi + u} - \dots + (-1)^i \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{k\pi + u},$$

nommene erste Integral des Ausdrucks (3) seine obere Grenze; derselbe Fall tritt für das zweite Integral dieses Ausdrucks ein, wenn $x = -\pi \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ ist.

4.

Indem hierdurch klar geworden ist, dass die oberen Grenzen der beiden Integrale des Ausdrucks (3), wenn k eine unendlich grosse Zahl bedeutet, mit $\frac{kk}{2} \pi$ verwechselt werden können, ist er auf

$$\pi \varphi, x = \int_0^{\frac{kk}{2} \pi} \left\{ \varphi \left(x + \frac{2u}{k} \right) + \varphi \left(x - \frac{2u}{k} \right) \right\} \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k}} \dots (6)$$

zurückgeführt worden. Diese Zurückführung ist so lange statthaft, als x die Grenzen $\mp \pi \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ nicht überschreitet, oder unendlich wenig von $\mp \pi$ entfernt bleibt.

Da selbst an der Grenze dieses Integrals $\frac{u}{k^2}$ unendlich klein $\left(= \frac{\pi}{k} \right)$ ist, so ist $\frac{k^2}{k^2} \sin \frac{u}{k^2}$ nur in der Ordnung von $\frac{1}{kk}$ von 1 verschieden und kann daher damit verwechselt werden, oder man kann den Ausdruck:

$$\pi \varphi, x = \int_0^{\frac{kk}{2} \pi} \left\{ \varphi \left(x + \frac{2u}{k} \right) + \varphi \left(x - \frac{2u}{k} \right) \right\} \frac{\sin u \, du}{u} \dots (7)$$

schreiben. Da die beiden, in diesem Ausdrücke vorkommenden Argumente der Function φ sich, selbst an der Grenze des Integrals, nur um die unendlich kleine Grösse $\frac{\pi}{k}$ von x entfernen, so geht daraus hervor, dass alle entfernter liegende Werthe derselben keinen Einfluss auf φ, x haben, und dass diese Grösse allein durch das Verhalten der Function φ in dem unendlich kleinen Zwischenraume zwischen $x - \frac{\pi}{k}$ und $x + \frac{\pi}{k}$ bestimmt wird.

Bezeichnet man durch U das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin u \, du}{u},$$

so ist dieses U für jeden positiven Werth von u positiv. Setzt man nämlich $h\pi + v$ für diesen Werth, wo v seinen Ueberschuss über das nächst-kleinere Vielfache bedeutet, so hat man

in welchem Ausdrucke jedes folgende seiner Glieder offenbar kleiner ist, als das vorhergehende, und, da ihr Zeichen abwechseln, die Summe aller positiv (wie das erste Glied) ist. Integriert man nun theilweise, so erhält man:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{u} = \frac{1}{2}\pi \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} U d\varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right)$$

Indem aber U positiv ist und die Function φ , in dem in Betracht kommenden unendlich kleinen Zwischenräume zwischen x und $x + \frac{\pi}{k}$, entweder nur wächst oder nur abnimmt, so hat das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral das Zeichen von $\varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \varphi x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{u} = \frac{1}{2}\pi \left\{ \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \alpha \left[\varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \varphi x \right] \right\}$$

welche Grösse offenbar zwischen $\frac{1}{2}\pi \varphi x$ und $\frac{1}{2}\pi \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right)$ liegt und durch $\frac{1}{2}\pi \varphi(x + \varepsilon)$ bezeichnet werden soll, wo also ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Das zweite Integral von (7) erhält eben so den Ausdruck $\frac{1}{2}\pi \varphi(x - \varepsilon)$. Man hat also:

$$\varphi_{\alpha} x = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x + \varepsilon) + \varphi(x - \varepsilon) \right\} \dots (8)$$

Dieses ist die Form, auf welche Herr DIRICHLET den Ausdruck der, hier durch $\varphi_{\alpha} x$ bezeichneten, Grenze der Reihe (2) gebracht hat. Sie ist geeignet, diese Grenze in allen Fällen anzugeben: indem man ihr desto näher kommt, je kleiner man ε annimmt, so folgt unmittelbar aus (8), dass im Allgemeinen $\varphi_{\alpha} x = \varphi x$ ist; für diejenigen besonderen Werthe von x aber, bei welchen die Stetigkeit der Function φ unterbrochen ist, und auf deren beiden Seiten sie verschiedenen Gesetzen folgt, ist die Grenze von $\varphi(x - \varepsilon)$ der dem einen Gesetze, die von $\varphi(x + \varepsilon)$ der dem anderen entsprechende Werth von φx ; $\varphi_{\alpha} x$ also die halbe Summe beider Werthe.

Oblig, streng genommen, die Reihe (2) selbst für die Werthe von x , für welche die eben erwähnten Unterbrechungen der Stetigkeit stattfinden, zu einer bestimmten, und zwar der angegebenen Grenze convergirt, so darf dieses jedoch nicht so verstanden werden, dass diese Grenze wirklich, z. B. durch Zahlenberechnung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k}}$$

ist und auch bemerkt, dass ebensowohl

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k}}$$

$\int \varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{u} = U \varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right) - \int U d\varphi\left(x + \frac{2u}{k}\right)$
und, wenn man sich erinnert, dass der Werth von U , für $u = \infty$, $= \frac{1}{2}\pi$ ist:

und ist kleiner als das Product dieser Grösse in den grössten Werth von $U (= \frac{1}{2}\pi)$, also kleiner als

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \varphi x \right\};$$

oder es ist das Product dieser Grösse, in einen eigentlichen, positiven Bruch α multiplicirt. Man hat also:

der Reihe (2), erreicht werden könnte. Denn da schon eine unendlich kleine Aenderung von x hinreicht, von dem Werthe von φx , welcher zu dem Gesetze der Function auf der einen Seite von x gehört, zu dem der anderen Seite entsprechenden zu führen, und da unendlich kleine Aenderungen in der Rechnung nicht unterschieden werden können, so muss diese den Werth der Reihe (2) in einem sehr kleinen Intervalle unbestimmt lassen.

5.

Um die Bedeutung der Reihe (2) vollständig kennen zu lernen, muss man noch die Grenze aufsuchen, welcher sie sich nähert, wenn x nicht etwa unendlich wenig grösser als $-\pi$, oder kleiner als π ist, sondern wenn es diese Grenzen selbst erreicht. Da sie die Periode 2π besitzt, so ist $\varphi_{\alpha} \pi = \varphi_{\alpha} (-\pi)$, sowie allgemein $\varphi_{\alpha} x = \varphi_{\alpha} (x \pm 2\pi) = \varphi_{\alpha} (x \pm 4\pi) = \dots$ u. s. w. Zu ihrer Kenntniss für alle Werthe von x ist daher nur noch nöthig, dass sie über eine volle Periode ausgedehnt werde, woran allein noch $\varphi_{\alpha} \pi$ oder $\varphi_{\alpha} (-\pi)$ fehlt.

Dem Ausdrucke (3) zufolge ist, wenn $x = -\pi$ gesetzt wird:

$$\pi \varphi_{\alpha} (-\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k}\right) \frac{\sin u \, du}{k^2 \sin \frac{u}{k}}, \dots (9)$$

Ich habe aber in §. 3. gezeigt, dass

angenommen werden kann. Vergleicht man dieses mit dem Ausdrucke (9), so wird er:

$$\pi \varphi_n(-\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\sin u du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\sin u du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}}$$

Schreibt man in dem letzten Integrale dieses Ausdruckes $u + k^2\pi$ für u , so verwandelt es sich in

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \varphi\left(\pi + \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\sin u du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}}$$

und setzt man darin u für $-u$, in:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\left(\pi - \frac{2u}{k^2}\right) \frac{\sin u du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}}$$

Man erhält also:

$$\pi \varphi_n(-\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^2}\right) + \varphi\left(\pi - \frac{2u}{k^2}\right) \right\} \frac{\sin u du}{k^2 \sin \frac{u}{k^2}}$$

woraus, wie im vorigen §, folgt:

$$\varphi_n(-\pi) = \frac{1}{2} [\varphi(-\pi + \varepsilon) + \varphi(\pi - \varepsilon)] = \varphi_n \pi \dots (10)$$

Hieraus geht hervor, dass die Reihe (2) für $x = \pi$ oder $-\pi$ sich der halben Summe von $\varphi\pi$ und $\varphi(-\pi)$ nähert. Sie stellt also die Function φx , von $x = -\pi$

bis $x = \pi$ inclusive dar, wenn diese Function für $x = \pi$ und $x = -\pi$ gleiche Werthe hat, wie z. B. der Fall der geraden, stetigen Functionen ist; wenn $\varphi\pi$ und $\varphi(-\pi)$ verschieden sind, so stellt sie die Functionen φx nur zwischen $x = -\pi$ und $x = \pi$ exclusive dar.

Das jetzt vollständig erkannte Verhalten der Reihe (2) zu der Function φx , aus welcher sie abgeleitet worden ist, lässt sich folgendermassen aussprechen:

1. die Reihe convergirt immer zu einer bestimmten Grenze;
2. diese Grenze ist im Allgemeinen φx selbst; wenn aber einem Werthe von x zwei Werthe der Function zukommen, die halbe Summe beider; und dieses gilt
3. in dem ganzen Umfange der Werthe von x , für welchen die Eigenschaft der Reihe, ihre Werthe in der Periode 2π wieder hervorzubringen, seine Gültigkeit nicht unmöglich macht.

122. Ein Hilfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.*)

(Astron. Nachr. 17, p. 225.)

Wenn die Werthe der unbekanntenen Grössen x, y, z, \dots , der Methode der kleinsten Quadrate genüssig, aus einer Reihe von Gleichungen:

$$n = a x + b y + c z + \dots$$

$$n' = a' x + b' y + c' z + \dots$$

$$n'' = a'' x + b'' y + c'' z + \dots$$

u. s. w.

bestimmt werden sollen, und wenn man auch die Summe der Quadrate der nach dieser Bestimmung übrigbleibenden Unterschiede zwischen n, n', n'', \dots und ihren Ausdrücken, kennen lernen will, so kommen dabei bekanntlich die Summen der Quadrate und Producte der Grössen $n, a, b, \dots; n', a', b', \dots; u. s. w.$ in Betracht; oder, nach der von GAUSS eingeführten Bezeichnung, die Grössen

$$\left. \begin{array}{l} (nn), (na), (aa), (ab), (ac) \dots \\ \quad (nb), (bb), (br) \dots \\ \quad \quad (nc), (cc) \dots \end{array} \right\} \dots \dots (\odot)$$

u. s. w.

Man muss also, wenn m unbekanntene Grössen zu bestimmen sind, $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Summen aufsuchen, jede von so vielen Gliedern, als Gleichungen vorhanden sind; so dass, wenn die Zahl der letzteren $= \mu$ ist, die Kenntniss von $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)(\mu+2)$ einzelnen Quadraten oder Producten und ihre Vereinigung in $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Summen nothwendig wird.

Es ist gebräuchlich geworden, diese Quadrate und Producte durch logarithmische Rechnung zu suchen. Wenn man die Grösse der Arbeit schätzen will, welche diese Art ihrer Aufsuchung verursacht, so muss man die beiden Fälle unterscheiden, in welchen entweder die Grössen $n, a, b, \dots; n', a', b', \dots; u. s. w.$ selbst, oder ihre Logarithmen, gegeben sind. In dem ersten

*) [336 d. a. Verz.]

Falle muss man zuerst ihre $\mu(m+1)$ Logarithmen aufsuchen und dann $\frac{1}{2}\mu(m+1)(m+2)$ Zahlen, welche theils den Verdoppelungen dieser Logarithmen, theils den Summen ihrer ungleichnamigen Paare entsprechen; man muss also die Logarithmentafeln im Ganzen $\frac{1}{2}\mu(m+1)(m+4)$ Mal anwenden. In dem zweiten Falle fällt der erste Theil der Arbeit weg und es bleibt nur die $\frac{1}{2}\mu(m+1)(m+2)$ -malige Anwendung der Logarithmentafeln übrig. Obgleich nun jede einzelne dieser Anwendungen wenig mühsam ist, so wird doch die gewöhnlich sehr grosse Zahl ihrer Wiederholungen lästig, und begründet den Wunsch, ein eine Erleichterung gewährendes Hilfsmittel für die Erfindung der Grössen (C) zu besitzen.

Da der erste Fall, in welchem $n, a, b, \dots; n', a', b', \dots;$ u. s. w. selbst gegeben sind, der gewöhnlichere ist, nach sich durch die leichtere Uebersicht empfiehlt, welche er gewährt, so ist zunächst zu wünschen, dass ein Mittel gefunden werde, wodurch die $\mu(m+1)$ Anwendungen der Tafeln erspart werden, welche der Uebergang von diesen gegebenen Grössen zu ihren Logarithmen erfordert. Man darf in der That nach einem solchen Mittel nicht lange suchen, denn es liegt, in der Tafel der Quadrate der Zahlen, am Tage. Man hat nämlich:

$$na = \frac{1}{2}[(n+a)^2 - nn - aa]$$

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - aa - bb]$$

u. s. w.

und offenbar auch:

$$(na) = \frac{1}{2}[(n+a)^2 - (nn) - (aa)]$$

$$(ab) = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - (aa) - (bb)] \dots \dots \textcircled{D}$$

u. s. w.

und kann also sämtliche Grössen (C) durch eine Tafel der Quadrate erhalten, indem man nicht allein

$$(nn) = nn + n'n' + n''n'' + \dots$$

$$(aa) = aa + a'a' + a''a'' + \dots$$

$$(bb) = bb + b'b' + b''b'' + \dots$$

u. s. w.

sondern auch

$$(n+a)^2 = n^2 + a^2 + n^2 + a^2 + n^2 + a^2 + \dots$$

$$(n+b)^2 = n^2 + b^2 + n^2 + b^2 + n^2 + b^2 + \dots$$

u. s. w.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + \dots$$

u. s. w.

aus den in ihr enthaltenen Quadraten zusammensetzt und von diesen Summen, durch die Formeln (D), zu (na) , (nb) , \dots (ab) , \dots übergeht. Auf diese Art erlangt

man die Kenntniss sämtlicher Grössen (C) durch $\frac{1}{2}\mu(m+1)(m+2)$ Anwendungen der Tafel der Quadrate.

Dieser Tafel kann aber eine Einrichtung gegeben werden, welche jede einzelne ihrer Anwendungen leichter macht, als eine der Logarithmentafeln; und zwar so viel leichter, dass ich ihr selbst in dem zweiten Falle, in welchem die Logarithmen von $n, a, b, \dots; n', a', b', \dots;$ u. s. w. gegeben sind und also der $\mu(m+1)$ -malige Uebergang von ihnen zu den Zahlen selbst nöthig wird, den Vorzug einzuräumen geneigt bin. Ich nehme an, dass die Tafel die Quadrate aller Tausendtel zwischen 0 und 2, und zwar in der 4. Decimalstelle richtig, enthalte. Dann fällt sie, so eng wie die Lalande'schen Logarithmentafeln geschrieben oder gedruckt, die beiden Seiten eines Blattes von $5\frac{1}{3}$ Zoll Breite und $9\frac{1}{2}$ Zoll Höhe, dessen Anwendungen beträchtlich erleichtert werden, wenn es aus steifem Papiere besteht. Der zu meinem Gebrauche geschriebenen Tafel dieser Art habe ich keine Unterschiede, aufeinanderfolgender Quadrate beigesetzt, indem ich sie für unnöthig halte; sie enthält alle Zahlen, ohne die sich wiederholenden auf eine höhere Zeile zu verweisen. Ich glaube im Allgemeinen, dass man, bei der Einrichtung von Tafeln, welche möglichst bequeme und sichere Anwendungen gewähren sollen, den Raum, welchen sie füllen, nicht aber die Zahlen, welche Platz darauf haben, sparen soll.

Wenn keine der Grössen n, a, b, \dots grösser ist als 1, so reicht diese Tafel offenbar zur Erfindung der Quadrate von $n+a, n+b, \dots, a+b, \dots$ hin; wenn die grössten Werthe sowohl von n , als auch von a , von b u. s. w. sich der 1 nähern, so sieht man leicht, dass die Grössen (C) durch diese Tafel ohngefähr eben so genau gefunden werden können, als man sie durch Logarithmen von 5 Decimalstellen (aus ebensovieleziffigen Tafeln genommen) finden kann. Wenn aber die erste Voraussetzung nicht streng erfüllt wird, also die Werthe einiger der Grössen n, a, b, \dots grösser sind als 1, und daher einige der Summen zweier von ihnen die Grenze der Tafel überschreiten können, so halte ich doch eine Erweiterung dieser Grenze für weniger bequem, als ein geändertes Ausschreiben des Quadrats der 2 überschreitenden Summe (= s) aus der bis 2 fortgesetzten Tafel; man hat nämlich

$$ss = 2s - 1 + (s-1)^2,$$

erlangt also das gesuchte Quadrat dadurch, dass man dem in der Tafel enthaltenen Quadrate von $s-1$ das doppelte und um 1 verminderte Argument hinzusetzt. Ich bin also der Meinung, dass man die Erfüllung der ersten Voraussetzung nicht ängstlich fordern soll. Für a, b, c, \dots kann sie übrigens jedesmal, durch eine ihr

angemessene Wahl der willkürlichen Einheiten, welche x, y, z, \dots zum Grunde liegen, erfüllt werden; für n , durch Division durch eine bestimmte Zahl. Die zweite Voraussetzung, welche den Zweck hat, die Genauigkeit der Tafel vollständig nutzbar zu machen, kann gleichfalls durch die ihr angemessene Wahl der Einheiten von x, y, z, \dots und eines Divisors und Factors von n erfüllt werden; allein auch auf ihre Erfüllung darf man nicht ängstlich halten, sondern man muss nur darauf sehen, dass die grössten Werthe der Grössen n , der Grössen a , der Grössen b , u. s. w. von einander und von 1 nicht sehr verschieden werden. Um dieses durch einen vorgekommenen Fall zu erläutern, nehme ich ein Beispiel von den 20 Gleichungen her, durch welche ich die Bahn des Olbers'schen Cometen bestimmt habe*). Die grössten Werthe von n, a, b, \dots in diesen Gleichungen sind 212, 26,0, 92, 11,0, 13,1, 16,5, 6,0. Die Werthe von n würde ich durch 20 dividiren; die Einheiten der unbekannt Grössen sind resp. = 0,005 Tag, $10''$, $10''$, $10''$, 0,0001, 0,0001 angenommen worden, würden aber, der mit 2 aufhörenden Tafel wegen, etwa resp. = 0,002, $1''$, $1''$, $1''$, 0,000005, 0,000005 anzunehmen sein. Nimmt man sie grösser oder kleiner, so vermehrt oder vermindert man dadurch die Anzahl der Ueberschreitungen der Grenze der Tafel, zugleich aber die Genauigkeit der Resultate ihrer Anwendung; allein man darf, wie ich schon gesagt habe, in der einen oder anderen Beziehung nicht ängstlich sein, und könnte z. B. ohne wesentlichen Nachtheil auch die beiden letzten Einheiten auf ein Zehntel ihrer anfänglichen Grösse setzen.

Als ein Vorzug der Anwendung der Tafel der Quadrate vor der der Logarithmen kann auch angesehen werden, dass die zu summirenden Grössen Quadrate sind, also sämmtlich gleiches Zeichen haben.

Wenn man zu den $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Columnen, aus deren Summen die Grössen (C) hervorgehen, noch eine Columne hinzusetzt, welche die Quadrate von $n+a+b+c+\dots$ enthält, so erhält man dadurch $(n+a+b+c+\dots)$; eine Grösse, deren Ausdruck durch die Grössen (C)

$$\begin{aligned} &= (nn) + (aa) + (bb) + (cc) + \dots \\ &\quad + 2(na) + 2(nb) + 2(nc) + \dots \\ &\quad \quad + 2(ab) + 2(ac) + \dots \\ &\quad \quad \quad + 2(bc) + \dots \end{aligned}$$

*) Abhandlungen der Berl. Akad. d. Wiss. f. 1812-13, p. 140 und 141.

ist. Indem man ihren unmittelbar gefundenen Werth mit dem Werthe vergleicht, wehnen sie durch die Substitution der Werthe von $(nn), (aa), (aa), \dots$ erhält, erlangt man eine Prüfung der Rechnung, welche die letzteren ergeben hat. Diese Prüfung erfahren die, aus den $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Summationen unmittelbar hervorgehenden Quadratsummen, wenn man die Vergleichung nach der Formel

$$\begin{aligned} &(\overline{n+a+b+c+\dots}) + (m-1)\{(nn) + (aa) + (bb) + (cc) + \dots\} \\ &= \overline{(n+a)} + \overline{(n+b)} + \overline{(n+c)} + \dots \\ &\quad + \overline{(a+b)} + \overline{(a+c)} + \dots \\ &\quad \quad + \overline{(b+c)} + \dots \end{aligned}$$

vornimmt. Wenn die Zahl der Glieder dieser Summen gross ist, so ist es zweckmässig, die Bestätigung kleinerer Abtheilungen derselben, z. B. immer von 10, zu suchen. Man vermindert dadurch die Gefahr, dass zwei Fehler von gleicher, aber entgegengesetzter Grösse sich der Entdeckung durch die Controle entziehen, und gelangt auch dadurch zur näheren Kenntniss des Orts, wo ein Fehler vorhanden ist. Gewöhnlich wird aber $n+a+b+c+\dots = s$ grösser als 2 sein, das Quadrat davon also nicht unmittelbar aus der Tafel genommen werden können. Will man es dann nicht aus einer der Formeln

$$\begin{aligned} ss &= 2s - 1 + (s-1)^2 \\ &= 4s - 4 + (s-2)^2 \\ &= 6s - 9 + (s-3)^2 \\ &= 8s - 16 + (s-4)^2 \end{aligned}$$

u. s. w.

ableiten, also nicht dadurch, dass man einen in der Tafel enthaltenen Quadrate ein um eine ganze Zahl vermindertes Vielfaches von s hinzusetzt, so muss man, statt des einen Blattes der Tafel, mehrere Blätter nehmen, deren Zahlen aus denen des erstes Blattes mit kaum grösserer Mühe, als der des Schreibens, abgeleitet werden können. Die Wahl zwischen diesen beiden Mitteln wird von der Fertigkeit abhängen, welche der Rechner sich angewöhnt hat. Einzelne der Grössen (C) kann man stets durch eine neue Columnen prüfen, z. B. (na) durch $(\overline{n-a})$, wodurch zugleich die Summe $(nn) + (aa)$ eine Prüfung erfährt. Auch können mehrere zusammen genommen unabhängig von den übrigen geprüft werden, z. B. $(na) + (nb) + (ab)$ durch $(\overline{n+a+b})$, u. s. w.

123. Neue Formeln von Jacobi, für einen Fall der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.*

(Astron. Nachr. 17, p. 305.)

Wenn drei unbekannt Grössen vorhanden, also die Gleichungen $(an) = (a\alpha)x + (ab)y + (ac)z$
 $(bn) = (a'b)x + (b'b)y + (b'c)z$
 $(cn) = (a'c)x + (b'c)y + (c'c)z$

aufzulösen, und auch die Gewichte X, Y, Z der daraus hervorgehenden Werthe von x, y, z zu bestimmen sind, so kann dieses nach folgenden Formeln geschehen:

$$r = \pm \sqrt{\pm (bc)(ac)(ab)}; \quad \alpha = \frac{r}{(bc)}, \quad \beta = \frac{r}{(ac)}, \quad \gamma = \frac{r}{(ab)}$$

$$A = (aa) \mp \alpha\alpha, \quad B = (bb) \mp \beta\beta, \quad C = (cc) \mp \gamma\gamma$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{A}, \quad \beta' = \frac{\beta}{B}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{C}$$

$$R = 1 \pm (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'); \quad a = \frac{(an)}{R}, \quad b = \frac{(bn)}{R}, \quad c = \frac{(cn)}{R}$$

$$\rho = \alpha'a + \beta'b + \gamma'c; \quad x = \frac{(an) \mp \alpha'\rho}{A}, \quad y = \frac{(bn) \mp \beta'\rho}{B}, \quad z = \frac{(cn) \mp \gamma'\rho}{C}$$

$$X = \frac{RA}{R \mp \alpha\alpha'}, \quad Y = \frac{RB}{R \mp \beta\beta'}, \quad Z = \frac{RC}{R \mp \gamma\gamma'}$$

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler kann nach der bekannten Formel

$$(nn_2) = (nn) - (an)x - (bn)y - (cn)z$$

berechnet werden, welche auch mit

$$(nn_2) = (nn) - \frac{(an)^2}{A} - \frac{(bn)^2}{B} - \frac{(cn)^2}{C} \pm \frac{\rho\rho}{R}$$

übereinstimmen muss. In allen diesen Formeln gilt entweder das obere oder das untere Zeichen, ersteres wenn $(bc)(ac)(ab)$ positiv, letzteres wenn dieses Product negativ ist.

Diese Formeln führen zu den Werthen von x, y, z und X, Y, Z durch eine Rechnung, die etwa so viele Arbeit kostet, als die Anwendung der bekannten, von GAUSS in den allgemeinen Gebrauch gebrachten Formeln,

$$(an) = + 11,5785 \quad (aa) = 186,6383$$

$$(bn) = - 3,0276 \quad (bb) = 26,2794$$

$$(cn) = + 24,4975 \quad (cc) = 69,7767$$

deren Gang aber gänzlich verschieden von dem Gange ist, welchen diese vorschreiben; sie haben die Eigenthümlichkeit, alle drei unbekannt Grössen und die Gewichte ihrer Bestimmung durch ein ganz symmetrisches Verfahren zu ergeben. Sie erscheinen so merkwürdig, dass ich von meinem verehrten Freunde, Herrn Professor JACOBI, die Erlaubniss erbeten habe, sie den Lesern der Astr. Nachr. mittheilen zu dürfen.

Ich setze diesen Formeln noch ein Beispiel ihrer Anwendung hinzu, welches ich aus § 4 der Abhandlung in Nr. 401 dieses Journals entlehne. Nachdem aus den, durch die Beobachtungen des Sterns α gegebenen Gleichungen die erste der vier unbekannt Grössen eliminiert worden ist, erhält man nämlich (in den jetzigen Bezeichnungen ausgedrückt):

$$(ab) = - 7,7760 \quad (ac) = + 28,4660$$

$$(bc) = + 3,9000$$

Die Ueberschriften $l(bc)$, $l\alpha$, (aa) , u. s. w., welche ich den verschiedenen Columnen der folgenden Rechnung gegeben habe, sollen andeuten, dass diese Grössen auf

ihrer ersten Zeile stehen, während die analogen sich auf den beiden folgenden Zeilen befinden.

	$l(bc)$	$l\alpha$	(aa)	$(\alpha\alpha)$	A	lA	$l\alpha'$	$\alpha\alpha'$	$l(\alpha n)$
	0,51851	0,91329 n	186,6383	67,0783	253,7166	2,40435	8,50894 n	0,26458	1,06365
	1,45433	9,97747 n	26,2794	0,9014	27,1808	1,43426	8,54321 n	0,03317	0,48110 n
	0,89076 n	0,54104	69,7767	12,0803	81,8570	1,91306	8,62798	0,14758	1,38912
Summe	2,86360 n						Summe	0,44513	
$l r$	1,43180 n						R	0,55487	
							$l R$	9,74419	

* [541 d. n. Verz.]

Bessel's Abhandlungen 2 Bd.

ln	$\alpha'a$	(an) A	$\alpha'q$	x	$l(R \mp \alpha\alpha')$	$l \frac{R}{R \mp \alpha\alpha'}$	X
1,31946	- 0,67360	+ 0,04564	- 0,04492	+ 0,00072	9,91342	9,83077	171,84
0,73691 n	+ 0,19060	- 0,11139	- 0,04861	- 0,16000	9,76941	9,97478	25,65
1,64493	+ 1,87461	+ 0,29927	+ 0,06909	+ 0,35836	9,84662	9,89757	64,66
q	+ 1,99161						
lq	+ 0,14352						

Um x, y, z und X, Y, Z zu erhalten, hat man hier 32 mal von den Zahlen zu den Logarithmen, oder umgekehrt übergehen müssen. Die Gaussische Auflösung ergibt x, y, z durch 23 solche Uebergänge und X, Y, Z durch noch 12*). Beide Abzählungen setzen die ge-

wöhnlichen Logarithmentafeln als einziges Hilfsmittel voraus, würden aber etwas verschieden ausfallen, wenn man den Besitz noch anderer Hilfsmittel annehmen wollte. Uebrigens ist nicht meine Meinung, dass die Arbeit, welche eine Rechnung kostet, der Anzahl der Uebergänge von den Zahlen zu den Logarithmen, oder umgekehrt, genau proportional wäre.

*) GAUSS Theoria combin. observ. § 32.

124. Ueber neue Logarithmentafeln von Shortrede.*)

(Astron. Nachr. 23, p. 1.)

Ich habe in diesen Tagen neue Logarithmentafeln erhalten, für deren Zusendung ich ihrem Verfasser, dem Capitan in Diensten der Ostindischen Compagnie, Herrn SHORTRUDE, verpflichtet bin. Die Grösse des Formats, die Deutlichkeit der Zahlen, die Beschaffenheit des Papiers u. s. w. scheinen mir zusammenzuwirken, um diesen Tafeln den ersten Rang unter denen zu geben, welche die trigonometrischen Linien von Secunde zu Secunde, bis auf 7 Decimalstellen enthalten. Auch glaube ich, dass die beiden ersten Tafeln, deren eine, wie gewöhnlich, die den Zahlen zugehörigen Logarithmen, die andere die den Logarithmen zugehörigen Zahlen ergibt, nichts Erhebliches mehr wünschen lässt. Was diese beiden Tafeln Denen sehr angenehm machen wird, die die Genauigkeit ihrer Rechnungen so weit treiben wollen, als Tafeln von 7 Decimalstellen erlauben — nämlich durch Berücksichtigung der 8. Stelle im Proportionaltheile — ist, dass sie alle Vielfachen von 1 bis 9 aller auf einer Seite vorkommenden Differenzen, am Fusse derselben angeben. Die Callet'schen Tafeln vernachlässigen bekanntlich die letzte Decimalstelle dieser Vielfachen, sowie sie auch häufig die Vielfachen vorkommender Differenzen entweder gar nicht, oder nicht auf der Seite auf welcher diese sich finden, enthalten. Die Einrichtung der Shortrede'schen Tafeln erleichtert daher die sorgfältigste Aufsuchung des Proportionaltheils so viel als möglich.

Man kann den Proportionaltheil nach zwei Methoden berechnen: wenn die Tafel die, zwei aufeinanderfolgenden Argumenten a und $a + 1$ zugehörigen Werthe b und b' enthält, kann der, einem Argumente $a + u$ zugehörige Werth sowohl nach der Formel $b + (b' - b)u$, als auch nach der Formel $b + \beta u$ berechnet werden, wo β den wahren Werth der Differenz bedeutet, an welchen $b' - b$ die der Decimalenordnung der Tafel angemessene Annäherung ist. Man bemerkt leicht, dass die erste Methode die vortheilhaftere ist, aber ich erimere mich nicht, dass der wahrscheinliche Fehler ihres Resultats methodisch untersucht worden wäre. Dieses ist sehr leicht, wenn man die Formeln zum Grunde legt, welche ich Astr. Nachr. 358 am Anfange d. S. 381 [Abh. 119, p. 378] gegeben habe. Dort habe ich nämlich gezeigt, dass zwei zusammenwirkende Fehlerursachen, deren eine jedem Fehler innerhalb der Grenzen $\mp a$, die andere jedem innerhalb der Grenzen $\mp b$ ($a > b$) gleiche Wahrscheinlichkeit gibt, einen Fehler n hervorbringen, dessen Wahrscheinlichkeit

$$\text{wenn } n \text{ zwisch. } -a - b \text{ u. } -a + b \text{ liegt... } \psi n = \frac{n+a+b}{4ab}$$

$$-a + b \text{ u. } a - b \text{ } \psi n = \frac{2b}{4ab}$$

$$a - b \text{ u. } a + b \text{ } \psi n = \frac{-n+a+b}{4ab}$$

ist. In dem gegenwärtigen Falle der Formel $b + (b' - b)u = b(1 - u) + b'u$ haben b und b' die Fehlergrenzen $\mp \frac{1}{2}$ (Einheit der letzten Decimale), weshalb das obige a (unter der Voraussetzung $1 - u > u$, oder $u < \frac{1}{2}$) = $\frac{1}{2}(1 - u)$,

*) [376 d. a. Verz. — Aus einem Schreiben an SCHUMACHER vom 23. Januar 1845.]

das obige $b = \frac{1}{2}u$ ist und die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers n ,

wenn n zwisch. $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}(1-2u)$ liegt. $\psi n = \frac{n + \frac{1}{2}}{u(1-u)}$

$-\frac{1}{2}(1-2u)$ und $\frac{1}{2}(1-2u)$ $\psi n = \frac{n}{u(1-u)}$

$\frac{1}{2}(1-2u)$ und $\frac{1}{2}$ $\psi n = \frac{-n + \frac{1}{2}}{u(1-u)}$

wird. Indem der wahrscheinliche Fehler der Werth von n ist, welcher

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi n dn = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \psi n dn = \int_0^{\frac{1}{2}} \psi n dn = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi n dn = \frac{1}{2}$$

wenn u zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{u dn}{u(1-u)}$, also $n = \pm \frac{1-u}{4}$

$\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(n + \frac{1}{2}) dn}{u(1-u)}$, also $n = \pm \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2u(1-u)})$

$\frac{3}{4}$ und 1 $\frac{1}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-u) dn}{u(1-u)}$, also $n = \pm \frac{u}{4}$.

Man erhält also das Resultat der ersten Methode mit folgenden wahrscheinlichen Fehlern:

- wenn $u = 0$ und 1 $\pm 0,250$
- $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ $\pm 0,208$
- $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ $\pm 0,167$
- $\frac{1}{4}$ $\pm 0,146$

während die zweite Methode, für jeden Werth u , den wahrscheinlichen Fehler $\pm 0,25$ hat. Diese Methode ist also weniger vortheilhaft als jene; wogegen sie jedoch vortheilhafter werden würde, wenn man den Proportionaltheil nicht entweder b oder b' , sondern dem arithmetischen Mittel beider hinzusetzen wollte.

Herrn SHOROTREDE's beide erste Tafeln unterstützen die Genauigkeit ihrer Anwendungen so weit als möglich ist, indem sie das Mittel enthalten, den Proportionaltheil, der ersten Methode gemäss, leicht und vollständig zu finden. Die dritte — trigonometrische — Tafel entbehrt dieses Mittels, sowohl wie die Tafeln von TAYLOR und BAGAY seiner auch entbehren. Allein sie würde, ohne Vergrößerung des Formats, die Vielfachen von 1 bis 9 aller auf einer Seite vorkommenden Differenzen, in derselben Art wie die beiden ersten Tafeln, enthalten können (mit Ausnahme des Anfanges des Quadranten), wenn die Sinus und Cosinus auf die linken Seiten, die Tangenten und Cotangenten auf die rechten Seiten des Buches gebracht würden, und wenn die vierfache Gradirung (für die vier Quadranten des Kreises) durch die gewöhnliche für den ersten Quadranten ersetzt

macht und indem

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}(1-2u)} \frac{n + \frac{1}{2}}{u(1-u)} dn = \frac{n}{2(1-u)}$$

ist, ist für den Werth von u , welcher diesen Ausdruck $= \frac{1}{2}$ macht, $\frac{1}{2}(1-2u)$ der wahrscheinliche Fehler; oder dieser ist $= \pm \frac{1}{4}$ für $u = \frac{1}{2}$. Für $u < \frac{1}{2}$ wird der wahrscheinliche Fehler $< \frac{1}{4}(1-2u)$, für $u > \frac{1}{2}$ $< \frac{1}{4}$ wird er $> \frac{1}{4}(1-2u)$. Hieraus folgt man leicht die Gleichungen, welche den wahrscheinlichen Werth von n in allen Fällen bestimmen:

würde; welche beide Aenderungen mir nicht nachtheilig erscheinen würden.

Da das astronomische Rechnen in neuerer Zeit häufig mit grösster Sorgfalt ausgeführt worden ist, so scheint die Annahme Grund gewonnen zu haben, dass die dasselbe möglichst erleichternde Einrichtung der Tafeln nicht mehr verborgen geblieben sein kann. Ich würde bei Herrn SHOROTREDE's beiden ersten Tafeln nichts mehr zu wünschen wissen, und auch die trigonometrische Tafel würde meinen Wünschen ganz entsprechen, wenn sie die schon angedeuteten Aenderungen erführe. In diesem Falle würde ich also glauben, in Herrn SHOROTREDE's schönem Werke definitive Logarithmentafeln zu besitzen, solche, an welchen die spätere Zeit nichts mehr vortheilhaft zu ändern finden würde. Herr SHOROTREDE hat weder Sorgfalt noch Geld gespart, um seinen Tafeln wesentliche Vorzüge vor schon vorhandenen zu geben; von beiden würde er neuen Aufwand machen müssen, wenn er den Wünschen entsprechen wollte, die ich Ihnen geäußert habe; aber dieser Aufwand würde für ihn weniger gross sein, als für jeden Anderen, indem er Vieles von der schon gemachten Arbeit würde benutzen können. Jedenfalls scheint mir die Hoffnung, definitive Logarithmentafeln hervorbringen zu können, nicht unbedeutender Anstrengung werth zu sein. So wie Herrn SHOROTREDE's Tafeln jetzt sind, würden sie mir viele Rechnungen leichter gemacht haben, als sie bei der Anwendung anderer Tafeln geworden sind.

Dass in solchen, die spätesten Zeiten wie die gegenwärtige Zeit beabsichtigenden Tafeln nichts enthalten sein müsste, was nicht allgemein und rein-mathematisch ist, halte ich für unzweifelhaft. Die Eintheilung des Kreises in 24 Stunden u. s. w. müsste, meiner Meinung nach, auch wegbleiben. Hält man sie für die Seefahrt, oder für andere besondere Zwecke, für nützlich, so mag man dem in Zeitstunden eingetheilten Kreise, so wie allen anderen nautischen oder astronomischen Tafeln, einen besonderen Band widmen.

[Literatur der Astron. Nachr. über Geometrie, Trigonometrie etc.: GAUSS, Auflösung der Pothotschen Aufgabe (Bd. 1), GAUSS, CLAUSSEN, Auflösung einer Aufgabe von MÖBIUS (2), MÖBIUS, über diese Auflösungen (3); GERLING, Aufl. der Pothotschen Aufgabe (3); HORSER, Lage des Schwerpunktes in einem Viereck (5); MOTT, Relationen im sphäris. Dreieck (6); CLAUSSEN, geom. Auflösung einer Aufg. von HANSEN (18), Construction des 17-Ecks der Lemniscate, geom. Construct. einer astr. Aufg., über einen Satz von MÖBIUS, zur Theorie der dreieit. Pyramide (19), Beweis eines GAUSS'schen Theor. d. Trigonomet. (20), geom. Theorem (21); ASKER, über eine Ellipse kleinsten Inhalts (26), zur Theorie der Perspective (31, 38); D'ARREST, 2 Formeln der sphäris. Trigonomet. Curve der sphäris. Astron. (33), Eigensch. der loxodr. Linie (36), Bemerkung über die Lemniscate (37), neue Erzeugungsweise der Cassini'schen Planetenbahnen (38); GRUNERT, stereogr. Project. eines Ellipsoids (40); D'ARREST, Linien gleicher Reflexion in AR., BERNHARDT, über Karten-Projection (41); RECHLEIT, MEXTRAL, Aufl. einer practisch-geom. Aufgabe (42); ANDRAE, Fehlerbestimmung bei der Aufl. der Pothotschen Aufgabe (47); GRUNERT, über Vergleichung gewisser sphärischer mit ebenen Dreiecken (52); THIELE, über eine Formel in BERNHARDT's Aufsatz über Karten-Project. (55); SCHROEDER v. D. KOLK, Theorem über Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit in der Ellipse und Fall (60); SEABLE, über die Pothotsche Aufg. (71). — Algebra, Analysis etc.: MOLLWEIDE, über HANSEN's Interpol.-Formel (2); POSELLI, Auflösung der Gleichungen 3. Grades (3); MOTT, Integration von $(1 + \alpha \cos \varphi)^2 \cdot d\varphi$ (4); NICOLAI, Integration von $\frac{x^n \cdot dx}{(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n)^m}$, allgem. Gesetz für d. endlichen

Ausdruck gewisser Integr. (5), directe Herleitung der Reihe für X der Theor. mot. p. 96 (6); JACOBI, über die ellipt. Transcendenten (6); ABEL, solut. d'un probl. concern. la transform. des fonct. ellipt. (6, 7); NEUMANN, neue Eigensch. einer Laplace'schen Function (15); CLAUSSEN, zur Theorie der algebr. Gleichungen, über die Bernoulli'schen Zahlen (17), Beweis eines hydrodynam. Theor. von JACOBI (18), über ein Integr. in LAGRANGE's Traité des fonct. ellipt., zur Theorie der ellipt. Transcend., Kettenbruchentwicklung der Wurzel einer cubischen Gleichung (19), Richtigstellung eines Jacobischen Theor., Beweis des Lagrange'schen Theor., über JACOBI's Auflösung des Probl. d. 3 Körper (mit Bemerkungen von JACOBI) (20); JACOBI, über einige Curven-Theor. (20); CLAUSSEN (STERS), ein analyt. Theor., de linear. tertii ordin. propriet., Beweis eines GAUSS'schen Satzes der Attract.-Theorie, über ein Combin.-Theor. (21), π auf 250 Decimalen berechnet, 2 Theoreme über Flächen 2. Grades (25); ASKER, Berechnung von $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin \varphi} \cdot d\varphi$; JACOBI, über die Theorie der ellipt. Coordin. und LAPLACE's Methode zur Bestimmung der Functionen gerader Zahlen (28); ABEL, Entwicklung einer Interpolat.-Methode (47); RECHLEIT, zur Theorie der Maxima und Minima (48); HOFF, Ableitung der Hansen'schen Formeln der Transform. der Coordin. (57); GYLDEN, Entwicklung von $\cos \mu \vartheta$ und $\sin \mu \vartheta$ nach ganzen Vielfachen von ϑ , WOLFFEN, über ein Lagrange'sches Reihenproblem (69); KNÖGER, Coeff. einer period. Function aus gegebenen Mittelwerthen (82); JORDAN, Entwicklung abgekürzter converg. Potenzreihen (85). — Wahrscheinlichkeitsrechnung: GAUSS, Wahrscheinlichkeitsaufgabe der practischen Geometrie (1); HANSEN, Gewichtsbestimmung in der Meth. d. kl. Qu. (8), allgem. Aufgabe der Wahrsch.-Rechnung (16); ANGLANDER, besonderer Fall in der Meth. d. kl. Qu. (21); JACOBI, Auflösungssatz der in der Meth. d. kl. Qu. vorkommenden linearen Gleichungen (22); D'ARREST, Beitrag zur Meth. d. kl. Qu. (41); PETERS, w. F. einer Beob. aus Abweichungen vom arithmetischen Mittel (44); D'ARREST, Gewichtsrechnung bei 3 und 4 Unbekannten (47); BUCKNOW, symmetr. Ausdrücke für die Gewichte (67); JORDAN, ANDRAE, über Bestimmung des w. F. (74); JORDAN, zur Bestimmung des m. F. durch Wiederholung der Beob. (79); ZACHARIAS, zur Bestimmung des m. F. (80); SEIDEL, wahrscheinlichste Werte von Unbekannten, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen (84); HILMERT, über die Formeln für den Durchschnitfehler (85). — Zu Abh. 106–108 vgl. auch die Bemerkungen von BEZOLDINGER in Mon. Cortesep. XXVIII, p. 373.]

Berichtigungen.

pag. Spalte Zeile

- 93 2 20 v. o. statt: $\log \sqrt{\frac{m}{\delta}}$ ist zu lesen: $\log \sqrt{\frac{x}{m}}$
 119 „ „ in dem mit v' multiplicirten Ausdruck ist: } zu ergänzen.
 „ „ 17 v. u. in dem mit $(r-r')$ multiplicirten Ausdruck ist: } zu ergänzen.
 127 „ 3 v. o. statt: $-\frac{u}{r} \cos \delta (\mathcal{J}T' - \mathcal{J}T)$ ist zu lesen:
 $-\frac{u}{r} - \cos \delta (\mathcal{J}T' - \mathcal{J}T)$

pag. Spalte Zeile

- 190 1 2 v. o. statt: $\dots - \cos \left\{ \frac{1}{2} (\theta - \varepsilon) \right\}$ [ist zu lesen:
 $\dots - \cos \left\{ \frac{1}{2} (\theta - \varepsilon) \right\}$]
 205 Columnentitel statt: ... Parallaxen von α Herc. ist zu lesen:
 ... Parallaxe...
 206 1 7 v. u. statt $\log \left\{ \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} + \beta e^{\alpha \sqrt{-1}}}{e^{-\alpha \sqrt{-1}} + \beta e^{-\alpha \sqrt{-1}}} \right\}$ ist zu lesen:
 $\log \left\{ \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} + \beta e^{\alpha \sqrt{-1}}}{e^{-\alpha \sqrt{-1}} + \beta e^{-\alpha \sqrt{-1}}} \right\}$



3 2044 051 125 649

DEC 29 1884

Indiana 6/7/33

~~JUL 14 1891~~
~~JUL 17 1891~~

WIDENER
FED DEC 10 2000
BOOK DUE

WIDENER
SEP 10 2000
BOOK DUE
CANCELLED



