



THEORIA
MOTUS CORPORUM
COELESTIUM

IN

SECTIONIBUS CONICIS SOLEM AMBIENTUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.



THEORIE
DER
BEWEGUNG DER HIMMELSKÖRPER

WELCHE

IN KEGELSCHNITTEN DIE SONNE UMLAUFEN.

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS.

INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN

VON

CARL HAASE

KÖNIGLICH HANNOVERSCHEM KRIEGSRATH, MITGLIEDER DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT.

MIT EINEM ANHANGE,

sowie mit einer photographischen Abbildung der von Sr. Majestät dem Könige Georg V. von Hannover gestifteten Gauss-Medaille, einer Abbildung des Gauss'schen Geburtshauses in Braunschweig und dem Facsimile der Gauss'schen lateinischen und deutschen Handschrift.

HANNOVER.

CARL MEYER.

1865.

6

184. h. 2.



Druck von Wih. Riemschneider in Hannover.

Vorwort des Uebersetzers.

Die im Anfange unseres Jahrhunderts von Gauss in der: „**Theoria motus corporum coelestium**“ für die Rechnungen der theoretischen Astronomie gegebenen Vorschriften gelten noch jetzt, mehr als funfzig Jahre nach dem Erscheinen derselben, als Norm.

Dies Werk, von dem es feststeht, dass es Gauss ursprünglich in deutscher Sprache geschrieben hat, ist seit längerer Zeit im Buchhandel vergriffen, und selbst beim Antiquar kostbar und selten.

Erst nach länger als 20 Jahren ist eine neue Ausgabe desselben als letzter Theil der Gauss'schen Gesamtwerke zu erwarten, deren Herausgabe von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranstaltet ist. Aber auch dann wird dasselbe wiederum in lateinischer Sprache erscheinen.

Das Studium des Lateinischen wird jetzt vielleicht weniger allgemein so gründlich betrieben, wie ehemals. Dagegen hat entschieden die Zahl derer, die mit den exacten Wissenschaften sich beschäftigen, gegen früher in erfreulicher Weise sich gemehrt und auch die deutsche Sprache wird gegenwärtig im Auslande allgemeiner und eifriger erlernt.

Aber nicht nur für den Astronomen und Physiker hat die Gauss'sche Arbeit ein Interesse, sondern schon wegen der darin vorkommenden Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ihr eine weit grössere Attractionssphäre gesichert.

Eine deutsche Uebersetzung des klassischen Werkes wird daher unter diesen Verhältnissen mindestens ebenso gerechtfertigt erscheinen, als die vor einigen Jahren in Nordamerika herausgekommene englische Uebersetzung, sowie die Uebersetzungen in die russische und französische Sprache.

Es sind in der gegenwärtigen deutschen Uebersetzung die Gauss'schen Bezeichnungen und Symbole in aller Strenge beibehalten, und es ist stets so viel als möglich Alles wörtlich übertragen. Daneben ist auf Erzielung von Correctheit in Zahlen und Formeln die grösste Sorgfalt verwendet. Das dem Originale beigefügte Druckfehlerverzeichnis enthält nur sehr wenige desfallsige Angaben. Aber auch Dasjenige, was später hierüber in „v. Zach's Monatlicher Correspondenz“, sowie in „Gould's Astronomical Journal“ und in anderen Schriften veröffentlicht ist, kann weder Anspruch auf Vollständigkeit machen, noch ist es selbst in allen Punkten correct.

Ein Verzeichniss derjenigen Druckfehler des lateinischen Originals, welche in letzterem nicht bereits angegeben sind und welche bei der gegenwärtigen Uebersetzung Berücksichtigung gefunden haben, ist aus dem doppelten Grunde beigelegt, weil zunächst die Uebersetzung eines so klassischen Werkes unseres Erachtens die Verpflichtung hat, anzuführen, wo sie vom Originale abweicht und weil man ferner glaubte, den Besitzern jener Ausgabe dadurch hin und wieder einen Dienst zu erweisen.

Um das Auffinden der zahlreichen (nicht nach Artikeln, sondern nach der Seitenzahl gegebenen) Citate aus der „Theoria motus“ zu erleichtern, die in anderen astronomischen und mathematischen Werken sich befinden, sind die Seitenzahlen des Originals am Rande der Uebersetzung hinzugefügt.

In einem Anhange sind zunächst diejenigen Abhandlungen von Gauss zusammengestellt, auf die er in dem Hauptwerke als bereits früher von ihm veröffentlichte hinweist; sodann seine Umgestaltung der Olbers'schen Formeln zur Berechnung der parabolischen Bahn mit den übrigen hierauf sich beziehenden Rechnungsvorschriften und eine dem Gauss'schen Nachlasse entnommene, von Klinkerfues mitgetheilte, Reihenentwicklung für das Verhältniss des parabolischen Sectors zum Dreieck.

Die ausserdem noch hinzugefügten Tafeln bezwecken im Wesentlichen nur, die Annehmbarkeit für den practischen Rechner zu erhöhen.

Es sind hauptsächlich folgende:

1) Die von Gauss empfohlene, an Stelle der Barker'schen Tafel zu benutzende Burkhardt'sche Tafel in der Umgestaltung, wie solche in dem ersten Bande der Annalen der Kaiserlichen Sternwarte zu Paris gegeben ist.

2) Die Marth'schen Tafeln, nebst Abhandlung zur Bestimmung der Ortscoordinaten in einer Ellipse von starker Excentricität.

3) Die Klinkerfues'sche Tafel für die Auflösung der Lambert'schen Gleichung und das Verhältniss des Dreiecks zum parabolischen Sector, nebst der dazu gehörenden Abhandlung.

4) Die Encke'sche Tafel zur Auflösung der Gleichung IV im Artikel 141 der Theoria motus corporum coelestium.

Die Originale der beiden Briefe von Gauss an Schumacher, wovon Auszüge zur Anfertigung der Facsimiles der Gauss'schen Handschrift gewählt sind, wurden zu diesem Zwecke durch die Güte des Herrn Professors C. A. F. Peters in Altona zur Verfügung gestellt.

Hannover, im April 1865.

D. Ü.

Inhalt.

	Seite
Vorrede	IX—XVI
Erstes Buch. Allgemeine Relationen unter den Grössen, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmt werden.	
Erster Abschnitt. Relationen, die einen einzelnen Ort in der Bahn betreffen	1
Zweiter Abschnitt. Relationen, die einen einzelnen Ort im Raume betreffen	55
Dritter Abschnitt. Relationen zwischen mehreren Orten in der Bahn	100
Vierter Abschnitt. Relationen zwischen mehreren Orten im Raume	152
Zweites Buch. Erforschung der Bahnen der Himmelskörper aus geocentrischen Beobachtungen.	
Erster Abschnitt. Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen	160
Zweiter Abschnitt. Bestimmung der Bahn aus vier Beobachtungen, wovon nur zwei vollständig sind	235
Dritter Abschnitt. Bestimmung einer Bahn, die den Beobachtungen so viele man ihrer hat, sich möglichst genau anschliesst	250
Vierter Abschnitt. Ueber die Bestimmung der Bahnen mit Rücksicht auf Störungen	276
Figurentafel.	
Druckfehler-Verzeichniss der lateinischen Ausgabe	A—F
Tafel I, II, III	1—20
Anhang	21—75
Fehler-Verzeichniss der deutschen Uebersetzung.	

Anmerkung. Die am Rande des Textes in Klammern beigefügten Ziffern bezeichnen die Seitenzahlen der lateinischen Ausgabe, die hier deshalb hinzugefügt sind, um die Auffindung von Citaten aus der *Theoria motus* in anderen Werken zu erleichtern.

Inhaltsverzeichniss des Anhangs.

	Seite
Schreiben des Herrn Hofraths Gauss, Directors der Göttinger Sternwarte an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten. Göttingen 1843, April 1.	21
Tafel aus dem ersten Bande der Pariser Annalen	22
Schreiben des Herrn Marth, Observators an der Sternwarte zu Durham, an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten (Nr. 1016) nebst Tafeln	28
Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstände von der Erde abzuleiten: des Himmelskörpers heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne und wahren Abstand von der Erde. Von Dr. Gauss in Braunschweig	42
Zusatz von Gauss zu Art. 90 und 100 der Theoria motus corporum coelestium	45
Auszug aus v. Zach's Monatlicher Correspondenz, Band 28	46
Tafel zur Auflösung der Lambert'schen Gleichung	52
Einige Bemerkungen zur Vereinfachung der Rechnung für die geocentrischen Orte der Planeten von Dr. Gauss in Braunschweig	53
Auszug aus einer Abhandlung des Herrn Professors Klinkerfues über Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen (aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pag. 196 bis 205). Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei Beobachtungen, von denen eine unvollständig ist. Mit Tafeln	59
Ueber den Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung aus denselben drei vollständigen Beobachtungen, nebst Tafeln zur Auflösung der Gleichung IV in Artikel 141 der Theoria motus corporum coelestium	69—72



DAS GEMEINHÄUS VON DALL BEI KLUTZ IN FAHRE IN BRAUNSCHWEIG

Das Vorwortcapitel welches ich einmal in der Th. M. C. zu machen im Sinn hatte, wurde die Berechnung der rein parabolischen Bahn betroffen haben. Eigentlich ausgearbeitet ist darüber niemals etwas gewesen; einzelnes ist aber so aufgeschrieben, daß ich es später danach wohl wiederherstellen könnte. Allen meine nächste Arbeit werden sich jedenfalls auf die Fortsetzung meiner Geodäsie (theoretischen) Untersuchungen beziehen,

In eine ähnliche Kategorie gehört auch die Fregie über den Wiederabdruck meiner einzelnen Abhandlungen. Solange ich noch neue beifügen kann, werde ich schwerlich mit der Wiederherausgabe der älteren unterzichen.

Götting 1845 Jan. 5.

Heute der Fregie
C. F. G.

Ihre gefällige Bitte über die Handreichung, meine Untersuchungen über die Bewegung auf einer gewissen Fläche in einem beliebigen Punkte zu veröffentlichen, habe ich mir mit Freuden gemerkt. Da ich jedoch dieselbe Sache nicht behandeln, die ich selbst hatte, oder in einem beliebigen Punkte Ihre gegenwärtigen Untersuchungen nicht weiter meine wichtige Meinung vorbringen, daß

wenn Sie mir meine 1820 bei Göttinge abgedruckten ¹⁸²⁵ Untersuchungen, ich darf mich nicht später denselben ¹⁸²⁵ Untersuchungen nicht mehr abdrucken lassen, weil es überflüssig wäre, die Untersuchungen über die Bewegung auf einer gewissen Fläche in einem beliebigen Punkte zu veröffentlichen, die ich selbst hatte, oder in einem beliebigen Punkte Ihre gegenwärtigen Untersuchungen nicht weiter meine wichtige Meinung vorbringen, daß

In der Sache der Handreichung, die ich Ihnen über die Bewegung auf einer gewissen Fläche in einem beliebigen Punkte zu veröffentlichen, habe ich mir mit Freuden gemerkt. Da ich jedoch dieselbe Sache nicht behandeln, die ich selbst hatte, oder in einem beliebigen Punkte Ihre gegenwärtigen Untersuchungen nicht weiter meine wichtige Meinung vorbringen, daß

Götting 1845 April 29.

Heute der Fregie
C. F. G.

Vorrede.

Nach Entdeckung der planetarischen Bewegungsgesetze fehlten dem Geiste Kepler's die Mittel nicht, um die Elemente der einzelnen Planeten aus den Beobachtungen abzuleiten. Tycho Brahe, von dem die praktische Astronomie zu einer bis dahin ungekannten Höhe erhoben war, hatte alle Planeten eine lange Reihe von Jahren hindurch mit grösster Sorgfalt und einer solchen Ausdauer beobachtet, dass für Kepler, als eines solchen Schatzes würdigsten Erben, nur die Sorge der Auswahl dessen verblieb, was zur Schaffung einer Vorlage behuf Erreichung jeden Zieles geeignet war. Diese Arbeit wurde gar sehr dadurch erleichtert, dass die mittleren Bewegungen der Planeten schon lange mit grösster Schärfe durch die ältesten Beobachtungen bestimmt waren.

Die Astronomen, welche später als Kepler es unternahmen, die Planetenbahnen auf Grund neuerer und vollkommener Beobachtungen noch genauer anzumessen, wurden dabei durch die nämlichen, oder durch noch bessere Hilfsmittel unterstützt. Denn es handelte sich nicht mehr darum, noch gänzlich unbekannte Elemente zu ermitteln, sondern es brachten nur die bekannten um Kleinigkeiten verbessert und in engere Grenzen eingeschlossen zu werden.

Das von dem grossen Newton entdeckte Princip der allgemeinen Schwere eröffnete ein ganz neues Feld und lehrte, dass denselben Gesetzen, welche nach Kepler's Erfahrung die fünf Planeten regierten, nur mit einer kleinen Aenderung alle Himmelskörper nothwendig gehorchen müssen, wenigstens die, deren Bewegungen nur von der Kraft der Sonne gelenkt werden. Es hatte nämlich, auf das Zeugniß der Beobachtungen sich verlassend, Kepler ausgesprochen, dass die Bahn eines jeden Planeten eine Ellipse sei, in der die

Flächenräume um die, den einen Brennpunkt der Ellipse einnehmende Sonne gleichförmig und zwar so beschrieben werden, dass die Quadrate der Umlaufzeiten in verschiedenen Ellipsen sich verhalten wie die Cubikzahlen der grossen Halbachsen. Dagegen zeigte Newton, durch Aufstellung des Principis der allgemeinen Schwere, *a priori*, dass alle, von der anziehenden Kraft der Sonne regierten Körper in Kegelschnitten sich bewegen müssen, von denen uns die Planeten zwar nur eine Art, nämlich die Ellipsen zeigen, während die übrigen Arten, Parabeln und Hyperbeln, für gleich möglich gehalten werden müssen, falls nur Körper da sind, die der Kraft der Sonne mit der erforderlichen Geschwindigkeit entgegentreten; dass die Sonne stets den einen Brennpunkt des Kegelschnitts einnimmt; dass die Flächen, welche derselbe Körper in verschiedenen Zeiten um die Sonne beschreibt, diesen Zeiten proportional sind, und dass endlich die von verschiedenen Körpern in gleichen Zeiten um die Sonne beschriebenen Flächen sich wie die Quadratwurzeln der Halbachsenparameter der Bahnen verhalten. Dies letztere Gesetz, welches bei der elliptischen Bewegung identisch mit dem letzten Kepler'schen Gesetze ist, erstreckt sich auch auf die parabolische und hyperbolische Bewegung, auf welche das Kepler'sche in Ermangelung der Umlaufzeiten sich nicht anwenden lässt. Jetzt war der Faden gefunden, unter dessen Leitung es möglich wurde, in das vorher unzugängliche Labyrinth der Cometenbewegungen einzudringen. Dies gelang so glücklich, dass zur Erklärung aller genau beobachteten Cometenbewegungen die einzige Hypothese, dass ihre Bahnen parabolisch seien, genügt. So hatte das System der allgemeinen Schwere der Analysis neue und glänzende Triumphe bereitet, und die Cometen, die bis dahin ungebändigt waren, oder die, wenn sie besiegt schienen, bald aufständisch und rebellisch wurden, liessen sich den Zügel anlegen, wurden Freunde aus Feinden und verfolgten ihren Weg in den von der Rechnung vorgezeichneten Bahnen, denselben ewigen Gesetzen wie die Planeten gläubig gehorchend.

Nun entstanden bei der Bestimmung der parabolischen Cometenbahnen aus den Beobachtungen weit grössere Schwierigkeiten, als bei Berechnung der elliptischen Planetenbahnen, hauptsächlich deshalb, weil die Cometen vermöge des kürzeren Zeitraumes ihrer Sichtbarkeit eine Auswahl von zu diesem oder jenem bequemen Beobachtungen nicht gestatteten, sondern den Geometer zwingen, diejenigen Beobachtungen zu benutzen, die der Zufall dargeboten

hatte, so dass man die besondern, bei den Planetenrechnungen angewandten Methoden kaum jemals gebrauchen konnte. Selbst der grosse Newton, der erste Geometer seines Jahrhunderts, verkannte die Schwierigkeit des Problems nicht, ging aber doch, wie sich das erwarten liess, auch aus diesem Kampfe siegreich hervor. Viele Geometer nach Newton wendeten ihre Bestrebungen diesem Probleme, wenn gleich mit verschiedenem Glücke, doch so zu, dass unseren Zeiten wenig zu wünschen übrig geblieben ist.

Man darf vor allen Dingen nicht ausser Acht lassen, dass auch bei diesem Probleme die Schwierigkeit glücklicher Weise durch die Kenntniss eines Elementes des Kegelschnittes vermindert wird, indem eben durch Voraussetzung einer parabolischen Bahn die grosse Axe als unendlich gross gesetzt wird. Denn alle Parabeln, wenn man von ihrer Lage absieht, unterscheiden sich von einander lediglich durch den grösseren oder kleineren Abstand ihres Scheitels vom Brennpunkte, während die Kegelschnitte, allgemein betrachtet, eine unendlich grössere Verschiedenheit zulassen. Zwar war kein genügender Grund zu der Annahme vorhanden, weshalb die Lauflinien der Cometen mit absoluter Genauigkeit parabolisch sein sollten; ja es war vielmehr unendlich wenig wahrscheinlich, dass die Natur jemals in eine solche Voraussetzung eingewilligt habe. Dennoch aber stand es fest, dass die Erscheinung eines Himmelskörpers, der sich in einer Ellipse oder Hyperbel ^(v) bewegt, deren grosse Axe im Verhältniss zum Parameter ausserordentlich lang ist, in der Nähe des Perihels sehr wenig von der Bewegung in einer Parabel abweicht, die einen gleichen Abstand des Scheitels vom Brennpunkte hat, und dass dieser Unterschied um so kleiner herauskommt, je grösser jenes Verhältniss der Axe zum Parameter ist. Da ferner die Erfahrung gelehrt hatte, dass zwischen der beobachteten Bewegung und der für die parabolische Bahn berechneten Bewegung kaum jemals grössere Unterschiede übrig bleiben, als mit Sicherheit auf die Beobachtungsfehler (die hier gemeiniglich merklich genug sind) geschoben werden können, so hielten es die Astronomen für angemessen, bei der Parabel stehen zu bleiben. Und zwar mit Recht, da es an Hülfsmitteln fehlte, aus denen sich mit hinreichender Sicherheit schliessen liess, ob überhaupt und wie gross der Unterschied von der Parabel war. Ausnehmen muss man dabei den bekannten Halley'schen Cometen, der, als eine sehr gestreckte Ellipse beschreibend und in seiner Rückkehr zum Perihel

mehrfach beobachtet, uns eine periodische Umlaufzeit offenbarte. Dann aber ist, wenn solchergestalt die grosse Axe bekannt wird, die Berechnung der übrigen Elemente kaum für schwieriger zu halten, als eine parabolische Bahnbestimmung. Ich kann zwar nicht mit Stillschweigen übergehen, dass die Astronomen auch bei einigen anderen, etwas längere Zeit hindurch beobachteten Cometen die Bestimmung der Abweichung von der Parabel versucht haben. Aber alle zu dem Ende vorgeschlagenen oder angewandten Methoden stützen sich auf die Voraussetzung, dass die Abweichung von der Parabel nicht beträchtlich ist, wodurch dann in jenen Versuchen die vorher schon berechnete Parabel selbst eine genäherte Kenntniss der einzelnen Elemente (mit Ausnahme der grossen Axe oder der hiervon abhängenden Umlaufzeit) liefert, die dann nur durch kleine Aenderungen verbessert wird. Ausserdem muss man gestehen, dass alle die fraglichen Versuche — wenn man vielleicht den Cometen des Jahres 1770 ausnimmt — kaum je etwas Sicheres zu entscheiden vermögt haben.

- (VII) Sobald man erkannte, wie die Bewegung des neuen, im Jahre 1781 entdeckten Planeten sich mit der parabolischen Hypothese nicht vereinigen lasse, begannen die Astronomen, ihr eine Kreisbahn anzupassen: eine Arbeit, die sich durch eine sehr leichte und einfache Rechnung erledigen lässt. Durch ein glückliches Geschick besass die Bahn dieses Planeten nur eine mässige Excentricität, und so gaben die unter jener Voraussetzung herausgebrachten Elemente wenigstens irgend welche Annäherung, auf welche nachher die Bestimmung der elliptischen Elemente sich stützen liess. Es traten noch mehr andere Glücksfälle hinzu. Dem die langsame Bewegung des Planeten und die geringe Neigung seiner Bahn gegen die Ebene der Ecliptik vereinfachten nicht nur die Rechnungen ausserordentlich und gestatteten die Benutzung besonderer Methoden, die auf andere Fälle nicht anwendbar sind, sondern zerstreuten zugleich die Besorgniss, dass der, in die Sonnenstrahlen eingetauchte Planet nachher die Bemühungen der Aufsucher vereiteln würde (eine Besorgniss, die sonst allerdings, besonders wenn überdies sein Licht weniger lebhaft gewesen wäre, hätte beunruhigen können). So konnte man denn mit Sicherheit eine genauere Bahnbestimmung bis dahin aufschieben, dass aus häufigeren und entfernteren Beobachtungen diejenigen sich auswählen liessen, welche zu diesem Zwecke besonders geeignet erschienen.

In allen Fällen daher, wo man die Bahn eines Himmelskörpers aus den Beobachtungen herleiten musste, existirten gewisse, nicht zu verachtende Vortheile, welche die Anwendung besonderer Methoden anriethen oder doch wenigstens erlaubten, und unter diesen Vortheilen war der vorzüglichste der, dass durch hypothetische Annahmen sich bereits eine genäherte Kenntniss gewisser Zeiträume erfassen liess, bevor man die Berechnung der elliptischen Elemente unternahm.

Nichtsdestoweniger erscheint es wunderbar genug, dass das allgemeine Problem:

„Die Bahn eines Himmelskörpers ohne jede hypothetische Voraussetzung aus Beobachtungen zu bestimmen, die keinen (VIII) grossen Zeitraum umfassen und daher eine Wahl für die Anwendung besonderer Methoden nicht gestatten,“

bis zum Beginn dieses Jahrhunderts fast ganz vernachlässigt oder wenigstens von Niemandem mit Strenge und Würde behandelt ist, da es sich mindestens den Theoretikern wegen seiner Schwierigkeit und Eleganz hätte empfehlen können, wenn auch den Praktikern seine höchste Nützlichkeit noch nicht bekannt gewesen wäre. Es hatte sich aber bei Allen die sicher schlecht begründete Meinung eingebürgert, dass eine solche vollständige Bestimmung aus einem kürzeren Zeitraum umfassenden Beobachtungen unmöglich sei, während es gegenwärtig bereits völlig sicher ist, dass sich die Bahn eines Himmelskörpers aus guten, nur wenige Tage umfassenden Beobachtungen ohne jede hypothetische Voraussetzung schon hinreichend genähert bestimmen lässt.

Ich war auf gewisse Ideen verfallen, die zur Auflösung dieses grossen eben besprochenen Problems beitragen konnten, als ich im Monate September 1801, mit einer ganz verschiedenartigen Arbeit beschäftigt war. Nicht selten lässt man es in einem solchen Falle, um nicht zu sehr von einer angenehmen Untersuchung abgezogen zu werden, dahin kommen, dass Ideen-Verbindungen, die bei einer aufmerksameren Prüfung die reichsten Früchte hätten tragen können, durch Vernachlässigung untergehen. Vielleicht hätte auch diesen Ideen das nämliche Schicksal bevorgestanden, wenn sie nicht glücklicher Weise in eine Zeit gefallen wären, die nicht besser zu ihrer Bewahrung und

Begünstigung hätte gewählt werden können. Um jene Zeit nämlich ungefähr flog das Gerlicht von der am 1. Januar jenes Jahres auf der Sternwarte zu Palermo geschehene Entdeckung eines neuen Planeten durch Aller Mund, und bald gelangten die seit jener Epoche bis zum 11. Februar von dem ausgezeichneten Astronomen Piazzi angestellten Beobachtungen zur öffentlichen Kunde. Nirgends findet man sicher in den Annalen der Astronomie eine so (ix) wichtige Gelegenheit, und sie hätte kaum wichtiger ausgedacht werden können, um die hohe Bedeutung des fraglichen Problems auf das deutlichste zu zeigen, als bei einer so grossen Probe und der dringenden Nothwendigkeit, wo alle Hoffnung, ein planetarisches Atom nach Verlauf ungefähr eines Jahres unter den unzähligen kleinen Sternen des Himmels wieder zu finden, einzig und allein von der Erkenntniss einer hinreichend genäherten Bahn abhängt, die lediglich auf jene sehr wenigen Beobachtungen gestützt werden musste. Hätte ich je in gelegener Weise eine Probe anstellen können, was meine Ideen für den praktischen Gebrauch werth waren, als wenn ich sie damals zur Bahnbestimmung für die Ceres anwandte, für einen Planeten, der innerhalb jener 41 Tage einen geocentrischen Bogen von nur drei Graden beschrieben hatte, und der nach Ablauf eines Jahres an einer, weit von dort abgelegenen Region des Himmels aufgesucht werden musste? Die erste Anwendung dieser Methode ist im Monate October 1801 gemacht, und die erste heitere Nacht, in welcher der Planet nach Anleitung der daraus abgeleiteten Zahlen gesucht wurde (December 7. 1801 von Herrn von Zach) gab den Flüchtling den Beobachtungen wieder. Drei andere neue Planeten sind seit der Zeit entdeckt, und haben neue Gelegenheiten geboten, die Wirksamkeit und die Allgemeinheit der Methode zu prüfen und zu bestätigen.

Gleich nach Wiederauffindung der Ceres wünschten mehr Astronomen, dass ich die bei jenen Rechnungen angewandten Methoden öffentlich bekannt machen möge. Mehrere Hindernisse standen aber entgegen, als dass ich schon damals diesen freundschaftlichen Aufforderungen hätte willfahren können: andere Geschäfte, der Wunsch, die Sache noch etwas ausführlicher durchzuarbeiten und vorzüglich die Erwartung, dass sich bei fortgesetzter Beschäftigung mit dieser Untersuchung verschiedene Theile der Auflösung zur Höhe grösserer Allgemeinheit, Einfachheit und Eleganz würden erheben lassen. Da mich diese Hoffnung nicht getäuscht hat, so glaube ich nicht, dass ich

diesen Verzug zu bereuen habe. Denn die anfangs angewandten Methoden*) haben zu wiederholten Malen so häufige und so grosse Aenderungen erlitten, dass zwischen der Art, wie damals die Ceres-Bahn gerechnet ist, und der in diesem Werke behandelten Einrichtung kaum die Spur einer Aehnlichkeit (x) geblieben ist. Obgleich es nun nicht meine Absicht ist, über alle diese allmählich mehr und mehr vollendeten Untersuchungen eine vollständige Schilderung zu schreiben, so habe ich doch bei mehreren Gelegenheiten, namentlich wo es sich um eine schwierigere Aufgabe handelte, geglaubt, die früheren Methoden nicht allenthalben unterdrücken zu sollen. Ich habe vielmehr, abgesehen von den Lösungen der Hauptaufgaben, sehr Vieles, was während einer hinreichend langen Beschäftigung mit der Bewegung der Himmelskörper in Kegelschnitten, entweder der analytischen Eleganz halber, oder vorzugsweise des praktischen Gebrauchs wegen, als Bemerkenswerthes sich mir darbot, in diesem Werke ausgeführt. Stets jedoch habe ich den mir eigenen Sachen oder Methoden eine grössere Sorgfalt gewidmet, das Bekannte aber nur leichtlin berührt, wo es der Zusammenhang der Sache zu erfordern schien.

Das ganze Werk ist in zwei Theile zerlegt. Im ersten Buche werden die Relationen unter den Grössen entwickelt, von welchen die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nach den Kepler'schen Gesetzen abhängig ist, und zwar in den zwei ersten Abschnitten diejenigen Relationen, wo nur ein einziger Ort an und für sich betrachtet wird, im dritten und vierten Abschnitte aber diejenigen, wo mehrere Orte unter sich in Verbindung gebracht werden. Letztere beiden Abschnitte enthalten die Auseinandersetzung von Methoden, sowohl der gewöhnlich gebräuchlichen, als auch vorzüglich einiger anderen, die, wenn ich nicht irre, zum praktischen Gebrauche weit vorzuziehen sind, durch welche man von den bekannten Elementen zu den Erscheinungen übergeht. Diese Aufgaben enthalten vieles sehr Schwierige, was den Weg zu den umgekehrten Operationen anbahnt. Da inzwischen die Erscheinungen aus der künstlichen und intricaten Verwicklung der Elemente zusammengesetzt

*) In dieser Beziehung empfiehlt sich das Studium des durch von Lindennau in der v. Zach'schen Monatlichen Correspondenz (Band 20, S. 197) publicirten Aufsatzes von Gauss, der den Titel führt: „Summarische Uebersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden.“

Anmerkung des Uebersetzers.

sind, so muss man dies Gewebe von Grund aus durchblickt haben, ehe man mit Hoffnung auf Erfolg die Entwirrung der Fäden und die Auflösung des (x) Werks in seine Bestandtheile unternehmen kann. Im ersten Buche werden daher die Instrumente und Hilfsmittel zusammengebracht, womit sodann im zweiten Buche dies schwierige Geschäft selbst vollbracht wird. Ein sehr grosser Theil der Arbeit besteht dann darin, dass jene Hilfsmittel gehörig gesammelt, in eine schickliche Anordnung gebracht und auf das vorgesteckte Ziel gerichtet werden.

Die schwierigeren Aufgaben sind grösstentheils durch passende Beispiele erläutert, die, wo es anging, stets von nicht fingirten Beobachtungen hergenommen sind. So wird nicht nur ein grösseres Vertrauen zu der Wirksamkeit der Methode erweckt, und der Gebrauch klarer vor Augen geführt, sondern ich hoffe auch, solchergestalt versichert zu sein, dass nicht die weniger Geübten von dem Studium dieser Dinge abgeschreckt werden, die zweifelsohne den fruchtbarsten und schönsten Theil der theorischen Astronomie ausmachen.

Geschrieben zu Göttingen, den 28. März 1809.

Erstes Buch.

Allgemeine Relationen unter den Grössen, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmt werden.

Erster Abschnitt.

Relationen, die einen einzelnen Ort in der Bahn betreffen.

I.

Wir wollen die Bewegungen der Himmelskörper in diesem Werke nur insoweit betrachten, als solche von der Anziehungskraft der Sonne abhängig sind. Ausgeschlossen bleiben daher hier alle secundären Planeten, ingleichen die Störungen, welche die Primären wechselseitig auf sich ausüben, sowie auch alle rotatorischen Bewegungen. Die bewegten Körper selbst wollen wir als mathematische Punkte betrachten und voraussetzen, dass alle Bewegungen nach Massgabe der nachfolgenden Gesetze vor sich gehen, welche daher als die Grundlage aller Untersuchungen im gegenwärtigen Werke anzusehen sind.

I. Die Bewegung eines jeden Himmelskörpers geschieht beständig in der nämlichen Ebene, in welcher zugleich der Mittelpunkt der Sonne liegt.

II. Der von dem Körper beschriebene Linienzug ist ein Kegelschnitt, der seinen Brennpunkt im Mittelpunkte der Sonne hat.

III. Die Bewegung in jenem Linienzuge geht in der Weise vor sich, dass die in verschiedenen Zeitabschnitten um die Sonne beschriebenen Flächenräume diesen Zeitabschnitten proportional sind. Drückt man daher Zeiten und Flächenräume durch Zahlen aus, so ergibt jeder Flächenraum, wenn man ihn durch die Zeit, innerhalb deren er beschrieben wurde, dividirt, einen unveränderlichen Quotienten.

IV. Für die verschiedenen, um die Sonne sich bewegend Körper stehen die Quadrate dieser Quotienten im zusammengesetzten*) Verhältnisse der den Bahnen entsprechenden Parameter und der Summen der Sonnenmasse und der Massen der bewegten Körper.

Bezeichnet also $2p$ den Parameter der Bahn, in welcher der Körper einherzieht; μ die Stoffmenge dieses Körpers (die Masse Sonne = 1 gesetzt); $\frac{1}{2}g$ die Fläche, welche der Körper in der Zeit t um die Sonne beschreibt;

(2) so wird $\frac{g}{t\sqrt{p}\cdot\sqrt{1+\mu}}$ eine Constante für alle Himmelskörper bilden.

Da es also gleichgültig ist, welchen Himmelskörper man zur Bestimmung dieser constanten Zahl benutzt, so wollen wir letztere aus der Bewegung der Erde ableiten, und dabei deren mittlere Entfernung von der Sonne zur Distanz-Einheit annehmen. Die Einheit der Zeit soll stets der mittlere Sonnentag sein. Bezeichnet man ferner mit π das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises, so wird der Flächenraum der ganzen, von der Erde beschriebenen Ellipse offenbar sein = $\pi\sqrt{p}$, welcher daher = $\frac{1}{2}g$ zu setzen ist, wenn man für t das siderische Jahr annimmt, wodurch unsere Constante

= $\frac{2\pi}{t\sqrt{1+\mu}}$ wird. Um den numerischen Werth dieser Constante, die wir im Folgenden mit k bezeichnen wollen, zu ermitteln, setzen wir nach der neuesten Bestimmung das siderische Jahr, oder $t = 365,256\ 3835$, die Masse

der Erde oder $\mu = \frac{1}{354710} = 0,000\ 002\ 8192$; dadurch wird erhalten:

log 2π	0,798 179 8684
compl. log t	7,437 402 1852
compl. log $\sqrt{1+\mu}$	9,999 999 3878
log k	8,235 581 4414
$k =$	0,017 202 09895

*) Das in der lateinischen Handschrift gebrauchte Wort „in ratione inversa“ soll heissen: „in ratione composita“, cfr. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, B. I, p. 17, wo die Worte in einem Briefe von Gauss an Schumacher vom 14. December 1809 lauten:

„Herrn . . . bitte ich mich zu empfehlen und für die Anzeige des Ergerlichen Schreibfehlers, zu danken. In der deutschen Handschrift steht nicht im umgekehrten, sondern bloss im „zusammengesetzten Verhältniss; das erste Blatt der lateinischen Handschrift habe ich

2.

Die so eben erörterten Gesetze, weichen von den durch Kepler entdeckten nur in der Weise ab, dass sie in einer Form gegeben sind, die eine Anwendung auf alle Arten von Kegelschnitten gestattet, und dass dabei der Einwirkung des bewegten Körpers auf die Sonne, wovon der Factor $\sqrt{1+\mu}$ abhängt, Rechnung getragen ist. Wenn wir diese Gesetze als Erscheinungen betrachten, die aus unzähligen und unzweifelhaften Beobachtungen sich ergeben haben, so lehrt die Geometrie, welche Einwirkung von der Sonne auf die um Letztere bewegten Körper ausgeübt werden muss, um jene Erscheinungen beständig hervorzubringen. Auf diese Weise findet sich, dass die Einwirkung der Sonne auf die um sie laufenden Körper ganz so ausgeübt wird, als ob eine Anziehungskraft, deren Stärke dem Quadrate der Entfernung wechselseitig proportional wäre, die Körper gegen den Mittelpunkt der Sonne hintrieb. Geht man daher umgekehrt von der Annahme einer solchen Anziehungskraft als von einem Principe aus, so können jene Erscheinungen als nothwendige Folgen daraus abgeleitet werden. Hier mag eine blosse Erwähnung der Gesetze genügen, und es wird um so weniger erforderlich sein, an diesem Orte bei ihrem Zusammenhange mit dem Princip der Schwere zu verweilen, da seit dem grossen Newton noch mehre andere Schriftsteller jene Materie behandelt haben, und unter diesen Laplace in seinem vollendeten Werke „*Mécanique Céleste*“ in einer Weise, die (3) nichts zu wünschen übrig lässt.

3.

Die Untersuchungen der Bewegungen der Himmelskörper, so weit solche in Kegelschnitten vor sich gehen, erfordern keineswegs eine vollständige Theorie dieser Art von Curven, und es wird daher eine einzige allgemeine Gleichung genügen, aus der wir Alles ableiten. Es erscheint deshalb

„verlegt und weiss also nicht, ob durch einen Druck- oder Schreibfehler *inversa* statt *composita* gesetzt ist, doch wohl das Letztere, ob ich gleich nicht begreife, wie es zugegangen ist.“

Anmerkung des Uebersetzers.

sachgemäss, gerade die Gleichung auszuwählen, auf welche wir als eine charakteristische bei Erforschung der zufolge des Attractionsgesetzes beschriebenen Curve Bezug nehmen. Wenn wir nämlich irgend einen Ort des Körpers in seiner Bahn bezeichnen durch die Abstände x und y von zwei geraden Linien, die in der Ebene der Bahn gezogen sind und im Mittelpunkte der Sonne d. h. in dem einen der beiden Brennpunkte der Curve unter rechten Winkeln sich schneiden; und wenn wir ausserdem die Entfernung eines Körpers von der Sonne (stets positiv genommen) mit r benennen, so haben wir zwischen r , x , y die lineäre Gleichung $r + \alpha x + \beta y = \gamma$; in welcher α , β , γ beständige Grössen ausdrücken, und zwar γ eine Grösse, die ihrer Natur nach stets positiv ist. Indem wir nun die Lage der geraden Linien, auf welche die Abstände x und y sich beziehen, verändern (eine Lage die an und für sich ganz willkürlich ist, wenn es nur dabei bleibt, dass sich die Linien unter rechten Winkeln schneiden), so wird dadurch offenbar die Form der Gleichung und der Werth von γ nicht geändert, während α und β immer andere und wieder andere Werthe erlangen und man sieht, dass jene Lage so bestimmt werden kann, dass $\beta = 0$ wird, α aber wenigstens nicht negativ. — Schreibt man solchergestalt für α und γ beziehungsweise e und p , so nimmt obige Gleichung die Gestalt an $r + ex = p$. Die gerade Linie, auf welche in diesem Falle die Abstände y bezogen werden, heisst die Apsidenlinie, p der halbe Parameter, e die Excentricität, und der betreffende Kegelschnitt wird mit dem Namen Ellipse, Parabel oder Hyperbel bezeichnet, je nachdem e kleiner als die Einheit, gleich der Einheit, oder grösser als die Einheit ist.

Uebrigens sieht man leicht, dass die Lage der Apsidenlinie durch die vorgetragenen Bedingungen vollständig bestimmt ist, den einzigen Fall ausgenommen, wo sowohl α als β schon an und für sich $= 0$ waren. In diesem Falle wird stets $r = p$, auf welche geraden Linien die Abstände x und y auch bezogen werden. Indem daher e ebenfalls $= 0$ ist, so wird die Curve (die dann ein Kreis ist) nach unserer Begriffsbestimmung dem Genus der Ellipsen beizuzählen sein, hat aber das Eigenthümliche, dass die Lage der Apsiden gänzlich willkürlich bleibt, wenn man anders jene Bezeichnung auch auf diesen Fall auszudehnen belieben sollte.

4.

Für den Abstand x wollen wir jetzt den Winkel v einführen, der zwischen der Apsidenlinie und der geraden Linie (radius vector) enthalten ist, die von der Sonne nach dem Orte des Körpers führt, und zwar möge dieser Winkel von derjenigen Seite der Apsidenlinie beginnen, wo die Abstände x positiv sind. Auch werde angenommen, dass dieser Winkel nach derjenigen (4) Gegend hin wachse, wohin die Bewegung des Körpers gerichtet ist. Auf diese Weise wird $x = r \cos v$, und demnach unsere Formel $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$, woraus sich folgende Schlüsse unmittelbar ableiten lassen:

I. Für $v = 0$ wird der Werth des radius vector ein Kleinstes, nämlich $r = \frac{p}{1 + e}$; dieser Punkt heisst das Perihel.

II. Den entgegengesetzten Werthen von v entsprechen gleiche Werthe von r ; die Apsidenlinie theilt daher den Kegelschnitt in zwei gleiche Theile.

III. In der Ellipse wächst von $v = 0$ an r beständig, bis es den grössten Werth ($r = \frac{p}{1 - e}$) im Aphel erreicht, für welches $v = 180^\circ$. Nach Passirung des Aphels nimmt r auf dieselbe Weise wieder ab, wie es früher gewachsen war, bis es für $v = 360^\circ$ das Perihel von Neuem berührt. Derjenige Theil der Apsidenlinie, welcher an dieser Stelle vom Perihel und an jener vom Aphel begrenzt wird, heisst die grosse Axe. Es wird daher die grosse Halbaxe, welche auch die mittlere Entfernung genannt wird, $= \frac{p}{1 - ee}$. Der Abstand des inmitten der Axe belegenen Punktes (des Mittelpunktes der Ellipse) vom Brennpunkte ist $= \frac{ep}{1 - ee} = ea$, wobei a die grosse Halbaxe bezeichnet.

IV. Dagegen existirt in der Parabel eigentlich kein Aphel, sondern r wächst über alle Grenzen hinaus, je näher v an $+180^\circ$ oder -180° herankommt. Für $v = \pm 180^\circ$ wird der Werth von r unendlich, was anzeigt, dass die Curve von der Apsidenlinie in dem, dem Perihel gegenüber liegenden Theile nicht geschnitten wird. Es kann daher im eigentlichen Sinne hier von

einer grossen Axe, oder von einem Mittelpunkte der Curve nicht die Rede sein; aber nach der gewöhnlichen Manier der Analysis wird durch Erweiterung der für die Ellipse erfundenen Formeln der grossen Axe ein unendlicher Werth beigelegt, und der Mittelpunkt der Curve wird in unendliche Entfernung vom Brennpunkte gesetzt.

V. In der Hyperbel schliesslich wird v in noch engere Grenzen eingezwängt, nämlich innerhalb $v = -(180^\circ - \psi)$ und $v = +(180^\circ - \psi)$; wo ψ einen Winkel bezeichnet, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$. Denn während v sich einem dieser Grenzwerte nähert, wächst r in's Unendliche fort; und wenn für v einer dieser Grenzwerte selbst angenommen würde, so würde der Werth von r als ein unendlicher herauskommen, was anzeigt, dass die Hyperbel von einer geraden Linie, die gegen die Apsidenlinie unter einem Winkel von $180^\circ - \psi$ oberhalb oder unterhalb geneigt ist, überall nicht geschnitten wird. Für die solchergestalt ausgeschlossenen Werthe, nämlich von $180^\circ - \psi$ bis zu $180^\circ + \psi$, weist unsere Formel dem r einen negativen Werth an; denn die gerade Linie, die unter einem solchen Winkel gegen die Apsidenlinie geneigt ist, schneidet
 (5) selbst zwar die Hyperbel nicht, wenn sie jedoch rückwärts verlängert wird, so trifft sie das andere Stück der Hyperbel, welches bekanntlich von dem ersten Stücke überall getrennt und gegen denjenigen Brennpunkt hin, welchen die Sonne einnimmt, convex ist. Aber in unserer Untersuchung — welche, wie schon erwähnt, auf der Voraussetzung beruht, dass r positiv genommen werden soll, — nehmen wir auf dieses zweite Stück der Hyperbel keine Rücksicht, worin nur ein solcher Himmelskörper einherziehen könnte, auf den die Sonne nicht attractiv, sondern nach denselben Gesetzen repulsiv wirken würde. Im eigentlichen Sinne des Worts giebt es daher auch in der Hyperbel kein Aphel. Als das Analogon des Aphels könnte derjenige Punkt des abgekehrten Stücks genommen werden, welcher auf der Apsidenlinie liegt und welcher den Werthen $v = 180^\circ$, $r = -\frac{p}{e-1}$ entspricht. Will man daher wie bei der Ellipse den Werth des Ausdrucks $\frac{p}{1-ee}$ auch hier, wo er negativ sich ergiebt, die halbe grosse Axe der Hyperbel nennen, so zeigt diese Grösse die Entfernung

des bereits erwähnten Punktes vom Perihel und zugleich seine Lage an, welche in der Ellipse die entgegengesetzte Stelle einnimmt. Ebenso erhält hier $\frac{ep}{1-ee}$ d. h. der Abstand des mittleren Punktes zwischen diesen beiden Punkten (Centrums der Hyperbel) vom Brennpunkte einen negativen Werth wegen der entgegengesetzten Lage.

5.

Der Winkel v , welcher in der Parabel zwischen den Grenzen -180° und $+180^\circ$, ftr die Hyperbel innerhalb $-(180^\circ - \psi)$ und $+(180^\circ - \psi)$ eingeschlossen ist, bei der Ellipse aber den ganzen Kreis in stets erneuten Perioden durchläuft, heisst die wahre Anomalie des bewegten Körpers. Bislang pfligten zwar fast alle Astronomen die wahre Anomalie in der Ellipse nicht vom Perihel, sondern vom Aphel an zu zählen, gegen die Analogie der Parabel und der Hyperbel, in denen es kein Aphel giebt, und man daher vom Perihel anfangen musste. Wir haben indess um so weniger Bedenken getragen, eine Analogie zwischen allen Arten von Kegelschnitten herzustellen, da die neusten französischen Astronomen dazu mit dem Beispiele vorangegangen sind.

Im Uebrigen ist es mitunter dienlich, die Form des Ausdrucks $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ etwas zu ändern. Vorzüglich merke man sich folgende Formeln:

$$r = \frac{p}{1 + e - 2e \sin \frac{1}{2} v^2} = \frac{p}{1 - e + 2e \cos \frac{1}{2} v^2}$$

$$r = \frac{p}{(1+e) \cos \frac{1}{2} v^2 + (1-e) \sin \frac{1}{2} v^2}$$

In der Parabel hat man daher: $r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v^2}$; in der Hyperbel aber ist folgender Ausdruck besonders bequem:

$$r = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2} (v + \psi) \cos \frac{1}{2} (v - \psi)}$$

6.

(6) Wir wollen jetzt zur Vergleichung der „Bewegung“ mit der „Zeit“ schreiten. Wenn man, wie in Art. 1, den innerhalb der Zeit t um die Sonne beschriebenen Flächenraum $= \frac{1}{2} g$ setzt, die Masse des bewegten Körpers $= \mu$ (die Sonnenmasse $= 1$ gesetzt), so haben wir: $g = kt\sqrt{p} \cdot V(1+\mu)$. Das Differential des Flächenraums aber wird $= \frac{1}{2} rrdv$, woraus hervorgeht: $kt\sqrt{p} \cdot V(1+\mu) = \int rrdv$, wobei dies Integral so genommen wird, dass es für $t=0$ verschwindet. Diese Integration muss für die verschiedenen Arten von Kegelschnitten auf verschiedene Weise behandelt werden, weshalb wir das Einzelne getrennt betrachten, und den Anfang mit der Ellipse machen wollen.

Da r aus v mittelst eines Bruches bestimmt wird, dessen Nenner aus zwei Gliedern besteht, so wollen wir vor allen Dingen diese Unbequemlichkeit durch Einführung einer neuen Grösse für v beseitigen. Zu diesem Zwecke setzen wir $\tan \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \tan \frac{1}{2} E$, wonach die letzte Formel im vorhergehenden Artikel für r giebt

$$r = \frac{p \cos \frac{1}{2} E^2}{(1+e) \cos \frac{1}{2} v^2} = p \left(\frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{1+e} + \frac{\sin \frac{1}{2} E^2}{1-e} \right) = \frac{p}{1-ee} (1 - e \cos E).$$

Ferner wird $\frac{dE}{\cos \frac{1}{2} E^2} = \frac{dv}{\cos \frac{1}{2} v^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ und daher: $dv = \frac{pdE}{r\sqrt{1-ee}}$;

hieraus $rrdv = \frac{rpdE}{V(1-ee)} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}} (1 - e \cos E) dE$ und wenn man integrirt:

$$kt\sqrt{p} \cdot V(1+\mu) = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}} (E - e \sin E) + \text{Const.}$$

Wenn wir daher die Zeit vom Durchgange durch das Perihel an beginnen lassen, wo $v=0$, $E=0$ und daher auch Constans $= 0$, so haben wir, weil $\frac{p}{1-ee} = a$,

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{p} \cdot V(1+\mu)}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Bei dieser Gleichung muss der Hilfswinkel E , welcher die excentrische Anomalie heisst, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden. Offenbar aber lässt sich dieser Winkel in Graden etc. beibehalten, wenn man

nur auch $e \sin E$ und $\frac{ktV(1+\mu)}{a^{\frac{3}{2}}}$ auf dieselbe Art ausdrückt; diese Grössen werden in Bogensekunden erhalten, wenn man sie durch die Zahl 206264,81 multiplicirt. Der Multiplication der letzteren Grösse bleibt man überhoben, falls man sogleich die Grösse k in Secunden dargestellt anwendet, und daher setzen wir an Stelle des früheren Werthes $k = 3548'', 18761$, dessen $\log = 3,550\,006\,5746$. — Auf diese Weise ausgedrückt heisst die Grösse $\frac{ktV(1+\mu)}{a^{\frac{3}{2}}}$ die mittlere Anomalie, die daher im Verhältniss der Zeit wächst und zwar täglich um das Augment $\frac{kV(1+\mu)}{a^{\frac{3}{2}}}$, welches man die (7) mittlere tägliche Bewegung (motus medius diurnus) nennt. — Die mittlere Anomalie bezeichnen wir durch M .

7.

In Perihele sind daher die wahre Anomalie, die excentrische Anomalie und die mittlere Anomalie = 0. — Indem nun von hieran die wahre Anomalie wächst, so werden auch die excentrische und die mittlere jedoch so vermehrt, dass die excentrische kleiner bleibt, als die wahre, und die mittlere kleiner als die excentrische, bis zum Aphel, wo alle drei zugleich = 180° werden; von hieran aber bis zum Perihel ist die excentrische immer grösser als die wahre, und die mittlere Anomalie grösser als die excentrische, bis im Perihel alle drei = 360° werden, oder was auf dasselbe herauskommt, alle wiederum = 0. Im Allgemeinen ist klar, dass, wenn einer wahren Anomalie v eine excentrische E und eine mittlere M entspricht, dann einer wahren von $360^\circ - v$ eine excentrische von $360^\circ - E$ und eine mittlere von $360^\circ - M$ entspricht. Der Unterschied zwischen der wahren Anomalie und der mittleren $v - M$ heisst die Gleichung des Mittelpunkts (aequatio centri), welche daher vom Perihel bis zum Aphel positiv, vom Aphel bis zum Perihel negativ ist, im Perihele und Aplele selbst aber verschwindet. Da nun also v und M den vollen Kreis von 0 bis zu 360° in der nämlichen Zeit durchlaufen, so wird die Zeit eines einmaligen Umlaufs, welche auch die periodische Zeit (tempus periodicum) heisst, in Tagen ausgedrückt gefunden, wenn man 360°

durch die tägliche Bewegung $\frac{k\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$ dividirt; woraus man sieht, dass für die verschiedenen, um die Sonne revolvirenden Körper die Quadrate der periodischen Umlaufzeiten den Cuben der mittleren Entfernungen proportional sind, in soweit es erlaubt ist, deren Massen, oder vielmehr die Ungleichheit der Massen zu vernachlässigen.

8.

Nun wollen wir die bemerkenswerthesten Relationen zwischen den Anomalien und dem radius vector sammeln, deren Ableitung Niemandem, der nur mittelmissig in der trigonometrischen Analyse bewandert ist, Schwierigkeiten darbieten kann. Die Formeln werden concinner, wenn man für e den Winkel einführt, dessen Sinus = e ist. Wird dieser Winkel mit φ bezeichnet, so hat man: $\sqrt{1-ee} = \cos \varphi$; $\sqrt{1+e} = \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$; $\sqrt{1-e} = \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$; $\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e} = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi$; $\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$. — Die vorzüglichsten Relationen zwischen a , p , r , e , φ ,
(8) v , E , M sind folgende:

$$\text{I. } p = a \cos \varphi^2$$

$$\text{II. } r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

$$\text{III. } r = a(1 - e \cos E)$$

$$\text{IV. } \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}; \text{ oder } \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$$\text{V. } \sin \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos E)} = \sin \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{1-e}{1+e \cos v}} = \sin \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r(1-e)}{p}} = \sin \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r}{a(1+e)}}$$

$$\text{VI. } \cos \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos E)} = \cos \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{1+e}{1+e \cos v}} = \cos \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r(1+e)}{p}} = \cos \frac{1}{2}v \sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}$$

$$\text{VII. } \tan \frac{1}{2}E = \tan \frac{1}{2}v \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$$

$$\text{VIII. } \sin E = \frac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi} .$$

$$\text{IX. } r \cos v = a (\cos E - e) = 2 a \cos \left(\frac{1}{2} E + \frac{1}{2} \varphi + 45^\circ \right) \cos \left(\frac{1}{2} E - \frac{1}{2} \varphi - 45^\circ \right)$$

$$\text{X. } \sin \frac{1}{2}(v - E) = \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v \sqrt{\frac{r}{p}} = \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$$

$$\text{XI. } \sin \frac{1}{2}(v + E) = \cos \frac{1}{2} \varphi \sin v \sqrt{\frac{r}{p}} = \cos \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$$

$$\text{XII. } M = E - e \sin E.$$

9.

Verlängert man ein, aus irgend einem Punkte der Ellipse auf die Apsidenlinie gefälltes Perpendikel rückwärts, bis es einen aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit dem Halbmesser = a beschriebenen Kreis trifft, so wird die Neigung desjenigen Halbmessers, der dem Einschneidepunkte entspricht, gegen die Apsidenlinie (ähnlich verstanden, wie vorher für die wahre Anomalie) der excentrischen Anomalie gleich sein, wie sich ohne Mühe aus der Gleichung IX im vorhergehenden Artikel ableiten lässt. Man sieht ferner, dass $r \sin v$ den Abstand eines jeden Punktes der Ellipse von der Apsidenlinie bezeichnet; und da dieser Abstand nach Gleichung VIII = $a \cos \varphi \sin E$ ist, so wird er seinen grössten Werth bei $E = 90^\circ$ erreichen, d. h. im Mittelpunkte der Ellipse. Dieser grösste Abstand, der = $a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = \sqrt{a p}$ heisst die halbe kleine Axe. Im Brennpunkte der Ellipse, d. h. für $v = 90^\circ$, wird jener Abstand offenbar = p , oder gleich dem halben Parameter.

10.

(9)

Die Gleichungen des Art. 8 enthalten Alles, was zur Berechnung der excentrischen Anomalie und der mittleren aus der wahren, oder der excentrischen und der wahren aus der mittleren erforderlich ist. Um die excentrische aus der wahren abzuleiten, bedient man sich gewöhnlich der Formel VII. Gemeinlich jedoch empfiehlt es sich, zu diesem Zwecke die Gleichung X zu benutzen, besonders sobald die Excentricität nicht zu gross ist, in welchem

2.

Falle E mit grösserer Schärfe aus X berechnet werden kann, als aus VII. Ausserdem hat man bei Anwendung der Gleichung X den Logarithmus des Sinus von E , der in XII gebraucht wird, sofort durch die Gleichung VIII, welcher bei Anwendung von VII erst aus den Tafeln genommen werden müsste; wenn daher bei jener Methode der fragliche Logarithmus gleichfalls den Tafeln entnommen wird, so erlangt man dadurch eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung. Derartige Rechnungsprüfungen und Bestätigungen sind stets überaus schätzbar, und uns bei denselben Rath zu erholen, wird daher bei allen in diesem Werke abzuhandelnden Methoden, da wo es bequem geschehen kann, unsere eifrige Sorge sein. Zur besseren Erläuterung fügen wir ein vollständig berechnetes Beispiel hinzu:

Gegeben sei $v = 310^{\circ} 55' 29'' 64$, $\varphi = 14^{\circ} 12' 1'' 87$, $\log r = 0,330 7640$;
Gesucht werden: p , a , E und M .

$\log \sin \varphi \dots\dots\dots$	9,389 7262	
$\log \cos v \dots\dots\dots$	9,816 2877	
	9,206 0139	woraus $e \cos v = 0,160 6993$
$\log (1 + e \cos v) \dots\dots\dots$	0,064 7197	
$\log r \dots\dots\dots$	0,330 7640	
	0,395 4837	
$\log p \dots\dots\dots$	0,395 4837	
$\log \cos \varphi^2 \dots\dots\dots$	9,973 0448	
	0,422 4389	
$\log a \dots\dots\dots$	0,422 4389	
$\log \sin v \dots\dots\dots$	9,878 2740 n°)	
$\log \sqrt{\frac{p}{r}} \dots\dots\dots$	0,032 3598 .5	
	9,845 9141 .5 n	
$\log \sin \frac{1}{2} \varphi \dots\dots\dots$	9,092 0395	
$\log \sin \frac{1}{2} (v - E) \dots\dots\dots$	8,937 9536 .5 n	also $\frac{1}{2} (v - E) = -4^{\circ} 58' 22'' 94$; $v - E = -9^{\circ} 56' 45'' 88$; $E = 320^{\circ} 52' 15'' 52$

*) Der dem Logarithmus beigefügte Buchstab n deutet an, dass die ihm entsprechende Zahl eine negative ist.

Ferner wird

$$\begin{array}{l} \log e \dots\dots\dots 9,389\ 7262 \\ \log 206\ 264,8\dots 5,314\ 4251 \\ \hline \log e \text{ in Sec. } \dots\dots 4,704\ 1513 \\ \log \sin E \dots\dots\dots 9,800\ 0767\ n \end{array}$$

Rechnung für $\log \sin E$ nach Formel VIII. (10)

$$\begin{array}{l} \log \frac{r}{p} \sin v \dots\dots\dots 9,813\ 5543\ n \\ \log \cos \varphi \dots\dots\dots 9,986\ 5224 \\ \hline \log \sin E' \dots\dots\dots 9,800\ 0767\ n \end{array}$$

$$4,504\ 2280\ n \text{ also } e \sin E' \text{ in Sec. } = 319\ 32''\ 14 = 8^\circ 52'\ 12''\ 14$$

und $M = 329^\circ 44' 27'' 66$. — Rechnung nach Formel VII für E :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} v = 155^\circ 27' 44'' 82 \\ 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi = 37^\circ 53' 59'' 065 \\ \log \tan \frac{1}{2} v \dots\dots\dots 9,659\ 4579\ n \\ \log \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \dots\dots\dots 9,891\ 2427 \\ \hline \log \tan \frac{1}{2} E \dots\dots\dots 9,550\ 7006\ n \end{array}$$

woraus $\frac{1}{2} E = 160^\circ 26' 7'' 76$ und $E = 320^\circ 52' 15'' 52$, wie oben.

II.

Die umgekehrte, unter dem Namen des Kepler'schen Problems berühmte Aufgabe, nämlich aus der mittleren Anomalie die wahre und den radius vector zu finden, kommt weit häufiger zur Frage. Die Astronomen pflegen die Gleichung des Mittelpunktes durch eine unendliche, nach den Sinussen der Winkel M , $2M$, $3M$ etc. fortschreitende Reihe darzustellen, wobei die einzelnen Coefficienten der Sinusse ebenfalls Reihen sind, die nach den Potenzen der Excentricität in's Unendliche fortlaufen. Ich habe es um so weniger für notwendig erachtet, mich bei dieser von mehreren Schriftstellern entwickelten Formel für die Gleichung des Mittelpunktes hier aufzuhalten, weil sie, wenigstens nach meinem Urtheile, für den praktischen Gebrauch, namentlich wenn die Excentricität nicht sehr klein ist, viel weniger geeignet ist, als die indirecte Methode, welche ich daher in der Form, die mir die bequemste scheint, etwas näher erörtern will.

Die Gleichung XII, $E = M + e \sin E$, die transcendent ist und eine directe Auflösung nicht zulässt, wird durch Versuche aufgelöst, indem man mit einem genäherten Werthe von E beginnt, der durch geeignete, so oft wiederholte Methoden corrigirt wird, bis er jener Gleichung genau Genüge thut, d. h. entweder mit aller der Genauigkeit, welche die Sinustafeln zulassen, oder doch mit der, welche dem vorgesteckten Ziele entspricht. Wenn nun

jene Correctionen nicht blindlings, sondern nach einer sicheren und bestimmten Norm angestellt werden, so besteht kaum ein wesentlicher Unterschied zwischen einer solchen indirecten Methode und der Auflösung durch Reihen, wenn nicht darin, dass bei jener der erste Werth der Unbekannten einigermassen willkürlich ist, was eher für einen Gewinn gelten kann, da ein schieklich ausgewählter Werth es erlaubt, die Verbesserungen ausserordentlich zu beschleunigen. Setzen wir voraus, dass ϵ ein genäherter Werth von E sei, und x die jenem hinzuzufügende (in Secunden ausgedrückte) Verbesserung, so dass der Werth

(11) $E = \epsilon + x$ unserer Gleichung genau Genüge thut. Man berechne $e \sin \epsilon$ in Secunden durch Logarithmen, und bemerke bei dieser Ausführung zugleich aus den Tafeln die Aenderung von $\log \sin \epsilon$ für $1''$ durch die Variation von ϵ , sowie die Veränderung des $\log e \sin \epsilon$ für die Aenderung einer Einheit in der Zahl $e \sin \epsilon$; diese Veränderungen mögen ohne Rücksicht auf die Zeichen λ, μ sein, wobei es kaum nützig ist, daran zu erinnern, dass dabei jeder Logarithmus durch gleich viele Decimalstellen ausgedrückt voransgesetzt wird. Wenn nun schon ϵ dem wahren Werthe von E bereits so nahe kommt, dass man die Veränderungen des Logarithmus des Sinus von ϵ bis zu $\epsilon + x$, und die Veränderungen des Logarithmus der Zahl von $e \sin \epsilon$ bis zu $e \sin(\epsilon + x)$ als einformige annehmen kann, so lässt sich offenbar setzen: $e \sin(\epsilon + x) = e \sin \epsilon \pm \frac{\lambda x}{\mu}$, wobei das obere Zeichen für den ersten und vierten Quadranten, das untere für den zweiten und dritten gilt. — Es sei daher $\epsilon + x = M + e \sin(\epsilon + x)$, so wird $x = \frac{\mu}{\mu + \lambda} (M + e \sin \epsilon - \epsilon)$ und der wahre Werth von E , oder von $\epsilon + x = M + e \sin \epsilon \pm \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (M + e \sin \epsilon - \epsilon)$ wobei die Zeichen in angegebener Weise bestimmt werden. Uebrigens sieht man leicht, dass ohne Rücksicht auf das Zeichen $\mu : \lambda = 1 : e \cos \epsilon$ und daher immer μ grösser als λ , woraus geschlossen wird, dass im ersten und letzten Quadranten $M + e \sin \epsilon$ zwischen ϵ und $\epsilon + x$, dass aber im zweiten und dritten $\epsilon + x$ zwischen ϵ und $M + e \sin \epsilon$ liegt; eine Regel, welche uns der Beachtung der Zeichen überhebt. Weicht der vorausgesetzte Werth von ϵ noch zu sehr von der Wahrheit ab, als dass die vorhin erwähnte Voraussetzung genau genug sein sollte, so wird man wenigstens durch diese Methode einen viel

näheren Werth finden, mit welchem man die nämliche Operation noch einmal und so oft es nöthig scheint, zu wiederholen hat. Es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn der Unterschied des ersten Werthes für ϵ vom wahren, als eine Grösse der ersten Ordnung angesehen wird, der Fehler des neuen Werthes zur zweiten Ordnung gehört und durch Wiederholung der Operation zur vierten, achten etc. Ordnung heruntergebracht wird. Desto kleiner überdies die Excentricität ist, desto schneller werden die successiven Verbesserungen convergiren.

12.

Ein genäherter Werth für E , von welchem man bei der Rechnung ausgehen kann, wird gemeiniglich zur Hand sein, besonders falls die Aufgabe für mehre Werthe von M zu lösen ist, von denen einige schon absolvirt sind. In Ermangelung aller anderen Hilfsmittel constirt aber wenigstens soviel, dass E zwischen den Grenzen M und $M \pm e$ liegen muss (wo e die in Secunden ausgedrückte Excentricität bezeichnet und wobei das obere Zeichen im ersten und zweiten Quadranten, das untere im dritten und vierten genommen wird). Es kann daher für den Anfangswerth von E entweder M , oder ein Werth angenommen werden, der nach irgend welcher Schätzung vermehrt oder vermindert ist. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass die erste Rechnung, sobald man (12) von einem wenig genauen Werthe ausgeht, keine ängstliche Genauigkeit erfordert, und dass kleinere Logarithmentafeln, z. B. die von Lalande, völlig ausreichen. Ausserdem kann man zur Bequemlichkeit der Rechnung immer solche Werthe für ϵ wählen, deren Sinus aus den Tafeln selbst ohne Interpolation sich entnehmen lässt, z. B. in Minuten oder in vollen Zehnern der Secunden, je nachdem die angewandten Tafeln in Minuten, oder von zehn zu zehn Secunden fortschreiten. Uebrigens kann Jeder leicht diejenigen Modificationen entwickeln, welche jene Vorschriften für den Fall erleiden, dass die Winkel in der neuen Decimaleintheilung ausgedrückt sind.

13.

Beispiel: Es sei die Excentricität dieselbe wie im Beispiel zu Art. 10. $M = 332^{\circ} 28' 54'' 77$. Hier ist daher $\log e$ in Secunden = 4,704 1513 und

deshalb $e = 50600'' = 14^\circ 3' 20''$. Da nun hier E kleiner sein muss als M , so setzen wir zur ersten Rechnung $\varepsilon = 326^\circ$, wofür man aus den kleinern Tafeln erhält:

$$\begin{array}{r} \log \sin \varepsilon \dots 9,747\ 56\ n, \\ \log e \text{ in Sec. } \dots 4,704\ 15 \\ \hline 4,451\ 71\ n \end{array} \quad \text{Veränderung für } 1^\circ \dots 19, \text{ also } \lambda = 0,312$$

hieraus $e \sin \varepsilon = -28295'' = -7^\circ 51' 35''$
 $M + e \sin \varepsilon \dots \dots \dots 324\ 37\ 20$

Veränderung des Logarithmus für eine Tafel-
 einheit, die hier $10''$ begleicht, $\dots 15,25$; also
 $\mu = 1,525$

Differirt von ε um $1^\circ 22' 40'' = 4960''$, folglich $\frac{0,312}{1,213} \times 4960'' = 1276'' = 21' 16''$. Hiermit wird der verbesserte Werth von $E = 324^\circ 37' 20'' - 21' 16'' = 324^\circ 16' 4''$, mit welchem man die Rechnung nach grösseren Tafeln wiederholt.

$$\begin{array}{r} \log \sin \varepsilon \dots 9,766\ 4112\ n \\ \log e \dots \dots 4,704\ 1513 \end{array} \quad \lambda = 29,25$$

$$\begin{array}{r} 4,470\ 5625\ n \\ e \sin \varepsilon = -29550'' 34 = -8^\circ 12' 30'' 34 \\ M + e \sin \varepsilon \dots \dots \dots 324^\circ 16' 24'' 43 \end{array} \quad \mu = 146$$

Differirt von ε um $\dots \dots \dots -20'' 43$. Multiplirt man diese

Differenz durch $\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{29,25}{116,75}$, so erhält man $-5'' 12$ und daher ist der aufs Neue verbesserte Werth für $E = 324^\circ 16' 24'' 43 + 5'' 12 = 324^\circ 16' 29'' 55$, innerhalb $0'' 01$ genau.

(13)

14.

Zur Bestimmung der wahren Anomalie und des radius vector aus der excentrischen Anomalie geben die Gleichungen des Art. 8 mehre Methoden an die Hand, von denen wir die vorzüglichsten erläutern wollen.

I. Nach der gewöhnlichen Methode wird v durch die Gleichung VII und dann r durch die Gleichung II bestimmt. Auf diese Weise steht das Beispiel des vorhergehenden Artikels, wenn man den für p in Art. 10 gegebenen Werth beibehält, so:

$\frac{1}{2} E = 162^{\circ} 8' 14'' 75.$	$\log e \dots\dots\dots 9,389\ 7262$
$\log \tan \frac{1}{2} E \dots\dots\dots 9,508\ 2198\ n$	$\log \cos v \dots\dots\dots 9,849\ 6597$
$\log \tan (45^{\circ} - \frac{1}{2} \varphi) \dots\dots\dots 9,891\ 2427$	$9,239\ 3859$
$\log \tan \frac{1}{2} v \dots\dots\dots 9,616\ 9771\ n$	$\frac{e \cos v}{\log p} = 0,173\ 5345$
$\frac{1}{2} v = 157^{\circ} 30' 41'' 50$	$\log p \dots\dots\dots 0,395\ 4837$
$v = 315\ 1\ 23,00$	$\log (1 + e \cos v) \dots\dots\dots 0,069\ 4959$
	$\log r \dots\dots\dots 0,325\ 9878$

II. Kürzer ist folgende Methode, wenn mehrere Orte zu berechnen sind, für welche man die constanten Logarithmen der Grössen $\sqrt{a(1+e)}$, $\sqrt{a(1-e)}$ nur einmal zu berechnen braucht. Aus den Gleichungen V und VI erhält man

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} v \sqrt{r} &= \sin \frac{1}{2} E \sqrt{a(1+e)} \\ \cos \frac{1}{2} v \sqrt{r} &= \cos \frac{1}{2} E \sqrt{a(1-e)} \end{aligned}$$

wodurch $\frac{1}{2} v$ und $\log \sqrt{r}$ schnell bestimmt werden. Im Allgemeinen wird allerdings — sobald man $P \sin Q = A$, $P \cos Q = B$ hat — Q durch die Formel $\tan Q = \frac{A}{B}$ gefunden, und dann ist hiernach $P = \frac{A}{\sin Q}$ oder $P = \frac{B}{\cos Q}$

Die Erstere wendet man an, wenn $\sin Q$ grösser als $\cos Q$ ist; die zweite, wenn $\cos Q$ grösser als $\sin Q$ ist. Gemeinlich schliessen die Aufgaben, bei welchen man zu solchen Gleichungen gelangt, (wie dieselben denn in diesem Werke sehr häufig vorkommen) die Bedingung in sich, dass P eine positive Grösse sein muss, und dann wird der Zweifel, ob Q innerhalb 0° bis 180° , oder von 180° — 360° zu nehmen ist, von selbst beseitigt. Ohne das Vorhandensein einer solchen Bedingung aber bleibt diese Bestimmung unserem Ermessen überlassen.

In unserem Beispiele haben wir $e = 0,245\ 3162$,

$\log \sin \frac{1}{2} E \dots 9,486\ 7632$	$\log \cos \frac{1}{2} E \dots\dots 9,978\ 5434\ n$
$\log \sqrt{a(1+e)} \dots\dots 0,258\ 8593$	$\log \sqrt{a(1-e)} \dots\dots 0,150\ 1020$

Hieraus

$\log \sin \frac{1}{2} v \sqrt{r} \dots 9,745\ 6225$	} woraus	$\log \tan \frac{1}{2} v = 9,616\ 9771\ n$
$\log \cos \frac{1}{2} v \sqrt{r} \dots 0,128\ 6454\ n$		$\frac{1}{2} v = 157^{\circ} 30' 41'' 50$
$\log \cos \frac{1}{2} v \dots 9,965\ 6515\ n$		$v = 315\ 1\ 23,00$
$\log \sqrt{r} \dots\dots\dots 0,162\ 9939$		
$\log r \dots\dots\dots 0,325\ 9878$		

(14)

III. Diesen Methoden fügen wir eine dritte hinzu, welche beinahe ebenso kurz, als die zweite, dieser aber da, wo die äusserste Genauigkeit verlangt wird, meistens vorzuziehen ist. Zuerst wird nämlich r durch die Gleichung III, und sodann v aus X bestimmt. Unser auf diese Weise behandeltes Beispiel steht dann so:

log e	9,389 7262	log sin E	9,766 3366 n
log cos E	9,909 4637	log $\sqrt{(1-e \cos E)}$	9,951 7744
	9,299 1899		9,814 5622 n
$e \cos E =$	0,199 1544	log sin $\frac{1}{2} q$	9,092 0395
log a	0,422 4389	log sin $\frac{1}{2}(v-E)$	8,906 6017 n
log $(1-e \cos E)$..	9,903 5488	$\frac{1}{2}(v-E) = -4^\circ 37' 33'' 24$	
log r	0,325 9877	$v-E = -9 \ 15 \ 6 \ 48$	
		$v = 315 \ 1 \ 23 \ 02$	

Zur Prüfung der Rechnung ist die Formel VIII oder XI sehr bequem, vorzüglich wenn v und r durch die dritte Methode bestimmt sind. Hier folgt die Rechnung:

log $\frac{a}{r}$ sin E	9,862 7878 n	log sin $E \sqrt{\frac{a}{r}}$	9,814 5622 n
log cos q	9,986 5224	log cos $\frac{1}{2} q$	9,996 6567
	9,849 3102 n		9,811 2189 n
log sin v	9,849 3102 n	log sin $\frac{1}{2}(v+E)$	9,811 2189 n

15.

Da die mittlere Anomalie M , wie wir gesehen haben, durch v und q vollständig bestimmt wird, und ebenso v durch M und q , so ist klar, dass, wenn alle drei Grössen zugleich als veränderliche betrachtet werden, unter ihren differentialen Aenderungen eine Bedingungsgleichung Statt finden müsse, deren Erforschung nicht überflüssig erscheint. Indem man zuerst die Gleichung VII im Art. 8 differentirt, erhält man $\frac{dE}{\sin E} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{dq}{\cos q}$; differentirt man nun auch die Gleichung XII, so folgt $dM = (1-e \cos E) dE - \sin E \cos q dq$. Eliminiert man aus diesen Differentialgleichungen dE , so resultirt

$$dM = \frac{\sin E(1 - e \cos E)}{\sin v} dv - \left(\sin E \cos \varphi + \frac{\sin E(1 - e \cos E)}{\cos \varphi} \right) d\varphi \quad (15)$$

oder, falls man für $\sin E$ und für $1 - e \cos E$ ihre Werthe aus den Gleichungen VIII und III substituirt:

$$dM = \frac{rr}{aa \cos \varphi} dv - \frac{r(r+p) \sin v}{aa \cos \varphi^2} d\varphi$$

oder endlich, wenn man jeden Coefficienten nur durch v und φ ausdrückt:

$$dM = \frac{\cos \varphi^2}{(1 + e \cos v)^2} dv - \frac{(2 + e \cos v) \sin v \cos \varphi^2}{(1 + e \cos v)^2} d\varphi$$

Betrachtet man umgekehrt v als eine Function der Grössen M und φ , so erhält die Gleichung folgende Form:

$$dv = \frac{aa \cos \varphi}{rr} dM + \frac{(2 + e \cos v) \sin v}{\cos \varphi} d\varphi$$

oder durch Einführung von E statt v

$$dv = \frac{aa \cos \varphi}{rr} dM + \frac{aa}{rr} (2 - e \cos E - e) \sin E d\varphi.$$

16.

Der radius vector r wird durch v und φ oder durch M und φ noch nicht vollständig bestimmt, sondern hängt derselbe überdies von p oder von a ab. Sein Differential besteht daher aus drei Gliedern. Durch Differentiation der Gleichung II im Art. 8 erhält man

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} dv - \frac{\cos \varphi \cos v}{1 + e \cos v} d\varphi$$

Setzt man hier $\frac{dp}{p} = \frac{da}{a} - 2 \tan \varphi d\varphi$, (was aus der Differentiation der Gleichung I folgt) und drückt zufolge des vorhergehenden Artikels dv durch dM und $d\varphi$ aus, so folgt nach den nöthigen Reductionen

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{a}{r} \tan \varphi \sin v dM - \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v d\varphi, \text{ oder}$$

$$dr = \frac{r}{a} da + a \tan \varphi \sin v dM - a \cos \varphi \cos v d\varphi$$

Uebrigens beruhen diese, sowie die im vorhergehenden Artikel entwickelten Formeln auf der Annahme, dass v , φ und M oder vielmehr dv , $d\varphi$ und dM in Theilen des Radius dargestellt werden. Will man also die Veränderungen der Winkel v , φ , M in Secunden aus-

drücken, so muss man entweder diejenigen Theile der Formeln, welche $d r$, $d q$ oder $d M$ enthalten, durch 206264,8 dividiren, oder diejenigen, welche $d r$, $d p$ oder $d a$ enthalten, durch dieselbe Zahl multipliciren. Es werden daher die Formeln des vorhergehenden Artikels, welche in dieser Beziehung homogen sind, einer Aenderung nicht bedürfen.

17.

(16) Wir wollen noch Einiges über die Untersuchung der grössten Mittelpunktsgleichung hinzufügen. Zuvörderst ist von selbst klar, dass der Unterschied zwischen der excentrischen und mittleren Anomalie ein Grösstes ist für $E = 90^\circ$, wo er gleich e (in Graden u. s. w. ausgedrückt) ist; der radius vector in diesem Punkte ist $= a$; woraus $v = 90^\circ + q$ und so ist die ganze Gleichung des Mittelpunkts $= q + e$, welche jedoch hier nicht ein Grösstes ist, weil der Unterschied zwischen v und E noch über q hinaus anwachsen kann. Dieser Unterschied wird ein Grösstes für $d(v - E) = 0$, oder für $d v = d E$, wo die Excentricität offenbar als constant anzusehen ist. Da im Allgemeinen $\frac{d v}{\sin v} = \frac{d E}{\sin E}$, so erhellt bei dieser Annahme, dass in dem Punkte, wo die Differenz zwischen v und E ein Grösstes ist, $\sin v = \sin E$ sein muss; wodurch man aus den Gleichungen VIII und III erhält: $r = a \cos q$; $e \cos E = 1 - \cos q$, oder $\cos E = + \tan \frac{1}{2} q$. Ebenso wird gefunden: $\cos r = - \tan \frac{1}{2} q$, weshalb sein wird^{*)}: $v = 90^\circ + \text{arc. sin } \tan \frac{1}{2} q$, $E = 90^\circ - \text{arc. sin } \tan \frac{1}{2} q$, hieraus ferner $\sin E = \sqrt{1 - \tan^2 \frac{1}{2} q^2} = \frac{\sqrt{\cos q}}{\cos \frac{1}{2} q}$; so dass die ganze Gleichung des Mittelpunkts in diesem Punkte wird $= 2 \text{ arc. sin } \tan \frac{1}{2} q + 2 \sin \frac{1}{2} q \sqrt{\cos q}$, wobei der zweite Theil in Graden etc. ausgedrückt ist. In demjenigen Punkte endlich, wo die ganze Gleichung des Mittelpunkts ein Grösstes ist, muss $d v = d M$ werden und daher nach Art. 15, $r = a \sqrt{\cos q}$; hiernach wird

$$\cos v = - \frac{1 - \cos q^{\frac{3}{2}}}{e}, \quad \cos E = \frac{1 - \sqrt{\cos q}}{e} = \frac{1 - \cos q}{e(1 + \sqrt{\cos q})} = \frac{\tan \frac{1}{2} q}{1 + \sqrt{\cos q}}$$

^{*)} Auf diejenigen Maxima, die zwischen dem Aphel und dem Perihel liegen, braucht man keine Rücksicht zu nehmen, da sie offenbar von den zwischen Perihel und Aphel belegenen nur in den Zeichen verschieden sind.

durch welche Formel man E mit der äussersten Genauigkeit bestimmen kann. Wenn E gefunden ist, so wird mittelst der Gleichungen X und XII die Gleichung des Mittelpunktes

$$= 2 \text{ arc. sin } \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi \sin E}{\sqrt{\cos \varphi}} + e \sin E.$$

Bei dem Ausdrucke der grössten Mittelpunktsgleichung durch eine, nach den Potenzen der Excentricität fortschreitende Reihe, die mehre Schriftsteller abgehandelt haben, will ich mich hier nicht aufhalten. Als Beispiel wollen wir einen Conspetus der drei hier betrachteten Maxima für die Juno hinzufügen, deren Excentricität nach den neuesten Elementen = 0,255 4996 angenommen ist.

Maximum	E	$E-M$	$v-E$	$r-M$
$E-M$	90° 0' 0"	14° 38' 20" 57	14° 48' 11" 48	29° 26' 32" 05
$v-E$	82 32 9	14 30 54 01	14 55 41 79	29 26 35 80
$v-M$	86 14 40	14 36 27 39	14 53 49 57	29 20 16 96

18.

In der Parabel würden die excentrische Anomalie, die mittlere Ano- (17) malie und die mittlere Bewegung = 0 werden, und hier können also diese Begriffsbestimmungen nicht zur Vergleichung der Bewegung mit der Zeit dienen. Jedoch bedürfen wir bei der Parabel zur Integrirung von $rrdv$ eines Hilfswinkels überall nicht; denn es wird

$$rrdv = \frac{ppdv}{4 \cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{pp d \tan \frac{1}{2} v}{2 \cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{1}{2} pp (1 + \tan \frac{1}{2} v^2) d \tan \frac{1}{2} v,$$

und daher: $\int rrdv = \frac{1}{2} pp (\tan \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2} v^3) + \text{const.}$ Wenn man die Zeit vom Durchgange durch das Perihel zu zählen beginnt, so wird die Constante = 0 und man hat daher

$$\tan \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2} v^3 = \frac{2tkV(1+\mu)}{p^{\frac{3}{2}}}$$

durch welche Formel man t aus v und v aus t ableiten kann, sobald p und μ bekannt sind. Statt p pflegt bei parabolischen Elementen der radius vector im Perihel, der = $\frac{1}{2}p$ ist, angewandt und die Masse überhaupt vernachlässigt

zu werden. Schwerlich wird es jemals möglich sein, die Masse eines solchen Körpers, dessen Bahn als Parabel berechnet wird, zu bestimmen und in Wahrheit scheinen die Cometen nach den neuesten und besten Beobachtungen eine so geringe Dichtigkeit und Masse zu besitzen, dass letztere als unmerklich angesehen und mit Sicherheit vernachlässigt werden kann.

19.

Die Auflösung der Aufgabe: aus der wahren Anomalie die Zeit abzuleiten und noch vielmehr die Auflösung des umgekehrten Problems, kann bedeutend durch eine Hilfstafel erleichtert werden, welche in sehr vielen astronomischen Büchern sich findet. Die bei weitem bequemste aber ist die Barker'sche Tafel, welche auch dem ausgezeichneten Werke von Olbers (Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen, Weimar 1797) angehängt ist. Dieselbe enthält für alle wahren Anomalien von 0 bis 180° von fünf zu fünf Minuten den Werth des Ausdruckes $75 \tan \frac{1}{2} v + 25 \tan \frac{1}{2} v^3$ unter dem Namen mittlere Bewegung (motus medius). Wird daher die Zeit verlangt, welche der wahren Anomalie v entspricht, so braucht man nur die mit dem Argumente v aus der Tafel genommene mittlere Bewegung durch $\frac{150k}{p^{\frac{3}{2}}}$ zu dividiren, welche Grösse die mittlere tägliche Bewegung (motus medius diurnus) heisst; wenn dagegen aus der Zeit die wahre Anomalie berechnet werden soll, so muss man die in Tagen ausgedrückte Zeit mit $\frac{150k}{p^{\frac{3}{2}}}$ multipliciren, um die mittlere Bewegung zu erhalten, womit man die entsprechende Anomalie aus der Tafel nimmt. Im Uebrigen entspricht offenbar einem negativen Werthe von v dieselbe mittlere Bewegung und Zeit, aber negativ genommen. Die nämliche Tafel dient daher ebensowohl für negative als für positive Anomalien. Will man statt p lieber den Abstand im Perihelie $\frac{1}{2}p = q$ benutzen, so wird die mittlere Bewegung ausgedrückt durch $\frac{k\sqrt{2812,5}}{q^{\frac{3}{2}}}$, wo der constante Factor $k\sqrt{2812,5}$ gleich wird: 0,912 279 061 und dessen Logarithmus = 9,960 1277069. Hat man die Anomalie v gefunden,

so wird der radius vector durch die schon oben erwähnte Formel $r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2}$ bestimmt.*)

20.

Durch Differentiation der Gleichung $\text{tang } \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \text{tang } \frac{1}{2} v^3 = 2tkp^{-\frac{1}{2}}$, erhält man, wenn alle Grössen v , t , p als veränderliche behandelt werden,

$$\frac{dv}{2 \cos \frac{1}{2} v^2} = 2kp^{-\frac{1}{2}} dt - 3tkp^{-\frac{3}{2}} dp, \text{ oder } dv = \frac{k\sqrt{p}}{rr} dt - \frac{3tk}{2rr\sqrt{p}} dp$$

Wünscht man die Veränderungen der Anomalie v in Secunden auszudrücken, so müssen auch beide Theile von dv auf diese Weise ausgedrückt werden, d. h. man muss für k den im Art. 6 gegebenen Werth $3548'' 188$ annehmen. Wenn nun überdies für p eingeführt wird $\frac{1}{2}p = q$, so erhält die Formel die Gestalt

$$dv = \frac{k\sqrt{2q}}{rr} dt - \frac{3kt}{rr\sqrt{2q}} dq,$$

wobei die constanten Logarithmen $\log k\sqrt{2} = 3,700 521 5724$; $\log 3k\sqrt{\frac{1}{2}} = 3,876 612 8315$ zur Anwendung kommen.

Ferner wird durch die Differentiation der Gleichung

$$r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v^2} \text{ erhalten } \frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \text{tang } \frac{1}{2} v^2 dv,$$

oder wenn man dv durch dt und dp ausdrückt:

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{3kt \text{tang } \frac{1}{2} v^2}{2rr\sqrt{p}} \right) dp + \frac{k\sqrt{p} \text{tang } \frac{1}{2} v^2}{rr} dt.$$

Der Coefficient von dp geht, wenn man für t den Werth aus v substituirt, über in

$$\frac{1}{p} - \frac{3p \text{tang } \frac{1}{2} v^2}{4rr} - \frac{p \text{tang } \frac{1}{2} v^2}{4rr} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{tang } \frac{1}{2} v^2 - \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} v^2 \text{tang } \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\cos v}{2r};$$

der Coefficient von dt aber wird = $\frac{k \sin v}{r\sqrt{p}}$; hieraus folgt $dr = \frac{1}{2} \cos v dp + \frac{k \sin v}{\sqrt{p}} dt$ oder, wenn man q für p einführt,

$$dr = \cos v dq + \frac{k \sin v}{\sqrt{2q}} dt \quad (19)$$

Der hier anzuwendende constante Logarithmus ist $\log k\sqrt{\frac{1}{2}} = 8,085 066 4436$.

*) Eine zu diesem Artikel gehörende Bemerkung von Gauss in Nr. 474 der Astronomischen Nachrichten siehe Anhang. Anmerkung des Uebersetzers.

21.

In der Hyperbel würden q und E imaginäre Grössen werden, und man muss, um solche zu vermeiden, an deren Stelle andere Hilfsgrössen einführen. Den Winkel, dessen Cosinus $= \frac{1}{e}$ ist, bezeichnen wir schon oben mit ψ und fanden den radius vector $= \frac{p}{2e \cos \frac{1}{2}(v-\psi) \cos \frac{1}{2}(v+\psi)}$. Die Factoren in dem Nenner dieses Bruches, $\cos \frac{1}{2}(v-\psi)$ und $\cos \frac{1}{2}(v+\psi)$, werden einander gleich, wenn $v=0$ ist, der zweite verschwindet bei dem grössten positiven Werthe von v , der erste aber bei dem grössten negativen Werthe. Setzt man daher $\frac{\cos \frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos \frac{1}{2}(v+\psi)} = u$, so wird $u = 1$ im Perihel; es wächst in infinitum, während v sich seinem Grenzwerte $180^\circ - \psi$ nähert; dagegen nimmt es in infinitum ab, wenn v zu seinem anderen Grenzwerte $-(180^\circ - \psi)$ zurückkehrt; so dass den entgegengesetzten Werthen für v die reciproken Werthe von u , oder, was dasselbe ist, solche Werthe entsprechen, deren Logarithmen complementäre sind.

Dieser Quotient u kann sehr bequem in der Hyperbel als Hilfsgrösse angewandt werden; und mit ungefähr gleicher Concinnität kann an seiner Stelle der Winkel fungiren, dessen Tangente $= \tan \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ ist, und den wir zur Verfolgung der Analogie mit der Ellipse, durch $\frac{1}{2} F$ bezeichnen wollen.

Auf diese Weise sammelt man leicht folgende Relationen zwischen den Grössen v , r , u , F , wobei wir $a = -b$ setzen, so dass b als positive Grösse herauskommt:

$$\text{I. } b = p \cotang \psi^2$$

$$\text{II. } r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v-\psi) \cos \frac{1}{2}(v+\psi)}$$

$$\text{III. } \tan \frac{1}{2} F = \tan \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \tan \frac{1}{2} v \tan \frac{1}{2} \psi = \frac{u-1}{u+1}$$

$$\text{IV. } u = \frac{\cos \frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos \frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2} F}{1 - \tan \frac{1}{2} F} = \tan(45^\circ + \frac{1}{2} F)$$

$$\text{V. } \frac{1}{\cos F} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) = \frac{1 + \cos \psi \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(v-\psi) \cos \frac{1}{2}(v+\psi)} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}$$

Wenn man von der Gleichung V auf beiden Seiten 1 abzieht, so folgt:

$$\begin{aligned} \text{VI. } \sin \frac{1}{2} v \sqrt{r} &= \sin \frac{1}{2} F \sqrt{\frac{p}{(e-1) \cos F}} = \sin \frac{1}{2} F \sqrt{\frac{(e+1)b}{\cos F}} \\ &= \frac{1}{2}(u-1) \sqrt{\frac{p}{(e-1)u}} = \frac{1}{2}(u-1) \sqrt{\frac{(e+1)b}{u}} \end{aligned} \quad (20)$$

In ähnlicher Weise wird, wenn man auf beiden Seiten 1 addirt:

$$\begin{aligned} \text{VII. } \cos \frac{1}{2} v \sqrt{r} &= \cos \frac{1}{2} F \sqrt{\frac{p}{(e+1) \cos F}} = \cos \frac{1}{2} F \sqrt{\frac{(e-1)b}{\cos F}} \\ &= \frac{1}{2}(u+1) \sqrt{\frac{p}{(e+1)u}} = \frac{1}{2}(u+1) \sqrt{\frac{(e-1)b}{u}} \end{aligned}$$

Dividirt man VI durch VII, so kommt man zu III zurück; die Multiplication ergibt:

$$\begin{aligned} \text{VIII. } r \sin v &= p \cotang \psi \tang F = b \tang \psi \tang F \\ &= \frac{1}{2} p \cotang \psi \left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2} b \tang \psi \left(u - \frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

Aus Combination der Gleichungen II und V leitet sich leicht ab:

$$\text{IX. } r \cos v = b \left(e - \frac{1}{\cos F}\right) = \frac{1}{2} b \left(2e - u - \frac{1}{u}\right)$$

$$\text{X. } r = b \left(\frac{e}{\cos F} - 1\right) = \frac{1}{2} b \left(e \left(u + \frac{1}{u}\right) - 2\right)$$

22.

Aus Differentiation der Formel IV folgt (wenn man ψ als beständige Grösse ansieht) $\frac{du}{u} = \frac{1}{2} \left(\tang \frac{1}{2}(v+\psi) - \tang \frac{1}{2}(v-\psi)\right) dv = \frac{r \tang \psi}{p} dv$;

hieraus $rrdv = \frac{pr}{u \tang \psi} du$; oder, falls für r der Werth aus X substituirt wird:

$$rrdv = bb \tang \psi \left(\frac{1}{2} e \left(1 + \frac{1}{uu}\right) - \frac{1}{u}\right) du$$

Integrirt man hierauf so, dass das Integral im Perihel verschwindet, so resultirt:

$$\int rrvdv = bb \tang \psi \left(\frac{1}{2} e \left(u - \frac{1}{u}\right) - \log u\right) = kt \sqrt{p} \cdot V(1+\mu) = kt \tang \psi \sqrt{b} \cdot V(1+\mu)$$

Hier ist der Logarithme ein hyperbolischer; will man daher Logarithmen aus dem Brigg'schen Systeme, oder allgemein aus einem Systeme anwenden, dessen Modul = λ ist, und die Masse μ (von der wir annehmen, dass sie für einen

in der Hyperbel einherziehenden Körper unbestimmbar sei) vernachlässigen, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\text{XI. } \frac{1}{2} \lambda e \frac{uu-1}{u} - \log u = \frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}}$$

(21) oder durch Einführung von F ,

$$\lambda e \tan F - \log \tan (45^\circ + \frac{1}{2} F) = \frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn bei der Anwendung Briggs'sche Logarithmen vorausgesetzt werden, so haben wir $\log \lambda = 9,637\,7843\,113$ und $\log \lambda k = 7,873\,3657\,527$, aber man kann eine etwas grössere Genauigkeit erreichen, wenn die hyperbolischen Logarithmen unmittelbar angewandt werden. Hyperbolische Logarithmen der Tangenten werden in mehren Tafel-Sammlungen angetroffen, z. B. in der Schulze'schen, und in noch grösserer Ausdehnung bei „*Benjamin Ursinus, grosser logarithmischer Canon der Dreiecke, Cöln 1624*“, wo sie von 10 zu 10 Secunden fortgehen. Uebrigens zeigt die Formel XI, dass den reciproken Werthen von u , oder den entgegengesetzten Werthen von F und v , auch entgegengesetzte Werthe von t entsprechen, weshalb gleiche Theile der Hyperbel die auf beiden Seiten gleich weit vom Perihel abstehen, in gleichen Zeiten beschrieben werden.

23.

Benutzt man, um die Zeit aus der wahren Anomalie zu finden, die Hilfsgrösse u , so wird deren Werth am bequemsten durch die Gleichung IV bestimmt, worauf die Formel II sofort ohne neue Rechnung p ans r , oder r ans p giebt. Ist alsdann u gefunden, so giebt Formel XI die Grösse $\frac{\lambda k t}{b^{\frac{3}{2}}}$, welche der mittleren Anomalie in der Ellipse analog ist, und mit N bezeichnet werde, und hieraus ergibt sich die seit dem Durchgange durch's Perihel verfllossene Zeit. Da der erstere Theil von N , nämlich $\frac{\lambda e(uu-1)}{2u}$ durch die Formel VIII $= \frac{\lambda r \sin v}{b \sin \varphi}$ wird, so kann die doppelte Berechnung dieser Grösse zur Prüfung der Schärfe dienen, oder es lässt sich, wenn man dies vorzieht, N ohne u in folgender Weise bestimmen:

$$\text{XII. } N = \frac{\lambda \tan \varphi \sin v}{2 \cos \frac{1}{2}(v + \varphi) \cos \frac{1}{2}(v - \varphi)} - \log \frac{\cos \frac{1}{2}(v - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(v + \varphi)}$$

Beispiel. Es sei $e = 1,2618820$ oder $\psi = 37^{\circ} 35' 0''$; $v = 18^{\circ} 51' 0''$;
 $\log r = 0,0333585$. Dann steht die Rechnung für u, p, b, N, t so:

$$\begin{array}{l} \log \cos \frac{1}{2}(v-\psi) \dots\dots\dots 9,9941706 \\ \log \cos \frac{1}{2}(v+\psi) \dots\dots\dots 9,9450577 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{woraus } \log u \dots\dots\dots 0,0491129$$

$$\log r \dots\dots\dots 0,0333585 \qquad \qquad \qquad u = 1,1197289$$

$$\log 2e \dots\dots\dots 0,4020488 \qquad \qquad \qquad uu = 1,2537928$$

$$\log p \dots\dots\dots 0,3746356$$

$$\log \cotang \psi^2 \dots\dots\dots 0,2274244$$

$$\log b \dots\dots\dots 0,6020600$$

$$\log \frac{r}{b} \dots\dots\dots 9,4312985$$

$$\log \sin v \dots\dots\dots 9,5093258$$

$$\log \lambda \dots\dots\dots 9,6377843$$

$$\text{Compl. } \log \sin \psi \dots\dots\dots 0,2147309$$

$$8,7931395$$

$$\text{Erster Theil von } N = 0,0621069$$

$$\log u \qquad \qquad \qquad = 0,0491129$$

$$N \qquad \qquad \qquad = 0,0129940$$

$$\log \lambda k \dots\dots\dots 7,8733658 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\frac{3}{2} \log b \dots\dots\dots 0,9030900 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

Die andere Rechnung

$$\log (uu-1) \dots\dots\dots 0,4044793$$

$$\text{Compl. } \log u \dots\dots\dots 9,9508871$$

$$\log \lambda \dots\dots\dots 9,6377843$$

$$\log \frac{1}{2} e \dots\dots\dots 9,7999888$$

$$8,7931395$$

$$\log N \dots\dots\dots 8,1137429$$

$$\text{Differenz} \dots\dots\dots 6,9702758$$

$$\log t \dots\dots\dots 1,1434671$$

$$t = \qquad \qquad \qquad 13,91448$$

(22)

24.

Soll die Rechnung, mit hyperbolischen Logarithmen geführt werden, so empfiehlt es sich, dabei die durch Gleichung III zu bestimmende Hilfsgrösse F zu brauchen, und hieraus N durch XI zu suchen; der halbe Parameter wird aus dem radius vector, oder wechselseitig dieser aus jenem mittelst Formel VIII berechnet; der zweite Theil von N kann auf doppelte Weise ermittelt werden, nämlich durch die Formel: $\log \text{hyp tang } (45^{\circ} + \frac{1}{2} F)$ oder durch $\log \text{hyp cos } \frac{1}{2}(v-\psi) - \log \text{hyp cos } \frac{1}{2}(v+\psi)$. Im Uebrigen ist es klar, dass die Grösse N hier, wo $\lambda = 1$ ist, im Verhältnisse von $1 : \lambda$ grösser

4.

heraus kommt, als bei der Anwendung von Brigg'schen Logarithmen. Unser, auf diese Weise behandeltes Beispiel steht dann so:

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi$	9,531 8179	
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$	9,220 1009	
<hr style="width: 100%;"/>		
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} F$	8,751 9188	$\frac{1}{2} F = 3^{\circ} 13' 58'' 12$
$\log e$	0,101 0188	
$\log \operatorname{tang} F$	9,054 3366	
<hr style="width: 100%;"/>		
$e \operatorname{tang} F =$	9,155 3554	$C. \log \operatorname{hyp} \cos \frac{1}{2}(v-\psi) = 0,013 42266$
$\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^{\circ} + \frac{1}{2} F) =$	0,143 00638	$C. \log \operatorname{hyp} \cos \frac{1}{2}(v+\psi) = 0,126 50930$
N	= 0,029 91972	Differenz = 0,113 08664
$\log k$	8,235 5814	$\log N$
$\frac{1}{2} \log b$	0,903 0900	8,475 9575
		<hr style="width: 100%;"/>
		Differenz
		7,332 4914
		<hr style="width: 100%;"/>
		$\log t$
		1,143 4661
		<hr style="width: 100%;"/>
		$t =$
		13,91445

25.

- (23) Zur Auflösung der umgekehrten Aufgabe, aus der Zeit die wahre Anomalie und den radius vector zu bestimmen — wird zuerst aus $N = \lambda k b^{-1} t$ durch Gleichung XI die Hilfsgrösse u oder F ermittelt. Die Auflösung dieser transcendente Gleichung geschieht durch Versuche, welche durch ähnliche Kunstgriffe abgekürzt werden können, wie die in Art. 11 auseinandergesetzten. Wir setzen uns darüber hinweg, dies näher noch zu erklären; denn es scheint uns nicht der Mühe werth, diese Vorschriften ebenso ängstlich anzufeuern, als die für die Ellipse, da der Fall der hyperbolischen Bewegung in den Himmelsräumen vielleicht kann jemals sich zuträgt, und da ausserdem alle Fälle, die vielleicht eintreten sollten, durch eine andere, weiter unten auseinanderzusetzende Methode sich erledigen lassen. Nachdem man F oder u gefunden hat, wird daraus v durch Formel III, und sodann r aus II oder VIII bestimmt; bequemer werden noch v und r zugleich mittelst der Formel VI und VII eruiert, und zur Prüfung der Rechnung kann man die eine oder die andere der übrigen Formeln benutzen.

26.

Beispiel. Wenn e und b so wie im vorhergehenden Beispiele bleiben, und $t = 65,41236$ ist, werden gesucht: v und r . Bei Briggs'schen Logarithmen hat man

$$\log t \dots\dots\dots 1,815\ 6598$$

$$\log \lambda k b^{-\frac{1}{2}} \dots\dots 6,970\ 2758$$

$$\log N \dots\dots\dots 8,785\ 9356; N = 0,061\ 08514.$$

Hieraus findet sich, dass der Gleichung

$$N = \lambda e \tan g F - \log \tan g (45^\circ + \frac{1}{2} F) \text{ Gentige geleistet wird durch } F = 25^\circ 24' 27'' 66;$$

woraus nach Formel III:

$$\log \tan g \frac{1}{2} F \dots\dots 9,353\ 0120$$

$$\log \tan g \frac{1}{2} \psi \dots\dots 9,531\ 8179$$

$$\log \tan g \frac{1}{2} v \dots\dots 9,821\ 1941 \text{ also } \frac{1}{2} v = 33^\circ 31' 29'' 89; v = 67^\circ 2' 59'' 78.$$

Darnach hat man ferner:

$$\left. \begin{array}{l} \text{C. } \log \cos \frac{1}{2} (v + \psi) \dots\dots 0,213\ 7476 \\ \text{C. } \log \cos \frac{1}{2} (v - \psi) \dots\dots 0,014\ 5197 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Differenz} \dots\dots\dots 0,199\ 2279 \\ \log \tan g (45^\circ + \frac{1}{2} F) \dots\dots 0,199\ 2280 \end{array}$$

$$\log \frac{P}{2e} \dots\dots\dots 9,972\ 5868$$

$$\log r \dots\dots\dots 0,200\ 8541$$

27.

Wird die Gleichung IV so differentiirt, dass u , v , ψ zugleich als veränderliche behandelt werden, so kommt

$$\frac{du}{u} = \frac{\sin \psi \, dv + \sin v \, d\psi}{2 \cos \frac{1}{2} (v - \psi) \cos \frac{1}{2} (v + \psi)} = \frac{r \tan g \psi}{p} \, dv + \frac{r \sin v}{p \cos \psi} \, d\psi \quad (24)$$

Differentiirt man ebenso Gleichung XI, so ergibt sich unter den differentialen Veränderungen der Grössen u , ψ , N folgende Relation:

$$\frac{dN}{\lambda} = \left(\frac{1}{2} e \left(1 + \frac{1}{uu} \right) - \frac{1}{u} \right) du + \frac{(uu-1) \sin \psi}{2u \cos \psi^2} \, d\psi, \text{ oder}$$

$$\frac{dN}{\lambda} = \frac{r}{bu} \, du + \frac{r \sin v}{b \cos \psi} \, d\psi$$

und hieraus erhalten wir, wenn du mittelst der vorhergehenden Gleichung eliminiert wird:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{\lambda} &= \frac{rr}{bb \tan \varphi} dr + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{r \sin v}{b \cos \varphi} d\psi, \text{ oder} \\ dr &= \frac{bb \tan \varphi}{\lambda rr} dN - \left(\frac{b}{r} + \frac{b}{p}\right) \frac{\sin r \tan \varphi}{\cos \varphi} d\psi \\ &= \frac{bb \tan \varphi}{\lambda rr} dN - \left(1 + \frac{p}{r}\right) \frac{\sin v}{\sin \varphi} d\psi \end{aligned}$$

28.

Wird Gleichung X differentirt, und alles r , b , e , u dabei als veränderlich behandelt, auch für $de = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} d\psi$ substituiert, und zugleich du mit Hilfe der zufolge des vorhergehenden Artikels zwischen dN , dr , $d\psi$ bestehenden Gleichung eliminiert, so folgt:

$$\begin{aligned} dr &= \frac{r}{b} db + \frac{bb e (uu-1)}{2 \lambda ur} dN \\ &+ \frac{b}{2 \cos \varphi^2} \left\{ \left(u + \frac{1}{u}\right) \sin \psi - \left(u - \frac{1}{u}\right) \sin r \right\} d\psi \end{aligned}$$

Der Coefficient von dN geht durch Gleichung VIII über in $\frac{b \sin v}{\lambda \sin \varphi}$; der Coefficient $d\psi$ aber, wenn man aus Gleichung IV, $u(\sin \psi - \sin r) = \sin(\psi - v)$; $\frac{1}{u}(\sin \psi + \sin r) = \sin(\psi + v)$ setzt, wird verändert in: $\frac{b \sin \varphi \cos v}{\cos \varphi^2} = \frac{p \cos v}{\sin \varphi}$, so dass man hat

$$dr = \frac{r}{b} db + \frac{b \sin v}{\lambda \sin \varphi} dN + \frac{p \cos v}{\sin \varphi} d\psi$$

In so fern man N als eine Function von b und t betrachtet, wird $dN = \frac{N}{t} dt - \frac{N}{t} \frac{N}{b} db$. Bei Substituierung dieses Werthes werden dr und ebenso im vorhergehenden Artikel de , durch dt , db , $d\psi$ ausgedrückt erhalten. Uebrigens muss das, was schon oben erwähnt, auch hier wiederholt werden, (25) nämlich, dass wenn die Veränderungen der Winkel u und ψ nicht in Theilen des Radius, sondern in Secunden ausgedrückt genommen werden, entweder alle Glieder, die dr , $d\psi$ enthalten, durch 206 264,8 zu dividiren, oder die übrigen durch diese Zahl zu multipliciren sind.

29.

Da die in der Ellipse angewandten Hilfsgrößen φ , E , M in der Hyperbel imaginäre Werthe erhalten, so wird es nützlich sein, deren Verbindung mit den reellen Größen, die wir gebraucht haben, zu erforschen; wir fügen daher die vorzüglichsten Relationen hinzu, und bezeichnen die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ mit i .

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= e = \frac{1}{\cos \psi} \\ \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = i \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = i \tan \frac{1}{2} \psi \\ \tan \varphi &= \frac{1}{2} \cotang(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) - \frac{1}{2} \tan(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) = -\frac{i}{\sin \psi} \\ \cos \varphi &= i \tan \psi \\ \varphi &= 90^\circ + i \log(\sin \varphi + i \cos \varphi) = 90^\circ - i \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2} \psi) \\ \tan \frac{1}{2} E &= i \tan \frac{1}{2} F = \frac{i(u-1)}{u+1} \\ \frac{1}{\sin E} &= \frac{1}{2} \cotang \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} E = -i \cotang F \text{ oder} \\ \sin E &= i \tan F = \frac{i(uu-1)}{2u} \\ \cotang E &= \frac{1}{2} \cotang \frac{1}{2} E - \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} E = -\frac{i}{\sin F} \text{ oder} \\ \tan E &= i \sin F = \frac{i(uu-1)}{uu+1} \\ \cos E &= \frac{1}{\cos F} = \frac{uu+1}{2u}; \quad iE = \log(\cos E + i \sin E) = \log \frac{1}{u} \\ E &= i \log u = i \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2} F) \\ M &= E - e \sin E = i \log u - \frac{i e(uu-1)}{2u} = -\frac{iN}{\lambda} \end{aligned}$$

Die Logarithmen in diesen Formeln sind hyperbolische.

30.

Da sämtliche, aus den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln (26) genommenen Zahlen eine absolute Genauigkeit nicht zulassen, sondern bis auf einen gewissen Grad nur genähert sind, so kann durch alle mit ihrer Hilfe angestellten Rechnungen die Wahrheit nur genähert bekannt werden. In sehr

vielen Fällen geben zwar die gewöhnlichen Tafeln, die bis auf die siebente Stelle sicher sind (d. h. von der Wahrheit nirgends mehr oder weniger als eine halbe Einheit der siebenten Decimalziffer abweichen) eine mehr als hinreichende Genauigkeit, so dass die unvermeidlichen Irrthümer von keiner Bedeutung sind. Nichtsdestoweniger kann es in besonderen Fällen vorkommen, dass die Fehler der Tafeln einen so verstärkten Einfluss äussern, dass man sich von einer sonst sehr guten Methode lossagen und eine andere wählen muss. Derartige Fälle können auch in den bis jetzt auseinandergesetzten Rechnungen passiren. Es wird daher am Platze sein, hier einige Untersuchungen über den Grad der Genauigkeit anzustellen, welchen die gewöhnlichen Tafeln bei diesen Rechnungen erlauben. Da aber hier nicht der Ort ist, dieses für den praktischen Rechner sehr wichtige Argument zu erschöpfen, so wollen wir die Untersuchung so weit führen, dass es für unsere Zwecke genügt und dass jeder, dem daran liegt, sie weiter ausfeilen und auf andere Operationen ausdehnen kann.

31.

Jeder Logarithme, Sinus, Tangente etc. (oder überhaupt jede aus den Tafeln entnommene irrationale Grösse) ist einem Irrthume unterworfen, der bis auf eine halbe Einheit der letzten Stelle steigen kann. Wir bezeichnen diese Grenze des Irrthums mit ω , die daher in den gewöhnlichen Tafeln = 0,000 00005 wird. Wenn ein Logarithmus etc. nicht unmittelbar aus den Tafeln genommen werden kann, sondern durch Interpolation gefunden werden muss, so kann der Irrthum aus einem doppelten Grunde noch etwas grösser werden. Erstens nämlich pflegt, so oft der Proportionaltheil nicht ein Ganzes (wenn man dabei die letzte Stelle als Einheit ansieht) ist, dafür das nächst grössere oder kleinere Ganze genommen zu werden. Man sieht leicht, dass aus diesem Grunde der Irrthum sogar bis aufs Doppelte vermehrt werden könne. Auf diese Vermehrung des Irrthums nehmen wir aber hier überhaupt keine Rücksicht, da nichts im Wege steht, dem Proportionaltheile noch die eine oder die andere Decimalstelle hinzuzufügen und es ist ohne Weiteres klar, dass der interpolirte Logarithmus, wenn der Proportionaltheil vollkommen genau wäre, keinem grösseren Irrthume unterworfen sein könne, als die unmittelbar in den Tafeln stehenden Logarithmen, insoweit es erlaubt ist, deren Aenderungen als gleichförmige zu

betrachten. Die zweite Vermehrung des Irrthums entsteht daraus, dass eben letztere Voraussetzung nicht in aller Strenge wahr ist. Aber auch diese Vermehrung vernachlässigen wir, da die Wirkung der zweiten und höheren Differenzen (27) in nahezu allen Fällen von keiner Bedeutung ist (vorzüglich wenn für die trigonometrischen Grössen die vortrefflichen Taylor'schen Tafeln angewandt werden), und mit leichter Mühe könnte man diesem Umstande Rechnung tragen, wo jene Wirkung vielleicht etwas grösser sein sollte. Wir setzen daher für alle Fälle den grössten unvermeidlichen Irrthum der Tafeln $= \omega$, wenn nämlich das Argument (d. h. die Zahl deren Logarithmus, oder der Winkel dessen Sinus etc. verlangt wird) völlig genau ist. Ist aber das Argument selbst nur näherungsweise bekannt, und nimmt man an, dass dessen grösstmöglichem Irrthume die logarithmische u. s. w. Veränderung ω' entspreche (welche durch Differentialrechnung sich bestimmen lässt), so kann der grösste Fehler des aus den Tafeln berechneten Logarithmen bis auf $\omega + \omega'$ steigen.

Umgekehrt ist, wenn mit Hilfe der Tafeln das einem gegebenen Logarithmus entsprechende Argument berechnet wird, der grösste Irrthum desselben derjenigen Veränderung gleich, welche der Veränderung ω im Logarithmus dann entspricht, wenn letzterer genau gegeben ist, oder welche der Veränderung des Logarithmus $\omega + \omega'$ entspricht, falls der Logarithmus selbst bis zum Belaufe von ω' fehlerhaft sein kann. Kaum braucht erwähnt zu werden, dass ω und ω' das nämliche Vorzeichen erhalten müssen.

Wenn mehrere, nur innerhalb gewisser Grenzen genaue Grössen addirt werden, so wird der grösste Irrthum der Summe gleich sein der Summe der einzelnen grössten, mit dem nämlichen Zeichen versehenen Irrthümer; weshalb denn auch bei der Subtraction von nur genähert richtigen Grössen, der grösste Irrthum in der Differenz gleich der Summe der einzelnen grössten Irrthümer sein wird. Bei der Multiplication oder Division einer nicht absolut genauen Grösse wird der grösste Irrthum in demselben Verhältnisse vermehrt oder vermindert, wie die Grösse selbst.

32.

Wir gehen nun zu der Anwendung dieser Grundsätze auf die nützlichsten der oben entwickelten Operationen über.

I. Wenn man bei der elliptischen Bewegung zur Berechnung der wahren Anomalie aus der excentrischen die Formel VII des Art. 8 anwendet, und voraussetzt, dass q und E als genau gelten, so kann beim $\log \tan(45^\circ - \frac{1}{2}q)$ und beim $\log \tan \frac{1}{2}E$ der Irrthum ω begangen werden und mithin in der Differenz $= \log \tan \frac{1}{2}v$ der Irrthum 2ω ; also wird der grösste, bei Bestimmung des Winkels $\frac{1}{2}v$ zu begehende Irrthum sein $\frac{3\omega d \frac{1}{2}v}{d \log \tan \frac{1}{2}v} = \frac{3\omega \sin v}{2\lambda}$, wobei λ den modulus der zu dieser Berechnung angewandten Logarithmen bedeutet. — Der Irrthum daher, dem die wahre Anomalie v unterworfen, wird in Secunden ausgedrückt $= \frac{3\omega \sin v}{\lambda} 206\,265'' = 0''0712 \sin v$, wenn Brigg'sche siebenstellige

(28) Logarithmen angewendet werden, so dass man immer innerhalb $0''07$ über den Werth von v gewiss sein kann; bei Benutzung kleinerer nur fünfstelliger Tafeln kann der Irrthum bis auf $7''12$ gehen.

II. Wird $e \cos E$ mit Hilfe von Logarithmen berechnet, so ist ein Irrthum möglich bis zu $\frac{3\omega e \cos E}{\lambda}$; und demselben Irrthum wird auch die Grösse $1 - e \cos E$ oder $\frac{r}{a}$ unterworfen sein. Bei Berechnung des Logarithmus dieser Grösse kann mithin der Irrthum steigen bis auf $(1 + \delta)\omega$, wo δ die positiv genommene Grösse $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$ bezeichnet. Bis zu derselben Grenze $(1 + \delta)\omega$ geht der beim $\log r$ mögliche Irrthum, wenn nämlich der $\log a$ als genau gegeben angesehen wird. So oft die Excentricität klein ist, so ist die Grösse δ immer in enge Grenzen eingeschlossen, wenn aber e wenig von Eins verschieden ist, so bleibt $1 - e \cos E$ sehr klein, so lange E klein ist; es kann daher dann δ zu einem nicht zu vernachlässigenden Betrage anwachsen, weshalb in diesem Falle die Formel III des Art. 8 weniger geeignet sein würde. — Die Grösse δ lässt sich auch so ausdrücken: $\frac{3(a-r)}{r} = \frac{3e(\cos v + e)}{1 - ee}$; eine Formel, die noch klarer zeigt, wann man den Irrthum $(1 + \delta)\omega$ vernachlässigen darf.

III. Wendet man die Formel X des Art. 8 zur Berechnung der wahren Anomalie aus der excentrischen an, so ist $\log \sqrt{\frac{a}{r}}$ dem Irrthume $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta)\omega$

unterworfen, und folglich $\log \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$ dem Irrthume $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \delta) \omega$; hieraus wird der grösste, bei Bestimmung des Winkels $v - E$ oder v mögliche Irrthum gefunden zu: $\frac{\omega}{\lambda} (7 + \delta) \tan \frac{1}{2} (v - E)$, oder in Secunden ausgedrückt und mit Anwendung von siebenstelligen Logarithmen $= (0'' 166 + 0'' 024 \delta) \tan \frac{1}{2} (v - E)$. Bei mässiger Excentricität werden δ und $\tan \frac{1}{2} (v - E)$ kleine Grössen sein, weshalb diese Methode eine grössere Genauigkeit gestattet, als die unter I betrachtete, dagegen wird letztere dann vorzuziehen sein, wenn die Excentricität recht gross ist und nahe an die Einheit herankommt, wo δ und $\tan \frac{1}{2} (v - E)$ recht beträchtliche Werthe erlangen können. Es lässt sich daher durch unsere Formeln stets leicht entscheiden, welcher von den beiden Methoden der Vorzug gebührt.

IV. Bei Bestimmung der mittleren Anomalie aus der excentrischen mittelst der Formel XII im Art. 8 kann der Irrthum der mit Logarithmen berechneten Grösse $e \sin E$, und deshalb auch der Anomalie M , bis auf $\frac{3 \omega e \sin E}{\lambda}$ steigen, und ist die Grenze dieses Irrthums, wenn man sie in Secunden ausgedrückt verlangt, mit 206 265'' zu multipliciren. Hieraus schliesst man leicht, dass bei der umgekehrten Aufgabe, wo E aus M durch Versuche bestimmt wird, dies E um die Grösse $\frac{3 \omega e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dE}{dM} \cdot 206 265'' = \frac{3 \omega e a \sin E}{\lambda r} \cdot 206 265''$ (29) selbst dann fehlerhaft sein kann, wenn auch der Gleichung $E - e \sin E = M$ mit aller durch die Tafeln gestatteten Genauigkeit Gentige geleistet ist.

Die wahre, aus der mittleren berechnete Anomalie kann also aus zwei Gründen fehlerhaft sein (wenn wir nämlich die mittlere als genau betrachten), erstens wegen des bei der Berechnung von v aus E begangenen Irrthums, der, wie wir gesehen haben, stets von geringer Bedeutung ist, und zweitens deshalb, weil der Werth der excentrischen Anomalie selbst schon fehlerhaft sein konnte. Die Einwirkung dieses letzteren Grundes wird bestimmt durch das Product des in E begangenen Irrthums mit $\frac{dv}{dE}$, welches Product wird

$$= \frac{3 \omega e \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dM} \cdot 206 265'' = \frac{3 \omega e a \sin v}{\lambda r} \cdot 206 265'' = \left(\frac{e \sin v + \frac{1}{2} e \sin 2v}{1 - e^2} \right) 0'' 0712$$

bei Anwendung von sieben Stellen. Dieser Irrthum, der für kleine Werthe von e stets mässig bleibt, kann sehr gross werden, sobald e von der Einheit

wenig verschieden ist, wie die nachfolgende Tafel zeigt, die für einige Werthe von e den grössten Werth jenes Ausdrucks darstellt.

e	grösster Irrthum	e	grösster Irrthum	e	grösster Irrthum
0,90	0"42	0,94	0"73	0,98	2"28
0,91	0,48	0,95	0,89	0,99	4,59
0,92	0,54	0,96	1,12	0,999	46,23
0,93	0,62	0,97	1,50		

V. In der hyperbolischen Bewegung kann, wenn v nach Formel III des Art. 21 aus genau bekannten F' und ψ berechnet wird, der Irrthum bis zu $\frac{3\omega \sin v}{\lambda} \cdot 206\,265''$ steigen; wenn es aber durch die Formel $\tan \frac{1}{2} v = \frac{u-1}{(u+1)\tan \frac{1}{2} \psi}$ berechnet wird und u sowohl als ψ genau bekannt sind, so wird die Grenze des Irrthums um $\frac{1}{3}$ grösser werden, nämlich $= \frac{4\omega \sin v}{\lambda} \cdot 206\,265'' = 0'09 \sin v$ (bei sieben Stellen).

VI. Wird vermittelst der Formel XI des Art. 22 die Grösse $\frac{\lambda k t}{b^{\frac{1}{2}}} = N$ mit Hülfe Briggs'scher Logarithmen berechnet, und gelten e und u , oder e und F' als genau bekannt, so wird der erste Theil dem Irrthume $\frac{5(u-1)e\omega}{2u}$ unterworfen sein, wenn er in der Form $\frac{\lambda e(u-1)(u+1)}{2u}$, oder dem Irrthume (30) $\frac{3(u+1)e\omega}{2u}$, wenn er in der Form von $\frac{1}{2} \lambda e u - \frac{\lambda e}{2u}$ berechnet ist, oder dem Irrthume $3e\omega \tan F'$, wenn die Form $\lambda e \tan F'$ benutzt ist, falls man dabei den in $\log \lambda$ oder $\log \frac{1}{2} \lambda$ begangenen Irrthum vernachlässigt. Im ersten Falle kann der Irrthum auch durch $5e\omega \tan F'$, im zweiten durch $\frac{3e\omega}{\cos F'}$ ausgedrückt werden, woraus man sieht, dass im dritten Falle der Irrthum immer der kleinste von allen ist, er aber im ersten und zweiten grösser sein wird, je nachdem u oder $\frac{1}{2} u$ grösser oder kleiner als 2, oder je nachdem $\pm F'$ grösser oder kleiner als $36^{\circ} 52'$ ist. Der zweite Theil von N wird aber stets dem Irrthum ω unterworfen sein.

VII. Umgekehrt ist klar, dass, wenn u oder F' aus N durch Versuche bestimmt wird, u dem Irrthume $(\omega \pm 5e\omega \tan F') \frac{du}{dN}$ oder

$(\omega + \frac{3e\omega}{\cos F}) \frac{du}{dN}$ unterworfen sein werde, je nachdem man das erste Glied in dem Werthe für N entweder in Factoren oder in Theile zerlegt anwendet; F aber unterliegt dem Irrthume $(\omega \pm 3e\omega \tan F) \frac{dF}{dN}$. — Die oberen Zeichen gelten nach dem Perihelie, die unteren vor dem Perihelie. Substituirt man daher hier $\frac{dv}{dN}$ für $\frac{du}{dN}$ oder für $\frac{dF}{dN}$, so ergibt sich der Einfluss dieses Irrthums auf die Bestimmung von v , der deshalb sein wird:

$$\frac{bb \tan \psi (1 \pm 3e \tan F) \omega}{\lambda rr} \quad \text{oder} \quad \frac{bb \tan \psi (1 \pm 3e \sec F) \omega}{\lambda rr},$$

falls die Hilfsgrösse u angewendet ist. — Braucht man dagegen F , so wird diese Einwirkung

$$= \frac{bb \tan \psi (1 \pm 3e \tan F) \omega}{\lambda rr} = \frac{\omega}{\lambda} \left\{ \frac{(1 + e \cos v)^2}{\tan \psi^3} \pm \frac{3e \sin v (1 + e \cos v)}{\tan \psi^2} \right\}.$$

Der Factor 206 265'' muss hinzugefügt werden, um den Irrthum in Secunden auszudrücken. Offenbar kann dieser Irrthum nur dann als beträchtlich sich ergeben, wenn der Winkel ψ klein, oder e um ein Weniges grösser als 1 ist. Hier folgen die grössten Werthe dieses dritten Ausdrucks für einige Werthe von e bei Benutzung siebenstelliger Decimalen:

e	grösster Irrthum
1,3	0''34
1,2	0,54
1,1	1,31
1,05	3,03
1,01	34,41
1,001	1064,65

Diesem, aus einem irrthümlichen Werthe von F oder u entstandenen Irrthume (31) muss man noch den in V bestimmten Irrthum hinzufügen, um die ganze Unsicherheit von v zu erhalten.

VIII. Wenn die Gleichung XI im Art. 22 mit Hilfe hyperbolischer Logarithmen aufgelöst, und dabei F als Hilfsgrösse gebraucht wird, so findet man die Wirkung des bei dieser Operation in der Bestimmung von v möglichen Irrthums durch eine ähnliche Betrachtung

$$= \frac{(1 + e \cos v)^2 \omega'}{\tan \psi^3} \pm \frac{3e \sin v (1 + e \cos v) \omega}{\lambda \tan \psi^2},$$

wobei ω' die grösste Unsicherheit in den Tafeln der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Der zweite Theil dieses Ausdruckes ist identisch mit dem zweiten Theil des in VII behandelten Ausdruckes, der erste Theil aber ist im Verhältnisse von $\lambda\omega' : \omega$ kleiner, als der erste in jenem Ausdrucke, d. h. im Verhältnisse von 1 zu 23, wenn man die Ursinns'sche Tafel allenthalben als bis zur achten Stelle sicher oder $\omega' = 0,0000\ 00005$ voraussetzen dürfte.

33.

Die oben behuf Bestimmung der wahren Anomalie aus der Zeit*) oder umgekehrt auseinandergesetzten Methoden erlauben daher nicht alle wünschenswerthe Schärfe bei denjenigen Kegelschnitten, deren Excentricität von der Einheit nur wenig verschieden ist, d. h. bei Ellipsen und Hyperbeln, die der Parabel sehr nahe kommen, und es würden mithin die unvermeidlichen Irrthümer, die sich steigern, je mehr die Bahn zur Aehnlichkeit mit der Parabel neigt, zuletzt alle Grenzen überschreiten. Die mehr als siebenstelligen Tafeln würden diesen Irrthum zwar vermindern, ihn aber nicht aufheben und auch nicht verhindern, dass er nicht alles Maass dann überschreitet, sobald die Bahn gar zu nahe an die Parabel herankommt. Ausserdem werden in diesem Falle die obigen Methoden recht beschwerlich, weil ein Theil derselben indirecte, häufig wiederholte Versuche erfordert, und das Widrige dieser Unbequemlichkeit wird durch Anwendung grösserer Tafeln noch vermehrt.

Es wird deshalb sicher nicht überflüssig sein, eine besondere Methode zu bearbeiten, durch welche man in solehem Falle jene Unsicherheit vermeiden, und allein mit Hilfe der gewöhnlichen Tafeln eine hinreichende Genauigkeit erlangen kann.

(32)

34.

Die gewöhnliche Methode, durch welche man jenen Unbequemlichkeiten eine Abhilfe zu schaffen pflegt, stützt sich auf folgende Grundsätze. Es möge

*) Da die Zeit den Factor $a^{\frac{3}{2}}$ oder $b^{\frac{3}{2}}$ enthält, so wird der bei M oder N begangene Irrthum um so erheblicher vermehrt, je grösser $a = \frac{p}{1-ee}$ oder $b = \frac{p}{ee-1}$ wird.

in einer Ellipse oder Hyperbel, deren Excentricität e , halber Parameter p und daher Abstand im Perihel $= \frac{p}{1+e} = q$ ist, der Zeit nach dem Perihel t , die wahre Anomalie v entsprechen; es entspreche ferner derselben Zeit in der Parabel (deren halber Parameter $= 2q$, oder deren Abstand im Perihel $= q$) die wahre Anomalie w , und die Masse μ soll in beiden Fällen entweder vernachlässigt werden oder gleich sein, so hat man offenbar:

$$\int \frac{pp \, dv}{(1+e \cos v)^3} : \int \frac{4qq \, dw}{(1+\cos w)^3} = Vp : V2q,$$

wenn die Integrale mit $v = 0$ und $w = 0$ beginnen, oder

$$\int \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}} \, dv}{(1+e \cos v)^2 \sqrt{2}} = \int \frac{2 \, dw}{(1+\cos w)^2}.$$

Wenn man $\frac{1-e}{1+e}$ mit α , $\tan \frac{1}{2} v$ mit ϑ bezeichnet, so wird das erstere Integral gefunden =

$$V(1+\alpha) \cdot \left(\vartheta + \frac{1}{3} \vartheta^3 (1-2\alpha) - \frac{1}{5} \vartheta^5 (2\alpha-3\alpha\alpha) + \frac{1}{7} \vartheta^7 (3\alpha\alpha-4\alpha^2) - \text{etc.} \right)$$

das zweite = $\tan \frac{1}{2} w + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2} w^3$. Aus dieser Gleichung lässt sich mit Hilfe unendlicher Reihen leicht w aus α und v , oder v aus α und w bestimmen. Statt α kann man auch, falls man das vorzieht, $1-e = \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \delta$ einführen.

Da für $\alpha = 0$ oder $\delta = 0$, offenbar $v = w$ wird, so erhalten diese Reihen folgende Form:

$$w = v + \delta v' + \delta \delta v'' + \delta^3 v''' + \text{etc.}$$

$$v = w + \delta w' + \delta \delta w'' + \delta^3 w''' + \text{etc.}$$

wo v' , v'' , v''' etc. Functionen von v ; und w' , w'' , w''' etc. Functionen von w sind. Ist δ eine sehr kleine Grösse, so werden diese Reihen schnell convergiren und wenige Glieder hinreichen, um w aus v , oder v aus w zu bestimmen. Aus w wird t , oder w aus t auf dieselbe, schon oben für die parabolische Bewegung erklärte Weise gefunden.

35.

Die analytischen Ausdrücke der drei ersten Coefficienten der zweiten Reihe w' , w'' , w''' hat Bessel entwickelt, und zugleich für die numerischen Werthe der beiden ersten w' , w'' eine Tafel hinzugefügt, die nach einzelnen

Graden des Argumentes w construirt ist (von Zach Monatl. Correspondenz, vol. XII, p. 197). Für den ersten Coefficienten w' gab es schon früher eine (33) von Simpson berechnete Tafel, die dem oben erwähnten Werke von Olbers angehängt ist. In sehr vielen Fällen kann durch diese Methode mit Hilfe der Bessel'schen Tafel die wahre Anomalie aus der Zeit mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden; was noch zu wünschen übrig bleibt, reducirt sich etwa auf folgende Momente:

I. Bei der umgekehrten Aufgabe, nämlich bei Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie, muss man seine Zuflucht zu einer gleichsam indirecten Methode nehmen und w aus v durch Versuche ableiten. Um dieser Unbequemlichkeit zu begegnen, müsste die erstere Reihe auf dieselbe Weise behandelt werden, wie die zweite, und da man leicht sieht, dass $-v'$ dieselbe Function von v ist, als w' von w , so dass eine Tafel für w' nur mit geänderten Zeichen für v' dienen könnte, so würde nur noch eine Tafel für v'' erforderlich sein, damit jede der beiden Aufgaben mit gleicher Schärfe gelöst werden könnte.

II. Es können in der That bisweilen Fälle vorkommen, wo zwar die Excentricität von der Einheit wenig abweicht, so dass die obigen allgemeinen Methoden keine hinreichende Genauigkeit gewähren, wo jedoch diese Abweichung noch zu stark ist, als dass man die Einwirkung der dritten und höheren Potenzen von δ bei der besonderen vorhin dargestellten Methode mit Sicherheit vernachlässigen dürfte. Namentlich bei der hyperbolischen Bewegung sind solche Fälle möglich, wo, man mag nun jene Methoden oder diese anwenden, ein Irrthum von mehreren Secunden sich nicht vermeiden lässt, wenn man nur die gewöhnlichen siebenstelligen Tafeln braucht. Mögen nun auch derartige Fälle in der Praxis selten eintreten, so könnte es doch als ein Mangel erscheinen, wenn nicht in allen Fällen die wahre Anomalie innerhalb $0^{\circ}1$ oder wenigstens $0^{\circ}2$ sicher sich bestimmen liesse, falls nicht grössere Tafeln benutzt werden, die jedoch bekanntlich ziemlich selten sind. Ich hoffe daher, man werde die Auseinandersetzung einer besonderen Methode nicht für gänzlich überflüssig halten, deren ich mich schon lange bedient habe, und die sich auch in der Hinsicht empfiehlt, weil sie keineswegs auf Excentricitäten beschränkt ist, die nur wenig von der Einheit abweichen, sondern mindestens in dieser Hinsicht eine allgemeine Anwendung erlaubt.

36.

Bevor ich mit Auseinandersetzung dieser Methode beginne, wird es angemessen sein, zu bemerken, dass die Unsicherheit der obigen allgemeinen Methoden bei den zur Aehnlichkeit mit der Parabel hineigenden Bahnen von selbst aufhört, sobald E oder F zu einer beträchtlichen Grösse anwachsen, was zwar erst in grossen Entfernungen von der Sonne Statt findet. Um dies zu zeigen, wollen wir den grössten in der Ellipse möglichen Irrthum, den wir im Art. 32, IV.

$$= \frac{3 \omega e a \sin v}{\lambda r} \cdot 206\,265''$$

fanden, so ausdrücken

$$\frac{3 \omega e \sqrt{1-ee} \cdot \sin E}{\lambda (1 - e \cos E)^2} \cdot 206\,265'',$$

woraus von selbst erhellt, dass der Irrthum stets in enge Grenzen eingeschlossen (34) ist, sobald E einen beträchtlichen Werth erreicht, oder sobald $\cos E$ sich von der Einheit mehr entfernt, wie gross auch die Excentricität sein möge. Dies wird noch deutlicher durch die folgende Tafel erscheinen, in welcher ich den grössten numerischen Werth jener Formel für einige bestimmte Werthe (mit sieben Decimalen) berechnet habe:

$E = 10^\circ$	Grösster Irrthum = $3''04$
20	0,76
30	0,34
40	0,19
50	0,12
60	0,08

Auf ähnliche Weise verhält sich die Sache in der Hyperbel, wie sogleich klar wird, wenn der in Art. 32, VII gegebene Ausdruck unter die Form gebracht wird

$$\frac{\omega \cos F (\cos F + 3 e \sin F) \sqrt{ee-1}}{\lambda (e - \cos F)^2} \cdot 206\,265''.$$

Die grössten Werthe dieses Ausdruckes für einige bestimmte Werthe von F zeigt folgende Tafel:

F	u		Grösster Irrthum
10°	1,192	0,839	8"66
20	1,428	0,700	1,38
30	1,732	0,577	0,47
40	2,144	0,466	0,22
50	2,747	0,364	0,11
60	3,732	0,268	0,06
70	5,671	0,176	0,02

So oft daher E oder F über 40° oder 50° hinausgeht (ein Fall der jedoch in wenig von der Parabel verschiedenen Bahnen nicht leicht vorkommen wird, weil die in solchen Bahnen einherziehenden Himmelskörper in so grossen Entfernungen von der Sonne sich meistens unserem Blicke entziehen), so wird kein Grund zur Verlassung der allgemeinen Methode vorliegen. Uebrigens würden auch in einem solchen Falle die im Art. 34 behandelten Reihen zu langsam convergiren. Es kann also keineswegs als ein Mangel der jetzt auseinanderzusetzenden Methode gelten, wenn sie vorzugsweise solchen Fällen angepasst ist, wo E oder F mässige Werthe nicht überschreiten.

37.

(35) Ich nehme die bei der elliptischen Bewegung zwischen der excentrischen Anomalie und der Zeit bestehende Gleichung

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

wieder vor, wobei E in Theilen des Radius ausgedrückt sein soll. Den Factor $\sqrt{1+\mu}$ will ich von jetzt an vernachlässigen, da, wenn je ein Fall eintreten sollte, wo man seine Berechnung in der Gewalt hätte und solche der Mühe werth sein sollte, das Zeichen t nicht die Zeit selbst nach dem Perihelie, sondern diese Zeit durch $\sqrt{1+\mu}$ multiplicirt ausdrücken müsste.

Ich setze ferner den Abstand im Perihelie = q und führe für E und für $\sin E$ die Grössen $E - \frac{1}{10}(E - \sin E)$ und $E - \frac{1}{10}(E - \sin E) = \frac{9}{10}E + \frac{1}{10}\sin E$ ein.

Den Grund, weshalb ich vorzugsweise diese Bezeichnung wähle, wird der aufmerksame Leser von selbst aus dem Nachfolgenden entnehmen. Auf diese Weise nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$(1 - e) \left(\frac{9}{10} E + \frac{1}{10} \sin E \right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{10} e \right) (E - \sin E) = kt \left(\frac{1 - e}{q} \right)^{\frac{3}{2}}$$

So lange E als eine kleine Grösse der ersten Ordnung angesehen wird, so wird $\frac{9}{10} E + \frac{1}{10} \sin E = E - \frac{1}{60} E^3 + \frac{1}{1200} E^5 - \text{etc.}$ eine Grösse der ersten Ordnung sein, dagegen $E - \sin E = \frac{1}{6} E^3 - \frac{1}{120} E^5 + \frac{1}{5040} E^7 - \text{etc.}$ eine Grösse der dritten Ordnung. Setzt man daher

$$\frac{6(E - \sin E)}{\frac{9}{10} E + \frac{1}{10} \sin E} = 4A, \quad \frac{\frac{9}{10} E + \frac{1}{10} \sin E}{2\sqrt{A}} = B,$$

so wird $4A = E^2 - \frac{1}{30} E^4 - \frac{1}{5040} E^6 - \text{etc.}$ eine Grösse der zweiten Ordnung und $B = 1 + \frac{9}{2000} E^4 - \text{etc.}$ von der Einheit um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden sein. Unsere Gleichung wird daher:

$$B \left(2(1 - e) A^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{15} (1 + 9e) A^{\frac{5}{2}} \right) = kt \left(\frac{1 - e}{q} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots [1]$$

Durch die gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln kann man zwar $\frac{9}{10} E + \frac{1}{10} \sin E$ mit hinreichender Genauigkeit berechnen, nicht aber $E - \sin E$, sobald E ein kleiner Winkel ist, und es können mithin auf diesem Wege die Grössen A und B nicht hinreichend genau bestimmt werden. Dieser Schwierigkeit würde aber eine besondere Tafel Abhilfe schaffen, welcher man mit dem Argumente E entweder B oder den $\log B$ entnehmen könnte. Die zur Construction einer solchen Tafel nothwendigen Hilfsmittel werden sich jedem auch nur mittelmässig in der Analysis Bewanderten leicht darbieten. Mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{9E + \sin E}{20B} = \sqrt{A}$$

lässt auch \sqrt{A} und sodann durch Formel [1] t mit aller wünschenswerthen Schärfe sich bestimmen.

Hier folgt ein Probestück einer solchen Tafel, welche wenigstens die (36) langsame Zunahme des $\log B$ zeigen wird; es würde überflüssig sein, diese Tafel in grösserer Ausdehnung zu bearbeiten, denn weiter unten will ich Tafeln von einer weit bequemeren Form beschreiben:

E	$\log B$	E	$\log B$	E	$\log B$
0°	0,000 0000	25°	0,000 0168	50°	0,000 2675
5	00	30	0349	55	3910
10	04	35	0645	60	5526
15	22	40	1099		
20	69	45	1758		

38.

Es wird nicht nutzlos sein, das im vorhergehenden Artikel Vorgetragene durch ein Beispiel zu erläutern.

Die wahre Anomalie angenommen zu $= 100^\circ$, die Excentricität $= 0,967\,64567$, $\log q = 9,765\,6500$. Die Rechnung für E , B , A und t ist also:
 $\log \tan \frac{1}{2} v. \dots 0,076\,1865$

$$\log V \frac{1-e}{1+e} \dots 9,107\,9927$$

$\log \tan \frac{1}{2} E. \dots 9,184\,1792$, mithin $\frac{1}{2} E = 8^\circ 41' 19'' 32$ und $E = 17^\circ 22' 38'' 64$.
 Diesem Werthe von E entspricht der $\log B = 0,000\,0040$; ferner findet sich in Theilen des radins $E = 0,303\,2928$, $\sin E = 0,298\,6643$, und daher $\frac{9}{20} E + \frac{1}{20} \sin E = 0,151\,4150$, dessen $\log = 9,180\,1689$ und daher $\log A^{\frac{1}{2}} = 9,180\,1649$. Hieraus wird mittelst Formel [1] des vorhergehenden Artikels abgeleitet

$$\begin{array}{r} \log \frac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{kV(1-e)} \dots 2,458\,9614 \quad \log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}} \dots 3,760\,1038 \\ \log A^{\frac{1}{2}} \dots 9,180\,1649 \quad \log A^{\frac{3}{2}} \dots 7,540\,4947 \\ \log 43,56386 \quad = 1,639\,1263 \quad \log 19,98014 \quad = 1,300\,5985 \\ \hline 19,98014 \\ 63,54400 = t \end{array}$$

Behandelt man dasselbe Beispiel nach der gewöhnlichen Methode, so findet sich $e \sin E$ in Secunden $= 59610'' 79 = 16^\circ 33' 30'' 79$ und daher die mittlere Anomalie $= 0^\circ 49' 7'' 85 = 2947' 85$. Hieraus und aus $\log k \left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,666\,4302$ wird t abgeleitet $= 63,54410$. Der Unterschied, der hier nur der

$\frac{1}{10000}$ Theil eines Tages ist, kann leicht, wenn die Irrthümer conspiriren, um (37) das Drei- oder Vierfache grösser herauskommen.

Uebrigens sieht man, dass allein mit Hilfe einer solchen Tafel für $\log B$ auch die umgekehrte Aufgabe in aller Schärfe sich lösen lässt, wenn man E durch wiederholte Versuche bestimmt, so dass der daraus berechnete Werth von t mit der Voraussetzung übereinkommt. Diese Operation würde jedoch sehr beschwerlich sein, weshalb wir jetzt zeigen wollen, auf welche Weise man eine Hilfstafel viel bequemer einrichten, alle vage Versuche überhaupt vermeiden und die ganze Rechnung auf eine durchaus concise und rasche Zahlendarlegung zurückführen kann, die nichts zu wünschen übrig lässt.

39.

Offenbar liesse sich etwa die Hälfte der behuf jener Versuche erforderlichen Arbeit sparen, wenn man eine derartig eingerichtete Tafel besässe, dass daraus der $\log B$ unmittelbar mit dem Argumente A zu entnehmen wäre. Dann blieben drei Operationen übrig. Als erste eine indirecte, nämlich die Bestimmung von A so, dass es der Gleichung [1] Art. 37 Genüge thut; als zweite, die Bestimmung von E aus A und B , welche direct, entweder aus der Gleichung $E = 2B (A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}A^{\frac{3}{2}})$, oder aus $\sin E = 2B (A^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}A^{\frac{3}{2}})$ geschieht; als dritte, die Bestimmung von v aus E mittelst Gleichung VII, Art. 8. Die erste Operation werde ich auf eine rasche und von vagen Versuchen freie Berechnungsweise zurückführen; die zweite und dritte aber werde ich in eine einzige zusammenziehen, indem ich unserer Tafel eine neue Grösse C einfügte, wodurch wir E überhaupt nicht nöthig haben, und zugleich für den radius vector eine elegante und bequeme Formel erhalten. Ich werde das Einzelne in seiner Ordnung verfolgen.

Zuerst forme ich die Gleichung [1] so um, dass man die Barker'sche Tafel zu ihrer Anflösung benutzen kann. Zu diesem Zwecke setze ich:

$$A^{\frac{1}{2}} = \tan \frac{1}{2} w \sqrt{\frac{5-5e}{1+9e}},$$

woraus man erhält:

$$75 \tan \frac{1}{2} w + 25 \tan^3 \frac{1}{2} w = \frac{75ktV(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}e)}{2Bq^{\frac{3}{2}}} = \frac{ct}{B},$$

wobei die Constante $\frac{75k\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}e)}}{2q^{\frac{1}{2}}}$ mit α bezeichnet ist. Wäre daher B bekannt, so würde man w sofort aus der Barker'schen Tafel nehmen können, wo sich die wahre Anomalie findet, der die mittlere Bewegung $\frac{\alpha t}{B}$ entspricht. Aus w wird A abgeleitet durch die Formel $A = \beta \tan \frac{1}{2} w^2$, wo die Constante $\frac{5-5e}{1+9e}$ mit β bezeichnet ist. Wenn nun auch B erst durch A mittelst (38) unserer Hilfstafel bekannt wird, so lässt sich doch wegen seines sehr kleinen Unterschiedes von der Einheit voraussehen, dass w und A nur mit einem sehr kleinen Fehler behaftet herauskommen können, wenn im Anfange der Divisor B gänzlich vernachlässigt wird. Bestimmt man daher zuerst nur oberflächlich w und A und setzt dabei $B = 1$, so wird man mit diesem genäherten Werthe von A aus unserer Hilfstafel die Grösse B finden, mit welcher man dieselbe Berechnung genauer wiederholt. Gemeiniglich wird dem so verbesserten Werthe von A ganz derselbe Werth von B entsprechen, der bei der ersten Annäherung gefunden war, so dass, — ausgenommen in den Fällen, wo der Werth von E schon recht beträchtlich war, — eine neue Wiederholung der Operation überflüssig erscheint. Auch wird es wohl kaum der Bemerkung bedürfen, dass falls vielleicht schon anfänglich ein genäherter Werth von B anderswoher bekannt geworden ist (was stets geschieht, wenn bei der Berechnung von mehreren, nicht weit von einander entfernten Orten, der eine oder der andere schon seine Erledigung gefunden hat), man es vorziehen wird, diesen sogleich bei der ersten Annäherung zu benutzen. Auf solche Weise wird ein geschickter Rechner sehr häufig nicht einmal eine einzige Wiederholung der Rechnung nöthig haben. Diese äusserst schnelle Annäherung habe ich dadurch erlangt, dass B von Eins nur um eine Differenz der vierten Ordnung sich entfernt, die überdies mit einem sehr kleinen numerischen Coefficienten multiplicirt ist. Man sieht, wie jener Vortheil schon dadurch vorbereitet ist, dass wir die Grössen $E - \sin E$, $\frac{9}{16}E + \frac{1}{16}\sin E$ anstatt der Grössen E und $\sin E$ eingeführt haben.

40.

Da zur dritten Operation, nämlich zur Bestimmung der wahren Anomalie, der Winkel E selbst nicht erforderlich ist, sondern nur $\tan \frac{1}{2} E$ oder vielmehr $\log \tan \frac{1}{2} E$, so hätte jene Operation mit der zweiten bequemer verbunden werden können, wenn unsere Tafel unmittelbar den Logarithmus der Grösse $\frac{\tan \frac{1}{2} E}{\sqrt{A}}$ lieferte, die von Eins um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist. Ich will jedoch lieber unsere Tafel etwas anders einrichten, um durch eine kleine Ausdehnung die Interpolation doch noch viel bequemer zu erhalten. Schreibt man der Kürze wegen T für $\tan \frac{1}{2} E^2$, so wird der im Art. 37 behandelte Werth von A , $\frac{15(E - \sin E)}{9E + \sin E}$ leicht umgeformt in

$$A = \frac{T - \frac{8}{15}T^2 + \frac{3}{5}T^3 - \frac{12}{35}T^4 + \frac{11}{15}T^5 - \text{etc.}}{1 - \frac{8}{15}T + \frac{3}{5}T^2 - \frac{8}{35}T^3 + \frac{3}{5}T^4 - \text{etc.}}$$

wodas Gesetz der Progression klar ist. Hieraus wird durch Umkehrung der Reihen abgeleitet:

$$\frac{A}{T} = 1 - \frac{8}{15}A + \frac{8}{15}A^2 + \frac{8}{35}A^3 + \frac{1586}{336575}A^4 + \frac{28744}{13134125}A^5 + \text{etc.}$$

Setzt man also $\frac{A}{T} = 1 - \frac{8}{15}A + C$, so wird C eine Grösse der vierten Ordnung (39) sein, durch deren Aufnahme in unsere Tafel, wir sogleich von A auf v mittelst der Formel:

$$\tan \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \sqrt{\frac{A}{1-\frac{8}{15}A+C}} = \frac{\gamma \tan \frac{1}{2} w}{V(1-\frac{8}{15}A+C)}$$

übergehen können, wobei ich durch γ die Constante $\sqrt{\frac{5+5e}{1+9e}}$ bezeichne. Auf diese Weise gewinnen wir zugleich eine sehr bequeme Berechnung für den radius vector. Es wird nämlich (Art. 8, VI)

$$r = \frac{q \cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{q}{(1+T) \cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{(1-\frac{8}{15}A+C)q}{(1+\frac{8}{15}A+C) \cos \frac{1}{2} v^2}$$

41.

Jetzt erübrigt nur noch die Zurückführung der umgekehrten Aufgabe (nämlich die Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie) auf eine raschere Berechnungsart. Zu diesem Zwecke will ich der Tafel eine neue Columnne für T hinzufügen. Es möge daher zuerst T aus v mittelst der Formel $T = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v^2$ berechnet werden; sodann wird aus der Tafel mit dem Argumente T sowohl A , als $\log B$ entnommen, oder (was genauer, ja auch bequemer ist) C und $\log B$ und hieraus A nach der Formel $A = \frac{(1+C)T}{1+\frac{1}{2}T}$; zuletzt wird aus A und B die Grösse t mittelst der Formel [1] Art. 37 bestimmt. Will man auch hier die Barker'sche Tafel zu Hilfe nehmen (was jedoch bei dieser umgekehrten Aufgabe die Rechnung weniger erleichtert) so ist es nicht erforderlich, auf A Rücksicht zu nehmen, sondern man erhält sofort

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} w = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} v}{r} \sqrt{\frac{1+C}{1+\frac{1}{2}T}}$$

und hieraus die Zeit t , wenn man die der wahren Anomalie w in der Barker'schen Tafel entsprechende mittlere Bewegung mit $\frac{B}{a}$ multiplicirt.

42.

Eine Tafel, wie solche in dem Obigen geschildert ist, habe ich in einer seltsamlichen Ausdehnung construirt und sie diesem Werke angefügt (Tafel I). Auf die Ellipse bezieht sich allein der erstere Theil; den zweiten, die hyperbolische Bewegung umfassenden Theil, will ich weiter unten erklären. Das Argument der Tafel, welches die Grösse A ist, schreitet durch einzelne Tausendtheile (40) von 0 bis 0,300 fort; es folgen $\log B$ und C , welche Grössen man als in 10 Milliontheilen, oder als zu sieben Decimalen ausgedrückt ansehen muss, denn die ersten Ziffern, die den bezeichnenden Zahlen vorangehen, sind weggelassen. Die vierte Columnne endlich enthält die Grösse T erst auf fünf, dann auf sechs Stellen berechnet, eine Genauigkeit die völlig

ausreicht, da diese Columne nur zu dem Zwecke erforderlich ist, um die dem Argumente T entsprechenden Werthe von $\log B$ und C zu erhalten, falls man nach Anleitung des vorhergehenden Artikels t aus v bestimmen will. Da das umgekehrte Problem (nämlich die Bestimmung von v und r aus t) sehr viel häufiger vorkommt und überall ohne Hülfe der Grösse T gelöst wird, so zog ich vor, lieber die Grösse A zum Argumente der Tafel zu wählen, als T , welches sonst fast ein ebenso passendes Argument gewesen sein und selbst die Construction der Tafel noch etwas erleichtert haben würde. Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass alle Zahlen der Tafel ursprünglich bis auf zehn Stellen berechnet worden sind, und dass daher die hier beibehaltenen sieben Stellen allenthalben volles Zutrauen verdienen. Ich kann mich aber bei der für diese Arbeit benutzten analytischen Methode hier nicht anhalten, da deren vollständige Entwicklung zu sehr von dem abführen würde, was dies Werk darstellen soll. Uebrigens reicht die der Tafel gegebene Ausdehnung für alle Fälle vollkommen hin, wo es vorthellhaft ist, die oben auseinandergesetzte Methode zu befolgen, da man, wie vorhin gezeigt, sich bequemer Weise der künstlichen Methoden enthalten kann, wenn A die Grenze von 0,03 überschreitet, dem dann $T = 0,392374$, oder $E = 64^{\circ} 7'$ entspricht.

43.

Zur mehrern Erläuterung der vorhergehenden Untersuchungen wollen wir ein Beispiel der vollständigen Berechnung der wahren Anomalie und des radius vector aus der Zeit hinzufügen, und zu diesem Ende die Zahlen des Art. 38 wieder vornehmen. Wir haben also $e = 0,96764567$; $\log q = 9,7656500$; $t = 63,54400$, woraus man zuerst die Constanten ableitet: $\log \alpha = 0,3052357$; $\log \beta = 8,2217364$; $\log \gamma = 0,0028755$.

Hiermach ist $\log \alpha t = 2,1083102$, dem in der Barker'schen Tafel der genäherte Werth $w = 99^{\circ} 6'$ entspricht, woraus $A = 0,022923$ folgt, und aus unserer Tafel $\log B = 0,0000040$. Also wird das verbesserte Argument, mit welchem man in die Barker'sche Tafel einzugehen hat $= \log \frac{\alpha t}{B} = 2,1083062$, dem $w = 99^{\circ} 6' 13'' 14$ entspricht. — Dann steht die weitere Rechnung so:

(41) $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w^2 \dots 0,138\ 5934$ $\log \beta \dots \dots \dots 8,221\ 7364$ $\log A \dots \dots \dots 8,360\ 3298$ $A = \quad \quad \quad 0,022\ 92608$ hieraus $\log B$ ganz wie oben; $C = 0,000\ 0242$ $1 - \frac{1}{5} A + C = 0,981\ 6833$ $1 + \frac{1}{5} A + C = 1,004\ 6094$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w \dots \dots \dots 0,069\ 2967$ $\log \gamma \dots \dots \dots 0,002\ 8755$ $\frac{1}{2} \operatorname{Comp.} \log (1 - \frac{1}{5} A + C) \dots 0,004\ 0143$ $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \dots \dots \dots 0,076\ 1865$ $\frac{1}{2} v = \quad \quad \quad 50^\circ 0' 0''$ $v = \quad \quad \quad 100^\circ 0' 0''$ $\log q \dots \dots \dots 9,765\ 6500$ $2 \operatorname{Comp.} \log \cos \frac{1}{2} v \dots \dots \dots 0,383\ 8650$ $\log (1 - \frac{1}{5} A + C) \dots \dots \dots 9,991\ 9714$ $\operatorname{Comp.} \log (1 + \frac{1}{5} A + C) \dots \dots 9,998\ 0028$ $\log r \dots \dots \dots 0,139\ 4892$
---	--

Wenn bei dieser Berechnung der Factor B gänzlich vernachlässigt worden wäre, so würde die wahre Anomalie nur mit dem kleinen Irrthum $0'' 1$ (zu gross) behaftet herausgekommen sein.

44.

Die hyperbolische Bewegung kann ich um so kürzer absolviren, als dieselbe der oben für die elliptische Bewegung vorgetragenen Methode ganz analog zu behandeln ist. Die Gleichung zwischen der Zeit t und der Hilfsgrösse u lässt sich auf folgende Form bringen:

$$(e-1) \left(\frac{1}{2e} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{e}{1e} \log u \right) + \left(\frac{1}{1e} + \frac{e}{1e} e \right) \left(\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \log u \right) = kt \left(\frac{e-1}{q} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wo die Logarithmen hyperbolische sind, und $\frac{1}{2e} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{e}{1e} \log u$ eine Grösse der ersten Ordnung, $\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \log u$ eine Grösse der dritten Ordnung, sobald $\log u$ als eine kleine Grösse der ersten Ordnung betrachtet wird. Setzt man also

$$\frac{6 \left(\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) - \log u \right)}{\frac{1}{2e} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{e}{1e} \log u} = 4A, \quad \frac{\frac{1}{2e} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \frac{e}{1e} \log u}{2\sqrt{A}} = B,$$

so wird A eine Grösse der zweiten Ordnung sein, B aber von der Einheit um eine Differenz der vierten Ordnung verschieden. Unsere Gleichung erhält dann folgende Form:

$$B\left(2(e-1)A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}(1+9e)A^{\frac{3}{2}}\right) = kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots [2]$$

welche der Gleichung [1] des Art. 37 ganz analog ist. Setzt man sodann ferner $\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2 = T$, so wird T von der zweiten Ordnung sein, und durch (42) die Methode der unendlichen Reihen gefunden werden:

$$\frac{A}{T} = 1 + \frac{1}{5}A + \frac{5}{175}A^2 - \frac{5}{575}A^3 + \frac{1596}{336875}A^4 - \frac{28741}{13135125}A^5 + \text{etc.}$$

Deshalb wird, wenn man $\frac{A}{T} = 1 + \frac{1}{5}A + C$ setzt, C eine Grösse der vierten Ordnung und $A = \frac{(1+C)T}{1-\frac{1}{5}T}$ sein. Endlich folgt für den radius vector aus der Gleichung VII Art. 21 leicht

$$r = \frac{q}{(1-T)\cos\frac{1}{2}v^2} = \frac{(1+\frac{1}{5}A+C)q}{(1-\frac{1}{5}A+C)\cos\frac{1}{2}v^2}.$$

45.

Der nachfolgende Theil der ersten, diesem Werke angefügten Tafel bezieht sich, wie wir schon oben erinnert haben, auf die hyperbolische Bewegung und liefert für das Argument A (das beiden Theilen der Tafel gemeinsam ist) den Logarithmen von B und die Grösse C auf sieben Decimalstellen (wobei die vorangehenden Ziffern weggelassen sind), die Grösse T aber auf fünf und dann auf sechs Stellen. Dieser Theil ist ganz wie der frühere bis auf $A = 0,300$ ausgedehnt, dem ein $T = 0,241207$, $u = 2,930$ oder $= 0,341$, $F = \pm 52'19''$ entspricht. Eine weitere Ausdehnung wäre überflüssig gewesen (Art. 36).

Hier folgt die Anordnung für die Rechnung sowohl zur Bestimmung der Zeit aus der wahren Anomalie als umgekehrt. Bei ersterer Aufgabe wird T durch die Formel $T = \frac{e-1}{e+1} \tan^2 \frac{1}{2}v^2$ erhalten; aus T giebt unsere Tafel

$\log B$ und C , womit $A = \frac{(1+C)T}{1-\frac{1}{4}T}$. Hieraus endlich wird mittelst der Formel [2] des vorhergehenden Artikels t gefunden.

Bei letzterer Aufgabe werden zuerst die Logarithmen der Constanten

$$\alpha = \frac{75k \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e\right)}}{2q^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta = \frac{5e-5}{1+9e}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{5e+5}{1+9e}}$$

berechnet. Dann wird A aus t ganz in der Weise wie bei der elliptischen Bewegung bestimmt, nämlich so, dass der mittleren Bewegung $\frac{ct}{B}$ in der Barker'schen Tafel die wahre Anomalie w entspricht und $A = \beta \tan \frac{1}{2} w^2$ wird; wobei freilich zuerst ein genäherter Werth für A (unter Vernachlässigung oder, wenn dazu Hilfsmittel vorhanden, unter Schätzung des Factors B) berechnet werden muss. Hieraus giebt dann unsere Tafel einen genähereten Werth von B , mit welchem man die Operation wiederholt. Der solchergestalt für B sich ergebende neue Werth wird kaum jemals einer merklichen Verbesserung bedürfen und daher keine Wiederholung der Rechnung nöthig sein. Nach Verbesserung des Werths von A wird C aus der Tafel genommen, wodurch man dann hat:

$$\tan \frac{1}{2} v = \frac{\gamma \tan \frac{1}{2} w}{\sqrt{(1 + \frac{1}{2}A + C)}}, \quad r = \frac{(1 + \frac{1}{2}A + C)q}{(1 - \frac{1}{2}A + C) \cos \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus sieht man, dass unter den Formeln für die elliptische und hyperbolische Bewegung nur der Unterschied besteht, dass β , A und T in der hyperbolischen Bewegung als negative Grössen behandelt werden.

46.

Auch die hyperbolische Bewegung wollen wir durch einige Beispiele, wozu wir die Zahlen den Artikeln 23 und 26 entnehmen, erläutern.

I. Gegeben $e = 1,2618820$; $\log q = 0,0201657$; $v = 18^\circ 51' 0''$. Gesucht t . Man hat

$2 \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \dots 8,4402018$	$\log T \dots\dots\dots 7,5038375$
$\log \frac{e-1}{e+1} \dots\dots\dots 9,0636357$	$\log 1+C \dots\dots\dots 0,0000002$
<hr/>	$C. \log(1 - \frac{1}{5} T) \dots\dots\dots 0,0011099$
$\log T \dots\dots\dots 7,5038375$	$\log A \dots\dots\dots 7,5049476$
$T = 0,00319034$	
$\log B = 0,0000001$	
$C = 0,0000005$	
$\log \frac{2Bq^{\frac{3}{2}}}{kV^{e-1}} \dots\dots\dots 2,3866444$	$\log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{e-1}\right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots 2,8843582$
$\log A^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots 8,7524738$	$\log A^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots 6,2574214$
$\log 13,77584 = 1,1391182$	$\log 0,138605 = 9,1417796$
<hr/>	
$0,13861$	
<hr/>	
$13,91445 = t$	

II. Wenn e und q wie vorher bleiben, t gegeben ist = $65,41236$, und v und r gesucht werden, so findet man die Logarithmen der Constanten

$$\begin{aligned} \log \alpha &= 9,9758345 \\ \log \beta &= 9,0251649 \\ \log \gamma &= 9,9807646. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich $\log \alpha t = 1,7914943$, und so durch die Barker'sche Tafel der genäherte Werth für $w = 70^\circ 31' 44''$, woraus $A = 0,052983$. Diesem A entspricht in unserer Tafel $\log B = 0,0000207$; daher $\log \frac{\alpha t}{B} = 1,7914736$ und der verbesserte Werth von $w = 70^\circ 31' 36'' 86$. Im Uebrigen steht die Rechnung so:

(44)	$2 \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w \dots 9,698\ 9398$ $\log \beta \dots\dots\dots 9,025\ 1649$ $\log A \dots\dots\dots 8,724\ 1047$ $A = 0,052\ 97911$ $\log B \text{ wie vorher,}$ $C = 0,000\ 1252$ $1 + \frac{1}{3} A + C = 1,042\ 5085$ $1 - \frac{1}{3} A + C = 0,989\ 5294$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} w \dots\dots\dots 9,849\ 4699$ $\log \gamma \dots\dots\dots 9,980\ 7646$ $\frac{1}{2} C \cdot \log(1 + \frac{1}{3} A + C) \dots\dots\dots 9,990\ 9602$ $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} r \dots\dots\dots 9,821\ 1947$ $\frac{1}{2} r = 33^{\circ} 31' 30'' 02$ $v = 67\ 3\ 0,04$ $\log q \dots\dots\dots 0,020\ 1657$ $2 C \cdot \log \cos \frac{1}{2} r \dots\dots\dots 0,158\ 0378$ $\log(1 + \frac{1}{3} A + C) \dots\dots\dots 0,018\ 0796$ $C \cdot \log(1 - \frac{1}{3} A + C) \dots\dots\dots 0,004\ 5713$ $\log r \dots\dots\dots 0,200\ 8544$
------	---	--

Hierfür hatten wir früher gefunden (Art. 26) $r = 67^{\circ} 2' 59'' 78$, $\log r = 0,2008541$, was weniger genau ist, indem eigentlich $r = 67^{\circ} 3' 0'' 00$ hätte herauskommen müssen, mit welchem angenommenen Werthe der Werth für t durch grössere Tafeln berechnet worden war.

Zweiter Abschnitt.

(45)

Relationen, die einen einzelnen Ort im Raume betreffen.

47.

Im ersten Abschnitte ist über die Bewegung der Himmelskörper in ihren Bahnen gehandelt, ohne dass Rücksicht auf die Lage genommen wäre, welche diese Bahnen im Raume einnehmen. Zur Bestimmung dieser Lage, wodurch man in den Stand gesetzt ist, die Beziehung der Orte eines Himmelskörpers auf irgend welche andere Punkte des Raumes anzugeben, wird offenbar sowohl die Lage der Bahnebene in Beziehung auf irgend eine bekannte Ebene erfordert (z. B. die Ebene der Erdbahn, Ecliptik), als die Lage der Apsiden in jener Ebene. Da Obiges am zweckmässigsten auf sphärische Trigonometrie zurückgeführt wird, so wollen wir uns eine, mit beliebigem Halbmesser um die Sonne als Mittelpunkt beschriebene Kugeloberfläche denken, auf der jede durch die Sonne gehende Ebene einen grössten Kreis, jede aus der Sonne gezogene gerade Linie aber einen Punkt zeichnet. Wenn Ebenen und gerade Linien nicht durch die Sonne selbst hindurchführen, so legen wir ihnen parallel Ebenen und gerade Linien durch die Sonne, und stellen uns vor, dass die den Letzteren auf der Kugeloberfläche entsprechenden grössten Kreise und Punkte auch erstere darstellen; auch kann man sich die Kugel mit einem sogenannten unendlich grossen Halbmesser beschrieben denken, auf welcher die parallelen Ebenen und geraden Linien ebenso dargestellt werden.

Fällt daher die Ebene der Bahn nicht mit der Ebene der Ecliptik zusammen, so schneiden sich die jenen Ebenen entsprechenden grössten Kreise (die wir einfach „Bahn“ und „Ecliptik“ nennen wollen) in zwei Punkten, welche Knoten heissen. In dem einen Knoten wird der aus der Sonne gesehene Körper aus der südlichen Gegend durch die Ecliptik in die nördliche übergehen, in dem anderen Knoten wird er aus letzterer in die

erstere zurückkehren. Ersterer heisst der aufsteigende, letzterer der niedersteigende Knoten. Die Lage der Knoten in der Ecliptik bezeichnet man durch ihren, nach Ordnung der Zeichen gezählten Abstand vom mittleren Frühlings-Aequinoxe (Länge). Es sei, in Fig. 1, Ω der aufsteigende Knoten, $A\Omega B$ ein Theil der Ecliptik, $C\Omega D$ ein Theil der Bahn; die Bewegung der Erde und des Himmelskörpers mögen in der Richtung von A nach B und von C nach D vor sich gehen, so ist klar, dass der sphärische Winkel, den ΩD mit ΩB bildet, von 0° bis 180° , aber hierüber nicht hinaus, anwachsen kann, ohne dass Ω aufhört der aufsteigende Knoten zu sein. Diesen Winkel nennt man die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik. Wenn die Lage der Bahnebene durch die Länge des aufsteigenden Knotens und durch die Neigung der Bahn bestimmt ist, so wird nur noch der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten erfordert. Diesen Abstand zählt man nach der Richtung der Bewegung, und nimmt ihn deshalb negativ oder zwischen 180° und 360° an, wenn das Perihel von der Ecliptik nach Süden belegen ist. Man merke sich noch die folgenden Ausdrücke: Die Länge eines jeden Punktes in dem Kreise der Bahn, wird von demjenigen Punkte an gezählt, der vom aufsteigenden Knoten ebensoweit (46) rückwärts in der Bahn absteht, als das Frühlings-Aequinox von demselben Punkte rückwärts in der Ecliptik absteht. Hiernach wird die Länge des Perihels die Summe der Länge des Knotens und des Abstandes des Perihels vom Knoten sein; die wahre Länge des Körpers in der Bahn aber ist = der Summe der wahren Anomalie und der Länge des Perihels. Mittlere Länge endlich nennt man die Summe der mittleren Anomalie und der Länge des Perihels. Dieser letztere Ausdruck kann offenbar nur in elliptischen Bahnen Statt finden.

48.

Um daher den Ort eines Himmelskörpers im Raume für jeden Augenblick angeben zu können, muss man in der elliptischen Bahn Folgendes kennen:

I. Die mittlere Länge für einen bestimmten, an sich willkürlichen Zeitpunkt, den man mit „Epoche“ bezeichnet; mit demselben Namen wird auch bisweilen diese Länge selbst belegt. Gemeinlich wählt man für die Epoche den Anfang eines Jahres, nämlich den Mittag des ersten Januars in einem

Schaltjahre, oder den Mittag des vorhergehenden 31. Decembers im gemeinen Jahre.

II. Die mittlere Bewegung innerhalb eines gewissen Zeitraumes, z. B. in einem mittleren Sonnentage, oder in $365, 365\frac{1}{4}, 365\frac{25}{100}$ Tagen.

III. Die halbe grosse Axe, die zwar weggelassen werden könnte, wenn des Körpers Masse entweder bekannt, oder zu vernachlässigen ist, indem sie bereits durch die mittlere Bewegung (Art. 7) gegeben ist; der Bequemlichkeit wegen pflegt jedoch beides stets angegeben zu werden.

IV. Excentricität. V. Länge des Perihels. VI. Länge des aufsteigenden Knotens. VII. Neigung der Bahn.

Diese sieben Momente heissen die Elemente der Bewegung des Körpers.

In der Parabel oder Hyperbel vertritt die Zeit des Periheldurchganges die Stelle des ersten Elementes. Anstatt II dient dabei das, was in dieser Art von Kegelschnitten der mittleren täglichen Bewegung analog ist (siehe Art. 19; in der hyperbolischen Bewegung die Grösse $\lambda kb^{-\frac{1}{2}}$ Art. 23). In der Hyperbel können die übrigen Elemente ebenso beibehalten werden, in der Parabel aber, wo die grosse Axe unendlich und die Excentricität = 1 ist, wird an Stelle des dritten und vierten Elementes nur der Abstand im Perihelie aufgeführt.

49.

Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche wird die Neigung der Bahn, welche ich von 0 bis 180° zähle, nur bis 90° ausgedehnt, und wenn der Winkel der Bahn mit dem Bogen ΩB (Fig. 1) einen rechten Winkel überschreitet, so wird der Winkel der Bahn mit dem Bogen ΩA (der dessen Complement zu 180° ist) als Neigung der Bahn betrachtet. In einem solchen Falle muss man dann hinzufügen, dass die Bewegung retrograd ist (gleich (47) als wenn in unserer Figur $E\Omega F$ einen Theil der Bahn darstellt), um ihn vom andern Falle, wo die Bewegung direct genannt wird, zu unterscheiden. Die Länge in der Bahn pflegt dann so gezählt zu werden, dass sie im aufsteigenden Knoten mit der Länge dieses Punktes in der Ecliptik übereinkommt, in der Richtung ΩF aber abnimmt; der Anfangspunkt, von welchem die Längen gegen

die Ordnung der Bewegung in der Richtung ΩF gezählt werden, steht also ebenso weit vom Ω ab, als das Frühlings-Aequinox von demselben Ω in der Richtung ΩA . Es wird deshalb in diesem Falle die Länge des Perihels gleich sein der um den Abstand des Perihels vom Knoten verminderten Länge des Knotens. Auf diese Weise wird jeder der beiden Sprachgebraüche leicht in den anderen verwandelt, ich ziehe aber den meinigen deshalb vor, weil man sich dabei über die Unterscheidung der directen und rückläufigen Bewegung hinwegsetzen, und in beiden Fällen stets dieselben Formeln anwenden kann, während der gewöhnliche Gebrauch häufig doppelte Rechnungsvorschriften erfordert.

50.

Die einfachste Art, um die Lage irgend eines Punktes an der Oberfläche der Himmelskugel in Beziehung auf die Ecliptik zu bestimmen, ergibt sich durch seinen Abstand von der Ecliptik (Breite) und durch den Abstand des Punktes, wo die Ecliptik von einem auf sie gefällten Perpendikel geschnitten wird, vom Aequinox (Länge). Die Breite wird von beiden Seiten der Ecliptik an bis zu 90° gezählt, und wird in der nördlichen Region als positiv, in der südlichen als negativ betrachtet. Es mögen daher dem heliocentrischen Orte eines Himmelskörpers, d. h. der Projection einer von der Sonne nach dem Körper auf der Himmelskugel gezogenen geraden Linie, die Länge λ und die Breite β entsprechen. Es sei ferner u die Entfernung des heliocentrischen Orts vom aufsteigenden Knoten (welche das Argument der Breite genannt wird), i die Neigung der Bahn, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens, so hat man zwischen $i, u, \beta, \lambda - \Omega$, welche Grössen Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sind, folgende Relationen, die, wie man sich leicht überzeugt, ohne alle Einschränkung gelten:

$$\text{I. } \operatorname{tang}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tang} u$$

$$\text{II. } \operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} i \sin(\lambda - \Omega)$$

$$\text{III. } \sin \beta = \sin i \sin u$$

$$\text{IV. } \cos u = \cos \beta \cos(\lambda - \Omega).$$

Sind daher i und u gegebene Grössen, so wird daraus $\lambda - \Omega$ mittelst der Gleichung I bestimmt, und sodann β mittelst II oder III, wenn nämlich β sich nicht zu sehr $\pm 90^\circ$ nähert; die Formel IV kann zur Prüfung der

Rechnung dienen. Uebrigens lehren die Formeln I und IV, dass $\lambda - \Omega$ und u immer in demselben Quadranten liegen, so lange i zwischen 0° und 90° liegt; dagegen gehören $\lambda - \Omega$ und $360^\circ - u$ zu denselben Quadranten, sobald i zwischen 90° und 180° liegt, oder wenn nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche die Bewegung rückläufig ist. Die Zweideutigkeit, welche die Bestimmung von $\lambda - \Omega$ aus der Tangente nach Formel I zurücklässt, wird also hierdurch von selbst aufgehoben. (48)

Folgende Formeln leitet man leicht aus Combination der vorhergehenden ab:

$$\text{V. } \sin(u - \lambda + \Omega) = 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{VI. } \sin(u - \lambda + \Omega) = \tan \frac{1}{2} i \sin \beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{VII. } \sin(u - \lambda + \Omega) = \tan \frac{1}{2} i \tan \beta \cos u$$

$$\text{VIII. } \sin(u + \lambda - \Omega) = 2 \cos \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{IX. } \sin(u + \lambda - \Omega) = \cot \tan \frac{1}{2} i \sin \beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$\text{X. } \sin(u + \lambda - \Omega) = \cot \tan \frac{1}{2} i \tan \beta \cos u.$$

Der Winkel $u - \lambda + \Omega$ (wenn i innerhalb 90°), oder $u + \lambda - \Omega$ (wenn i über 90°), heisst gemeinlich die Reduction auf die Ecliptik; er ist nämlich der Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge λ und der Länge in der Bahn, die nach gewöhnlichem Sprachgebrauche ist: $\Omega \pm u$ (nach dem meinigen $\Omega + u$). Sobald die Neigung der Bahn klein oder wenig von 180° verschieden ist, so kann man diese Reduction als eine Grösse der zweiten Ordnung betrachten, und in diesem Falle ist es vorzuziehen, β zuerst durch Formel III und dann λ aus VII oder X zu berechnen, wodurch man grössere Schärfe als mittelst Formel I erlangen kann.

Wenn man ein Perpendikel von dem Orte des Körpers im Raume, auf die Ebene der Ecliptik fällt, so heisst der Abstand des Einschneidepunktes von der Sonne die curtirte Distanz. Bezeichnet man also letztere mit r' , den radius vector aber mit r , so hat man

$$\text{XI. } r' = r \cos \beta.$$

51.

Bedarf eines Beispiels will ich die in den Artt. 13 und 14 angefangene Berechnung (wozu die Zahlen vom Planeten Juno genommen waren) weiter fortsetzen. Wir fanden oben: wahre Anomalie = $315^{\circ} 1' 23'' 02$, den Logarithmus des radius vector = 0,325 9877; nun sei $i = 13^{\circ} 6' 44'' 10$, Abstand des Perihels vom Knoten = $241^{\circ} 10' 20'' 57$, und daher $u = 196^{\circ} 11' 43'' 59$; endlich sei $\Omega = 171^{\circ} 7' 48'' 73$. Hieraus erhält man:

$\log \operatorname{tang} u \dots\dots\dots 9,463\ 0573$	$\log \sin (\lambda - \Omega) \dots\dots 9,434\ 8691\ n$
$\log \cos i \dots\dots\dots 9,988\ 5266$	$\log \operatorname{tang} i \dots\dots\dots 9,367\ 2305$
$\log \operatorname{tang} (\lambda - \Omega) \dots\dots 9,451\ 5839$	$\log \operatorname{tang} \beta \dots\dots\dots 8,802\ 0996\ n$
$\lambda - \Omega = 195^{\circ} 47' 40'' 25$	$\beta = -3^{\circ} 37' 40'' 02$
$\lambda = 6\ 55\ 28,98$	$\log \cos \beta \dots\dots\dots 9,999\ 1289$
$\log r \dots\dots\dots 0,325\ 9877$	$\log \cos (\lambda - \Omega) \dots\dots 9,983\ 2852\ n$
$\log \cos \beta \dots\dots\dots 9,999\ 1289$	$9,982\ 4141\ n$
$\log r' \dots\dots\dots 0,325\ 1166$	$\log \cos u \dots\dots\dots 9,982\ 4141\ n$
(49) Die Rechnung nach den Formeln III und VII würde so stehen:	
$\log \sin u \dots\dots\dots 9,445\ 4714\ n$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} i \dots\dots\dots 9,060\ 4259$
$\log \sin i \dots\dots\dots 9,355\ 7570$	$\log \operatorname{tang} \beta \dots\dots\dots 8,802\ 0995\ n$
$\log \sin \beta \dots\dots\dots 8,801\ 2284\ n$	$\log \cos u \dots\dots\dots 9,982\ 4141\ n$
$\beta = -3^{\circ} 37' 40'' 02$	$\log \sin (u - \lambda + \Omega) \dots\dots 7,844\ 9395$
	$u - \lambda + \Omega = 0^{\circ} 24' 3'' 34$
	$\lambda - \Omega = 195\ 47\ 40,25.$

52.

Betrachtet man i und u als veränderliche Größen, so giebt die Differentiation der Gleichung III im Art. 50:

$$\operatorname{cotang} \beta d\beta = \operatorname{cotang} i di + \operatorname{cotang} u du, \text{ oder}$$

$$\text{XII. } d\beta = \sin (\lambda - \Omega) di + \sin i \cos (\lambda - \Omega) du.$$

Ebenso erhält man durch Differentiation der Gleichung I:

$$\text{XIII. } d(\lambda - \Omega) = -\operatorname{tang} \beta \cos (\lambda - \Omega) di + \frac{\cos i}{\cos \beta} du.$$

Schliesslich folgt aus Differentiation der Gleichung XI:

$$d r' = \cos \beta d r - r \sin \beta d \beta, \text{ oder}$$

$$\text{XIV. } d r' = \cos \beta d r - r \sin \beta \sin (\lambda - \Omega) d i - r \sin \beta \sin i \cos (\lambda - \Omega) d u.$$

In dieser letzten Gleichung muss man entweder die Glieder, welche $d i$ und $d u$ enthalten, mit 206 265' dividiren, oder die übrigen mit dieser Zahl multipliciren, wenn man die Aenderungen von i und u als in Secunden ausgedrückt annimmt.

53.

Die Lage eines Punktes im Raume wird sehr bequem durch die Abstände bestimmt, welche er von drei, sich einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen einnimmt. Wählt man zu einer dieser Ebenen die Ebene der Ecliptik, und bezeichnet mit z den Abstand des Himmelskörpers von dieser Ebene, der positiv genommen wird im nördlichen, negativ im südlichen Theile, so hat man offenbar $z = r' \tan \beta = r \sin \beta = r \sin i \sin u$. Die beiden übrigen Ebenen, welche ebenfalls als durch die Sonne gelegt gedacht werden, projiciren an der Himmelskugel grösste Kreise, welche die Ecliptik unter rechten Winkeln schneiden, deren Pole daher in der Ecliptik selbst liegen und 90° von einander abstehen. Denjenigen Pol einer jeden Ebene, auf dessen Seite die Abstände als positive gezählt werden, nenne ich den positiven Pol. Es mögen mithin N und $N + 90^\circ$ die Längen der positiven Pole bezeichnen, und die Abstände von den ihnen entsprechenden Ebenen sollen beziehungsweise x und y sein. Man hat dann offenbar:

$$x = r' \cos (\lambda - N) = r \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) \cos (N - \Omega) + r \cos \beta \sin (\lambda - \Omega) \sin (N - \Omega) \quad (50)$$

$$y = r' \sin (\lambda - N) = r \cos \beta \sin (\lambda - \Omega) \cos (N - \Omega) - r \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) \sin (N - \Omega).$$

Diese Werthe gehen über in

$$x = r \cos (N - \Omega) \cos u + r \cos i \sin (N - \Omega) \sin u$$

$$y = r \cos i \cos (N - \Omega) \sin u - r \sin (N - \Omega) \cos u.$$

Wird folglich der positive Pol der Ebene der x in den aufsteigenden Knoten selbst gestellt, so dass $N = \Omega$ ist, so hat man für die Coordinaten x, y, z die sehr einfachen Ausdrücke:

$$x = r \cos u,$$

$$y = r \cos i \sin u,$$

$$z = r \sin i \sin u.$$

Wenn aber diese Voraussetzung nicht Statt findet, so kann man doch den obigen Formeln eine ungefähr ebenso bequeme Gestalt durch Einführung von vier Hilfsgrößen a, b, A, B geben, die so bestimmt werden, dass

$$\begin{aligned}\cos(N-\Omega) &= a \sin A \\ \cos i \sin(N-\Omega) &= a \cos A \\ -\sin(N-\Omega) &= b \sin B \\ \cos i \cos(N-\Omega) &= b \cos B\end{aligned}$$

(siehe Art. 14, II). Dann ist offenbar

$$\begin{aligned}x &= r a \sin(u+A) \\ y &= r b \sin(u+B) \\ z &= r \sin i \sin u.\end{aligned}$$

54.

Die in dem Vorangehenden erklärten Relationen der Bewegung zur Ecliptik bleiben offenbar ganz die nämlichen, wenn an Stelle der Ecliptik irgend eine andere Ebene gesetzt wird, falls nur die Lage der Bahnebene gegen diese Ebene bekannt ist. Jedoch muss man dann die Ausdrücke Länge und Breite weglassen. Es bietet sich also die Aufgabe dar: *Aus der bekannten Lage der Bahnebene und einer anderen neuen Ebene gegen die Ecliptik die Lage der Bahnebene gegen diese neue Ebene herzuleiten.* Es seien $n\Omega, \Omega\Omega', n\Omega'$ Theile grösster Kreise, welche von der Ebene der Ecliptik, von der Bahnebene und von der neuen Ebene an der Himmelkugel projectirt werden (Fig. 2). Damit die Neigung des zweiten Kreises gegen den dritten und der Ort des aufsteigenden Knotens ohne Zweideutigkeit angegeben werden könne, muss im dritten Kreise eine von zwei Richtungen ausgewählt werden, die derjenigen analog ist, welche bei der Ecliptik die Ordnung der Zeichen ist. In unserer Figur soll diese Richtung von n nach Ω' gehen. Ausserdem muss von beiden Halbkugeln, welche der Kreis $n\Omega'$ von einander trennt, die (51) eine als der nördlichen, die andere als der südlichen Halbkugel analog angenommen werden. Diese Halbkugeln aber sind schon von selbst unterschieden, in soweit stets dasjenige als pördlich angesehen wird, was Jemandem, der in einem Kreise nach Ordnung der Zeichen vorschreitet, zur Rechten liegt (nämlich auf der innern Kugelfläche, welche unsere Figur vorstellt). In der Figur sind daher

Ω , n , Ω' die aufsteigenden Knoten des zweiten Kreises auf dem ersten, des dritten auf dem ersten, und des zweiten auf dem dritten; $180^\circ - n\Omega\Omega'$, $\Omega n\Omega'$, $n\Omega'\Omega$ sind die Neigungen des zweiten gegen den ersten, des dritten gegen den ersten, des zweiten gegen den dritten. Es hängt mithin unsere Aufgabe von der Auflösung eines sphärischen Dreiecks ab, wo aus einer Seite und den anliegenden Winkeln das Uebrige gefunden werden muss. Ich übergehe hier die hinreichend bekannten gewöhnlichen Vorschriften der sphärischen Trigonometrie zur Behandlung dieses Falles, brauche dagegen zur grösseren Bequemlichkeit eine andere Methode, die aus gewissen Gleichungen, welche vergeblich in unseren trigonometrischen Büchern gesucht werden, abgeleitet ist.

Diese Gleichungen, die wir später häufig benutzen werden, sind die folgenden, wobei a , b , c die Seiten und A , B , C die diesen Seiten respective gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks bezeichnen:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \text{II.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A} \\ \text{III.} \quad & \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \text{IV.} \quad & \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C)}{\sin \frac{1}{2}A} \end{aligned}$$

Ogleich ich den Beweis dieser Sätze der Kürze halber hier übergehen muss, so kann doch ein Jeder deren Wahrheit leicht bestätigt finden in Dreiecken, in denen weder die Seiten noch die Winkel über 180° hinausgehen. Wenn man die Idee des sphärischen Dreiecks in der grössten Allgemeinheit fasst, so dass weder Seiten noch Winkel durch irgend welche Grenzen beschränkt werden (was viele ausgezeichnete Vortheile gewährt, jedoch zuvor einiger Erläuterungen bedarf) so können Fälle eintreten, wo in allen vorhergehenden Gleichungen das Zeichen geändert werden muss: weil aber die frühern Zeichen offenbar wiederhergestellt werden, sobald einer der Winkel oder eine der Seiten um 360° vermehrt oder vermindert wird, so kann man die oben gebrauchten Zeichen stets sicher beibehalten, es mag nun aus der Seite und den anliegenden Winkeln, oder aus dem Winkel und den anliegenden Seiten das Uebrige bestimmt werden; denn stets gehen aus unseren Formeln entweder für die gesuchten Stücke die Werthe selbst hervor, oder solche, die

von den wahren um 360° verschieden, ihnen also gleich geltend sind. Eine vollständigere Erklärung dieses Gegenstandes will ich bis zu einer andern Gelegenheit aufsparen. Dass aber meine Vorschriften, die ich auf jene Formeln sowohl bei Lösung unserer Aufgabe als bei andern Gelegenheiten gestützt habe, in allen Fällen eine allgemeine Gültigkeit besitzen, liesse sich einstweilen mit Hilfe einer strengen Induction d. h. durch vollständige Aufzählung aller Fälle unschwer erweisen.

55.

Bezeichnet man wie oben die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ecliptik mit Ω , die Neigung mit i ; ferner die Länge des aufsteigenden Knotens der neuen Ebene in der Ecliptik mit n , deren Neigung mit ϵ ; den Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahn in der neuen Ebene vom aufsteigenden Knoten der neuen Ebene in der Ecliptik (den Bogen $n\Omega'$ in Fig. 2) mit Ω' ; die Neigung der Bahn gegen die neue Ebene mit i' ; schliesslich den Bogen von Ω bis Ω' nach der Richtung der Bewegung mit \mathcal{A} ; — so werden die Seiten unseres sphärischen Dreiecks $\Omega - n, \Omega', \mathcal{A}$, und die gegenüberstehenden Winkel $i', 180^\circ - i, \epsilon$. Man hat also nach den Formeln des vorhergehenden Artikels:

$$\sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' + \mathcal{A}) = \sin \frac{1}{2} (\Omega - n) \sin \frac{1}{2} (i + \epsilon)$$

$$\sin \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\Omega' + \mathcal{A}) = \cos \frac{1}{2} (\Omega - n) \sin \frac{1}{2} (i - \epsilon)$$

$$\cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \mathcal{A}) = \sin \frac{1}{2} (\Omega - n) \cos \frac{1}{2} (i + \epsilon)$$

$$\cos \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \mathcal{A}) = \cos \frac{1}{2} (\Omega - n) \cos \frac{1}{2} (i - \epsilon).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(\Omega' + \mathcal{A})$ und $\sin \frac{1}{2} i'$; die beiden übrigen $\frac{1}{2}(\Omega' - \mathcal{A})$ und $\cos \frac{1}{2} i'$; aus $\frac{1}{2}(\Omega' + \mathcal{A})$ und $\frac{1}{2}(\Omega' - \mathcal{A})$ entwickeln sich Ω' und \mathcal{A} ; aus $\sin \frac{1}{2} i'$ oder $\cos \frac{1}{2} i'$ (deren Uebereinstimmung zur Prüfung der Rechnung dient) ergibt sich i' . Die Zweideutigkeit, ob $\frac{1}{2}(\Omega' + \mathcal{A})$ und $\frac{1}{2}(\Omega' - \mathcal{A})$ zwischen 0 und 180° , oder zwischen 180° und 360° zu nehmen ist, wird dadurch gehoben, dass sowohl $\sin \frac{1}{2} i'$ als $\cos \frac{1}{2} i'$ positiv werden müssen, weil der Natur der Sache nach i' innerhalb 180° fallen muss.

56.

Ein Beispiel zu den vorhergehenden Vorschriften. Sei $\Omega = 172^\circ 28' 13'' 7$,
 $i = 34^\circ 38' 1'' 1$. Sodann sei die neue Ebene dem Aequator parallel und daher
 $n = 180^\circ$, der Winkel ϵ (Schiefe der Ecliptik) = $23^\circ 27' 55'' 8$, so hat man:

$\Omega - n = - 7^\circ 31' 46'' 3$	$\frac{1}{2}(\Omega - n) = - 3^\circ 45' 53'' 15$
$i + \epsilon = 58 \ 5 \ 56,9$	$\frac{1}{2}(i + \epsilon) = 29^\circ 2 \ 58,45$
$i - \epsilon = 11 \ 10 \ 5,3$	$\frac{1}{2}(i - \epsilon) = 5 \ 35 \ 2,65$
$\log \sin \frac{1}{2}(\Omega - n) \dots 8,817 \ 3026 \ n$	$\log \cos \frac{1}{2}(\Omega - n) \dots 9,999 \ 0618$
$\log \sin \frac{1}{2}(i + \epsilon) \dots 9,686 \ 2484$	$\log \sin \frac{1}{2}(i - \epsilon) \dots 8,988 \ 1405$
$\log \cos \frac{1}{2}(i + \epsilon) \dots 9,941 \ 6108$	$\log \cos \frac{1}{2}(i - \epsilon) \dots 9,997 \ 9342$

Hieraus folgt

$\log \sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2}(\mathcal{Q}' + \mathcal{J}) \dots 8,503 \ 5510 \ n$	$\log \cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2}(\mathcal{Q}' - \mathcal{J}) \dots 8,758 \ 9134 \ n$
$\log \sin \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2}(\mathcal{Q}' + \mathcal{J}) \dots 8,987 \ 2023$	$\log \cos \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2}(\mathcal{Q}' - \mathcal{J}) \dots 9,996 \ 9960$
woraus $\frac{1}{2}(\mathcal{Q}' + \mathcal{J}) = 341^\circ 49' 19'' 01$	woraus $\frac{1}{2}(\mathcal{Q}' - \mathcal{J}) + 356^\circ 41' 31'' 43$
$\log \sin \frac{1}{2} i' \dots 9,009 \ 4368$	$\log \cos \frac{1}{2} i' \dots 9,997 \ 7202$

Wir erhalten daher $\frac{1}{2} i' = 5^\circ 51' 56'' 445$; $i' = 11^\circ 43' 52'' 89$; $\mathcal{Q}' = 338^\circ 30' 50'' 43$;
 $\mathcal{J} = - 14^\circ 52' 12'' 42$.

Uebrigens entspricht der Punkt n an der Himmelskugel offenbar dem Herbstaequinox. Es wird deshalb der Abstand des aufsteigenden Knotens der Bahn im Aequator vom Frühlings-Aequinox (dessen gerade Anstieigung) = $158^\circ 30' 50'' 43$.

Zur Erläuterung des Art. 53 will ich dieses Beispiel noch weiter fortsetzen und die Formeln für die Coordinaten in Beziehung auf die drei durch die Sonne gelegten Ebenen entwickeln, deren eine dem Aequator parallel sei, während die positiven Pole der beiden übrigen Ebenen in der Rectascension 0° und 90° liegen sollen; die Abstände von diesen Ebenen seien resp. z , x , y . Bezeichnet man nun ausserdem den Abstand des heliocentrischen Orts an der Himmelskugel von den Punkten Ω und \mathcal{Q}' beziehungsweise mit u und u' , so ist $u' = u - \mathcal{J} = u + 14^\circ 52' 12'' 42$; und Dasjenige, was im Art. 53 mit i , $N - \Omega$, u ausgedrückt wurde, wird hier sein: i' , $180^\circ - \mathcal{Q}'$, u' . So erhält man aus den dort gegebenen Formeln:

$\log a \sin A \dots\dots 9,968\ 7197\ u$	$\log b \sin B \dots\dots 9,563\ 8058$
$\frac{\log a \cos A \dots\dots 9,554\ 6380\ u}{\text{also } A = 248^\circ 55' 22'' 97}$	$\frac{\log b \cos B \dots\dots 9,959\ 5519\ u}{\text{also } B = 158^\circ 5' 54'' 97}$
$\log a \dots\dots\dots 9,998\ 7923$	$\log b \dots\dots\dots 9,992\ 0848.$

Man hat daher:

$$x = a \sin(u' + 248^\circ 55' 22'' 97) = a \sin(u + 263^\circ 47' 35'' 39)$$

$$y = b \sin(u' + 158^\circ 5' 54,97) = b \sin(u + 172^\circ 58' 7,39)$$

$$z = c \sin u' = c \sin(u + 14^\circ 52' 12,42)$$

wo $\log c = \log \sin i' = 9,308\ 1870.$

Eine andere Auflösung dieses hier behandelten Problems findet man in von Zach, *Monatliche Correspondenz*, Band IX, S. 385.*)

57.

Es kann mithin der Abstand eines Himmelskörpers von irgend einer durch die Sonne gehenden Ebene auf die Form $kr \sin(v + K)$ zurückgeführt werden, wobei v die wahre Anomalie bezeichnet, und wo k der Sinus der Neigung der Bahn gegen diese Ebene, K der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten der Bahn in derselben Ebene ist. Soweit nun die Lage (54) der Bahnebene, und der Apsidenlinie in letzterer, sowie die Lage der Ebene, auf welche die Abstände sich beziehen, als constant gelten können, werden auch k und K constant sein. Meist jedoch wird jene Methode in einem solchen Falle benutzt werden, wo, wenn auch die Störungen vernachlässigt werden, welche die erste und zweite Voraussetzung stets etwas afficiren, wenigstens die dritte Voraussetzung unzulässig ist. Letzteres tritt ein, sobald die Abstände auf die Ebene des Aequators bezogen werden, oder auf eine den Aequator unter rechtem Winkel in gegebener Rectascension schneidende Ebene. Denn da die Lage des Aequators wegen Praecession der Aequinoctien und überher wegen der Nutation (wenn von seiner wahren, nicht von seiner mittleren Lage die Rede ist) veränderlich ist, so werden in diesem Falle auch k und K Veränderungen, allerdings langsamen, unterworfen sein. Die Berechnung dieser Veränderungen kann ohne Schwierigkeit durch Differentialformeln bewerkstelligt

*) Vergl. Anhang Seite 53 folgende. *Anmerkung des Uebersetzers.*

werden; der Kürze wegen mag es aber hier genügen, die differentialen Veränderungen von i , Q' , A anzuführen, in soweit solche von den Aenderungen des $Q-n$ und des ϵ abhängen.

$$d i' = \sin \epsilon \sin Q' d(Q-n) - \cos Q' d\epsilon$$

$$d Q' = \frac{\sin i \cos A}{\sin i'} d(Q-n) + \frac{\sin Q'}{\tan i'} d\epsilon$$

$$d A = \frac{\sin \epsilon \cos Q'}{\sin i'} d(Q-n) + \frac{\sin Q'}{\sin i'} d\epsilon.$$

Sobald es sich fibrigens nur darum handelt, in Beziehung auf solche veränderliche Ebenen mehre Orte eines Himmelskörpers zu berechnen, die innerhalb eines müssigen Zeitraumes (z. B. eines Jahres) liegen, so wird es gemeinlich am Bequemsten sein, die Grössen a , A , b , B , c , C für zwei Epochen, zwischen welche jene Orte fallen, zu ermitteln, und ihre Veränderungen für die angenommenen einzelnen Zeitpunkte daraus mittelst einfacher Interpolation abzuleiten.

58.

Unsere Formeln für Abstände von gegebenen Ebenen enthalten v und r ; und sobald man vorher diese Grössen aus der Zeit bestimmen muss, so kann dadurch ein Theil der Operationen noch abgekürzt, und die Arbeit merklich erleichtert werden. Denn man kann jene Abstände durch eine sehr einfache Formel sofort aus der excentrischen Anomalie in der Ellipse, oder aus der Hilfsgrösse F oder u in der Hyperbel herleiten, so dass es der Berechnung der wahren Anomalie und des radius vector überall nicht bedarf. Es wird nämlich verändert der Ausdruck $kr \sin(v+K)$

I. für die Ellipse (unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Artikels 8) in:

$$ak \cos q \cos K \sin E + ak \sin K (\cos E - e).$$

Bestimmt man also l , L , λ durch folgende Gleichungen:

$$ak \sin K = l \sin L \tag{55}$$

$$ak \cos q \cos K = l \cos L$$

$$-e ak \sin K = -e l \sin L = \lambda,$$

so geht dieser Ausdruck über in: $l \sin(E+L) + \lambda$, wo l , L , λ constant sein

werden, so lange man k , K , e als constant annehmen darf; wenn Letzteres nicht angeht, so gilt über die Berechnung jener Aenderungen Dasselbe, was im vorhergehenden Artikel bemerkt ist.

Als Beispiel wollen wir die Umformung des im Artikel 56 für x gefundenen Ausdrucks hinzuffügen, wo die Länge des Perihels = $121^{\circ} 17' 34'' 4$, $q = 14^{\circ} 13' 31'' 97$, $\log a = 0,442 3790$ gesetzt ist. Es wird mithin der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Ecliptik = $308^{\circ} 49' 20'' 7 = u - v$; hieraus $K = 212^{\circ} 36' 56'' 09$. Man hat also:

$\log ak \dots\dots\dots 0,441 1713$	$\log l \sin L \dots\dots\dots 0,172 7600 n$
$\log \sin K \dots\dots\dots 9,731 5887 n$	$\log l \cos L \dots\dots\dots 0,353 1154 n$
$\log ak \cos q \dots\dots 0,427 6456$	$L = 213^{\circ} 25' 51'' 30$
$\log \cos K \dots\dots\dots 9,925 4698 n$	$\log l = 0,431 6627$
	$\log \lambda = 9,563 2352$
	$\lambda = + 0,365 7929.$

II. In der Hyperbel geht die Formel $kr \sin(v+K)$ nach Art. 21 über in: $\lambda + \mu \tan g F + v \secans F$, wenn man dabei setzt: $ebk \sin K = \lambda$, $bk \tan g \psi \cos K = \mu$, $-bk \sin K = v$; offenbar kann man auch diesen Ausdruck auf die Form bringen $\frac{n \sin(F+N) + v}{\cos F}$. — Wenn an Stelle von F die Hilfsgrösse u angewendet ist, so geht der Ausdruck $kr \sin(v+K)$ nach Art. 21 über in: $\alpha + \beta u + \frac{\gamma}{u}$, wo α , β , γ durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda = ebk \sin K \\ \beta &= \frac{1}{2}(v + \mu) = -\frac{1}{2} ebk \sin(K - \psi) \\ \gamma &= \frac{1}{2}(v - \mu) = -\frac{1}{2} ebk \sin(K + \psi). \end{aligned}$$

III. In der Parabel, wo die wahre Anomalie aus der Zeit unmittelbar abgeleitet wird, bleibt nichts Anderes übrig, als für den radius vector seinen Werth zu substituiren. Bezeichnet dann q den Abstand im Perihel, so wird der Ausdruck $kr \sin(v+K) = \frac{qk \sin(v+K)}{\cos \frac{1}{4} v^2}$.

59.

Die zur Bestimmung der Abstände von, durch die Sonne gelegten Ebenen gegebenen Vorschriften lassen sich offenbar auch für die Abstände

der Erde anwenden, wobei aber nur die einfachsten Fälle vorzukommen pflegen. — Es seien R der Abstand der Erde von der Sonne, L die heliocentrische Länge der Erde (die von der geocentrischen Länge der Sonne 180° verschieden ist) und endlich X, Y, Z die Abstände der Erde von drei Ebenen, die sich in der Sonne unter rechten Winkeln schneiden. Falls nun

I. die Ebene der Z die Ecliptik selbst ist, und die Länge der Pole der übrigen Ebenen, von welchen die Abstände X und Y sind, resp. mit N und $N+90^\circ$ bezeichnet werden, so ist

$$X = R \cos(L-N); \quad Y = R \sin(L-N); \quad Z = 0.$$

II. Wenn die Ebene der Z dem Aequator parallel ist, und die Rectascensionen der Pole der übrigen Ebenen, von welchen die Abstände X und Y sind, resp. zu 0 und 90° angenommen werden, so hat man, wenn ϵ die Schiefe der Ecliptik bezeichnet:

$$X = R \cos L; \quad Y = R \cos \epsilon \sin L; \quad Z = R \sin \epsilon \sin L.$$

Die Herausgeber der neuesten Sonnentafeln, v. Zach und de Lambre, haben angefangen, auch auf die Breite der Sonne Rücksicht zu nehmen, eine Grösse, die von den Störungen der übrigen Planeten und des Mondes herrührt und kaum eine einzige Secunde erreichen kann. Bezeichnet nun B die heliocentrische Breite der Erde, welche stets der Breite der Sonne gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt ist, so hat man

im Falle I.	$\begin{aligned} X &= R \cos B \cos(L-N) \\ Y &= R \cos B \sin(L-N) \\ Z &= R \sin B \end{aligned}$	im Falle II.	$\begin{aligned} X &= R \cos B \cos L \\ Y &= R \cos B \cos \epsilon \sin L - R \sin B \sin \epsilon \\ Z &= R \cos B \sin \epsilon \sin L + R \sin B \cos \epsilon. \end{aligned}$
-------------	---	--------------	---

Für $\cos B$ kann hier immer sicher Eins, und der Winkel B in Theilen des Radius ausgedrückt für $\sin B$ gesetzt werden.

Die so gefundenen Coordinaten werden auf den Mittelpunkt der Erde bezogen. Wenn ξ, η, ζ die Abstände eines beliebigen Punktes auf der Erdoberfläche von drei Ebenen sind, die durch den Mittelpunkt der Erde gelegt und den durch die Sonne gelegten parallel sind, so werden die Abstände jenes Punktes von den durch die Sonne gehenden Ebenen offenbar sein

$$X + \xi; \quad Y + \eta; \quad Z + \zeta$$

und die Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ werden in beiden Fällen auf folgende Weise leicht bestimmt. Es sei ϱ der Halbmesser der Erdkugel (oder der

Sinus der mittleren Horizontalparallaxe der Sonne), λ die Länge desjenigen Punktes der Himmelskugel, wo sich die gerade aus dem Centrum der Erde nach dem Oberflächpunkte gezogene Linie projectirt, β dessen Breite, α Rectascension, δ Declination, so hat man

$$\begin{array}{l|l} \text{im Falle I.} & \text{im Falle II.} \\ \xi = \rho \cos \beta \cos (\lambda - N) & \xi = \rho \cos \delta \cos \alpha \\ \eta = \rho \cos \beta \sin (\lambda - N) & \eta = \rho \cos \delta \sin \alpha \\ \zeta = \rho \sin \beta & \zeta = \rho \cos \delta. \end{array}$$

- (57) Dieser Punkt der Himmelskugel entspricht offenbar dem Zenith des Orts auf der Oberfläche (wenn nämlich die Erde als eine Kugel betrachtet wird), weshalb seine gerade Aufsteigung mit der Rectascension der Mitte des Himmels, oder mit der in Bogen verwandelten Sternzeit übereinkommt, sowie die Declination mit der Polhöhe. — Falls es der Mühe werth wäre, dabei der sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen, so müsste man für δ die verbesserte Polhöhe und für ρ den wahren Abstand des Orts vom Mittelpunkte der Erde anwenden, welche nach bekannten Vorschriften gefunden werden. Aus α und δ werden Länge und Breite λ und β durch bekannte, auch weiter unten abgehandelte Regeln hergeleitet. Uebrigens ist klar, dass λ mit der Länge des Nonagesimus und $90^\circ - \beta$ mit dessen Höhe übereinkommen.

60.

Wenn x, y, z Abstände eines Himmelskörpers von drei, in der Sonne unter rechten Winkeln sich schneidenden Ebenen bezeichnen; X, Y, Z Abstände der Erde (sei es deren Mittelpunktes oder eines Punktes auf der Oberfläche) von denselben Ebenen; so ist klar, dass $x - X, y - Y, z - Z$ die Abstände des Himmelskörpers von drei Ebenen sein werden, die jenen parallel durch die Erde gelegt sind, und dass diese Abstände die nämliche Relation zu dem Abstände des Körpers von der Erde und zu seinem geocentrischen Orte*) d. h. zur Lage der geraden Projectionslinie, die von der Erde nach dem Körper an der Himmelskugel gezogen wird, haben, welche x, y, z zum Abstände von der Sonne und zum heliocentrischen Orte besitzen. Es sei nun A der Abstand des

*) Im weiteren Sinne; denn eigentlich wird dieser Ausdruck auf den Fall bezogen, wo die Gerade aus dem Mittelpunkte der Erde gezogen wird.

Himmelskörpers von der Erde. Man stelle sich vor, dass an der Himmelskugel ein Perpendikel von dem geocentrischen Orte auf denjenigen grössten Kreis gefällt sei, welcher der Ebene der „z“ Abstände entspricht, und es sei a der Abstand des Perpendikel-Einschnitts vom positiven Pole des grössten Kreises, welcher der „x“ Ebene entspricht; endlich sei b die Länge dieses Perpendikels, oder der Abstand des geocentrischen Orts von dem den „z“ Distanzen entsprechenden grössten Kreise; — dann wird b die geocentrische Breite oder Declination sein, je nachdem die Ebene der „z“ Distanzen die Ecliptik oder der Aequator ist; dagegen ist $a+N$ die geocentrische Länge oder Rectascension, wenn N im ersten Falle die Länge, im zweiten Falle die Rectascension des Pols der Ebene der „z“ Distanzen bedeutet. —

Man hat deshalb

$$x - X = A \cos b \cos a$$

$$y - Y = A \cos b \sin a$$

$$z - Z = A \sin b.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben a und $A \cos b$, welche letztere (stets positive) Grösse durch Combination mit der dritten Gleichung b und A liefert.

61.

(58)

Wir haben in dem Vorangehenden eine tiberaus leichte Methode zur Bestimmung des geocentrischen Orts eines Himmelskörpers in Beziehung auf die Ecliptik oder den Aequator gegeben, es mag nun dieser Ort von der Parallaxe resp. der Nutation befreit oder hiennit behaftet sein. — Denn, was die Nutation betrifft, so liegt der ganze Unterschied darin, ob man die mittlere oder wahre Lage des Aequators wählt, und deshalb zählt man die Längen im ersten Falle vom mittleren Aequinox, im zweiten vom wahren, sowie man in jenem Falle die mittlere, in diesem aber die wahre Schiefe der Ecliptik braucht. Uebrigens ist von selbst klar, dass, je mehr Abkürzungen man bei der Coordinaten-Berechnung einführt, man desto mehr präliminare Operationen vornehmen muss. Es wird deshalb die Vorzüglichkeit der oben zur unmittelbaren Ableitung der Coordinaten aus der excentrischen Anomalie aufgestellten Methode besonders dann sich offenbaren, wenn viele geocentrische Orte zu bestimmen sind. Wenn man dagegen nur einen oder recht wenige

geocentrische Orte zu berechnen hat, so würde es sich keineswegs der Mühe lohnen, die Arbeit der Berechnung so vieler Hilfsgrößen zu unternehmen. In einem derartigen Falle wird es sich vielmehr empfehlen, die gewöhnliche Methode nicht zu verlassen, nach welcher aus der excentrischen Anomalie die wahre und der radius vector, hieraus der heliocentrische Ort in Rücksicht auf die Ecliptik, hieraus geocentrische Länge und Breite, und endlich Rectascension und Declination gefunden werden. Damit hier nichts zu mangeln scheine, will ich die beiden letzteren Operationen noch kurz erklären.

62.

Es sei des Himmelskörpers heliocentrische Länge = λ , Breite = β ; die geocentrische Länge = l , Breite = b , Abstand von der Sonne r , von der Erde \mathcal{A} ; endlich die heliocentrische Länge der Erde = L , Breite = B , Abstand von der Sonne = R . Da wir nun nicht $B = 0$ setzen, so kann man unsere Formeln auch auf den Fall anwenden, wo die heliocentrischen und geocentrischen Orte nicht auf die Ecliptik, sondern auf irgend eine andere Ebene bezogen werden; nur fallen dann die Benennungen Länge und Breite weg; ausserdem kann man sogleich die Parallaxe berücksichtigen, sobald der heliocentrische Ort der Erde nicht auf deren Mittelpunkt, sondern auf einen Ort an ihrer Oberfläche unmittelbar bezogen wird. Ich setze ferner $r \cos \beta = r'$, $\mathcal{A} \cos b = \mathcal{A}'$, $R \cos B = R'$. Bezieht man jetzt den Ort des Himmelskörpers und der Erde im Raume auf drei Ebenen, deren eine die Ecliptik ist, während die Pole der zweiten und dritten in der Länge N und $N+90^\circ$ liegen, so ergeben sich sofort folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} r' \cos(\lambda - N) - R' \cos(L - N) &= \mathcal{A}' \cos(l - N) \\ r' \sin(\lambda - N) - R' \sin(L - N) &= \mathcal{A}' \sin(l - N) \\ r' \operatorname{tang} \beta - R' \operatorname{tang} B &= \mathcal{A}' \operatorname{tang} b, \end{aligned}$$

- (59) wobei der Winkel N ganz willkürlich ist. Die erste und zweite Gleichung bestimmen zugleich $l - N$ und \mathcal{A}' , woraus die dritte b giebt; aus b und \mathcal{A}' wird \mathcal{A} erhalten. Damit die Rechnung so bequem wie möglich ausfalle, bestimme ich den willkürlichen Winkel N auf folgende drei Arten:

I. Indem wir $N = L$ setzen, machen wir $\frac{r'}{R'} \sin(\lambda - L) = P$,
 $\frac{r'}{R'} \cos(\lambda - L) - 1 = Q$; dann wird $l - L$, $\frac{A'}{R'}$ und b durch folgende Formeln
 gefunden:

$$\begin{aligned} \tan(l - L) &= \frac{P}{Q} \\ \frac{A'}{R'} &= \frac{P}{\sin(l - L)} = \frac{Q}{\cos(l - L)} \\ \tan b &= \frac{\frac{r'}{R'} \tan \beta - \tan B}{\frac{A'}{R'}}. \end{aligned}$$

II. Wenn man $N = \lambda$ setzt, wird

$$\frac{R'}{r'} \sin(\lambda - L) = P, \quad 1 - \frac{R'}{r'} \cos(\lambda - L) = Q$$

und dann ist: $\tan(l - \lambda) = \frac{P}{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{A'}{r'} &= \frac{P}{\sin(l - \lambda)} = \frac{Q}{\cos(l - \lambda)} \\ \tan b &= \frac{\tan \beta - \frac{R'}{r'} \tan B}{\frac{A'}{r'}}. \end{aligned}$$

III. Wenn $N = \frac{1}{2}(\lambda + L)$, so werden l und A' durch die Gleichungen
 gefunden:

$$\begin{aligned} \tan\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right) &= \frac{r' + R'}{r' - R'} \tan \frac{1}{2}(\lambda - L) \\ A' &= \frac{(r' + R') \sin \frac{1}{2}(\lambda - L)}{\sin\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right)} = \frac{(r' - R') \cos \frac{1}{2}(\lambda - L)}{\cos\left(l - \frac{1}{2}(\lambda + L)\right)} \end{aligned}$$

und sodann b durch die oben gegebene Gleichung. Der Logarithmus
 des Bruches $\frac{r' + R'}{r' - R'}$ wird bequem berechnet, wenn man $\frac{R'}{r'} = \tan \zeta$ setzt,
 wodurch $\frac{r' + R'}{r' - R'} = \tan(45^\circ + \zeta)$ wird. Auf diese Weise ist die Methode III zur
 Bestimmung von l noch etwas kürzer, als I und II, für die übrigen Operationen
 aber sind diese jener vorzuziehen.

(60)

63.

Als Beispiel will ich die im Art. 51 bis zum heliocentrischen Orte geführte Rechnung weiter fortsetzen. Es möge jenem Orte die heliocentrische Länge der Erde $24^{\circ}19'49''05 = L$ entsprechen und $\log R = 9,998\,0979$; die Breite B setze ich $= 0$. Man hat also $\lambda - L = -17^{\circ}24'20''07$, $\log R = \log R$, und daher nach der zweiten Methode:

$\log \frac{R}{r} \dots\dots\dots$	9,672 9813	$\log(1 - Q) \dots\dots$	9,652 6258
$\log \sin(\lambda - L) \dots\dots$	9,475 8653 <i>n</i>	$1 - Q \dots\dots$	0,449 3925
$\log \cos(\lambda - L) \dots\dots$	9,979 6445	$Q \dots\dots$	0,550 6075
$\log P \dots\dots\dots$	9,148 8466 <i>n</i>		
$\log Q \dots\dots\dots$	9,740 8421		
<u>Hieraus $l - \lambda = -14^{\circ}21'6''75$</u>		<u>mithin $l = 352^{\circ}34'22''23$</u>	
$\log \frac{A}{r} \dots\dots\dots$	9,754 6117	$\log A \dots\dots\dots$	0,079 7283
$\log \operatorname{tang} \beta \dots\dots\dots$	8,802 0996 <i>n</i>	$\log \cos b \dots\dots\dots$	9,997 3144
$\log \operatorname{tang} b \dots\dots\dots$	9,047 4879 <i>n</i>	$\log A \dots\dots\dots$	0,082 4139
$b = -6^{\circ}21'55''07$			

Nach der dritten Methode hat man aus $\log \zeta = 9,672\,9813$, $\zeta = 25^{\circ}13'6''31$ und daher

$\log \operatorname{tang}(45^{\circ} + \zeta) \dots\dots\dots$	0,444 1091		
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\lambda - L) \dots\dots\dots$	9,184 8938 <i>n</i>		
$\log \operatorname{tang}(l - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}L) \dots\dots\dots$	9,629 0029 <i>n</i>		
$l - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}L = -23^{\circ}3'16''79$		} daraus $l = 352^{\circ}34'22''225$.	
$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}L = 15\ 37\ 39,015$			

64.

In Beziehung auf die Aufgabe des Artikels 62 füge ich noch folgende Bemerkungen hinzu.

I. Setzt man in der dort erwähnten zweiten Gleichung $N = \lambda$, $N = L$, $N = l$, so erhält man:

$R \sin(\lambda-L) = \mathcal{A} \sin(l-\lambda)$; $r' \sin(\lambda-L) = \mathcal{A} \sin(l-L)$; $r' \sin(l-\lambda) = R \sin(l-L)$.
Die erste oder zweite Gleichung dient zur bequemen Rechnungsprüfung, wenn die Methode I oder II des Art. 62 angewandt ist. So erhalten wir in unserem Beispiele:

$$\log \sin(\lambda-L) \dots 9,475\ 8653\ n \qquad l-L = -31^\circ 45' 26'' 82$$

$$\log \frac{\mathcal{A}}{r'} \dots \dots \dots 9,754\ 6117$$

$$\hline 9,721\ 2536\ n$$

$$\log \sin(l-L) \dots 9,721\ 2536\ n$$

II. Die Sonne und zwei Punkte in der Ebene der Ecliptik, welche (61) Projectionen des Himmelskörperorts und des Erdorts sind, bilden ein ebenes Dreieck, dessen Seiten \mathcal{A} , R , r' sind und die gegenüberstehenden Winkel entweder $\lambda-L$, $l-\lambda$, $180^\circ - l + L$; oder $L-\lambda$, $\lambda-l$, $180^\circ - L + l$. Aus diesem Grundsatz folgen die in I erwähnten Relationen von selbst.

III. Die Sonne, der wahre Ort des Himmelskörpers in Raume, und der wahre Ort der Erde bilden ein anderes Dreieck, dessen Seiten \mathcal{A} , R , r sind. Werden die letzteren respective gegenüberstehenden Winkel mit S , T , $180^\circ - S - T$ bezeichnet, so ist $\frac{\sin S}{\mathcal{A}} = \frac{\sin T}{R} = \frac{\sin(S+T)}{r}$. Die Ebene dieses Dreiecks projectirt auf der Himmelskugel einen grössten Kreis, in welchem der heliocentrische Ort der Erde, der heliocentrische Ort des Himmelskörpers und des letzteren geocentrischer Ort liegen, und zwar so, dass der Abstand des zweiten vom ersten, des dritten vom zweiten, des dritten vom ersten, nach derselben Richtung gezählt, respective sind S , T , $S+T$.

IV. Entweder aus den bekannten differentialen Veränderungen der Stücke des ebenen Dreiecks, oder ebenso leicht aus den Formeln des Art. 62, kann man folgende Differential-Gleichungen herleiten:

$$dl = \frac{r' \cos(\lambda-l)}{\mathcal{A}} d\lambda + \frac{\sin(\lambda-l)}{\mathcal{A}} dr'$$

$$d\mathcal{A} = -r' \sin(\lambda-l) d\lambda + \cos(\lambda-l) dr'$$

$$db = \frac{r' \cos b \sin b \sin(\lambda-l)}{\mathcal{A}} d\lambda + \frac{r' \cos b^2}{\mathcal{A} \cos \beta^2} d\beta + \frac{\cos b^2}{\mathcal{A}} (\tan \beta - \cos(\lambda-l) \tan b) dr',$$

wo die Glieder, welche dr' , $d\mathcal{A}$ enthalten, mit 206 265 zu multipliciren, oder

die übrigen hiemit zu dividiren sind, wenn die Aenderungen der Winkel in Secunden ausgedrückt werden.

V. Die umgekehrte Aufgabe, also die Bestimmung des heliocentrischen Orts aus dem geocentrischen, ist der oben vorgetragenen Aufgabe vollständig analog, weshalb es überflüssig sein würde, darüber noch ein Mehreres beizubringen. Denn alle Formeln des Art. 62 gelten auch für jene Aufgabe, nur dass alle Grössen, welche auf den heliocentrischen Ort des Himmelskörpers sich beziehen, mit denjenigen Analogon vertauscht werden, welche auf den geocentrischen Bezug haben, mithin für L, B respective $L + 180^\circ, -B$ gesetzt, oder, was dasselbe ist, für den heliocentrischen Ort der Erde der geocentrische der Sonne genommen wird.

65.

Mag es auch in dem Falle, wo aus gegebenen Elementen nur sehr wenige geocentrische Orte bestimmt werden sollen, kaum der Mühe werth sein, alle obigen Kunstgriffe anzuwenden, durch welche man von der excentrischen Anomalie sogleich zur geocentrischen Länge und Breite, und so zur (62) Rectascension und Declination übergehen kann, weil die hieraus hervorgehenden Abkürzungen von der Menge der vorher zu berechnenden Hilfsgrössen absorbtirt werden würden, — so wird doch stets die Zusammenziehung der Reduction auf die Ecliptik mit der Berechnung der geocentrischen Länge und Breite einen nicht zu verachtenden Vortheil gewähren. Wenn nämlich für die Ebene der „z“ Coordinaten die Ecliptik selbst gewählt wird, die Pole der Coordinaten-Ebenen x und y aber in die Länge Ω und $90^\circ + \Omega$ gestellt werden, so lassen sich die Coordinaten sehr leicht ohne alle weitere Hilfsgrössen bestimmen. Man hat nämlich:

$$\begin{array}{l} x = r \cos u \\ y = r \cos i \sin u \\ z = r \sin i \sin u \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X = R \cos(L - \Omega) \\ Y = R \sin(L - \Omega) \\ Z = R \tan g B \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x - X = \mathcal{A} \cos(l - \Omega) \\ y - Y = \mathcal{A} \sin(l - \Omega) \\ z - Z = \mathcal{A} \tan g b. \end{array} \right.$$

Ist $B = 0$, so ist $R = r$, $Z = 0$. Nach diesen Formeln wird unser Beispiel durch folgende Zahlen absolvirt: $L - \Omega = 213^\circ 12' 0'' 32$.

$\log r$	0,325 9877	$\log R$	9,998 0979
$\log \cos u$	9,982 4141 <i>n</i>	$\log \cos(L-\Omega)$..	9,922 6027 <i>n</i>
$\log \sin u$	9,445 4714 <i>n</i>	$\log \sin(L-\Omega)$..	9,738 4353 <i>n</i>
$\log x$	0,308 4018 <i>n</i>	$\log X$	9,920 7006 <i>n</i>
$\log r \sin u$	9,771 4591 <i>n</i>		
$\log \cos i$	9,988 5266		
$\log \sin i$	9,355 7570		
$\log y$	9,759 9857 <i>n</i>	$\log Y$	9,736 5332 <i>n</i>
$\log z$	9,127 2161 <i>n</i>	$Z =$	0

Daraus folgt

$\log(x-X)$	0,079 5906 <i>n</i>		
$\log(y-Y)$	8,480 7165 <i>n</i>		
daraus $(l-\Omega) = 181^\circ 26' 33'' 49$		$l =$	$352^\circ 34' 22'' 22$
$\log \mathcal{A}$	0,079 7283		
$\log \tan b$	9,047 4878 <i>n</i>	$b =$	$-6^\circ 21' 55'' 06$

66.

Aus der Länge und Breite eines Punktes an der Himmelskugel werden dessen gerade Aufsteigung und Abweichung durch Auflösung eines sphärischen Dreiecks bestimmt, welches von jenem Punkte und den Nordpolen der Ecliptik und des Aequators gebildet wird. Ist daher $\epsilon =$ Schiefe der Ecliptik, $l =$ Länge, $b =$ Breite, $\alpha =$ Rectascension, $\delta =$ Declination, so sind die Seiten des Dreiecks $= \epsilon, 90^\circ - b, 90^\circ - \delta$. Für die der zweiten und dritten Seite gegenüberstehenden Winkel kann man annehmen: $90^\circ + \alpha, 90^\circ - l$ (wenn man nämlich die Idee eines sphärischen Dreiecks in grösster Allgemeinheit auffasst). Den dritten, der Seite ϵ gegenüberstehenden Winkel setze ich (63) $= 90^\circ - E$. Man hat daher mittelst der Formeln des Art. 54

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\delta) \sin \frac{1}{2}(E + \alpha) &= \sin(45^\circ + \frac{1}{2}l) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\epsilon + b)) \\ \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\delta) \cos \frac{1}{2}(E + \alpha) &= \cos(45^\circ + \frac{1}{2}l) \cos(45^\circ - \frac{1}{2}(\epsilon - b)) \\ \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\delta) \sin \frac{1}{2}(E - \alpha) &= \cos(45^\circ + \frac{1}{2}l) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\epsilon - b)) \\ \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\delta) \cos \frac{1}{2}(E - \alpha) &= \sin(45^\circ + \frac{1}{2}l) \cos(45^\circ - \frac{1}{2}(\epsilon + b)). \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(E+\alpha)$ und $\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\delta)$; die beiden letzten $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ und $\cos(45^\circ - \frac{1}{2}\delta)$. Aus $\frac{1}{2}(E+\alpha)$ und $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ erhält man zugleich α und E . Aus $\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\delta)$ oder $\cos(45^\circ - \frac{1}{2}\delta)$, deren Uebereinstimmung zugleich zur Prüfung der Rechnung dient, wird $45^\circ - \frac{1}{2}\delta$ und hieraus δ bestimmt. Die Bestimmung der Winkel $\frac{1}{2}(E+\alpha)$, $\frac{1}{2}(E-\alpha)$ aus ihren Tangenten ist deshalb keiner Zweideutigkeit unterworfen, weil sowohl der Sinus als der Cosinus des Winkels $45^\circ - \frac{1}{2}\delta$ positiv herauskommen muss.

Die differentialen Veränderungen der Grössen α , δ werden aus den Veränderungen von l und b nach bekannten Grundsätzen auf folgende Weise gefunden:

$$d\alpha = \frac{\sin E \cos b}{\cos \delta} dl - \frac{\cos E}{\cos \delta} db$$

$$d\delta = \cos E \cos b dl + \sin E db.$$

67.

Eine andere Methode zur Auflösung der im vorhergehenden Artikel behandelten Aufgabe wird durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \cos \epsilon \sin l &= \sin \epsilon \tan b + \cos l \tan \alpha \\ \sin \delta &= \cos \epsilon \sin b + \sin \epsilon \cos b \sin l \\ \cos b \cos l &= \cos \alpha \cos \delta. \end{aligned}$$

Man bestimme einen Hilfswinkel ϑ durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \tan \vartheta &= \frac{\tan b}{\sin l}, \text{ so hat man} \\ \tan \alpha &= \frac{\cos(\epsilon + \vartheta) \tan l}{\cos \vartheta} \\ \tan \delta &= \sin \alpha \tan(\epsilon + \vartheta). \end{aligned}$$

Zur Prüfung der Rechnung lässt sich diesen Gleichungen noch hinzufügen:

$$\cos \delta = \frac{\cos b \cos l}{\cos \alpha} \text{ oder } \cos \delta = \frac{\cos(\epsilon + \vartheta) \cos b \sin l}{\cos \vartheta \sin \alpha}.$$

Die Zweideutigkeit in der Bestimmung von α durch die zweite Gleichung wird dadurch beseitigt, dass $\cos \alpha$ und $\cos l$ dieselben Vorzeichen haben müssen.

(64) Diese Methode führt weniger rasch zum Ziele, wenn ausser α und δ auch E ermittelt werden soll. — Die bequemste Formel zur Bestimmung

dieses Winkels wird dann sein $\cos E = \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha}{\cos b} = \frac{\sin \varepsilon \cos l}{\cos \delta}$. Inzwischen kann durch diese Formel E dann nicht mit Schärfe berechnet werden, wenn $\pm \cos E$ nur wenig von der Einheit verschieden ist; ausserdem bleibt es zweifelhaft, ob E zwischen 0 und 180° , oder zwischen 180° und 360° genommen werden muss. Die erstere Unbequemlichkeit ist selten von irgend welcher Bedeutung, besonders weil zur Berechnung der differentialen Verhältnisse die grösste Schärfe des Werthes von E nicht erforderlich ist; der gedachte Zweifel aber kann mit Hülfe der Gleichung $\cos b \cos \delta \sin E = \cos \varepsilon - \sin b \sin \delta$ leicht gelöst werden, welche zeigt, dass E zwischen 0 und 180° , oder 180° und 360° genommen werden muss, je nachdem $\cos \varepsilon$ grösser oder kleiner als $\sin b \sin \delta$ ist. Offenbar bedarf es auch nicht einmal dieser Prüfung, sobald einer der beiden Winkel b, δ die Grenze von $66^\circ 32'$ nicht überschreitet; denn dann wird $\sin E$ stets positiv. Im Uebrigen könnte dieselbe Gleichung in dem schon oben angedeuteten Falle zur genaueren Bestimmung von E gebraucht werden, wenn es der Mühe werth sein sollte.

68.

Die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, also die Bestimmung von Länge und Breite aus Reetascension und Declination stützt sich auf dasselbe sphärische Dreieck. Die obigen Formeln werden diesem Zwecke angepasst durch einfache Vertauschung von b mit δ , und von l mit $-\alpha$. Wegen des häufigen Gebrauchs will ich auch diese Formeln hersetzen:

Nach der Methode des Art. 66 hat man

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}b) \sin \frac{1}{2}(E-l) = \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta))$$

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}b) \cos \frac{1}{2}(E-l) = \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \cos(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta))$$

$$\cos(45^\circ - \frac{1}{2}b) \sin \frac{1}{2}(E+l) = \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta))$$

$$\cos(45^\circ - \frac{1}{2}b) \cos \frac{1}{2}(E+l) = \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \cos(45^\circ - \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)).$$

Bestimmt man dagegen wie bei der andern Methode im Art. 67 den Hilfswinkel ζ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin \alpha}, \text{ so hat man}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} l &= \frac{\cos(\zeta - \varepsilon) \operatorname{tang} \alpha}{\cos \zeta} \\ \operatorname{tang} b &= \sin l \operatorname{tang}(\zeta - \varepsilon).\end{aligned}$$

(65) Zur Prüfung der Rechnung dient:

$$\cos b = \frac{\cos \delta \cos \alpha}{\cos l} = \frac{\cos(\zeta - \varepsilon) \cos \delta \sin \alpha}{\cos \zeta \sin l}.$$

Zur Bestimmung von E dienen dann ebenso wie im vorhergehenden Artikel die Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha}{\cos b} = \frac{\sin \varepsilon \cos l}{\cos \delta} \\ \cos b \cos \delta \sin E &= \cos \varepsilon - \sin b \sin \delta.\end{aligned}$$

Die differentiale Aenderungen von l und b ergeben sich durch die Formeln:

$$\begin{aligned}dl &= \frac{\sin E \cos \delta}{\cos b} d\alpha + \frac{\cos E}{\cos b} d\delta \\ db &= -\cos E \cos \delta d\alpha + \sin E d\delta.\end{aligned}$$

69.

Als Beispiel wollen wir aus der Rectascension $355^{\circ} 43' 45'' 30 = \alpha$, der Declination $-8^{\circ} 47' 25'' 0 = \delta$, der Schiefe der Ecliptik $23^{\circ} 27' 59'' 26 = \varepsilon$ die Länge und Breite berechnen. Es ist also $45^{\circ} + \frac{1}{2} \alpha = 222^{\circ} 51' 52'' 65$, $45^{\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) = 37^{\circ} 39' 42'' 87$, $45^{\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) = 28^{\circ} 52' 17'' 87$. Hieraus ferner

$$\begin{array}{ll}\log \cos(45^{\circ} + \frac{1}{2} \alpha) \dots\dots 9,865\ 0820\ n & \log \sin(45^{\circ} + \frac{1}{2} \alpha) \dots\dots 9,832\ 6803\ n \\ \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)) \dots 9,786\ 0418 & \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)) \dots 9,683\ 8112 \\ \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)) \dots 9,898\ 5222 & \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)) \dots 9,942\ 3572\end{array}$$

$$\log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2} b) \sin \frac{1}{2}(E - l) \dots\dots 9,651\ 1238\ n$$

$$\log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2} b) \cos \frac{1}{2}(E - l) \dots\dots 9,775\ 0375\ n$$

$$\text{daher } \frac{1}{2}(E - l) = 216^{\circ} 56' 5'' 39; \quad \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2} b) = 9,872\ 3171$$

$$\log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2} b) \sin \frac{1}{2}(E + l) \dots\dots 9,516\ 4915\ n$$

$$\log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2} b) \cos \frac{1}{2}(E + l) \dots\dots 9,763\ 6042\ n$$

$$\text{daher } \frac{1}{2}(E + l) = 209^{\circ} 30' 49'' 94; \quad \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2} b) = 9,823\ 9669.$$

Es wird folglich $E = 426^{\circ} 26' 55'' 33$, $l = -7^{\circ} 25' 15'' 45$, oder, was auf dasselbe herauskommt, $E = 66^{\circ} 26' 55'' 33$ und $l = 352^{\circ} 34' 44'' 55$. Den Winkel $45^{\circ} - \frac{1}{2} b$

erhält man durch den Logarithmus des Sinus = $48^{\circ}10'58''12$, aus dem Logarithmus des Cosinus = $48^{\circ}10'58''17$, aus der Tangente (deren Logarithmus den Unterschied jener bildet) $\doteq 48^{\circ}10'58''14$; hieraus $b = -6^{\circ}21'56''28$.

Nach der zweiten Methode steht die Rechnung so:

(66)

$\log \operatorname{tang} \delta \dots\dots 9,189\ 3062\ n$	$C. \log \cos \zeta \dots\dots 0,362\ 6190$
$\frac{\log \sin \alpha \dots\dots 8,871\ 9792\ n}{\log \operatorname{tang} \zeta \dots\dots 0,317\ 3270}$	$\frac{\log \cos (\zeta - \epsilon) \dots\dots 9,878\ 9703}{\log \operatorname{tang} \alpha \dots\dots 8,873\ 1869\ n}$
$\zeta = 64^{\circ}17'6''83$	$\log \operatorname{tang} l \dots\dots 9,114\ 7762\ n$
$\zeta - \epsilon = 40\ 49\ 7,57$	$l = 352^{\circ}34'44''50$
	$\log \sin l \dots\dots 9,111\ 1232\ n$
	$\frac{\log \operatorname{tang} (\zeta - \epsilon) \dots\dots 9,936\ 3874}{\log \operatorname{tang} b \dots\dots 9,047\ 5106\ n}$
	$b = -6^{\circ}21'56''26$

Zur Bestimmung des Winkels E hat man die doppelte Rechnung:

$\log \sin \epsilon \dots\dots 9,600\ 1144$	$\log \sin \epsilon \dots\dots 9,600\ 1144$
$\log \cos \alpha \dots\dots 9,998\ 7924$	$\log \cos l \dots\dots 9,996\ 3470$
$\frac{C. \log \cos b \dots\dots 0,002\ 6859}{\log \cos E \dots\dots 9,601\ 5927}$	$\frac{C. \log \cos \delta \dots\dots 0,005\ 1313}{\log \cos E \dots\dots 9,601\ 5927}$
woraus $E = 66^{\circ}26'55''35$.	

70.

Um Alles beisammen zu haben, was zur Berechnung der geocentrischen Orte erforderlich ist, muss noch Einiges über Parallaxe und Aberration hinzugefügt werden. Ich habe zwar schon oben eine Methode gegeben, wonach der von der Parallaxe afficirte, d. h. der einem Punkte auf der Erdoberfläche entsprechende Ort, unmittelbar und mit grösster Leichtigkeit zu bestimmen ist. Da aber bei der gewöhnlichen, in den Artt. 62 und folgenden behandelten Methode der geocentrische Ort auf den Mittelpunkt der Erde bezogen zu werden pflegt, in welchem Falle er von der Parallaxe befreit heisst, so muss noch eine besondere Methode zur Bestimmung der Parallaxe, welche der Unterschied zwischen beiden Orten ist, hinzugefügt werden.

Es seien deshalb die geocentrische Länge und Breite eines Himmelskörpers in Bezug auf den Erdmittelpunkt λ und β , und in Bezug auf irgend einen Punkt an der Erdoberfläche l und b ; der Abstand des Körpers von dem Erdmittelpunkte $= r$, von dem Erdoberflächenpunkte $= \mathcal{A}$; es entspreche endlich an der Himmelskugel dem Zenith dieses Punktes die Länge L , die Breite B und der Halbmesser der Erde sei $= R$. Von selbst ist schon klar, dass alle Gleichungen des Art. 62 auch hier Statt finden; aber man kann sie bedeutend abkürzen, da hier R eine Grösse ausdrückt, die im Vergleiche mit r und \mathcal{A} fast verschwindet. Uebrigens werden dieselben Gleichungen offenbar auch dann gelten, wenn λ, l, L , statt der Längen die Rectascensionen, und β, b, B statt der Breiten die Declinationen bedeuten. In diesem Falle sind (67) $l-\lambda, b-\beta$ Rectascensions- und Declinations-Parallaxen, in jenem aber Längen- und Breiten-Parallaxen. Wenn man R als eine Grösse der ersten Ordnung betrachtet, so werden $l-\lambda, b-\beta, \mathcal{A}-r$ von derselben Ordnung sein, und wenn man die höheren Ordnungen vernachlässigt, so leitet man aus den Formeln des Art. 62 leicht ab:

$$\text{I. } l-\lambda = \frac{R \cos B \sin(\lambda-L)}{r \cos \beta}$$

$$\text{II. } b-\beta = \frac{R \cos B \cos \beta}{r} (\tan \beta \cos(\lambda-L) - \tan B)$$

$$\text{III. } \mathcal{A}-r = -R \cos B \sin \beta (\cot \beta \cos(\lambda-L) + \tan B).$$

Nimmt man den Hilfswinkel ϑ dabei so, dass $\tan \vartheta = \frac{\tan B}{\cos(\lambda-L)}$, so erhalten die Gleichungen II und III folgende Form:

$$\text{II. } b-\beta = \frac{R \cos B \cos(\lambda-L) \sin(\beta-\vartheta)}{r \cos \vartheta} = \frac{R \sin B \sin(\beta-\vartheta)}{r \sin \vartheta}$$

$$\text{III. } \mathcal{A}-r = -\frac{R \cos B \cos(\lambda-L) \cos(\beta-\vartheta)}{\cos \vartheta} = -\frac{R \sin B \cos(\beta-\vartheta)}{\sin \vartheta}.$$

Um in I und II die Grössen $l-\lambda$ und $b-\beta$ in Secunden zu erhalten, muss für R die mittlere, in Secunden ausgedrückte Sonnenparallaxe gesetzt werden; in III aber ist für R dieselbe, mit 206 265'' dividirte Parallaxe zu nehmen. Endlich kann man, ohne an Genauigkeit zu verlieren, bei den Parallaxen-Werthen statt r, λ, β auch \mathcal{A}, l, b anwenden, sobald bei der umgekehrten Aufgabe aus dem mit der Parallaxe behafteten Orte der von ihr freie Ort bestimmt werden soll.

Beispiel. Es sei die gerade Aufsteigung der Sonne für den Mittelpunkt der Erde = $220^{\circ} 46' 44'' 65 = \lambda$, die Declination = $-15^{\circ} 49' 43'' 94 = \beta$, der Abstand = $0,990 4311 = r$. Ferner die in Graden ausgedrückte Sternzeit für irgend einen Ort auf der Erdoberfläche = $78^{\circ} 20' 38'' 0 = L$, Polhöhe des Orts = $45^{\circ} 27' 57'' 0 = B$, mittlere Sonnenparallaxe = $8'' 6 = R$. Gesucht wird der von diesem Orte aus gesehene Sonnenort und sein Sonnenabstand.

$\log R$	0,934 50	$\log R$	0,934 50
$\log \cos B$	9,845 93	$\log \sin B$	9,852 99
C. $\log r$	0,004 18	C. $\log r$	0,004 18
C. $\log \cos \beta$	0,016 79	C. $\log \sin \vartheta$	0,103 17
$\log \sin(\lambda - L)$	9,785 08	$\log \sin(\beta - \vartheta)$	9,771 52 <i>n</i>
$\log(l - \lambda)$	0,586 48	$\log(b - \beta)$	0,666 36 <i>n</i>
$l - \lambda =$	+ 3' 36	$b - \beta =$	- 4' 64
$l =$	220° 46' 48" 51	$b =$	- 15° 49' 48" 58
$\log \tan B$	0,007 06	$\log(b - \beta)$	0,666 36 <i>n</i>
$\log \cos(\lambda - L)$	9,899 09 <i>n</i>	$\log \cotang(\beta - \vartheta)$	0,135 22
$\log \tan \vartheta$	0,107 97 <i>n</i>	$\log r$	9,995 82
$\vartheta =$	127° 57' 0"	$\log 1''$	4,685 57
$\beta - \vartheta =$	- 143° 46' 44"	$\log(r - \mathcal{A})$	5,482 97 <i>n</i>
		$r - \mathcal{A} =$	- 0,000 0304
		$\mathcal{A} =$	0,990 4615.

(68)

71.

Die Aberration der Fixsterne, sowie auch derjenige Theil der Aberration der Planeten und Cometen, welcher allein von der Bewegung der Erde herrührt, entspringt daraus, weil mit der ganzen Erde das Sehrohr bewegt wird, während der Lichtstrahl dessen optische Axe durchläuft. Der beobachtete Ort des Himmelskörpers (welcher auch der scheinbare, oder mit der Aberration afficirte genannt wird) wird bestimmt durch die Lage der optischen Axe eines Fernrohrs, welches so aufgestellt ist, dass der von dem Körper ausgegangene Lichtstrahl auf seinem Wege beide äusseren Enden dieser Axe berührt; diese Lage ist aber verschieden von der wahren Lage des Lichtstrahls im Raume. —

Wir wollen zwei Zeitmomente unterscheiden, t und t' , wo der Lichtstrahl das vordere Ende (das Centrum des Objectivglases) und wo er das hintere Ende (den Brennpunkt des Objectivs) berührt. Die Orte dieser Enden im Raume sollen für den ersten Zeitpunkt a und b , für den späteren a' und b' heissen. Dann ist klar, dass die gerade Linie $a'b'$ die wahre Lage des Strahls im Raume ist, dass aber dem scheinbaren Orte die gerade Linie ab oder $a'b$ (die man als parallel annehmen kann) entspricht. Auch sieht man ohne Weiteres, dass der scheinbare Ort von der Länge des Rohrs unabhängig ist. Der Unterschied zwischen der Lage der geraden Linien ba , ba' ist die Aberration, sowie solche für die Fixsterne Statt findet, und die Art ihrer Berechnung will ich als bekannt übergehen. Für die Irrsterne ist aber jener Unterschied noch nicht die vollständige Aberration, denn der Planet ändert in der Zeit, welche sein Lichtstrahl gebraucht, um auf die Erde herabzugelangen, seinen Ort, weshalb die Lage dieses Strahls nicht dem wahren geocentrischen Orte zur Zeit der Beobachtung entspricht. Wir wollen annehmen, dass der Lichtstrahl, welcher zur Zeit t das Fernrohr trifft, zur Zeit T vom Planeten ausgegangen sei; der Ort des Planeten im Raume zur Zeit T soll P heissen, zur Zeit t aber p . Endlich soll A der Ort des vorangehenden Endes der Axe des Rohrs für den Zeitpunkt T sein. — Nun ist klar,

- 1) dass die gerade Linie AP den wahren Ort des Planeten zur Zeit T ,
- 2) die gerade Linie ap den wahren Ort zur Zeit t ,
- 3) die gerade Linie ba oder $b'a'$ den scheinbaren Ort zur Zeit t oder t' (deren Unterschied als eine unendlich kleine Grösse betrachtet werden kann),
- 4) die gerade Linie $b'a$ denselben scheinbaren, von der Aberration der Fixsterne befreiten Ort

zeigen.

(69) Die Punkte P , a , b' liegen schon in einer geraden Linie, und die Theile Pa , ab' werden den Zwischenzeiten $t-T$, $t'-t$ proportional sein, wenn die Bewegung des Lichtes mit gleichförmiger Schnelligkeit vor sich geht. Das Zeit-Intervall $t'-T$ ist wegen der erstaunlichen Geschwindigkeit des Lichtes stets sehr klein, und man darf annehmen, dass in dieser Zwischenzeit die Bewegung der Erde geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich geht: also werden auch A , a , a' in gerader Richtung liegen und die Theile

Aa , aa' auch den Intervallen $t-T$, $t'-t$ proportional sein. Hieraus schliesst man leicht, dass die Geraden AP , $b'a'$ Parallellinien sind, und daher der erste Ort mit dem dritten identisch ist.

Die Zeit $t-T$ wird das Product des Abstandes Pa in 493 Zeitsecunden sein, innerhalb derer das Licht den mittleren Abstand der Erde von der Sonne durchläuft, welchen wir dabei als Einheit annehmen. Bei dieser Berechnung darf man statt der Distanz Pa auch PA oder pa annehmen, da der Unterschied von keiner Bedeutung sein kann.

Aus diesen Grundsätzen folgen drei Methoden, den scheinbaren Ort eines Planeten oder Cometen für einen beliebigen Zeitpunkt t zu bestimmen, von denen bald die eine, bald die andere den Vorzug verdient.

I. Man ziehe von der angenommenen Zeit die Zeit ab , welche das Licht gebraucht, um vom Planeten bis zur Erde zu gelangen. So erhält man die reducirte Zeit T , für welche der wahre, nach gewöhnlicher Art berechnete Ort mit dem scheinbaren Orte für die Zeit t identisch sein wird. Zur Berechnung der Reduction der Zeit $t-T$ muss die Entfernung des Planeten von der Erde bekannt sein. Gemeiniglich werden zu diesem Zwecke bequeme Hilfsmittel nicht fehlen, z. B. eine, wenn auch nur flüchtig gerechnete Ephemeride, widrigenfalls es hinreichen würde, den wahren Abstand für die Zeit t in gewöhnlicher Art aber ohne zu grosse Schärfe durch vorläufige Rechnung zu bestimmen.

II. Man berechne für die angenommene Zeit t den wahren Ort und die Entfernung, hieraus die Reduction der Zeit $t-T$ und hieraus mit Hülfe der täglichen Bewegung (in Länge und Breite, oder Rectascension und Declination) die Reduction des wahren Orts auf die Zeit T .

III. Man berechne den heliocentrischen Ort der Erde zwar für die Zeit t , den heliocentrischen Ort des Planeten aber für die Zeit T ; sodann aus Combination derselben auf gewohnte Weise den geocentrischen Ort des Planeten, der um die Fixstern-Aberration vermehrt (die man auf bekannte Weise ableitet oder aus den Tafeln nimmt) den verlangten scheinbaren Ort liefern wird.

Die zweite Methode, die gewöhnlich angewandt zu werden pflegt, empfiehlt sich vor den übrigen zwar dadurch, dass es dabei der doppelten Rechnung zur Bestimmung der Entfernung nicht bedarf, leidet aber an der

Unzuträglichkeit, dass man sie nur anwenden kann, wenn mehre benachbarte Orte entweder berechnet, oder aus den Beobachtungen schon bekannt sind, indem man sonst die tägliche Bewegung nicht als gegeben ansehen kann.

(70) Die Unbequemlichkeit der ersten und dritten Methode wird gänzlich gehoben, wenn mehre einander benachbarte Orte zu berechnen sind. Denn wenn nur erst für einige der letzteren die Abstände bekannt geworden sind, so kann man sehr bequem und mit hinreichender Schärfe auf die nächstfolgenden Abstände durch die gewöhnlichen Hilfsmittel schliessen. Wenn übrigens der Abstand bekannt ist, so ist die erste Methode deshalb der dritten gemeiniglich vorzuziehen, weil es dabei der Fixstern-Aberration nicht bedarf. Muss man aber zu einer doppelten Berechnung seine Zuflucht nehmen, so empfiehlt die dritte Methode sich dadurch, dass bei der zweiten Rechnung der Ort der Erde wenigstens beibehalten werden kann.

Schon von selbst bietet sich das für die umgekehrte Aufgabe Erforderliche dar, d. h. für die Bestimmung des wahren Orts aus dem scheinbaren. Nach der ersten Methode behält man nämlich den Ort selbst unverändert bei, aber die Zeit t , welcher der angenommene Ort als scheinbarer entspricht, verwandelt man in die reducirte Zeit T , welcher derselbe Ort als wahrer Ort entsprechen wird. — Nach der Methode II behält man die Zeit t bei, aber dem angenommenen Orte fügt man die Bewegung in der Zeit $t - T$ hinzu, als ob man ihn auf eine Zeit $t + (t - T)$ reduciren wollte. — Nach der Methode III betrachtet man den angenommenen, von der Fixstern-Aberration befreiten Ort als wahren Ort für die Zeit T , aber der wahre, der Zeit t entsprechende Erdort wird beibehalten, als ob er zu jener gehörte. Die Nützlichkeit der dritten Methode wird im zweiten Buche deutlicher erhellen.

Der Vollständigkeit halber bemerke ich noch, dass der Ort der Sonne von der Aberration ganz so afficirt wird, wie der Ort eines Planeten. Da aber sowohl der Abstand von der Erde, als die tägliche Bewegung sehr nahe constant sind, so erhält auch die Aberration einen nahezu beständigen und der mittleren Bewegung der Sonne während 493 Zeitseemden gleichen Werth, mithin $= 20''25$, welche Grösse man von der wahren Länge abziehen muss, um die scheinbare zu erhalten. Der genaue Werth der Aberration steht im zusammengesetzten Verhältnisse des Abstandes und der täglichen Bewegung, oder, was auf eins herauskommt, dieser Werth verhält sich verkehrt wie der

Abstand. Es müsste deshalb jener mittlere Werth in der Erdferne um $0^{\circ}34'$ vermindert, in der Erdnähe aber um eben so viel vermehrt werden. Uebrigens schliessen unsere Sonnenafeln die constante Aberration — $20''25$ bereits ein. Man muss mithin, um die wahre Länge zu erhalten, zu der Tafellänge $20''25$ addiren.

72.

Den Schluss dieser Abtheilung sollen einige Aufgaben bilden, welche bei der Bestimmung der Planeten- und Cometen-Bahnen häufig angewandt werden. Zuerst wollen wir auf die Parallaxe zurückkommen. Wie der beobachtete Ort von ihr befreit wird, lehrt Art. 70. Da eine solche Reduction auf den Mittelpunkt der Erde, eine wenigstens genäherte Kenntniss des Abstandes des Planeten von der Erde voraussetzt, so kann dieselbe nicht vorgenommen werden, wenn die Bahn des beobachteten Planeten noch gänzlich unbekant ist. Aber auch in diesem Falle kann man wenigstens denselben Zweck erreichen, um dessentwillen die Reduction auf den Erdmittelpunkt unternommen wird, deshalb nämlich, weil, da dieser Mittelpunkt in der Ebene der Ecliptik liegt (71) (oder doch angenommen wird, dass er dort liege), hierdurch mehre der Formeln eine grössere Einfachheit und Concinnität erhalten, als wenn die Beobachtung auf einen Punkt ausserhalb der Ebene der Ecliptik bezogen würde. In dieser Beziehung bildet es daher keinen Unterschied, ob die Beobachtung auf den Mittelpunkt der Erde, oder auf irgend einen Punkt in der Ebene der Ecliptik reducirt wird. Es ist klar, dass wenn zu diesem Zwecke der Punkt des Einschnitts der Ebene der Ecliptik mit einer geraden, vom Planeten nach dem wahren Beobachtungsorte gezogenen Linie gewählt wird, die Beobachtung selbst keiner weiteren Reduction bedarf, da der Planet aus allen Punkten jener geraden Linie auf gleiche Weise gesehen*) wird. Deshalb ist es gestattet, diesen Punkt gleichsam als fingirten Beobachtungsort dem wahren Orte zu substituiren. Die Lage jenes Punktes wird auf folgende Weise bestimmt.

*) Wenn die äusserste Genauigkeit erforderlich sein sollte, so müsste man die Zwischenzeit, innerhalb deren das Licht vom wahren Beobachtungsorte nach dem fingirten (oder umgekehrt) gelangt, zu der angenommenen Zeit addiren oder davon subtrahiren, wenn es sich um Orte handelt, die mit der Aberration behaftet sind. Aber dieser Unterschied kann kaum von irgend welcher Bedeutung sein, wenn nicht die Breite sehr klein ist.

Es sei die Länge des Himmelskörpers = λ , Breite = β , Abstand = \mathcal{A} , alles in Beziehung auf den wahren Ort der Beobachtung auf der Erdoberfläche, dessen Zenith die Länge l und die Breite b entsprechen. Ferner sei π der Halbmesser der Erde, L die heliocentrische Länge des Mittelpunkts der Erde, B = dessen Breite, R = dessen Abstand von der Sonne; endlich sei L' die heliocentrische Länge des fingirten Ortes, R' dessen Abstand von der Sonne, $\mathcal{A} + \delta$ dessen Abstand vom Himmelskörper. Dann ergeben sich ohne Weiteres folgende Gleichungen, wobei N einen willkürlichen Winkel bezeichnet:

$$\begin{aligned} R' \cos(L' - N) + \delta \cos \beta \cos(\lambda - N) &= R \cos B \cos(L - N) + \pi \cos b \cos(l - N) \\ R' \sin(L' - N) + \delta \cos \beta \sin(\lambda - N) &= R \cos B \sin(L - N) + \pi \cos b \sin(l - N) \\ \delta \sin \beta &= R \sin B + \pi \sin b. \end{aligned}$$

Setzt man daher

- I. $(R \sin B + \pi \sin b) \cotang \beta = \mu$, so wird
- II. $R' \cos(L' - N) = R \cos B \cos(L - N) + \pi \cos b \cos(l - N) - \mu \cos(\lambda - N)$
- III. $R' \sin(L' - N) = R \cos B \sin(L - N) + \pi \cos b \sin(l - N) - \mu \sin(\lambda - N)$
- IV. $\delta = \frac{\mu}{\cos \beta}$.

Aus den Gleichungen II und III kann R' und L' , aus IV aber das Zeitintervall bestimmt werden, was zur Beobachtungszeit hinzuzulegen und in Sekunden = 493δ sein wird.

Diese Gleichungen sind genau und allgemein und sie können auch dann angewandt werden, wenn statt der Ebene der Ecliptik der Aequator gesetzt wird, und L, L', λ, l Rectascensionen, B, β, b Declinationen bedeuten. Aber in dem hier vorzugsweise behandelten Falle, wo nämlich der fingirte Ort in der Ecliptik belegen sein muss, gestattet die Kleinheit der Grössen $B, \pi, L' - L$ noch einige Abkürzung der vorhergehenden Formeln. Es kann nämlich statt π die mittlere Sonnenparallaxe genommen werden, B statt $\sin B$, Eins (72) statt $\cos B$ und $\cos(L' - N)$, $L' - L$ statt $\sin(L' - L)$. Macht man so $N = L$, so nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

- I. $\mu = (RB + \pi \sin b) \cotang \beta$
- II. $R' = R + \pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L)$
- III. $L' - L = \frac{\pi \cos b \sin(l - L) - \mu \sin(\lambda - L)}{R'}$.

Eigentlich müssen hier zwar B , π , $L' - L$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden: aber man sieht, dass, wenn man jene Winkel in Secunden ausdrückt, die Gleichungen I und III ohne Aenderung beibehalten werden können, für II aber gesetzt werden muss:

$$R = R + \frac{\pi \cos b \cos(l-L) - u \cos(\lambda-L)}{206265''}$$

Uebrigens kann in Formel III für den Nenner R ohne merklichen Irrthum stets R genommen werden. Die Reduction der Zeit wird aber beim Ausdrucke der Winkel in Secunden = $\frac{493'' \cdot u}{206265'' \cdot \cos \beta}$.

73.

Beispiel: Es sei $\lambda = 354^{\circ}44'54''$, $\beta = -4^{\circ}59'32''$, $l = 24^{\circ}29'$, $b = 46^{\circ}53'$, $L = 12^{\circ}28'54''$, $B = +0^{\circ}49'$, $R = 0,998\ 8839$, $\pi = 8^{\circ}60'$; so steht die Rechnung wie folgt:

$\log R$	9,999 51	$\log \pi$	0,934 50
$\log B$	9,690 20	$\log \sin b$	9,863 30
$\log BR$	9,689 71	$\log \pi \sin b$	0,797 80

Hieraus $\log(BR + \pi \sin b)$

$$\log \cotang \beta \dots\dots\dots 1,058\ 73\ n$$

$$\log \mu \dots\dots\dots 1,889\ 13\ n$$

$\log \pi$	0,934 50	$\log \mu$	1,889 13 n
$\log \cos b$	9,834 73	$\log 1''$	4,685 57
$\log 1''$	4,685 57	$\log \cos(\lambda-L)$	9,978 86
$\log \cos(l-L)$	9,990 40		6,553 56 n

$$5,445\ 20$$

$$N. Z. = -0,000\ 3577$$

$$N. Z. = +0,000\ 0279$$

Hieraus erhält man $R' = R + 0,000\ 3856 = 0,999\ 2695$. Ferner ist (73)

$\log \pi \cos b$	0,769 23	$\log \mu$	1,889 13 n
$\log \sin(l-L)$	9,317 94	$\log \sin(\lambda-L)$	9,483 71 n
Compl. $\log R'$	0,000 32	Compl. $\log R'$	0,000 32

$$0,087\ 49$$

$$1,373\ 16$$

$$N. Z. = +1^{\circ}22'$$

$$N. Z. = +23^{\circ}61'$$

Hieraus erhält man $L = L - 22^{\circ}39'$. Zuletzt hat man

$\log n$	1,889 13 <i>a</i>
$C. \log 206\ 265$	4,685 57
$\log 493$	2,692 85
<u>$C. \log \cos \beta$</u>	<u>0,001 65</u>

9,269 20 *n*, und daher die Reduction der Zeit
 $= -0^{\circ}186$ und deshalb von keiner Bedeutung.

74.

Eine andere Aufgabe: *aus dem geocentrischen Orte eines Himmelskörpers und der Lage der Bahnebene dessen heliocentrischen Ort in der Bahn abzuleiten* — ist der vorstehenden in so weit verwandt, als sie ebenfalls abhängig ist von dem Einschnitte einer geraden, zwischen der Erde und dem Himmelskörper gezogenen Linie mit einer der Lage nach gegebenen Ebene. Die Auflösung wird sehr bequem aus den Formeln des Art. 65 erhalten, wo die Bezeichnung der Charaktere folgende war:

L Länge der Erde, R ihr Abstand von der Sonne; die Breite B setze ich $= 0$ (da der Fall, wo sie nicht $= 0$ ist, auf diesen leicht mittelst des Artikels 72 zurückgeführt werden kann), woraus dann $R' = R$; l = geocentrische Länge des Himmelskörpers, b dessen Breite, \mathcal{A} sein Abstand von der Erde, r Abstand von der Sonne, u Argument der Breite, Ω Länge des aufsteigenden Knotens, i Neigung der Bahn.

So hat man die Gleichungen:

$$\text{I. } r \cos u - R \cos(L - \Omega) = \mathcal{A} \cos b \cos(l - \Omega)$$

$$\text{II. } r \cos i \sin u - R \sin(L - \Omega) = \mathcal{A} \cos b \sin(l - \Omega)$$

$$\text{III. } r \sin i \sin u = \mathcal{A} \sin b.$$

Multipliziert man die Gleichung I mit $\sin(L - \Omega) \sin b$, die Gleichung II mit $-\cos(L - \Omega) \sin b$, III mit $-\sin(L - l) \cos b$, so wird, nach Addirung der Producte,

$$\cos u \sin(L - \Omega) \sin b - \sin u \cos i \cos(L - \Omega) \sin b - \sin u \sin i \sin(L - l) \cos b = 0,$$

woraus dann

$$\text{IV. } \tan u = \frac{\sin(L - \Omega) \sin b}{\cos i \cos(L - \Omega) \sin b + \sin i \sin(L - l) \cos b}.$$

Multiplirt man aber I mit $\sin(l-\Omega)$, II mit $-\cos(l-\Omega)$, so wird, nach (74) Addition der Producte,

$$V. \quad r = \frac{R \sin(L-l)}{\sin u \cos i \cos(l-\Omega) - \cos u \sin(l-\Omega)}.$$

Die Zweideutigkeit in Bestimmung von u aus Gleichung IV wird von selbst durch Gleichung III gehoben, die zeigt, dass u zwischen 0 und 180° , oder zwischen 180° und 360° genommen werden müsse, je nachdem die Breite b positiv oder negativ ist. Ist aber $b = 0$, so zeigt die Gleichung V, dass $u = 0$, oder $u = 180^\circ$ gesetzt werden muss, je nachdem $\sin(L-l)$ und $\sin(l-\Omega)$ verschiedene Zeichen haben, oder dieselben Zeichen.

Die numerische Berechnung der Formeln IV und V kann auf verschiedene Weise durch Einführung von Hilfswinkel abgekürzt werden. Z. B.

$$\text{setzt man } \frac{\tan b \cos(L-\Omega)}{\sin(L-l)} = \tan A, \quad \text{so wird } \tan u = \frac{\sin A \tan(L-\Omega)}{\sin(A+i)};$$

$$\text{setzt man } \frac{\tan i \sin(L-l)}{\cos(L-\Omega)} = \tan B, \quad \text{so wird } \tan u = \frac{\cos B \sin b \tan(L-\Omega)}{\sin(B+i) \cos i}.$$

Ganz ebenso erhält die Gleichung V durch Einführung eines Hilfswinkels, dessen Tangente $= \cos i \tan u$ oder $= \frac{\tan(l-\Omega)}{\cos i}$ ist, eine concinnere Form.

So wie wir die Formel r aus Combination der Gleichungen I und II erhielten, so gelangen wir durch Combination der Gleichungen II und III zu folgender:

$$r = \frac{R \sin(L-\Omega)}{\sin u (\cos i - \sin i \sin(l-\Omega) \cotang b)}$$

und ebenso durch Combination der Gleichungen I und III zu

$$r = \frac{R \cos(L-\Omega)}{\cos u - \sin u \sin i \cos(l-\Omega) \cotang b}.$$

Beide lassen sich auf gleiche Weise wie V durch Einführung von Hilfswinkeln noch einfacher machen. Auflösungen, die aus dem Vorstehenden resultiren, findet man gesammelt und durch ein Beispiel erläutert in von Zach, Monatliche Correspondenz, Band V, S. 540*), weshalb ich deren weitere Entwicklung hier übergehe. Wenn ausser u und r auch der Abstand A bestimmt werden soll, so kann dies durch Gleichung III geschehen.

*) Der vollständige Abdruck dieser hier citirten Abhandlung von Gauss findet sich im Anbange, Seite 42—45.

Anmerkung des Uebersetzers.

75.

Eine andere Auflösung der vorhergehenden Aufgabe stützt sich auf den im Art. 64 III vorgetragenen Satz, dass der heliocentrische Ort der Erde, sowie der geocentrische Ort des Himmelskörpers und dessen heliocentrischer Ort in einem und demselben grössten Kreise der Kugel liegen. Es seien in Fig. 3 jene Orte beziehungsweise T, G, H ; ferner Ω der Ort des aufsteigenden Knotens; $\Omega T, \Omega H$ Theile der Ecliptik und der Bahn; $G'P$ ein auf die Ecliptik aus G herabgelassenes Loth, was daher gleich b ist. Hieraus und aus dem Bogen $PT = L - l$ wird der Winkel T und der Bogen TG bestimmt. Dann sind in dem sphärischen Dreiecke ΩHT gegeben der Winkel $\Omega = i$, der Winkel T und die Seite $\Omega T = L - \Omega$, woraus die beiden übrigen Seiten $\Omega H = u$ und TH abgeleitet werden. Endlich wird $HG = TG - TH$ und $r = \frac{R \sin TG}{\sin HG}$;

$$A = \frac{R \sin TH}{\sin HG}.$$

76.

Im Art. 52 habe ich gezeigt, wie die differentialen Veränderungen der heliocentrischen Länge und Breite und des entworfenen Abstandes durch die Veränderung des Argumentes der Breite u , der Neigung i und des Radius vector r ausgedrückt werden können, und hernach (Art. 64, IV) habe ich aus jenen die Veränderungen der geocentrischen Länge und Breite l, b abgeleitet. Durch Combination jener Formeln werden daher dl und db durch $du, di, d\Omega, dr$ ausgedrückt erhalten. Es ist aber der Mühe werth, zu zeigen, wie man auch bei dieser Rechnung der Reduction des heliocentrischen Orts auf die Ecliptik überhoben bleiben kann, ebenso wie ich im Art. 65 den geocentrischen Ort unmittelbar aus dem heliocentrischen Orte in der Bahn abgeleitet habe. Zur grösseren Vereinfachung der Formeln, will ich die Breite der Erde vernachlässigen, da sie wenigstens bei den Differential-Formeln keinen merklichen Einfluss haben kann. Es dienen also hier folgende Formeln, bei denen der Kürze wegen ω für $l - \Omega$ und, wie oben, \mathcal{A} für $\mathcal{A} \cos b$ geschrieben ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cos \omega &= r \cos u - R \cos(L - \Omega) = \xi \\ \mathcal{A} \sin \omega &= r \cos i \sin u - R \sin(L - \Omega) = \eta \\ \mathcal{A} \operatorname{tang} b &= r \sin i \sin u = \zeta. \end{aligned}$$

Aus Differentiation derselben erhält man:

$$\begin{aligned} \cos \omega \cdot d\mathcal{A} - \mathcal{A} \sin \omega \cdot d\omega &= d\xi \\ \sin \omega \cdot d\mathcal{A} + \mathcal{A} \cos \omega \cdot d\omega &= d\eta \\ \operatorname{tang} b \cdot d\mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}}{\cos b} db &= d\zeta \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{-\sin \omega \cdot d\xi + \cos \omega \cdot d\eta}{\mathcal{A}} \\ db &= \frac{-\cos \omega \sin b \cdot d\xi - \sin \omega \sin b \cdot d\eta + \cos b \cdot d\zeta}{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Wenn in diesen Formeln für ξ , η , ζ ihre Werthe gehörig substituirt werden, so erhält man $d\omega$ und db durch dr , du , di , $d\Omega$ ausgedrückt. Dann werden, da $dl = d\omega + d\Omega$ ist, die partiellen Differentiale von l , b sich so verhalten:

$$\begin{aligned} \text{I. } \mathcal{A} \left(\frac{dl}{dr} \right) &= -\sin \omega \cos u + \cos \omega \sin u \cos i & (76) \\ \text{II. } \frac{\mathcal{A}}{r} \left(\frac{dl}{du} \right) &= \sin \omega \sin u + \cos \omega \cos u \cos i \\ \text{III. } \frac{\mathcal{A}}{r} \left(\frac{dl}{di} \right) &= -\cos \omega \sin u \sin i \\ \text{IV. } \left(\frac{dl}{d\Omega} \right) &= 1 + \frac{R}{\mathcal{A}} \cos(L - \Omega - \omega) = 1 + \frac{R}{\mathcal{A}} \cos(L - l) \\ \text{V. } \mathcal{A} \left(\frac{db}{dr} \right) &= -\cos \omega \cos u \sin b - \sin \omega \sin u \cos i \sin b + \sin u \sin i \cos b \\ \text{VI. } \frac{\mathcal{A}}{r} \left(\frac{db}{du} \right) &= \cos \omega \sin u \sin b - \sin \omega \cos u \cos i \sin b + \cos u \sin i \cos b \\ \text{VII. } \frac{\mathcal{A}}{r} \left(\frac{db}{di} \right) &= \sin \omega \sin u \sin i \sin b + \sin u \cos i \cos b \\ \text{VIII. } \frac{\mathcal{A}}{R} \left(\frac{db}{d\Omega} \right) &= \sin b \sin(L - \Omega - \omega) = \sin b \sin(L - l). \end{aligned}$$

Die Formeln IV und VIII erscheinen hier bereits in einer für die Rechnung sehr bequemen Form. Die Formeln I, III und V aber können durch naheliegende Substitutionen concinuer redigirt werden, nämlich:

$$I^* \quad \left(\frac{dl}{dr}\right) = \frac{R}{r \cdot J} \sin(L-l)$$

$$III^* \quad \left(\frac{dl}{di}\right) = -\cos \omega \tan g b$$

$$V^* \quad \left(\frac{db}{dr}\right) = -\frac{R}{r \cdot J} \cos(L-l) \sin b = -\frac{R}{r \cdot J} \cos(L-l) \sin b \cos b.$$

Endlich können auch die übrigen Formeln II, VI, VII durch Einführung gewisser Hilfswinkel noch vereinfacht werden, was auf folgende Weise sehr bequem geschieht.

Man bestimme die Hilfswinkel M, N durch die Formeln $\tan g M = \frac{\tan g \omega}{\cos i}$, $\tan g N = \sin \omega \tan g i = \tan g M \cos \omega \sin i$. Dann wird zugleich

$$\frac{\cos M^2}{\cos N^2} = \frac{1 + \tan g N^2}{1 + \tan g M^2} = \frac{\cos i^2 + \sin \omega^2 \sin i^2}{\cos i^2 + \tan g \omega^2} = \cos \omega^2.$$

Die Beseitigung der Zweideutigkeit bei Bestimmung von M und N aus den Tangenten kann nach Willkür und daher auch so geschehen, dass man

$$\frac{\cos M}{\cos N} = +\cos \omega, \quad \text{mithin} \quad \frac{\sin N}{\sin M} = +\sin i$$

nimmt. Sodann gehen die Formeln II, VI und VII in folgende über:

$$(77) \quad II^* \quad \left(\frac{dl}{du}\right) = \frac{r \sin \omega \cos(M-u)}{J \sin M}$$

$$VI^* \quad \left(\frac{db}{du}\right) = \frac{r}{J} \left\{ \cos \omega \sin i \cos(M-u) \cos(N-b) + \sin(M-u) \sin(N-b) \right\}$$

$$VII^* \quad \left(\frac{db}{di}\right) = \frac{r \sin u \cos i \cos(N-b)}{J \cos N}.$$

Diese Transformationen werden in Beziehung auf die Formeln II und VII Jedem klar sein. Bezüglich der Formel VI aber scheint eine Erläuterung am Platze. Wenn man nämlich bei Formel VI zuerst für u setzt: $M - (M-u)$, so erhält man:

$$\frac{r}{J} \left(\frac{db}{du}\right) = \cos(M-u) \left\{ \cos \omega \sin M \sin b - \sin \omega \cos i \cos M \sin b + \sin i \cos M \cos b \right\} \\ - \sin(M-u) \left\{ \cos \omega \cos M \sin b + \sin \omega \cos i \sin M \sin b - \sin i \sin M \cos b \right\}.$$

Nun ist

$$\cos \omega \sin M = \cos i^2 \cos \omega \sin M + \sin i^2 \cos \omega \sin M = \sin \omega \cos i \cos M + \sin i^2 \cos \omega \sin M;$$

weshalb der erstere Theil jenes Ausdruckes übergeht in:

$$\sin i \cos(M-u) \left\{ \sin i \cos \omega \sin M \sin b + \cos M \cos b \right\}$$

$$= \sin i \cos(M-u) \left\{ \cos \omega \sin N \sin b + \cos \omega \cos N \cos b \right\} = \cos \omega \sin i \cos(M-u) \cos(N-b).$$

Ebenso wird $\cos N = \cos \omega^2 \cos N + \sin \omega^2 \cos N = \cos \omega \cos M + \sin \omega \cos i \sin M$; wodurch der zweite Theil des Ausdrucks übergeht in:

$$-\sin(M-u) \{ \cos N \sin b - \sin N \cos b \} = \sin(M-u) \sin(N-b).$$

Hieraus folgt sofort der Ausdruck VI'. —

Der Hilfswinkel M kann auch zur Transformation der Formel I benutzt werden, die nach dessen Einführung die Gestalt annimmt:

$$I^{**}. \left(\frac{dl}{dr} \right) = - \frac{\sin \omega \sin(M-u)}{r \sin M},$$

aus deren Vergleichung mit Formel I* folgt:

$$-R \sin(L-l) \sin M = r \sin \omega \sin(M-u);$$

wonach dann auch der Formel II* die etwas einfachere Form zugetheilt werden kann:

$$II^{**}. \left(\frac{dl}{du} \right) = - \frac{R}{r} \sin(L-l) \cotang(M-u).$$

Um die Formel VI' noch mehr zusammenzuziehen, muss man einen neuen Hilfswinkel einführen, was auf doppelte Weise geschehen kann, indem (78)

man nämlich entweder $\tan P = \frac{\tan(M-u)}{\cos \omega \sin i}$, oder $\tan Q = \frac{\tan(N-b)}{\cos \omega \sin i}$ setzt, wodurch man dann erhält:

$$VI^{**}. \left(\frac{db}{du} \right) = \frac{r \sin(M-u) \cos(N-b-P)}{r \sin P} = \frac{r \sin(N-b) \cos(M-u-Q)}{r \sin Q}.$$

Uebrigens sind die Hilfsgrößen M , N , P , Q nicht rein fictiv, und es lässt sich leicht angeben, was einer jeden an der Himmelskugel entspricht, so dass auf diese Weise mehren der vorstehenden Gleichungen noch eine elegantere Darstellung durch Bogen und Winkel an der Kugel gegeben werden könnte. Ich verweile dabei um so weniger, da sie bei der numerischen Berechnung die oben behandelten Formeln nicht überflüssig machen können.

77.

Das in dem vorangehenden Artikel Entwickelte enthält in Verbindung mit dem, was in den Artikeln 15, 16, 20, 27, 28 für die einzelnen Arten der Kegelschnitte gesagt worden, Alles, was zur Berechnung derjenigen differentialen Veränderungen erforderlich ist, die im geocentrischen Orte durch Veränderungen

der einzelnen Elemente entstehen. Zur besseren Erläuterung dieser Vorschriften wollen wir das in den Artt. 13, 14, 51, 63, 65 tractirte Beispiel wieder vornehmen. Zuerst will ich nach Anleitung des vorhergehenden Artikels dl und db durch dr , du , di , $d\Omega$ ausdrücken, wobei die Rechnung so steht:

$\log \tan \omega$ 8,401 13	$\log \sin \omega$ 8,400 99 <i>n</i>	$\log \tan(M-u)$ 9,419 32 <i>n</i>
$\log \cos i$ 9,988 53	$\log \tan i$ 9,367 23	$\log \cos \omega \sin i$... 9,355 62 <i>n</i>
$\log \tan M$ 8,412 60	$\log \tan N$ 7,768 22 <i>n</i>	$\log \tan P$ 0,063 70
$M = 1^\circ 28' 52''$	$N = 179^\circ 39' 50''$	$P = 49^\circ 11' 13''$
$M-u = 165 \ 17 \ 8$	$N-b = 186 \ 1 \ 45$	$N-b-P = 136 \ 50 \ 32$
I*	II**	III*
$\log \sin(L-l)$... 9,721 25	(*) 9,639 62	$\log \cos \omega$ 9,999 86 <i>n</i>
$\log R$ 9,998 10	$\log \cot(M-u)$ 0,580 68 <i>n</i>	$\log \tan b$ 9,047 49 <i>n</i>
$C. \log \mathcal{A}$ 9,920 27	$\log\left(\frac{dl}{du}\right)$ 0,220 30	$\log\left(\frac{dl}{di}\right)$ 9,047 35 <i>n</i>
(*) 9,639 62		
$C. \log r$ 9,674 01		
$\log\left(\frac{dl}{dr}\right)$ 9,313 63		
(79) style="text-align: center;">IV	V*	VI**
$\log \frac{R}{\mathcal{A}}$ 9,918 37	(**) 9,847 93	$\log \frac{r}{\mathcal{A}}$ 0,243 57 <i>n</i>
$\log \cos(L-l)$.. 9,929 56	$\log \sin b \cos b$.. 9,042 12 <i>n</i>	$\log \sin(M-u)$.. 9,404 84
(**) 9,847 93	$C. \log r$ 9,674 01	$\log \cos(N-b-P)$ 9,863 01 <i>n</i>
$= \log\left(\frac{dl}{d\Omega} - 1\right)$	$\log\left(\frac{db}{dr}\right)$ 8,564 06	$C. \log \sin P$ 0,120 99
VII*	VIII	$\log\left(\frac{db}{du}\right)$ 9,632 41 <i>n</i>
$\log r \sin u \cos i$.. 9,759 99 <i>n</i>	(*) 9,639 62	
$\log \cos(N-b)$.. 9,997 59 <i>n</i>	$\log \sin b \cos b$.. 9,042 12 <i>n</i>	
$C. \log \mathcal{A}$ 9,917 59	$\log\left(\frac{db}{d\Omega}\right)$ 8,681 74 <i>n</i>	
$C. \log \cos N$ 0,000 01 <i>n</i>		
$\log\left(\frac{db}{di}\right)$ 9,675 18 <i>n</i>		

Die Zusammenstellung dieser Werthe ergibt

$$dl = +0,205 \ 89 \ dr + 1,660 \ 73 \ du - 0,111 \ 52 \ di + 1,704 \ 58 \ d\Omega$$

$$db = +0,036 \ 65 \ dr - 0,428 \ 95 \ du - 0,473 \ 35 \ di - 0,048 \ 05 \ d\Omega.$$

Kaum bedarf es wohl der schon häufig wiederholten Bemerkung, dass entweder die Aenderungen dl , db , du , di , $d\Omega$ in Theilen des Radius auszudrücken, oder die Coefficienten von dr mit 206265" zu multipliciren sind, wenn erstere in Secunden verstanden werden.

Bezeichnet man nun die Länge des Perihels (die in unserem Beispiele = $52^{\circ}18'9''30$ ist) mit Π und die wahre Anomalie mit v , so ist die Länge in der Bahn = $u + \Omega = v + \Pi$, und daher $du = dv + d\Pi - d\Omega$, und wenn man diesen Werth in die vorangehenden Formeln substituirt, so erhält man dl und db durch dr , dv , $d\Pi$, $d\Omega$, di ausgedrückt. Es erübrigt daher nur, dr und dv nach Anleitung der Artikel 15 und 16 durch die differentialen Aenderungen der elliptischen Elemente darzustellen. Bei der folgenden Rechnung bedeutet das Symbol M nicht mehr unseren Hilfwinkel, sondern — wie in ersten Abschnitte — die mittlere Anomalie.)

In dem Beispiele des Art. 14 war $\log \frac{r}{a} = 9,90355 = \log \left(\frac{dr}{da} \right)$ (80)

$\log \frac{aa}{rr} \dots\dots\dots 0,19290$	$\log a \dots\dots\dots 0,42244$
$\log \cos \varphi \dots\dots\dots 9,98652$	$\log \tan \varphi \dots\dots\dots 9,40320$
<hr/>	<hr/>
$\log \left(\frac{dv}{dM} \right) \dots\dots\dots 0,17942$	$\log \sin v \dots\dots\dots 9,84931n$
$2 - e \cos E = 1,80085$	$\log \left(\frac{dr}{dM} \right) \dots\dots\dots 6,67495n$
$ee = 0,06018$	$\log a \dots\dots\dots 0,42244$
<hr/>	$\log \cos \varphi \dots\dots\dots 9,98652$
1,74067	$\log \cos v \dots\dots\dots 9,84966$
$\log \dots\dots\dots 0,24072$	<hr/>
$\log \frac{aa}{rr} \dots\dots\dots 0,19290$	$\log \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) \dots\dots\dots 0,25862n$
$\log \sin E \dots\dots\dots 9,76634n$	
<hr/>	
$\log \left(\frac{dv}{d\varphi} \right) \dots\dots\dots 0,19996n$	

Hieraus erhält man

$$dv = +1,51154 dM - 1,58475 d\varphi$$

$$dr = -9,47310 dM - 1,81393 d\varphi + 0,80085 da$$

und nach Substitution dieser Werthe in die früheren Formeln folgt:

$$\begin{aligned}
 dl &= +2,41287 dM - 3,00531 d\varphi + 0,16488 da + 1,66073 dII \\
 &\quad - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega \\
 db &= -0,66572 dM + 0,61331 d\varphi + 0,02925 da - 0,42895 dII \\
 &\quad - 0,47335 di + 0,38090 d\Omega.
 \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass die Zeit, welcher der berechnete Ort entspricht, um n Tage von der Epoche entfernt ist, und wird die mittlere Länge für die Epoche mit N , die tägliche Bewegung mit γ bezeichnet, so ist $M = N + n\gamma - II$, und daher $dM = dN + n d\gamma - dII$. In unserem Beispiele ist die dem berechneten Orte entsprechende Zeit = October 17,41507 des Jahres 1804 im Meridiane von Paris. Wenn mithin für die Epoche der Beginn des Jahres 1805 gesetzt wird, so ist $n = -74,58493$; die für jene Epoche gesetzte mittlere Länge war = $41^\circ 52' 21'' 61$ und die tägliche Bewegung = $824'' 7988$. Substituirt man nun in die eben gefundenen Formeln für dM seinen Werth, so verhalten sich die durch die alleinigen Veränderungen der Elemente ausgedrückten differentialen Veränderungen des geocentrischen Orts, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 dl &= 2,41287 dN - 179,96 d\gamma - 0,75214 dII - 3,00531 d\varphi + 0,16488 da \\
 &\quad - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega \\
 db &= -0,66572 dN + 49,65 d\gamma + 0,23677 dII + 0,61331 d\varphi + 0,02935 da \\
 &\quad - 0,47335 di + 0,38090 d\Omega.
 \end{aligned}$$

- (81) Wird des Himmelskörpers Masse entweder vernachlässigt, oder wenigstens als bekannt angesehen, so sind γ und a von sich gegenseitig abhängig, und somit kann man entweder $d\gamma$ oder da aus den Formeln eliminiren. Da nämlich, nach Art. 6, $\gamma a^{\frac{3}{2}} = k\sqrt{1+\mu}$, so ist $\frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{3}{2} \frac{da}{a}$, in welcher Formel, wenn $d\gamma$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden soll, man auch γ ebenso ausdrücken muss. Auf diese Weise ist unserem Beispiele

$$\begin{array}{r}
 \log \gamma \dots\dots\dots 2,91635 \\
 \log 1'' \dots\dots\dots 4,68557 \\
 \log \frac{3}{2} \dots\dots\dots 0,17609 \\
 \hline
 C. \log a \dots\dots\dots 9,57756 \\
 \hline
 \log \frac{d\gamma}{da} \dots\dots\dots 7,35557 n,
 \end{array}$$

oder $d\gamma = -0,0022676 da$ und $da = -440,99 d\gamma$, und durch Substitution dieses Werthes in unsere Formeln ergibt sich endlich als letzte Form:

$$dl = 2,41287 dN - 252,67 d\gamma - 0,75214 dII - 3,00531 d\varphi \\ - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega$$

$$db = -0,66572 dN + 36,71 d\gamma + 0,23677 dII + 0,61331 d\varphi \\ - 0,47335 di + 0,38090 d\Omega.$$

Bei Entwicklung dieser Formeln haben wir vorausgesetzt, dass sämtliche Aenderungen dl , db , dN , $d\gamma$, dII , $d\varphi$, di , $d\Omega$ in Theilen des Radius ausgedrückt seien; offenbar aber werden wegen der Homogenität aller Theile dieselben Formeln auch dann gelten, wenn alle jene Aenderungen in Secunden ausgedrückt sind.*)

*) Wegen der bei mehren Zahlen des Art. 77 vorgenommenen Aenderungen vergl. die Andeutung im Druckfehler - Verzeichnisse der lateinischen Ausgabe, sowie den Ergänzungsband zu den Astronom. Nachrichten, pag. 181.
Anmerkung des Uebersetzers.

Dritter Abschnitt.

Relationen zwischen mehrern Orten in der Bahn.

78.

Die vergleichende Betrachtung zweier oder mehrerer Orte eines Himmelskörpers in der Bahn sowohl als im Raume, gewährt eine so grosse Menge eleganter Vorlagen, dass man damit leicht einen ganzen Band füllen könnte. Mein Zweck geht aber nicht dahin, dies fruchtbare Argument zu erschöpfen, sondern hauptsächlich dahin, hieraus einen umfangreichen Apparat von Hilfsmitteln zu schaffen für Auflösung der grossen Aufgabe der Bestimmung unbekannter Bahnen aus den Beobachtungen. Unter Vernachlässigung Dessen, was hierbei zu fremdartig sein würde, will ich daher Alles desto sorgfältiger entwickeln, was auf irgend eine Weise zu diesem Zwecke führen kann. Den Untersuchungen selbst will ich einige trigonometrische Betrachtungen vorausschieken, auf welche ich wegen ihres häufigen Gebrauchs öfter zurückkommen muss:

I. Wenn A, B, C irgend welche Winkel bezeichnen, so hat man

$$\begin{aligned} \sin A \sin(C-B) + \sin B \sin(A-C) + \sin C \sin(B-A) &= 0 \\ \cos A \sin(C-B) + \cos B \sin(A-C) + \cos C \sin(B-A) &= 0. \end{aligned}$$

II. Wenn zwei Grössen p und P aus Gleichungen bestimmt werden sollen wie

$$\begin{aligned} p \sin(A-P) &= a \\ p \sin(B-P) &= b, \end{aligned}$$

so geschieht das allgemein mit Hülfe der Formeln

$$\begin{aligned} p \sin(B-A) \sin(H-P) &= b \sin(H-A) - a \sin(H-B) \\ p \sin(B-A) \cos(H-P) &= b \cos(H-A) - a \cos(H-B), \end{aligned}$$

wobei H ein willkürlicher Winkel ist. Hieraus leitet man (Art. 14, II) den Winkel $H-P$ ab und $p \sin(B-A)$; und hieraus P und p . Gemeinlich

pflegt die Bedingung hinzugefügt zu sein, dass p eine positive Grösse sein muss, wodurch die Zweideutigkeit in Bestimmung des Winkels $H-P$ durch seine Tangente entschieden wird. Fehlt aber diese Bedingung, so kann man die Entscheidung nach Belieben treffen. Zur Bequemlichkeit der Rechnung pflegt man den willkürlichen Winkel H entweder $= A$ oder $= B$ oder $= \frac{1}{2}(A+B)$ zu setzen. — Im ersten Falle sind die Gleichungen zur Bestimmung von P und p folgende:

$$\begin{aligned} p \sin(A-P) &= a \\ p \cos(A-P) &= \frac{b-a \cos(B-A)}{\sin(B-A)}. \end{aligned}$$

Im zweiten Falle sind die Gleichungen ganz analog; im dritten aber: (83)

$$\begin{aligned} p \sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) &= \frac{b+a}{2 \cos \frac{1}{2}(B-A)} \\ p \cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) &= \frac{b-a}{2 \sin \frac{1}{2}(B-A)}. \end{aligned}$$

Führt man daher den Hülfswinkel ζ ein, dessen Tangente $= \frac{a}{b}$, so findet sich P durch die Formel:

$$\tan\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \tan(45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{2}(B-A)$$

und sodann p durch irgend eine der vorhergehenden Formeln, wo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b+a) &= \sin(45^\circ + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} = \frac{a \sin(45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}} = \frac{b \sin(45^\circ + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(b-a) &= \cos(45^\circ + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} = \frac{a \cos(45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}} = \frac{b \cos(45^\circ + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

III. Wenn p und P aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} p \cos(A-P) &= a \\ p \cos(B-P) &= b \end{aligned}$$

bestimmt werden sollen, so kann Alles unter Nr. II Erklärte sofort Anwendung finden, falls man nur dort statt A und B allenthalben $90^\circ + A$, $90^\circ + B$ schreibt. Zum bequemeren Gebrauche will ich jedoch die entwickelten Formeln hersetzen. Die allgemeinen Formeln sind:

$$\begin{aligned} p \sin(B-A) \sin(H-P) &= -b \cos(H-A) + a \cos(H-B) \\ p \sin(B-A) \cos(H-P) &= b \sin(H-A) - a \sin(H-B). \end{aligned}$$

Diese gehen daher, falls $H = A$ gesetzt wird, über in:

$$p \sin(A - P) = \frac{a \cos(B - A) - b}{\sin(B - A)}$$

$$p \cos(A - P) = a.$$

Für $H = B$ erhalten sie eine ähnliche Form. Für $H = \frac{1}{2}(A + B)$ aber werden sie:

$$p \sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{a - b}{2 \sin \frac{1}{2}(B - A)}$$

$$p \cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{a + b}{2 \cos \frac{1}{2}(B - A)},$$

so dass nach Einführung des Hilfswinkels ζ , dessen Tangente $= \frac{a}{b}$, entsteht:

$$\cotang\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \cotang(\zeta - 45^\circ) \tan \frac{1}{2}(B - A).$$

- (84) Sollte man übrigens wünschen, die Grösse p unmittelbar aus a und b , ohne vorgängige Berechnung des Hilfswinkels P , zu bestimmen, so hat man die Formel

$$p \sin(B - A) = \sqrt{(a + b)^2 - 2ab \cos(B - A)},$$

sowohl bei gegenwärtiger Aufgabe, als bei II.

79.

Zur vollständigen Bestimmung eines Kegelschnitts in seiner Ebene wird Dreierlei erfordert: die Lage des Perihels, die Excentricität und der halbe Parameter. Wenn solche aus gegebenen, von einander abhängigen Grössen ermittelt werden sollen, so müssen so viele Data vorhanden sein, dass man drei, von einander unabhängige Gleichungen bilden kann. — Jeder seiner Grösse und Lage nach gegebene Radius Vector liefert eine Gleichung, und es sind deshalb zur Bahnbestimmung drei, ihrer Grösse und Lage nach gegebene Radien Vektoren erforderlich. Hat man aber nur zwei Radien Vektoren, so muss entweder ein Element schon selbst, oder wenigstens irgend eine andere Grösse gegeben sein, um daraus die dritte Gleichung construiren zu können. Hieraus entsteht eine Mannigfaltigkeit von Aufgaben, die wir jetzt der Reihe nach durchgehen wollen.

Es sollen r, r' zwei Radien Vektoren sein, die mit einer geraden, in der Ebene der Bahn aus der Sonne beliebig gezogenen Linie die Winkel N, N' nach Richtung der Bewegung bilden; es sei ferner Π der Winkel,

den mit derselben geraden Linie der Radius Vector im Perihelie bildet, so dass den Radien Vektoren r , r' die wahren Anomalien $N - \Pi$, $N' - \Pi$ entsprechen; endlich sei e die Excentricität, p der halbe Parameter. — Dann finden die Gleichungen Statt:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(N - \Pi)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos(N' - \Pi)$$

aus denen, wenn überher eine der Grössen p , e , Π gegeben ist, die übrigen bestimmt werden können.

Setzen wir zuerst voraus, dass der halbe Parameter p gegeben sei, so erhellt, dass die Bestimmung der Grössen e und Π aus den Gleichungen

$$e \cos(N - \Pi) = \frac{p}{r} - 1$$

$$e \cos(N' - \Pi) = \frac{p}{r'} - 1$$

nach Anleitung des Satzes III im vorhergehenden Artikel geschehen kann. (85) Man hat daher:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(N - \Pi) &= \operatorname{cotang}(N' - N) - \frac{r(p - r')}{r'(p - r) \sin(N' - N)} \\ \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi\right) &= \frac{(r' - r) \operatorname{cotang} \frac{1}{2}(N' - N)}{r' + r - \frac{2r r'}{p}}. \end{aligned}$$

80.

Ist der Winkel Π gegeben, so werden e und p vermittelt folgender Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} p &= \frac{r r' (\cos(N - \Pi) - \cos(N' - \Pi))}{r \cos(N - \Pi) - r' \cos(N' - \Pi)} \\ e &= \frac{r' - r}{r \cos(N - \Pi) - r' \cos(N' - \Pi)}. \end{aligned}$$

Der gemeinsame Nenner in diesen Formeln lässt sich auf die Form: $a \cos(A - \Pi)$ zurückführen, so dass a und A von Π unabhängig sind. Bezeichnet dann H einen willkürlichen Winkel, so wird

$$r \cos(N-H) - r' \cos(N'-H) = \begin{cases} (r \cos(N-H) - r' \cos(N'-H)) \cos(H-H) \\ -(r \sin(N-H) - r' \sin(N'-H)) \sin(H-H) \end{cases}$$

und deshalb $= a \cos(A-H)$, wenn a und A durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$r \cos(N-H) - r' \cos(N'-H) = a \cos(A-H)$$

$$r \sin(N-H) - r' \sin(N'-H) = a \sin(A-H).$$

Auf diese Weise wird:

$$p = \frac{2rr' \sin \frac{1}{2}(N'-N) \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - H)}{a \cos(A-H)}$$

$$e = \frac{r' - r}{a \cos(A-H)}.$$

Diese Formeln sind besonders dann bequem, falls p und e für mehre Werthe von H zu berechnen sind, während r , r' , N , N' ungeändert bleiben. Da man zur Bestimmung der Hilfsgrößen a und A , den Winkel H nach Belieben wählen kann, so ist es vortheilhaft, $H = \frac{1}{2}(N + N')$ zu setzen, wodurch die Formeln in folgende übergehen:

$$(r' - r) \cos \frac{1}{2}(N' - N) = -a \cos(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')$$

$$(r' + r) \sin \frac{1}{2}(N' - N) = -a \sin(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')$$

Ist daher der Winkel A durch die Gleichung:

$$\tan(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N') = \frac{r' + r}{r' - r} \tan \frac{1}{2}(N' - N)$$

bestimmt, so hat man sofort:

$$e = -\frac{\cos(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')}{\cos \frac{1}{2}(N' - N) \cos(A - H)},$$

(86) wobei sich die Berechnung des Logarithmus der Grösse $\frac{r' + r}{r' - r}$ durch den schon häufig erklärten Kunstgriff abkürzen lässt.

Sl.

Wenn die Excentricität e gegeben ist, so wird der Winkel H durch folgende Gleichung gefunden:

$$\cos(A - H) = -\frac{\cos(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')}{e \cos \frac{1}{2}(N' - N)},$$

nachdem der Hilfswinkel A mittelst der Gleichung

$$\operatorname{tang}(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N') = \frac{r' + r}{r' - r} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(N' - N)$$

bestimmt ist. Die bei Bestimmung des Winkels $A - II$ durch seinen Cosinus zurückbleibende Zweideutigkeit ist in der Natur der Aufgabe begründet, so dass man letzterer durch zwei verschiedene Lösungen Genüge leisten kann, wobei man anderswoher entscheiden muss, welche beizubehalten und welche zu verwerfen ist. Zu diesem Zwecke muss ein wenigstens genäherter Werth von II bereits bekannt sein.

Nachdem II gefunden, wird p entweder durch die Formeln:

$$p = r(1 + e \cos(N - II)) = r'(1 + e \cos(N' - II)), \text{ oder durch}$$

$$p = \frac{2rr'e \sin \frac{1}{2}(N' - N) \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - II)}{r' - r} \text{ berechnet.}$$

82.

Nehmen wir endlich an, dass drei Radien Vektoren r, r', r'' gegeben seien, welche mit einer geraden, nach Belieben aus der Sonne in der Ebene der Bahn gezogenen Linie die Winkel N, N', N'' bilden. Man hat dann, unter Beibehaltung der übrigen Zeichen, folgende Gleichungen:

$$(I) \quad \frac{p}{r} = 1 + e \cos(N - II)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos(N' - II)$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e \cos(N'' - II),$$

woraus sich p, II, e auf mehre verschiedene Arten ermitteln lassen. Will man zuvörderst die Grösse p berechnen, so werden die drei Gleichungen (I) respective mit $\sin(N'' - N')$, mit $-\sin(N'' - N)$, mit $\sin(N' - N)$ multiplicirt und man erhält durch Addition der Producte nach dem Satze I. Art. 78

$$p = \frac{\sin(N'' - N') - \sin(N'' - N) + \sin(N' - N)}{\frac{1}{r} \sin(N'' - N') - \frac{1}{r'} \sin(N'' - N) + \frac{1}{r''} \sin(N' - N)}.$$

Dieser Ausdruck verdient eine nähere Betrachtung. Der Zähler wird (87) offenbar:

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \cos \frac{1}{2}(N'' - N) - 2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \cos(\frac{1}{2}N'' + \frac{1}{2}N' - N) \\ &= 4 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \sin \frac{1}{2}(N' - N). \end{aligned}$$

Setzt man sodann ferner

$$r' r'' \sin(N'' - N) = u, \quad r r'' \sin(N'' - N) = u', \quad r r' \sin(N' - N) = u'',$$

so sieht man, dass $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}u'$, $\frac{1}{2}u''$ die Flächen der Dreiecke sind, resp. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vector. Daraus schliesst man leicht, dass bei der neuen Formel

$$p = \frac{4 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \sin \frac{1}{2}(N' - N) \cdot r r' r''}{u - u' + u''}$$

der Nenner gleich sei der doppelten Fläche des Dreiecks, welches von den Endpunkten der drei Radien Vektoren gebildet wird, d. h. welches zwischen dem Himmelskörpers drei Orten im Raume enthalten ist. Falls jene drei Orte nur wenig von einander entfernt sind, so wird jene Fläche stets eine sehr kleine Grösse, und zwar von der dritten Ordnung bleiben, wenn $N' - N$, $N'' - N'$ als kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden. Hieraus geht zugleich hervor, dass, falls eine oder mehrere der Grössen r , r' , r'' , N , N' , N'' mit, wenn auch nur geringen Fehlern behaftet sind, hieraus ein sehr grosser Irrthum bei Ermittlung von p entstehen kann. Es lässt daher diese Rechenmethode zur Bestimmung der Bahn-Dimensionen niemals grosse Schärfe zu, wenn nicht die drei heliocentrischen Orte durch beträchtliche Zwischenräume von einander entfernt sind.

Sobald übrigens der halbe Parameter p gefunden ist, so werden e und H durch Combination von zwei irgend welcher der Gleichungen (I) mittelst der Methode des Art. 79 bestimmt.

83.

Will man die Auflösung dieser Aufgabe lieber mit Berechnung des Winkels H beginnen, so dient dazu folgende Methode. Man ziehe von der zweiten der Gleichungen (I) die dritte ab, von der ersten die dritte, von der ersten die zweite, wodurch folgende drei neue Gleichungen entstehen:

$$(II) \quad \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N')} = \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N'' - H)$$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{4}(N'' - N)} = \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - II)$$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{2 \sin \frac{1}{4}(N' - N)} = \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - II).$$

Nach Satz II. Art. 78 geben irgendwelche zwei dieser Gleichungen II und $\frac{e}{p}$, (88)

woraus man durch jede der Gleichungen (I) auch e und p erhält. Wählt man die dritte, im Art. 78, II behandelte Auflösung, so giebt die Combination der ersten und dritten Gleichung folgende Rechnungsart. Nach Bestimmung des Hilfswinkels ζ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{\frac{r'}{r} - 1}{1 - \frac{r'}{r}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{4}(N'' - N')}{\sin \frac{1}{4}(N'' - N)},$$

ist

$$\operatorname{tang}(\frac{1}{4}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{4}N'' - II) = \operatorname{tang}(45^\circ + \zeta) \operatorname{tang} \frac{1}{4}(N'' - N).$$

Durch Vertauschung des zweiten Ortes mit dem ersten oder dritten erhält man zwei andere völlig analoge Auflösungen. Da bei Anwendung dieser Methode die Formeln für $\frac{e}{p}$ etwas verwickelter ausfallen, so wird man es vorziehen, e und p durch die Methode des Art. 80 aus zwei jener Gleichungen (I) zu ermitteln. Im Uebrigen muss die Zweideutigkeit bei Bestimmung von II mittelst der Tangente des Winkels $\frac{1}{4}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{4}N'' - II$ so entschieden werden, dass e eine positive Grösse wird; denn es ist klar, dass man für e entgegengesetzte Werthe erhalten muss, wenn für II Werthe genommen werden, die um 180° verschieden sind. Dagegen ist das Zeichen von p von dieser Zweideutigkeit unabhängig, und der Werth von p kann nur dann negativ herauskommen, wenn die drei gegebenen Punkte in dem von der Sonne abgewandten Theile der Hyperbel liegen, ein Fall, den ich, da er den Gesetzen der Natur zuwider ist, hier unberücksichtigt lasse.

Das, was man bei Anwendung der ersten Methode in Art. 78, II erst nach mühsamen Substitutionen erhält, kann im gegenwärtigen Falle auf folgende Art bequemer gefunden werden:

Man multiplicire von den Gleichungen (II) die erste mit $\cos \frac{1}{2}(N'' - N')$, die dritte mit $\cos \frac{1}{2}(N' - N)$ und ziehe das zweite Product von dem ersten ab. Dann erhält man bei gehöriger Anwendung des Satzes I. Art. 78 [wenn man nämlich in der zweiten Formel $A = \frac{1}{2}(N'' - N')$, $B = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - H$, $C = \frac{1}{2}(N - N')$ setzt] folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \cotang \frac{1}{2}(N'' - N') - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \cotang \frac{1}{2}(N' - N) \\ & = \frac{e}{p} \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \cos \left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - H \right). \end{aligned}$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der zweiten der Gleichungen (II), finden sich H und $\frac{e}{p}$ und zwar H mittelst der Formel

$$(89) \quad \tan \left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - H \right) = \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r'}{r''}}{\left(1 - \frac{r'}{r''} \right) \cotang \frac{1}{2}(N'' - N') - \left(\frac{r'}{r} - 1 \right) \cotang \frac{1}{2}(N' - N)}.$$

Auch hieraus lassen sich zwei andere ganz analoge Formeln durch Vertauschung des zweiten Ortes mit dem ersten oder dritten ableiten.

84.

Da aus zwei, ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Radien Vektoren und einem Bahnelemente die ganze Bahn sich bestimmen lässt, so wird man durch jene Daten auch die Zeit ermitteln können, innerhalb deren der Himmelskörper sich von dem einen Radius Vector zum andern bewegt, wenn man die Masse des Körpers entweder vernachlässigt oder wenigstens als bekannt betrachtet: wobei wir bei der ersteren Annahme stehen bleiben wollen, auf welche die andere leicht sich reduciren lässt. Es ist also umgekehrt klar, dass, wenn zwei Radien Vektoren ihrer Grösse und Lage nach gegeben sind und auch zugleich die Zeit, innerhalb welcher der Himmelskörper den zwischen ihnen liegenden Raum beschreibt, man hieraus die ganze Bahn bestimmen kann. Jedoch wird diese, zu den wichtigsten in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper gehörende Aufgabe nicht so leicht gelöst, da der Ausdruck der Zeit durch die Elemente transcendent, und überdies äusserst complicirt

ist. Diese Aufgabe ist es mithin um so mehr werth, auf das sorgfältigste abgehandelt zu werden. Es wird daher hoffentlich dem Leser nicht unangenehm sein, wenn ich ausser einer weiter unten zu gebenden Auflösungsart, die nichts zu wünschen übrig lassen dürfte, auch diejenige der Vergessenheit entreisse, welche ich, bevor jene sich darbot, häufig angewendet habe. Es ist stets nützlich, die schwierigeren Probleme auf verschiedenen Wegen in Angriff zu nehmen, und den guten Weg nicht zu verachten, wenn man auch den besseren vorzieht. Ich beginne also mit der Auseinandersetzung jener früheren Methode.

85.

Ich will die Symbole r , r' , N , N' , p , e , H in derselben Bezeichnung beibehalten, die vorher damit verbunden war; den Unterschied $N' - N$ bezeichne ich mit A , und die Zeit, innerhalb deren der Himmelskörper sich vom ersten nach dem späteren Orte bewegt, mit t . Nun ist klar, dass, wenn ein genäherter Werth irgend einer der Grössen p , e , H bekannt wird, auch die beiden übrigen daraus sich bestimmen lassen, und sodann die der Bewegung vom ersten nach dem zweiten Orte entsprechende Zeit mittelst der in ersten Abschnitte erklärten Methoden. Wenn diese Zeit mit der angenommenen Zeit t übereinstimmt, so ist dann schon der vorausgesetzte Werth von p , e oder H der wahre Werth, und die ganze Bahn schon gefunden. Ist diese Uebereinstimmung nicht vorhanden, so wird die mit einem anderen, vom ersten wenig verschiedenen Werthe wiederholte Rechnung zeigen, eine wie grosse Veränderung in dem Werthe der Zeit einer geringen Aenderung in dem Werthe von p , e , H entspricht, woraus man durch einfache Interpolation einen verbesserten Werth ermittelt. Bei der hiermit von Neuem wiederholten Rechnung wird man entweder eine mit der Voraussetzung völlig übereinstimmende, oder eine nur so wenig davon verschiedene Zeit erhalten, dass man mit neuen Verbesserungen die Uebereinstimmung so genau machen kann, als es nur die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zulassen. (96)

Die Aufgabe wird also darauf zurückgeführt, dass man zeigt, wie für den Fall, wo die Bahn noch vollständig unbekannt ist, ein wenigstens genäherter

Werth einer der Grössen p , e , Π sich finden lässt. Ich will jetzt eine Methode abhandeln, wodurch der Werth von p mit so grosser Schärfe ermittelt wird, dass er wenigstens für kleine Werthe von \mathcal{A} keiner Verbesserung mehr bedarf, und dass so durch die erste Rechnung die ganze Bahn schon mit der Genauigkeit, welche die gewöhnlichen Tafeln erlauben, bestimmt wird. Man wird aber schwerlich in einem andern Falle auf diese Methode zu recurriren brauchen, als wenn \mathcal{A} mässige Werthe besitzt, da die Bestimmung einer noch gänzlich unbekanntem Bahn wegen der äusserst intricaten Complication des Problems kaum anders als aus Beobachtungen unternommen werden mag, die nicht zu sehr von einander entfernt sind, oder vielmehr aus solchen Beobachtungen, denen keine zu starke heliocentrische Bewegung entspricht.

86.

Bezeichnet man den der wahren Anomalie $\nu - \Pi$ entsprechenden unbestimmten oder veränderlichen Radius Vector mit ρ , so ist die Fläche des von dem Himmelskörper innerhalb der Zeit t beschriebenen Sectors $= \frac{1}{2} \int \rho^2 d\nu$, wobei dies Integral von $\nu = N$ bis zu $\nu = N'$ ausgedehnt ist, und somit $ktV/p = \int \rho^2 d\nu$ (wo k in der Bezeichnung des Art. 6 genommen wird). Durch die von Cotes entwickelten Formeln ist bereits bekannt, dass, wenn φx irgend eine Function von x ausdrückt, man einen beständig mehr genähereten Werth des (zwischen den Grenzen $x = u$ und $x = u + \mathcal{A}$ genommenen) Integrals $\int \varphi x . dx$ erhält durch die Formeln

$$\frac{1}{2} \mathcal{A} (\varphi u + \varphi(u + \mathcal{A}))$$

$$\frac{1}{6} \mathcal{A} (\varphi u + 4\varphi(u + \frac{1}{2}\mathcal{A}) + \varphi(u + \mathcal{A}))$$

$$\frac{1}{5} \mathcal{A} (\varphi u + 3\varphi(u + \frac{1}{3}\mathcal{A}) + 3\varphi(u + \frac{2}{3}\mathcal{A}) + \varphi(u + \mathcal{A})) \text{ etc.}$$

Für unseren Zweck reicht es aus, bei den beiden ersten Formeln stehen zu bleiben.

Vermittelst der ersten Formel haben wir bei unserer Aufgabe $\int \varrho e d\nu = \frac{1}{2} \mathcal{A}(rr + r'r') = \frac{\mathcal{A}rr'}{\cos 2\omega}$, wenn man $\frac{r'}{r} = \tan(45^\circ + \omega)$ setzt. Ein erster genäherter Werth für \sqrt{p} wird deshalb sein $= \frac{\mathcal{A}rr'}{kt \cos 2\omega}$, den ich $= 3\alpha$ setze.

Durch die zweite Formel erhält man genauer (91)

$$\int \varrho e d\nu = \frac{1}{6} \mathcal{A}(rr + r'r' + 4RR),$$

wobei R denjenigen Radius Vector bezeichnet, welcher der in der Mitte liegenden Anomalie $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - II$ entspricht. Wenn man nun p durch $r, R, r', N, N' + \frac{1}{2}\mathcal{A}, N + \mathcal{A}$ nach Anleitung der Formel des Art. 82 ausdrückt, so folgt:

$$p = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \mathcal{A}^2 \sin \frac{1}{2} \mathcal{A}}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \sin \frac{1}{2} \mathcal{A} - \frac{1}{k} \sin \mathcal{A}}, \text{ und hieraus}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \mathcal{A}}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \mathcal{A}^2}{p} = \frac{\cos \omega}{V(rr' \cos 2\omega)} - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \mathcal{A}^2}{p}.$$

Setzt man daher

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \mathcal{A}^2 V(rr' \cos 2\omega)}{\cos \omega} = \delta, \text{ so wird } R = \frac{\cos \frac{1}{2} \mathcal{A} V(rr' \cos 2\omega)}{\cos \omega (1 - \frac{\delta}{p})},$$

woraus man den zweiten genähereten Werth von \sqrt{p} erhält:

$$\sqrt{p} = \alpha + \frac{2\alpha \cos \frac{1}{2} \mathcal{A}^2 \cos 2\omega^2}{\cos \omega^2 (1 - \frac{\delta}{p})^2} = \alpha + \frac{\varepsilon}{(1 - \frac{\delta}{p})^3},$$

wobei $2\alpha \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \mathcal{A} \cos 2\omega}{\cos \omega}\right)^2 = \varepsilon$ gesetzt ist. Schreibt man deshalb π für \sqrt{p} , so

wird π durch die Gleichung $(\pi - \alpha) \left(1 - \frac{\delta}{\pi \alpha}\right)^2 = \varepsilon$ bestimmt, welche, gehörig entwickelt, bis zum fünften Grade steigen würde. Setzt man $\pi = q + \mu$, so dass q ein genäherter Werth von π ist, und μ eine sehr kleine Grösse, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so entsteht aus dieser Substitution

$$(q - \alpha) \left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)^2 + \mu \left\{ \left(1 - \frac{\delta}{qq}\right)^2 + \frac{4\delta(q - \alpha)}{q^3} \left(1 - \frac{\delta}{qq}\right) \right\} = \varepsilon, \text{ oder}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon q^3 - (q - \alpha) \delta (q - \alpha)^2}{(qq - \delta)(q^2 + 3\delta q - 4\alpha\delta)}, \text{ und daher}$$

$$\pi = \frac{\epsilon q^3 + (q q - \delta)(\epsilon q q + 4 \delta q - 5 \alpha \delta) q}{(q q - \delta)(q^2 + 3 \delta q - 4 \alpha \delta)}.$$

Bei unserer Aufgabe haben wir bereits einen genäherten Werth für π , nämlich $= 3\alpha$, der, in die vorangehende Formel für q eingeschaltet, den verbesserten Werth liefert

$$\pi = \frac{243 \alpha^4 \epsilon + 3 \alpha (9 \alpha \alpha - \delta) (9 \alpha \alpha + 7 \delta)}{(9 \alpha \alpha - \delta)(27 \alpha \alpha + 5 \delta)}.$$

Setzt man daher $\frac{\delta}{27 \alpha \alpha} = \beta$, $\frac{\epsilon}{(1 - 3\beta)\alpha} = \gamma$, so nimmt die Formel folgende Gestalt an: $\pi = \frac{\alpha(1 + \gamma + 21\beta)}{1 + 5\beta}$, und alle zur Auflösung der Aufgabe nothwendigen Operationen sind in nachstehenden fünf Formeln enthalten:

- I. $\frac{r'}{r} = \tan(45^\circ + \omega)$
- II. $\frac{A r r'}{3 k t \cos 2\omega} = \alpha$
- III. $\frac{2 \sin \frac{1}{2} A^2 \sqrt{(r r' \cos 2\omega)}}{27 \alpha \alpha \cos \omega} = \beta$
- IV. $\frac{2 \cos \frac{1}{2} A^2 \cos 2\omega^2}{(1 - 3\beta) \cos \omega^2} = \gamma$
- V. $\frac{\alpha(1 + \gamma + 21\beta)}{1 + 5\beta} = V p$.

Will man etwas von der Genauigkeit dieser Formeln opfern, so lassen sich noch einfachere Ausdrücke entwickeln. — Wenn man nämlich $\cos \omega$ und $\cos 2\omega = 1$ macht und den Werth von $V p$ in eine nach den Potenzen von A fortschreitende Reihe entwickelt, so folgt, unter Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen,

$$V p = \alpha \left(3 - \frac{1}{2} A A + \frac{A A \sqrt{r r'}}{18 \alpha \alpha} \right),$$

wo A in Theilen des Radius auszudrücken ist. Macht man deshalb $\frac{A r r'}{k t} = V p'$, so erhält man:

$$\text{VI. } p = p' \left(1 - \frac{1}{2} A A + \frac{A A \sqrt{r r'}}{3 p'} \right).$$

Entwickelt man auf ähnliche Weise $V p$ in eine nach den Potenzen von $\sin A$ fortschreitende Reihe und setzt dabei $\frac{r r' \sin A}{k t} = V p'$, so entsteht:

$$\text{VII. } Vp = \left(1 + \frac{\sin A^2 Vrr'}{6p''}\right) Vp'', \text{ oder}$$

$$\text{VIII. } p = p'' + \frac{1}{3} \sin A^2 Vrr'.$$

Die Formeln VII und VIII kommen mit denen überein, welche Euler in „*Theoria motus planetarum et cometarum*“ abgehandelt hat, die Formel VI aber mit der in „*Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la comète de 1769*“, $p. 80''$ gegeben.

87.

Nachfolgende Beispiele werden den Gebrauch der obigen Vorschriften erläutern und es lässt sich daraus zugleich der Grad der Genauigkeit schätzen.

I. Es sei $\log r = 0,330\ 7640$, $\log r' = 0,322\ 2239$, $A = 7^\circ 34' 53'' 73$ ⁽⁹³⁾
 $= 272\ 93'' 73$, $t = 21,933\ 91$ Tage. Hieraus findet sich $\omega = -33' 47'' 90$ und die weitere Rechnung steht dann so:

$\log A \dots\dots\dots 4,436\ 0629$	$\frac{1}{2} \log r r' \cos 2\omega \dots 0,326\ 4519$
$\log r r' \dots\dots\dots 0,652\ 9879$	$2 \log \sin \frac{1}{2} A \dots\dots 7,038\ 9972$
$C. \log 3k \dots\dots\dots 5,972\ 8722$	$\log \frac{2}{27} \dots\dots\dots 8,869\ 6662$
$C. \log t \dots\dots\dots 8,658\ 8840$	$C. \log \alpha \alpha \dots\dots\dots 0,558\ 2180$
$C. \log \cos 2\omega \dots\dots 0,000\ 0840$	$C. \log \cos \omega \dots\dots 0,000\ 0210$
$\log \alpha \dots\dots\dots 9,720\ 8910$	$\log \beta \dots\dots\dots 6,793\ 3543$
	$\beta = 0,000\ 621\ 3757$
$\log 2 \dots\dots\dots 0,301\ 0300$	
$2 \log \cos \frac{1}{2} A \dots\dots 9,998\ 0976$	$1 + \gamma + 21\beta = 3,007\ 4471$
$2 \log \cos 2\omega \dots\dots 9,999\ 8320$	$\log \dots\dots\dots 0,478\ 1980$
$C. \log(1 - 3\beta) \dots\dots 0,000\ 8103$	$\log \alpha \dots\dots\dots 9,720\ 8910$
$2C. \log \cos \omega \dots\dots 0,000\ 0420$	$C. \log(1 + 5\beta) \dots\dots 9,998\ 6528$
$\log \gamma \dots\dots\dots 0,299\ 8119$	$\log Vp \dots\dots\dots 0,197\ 7418$
$\gamma = 1,994\ 3982$	$\log p \dots\dots\dots 0,395\ 4836$
$21\beta = 0,013\ 0489.$	

Dieser Werth für $\log p$ weicht vom wahren kaum um eine Einheit in der siebenten Stelle ab. Die Formel VI giebt in diesem Beispiele $\log p = 0,395\ 4822$, Formel VII liefert $0,395\ 4780$; aus Formel VIII endlich folgt $0,395\ 4754$.

II. Es sei $\log r = 0,428\ 2792$, $\log r' = 0,406\ 2033$, $\mathcal{A} = 62^\circ 55' 16'' 64$, $t = 259,884\ 77$ Tage. Daraus wird erhalten $\omega = -1^\circ 27' 20'' 14$, $\log a = 9,748\ 2348$, $\beta = 0,0453\ 5216$, $\gamma = 1,681\ 127$, $\log \sqrt{p} = 0,219\ 8027$, $\log p = 0,439\ 6054$, ein Werth, der um 187 Einheiten der siebenten Decimale kleiner als der richtige ist. Denn der wahre Werth in diesem Beispiele ist 0,439 6237; aus Formel VI findet sich 0,436 8730; aus VII 0,415 9824, aus VIII 0,405 1103. Hier sind die beiden letzten Werthe von dem wahren so sehr verschieden, dass sie nicht einmal die Stelle einer Annäherung vertreten können.

88.

Die Auseinandersetzung der zweiten Methode wird uns Gelegenheit zur Darlegung einer Menge neuer und eleganter Relationen darbieten, und da dieselben bei den verschiedenen Arten der Kegelschnitte verschiedene Gestalten annehmen, so will ich das Einzelne getrennt von einander behandeln und mit der Ellipse beginnen.

- (94) Es mögen zwei Orten die wahren Anomalien v , v' entsprechen (wobei v die der Zeit nach vorangehende ist), die excentrischen Anomalien seien E und E' , die Radien Vectoren r , r' ; ferner sei p der halbe Parameter, $e = \sin \varphi$ die Excentricität, a die halbe grosse Axe, t die Zeit, innerhalb deren die Bewegung vom ersten zum zweiten Orte vor sich geht. Endlich setze ich $v - v = 2f$, $v' + v = 2F$, $E' - E = 2g$, $E' + E = 2G$, $a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = b$. Dann werden aus Combination der Formeln V und VI Art. 8 leicht folgende Gleichungen abgeleitet:

$$[1] \quad b \sin g = \sin f \cdot \sqrt{r r'}$$

$$[2] \quad b \sin G = \sin F \cdot \sqrt{r r'}$$

$$p \cos g = (\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v' \cdot (1 + e) + \sin \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v' \cdot (1 - e)) \sqrt{r r'}, \text{ oder}$$

$$[3] \quad p \cos g = (\cos f + e \cos F) \sqrt{r r'}, \text{ und ebenso}$$

$$[4] \quad p \cos G = (\cos F + e \cos f) \sqrt{r r'}.$$

Aus Combination der Gleichungen [3] und [4] entsteht ferner

$$[5] \quad \cos f \cdot \sqrt{r r'} = (\cos g - e \cos G) a$$

$$[6] \quad \cos F \cdot \sqrt{r r'} = (\cos G - e \cos g) a.$$

Durch Formel III Art. 8 erhält man

$$[7] \quad r' - r = 2ae \sin g \sin G$$

$$r' + r = 2a - 2ae \cos g \cos G = 2a \sin g^2 + 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}$$

woraus

$$[8] \quad a = \frac{r + r' - 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2}.$$

Setzt man

$$[9] \quad \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 + 2l, \text{ so ist}$$

$$[10] \quad a = \frac{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

und $\sqrt{a} = \pm \frac{\sqrt{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}}{\sin g}$, wo das obere, oder untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Die Formel XII Art. 8 liefert uns die Gleichung

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = E' - e \sin E' - E + e \sin E = 2g - 2e \sin g \cos G = 2g - \sin 2g + 2 \cos f \sin g \frac{\sqrt{rr'}}{a}.$$

Substituiert man für a in diese Gleichung seinen Werth aus [10] und setzt der Kürze wegen

$$[11] \quad \frac{kt}{2^{\frac{3}{2}} \cos f^{\frac{3}{2}} (rr')^{\frac{1}{2}}} = m, \tag{95}$$

so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$[12] \quad \pm m = (l + \sin \frac{1}{2} g^2)^{\frac{1}{2}} + (l + \sin \frac{1}{2} g^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2} \right),$$

wo für m das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Wenn die heliocentrische Bewegung zwischen 180° und 360° vor sich geht, oder, allgemeiner gesprochen, wenn $\cos f$ negativ ist, so würde die Grösse m imaginär herauskommen, falls sie durch Formel [11] bestimmt wird, und l würde negativ werden. Um dies zu vermeiden, nehme ich in diesem Falle statt der Gleichungen [9] und [11] nachstehende

$$[9^*] \quad \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 - 2L$$

15*

$$[11'] \quad \frac{kt}{2^{\frac{1}{2}}(-\cos f)^{\frac{1}{2}}(r r')^{\frac{1}{2}}} = M,$$

woraus man statt [10] und [12] folgende erhält:

$$[10'] \quad a = \frac{-2(L - \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f V r r'}{\sin g^2}$$

$$[12'] \quad \pm M = -(L - \sin \frac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (L - \sin \frac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2} \right),$$

wo das zweifelhafte Zeichen ebenso wie vorher entschieden wird.

89.

Es liegt uns jetzt ein doppeltes Geschäft ob:

- 1) aus der transcendenten, eine directe Auflösung nicht zulassenden Gleichung [12] die unbekannte Grösse g so bequem als möglich zu bestimmen;
- 2) aus dem gefundenen Winkel g die Elemente selbst abzuleiten.

Bevor wir hiezu schreiten, wollen wir eine gewisse Umgestaltung angeben, mittelst deren die Berechnung der Hilfsgrösse l oder L schneller bewerkstelligt wird, und überdies mehre später zu entwickelnde Formeln auf eine elegantere Gestalt zurückgeführt werden.

Indem man nämlich den, durch die Formel $V \frac{r'}{r} = \tan(45^\circ + \omega)$ zu bestimmenden Hilfswinkel ω einführt, wird

$$(96) \quad V \frac{r'}{r} + V \frac{r}{r'} = 2 + (\tan(45^\circ + \omega) - \cotan(45^\circ + \omega))^2 = 2 + 4 \tan 2\omega^2;$$

woraus man erhält:

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} + \frac{\tan 2\omega^2}{\cos f}, \quad L = -\frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} - \frac{\tan 2\omega^2}{\cos f}.$$

90.

Ich betrachte znerst den Fall, wo aus Auflösung der Gleichung [12] ein nicht zu grosser Werth von g sich ergibt, so dass man $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2}$ in eine, nach den Potenzen von $\sin \frac{1}{2}g$ fortschreitende Reihe entwickeln kann. Der Zähler dieses Ausdrucks, den ich mit X bezeichne, wird

$$= \frac{3^2}{3} \sin \frac{1}{2} g^2 - \frac{1^6}{5} \sin \frac{1}{2} g^4 - \frac{1}{7} \sin \frac{1}{2} g^6 - \text{etc.}$$

Der Nenner aber

$$= 8 \sin \frac{1}{2} g^3 - 12 \sin \frac{1}{2} g^5 + 3 \sin \frac{1}{2} g^7 + \text{etc.}$$

Deshalb nimmt X die Form an:

$$\frac{1}{3} + \frac{8}{5} \sin \frac{1}{2} g^2 + \frac{64}{35} \sin \frac{1}{2} g^4 + \text{etc.}$$

Um nun das Gesetz der Progression der Coefficienten zu finden, differentiire ich die Gleichung

$$X \sin g^3 = 2g - \sin 2g,$$

woraus hervorgeht:

$$3X \cos g \sin g^2 + \sin g^3 \frac{dX}{dg} = 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin g^2.$$

Setzt man ferner

$$\sin \frac{1}{2} g^2 = x,$$

so wird

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \sin g,$$

und daher

$$\frac{dX}{dx} = \frac{8 - 6X \cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)},$$

mithin

$$(2x - 2xx) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X.$$

Setzt man also:

$$X = \frac{1}{5} (1 + \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}),$$

so folgt die Gleichung:

$$\frac{1}{5} (\alpha x + (2\beta - \alpha)xx + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \text{etc.}) = (8 - 4\alpha)x + (8\alpha - 4\beta)xx + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \text{etc.},$$

welche identisch sein muss. Hieraus bekomme ich

$$\alpha = \frac{6}{5}, \beta = \frac{5}{7} \alpha, \gamma = \frac{16}{9} \beta, \delta = \frac{12}{11} \gamma \text{ etc.},$$

wo das Gesetz der Progression klar ist. Man hat daher

$$X = \frac{1}{5} + \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9} x^3 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} x^4 + \text{etc.}$$

Diese Reihe lässt sich in folgenden continuirten Bruch umformen: (97)

$$X = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{5.7}x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5.8}{7.9}x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1.4}{9.11}x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{7.10}{11.13}x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3.6}{13.15}x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9.12}{15.17}x} \cdot \frac{1}{1 - \text{etc.}}$$

Das Gesetz, nach welchem die Coefficienten $\frac{6}{5}$, $-\frac{2}{5.7}$, $\frac{5.8}{7.9}$, $\frac{1.4}{9.11}$ etc. fortschreiten, ist klar, denn das n^{te} Glied dieser Reihe wird, wenn n gerade ist $= \frac{n-3.n}{2n+1.2n+3}$, wenn n ungerade ist $= \frac{n+2.n+5}{2n+1.2n+3}$. Die weitere Entwicklung dieses Gegenstandes*) würde uns zu weit von unserem Zwecke entfernen. Setzt man nun

$$\frac{x}{1 + \frac{2}{5.7}x} = x - \xi$$

$$\frac{1}{1 - \frac{5.8}{7.9}x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1.4}{9.11}x} \cdot \frac{1}{1 - \text{etc.}}$$

so wird $X = \frac{1}{4 - \frac{9}{16}(x - \xi)^2}$, und $\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9X}$, oder

$$\xi = \frac{\sin g^2 - \frac{1}{4}(2g - \sin 2g)(1 - \frac{1}{6}\sin \frac{1}{3}g^2)}{\frac{1}{16}(2g - \sin 2g)}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist eine Grösse von der siebenten Ordnung, der Nenner von der dritten und daher ξ von der vierten, wenn nämlich g als Grösse der ersten, oder x als von der zweiten Ordnung betrachtet wird. Hieraus lässt sich schliessen, dass diese Formel zur genauen numerischen Berechnung von ξ nicht zweckmässig ist, sobald g keinen sehr beträchtlichen Winkel ausdrückt. Dann aber werden zu diesem Zwecke die nachfolgenden Formeln

*) Wegen des Zusatzes zu den Artt. 90 u. 100 vergleiche den Anhang. *Anmerkung des Uebersetzers.*

bequem benutzt, die von einander durch die vertauschte Ordnung der Zähler bei den gebrochenen Coefficienten verschieden sind, und deren erstere aus dem angenommenen Werthe für $x - \xi$ unschwer sich herleiten lässt. (Die Ableitung der Zweiten setzt einige weniger nahe liegende Umformungen voraus, die ich bei anderer Gelegenheit erklären will.)

$$[13] \xi = \frac{\frac{2}{35}xx}{1 + \frac{2}{35}x - \frac{40}{63}x} \quad (98)$$

$$\frac{1 - \frac{4}{99}x}{1 - \frac{70}{143}x}$$

$$\frac{1 - \frac{18}{195}x}{1 - \frac{108}{255}x}$$

$$1 - \text{etc.}$$

$$\text{oder } \xi = \frac{\frac{2}{35}xx}{1 - \frac{18}{35}x - \frac{4}{63}x}$$

$$\frac{1 - \frac{40}{99}x}{1 - \frac{18}{143}x}$$

$$\frac{1 - \frac{70}{195}x}{1 - \frac{40}{255}x}$$

$$1 - \text{etc.}$$

In der dritten, diesem Werke angehängten Tafel findet man für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 0,3$ (nach einzelnen Tausendtheilen) die entsprechenden Werthe von ξ in siebenstelligen Decimalen berechnet. Diese Tafel zeigt auf den ersten Blick die Kleinheit von ξ bei mässigen Werthen für g . Z. B. für $E' - E = 10^\circ$, oder $g = 5^\circ$, wo $x = 0,00195$, wird $\xi = 0,000\,0002$. Es würde überflüssig sein, diese Tafel noch weiter fortzusetzen, da dem Grenzwerthe $x = 0,3$ ein $g = 66^\circ 25'$, oder $E' - E = 132^\circ 50'$ entspricht. Uebrigens soll die dritte Columnne der Tafel, welche diejenigen Werthe von ξ , die den negativen Werthen von x entsprechen, enthält, weiter unten erklärt werden.

91.

Die Gleichung [12], bei welcher in dem hier behandelten Falle offenbar das obere Zeichen gilt, erhält durch Einföhrung der Grösse ξ folgende Gestalt:

$$m = (l+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - \sqrt[5]{(x-\xi)}}.$$

Setzt man mithin $\sqrt{(l+x)} = \frac{m}{y}$, und

$$[14] \quad \frac{m m}{\frac{1}{2} + l + \xi} = h, \text{ so folgt nach den gehörigen Reductionen}$$

$$[15] \quad h = \frac{(y-1)y y}{y + \frac{1}{2}}.$$

Kann daher h als eine bekannte Grösse angesehen werden, so wird daraus y mittelst einer cubischen Gleichung bestimmt und es wird dann sein

$$^{(99)} [16] \quad x = \frac{m m}{y y} - l.$$

Wenn nun h auch die noch unbekante Grösse ξ in sich schliesst, so darf man doch letztere bei der ersten Annäherung vernachlässigen und $\frac{m m}{\frac{1}{2} + l}$ für h annehmen, weil wenigstens in dem hier abgehandelten Falle ξ stets eine sehr kleine Grösse ist. Hieraus leitet man durch die Gleichungen [15] und [16] y und x ab, und aus x erhält man durch Tafel III das ξ , mit dessen Hölfe die Formel [14] einen verbesserten Werth für h liefert, womit die wiederholte Rechnung verbesserte Werthe für x und y giebt. Gemeiniglich weichen diese so wenig von den vorhergehenden Werthen ab, dass, wenn ξ von Neuem aus der Tafel III genommen wird, es nicht vom ersten Werthe verschieden ist. Andernfalls muss man die Rechnung abermals wiederholen, bis sie weiter keine Aenderung zu erfahren hat. Sobald die Grösse x gefunden ist, erhält man g durch die Formel $\sin \frac{1}{2} g^2 = x$.

Diese Vorschriften beziehen sich auf den ersten Fall, wo $\cos f$ positiv ist. Im andern Falle, wo $\cos f$ negativ, setzt man $\sqrt{(L-x)} = \frac{M}{Y}$ und

$$[14^*] \quad \frac{M M}{L - \frac{1}{2} - \xi} = H, \text{ wodurch die Gleichung [12^*] nach gehöriger}$$

Reduction übergeht in:

$$[15'] \quad H = \frac{(Y+1)Y'}{Y-\frac{1}{3}}.$$

Durch diese cubische Gleichung kann man Y aus H bestimmen und daraus wieder x durch die Gleichung

$$[16'] \quad x = L - \frac{MM}{Y'Y'}.$$

Bei der ersten Annäherung wird für H der Werth $\frac{MM}{L-\frac{1}{3}}$ genommen. Mit einem hieraus für x mittelst der Gleichungen [15'] und [16'] abgeleiteten Werthe wird ξ aus der dritten Tafel genommen. Hieraus erhält man durch Formel [14'] einen verbesserten Werth von H , mit dem man die Rechnung in derselben Weise wiederholt. Endlich wird aus x der Winkel g in derselben Weise bestimmt wie im ersten Falle.

92.

Wiewohl die Gleichungen [15] und [15'] in gewissen Fällen drei reelle Wurzeln haben können, so wird es doch niemals zweifelhaft sein, welche man in unserer Aufgabe wählen muss. Denn da h offenbar eine positive Grösse ist, so lässt sich aus der Theorie der Gleichungen leicht schliessen, dass die Gleichung [15] eine einzige positive Wurzel habe, entweder nebst zwei imaginären oder nebst zwei negativen. Da nun $y = \frac{m}{V(l+x)}$ nothwendig eine positive Grösse (100) sein muss, so sieht man, dass hier keine Ungewissheit bleibt. — Was aber die Gleichung [15'] betrifft, so bemerke ich zuerst, dass L nothwendig grösser als Eins ist, wie sich leicht erweisen lässt, wenn die in Art. 89 gegebene Gleichung unter die Form $L = 1 + \frac{\cos \frac{1}{2} f^2}{-\cos f} + \frac{\tan 2 \omega^2}{-\cos f}$ gebracht wird. — Setzt man ferner in der Gleichung [12'] $YV(L-x)$ statt M , so erhält man $Y+1 = (L-x)X$ und daher $Y+1 > (1-x)X > \frac{4}{3} + \frac{4}{3 \cdot 6}x + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 7}xx + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \text{etc.} > \frac{4}{3}$, und folglich $Y > \frac{1}{3}$. Setzt man also $Y = \frac{1}{3} + Y'$, so ist nothwendig Y' eine positive Grösse, die Gleichung [15'] aber geht sodann in folgende über: $Y'^3 + 2Y'Y' + (1-H)Y' + \frac{4}{27} - \frac{2}{9}H = 0$, von der sich aus der Theorie der Gleichungen leicht zeigen lässt, dass sie mehre positive Wurzeln nicht haben

könne. Daraus geht hervor, dass Gleichung [15'] eine einzige Wurzel hat, die grösser als $\frac{1}{2}$ ist (wenn man wenigstens annimmt, dass die Aufgabe in der That auflösbar sein soll) und die man unter Verwerfung der übrigen in unserer Aufgabe annehmen muss.

93.

Um die Auflösung der Gleichung [15] für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fälle so bequem als möglich zu machen, füge ich im Anhange eine besondere Tafel (Tafel II) bei, welche die, den Werthen von $h = 0$ bis $h = 0,6$ entsprechenden Logarithmen von yy mit der grössten Sorgfalt siebenstellig berechnet liefert. Das Argument h zwischen 0 und 0,04 schreitet vor in einzelnen Zehntausendtheilen, wodurch die zweiten Differenzen von $\log yy$ verschwindend gemacht sind, so dass wenigstens in diesem Theile der Tafel die einfache Interpolation genügt. Da aber die Tafel, wenn sie allenthalben von dieser Ausdehnung hätte sein sollen, sehr umfangreich geworden sein würde, so musste sie von $h = 0,04$ an bis zum Schlusse nur durch die einzelnen Tausendtheile fortschreiten. In diesem zweiten Theile muss daher Rücksicht auf die zweiten Differenzen genommen werden, wenn man wenigstens Irrthümer von einigen Einheiten in der siebenten Stelle vermeiden will. Uebrigens sind die kleineren Werthe von h in der Praxis bei Weitem die häufigsten.

Die Auflösung der Gleichungen [15] und [15'] kann, wenn h die Grenze der Tafel überschreitet, unschwer durch eine indirecte Methode oder durch andere hinlänglich bekannte Methoden geschehen. Uebrigens ist noch zu bemerken, dass ein kleiner Werth von g mit einem negativen Werthe für $\cos f$ nur bei sehr excentrischen Bahnen bestehen kann, wie aus der unten in Art. 95 zu behandelnden Gleichung [20] hervorgehen wird. (Jene Gleichung zeigt, dass, wenn $\cos f$ negativ ist, q wenigstens grösser sein müsse, als $90^\circ - g$.)

94.

(101)

Die in den Art. 91, 92, 93 erklärte Behandlung der Gleichungen [12] und [12'] stützt sich auf die Voraussetzung, dass der Winkel g nicht gar zu gross ist, wenigstens innerhalb der Grenze $66^{\circ} 25'$, über welche hinaus die Tafel III nicht ausgedehnt ist. So oft diese Voraussetzung keine Statt findet, so bedürfen jene Gleichungen nicht jener Kunstgriffe, sondern sie können dann in unveränderter Gestalt sicher und bequem stets durch Versuche aufgelöst werden. Sicher nämlich, weil der Werth des Ausdrucks $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2}$ (wobei $2g$ in Theilen des Radius auszudrücken) für grössere Werthe von g mit aller Schärfe durch die trigonometrischen Tafeln sich berechnen lässt, was keineswegs geschehen kann, so lange g ein kleiner Winkel ist; bequem, weil heliocentrische Orte, die nur einen so grossen Zwischenraum von einander abstehen, schwerlich jemals zur Bestimmung einer noch gänzlich unbekanntem Bahn benutzt werden, und weil bei irgend einer Kenntniss der Bahn ein genäherter Werth von g fast ohne Mühe mittelst der Gleichung [1] oder [3] des Art. 88 sich ergibt. Endlich wird aus einem genähernten Werthe von g ein verbesserter, der Gleichung [12] oder [12'] mit aller wünschenswerthen Schärfe genügender Werth stets durch wenige Versuche gefunden. Falls übrigens die beiden angenommenen heliocentrischen Orte mehr als eine ganze Revolution umfassen, so muss man bedenken, dass von der excentrischen Anomalie ebenso viele ganze Revolutionen vollendet sind, so dass die Winkel $E' - E$, $v' - v$ entweder beide zwischen 0 und 360° liegen, oder beide zwischen ähnlichen Vielfachen der ganzen Peripherie, und daher f und g entweder zugleich innerhalb 0 und 180° , oder zwischen ähnlichen Vielfachen der halben Peripherie. — Wenn es endlich bei einer noch gänzlich unbekanntem Bahn selbst ungewiss sein sollte, ob der Himmelskörper während des Ueberganges vom ersten Radius Vector zum zweiten nur einen Theil seines Umlaufs, oder über eine ganze oder mehrere Revolutionen hinaus beschrieben hätte, so würde unsere Aufgabe niemals mehre verschiedene Auflösungen zulassen. Da inzwischen dieser Fall in der Praxis kaum je eintreten mag, so halte ich mich nicht weiter bei ihm auf.

95.

Ich gehe zu dem zweiten Geschäft über, nämlich zur Bestimmung der Bahnelemente aus dem gefundenen Winkel g . Die halbe grosse Axe erhält man hier sogleich aus den Formeln [10] und [10*], statt deren man auch die folgenden anwenden kann:

$$[17] \quad a = \frac{2mm \cos f V r r'}{y y \sin g^2} = \frac{k k t t}{4 y y r r' \cos f^2 \sin g^2}$$

$$[17^*] \quad a = \frac{-2 M M \cos f V r r'}{Y Y \sin g^2} = \frac{k k t t}{4 Y Y r r' \cos f^2 \sin g^2}.$$

- (102) Die halbe kleine Axe $b = \sqrt{ap}$ findet sich aus Gleichung [1], welche, mit den vorhergehenden combinirt, giebt:

$$[18] \quad p = \left(\frac{y r r' \sin 2f}{k t} \right)^2$$

$$[18^*] \quad p = \left(\frac{Y r r' \sin 2f}{k t} \right)^2.$$

Jetzt wird der zwischen den beiden Radien Vectoren und dem elliptischen Bogen enthaltene elliptische Sector $= \frac{1}{2} k t \sqrt{p}$, das Dreieck aber zwischen denselben Radien Vectoren und der Chorde $= \frac{1}{2} r r' \sin 2f$. Das Verhältniss des Sectors zum Dreieck ist daher wie $y:1$ oder wie $Y:1$. Diese Bemerkung ist äusserst wichtig und erläutert zugleich in schöner Weise die Gleichungen [12] und [12*]. Denn hieraus ist klar, dass in der Gleichung [12] die Theile m , $(l+x)^{\frac{1}{2}}$, $X(l+x)^{\frac{1}{2}}$, in der Gleichung [12*] aber die Theile M , $(L-x)^{\frac{1}{2}}$, $X(L-x)^{\frac{1}{2}}$ beziehungsweise proportional sind der Sectorfläche (zwischen den Radien Vectoren und dem elliptischen Bogen), der Dreiecksfläche (zwischen den Radien Vectoren und der Chorde), der Segmentfläche (zwischen dem Bogen und der Chorde), weshalb offenbar die erste Fläche gleich ist entweder der Summe oder der Differenz der beiden übrigen, je nachdem entweder $v'-v$ zwischen 0 und 180° , oder zwischen 180° und 360° liegt. In dem Falle, wo $v'-v$ grösser als 360° , muss die Sectorfläche und die Segmentfläche als eine solche betrachtet werden, der die Fläche der ganzen Ellipse ebenso oft hinzugefügt ist, als jene Bewegung ganze Umläufe enthält.

Da $b = a \cos \varphi$ ist, so folgt aus Combination der Gleichungen [1], [10], [10*] ferner:

$$[19] \quad \cos \varphi = \frac{\sin g \tan g f}{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2)}$$

$$[19^*] \quad \cos \varphi = \frac{-\sin g \tan g f}{2(L - \sin \frac{1}{2} g^2)},$$

woraus, wenn man für l, L ihre Werthe aus Art. 89 einschaltet, entsteht:

$$[20] \quad \cos \varphi = \frac{\sin f \sin g}{1 - \cos f \cos g + 2 \tan 2\omega^2}.$$

Diese Formel ist zur genauen Berechnung der Excentricität, wenn letztere mässig ist, nicht geeignet. Man kann daraus aber leicht folgende, hiezu passendere ableiten:

$$[21] \quad \tan g \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (f-g)^2 + \tan g 2\omega^2}{\sin \frac{1}{2} (f+g)^2 + \tan g 2\omega^2},$$

der man auch (durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $\cos 2\omega^2$) folgende Gestalt geben kann:

$$[22] \quad \tan g \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (f-g)^2 + \cos \frac{1}{2} (f-g)^2 \sin 2\omega^2}{\sin \frac{1}{2} (f+g)^2 + \cos \frac{1}{2} (f+g)^2 \sin 2\omega^2}.$$

Aus beiden Formeln kann man den Winkel φ mit aller Schärfe bestimmen (wenn (103) man will durch Einführung von Hilfswinkeln, deren Tangenten $\frac{\tan g 2\omega}{\sin \frac{1}{2} (f-g)}$, $\frac{\tan g 2\omega}{\sin \frac{1}{2} (f+g)}$ für die erste, oder $\frac{\sin 2\omega}{\tan g \frac{1}{2} (f-g)}$, $\frac{\sin 2\omega}{\tan g \frac{1}{2} (f+g)}$ für die zweite sind).

Zur Bestimmung des Winkels G lässt sich nachstehende Formel brauchen, die von selbst aus Combination der Gleichungen [5], [7] und der darauf folgenden (nicht numerirten) sich ergibt:

$$[23] \quad \tan G = \frac{(r' - r) \sin g}{(r' + r) \cos g - 2 \cos f \sqrt{r r'}},$$

aus der, durch Einführung von ω , leicht sich ableiten lässt:

$$[24] \quad \tan G = \frac{\sin g \sin 2\omega}{\cos 2\omega^2 \sin \frac{1}{2} (f-g) \sin \frac{1}{2} (f+g) + \sin 2\omega^2 \cos g}.$$

Die hier zurückbleibende Zweideutigkeit wird mit Hülfe der Gleichung [7] entschieden, welche lehrt, dass G innerhalb 0 und 180°, oder innerhalb 180° und 360° genommen werden muss, je nachdem der Zähler in diesen beiden Formeln positiv oder negativ ist.

Combinirt man die Gleichung [3] mit denen, welche sofort aus der Gleichung II Art. 8 folgen, nämlich

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2e}{p} \sin f \sin F'$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2}{p} + \frac{2e}{p} \cos f \cos F',$$

so resultirt daraus ohne Weiteres

$$[25] \quad \tan g F = \frac{(r' - r) \sin f}{2 \cos g \sqrt{r r' - (r' + r) \cos f}};$$

aus der, nach Einführung des Winkels ω , folgt:

$$[26] \quad \tan g F = \frac{\sin f \sin 2\omega}{\cos 2\omega^2 \sin \frac{1}{2}(f - g) \sin \frac{1}{2}(f + g) - \sin 2\omega^2 \cos f}.$$

Die Zweideutigkeit wird hier ebenso wie vorher gehoben. — Nachdem der Winkel F und G gefunden, erhält man $r = F - f$, $v' = F + f$, woraus die Lage des Perihels bekannt wird, und $E = G - g$, $E' = G + g$. Endlich ist die mittlere Bewegung innerhalb der Zeit $t = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \cos G \sin g$, wobei die Übereinstimmung beider Ausdrücke zur Prüfung der Rechnung dient; die Epoche der mittlern Anomalie aber, welche dem zwischen den beiden Zeitannahmen in der Mitte liegenden Zeitaugenblicke entspricht, ist $G - e \sin G \cos g$, die nach Belieben auch auf irgend eine andere Zeit übertragen werden kann. Noch etwas bequemer ist es, die mittleren Anomalien für die beiden gegebenen (104) Zeitpunkte durch die Formeln $E - e \sin E$, $E' - e \sin E'$ zu berechnen und deren Differenz im Vergleiche mit $\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}$ zur Prüfung der Rechnung zu benutzen.

96.

Die Gleichungen des vorhergehenden Artikels besitzen zwar alle wünschenswerthe Concinnität, nichtsdestoweniger aber lassen sich aus ihnen gewisse andere Formeln ableiten, durch welche die Bahnelemente noch eleganter und bequemer bestimmt werden. Inzwischen ist die Entwicklung dieser Formeln weniger bekannt. Ich nehme aus Art. 8 die folgenden Gleichungen wieder vor, die ich der Bequemlichkeit wegen durch neue Nummern auszeichne:

$$\text{I. } \sin \frac{1}{2} v \mathcal{V} \frac{r}{a} = \sin \frac{1}{2} E \mathcal{V}(1+e)$$

$$\text{II. } \cos \frac{1}{2} v \mathcal{V} \frac{r}{a} = \cos \frac{1}{2} E \mathcal{V}(1-e)$$

$$\text{III. } \sin \frac{1}{2} v' \mathcal{V} \frac{r'}{a} = \sin \frac{1}{2} E' \mathcal{V}(1+e)$$

$$\text{IV. } \cos \frac{1}{2} v' \mathcal{V} \frac{r'}{a} = \cos \frac{1}{2} E' \mathcal{V}(1-e).$$

Multipliziert man I durch $\sin \frac{1}{2}(F+g)$, II durch $\cos \frac{1}{2}(F+g)$, so erhält man nach Addition der Producte

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) \mathcal{V} \frac{r}{a} = \sin \frac{1}{2} E \sin \frac{1}{2}(F+g) \mathcal{V}(1+e) + \cos \frac{1}{2} E \cos \frac{1}{2}(F+g) \mathcal{V}(1-e),$$

$$\text{oder, da } \mathcal{V}(1+e) = \cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi, \quad \mathcal{V}(1-e) = \cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi,$$

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) \mathcal{V} \frac{r}{a} = \cos \frac{1}{2} \varphi \cos(\frac{1}{2} F - \frac{1}{2} G + g) - \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2}(F+G).$$

Auf ganz ähnliche Art wird, wenn man III durch $\sin \frac{1}{2}(F-g)$, IV durch $\cos \frac{1}{2}(F-g)$ multiplicirt und die Producte addirt,

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) \mathcal{V} \frac{r'}{a} = \cos \frac{1}{2} \varphi \cos(\frac{1}{2} F - \frac{1}{2} G - g) - \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2}(F+G).$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so entsteht:

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) (\mathcal{V} \frac{r'}{a} - \mathcal{V} \frac{r}{a}) = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi \sin g \sin \frac{1}{2}(F-G),$$

oder durch Einführung des Hilfswinkels ω

$$[27] \quad \cos \frac{1}{2}(f+g) \tan 2\omega = \sin \frac{1}{2}(F-G) \cos \frac{1}{2} \varphi \sin g \mathcal{V} \frac{a a}{r r'}.$$

Durch ganz ähnliche Umformungen, deren Entwicklung ich dem kundigen (105) Leser überlasse, findet sich

$$[28] \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(f+g)}{\cos 2\omega} = \cos \frac{1}{2}(F-G) \cos \frac{1}{2} \varphi \sin g \mathcal{V} \frac{a a}{r r'}$$

$$[29] \quad \cos \frac{1}{2}(f-g) \tan 2\omega = \sin \frac{1}{2}(F+G) \sin \frac{1}{2} \varphi \sin g \mathcal{V} \frac{a a}{r r'}$$

$$[30] \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(f-g)}{\cos 2\omega} = \cos \frac{1}{2}(F+G) \sin \frac{1}{2} \varphi \sin g \mathcal{V} \frac{a a}{r r'}.$$

Da die ersten Seiten in diesen vier Gleichungen bekannte Grössen sind, so wird aus [27] und [28] $\frac{1}{2}(F-G)$ und $\cos \frac{1}{2} \varphi \sin g \mathcal{V} \frac{a a}{r r'} = P$, und aus [29] und

[30] ebenso $\frac{1}{2}(F+G)$ und $\sin \frac{1}{2} \varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}}$ = Q bestimmt. Die Zweideutigkeit bei Bestimmung der Winkel $\frac{1}{2}(F-G)$, $\frac{1}{2}(F+G)$ wird so entschieden, dass P und Q dasselbe Zeichen wie $\sin g$ erhalten. Aus P und Q wird sodann $\frac{1}{2} \varphi$, und $\sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}}$ = R abgeleitet. Aus R lässt sich $a = \frac{RR\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$ und $p = \frac{\sin f^2 \sqrt{rr'}}{RR}$ bestimmen, wenn man nicht lieber diese Grösse lediglich zur Prüfung der Rechnung brauchen will. Diese Grösse muss dann werden

$$= \pm \sqrt{(2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f)} = \pm \sqrt{(-2(L - \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f)}.$$

In diesem Falle lassen sich a und p sehr bequem durch folgende Formeln finden:

$$b = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{\sin g}, \quad a = \frac{b}{\cos \varphi}, \quad p = b \cos \varphi.$$

Es können auch nach Belieben zur Prüfung der Rechnung mehre Gleichungen der Art. 88 und 95 zu Hülfe genommen werden, welchen ich noch die folgenden beifüge:

$$\frac{2 \tan g 2\omega}{\cos 2\omega} \sqrt{\frac{rr'}{aa}} = e \sin G \sin g$$

$$\frac{2 \tan g 2\omega}{\cos 2\omega} \sqrt{\frac{pp}{rr'}} = e \sin F \sin f$$

$$\frac{2 \tan g 2\omega}{\cos 2\omega} = \tan g \varphi \sin G \sin f = \tan g \varphi \sin F \sin g.$$

Die mittlere Bewegung endlich und die Epoche der mittleren Anomalie werden ebenso gefunden, wie im vorhergehenden Artikel.

97.

Zur Erläuterung der von Art. 88 an auseinandergesetzten Methode will ich die beiden Beispiele des Art. 87 wieder vornehmen, wobei es kaum nöthig sein wird, zu bemerken, dass die bisher mit dem Hilfswinkel ω verbundene (106) Bezeichnung nicht mit der verwechselt werden darf, in welcher bei den Art. 86 und 87 dasselbe Zeichen angenommen war.

I. In dem ersten Beispiele haben wir $f = 3^{\circ} 47' 26'' 865$, und ferner $\log \frac{r'}{r} = 9,991\,4599$, $\log \tan(45^{\circ} + \omega) = 9,997\,864975$, $\omega = -8' 27'' 006$, und daraus nach Art. 89

$$\begin{array}{r} \log \sin \frac{1}{2} f^2 \dots\dots\dots 7,038\,9972 \\ \log \cos f \dots\dots\dots 9,999\,0488 \\ \hline 7,039\,9484 \\ = \log 0,001\,096\,3480 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log \tan 2\omega \dots\dots\dots 5,383\,2428 \\ \log \cos f \dots\dots\dots 9,999\,0488 \\ \hline 5,384\,1940 \\ = \log 0,000\,024\,2211 \end{array}$$

also $l = 0,001\,120\,5691$, $\frac{z}{6} + l = 0,834\,4539$; ferner wird $\log kt = 9,576\,6974$

$$\begin{array}{r} 2 \log kt \dots\dots\dots 9,153\,3948 \\ \text{Comp. } \frac{3}{2} \log r r' \dots\dots\dots 9,020\,5181 \\ \text{Comp. } \log 8 \cos f^2 \dots\dots\dots 9,099\,7636 \\ \log mm \dots\dots\dots 7,273\,6765 \\ \log \frac{z}{6} + l \dots\dots\dots 9,921\,4023 \\ \hline 7,352\,2742. \end{array}$$

Ein genäherter Werth von h ist daher $= 0,002\,25047$, dem in unserer Tafel II der $\log yy = 0,002\,1633$ entspricht. Man hat also $\log \frac{m m}{yy} = 7,271\,5132$, oder $\frac{m m}{yy} = 0,001\,868\,587$, woraus nach Formel [16] wird $x = 0,000\,748\,0179$.

Es bedürfen mithin, da ξ nach Tafel III überhaupt unmerklich ist, die gefundenen Werthe von h , y , x keiner Verbesserung. Jetzt verhält sich die Bestimmung der Elemente so:

$\log x \dots\dots\dots 6,873\,9120$
 $\log \sin \frac{1}{2} g \dots\dots\dots 8,436\,9560$, $\frac{1}{2} g = 1^{\circ} 34' 2'' 0286$, $\frac{1}{2} (f+g) = 3^{\circ} 27' 45'' 4611$,
 $\frac{1}{2} (f-g) = 19' 41'' 4039$. Man hat deshalb nach Anleitung der Formeln [27], [28], [29] und [30]:

$$\begin{array}{r} \log \tan 2\omega \dots\dots\dots 7,691\,6214\,n \\ \log \cos \frac{1}{2} (f+g) \dots\dots\dots 9,999\,2065 \\ \log \cos \frac{1}{2} (f-g) \dots\dots\dots 9,999\,9929 \\ \hline \log P \sin \frac{1}{2} (F-G) \dots\dots\dots 7,690\,8279\,n \\ \log P \cos \frac{1}{2} (F-G) \dots\dots\dots 8,781\,0240 \\ \frac{1}{2} (F-G) = -4^{\circ} 38' 41'' 54 \\ \frac{1}{2} (F+G) = 319\,21\,38,05 \\ F = 314\,42\,56,51 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Comp. } \log \cos 2\omega \dots\dots\dots 0,000\,0052 \\ \log \sin \frac{1}{2} (f+g) \dots\dots\dots 8,781\,0188 \\ \log \sin \frac{1}{2} (f-g) \dots\dots\dots 7,757\,9709 \\ \hline \log Q \sin \frac{1}{2} (F+G) \dots\dots\dots 7,691\,6143\,n \\ \log Q \cos \frac{1}{2} (F+G) \dots\dots\dots 7,757\,9761 \\ \log P = \log R \cos \frac{1}{2} \varphi \dots\dots\dots 8,782\,4527 \\ \log Q = \log R \sin \frac{1}{2} \varphi \dots\dots\dots 7,877\,8355 \\ \frac{1}{2} \varphi = 7^{\circ} 6' 0'' 935 \end{array}$$

	$v = 310^{\circ} 55' 29'' 64$	$\varphi = 14^{\circ} 12' 1'' 87$
	$v' = 318 30 23,37$	$\log R \dots\dots\dots 8,785 7960$
(107)	$G = 324 0 19,59$	Zur Prüfung der Rechnung
	$E = 320 52 15,53$	$\frac{1}{2} \log 2 \cos f \dots\dots\dots 0,150 0394$
	$E' = 327 8 23,65$	$\frac{1}{2} \log(t+x) = \log \frac{m}{y} \dots\dots\dots 8,635 7566$
		<hr/> 8,785 7960
	$\frac{1}{2} \log rr' \dots\dots\dots 0,326 4939$	$\log \sin \varphi \dots\dots\dots 9,389 7262$
	$\log \sin f \dots\dots\dots 8,820 2909$	$\log 206 265 \dots\dots\dots 5,314 4251$
	<u>Comp. log sin $g \dots\dots\dots 1,262 1765$</u>	$\log e$ in Secunden $\dots\dots\dots 4,704 1513$
	$\log b \dots\dots\dots 0,408 9613$	$\log \sin E \dots\dots\dots 9,800 0767 n$
	$\log \cos \varphi \dots\dots\dots 9,986 5224$	<u>log sin $E' \dots\dots\dots 9,734 4714 n$</u>
	$\log p \dots\dots\dots 0,395 4837$	$\log e \sin E' \dots\dots\dots 4,504 2280 n$
	$\log a \dots\dots\dots 0,422 4389$	$\log e \sin E' \dots\dots\dots 4,438 6227 n$
	$\log k \dots\dots\dots 3,550 0066$	$e \sin E = -31932'' 14 = -8^{\circ} 52' 12'' 14$
	$\frac{3}{2} \log a \dots\dots\dots 0,633 6584$	$e \sin E' = -27455,08 = -7 37 35,08.$
	2,916 3482	Hieraus die mittlere Anomalie
	<u>log $t \dots\dots\dots 1,341 1160$</u>	für den ersten Ort = 329° 44' 27'' 67
	4,257 4642.	für den zweiten Ort = 334 45 58,73
		<u>Unterschied = 5 1 31,06.</u>

Die mittlere tägliche Bewegung ist daher = $824^{\circ} 7989$, und die mittlere Bewegung innerhalb der Zeit $t = 18091'' 07 = 5^{\circ} 1' 31'' 07$.

II. Im zweiten Beispiele ist $f = 31^{\circ} 27' 38'' 32$, $\omega = -21' 50'' 565$, $l = 0,086 35659$, $\log mm = 9,353 0651$, $\frac{mm}{\frac{1}{2} + l}$ oder der genäherte Werth von $h = 0,245 1454$; diesem entspricht in Tafel II $\log yy = 0,172 2663$, woraus $\frac{mm}{yy} = 0,151 63477$, $x = 0,065 27818$, hiermit aus Tafel III ξ genommen = $0,000 2531$. Unter Anwendung dieses Werthes erhält man als verbesserte Werthe für $h = 0,245 0779$, $\log yy = 0,172 2303$, $\frac{mm}{yy} = 0,151 64737$, $x = 0,065 29078$, $\xi = 0,000 2532$. Wiederholte man die Rechnung abermals mit diesem Werthe von ξ , der von dem früheren nur um eine Einheit in der siebenten Decimale differirt, so würden h , $\log yy$, x keine merkliche Aende-

rung erleiden, weshalb der gefundene Werth von x schon der wahre ist, und man daraus sofort zur Bestimmung der Elemente vorschreiten kann, wobei ich mich hier nicht aufhalte, da sich das Verfahren in nichts von dem vorigen Beispiele unterscheidet.

III. Es wird nicht undienlich sein, auch den andern Fall, wo $\cos f$ negativ ist, mit einem Beispiele zu erläutern.

Es sei $v' - v = 224^{\circ} 0' 0''$, oder $f = 112^{\circ} 0' 0''$, $\log r = 0,139 4892$, $\log r' = 0,397 8794$, $t = 206,809 19$ Tage. Hieraus findet sich $\omega = +4^{\circ} 14' 43'' 78$, (108) $L = 1,894 2298$, $\log MM = 0,672 4333$, der erste genäherte Werth von $\log H = 0,646 7603$, woraus durch Auflösung der Gleichung [15'] erhalten wird $Y = 1,591 432$ und sodann $x = 0,037 037$, dem in Tafel III $\xi = 0,000 0801$ entspricht. Daraus entstehen die verbesserten Werthe $\log H = 0,646 7931$, $Y = 1,591 5107$, $x = 0,037 2195$, $\xi = 0,000 0809$. Die mit letzterem Werthe von ξ wiederholte Rechnung giebt $x = 0,037 2213$, ein Werth der, da ξ nun unverändert bleibt, keiner Verbesserung weiter bedarf. Sodann findet sich $\frac{1}{2}g = 11^{\circ} 7' 25'' 40$ und daraus ebenso wie im Beispiele I

$\frac{1}{2}(F-G) =$	$3^{\circ} 33' 53'' 59$	$\log P = \log R \cos \frac{1}{2} \varphi \dots\dots\dots$	$9,970 0507$
$\frac{1}{2}(F+G) =$	$8 26 6,38$	$\log Q = \log R \sin \frac{1}{2} \varphi \dots\dots\dots$	$9,858 0552$
$F =$	$11 59 59,97$	$\frac{1}{2} \varphi =$	$37^{\circ} 41' 34'' 27$
$v = -$	$100 0 0,03$	$\varphi =$	$75 23 8,54$
$v' = +$	$123 59 59,97$	$\log R \dots\dots\dots$	$0,071 7096$
$G =$	$4 52 12,79$	Zur Prüfung der Rechnung	
$E = -$	$17 22 38,01$	$\log \frac{M}{Y} \sqrt{-2 \cos f} \dots\dots\dots$	$0,071 7097.$
$E' = +$	$27 7 3,59.$		

In so excentrischen Bahnen wird der Winkel φ etwas genauer aus Formel [19'] berechnet, welche in unserem Beispiele φ giebt $= 75^{\circ} 23' 8'' 57$; auch wird die Excentricität e mit grösserer Schärfe mittelst der Formel $1 - 2 \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2} \varphi)^2$, als durch $\sin \varphi$ bestimmt; nach ihr wird $e = 0,967 64630$. Durch Formel [1] findet sich ferner $\log b = 0,657 6611$, daraus $\log p = 0,059 5967$, $\log a = 1,255 7255$, und der Logarithmus der Periheldistanz $= \log \frac{p}{1+e} = \log a(1-e) = \log b \operatorname{tang}(45^{\circ} - \frac{1}{2} \varphi) = 9,765 6496$.

In so sehr zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigenden Bahnen pflegt an Stelle der Epoche der mittleren Anomalie die Zeit des Durchganges durch das Perihel angegeben zu werden. Die Intervalle zwischen dieser Zeit und den, den beiden angenommenen Orten entsprechenden Zeiten können aus den bekannten Elementen durch die im Art. 41 gegebene Methode bestimmt werden, deren Differenz oder Summe (je nachdem das Perihel ausserhalb oder innerhalb der beiden gegebenen Orte liegt) zur Prüfung der Rechnung dient, da sie mit der Zeit t übereinstimmen muss.

Uebrigens waren die Zahlen dieses dritten Beispiels auf die Elemente in dem Beispiele der Art. 38 und 43 gestützt, und es hatte sogar jenes Beispiel unseren ersten Ort geliefert. Die unbedeutenden Verschiedenheiten der hier herausgebrachten Elemente rühren lediglich aus der beschränkten Genauigkeit der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln her.

(109)

98.

Die Auflösung unserer für die Ellipse in dem Vorstehenden entwickelten Aufgabe, lässt sich auf die Parabel und Hyperbel übertragen, indem man die Parabel als eine Ellipse betrachtet, in welcher a und b unendliche Grössen, $\varphi = 90^\circ$, endlich $E, E', g, G = 0$ sein würden; und ebenso die Hyperbel als eine Ellipse in der a negativ, und b, E, E', g, G, φ imaginäre Grössen wären. Ich will jedoch lieber mich dieser Voraussetzungen enthalten, und unsere Aufgabe für beide Arten der Kegelschnitte gesondert behandeln. Die grosse Analogie zwischen allen drei Arten wird sich so von selbst offenbaren.

Behält man in der Parabel die Symbole p, v, v', F, f, r, r', t in derselben Bezeichnung bei, worin sie oben genommen sind, so hat man aus der Theorie der parabolischen Bewegung:

$$[1] \quad V \frac{p}{2r} = \cos \frac{1}{2}(F - f)$$

$$[2] \quad V \frac{p}{2r'} = \cos \frac{1}{2}(F + f)$$

$$\begin{aligned} \frac{2kt}{p^{\frac{1}{2}}} &= \tan \frac{1}{2}(F'+f) - \tan \frac{1}{2}(F'-f) + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2}(F'+f)^2 - \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2}(F'-f)^2 \\ &= \left\{ \tan \frac{1}{2}(F'+f) - \tan \frac{1}{2}(F'-f) \right\} \cdot \left\{ 1 + \tan \frac{1}{2}(F'+f) \tan \frac{1}{2}(F'-f) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (\tan \frac{1}{2}(F'+f) - \tan \frac{1}{2}(F'-f))^2 \right\} \\ &= \frac{2 \sin f \sqrt{rr'}}{p} \left\{ \frac{2 \cos f \sqrt{rr'}}{p} + \frac{4 \sin^2 f rr'}{3pp} \right\}, \text{ woraus} \\ [3] \quad kt &= \frac{2 \sin f \cos f \cdot rr'}{\sqrt{p}} + \frac{4 \sin^3 f (rr')^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Ferner wird durch Multiplication der Gleichungen [1] und [2] erhalten

$$[4] \quad \frac{p}{\sqrt{rr'}} = \cos F' + \cos f$$

und aus Addition der Quadrate

$$[5] \quad \frac{p(r+r')}{2rr'} = 1 + \cos F' \cos f.$$

Hieraus, nach Elimination von $\cos F'$,

$$[6] \quad p = \frac{2rr' \sin^2 f}{r+r'-2 \cos f \sqrt{rr'}}.$$

Wenn man daher die Gleichungen [9] und [9'] des Art. 88 auch hier annimmt, die erste für einen positiven, die zweite für einen negativen Werth von $\cos f'$, so hat man

$$[7] \quad p = \frac{\sin^2 f \sqrt{rr'}}{2l \cos f}$$

$$[7'] \quad p = \frac{\sin^2 f \sqrt{rr'}}{-2L \cos f} \quad (110)$$

und nach Einschaltung dieser Werthe in die Gleichung [3] entsteht, unter Beibehaltung der Symbole m , M in der durch die Gleichungen [11], [11'] des Art. 88 festgestellten Bezeichnung,

$$[8] \quad m = l^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} l^{\frac{3}{2}}$$

$$[8'] \quad M = -L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} L^{\frac{3}{2}}.$$

Diese Gleichungen kommen mit [12], [12'] des Art. 88 überein, wenn dort $g = 0$ gesetzt wird. Hieraus ergibt sich, dass, falls zwei heliocentrische Orte, denen durch eine Parabel genügt wird, so behandelt werden, als ob die Bahn eine Ellipse wäre, es aus Anwendung der Vorschriften des Art. 91 sogleich resultiren muss, dass $x = 0$; umgekehrt sieht man leicht, dass, wenn durch

jene Vorschriften $x = 0$ sich ergibt, die Bahn statt der Ellipse als Parabel hervorkommt, da durch die Gleichungen [1], [16], [17], [19], [20], $b = \infty$, $a = \infty$, $\varphi = 90^\circ$ wird. Die Bestimmung der Elemente erledigt sich dann sehr leicht. Denn für p kann man entweder die Gleichung [7] des gegenwärtigen Artikels, oder die Gleichung [18] des Art. 95 anwenden. (Zugleich geht daraus hervor, dass y , Y in der Parabel dieselben Verhältnisse ausdrücken, wie in der Ellipse, vergl. Art. 95.) Für F aber geben die Gleichungen [1] und [2] dieses Artikels: $\tan \frac{1}{2} F = \frac{\sqrt{r'} - \sqrt{r}}{\sqrt{r'} + \sqrt{r}} \cotang \frac{1}{2} f = \sin 2\omega \cotang \frac{1}{2} f$, wenn der Hilfswinkel in derselben Bezeichnung wie in Art. 89 genommen wird. Bei dieser Gelegenheit bemerke ich noch, dass, wenn in die Gleichung [3] statt p sein Werth aus [6] gesetzt wird, daraus die bekannte Gleichung entsteht:

$$kt = \frac{1}{3}(r + r' + \cos f \cdot \sqrt{rr'}) (r + r' - 2 \cos f \cdot \sqrt{rr'})^{\frac{1}{3}} \sqrt{2}.$$

99.

Auch in der Hyperbel behalte ich die Symbole p , v , v' , f , F , r , r' , t in derselben Bezeichnung bei, für die halbe grosse Axe, die hier negativ ist, schreibe ich aber $-\alpha$; die Excentricität e setze ich ganz wie im Art. 21 etc. $= \frac{1}{\cos \varphi}$. Die dort durch u ausgedrückte Hilfsgrösse setze ich für den ersten Ort $= \frac{C}{c}$, für den zweiten Ort $= Cc$, woraus man leicht schliesst, dass c immer grösser ist als Eins, aber ceteris paribus, von Eins desto weniger verschieden ist, je weniger die beiden angenommenen Orte von einander entfernt sind. Von den in Art. 21 entwickelten Gleichungen übertrage ich die sechste und siebente in etwas veränderter Gestalt hierher.

$$(111) \quad \begin{aligned} [1] \quad \cos \frac{1}{2} v &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{c}} + \sqrt{\frac{c}{C}} \right) \sqrt{\frac{(e-1)\alpha}{r}} \\ [2] \quad \sin \frac{1}{2} v &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{c}} - \sqrt{\frac{c}{C}} \right) \sqrt{\frac{(e+1)\alpha}{r}} \\ [3] \quad \cos \frac{1}{2} v' &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{Cc} + \sqrt{\frac{1}{Cc}} \right) \sqrt{\frac{(e-1)\alpha}{r'}} \\ [4] \quad \sin \frac{1}{2} v' &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{Cc} - \sqrt{\frac{1}{Cc}} \right) \sqrt{\frac{(e+1)\alpha}{r'}}; \end{aligned}$$

woraus sofort die Folgenden sich ergeben:

$$[5] \quad \sin F = \frac{1}{2} \alpha \left(C - \frac{1}{C} \right) \sqrt{\frac{e e - 1}{r r'}}$$

$$[6] \quad \sin f = \frac{1}{2} \alpha \left(c - \frac{1}{c} \right) \sqrt{\frac{e e - 1}{r r'}}$$

$$[7] \quad \cos F = \left(e \left(c + \frac{1}{c} \right) - \left(C + \frac{1}{C} \right) \right) \frac{\alpha}{2 \sqrt{r r'}}$$

$$[8] \quad \cos f = \left(e \left(C + \frac{1}{C} \right) - \left(c + \frac{1}{c} \right) \right) \frac{\alpha}{2 \sqrt{r r'}}$$

Ferner wird durch die Gleichung X des Art. 21:

$$\frac{r}{\alpha} = \frac{1}{2} e \left(\frac{C}{c} + \frac{c}{C} \right) - 1$$

$$\frac{r'}{\alpha} = \frac{1}{2} e \left(C c + \frac{1}{C c} \right) - 1$$

und hieraus

$$[9] \quad \frac{r' - r}{\alpha} = \frac{1}{2} e \left(C - \frac{1}{C} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right)$$

$$[10] \quad \frac{r' + r}{\alpha} = \frac{1}{2} e \left(C + \frac{1}{C} \right) \left(c + \frac{1}{c} \right) - 2.$$

Die Gleichung [10] mit [8] combinirt, giebt:

$$[11] \quad \alpha = \frac{r' + r - \left(c + \frac{1}{c} \right) \cos f \cdot \sqrt{r r'}}{\frac{1}{2} \left(c - \frac{1}{c} \right)^2}.$$

Setzt man daher ganz wie in der Ellipse

$$\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 + 2l, \quad \text{oder} = 1 - 2L,$$

je nachdem $\cos f$ positiv oder negativ, so erhält man

$$[12] \quad \alpha = \frac{8 \left(l - \frac{1}{4} \left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right) \cos f \cdot \sqrt{r r'}}{\left(c - \frac{1}{c} \right)^2} \quad (112)$$

$$[12^*] \quad \alpha = \frac{-8 \left(L + \frac{1}{4} \left(\sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right) \cos f \cdot \sqrt{r r'}}{\left(c - \frac{1}{c} \right)^2}.$$

Die Berechnung der Grösse l oder L wird hier ebenso wie in der Ellipse vermittelt des Hülfswinkels ω angestellt. Es wird daher schliesslich aus der Gleichung XI des Art. 22 (bei Annahme hyperbolischer Logarithmen)

$$\begin{aligned} \frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2} e \left(Cc - \frac{1}{Cc} - \frac{C}{c} + \frac{c}{C} \right) - \log Cc + \log \frac{C}{c} \\ &= \frac{1}{2} e \left(C + \frac{1}{C} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right) - 2 \log c, \end{aligned}$$

oder, wenn C mit Hülfe der Gleichung [8] eliminirt wird,

$$\frac{kt}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(c - \frac{1}{c} \right) \cos f \cdot V r r'}{\alpha} + \frac{1}{2} \left(c c - \frac{1}{c c} \right) - 2 \log c.$$

In diese Gleichung substituire ich für α seinen Werth aus [12], [12*], führe dann das Symbol m oder M in derselben, ihm durch die Formeln [11], [11*] des Art. 88 angewiesenen Bezeichnung ein, und schreibe endlich der Kürze wegen

$$\frac{1}{4} \left(Vc - V \frac{1}{c} \right)^2 = z, \quad \frac{c c - \frac{1}{c c} - 4 \log c}{\frac{1}{4} \left(c - \frac{1}{c} \right)^2} = Z.$$

Dann entstehen die Gleichungen:

$$[13] \quad m = (l-z)^{\frac{1}{2}} + (l-z)^{\frac{3}{2}} Z$$

$$[13^*] \quad M = -(L+z)^{\frac{1}{2}} + (L+z)^{\frac{3}{2}} Z,$$

welche nur die einzige unbekannte Grösse z enthalten, da offenbar Z eine Function von z ist, die durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$Z = \frac{(1+2z)V(z+zz) - \log(V(1+z)+Vz)}{2(z+zz)^{\frac{3}{2}}}.$$

(113)

100.

Bei Auflösung der Gleichung [13] oder [13*] will ich zuerst den Fall gesondert betrachten, wo z keinen grossen Werth erreicht, so dass Z durch eine nach den Potenzen von z fortschreitende und schnell convergirende Reihe sich ausdrücken lässt; dann wird:

$(1+2z)V(z+zz) = z^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}z^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}z^{\frac{5}{2}} \dots$, $\log(V(1+z)+Vz) = z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}z^{\frac{5}{2}} \dots$
 und daher der Zähler von $Z = \frac{2}{3}z^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}z^{\frac{3}{2}} \dots$; der Nenner aber wird
 $= 2z^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{3}{2}} \dots$, also $Z = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z \dots$. Um das Gesetz der Progression zu
 finden, differenziere ich die Gleichung

$$2(z+zz)^{\frac{1}{2}} Z = (1+2z)V(z+zz) - \log(V(1+z)+Vz),$$

woraus nach den gehörigen Reductionen folgt:

$$2(z+zz)^{\frac{1}{2}} \frac{dZ}{dz} + 3Z(1+2z)V(z+zz) = 4V(z+zz),$$

oder

$$(2z+2zz) \frac{dZ}{dz} = 4 - (3+6z)Z,$$

woraus durch ein ähnliches Verfahren wie im Art. 90 abgeleitet wird

$$Z = \frac{4}{3} - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} z + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} zz - \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} z^3 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} z^4 - \text{etc.}$$

Man sieht, dass Z ganz in derselben Weise von $-z$ abhängt, wie oben in
 der Ellipse X von x , weshalb, wenn man setzt:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9}(z+\zeta)}}$$

auch ζ ebenso durch $-z$, wie oben ξ durch x bestimmt wird, so dass
 man hat:

$$[14] \quad \zeta = \frac{\frac{2}{35}zz}{1 - \frac{2}{35}z + \frac{40}{63}z} \frac{1 + \frac{4}{99}z}{1 + \frac{70}{143}z} \frac{1}{1 + \text{etc.}}$$

oder

$$\zeta = \frac{\frac{2}{35}zz}{1 + \frac{18}{35}z + \frac{4}{63}z} \frac{1 + \frac{40}{59}z}{1 + \frac{18}{143}z} \frac{1}{1 + \text{etc.}}$$

Auf diese Weise sind die Werthe von ζ für $z = 0$ bis $z = 0,3$ durch die einzelnen Tausendtheile berechnet, welche die dritte Spalte der Tafel III enthält.*)

(114)

101.

Führt man die Grösse ζ ein, und setzt $V(l-z) = \frac{m}{y}$ oder $V(L+z) = \frac{M}{Y}$, sowie

$$[15] \quad \frac{mm}{\frac{1}{2} + l + \zeta} = h, \quad \text{oder}$$

$$[15^*] \quad \frac{MM}{L - \frac{1}{2} - \zeta} = H,$$

so nehmen die Gleichungen [13] und [13*] folgende Form an:

$$[16] \quad \frac{(y-1)yy}{y+\frac{1}{2}} = h$$

$$[16^*] \quad \frac{(Y+1)YY}{Y-\frac{1}{2}} = H,$$

und werden daher ganz identisch mit denen, zu welchen wir bei der Ellipse gelangten ([15], [15*] im Art. 91). Hieraus lässt sich also, insoweit h oder H als bekannt angesehen werden kann, y oder Y ableiten, und dann ist

$$[17] \quad z = l - \frac{mm}{yy}$$

$$[17^*] \quad z = \frac{MM}{YY} - L.$$

Man sieht hieraus, dass alle oben für die Ellipse beschriebenen Operationen ebenso auch für die Hyperbel gelten bis zur Ermittlung der Grössen y oder Y aus dem genäherten Werthe von h oder H ; sodann aber muss die Grösse $\frac{mm}{yy} - l$ oder $L - \frac{MM}{YY}$, welche in der Ellipse positiv und in der Parabel = 0 werden musste, negativ in der Hyperbel werden. Durch dieses Kennzeichen wird daher die Art des Kegelschnitts bestimmt. Nach Auffindung von z giebt unsere Tafel ζ , und hieraus erhält man einen verbesserten Werth von h oder H , mit dem man die Rechnung wiederholt, bis Alles genau übereinstimmt.

*) Der von Gauss zu den Art. 90 und 100 gegebene Zusatz findet sich im Anhang.

Anmerkung des Uebersetzers.

Nach Ermittlung des wahren Werthes für z würde man daraus c mittelst der Formel $c = 1 + 2z + 2\sqrt{3 + zz}$ ableiten können, aber es ist vorzuziehen, auch zu den nachfolgenden Benutzungen, den Hülfswinkel n einzuführen, wobei n aus der Gleichung $\tan 2n = 2\sqrt{z + zz}$ bestimmt wird; daraus folgt

$$c = \tan 2n + \sqrt{1 + \tan 2n^2} = \tan(45^\circ + n).$$

102.

(115)

Da in der Hyperbel ebenso wie in der Ellipse y nothwendig positiv sein muss, so kann die Auflösung der Gleichung [16] auch hier einer Zweideutigkeit nicht unterworfen sein. (Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass in der Hyperbel ganz wie in der Ellipse zur Auflösung dieser Gleichung die Tafel II angewendet werden kann, so lange h deren Grenzen nicht überschreitet.) In Beziehung auf die Gleichung [16'] aber muss man hier etwas anders rechnen, als bei der Ellipse. Aus der Theorie der Gleichungen lässt sich leicht zeigen, dass für einen positiven Werth von H diese Gleichung (wenn sie überhaupt irgend eine reelle positive Wurzel hat) neben einer negativen Wurzel zwei positive haben müsste, welche entweder beide gleich sein werden, nämlich $= \frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{5} = 0,20601$, oder die eine grösser, die andere kleiner als diese Grenze. (Die Grösse H kann offenbar nur dann negativ werden, wenn $\zeta > \frac{1}{6}$ wäre; einem solchen Werthe von ζ würde aber ein Werth für z , der grösser als 2,684 und der daher bei weitem die Grenzen dieser Methode überschreiten würde, entsprechen). Dass bei unserer Aufgabe (die auf der Voraussetzung beruht, dass z keine beträchtliche Grösse und wenigstens nicht grösser sei als 0,3, wenn nicht der Gebrauch der dritten Tafel vereitelt werden soll) nothwendig stets die grössere Wurzel angenommen werden müsste, werde ich auf folgende Weise zeigen. Wenn in die Gleichung [13'] für M substituirt wird: $Y\sqrt{L+z}$, so erhält man $Y+1 = (L+z)Z > (1+z)Z$, oder

$$Y > \frac{1}{3} - \frac{4}{3.5}z + \frac{4.6}{3.5.7}zz - \frac{4.6.8}{3.5.7.9}z^3 + \text{etc.},$$

woraus man leicht schliesst, dass für so kleine Werthe von z , wie wir sie hier voraussetzen, Y stets grösser werden müsste, als 0,20601.

Combination dieser Formel mit [12], [12'] des Art. 99 wird

$$V(ee-1) = \operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} 2n}{2(L-z)}$$

$$\operatorname{ctg} \psi = - \frac{\operatorname{tang} f \operatorname{tang} 2n}{2(L+z)},$$

directricität genau und bequem sich berechnen lässt. Aus β und ψ erhält man durch Division α , durch Multiplication ρ , so dass

$$\begin{aligned} r' &= \frac{2mm \cos f \cdot Vrr'}{yy \operatorname{tang} 2n^2} = \frac{kkt}{4yy r' \cos f^2 \operatorname{tang} 2n^2} \\ &= \frac{-2MM \cos f \cdot Vrr'}{Y'Y \operatorname{tang} 2n^2} = \frac{kkt}{4Y'Y r' \cos f^2 \operatorname{tang} 2n^2}; \\ &\quad \frac{\gamma \sin f \cdot \operatorname{tang} f \cdot Vrr'}{2mm} = \left(\frac{\gamma r' \sin 2f}{kt} \right)^2 \\ (L+z) \cdot \frac{Vrr'}{2MM} &= \frac{-Y'Y \sin f \cdot \operatorname{tang} f \cdot Vrr'}{2MM} = \left(\frac{Y r' \sin 2f}{kt} \right)^2. \end{aligned}$$

Dritte und sechste Ausdruck für p , die überhaupt mit den Formeln [18], [18'] des Art. 95 identisch sind, zeigen, dass dasjenige, was dort über die Bezeichnung der Grössen y , Y gesagt ist, auch für die Hyperbel gilt.

Aus Combination der Gleichungen [6] und [9] des Art. 99 folgt $(r' - r) \sqrt{\frac{ee-1}{rr'}} = e \sin f \cdot (C - \frac{1}{C})$. Führt man daher ψ und ω ein und setzt $C = \operatorname{tang}(45^\circ + N)$, so kommt

$$[20] \quad \operatorname{tang} 2N = \frac{2 \sin \psi \operatorname{tang} 2\omega}{\sin f \cos 2\omega}. \quad (117)$$

Ist so C gefunden, so erhält man daraus die Werthe der in Art. 21 mit u bezeichneten Grösse für beide Orte, und es ergibt sich endlich mittelst der Gleichung III, Art. 21:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \frac{C-c}{(C+c) \operatorname{tang} \frac{1}{4} \psi}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v' = \frac{Cc-1}{(Cc+1) \operatorname{tang} \frac{1}{4} \psi},$$

oder, wenn man für C , c die Winkel N , n einführt:

In der That finde ich nach angestellter Rechnung, dass, wenn $(1+z)Z$ dieser Grenze gleich wird, z sein müsse = 0,79858. Ich bin aber weit davon entfernt, unsere Methode auf so grosse Werthe von z ausdehnen zu wollen.

103.

Falls z einen grösseren, die Grenze der Tafel III überschreitenden Werth erreicht, so lassen sich die Gleichungen [13], [13'] stets sicher und bequem in unveränderter Gestalt durch Versuche auflösen, und zwar aus ähnlichen Gründen, wie die in Art. 94 für die Ellipse auseinandergesetzten. In einem solchen Falle kann man die Bahnelemente wenigstens als beiläufig bekannt voraussetzen; dann aber erhält man einen genäherten Werth für n sofort durch die Formel $\tan 2n = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{a \sqrt{(ee-1)}}$, welche von selbst aus der Gleichung [6] des Art. 99 folgt. Aus n aber bekommt man z durch die Formel $z = \frac{1 - \cos 2n}{2 \cos 2n} = \frac{\sin^2 n}{\cos 2n}$, und aus dem genäherten Werthe von z wird durch wenige Versuche derjenige Werth hergeleitet, welcher der Gleichung [13] oder [13'] völlig genau Genüge leistet. Es lassen jene Gleichungen auch in folgender Form sich darstellen:

$$(116) \quad m = \left(l - \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(l - \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\frac{\tan 2n}{\cos 2n} - \log \text{hyp tang } (45^\circ + n)}{\tan 2n^2} \right\}$$

$$M = -\left(L + \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(L + \frac{\sin n^2}{\cos 2n}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\frac{\tan 2n}{\cos 2n} - \log \text{hyp tang } (45^\circ + n)}{\tan 2n^2} \right\}$$

und kann solchergestalt, mit Beiseitlassung von z , sofort der wahre Werth für n herausgebracht werden.

104.

Es erübrigt noch, aus z , n oder c die Elemente selbst zu bestimmen. Setzt man $a \sqrt{(ee-1)} = \beta$, so giebt die Gleichung [6] des Art. 99

$$[18] \quad \beta = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{\tan 2n}.$$

Durch Combination dieser Formel mit [12], [12'] des Art. 99 wird erhalten:

$$[19] \quad \sqrt{(ee-1)} = \tan \psi = \frac{\tan f \tan g 2n}{2(l-z)}$$

$$[19'] \quad \tan \psi = -\frac{\tan f \tan g 2n}{2(L+z)},$$

woraus die Excentricität genau und bequem sich berechnen lässt. Aus β und $\sqrt{(ee-1)}$ bekommt man durch Division α , durch Multiplication p , so dass man hat:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2(l-z) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan g 2n^2} = \frac{2nm \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{yy \tan g 2n^2} = \frac{kkt}{4yyrr' \cos f^2 \tan g 2n^2} \\ &= \frac{-2(L+z) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan g 2n^2} = \frac{-2MM \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{YY \tan g 2n^2} = \frac{kkt}{4YYrr' \cos f^2 \tan g 2n^2}; \\ p &= \frac{\sin f \cdot \tan g f \cdot \sqrt{rr'}}{2(l-z)} = \frac{yy \sin f \cdot \tan g f \cdot \sqrt{rr'}}{2nm} = \left(\frac{yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2 \\ &= \frac{-\sin f \cdot \tan g f \cdot \sqrt{rr'}}{2(L+z)} = \frac{-YY \sin f \cdot \tan g f \cdot \sqrt{rr'}}{2MM} = \left(\frac{Yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2. \end{aligned}$$

Der dritte und sechste Ausdruck für p , die überhaupt mit den Formeln [18], [18'] des Art. 95 identisch sind, zeigen, dass dasjenige, was dort über die Bezeichnung der Grössen y , Y gesagt ist, auch für die Hyperbel gilt.

Aus Combination der Gleichungen [6] und [9] des Art. 99 folgt $(r' - r) \sqrt{\frac{ee-1}{rr'}} = e \sin f \cdot (C - \frac{1}{C})$. Führt man daher ψ und ω ein und setzt $C = \tan(45^\circ + N)$, so kommt

$$[20] \quad \tan 2N = \frac{2 \sin \psi \tan g 2\omega}{\sin f \cos 2\omega}. \quad (117)$$

Ist so C gefunden, so erhält man daraus die Werthe der in Art. 21 mit u bezeichneten Grösse für beide Orte, und es ergibt sich endlich mittelst der Gleichung III, Art. 21:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} v &= \frac{C-c}{(C+c) \tan \frac{1}{2} \varphi} \\ \tan \frac{1}{2} v' &= \frac{Cc-1}{(Cc+1) \tan \frac{1}{2} \varphi}, \end{aligned}$$

oder, wenn man für C , c die Winkel N , n einführt:

$$[21] \quad \tan \frac{1}{2} v = \frac{\sin(N-n)}{\cos(N+n) \tan \frac{1}{2} \psi}$$

$$[22] \quad \tan \frac{1}{2} v' = \frac{\sin(N+n)}{\cos(N-n) \tan \frac{1}{2} \psi}.$$

Hieraus bestimmt man die wahren Anomalien v, v' , deren mit $2f$ vergleichener Unterschied zugleich zur Prüfung der Rechnung dient. Schliesslich leitet man durch Formel XI. Art. 22 leicht ab, dass das Zeitintervall zwischen dem Perihelie bis zu der dem ersten Orte entsprechenden Zeit sei:

$$= \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{2e \cos(N+n) \sin(N-n)}{\cos 2N \cos 2n} - \log \text{hyp} \frac{\tan(45^\circ + N)}{\tan(45^\circ + n)} \right\}$$

und ebenso das Zeitintervall vom Perihelie bis zu der dem zweiten Orte entsprechenden Zeit

$$= \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{2e \cos(N-n) \sin(N+n)}{\cos 2N \cos 2n} - \log \text{hyp} \frac{\tan(45^\circ + N) \tan(45^\circ + n)}{\tan(45^\circ + N)} \right\}.$$

Setzt man daher die erste Zeit $= T - \frac{1}{2}t$, und deshalb die zweite $= T + \frac{1}{2}t$, so erhält man

$$[23] \quad T = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{e \tan 2N}{\cos 2n} - \log \tan(45^\circ + N) \right\},$$

woraus die Zeit des Periheldurchganges bekannt wird. Endlich hat man die zur schliesslichen Prüfung der Rechnung anwendbare Gleichung

$$[24] \quad t = \frac{2\alpha^{\frac{3}{2}}}{k} \left\{ \frac{e \tan 2n}{\cos 2N} - \log \tan(45^\circ + n) \right\}.$$

105.

Zur Erläuterung dieser Rechnungsvorschriften will ich das Beispiel aus den beiden in den Artikel 23, 24, 25, 26 nach denselben hyperbolischen Elementen gerechneten Orte vollenden. Es sei daher $v' - v = 48^\circ 12' 0''$, oder (118) $f = 24^\circ 6' 0''$, $\log r = 0,033\,3585$, $\log r' = 0,200\,8541$, $t = 51,497\,88$ Tage. — Hieraus findet sich $\omega = 2^\circ 45' 28'' 47$, $l = 0,0579\,6039$, $\frac{m}{\frac{1}{3} + l}$ oder der genäherte

Werth von $h = 0,0644371$; hieraus, mittelst Tafel II, $\log yy = 0,0560848$, $\frac{mm}{yy} = 0,05047454$, $z = 0,00748585$, dem in Tafel III entspricht $\zeta = 0,0000032$. Daraus folgt der verbesserte Werth $h = 0,06443691$, $\log yy = 0,0560846$, $\frac{mm}{yy} = 0,05047456$, $z = 0,00748583$, welche Werthe, indem ζ dadurch nicht verändert wird, keiner weiteren Verbesserung bedürfen. Nun steht die Rechnung der Elemente so:

$$\begin{aligned} \log z & \dots\dots\dots 7,874\ 2399 \\ \log(1+z) & \dots\dots\dots 0,003\ 2389 \\ \log V(z+zz) & \dots\dots\dots 8,938\ 7394 \\ \log 2 & \dots\dots\dots 0,301\ 0300 \\ \log \tan 2n & \dots\dots\dots 9,239\ 7694 \\ 2n & = 9^\circ 51' 11'' 816 \\ n & = 4\ 55\ 35,908 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \tan f & \dots\dots\dots 9,650\ 6199 \\ \log \frac{1}{2} \tan 2n & \dots\dots\dots 8,938\ 7394 \\ C. \log(l-z) & \dots\dots\dots 1,296\ 9275 \\ \log \tan \psi & \dots\dots\dots 9,886\ 2868 \\ \psi & = 37^\circ 34' 59'' 77 \\ & (\text{es müsste sein} = 37^\circ 35' 0'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin f & \dots\dots\dots 9,611\ 0118 \\ \log Vrr' & \dots\dots\dots 0,117\ 1063 \\ C. \log \tan 2n & \dots\dots\dots 0,760\ 2306 \\ \log \beta & \dots\dots\dots 0,488\ 3487 \\ \log \tan \psi & \dots\dots\dots 9,886\ 2868 \\ \log \alpha & \dots\dots\dots 0,602\ 0619 \\ \log \rho & \dots\dots\dots 0,374\ 6355 \\ (\text{es müssten sein} = 0,602\ 0600 \\ & \text{und } 0,374\ 6356) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C. \log \frac{1}{2} \sin f & \dots\dots\dots 0,690\ 0182 \\ \log \tan 2\omega & \dots\dots\dots 8,984\ 8318 \\ C. \log \cos 2\omega & \dots\dots\dots 0,002\ 0156 \\ \log \sin \psi & \dots\dots\dots 9,785\ 2685 \\ \log \tan 2N & \dots\dots\dots 9,462\ 1341 \\ 2N & = 16^\circ 9' 46'' 253 \\ N & = 8\ 4\ 53,127 \\ N-n & = 3\ 9\ 17,219 \\ N+n & = 13\ 0\ 29,035 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin(N-n) & \dots\dots\dots 8,740\ 6274 \\ C. \log \cos(N+n) & \dots\dots\dots 0,011\ 2902 \\ \log \cot \frac{1}{2} \psi & \dots\dots\dots 0,468\ 1829 \\ \log \tan \frac{1}{2} v & \dots\dots\dots 9,220\ 1005 \\ \frac{1}{2} v & = 9^\circ 25' 29'' 97 \\ v & = 18\ 50\ 59,94 \\ (\text{es müsste sein} = 18^\circ 51' 0'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin(N+n) & \dots\dots\dots 9,352\ 3527 \\ C. \log \cos(N-n) & \dots\dots\dots 0,000\ 6587 \\ \log \cot \frac{1}{2} \psi & \dots\dots\dots 0,468\ 1829 \\ \log \tan \frac{1}{2} v' & \dots\dots\dots 9,821\ 1943 \\ \frac{1}{2} v' & = 33^\circ 31' 29'' 93 \\ v' & = 67\ 2\ 59,86 \\ (\text{es müsste sein} = 67^\circ 3' 0'') \end{aligned}$$

(119)	$\log e$	0,101 0184	$\log e$	0,101 0184
	$\log \operatorname{tang} 2N$	9,462 1341	$\log \operatorname{tang} 2n$	9,239 7694
	$C. \log \cos 2n$	0,006 4539	$C. \log \cos 2N$	0,017 5142
		9,569 6064		9,358 3020
	Zahl =	0,3711 9863	Zahl =	0,2281 9284
	$\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^\circ + N) = \dots$		$\log \operatorname{hyp} \operatorname{tang}(45^\circ + n) = \dots$	
	0,2859 1251	0,1728 2621
	Unterschied =	0,0852 8612	Unterschied =	0,0553 6663
	\log	8,930 8783	\log	8,743 2480
	$\frac{3}{2} \log \alpha$	0,903 0928	$\frac{3}{2} \log \alpha$	0,903 0928
	$C. \log k$	1,764 4186	$C. \log k$	1,764 4186
	$\log T$	1,598 3897	$\log 2$	0,301 0300
	$T =$	39,663 38	$\log t$	1,711 7894
			$t =$	51,497 88

Es ist daher der Periheldurchgang von der dem ersten Orte entsprechenden Zeit um 13,91444 Tage entfernt, von der dem zweiten Orte entsprechenden Zeit um 65,41232 Tage. Die geringen Unterschiede der hier herausgebrachten Elemente von denen, nach welchen die angenommenen Orte berechnet waren, rühren von der beschränkten Genauigkeit der Tafeln her.

106.

Bei Abhandlung der vorzüglichsten, für die Bewegung der Himmelskörper in Kegelschnitten in Betracht kommenden Relationen darf nicht mit Stillschweigen übergangen werden der elegante Ausdruck der Zeit durch die grosse Halbaxe, durch die Summe $r+r'$ und durch die, die beiden Orte verbindende Chorde. Für die Parabel scheint diese Formel zwar zuerst von Euler erfunden zu sein (Miscell. Berlin. T. VII, p. 20), der solche jedoch später ausser Acht gelassen und auch nicht auf die Ellipse und Hyperbel ausgedehnt hat. Es irren daher diejenigen, welche diese Formel dem Lambert zuschreiben, wenn sich diesem Geometer auch nicht das Verdienst absprechen lässt, diesen der Vergessenheit anheimgefallenen Ausdruck selbständig erforscht und auf die übrigen Kegelschnitte ausgedehnt zu haben. Obgleich dieser Gegenstand schon

von mehren Geometern behandelt ist, so werden aufmerksame Leser doch die nachfolgende Auseinandersetzung nicht für überflüssig erkennen. Ich beginne mit der elliptischen Bewegung.

Vor allen Dingen bemerke ich, dass der um die Sonne beschriebene Winkel $2f'$ (Art. 88, woraus ich auch die übrigen Zeichen entnehme) innerhalb 360° angenommen werden kann. Denn es ist klar, dass, wenn dieser Winkel um 360° vermehrt wird, die Zeit um eine Revolution oder $\frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot 360^\circ}{k} = a^{\frac{3}{2}} \times 365,25$ Tage wächst. Bezeichnet man nun die Chorde mit ϱ , so wird offenbar (120)

$$\varrho \varrho = (r' \cos v' - r \cos v)^2 + (r' \sin v' - r \sin v)^2,$$

und daher nach den Gleichungen VIII und IX des Art. 8

$$\begin{aligned} \varrho \varrho &= a a (\cos E' - \cos E)^2 + a a \cos^2 (\sin E' - \sin E)^2 \\ &= 4 a a \sin^2 (\sin G^2 + \cos^2 \cos G^2) = 4 a a \sin^2 (1 - e \cos G^2). \end{aligned}$$

Nun führt man einen Hüllswinkel h in der Art ein, dass $\cos h = e \cos G$, und setzt (um alle Zweideutigkeit zu heben) voraus, dass h zwischen 0 und 180° genommen werden, und daher $\sin h$ eine positive Grösse sein müsse. Weil also auch g zwischen denselben Grenzen liegt (denn wenn $2g$ zu 360° oder darüber hinaus anwächst, so würde die Bewegung um die Sonne eine ganze Revolution oder mehr betragen), so folgt aus der vorigen Gleichung von selbst $\varrho = 2 a \sin g \sin h$, wenn nämlich die Chorde als eine positive Grösse angesehen wird. Da man ferner hat $r + r' = 2 a (1 - e \cos g \cos G) = 2 a (1 - \cos g \cos h)$, so ist klar, dass, wenn $h - g = \delta$, $h + g = \varepsilon$ gesetzt wird, entsteht:

$$[1] \quad r + r' - \varrho = 2 a (1 - \cos \delta) = 4 a \sin \frac{1}{2} \delta^2$$

$$[2] \quad r + r' + \varrho = 2 a (1 - \cos \varepsilon) = 4 a \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

Endlich hat man $kt = a^{\frac{3}{2}} (2g - 2e \sin g \cos G) = a^{\frac{3}{2}} (2g - 2 \sin g \cos h)$, oder

$$[3] \quad kt = a^{\frac{3}{2}} (\varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta)).$$

Man kann daher nach den Gleichungen [1] und [2] die Winkel δ und ε aus $r + r'$, ϱ und a bestimmen, und deshalb kann auch aus denselben Grössen, mittelst der Gleichung [3], die Zeit t bestimmt werden.

Diese Formel lässt sich auch folgendermaassen darstellen:

$$kt = a \left\{ \arccos \frac{2a - (r + r') - e}{2a} - \sin \arccos \frac{2a - (r + r') - e}{2a} \right. \\ \left. - \arccos \frac{2a - (r + r') + e}{2a} + \sin \arccos \frac{2a - (r + r') + e}{2a} \right\}.$$

Es bleibt jedoch bei Bestimmung der Winkel δ , ϵ aus ihren Cosinussen eine Zweideutigkeit zurück, die näher betrachtet werden muss. Zwar ist von selbst klar, dass δ innerhalb -180° und $+180^\circ$ liegen müsse, sowie ϵ zwischen 0 und 360° . Aber auch so liesse jeder Winkel eine doppelte Bestimmung, und die daraus hervorgehende Zeit mithin eine vierfache zu. Man hat inzwischen aus Gleichung δ , Art. 88: $\sqrt{rr'} = a(\cos g - \cos h) = 2a \sin \frac{1}{2} \delta \sin \frac{1}{2} \epsilon$. Da nun $\sin \frac{1}{2} \epsilon$ notwendig eine positive Grösse wird, so kam daraus geschlossen werden, dass $\cos f$ und $\sin \frac{1}{2} \delta$ notwendig dasselbe Zeichen führen, und dass daher δ innerhalb 0 und 180° , oder innerhalb -180° und 0 genommen werden müsse, je nachdem $\cos f$ positiv oder negativ wird, d. h. je nachdem die heliocentrische Bewegung $2f$ innerhalb oder über 180° ist. Uebrigens ist klar, dass für $2f = 180^\circ$, δ notwendig $= 0$ sein muss.

(121) Auf diese Weise ist also δ vollständig bestimmt. — Aber die Bestimmung des Winkels ϵ bleibt notwendig zweideutig, so dass stets für die Zeit zwei Werthe herauskommen, von denen sich, falls solches nicht anderweit bekannt wird, nicht entscheiden lässt, welcher der wahre ist. Den Grund dieser Erscheinung erkennt man übrigens leicht. Denn es lassen sich bekanntlich durch zwei gegebene Punkte zwei verschiedene Ellipsen beschreiben, welche beide in denselben gegebenen Punkte ihren Brennpunkt haben und zugleich dieselbe grosse Halbachse.*) Offenbar aber wird die Bewegung von dem ersten Orte zum zweiten in diesen Ellipsen in ungleichen Zeiten vollendet.

107.

Bezeichnet man mit χ irgend einen Bogen zwischen -180° und $+180^\circ$, und mit s den Sinus des Bogens $\frac{1}{2}\chi$, so ist bekanntlich

*) Beschreibt man aus dem ersten Orte mit einem Halbmesser $2a - r$ einen Kreis, und aus dem zweiten Orte einen Kreis mit dem Halbmesser $2a - r'$, so liegt der zweite Brennpunkt der Ellipse in dem Einschnittpunkte dieser Kreise. Weil deshalb, allgemein gesprochen, stets zwei Einschnittpunkte gegeben werden, so geben auch zwei verschiedene Ellipsen hervor.

$$\frac{1}{2} \chi = s + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} s^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} s^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^7 + \text{etc.}$$

Ferner wird

$$\frac{1}{2} \sin \chi = s \sqrt{1 - s^2} = s - \frac{1}{2} s^3 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} s^5 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^7 - \text{etc.}$$

und deshalb

$$\chi - \sin \chi = 4 \left(\frac{1}{5} s^5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} s^3 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} s^7 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^9 + \text{etc.} \right)$$

In diese Reihe substituire ich für s successiv $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{a}}$ und $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{a}}$

und multiplicire das Resultat mit $a^{\frac{3}{2}}$; so entstehen respect. die Reihen

$$\frac{1}{6} (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{a} (r+r'-\varrho)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{17 \cdot 9 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^2} (r+r'-\varrho)^{\frac{7}{2}} +$$

$$\frac{1}{15 \cdot 13 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^3} (r+r'-\varrho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{6} (r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{a} (r+r'+\varrho)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{17 \cdot 9 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^2} (r+r'+\varrho)^{\frac{7}{2}} +$$

$$\frac{1}{15 \cdot 13 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a^3} (r+r'+\varrho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

Deren Summen bezeichne ich mit T und U . Man sieht ohne Weiteres, da

$2 \sin \frac{1}{2} \delta = \pm \sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{a}}$ (wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nach-

dem $2f$ innerhalb oder über 180° hinaus liegt), dass $a^{\frac{3}{2}}(\delta - \sin \delta) = \pm T$ (wobei das Zeichen ebenso bestimmt wird). Auf dieselbe Weise wird, wenn für ε (122)

der kleinere, innerhalb 180° belegene Werth genommen wird, entstehen $a^{\frac{3}{2}}(\varepsilon - \sin \varepsilon) = U$; nimmt man aber den andern Werth, der das Complement des ersteren zu 360° ist, so wird offenbar $a^{\frac{3}{2}}(\varepsilon - \sin \varepsilon) = a^{\frac{3}{2}} 360^\circ - U$. Hieraus erhält man zwei Werthe für die Zeit t

$$\frac{U \mp T}{k} \quad \text{und} \quad \frac{a^{\frac{3}{2}} 360^\circ}{k} - \frac{U \pm T}{k}.$$

108.

Betrachtet man die Parabel als eine Ellipse, deren grosse Axe unendlich gross ist, so geht der im vorhergehenden Artikel für die Zeit

gefundenen Ausdruck über in: $\frac{1}{\delta k} \{(r+r'+\varrho)^{\frac{1}{2}} - (r+r'-\varrho)^{\frac{1}{2}}\}$. Da aber diese Ableitung der Formel vielleicht einigen Zweifeln ausgesetzt erscheinen könnte, so will ich eine andere, von der Ellipse unabhängige entwickeln.

Setzt man der Kürze wegen $\tan \frac{1}{2}v = \vartheta$, $\tan \frac{1}{2}v' = \vartheta'$, so wird $r = \frac{1}{2}p(1 + \vartheta\vartheta)$, $r' = \frac{1}{2}p(1 + \vartheta'\vartheta')$, $\cos v = \frac{1 - \vartheta\vartheta}{1 + \vartheta\vartheta}$, $\cos v' = \frac{1 - \vartheta'\vartheta'}{1 + \vartheta'\vartheta'}$, $\sin v = \frac{2\vartheta}{1 + \vartheta\vartheta}$, $\sin v' = \frac{2\vartheta'}{1 + \vartheta'\vartheta'}$. Hieraus entsteht

$$r' \cos v' - r \cos v = \frac{1}{2}p(\vartheta\vartheta' - \vartheta'\vartheta), \quad r' \sin v' - r \sin v = p(\vartheta' - \vartheta),$$

und daher $\varrho\varrho = \frac{1}{4}pp(\vartheta' - \vartheta)^2(4 + (\vartheta' + \vartheta)^2)$. Man sieht nun leicht, dass $\vartheta' - \vartheta = \frac{\sin f}{\cos \frac{1}{4}e \cos \frac{1}{4}v'}$ eine positive Grösse ist. Setzt man daher

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\vartheta' + \vartheta)^2} = \eta, \quad \text{so ist } \varrho = p(\vartheta' - \vartheta)\eta; \quad \text{ferner wird}$$

$$r + r' = \frac{1}{2}p(2 + \vartheta\vartheta + \vartheta'\vartheta') = p(\eta\eta + \frac{1}{4}(\vartheta' - \vartheta)^2);$$

man hat deshalb

$$\frac{r+r'+\varrho}{p} = (\eta + \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta))^2$$

$$\frac{r+r'-\varrho}{p} = (\eta - \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta))^2.$$

Aus der ersten Gleichung leitet man ohne Weiteres ab

$$+ \sqrt{\frac{r+r'+\varrho}{p}} = \eta + \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta),$$

weil η und $\vartheta' - \vartheta$ positive Grössen sind; aber da $\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta)$ kleiner oder grösser ist als η , je nachdem $\eta\eta - \frac{1}{4}(\vartheta' - \vartheta)^2 = 1 + \vartheta\vartheta' = \frac{\cos f}{\cos \frac{1}{4}e \cos \frac{1}{4}v'}$ positiv oder negativ, so muss man aus der zweiten Gleichung offenbar schliessen:

$$(123) \quad \pm \sqrt{\frac{r+r'-\varrho}{p}} = \eta - \frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta),$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem der um die Sonne beschriebene Winkel innerhalb 180° liegt, oder über 180° hinaus geht.

Aus der Gleichung, welche in Art. 98 der zweiten folgt, hat man ferner:

$$\frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} = (\mathcal{G}' - \mathcal{G})(1 + \mathcal{G}\mathcal{G}') + \frac{1}{3}(\mathcal{G}' - \mathcal{G})^3 = (\mathcal{G}' - \mathcal{G})(\eta\eta + \frac{1}{12}(\mathcal{G}' - \mathcal{G})^2) \\ = \frac{1}{3}(\eta + \frac{1}{2}(\mathcal{G}' - \mathcal{G}))^2 - \frac{1}{3}(\eta - \frac{1}{2}(\mathcal{G}' - \mathcal{G}))^2,$$

woraus von selbst folgt:

$$kt = \frac{1}{3}\{(r+r'+\varrho)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-\varrho)^{\frac{3}{2}}\},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $2f$ innerhalb oder über 180° hinaus liegt.

109.

Nimmt man in der Hyperbel die Symbole α , C , c in derselben Bezeichnung wie in Art. 99, so hat man aus den Gleichungen VIII, IX des Art. 21:

$$r' \cos v' - r \cos v = -\frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{c}\right)\left(C - \frac{1}{C}\right)\alpha$$

$$r' \sin v' - r \sin v = \frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{c}\right)\left(C + \frac{1}{C}\right)\alpha V(ee - 1) \quad \text{und daher}$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\alpha\left(c - \frac{1}{c}\right)V\left(ee\left(C + \frac{1}{C}\right)^2 - 4\right).$$

Ich setze voraus, dass γ eine Grösse ist, welche durch die Gleichung $\gamma + \frac{1}{\gamma} = e\left(C + \frac{1}{C}\right)$ bestimmt wird, und da letzterer offenbar durch zwei einander reciproke Werthe Genüge geschieht, so adoptire ich davon denjenigen, der grösser als Eins ist. Dann wird

$$\varrho = \frac{1}{2}\alpha\left(c - \frac{1}{c}\right)\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Ferner wird

$$r + r' = \frac{1}{2}\alpha\left(e\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(C + \frac{1}{C}\right) - 4\right) = \frac{1}{2}\alpha\left(\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) - 4\right),$$

und deshalb

$$r + r' + \varrho = \alpha\left(Vc\gamma - V\frac{1}{c\gamma}\right)^2$$

$$r + r' - \varrho = \alpha\left(V\frac{\gamma}{c} - V\frac{c}{\gamma}\right)^2.$$

Setzt man daher $V \frac{r+r'+e}{4a} = m$, $V \frac{r+r'-e}{4a} = n$, so wird nothwendig

(124) $V c \gamma - V \frac{1}{c \gamma} = 2m$. Um die Frage zu entscheiden, ob $V \frac{\gamma}{c} - V \frac{c}{\gamma} = +2n$ oder $= -2n$ wird, muss man untersuchen, ob γ grösser oder kleiner ist als c . Aber aus Gleichung 8 des Art. 99 folgt leicht, dass der erstere Fall Statt habe, wenn $2f$ innerhalb 180° liegt, der zweite, sobald $2f$ über 180° hinausgeht. Schliesslich hat man aus demselben Artikel

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right) - 2 \log c = \frac{1}{2} \left(c \gamma - \frac{1}{c \gamma} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{c} - \frac{c}{\gamma} \right)$$

$$- \log c \gamma + \log \frac{\gamma}{c} = 2m V(1+mm) \mp 2n V(1+nn) - 2 \log(V(1+mm)+m)$$

$$\pm 2 \log(V(1+nn)+n),$$

wobei die unteren Zeichen immer den Fall bezielen, wo $2f > 180^\circ$. Nun wird $\log(V(1+mm)+m)$ leicht in folgende Reihe entwickelt:

$$m - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^5 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^7 + \text{etc.}$$

Dies erhält man von selbst aus:

$$d \log(V(1+mm)+m) = \frac{dm}{V(1+mm)}.$$

Daraus folgt:

$$2mV(1+mm) - 2 \log(V(1+mm)+m) = 4 \left(\frac{1}{3} m^3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} m^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^7 - \text{etc.} \right)$$

und ebenso eine ganz ähnliche Formel, falls m mit n vertauscht wird. Hieraus endlich geht hervor, dass, wenn man setzt:

$$T = \frac{1}{6} (r+r'-e)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{a} (r+r'-e)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{1732} \cdot \frac{1}{a^2} (r+r'-e)^{\frac{7}{2}} -$$

$$\frac{5}{18432} \cdot \frac{1}{a^3} (r+r'-e)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

$$U = \frac{1}{6} (r+r'+e)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{a} (r+r'+e)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{1732} \cdot \frac{1}{a^2} (r+r'+e)^{\frac{7}{2}} -$$

$$\frac{5}{18432} \cdot \frac{1}{a^3} (r+r'+e)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.},$$

sich ergibt $kt = U \mp T$, welche Ausdrücke mit den in Art. 107

erwähnten allenthalben übereinkommen, wenn dort a in $-a$ umgeändert wird.

Uebrigens sind diese Reihen sowohl für Ellipse als Hyperbel zum praktischen Gebrauche besonders dann bequem, wenn a oder α einen sehr grossen Werth erhalten, d. h. wenn der Kegelschnitt bedeutend zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigt. In diesem Falle könnte man sie auch zur Auflösung des oben behandelten Problems (Art. 85—105) anwenden. Weil aber, nach meinem Urtheile, sie auch dann nicht einmal die Kürze der vorhin gezeigten Auflösung gewähren, so halte ich mich bei der weiteren Auseinandersetzung dieser Methode nicht auf.

Vierter Abschnitt.

Relationen zwischen mehrern Orten im Raume.

110.

Die in diesem Abschnitte zu betrachtenden Relationen sind von dem Naturell der Bahn unabhängig und stützen sich lediglich auf die Voraussetzung, dass alle Punkte der Bahn in derselben Ebene mit der Sonne liegen. Wir wollen hier nur die einfachsten dieser Relationen berühren, und die complicirteren und speciellern zum zweiten Buche aufsparen.

Die Lage der Bahnebene ist durch zwei Orte des Himmelskörpers im Raume völlig bestimmt, sobald nur diese Orte nicht in derselben geraden Linie mit der Sonne liegen. Da sich nun der Ort eines Punktes im Raume vorzüglich auf zwei Arten angeben lässt, so bieten sich daraus zwei Aufgaben zur Lösung dar.

Setzen wir zuerst voraus, dass zwei Orte durch die mit resp. λ , λ' , β , β' bezeichneten heliocentrischen Längen und Breiten gegeben seien; die Abstände von der Sonne gehen nicht in die Rechnung ein. Wenn dann die Länge des aufsteigenden Knotens mit Ω , und die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik mit i bezeichnet wird, so ist

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan i \sin(\lambda - \Omega) \\ \tan \beta' &= \tan i \sin(\lambda' - \Omega).\end{aligned}$$

Die Bestimmung der Unbekannten Ω und $\tan i$ wird hier auf die in Art. 78 II. betrachtete Aufgabe zurückgeführt. Man hat daher nach Anleitung der ersten Auflösung

$$\begin{aligned}\tan i \sin(\lambda - \Omega) &= \tan \beta \\ \tan i \cos(\lambda - \Omega) &= \frac{\tan \beta' - \tan \beta \cos(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda' - \lambda)}.\end{aligned}$$

Zufolge der dritten Auflösung aber findet sich der Ω durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda' - \Omega\right) = \frac{\sin(\beta' + \beta) \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}{\sin(\beta' - \beta)},$$

und noch etwas bequemer, wenn die Winkel β , β' unmittelbar, nicht aber durch die Logarithmen der Tangenten gegeben sind. Zur Bestimmung von i muss man jedoch auf eine der Formeln

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin(\lambda - \Omega)} = \frac{\operatorname{tang} \beta'}{\sin(\lambda' - \Omega)}$$

recurren. Im Uebrigen ist die Zweideutigkeit bei Bestimmung des Winkels $\lambda - \Omega$, oder $\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda' - \Omega$ durch die Tangente so zu entscheiden, dass $\operatorname{tang} i$ positiv oder negativ wird, je nachdem die auf die Ecliptik projicirte Bewegung eine directe oder rückläufige ist. — Diese Ungewissheit kann daher nur dann gehoben werden, falls es bekannt, von welcher Seite her der Himmelskörper vom ersten zum zweiten Orte gelangt ist; wenn man dies daher nicht wüsste, so würde es in der That unmöglich sein, den aufsteigenden Knoten vom niedersteigenden zu unterscheiden. (126)

Nach Auffindung der Winkel Ω und i werden die Argumente der Breite u , u' durch die Formeln

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang}(\lambda - \Omega)}{\cos i}, \quad \operatorname{tang} u' = \frac{\operatorname{tang}(\lambda' - \Omega)}{\cos i}$$

ermittelt, die im ersten oder zweiten Halbzirkel zu nehmen, je nachdem die entsprechenden Breiten nördlich oder südlich sind. Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu, von denen man, falls es beliebt, die eine oder andere zur Prüfung der Rechnung brauchen kann:

$$\cos u = \cos \beta \cos(\lambda - \Omega), \quad \cos u' = \cos \beta' \cos(\lambda' - \Omega);$$

$$\sin u = \frac{\sin \beta}{\sin i}, \quad \sin u' = \frac{\sin \beta'}{\sin i};$$

$$\sin(u' + u) = \frac{\sin(\lambda + \lambda' - 2\Omega) \cos \beta \cos \beta'}{\cos i}, \quad \sin(u' - u) = \frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cos \beta \cos \beta'}{\cos i}.$$

III.

Nehmen wir zweitens an, dass die beiden Orte gegeben seien durch ihre Abstände von drei, in der Sonne unter rechten Winkeln sich schneidenden

Ebenen. Bezeichnen wir diese Abstände für den ersten Ort mit x, y, z , für den zweiten mit x', y', z' , und setzen voraus, dass die dritte Ebene die Ecliptik selbst sei, dass aber die positiven Pole der ersten und zweiten Ebene in der Länge N und $90^\circ + N$ liegen. Dann wird nach Art. 53, wenn man die beiden Radien Vectors mit r, r' bezeichnet, sein:

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos(N-\Omega) + r \sin u \sin(N-\Omega) \cos i \\ y &= r \sin u \cos(N-\Omega) \cos i - r \cos u \sin(N-\Omega) \\ z &= r \sin u \sin i \\ x' &= r' \cos u' \cos(N-\Omega) + r' \sin u' \sin(N-\Omega) \cos i \\ y' &= r' \sin u' \cos(N-\Omega) \cos i - r' \cos u' \sin(N-\Omega) \\ z' &= r' \sin u' \sin i. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} zy' - yz' &= rr' \sin(u' - u) \sin(N-\Omega) \sin i \\ xz' - zx' &= rr' \sin(u' - u) \cos(N-\Omega) \sin i \\ xy' - yx' &= rr' \sin(u' - u) \cos i. \end{aligned}$$

Aus Combination der ersten mit der zweiten Formel bekommt man $N-\Omega$, und $rr' \sin(u' - u) \sin i$. Hieraus und aus der dritten Formel erhält man i , und $rr' \sin(u' - u)$.

Insofern der Ort, dem die Coordinaten x', y', z' entsprechen, als der der Zeit nach spätere angenommen wird, muss u' grösser als u werden. Falls (127) es deshalb überher bekannt ist, ob der zwischen dem ersten und zweiten Orte um die Sonne beschriebene Winkel kleiner oder grösser ist, als zwei rechte, so müssen $rr' \sin(u' - u) \sin i$ und $rr' \sin(u' - u)$ im ersten Falle positive, im zweiten negative Grössen sein. Es lässt sich daher dann $N-\Omega$ ohne Zweideutigkeit bestimmen, und zugleich aus dem Zeichen der Grösse $xy' - yx'$ entscheiden, ob die Bewegung recht- oder rückläufig ist. Umgekehrt lässt sich, falls die Richtung der Bewegung bekannt ist, aus dem Zeichen der Grösse $xy' - yx'$ entscheiden, ob $u' - u$ kleiner oder grösser als 180° genommen werden muss. Wenn aber sowohl die Richtung der Bewegung, als die Beschaffenheit des um die Sonne beschriebenen Winkels gänzlich unbekannt ist, so kann man offenbar zwischen dem aufsteigenden und niedersteigenden Knoten nicht unterscheiden.

Uebrigens sieht man leicht, dass, sowie $\cos i$ der Cosinus der Neigung der Bahnebene gegen die dritte Ebene ist, so $\sin(N-\Omega)\sin i$ und $\cos(N-\Omega)\sin i$ respective die Cosinus der Neigungen der Bahnebene gegen die erste und zweite Ebene sind; sowie dass $rr'\sin(u'-u)$ die doppelte Fläche des zwischen den beiden Radien Vektoren eingeschlossenen Dreiecks, und dass endlich $zy'-yz', xz'-zx', xy'-yx'$ die doppelte Fläche der Projectionen desselben Dreiecks auf die einzelnen Ebenen ausdrückt.

Schliesslich kann offenbar die dritte Ebene statt der Ecliptik auch jedwede andere Ebene sein, wenn nur alle Grössen, die durch ihre Beziehungen auf die Ecliptik definnirt sind, ebenso auf diese dritte beliebige Ebene bezogen werden.

112.

Es seien x'', y'', z'' die Coordinaten eines dritten Orts, u'' dessen Argument der Breite, r'' der Radius Vector. — Dabei sollen die Grössen $r'r''\sin(u''-u)$, $rr''\sin(u''-u)$, $rr'\sin(u'-u)$, welche die doppelten Dreiecksflächen zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vector sind, resp. mit n, n', n'' bezeichnet werden. Man wird daher für x'', y'', z'' ähnliche Ausdrücke haben, wie die in dem vorangehenden Artikel für x, y, z und x', y', z' gegebenen, woraus sich mit Hilfe des Satzes I, Art. 78 leicht folgende Gleichungen ableiten lassen:

$$\begin{aligned} 0 &= nx - n'x' + n''x'' \\ 0 &= ny - n'y' + n''y'' \\ 0 &= nz - n'z' + n''z'' \end{aligned}$$

Es seien nun die jenen drei Orten des Himmelskörpers entsprechenden geocentrischen Längen $\alpha, \alpha', \alpha''$ und die geocentrischen Breiten β, β', β'' ; die auf die Ecliptik projecirten Abstände von der Erde $\delta, \delta', \delta''$; ferner die entsprechenden heliocentrischen Längen der Erde L, L', L'' ; die Breiten B, B', B'' , die ich nicht = 0 setze, sowohl um auf die Parallaxe Rücksicht nehmen, als um, falls es beliebt, statt der Ecliptik irgend eine andere Ebene wählen zu können. Endlich seien D, D', D'' die auf die Ecliptik projecirten (128)

Abstände der Erde von der Sonne. Wenn man sodann x, y, z durch $L, B, D, \alpha, \beta, \delta$ ausdrückt, und in ähnlicher Weise die auf den zweiten und dritten Ort sich beziehenden Coordinaten, so nehmen die vorangehenden Gleichungen folgende Gestalt an:

$$[1] 0 = n(\delta \cos \alpha + D \cos L) - n'(\delta' \cos \alpha' + D' \cos L') + n''(\delta'' \cos \alpha'' + D'' \cos L'')$$

$$[2] 0 = n(\delta \sin \alpha + D \sin L) - n'(\delta' \sin \alpha' + D' \sin L') + n''(\delta'' \sin \alpha'' + D'' \sin L'')$$

$$[3] 0 = n(\delta \tan \beta + D \tan B) - n'(\delta' \tan \beta' + D' \tan B') + n''(\delta'' \tan \beta'' + D'' \tan B'').$$

Falls hier α, β, D, L, B und die analogen Grössen für die beiden übrigen Orte als bekannt angesehen, und die Gleichungen mit n , oder n' , oder n'' dividirt werden, so bleiben fünf Unbekannte übrig, von denen man also zwei eliminiren, oder durch zwei beliebige die übrigen drei bestimmen kann. Auf diese Weise bahnen jene drei Gleichungen den Weg zu sehr vielen wichtigen Ableitungen, von denen ich einige der vorzüglichsten hier entwickeln will.

113.

Um nicht durch die Länge der Formeln überladen zu werden, gebrauche ich die nachfolgenden Abkürzungen. Zuerst bezeichne ich die Grösse

$$\tan \beta \sin(\alpha'' - \alpha') + \tan \beta' \sin(\alpha - \alpha'') + \tan \beta'' \sin(\alpha' - \alpha)$$

mit (0.1.2). Wenn in jenen Ausdruck für die einem jeden geocentrischen Orte entsprechende Länge und Breite, diejenige Länge und Breite substituirt wird, welche einem jeden der drei heliocentrischen Orte der Erde entspricht, so werde ich in dem Zeichen (0.1.2) die dem ersteren entsprechende Zahl mit derjenigen römischen Zahl vertauschen, welche dem zweiten entspricht. So z. B. soll das Merkzeichen (0.1.I) die Grösse

$$\tan \beta \sin(L' - \alpha') + \tan \beta' \sin(\alpha - L) + \tan \beta'' \sin(\alpha' - \alpha)$$

ausdrücken, und das Merkzeichen (0.0.2) folgende:

$$\tan \beta \sin(\alpha'' - L) + \tan \beta' \sin(\alpha - \alpha'') + \tan \beta'' \sin(L - \alpha).$$

Auf ähnliche Weise verändere ich das Merkzeichen, falls in den ersten Ausdruck statt zweier geocentrischen Längen und Breiten irgend zwei heliocentrische der Erde

substituirt werden. Wenn zwei Längen und Breiten in denselben Ausdruck eingehen und nur unter sich vertauscht werden, so muss man auch in dem Merkzeichen die entsprechenden Zahlen vertauschen. Dadurch wird aber der Werth selbst nicht verändert, sondern es wird nur aus dem positiven ein negativer, aus dem negativen ein positiver. So z. B. wird

$$(0.1.2) = -(0.2.1) = (1.2.0) = -(1.0.2) = (2.0.1) = -(2.1.0).$$

Alle so entstehenden Grössen lassen sich also auf folgende neunzehn zurückführen:

(0.1.2), (0.1.0), (0.1.I), (0.1.II), (0.0.2), (0.I.2), (0.II.2), (129)
 (0.1.2), (1.1.2), (II.1.2), (0.0.I), (0.0.II), (0.I.II), (1.0.I),
 (1.0.II), (1.I.II), (2.0.I), (2.0.II), (2.I.II), welchen als zwanzigste
 hinzutritt (0.I.II).

Uebrigens lässt sich leicht zeigen, dass diese einzelnen Ausdrücke, wenn man sie mit dem Producte aus den drei Cosinussen der eingehenden Breiten multiplicirt, dem sechsfachen Volum einer Pyramide gleich werden, deren Scheitel in der Sonne liegt, deren Basis aber das Dreieck ist, welches von denjenigen drei Punkten der Himmelskugel gebildet wird, die den in jenen Ausdruck eingehenden Orten entsprechen, wobei der Halbmesser der Kugel = 1 gesetzt wird. So oft daher diese drei Orte in demselben grössten Kreise liegen, muss der Werth des Ausdrucks = 0 werden. Da dies nun bei den drei heliocentrischen Orten der Erde immer Statt findet, wenn man auf die Parallaxen und die durch Störungen entstandenen Breiten der Erde keine Rücksicht nimmt, d. h. wenn man die Erde in die Ebene der Ecliptik selbst setzt, so wird unter dieser Voraussetzung stets (0.I.II) = 0, welche Gleichung identisch ist, falls als dritte Ebene die Ecliptik selbst genommen wird. Sobald übrigens sowohl B , als B , als $B' = 0$, so werden alle jene Ausdrücke, mit Ausnahme des ersten, viel einfacher; denn dieselben werden vom zweiten bis zum zehnten aus je zwei Theilen zusammengesetzt sein, vom elften bis zum neunzehnten aber aus einem einzigen Gliede bestehen.

114.

Multiplirt man die Gleichung [1] mit $\sin \alpha'' \operatorname{tang} B' - \sin L'' \operatorname{tang} \beta'$, die Gleichung [2] mit $\cos L'' \operatorname{tang} \beta' - \cos \alpha'' \operatorname{tang} B'$, die Gleichung [3] mit $\sin(L'' - \alpha'')$, und addirt die Producte, so erhält man:

$$[4] \quad 0 = n \{(0.2. \text{II}) \delta + (0.2. \text{II}) D\} - n' \{(1.2. \text{II}) \delta' + (1.2. \text{II}) D'\},$$

und auf ähnliche Weise, oder bequemer durch alleinige Vertauschung der Orte unter sich:

$$[5] \quad 0 = n \{(0.1. \text{I}) \delta + (0.1. \text{I}) D\} + n'' \{(2.1. \text{I}) \delta'' + (\text{II}.1. \text{I}) D''\}$$

$$[6] \quad 0 = n' \{(1.0. \text{O}) \delta + (1.0. \text{O}) D\} - n'' \{(2.0. \text{O}) \delta'' + (\text{II}.0. \text{O}) D''\}.$$

Wenn daher das Verhältniss der Grössen n, n' gegeben ist, so lässt sich mit Hilfe der Gleichung [4] aus δ die Grösse δ' bestimmen, oder δ aus δ' , und so in ähnlicher Weise aus den Gleichungen [5] und [6]. Aus Combination der Gleichungen [4], [5] und [6] entsteht folgende:

$$[7] \quad \frac{(0.2. \text{II}) \delta + (0.2. \text{II}) D}{(0.1. \text{I}) \delta + (0.1. \text{I}) D} \times \frac{(1.0. \text{O}) \delta' + (1.0. \text{O}) D'}{(1.2. \text{II}) \delta' + (1.2. \text{II}) D'} \times \frac{(2.1. \text{I}) \delta'' + (\text{II}.1. \text{I}) D''}{(2.0. \text{O}) \delta'' + (\text{II}.0. \text{O}) D''} = -1,$$

mittelt welcher man aus zwei Abständen des Himmelskörpers von der Erde den dritten bestimmen kann. Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Gleichung [7] identisch, und daher zur Bestimmung eines Abstandes aus den beiden übrigen unbrauchbar werde, sobald

$$B = B' = B'' = 0$$

und

$$(130) \quad \left. \begin{aligned} & \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \beta'' \sin(L - \alpha) \sin(L'' - L') \\ & + \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \beta \sin(L' - \alpha) \sin(L - L'') \\ & + \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \beta' \sin(L'' - \alpha'') \sin(L' - L) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Von dieser Unzuträglichkeit frei ist folgende Formel, die sich leicht aus den Gleichungen [1], [2], [3] herleitet:

$$[8] \quad (0.1.2)\delta\delta'\delta'' + (0.1.2)D\delta'\delta'' + (0.1.2)D'\delta\delta'' + (0.1.II)D'\delta\delta' + \\ (0.1.II)D'D'\delta + (0.1.II)DD'\delta + (0.1.2)DD'\delta' + \\ (0.1.II)DD'D'' = 0.$$

Multiplieirt man Gleichung [1] mit $\sin\alpha' \operatorname{tang}\beta'' - \sin\alpha'' \operatorname{tang}\beta'$, die Gleichung [2] mit $\cos\alpha'' \operatorname{tang}\beta' - \cos\alpha' \operatorname{tang}\beta''$, die Gleichung [3] mit $\sin(\alpha'' - \alpha')$ und addirt die Producte, so erhält man:

$$[9] \quad 0 = n\{(0.1.2)\delta + (0.1.2)D\} - n'(I.1.2)D' + n''(II.1.2)D''$$

und ebenso

$$[10] \quad 0 = n(0.O.2)D - n'\{(0.1.2)\delta + (0.1.2)D'\} + n''(0.II.2)D''$$

$$[11] \quad 0 = n(0.1.Q)D - n'(0.1.I)D' + n''\{(0.1.2)\delta' + (0.1.II)D''\}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich aus dem bekannten Verhältnisse zwischen den Grössen n, n', n'' die Abstände $\delta, \delta', \delta''$ bestimmen. Dieser Schluss gilt jedoch nur im Allgemeinen gesprochen und leidet eine Ausnahme, sobald $(0.1.2) = 0$ wird. Denn es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle aus den Gleichungen [8], [9], [10] nichts anderes folgt, als die nothwendige Relation unter den Grössen n, n', n'' , und zwar aus den einzelnen dreien die nämliche. Analoge Einschränkungen in Beziehung auf die Gleichungen [4], [5], [6] werden dem erfahrenen Leser sich von selbst darbieten.

Uebrigens sind alle diese hier entwickelten Schlussfolgerungen unbrauchbar, sobald die Ebene der Bahn mit der Ecliptik zusammenfällt; denn wenn β, β', β'' , und B, B', B'' alle $= 0$ sind, so ist die Gleichung [3] identisch, und mithin auch alle folgenden.

Zweites Buch.

Erforschung der Bahnen der Himmelskörper aus geocentrischen Beobachtungen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen.

115.

Zur vollständigen Bestimmung der Bewegung eines Himmelskörpers in seiner Bahn sind sieben Elemente erforderlich, deren Zahl sich aber um ein Element verringern lässt, wenn die Masse des Körpers entweder bekannt ist, oder vernachlässigt wird. Diese Licenz lässt sich kaum vermeiden bei Bestimmung einer noch gänzlich unbekanntem Bahn, wo man alle zur Ordnung der Störungen gehörenden Grössen so lange bei Seite lassen muss, bis die Massen, von welchen sie abhängen, anderswoher bekannt geworden sind. Da ich nun bei der gegenwärtigen Untersuchung die Masse des Körpers vernachlässige, so reducirt sich die Zahl der Elemente auf sechs, und es ist daher klar, dass zur Bestimmung einer unbekanntem Bahn ebenso viele von den Elementen abhängige, von sich selbst aber gegenseitig unabhängige Grössen erfordert werden. Diese Grössen können keine andere, als von der Erde aus beobachtete Orte des Himmelskörpers sein, und da die einzelnen Orte je zwei Daten liefern, nämlich Länge und Breite, oder Rectascension und Declination, so ist es das Einfachste, drei geocentrische Orte anzunehmen, welche, im Allgemeinen gesprochen, zur Bestimmung der sechs unbekanntem Elemente ausreichen. Diese Aufgabe ist als die wichtigste dieses Werkes zu betrachten, und soll daher mit der höchsten Sorgfalt in diesem Abschnitte abgehandelt werden.

In dem besondern Falle aber, wo die Ebene der Bahn mit der Ecliptik zusammenfällt, und deshalb der Natur der Sache nach alle heliocentrischen und geocentrischen Breiten verschwinden, können die drei verschwindenden geocentrischen Breiten nicht weiter als drei von einander unabhängige Daten betrachtet werden. Es würde daher dann diese Aufgabe unbestimmt bleiben, und den dreien geocentrischen Orten durch unendlich viele Bahnen genügt werden können. In einem solchen Falle müssen mithin nothwendig vier geocentrische Längen gegeben sein, um die vier übrigen unbekanntes Elemente (mit Ausfall der Neigung der Bahn und der Länge des Knotens) zu finden. (132) Obgleich nun „per principium indiscernibilium“ nicht zu erwarten ist, dass jemals in der Natur der Dinge ein solcher Fall sich zutragen werde, so ist doch leicht abzusehen, dass eine Aufgabe, welche beim vollständigen Zusammenfallen der Bahn mit der Ecliptik gänzlich unbestimmt wird, auch bei denjenigen Bahnen, die nur sehr wenig gegen die Ecliptik geneigt sind, wegen der beschränkten Genauigkeit der Beobachtungen beinahe ebenso unbestimmt bleiben müsse, wo selbst die kleinsten Beobachtungsfehler die Bestimmung der Unbekannten gänzlich zu stören vermögen. Um deshalb auch auf diesen Fall Rücksicht zu nehmen, wird man sechs andere Daten auswählen müssen, und ich will daher im zweiten Abschnitte zeigen, wie sich die unbekanntes Bahn aus vier Beobachtungen bestimmen lässt, von denen zwar zwei vollständig sind, die beiden übrigen aber unvollständig, indem entweder die Breiten oder die Declinationen fehlen.

Da endlich alle unsere Beobachtungen wegen der Unvollkommenheit unserer Instrumente und Sinne nur Annäherungen zur Wahrheit sind, so wird eine Bahn, die lediglich auf die sechs absolut nothwendigen Daten sich stützt, noch beträchtlichen Irrthümern unterworfen sein können. Um nun die letzteren, so weit es angeht, zu verkleinern, und so die grösstmögliche Genauigkeit zu erreichen, giebt es keinen andern Weg, als von den besten Beobachtungen so viele als möglich zu sammeln, und die Elemente so anzufassen, dass sie nicht allein diesen oder jenen mit unbedingtster Schärfe sich anschliessen, sondern mit allen so gut als möglich übereinstimmen. Durch welches Verfahren man nun eine solche Uebereinstimmung (wenn auch nirgends eine absolute, aber doch allenthalben eine so nahe als möglich) nach den

Grundsätzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung erlangen kann, will ich im dritten Abschnitte zeigen.

Auf diese Weise wird sich also die Bestimmung der Bahnen, soweit sich in ihnen die Himmelskörper nach den Kepler'schen Gesetzen bewegen, zu aller wünschenswerthen Vollkommenheit erheben. Die letzte Ausfeilung lässt sich freilich erst dann unternehmen, wenn man auch den Störungen Rechnung trägt, mit welchen die übrigen Planeten auf die Bewegung einwirken. Diese Rechnung, soweit sie zu unserem Zwecke gehört, will ich in dem vierten Abschnitte kürzlich anzeigen.

116.

Bevor man die Bestimmung einer Bahn aus geocentrischen Beobachtungen unternimmt, muss man, wenn die grösste Schärfe erfordert wird, gewisse Reductionen wegen Nutation, Präcession, Parallaxe und Aberration anbringen. Bei einer mehr beiläufigen Rechnung kann man diese Kleinigkeiten vernachlässigen.

Die Beobachtungen der Planeten und Cometen werden gewöhnlich so gegeben, dass sie in scheinbaren Rectascensionen und Declinationen ausgedrückt sind, d. h. sie sind auf die scheinbare Lage des Aequators bezogen. (133) Da diese Lage wegen der Nutation und Präcession veränderlich, und daher für verschiedene Beobachtungen verschieden ist, so muss man vor allen Dingen an Stelle der veränderlichen Ebene irgend eine fixe Ebene einführen, zu welchem Zwecke man entweder den Aequator nach seiner mittleren Lage für irgend eine Epoche, oder die Ecliptik wählen kann. Die letztere Ebene pflegt gemeinlich angewendet zu werden, aber auch die erstere Ebene empfiehlt sich durch einige eigentümliche, nicht zu verachtende Vortheile.

Falls es daher beliebt, die Ebene des Aequators zu wählen, so müssen vor Allem die Beobachtungen von der Nutation befreit werden, und sind solche alsdann mit Anbringung der Präcession auf irgend eine beliebige Epoche zu reduciren. Dieses Verfahren kommt ganz mit demjenigen überein, mittelst dessen man aus dem beobachteten Orte eines Fixsterns dessen mittlere Position für eine gegebene Epoche ableitet, und dasselbe bedarf daher hier keiner Erklärung. Hat man aber beschlossen, die Ebene der Ecliptik zu

adoptiren, so erhellet daraus eine doppelte Methode. Es können nämlich entweder aus den für Nutation und Präcession verbesserten Rectascensionen und Declinationen die Längen und Breiten vermöge der mittleren Schiefe abgeleitet werden, woraus man sodann die bereits auf das mittlere Aequinox bezogenen Längen erhält; oder man kann bequemer aus den scheinbaren Rectascensionen und Declinationen, mit Anwendung der scheinbaren Schiefe, die Längen und Breiten berechnen und diese sodann von der Nutation und Aberration befreien.

Aus den Sonnentafeln werden die, den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Erdorte berechnet, die man dann natürlich auf die nämliche Ebene beziehen muss, auf welche die Beobachtungen des Himmelskörpers bezogen sind. Man vernachlässigt daher die Nutation bei Berechnung der Sonnenlänge, reducirt aber sodann diese Länge durch Anbringung der Präcession auf eine feste Epoche, und vermehrt die Länge um 180° ; der Breite der Sonne, wenn es der Mühe werth ist, sie in Rechnung zu nehmen, giebt man das entgegengesetzte Zeichen. Auf diese Weise erhält man die heliocentrische Position der Erde, welche, wenn man den Aequator zur Grundebene gewählt hat, unter Anwendung der mittleren Schiefe in Rectascension und Declination verwandelt wird.

117.

Die auf diese Weise aus den Tafeln berechnete Erdposition bezieht sich auf den Mittelpunkt der Erde, der beobachtete Ort des Himmelskörpers aber auf einen Punkt der Erdoberfläche; eine Nichtübereinstimmung, der sich auf dreierlei Weise Abhilfe schaffen lässt. Man kann nämlich die Beobachtung entweder auf den Erdmittelpunkt reduciren, d. h. sie von der Parallaxe befreien; oder aber den heliocentrischen Ort der Erde auf den Beobachtungsort reduciren, was sich dadurch bewirken lässt, dass man an den, aus den Tafeln berechneten Sonnenort die Parallaxe gehörig anbringt; oder endlich lassen sich auch beide Positionen auf irgend einen dritten Punkt übertragen, als welchen man am bequemsten den Einschmittspunkt des Visions-Radius mit der Ebene der Ecliptik annimmt: die Beobachtung selbst bleibt dann ungeändert, und die Reduction des Erdortes auf diesen Punkt ist im Art. 72 gelehrt. Die (134)

erste Methode lässt sich nur dann anwenden, wenn der Abstand des Himmelskörpers von der Erde wenigstens näherungsweise bekannt ist; dann aber ist sie äusserst bequem und besonders in dem Falle, wenn die Beobachtung im Meridiane angestellt ist, wo nur die Declination allein von der Parallaxe affeirt wird. Uebrigens ist es vorzuziehen, diese Reduction unmittelbar an den beobachteten Ort anzubringen, bevor man die Umformungen des vorhergehenden Artikels unternimmt. Ist aber der Abstand von der Erde noch gänzlich unbekannt, so muss man auf die zweite oder dritte Methode recurriren, und zwar auf die zweite, wenn der Aequator als Grundebene angenommen wird, auf die dritte aber, falls man alle Positionen auf die Ecliptik beziehen will.

III.

Wenn der einer Beobachtung entsprechende Abstand eines Himmelskörpers von der Erde schon sehr nahe bekannt ist, so lässt sich diese Beobachtung vom Einflusse der Aberration auf mehrere Arten befreien, die sich auf die verschiedenen, im Art. 71 behandelten Methoden stützen. Es sei t die wirkliche Zeit der Beobachtung; ϑ der Zeitraum, welchen das Licht gebraucht, um von dem Himmelskörper zur Erde zu gelangen, und den man erhält, wenn man die Distanz mit 493 Zeitsecunden multiplicirt; l der beobachtete Ort; l' derselbe, mit Hülfe der geocentrischen täglichen Bewegung auf den Zeitpunkt $t + \vartheta$ reducirte Ort; l'' der Ort l , aber befreit von demjenigen Theile der Aberration, welche den Planeten mit den Fixsternen gemeinsam ist; L der wahre, der Zeit t entsprechende Erdort (d. h. der Tafelort um $20''25$ vermehrt); endlich L' der wahre, der Zeit $t - \vartheta$ entsprechende Erdort. Dann ist:

I. $l =$ der wahre Ort des Himmelskörpers aus L zur Zeit $t - \vartheta$ gesehen;

II. $l' =$ der wahre Ort des Himmelskörpers aus L gesehen zur Zeit t .

III. $l'' =$ der wahre Ort des Körpers aus L gesehen zur Zeit $t - \vartheta$.

Bei der Methode I wird daher der beobachtete Ort unverändert beibehalten, für die wirkliche Zeit aber die fingirte Zeit $t - \vartheta$ substituirt, und dabei der Ort der Erde für diese fingirte Zeit berechnet. Die Methode II bringt die Aenderung lediglich an die Beobachtung an, erfordert aber ausser dem Abstände auch noch die tägliche Bewegung. Bei der Methode III erleidet

die Beobachtung eine von dem Abstände unabhängige Verbesserung, für die wirkliche Zeit wird die fingirte $t - \vartheta$ substituirt, aber unter Beibehaltung des der wirklichen Zeit entsprechenden Erdortes. Von diesen Methoden ist die erste die bei weitem bequemste, sobald die Entfernung wenigstens in soweit bekannt ist, dass die Reduction der Zeit mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden kann.

Ist aber diese Entfernung noch gänzlich unbekannt, so leidet keine dieser Methoden eine unmittelbare Anwendung; bei der ersten hat man zwar den geocentrischen Ort des Himmelskörpers, aber zu wünschen bleibt noch die Zeit und die Stellung der Erde, die von der unbekanntem Entfernung abhängig sind; bei der zweiten sind zwar letztere gegeben, aber der erstere fehlt; bei der dritten endlich hat man zwar den geocentrischen Ort des Himmelskörpers und die Position der Erde, aber die mit jenen Daten zu verbindende Zeit fehlt. (135)

Was ist daher bei unserer Aufgabe zu thun, wenn in einem solchen Falle eine, auch mit Rücksicht auf die Aberration genaue Lösung verlangt wird? Es ist dann sicherlich das Einfachste, die Bahn zuerst unter Beiseitlassung der Aberration zu bestimmen, und da diese niemals eine erhebliche Einwirkung äussern kann, so erhält man daraus die Abstände wenigstens mit einer solchen Genauigkeit, dass sich nun die Beobachtungen mittelst einer der so eben auseinandergesetzten Methoden von der Aberration befreien lassen, und man dann die Bestimmung der Bahn genau wiederholen kann. Bei dieser Arbeit verdient nun die dritte Methode vor den übrigen den Vorzug. Denn es sind bei der ersten Methode alle die von der Position der Erde abhängigen Operationen ganz von Frischem wieder zu beginnen. Bei der zweiten Methode (welche ausserdem nur Anwendung leidet, wenn man eine so grosse Menge von Beobachtungen besitzt, dass sich daraus die tägliche Bewegung ableiten lässt) muss man alle Rechnungsoperationen von Neuem anstellen, die von dem geocentrischen Orte des Himmelskörpers abhängig sind. Bei der dritten Methode dagegen (wenn nämlich die erste Rechnung bereits auf solche geocentrische Orte gebaut war, die von der Fixstern-Aberration befreit sind) können alle vorläufige, von der Position der Erde und dem geocentrischen Orte des Körpers abhängige Operationen bei der neuen Rechnung unverändert beibehalten werden. Man kann daher gleich bei der ersten

Rechnung die Aberration mit erfassen, wenn die Methode der Bahnbestimmung so angethan ist, dass man daraus die Werthe der Abstände eher erhält, bevor es erforderlich wird, die verbesserten Zeiten in die Rechnung einzuführen. Es ist dann der Aberration wegen keine doppelte Rechnung nöthig, wie bei der weiteren Behandlung unserer Aufgabe noch klarer werden wird.

119.

Es würde nicht schwierig sein, aus der in unserer Aufgabe zwischen den gegebenen und den unbekanntem Grössen bestehenden Verbindung ihren Stand auf sechs Gleichungen zu reduciren, oder noch auf wenigere, da die eine oder die andere der Unbekannten sich ganz bequem eliminiren liesse. Weil aber diese Verbindung eine äusserst verwickelte ist, so würden die Gleichungen sich meist als intractabel erweisen. Eine solche Trennung der Unbekannten aber, dass schliesslich eine Gleichung herauskäme, die nur eine einzige unbekannte Grösse enthielte, kann, allgemein gesprochen^{*)}, für unmöglich gehalten werden, und es lässt sich daher um so weniger die ganze Auflösung des Problems nur durch directe Operationen erledigen.

Aber auf die Lösung zweier Gleichungen $X = 0$ und $Y = 0$, wobei nur zwei unbekannte x, y untermischt verbleiben würden, lässt sich allerdings (136) unser Problem zurückführen und zwar auf verschiedene Arten. Es ist nämlich nicht nothwendig, dass x und y zwei von den Elementen selbst sind, sondern es können Grössen sein, die auf irgend eine Art mit den Elementen zusammenhängen, wenn die letzteren nur nach Auffindung von x und y sich bequem daraus herleiten lassen. Ausserdem ist es offenbar nicht nöthig, dass X, Y durch entwickelte Functionen von x und y dargestellt werden, sondern es genügt, dass sie mit jenen durch ein System von Gleichungen so verbunden sind, dass man es in der Gewalt hat, von den gegebenen Werthen für x, y zu den entsprechenden Werthen von X, Y zu gelangen.

^{*)} Falls die Beobachtungen so wenig von einander entfernt sind, dass die Zwischenzeiten als unendlich kleine Grössen sich behandeln lassen, so kann eine solche Trennung allerdings von Erfolg sein, und das ganze Problem auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung des sechsten oder achten Grades reducirt werden.

120.

Da nun die Natur der Aufgabe eine weitere Reduction als auf zwei Gleichungen, in denen zwei mit einander vermischte Unbekannte enthalten sind, nicht gestattet, so besteht die Hauptsache vorerst in einer schicklichen Auswahl der Unbekannten und in einer solchen Anordnung der Gleichungen, dass nicht nur X , Y auf die einfachste Weise von x , y abhängig erscheinen, sondern dass auch nach Auffindung dieser Werthe daraus die Elemente so bequem als möglich hervorgehen. — Andererseits muss aber auch in Betracht gezogen werden, durch welches Verfahren man die den Gleichungen Genüge leistenden Werthe der Unbekannten durch nicht zu mühsame Operationen ermittelt. Wenn dies nur durch gleichsam blinde Versuche zu bewerkstelligen wäre, so würde eine ungeheure und kaum zu ertragende Arbeit erforderlich sein, welcher nichts destoweniger die Astronomen sich häufig unterzogen haben, welche Cometenbahnen durch eine sogenannte indirecte Methode bestimmt haben. Hierbei wird die Arbeit allerdings dadurch erheblich erleichtert, dass bei den ersten Versuchen milder scharfe Rechnung genügt, bis man zu genäherten Werthen der Unbekannten gelangt ist. Hat man aber erst eine genäherte Bestimmung, so lässt die Sache sich stets durch sichere und rasche Methoden zu Ende führen, welche ich hier auseinandersetzen will, bevor ich weiter gehe.

Den Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ geschieht von selbst ganz vollständig Genüge, wenn man für x , y deren wahre Werthe selbst getroffen hat; sind aber dafür Werthe angenommen, die von den wahren verschieden sind, so werden X und Y daraus von Null verschiedene Werthe erhalten. Je näher daher dieselben an die wahren herankommen, desto kleiner müssen auch die Werthe für X und Y herauskommen, und wenn ihre Verschiedenheiten von den wahren erst sehr klein sind, so darf man voraussetzen, dass die Aenderungen in den Werthen von X und Y sehr nahe der Aenderung in x proportional sind, wenn y unverändert bleibt, und proportional der von y , falls x sich nicht ändert. Bezeichnet man daher die wahren Werthe von x , y resp. mit ξ , η , so werden die der Voraussetzung $x = \xi + \lambda$, $y = \eta + \mu$ entsprechenden Werthe von X , Y durch die Form $X = \alpha\lambda + \beta\mu$,

$Y = \gamma\lambda + \delta\mu$ darzustellen sein, so dass man die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als constant annehmen kann, so lange λ und μ sehr klein bleiben. Hieraus lässt sich schliessen, dass, wenn für drei Systeme von Werthen für x, y , die von (137) den wahren nur wenig verschieden sind, eine Bestimmung der entsprechenden Werthe von X, Y Statt gefunden hat, man daraus die wahren Werthe von x, y wenigstens insoweit ableiten könne, als dabei jene Voraussetzung zulässig ist. Wir wollen setzen, dass

$$\begin{array}{ll} \text{für } x = a, & y = b \quad \text{werde: } X = A, \quad Y = B \\ x = a', & y = b' \quad \quad X = A', \quad Y = B' \\ x = a'', & y = b'' \quad \quad X = A'', \quad Y = B'' \end{array}$$

und man hat dann

$$\begin{array}{ll} A = \alpha(a - \xi) + \beta(b - \eta), & B = \gamma(a - \xi) + \delta(b - \eta) \\ A' = \alpha(a' - \xi) + \beta(b' - \eta), & B' = \gamma(a' - \xi) + \delta(b' - \eta) \\ A'' = \alpha(a'' - \xi) + \beta(b'' - \eta), & B'' = \gamma(a'' - \xi) + \delta(b'' - \eta). \end{array}$$

Daraus entsteht nach Eliminirung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a(A'B'' - A''B') + a'(A''B - AB'') + a''(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \\ \eta &= \frac{b(A'B'' - A''B') + b'(A''B - AB'') + b''(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B}, \end{aligned}$$

oder in einer zur Rechnung bequemerer Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi &= a + \frac{(a' - a)(A''B - AB'') + (a'' - a)(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \\ \eta &= b + \frac{(b' - b)(A''B - AB'') + (b'' - b)(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B}. \end{aligned}$$

Offenbar ist es auch in diesen Formeln gestattet, die Grössen a, b, A, B mit a', b', A', B' , oder mit a'', b'', A'', B'' zu vertauschen.

Der gemeinschaftliche Nenner aller dieser Ausdrücke, den man auch unter die Form $(A' - A)(B' - B) - (A'' - A)(B - B)$ bringen kann, wird

$$= (\alpha\delta - \beta\gamma) \{ (a' - a)(b'' - b) - (a'' - a)(b' - b) \};$$

woraus man sieht, dass a, a', a'', b, b', b'' so genommen werden müssen, dass nicht $\frac{a'' - a}{b'' - b} = \frac{a' - a}{b' - b}$ wird, widrigenfalls diese Methode nicht anwendbar sein, sondern für ξ und η gebrochene Werthe liefern würde, deren Zähler und

Neuner zugleich verschwinden. Ebenso ist hieraus klar, dass, wenn zufällig $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ wird, derselbe Mangel den Gebrauch der Methode ganz zerstören würde, auf welche Weise man auch a, a', a'', b, b', b'' annehmen möchte. In einem solchen Falle müsste man für die Werthe von X folgende Form voraussetzen $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \zeta\lambda\mu + \vartheta\mu\nu$, und eine ähnliche für die Werthe von Y , wo dann die Analyse Methoden an die Hand geben würde, die der vorhergehenden analog sind, um aus den Werthen von X, Y , die für vier Systeme der Werthe von x, y gerechnet wären, die wahren Werthe der letzteren zu bestimmen. Auf diese Weise würde aber die Rechnung äusserst (138) beschwerlich ausfallen und ausserdem lässt sich zeigen, dass in einem solchen Falle die Bahnbestimmung die erforderliche Schärfe der Natur der Sache nach nicht zulässt. Da diese Unzutüchtigkeit nicht anders vermieden werden kann, als wenn man neue, mehr geeignete Beobachtungen heranzieht, so will ich bei diesem Gegenstande hier nicht verweilen.

121.

Sobald man daher für die Unbekannten bereits über genäherte Werthe disponirt, so lassen sich daraus die wahren mit aller nur zu wünschenden Schärfe durch die so eben erklärte Methode ableiten. Zuerst werden nämlich die jenen approximirten Werthen (a, b) entsprechenden Werthe von X, Y berechnet. Wenn letztere dann nicht von selbst verschwinden, so wird die Rechnung mit zwei anderen, davon wenig verschiedenen Werthen (a', b') wiederholt, und dann mit einem dritten Systeme (a'', b''), wenn nicht zufällig schon beim zweiten X und Y verschwinden. Dann lassen sich durch die Formeln des vorhergehenden Artikels die wahren Werthe finden, insofern die Voraussetzung, auf welcher jene Formeln beruhen, von der Wahrheit nicht merklich abweicht. Um sich über die Sache ein desto besseres Urtheil zu bilden, mag die Rechnung der Werthe von X, Y mit jenen verbesserten Werthen wiederholt werden, und falls diese zeigt, dass dadurch den Gleichungen $X = 0, Y = 0$ noch nicht Genüge geschehe, so wird man wenigstens sehr viel kleinere Werthe von X und Y daraus erhalten, als durch die drei früheren Hypothesen, und deshalb werden die hieraus abgeleiteten Bahnelemente weit genauer sein, als die den ersten Hypothesen entsprechenden. Will man sich hierbei nicht beruhigen,

so wird es am gerathensten sein, unter Weglassung derjenigen Hypothese, welche die grössten Unterschiede hervorgebracht hatte, die beiden übrigen mit einer vierten von Neuen zu verbinden und so nach Anleitung des vorangehenden Artikels ein fünftes System der Werthe von x , y zu bilden. Auf dieselbe Weise kann man, wo es der Mühe werth erscheint, zu einer sechsten u. s. w. Hypothese übergehen, bis dadurch den Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ so genau Genüge geleistet wird, als es die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln gestatten. Sehr selten jedoch wird es nöthig sein, über das vierte System hinauszugehen, wenn man als erste Hypothesen nicht solche angenommen hat, die noch zu sehr von der Wahrheit abweichen.

122.

Da die bei der zweiten und dritten Hypothese anzunehmenden Werthe der Unbekannten in gewisser Weise willkürlich sind, wenn sie nur von der ersten Hypothese nicht gar zu verschieden sind, und man ausserdem in Acht nimmt, dass das Verhältniss $(a'' - a) : (b'' - b)$ nicht zur Gleichheit mit $(a' - a) : (b' - b)$ hinneigt, so pflegt gemeinlich gesetzt zu werden: $a' = a$, $b'' = b$. Hieraus erwächst ein doppelter Vortheil; denn es kommen nicht nur die Formeln für ξ und η noch etwas einfacher heraus, sondern es bleibt auch ein Theil der ersten Rechnung derselbe bei der zweiten Hypothese und ein anderer Theil bei der dritten.

- (139) Es giebt aber einen Fall, wo andere Gründe eine Abweichung von dieser Gewohnheit rathsam machen. Nimmt man nämlich an, dass X die Form $X' - x$ habe, und Y die Form $Y' - y$, und dass die Functionen X' , Y' durch die Natur der Aufgabe so angethan seien, dass sie von mässigen, bei den Werthen von x , y begangenen Fehlern nur sehr wenig afficirt werden, oder dass $\left(\frac{dX'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dX'}{dy}\right)$, $\left(\frac{dY'}{dx}\right)$, $\left(\frac{dY'}{dy}\right)$ äusserst kleine Grössen seien, so ist klar, dass die Unterschiede zwischen den Functionenwerthen, die dem Systeme $x = \xi$, $y = \eta$ entsprechen, und zwischen denen, welche aus $x = a$, $y = b$ entstehen, auf eine gleichsam höhere Ordnung bezogen werden können, als die Differenzen $\xi - a$, $\eta - b$; nun sind jene Werthe $X' = \xi$, $Y' = \eta$, diese aber $X' = a + A$, $Y' = b + B$, woraus folgt, dass $a + A$, $b + B$ viel genauere

Werthe für x und y sind, als a und b . Wenn man auf dieselben die zweite Hypothese stützt, so geschieht dadurch sehr häufig den Gleichungen $X=0$, $Y=0$ schon so genau Genüge, dass man nicht weiter zu gehen braucht. Andernfalls wird auf dieselbe Weise aus der zweiten Hypothese eine dritte gebildet, indem man $a'' = a' + A' = a + A + A'$, $b'' = b' + B' = b + B + B'$ setzt, und wenn auch diese noch nicht als genau genug sich erweist, so wird daraus endlich eine vierte nach Anleitung des Art. 120 abgeleitet.

123.

In dem Vorhergehenden habe ich vorausgesetzt, dass man schon anderswoher im Besitze genäherter Werthe für die Unbekannten x , y sich befindet. Falls man bereits über genäherte Bestimmungen der ganzen Bahn gebietet (die vielleicht aus anderen Beobachtungen durch frühere Rechnungen abgeleitet und nun durch neue Beobachtungen zu verbessern sind), so lässt sich jener Bedingung ohne Schwierigkeit Genüge leisten, welche Bezeichnung man auch den Unbekannten beilegen mag. Dagegen ist es bei Bestimmung einer noch gänzlich unbekanntem Bahn (eine Aufgabe, die sehr schwierig ist) keineswegs gleichgültig, welche Unbekannten man anwendet; vielmehr müssen Letztere dann mit Kunst und in solcher Weise gewählt werden, dass man die genäherten Werthe aus der Natur der Aufgabe selbst schöpfen kann. Dies gelingt am besten, falls die drei, zur Bahnerforschung angewandten Beobachtungen keine zu grosse heliocentrische Bewegung des Himmelskörpers umfassen. Derartige Beobachtungen sind daher stets zur ersten Bestimmung anzuwenden, welche man nachher durch weiter von einander entfernte Beobachtungen nach Belieben verbessern kann. Denn man sieht ohne Weiteres, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler die Rechnung um so mehr stören, je näher an einander liegende Beobachtungen dazu verwendet werden. Daraus folgt, dass die Beobachtungen zur ersten Bestimmung nicht blindlings ausgewählt werden dürfen, sondern man sich hüten müsse, erstens, dass die Beobachtungen sich nicht zu nahe sind, und dann, dass sie nicht zu weit von einander entfernt liegen. Im ersten Falle wird zwar die Berechnung von Elementen, welche den Beobachtungen Genüge leisten, sehr rasch beendet; diesen Elementen selbst wäre (140)

jedoch wenig zu trauen, und könnten dieselben daraus mit Irrthümern so enorm entstellt herauskommen, dass sie nicht einmal als Annäherungen zu gelten vermöchten. Im zweiten Falle dagegen würde man von den künstlichen Mitteln verlassen werden, welche zur genäherten Bestimmung der Unbekannten zu benutzen sind, und man würde daraus nur eine ganz rohe Bestimmung ableiten können und doch sehr viel mehr Hypothesen brauchen, oder eine gänzlich ungereimte, und doch die langweiligsten und widerwärtigsten Versuche nicht vermeiden können. Ein erfahrenes Urtheil aber über diese Methodengrenzen wird besser durch häufige Anwendung, als durch Vorschriften erworben. Die unten zu behandelnden Beispiele werden zeigen, dass aus Beobachtungen der Juno, die nur 22 Tage von einander entlegen sind und eine heliocentrische Bewegung von $7^{\circ} 35'$ umfassen, die Elemente sich schon mit vieler Genauigkeit ableiten lassen, und dass wechselseitig unsere Methode sich auch mit dem besten Erfolge auf die Ceres-Beobachtungen anwenden lässt, welche 260 Tage von einander abstehen und eine heliocentrische Bewegung von $62^{\circ} 55'$ einschliessen, sowie, dass durch Anwendung von vier Hypothesen, oder vielmehr successiven Annäherungen, Elemente erhalten werden, die aufs Beste mit den Beobachtungen übereinstimmen.

124.

Ich gehe nun zur Aufzählung derjenigen Methoden über, welche vorzüglich zweckmässig sind und sich auf die vorangehenden Vorschriften stützen, deren hauptsächlichste Momente im ersten Buche auseinandergesetzt wurden und die hier nur unserem Zwecke angepasst zu werden brauchen.

Die einfachste Methode scheint die zu sein, wobei für x , y die Abstände des Himmelskörpers von der Erde in zwei Beobachtungen angenommen werden, oder vielmehr entweder die Logarithmen dieser Abstände, oder die Logarithmen der auf die Ecliptik oder den Aequator projecirten Abstände. Hieraus leitet man vermittelst Art. 64, V die heliocentrischen Orte und die hierzu gehörenden Abstände von der Sonne ab; daraus ferner nach Art. 110 die Lage der Bahnebene und die heliocentrischen Längen in der Bahn, und hieraus, sowie aus den Radien Vektoren und den entsprechenden Zeiten durch die in den Artikeln 85—105 ausführlich behandelte Aufgabe alle übrigen Elemente,

wodurch offenbar jene Beobachtungen genau dargestellt werden, welche Werthe man auch dem x und y beigelegt haben würde. Wenn nun mittelst dieser Elemente der geocentrische Ort zur Zeit der dritten Beobachtung berechnet wird, so muss dessen Uebereinstimmung mit, oder dessen Abweichung von dem beobachteten Orte entscheiden, ob die angenommenen Werthe die wahren sind, oder davon abweichen. Man gewinnt daraus eine doppelte Vergleichung, indem man die eine Differenz (in Länge oder gerader Aufsteigung) für X , und die andere (in Breite oder Declination) für Y annimmt. Falls daher die Werthe dieser Differenzen X , Y nicht von selbst = Null herauskommen, so lassen sich die wahren Werthe von x , y durch die im Artikel 120 und folg. beschriebene Methode ermitteln. Uebrigens ist es an und für sich gleichgültig, welche von den drei Beobachtungen man hierbei zu Ausgangspunkten wählen will. Gemeinlich empfiehlt es sich jedoch, (141) die erste und letzte zu nehmen, mit Ausnahme eines besonderen Falles, von dem ich gleich sprechen will.

Diese Methode ist sehr vielen, später zu erklärenden in dem Betrachte vorzuziehen, weil sie eine sehr allgemeine Anwendung gestattet. Ausgenommen muss dabei der Fall werden, wo die beiden äussersten Beobachtungen eine heliocentrische Bewegung von 180° oder 360° oder 540° u. s. w. umfassen, denn dann kann die Lage der Bahnebene aus zwei heliocentrischen Orten nicht bestimmt werden (Art. 110). Ebenso ist es nicht angemessen, die Methode dann anzuwenden, wenn die heliocentrische Bewegung zwischen den beiden äussersten Beobachtungen nur wenig von 180° oder 360° etc. verschieden ist, weil man in diesem Falle keine genaue Bestimmung der Lage der Bahn erhalten kann, oder vielmehr weil dann die kleinsten Veränderungen in den angenommenen Werthen der Unbekannten so grosse Veränderungen in der Bahnlage und folgeweise auch in den Werthen von X , Y hervorbringen würden, dass diese jenen nicht mehr als proportional angesehen werden können. Hier ist aber eine Abhilfe zur Hand, indem man nämlich in einem solchen Falle nicht von den beiden äussersten Beobachtungen ausgeht, sondern von der ersten und mittleren, oder von der mittleren und letzten, wobei man dann für X , Y die Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung im dritten oder ersten Orte annimmt. Wenn aber sowohl der zweite Ort vom ersten, als der dritte vom zweiten nahezu um 180 Grade abstehen sollten, so würde

auf jene Weise dieser Nachtheil nicht gehoben werden, und es ist dann vorzuziehen, solche Beobachtungen, aus denen man der Natur der Sache nach eine genaue Bahnbestimmung überall nicht ableiten kann, zur Elementenberechnung nicht zu verwenden.

Ausserdem empfiehlt diese Methode sich noch dadurch, dass man daraus ohne Mühe zu schätzen vermag, welche Veränderungen die Elemente erleiden, wenn, unter Beibehaltung der beiden äussersten Orte, der mittlere um ein Weniges geändert wird. Auf diese Weise kann man sich also ein Urtheil über den Grad der Genauigkeit bilden, welche man den gefundenen Elementen beilegen darf.

125.

Durch Anbringung einer leichten Veränderung an die vorige Methode lässt sich daraus eine zweite ableiten. Ganz wie bei der ersten bestimmt man alle Elemente, indem man von den Abständen in zwei Beobachtungen ausgeht. Aus diesen Elementen berechnet man dann aber nicht den geocentrischen Ort für die dritte Beobachtung, sondern führt die Rechnung nur bis zum heliocentrischen Orte in der Bahn und leitet dann denselben heliocentrischen Ort mittelst der in den Art. 74 und 75 behandelten Aufgabe aus dem beobachteten geocentrischen Orte und der Lage der Bahnebene ab. Diese beiden Bestimmungen, die unter sich differiren (wenn nicht zufällig die wahren Werthe von x , y bei der Annahme getroffen sein sollten) werden, uns X und Y liefern, wo für X der Unterschied der beiden Werthe für die Länge in der Bahn genommen wird, und für Y der Unterschied zwischen den beiden

(142) Werthen für den Radius Vector, oder vielmehr für dessen Logarithmus. Diese Methode ist den nämlichen Anständen unterworfen, welche ich im vorhergehenden Artikel berührt habe. Man muss ihr aber noch die fernere Bemerkung beifügen, dass der heliocentrische Ort in der Bahn aus dem geocentrischen nicht gefunden werden kann, falls der Ort der Erde in einen der beiden Knoten der Bahn fällt. Dann lässt sich daher diese Methode nicht anwenden. Man thut jedoch wohl, dieser Methode auch in dem Falle sich zu enthalten, wenn der Ort der Erde nur wenig von einem der beiden Knoten absteht, weil die Voraussetzung, dass geringen Aenderungen von

x, y auch proportionale Aenderungen von X, Y entsprechen, dann zu fellsam sein würde, und zwar aus einem ähnlichen Grunde, wie der im vorhergehenden Artikel angedeutete. Aber auch hier lässt sich durch Vertauschung des mittleren Orts mit einem der äusseren Orte, dem ein mehr von den Knoten entfernter Erdort entspricht, Abhilfe schaffen, wenn nicht zufällig bei allen drei Beobachtungen die Erde in der Nähe der Knoten sich befunden hat.

126.

Die vorhergehende Methode bahnt sofort zu einer dritten den Weg. Zunächst bestimme man wie vorher aus den Abständen des Himmelskörpers von der Erde in den äussersten Beobachtungen die entsprechenden Längen in der Bahn mit den Radien Vektoren. Mit Hilfe der Lage der Bahnebene, welche diese Rechnung liefert, leite man aus der mittlern Beobachtung die Länge in der Bahn und den Radius Vector ab. Dann aber berechne man aus diesen drei heliocentrischen Orten die übrigen Elemente vermittelt der in den Art. 82 und 83 behandelten Aufgabe, wobei das Verfahren unabhängig von den Zeiten der Beobachtungen ist. Auf diese Weise werden also die drei mittleren Anomalien und die tägliche Bewegung bekannt, woraus sich die Zeitintervalle zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung berechnen lassen. Deren Unterschiede von den wahren Intervallen nimmt man dann für X und Y .

Diese Methode würde weniger zweckmässig sein, falls die heliocentrische Bewegung nur einen kleinen Bogen umfasst. Denn in einem solchen Falle hängt (wie ich schon in Art. 82 bemerkt habe) diese Bahnbestimmung von Grössen der dritten Ordnung ab und lässt daher genügende Schärfe nicht zu. Die leichtesten Aenderungen in den Werthen von x, y könnten übergrosse Aenderungen in den Elementen und also auch in den Werthen von X, Y erzeugen, und man dürfte diese nicht als jenen proportional erachten. So oft aber die drei Orte eine beträchtliche heliocentrische Bewegung umfassen, so ist der Gebrauch der Methode allerdings vom besten Erfolge begleitet, vorausgesetzt, dass er nicht durch die in den vorangehenden Artikeln dargelegten Ausnahmen gestört wird, die daher offenbar auch bei dieser Methode zu berücksichtigen sind.

127.

Hat man die drei heliocentrischen Orte auf die im vorangehenden Artikel beschriebene Art ermittelt, so kann man auch in folgender Weise (143) verfahren. Man bestimme die übrigen Elemente vermittelt der Aufgabe in den Artikeln 85—105 zuvörderst aus dem ersten und zweiten Orte mit der entsprechenden Zwischenzeit, sodann aber auf dieselbe Weise aus dem zweiten und dritten Orte und der zugehörigen Zwischenzeit. So wird man für die einzelnen Elemente zwei Werthe erhalten, aus deren Unterschieden man nach Belieben zwei für X und Y annehmen kann. Diese Methode empfiehlt sich ausserordentlich durch den nicht zu verachtenden Vortheil, dass man bei den ersten Hypothesen die übrigen Elemente, abgesehen von den beiden, welche man zur Feststellung von X , Y auswählt, überhaupt bei Seite lassen kann, und dass diese erst durch die letzte, auf bereits corrigirte Werthe von x , y gestützte Rechnung bestimmt werden, entweder allein aus der ersten Combination, oder allein aus der zweiten, oder, was gemeinlich vorzuziehen ist, aus der Combination des ersten Orts mit dem dritten Orte. Im Uebrigen gewährt die Auswahl jener beiden Elemente, welche, allgemein gesprochen, willkürlich ist, eine grosse Mannigfaltigkeit der Auflösungen. Es können z. B. genommen werden der Logarithmus des halben Parameters mit dem Logarithmus der grossen Halbaxe, oder ersterer mit der Excentricität, oder der letztere mit der Excentricität, oder mit einem dieser Elemente die Länge des Perihels. Irgend eins dieser vier Elemente kann auch combinirt werden mit der excentrischen Anomalie, die dem mittleren Orte in jeder der beiden Rechnungen entspricht, wenn nämlich eine elliptische Bahn sich ergeben sollte, wo dann die Formeln 27—30 des Art. 96 eine sehr rasche Rechnung gewähren. In besondern Fällen aber bedarf diese Auswahl einer gewissen Vorsicht. So z. B. würde bei Bahnen, die zur Aehnlichkeit mit der Parabel hinneigen, die grosse Halbaxe a oder ihr Logarithmus weniger zweckmässig sein, weil deren unnützig Variationen den Aenderungen von x , y nicht proportional erachtet werden dürften. In diesem Falle würde es dienlicher sein, $\frac{1}{a}$ auszuwählen. Ich halte mich aber bei diesen Vorsichtsmaassregeln um so weniger auf, als

die fünfte, im folgenden Artikel auseinanderzusetzende Methode vor den bislang erörterten vier Methoden fast in allen Fällen die überwiegendsten Vorzüge besitzt.

128.

Es sollen die drei, auf die nämliche Weise wie in den Art. 125, 126 ermittelten Radien Vektoren mit r, r', r'' bezeichnet werden; sodann soll die heliocentrische Winkelbewegung in der Bahn vom zweiten zum dritten Orte mit $2f$, vom ersten zum dritten mit $2f''$, vom ersten zum zweiten mit $2f'$ angedeutet sein, so dass $f' = f + f''$ ist. Es sei ferner $r'r'' \sin 2f = n$, $r'r'' \sin 2f' = n'$, $r'r'' \sin 2f'' = n''$. Endlich seien die Producte der constanten Grösse k (Artikel 2) mit den Zwischenzeiten von der zweiten zur dritten Beobachtung, von der ersten zur dritten, von der ersten zur zweiten beziehungsweise $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$. Man beginne nun mit einer doppelten Berechnung der Elemente (ganz wie im vorhergehenden Artikel) sowohl aus r, r', f'' und ϑ'' , als aus r', r'', f, ϑ . In beiden Rechnungen gehe man aber nicht bis zu den Elementen selbst vor, sondern halte ein, sobald die Grösse, welche das Verhältniss des elliptischen Sectors zum Dreiecke ausdrückt, und welche oben (Art. 91) mit y oder $-Y$ bezeichnet wurde, gefunden ist. Es sei der Werth dieser Grösse in der ersten Rechnung η'' , in der zweiten η . Man erhält daher (144) mittelst der Formel [18] des Art. 95 für den halben Parameter p den doppelten Werth:

$$\sqrt{p} = \frac{\eta'' n''}{\vartheta''} \quad \text{und} \quad \sqrt{p} = \frac{\eta n}{\vartheta}.$$

Nach Art. 82 hat man aber überher einen dritten Werth

$$p = \frac{4 r r' r'' \sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''},$$

welche drei Werthe offenbar identisch sein müssten, falls man für x, y gleich von Anfang an die wahren Werthe getroffen hätte. Es müsste deshalb sein

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \frac{\eta'' n''}{\eta n},$$

$$n - n' + n'' = \frac{4 \vartheta \vartheta'' r r' r'' \sin f \sin f' \sin f''}{\eta \eta'' n n''} = \frac{n' \vartheta \vartheta''}{2 \eta \eta'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}.$$

Wenn daher diesen Gleichungen nicht bereits bei der ersten Rechnung von selbst Gentige geleistet wird, so kann man setzen

$$X = \log \frac{\eta u \delta''}{\eta'' n'' \vartheta},$$

$$Y = n - n' + n'' - \frac{n' \vartheta \delta''}{2 \eta \eta'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}.$$

Diese Methode leidet eine ebenso allgemeine Anwendung wie die zweite, im Art. 124 gegebene. Es ist aber ein grosser Gewinn, dass bei dieser fünften Methode die ersten Hypothesen eine Entwicklung der Elemente selbst nicht erfordern, sondern man dabei gleichsam auf halbem Wege stehen bleiben kann. Sobald man übrigens bei diesem Verfahren soweit gelangt ist, dass sich voraussehen lässt, wie eine neue Hypothese von der Wahrheit nicht merklich verschieden sein werde, so genügt es, darin die Elemente selbst entweder lediglich aus r, r', f'', ϑ'' , oder aus r', r'', f, ϑ , oder, was vorzuziehen ist, aus r, r'', f'', ϑ' zu bestimmen.

129.

Die bis jetzt erläuterten fünf Methoden bahnen sofort den Weg zu ebensovielen andern, welche sich von jenen nur dadurch unterscheiden, dass für x und y an Stelle der Abstände von der Erde die Neigung der Bahn und die Länge des aufsteigenden Knotens genommen werden. Mit diesen neuen Methoden verhält es sich so:

I. Es werden aus x und y , sowie aus den beiden äussersten geocentrischen Orten nach Art. 74, 75 die heliocentrischen Längen in der Bahn und die Radien Vectoren bestimmt, und hieraus und aus den entsprechenden Zwischenzeiten alle übrigen Elemente; aus letzteren endlich der geocentrische Ort zur Zeit der mittleren Beobachtung, dessen Unterschiede mit dem beobachteten Orte in Länge und Breite X und Y liefern.

- (145) Die vier übrigen Methoden kommen darin überein, dass aus der Lage der Bahnebene und den geocentrischen Orten alle drei heliocentrischen Längen in der Bahn und die entsprechenden Radien Vectoren berechnet werden. Sodann aber werden

II. die übrigen Elemente nur aus den beiden äussersten Orten und den entsprechenden Zeiten bestimmt. Nach diesen Elementen werden für die Zeit der mittleren Beobachtung die Länge in der Bahn und der Radius Vector berechnet, und die Verschiedenheiten dieser Grössen von den zuvor dafür gefundenen, d. h. aus dem geocentrischen Orte abgeleiteten Werthen, stellen X und Y dar.

III. Oder man leitet die übrigen Bahndimensionen aus allen drei heliocentrischen Orten (Art. 82, 83) her, eine Rechnung, wobei man die Zeiten nicht braucht. Dann berechnet man die Zwischenzeiten, welche in der so gefundenen Bahn zwischen der ersten und zweiten Beobachtung, und zwischen dieser und der dritten hätten verstreichen müssen, und deren Unterschiede mit den wahren liefern uns X und Y .

IV. Man berechne die übrigen Elemente auf doppelte Weise, nämlich sowohl aus Combination des ersten Orts mit dem zweiten, als aus Combination des zweiten mit dem dritten, unter Hinzunahme der entsprechenden Zeitintervalle. Durch Vergleichung dieser beiden Elementensysteme unter sich kann man aus den Unterschieden irgend welche zwei für X und Y nehmen.

V. Oder endlich führe man dieselbe doppelte Rechnung nur bis zu den Werthen der im Art. 91 mit y bezeichneten Grösse fort, und nehme dann für X und Y die im vorhergehenden Artikel gegebenen Ausdrücke an.

Um sich dieser vier letzten Methoden mit Sicherheit zu bedienen, dürfen die Orte der Erde für alle drei Beobachtungen den Knoten der Bahn nicht zu nahe liegen. Dagegen erfordert der Gebrauch der ersten Methode nur, dass diese Bedingung bei den beiden äussersten Beobachtungen Statt findet, oder vielmehr (weil man den mittleren Ort an Stelle eines der beiden äussersten setzen kann), dass von den drei Erdorten nicht mehr als einer in der Nähe der Knoten liegt.

130.

Die zehn, vom Art. 124 an erklärten Methoden stützen sich auf die Voraussetzung, dass man bereits genäherte Werthe für die Abstände des Himmelskörpers von der Erde, oder für die Lage der Bahnebene besitzt. Falls es sich

darum handelt, die Bahndimensionen, deren genäherte Werthe bereits anderswoher bekannt geworden sind (zum Beispiel aus einer früheren, auf andere Beobachtungen gestützten Rechnung), durch Beobachtungen zu verbessern, die weiter von einander entfernt sind, so stehen einer solchen Anforderung offenbar keine Schwierigkeiten im Wege. Hieraus aber ist noch nicht klar, auf welche Weise die erste Berechnung in Angriff zu nehmen ist, wo noch (146) alle Bahndimensionen gänzlich unbekannt sind. Dieser Fall unserer Aufgabe ist der bei weitem wichtigste und schwierigste, wie man schon aus dem analogen Probleme in der Theorie der Cometen abnehmen kann, das bekanntlich schon lange die Geometer gequält und so viele vergebliche Versuche hervorgerufen hat. Um unsere Aufgabe als richtig gelöst ansehen zu können, muss offenbar den nachfolgenden Bedingungen Genüge geleistet sein, wenn anders die Auflösung nach der vom Art. 119 an erklärten Vorschrift geschehen soll. Zuerst müssen die Grössen x , y auf solche Weise gewählt werden, dass man für sie genäherte Werthe aus der Natur der Aufgabe selbst erzielen kann, wenigstens so lange die von den Beobachtungen umschlossene heliocentrische Bewegung des Himmelskörpers nicht zu beträchtlich ist. Zweitens aber wird erfordert, dass kleine Aenderungen der Grössen x , y nicht zu starken Aenderungen in den daraus abzuleitenden Grössen entsprechen, damit nicht die bei der Werthnahme jener Grössen etwa begangenen Fehler verhindern, dass man auch diese als genäherte ansehen kann. Endlich drittens verlangt man, dass die Rechnungsoperationen, durch welche man von den Grössen x , y nach und nach bis zu X , Y vorschreitet, nicht gar zu weitläufig werden.

Diese Bedingungen geben ein Criterium an die Hand, nach welchem man sich über die Vorzüglichkeit jeder Methode ein Urtheil bilden kann, die sich noch sichtlicher aus häufigen Anwendungen offenbaren wird. Diejenige Methode, zu deren Auseinandersetzung ich jetzt übergehe und welche gewissermassen als der wichtigste Theil dieses Werkes zu betrachten ist, leistet diesen Bedingungen in einer Weise Genüge, dass nichts mehr zu wünschen übrig erscheint. Bevor ich jedoch damit beginne, dieselbe in der für die Praxis bequemsten Gestalt zu erklären, will ich einige vorläufige Betrachtungen vorausschieken, um gleichsam den Zugang zu dieser Methode, der sonst vielleicht zu dunkel und weniger nahe liegend erscheinen könnte, zu beleuchten und zu eröffnen.

131.

Im Artikel 114 ist gezeigt, dass, wenn das Verhältniss zwischen den dort und im Art. 128 mit n , n' , n'' bezeichneten Grössen bekannt ist, man die Abstände des Himmelskörpers von der Erde durch sehr einfache Formeln bestimmen kann. Wenn daher für x , y die Quotienten $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ genommen würden, so böten sich für diese Grössen in dem Falle, wo die heliocentrische Bewegung innerhalb der Beobachtungen keine übermässige ist, sofort die Werthe $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$, $\frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ dar (wobei die Symbole ϑ , ϑ' , ϑ'' in derselben Bedeutung wie im Art. 128 zu nehmen). Hieraus scheint mithin eine nahe liegende Auflösung unserer Aufgabe sich zu eröffnen, falls man aus x und y die beiden Abstände von der Erde herleitet, und sodann nach Maassgabe einer der fünf in den Artt. 124—128 gegebenen Methoden verfährt.

In der That wird, wenn man auch die Symbole η , η'' in der Bedeutung des Art. 128 nimmt, und dem analog mit η' den Quotienten bezeichnet, (147) welcher aus der Division des zwischen beiden Radien Vectoren enthaltenen Sectors durch die zwischen ebendenselben befindliche Dreiecksfläche entsteht, $\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot \frac{\eta'}{\eta}$, $\frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \cdot \frac{\eta''}{\eta'}$ sein, und man sieht leicht, dass, wenn n , n' , n'' als kleine Grössen der ersten Ordnung angesehen werden, dann, allgemein gesprochen, $\eta - 1$, $\eta' - 1$, $\eta'' - 1$ Grössen der zweiten Ordnung sind, und dass daher $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$, $\frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ als genährte Werthe der Grössen x , y von den wahren nur um Grössen der zweiten Ordnung verschieden sind. Nichts desto weniger findet sich bei näherer Betrachtung der Sache, dass diese Methode überhaupt ungereimt ist, eine Erscheinung, deren Grund ich mit wenig Worten erklären will.

Ohne viele Mühe erkennt man, dass die Grösse (0.1.2), mit welcher die Abstände in den Formeln 9, 10, 11 des Art. 114 multiplicirt sind, mindestens von der dritten Ordnung wird, wogegen z. B. in der Gleichung [9] die Grössen (0.1.2), (I.1.2), (II.1.2) von der ersten Ordnung sind; hieraus folgt aber leicht, dass ein bei den Werthen der Grössen

$\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ begangener Fehler zweiter Ordnung in den Werthen der Abstände einen Fehler von der Ordnung Null erzeugen werde. Es würden deshalb nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche die Abstände nur dann mit einem begrenzten Fehler herauskommen, wenn die Zwischenzeiten unendlich klein sind, und man würde mithin sowohl diese Abstände, als die übrigen daraus abzuleitenden Grössen nicht einmal für Annäherungen halten können, und die Methode würde daher mit der zweiten Bedingung des vorangehenden Artikels im Widerspruche stehen.

132.

Setzt man der Kürze wegen $(0.1.2) = a$, $(0.1.2)D' = -b$, $(0.0.2)D = +c$, $(0.11.2)D'' = +d$, so dass die Gleichung [10] des Art. 114 wird $a\mathcal{D} = b + c \cdot \frac{n}{n'} + d \cdot \frac{n''}{n'}$, so werden zwar die Coefficienten c und d von der ersten Ordnung sein, es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die Differenz $c-d$ zur zweiten Ordnung gehören müsse. Hieraus folgt aber, dass der Werth der Grösse $\frac{cn + dn''}{n + n''}$, der aus der approximirten Voraussetzung $n : n'' = \mathcal{D} : \mathcal{D}''$ entsteht, nur mit einem Fehler von der vierten Ordnung behaftet sei, ja sogar nur von der fünften, falls die mittlere Beobachtung von den äusseren um gleiche Zwischenräume absteht. Denn es wird jener Fehler

$$= \frac{c\mathcal{D} + d\mathcal{D}''}{\mathcal{D} + \mathcal{D}''} - \frac{cn + dn''}{n + n''} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{D}''(d-c)(\mathcal{D}'' - n)}{(\mathcal{D} + \mathcal{D}'')(\mathcal{D}''\mathcal{D} + n\mathcal{D}'')},$$

wo der Nenner von der zweiten Ordnung ist, der eine Factor des Zählers $\mathcal{D}\mathcal{D}''(d-c)$ von der vierten, der andere $(\mathcal{D}'' - n)$ von der zweiten oder in jenem speciellen Falle von der dritten. Stellt man daher jene Gleichung in folgender Gestalt dar: $a\mathcal{D} = b + \frac{cn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n}$, so ist klar, dass der (148) Fehler der im vorhergehenden Artikel vorgetragenen Methode nicht daraus herrührt, dass die Grössen n , n'' hier den Grössen \mathcal{D} , \mathcal{D}'' proportional angenommen sind, sondern daraus, dass man noch überdies die Grösse n' der Grösse \mathcal{D}' proportional gesetzt hat. Auf diese Weise wird nämlich an der Stelle des Factors $\frac{n + n''}{n}$, der minder genaue Werth $\frac{\mathcal{D} + \mathcal{D}''}{\mathcal{D}'}$ eingeführt,

von welchem der wahre Werth $= 1 + \frac{\partial \vartheta''}{2 \eta \eta' r r' \cos f \cos f' \cos f''}$ um eine Grösse der zweiten Ordnung verschieden ist. (Art. 128).

133.

Da die Cosinuse der Winkel f, f', f'' , ebenso wie die Grössen η, η'' von der Einheit um eine Differenz der zweiten Ordnung verschieden sind, so sieht man, dass ein Fehler vierter Ordnung begangen wird, wenn statt $\frac{n+n''}{n}$ der genäherte Werth $1 + \frac{\partial \vartheta''}{2 r r' r''}$ eingeführt wird. Falls daher anstatt der Gleichung des Art. 114 die folgende angewandt wird:

$$a \delta = b + \frac{c \vartheta + d \vartheta''}{\delta'} \left(1 + \frac{\partial \vartheta''}{2 r r' r''} \right),$$

so wird sich in dem Werthe des Abstandes δ' ein Irrthum zweiter Ordnung ergeben, wenn die äusseren Beobachtungen von den mittleren gleichen Abstand haben, oder ein Fehler erster Ordnung in den übrigen Fällen. Diese neue Form jener Gleichung ist jedoch zur Bestimmung von δ' nicht geeignet, weil sie die noch unbekanntenen Grössen r, r', r'' enthält.

Allgemein gesprochen entfernen sich die Grössen $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ von der Einheit um eine Differenz der ersten Ordnung, und ebenso das Product $\frac{r r''}{r' r'}$. In dem besonderen, schon oft erwähnten Falle sieht man leicht, dass dieses Product nur um eine Differenz der zweiten Ordnung von der Einheit verschieden sei. Ja, wenn die Bahnform der Ellipse nur wenig excentrisch ist, so dass die Excentricität als eine Grösse der ersten Ordnung sich betrachten lässt, so würde die Differenz von $\frac{r r''}{r' r'}$ zu einer noch um einen Grad höheren Ordnung gehören können. Es ist daher klar, dass jener Fehler von derselben Ordnung wie vorher bleiben werde, wenn in unserer Gleichung statt $\frac{\partial \vartheta''}{2 r r' r''}$ gesetzt wird $\frac{\partial \vartheta''}{2 r'^3}$, wodurch sie folgende Form erhält:

$$a \delta = b + \frac{c \vartheta + d \vartheta''}{\delta'} \left(1 + \frac{\partial \vartheta''}{2 r'^3} \right).$$

- (149) Auch diese Gleichung enthält zwar noch die unbekannte Grösse r' , welche sich aber offenbar eliminiren lässt, da sie nur von δ und bekannten Grössen abhängig ist. Würde die Gleichung alsdann gehörig geordnet, so wäre sie eine des achten Grades.

134.

Aus dem Vorstehenden ist bereits der Grund ersichtlich, warum wir in unserer Methode für x, y resp. die Grössen $\frac{n''}{n} = P$ und $2\left(\frac{n+\eta''}{n} - 1\right)r'^2 = Q$ annehmen wollen. Denn es ist zuerst klar, dass, wenn P und Q als bekannt angesehen werden, sich daraus δ mittelst der Gleichung

$$a\delta = b + \frac{c + dP}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2}\right)$$

bestimmen lasse und sodann δ und δ' durch die Gleichungen [4] und [6] des Artikels 114, indem man hat

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2}\right), \quad \frac{n''}{n'} = \frac{P}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2}\right).$$

Zweitens ist offenbar, dass bei der ersten Hypothese für die Grössen P und Q , deren genau wahre Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{\eta}{\eta''}$ und $\frac{\vartheta' r'' \vartheta \vartheta''}{r r'' \eta \eta'' \cos f \cos f' \cos f''}$ sind, sofort die genäherten Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta \vartheta''$ sich darbieten, eine Hypothese, aus welcher in die Bestimmung von δ und mithin auch von δ, δ' Fehler der ersten Ordnung übergehen, oder von der zweiten Ordnung in dem mehrfach erwähnten Specialfalle. Obgleich man sich übrigens im Allgemeinen auf diese Schlussfolgerungen fest verlassen darf, so können sie doch in einem besondern Falle ihre Beweiskraft verlieren, falls nämlich die Grösse $(0.1.2)$, die im Allgemeinen von der dritten Ordnung ist, zufällig = Null wird, oder doch so klein, dass sie einer höheren Ordnung angehören muss. Dies geschieht, falls die geocentrische Bewegung an der Himmelskugel nahe an dem mittleren Orte einen Einbiegungspunkt zeigt. Um daher diese Methode benutzen zu können, ist es schliesslich offenbar nothwendig erforderlich, dass die heliocentrische Bewegung innerhalb der drei Beobachtungen nicht zu beträchtlich sei. Diese Einschränkung aber kann nach der Natur der sehr verwickelten Aufgabe

in keiner Weise vermieden werden, und ist auch nicht für einen Nachtheil zu halten, da man stets wünschen wird, die erste Bestimmung der unbekannteten Bahn eines neuen Himmelskörpers baldmöglichst zu beginnen. Ausserdem ist jene Einschränkung, wie die unten gegebenen Beispiele zeigen werden, in ziemlich weitem Sinne zu verstehen.

135.

Die vorstehenden Untersuchungen sind zu dem Zwecke angeführt, damit die Grundsätze, worauf sich meine Methode stützt, und gleichsam ihr wahrer Nerv desto klarer durchblickt werden. Die Durchführung selbst aber wird die Methode in einer ganz verschiedenen Gestalt darstellen, welche ich nach sehr häufigen Anwendungen als die bequemste unter vielen andern von (150) mir versuchten empfehlen kann. Da bei der Bestimmung einer unbekannteten Bahn aus drei Beobachtungen das ganze Geschäft sich stets auf einige Hypothesen, oder vielmehr successive Annäherungen zurückführen lässt, so ist es als ein sehr grosser Vortheil zu erachten, wenn es gelingt, die Rechnung derartig anzuordnen, dass gleich von Anfang an so viele Operationen als möglich, die nicht von P und Q , sondern einzig von der Combination bekannter Grössen abhängen, von den Hypothesen selbst sich trennen lassen. Man braucht dann offenbar die vorläufigen, allen einzelnen Hypothesen gemeinsamen Operationen nur einmal auszuführen, und die Hypothesen selbst werden auf so wenig Operationen wie möglich reducirt. Auch ist es dabei von grossem Werthe, wenn man nicht nöthig hat, bei den einzelnen Hypothesen bis zu den Elementen selbst vorzuschreiten, sondern wenn man sich deren Berechnung bis zur letzten Hypothese aufsparen kann. In beider Hinsicht dürfte meine Methode, welche ich jetzt auseinandersetzen will, nichts zu wünschen übrig lassen.

136.

Vor allen Dingen muss man die drei heliocentrischen Orte der Erde an der Himmelskugel A, A', A'' (Fig. 4) mit den drei entsprechenden geocentrischen Orten des Himmelskörpers B, B, B'' durch grösste Kreise verbinden, und sowohl die Lage dieser grössten Kreise in Beziehung auf die Ecliptik

(wenn man nämlich letztere zur Grundebene wählt), als in ihnen die Lage der Punkte B, B', B'' berechnen. Es seien $\alpha, \alpha', \alpha''$ drei geocentrische Längen des Himmelskörpers, β, β', β'' dessen Breiten, l, l', l'' die heliocentrischen Längen der Erde, deren Breiten = Null gesetzt werden (Artt. 117, 72). Es seien ferner $\gamma, \gamma', \gamma''$ die Neigungen der grössten Kreise, welche von A, A', A'' beziehungsweise nach B, B', B'' gezogen sind, gegen die Ecliptik. Um in Bestimmung dieser Neigungen eine feste Regel zu befolgen, wollen wir sie beständig in Beziehung auf denjenigen Theil der Ecliptik messen, welcher von den Punkten A, A', A'' nach der Ordnung der Zeichen belegen ist, so dass ihre Grösse von 0 bis zu 360° durchgezählt wird, oder, was auf dasselbe herauskommt, im nördlichen Theile von 0 bis 180°, im südlichen von 0 bis —180°. Die Bogen $AB, A'B, A''B$, die man stets zwischen 0 und 180° setzen kann, bezeichne ich mit $\delta, \delta', \delta''$. So hat man für die Bestimmung von γ, δ die Formeln:

$$[1] \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin(\alpha - l)}$$

$$[2] \quad \operatorname{tang} \delta = \frac{\operatorname{tang}(\alpha - l)}{\cos \gamma},$$

welchen man zur Prüfung der Rechnung hinzuffügen kann:

$$(151) \quad \sin \delta = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \cos \delta = \cos \beta \cos(\alpha - l).$$

Zur Bestimmung von $\gamma', \delta', \gamma'', \delta''$ dienen offenbar ganz analoge Formeln. Würde gleichzeitig $\beta = 0, \alpha - l = 0$ oder $= 180^\circ$, d. h. befände sich der Körper zugleich in der Opposition oder Conjunction und in der Ecliptik, so würde γ unbestimmt bleiben; aber ich setze voraus, dass dieser Fall bei keiner der drei Beobachtungen Statt habe.

Wenn statt der Ecliptik der Aequator als Grundebene gewählt wird, so müsste man, um die Lage der drei grössten Kreise in Beziehung auf den Aequator zu bestimmen, ausser den Neigungen noch überher die Rectascensionen der Einschnitte mit dem Aequator berechnen, und auch ausser den Abständen der Punkte B, B', B'' von diesen Einschnitten annoch die Abstände der Punkte A, A', A'' von denselben bestimmen. Da dies von der im Art. 110 behandelten Aufgabe abhängig ist, so halte ich mich hier bei der Entwicklung der Formeln nicht weiter auf.

137.

Das zweite Geschäft bildet die Bestimmung der relativen Lage jener drei grössten Kreise unter sich, die von der Lage der gegenseitigen Einschnitte und von den Neigungen abhängig ist. Da ich dieses ohne Zweideutigkeit auf klare und allgemeine Begriffe zurückzuführen wünsche, so dass man nicht für die einzelnen verschiedenen Fälle auf besondere Figuren zu recurriren braucht, so muss ich einige vorgängige Erläuterungen voraus schicken. Zuerst muss man nämlich in jedem grössten Kreise zwei entgegengesetzte Richtungen unterscheiden, was dadurch geschieht, dass man die eine als eine vorschreitende oder positive, die andere als eine rückgängige oder negative betrachtet. Da dies an sich ganz willkürlich ist, so will ich, um eine feste Norm aufzustellen, stets die Richtungen von A, A', A'' nach B, B', B'' hin als positive betrachten, so z. B. wenn die Einschnidung des ersten Kreises mit dem zweiten durch eine positive Distanz vom Punkte A dargestellt wird, so ist dies so zu verstehen, dass sie von A gen B hin (wie D' in unserer Figur) zu nehmen sei; wenn sie aber negativ wäre, so müsste sie von der anderen Seite von A genommen werden. Sodann aber zweitens, werden auch die beiden Halbkugeln, in welche jeder grösste Kreis die ganze Kugel zertheilt, durch schiekliche Benennungen von einander zu unterscheiden sein. Und zwar will ich diejenige Halbkugel die obere nennen, welche dem an der inneren Kugelfläche einen grössten Kreis in vorschreitender Richtung Durchwandernden zur Rechten ist; die andere die untere. Die obere Region wird daher analog sein der nördlichen Halbkugel in Beziehung auf Ecliptik oder Aequator, die untere der südlichen.

Hat man dies richtig verstanden, so wird man leicht beide Einschnitte der grössten Kreise von einander unterscheiden können; in dem einen Einschnitte nämlich lenkt der erste Kreis aus der untern Region des zweiten in die obere, oder, was dasselbe ist, der zweite aus der oberen Region des ersten in die untere. Bei dem zweiten Einschnitte findet das Gegentheil Statt. An und für sich ist es freilich ganz gleichgültig, welche Einschnitte wir bei unserem Problem auswählen wollen. Um aber auch hier nach einer unveränderlichen Norm zu verfahren, wollen wir stets diejenigen (D, D', D'' in Fig. 4)

annehmen, wo resp. der dritte Kreis $A''B'$ in des zweiten $A'B'$, der dritte in des ersten AB , der zweite in des ersten obere Region übergeht. Die Lage dieser Einschnitte wird durch ihre Abstände von den Punkten A' und A'' , A und A' , A und A'' bestimmt, welche wir einfach mit $A'D$, $A''D$, AD , $A'D$, AD' , $A'D'$ bezeichnen wollen. Sodann werden die gegenseitigen Neigungen der Kreise die Winkel sein, welche resp. in diesen Einschnittspunkten D , D' , D'' zwischen denjenigen Theilen der sich schneidenden Kreise enthalten sind, die in vorschreitender Richtung liegen. — Diese, stets immerhalb 0 und 180° zu nehmenden Neigungen bezeichne ich mit ϵ , ϵ' , ϵ'' . Die Bestimmung dieser neun unbekanntem Grössen aus den bekannten hängt offenbar von derselben Aufgabe ab, die im Art. 55 abgehandelt ist. Man hat daher folgende Gleichungen:

$$[3] \quad \sin \frac{1}{2} \epsilon \sin \frac{1}{2} (A'D + A''D) = \sin \frac{1}{2} (l' - l) \sin \frac{1}{2} (\gamma'' + \gamma')$$

$$[4] \quad \sin \frac{1}{2} \epsilon \cos \frac{1}{2} (A'D + A''D) = \cos \frac{1}{2} (l' - l) \sin \frac{1}{2} (\gamma'' - \gamma')$$

$$[5] \quad \cos \frac{1}{2} \epsilon \sin \frac{1}{2} (A'D - A''D) = \sin \frac{1}{2} (l' - l) \cos \frac{1}{2} (\gamma'' + \gamma')$$

$$[6] \quad \cos \frac{1}{2} \epsilon \cos \frac{1}{2} (A'D - A''D) = \cos \frac{1}{2} (l' - l) \cos \frac{1}{2} (\gamma'' - \gamma').$$

Aus den Gleichungen [3] und [4] wird $\frac{1}{2} (A'D + A''D)$ und $\sin \frac{1}{2} \epsilon$ gefunden, die beiden übrigen geben $\frac{1}{2} (A'D - A''D)$ und $\cos \frac{1}{2} \epsilon$, und so AD , $A'D$ und ϵ . Der Zweifel bei Bestimmung der Bögen $\frac{1}{2} (A'D + A''D)$, $\frac{1}{2} (A'D - A''D)$ durch die Tangenten wird mittels der Bedingung entschieden, dass $\sin \frac{1}{2} \epsilon$ und $\cos \frac{1}{2} \epsilon$ positiv herauskommen müssen, und die Uebereinstimmung von $\sin \frac{1}{2} \epsilon$ und $\cos \frac{1}{2} \epsilon$ dient zur Prüfung der ganzen Rechnung.

Die Bestimmung der Grössen AD' , $A''D'$, ϵ' , AD'' , $A'D''$, ϵ'' geschieht auf ganz ähnliche Weise, und es wird nicht nöthig sein, die zu dieser Berechnung anzuwendenden acht Gleichungen hierher zu übertragen, da sie von selbst aus den Gleichungen 3—6 folgen, wenn

$$\begin{array}{l} AD'' \left| \begin{array}{l} A'D'' \\ A''D'' \end{array} \right| \begin{array}{l} \epsilon'' \\ \epsilon'' \end{array} \left| \begin{array}{l} l' - l' \\ l' - l' \end{array} \right| \begin{array}{l} \gamma'' \\ \gamma'' \end{array} \left| \begin{array}{l} \gamma'' \\ \gamma'' \end{array} \right| \\ \text{mit } AD' \left| \begin{array}{l} A'D' \\ A''D' \end{array} \right| \begin{array}{l} \epsilon' \\ \epsilon' \end{array} \left| \begin{array}{l} l' - l' \\ l' - l' \end{array} \right| \begin{array}{l} \gamma'' \\ \gamma'' \end{array} \left| \begin{array}{l} \gamma' \\ \gamma' \end{array} \right| \text{ oder} \\ \text{mit } AD'' \left| \begin{array}{l} A'D'' \\ A''D'' \end{array} \right| \begin{array}{l} \epsilon'' \\ \epsilon'' \end{array} \left| \begin{array}{l} l' - l' \\ l' - l' \end{array} \right| \begin{array}{l} \gamma'' \\ \gamma'' \end{array} \left| \begin{array}{l} \gamma' \\ \gamma' \end{array} \right| \end{array}$$

resp. vertauscht werden.

Eine neue Prüfung der ganzen Rechnung lässt sich noch aus der gegenseitigen Relation zwischen den Seiten und den Winkeln des von den Punkten D , D' , D'' gebildeten sphärischen Dreiecks ableiten, woraus man folgende

ganz allgemein geltenden Gleichungen erhält, welche Lage auch diese Punkte haben mögen:

$$\frac{\sin(AD' - AD'')}{\sin \epsilon} = \frac{\sin(A'D - A'D'')}{\sin \epsilon'} = \frac{\sin(A''D - A''D'')}{\sin \epsilon''}.$$

Wenn endlich der Aequator an Stelle der Ecliptik zur Grundebene (153) gewählt wird, so erleidet die Rechnung nur die Aenderung, dass man für die heliocentrischen Orte der Erde A, A', A'' diejenigen Punkte des Aequators substituiren muss, wo er von den Kreisen $AB, A'B, A''B''$ geschnitten wird. Man nimmt daher für l, l', l'' die Rectascensionen dieser Einschnitte, und für $A'D$ die Distanz des Punktes D vom zweiten Einschnitte u. s. w.

138.

Das dritte Geschäft besteht nun darin, dass man die beiden äussersten geocentrischen Orte des Himmelskörpers, d. h. die Punkte B, B' durch einen grössten Kreis verbindet, und des letzteren Einschnitt mit dem grössten Kreise $A'B'$ bestimmt. Es sei B'' dieser Einschnitt, und $\delta - \sigma$ dessen Abstand vom Punkte A' , sowie α' dessen Länge, β' die Breite. Man hat also, weil B, B', B'' in demselben grössten Kreise liegen, die bekannte Gleichung:

$$0 = \tan \beta \sin(\alpha'' - \alpha') - \tan \beta' \sin(\alpha'' - \alpha) + \tan \beta'' \sin(\alpha' - \alpha),$$

welche, wenn man $\tan \gamma' \sin(\alpha' - l')$ für $\tan \beta''$ substituirt, folgende Gestalt annimmt:

$$0 = \begin{cases} \cos(\alpha' - l') \{ \tan \beta \sin(\alpha'' - l) - \tan \beta' \sin(\alpha - l') \} \\ - \sin(\alpha' - l') \{ \tan \beta \cos(\alpha'' - l) + \tan \gamma' \sin(\alpha'' - \alpha) - \tan \beta'' \cos(\alpha - l') \}. \end{cases}$$

Da nun $\tan(\alpha' - l') = \cos \gamma' \tan(\delta - \sigma)$, so hat man

$$\tan(\delta - \sigma) = \frac{\tan \beta \sin(\alpha'' - l) - \tan \beta' \sin(\alpha - l')}{\cos \gamma' (\tan \beta \cos(\alpha'' - l) - \tan \beta'' \cos(\alpha - l')) + \sin \gamma' \sin(\alpha'' - \alpha)}.$$

Hieraus leitet man die folgenden, zur numerischen Rechnung bequemereren Gleichungen ab.

Man setze

$$[7] \quad \tan \beta \sin(\alpha'' - l) - \tan \beta' \sin(\alpha - l) = S$$

$$[8] \quad \tan \beta \cos(\alpha'' - l) - \tan \beta' \cos(\alpha - l) = T \sin t$$

$$[9] \quad \sin(\alpha'' - \alpha) = T \cos t,$$

(Art. 14, II), und es wird sein:

$$[10] \quad \text{tang}(\delta - \sigma) = \frac{S}{T \sin(\epsilon + \gamma')}.$$

Die Zweideutigkeit in Bestimmung des Bogens $\delta - \sigma$ durch die Tangente entsteht daraus, dass die grössten Kreise AB , BB' in zwei Punkten sich schneiden. Ich nehme für B' stets den dem Punkte B nächsten Einschnitt, so dass σ immer zwischen die Grenzen -90° und $+90^\circ$ fällt, wodurch jene Zweideutigkeit gehoben wird. Gemeiniglich wird dann der Werth des Bogens σ (der von der Curvatur der geocentrischen Bewegung abhängt) eine hinlänglich (154) mässige Grösse sein, und zwar, allgemein gesprochen, von der zweiten Ordnung, wenn die Zeitintervalle als Grössen erster Ordnung angesehen werden.

Welche Modificationen bei der Rechnung anzubringen sind, wenn statt der Ecliptik der Aequator als Grundebene gewählt wird, ist aus der Anmerkung des vorhergehenden Artikels von selbst klar.

Übrigens bleibt die Lage des Punktes B' dann offenbar unbestimmt, wenn die Kreise BB' , AB überhaupt zusammenfallen sollten; diesen Fall, wo die vier Punkte A , B , B' , B'' in demselben grössten Kreise liegen würden, schliesse ich von unserer Untersuchung aus. Es ist aber auch angemessen, bei Auswahl der Beobachtungen selbst den Fall zu vermeiden, wo die Lage dieser vier Punkte nur wenig von einem grössten Kreise abweicht, widrigenfalls die Lage des Punktes B' , welche bei den nachfolgenden Operationen von grosser Wichtigkeit ist, durch die kleinsten Beobachtungsfehler zu sehr afficirt werden und sich nicht mit der nöthigen Genauigkeit bestimmen lassen würde. Ebenso würde der Punkt B' dann unbestimmt bleiben, wenn die Punkte B , B' in einen einzigen zusammenfielen[†]), in welchem Falle die Position des Kreises BB' unbestimmt bleiben würde. Ich schliesse deshalb auch diesen Fall aus, sowie man sich denn auch aus ähnlichen Gründen wie die vorigen derjenigen Beobachtungen zu enthalten hat, bei welchen der erste und letzte geocentrische Ort in Punkte der Kugel fallen, die sich sehr nahe sind.

†) Oder auch dann, wenn letztere sich entgegengesetzt sind, aber von diesem Falle spreche ich nicht, weil unsere Methode nicht auf Beobachtungen ausgedehnt werden kann, die einen so grossen Zeitraum umfassen.

139.

Es seien an der Himmelskugel C, C', C'' die drei heliocentrischen Orte des Himmelskörpers, welche resp. in den grössten Kreisen $AB, A'B', A''B''$, und zwar zwischen A und B, A' und B', A'' und B'' belegen sein werden (Art. 64, III); ausserdem werden die Punkte C, C', C'' in demselben grössten Kreise liegen, nämlich in demjenigen, welchen die Bahnebene an der Himmelskugel projicirt. Ich bezeichne mit r, r', r'' die drei Entfernungen des Himmelskörpers von der Sonne; mit $\varrho, \varrho', \varrho''$ dessen Abstände von der Erde; mit R, R', R'' die drei Abstände der Erde von der Sonne. Ferner setze ich die Bögen $C'C'', C'C', CC''$ resp. $= 2f, 2f', 2f''$, und $r'r'' \sin 2f = n, r'r' \sin 2f' = n', r'r \sin 2f'' = n''$. Man hat daher $f' = f + f'', AC + CB = \delta, A'C' + C'B' = \delta', A''C'' + C''B'' = \delta''$ und sodann

$$\begin{aligned} \frac{\sin \delta}{r} &= \frac{\sin AC}{\varrho} = \frac{\sin CB}{R} \\ \frac{\sin \delta'}{r'} &= \frac{\sin A'C'}{\varrho'} = \frac{\sin C'B'}{R'} \\ \frac{\sin \delta''}{r''} &= \frac{\sin A''C''}{\varrho''} = \frac{\sin C''B''}{R''}. \end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass, sobald die Lage der Punkte C, C', C'' bekannt (155) sein würde, sich daraus die Grössen r, r', r'' und $\varrho, \varrho', \varrho''$ bestimmen liessen. Ich will nun zeigen, wie sich erstere aus den Grössen $\frac{n''}{n} = P, 2 \left(\frac{n+n''}{n} - 1 \right) r^3 = Q$ ableiten lässt, von denen, wie ich bereits oben erklärt habe, unsere Methode ausgeht.

140.

Zuerst bemerke ich, dass, wenn N irgend ein Punkt des grössten Kreises $CC'C''$ ist, und man die Abstände der Punkte C, C', C'' von dem Punkte N nach der nämlichen Richtung zählt, welche von C nach C'' geht, so dass allgemein wird:

$$NC' - NC = 2f, \quad NC'' - NC = 2f', \quad NC - NC'' = 2f'',$$

man folgende Gleichung habe:

$$0 = \sin 2f \sin NC - \sin 2f' \sin NC' + \sin 2f'' \sin NC'' \dots\dots\dots (I).$$

Nun gehe ich davon aus, dass N im Einschnitte der grössten Kreise $BB'B'$, $CC'C''$ genommen sei, gleichsam im aufsteigenden Knoten des ersteren auf dem zweiten. Ich bezeichne mit \mathfrak{G} , \mathfrak{G}' , \mathfrak{G}'' , \mathfrak{D} , \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' resp. die Abstände der Punkte C , C' , C'' , D , D' , D'' von dem grössten Kreise $BB'B'$, die von einer der beiden Seiten positiv, von der anderen entgegengesetzten negativ zu nehmen sind. Darnach werden offenbar $\sin \mathfrak{G}$, $\sin \mathfrak{G}'$, $\sin \mathfrak{G}''$ resp. proportional sein $\sin NC$, $\sin NC'$, $\sin NC''$, wodurch die Gleichung (I) folgende Gestalt erhält:

$$0 = \sin 2f \sin \mathfrak{G} - \sin 2f' \sin \mathfrak{G}' + \sin 2f'' \sin \mathfrak{G}''.$$

oder, wenn man mit $r r' r''$ multiplicirt,

$$0 = n r \sin \mathfrak{G} - n' r' \sin \mathfrak{G}' + n'' r'' \sin \mathfrak{G}'' \dots\dots\dots (II).$$

Ferner ist klar, dass sich verhalte $\sin \mathfrak{G}$ zu $\sin \mathfrak{D}'$ wie der Sinus des Abstandes des Punktes C von B zum Abstände des Punktes D' von B , wobei jeder Abstand nach derselben Richtung hin gemessen wird. Man hat daher

$$-\sin \mathfrak{G} = \frac{\sin \mathfrak{D}' \sin CB}{\sin(A'D - \delta)}$$

und auf ähnliche Weise erhält man:

$$-\sin \mathfrak{G}' = \frac{\sin \mathfrak{D}'' \sin CB'}{\sin(A'D'' - \delta')}$$

$$-\sin \mathfrak{G}'' = \frac{\sin \mathfrak{D} \sin C'B''}{\sin(A'D - \delta'' + \sigma)} = \frac{\sin \mathfrak{D} \sin C'B''}{\sin(A'D'' - \delta' + \sigma)}$$

$$-\sin \mathfrak{G}'' = \frac{\sin \mathfrak{D} \sin C''B''}{\sin(A''D - \delta'')} = \frac{\sin \mathfrak{D} \sin C''B''}{\sin(A''D - \delta'')}.$$

(156) Dividirt man daher die Gleichung (II) mit $r'' \sin \mathfrak{G}''$, so entsteht:

$$0 = n \cdot \frac{r \sin CB}{r'' \sin C''B''} \cdot \frac{\sin(A'D - \delta')}{\sin(A'D - \delta)} - n' \cdot \frac{r' \sin C'B''}{r'' \sin C''B''} \cdot \frac{\sin(A''D - \delta'')}{\sin(A'D - \delta' + \sigma)} + n''.$$

Wenn man nun hier den Bogen CB mit z bezeichnet, für r , r' , r'' ihre Werthe aus dem vorhergehenden Artikel substituirt, und der Kürze wegen setzt:

$$[11] \quad \frac{R \sin \delta \sin(A'D - \delta')}{R'' \sin \delta'' \sin(A'D - \delta)} = a$$

$$[12] \quad \frac{R' \sin \delta' \sin(A''D - \delta'')}{R'' \sin \delta'' \sin(A'D - \delta' + \sigma)} = b,$$

so verhält sich unsere Gleichung wie folgt:

$$0 = an - bn' \cdot \frac{\sin(z-\sigma)}{\sin z} + n'' \dots \dots \dots (III).$$

Der Coefficient b lässt sich auch vermittelst der, leicht aus den eben gegebenen Gleichungen abzuleitenden Formel

$$[13] \quad a \times \frac{R' \sin \delta' \sin(A'D' - \delta)}{R' \sin \delta \sin(A'D' - \delta' + \sigma)} = b$$

berechnen. Zur Prüfung der Rechnung wird es gut sein, beide Formeln [12] und [13] zu benutzen.

Falls $\sin(A'D' - \delta' + \sigma)$ grösser ist als $\sin(A'D - \delta' + \sigma)$, so wird die zweite Formel von den unvermeidlichen Tafelfehlern weniger afficirt, als die erste, und ist daher dieser vorzuziehen, wenn sich eine kleine, hieraus zu erklärende Verschiedenheit in den Werthen von b ergeben sollte. Dagegen verdient die erste Formel mehr Vertrauen, sobald $\sin(A'D' - \delta' + \sigma)$ kleiner ist als $\sin(A'D - \delta' + \sigma)$. Wenn man will, kann man ein schickliches Mittel zwischen beiden Werthen nehmen.

Zur Prüfung der Rechnung lassen sich auch die nachfolgenden Formeln brauchen, deren nicht so schwierige Ableitung ich indess der Kürze wegen weglassen:

$$0 = \frac{a \sin(l'' - l')}{R'} - \frac{b \sin(l'' - l)}{R'} \cdot \frac{\sin(\delta' - \sigma)}{\sin \delta'} + \frac{\sin(l' - l)}{R'}$$

$$b = \frac{R' \sin \delta'}{R'' \sin \delta''} \cdot \frac{U \cos \beta \cos \delta''}{\sin(A'D' - \delta) \sin \epsilon'}$$

wo U den Quotienten

$$\frac{S}{\sin(\delta' - \sigma)} = \frac{T \sin(t + \gamma')}{\cos(\delta' - \sigma)}$$

(Art. 138, Gleichung 10) bezeichnet.

141.

Aus $P = \frac{n''}{n}$ und der Gleichung (III) des vorhergehenden Artikels folgt:

$$(n + n'') \frac{P + a}{P + 1} = bn' \frac{\sin(z - \sigma)}{\sin z}. \quad \text{Hieraus aber sowie aus}$$

$$Q = 2 \left(\frac{n + n''}{n} - 1 \right) r'^3 \quad \text{und} \quad r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z} \quad \text{erhält man} \quad (157)$$

$$\sin z + \frac{Q \sin z^4}{2R^2 \sin \delta'^2} = b \frac{P+1}{P+a} \sin(z-a), \quad \text{oder}$$

$$\frac{Q \sin z^4}{2R^2 \sin \delta'^2} = \left(b \frac{P+1}{P+a} - \cos \sigma \right) \sin(z-a) - \sin \sigma \cos(z-a).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$[14] \quad \frac{1}{2R^2 \sin \delta'^2 \sin \sigma} = c$$

und führt den Hilfswinkel ω so ein, dass

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\sin \sigma}{b \frac{P+1}{P+a} - \cos \sigma}$$

wird, so erhält man die Gleichung (IV)

$$cQ \sin \omega \sin z^4 = \sin(z-\omega-a),$$

woraus man die Unbekannte z bestimmen muss. Zur bequemerem Berechnung des Winkels ω lässt sich die vorige Formel für $\operatorname{tang} \omega$ so darstellen:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{(P+a) \operatorname{tang} \sigma}{P \left(\frac{b}{\cos \sigma} - 1 \right) + \left(\frac{b}{\cos \sigma} - a \right)}.$$

Setzt man daher

$$[15] \quad \frac{\frac{b}{\cos \sigma} - a}{\frac{b}{\cos \sigma} - 1} = d$$

$$[16] \quad \frac{\operatorname{tang} \sigma}{\frac{b}{\cos \sigma} - 1} = e,$$

so hat man zur Bestimmung von ω die einfache Formel:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{e(P+a)}{P+d}.$$

Die Berechnung der Grössen a, b, c, d, e aus den Formeln 11—16, welche lediglich von gegebenen Grössen abhängt, kann man als das vierte Geschäft betrachten. Die Grössen b, c, e selbst hat man nicht nöthig, sondern nur ihre Logarithmen.

Übrigens giebt es einen besondern Fall, in welchem obige Vorschriften einiger Abänderung bedürfen. Falls nämlich der grösste Kreis BB' mit $A'B'$ (158) zusammenfällt und deshalb die Punkte B, B' mit D, D' , so würden a, b unendliche Werthe erhalten. Setzt man in diesem Falle

$$\frac{R \sin \delta \sin(A'D' - \delta' + \sigma)}{R' \sin \delta' \sin(A'D' - \delta)} = \pi,$$

so hat man statt der Gleichung III folgende: $0 = \pi n - \frac{n' \sin(z - \sigma)}{\sin z}$, woraus man dieselbe Gleichung IV erhält, wenn man macht

$$\text{tang } \omega = \frac{\pi \sin \sigma}{P + (1 - \pi \cos \sigma)}.$$

Ebenso wird in dem besonderen Falle, wo $\sigma = 0$, die Grösse c unendlich und $\omega = 0$, woraus der Factor $c \sin \omega$ in der Gleichung IV unbestimmt zu sein scheint; nichtsdestoweniger ist er in Wahrheit bestimmt und sein Werth $= \frac{P+a}{2R^2 \sin \delta'^2 (b-1)(P+d)}$, wie eine kleine Aufmerksamkeit lehren wird. In diesem Falle wird daher $\sin z = R' \sin \delta' \sqrt{\frac{2(b-1)(P+d)}{Q(P+a)}}$.

142.

Die Gleichung IV, welche entwickelt zur achten Ordnung aufsteigen würde, wird in ihrer ungeänderten Form durch Versuche sehr rasch aufgelöst. Uebrigens zeigt die Theorie der Gleichungen (was weiter zu entwickeln ich hier jedoch der Kürze wegen unterlasse), dass diese Gleichung entweder zwei, oder vier Auflösungen durch reelle Werthe zulasse. Im ersteren Falle wird der eine Werth von $\sin z$ positiv sein, den anderen negativen muss man verwerfen, weil nach der Natur der Aufgabe γ' nicht negativ herauskommen kann. Im zweiten Falle wird von den Werthen für $\sin z$ entweder einer positiv sein und die andern drei negativ — wo es daher nicht zweifelhaft ist, welchen man annehmen muss — oder man hat drei positive mit einem negativen. In diesem Falle muss man auch von den positiven Werthen, wenn solche da sind, diejenigen verwerfen, wo z grösser herauskommt als δ' , weil vermöge einer andern wesentlichen Bedingung der Aufgabe ϱ' und deshalb auch $\sin(\delta' - z)$ eine positive Grösse sein muss.

So oft die Beobachtungen um mässige Zeiträume von einander entfernt sind, wird gemeinlich der letztere Fall Statt haben, dass drei positive Werthe für $\sin z$ der Gleichung Genüge thun. Unter diesen Auflösungen pflegt ausser der wahren noch eine gefunden zu werden, wo z wenig

von δ verschieden, bald etwas grösser, bald etwas kleiner ist. Diese Erscheinung ist auf folgende Weise zu erklären. Die analytische Behandlung unserer Aufgabe ist allein auf die Bedingung gestützt, dass die drei Orte des Körpers im Raume in geraden Linien liegen müssen, deren Lage durch den absoluten Ort der Erde und die beobachtete Position bestimmt wird. Schon nach der Natur der Sache müssen zwar jene Orte in denjenigen Seiten
 (159) der geraden Linien liegen, woher das Licht auf die Erde herabgelaugt; aber die analytischen Gleichungen erkennen diese Einschränkung nicht an, und müssen alle, mit den Kepler'schen Gesetzen übereinstimmende Ortschaften auf gleiche Weise umfassen, sei es nun, dass letztere von dieser Seite der Erde her in diesen geraden Linien liegen, oder von jener Seite her, oder sei es endlich, dass sie mit der Erde selbst zusammenfallen. Auch dieser letzte Fall würde unserer Aufgabe Genüge leisten, da die Erde selbst nach Norm jener Gesetze sich bewegt. Hieraus sieht man, dass die Gleichungen auch diejenige Auflösung begreifen müssen, in welcher die Punkte C , C' , C'' mit den Punkten A , A' , A'' zusammenfallen (insoweit man die sehr kleinen Veränderungen vernachlässigt, welchen die elliptischen Erdorte vermöge der Störungen und der Parallaxe unterworfen sind). Die Gleichung IV muss daher stets die Auflösung $z = \delta$ zulassen, wenn für P und Q die den Erdorten entsprechenden wahren Werthe genommen werden. Falls mithin jenen Grössen Werthe beigemessen werden, die von diesen nicht viel verschieden sind (was sich immer annehmen lässt, wenn die Zwischenzeiten mässig sind), so muss unter den Auflösungen der Gleichung IV nothwendig eine gefunden werden, welche sehr nahe an den Werth $z = \delta$ herankommt.

Gemeinlich wird zwar in dem Falle, wo die Gleichung IV drei Auflösungen durch positive Werthe für z zulässt, die dritte Lösung (ausser der wahren und der, von welcher wir eben gesprochen haben) einen Werth von z geben, der grösser als δ und deshalb analytisch ebenso möglich, physisch aber unnützlich ist. Dann kann es daher nicht zweifelhaft sein, welchen man nehmen muss. Es kann sich aber auch ereignen, dass jene Gleichung zwei verschiedene schiefliehe Auflösungen zulässt, und dann würde sich unserer Aufgabe durch zwei ganz verschiedene Bahnen Genüge leisten lassen. Uebrigens ist in einem solchen Falle die wahre Bahn von der falschen leicht zu unter-

scheiden, sobald nur erst andere mehr entfernte Beobachtungen zur Prüfung hinzugezogen werden können.

143.

Sobald der Winkel z gefunden ist, hat man sofort r' durch die Gleichung $r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z}$. Ferner erhält man aus den Gleichungen $P = \frac{n''}{n}$ und (III)

$$\frac{n' r'}{n} = \frac{(P+a) R' \sin \delta'}{b \sin(z-\sigma)}$$

$$\frac{n' r'}{n''} = \frac{1}{P} \cdot \frac{n' r'}{n}.$$

Um die Formeln, welche zur Bestimmung der Lage der Punkte C , C' aus der Lage des Punktes C'' dienen, so abzuhandeln, dass ihre allgemeine Wahrheit auch für diejenigen Fälle sofort einleuchte, welche die Fig. 4 nicht zeigt, bemerke ich, dass der Sinus des Abstandes des Punktes C' vom grössten Kreise CB (positiv genommen in der oberen Region, negativ in der untern) gleich sei dem Producte von $\sin \epsilon''$ in den Sinus des Abstandes (160) des Punktes C'' von D' (nach der vorschreitenden Richtung gemessen) und daher $= -\sin \epsilon'' \sin C' D'' = -\sin \epsilon'' \sin(z + A' D' - \delta')$. Ebenso wird der Sinus des Abstandes des Punktes C'' von demselben grössten Kreise $= -\sin \epsilon' \sin C'' D'$. Offenbar aber verhalten sich dieselben Sinusse wie $\sin CC'$ zu $\sin CC''$, oder wie $\frac{n''}{r' r''}$ zu $\frac{n'}{r' r''}$, oder wie $n'' r''$ zu $n' r'$. Setzt man daher $C'' D' = \zeta''$, so hat man

$$V. \quad r'' \sin \zeta'' = \frac{n' r'}{n''} \cdot \frac{\sin \epsilon''}{\sin \epsilon'} \sin(z + A' D' - \delta').$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man, wenn $C D' = \zeta$ gesetzt wird,

$$VI. \quad r \sin \zeta = \frac{n' r'}{n} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon'} \sin(z + A' D' - \delta')$$

$$VII. \quad r \sin(\zeta + A D'' - A D) = r'' P \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon''} \sin(\zeta'' + A'' D - A' D).$$

Durch Combination der Gleichungen V und VI mit den folgenden, aus Art. 139 heritibergeschriebenen:

$$VIII. \quad r'' \sin(\zeta'' - A'' D' + \delta'') = R'' \sin \delta''$$

$$\text{IX. } r \sin(\zeta - AD' + \delta) = R \sin \delta$$

lassen sich die Grössen ζ , ζ' , r , r' nach Anleitung des Art. 78 daraus bestimmen. Zur bequemen Erledigung der Rechnung bringe ich noch folgende Formeln bei. Man setze:

$$[17] \quad \frac{R \sin \delta}{\sin(A'D - \delta)} = x$$

$$[18] \quad \frac{R' \sin \delta''}{\sin(A''D' - \delta'')} = x''$$

$$[19] \quad \frac{\cos(A'D - \delta)}{R \sin \delta} = \lambda$$

$$[20] \quad \frac{\cos(A''D' - \delta'')}{R' \sin \delta''} = \lambda''.$$

Die von P und Q noch unabhängige Berechnung dieser Grössen oder vielmehr ihrer Logarithmen kann als das fünfte und letzte Geschäft bei den Präliminar-Operationen angesehen werden, und wird dasselbe sogleich bequem mit der Berechnung von a , b oder mit dem vierten Geschäft erledigt, wo $a = \frac{x}{x'}$ wird. Macht man sodann:

$$\begin{aligned} \frac{n' r'}{n} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} \cdot \sin(z + A'D - \delta) &= p \\ \frac{n' r'}{n''} \cdot \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon''} \cdot \sin(z + A'D' - \delta') &= p'' \\ (161) \quad x(\lambda p - 1) &= q \\ x''(\lambda'' p'' - 1) &= q'', \end{aligned}$$

so erhält man ζ und r aus $r \sin \zeta = p$, $r \cos \zeta = q$, und ζ' , sowie r' , aus $r' \sin \zeta' = p'$, $r' \cos \zeta' = q'$. Ein Zweifel in Bestimmung von ζ und ζ'' kann hier nicht obwalten, weil r und r'' nothwendig als positive Grössen herauskommen müssen. Die vollständige Rechnung mittelst der Gleichung VII kann zur Prüfung dienen.

Es giebt aber zwei Fälle, wo man eine andere Methode befolgen muss. So oft nämlich der Punkt D mit B entweder zusammenfällt, oder auf der Kugel ihm entgegengesetzt ist, oder so oft $A'D - \delta = 0$ oder $= 180^\circ$, so müssen die Gleichungen VI und IX nothwendig identisch sein, und es würde daher $x = \infty$, $\lambda p - 1 = 0$ werden und mithin q unbestimmt bleiben. In diesem Falle werden zwar ζ'' und r'' auf dieselbe oben gezeigte Art bestimmt,

sodann aber muss man ζ und r aus Combination der Gleichung VII mit VI oder IX ableiten. Ich unterlasse es, die aus dem Art. 78 zu entnehmenden Formeln hier nochmals herzuschreiben, und bemerke nur, dass in dem Falle, wo $AD - \delta$ zwar nicht $= 0$ und auch nicht $= 180^\circ$, doch aber ein sehr kleiner Bogen ist, man besser thut, dieselbe Methode zu befolgen, weil dann die erstere Methode nicht die nöthige Schärfe zulassen würde. Und zwar möge man die Combination der Gleichung VII mit VI oder mit IX annehmen, je nachdem $\sin(AD' - AD)$ grösser oder kleiner ist, als $\sin(A'D' - \delta)$.

Ebenso würde in dem Falle, wo der Punkt D oder der ihm entgegengesetzte entweder mit B' zusammenfällt, oder nur wenig davon absteht, die Bestimmung der Grössen ζ'' , r'' durch die vorhergehende Methode entweder unmöglich werden, oder wenig Sicherheit gewähren. Dann bestimmt man daher ζ und r zwar durch jene Methode, alsdann aber ζ'' und r'' aus Combination der Gleichung VII entweder mit V oder mit VIII, jenachdem $\sin(A'D - A''D)$ grösser oder kleiner ist als $\sin(A''D - \delta'')$. Uebrigens braucht man nicht zu besorgen, dass zugleich D mit den Punkten B , B' oder den entgegengesetzten Punkten zusammenfällt, oder nur wenig von ihnen absteht; denn den Fall, wo B mit B' zusammenfällt, oder nur sehr wenig davon absteht, habe ich bereits oben im Artikel 138 von unserer Untersuchung ausgeschlossen.

144.

Hat man die Bögen ζ , ζ'' gefunden, so ist dadurch die Lage der Punkte C , C'' gegeben, und es lässt sich der Abstand $CC'' = 2f'$ aus ζ , ζ'' und ϵ' bestimmen. Es seien u , u'' die Neigungen der grössten Kreise AB , $A'B'$ zu dem grössten Kreise CC'' (welche in Fig. 4 resp. die Winkel $C'CD'$ und $180^\circ - CC''D'$ sein werden), so hat man folgende, ganz denen im Art. 137 [3]—[6] analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin f'' \sin \frac{1}{2}(u'' + u) &= \sin \frac{1}{2} \epsilon' \sin \frac{1}{2}(\zeta + \zeta'') & (162) \\ \sin f'' \cos \frac{1}{2}(u'' + u) &= \cos \frac{1}{2} \epsilon' \sin \frac{1}{2}(\zeta - \zeta'') \\ \cos f'' \sin \frac{1}{2}(u'' - u) &= \sin \frac{1}{2} \epsilon' \cos \frac{1}{2}(\zeta + \zeta'') \\ \cos f'' \cos \frac{1}{2}(u'' - u) &= \cos \frac{1}{2} \epsilon' \cos \frac{1}{2}(\zeta - \zeta''). \end{aligned}$$

Die beiden ersten geben $\frac{1}{2}(u''+u)$ und $\sin f''$, die beiden andern $\frac{1}{2}(u''-u)$ und $\cos f''$; aus $\sin f''$ und $\cos f''$ hat man f'' . Die Winkel $\frac{1}{2}(u''+u)$ und $\frac{1}{2}(u''-u)$, welche erst in der letzten Hypothese zur Bestimmung der Lage der Bahnebene gebraucht werden, kann man in den ersten Hypothesen bei Seite lassen.

Auf ganz ähnliche Weise liesse sich f aus ϵ , CD und $C'D$, sowie f'' , aus ϵ'' , CD'' und $C'D''$ bestimmen; man wendet aber hierzu bequemer die folgenden Formeln an:

$$\begin{aligned}\sin 2f &= r \sin 2f'' \cdot \frac{n}{n''r'} \\ \sin 2f'' &= r'' \sin 2f \cdot \frac{n''}{n''r''},\end{aligned}$$

wo man die Logarithmen der Grössen $\frac{n}{n''r'}$ und $\frac{n''}{n''r''}$ schon aus der früheren Rechnung vor sich hat. Eine neue Prüfung der ganzen Rechnung endlich wird dadurch gewonnen, dass $2f+2f''=2f'$ werden muss; sollte zufällig ein Unterschied Statt finden, so kann er sicherlich von keiner Bedeutung sein, wenn sonst alle Operationen so genau als möglich vollzogen sind. Bisweilen kann jedoch, falls die Rechnung allenthalben mit sieben Decimalen durchgeführt ist, dieser Irrthum auf einige Zehnthelle der Secunde steigen, welchen man, wenn es der Mühe werth scheint, mit leichter Mühe unter $2f$ und $2f''$ so vertheilen kann, dass die Logarithmen der Sinusse auf gleiche Weise entweder vermehrt oder vermindert werden, wodurch der Gleichung $P = \frac{r \sin 2f''}{r'' \sin 2f} = \frac{n''}{n}$ mit aller Schärfe, die die Tafeln zulassen, genügt sein wird. Sind f und f'' wenig verschieden, so reicht es hin, zwischen $2f$ und $2f''$ jenen Unterschied gleichmässig zu vertheilen.

145.

Nachdem man solchergestalt die Positionen des Himmelskörpers in der Bahn bestimmt hat, muss man eine doppelte Berechnung der Elemente sowohl aus Combination des zweiten Orts mit dem dritten beginnen, als aus Combination des ersten mit dem zweiten, zugleich mit den entsprechenden Zeitintervallen. Bevor man aber diese Operation unternimmt, bedürfen die Zeitintervalle noch einer Verbesserung, wenn man nämlich beschlossen hat, auf die Aberration

nach Maassgabe der dritten Methode im Art. 118 Rücksicht zu nehmen. In diesem Falle nämlich muss man statt der wirklichen Zeiten als fingirte solche (163) setzen, welche resp. um 493 ϱ , 493 ϱ' , 493 ϱ'' Secunden fröther sind. Zur Berechnung der Entfernungen ϱ , ϱ' , ϱ'' hat man die Formeln:

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{R \sin(A'D' - \zeta)}{\sin(\zeta - A'D' + \delta)} = \frac{r \sin(A'D' - \zeta)}{\sin \delta}, \\ \varrho' &= \frac{R' \sin(\delta' - z)}{\sin z} = \frac{r' \sin(\delta' - z)}{\sin \delta'}, \\ \varrho'' &= \frac{R'' \sin(A''D'' - \zeta'')}{\sin(\zeta'' - A''D'' + \delta'')} = \frac{r'' \sin(A''D'' - \zeta'')}{\sin \delta''}.\end{aligned}$$

Hat man übrigens die Beobachtungen von Anfang an sogleich nach der ersten oder zweiten Methode des Art. 118 von der Aberration befreit, so muss diese Rechnung weggelassen werden, und es würde deshalb auch nicht nöthig sein, die Werthe der Entfernungen ϱ , ϱ' , ϱ'' zu ermitteln, als um vielleicht zu prüfen, ob diejenigen Werthe, auf welche man vorher die Berechnung der Aberration gestützt hatte, genau genug waren. Schliesslich ist es von selbst klar, dass es dieser ganzen Rechnung auch alsdann nicht bedarf, wenn man die Aberration überhaupt vernachlässigen wollte.

146.

Die Berechnung der Elemente — welche man in dem einen Falle aus r' , r'' , $2f$ und der verbesserten Zwischenzeit der zweiten und dritten Beobachtung, deren Product mit der Grösse k (Art. 1) ich mit \mathcal{G} bezeichne; und im anderen Falle aus r , r' , $2f''$ und dem Zeitintervall zwischen der ersten und zweiten Beobachtung, dessen Product mit $k = \mathcal{G}''$ sein soll, anstellt — wird nach der in den Artikeln 88 bis 105 gegebenen Methode nur bis zu der dort mit y bezeichneten Grösse durchgeführt, deren Werth in der ersten Combination ich mit η , in der zweiten mit η'' bezeichnen will. Es wird daher

$$\frac{\mathcal{G}'' \eta}{\mathcal{G} \eta''} = P, \quad \frac{r' r' \mathcal{G} \mathcal{G}''}{r r'' \eta \eta'' \cos f \cos f' \cos f''} = Q,$$

und man sieht, dass, wenn die Werthe der Grössen P und Q , auf welche die ganze Rechnung bis jetzt gebaut war, die wahren sein sollten, $P = P$, $Q = Q$

herauskommen müsste. Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass, falls $P = P$, $Q = Q$ herauskommt, die doppelte Elementen-Rechnung, wenn sie von beiden Seiten zu Ende geführt wird, ganz gleiche Zahlen liefern müsste, durch welche also alle drei Beobachtungen genau dargestellt würden, und so der Aufgabe vollständig genügt würde. Falls aber nicht $P = P$, $Q = Q$ wird, so mag man $P' - P$, $Q' - Q$ für X und Y nehmen, wenn man nämlich P und Q für x , y genommen hat. Noch bequemer ist es, $\log P = x$, $\log Q = y$ zu setzen, und $\log P' - \log P = X$, $\log Q' - \log Q = Y$. Alsdann ist die Rechnung mit anderen Werthen von x , y zu wiederholen.

(164)

147.

Eigentlich würde es zwar auch hier, ebenso wie in den zehn oben abgehandelten Methoden, willkürlich sein, welche neue Werthe man für x , y in der zweiten Hypothese setzen wollte, wenn solche nur nicht den oben erklärten allgemeinen Bedingungen widersprechen. Da es jedoch offenbar ein grosser Vortheil ist, falls man sofort von etwas genaueren Werthen ausgehen kann, so würde es nicht weise sein, die zweiten Werthe gleichsam aufs Gerathewohl anzunehmen, da es in der Natur der Sache liegt, dass, wenn die ersten Werthe von P , Q nur mit kleinen Fehlern behaftet sind, sich daraus die Werthe P' , Q' viel genauer darstellen lassen, wenn anders die heliocentrische Bewegung eine mässige war. Ich will deshalb stets P' , Q' als zweite Werthe von P , Q nehmen, oder $\log P'$, $\log Q'$ als die zweiten Werthe für x , y , wenn die ersten Werthe durch $\log P$, $\log Q$ bezeichnet sind.

In dieser zweiten Hypothese, wo alle durch die Formeln 1—20 dargelegten Präliminar-Operationen unverändert beizubehalten sind, wird die Rechnung nun auf ganz ähnliche Weise wiederholt. Zuerst wird der Winkel ω , dann werden z , r' , $\frac{n'r'}{n}$, $\frac{n'r'}{n}$, ζ , r , ζ'' , r'' , f , f' , f'' bestimmt. Aus der mehr oder weniger beträchtlichen Differenz zwischen den neuen und alten Werthen dieser Grössen lässt sich leicht ermassen, ob es der Mühe werth ist oder nicht, auch die Verbesserung der Zeiten wegen der Aberration von Neuem zu berechnen. Ist dies nicht der Mühe werth, so bleiben die Zeitintervalle und deshalb auch

die Grössen ϑ und ϑ'' die nämlichen wie vorher. Schliesslich leitet man aus $f, r', r''; f'', r, r'$ und den Zwischenzeiten η, η'' und hieraus neue Werthe für P', Q' ab, die gemeiniglich von den durch die erste Hypothese gelieferten viel weniger verschieden sind, als diese selbst von den ersten Werthen für P, Q . Die zweiten Werthe von X, Y werden daher viel kleiner sein, als die ersten, und die zweiten Werthe für P', Q' kann man als dritte Werthe für P, Q nehmen, und hiermit die Rechnung abermals wiederholen. Sowie also solchergestalt aus der zweiten Hypothese schon genauere Werthe resultirten als aus der ersten, so wird man solche aus der dritten noch genauer erhalten, als aus der zweiten, und man könnte dann die dritten Werthe für P', Q' als die vierten für P, Q nehmen, und dergestalt die Rechnung so oft wiederholen, bis man zu einer Hypothese gelangt, in welcher X, Y als verschwindend angenommen werden möchten. Falls aber die dritte Hypothese noch nicht als ausreichend erscheinen sollte, so wird man es vorziehen, die für P und Q in der vierten Hypothese anzunehmenden Werthe nach der in den Artikeln 120, 121 gegebenen Methode aus den drei ersten abzuleiten, wodurch man eine raschere Annäherung erhält und es selten nöthig sein wird, noch bis zu einer fünften Hypothese zu gehen.

148.

(165)

Falls die aus den drei Beobachtungen abzuleitenden Elemente noch gänzlich unbekannt sind (ein Fall, dem unsere Methode vorzugsweise angepasst ist), so kann man, wie schon bemerkt, bei der ersten Hypothese für P und Q die approximirten Werthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$ annehmen, wo ϑ und ϑ'' einstweilen aus den unverbesserten Zeitintervallen abgeleitet werden. Drückt man deren Verhältniss zu den verbesserten Intervallen durch $\mu:1$ und $\mu'':1$ aus, so hat man in der ersten Hypothese

$$X = \log \mu - \log \mu'' + \log \eta - \log \eta''$$

$$Y = \log \mu + \log \mu'' - \log \eta - \log \eta'' + \text{Comp. log cos } f + \text{Comp. log cos } f' \\ + \text{Comp. log cos } f'' + 2 \log r' - \log r - \log r''.$$

Die Logarithmen der Grössen μ, μ'' sind im Vergleich mit den übrigen Gliedern von keiner Bedeutung; $\log \eta$ und $\log \eta''$, die beide positiv sind,

heben sich in X einigermaassen gegenseitig auf, vorzüglich wenn die Zeitintervalle fast gleich sind, woraus dann X einen kleinen, bald positiven, bald negativen Werth erhält; dagegen erwächst in Y aus den negativen Gliedern $\log \eta$ und $\log \eta''$ zwar einige Compensation der positiven Glieder $\text{Comp. } \log \cos f$, $\text{Comp. } \log \cos f'$, $\text{Comp. } \log \cos f''$, aber weniger vollständig, weil gemeiniglich die letzteren erheblich grösser sind als die ersteren. Ueber das Zeichen von $\log \frac{r' r''}{r r' r''}$ lässt sich im Allgemeinen nichts bestimmen.

Falls die heliocentrische Bewegung innerhalb der Beobachtungen eine mässige ist, so wird es selten nöthig sein, bis zu einer vierten Hypothese zu gehen; gemeiniglich giebt die dritte, oft schon die zweite hinreichende Genauigkeit, ja bisweilen kann man schon bei den aus der ersten sich ergebenden Zahlen stehen bleiben. Es ist dabei immer gut, die grössere oder geringere Genauigkeit zu berücksichtigen, welche die Beobachtungen besitzen; denn es würde eine undankbare Arbeit sein, bei der Rechnung eine hundert- oder tausendfach grössere Genauigkeit zu erkünsteln, als die Beobachtungen zulassen. Bei diesen Dingen wird aber das Urtheil durch häufige praktische Ausübung besser geschärft, als durch Vorschriften, und die Erfahrenen werden leicht einige Fertigkeit erlangen, es richtig zu beurtheilen, wo man stehen bleiben darf.

149.

Erst in der letzten Hypothese werden die Elemente selbst gerechnet, entweder aus f, r', r'' , oder aus f'', r, r' , indem man eine von beiden Rechnungen bis zu Ende durchführt, die man bei den vorigen Hypothesen nur bis zu η oder η'' zu verfolgen brauchte. Will man beide Rechnungen durchführen, so wird die Uebereinstimmung der resultirenden Zahlen eine neue (166) Prüfung der ganzen Arbeit liefern. Dennoch empfiehlt es sich, sobald erst f, f', f'' gefunden sind, die Elemente aus der alleinigen Combination des ersten und dritten Orts abzuleiten, nämlich aus f', r, r'' und dem Zeitintervalle, und endlich zur grösseren Sicherheit der Rechnung den mittleren Ort in der Bahn nach den gefundenen Elementen abzuleiten.

Auf diese Weise werden also die Dimensionen des Kegelschnitts bekannt, nämlich Excentricität, halbe grosse Axe oder halber Parameter, die Lage des Perihels in Beziehung auf die heliocentrischen Orte C, C', C'' , die mittlere Bewegung und die mittlere Anomalie für eine willkürliche Epoche (wenn nämlich die Bahn eine elliptische ist), oder die Zeit des Perihel-Durchganges (falls sie eine Hyperbel oder Parabel ist). Es erübrigt daher nur, die Lage der heliocentrischen Orte in der Bahn in Beziehung auf den aufsteigenden Knoten, die Lage dieses Knotens in Beziehung auf den Aequinoctialpunkt, sowie die Neigung der Bahn gegen die Ecliptik (oder den Aequator) zu bestimmen. Dies Alles lässt sich durch Auflösung eines sphärischen Dreiecks bewerkstelligen. Es sei Ω die Länge des aufsteigenden Knotens, i die Neigung der Bahn, g und g'' die Argumente der Breite in erster und dritter Beobachtung; endlich $l - \Omega = h$, $l'' - \Omega = h''$. Wenn nun in der vierten Figur Ω den aufsteigenden Knoten bezeichnet, so werden im Dreiecke ΩAC die Seiten sein $AD = \zeta$, g , h , und die diesen resp. gegenüberstehenden Winkel i , $180^\circ - \gamma$, u . Man hat daher

$$\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (g + h) = \sin \frac{1}{2} (AD - \zeta) \sin \frac{1}{2} (\gamma + u)$$

$$\sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (g + h) = \cos \frac{1}{2} (AD - \zeta) \sin \frac{1}{2} (\gamma - u)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (g - h) = \sin \frac{1}{2} (AD - \zeta) \cos \frac{1}{2} (\gamma + u)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (g - h) = \cos \frac{1}{2} (AD - \zeta) \cos \frac{1}{2} (\gamma - u).$$

Die beiden ersten Gleichungen geben $\frac{1}{2}(g+h)$ und $\sin \frac{1}{2} i$, die beiden übrigen $\frac{1}{2}(g-h)$ und $\cos \frac{1}{2} i$. Aus g wird die Lage des Perihels in Beziehung auf den aufsteigenden Knoten bekannt, aus h die Lage des Knotens in der Ecliptik. Schliesslich wird i bekannt, indem der Sinus und Cosinus zur gegenseitigen Prüfung dienen. Zu demselben Ziele kann man mit Hilfe des Dreiecks $\Omega A' C''$ gelangen, wo man nur in den vorhergehenden Formeln die Buchstaben $g, h, A, \zeta, \gamma, u$ in $g'', h'', A'', \zeta'', \gamma'' u''$ zu verwandeln braucht. Um für die ganze Arbeit noch eine andere Prüfung zu erlangen, wird es nützlich sein, die Rechnung auf beide Weise durchzuführen. Wenn sich daraus kleine Unterschiede in den Werthen von i, Ω und der Länge des Perihels in der Bahn ergeben sollten, so kann man die mittleren Werthe annehmen. Selten aber werden diese Unterschiede bis auf $0''1$ oder $0''2$ steigen, wenn man anders alle Rechnungen streng mit sieben Decimalen geführt hat.

Hat man übrigens statt der Ecliptik den Aequator zur Grundebene gewählt, so entsteht hieraus bei der Rechnung keine andere Differenz, als dass man statt der Punkte A, A'' die Einschnitte des Aequators mit den grössten Kreisen $AB, A'B'$ nehmen muss.

150.

Ich gehe jetzt zur Erläuterung dieser Methode durch einige ausführliche Beispiele über, die zugleich aufs Deutlichste zeigen werden, wie weit ihre Anwendbarkeit ausgedehnt ist und wie bequem und rasch sie stets zum erwünschten Ziele führt).

Das erste Beispiel soll der neue Planet Juno liefern, zu welchem Zwecke ich folgende, in Greenwich angestellte und von Maskelyne mir mitgetheilte Beobachtungen ausgewählt habe.

mittlere Zeit Greenwich.	scheinbare Rectascension.	scheinbare südliche Declination.
1804 Oct. 5. 10 ^h 51 ^m 6 ^s *	357° 10' 22" 35	6° 40' 8"
17. 9 58 10	355 43 45, 30	8 47 25
27. 9 16 41	355 11 10, 95	10 2 28

Aus den Sonnentafeln findet man für dieselben Zeiten:

	Länge der Sonne vom scheinbaren Aequinox.	Nutation.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.	scheinbare Schiefe der Ecliptik.
Oct. 5	192° 28' 53" 72	+ 15" 43	0,998 8839	— 0" 49	23° 27' 59" 48
17	204 20 21, 54	+ 15, 51	0,995 3968	+ 0, 79	59, 26
27	214 16 52, 21	+ 15, 60	0,992 8340	— 0, 15	59, 06

Ich will bei Führung der Rechnung so verfahren, als ob die Bahn noch gänzlich unbekannt wäre. Man kann daher die Orte der Juno von der Parallaxe

*) Es ist nicht richtig, eine Methode mehr oder weniger genau, als eine andere zu nennen. Denn man kann nur von derjenigen Methode sagen, dass sie die Aufgabe gelöst habe, durch welche man in dem Stand gesetzt ist, jeden beliebigen Grad der Genauigkeit zu erreichen. Die eine Methode kann daher der anderen nur in dem Betracht den Rang ablaufen, dass derselbe Grad der Genauigkeit durch die eine schnell und mit minderer Arbeit, durch die andere langsamer und mit grösserer Mühe erreicht wird.

nicht befreien, sondern muss diese auf die Orte der Erde übertragen. Zuerst reducire ich daher die beobachteten Orte vom Aequator auf die Ecliptik unter Anwendung der scheinbaren Schiefe, woraus hervorgeht:

	scheinbare Länge der Juno.	scheinbare Breite der Juno.
Oct. 5	354° 44' 54" 27	— 4° 59' 31" 59
17	352 34 44, 51	— 6 21 56, 25
27	351 34 51, 57	— 7 17 52, 70

Mit dieser Rechnung verbinde ich sogleich die Bestimmung der Länge (168) und Breite des Zeniths des Beobachtungsortes in den drei Beobachtungen. Die Rectascension kommt zwar mit der Rectascension der Juno überein (weil die Beobachtungen im Meridiane selbst angestellt sind), die Declination ist aber gleich der Polhöhe = 51° 28' 39". Man erhält so:

	Länge des Zeniths.	Breite.
Oct. 5	24° 29'	46° 53'
17	23 25	47 24
27	23 1	47 36

Jetzt werden nach Anleitung der Vorschriften im Art. 72 die fingirten Orte der Erde in der Ebene der Ecliptik berechnet, an welchen der Himmelskörper ebenso erschienen sein würde, als an den wahren Orten der Beobachtungen. Auf diese Weise bekommt man, wenn die mittlere Sonnenparallaxe = 8"6 gesetzt wird:

	Reduction der Länge.	Reduction der Distanz.	Reduction der Zeit.
Oct. 5	— 22" 39	+ 0,000 3856	— 0" 19
17	— 27, 21	+ 0,000 2329	— 0, 12
27	— 35, 82	+ 0,000 2085	— 0, 12

Die Reduction der Zeit ist nur deshalb beigefügt, um zu zeigen, dass sie überhaupt unmerklich ist.

Endlich müssen alle Längen, sowohl die des Planeten als die der Erde, auf das mittlere Frühlings-Aequinox für irgend eine Epoche, wozu ich den Anfang des Jahres 1805 wähle, reducirt werden. Nach Einführung der Nutation muss daher auch noch die Präcession hinzugefügt werden, welche für die drei Beobachtungen resp. ist: $11''87$, $10''23$, $8''86$, so dass man für die erste Beobachtung addiren muss: $-3''56$, für die zweite: $-5''28$, für die dritte: $-6''74$.

Schliesslich sind Längen und Breiten der Juno von der Fixstern-Aberration zu befreien. So findet man durch die bekannten Regeln, dass man von den Längen resp. abziehen muss: $19''12$, $17''11$, $14''82$, dass man aber zu den Breiten addiren muss: $0''53$, $1''18$, $1''75$, eine Addition, wodurch die absoluten Grössen eine Verminderung erleiden, weil die südlichen Breiten als negative angesehen werden.

(169)

151.

Nach gehöriger Anbringung aller dieser Reductionen, stehen die wahren Daten der Aufgabe, wie folgt:

Beobachtungszeiten auf den Pariser Meridian reducirt ..	Oct. 5,458 644	17,421 885	27,393 077
Längen der Juno α , α' , α'' ...	$354^{\circ} 44' 31'' 60$	$352^{\circ} 34' 22'' 12$	$351^{\circ} 34' 30'' 01$
Breiten β , β' , β''	$-4 59 31,06$	$-6 21 55,07$	$-7 17 50,95$
Längen der Erde l , l' , l''	$12 28 27,76$	$24 19 49,05$	$34 16 9,65$
Log. der Abstände R , R' , R''	9,999 6826	9,998 0979	9,996 9678

Hieraus geben die Rechnungen nach Art. 136 und 137 folgende Zahlen:

γ , γ' , γ''	$196^{\circ} 0' 8'' 36$	$191^{\circ} 58' 0'' 33$	$190^{\circ} 41' 40'' 17$
δ , δ' , δ''	$18 23 59,20$	$32 19 24,93$	$43 11 42,05$
Die Logarithmen der Sinusse ..	9,499 1995	9,728 1105	9,835 3631
$A'D$, $A'D'$, $A'D''$	$232 6 26,44$	$213 12 29,82$	$209 43 7,47$
$A''D$, $A''D'$, $A''D''$	$241 51 15,22$	$234 27 0,90$	$221 13 57,87$
ϵ , ϵ' , ϵ''	$2 19 34,00$	$7 13 37,70$	$4 55 46,19$
Die Logarithmen der Sinusse ..	8,608 3885	9,099 6915	8,934 1440
$\log \sin \frac{1}{2} \epsilon'$		8,799 5259	
$\log \cos \frac{1}{2} \epsilon'$		9,999 1357	

Ferner hat man nach Art. 138:

$\log \operatorname{tang} \beta \dots \dots \dots 8,941\ 2494\ n$	$\log \operatorname{tang} \beta' \dots \dots \dots 9,107\ 4080\ n$
$\log \sin(\alpha'' - l') \dots \dots \dots 9,733\ 2391\ n$	$\log \sin(\alpha - l') \dots \dots \dots 9,693\ 5181\ n$
$\log \cos(\alpha'' - l') \dots \dots \dots 9,924\ 7904$	$\log \cos(\alpha - l') \dots \dots \dots 9,939\ 3180$

Hieraus

$\log(\operatorname{tang} \beta \cos(\alpha'' - l') - \operatorname{tang} \beta' \cos(\alpha - l')) = \log T \sin t$	8,578 6513
$\log \sin(\alpha'' - \alpha) = \log T \cos t \dots \dots \dots$	8,742 3191 <i>n</i>
Hieraus $t = 145^\circ 32' 57'' 78$	$\log T \dots \dots \dots 8,826\ 0683$
$t + \gamma' = 337\ 30\ 58, 11$	$\log \sin(t + \gamma') \dots \dots \dots 9,582\ 5441\ n$

Endlich

$\log(\operatorname{tang} \beta \sin(\alpha'' - l') - \operatorname{tang} \beta' \sin(\alpha - l')) = \log S \dots$	8,203 3319 <i>n</i>
$\log T \sin(t + \gamma') \dots \dots \dots$	8,408 6124 <i>n</i>
woraus $\log \operatorname{tang}(\delta' - \sigma) \dots \dots \dots$	9,794 7195
$\delta' - \sigma = 31^\circ 56' 11'' 81$; also $\sigma = 0^\circ 23' 13'' 12$.	

Nach Artikel 140 wird

$A''D' - \delta' = 191^\circ 15' 18'' 85$	$\log \sin \dots 9,290\ 4352\ n$	$\log \cos \dots 9,991\ 5661\ n$ (170)
$AI' - \delta = 194\ 48\ 30, 62$	$\dots 9,407\ 5427\ n$	$\dots 9,985\ 3301\ n$
$A''D - \delta' = 198\ 39\ 33, 17$	$\dots 9,505\ 0667\ n$	
$A'D - \delta' + \sigma = 200\ 10\ 14, 63$	$\dots 9,537\ 5909\ n$	
$AD'' - \delta = 191\ 19\ 8, 27$	$\dots 9,292\ 8554\ n$	
$A'D' - \delta' + \sigma = 189\ 17\ 46, 06$	$\dots 9,208\ 2723\ n$	

Daraus folgt

$$\log a = 9,549\ 4437, \quad a = +0,354\ 3592$$

$$\log b = 9,861\ 3533.$$

Die Formel 13 würde $\log b = 9,861\ 3531$ geben, aber ich ziehe ersteren Werth vor, weil $\sin(A'D - \delta' + \sigma)$ grösser ist als $\sin(A'D' - \delta' + \sigma)$.

Ferner wird nach Art. 141

$3 \log R \sin \delta' \dots \dots \dots$	9,178 6252
$\log 2 \dots \dots \dots$	0,301 0300
$\log \sin \sigma \dots \dots \dots$	7,829 5601
	<u>7,309 2153</u> und daher $\log c = 2,690\ 7847$.
$\log b \dots \dots \dots$	9,861 3533
$\log \cos \sigma \dots \dots \dots$	9,999 9901
	<u>9,861 3632</u>

woraus $\frac{b}{\cos \sigma} = 0,726\ 7135$. Daraus erhält man $d = -1,362\ 5052$,
 $\log e = 8,392\ 9518n$. Schliesslich geben die Formeln des Art. 143:

$$\begin{aligned} \log x & \dots\dots 0,091\ 3394n \\ \log x'' & \dots\dots 0,541\ 8957n \\ \log \lambda & \dots\dots 0,486\ 4480n \\ \log \lambda'' & \dots\dots 0,159\ 2352n. \end{aligned}$$

152.

Damit sind die Präliminar-Rechnungen erledigt und ich gehe zur ersten Hypothese über. Der (unverbesserte) Zeitraum zwischen der zweiten und dritten Beobachtung beträgt 9,971 192 Tage, zwischen der ersten und zweiten 11,963 241 Tage. Die Logarithmen dieser Zahlen sind 0,998 7471 und 1,077 8489, woraus $\log \mathcal{P} = 9,234\ 3285$, $\log \mathcal{P}'' = 9,313\ 4303$. Ich setze daher zur ersten Hypothese

$$\begin{aligned} x &= \log P = 0,079\ 1018 \\ y &= \log Q = 8,547\ 7588. \end{aligned}$$

(171) Hieraus wird

$$P = 1,199\ 7804, \quad P+a = 1,554\ 1396, \quad P+d = -0,162\ 7248;$$

$$\begin{aligned} \log e & \dots\dots\dots 8,392\ 9518n \\ \log(P+a) & \dots\dots 0,191\ 4900 \\ C.\log(P+d) & \dots\dots 0,788\ 5463n \\ \hline \log \tan \omega & \dots\dots 9,372\ 9881, \text{ woraus } \omega = +13^\circ 16' 51'' 89, \omega + \sigma = +13^\circ 40' 5'' 01. \\ \log Q & \dots\dots\dots 8,547\ 7588 \\ \log c & \dots\dots\dots 2,690\ 7847 \\ \log \sin \omega & \dots\dots\dots 9,361\ 2147 \\ \hline \log Qc \sin \omega & \dots\dots 0,599\ 7582. \end{aligned}$$

Der Gleichung $Qc \sin \omega \sin z' = \sin(z - 13^\circ 40' 5'' 01)$ lässt sich durch wenige Versuche Gütige thun mit einem Werthe von $z = 14^\circ 35' 4'' 90$, woraus $\log \sin z = 9,401\ 0744$, $\log r' = 0,325\ 1340$. Jene Gleichung lässt ausser dieser Auflösung noch drei andere zu, nämlich

$$\begin{aligned} z &= 32^\circ 2' 28'' \\ z &= 137 27 59 \\ z &= 193 4 18. \end{aligned}$$

Die dritte muss man verwerfen, weil $\sin z$ dadurch negativ herauskommt; die zweite weil z grösser wird als δ' ; die erste entspricht der Annäherung an die Erdbahn, worüber im Art. 142 gesprochen ist.

Ferner hat man nach Art. 143:

$$\begin{aligned} \log \frac{R' \sin \delta'}{b} &\dots\dots\dots 9,864 8551 \\ \log(P+a) &\dots\dots\dots 0,191 4900 \\ \text{Comp. log sin}(z-a) &\dots\dots\dots 0,610 3578 \\ \log \frac{n' r'}{n} &\dots\dots\dots 0,666 7029 \\ \log P &\dots\dots\dots 0,079 1018 \\ \hline \log \frac{n' r'}{n} &\dots\dots\dots 0,587 6011 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + A'D - \delta' &= z + 199^\circ 47' 1'' 51 = 214^\circ 22' 6'' 41; \quad \log \sin = 9,751 6736 n \\ z + A'J'' - \delta'' &= z + 188 54 32, 94 = 203 29 37, 84; \quad \log \sin = 9,600 5923 n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\log p = 9,927 0735 n$; $\log p'' = 0,022 6459 n$, und sodann $\log q = 0,293 0977 n$; $\log q'' = 0,258 0086 n$, woraus:

$$\begin{aligned} \zeta &= 203^\circ 17' 31'' 22; \quad \log r = 0,330 0178 \\ \zeta'' &= 210 10 58, 88; \quad \log r'' = 0,321 2819. \end{aligned}$$

Endlich erhält man vermittelst Art. 144

(172)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u''+u) &= 205^\circ 18' 10'' 53 \\ \frac{1}{2}(u''-u) &= -3 14 2, 02 \\ f'' &= 3 48 14, 66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 2f'' &\dots\dots 9,121 8791 & \log \sin 2f'' &\dots\dots 9,121 8791 \\ \log r &\dots\dots\dots 0,330 0178 & \log r'' &\dots\dots\dots 0,321 2819 \\ \text{Comp. log } \frac{n' r'}{n} &\dots\dots 9,333 2971 & \text{Comp. log } \frac{n' r''}{n} &\dots\dots 9,412 3989 \\ \hline \log \sin 2f &\dots\dots 8,785 1940 & \log \sin 2f'' &\dots\dots 8,855 5599 \\ 2f &= 3^\circ 29' 46'' 03 & 2f'' &= 4^\circ 6' 43'' 28. \end{aligned}$$

Die Summe $2f + 2f''$ ist hier von $2f'$ nur um $0'' 01$ verschieden.

Um nun die Zeiten für Aberration zu verbessern, müssen die Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' nach den Formeln des Art. 145 berechnet, und muss sodann mit diesen Distanzen die Zeit von 493 Secunden oder 0,005 706 Tagen multiplicirt werden. Hier die Rechnung:

$\log r$	0,330 02	$\log r'$	0,325 13	$\log r''$	0,321 28
$\log \sin(A'D' - \zeta)$..	9,236 06	$\log \sin(D' - z)$..	9,483 84	$\log \sin(A''D'' - \zeta'')$..	9,613 84
Comp. $\log \sin \delta$...	0,500 80	C. $\log \sin \delta'$...	0,271 89	Comp. $\log \sin \delta''$...	0,164 64
$\log \varrho$	0,066 88	$\log \varrho'$	0,080 86	$\log \varrho''$	0,099 76
$\log \text{const.}$	7,756 33		7,756 33		7,756 33
\log der Reduct. ...	7,823 21		7,837 19		7,856 09
Reduction =	0,006 656		0,006 874		0,007 179

Der Beobachtungen	verbesserte Zeiten	Intervalle	Logarithmen
I.	Oct. 5,451 988	11 ^h 963 023	1,077 8409
II.	17,415 011	9,970 887	0,998 7339.
III.	27,385 898		

Es werden mithin die verbesserten Logarithmen der Grössen ϑ , ϑ' 9,234 3153 und 9,313 4223. Fängt man jetzt die Bestimmung der Elemente aus f , r' , r'' , ϑ an, so kommt $\log \eta = 0,000 2285$; ebenso aus f'' , r , r' , ϑ' wird $\log \eta' = 0,000 3191$. Diese im ersten Buche, Abschnitt III, weitläufig erklärte Berechnung herzusetzen, will ich unterlassen.

Endlich hat man nach Art. 146:

(173)	$\log \vartheta''$	9,313 4223	$2 \log r'$	0,650 2680
	Comp. $\log \vartheta$	0,765 6847	Comp. $\log r r''$	9,348 7003
	$\log \eta$	0,000 2285	$\log \vartheta \vartheta''$	8,547 7376
	Comp. $\log \eta''$	9,999 6809	Comp. $\log \eta \eta''$	9,999 4524
	$\log P'$	0,079 0164.	Comp. $\log \cos f$...	0,000 2022
			Comp. $\log \cos f'$...	0,000 9579
			Comp. $\log \cos f''$...	0,000 2797
			$\log Q'$	8,547 5981.

Aus der ersten Hypothese resultirt daher $X = -0,000 0854$, $Y = -0,000 1607$.

153.

In zweiter Hypothese lege ich für P , Q diejenigen Werthe zum Grunde, welche in der ersten für P' , Q' gefunden waren, und setze also

$$x = \log P = 0,079\ 0164$$

$$y = \log Q = 8,547\ 5981.$$

Da die Rechnung hier ganz ebenso wie in erster Hypothese geführt wird, so setze ich nur die Hauptmomente her:

ω	13° 15' 38" 13	ζ''	210° 9' 24" 98
$\omega + \sigma$	13 38 51, 25	$\log r$	0,330 7676
$\log Q c \sin \omega$	0,598 9389	$\log r''$	0,322 2280
z	14 33 19, 00	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	205 22 15, 58
$\log r'$	0,325 9918	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	-3 14 4, 79
$\log \frac{n'r'}{n}$	0,667 5193	$2f'$	7 34 53, 32
$\log \frac{n'r'}{n''}$	0,588 5029	$2f$	3 29 0, 18
ζ	203 16 38, 16	$2f''$	4 5 53, 12

Die Reduction der Zeiten für Aberration von Neuem zu berechnen würde nicht der Mühe werth sein, da sie kaum um eine Secunde von denen abweichen würden, welche in erster Hypothese gefunden.

Die fernere Rechnung giebt $\log \eta = 0,000\ 2270$, $\log \eta'' = 0,000\ 3173$, woraus man erhält

$$\log P' = 0,079\ 0167 \quad X = +0,000\ 0003$$

$$\log Q' = 8,547\ 6110 \quad Y = +0,000\ 0129.$$

Hieraus sieht man, um wie viel genauer die zweite Hypothese, als die erste ist.

154.

(174)

Um nichts zu wünschen übrig zu lassen, will ich noch die dritte Hypothese ansetzen, wobei ich wiederum die in zweiter Hypothese gefundenen Werthe für P' , Q' als Werthe für P , Q nehme. Setzt man daher

$$x = \log P' = 0,079\ 0167$$

$$y = \log Q = 8,547\ 6110,$$

so sind die Hauptmomente der Rechnung folgende:

ω	13° 15' 38" 39	ζ''	210° 8' 25" 65
$\omega + \sigma$	13 38 51, 51	$\log r$	0,330 7640
$\log Qc \sin \omega$	0,598 9542	$\log r''$	0,322 2239
z	14 33 19, 50	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	205 22 14, 57
$\log r'$	0,325 9878	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	- 3 14 4, 78
$\log \frac{r' r''}{n}$	0,667 5154	$2f'$	7 34 53, 73
$\log \frac{r' r''}{n''}$	0,588 4987	$2f$	3 29 0, 39
ζ	203 16 38, 41	$2f''$	4 5 53, 34

Alle diese Zahlen weichen von den in zweiter Hypothese gefundenen so wenig ab, dass man sicher annehmen kann, dass die dritte Hypothese keiner Verbesserung weiter bedürfte*). Man kann daher jetzt zur Bestimmung der Elemente selbst vorschreiten aus $2f'$, r , r'' , g' , welche hierher abzuschreiben ich unterlasse, weil dieselbe schon oben Art. 97 als Beispiel ausführlich vortragen ist. Es bleibt daher nur übrig, die Lage der Bahnebene nach Anleitung des Art. 149 zu berechnen, und die Epoche auf den Anfang des Jahres 1805 zu übertragen. Diese Berechnung stützt sich auf folgende Zahlen:

$$AD - \zeta = 9^{\circ} 55' 51'' 41$$

$$\frac{1}{2}(g + u) = 202\ 18\ 13,855$$

$$\frac{1}{2}(g - u) = -6\ 18\ 5,495,$$

woraus man ableitet:

$$\frac{1}{2}(g + h) = 196^{\circ} 43' 14'' 62$$

$$\frac{1}{2}(g - h) = -4\ 37\ 24, 41$$

$$\frac{1}{2}i = 6\ 33\ 22, 05.$$

(175) Es wird daher $h = 201^{\circ} 20' 39'' 03$ und deshalb $\Omega = l - h = 171^{\circ} 7' 48'' 73$; ferner $g = 192^{\circ} 5' 50'' 21$, und mithin, da die wahre Anomalie für die erste

*) Wenn die Rechnung ebenso wie in vorstehenden Hypothesen zu Ende geführt würde, so würde $X = 0$, und $Y = +0,000\ 0003$ herauskommen; ein Werth, der als verschwindend anzusehen ist, und kaum über die der letzten Decimale stets anklebende Unsicherheit hinausgeht.

Beobachtung im Art. 97 zu $310^{\circ} 55' 29'' 64$ gefunden war, ist der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Bahn = $241^{\circ} 10' 20'' 57$, die Länge des Perihels = $52^{\circ} 18' 9'' 30$; endlich die Neigung der Bahn = $13^{\circ} 6' 44'' 10$. Will man zur nämlichen Rechnung lieber vom dritten Orte ausgehen, so ist

$$\begin{aligned} A''D - \zeta'' &= 24^{\circ} 18' 35'' 25 \\ \frac{1}{2}(\gamma'' + u'') &= 196\ 24\ 54,98 \\ \frac{1}{2}(\gamma'' - u'') &= -5\ 43\ 14,81, \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g'' + h'') &= 211^{\circ} 24' 32'' 45 \\ \frac{1}{2}(g'' - h'') &= -11\ 43\ 48,48 \\ \frac{1}{2}i &= 6\ 33\ 22,05, \end{aligned}$$

und hieraus die Länge des aufsteigenden Knotens = $l'' - h'' = 171^{\circ} 7' 48'' 72$, die Länge des Perihels = $52^{\circ} 18' 9'' 30$, Neigung der Bahn = $13^{\circ} 6' 44'' 10$, ganz wie oben.

Der Zeitraum zwischen der letzten Beobachtung bis zum Beginn des Jahres 1805 beträgt $64,614\ 102$ Tage und ihm entspricht eine mittlere heliocentrische Bewegung von $53293'' 66 = 14^{\circ} 48' 13'' 66$. Hiernach wird die Epoche der mittleren Anomalie für den Anfang des Jahres 1805 und den Pariser Meridian = $349^{\circ} 34' 12'' 38$, und die Epoche der mittleren Länge = $41^{\circ} 52' 21'' 68$.

155.

Um die Genauigkeit der Elemente klar zu stellen, will ich aus ihnen den mittleren Ort berechnen. Für October 17,415 011 findet sich die mittlere Anomalie = $332^{\circ} 28' 54'' 77$, hieraus die wahre $315^{\circ} 1' 23'' 02$ und $\log r' = 0,325\ 9877$ (vergl. die Beispiele im Art. 13 und 14). Letztere müsste der wahren Anomalie in erster Beobachtung vermehrt um den Winkel $2f''$ gleich sein, oder der wahren Anomalie in dritter Beobachtung vermindert um den Winkel $2f$, d. h. = $315^{\circ} 1' 22'' 98$; der Logarithmus des Radius Vector aber = $0,325\ 9878$; Unterschiede, die als Null zu erachten sind. Setzt man die Berechnung für die mittlere Beobachtung bis zum geocentrischen Orte fort, so erhält man Zahlen, die von dieser Beobachtung nur um wenige Hun-

derttheile der Secunde abweichen (Art. 63); Unterschiede, die von den unvermeidlichen Tafelfehlern gleichsam absorbiert werden.

Das vorangehende Beispiel habe ich deshalb mit grösster Genauigkeit behandelt, damit man sehe, wie leicht durch unsere Methode eine möglichst scharfe Auflösung erreicht wird. In der Praxis wird es aber selten nöthig sein, diesen Typus mit gleicher Aengstlichkeit nachzuahmen. Gemeiniglich wird es (176) genügen, allenthalben sechs Decimalen anzuwenden, und in unserem Beispiele würde schon die zweite Hypothese keine geringere und die erste eine völlig ausreichende Genauigkeit geliefert haben. Ich glaube, dass es dem Leser angenehm sein werde, eine Vergleichung der aus der dritten Hypothese abgeleiteten Elemente mit denen vornehmen zu können, welche die zweite oder auch die erste Hypothese geliefert haben würden. Diese drei Elementen-Systeme legt folgendes Schema dar:

	Aus Hypothese III.	Aus Hypothese II.	Aus Hypothese I.
Epoche d. mittleren Länge 1805	41° 52' 21" 68	41° 52' 18" 40	42° 12' 37" 83
Mittlere tägliche Bewegung	824" 7989	824" 7983	823" 5025
Perihel	52 18 9, 30	52 18 6, 66	52 41 9, 81
φ	14 12 1, 87	14 11 59, 94	14 24 27, 49
Log. der grossen Halbaxe aufsteigender Knoten	0,422 4389	0,422 4392	0,422 8944
Neigung der Bahn	171 7 48, 73	171 7 49, 15	171 5 48, 86
	13 6 44, 10	13 6 45, 12	13 2 37, 50

Durch Berechnung des heliocentrischen Ortes in der Bahn für die mittlere Beobachtung nach dem zweiten Elementen-Systeme wird der Fehler im Logarithmus des Radius Vector = 0, der Fehler der Länge in der Bahn = 0"03 gefunden. Dieser Ort aber aus dem Systeme nach erster Hypothese abgeleitet giebt Irrthum im Logarithmus des Radius Vector = 0,000 0002, Fehler der Länge in der Bahn = 1"31. Durch Fortsetzung der Rechnung bis zum geocentrischen Orte aber findet sich:

	Aus Hypothese II.	Aus Hypothese I.
geocentrische Länge	352° 34' 22" 26	352° 34' 19" 97
Fehler	0,14	2,15
geocentrische Breite	6 21 55,06	6 21 54,47
Fehler	0,01	0,60

156.

(177)

Das zweite Beispiel will ich von der Pallas hernehmen, deren nachfolgende, zu Mailand angestellte Beobachtungen ich der von Zach'schen Monatlichen Correspondenz, Band 14, Seite 90, entlehne.

Mailänder mittlere Zeit	Scheinbare Rectascension.	Scheinbare Declination.
1805 Nov. 5. 14 ^h 14 ^m 4'	78° 20' 37" 8	27° 16' 57" 7 südlich
Dec. 6. 11 51 27	73 8 48,8	32 52 44,3 „
1806 Jan. 15. 8 50 36	67 14 11,1	28 38 8,1 „

An Stelle der Ecliptik will ich hier den Aequator zur Grundebene wählen, und die Rechnung so durchführen, als ob die Bahn noch gänzlich unbekannt wäre. Zunächst hat man aus den Sonnentafeln für die angesetzten Zeiten:

	Länge der Sonne vom mittleren Aequinox.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.
Nov. 5	223° 14' 7" 61	0,990 4311	+ 0" 59
Dec. 6	254 28 42,59	0,984 6753	+ 0,12
Jan. 15	295 5 47,62	0,983 8153	— 0,19

Die Längen der Sonne reducire ich unter Anbringung der Präcession von resp. +7"59, +3"36, —2"11 auf den Anfang des Jahres 1806 und bringe solche dann mit Anwendung der mittleren Schiefe = 23° 27' 53" 53 und unter gehöriger Rücksicht auf die Breiten, auf Rectascensionen und Declinationen. Ich finde so:

	Rectascension der Sonne.	Declination der Sonne.
Nov. 5	220° 46' 44" 65	15° 49' 43" 94 südlich
Dec. 6	253 9 23,26	22 33 39,45 „
Jan. 15	297 2 51,11	21 8 12,98 „

Diese Positionen werden auf den Mittelpunkt der Erde bezogen und müssen deshalb durch Anbringung der Parallaxe an den Beobachtungsort reducirt werden, da man die Positionen des Planeten von der Parallaxe nicht befreien kann. Die bei dieser Rechnung anzuwendenden Rectascensionen des Zeniths kommen mit den Rectascensionen des Planeten überein (weil die Beobachtungen im Meridiane selbst angestellt sind), die Declination ist aber allenthalben die Polhöhe = 45° 28'. Damit ergeben sich folgende Zahlen:

(178)

	Rectascension der Erde.	Declination der Erde.	Logarithmus der Distanz v. d. Sonne.
Nov. 5	40° 46' 48" 51	15 49' 48" 59 nördlich	9,995 8375
Dec. 6	73 9 23,26	22 33 42,83 „	9,993 3099
Jan. 15	117 2 46,09	21 8 17,29 „	9,992 9259

Die beobachteten Orte der Pallas müssen von der Nutation und der Aberration der Fixsterne befreit werden, und sind dann mit Anbringung der Präcession auf den Anfang des Jahres 1806 zu reduciren. Unter diesen Titeln müssen daher folgende Verbesserungen an die Beobachtungen angebracht werden:

	Beobachtung I.		Beobachtung II.		Beobachtung III.	
	Rectascension.	Declination.	Rectascension.	Declination.	Rectascension.	Declination.
Nutation	— 12" 86	— 3" 08	— 13" 68	— 3" 42	— 13" 06	— 3" 75
Aberration	— 18,13	— 9,89	— 21,51	— 1,63	— 15,60	+ 9,76
Präcession	+ 5,43	+ 0,62	+ 2,55	— 0,39	— 1,51	— 0,33
Summe	— 25,56	— 12,35	— 32,64	— 4,66	— 30,17	+ 5,68

Hieraus gehen nachfolgende Positionen der Pallas hervor, auf welche die Rechnung zu stützen:

Mittlere Pariser Zeit.	Rectascension.	Declination.
Nov. 5,574 047	78° 20' 12" 24	—27° 17' 9" 05
36,475 035	73 8 16,16	—32 52 48,96
76,349 444	67 13 40,93	—28 38 2,42

157.

Zuerst bestimme ich nun die Lage der grössten Kreise, welche von den heliocentrischen Orten der Erde nach den geocentrischen Orten des Planeten gezogen werden. Die Einschnitte dieser Kreise mit dem Aequator, oder (wenn man das lieber will) ihre aufsteigenden Knoten sollen die Buchstaben \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' zugeschrieben erhalten, und die Abstände der Punkte B , B' , B'' von diesen Punkten bezeichne ich mit A , A' , A'' . Beim grösseren Theile der Operationen muss für A , A' , A'' , nun \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' , und für δ , δ' , δ'' nun A , A' , A'' , δ , δ' , δ'' beizubehalten sind, wird der aufmerksame Leser auch ohne meine Erinnerung leicht einsehen.

Die Rechnung ergibt

(179)

Rectascension der Punkte			
\mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}''	233° 54' 57" 10	253° 8' 57" 01	276° 40' 25" 87
γ , γ' , γ''	51 17 15,74	90 1 3,19	131 59 58,03
A , A' , A''	215 58 49,27	212 52 48,96	220 9 12,96
δ , δ' , δ''	56 26 34,19	55 26 31,79	69 10 57,84
$\mathfrak{A}D$, $\mathfrak{A}'D$, $\mathfrak{A}''D$	23 54 52,13	30 18 3,25	29 8 43,32
$\mathfrak{A}''D$, $\mathfrak{A}'D$, $\mathfrak{A}D$	33 3 26,35	31 59 21,14	22 20 6,91
ϵ , ϵ' , ϵ''	47 1 54,69	89 34 57,17	42 33 41,17
Logarithmen der Sinus	9,864 3525	9,999 9885	9,830 1910
$\log \sin \frac{1}{2} \epsilon'$		9,847 8971	
$\log \cos \frac{1}{2} \epsilon'$		9,851 0614	

28*

In der Berechnung nach Art. 138 wird für t' die Rectascension des Punktes \mathfrak{N} angewandt. So findet sich

$$\log T \sin t \dots 8,486\ 8236\ n$$

$$\log T \cos t \dots 9,284\ 8162\ n.$$

Hieraus $t = 189^\circ 2' 48'' 83$, $\log T = 9,290\ 2527$; ferner $t + \gamma' = 279^\circ 3' 52'' 02$,

$$\log S \dots \dots \dots 9,011\ 0566\ n$$

$$\log T \sin(t + \gamma') \dots 9,284\ 7950\ n,$$

woraus $\mathcal{A} - \sigma = 208^\circ 1' 55'' 64$ und $\sigma = 4^\circ 50' 53'' 32$.

In den Formeln des Art. 140 muss man $\sin \delta$, $\sin \delta'$, $\sin \delta''$ für a , b und $\frac{b}{a}$ beibehalten, und ebenso in den Formeln des Art. 142. Behuf dieser Rechnungen hat man dann:

$$\mathfrak{N}D' - \mathcal{A} = 171^\circ 50' 8'' 18 \quad \log \sin \dots 9,152\ 3306 \quad \log \cos \dots 9,995\ 5759\ n$$

$$\mathfrak{N}D' - \mathcal{A} = 174\ 19\ 13,98 \quad \dots \dots \dots 8,995\ 4722 \quad \dots \dots \dots 9,997\ 8629\ n$$

$$\mathfrak{N}D - \mathcal{A} = 172\ 54\ 13,39 \quad \dots \dots \dots 9,091\ 7972$$

$$\mathfrak{N}D - \mathcal{A} + \sigma = 175\ 52\ 56,49 \quad \dots \dots \dots 8,856\ 1520$$

$$\mathfrak{N}D'' - \mathcal{A} = 173\ 9\ 54,05 \quad \dots \dots \dots 9,075\ 5844$$

$$\mathfrak{N}D'' - \mathcal{A} + \sigma = 174\ 18\ 11,27 \quad \dots \dots \dots 8,996\ 7978.$$

Hieraus erhält man:

$$\log x = 0,921\ 1850, \quad \log k = 0,081\ 2057\ n$$

$$\log x'' = 0,811\ 2762, \quad \log k'' = 0,031\ 9691\ n$$

$$\log a = 0,109\ 9088, \quad a = +1,287\ 9790$$

$$\log b = 0,181\ 0404$$

$$\log \frac{b}{a} = 0,071\ 1314, \quad \text{woraus } \log b = 0,181\ 0402 \text{ wird. Unter}$$

(180) diesen beiden nahezu gleichen Werthen für b nehme ich den mittlern $\log b = 0,181\ 0403$. Schliesslich entsteht

$$\log c = 1,045\ 0295$$

$$d = +0,448\ 9906$$

$$\log e = 9,210\ 2894,$$

womit die präliminären Rechnungen beendigt sind.

Der Zeitunterschied zwischen der zweiten und dritten Beobachtung beträgt = 39,874 409 Tage, zwischen der ersten und zweiten = 30,900 961

Tage. Hieraus wird $\log \vartheta = 9,8362757$, $\log \vartheta'' = 9,7255533$. Ich setze daher zur ersten Hypothese

$$x = \log P = 9,8892776$$

$$y = \log Q = 9,5618290.$$

Die Hauptmomente der Rechnung sind dann:

$$\omega + \sigma = 20^\circ 8' 46''72$$

$$\log Qc \sin \omega = 0,0282028.$$

Hiermit wird der wahre Werth von $z = 21^\circ 11' 24''30$ und $\log r' = 0,3509379$. Die drei übrigen Werthe von z , die der Gleichung IV im Art. 141 Genügt leisten, werden in diesem Falle:

$$z = 63^\circ 41' 12''$$

$$z = 101^\circ 12' 58''$$

$$z = 199^\circ 24' 7''$$

von denen der erste als Annäherung an die Erdbahn anzusehen ist, dessen Verschiedenheit davon aber hier wegen der zu grossen Zwischenzeit bei weiten beträchtlicher ist, als im vorhergehenden Beispiele. Die fernere Rechnung ergibt folgende Zahlen:

ζ	195° 12' 2"48
ζ''	196 57 50,78
$\log r'$	0,3647022
$\log r''$	0,3355758
$\frac{1}{2}(u'' + u)$	266 47 50,47
$\frac{1}{2}(u'' - u)$	—43 39 5,33
$2f'$	22 32 40,86
$2f$	13 5 41,17
$2f''$	9 27 0,05.

Die Differenz zwischen $2f'$ und $2f + 2f''$, welche hier $0''36$ beträgt, wird unter $2f$ und $2f''$ so vertheilt, dass man setzt $2f = 13^\circ 5' 40''96$, $2f'' = 9^\circ 26' 59''90$.

Nun muss man die Zeiten wegen Aberration verbessern, wo in den (181) Formeln des Art. 145 zu setzen ist

$$AD - \zeta = \mathfrak{A}D - \mathcal{A} + \delta - \zeta; \quad A''D - \zeta'' = \mathfrak{A}''D - \mathcal{A}'' + \delta'' - \zeta''.$$

Man hat daher:

$\log r$	0,364 70	$\log r'$	0,350 94	$\log r''$	0,335 57
$\log \sin(AD - \zeta)$..	9,764 62	$\log \sin(\delta - z)$..	9,750 38	$\log \sin(A'D' - \zeta'')$..	9,842 20
Comp. $\log \sin \delta$	0,079 18	C. $\log \sin \delta$	0,084 31	Comp. $\log \sin \delta''$	0,029 32
$\log \text{const.}$	7,756 33	$\log \text{const.}$	7,756 33	$\log \text{const.}$	7,756 33
	7964 83		7,941 97		7,963 42
Reduct. der Zeit	0,009 222		0,008 749		0,009 192

Damit wird erhalten:

Corrigirte Zeiten.	Intervalle.	Logarithmen.
Nov. 5,564 852	30,901 434	1,489 9785
36,466 286	39,873 966	1,600 6894
76,340 252		

und es werden die verbesserten Logarithmen der Grössen ϑ , ϑ'' resp. 9,836 2708 und 9,725 5599. Beginnt man daher die Berechnung der Elemente aus r' , r'' , $2f$, ϑ , so wird $\log \eta = 0,003 1921$; sowie aus r , r' , $2f''$, ϑ'' kommt $\log \eta'' = 0,001 7300$. Daraus $\log P' = 9,890 7512$, $\log Q' = 9,571 2864$ und deshalb

$$X = +0,001 4736, \quad Y = +0,009 4574.$$

Die Hauptmomente der zweiten Hypothese, wobei ich setze

$$x = \log P = 9,890 7512$$

$$y = \log Q = 9,571 2864,$$

sind folgende:

$\omega + \sigma$	20° 8' 0,87
$\log Qc \sin \omega$	0,037 3071
z	21 12 6,09
$\log r'$	0,350 7110
ζ	195 16 59,90
ζ''	196 52 40,63
$\log r$	0,363 0642
$\log r''$	0,336 9708
$\frac{1}{2}(u'' + u)$	267 6 10,75
$\frac{1}{2}(u'' - u)$	-43 39 4,00
$2f'$	22 32 8,69
$2f$	13 1 54,65
$2f''$	9 30 14,38.

Die Differenz $0''34$ zwischen $2f'$ und $2f+2f''$ ist so zu vertheilen, dass $2f = 13^\circ 1' 54'' 45$, $2f'' = 9^\circ 30' 14'' 24$ gesetzt wird.

Wenn man es der Mühe werth hält, die Verbesserungen der Zeiten hiemit von Neuem zu berechnen, so findet sich für die erste Beobachtung 0,009169, für die zweite 0,008742, für die dritte 0,009236. Also sind die verbesserten Zeiten Nov. 5,564905, Nov. 36,466293, Nov. 76,340280. Damit wird

$\log \vartheta$	9,8362703
$\log \vartheta''$	9,7255594
$\log \eta$	0,0031790
$\log \eta''$	0,0017413
$\log P'$	9,8907268
$\log Q'$	9,5710593.

Auf diese Weise folgt also aus zweiter Hypothese

$$X = -0,0000244, \quad Y = -0,0002271.$$

Für die dritte Hypothese endlich, in der

$$x = \log P = 9,8907268$$

$$y = \log Q = 9,5710593$$

gesetzt wird, sind die Hauptmomente der Rechnung:

$\omega + \sigma$	$20^\circ 8' 1'' 62$	$\log r''$	0,3369536
$\log Q \sin \omega$	0,0370857	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	$267^\circ 5' 53'' 09$
z	$21 12 4,60$	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	$-43 39 4,19$
$\log r'$	0,3507191	$2f'$	$22 32 7,67$
ζ	$195 16 54,08$	$2f$	$13 1 57,42$
ζ''	$196 52 44,45$	$2f''$	$9 30 10,63$
$\log r$	0,3630960		

Die Differenz $0''38$ wird so vertheilt, dass $2f = 13^\circ 1' 57'' 20$, $2f'' = 9^\circ 30' 10'' 47'$.

Da die Unterschiede aller dieser Zahlen von den in der zweiten Hypothese gefundenen nur sehr gering sind, so kann man schon sicher annehmen, dass die dritte Hypothese keiner Verbesserung weiter bedarf, und (183)

*) Diese etwas grössere, in allen drei Hypothesen fast gleiche Differenz ist zum grössten Theile daraus entstanden, dass σ ungefähr zwei Hunderttheile der Secunde kleiner als sein richtiger Werth und der Logarithmus von b um einige Einheiten grösser, als sein richtiger Werth herausgebracht war.

dass mithin eine neue Hypothese überflüssig ist. — Es kann deshalb nun die Berechnung der Elemente aus $2f''$, \mathcal{G} , r , r'' begonnen werden, und da dieselbe in den oben bereits ausführlich erklärten Operationen enthalten ist, so will ich mich begnügen, zur Annehmlichkeit derer, die solche selbständig anzuführen wünschen, die Elemente herzusetzen:

Rectascension des aufsteigenden Knotens im Aequator	158° 40' 38",93
Neigung der Bahn gegen den Aequator	11 42 49,13
Abstand des Perihels von jenem aufsteigenden Knoten	323 14 56,92
mittlere Anomalie für die Epoche 1806	335 4 13,05
mittlere tägliche (siderische) Bewegung	770"2662
φ	14 9 3,91
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422438

158.

Die beiden vorigen Beispiele haben mir keine Gelegenheit geboten, die Methode des Art. 120 zu benutzen, denn die successiven Hypothesen convergirten so rasch, dass man schon bei der zweiten hätte stehen bleiben können, und dass die dritte kaum merklich von der Wahrheit abwich. Man wird sich in der That dieses Vortheils stets erfreuen, und sich über eine vierte Hypothese hinwegsetzen können, falls die heliocentrische Bewegung eine mässige ist, und die drei Radien Vectoren nicht zu ungleich sind, vorzüglich wenn überdies die Zwischenzeiten von einander nur wenig verschieden. Je mehr aber diese Bedingungen der Aufgabe unerfüllt bleiben, desto stärker werden die supponirten Werthe für P , Q von den wahren differiren, und desto langsamer die nachfolgenden Werthe zu den wahren convergiren. In einem solchen Falle sind daher die drei ersten Hypothesen so zu erledigen, wie es die beiden vorigen Beispiele zeigen (nur mit dem Unterschiede, dass in dritter Hypothese nicht die Elemente selbst, sondern, ebenso wie in erster und zweiter, die Grössen η , η'' , P' , Q' , X , Y berechnet werden müssen). Dann aber nimmt man nicht ferner mehr die Schlusswerthe von P' , Q' als neue Werthe für die Grössen P , Q in einer vierten Hypothese, sondern diese werden nach der Methode des Art. 120 aus Combination der drei ersten Hypothesen ermittelt. Selten wird es dann erforderlich sein, noch zu einer fünften Hypothese nach

Vorschrift des Art. 121 vorzugehen. Auch diese Rechnungen will ich jetzt durch ein Beispiel erläutern, woraus man zugleich darüber klar werden wird, welche weite Anwendung sich für unsere Methode eröffnet.

159.

Als drittes Beispiel wähle ich die nachfolgenden Ceres-Beobachtungen, deren erste von Olbers in Bremen, die zweite von Harding in Göttingen, (184) die dritte von Bessel zu Lilienthal angestellt ist.

Mittlere Zeit des Beobachtungsorts.	Rectascension.	nördl. Declination.
1805 Sept. 5. 13 ^h 8 ^m 54 ^s	95° 59' 25"	22° 21' 25"
1806 Jan 17. 10 58 51	101 18 40,6	30 21 22,3
1806 Mai 23. 10 23 53	121 56 7	28 2 45

Da die Methoden in den beiden vorigen Beispielen schon reichlich erläutert sind, welche man zur Berücksichtigung der Parallaxe und Aberration dann anwendet, wenn die Abstände von der Erde als noch gänzlich unbekannt angesehen werden, so überhebe ich mich bei diesen dritten Beispiele dieser überflüssigen Arbeitsvermehrung, und entnehme zu diesem Zwecke die genäherten Abstände aus der Monatlichen Correspondenz von Zach (Band XI, S. 284), um die Beobachtungen von Einwirkung der Parallaxe und Aberration zu befreien. — Die nachfolgende Tafel stellt diese Abstände zugleich mit den daraus abgeleiteten Reductionen dar:

Abstand der Ceres von der Erde	2,899	1,638	2,964
Zeit, die das Licht von dort bis zur Erde braucht	23 ^m 49 ^s	13 ^m 28 ^s	24 ^m 21 ^s
Reducirte Zeit der Beobachtung	12 ^h 45 ^m 5 ^s	10 ^h 45 ^m 23 ^s	9 ^h 59 ^m 32 ^s
Sternzeit in Graden	355° 55'	97° 59'	210° 41'
Parallaxe in Rectascension	+ 1 ^m 90	+ 0 ^m 22	— 1 ^m 97
Parallaxe in Declination	— 2,08	— 1,90	— 2,04.

Die Data der Aufgabe, nach Befreiung von Parallaxe und Aberration und nach Reduction der Zeiten auf Pariser Meridian, verhalten sich dann so:

		Rectascension.	Declination.
1805 Sept. 5.	12 ^h 19 ^m 14 ^s	95° 59' 23" 10	22° 21' 27" 08
1806 Jan. 17.	10 15 2	101 18 40,38	30 21 24,20
1806 Mai 23.	9 33 18	121 56 8,97	28 2 47,04

Aus diesen Rectascensionen und Declinationen sind die Längen und Breiten abgeleitet mit Anwendung einer Ecliptikschiefe von $23^{\circ} 27' 55'' 90$, $23^{\circ} 27' 54'' 59$, $23^{\circ} 27' 53'' 27$. Dann sind die Längen von der Nutation befreit, welche war resp. $+17'' 31$, $+17'' 88$, $+18'' 00$ und dann auf den Anfang des Jahres 1806 reducirt durch Anbringung der Praecession $+15'' 98$, $-2'' 39$, $-19'' 68$. Endlich sind für die reducirten Zeiten aus den Tafeln die Sonnenorte genommen, wo bei den Längen die Nutation weggelassen, dagegen die (185) Praecession ganz wie an die Längen der Ceres angebracht ist. Die Breite der Sonne ist überhaupt vernachlässigt. So entstanden folgende, bei der Rechnung anzuwendende Zahlen:

Zeit 1805 Sept.	5,51336	139,42711	265,39813
$\alpha, \alpha', \alpha''$	95° 32' 18" 56	99° 49' 5" 87	118° 5' 28" 85
β, β', β''	-0 59 34,06	+7 16 36,80	+7 38 49,39
l, l', l''	342 54 56,00	117 12 43,25	241 58 50,71
$\log R, \log R', \log R''$	0,0031514	9,9929861	0,0056974

Die präliminaren Rechnungen der Artt. 136—140 geben:

$\gamma, \gamma', \gamma''$	358° 55' 28" 09	156° 52' 11" 49	170° 48' 44" 79
$\delta, \delta', \delta''$	112 37 9,66	18 48 39,81	123 32 52,13
$A'D, A'D', A'D''$	15 32 41,40	252 42 19,14	136 2 22,38
$A''D, A''D', A''D''$	138 45 4,60	6 26 41,10	358 5 57,00
$\epsilon, \epsilon', \epsilon''$	29 18 8,21	170 32 59,08	156 6 25,25

$$a = 8^{\circ} 52' 4'' 05$$

$$\log a = 0,1840193n \quad a = -1,5276340$$

$$\log b = 0,0040987$$

$$\log c = 2,0066735$$

$$d = 117,50873$$

$$\log e = 0,8568244$$

$$\begin{aligned}\log x &= 0,161\,1012 \\ \log x'' &= 9,977\,0819n \\ \log \lambda &= 9,916\,4090n \\ \log i'' &= 9,732\,0127n.\end{aligned}$$

Die Zwischenzeit zwischen der ersten und zweiten Beobachtung ist = 133,913 75 Tage, zwischen der zweiten und dritten = 125,971 02. Damit wird $\log \vartheta = 0,335\,8520$, $\log \vartheta'' = 0,362\,4066$. $\log \frac{\vartheta''}{\vartheta} = 0,026\,5546$, $\log \vartheta \vartheta'' = 0,698\,2586$. Die vorzüglichsten Rechnungs-Momente der drei ersten hieraus zu bildenden Hypothesen giebt die nachfolgende Uebersicht:

	I.	II.	III.	
$\log P = x$	0,026 5546	0,025 6968	0,025 6275	
$\log Q = y$	0,698 2586	0,739 0190	0,748 1055	
$\omega + \sigma$	7° 15' 13" 523	7° 14' 47" 139	7° 14' 45" 071	
$\log Qc \sin \omega$	1,154 6650 <i>n</i>	1,197 3925 <i>n</i>	1,206 6327 <i>n</i>	(186)
z	7 3 59,018	7 2 32,870	7 2 16,900	
$\log r'$	0,411 4726	0,412 9371	0,413 2107	
ζ	160 10 46,74	160 20 7,82	160 22 9,42	
ζ''	262 6 1,03	262 12 18,26	262 14 19,49	
$\log r$	0,432 3934	0,429 1773	0,428 4841	
$\log r''$	0,409 4712	0,407 1975	0,406 4697	
$\frac{1}{2}(u'' + u)$	262 55 23,22	262 57 6,83	262 57 31,17	
$\frac{1}{2}(u'' - u)$	273 28 50,95	273 29 15,06	273 29 19,56	
$2f'$	62 34 28,40	62 49 56,50	62 53 57,06	
$2f$	31 8 30,03	31 15 59,09	31 18 13,83	
$2f''$	31 25 58,43	31 33 57,32	31 35 43,32	
$\log \eta$	0,020 2496	0,020 3158	0,020 3494	
$\log \eta''$	0,021 1074	0,021 2429	0,021 2751	
$\log P'$	0,025 6968	0,025 6275	0,025 6289	
$\log Q'$	0,739 0190	0,748 1055	0,750 2337	
X	-0,000 8578	-0,000 0693	+0,000 0014	
Y	+0,040 7604	+0,009 0865	+0,002 1282	

Bezeichne ich nun die drei Werthe für X mit A, A', A'' und die drei Werthe für Y mit B, B', B'' ; die aus der Division der Grössen $AB' - A''B, A''B - AB'', AB' - A'B$ durch ihre Summe entstandenen Quotienten mit k, k', k'' , so dass man hat $k + k' + k'' = 1$, und endlich die Werthe für $\log P'$ und $\log Q'$ in dritter Hypothese mit M und N (welches die neuen Werthe für x, y sein würden, wenn man die vierte Hypothese ebenso aus der dritten herleiten wollte, wie die dritte aus der zweiten abgeleitet war), so entnimmt man den Formeln des Art. 120 leicht, dass der verbesserte Werth von x wird $= M - k(A' + A'') - k'A''$, und der verbesserte Werth für $y = N - k(B' + B'') - k'B''$. Durch Rechnung ergibt sich der erste $= 0,025\ 6331$, der zweite $= 0,750\ 9143$. Auf diese verbesserten Werthe stütze ich nun die vierte Hypothese, deren Hauptmomente folgende sind:

$\omega + \sigma$	$7^{\circ} 14' 45'' 247$	$\log r''$	$0,406\ 2033$
$\log Qc \sin \omega$	$1,209\ 4284\ u$	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	$262^{\circ} 57' 38'' 78$
z	$7\ 2\ 12, 736$	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	$273\ 29\ 20, 73$
$\log r'$	$0,413\ 2817$	$2f'$	$62\ 55\ 16, 64$
ζ	$160\ 22\ 45, 38$	$2f$	$31\ 19\ 1, 49$
ζ''	$262\ 15\ 3, 90$	$2f''$	$31\ 36\ 15, 20$
$\log r$	$0,428\ 2792$		

- (187) Die zwischen $2f'$ und $2f + 2f''$ auftauchende Differenz $0''05$ vertheile ich so, dass $2f' = 31^{\circ} 19' 1'' 47$, $2f'' = 31^{\circ} 36' 15'' 17$ gesetzt wird. — Wenn nun aus den beiden äussersten Orten die Elemente selbst hergeleitet werden, so erhält man folgende Zahlen:

Wahre Anomalie für den ersten Ort . . .	$289^{\circ} 7' 39'' 75$
Wahre Anomalie für den dritten Ort . . .	$352\ 2\ 56, 39$
Mittlere Anomalie für den ersten Ort . . .	$297\ 41\ 35, 65$
Mittlere Anomalie für den dritten Ort . . .	$353\ 15\ 22, 49$
Mittlere tägliche siderische Bewegung	$769'' 6755$
Mittlere Anomalie für Anfang 1806	$322\ 35\ 52, 51$
Winkel φ	$4\ 37\ 57, 78$
Logarithmus der grossen Halbaxe	$0,442\ 4661$.

Berechnet man mit diesen Elementen den heliocentrischen Ort für die Zeit der mittleren Beobachtung, so findet sich mittlere Anomalie

= $326^{\circ} 19' 25'' 72$, Logarithmus des Radius Vector $0,4132825$, wahre Anomalie = $320^{\circ} 43' 54'' 87$. Letztere misste von der wahren Anomalie für den ersten Ort abstehen um die Differenz $2f''$, oder von der wahren Anomalie für den dritten Ort um $2f$, und misste daher werden = $320^{\circ} 43' 54'' 92$ und der Logarithmus des Radius Vector = $0,4132817$. Der Unterschied von $0''05$ in der wahren Anomalie, und von acht Einheiten in dem fraglichen Logarithmus ist bedeutungslos. Würde man die vierte Hypothese auf gleiche Weise durchführen wie die drei ersten, so käme $X = 0$, $Y = -0,0000168$, woraus die verbesserten Werthe von x , y würden

$$x = \log P = 0,0256331 \text{ (derselbe wie in vierter Hypothese)}$$

$$y = \log Q = 0,7508917.$$

Wenn auf diese Werthe eine fünfte Hypothese gebaut würde, so würde die Auflösung die äusserste Schärfe erlangen, welche die Tafeln nur gewähren; aber die hieraus hervorgehenden Elemente würden kaum merklich von denen abweichen, welche die vierte Hypothese lieferte.

Um vollständige Elemente zu haben, erübrigt nur, die Lage der Bahnebene zu berechnen. Nach Anleitung von Art. 149 kommt

	aus dem ersten Orte		aus dem dritten Orte
g	$354^{\circ} 9' 44'' 22$	g'	$57^{\circ} 5' 0'' 91$
h	$261 56 6,94$	h'	$161 0 1,61$
i	$10 37 33,02$	$10 37 33,00$
Ω	$80 58 49,06$	$80 58 49,10$
Distanz des Perihels von Ω ..	$65 2 4,47$	$65 2 4,52$
Länge des Perihels	$146 0 53,53$	$146 0 53,62$

(188)

Im Mittel wird daher $i = 10^{\circ} 37' 33'' 01$, $\Omega = 80^{\circ} 58' 49'' 08$, Perihellänge = $146^{\circ} 0' 53'' 57$. Endlich die mittlere Länge für den Anfang des Jahres 1806 = $108^{\circ} 36' 46'' 08$.

160.

Bei Auseinandersetzung der Methode, welcher die vorangehenden Untersuchungen gewidmet waren, trafen wir auf einige besondere Fälle, wo sie eine Anwendung nicht leidet, wenigstens nicht in der Gestalt, in welcher sie von

mir dargelegt ist. Wir sahen, dass dieser Mangel zuerst dann Statt habe, wenn einer der drei geocentrischen Orte, entweder mit dem entsprechenden heliocentrischen Orte der Erde, oder mit dem entgegengesetzten Punkte zusammenfällt (letzterer Fall kann offenbar nur dann eintreten, wenn der Himmelskörper zwischen Sonne und Erde durchgeht); zweitens dann, wenn der erste geocentrische Ort des Himmelskörpers mit dem dritten zusammenfällt; drittens dann, wenn alle drei geocentrischen Orte zugleich mit dem zweiten heliocentrischen Orte der Erde in demselben grössten Kreise liegen.

Im ersten Falle wird die Lage irgend eines der grössten Kreise AB , $A'B$, $A'B'$ unbestimmt bleiben, sowie im zweiten und dritten Falle die Lage des Punktes B' . — In diesen Fällen verlieren also die vorigen Methoden, mittelst deren man, wenn die Grössen P , Q als bekannte angesehen werden, aus den geocentrischen Orten die heliocentrischen bestimmt, ihre Kraft. Dabei mache ich jedoch auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam. Im ersten Falle liegt der Fehler lediglich an der Methode, im zweiten und dritten aber in der Natur der Aufgabe selbst. Im ersten Falle wird man daher die fragliche Bestimmung dennoch bewerkstelligen können, wenn man nur die Methode in angemessener Weise ändert; im zweiten und dritten aber ist sie absolut unmöglich und die heliocentrischen Orte bleiben dann unbestimmt. Ich will diese Relationen mit wenigen Worten entwickeln, aber Alles zu erschöpfen, was hiermit zusammenhängt, ist um so weniger nöthig, da in allen diesen Specialfällen eine genaue Bahnbestimmung unmöglich ist, wo sie von den kleinsten Beobachtungsfehlern enorm afficirt werden würde. Derselbe Mangel ist auch dann schon fühlbar, wenn die Beobachtungen zwar nicht völlig, aber doch recht nahe sich in einem dieser Fälle befinden. Bei der Auswahl der Beobachtungen muss man daher dies berücksichtigen, und sich sorgfältig hüten, nicht einen Ort anzuwenden, wo der Körper zugleich in der Nachbarschaft des Knotens und der Opposition oder Conjunction verweilt, sowie auch nicht solche Beobachtungen, wo der Körper in der letzten Beobachtung nahezu an demselben geocentrischen Ort zurückgekehrt ist, den er bei erster Beobachtung inne hatte, und endlich nicht solche, wo der grösste Kreis, welcher von dem mittleren heliocentrischen Orte der Erde nach dem mittleren geocentrischen Orte des Himmelskörpers gezogen ist, einen sehr spitzen Winkel mit

der Richtung der geocentrischen Bewegung bildet, und den ersten und dritten Ort gleichsam streift.

161.

Ich mache für den ersten Fall drei Unterabtheilungen.

I. Wenn der Punkt B mit A oder mit dem entgegengesetzten Punkte coincidirt, so ist $\delta = 0$ oder $= 180^\circ$; $\gamma, \epsilon, \epsilon''$ und die Punkte D, D'' bleiben unbestimmt, dagegen werden $\gamma', \gamma'', \epsilon$ und die Punkte D, B'' bestimmt. Der Punkt C fällt nothwendig mit A zusammen. Durch analoge Betrachtungen, wie in Art. 140, leitet man leicht folgende Gleichung ab:

$$0 = n' \frac{\sin(z-\sigma)}{\sin z} \cdot \frac{R' \sin \delta'}{R'' \sin \delta''} \cdot \frac{\sin(A''D - \delta'')}{\sin(A'D - \delta' + \sigma)} - n''.$$

Es lässt sich daher hierher Alles übertragen, was in den Artt. 141 und 142 auseinandergesetzt ist, falls man nur $a = 0$ setzt, und b mittelst der Gleichung 12 des Art. 140 bestimmt. Die Grössen $z, r', \frac{n' r'}{n}, \frac{n' r'}{n''}$ werden ganz wie oben berechnet. Sobald also z und solchergestalt die Lage des Punktes C' bekannt wird, kann man dem grössten Kreise CC' seine Lage anweisen und dessen Einschnitt mit dem grössten Kreise $A'B''$ finden, d. h. den Punkt C'' , und somit die Bögen $CC', CC'', C'C''$ oder $2f'', 2f', 2f$; hieraus endlich erhält man

$$r = \frac{n' r'}{n} \cdot \frac{\sin 2f}{\sin 2f''}, \quad r'' = \frac{n' r'}{n''} \cdot \frac{\sin 2f''}{\sin 2f'}.$$

II. Auf den Fall, wo der Punkt B' mit A'' oder dem entgegengesetzten Punkte zusammenfällt, lässt sich Alles eben Gesagte übertragen, wenn man nur Alles, was auf den ersten Ort sich bezieht, mit dem vertauscht, was zum dritten Orte gehört.

III. Etwas anders aber muss man den Fall behandeln, wo B' entweder mit A' oder mit dem entgegengesetzten Punkte zusammenfällt. Hier wird der Punkt C' mit A' zusammenfallen; $\gamma', \epsilon, \epsilon''$ und die Punkte D, D', B'' werden unbestimmt bleiben. Dagegen lässt sich der Einschnitt des grössten Kreises BB'' mit der Ecliptik*) angeben, dessen Länge $= l + \pi$

*) Allgemeiner gesprochen mit dem grössten Kreise AA'' ; der Kürze halber habe ich aber hier nur den Fall betrachtet, wo die Ecliptik zur Grunde ebene gewählt ist.

gesetzt sein soll. Durch ähnliche Betrachtungen wie die des Art. 140 erhält man die Gleichung

$$0 = n \frac{R \sin \delta \sin(A''D' - \delta'')}{R' \sin \delta'' \sin(A'D' - \delta')} + n' r' \frac{\sin \pi}{R'' \sin(l'' - l' - \pi)} + n''.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von n , welcher im Art. 140 mit a übereinkommt, auch hier mit a , und den Coefficienten von $n' r'$ mit β , so lässt sich (190) a auch hier durch die Formel $a = -\frac{R \sin(l' + \pi - l)}{R' \sin(l'' - l' - \pi)}$ bestimmen. Man hat daher $0 = an + \beta n' r' + n''$; eine Gleichung, durch welche man, wenn man sie combinirt mit $P = \frac{n''}{n}$, $Q = 2\left(\frac{n + n''}{n'} - 1\right) r'^2$, erhält:

$$\frac{\beta(P+1)}{P+a} r'^4 + r'^2 + \frac{1}{2} Q = 0,$$

woraus sich die Distanz r' ableiten lässt, wenn nur β nicht $= 0$ ist, in welchem Falle daraus nichts Anderes folgen würde, als $P = -a$. Wenn übrigens auch β nicht $= 0$ ist (wo man dann auf den dritten, im nachfolgenden Artikel zu betrachtenden Fall kommen würde), so wird doch β stets eine sehr kleine Grösse sein, und deshalb P nur wenig von $-a$ sich unterscheiden müssen. Hieraus ist aber klar, dass die Bestimmung des Coefficienten $\frac{\beta(P+1)}{P+a}$ sehr unsicher wird, und deshalb r' sich mit irgend welcher Genauigkeit nicht ableiten lässt. Ferner hat man $\frac{n' r'}{n} = -\frac{P+a}{\beta}$, $\frac{n' r'}{n''} = -\frac{P+a}{\beta P}$; worauf, ähnlich wie im Art. 143, leicht folgende Gleichungen entwickelt werden:

$$r \sin \zeta = \frac{n' r'}{n} \cdot \frac{\sin \gamma''}{\sin \epsilon'} \sin(l'' - l')$$

$$r'' \sin \zeta'' = -\frac{n' r'}{n''} \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin \epsilon'} \sin(l' - l)$$

$$r \sin(\zeta - AD) = r'' P \frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} \sin(\zeta'' - A''D),$$

aus deren Combination mit den Gleichungen VIII und IX des Art. 143 die Grössen r , ζ , r'' , ζ'' sich bestimmen lassen. Die übrigen Rechnungsoperationen kommen mit den oben beschriebenen überein.

162.

Im zweiten Falle, in welchem B' mit B zusammenfällt, wird auch D' mit denselben Punkten oder mit dem entgegengesetzten Punkte zusammenfallen. Es werden daher $AD - \delta$ und $A'D' - \delta''$ entweder $= 0$ oder $= 180^\circ$ sein; wonach man aus den Gleichungen des Art. 143 ableitet:

$$\frac{n' r'}{n} = \pm \frac{\sin \epsilon'}{\sin \epsilon} \cdot \frac{R \sin \delta}{\sin(z + AD - \delta)}$$

$$\frac{n' r'}{n''} = \pm \frac{\sin \epsilon'}{\sin \epsilon''} \cdot \frac{R' \sin \delta''}{\sin(z + A'D' - \delta')}$$

$$R \sin \delta \sin \epsilon' \sin(z + A'D' - \delta') = P R' \sin \delta'' \sin \epsilon \sin(z + AD - \delta).$$

Hieraus ist klar, dass z , unabhängig von Q , allein durch P bestimmbar ist (wenn nicht zufällig $A'D' = A'D$ oder $= A'D \pm 180^\circ$ ist, wo man auf den dritten Fall kommen würde). Hat man aber z gefunden, so wird auch r' bekannt, und weiter mit Hilfe der Werthe der Grössen $\frac{n' r'}{n}$, $\frac{n' r'}{n''}$ auch $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$. Hieraus endlich auch $Q = 2 \left(\frac{n}{n'} + \frac{n''}{n'} - 1 \right) r'^2$. — Offenbar lassen sich

dann also P und Q nicht als von einander unabhängige Data betrachten, sondern sie stellen entweder nur ein einziges Datum dar, oder incongruierende Data. Die Lage der Punkte C , C'' bleibt in diesem Falle willkürlich, wenn solche nur in demselben grössten Kreise mit C' genommen werden.

Im dritten Falle, wo A' , B , B' in demselben grössten Kreise liegen, werden D und D' resp. mit den Punkten B'' , B oder mit den entgegengesetzten zusammenfallen; woraus sich mittelst Combination der Gleichungen VII, VIII, IX des Art. 143 ergibt $P = \frac{R \sin \delta \sin \epsilon''}{R' \sin \delta' \sin \epsilon} = \frac{R \sin(l' - l)}{R' \sin(l'' - l')}$. In diesem Falle ist daher der Werth für P schon durch die Daten des Problems selbst geliefert, und es wird deshalb die Lage der Punkte C , C' , C'' unbestimmt bleiben.

163.

Die von Art. 136 an auseinandergesetzte Methode ist zwar vorzugsweise der ersten Bestimmung einer noch ganz unbekanntem Bahn angepasst. Sie

kann jedoch mit gleich glücklichem Erfolge auch dann benutzt werden, wenn es sich um Verbesserung einer schon sehr nahe bekannten Bahn aus drei, von einander, so weit man will, abstehenden Beobachtungen handelt. In einem solchen Falle muss man indessen Einiges ändern. Wenn nämlich die Beobachtungen eine sehr grosse heliocentrische Bewegung umfassen, so ist es nicht mehr gestattet, $\frac{v''}{\varrho}$ und $\vartheta\vartheta''$ als genäherte Werthe der Grössen P , Q zu betrachten. — Man kann vielmehr dann dafür viel genauere Werthe aus den sehr nahe bekannten Elementen ableiten. Man berechne daher leichtin vermittelt dieser Elemente die heliocentrischen Orte in der Bahn für die drei Beobachtungszeiten, woraus, wenn man die wahren Anomalien mit v , v' , v'' , die Radien Vectoren mit r , r' , r'' , den halben Parameter mit p bezeichnet, die folgenden genäherten Werthe sich ergeben:

$$P = \frac{r \sin(v' - v)}{r'' \sin(v'' - v')}, \quad Q = \frac{4 r'^4 \sin \frac{1}{2}(v' - v) \sin \frac{1}{2}(v'' - v')}{p \cos \frac{1}{2}(v'' - v)}.$$

Hierauf baue man dann die erste Hypothese, und durch kleine beliebige Aenderungen die zweite und dritte. Denn es würde nicht vorthellhaft sein, hier (wie es oben geschehen ist) P' und Q für die neuen Werthe anzunehmen, indem sich nicht mehr annehmen lässt, dass man daraus genauere Werthe erhalten werde. Durch diese Rechnung lassen sich alle drei Hypothesen sehr bequem zugleich erledigen, worauf man dann die vierte nach Vorschrift des Art. 120 bildet. Uebrigens habe ich nichts dagegen, dass, wenn Jemand dafür hält, wie die eine oder die andere der in den Artt. 124—129 auseinandergesetzten zehn Methoden in einem solchen Falle, wenn nicht rascher, doch beinahe ebenso rasch zum Ziele führen werde, er dann davon nach Belieben Gebrauch mache.

Zweiter Abschnitt.

(192)

Bestimmung der Bahn aus vier Beobachtungen, wovon nur zwei vollständig sind.

164.

Bereits im Eingange des zweiten Buchs (Art. 115) habe ich erklärt, dass sich die Benutzung des im vorhergehenden Abschnitte behandelten Problems auf diejenigen Bahnen beschränke, deren Neigung weder verschwindet, noch gar zu klein ist, und dass man die Bestimmung der wenig geneigten Bahnen nothwendig auf vier Beobachtungen stützen müsse. Vier vollständige Beobachtungen aber, da sie mit acht Gleichungen äquivaliren, die Zahl der Unbekannten inzwischen nur sechs beträgt, würden die Aufgabe zu einer mehr als bestimmten machen; weshalb man von zwei Beobachtungen die Breiten (oder die Declinationen) bei Seite lassen muss, um den übrigen Daten genau Genüge zu thun. So entsteht die Aufgabe, welcher der gegenwärtige Abschnitt gewidmet ist. Die hier gegebene Auflösung beschränkt sich aber nicht allein auf die nur wenig geneigten Bahnen, sondern lässt sich auch auf solche von beliebig grosser Neigung mit gleichem Erfolge anwenden. Auch hier muss man, ganz wie im vorigen Abschnitte, die Fälle von einander trennen, wo man bereits im Besitze genäherter Bahndimensionen sich befindet, und wo es sich um erste Bestimmung einer noch ganz unbekannten Bahn handelt. Ich mache mit dem ersten Falle den Anfang.

165.

Die einfachste Methode, um eine schon recht nahe bekannte Bahn den vier Beobachtungen anzupassen, scheint folgende. Es seien x , y die genähernten Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde in den beiden vollständigen Beobachtungen. Mit Hülfe derselben berechne man die entsprechenden heliocentrischen Orte, und hieraus die Elemente selbst; aus letzteren Elementen sodann

die geocentrischen Längen oder Rectascensionen für die beiden übrigen Beobachtungen. Stimmen diese zufällig mit den beobachteten Orten überein, so bedürfen die Elemente keiner weiteren Verbesserung; wenn nicht, so werden die Differenzen X, Y bezeichnet, und man wiederholt wiederum zweimal dieselbe Rechnung, indem man die Werthe von x, y ein klein wenig ändert. So erhält man drei Systeme der Werthe für die Grössen x, y und für die Differenzen X, Y , woraus man nach Vorschrift des Art. 120 verbesserte Werthe der Grössen x, y ermittelt, denen die Werthe $X = 0, Y = 0$ entsprechen. Mittelst einer ähnlichen, auf dies vierte System gestützten Berechnung wird man diejenigen Elemente erhalten, durch welche alle vier Beobachtungen gehörig dargestellt werden. Uebrigens empfiehlt es sich, wenn man die Auswahl in der Gewalt hat, diejenigen vollständigen Beobachtungen beizubehalten, aus welchen sich die Lage der Bahn mit der grössten Schärfe bestimmen lässt, (193) also die beiden äussersten Beobachtungen, falls sie eine heliocentrische Bewegung von 90° oder eine kleinere umfassen. Sind die Beobachtungen aber nicht von gleicher Güte, so lässt man die Breiten oder Declinationen derjenigen weg, welche man als die weniger genauen im Verdacht hat.

166.

Zur ersten Bestimmung einer noch ganz unbekanntem Bahn aus vier Beobachtungen müssen nothwendiger Weise solche Positionen angewandt werden, die eine nicht zu grosse heliocentrische Bewegung umfassen; widrigenfalls man die zur bequemen Bildung der ersten Annäherung erforderlichen Hilfsmittel entbehren würde. Die sogleich zu erörternde Methode aber erfreut sich einer so weiten Ausdehnung, dass sich dazu unbedenklich Beobachtungen benutzen lassen, die eine heliocentrische Bewegung von 30 oder 40 Graden umfassen, wenn nur die Abstände von der Sonne nicht gar zu ungleich sind. Falls man reichliches Material zur Auswahl besitzt, wird man wohlthun, die Zeitintervalle zwischen der ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und vierten Beobachtung möglichst gleich zu nehmen. Aber auch in dieser Beziehung braucht man nicht zu ängstlich zu sein, wie das nachfolgende Beispiel zeigen wird, wo die Zwischenzeiten 48, 55, 59 Tage sind, und die heliocentrische Bewegung über 50 Grade beträgt.

Ferner erfordert unsere Auflösung, dass die zweite und dritte Beobachtung vollständig sind, und mithin die Breiten oder Declinationen bei den äussersten Beobachtungen bei Seite gelassen werden. Ich habe zwar oben bemerkt, wie es sich der grösseren Genauigkeit wegen gemeiniglich empfiehlt, die Elemente den beiden äussersten vollständigen Beobachtungen und den in der Mitte liegenden Längen oder Rectascensionen anzupassen. Man wird es jedoch bei einer ersten Bahnbestimmung nicht bereuen, auf diesen Gewinn Verzicht geleistet zu haben, indem eine recht rasche Annäherung von viel grösserem Gewicht ist, und indem jener Verlust, der hauptsächlich nur die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn trifft, der aber die übrigen Elemente kaum merklich afficirt, sich nachher leicht ausgleichen lässt.

Der Kürze wegen will ich die Auseinandersetzung der Methode so anordnen, dass alle Orte sich auf die Ecliptik beziehen, und setze ich deshalb voraus, dass vier Längen mit zwei Breiten gegeben seien. Da inzwischen bei unseren Formeln auch Rücksicht auf die Breite der Erde genommen werden soll, so lassen sie sich leicht auf den Fall übertragen, wo der Aequator zur Grundebene genommen wird, wenn nur die Rectascensionen und Declinationen an Stelle der Längen und Breiten substituirt werden.

Uebrigens gilt Alles, was in Beziehung auf Nutation, Präcession und Parallaxe, sowie auf Aberration im vorigen Abschnitte gesagt ist, auch hier. Wenn daher nicht genäherte Entfernungen von der Erde bereits anderswoher bekannt sind, so dass sich in Beziehung auf Aberration die Methode I des Art. 118 brauchen lässt, so befreit man Anfangs die beobachteten Orte nur von der Fixstern-Aberration, und verbessert die Zeiten erst dann, sobald man im (194) Laufe der Rechnung über eine genäherte Bestimmung der Entfernungen disponirt, wie weiter unten noch deutlicher erhellen wird.

167.

Ich stelle der Auseinandersetzung der Auflösung einen Index der vorzüglichsten Bezeichnungen voran. Es sollen bedeuten:

- t, t', t'', t''' die vier Beobachtungszeiten,
- $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ die vier geocentrischen Längen des Himmelskörpers,
- $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ dessen Breiten,

r, r', r'', r''' dessen Entfernungen von der Sonne,
 $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ dessen Entfernungen von der Erde,
 l, l', l'', l''' die heliocentrischen Längen der Erde,
 B, B', B'', B''' die heliocentrischen Breiten der Erde,
 R, R', R'', R''' die Entfernungen der Erde von der Sonne,

$(n01), (n12), (n23), (n02), (n13)$ die doppelten Flächen der Dreiecke, welche enthalten sind resp. zwischen der Sonne sowie des Himmelskörpers erstem und zweitem Orte, zweitem und drittem, drittem und viertem, erstem und drittem, zweitem und viertem,

$(\eta01), (\eta12), (\eta23)$ die Quotienten, welche entstehen aus der Division der Flächen $\frac{1}{2}(n01), \frac{1}{2}(n12), \frac{1}{2}(n23)$ durch die Flächen der entsprechenden Sectoren,

$$P' = \frac{(n12)}{(n01)}, \quad P'' = \frac{(n12)}{(n23)},$$

$$Q = \left(\frac{(n01) + (n12)}{(n02)} - 1 \right) r^3, \quad Q'' = \left(\frac{(n12) + (n23)}{(n13)} - 1 \right) r'^3,$$

v, v', v'', v''' des Himmelskörpers Längen in der Bahn von einem willkürlichen Punkte an gezählt.

Endlich bezeichne ich für die zweite und dritte Beobachtung die heliocentrischen Orte der Erde an der Himmelskugel mit A', A'' , die geocentrischen Orte des Himmelskörpers mit B, B' und dessen heliocentrischen Orte mit C, C'' .

Unser erstes Geschäft wird nun ganz wie bei der Aufgabe des vorhergehenden Abschnitts (Art. 136) in der Bestimmung der Lage der grössten Kreise $AC'B$ und $A''C''B'$ bestehen, deren Neigungen gegen die Ecliptik ich mit γ', γ'' bezeichne. Mit dieser Rechnung verbindet man zugleich die Bestimmung der Bögen $A'B = \delta', A''B'' = \delta''$. Dann ist offenbar:

$$r' = \sqrt{(\varrho'\varrho' + 2\varrho'R\cos\delta' + RR)}$$

$$r'' = \sqrt{(\varrho''\varrho'' + 2\varrho''R'\cos\delta'' + R'R')},$$

oder wenn man setzt: $\varrho' + R\cos\delta' = x'; \varrho'' + R'\cos\delta'' = x''; R\sin\delta' = a'; R'\sin\delta'' = a''$, so ist

(195)

$$r' = \sqrt{(x'x' + a'a')}$$

$$r'' = \sqrt{(x''x'' + a''a'')}.$$

168.

Combinirt man die Gleichungen 1 und 2 des Art. 112, so geben sie mit Anwendung der Bezeichnung in gegenwärtiger Untersuchung folgende Gleichungen:

$$0 = (n12)R \cos B \sin(l-\alpha) - (n02)(\rho' \cos \beta' \sin(\alpha' - \alpha) + R' \cos B' \sin(l' - \alpha)) \\ + (n01)(\rho'' \cos \beta'' \sin(\alpha'' - \alpha) + R'' \cos B'' \sin(l'' - \alpha)); \\ 0 = (n23)(\rho' \cos \beta' \sin(\alpha'' - \alpha) + R' \cos B' \sin(\alpha''' - l')) - (n13)(\rho'' \cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'') \\ + R'' \cos B'' \sin(\alpha''' - l'')) + (n12)R'' \cos B'' \sin(\alpha''' - l'').$$

Diese Gleichungen gehen nun, wenn man setzt:

$$\frac{R \cos B' \sin(l' - \alpha)}{\cos \beta' \sin(\alpha' - \alpha)} - R' \cos \delta' = b' \\ \frac{R'' \cos B'' \sin(\alpha''' - l'')}{\cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')} - R'' \cos \delta'' = b'' \\ \frac{R' \cos B' \sin(\alpha''' - l')}{\cos \beta' \sin(\alpha''' - \alpha')} - R' \cos \delta' = x' \\ \frac{R'' \cos B'' \sin(l'' - \alpha)}{\cos \beta'' \sin(\alpha'' - \alpha)} - R'' \cos \delta'' = x'' \\ \frac{R \cos B \sin(l - \alpha)}{\cos \beta \sin(\alpha'' - \alpha)} = \lambda \\ \frac{R'' \cos B'' \sin(\alpha''' - l'')}{\cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha')} = \lambda''' \\ \frac{\cos \beta' \sin(\alpha' - \alpha)}{\cos \beta'' \sin(\alpha'' - \alpha)} = \mu' \\ \frac{\cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')}{\cos \beta' \sin(\alpha''' - \alpha')} = \mu''$$

nach gehöriger Reduction über, in folgende:

$$\frac{\mu'(1 + P')(x' + b')}{1 + \frac{Q'}{(x'x' + a'a')^{\frac{1}{2}}}} = x'' + x''' + \lambda P' \\ \frac{\mu''(1 + P'')(x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{(x''x'' + a''a'')^{\frac{1}{2}}}} = x' + x'' + \lambda''' P'',$$

(196) oder wenn man noch überhies setzt:

$$\begin{aligned} -x'' - \lambda P' &= c'; & \mu'(1 + P') &= d' \\ -x' - \lambda'' P'' &= c''; & \mu''(1 + P'') &= d'' \end{aligned}$$

in folgende:

$$\begin{aligned} \text{I. } x'' &= c' + \frac{d'(x' + b')}{1 + \frac{Q'}{(x'x' + a'a')^{\frac{1}{2}}}} \\ \text{II. } x' &= c'' + \frac{d''(x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{(x''x'' + a''a'')^{\frac{1}{2}}}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen lassen sich x' und x'' aus $a', b', c', d', Q, a'', b'', c'', d'', Q''$ bestimmen. Man würde zwar, wenn x' oder x'' hieraus eliminiert werden sollte, auf eine Gleichung sehr hohen Grades kommen; dennoch aber würden durch indirecte Methoden die Werthe der Unbekannten x', x'' aus jenen Gleichungen bei ungeänderter Gestalt sich hinreichend rasch bestimmen lassen. Gemeinlich erhält man schon genäherte Werthe der Unbekannten, wenn man zuerst Q' und Q'' vernachlässigt, nemlich

$$\begin{aligned} x' &= \frac{c' + d''(b'' + c') + d' d'' b'}{1 - d' d''} \\ x'' &= \frac{c'' + d'(b' + c'') + d' d' b''}{1 - d' d''} \end{aligned}$$

Hat man aber nur erst einen genäherten Werth einer der beiden Unbekannten, so bekommt man die genauen, den Gleichungen streng genügenden Werthe sehr leicht. Es sei nämlich ξ ein genäherter Werth von x' , der, wenn er in Gleichung (I) substituirt, geben soll $x'' = \xi''$; ebenso sollen, wenn $x'' = \xi''$ in die Gleichung (II) substituirt wird, daraus $x' = X'$ herauskommen. Man wiederhole nun das nämliche Verfahren, indem man für x' in (I) einen andern Werth: $\xi + v'$ einsetzt, woraus $x'' = \xi'' + v''$ herauskommen mag, und dieser Werth soll in (II) substituirt geben: $x' = X' + N'$. Dann wird der verbesserte Werth für x' sein $= \xi + \frac{(\xi - X')v'}{N' - v'}$ $= \frac{\xi N' - X' v'}{N' - v'}$, und der verbesserte Werth für $x'' = \xi'' + \frac{(\xi'' - X'')v''}{N'' - v''}$. Erscheint es der Mühe werth, so mag man mit dem verbesserten Werthe für x' und einem andern wenig

geänderten dasselbe Verfahren wiederholen, bis man für x' und x'' Werthe erhält, die den Gleichungen I, II genau Genüge leisten. Uebrigens werden selbst einem nur mässig bewanderten Analytisten die Hilfsmittel zur Abkürzung der Rechnung nicht fehlen.

Bei diesen Operationen lassen sich die irrationalen Grössen $(x'x' + a'a)^{\frac{3}{2}}$ und $(x''x'' + a''a'')^{\frac{3}{2}}$ leicht berechnen durch Einführung der Bögen z' , z'' , deren Tangenten resp. sind $\frac{a'}{x'}$, $\frac{a''}{x''}$, woraus wird: (197)

$$V(x'x' + a'a) = r' = \frac{a'}{\sin z'} = \frac{x'}{\cos z'}$$

$$V(x''x'' + a''a'') = r'' = \frac{a''}{\sin z''} = \frac{x''}{\cos z''}.$$

Diese Hilfsbögen, welche man zwischen 0 und 180° nehmen muss, damit r und r'' positiv herauskommen, sind offenbar mit den Bögen $C'B$, $C''B''$ identisch, woraus man sieht, dass auf diese Weise nicht nur r' und r'' , sondern auch die Lage der Punkte C' und C'' bekannt wird.

Diese Bestimmung der Grössen x' , x'' erfordert, dass a' , a'' , b' , b'' , c' , c'' , d' , d'' , Q' , Q'' bekannt sind, und zwar erhält man die vier ersten durch die Daten des Problems, die vier folgenden aber hängen von P' und P'' ab. Nun lassen die Grössen P' , P'' , Q' , Q'' sich zwar noch nicht genau bestimmen; da man aber hat:

$$\text{III. } P' = \frac{\ell' - \ell}{\ell' - t} \cdot \frac{(\eta 01)}{(\eta 12)}$$

$$\text{IV. } P'' = \frac{\ell'' - \ell''}{\ell'' - t''} \cdot \frac{(\eta 23)}{(\eta 12)}$$

$$\text{V. } Q' = \frac{1}{2} kk(\ell' - t)(\ell' - \ell) \cdot \frac{r' r'}{r'' r''} \cdot \frac{1}{(\eta 01)(\eta 12) \cos \frac{1}{2}(v' - v) \cos \frac{1}{2}(v'' - v) \cos \frac{1}{2}(v'' - v')}$$

$$\text{VI. } Q'' = \frac{1}{2} kk(\ell'' - t'')(\ell'' - \ell'') \cdot \frac{r'' r''}{r' r'} \cdot \frac{1}{(\eta 12)(\eta 23) \cos \frac{1}{2}(v'' - v') \cos \frac{1}{2}(v''' - v') \cos \frac{1}{2}(v''' - v'')}$$

so hat man als genäherte Werthe gleich zur Hand

$$P' = \frac{\ell' - \ell}{\ell' - t}, \quad P'' = \frac{\ell'' - \ell''}{\ell'' - t''}$$

$$Q' = \frac{1}{2} kk(\ell' - t)(\ell' - \ell), \quad Q'' = \frac{1}{2} kk(\ell'' - t'')(\ell'' - \ell''),$$

auf welche man die erste Rechnung baut.

169.

Nach Beendigung der Berechnung im vorigen Artikel muss man vor Allem den Bogen $C'C''$ bestimmen. Dies geschieht am bequemsten, wenn man ganz wie im Art. 137 den Einschnitt D der grössten Kreise $A'CB$, $A''C''B''$ und ihre gegenseitige Neigung ϵ ermittelt. Man findet sodann aus t , $C'D = z' + B'D$ und $C''D = z'' + B''D$, durch die Formeln in Art. 144, nicht nur $C'C'' = v'' - v'$, sondern auch die Winkel (u', u'') , unter welchen die grössten Kreise $A'B'$, $A''B''$ den grössten Kreis $C'C''$ schneiden.

(198) Nach Aufindung des Bogens $v'' - v'$ erhält man $v' - v$ und r aus Combination der Gleichungen

$$r \sin(v' - v) = \frac{r' \sin(v'' - v')}{P'}$$

$$r \sin(v' - v + v'' - v') = \frac{1 + P'}{P'} \cdot \frac{r' \sin(v'' - v')}{1 + \frac{Q'}{r'^2}}$$

und ebenso r'' und $v'' - v''$ aus folgender Combination:

$$r'' \sin(v''' - v'') = \frac{r'' \sin(v'' - v')}{P''}$$

$$r'' \sin(v''' - v'' + v'' - v') = \frac{1 + P''}{P''} \cdot \frac{r'' \sin(v'' - v')}{1 + \frac{Q''}{r''^2}}$$

Alle solchergestalt gefundenen Zahlen würden genau sein, wenn man gleich im Anfange von den wahren Werthen für P' , P'' , Q' , Q'' hätte ausgehen können, wo man dann die Lage der Bahnebene ebenso wie im Art. 149 entweder aus $A'C'$, u' und γ' , oder aus $A''C''$, u'' und γ'' bestimmen würde, und die Bahndimensionen entweder aus r' , r'' , t , t' und $v'' - v'$, oder (was genauer ist) aus r , r'' , t , t'' und $v'' - v$. Bei erster Rechnung aber übergehe ich alles Dieses und strebe vorzüglich darnach, mehr genäherte Werthe für die Grössen P' , P'' , Q' , Q'' zu erlangen. Dieses Ziel verfolge ich, wenn ich mittelst der Methode, die von Art. 88 an auseinandergesetzt ist,

$$\text{aus } r, r', v' - v, t - t' \text{ bestimme: } (\eta 01)$$

$$\text{„ } r', r'', v'' - v', t' - t'' \text{ „ } (\eta 12)$$

$$\text{„ } r'', r''', v''' - v'', t'' - t''' \text{ „ } (\eta 23).$$

Diese Grössen, sowie die Werthe für $r, r', r'', r''', \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ u. s. w. schalte ich in die Formeln III bis VI ein, woraus dann für P', Q', P'', Q'' viel genauere Werthe als diejenigen resultiren, auf welche die erste Hypothese sich stützte. Mit diesen genaueren Werthen bilde man also die zweite Hypothese, welche, wenn sie ganz auf dieselbe Weise wie die erste durchgeführt wird, noch genauere Werthe für P', Q', P'', Q'' liefern und so zur dritten Hypothese führen wird. — Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis die Werthe für P', Q', P'', Q'' keiner Verbesserung mehr zu bedürfen scheinen, und eine häufige Uebung wird bald lehren, dies richtig zu beurtheilen.

Wenn die heliocentrische Bewegung klein ist, so wird gemeiniglich die erste Hypothese jene Werthe bereits genau genug ergeben; falls sie aber einen grösseren Bogen umfasst, und wenn überdies die Zwischenzeiten merklich von der Gleichheit abweichen, so wird es mehrfach wiederholter Hypothesen bedürfen; jedoch erfordern in einem solchen Falle die ersten Hypothesen (199) keine grosse Schärfe der Rechnung. In letzter Hypothese endlich bestimmt man die Elemente selbst, so wie bereits gezeigt ist.

170.

In erster Hypothese wird man freilich von den unverbesserten Zeiten t, t', t'', t''' Gebrauch machen müssen, da man die Entfernungen von der Erde noch nicht berechnen kann. Sobald aber erst genäherte Werthe für die Grössen x', x'' bekannt sind, so lassen sich auch jene Entfernungen näherungsweise bestimmen. Da aber die Formeln für φ und φ'' hier etwas verwickelter ausfallen, so empfiehlt es sich, die Berechnung der Zeiten-Verbesserung bis dahin aufzuschieben, wo man die Werthe für die Entfernungen genau genug besitzt, dass keine Wiederholung der Rechnung nöthig ist.

Es wird deshalb vortheilhaft sein, dies Verfahren auf diejenigen Werthe für x', x'' zu stützen, zu welchen die vorletzte Hypothese geführt hat, so dass erst die letzte Hypothese von dem verbesserten Werthe der Zeiten und der Grössen P', P'', Q', Q'' ausgeht. Hier folgen die zu diesem Zwecke zu benutzenden Formeln:

$$\text{VII. } \varphi' = x' - R' \cos \delta'$$

$$\text{VIII. } \varphi'' = x'' - R'' \cos \delta''$$

$$\text{IX. } \varrho \cos \beta = -R \cos B \cos(\alpha - l) + \frac{1 + P'}{P'(1 + \frac{Q'}{r^2})} (\varrho' \cos \beta' \cos(\alpha' - \alpha) + R' \cos B' \cos(l' - \alpha))$$

$$- \frac{1}{P''} (\varrho'' \cos \beta'' \cos(\alpha'' - \alpha) + R'' \cos B'' \cos(l'' - \alpha))$$

$$\text{X. } \varrho \sin \beta = -R \sin B + \frac{1 + P'}{P'(1 + \frac{Q'}{r^2})} (\varrho' \sin \beta' + R' \sin B') - \frac{1}{P''} (\varrho'' \sin \beta'' + R'' \sin B'')$$

$$\text{XI. } \varrho''' \cos \beta''' = -R''' \cos B''' \cos(\alpha''' - l''') + \frac{1 + P'''}{P'''(1 + \frac{Q'''}{r'^2})} (\varrho''' \cos \beta''' \cos(\alpha''' - \alpha''') +$$

$$R''' \cos B''' \cos(\alpha''' - l''')) - \frac{1}{P''} (\varrho'' \cos \beta'' \cos(\alpha'' - \alpha) + R'' \cos B'' \cos(\alpha'' - l''))$$

$$\text{XII. } \varrho''' \sin \beta''' = -R''' \sin B''' + \frac{1 + P'''}{P'''(1 + \frac{Q'''}{r'^2})} (\varrho''' \sin \beta''' + R''' \sin B''')$$

$$- \frac{1}{P''} (\varrho'' \sin \beta'' + R'' \sin B'').$$

Die Formeln IX—XII lassen sich ohne Weiteres aus den Gleichungen 1, 2, 3 des Art. 112 ableiten, wenn man nur die dort angewandten Bezeichnungen (200) mit den hier gebrauchten gehörig vertauscht. Offenbar werden die Formeln viel einfacher, wenn B, B', B'' verschwinden. Aus Combination der Formeln IX und X erhält man ϱ und β , und ebenso aus XI und XII ϱ''' und β''' . Vergleicht man die Werthe dieser Breiten mit den beobachteten (die nicht in die Rechnung eingehen), wenn letztere gegeben sind, so wird sich zeigen, mit welchem Grade der Genauigkeit man die äussersten Breiten durch die Elemente darstellen kann, welche den übrigen sechs Daten angepasst sind.

171.

Ein Beispiel zur Erläuterung dieser Untersuchung will ich von der Vesta hernehmen, die unter allen neuerdings entdeckten Planeten die kleinste Neigung gegen die Ecliptik besitzt.*)

*) Inzwischen ist diese Neigung ($7^{\circ} 8'$) noch bedeutend genug, um mit Sicherheit und Genauigkeit auch eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen zuzulassen. In der That waren die ersten Elemente solchergestalt aus Beobachtungen abgeleitet, die nur 19 Tage von einander abstanden, und nähern sich schon sehr denen, die hier aus vier, um 162 Tage von einander entfernten Beobachtungen bestimmt sind (vergl. v. Zach Monatliche Correspondenz, Band 15, S. 595).

Ich wähle die nachstehenden, zu Bremen, Paris, Lilienthal und Mailand, von Olbers, Bouvard, Bessel und Oriani angestellten Beobachtungen:

mittlere Zeit des Beobachtungsorts.	Rectascension.	Declination.
1807 März 30. 12 ^h 33 ^m 17 ^s	183° 52' 40",8	11° 54' 27" nördl.
„ Mai 17. 8 16 5	178 36 42,3	11 39 46,8 „
„ Juli 11. 10 30 19	189 49 7,7	3 9 10,1 „
„ Sept. 8. 7 22 16	212 50 3,4	8 38 17,0 südl.

Für dieselben Zeiten findet man aus den Sonnentafeln:

	Länge d. Sonne vom scheinbaren Aequin.	Nutation.	Abstand von der Erde.	Breite der Sonne.	scheinbare Schiefe der Ecliptik.
März 30	9° 21' 59",5	+ 16,8	0,999 6448	+ 0",23	23° 27' 50",82
Mai 17	55 56 20,0	+ 16,2	1,011 9789	— 0,63	49,83
Juli 11	108 34 53,3	+ 17,3	1,016 5795	— 0,46	49,19
Sept. 8	165 8 57,1	+ 16,7	1,006 7421	+ 0,29	49,26

Nun werden die beobachteten Planetenorte, mit Anwendung der scheinbaren Schiefe der Ecliptik, in Längen und Breiten verwandelt, von der Nutation und Fixstern-Aberration befreit, und schliesslich durch Hinwegnahme der Präcession auf den Anfang des Jahres 1807 reducirt. Dann werden aus den Sonnenorten, nach Anleitung von Art. 72, die fingirten Orte der Erde abgeleitet (um auf die Parallaxe Rücksicht zu nehmen) und die Längen durch Hinwegnahme der Nutation und Praecession auf dieselbe Epoche übertragen. Endlich werden die Zeiten von Beginn des Jahres gezählt und auf Pariser Meridian reducirt. So sind folgende Zahlen entstanden:

t, ℓ, ℓ', ℓ''	89,505 162	137,344 502	192,419 502	251,288 102
$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$	178° 43' 38",87	174° 1' 30",08	187° 45' 42",23	213° 34' 15",63
$\beta, \beta', \beta'', \beta'''$	12 27 6,16	10 8 7,80	6 47 25,51	4 20 21,63
l, l', l'', l'''	189 21 33,71	235 56 0,63	288 35 20,32	345 9 18,69
$\log R, R', R'', R'''$	9,999 7990	0,005 1376	0,007 1739	0,003 0625.

Hieraus leitet man ab:

$$\begin{aligned}
 \gamma' &= 168^\circ 32' 41'' 34; & \delta' &= 62^\circ 23' 4'' 88; & \log a' &= 9,952\,6104 \\
 \gamma'' &= 173 \quad 5 \quad 15,68; & \delta'' &= 100 \quad 45 \quad 1,40; & \log a'' &= 9,999\,4839 \\
 b' &= -11,009\,449; & x' &= -1,083\,306; & \log \lambda &= 0,072\,8800; & \log u' &= 9,713\,9702n \\
 b'' &= -2,082\,036; & x'' &= +6,322\,006; & \log \lambda''' &= 0,079\,8512n; & \log u'' &= 9,838\,7061 \\
 AD &= 37^\circ 17' 51'' 50; & A'D &= 89^\circ 24' 11'' 84; & \epsilon &= 9^\circ 5' 5'' 48 \\
 BD &= -25 \quad 5 \quad 13,38; & B'D &= -11 \quad 20' 49'' 56.
 \end{aligned}$$

Nach Erledigung dieser vorläufigen Rechnungen, nehme ich die erste Hypothese in Angriff. Aus den Zwischenzeiten ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \log k(t-t) &= 9,915\,3666 \\
 \log k(t'-t) &= 9,976\,5359 \\
 \log k(t''-t') &= 0,005\,4651
 \end{aligned}$$

und hieraus die ersten genäherten Werthe

$$\begin{aligned}
 \log P' &= 0,061\,17; & \log(1+P') &= 0,332\,69; & \log Q' &= 9,590\,87 \\
 \log P'' &= 9,971\,07; & \log(1+P'') &= 0,286\,81; & \log Q'' &= 9,680\,97
 \end{aligned}$$

hieraus ferner:

$$\begin{aligned}
 c' &= -7,683\,61; & \log d' &= 0,046\,66n \\
 c'' &= +2,207\,71; & \log d'' &= 0,125\,52.
 \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen ergibt nach einigen wenigen Versuchen die nachfolgende Auflösung der Gleichungen I und II:

$$\begin{aligned}
 x' &= 2,048\,56; & z' &= 23^\circ 38' 17''; & \log r' &= 0,349\,51 \\
 x'' &= 1,957\,45; & z'' &= 27 \quad 2 \quad 0; & \log r'' &= 0,341\,94.
 \end{aligned}$$

Aus z' , z'' und ϵ erhält man $CC'' = v'' - v' = 17^\circ 7' 5''$; hieraus $v' - v$, r , $r''' - v''$, r'''' mittelst folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (202) \quad \log r \sin(r' - v) &= 9,749\,42; & \log r \sin(v' - v + 17^\circ 7' 5'') &= 0,075\,00 \\
 \log r'' \sin(v'' - v'') &= 9,847\,29; & \log r'' \sin(r''' - v'' + 17 \quad 7 \quad 5) &= 0,107\,33,
 \end{aligned}$$

woraus man findet:

$$\begin{aligned}
 v' - v &= 14^\circ 14' 32''; & \log r &= 0,358\,65 \\
 r''' - v'' &= 18 \quad 48 \quad 33; & \log r'' &= 0,338\,87.
 \end{aligned}$$

Endlich findet sich

$$\log(n01) = 0,004\,26, \quad \log(n12) = 0,005\,99, \quad \log(n23) = 0,007\,11,$$

und hieraus die verbesserten Werthe von P' , P'' , Q' , Q''

$$\begin{aligned}
 \log P' &= 0,059\,44, & \log Q' &= 9,603\,74 \\
 \log P'' &= 9,972\,19, & \log Q'' &= 9,695\,81.
 \end{aligned}$$

Hierauf stützt man die zweite Hypothese. Ihre Hauptmomente sind folgende:

$$\begin{aligned} c' &= -7,678\ 20; & \log d' &= 0,045\ 736\ n \\ c'' &= +2,210\ 61; & \log d'' &= 0,126\ 054 \\ x' &= 2,033\ 08; & z' &= 23^\circ 47' 54''; & \log r' &= 0,346\ 747 \\ x'' &= 1,942\ 90; & z'' &= 27^\circ 12' 25''; & \log r'' &= 0,339\ 373 \\ C' C'' &= v'' - v' = 17^\circ 8' 0'' \\ v' - v &= 14^\circ 21' 36''; & \log r &= 0,354\ 687 \\ v''' - v'' &= 18^\circ 50' 43''; & \log r''' &= 0,334\ 564 \end{aligned}$$

$$\log(n\ 01) = 0,004\ 359; \quad \log(n\ 12) = 0,006\ 102; \quad \log(n\ 23) = 0,007\ 280.$$

Hieraus erhält man die von Neuem verbesserten Werthe für P' , P'' , Q' , Q'' :

$$\begin{aligned} \log P' &= 0,059\ 426; & \log Q' &= 9,604\ 749 \\ \log P'' &= 9,972\ 249; & \log Q'' &= 9,697\ 564, \end{aligned}$$

aus welchen, wenn man zur dritten Hypothese übergeht, folgende Zahlen resultiren:

$$\begin{aligned} c' &= -7,678\ 15; & \log d' &= 0,045\ 729\ n \\ c'' &= +2,210\ 76; & \log d'' &= 0,126\ 082 \\ x' &= 2,032\ 55; & z' &= 23^\circ 48' 14''; & \log r' &= 0,346\ 653 \\ x'' &= 1,942\ 35; & z'' &= 27^\circ 12' 49''; & \log r'' &= 0,339\ 276 \\ C' C'' &= v'' - v' = 17^\circ 8' 4'' \\ v' - v &= 14^\circ 21' 49''; & \log r &= 0,354\ 522 \\ v''' - v'' &= 18^\circ 51' 7''; & \log r''' &= 0,334\ 290 \end{aligned}$$

$$\log(n\ 01) = 0,004\ 363; \quad \log(n\ 12) = 0,006\ 106; \quad \log(n\ 23) = 0,007\ 290.$$

Wenn man jetzt nach Anleitung des vorhergehenden Artikels die Entfernungen von der Erde berechnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} \varrho' &= 1,5635; & \varrho'' &= 2,1319 \\ \log \varrho \cos \beta &= 0,098\ 76; & \log \varrho''' \cos \beta''' &= 0,428\ 42 \\ \log \varrho \sin \beta &= 9,442\ 52; & \log \varrho''' \sin \beta''' &= 9,309\ 05 \\ \beta &= 12^\circ 26' 40''; & \beta''' &= 4^\circ 20' 39'' \\ \log \varrho &= 0,109\ 09; & \log \varrho''' &= 0,429\ 67 \end{aligned} \tag{203}$$

Daraus findet man:

	Verbesserung der Zeiten.	verbesserte Zeiten.
I	0,007 335	89,497 827
II	0,008 921	135,335 581
III	0,012 165	192,407 337
IV	0,015 346	251,272 756

Hieraus erhält man folgende abermals verbesserte Werthe:

$$\log P' = 0,059 415, \quad \log Q' = 9,604 782$$

$$\log P'' = 9,972 253, \quad \log Q'' = 9,697 687.$$

Wenn man endlich auf diese neuen Werthe eine vierte Hypothese stützt, so ergeben sich folgende Zahlen:

$$c' = -7,678 116; \quad \log d' = 0,045 723 n$$

$$c'' = +2,210 773; \quad \log d'' = 0,126 084$$

$$s' = 2,032 473; \quad z' = 23^{\circ} 48' 16'' 7; \quad \log r' = 0,346 638$$

$$s'' = 1,942 281; \quad z'' = 27 12 51,7; \quad \log r'' = 0,339 263$$

$$v'' - v' = 17^{\circ} 8' 5'' 1; \quad \frac{1}{2}(u'' + u') = 176^{\circ} 7' 50'' 5; \quad \frac{1}{2}(u'' - u') = 4^{\circ} 33' 23'' 6$$

$$v' - v = 14 21 51,9; \quad \log r = 0,354 503$$

$$v''' - v'' = 18 51 9,5; \quad \log r''' = 0,334 263.$$

Diese Zahlen weichen von denen der dritten Hypothese so wenig ab, dass man bereits mit Sicherheit zur Bestimmung der Elemente selbst übergehen kann. Zuerst ermittelt man die Lage der Bahnebene. Nach Anleitung des Art. 149 findet sich aus γ', u' und $A'C = \delta' - z'$, die Neigung der Bahn = $7^{\circ} 8' 14'' 8$, $\Omega = 103^{\circ} 16' 37'' 2$, Argument der Breite in zweiter Beobachtung = $94^{\circ} 36' 4'' 9$, daraus Länge in der Bahn = $197^{\circ} 52' 42'' 1$. Ebenso aus γ'', u'' und $A'C'' = \delta'' - z''$ die Neigung der Bahn = $7^{\circ} 8' 14'' 8$, $\Omega = 103^{\circ} 16' 37'' 5$, Argument der Breite in dritter Beobachtung = $111^{\circ} 44' 9'' 7$, und daraus Länge in der Bahn = $215^{\circ} 0' 47'' 2$. Darnach wird Länge in der Bahn für die erste Beobachtung = $183^{\circ} 30' 50'' 2$, für die vierte Beobachtung $233^{\circ} 51' 56'' 7$. Bestimmt man nun aus $\ell'' - t, r, r'''$ und $v''' - v = 50^{\circ} 21' 6'' 5$ die Dimensionen der Bahn, so erhält man:

wahre Anomalie für den ersten Ort	293° 33' 43"7	(204)
wahre Anomalie für den vierten Ort	343 54 50,2	
hieraus Länge des Perihels	249 57 6,5	
mittlere Anomalie für den ersten Ort	302 33 32,6	
mittlere Anomalie für den vierten Ort	346 32 25,2	
mittlere tägliche siderische Bewegung	978"7216	
mittlere Anomalie für den Anfang des Jahres 1807	278 13 39,1	
mittlere Länge für dieselbe Epoche	168 10 45,6	
Winkel φ	5 2 58,1	
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,372 898	

Berechnet man nach diesen Elementen für die verbesserten Zeiten t , t' , t'' die geocentrischen Orte des Planeten, so stimmen die vier Längen mit α , α' , α'' , α''' , und die beiden intermediären Breiten mit β , β' bis auf den zehnten Theil der Secunde überein. Die äussersten Breiten aber werden $12^\circ 26' 43''7$ und $4^\circ 20' 40''1$, erstere um $22''4$ zu klein, letztere um $18''5$ zu gross. Wenn man jedoch unter Beibehaltung der übrigen Elemente nur die Neigung der Bahn um $6''$ vermehrt und die Länge des Knotens um $4' 40''$ vermindert, so lassen sich die auf alle Breiten vertheilten Fehler bis auf wenige Secunden herabbringen, und die Längen erscheinen mit nur sehr kleinen Fehlern behaftet, welche sich fast auf Nichts reduciren würden, wenn man überdies die Epoche der Länge um $2'$ vermindert.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer Bahn, die den Beobachtungen, so viele man ihrer hat, sich möglichst genau anschliesst.

172.

Wenn die astronomischen Beobachtungen und die übrigen Zahlen, auf welche die Bahnberechnung sich stützt, einer absoluten Genauigkeit sich erfreuten, so würden auch die Elemente, mag man sie nun aus drei oder aus vier Beobachtungen herleiten, sogleich absolut genau herauskommen (wenigstens so lange man voraussetzt, dass die Bewegung genau nach den Kepler'schen Gesetzen vor sich geht) und sie könnten daher durch Hinzunahme anderer und wieder anderer Beobachtungen nur bestätigt, nicht verbessert werden. Da aber alle unsere Messungen und Beobachtungen nichts als Annäherungen an die Wahrheit sind, und dasselbe von allen darauf gestützten Rechnungen gelten muss, so muss das höchste Ziel aller über concrete Erscheinungen angestellter Rechnungen darin gefunden werden, der Wahrheit so nahe als möglich zu kommen. Dies kann aber in keiner anderen Weise geschehen, als durch eine geeignete Combination von mehr Beobachtungen, als absolut zur Bestimmung der unbekanntenen Grössen erforderlich sind. Diese Arbeit lässt sich jedoch erst dann unternehmen, wenn man bereits eine genäherte Kenntniss der Bahn besitzt, welche dann so zu verbessern ist, dass sie allen Beobachtungen so nahe als möglich entspricht. Scheint nun auch dieser Ausdruck etwas Unbestimmtes zu enthalten, so werde ich doch unten die Grundsätze abhandeln, durch welche das Problem einer gesetzmässigen und methodischen Lösung unterworfen wird.

Die höchste Genauigkeit zu erstreben, kann nur dann der Mühe werth erscheinen, wenn gleichsam die letzte Hand an die Bahnbestimmung zu legen ist. So lange dagegen Hoffnung vorhanden ist, dass bald neue Beobachtungen zu neuen Verbesserungen Gelegenheit geben werden, so empfiehlt es sich, nach

Lage der Sache mehr oder weniger von der äussersten Genauigkeit abzulassen, wenn solchergestalt die Weitläufigkeit der Operationen erheblich vermindert werden mag. Ich will mich bemühen, beide Fälle zu berücksichtigen.

173.

Es ist ausserordentlich wichtig, dass die einzelnen geocentrischen Positionen des Himmelskörpers, auf welche man sich entschlossen hat, die Bahnbestimmung zu gründen, nicht aus vereinzeltten Beobachtungen genommen werden, sondern, wenn es geschehen kann, aus mehreren so combinirten, dass die etwa begangenen Irrthümer, so viel es angeht, sich gegenseitig aufheben. Man muss nämlich solche Beobachtungen, welche um den Zwischenraum weniger Tage von einander abstehen — oder selbst, wie es die Sache gerade mit sich bringt, um einen Zwischenraum von 15 oder 20 Tagen — bei der (206) Berechnung nicht so anwenden, als ob es ebensovielen verschiedene Positionen wären, sondern es wird vielmehr daraus eine einzige Position abgeleitet, welche unter allen gleichsam die mittlere ist, und welche deshalb eine viel grössere Schärfe zulässt, als die einzelnen, getrennt von einander betrachteten Beobachtungen. Dies Verfahren stützt sich auf folgende Grundsätze.

Die aus den genäherten Elementen berechneten geocentrischen Orte des Himmelskörpers müssen nur wenig von den wahren Orten verschieden sein, und die Unterschiede der letzteren und der ersteren müssen nur sehr langsamen Aenderungen unterworfen sein, so dass man sie innerhalb des Verlaufs weniger Tage nahezu als constant annehmen kann, oder dass jene Veränderungen sich wenigstens als den Zeiten proportionale ansehen lassen. Wenn daher die Beobachtungen gänzlich fehlerfrei wären, so würden die den Zeiten t, t', t'' u. s. w. entsprechenden Verschiedenheiten unter den beobachteten Orten, und unter denen, die aus den Elementen berechnet sind, d. h. die Verschiedenheiten der beobachteten von den berechneten Längen und Breiten (oder Rectascensionen und Declinationen) entweder merklich gleiche Grössen sein, oder wenigstens gleichförmig und sehr langsam zunehmende oder abnehmende. Es mögen z. B. jenen Zeiten die beobachteten Rectascensionen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ u. s. w. entsprechen, die berechneten aber sollen sein: $\alpha + \delta, \alpha' + \delta', \alpha'' + \delta'', \alpha''' + \delta'''$ u. s. w.; dann werden die Differenzen

$\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ u. s. w. von den wahren Abweichungen der Elemente nur um so viel verschieden sein, als die Beobachtungen selbst fehlerhaft sind. Wenn es daher gestattet ist, jene Abweichungen für alle fraglichen Beobachtungen als constante zu betrachten, so werden die Grössen $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ u. s. w. eben so viele verschiedene Bestimmungen der nämlichen Grösse darstellen, für deren verbesserten Werth man, daher das arithmetische Mittel unter jenen Bestimmungen wählen wird, so lange kein Grund da ist, weshalb man der einen oder der anderen Bestimmung einen Vorzug geben wollte. Lässt sich aber den einzelnen Beobachtungen nicht derselbe Genauigkeitsgrad beimessen, so wollen wir annehmen, dass bei den einzelnen der Genauigkeitsgrad resp. proportional zu schätzen sein sollte den Zahlen e, e', e'', e''' u. s. w., d. h. die diesen Zahlen gegenseitig proportionalen Irrthümer haben bei den Beobachtungen gleich leicht begangen werden können. Dann wird nach den weiter unten abzuhandelnden Grundsätzen der mittlere wahrscheinlichste Werth nicht mehr das einfache arithmetische Mittel sein, sondern

$$= \frac{ee\delta + e'e'\delta' + e''e''\delta'' + e'''e'''\delta''' + \text{etc.}}{ee + e'e' + e''e'' + e'''e''' + \text{etc.}}$$

Setzt man nun diesen mittleren Werth = A , so wird man für die wahren Rectascensionen annehmen dürfen, resp. $\alpha + \delta - A, \alpha' + \delta' - A, \alpha'' + \delta'' - A, \alpha''' + \delta''' - A$, und dann wird es willkürlich sein, welche man zur Rechnung benützt. Wenn aber entweder die Beobachtungszeiten einen zu grossen Abstand von einander haben, oder wenn man noch keine hinreichend genäherte Bahnelemente kennt, so dass es nicht gestattet ist, deren Abweichungen als constante für alle Beobachtungen anzusehen, so kann hieraus offenbar keine andere Differenz hervorgehen, als dass man die so gefundene mittlere Abweichung nicht sowohl als eine allen Beobachtungen gemeinsame ansehen darf, als vielmehr als eine auf eine gewisse mittlere Zeit zu beziehende (welche letztere ebenso aus den einzelnen Zeitmomenten abgeleitet werden muss, wie A aus den einzelnen Abweichungen) und daher im allgemeinen auf die Zeit:

$$= \frac{ee\ell + e'e'\ell' + e''e''\ell'' + e'''e''' \ell''' + \text{etc.}}{ee + e'e' + e''e'' + e'''e''' + \text{etc.}}$$

Will man daher den höchsten Grad von Genauigkeit erstreben, so muss man für dieselbe Zeit den geocentrischen Ort aus den Elementen berechnen, der

dann von dem mittleren Fehler A befreit wird, um die Position so genau als möglich herauszubringen. Gemeinlich jedoch wird es völlig ausreichen, den mittleren Fehler auf die der mittleren Zeit nächste Beobachtung zu beziehen. Was hier über Rectascensionen gesagt ist, gilt ebenso für die Declinationen, oder, wenn man lieber will, für Längen und Breiten. Es ist jedoch stets empfehlenswerth, unmittelbar die aus den Elementen gerechneten Rectascensionen und Declinationen mit den beobachteten zu vergleichen. Auf diese Weise hat man nämlich nicht nur den Vortheil einer rascheren Rechnung, vorzüglich bei Benutzung der Methoden in den Artt. 53—60, sondern es empfiehlt sich dies auch in dem Betracht noch überher, weil man dabei auch die unvollständigen Beobachtungen benutzen kann, und weil ausserdem, falls Alles auf Längen und Breiten bezogen würde, zu besorgen stünde, dass eine Beobachtung, die in Beziehung auf Rectascension richtig, auf Declination aber schlecht angestellt ist (oder umgekehrt) von beider Seite verschlechtert und so gänzlich unbranchbar würde. Im Uebrigen wird der Genauigkeitsgrad, der dem so gefundenen Mittel nach den gleich zu erörternden Grundsätzen beizulegen ist, gleich sein = $\sqrt{(e e + e' e' + e'' e'' + e''' e''' + \text{etc.})}$, so dass vier oder neun gleich genaue Beobachtungen erforderlich sind, wenn sich das Mittel der doppelten oder dreifachen Schärfe erfreuen soll u. s. w.

174.

Wenn die Bahn eines Himmelskörpers nach den Methoden der vorhergehenden Abschnitte aus drei oder vier solchen geocentrischen Orten bestimmt ist, von denen jeder einzelne nach Anleitung des vorhergehenden Artikels aus mehreren Beobachtungen gebildet worden, so wird eine solche Bahn unter allen diesen Beobachtungen gleichsam das Mittel halten, und es wird bei den Unterschieden zwischen den beobachteten und berechneten Orten kein Anzeichen einer Gesetzmässigkeit zurückbleiben, welches sich durch Verbesserung der Elemente beseitigen oder merklich vermindern liesse. Wenn der ganze vorhandene Vorrath an Beobachtungen keinen zu grossen Zeitraum umfasst, so lässt sich auf diese Weise die erwünschteste Uebereinstimmung der Elementen mit sämtlichen Beobachtungen erreichen, wenn anders die drei oder vier Normalorte geschickt ausgewählt sind. Bei Bestimmung der Bahn von Cometen und

neuen Planeten, deren Beobachtungen über ein Jahr noch nicht hinausgehen, lässt sich von diesem Umstande gemeinlich so viel Vortheil ziehen, als die Natur der Sache erlaubt. Falls daher die zu bestimmende Bahn im beträchtlichen Winkel gegen die Ecliptik geneigt ist, so stütze man sie in der Regel (208) auf drei Beobachtungen, welche man so entfernt wie möglich von einander auswählt. Sollte man aber auf diese Weise zufällig auf einen der oben (Art. 160—162) ausgeschlossenen Fälle gerathen, oder die Neigung der Bahn zu klein erscheinen, so ist die Bestimmung aus vier Positionen vorzuziehen, die man ebenfalls so entfernt wie möglich von einander nimmt.

Sobald aber bereits eine längere, mehre Jahre umfassende Reihe von Beobachtungen vorhanden, so lassen sich daraus mehre Normalorte herleiten, und man würde daher nicht die grösste Genauigkeit erreichen, wenn man davon zur Bahnbestimmung nur drei oder vier Orte herausnähme und alle übrigen vernachlässigte. Man wird sich vielmehr in einem solchen Falle, wenn die höchste Schärfe erreicht werden soll, die Mühe geben, so viel ausgesuchte Positionen als möglich zu sammeln und nutzbar zu machen. Es werden daher dann mehr Daten vorhanden sein, als zur Bestimmung der Unbekannten erforderlich sind. Alle die fraglichen Daten aber werden Irrthümern, wenn auch nur kleinen, unterworfen sein, so dass es im Allgemeinen unmöglich ist, allen ganz vollständig zu genügen. Da nun kein Grund vorliegt, weshalb man von diesen Daten diese oder jene sechs als absolut genau betrachten sollte, sondern man vielmehr nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeit annehmen muss, dass bei allen ununterschiedlich grössere oder kleinere Irrthümer gleich möglich seien, und da, im Allgemeinen gesprochen, kleinere Irrthümer häufiger begangen werden als grössere, so ist es offenbar, dass eine solche Bahn, die zwar sechs Daten vollständig genau entspricht, von den übrigen aber mehr oder weniger abweicht, für eine mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung weniger übereinstimmende zu halten sei, als eine andere, die, während sie auch mit jenen sechs Daten um eine Kleinigkeit disharmonirt, eine desto bessere Übereinstimmung mit den übrigen Daten gewährt. Die Erforschung einer Bahn, die im strengen Sinne die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, wird von der Kenntniss des Gesetzes abhängen, nach welchem die Wahrscheinlichkeit der wachsenden Fehler abnimmt. Dieses hängt aber von so viel unbestimmten und zweifelhaften — auch physiologischen —

Betrachtungen ab, die sich der Rechnung entziehen, dass man das desfallsige Gesetz wohl kaum je in irgend einem Falle der praktischen Astronomie gehörig anzugeben vermag. Nichtsdestoweniger ist die Erforschung des Zusammenhanges zwischen diesem Gesetze und der wahrscheinlichsten Bahn, welche wir jetzt in grösster Allgemeinheit unternehmen wollen, keineswegs als eine unfruchtbare Speculation zu erachten.

175.

Zu diesem Zwecke will ich von unserer besondern Aufgabe zu einer ganz allgemeinen und bei jeder Anwendung der Rechnung auf Natur-Philosophie höchst fruchtbaren Untersuchung übergehen. Es seien V, V', V'' u. s. w. Functionen der Unbekannten p, q, r, s u. s. w., μ die Anzahl dieser Functionen, ν die Anzahl der Unbekannten, und ich setze voraus, dass durch unmittelbare Beobachtungen die Werthe der Functionen gefunden seien $V = M, V' = M', V'' = M''$ u. s. w. Allgemein gesprochen wird daher die Entwickelung der Werthe der Unbekannten ein unbestimmtes, ein bestimmtes, (209) oder ein mehr als bestimmtes Problem bilden, je nachdem $\mu < \nu, \mu = \nu, \mu > \nu$). Hier wird allein von dem letzten Falle die Rede sein, in welchem offenbar eine genaue Darstellung sämtlicher Beobachtungen nur dann möglich wäre, wenn letztere alle absolut fehlerfrei wären. Da das nun aber in der Natur der Dinge nicht Statt findet, so wird jedes System von Werthen für die Unbekannten p, q, r, s als möglich zu halten sein, aus welchem Werthe der Functionen $V - M, V' - M', V'' - M''$ entstehen, die nicht grösser sind, als die Grenzen der Fehler, welche bei jenen Beobachtungen begangen werden konnten. Dies ist jedoch keineswegs so zu verstehen, als ob diese einzelnen möglichen Systeme sich eines gleichen Grades der Wahrscheinlichkeit erfreuten.

*) Wenn im dritten Falle die Functionen V, V', V'' etc. so angethan wären, dass man davon $\mu + 1 - \nu$ oder mehr als Functionen der übrigen ansehen könnte, so würde das Problem in Beziehung auf diese Functionen ebenfalls ein mehr als bestimmtes, in Beziehung auf die Grössen p, q, r, s etc. aber ein unbestimmtes sein, deren Werthe sich auch dann nicht einmal bestimmen liessen, wenn die Werthe der Functionen V, V', V'' etc. absolut genau gegeben wären; aber diesen Fall schliesse ich von der Untersuchung aus.

Ich nehme zuerst an, dass nach dem Stande der Dinge bei allen Beobachtungen kein Grund vorliegt, die eine für minder genau als die andere zu halten, und dass mithin gleich grosse Fehler bei den einzelnen gleich wahrscheinlich sind. Die irgend einem Irrthume \mathcal{A} beizulegende Wahrscheinlichkeit wird durch eine Function von \mathcal{A} ausgedrückt, die ich mit $\varphi\mathcal{A}$ bezeichne. Wenn man nun auch diese Function nicht genau anzugeben vermag, so lässt sich doch wenigstens das behaupten, dass ihr Werth ein Grösstes sein müsse, wenn $\mathcal{A} = 0$, dass er gemeinlich ein gleicher sei für gleiche entgegengesetzte Werthe von \mathcal{A} , und dass er endlich verschwinde, wenn für \mathcal{A} der grösste Irrthum oder ein grösserer Werth angenommen wird. Eigentlich muss daher $\varphi\mathcal{A}$ zu der Gattung der discontinuirlichen Functionen gezählt werden, und wenn man es sich erlaubt, an ihrer Statt zum praktischen Gebrauche eine analytische Function zu substituiren, so muss diese so angethan sein, dass sie beiderseits von $\mathcal{A} = 0$ gleichsam asymptotisch zu Null convergirt, so dass sie über jene Grenze hinaus als wahrhaft verschwindend angesehen werden kann. Es wird ferner die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler innerhalb der Grenzen \mathcal{A} und $\mathcal{A} + d\mathcal{A}$ (welche um den unendlich kleinen Unterschied $d\mathcal{A}$ von einander entfernt sind) liege, ausgedrückt durch $\varphi\mathcal{A} \cdot d\mathcal{A}$; und daher wird im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler innerhalb D und D' liege, dargestellt durch das Integral $\int \varphi\mathcal{A} \cdot d\mathcal{A}$ (in der Ausdehnung von $\mathcal{A} = D$ bis zu $\mathcal{A} = D'$). Dies Integral muss von dem grössten negativen Werthe von \mathcal{A} bis zum grössten positiven Werthe, oder allgemeiner von $\mathcal{A} = -\infty$ bis zu $\mathcal{A} = +\infty$ genommen, nothwendig gleich Eins werden.

Nimmt man daher an, dass irgend ein bestimmtes Werthsystem für die Grössen p, q, r, s Statt habe, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass für V aus der Beobachtung der Werth M sich ergeben werde, ausgedrückt durch $\varphi(M-V)$, indem man in V für p, q, r, s ihre Werthe substituirt; ganz
 (210) ebenso werden durch $\varphi(M'-V')$, $\varphi(M''-V'')$ etc. die Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, dass aus den Beobachtungen die Werthe M', M'' etc. für die Functionen V', V'' sich ergeben werden. Da man nun allerdings alle Beobachtungen als von einander unabhängige Begebenheiten betrachten kann, so drückt das Product

$$\varphi(M-V) \cdot \varphi(M'-V') \cdot \varphi(M''-V'') \text{ etc.} = \Omega$$

die Erwartung oder Wahrscheinlichkeit aus, dass alle diese Werthe aus den Beobachtungen sich zugleich ergeben werden.

176.

So wie nun bei Annahme irgend welcher bestimmter Werthe für die Unbekannten jedem Systeme der Functionenwerthe V , V' , V'' etc. eine vor Anstellung der Beobachtungen bestimmte Wahrscheinlichkeit zukommt, so wird ebenso umgekehrt, nachdem man aus den Beobachtungen bestimmte Functionenwerthe ermittelt hat, sich eine, nach den einzelnen Systemen der Werthe der Unbekannten, woraus jene hervorgehen konnten, bestimmte Wahrscheinlichkeit ergeben; denn offenbar werden diejenigen Systeme für die wahrscheinlicheren zu halten sein, bei welchen dem daraus hervorgehenden Erfolge die grössere Erwartung zur Seite steht. Die Schätzung dieser Wahrscheinlichkeit stützt sich auf das nachfolgende Theorem:

Wenn bei Annahme irgend einer Hypothese H , die Wahrscheinlichkeit irgend eines bestimmten Erfolges E gleich h ist, wenn aber bei Annahme einer anderen, die erstere ausschliessenden und an und für sich gleich wahrscheinlichen Hypothese H' , die Wahrscheinlichkeit desselben Erfolges $= k$ ist; dann wird, sage ich, falls der Erfolg E in der That zum Vorschein kommt, die Wahrscheinlichkeit, dass H die richtige Hypothese gewesen ist, zu der Wahrscheinlichkeit, dass die richtige Hypothese H' gewesen, sich verhalten wie h zu k .

Um dies zu beweisen, setze ich voraus, man habe durch Unterscheidung aller Umstände, von welchen es abhängt, ob H oder H' oder eine andere Hypothese Statt hat, um den Erfolg E oder einen andern hervorzubringen, ein gewisses System der verschiedenen Fälle gebildet, welche einzeln an und für sich (d. h. so lange es ungewiss ist, ob der Erfolg E oder ein anderer sich ergeben wird) als gleich wahrscheinliche zu betrachten sind, und man habe diese Fälle in folgender Weise vertheilt:

damit darunter gefunden wird	wo als Hypothese Statt haben muss	mit solchen Modificationen, dass daraus als Erfolg sich ergeben muss
m	H	E
n	H	von E verschieden
m'	H'	E
n'	H'	von E verschieden
m''	von H und H' verschieden	E
n''	von H und H' verschieden	von E verschieden

- (211) Dann wird $h = \frac{m}{m+n}$, $h' = \frac{m'}{m'+n'}$; ferner war vor Bekanntwerden des Erfolges die Wahrscheinlichkeit der Hypothese $H = \frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}$; nachdem aber der Erfolg bekannt geworden (wobei die Fälle n, n', n'' aus der Zahl der Möglichkeiten ausscheiden), wird die Wahrscheinlichkeit derselben Hypothese sein $= \frac{m}{m+m'+m''}$. Ebenso wird die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H' , vor und nach dem Erfolge, resp. auszudrücken sein durch: $\frac{m'+n'}{m+n+m'+n'+m''+n''}$ und $\frac{m'}{m+m'+m''}$. Weil daher bei den Hypothesen H und H' vor Bekanntwerden des Erfolges dieselbe Wahrscheinlichkeit vorausgesetzt ist, so wird $m+n = m'+n'$, woraus die Wahrheit des Theorems von selbst folgt.

Insoweit man nun voraussetzt, dass ausser den Beobachtungen $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. keine andere Daten zur Bestimmung der Unbekannten vorhanden seien, und dass daher vor jenen Beobachtungen alle Systeme der Werthe dieser Unbekannten gleich wahrscheinlich gewesen seien, so wird offenbar die Wahrscheinlichkeit irgend eines nach Anstellung jener Beobachtungen bestimmten Systems dem Ω proportional sein. Dies ist so zu verstehen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Werthe der Unbekannten resp. zwischen den unendlich nahen Grenzen p und $p+dp$, q und $q+dq$, r und $r+dr$, s und $s+ds$ etc. liegen, ausgedrückt sei durch $\lambda \Omega dp dq dr ds$ etc., wobei λ eine constante, von p, q, r, s etc. unabhängige Grösse ist; und zwar wird offenbar $\frac{1}{\lambda}$ der Werth des Integrals der v^{ten} Ordnung $\int^v \Omega dp dq dr ds \dots$,

wobei die einzelnen Variablen p, q, r, s etc. in der Ansehung von einem Werthe $-\infty$ bis zum Werthe $+\infty$ zu nehmen sind.

177.

Daraus folgt schon von selbst, dass das wahrscheinlichste System für die Werthe der Grössen p, q, r, s etc. dasjenige sein werde, in welchem Ω den grössten Werth erhält, und daher aus den ν Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} = 0 \text{ etc.}$$

ermittelt werden muss. Diese Gleichungen nehmen, wenn man setzt $V - M = v$,

$V' - M' = v'$, $V'' - M'' = v''$ etc. und $\frac{d\varphi^j}{\varphi^j \cdot dJ} = \varphi^j A$, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dp} \varphi^j v + \frac{dv'}{dp} \varphi^j v' + \frac{dv''}{dp} \varphi^j v'' + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{dv}{dq} \varphi^j v + \frac{dv'}{dq} \varphi^j v' + \frac{dv''}{dq} \varphi^j v'' + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{dv}{dr} \varphi^j v + \frac{dv'}{dr} \varphi^j v' + \frac{dv''}{dr} \varphi^j v'' + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{dv}{ds} \varphi^j v + \frac{dv'}{ds} \varphi^j v' + \frac{dv''}{ds} \varphi^j v'' + \text{etc.} &= 0. \end{aligned} \tag{212}$$

Hieraus lässt sich also mittelst Elimination eine völlig bestimmte Auflösung des Problems ableiten, sobald nur erst die Natur der Function φ^j bekannt geworden. Da diese sich nun a priori nicht definiren lässt, so frage ich, um die Sache von einer andern Seite anzugreifen, auf welche, stillschweigend gleichsam zur Basis angenommene Function sich eigentlich ein allbekanntes Princip stützt, dessen Vortrefflichkeit allgemein anerkannt wird. Deun an Stelle eines Axioms pflegt die Hypothese angenommen zu werden, dass, wenn irgend eine Grösse durch mehr unmittelbare, unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellte Beobachtungen bestimmt ist, dann das arithmetische Mittel unter allen beobachteten Werthen den am meisten wahrscheinlichen Werth darstelle und zwar, wenn auch nicht mit absoluter Strenge, doch wenigstens sehr nahe, so dass es stets das Sicherste ist, dabei stehen zu bleiben. Setzt man also $V = V' = V''$ etc. = p ,

so wird allgemein sein müssen $q'(M-p) + q'(M'-p) + q'(M''-p) + \text{etc.} = 0$, wenn für p der Werth $\frac{1}{\mu}(M+M'+M''+\text{etc.})$ substituirt wird, welches positive Ganzes nun auch durch μ ausdrückt sein mag. Setzt man daher voraus $M' = M'' = \text{etc.} = M - \mu N$, so wird allgemein, d. h. für jeden ganzen positiven Werth für μ , sein $q'(\mu-1)N = (1-\mu)q'(-N)$, woraus man leicht sieht, dass allgemein $\frac{q'J}{J}$ eine constante Grösse sein müsse, welche ich mit k bezeichnen will. Hieraus wird $\log qJ = \frac{1}{2}kJJ + \text{Const.}$, oder wenn man die Basis der hyperbolischen Logarithmen mit e bezeichnet und die Constante $= \log z$ setzt,

$$qJ = ze^{\frac{1}{2}kJJ}.$$

Ferner sieht man leicht ein, dass k notwendig negativ sein müsse, damit Ω in der That ein Grösstes werden könne, weshalb wir setzen $\frac{1}{2}k = -hh$; und da vermittelst des eleganten, zuerst von Laplace*) gefundenen Theorems das Integral $\int e^{-hhJJ} dJ$, von $J = -\infty$ bis zu $J = +\infty$, wird $= \frac{V\pi}{h}$ (wobei π den halben Kreisumfang für den Radius $= 1$ bezeichnet), so wird unsere Function werden:

$$qJ = \frac{h}{V\pi} e^{-hhJJ}.$$

178.

Die so eben ermittelte Function kann zwar nicht in aller Strenge die Wahrscheinlichkeiten der Fehler ausdrücken; denn da die möglichen Fehler (213) stets in gewisse Grenzen eingezwängt sind, so müsste die Wahrscheinlichkeit grösserer Fehler immer $= 0$ herauskommen, während unsere Formel stets einen begrenzten Werth darstellt. Dennoch aber ist dieser Mangel, an welchem jede analytische Function ihrer Natur nach laboriren muss, für jeden praktischen

*) In v. Zach „Monatliche Correspondenz“ Band 21, S. 280 äussert Gauss: „Das Euler schon das Theorem gefunden hat, woraus der schöne, von mir Laplace beigelegte Lehrsatz sehr leicht abgeleitet werden kann, fiel mir selbst schon früher ein, als aber die Stelle S. 212 schon abgedruckt war; ich wollte es aber nicht unter die Errata setzen, weil Laplace wenigstens das obige Theorem doch erst in der dort gebrauchten Form aufgestellt hat.“
Anmerkung des Uebersetzers.

Gebrauch von keiner Bedeutung, da der Werth unserer Function, sobald nur erst hA einen beträchtlichen Werth angenommen hat, so rapide abnimmt, dass man ihn sicher mit Null aequivalirend ansehen kann. Ausserdem wird es die Natur der Sache niemals gestatten, die Grenzen der Fehler mit absoluter Strenge hinzustellen.

Im Uebrigen kann die Constante h gleichsam als das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen angesehen werden. Denn wenn man die Wahrscheinlichkeit eines Irrthums A in irgend einem Systeme von Beobachtungen als vermittelt $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhA^2}$, in einem anderen Systeme mehr oder minder genauer Beobachtungen aber als durch $\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'A^2}$ ausgedrückt ansieht, so wird die Erwartung, wonach bei irgend einer Beobachtung aus dem ersteren Systeme der Fehler innerhalb der Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten sein werde, ausgedrückt durch das Integral $\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhA^2} dA$ (von $A = -\delta$ bis zu $A = +\delta$ genommen) und ganz ebenso wird die Erwartung, dass der Fehler irgend einer Beobachtung aus dem zweiten Systeme die Grenzen $-\delta'$ und $+\delta'$ nicht überschreite, durch das Integral $\int_{-\delta'}^{+\delta'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'A^2} dA$ (wo A in der Ausdehnung von $-\delta'$ bis zu $+\delta'$ genommen) bezeichnet. — Beide Integrale werden aber offenbar gleich sein, sobald $h\delta = h'\delta'$. — Wenn daher z. B. $h' = 2h$ ist, so konnte ebenso leicht in dem ersteren Systeme ein doppelter Irrthum begangen werden, als ein einfacher in dem zweiten, in welchem Falle den Beobachtungen des zweiten Systems nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche eine doppelte Genauigkeit beigemessen wird.

179.

Nun will ich entwickeln, was aus diesem Gesetze folgt. Es ist von selbst klar, dass, damit das Product $\Omega = h^{\mu} \pi^{-\frac{1}{2}\mu} e^{-hh(vv + v'v' + v''v'' + \dots)}$ ein Grösstes werde, die Summe $vv + v'v' + v''v'' + \dots$ ein Kleinstes werden müsse. *Es wird daher das wahrscheinlichste System der Werthe der Unbekannten p, q, r, s etc. dasjenige sein, in welchem die Quadrate der Unterschiede zwischen den*

beobachteten und berechneten Functionenwerthen V, V', V'' etc. die kleinste Summe geben, wenn nämlich bei allen Beobachtungen derselbe Grad der Genauigkeit zu präsumiren ist.

Dieser Grundsatz, welcher bei allen Anwendungen der Mathematik auf die Natur-Philosophie ausserordentlich häufig benutzt wird, muss allenthalben an Stelle eines Axioms mit demselben Rechte gelten, mit welchem das arithmetische Mittel unter mehreren beobachteten Werthen derselben Grösse als der wahrscheinlichste Werth angenommen wird.

- (214) Auf Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit lässt sich dies Princip nun ohne Weiteres ausdehnen. Wenn nämlich das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen, wodurch $V = M, V' = M', V'' = M''$ etc. gefunden ist, respective ausgedrückt wird mit h, h', h'' etc., d. h. wenn man voraussetzt, dass Fehler, die diesen Grössen gegenseitig proportional, bei den fraglichen Beobachtungen gleich leicht haben begangen werden können, so ist dies offenbar dasselbe, als wenn durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit (deren Maass = 1 ist) die Functionenwerthe $hV, h'V', h''V''$ etc. unmittelbar gefunden wären = $hM, h'M', h''M''$ etc.; weshalb das wahrscheinlichste Werthsystem für die Grössen p, q, r, s etc. dasjenige sein wird, wo die Summe $h^2v + h'^2v' + h''^2v'' +$ etc. d. h. wo die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den tatsächlich beobachteten und den berechneten Werthen mit den Zahlen multiplicirt, die den Grad der Genauigkeit messen, ein Kleinstes wird. Auf diese Weise ist es nicht einmal nöthig, dass die Functionen V, V', V'' etc. auf homogene Grössen sich beziehen, sondern sie können auch heterogene (z. B. Bogen-Secunden und Zeit-Secunden) darstellen, wenn sich nur das Verhältniss der Fehler, die bei den einzelnen gleich leicht begangen werden konnten, schätzen lässt.

180.

Das im vorangehenden Artikel aneinandergesetzte Princip empfiehlt sich auch in dem Betracht, dass die numerische Bestimmung der Unbekannten auf eine sehr rasche Berechnung sich zurückföhren lässt, wenn die Functionen V, V', V'' etc. lineäre sind. Ich nehme an, es sei

$$V - M = v = -m + ap + bq + cr + ds + \text{etc.}$$

$$V' - M' = v' = -m' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.}$$

$$V'' - M'' = v'' = -m'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.}$$

etc.

und man setze

$$av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} = P$$

$$bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} = Q$$

$$cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} = R$$

$$dv + d'v' + d''v'' + \text{etc.} = S$$

etc.

Dann werden die r Gleichungen des Art. 177, aus welchen man die Werthe der Unbekannten bestimmen muss, offenbar folgende sein:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0 \text{ etc.}$$

wenn nämlich die Beobachtungen als gleich gut angenommen werden, auf welchen Fall man die übrigen zurückführen kann, wie im vorhergehenden Artikel gezeigt ist. Es sind daher eben so viele lineäre Gleichungen vorhanden, als Unbekannte zu bestimmen sind, woraus man deren Werthe durch gewöhnliche Elimination herleitet.

Wir wollen nun sehen, ob diese Elimination immer möglich ist, oder ob jemals eine unbestimmte oder sogar unmögliche Lösung sich ergeben kann. Aus der Theorie der Elimination ist bekannt, dass der zweite oder dritte Fall (215) dann Statt finden werde, sobald aus den Gleichungen $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0$ etc., bei Auslassung von einer, eine Gleichung entstehen kann, die entweder identisch mit der ausgelassenen ist, oder ihr widerstreitend, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn sich eine lineäre Function $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.}$ angeben lässt, die entweder identischer Weise $= 0$ ist, oder wenigstens frei von allen Unbekannten p, q, r, s etc. Nehmen wir daher an, es werde $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.} = x$. Von selbst hat man die identische Gleichung

$$(v + m)v + (v' + m')v' + (v'' + m'')v'' + \text{etc.} = pP + qQ + rR + sS + \text{etc.}$$

Nimmt man also an, dass durch die Substitutionen $p = \alpha x, q = \beta x, r = \gamma x, s = \delta x$ etc. die Functionen v, v', v'' etc. respective übergehen in: $-m + \lambda x, -m' + \lambda' x, -m'' + \lambda'' x$ etc., so hat man offenbar die identische Gleichung

$$(\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.})xx - (\lambda m + \lambda'm' + \lambda''m'' + \text{etc.})x = x^2,$$

d. h. es wird $\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.} = 0, x + \lambda m + \lambda'm' + \lambda''m'' + \text{etc.} = 0$; darnach wird aber nothwendig sein müssen $\lambda = 0, \lambda' = 0, \lambda'' = 0$ etc. und $x = 0$.

Daraus ist klar, dass alle Functionen V, V', V'' etc. so beschaffen sind, dass ihre Werthe sich nicht ändern, wenn die Grössen p, q, r, s etc. Vermehrungen oder Verminderungen erleiden, die den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. proportional sind. Ich habe aber schon oben erwähnt, dass derartige Fälle nicht hierher gehören, in welchen die Bestimmung der Unbekannten offenbar auch dann nicht einmal möglich ist, wenn auch die wahren Werthe der Functionen V, V', V'' etc. gegeben sein sollten.

Uebrigens kann man auf diesen hier betrachteten Fall alle übrigen, wo die Functionen V, V', V'' etc. keine lineären sind, leicht reduciren. Bezeichnet man nämlich mit $\pi, \chi, \varrho, \sigma$ etc. genäherte Werthe für die Unbekannten p, q, r, s etc. (welche man leicht ableiten kann, wenn aus μ Gleichungen $V = M, V' = M', V'' = M''$ etc. zuerst nur ν benutzt werden) und führt man dann an Stelle der Unbekannten andere ein: p', q', r', s' etc. und setzt $p = \pi + p', q = \chi + q', r = \varrho + r', s = \sigma + s'$ etc., so werden offenbar die Werthe dieser neuen Unbekannten so klein sein, dass man ihre Quadrate und Producte vernachlässigen kann, wodurch die Gleichungen von selbst als lineäre herauskommen. Sollten sich dann bei der absoluten Rechnung wider Erwarten so grosse Werthe für die Unbekannten p', q', r', s' etc. ergeben, dass man nicht mit voller Sicherheit deren Quadrate und Producte hätte vernachlässigen dürfen, so wird eine Wiederholung des Verfahrens (wobei man an Stelle von $\pi, \chi, \varrho, \sigma$ etc. die verbesserten Werthe für p, q, r, s etc. setzt) eine leichte Abhilfe gewähren.

ISI.

Falls daher nur eine Unbekannte p da ist, zu deren Bestimmung man die Functionenwerthe $ap+n, a'p+n', a''p+n''$ etc. respective gefunden hat (216) $= M, M', M''$ etc. und zwar durch gleich genaue Beobachtungen, so wird der wahrscheinlichste Werth für p sein

$$= \frac{am + a'm' + a''m'' + \text{etc.}}{aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}} = A,$$

wobei man m, m', m'' etc. schreibt resp. für $M-n, M'-n', M''-n''$ etc.

Um nun den Grad der bei diesem Werthe zu präsumirenden Genauigkeit zu schätzen, so nehme ich an, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers A

bei den Beobachtungen ausgedrückt sein soll durch $\frac{h}{\sqrt{x}} e^{-hh \Delta \Delta}$. Demnach wird die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth für p sei $= A + p'$, proportional sein der Function

$$e^{-hh((ap-m)^2 + (a'p-m')^2 + (a''p-m'')^2 + \text{etc.})},$$

wenn für p substituirt wird $A + p'$. Der Exponent dieser Function lässt sich auf die Form bringen $-hh(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})(pp - 2pA + B)$, wo B von p unabhängig ist; es wird deshalb die Function selbst proportional sein:

$$e^{-hh(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})p'p'}$$

Man sieht daher, dass man dem Werthe A denselben Grad der Genauigkeit beimessen muss, als wenn er durch eine unmittelbare Beobachtung gefunden wäre, deren Genauigkeit sich zur Genauigkeit der primitiven Beobachtungen verhielte, wie $h\sqrt{(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})}$ zu h , oder wie $\sqrt{(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})}$ zu 1.

182.

Der Untersuchung über den Genauigkeitsgrad, der den Werthen der Unbekannten, falls mehre vorhanden sind, beizumessen ist, muss eine genauere Betrachtung der Function $pv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$, welche ich durch W bezeichne, vorausgeschickt werden.

I. Ich setze $\frac{1}{2} \frac{dW}{dp} = p' = \lambda + \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc.}$, und $W - \frac{p'p'}{\alpha} = W'$; so wird offenbar $p' = P$, und, da man hat $\frac{dW'}{dp} = \frac{dW}{dp} - \frac{2p'}{\alpha} \cdot \frac{dp'}{dp} = 0$, so ist die Function W' von p unabhängig. Der Coefficient $\alpha = aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}$ ist offenbar stets eine positive Grösse.

II. Ebenso setze ich $\frac{1}{2} \cdot \frac{dW'}{dq} = q' = \lambda' + \beta' q + \gamma' r + \delta' s + \text{etc.}$, und $W' - \frac{q'q'}{\beta'} = W''$, und es wird sein $q' = \frac{1}{2} \frac{dW'}{dq} - \frac{p'}{\alpha} \cdot \frac{dp'}{dq} = Q - \frac{\beta}{\alpha} \cdot p'$, und $\frac{dW''}{dq} = 0$, woraus man sieht, dass die Function W'' sowohl von p als von q unabhängig ist. Dies würde nicht Statt finden, wenn $\beta = 0$ werden

könnte. Aber es ist klar, dass W' aus $rx + r'r' + r''r'' + \text{etc.}$ entsteht, wenn man die Grösse p aus v, v', v'' etc. mit Hilfe der Gleichung $p' = 0$ eliminiert; demnach wird β' die Summe der Coefficienten von qq in $rv, v'r', r''r''$ etc. nach jener Elimination sein; diese einzelnen Coefficienten selbst aber sind Quadrate und können nicht alle zugleich verschwinden, ausser in dem oben ausgeschlossenen Falle, wo die Unbekannten unbestimmt bleiben. Man sieht daher, dass β' eine positive Grösse sein muss.

III. Setze ich nun wiederum $\frac{1}{2} \cdot \frac{dW''}{dr} = r' = \lambda'' + \gamma''r + \delta''s + \text{etc.}$, und $W'' - \frac{r'r'}{\gamma''} = W'''$, so wird $r' = R - \frac{\gamma'}{\alpha} p' - \frac{\gamma'}{\beta'} q'$, und W'' unabhängig sowohl von p , als von q , als von r . Uebrigens lässt sich auf ähnliche Weise wie in II zeigen, dass der Coefficient γ'' nothwendig eine positive Grösse ist. Man sieht nämlich leicht, dass γ'' die Summe der Coefficienten von rr in $rv, v'v', v''v''$ etc. ist, nachdem die Grössen p und q mit Hilfe der Gleichungen $p' = 0, q' = 0$ aus v, v', v'' etc. eliminiert sind.

IV. Setzt man auf dieselbe Weise $\frac{1}{2} \frac{dW'''}{ds} = s' = \lambda''' + \delta'''s + \text{etc.}$, $W''' - \frac{s's'}{\delta'''} = W^{IV}$, so wird $s' = S - \frac{\delta}{\alpha} p' - \frac{\delta'}{\beta'} q' - \frac{\delta''}{\gamma''} r'$; wo W^{IV} von p, q, r, s unabhängig und δ''' eine positive Grösse ist.

V. Wenn ausser p, q, r, s noch andere Unbekannte da sind, so kann man auf diese Weise noch weiter vorschreiten, so dass man schliesslich hat:

$$W = \frac{1}{\alpha} p'p' + \frac{1}{\beta'} q'q' + \frac{1}{\gamma''} r'r' + \frac{1}{\delta'''} s's' + \text{etc.} + \text{Const.}$$

wo alle Coefficienten $\alpha, \beta', \gamma'', \delta'''$ etc. positive Grössen sind.

VI. Nun ist die Wahrscheinlichkeit irgend eines Systemes bestimmter Werthe für die Grössen p, q, r, s etc. proportional der Function e^{-hW} . Es wird deshalb, falls der Werth der Grösse p unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit eines Systemes bestimmter Werthe für die übrigen proportional sein dem Integral $\int e^{-hW} dp$ (in der Ausdehnung von $p = -\infty$ bis zu $p = +\infty$), welches nach dem Laplace'schen Theorem wird $= h^{-1} \alpha^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-h\alpha(\frac{1}{\beta'} q'q' + \frac{1}{\gamma''} r'r' + \frac{1}{\delta'''} s's' + \text{etc.})}$; diese Wahrscheinlichkeit wird daher proportional sein der Function e^{-hW} .

Einso ist, wenn überdies q als Unbestimmte behandelt wird, die Wahrscheinlichkeit eines Systems bestimmter Werthe für r , s etc. proportional dem Integrale $\int e^{-hhW'} dq$ (von $q = -\infty$ bis zu $q = +\infty$ genommen), welches wird $= h^{-1} \beta^{-1} \alpha^{-1} e^{-hh(\frac{1}{\beta} r r' + \frac{1}{\delta} s s' + \text{etc.})}$; oder proportional der Function $e^{-hhW''}$. Auf ähnliche Weise würde, falls auch r als Unbestimmte betrachtet wird, die Wahrscheinlichkeit bestimmter Werthe für die übrigen s etc. proportional sein der Function $e^{-hhW''}$ u. s. w. Ich nehme an, dass die Zahl der Unbekannten bis auf vier steigen soll; denn derselbe Schluss wird gelten, sie mag nun grösser oder kleiner sein. Der am meisten wahrscheinliche Werth für s wird hier sein $= -\frac{\lambda'''}{\delta''}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass dieser von dem wahren um die Differenz σ verschieden ist, wird proportional der Function $e^{-hh\delta''\sigma\sigma}$ sein; woraus zu schliessen, dass das Maass der der fraglichen Bestimmung beizulegenden relativen Genauigkeit ausgedrückt werde durch $\sqrt{\delta''}$, wenn das Maass der den primitiven Beobachtungen beizulegenden Genauigkeit $= 1$ gesetzt wird.

183.

Durch die Methode des vorangehenden Artikels lässt sich das Maass der Genauigkeit bequemer nur für diejenige Unbekannte ausdrücken, welcher bei dem Eliminations-Geschäfte der letzte Platz angewiesen ist. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, empfiehlt es sich den Coefficienten \mathcal{J}'' auf andere Weise auszudrücken. Aus den Gleichungen

$$P = p'$$

$$Q = q' + \frac{\beta}{\alpha} p'$$

$$R = r' + \frac{\gamma}{\beta} q' + \frac{\gamma}{\alpha} p'$$

$$S = s' + \frac{\delta''}{\gamma''} r'' + \frac{\delta'}{\beta'} q' + \frac{\delta}{\alpha} p'$$

folgt, dass $p' q' r' s'$ durch P, Q, R, S sich so ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned}
 p' &= P \\
 q' &= Q + \mathfrak{A}P \\
 r' &= R + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{A}'P \\
 s' &= S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P,
 \end{aligned}$$

so dass \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{B} , \mathfrak{A}'' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{C}'' bestimmte Grössen sind. Es wird daher (wenn die Zahl der Unbekannten auf vier beschränkt ist):

$$s = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''} P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''} Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''} R + \frac{1}{\delta'''} S.$$

Hieraus leite ich folgenden Schluss ab: die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten p , q , r , s etc., die durch Elimination aus den Gleichungen $P=0$, $Q=0$, $R=0$, $S=0$ etc. abgeleitet werden sollen, lassen sich offenbar, wenn eine Zeitlang P , Q , R , S etc. als Unbestimmte angesehen werden, nach Anleitung desselben Eliminations-Verfahrens in linearer Form durch P , Q , R , S etc. ausdrücken, so dass man hat:

$$\begin{aligned}
 (219) \quad p &= L + AP + BQ + CR + DS + \text{etc.} \\
 q &= L' + A'P + B'Q + C'R + D'S + \text{etc.} \\
 r &= L'' + A''P + B''Q + C''R + D''S + \text{etc.} \\
 s &= L''' + A'''P + B'''Q + C'''R + D'''S + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

etc.

Darnach werden offenbar die wahrscheinlichsten Werthe von p , q , r , s etc. sein resp. L , L' , L'' , L''' etc., und das Maass der diesen Bestimmungen beizulegenden Genauigkeit wird ausgedrückt resp. durch V_A^1 , $V_{L'}^1$, $V_{L''}^1$, $V_{L'''}^1$ etc., wenn man die Genauigkeit der primitiven Beobachtungen = 1 setzt. Denn dasjenige, was oben wegen Bestimmung der Unbekannten s gezeigt ist für welche $\frac{1}{\delta''}$ entspricht dem L''' , lässt sich durch blosse Vertauschung der Unbekannten auf alle Uebrigen übertragen.

184.

Um die vorangehenden Untersuchungen durch ein Beispiel zu erläutern, nehme ich an, dass durch Beobachtungen, bei welchen gleiche Genauigkeit zu präsumiren, gefunden sei:

$$p - q + 2r = 3$$

$$3p + 2q - 5r = 5$$

$$4p + q + 4r = 21.$$

Durch eine vierte Beobachtung, der aber nur die halbe Genauigkeit beizumessen, sei gefunden:

$$-2p + 6q + 6r = 28.$$

An Stelle der letzten Gleichung substituire ich daher:

$$-p + 3q + 3r = 14,$$

und nehme an, dass diese Gleichung aus einer den früheren an Genauigkeit gleichen Beobachtung herausgekommen sei. Hieraus wird

$$P = 27p + 6q \quad - 88$$

$$Q = 6p + 15q + r \quad - 70$$

$$R = \quad \quad q + 54r - 107$$

und hieraus durch Elimination

$$19899p = 49154 + 809P - 324Q + 6R$$

$$737q = 2617 - 12P + 54Q - R$$

$$6633r = 12707 + 2P - 9Q + 123R.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten sind also

$$p = 2,470$$

$$q = 3,551$$

$$r = 1,916,$$

und die relative, diesen Bestimmungen beizuzurechnende Genauigkeit (die Genauigkeit der primitiven Beobachtungen = 1 gesetzt) ist

$$\text{für } p \dots \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4,96$$

$$\text{für } q \dots \sqrt{\frac{737}{54}} = 3,69$$

$$\text{für } r \dots \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7,34.$$

185.

Der bislang behandelte Gegenstand könnte Gelegenheit zu mehreren eleganten analytischen Untersuchungen geben, bei denen ich jedoch hier nicht

verweile, um nicht zu weit von meinen Vorhaben abzugerathen. Aus demselben Grunde verspare ich die Auseinandersetzung der Kunstgriffe, mittelst derer die numerische Rechnung auf eine raschere Zahlendarlegung zurückgeführt werden kann, auf eine andere Gelegenheit. Doch erlaube ich mir eine einzige Bemerkung. So oft die Anzahl der Functionen oder der angenommenen Gleichungen beträchtlich ist, so wird die Rechnung hauptsächlich deshalb ein wenig beschwerlicher, weil die Coefficienten, mit denen die primitiven Gleichungen multiplicirt werden müssen, um P, Q, R, S etc. zu erhalten, gemeiniglich wenig bequeme Decimalbrüche enthalten. — Wenn es in diesem Falle nicht der Mühe werth scheint, diese Multiplicationen mit Hilfe der logarithmischen Tafeln so genau als möglich durchzuführen, so wird es in sehr vielen Fällen genügen, an Stelle dieser Multiplicatoren andere zur Rechnung bequemere anzuwenden, die von ihnen wenig verschieden sind. Diese Lizenz kann keine merklichen Irrthümer, mit Ausnahme des Falles erzeugen, wo das Maass der Genauigkeit bei Bestimmung der Unbekannten viel kleiner sich ergibt, als die Genauigkeit der primitiven Beobachtungen war.

186.

Im Uebrigen kann das Princip, dass die Quadrate der Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Grössen eine möglichst kleine Summe erzeugen müssen, auch unabhängig von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf folgende Weise betrachtet werden. So oft die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der davon abhängigen beobachteten Grössen gleich ist, so lassen sich erstere so bestimmen, dass den letzteren genau genügt wird. Wenn aber die Anzahl der ersteren kleiner als die der letzteren ist, so lässt sich eine absolut genaue Uebereinstimmung nicht erreichen, indem die Beobachtungen nicht absolut genau sind. Man muss sich daher in diesem Falle bemühen, die Uebereinstimmung so gut als möglich festzustellen, oder die

(221) Unterschiede soviel als möglich zu verkleinern. Diese Bemerkung involvirt aber ihrer Natur nach etwas Vages. Denn wenn auch ein Werthsystem der Unbekannten, welches alle Unterschiede resp. kleiner giebt als ein anderes, diesem andern zweifelsohne vorzuziehen ist, so bleibt nichtsdestoweniger die Wahl zwischen zwei Systemen, von denen das eine bei diesen, das andere bei

jenen Beobachtungen eine bessere Uebereinstimmung darbietet, in gewisser Weise unserer Willkür überlassen, und es lassen sich offenbar zahllose verschiedene Principien annehmen, durch welche die erstere Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet man die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung mit A, S, S' etc., so wird der ersten Bedingung nicht nur Genüge geleistet, wenn $AA + SS + S'S +$ etc. ein Kleinstes wird (was mein Princip ist), sondern auch, wenn $S' + S'' + S''' +$ etc. oder $S^2 + S^3 + S^4 +$ etc., oder allgemein die Summe der Potenzen von irgend einem geraden Exponenten ein Kleinstes wird. Aber von allen diesen Principien ist meines das Einfachste, während man bei den übrigen in sehr verwickelte Rechnungen geräth. Uebrigens ist mein Princip, dessen ich mich seit dem Jahre 1795 bedient habe, neuerlich auch von Legendre in seinem Werke „Nouvelles methodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1806“ vorgetragen, wo mehre andere Eigenthümlichkeiten dieses Principis entwickelt sind, die ich hier der Kürze halber übergehe.

Würde man eine Potenz von einem geraden unendlich grossen Exponenten annehmen, so käme man auf dasjenige System, wobei die grössten Differenzen so klein als möglich würden.

Laplace benutzt zur Auflösung der lineären Gleichungen, deren Anzahl grösser ist als die Anzahl der Unbekannten, ein anderes Princip, welches einst bereits von Boscovich vorgeschlagen war, nämlich das, dass die Differenzen selbst, aber alle positiv genommen, eine kleinste Summe bilden sollen. Es lässt sich leicht zeigen, dass ein Werthsystem für die Unbekannten, welches lediglich aus diesem Principe ermittelt ist, nothwendig [mit Ausnahme besonderer Fälle, in welchen die Auflösung gewissermassen unbestimmt bleibt] ebensoviele Gleichungen aus der Zahl der angenommenen genau Genüge leisten muss, als Unbekannte da sind, so dass die übrigen Gleichungen nur insoweit in Betracht kommen, als sie zur Entscheidung für die Wahl beitragen. Wenn daher z. B. die Gleichung $V = M$ zu der Zahl derjenigen gehört, denen nicht Genüge geschieht, so würde das System der zufolge jenes Principis gefundenen Werthe sich in nichts ändern, wenn auch statt des Werthes M irgend ein anderer Werth N beobachtet wäre, falls nur, indem n den berechneten Werth bezeichnet, die Unterschiede $M - n$ und $N - n$ mit dem nämlichen Zeichen befaßt sind. Uebrigens

regulirt Laplace gewissermaassen das fragliche Princip durch Hinzufügung einer neuen Bedingung, denn er verlangt, dass der Differenzen Summe selbst, bei Nichtänderung der Zeichen, = Null werde. Hierdurch wird bewirkt, dass die Anzahl der genau dargestellten Gleichungen um eine Einheit kleiner wird, als die Anzahl der unbekanntnen Grössen; dennoch aber findet das von mir vorhin Bemerkte auch hier Statt, wenn nämlich wenigstens zwei Unbekannte da sind.

(222)

187.

Ich wende mich von diesen allgemeinen Untersuchungen zurück zu meinem eigentlichen Vorhaben, um dessentwillen ich die ersteren unternommen habe. Bevor man die möglichst genaue Bestimmung einer Bahn aus mehr Beobachtungen, als nothwendig erforderlich sind, unternimmt, muss bereits eine angenäherte Bestimmung vorhanden sein, die von allen gegebenen Beobachtungen nicht viel abweicht. Die an diese genäherten Elemente zur Erlangung der möglichst genauen Uebereinstimmung anzubringenden Verbesserungen sind als Quäsité des Problems zu betrachten. — Da man voraussetzen kann, dass diese Verbesserungen so klein sich herausstellen werden, dass man ihre Quadrate und Producte vernachlässigen darf, so können die Veränderungen, welche die berechneten geocentrischen Orte des Himmelskörpers hierdurch erleiden, durch die im zweiten Abschnitt des ersten Buches gegebenen Differentialformeln berechnet werden. — Die nach den verbesserten Elementen, die ich suche, berechneten Orte werden also durch lineäre Functionen der Verbesserungen der Elemente dargestellt, und es wird deren Vergleichung mit den beobachteten Orten nach den oben entwickelten Grundsätzen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe führen. Diese Operationen sind so einfach, dass es einer weiteren Erläuterung derselben nicht bedarf, und es ist von selbst klar, dass man dabei Beobachtungen benutzen kann, so viele man ihrer hat, und die, so weit man will, von einander entfernt sind. Derselben Methode kann man sich auch zur Verbesserung der parabolischen Bahnen der Cometen bedienen, wenn zufällig eine längere Reihe von Beobachtungen vorhanden ist, und grösstmögliche Uebereinstimmung verlangt wird.

188.

Die vorhergehende Methode ist vorzugsweise denjenigen Fällen angepasst, wo die höchste Genauigkeit verlangt wird. Sehr häufig aber kommen Fälle vor, wo man unbedenklich von letzterer etwas nachlassen kann, wenn sich dadurch die Weitläufigkeit der Rechnung erheblich abkürzen lässt, namentlich wenn die Beobachtungen noch keinen grossen Zeitraum umfassen, und man daher so zu sagen an eine definitive Bahnbestimmung noch nicht denkt. In solchen Fällen lässt sich die nachfolgende Methode mit grossem Vortheile benutzen:

Man wähle aus dem ganzen Vorrathe der Beobachtungen zwei vollständige Orte L , und L' aus und berechne für die entsprechenden Zeiten aus den genäherten Elementen die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde. Man bilde sodann bezüglich dieser Abstände drei Hypothesen, indem man bei der ersten die berechneten Werthe beibehält, in der zweiten Hypothese aber die erste Distanz, und in der dritten Hypothese die zweite Distanz ändert. Beide Aenderungen lassen sich nach Verhältniss der Ungewissheit, welche man bei jenen Abständen als zurückbleibende vermuthet, nach Ermessen annehmen. Nach diesen drei Hypothesen, welche ich in folgendem Schema darstelle:

	Hyp. I.	Hyp. II.	Hyp. III.
der dem ersten Orte entsprechende Abstand*)	D	$D + \delta$	D
„ „ zweiten „ „ „	D'	D'	$D' + \delta$

(223)

berechne man aus den beiden Orten L , L' nach den im ersten Buche entwickelten Methoden drei Elementen-Systeme, und aus jedem einzelnen der letzteren die geocentrischen Orte des Himmelskörpers, welche den Zeiten aller übrigen Beobachtungen entsprechen. Es seien diese (indem man

*) Noch bequemer ist es, statt der Abstände die Logarithmen der curtirten Abstände zu gebrauchen.

die einzelnen Längen und Breiten oder Rectascensionen und Declinationen gesondert bezeichnet)

im ersten Systeme M , M' , M'' etc.

im zweiten Systeme $M + \alpha$, $M' + \alpha'$, $M'' + \alpha''$ etc.

im dritten Systeme $M + \beta$, $M' + \beta'$, $M'' + \beta''$ etc.

und es seien ferner die

beobachteten Orte, resp. N , N' , N'' etc.

In soweit nun kleinen Aenderungen der Abstände D , D' proportionale Aenderungen sowohl der einzelnen Elemente, als der daraus berechneten geocentrischen Orte entsprechen, so darf man annehmen, das die geocentrischen Orte, welche aus einem vierten Elementen-Systeme berechnet sind, bei dem die Abstände von der Erde $D + x\delta$, $D' + y\delta'$ zu Grunde liegen, resp. sein werden $M + \alpha x + \beta y$, $M' + \alpha' x + \beta' y$, $M'' + \alpha'' x + \beta'' y$ etc. Hieraus werden dann nach den vorhergehenden Untersuchungen die Grössen x , y so bestimmt, dass jene Grössen bestmöglichst (mit Rücksicht auf die relative Genauigkeit der Beobachtungen) mit N , N' , N'' etc. übereinstimmen. Das verbesserte Elementen-System selbst wird entweder ebenso aus L , L' und den Abständen $D + x\delta$, $D' + y\delta'$ bestimmt, oder es lässt sich dasselbe nach bekannten Regeln aus den drei ersten Elementen-Systemen durch einfache Interpolation ableiten.

189.

Diese Methode ist von der vorhergehenden nur darin verschieden, dass sie den zwei geocentrischen Orten genau und den übrigen so genau wie möglich Genüge leistet, während nach der anderen Methode keine Beobachtung den übrigen vorgezogen wird, sondern die Fehler so viel wie möglich auf alle vertheilt werden. Die Methode des vorhergehenden Artikels ist daher der früheren nur in so fern nachzusetzen, als, wenn die Orte L , L' irgend einen Theil der Fehler in sich aufnehmen, die Fehler bei den übrigen Orten sich erheblich vermindern lassen. Inzwischen kann man meistens durch schick-

(224) liehe Auswahl der Beobachtungen L , L' sich leicht davor hüten, dass dieser

Unterschied nicht von zu grosser Bedeutung wird. Man muss nämlich darnach trachten, für L und L' solche Beobachtungen zu nehmen, die nicht allein ausgesuchter Genauigkeit sich erfreuen, sondern die auch so beschaffen sind, dass die aus ihnen und aus den Distanzen abgeleiteten Elemente von kleinen Aenderungen der geocentrischen Positionen nicht allzusehr afficirt werden. Man würde daher nicht wohl thun, solche Beobachtungen auszuwählen, die um einen kleinen Zeitraum von einander abstehen, oder solche, denen nahe entgegengesetzte oder zusammenfallende heliocentrische Orte entsprechen.

Vierter Abschnitt.

Ueber die Bestimmung der Bahnen mit Rücksicht auf Störungen.

190.

Die Störungen, welche die Bewegungen der Planeten durch Einwirkung der fibrigen Planeten erleiden, sind so klein und gehen so langsam vor sich, dass sie erst nach einem längeren Zeitablaufe merklich werden. Innerhalb kürzerer Zeit — und mithin (je nach Beschaffenheit der Umstände) während einer oder mehrerer ganzen Revolutionen — weicht die Bewegung so wenig von derjenigen ab, die in einer vollkommenen, genau nach den Kepler'schen Gesetzen beschriebenen Ellipse Statt findet, dass die Beobachtungen diese Abweichung nicht anzeigen können. So lange dies sich so verhält, würde es nicht der Mühe werth sein, eine verfrühte Berechnung der Störungen zu unternehmen; vielmehr genügt es, einen gleichsam osculirenden Kegelschnitt den Beobachtungen anzupassen. Später aber, nachdem der Planet längere Zeit hindurch genau beobachtet ist, wird der Einfluss der Störungen sich endlich so zeigen, dass es nicht ferner möglich ist, alle Beobachtungen durch eine rein elliptische Bewegung genau zu vereinigen und es lässt sich sodann eine vollständige und stabile Harmonie nicht herstellen, ohne die Störungen mit der elliptischen Bewegung gehörig zu verbinden.

Da die Bestimmung elliptischer Elemente, mit welchen die Störungen behuf genauer Darstellung der Beobachtungen zu verbinden sind, eine Kenntniss der Störungen voraussetzt, umgekehrt aber die Theorie der Störungen nicht genau festgestellt werden kann, ohne eine bereits sehr genaue Kenntniss der Elemente, so gestattet die Natur der Sache nicht, dies schwierige Geschäft sofort im ersten Angriffe vollständig zu erledigen, sondern es können Störungen und Elemente erst durch mehrfach abwechselnd wiederholte Verbesserungen zur grössten Höhe der Schärfe emporgehoben werden.

Die erste Theorie der Störungen wird daher auf rein elliptische Elemente gestützt, welche man den Beobachtungen so genau als möglich angepasst hatte. — Dann wird eine neue Bahn erforscht, welche, mit diesen Störungen verbunden, den Beobachtungen so nahe als möglich Genüge thut. Ist diese von den früheren beträchtlich verschieden, so wird auf dieselbe eine wiederholte Entwicklung der Störungen gestützt, und diese Verbesserungen werden abwechselnd so oft wiederholt, bis Beobachtungen, Elemente und Störungen so genau wie möglich übereinstimmen.

191.

Da die Entwicklung der Theorie der Störungen aus gegebenen Elementen meinem Vorhaben fremd ist, so braucht hier nur gezeigt zu werden, wie eine genäherte Bahn so verbessert werden kann, dass sie, mit den gegebenen Störungen verbunden, der Beobachtung so nahe als möglich Genüge thut. Dies Geschäft lässt sich sehr einfach durch eine den Artikeln 124, 165, (226) 188 analoge Methode erledigen.

Für die Zeiten aller derjenigen Beobachtungen, welche man zu diesem Zwecke benutzen will, und deren, je nach Belegenheit der Sache es drei, vier oder mehr geben kann, werden aus den Gleichungen die numerischen Werthe dieser Störungen berechnet, sowohl für die Längen in der Bahn, als für die Radien Vectoren, als für die heliocentrischen Breiten. Für diese Rechnung nimmt man die Argumente aus den genäherten elliptischen Elementen, auf welche man die Störungstheorie gestützt hatte. Dann werden aus allen Beobachtungen zwei ausgewählt, für welche man die Abstände von der Erde aus denselben genäherten Elementen berechnet. Diese constituirten die erste Hypothese. Die zweite und dritte Hypothese werden gebildet, indem man jene Abstände ein klein wenig ändert. Dann werden in den einzelnen Hypothesen aus den beiden geocentrischen Orten die heliocentrischen Positionen und die Entfernungen von der Sonne bestimmt. Aus diesen leitet man, nachdem die Breiten von den Störungen befreit sind, die Länge des aufsteigenden Knotens, die Neigung der Bahn und die Längen in der Bahn ab. Bei dieser Berechnung bedarf die Methode des Art. 110 einer Modification, wenn es anders der Mühe werth erscheint, auf die säculare Aenderung der

Knotenlänge und der Neigung Rücksicht zu nehmen. Bezeichnet man nämlich mit β , β' die heliocentrischen, von den periodischen Störungen befreiten Breiten, mit λ , λ' die heliocentrischen Längen, mit Ω , $\Omega + A$ die Längen des aufsteigenden Knotens, mit i und $i + \delta$ die Neigungen der Bahn, so empfiehlt es sich, die Gleichungen in folgender Gestalt darzustellen:

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan i \sin(\lambda - \Omega) \\ \frac{\tan i}{\tan(i + \delta)} \tan \beta' &= \tan i \sin(\lambda' - A - \Omega). \end{aligned}$$

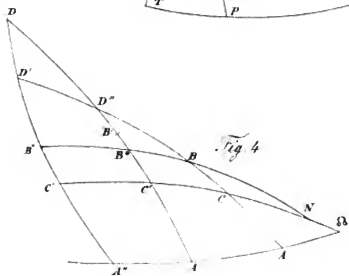
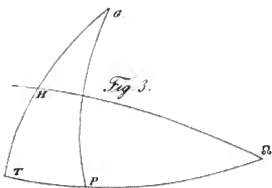
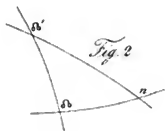
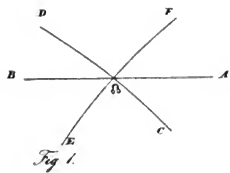
Der Werth für $\frac{\tan i}{\tan(i + \delta)}$ wird mit aller nöthigen Schärfe erhalten, wenn man für i den genäherten Werth setzt; sodann lassen sich i und Ω durch die gewöhnlichen Methoden ermitteln.

Von den beiden Längen in der Bahn ferner, sowie von den beiden Radien Vectors werden die Summen der Störungen abgezogen, um rein elliptische Werthe zu erhalten. Hier aber kann auch diejenige Einwirkung, welche die säcularen Veränderungen der Position des Perihels und der Excentricität auf die Länge in der Bahn und den Radius Vector äussern — welche Einwirkung durch die Differentialformeln des ersten Abschnitts im ersten Buche zu bestimmen ist —, sofort mit den periodischen Störungen verbunden werden, wenn anders die Beobachtungen genügend von einander entfernt sind, dass es der Mühe werth erscheint, hierauf Rücksicht zu nehmen. Aus diesen verbesserten Längen in der Bahn und verbesserten Radien Vectors werden zugleich mit den entsprechenden Zeiten die übrigen Elemente bestimmt. Endlich werden aus diesen Elementen die geocentrischen Positionen für alle (227) beobachteten wird auf die in Art. 188 entwickelte Art dasjenige System der Abstände hergeleitet, aus welchem Elemente erfließen, die allen übrigen Beobachtungen bestmöglichst genügen.

192.

Die im vorangehenden Artikel erklärte Methode ist vorzugsweise der Bestimmung der ersten, die Störungen mit enthaltenden Bahn angepasst. Sobald aber nur erst sowohl die mittleren elliptischen Elemente, als die

Störungsgleichungen schon recht nahe bekannt sind, so wird die genaueste Bestimmung mit Hülfe so vieler Beobachtungen als möglich am bequemsten durch Anwendung der Methode des Art. 187 erledigt, welche hier einer besondern Erläuterung nicht bedürfen wird. Wenn nun ein hinreichend grosser Vorrath an vorzüglichen Beobachtungen vorhanden ist, der einen grossen Zeitraum umfasst, so kann diese Methode in mehren Fällen zugleich zur genaueren Bestimmung der Massen der störenden Planeten (wenigstens der grössern) dienen. Erscheint nämlich die bei der Störungsrechnung vorausgesetzte Masse eines störenden Planeten noch nicht hinreichend sicher, so mag man ausser den sechs, von den Verbesserungen der Elemente abhängenden Unbekannten, noch eine andere μ einführen, indem man das Verhältniss der verbesserten Masse zu der vorausgesetzten Masse wie $1 + \mu$ zu 1 setzt. Man darf dann annehmen, dass die Störungen selbst in eben diesem Verhältnisse geändert werden, woraus offenbar bei den einzelnen berechneten Positionen ein neuer linearer, das μ enthaltender Ausdruck erzeugt wird, dessen Entwicklung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Die Vergleichung der berechneten Positionen mit den beobachteten nach den oben auseinandergesetzten Principien, wird zugleich mit den Verbesserungen der Elemente auch die Verbesserung für μ geben. Es lassen sich daraus also auch die Massen mehrerer Planeten genauer bestimmen, wenn sie Störungen von genügender Beträchtlichkeit ausüben. Zweifelsohne werden die Bewegungen der neuen Planeten, hauptsächlich der Pallas und der Juno, welche so beträchtliche Störungen von dem Jupiter erleiden, solchergestalt nach einigen Jahrzehnden zu einer sehr genauen Bestimmung der Masse des Jupiter führen. Ja es wird sogar vielleicht dereinst möglich sein, die Masse eines oder des anderen dieser neuen Planeten aus den Störungen zu erkennen, welche er auf die übrigen ausübt.



Tabellarische Uebersicht

derjenigen Druckfehler in dem lateinischen Originale der Gauss'schen Theoria motus corporum coelestium, die in dem, jenem Werke angehängten Fehlerverzeichnisse nicht aufgeführt sind, bei der deutschen Uebersetzung aber Berücksichtigung gefunden haben.

(NB. Die angegebene Zahl der Seiten und Zeilen ist die des lateinischen Originals.)

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen.
1	—	4	composita	inversa	
2	—	7	exercere	exerere	
4	9	—	180°	380°	nur in einigen Exemplaren.
6	—	5	206 264,81	206 264,67	derselbe Druckfehler wiederholt sich auf den spätern Seiten noch häufig.
10	3	—	206 264,8	206 264,7	
10	6	—	4,504 2280 n	4,504 2278 n	
12	—	—	in dem im Artikel 13 berechneten Beispiele sind bei, einigen Zahlen Aenderungen vorgenommen, die jedoch das Schlussresultat nicht wesentlich modificiren.		
14	—	14	formula VIII vel XI	formula VIII vel IX	
19	10	—	$u = 1$ in perihelio	$u = 0$ in perihelio	
22	—	4	$\log \text{hyp. tang } (45^\circ + \frac{1}{2} F)$	$\log \text{hyp. tang } 45^\circ + \frac{1}{2} F$	
25	—	3	$i \log \text{ tang } (45^\circ + \frac{1}{2} F)$	$i \log (45^\circ + \frac{1}{2} F)$	
27	—	1	206 265''	206 265	
29	—	6	$\frac{u-1}{(u+1) \text{ tang } \frac{1}{2} \varphi}$	$\frac{(u-1) \text{ tang } \frac{1}{2} \varphi}{u+1}$	
30	8	—	ω	1	in beiden Formeln.
30	10	—	ω	1	
30	13	—	$3 e \sec F$	$5 e \sec F$	in der zweiten FormelnZähler
39	—	9	$\frac{\text{tang } \frac{1}{2} v}{\gamma} \sqrt{\frac{1+C}{1+\frac{1}{2} T}}$	$\text{tang } \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1+C}{\gamma(1+\frac{1}{2} T)}}$	
40	—	3	$A = 0,022 923$	$A = 0,229 26$	

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen
53	2	—	$\sin \frac{1}{2} (\Omega' - J)$	$\sin \frac{1}{2} (\Omega - J)$	rechts
53	4	—	$\frac{1}{2} (\Omega' + J)$	$\frac{1}{2} (\Omega + J)$	links
54	—	13	illi	illa	
59	—	3	$\frac{r' + K'}{r' - K'}$	$\frac{r' + K'}{r - K'}$	
60	—	13	9,629 6029 n	8,629 0029 n	
61	—	8	heliocentricum	geocentricum	
63	5	—	$\frac{1}{2} (\epsilon - b)$	$\frac{1}{2} (\epsilon -)$	
65	2	—	$\cos \delta \sin l$	$\cos \vartheta \sin l$	im Nenner rechts
67	—	3	0,666 36 n	0,666 27 n	
67	—	1	$b = -15^{\circ} 49' 48'' 58$	$b = -15^{\circ} 49' 43'' 86$	
68	1	—	$\log(b - \beta) \dots 0,666 36 n$	$\log(b - \beta) 0,666 27 n$	
68	5	—	$\log(r - J) \dots 5,482 97$	$\log(r - J) 5,482 88$	
70	—	14	apparens	media	
72	—	13	$L = 12^{\circ} 28' 54''$	$28' 54''$	
77	—	8	Hinc	Hinc	
78	2	—	$\cos \omega \sin i$	$\cos \omega \cos i$	in der Gleichung für $\tan \varrho$
79	3	—	$\log \cos b \sin b 9,042 12 n$	$\log \tan b 9,047 49 n$	in V*
79	5	—	8,564 06	8,569 43	"
79	8	—	$\log \cos b \sin b 9,042 12 n$	$\log \tan b 9,047 49 n$	in VIII
79	9	—	8,681 74 n	8,687 11 n	"
79	—	10	$\pm 0,036 65 dr$	$\pm 0,037 10 dr$	nach der
79	—	10	$-0,048 05 d\Omega$	$-0,048 65 d\Omega$	im
80	8	—	$\log \cos v \dots 9,849 66$	$\log \cos v \dots 9,849 62$	
80	9	—	0,258 62 n	0,258 58 n	Druckfehler-
80	—	17	1,813 93 d φ	1,813 76 d φ	Verzeichnisse
80	—	15 n. 4	3,005 31 d φ	3,005 27 d φ	zur
80	—	14 n. 1	$-0,665 72 dM$	$-0,665 93 dM$	lateinischen
80	—	14	$\pm 0,613 31 d\varphi$	$\pm 0,612 48 d\varphi$	Ausgabe
80	—	14 n. 2	$\pm 0,029 35 d\alpha$	$\pm 0,029 72 d\alpha$	

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen
80	—	14 u. 1	$+ 0,380 90 dQ$	$+ 0,380 30 dQ$	bereits enthalten
80	—	2	$- 0,665 72 dN$	$- 0,665 93 dN$	
80	—	2	$+ 49,65 d7$	$+ 49,67 d7$	Aenderung sind die obigen Verbesserungen zu wiederholen.
80	—	2	$+ 0,236 77 dII$	$+ 0,236 98 dII$	
81	—	5 u. 6	— — —	— — —	
81	—	5	$+ 36,71 d7$	$+ 36,57 d7$	
83	9	—	$\frac{b \cos(45^\circ + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}}$	$\frac{b \cos(45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}}$	
83	—	1	$\cotang(\zeta - 45^\circ)$	$\tang(\zeta - 45^\circ)$	
85	3	—	$\cotang \frac{1}{2}(N' - N)$	$\cotang \frac{1}{2}(B - A)$	
86	15	—	$\sin(\frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N - II)$	$\sin \frac{1}{2}(N + N' - II)$	
87	8	—	$\sin \frac{1}{2}(N' - N)$	$\sin \frac{1}{2}(N - N)$	im Zahler der Gleichung für p am Ende
87	14	—	affectae	affecti	
89	1	—	$\cotang \frac{1}{2}(N'' - N')$	$\cotang \frac{1}{2}(N'' - N)$	
93	—	14	$\log p = 0,395 4822$	$\log p = 0,395 4807$	
97	—	8	$(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} g^2)$	$(1 - \frac{1}{2} \sin g^2)$	
101	13	—	art. 88	art. 89	
102	—	1	$\cos \frac{1}{2}(f + g)^2$	$\cos \frac{1}{2}(f - g)^2$	im Nenner
105	—	10	art. 88	art. 89	
106	1	—	art. 86	art. 88	
107	—	10	0,172 2663	0,172 2683	
107	—	10	0,1516 3477	0,1516 3408	
107	—	9	0,0652 7818	0,0652 7749	
114	2	—	$\sqrt{(L + z)}$	$\sqrt{(L - z)}$	
116	—	9	$4 y y r r'$	$4 Y Y r r'$	im Nenner
116	—	8	$4 Y Y r r'$	$4 y y r r'$	desgl.
116	—	2	art. 99	art. 98	
119	8	—	differentia = 0,0553 6663	differentia = 0,0533 6663	
121	—	3	radio $2a - r$	radio $a - r$	in der Note
121	—	3	radio $2a - r'$	radio $a - r'$	
126	—	4	$r r' \sin(u' - u) \sin i$	$r r' \sin u \sin i$	

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen
129	—	1	quoties fuerit $B = B' = B'' = 0$ atque	quoties fuerit	
134	13	—	art. 71	art. 70	
139	14	—	art. 120	art. 119	
147	—	11	$+c$	$-c$	
147	—	10	$+d$	$-d$	
151	1	—	$\cos(\alpha - \lambda)$	$\cos(\alpha - \lambda)$	
151	3	—	$\alpha - \lambda = 0$	$\alpha - \lambda = 0$	
154	6	—	$A'B'$	$A'B''$	
155	—	2	$\sin(A'D - \delta' + \alpha)$	$(\sin A'D - \delta' + \alpha)$	im Nenner des mittleren Aus- drucks
159	—	7	III	IV	
160	—	9	[18]	[17]	
161	12	—	VI	V	
161	16	—	VI	V	
161	17	—	$\sin(A'D'' - \delta)$	$\sin(A'D - \delta)$	
161	22	—	V vel cum VIII	VI vel cum IX	
161	22	—	$\sin(A''D - \delta'')$	$\sin(A'D - \delta')$	
162	1, 2, 3, 4	—	ϵ'	ϵ	
170	—	14	$\log e = 8,3929518n$	$\log e = 8,3929518$	
171	—	12	9,8648551	9,8648511	
177	—	17	0,9904311	0,9804311	
187	—	6	art. 149	art. 142	
190	—	12	art. 143	art. 147	
190	—	7	art. 143	art. 146	
191	8	—	$P = \frac{R \sin \delta \sin \epsilon'}{R'' \sin \delta'' \sin \alpha}$	$P = \frac{R'' \sin \delta'' \sin \epsilon}{R \sin \delta \sin \epsilon''}$	
191	8	—	$= \frac{R \sin(l' - l)}{R'' \sin(l'' - l')}$	$= \frac{R'' \sin(l'' - l')}{R \sin(l' - l)}$	
193	—	6	rectae et declinationes	rectae ad declinationes	
194	—	1	$R' \sin \delta' = \alpha'$	$R'' \sin \delta'' = \alpha$	
195	7	—	(n 01)	(n 02)	

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen
195	18	—	$\cos \beta'$	$\cos \beta$	im Nenner der Gleichung für μ
197	—	9	$Q' = \frac{1}{2}kk(\ell' - \ell'')(\ell''' - \ell''')$	$Q' = kk(\ell' - \ell'')\ell''' - \ell'''$	
200	3	—	v''' etiam β'''	v''' etiam β'''	
203	—	18	$\log d' = 0,045723n$	$\log d' = 0,045723$	
203	—	5	nodi	modi	
212	—	10	$\varphi \mathcal{A}$	$\mathcal{A}\varphi$	
215	9	—	$-m'' + \lambda''x$ etc.	$M'' + \lambda''x$ etc.	
216	7	—	valorem	quod valorem	
218	3	—	$e^{-\lambda h k'' \sigma \sigma}$	$e^{-\frac{\lambda h \sigma \sigma}{\delta''}}$	
218	4	—	$V\delta'''$	$V\frac{1}{\delta''}$	
219	8	—	$V\frac{1}{A}, V\frac{1}{B}, V\frac{1}{C''}, V\frac{1}{D''}$	VA, VB, VC'', VD''	
219	—	5	$6633r = 12707 + 2P - 9Q + 123R$	$39798r = 76242 + 12P - 54Q + 1473R$	
220	5	—	$\text{pro } r \dots V\frac{6633}{123} = 7,34$	$\text{pro } r \dots V\frac{13266}{491} = 5,20$	
223	—	9	$D' + y\delta'$	$D' + x\delta'$	

Uebersicht

der in den, dem Originale der Gauss'schen Theoria motus corporum coelestium angehängten drei Tafeln aufgefundenen Druckfehler, welche bei der deutschen Uebertragung berücksichtigt sind.

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen
1	1	—	0,00000	0,0000	für T' bei der Hyperbel
2	3	—	795	759	für C bei der Hyperbel
2	22	—	273	473	für $\log B$ bei der Hyperbel
2	—	9	380	382	desgleichen
3	—	16	4870	4820	für C bei der Hyperbel
7	19	—	4694	4644	für $\log B$ bei der Hyperbel
8	2	—	0,360632	9,360632	für T' bei der Ellipse
8	—	1	0,300	0,200	für A

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	lies	statt	Bemerkungen
* 9	21	—	4838	4839	bei $\log gy$ in Spalte 3
10	12	—	6401	4601	" " " " 3
* 10	—	16	6465	6466	" " " " 1
* 10	—	15	0,0209842	0,0209843	" " " " 3
* 10	—	3	8374	8375	" " " " 1
14	12	—	58094	58049	" " " " 2
* 14	19	—	90484	90483	" " " " 1
* 14	—	3	73093	73094	" " " " 3
15	—	8	0,473	0,347	bei h in Spalte 3
16	8	—	52355	52855	bei $\log gy$ in Spalte 2
* 16	—	18	09889	09888	" " " " 2
17	—	12	2617	617	für ζ rechts
18	—	12	3891	3791	für ξ "
18	—	12	1686	1689	für ζ "
20	10	—	3178	3188	für ξ "

Anmerkung. Wegen der in obiger Tabelle mit einem * bezeichneten Stellen vergleiche man die Note zum Fehlerverzeichnis der deutschen Uebersetzung.

TAFEL I. (siehe Artt. 42, 45)

1

A	Ellipse				Hyperbel		
	log B	C	T		log B	C	T
0,000	0	0	0,00000	0	0	0,00000	
0,001	0	0	100	0	0	100	
0,002	0	2	200	0	2	200	
0,003	1	4	301	1	4	299	
0,004	1	7	401	1	7	399	
0,005	2	11	502	2	11	498	
0,006	3	16	603	3	16	597	
0,007	4	22	704	4	22	696	
0,008	5	29	805	5	29	795	
0,009	6	37	0,00907	6	37	894	
0,010	7	46	0,01008	7	46	0,00992	
0,011	9	56	110	9	55	0,01090	
0,012	11	66	212	11	66	189	
0,013	13	78	314	13	77	287	
0,014	15	90	416	15	89	384	
0,015	17	103	518	17	102	482	
0,016	19	118	621	19	116	580	
0,017	22	133	723	21	131	677	
0,018	24	149	826	24	147	774	
0,019	27	166	0,01929	27	164	872	
0,020	30	184	0,02032	30	182	0,01968	
0,021	33	203	136	33	200	0,02065	
0,022	36	223	239	36	220	162	
0,023	40	244	343	39	240	258	
0,024	43	265	447	43	261	355	
0,025	47	288	551	46	283	451	
0,026	51	312	655	50	306	547	
0,027	55	336	760	54	330	643	
0,028	59	362	864	58	355	739	
0,029	63	388	0,02969	62	381	834	
0,030	67	416	0,03074	67	407	0,02930	
0,031	72	444	179	71	435	0,03025	
0,032	77	473	284	76	463	120	
0,033	82	503	389	80	492	215	
0,034	87	535	495	85	523	310	
0,035	92	567	601	91	554	404	
0,036	97	600	707	96	585	499	
0,037	103	634	813	101	618	593	
0,038	108	669	0,03919	107	652	688	
0,039	114	704	0,04025	112	686	782	
0,040	120	741	132	118	722	876	

1

Ellipse				Hyperbel		
<i>A</i>	log <i>B</i>	<i>C</i>	<i>T</i>	log <i>B</i>	<i>C</i>	<i>T</i>
0,040	120	741	0,041319	118	722	0,038757
0,041	126	779	2387	124	758	0,039695
0,042	133	818	3457	130	795	0,040632
0,043	139	858	4528	136	833	1567
0,044	146	898	5601	143	872	2500
0,045	152	940	6676	149	912	3432
0,046	159	982	7753	156	953	4363
0,047	166	1026	8831	163	994	5292
0,048	173	1070	0,049911	170	1037	6220
0,049	181	1116	0,050993	177	1080	7147
0,050	188	1162	2077	184	1124	8072
0,051	196	1210	3163	191	1169	8995
0,052	204	1258	4250	199	1215	0,049917
0,053	212	1307	5339	207	1262	0,050838
0,054	220	1358	6430	215	1310	1757
0,055	228	1409	7523	223	1358	2675
0,056	236	1461	8618	231	1407	3592
0,057	245	1514	0,059714	239	1458	4507
0,058	254	1568	0,060812	247	1509	5420
0,059	263	1623	1912	256	1561	6332
0,060	272	1679	3014	265	1614	7243
0,061	281	1736	4118	273	1667	8152
0,062	290	1794	5223	282	1722	9060
0,063	300	1853	6331	291	1777	0,059967
0,064	309	1913	7440	301	1833	0,060872
0,065	319	1974	8551	310	1891	1776
0,066	329	2036	0,069664	320	1949	2678
0,067	339	2099	0,070779	329	2007	3579
0,068	350	2163	1896	339	2067	4479
0,069	360	2228	3014	349	2128	5377
0,070	371	2294	4135	359	2189	6274
0,071	381	2360	5257	370	2251	7170
0,072	392	2428	6381	380	2314	8064
0,073	403	2497	7507	390	2378	8957
0,074	415	2567	8635	401	2443	0,069848
0,075	426	2638	0,079765	412	2509	0,070738
0,076	437	2709	0,080897	423	2575	1617
0,077	449	2782	2030	434	2643	2514
0,078	461	2856	3166	445	2711	3400
0,079	473	2930	4303	457	2780	4285
0,080	485	3006	5443	468	2850	5168

Ellipae				Hyperbel		
A	log B	C	T	log B	C	T
0,080	485	3006	0,085443	468	2850	0,075168
0,081	498	3083	6584	480	2921	6050
0,082	510	3160	7727	492	2992	6930
0,083	523	3239	0,088872	504	3065	7810
0,084	535	3319	0,090019	516	3138	8688
0,085	548	3399	1168	528	3212	0,079564
0,086	561	3481	2319	540	3287	0,080439
0,087	575	3564	3472	553	3363	1313
0,088	588	3647	4627	566	3440	2186
0,089	602	3732	5784	578	3517	3057
0,090	615	3818	6943	591	3595	3927
0,091	629	3904	8104	604	3674	4796
0,092	643	3992	0,099266	618	3754	5663
0,093	658	4081	0,100431	631	3835	6529
0,094	672	4170	1598	645	3917	7394
0,095	687	4261	2766	658	3999	8257
0,096	701	4353	3937	672	4083	9119
0,097	716	4446	5110	686	4167	0,089980
0,098	731	4539	6284	700	4252	0,090840
0,099	746	4634	7461	714	4338	1698
0,100	762	4730	8640	728	4424	2555
0,101	777	4826	0,109820	743	4512	3410
0,102	793	4924	0,111003	758	4600	4265
0,103	809	5023	2188	772	4689	5118
0,104	825	5123	3375	787	4779	5969
0,105	841	5224	4563	802	4870	6820
0,106	857	5325	5754	817	4962	7669
0,107	873	5428	6947	833	5054	8517
0,108	890	5532	8142	848	5148	0,099364
0,109	907	5637	0,119339	864	5242	0,100209
0,110	924	5743	0,120538	880	5337	1053
0,111	941	5850	1739	895	5432	1896
0,112	958	5958	2942	911	5529	2738
0,113	975	6067	4148	928	5626	3578
0,114	993	6177	5355	944	5724	4417
0,115	1011	6288	6564	960	5823	5255
0,116	1029	6400	7776	977	5923	6092
0,117	1047	6513	0,128989	994	6024	6927
0,118	1065	6627	0,130205	1010	6125	7761
0,119	1083	6742	1423	1027	6228	8594
0,120	1102	6858	2643	1045	6331	9426

Ellipse				Hyperbel		
A	log B	C	T	log B	C	T
0,120	1102	6858	0,132643	1045	6331	0,109426
0,121	1121	6976	3865	1062	6435	0,110256
0,122	1139	7094	5089	1079	6539	1085
0,123	1158	7213	6315	1097	6645	1913
0,124	1178	7334	7543	1114	6751	2740
0,125	1197	7455	0,138774	1132	6858	3566
0,126	1217	7577	0,140007	1150	6966	4390
0,127	1236	7701	1241	1168	7075	5213
0,128	1256	7825	2478	1186	7185	6035
0,129	1276	7951	3717	1205	7295	6855
0,130	1296	8077	4959	1223	7406	7675
0,131	1317	8205	6202	1242	7518	8493
0,132	1337	8334	7448	1261	7631	0,119310
0,133	1358	8463	8695	1280	7745	0,120126
0,134	1378	8594	0,149945	1299	7859	0940
0,135	1399	8726	0,151197	1318	7974	1754
0,136	1421	8859	2452	1337	8090	2566
0,137	1442	8993	3708	1357	8207	3377
0,138	1463	9128	4967	1376	8325	4186
0,139	1485	9264	6228	1396	8443	4995
0,140	1507	9401	7491	1416	8562	5802
0,141	1529	9539	0,158756	1436	8682	6609
0,142	1551	9678	0,160024	1456	8803	7414
0,143	1573	9819	1294	1476	8925	8217
0,144	1596	9960	2566	1497	9047	9020
0,145	1618	10102	3840	1517	9170	0,129822
0,146	1641	10246	5116	1538	9294	0,130622
0,147	1664	10390	6395	1559	9419	1421
0,148	1687	10536	7676	1580	9545	2219
0,149	1710	10683	0,168959	1601	9671	3016
0,150	1734	10830	0,170245	1622	9798	3812
0,151	1757	10979	1533	1643	9926	4606
0,152	1781	11129	2823	1665	10055	5399
0,153	1805	11280	4115	1686	10185	6191
0,154	1829	11432	5410	1708	10315	6982
0,155	1854	11585	6707	1730	10446	7772
0,156	1878	11739	8006	1752	10578	8561
0,157	1903	11894	0,179308	1774	10711	0,139349
0,158	1927	12051	0,180612	1797	10844	0,140135
0,159	1952	12208	1918	1819	10978	0920
0,160	1977	12366	3226	1842	11113	1704

TAFEL I.

Ellipse				Hyperbel		
A	log B	C	T	log B	C	T
0,160	1977	12366	0,183226	1842	11113	0,141704
0,161	2003	12526	4537	1864	11249	2487
0,162	2028	12686	5850	1887	11386	3269
0,163	2054	12848	7166	1910	11523	4050
0,164	2080	13011	8484	1933	11661	4829
0,165	2106	13175	0,189804	1956	11800	5608
0,166	2132	13340	0,191127	1980	11940	6385
0,167	2158	13506	2452	2003	12081	7161
0,168	2184	13673	3779	2027	12222	7937
0,169	2211	13841	5109	2051	12364	8710
0,170	2238	14010	6441	2075	12507	0,149483
0,171	2265	14181	7775	2099	12651	0,150255
0,172	2292	14352	0,199112	2123	12795	1026
0,173	2319	14525	0,200451	2147	12940	1795
0,174	2347	14699	1793	2172	13086	2564
0,175	2374	14873	3137	2196	13233	3331
0,176	2402	15049	4484	2221	13380	4097
0,177	2430	15226	5832	2246	13529	4862
0,178	2458	15404	7184	2271	13678	5626
0,179	2486	15583	8538	2296	13827	6389
0,180	2515	15764	0,209894	2321	13978	7151
0,181	2543	15945	0,211253	2346	14129	7911
0,182	2572	16128	2614	2372	14281	8671
0,183	2601	16311	3977	2398	14434	0,159429
0,184	2630	16496	5343	2423	14588	0,160187
0,185	2660	16682	6712	2449	14742	0943
0,186	2689	16868	8083	2475	14898	1698
0,187	2719	17057	0,219456	2502	15054	2453
0,188	2749	17246	0,220832	2528	15210	3206
0,189	2779	17436	2211	2554	15368	3958
0,190	2809	17627	3592	2581	15526	4709
0,191	2839	17820	4975	2608	15685	5458
0,192	2870	18013	6361	2634	15845	6207
0,193	2900	18208	7750	2661	16005	6955
0,194	2931	18404	0,229141	2688	16167	7702
0,195	2962	18601	0,230535	2716	16329	8447
0,196	2993	18799	1931	2743	16491	9192
0,197	3025	18998	3329	2771	16655	0,169935
0,198	3056	19198	4731	2798	16819	0,170678
0,199	3088	19400	6135	2826	16984	1419
0,200	3120	19602	7541	2854	17150	2159

A	Ellipse			Hyperbel		
	log B	C	T	log B	C	T
0,200	3120	19602	0,237541	2854	17150	0,172159
0,201	3152	19806	0,238950	2882	17317	2899
0,202	3184	20011	0,240361	2910	17484	3637
0,203	3216	20217	1776	2938	17652	4374
0,204	3249	20424	3192	2967	17821	5110
0,205	3282	20632	4612	2995	17991	5845
0,206	3315	20842	6034	3024	18161	6579
0,207	3348	21052	7458	3053	18332	7312
0,208	3381	21264	0,248885	3082	18504	8044
0,209	3414	21477	0,250315	3111	18677	8775
0,210	3448	21690	1748	3140	18850	0,179505
0,211	3482	21905	3183	3169	19024	0,180234
0,212	3516	22122	4620	3199	19199	0962
0,213	3550	22339	6061	3228	19375	1688
0,214	3584	22557	7504	3258	19551	2414
0,215	3618	22777	0,258950	3288	19728	3139
0,216	3653	22998	0,260398	3318	19906	3863
0,217	3688	23220	1849	3348	20084	4585
0,218	3723	23443	3303	3378	20264	5307
0,219	3758	23667	4759	3409	20444	6028
0,220	3793	23892	6218	3439	20625	6747
0,221	3829	24119	7680	3470	20806	7466
0,222	3865	24347	0,269145	3500	20988	8184
0,223	3900	24576	0,270612	3531	21172	8900
0,224	3936	24806	2082	3562	21355	0,189616
0,225	3973	25037	3555	3594	21540	0,190331
0,226	4009	25269	5031	3625	21725	1044
0,227	4046	25502	6509	3656	21911	1757
0,228	4082	25737	7990	3688	22098	2468
0,229	4119	25973	0,279474	3719	22285	3179
0,230	4156	26210	0,280960	3751	22473	3889
0,231	4194	26448	2450	3783	22662	4597
0,232	4231	26687	3942	3815	22852	5305
0,233	4269	26928	5437	3847	23042	6012
0,234	4306	27169	6935	3880	23234	6717
0,235	4344	27412	8435	3912	23425	7422
0,236	4382	27656	0,289939	3945	23618	8126
0,237	4421	27901	0,291445	3977	23811	8829
0,238	4459	28148	2954	4010	24005	0,199530
0,239	4498	28395	4466	4043	24200	0,200231
0,240	4537	28644	5980	4076	24396	0931

Ellipse				Hyperbel		
A	log B	C	T	log B	C	T
0,240	4537	28644	0,295980	4076	24396	0,200931
0,241	4576	28894	7498	4110	24592	1630
0,242	4615	29145	0,299018	4143	24789	2328
0,243	4654	29397	0,300542	4176	24987	3025
0,244	4694	29651	2068	4210	25185	3721
0,245	4734	29905	3597	4244	25384	4416
0,246	4774	30161	5129	4277	25584	5110
0,247	4814	30418	6664	4311	25785	5803
0,248	4854	30676	8202	4346	25986	6495
0,249	4894	30935	0,309743	4380	26188	7186
0,250	4935	31196	0,311286	4414	26391	7876
0,251	4976	31458	2833	4449	26594	8565
0,252	5017	31721	4382	4483	26799	9254
0,253	5058	31985	5935	4518	27004	0,209941
0,254	5099	32250	7490	4553	27209	0,210627
0,255	5141	32517	0,319048	4588	27416	1313
0,256	5182	32784	0,320610	4623	27623	1997
0,257	5224	33053	2174	4658	27830	2681
0,258	5266	33323	3741	4694	28039	3364
0,259	5309	33595	5312	4729	28248	4045
0,260	5351	33867	6885	4765	28458	4726
0,261	5394	34141	0,328461	4801	28669	5406
0,262	5436	34416	0,330041	4838	28880	6085
0,263	5479	34692	1623	4873	29092	6763
0,264	5522	34970	3208	4909	29305	7440
0,265	5566	35248	4797	4945	29519	8116
0,266	5609	35528	6388	4981	29733	8791
0,267	5653	35809	7983	5018	29948	0,219465
0,268	5697	36091	0,339580	5055	30164	0,220138
0,269	5741	36375	0,341181	5091	30380	0811
0,270	5785	36659	2785	5128	30597	1482
0,271	5829	36945	4392	5165	30815	2153
0,272	5874	37232	6002	5202	31033	2822
0,273	5919	37521	7615	5240	31253	3491
0,274	5964	37810	0,349231	5277	31473	4159
0,275	6009	38101	0,350850	5315	31693	4826
0,276	6054	38393	2473	5352	31915	5492
0,277	6100	38686	4098	5390	32137	6157
0,278	6145	38981	5727	5428	32359	6821
0,279	6191	39277	7359	5466	32583	7484
0,280	6237	39573	8994	5504	32807	8147

A	Ellipae				Hyperbel		
	log B	C	T		log B	C	T
0,280	6237	39573	0,358994	5504	32807	0,228147	
0,281	6283	39872	0,360632	5542	33032	8808	
0,282	6330	40171	2274	5581	33257	0,229469	
0,283	6376	40472	3918	5619	33484	0,230128	
0,284	6423	40774	5566	5658	33711	0787	
0,285	6470	41077	7217	5697	33938	1445	
0,286	6517	41381	0,368871	5736	34167	2102	
0,287	6564	41687	0,370529	5775	34396	2758	
0,288	6612	41994	2189	5814	34626	3413	
0,289	6660	42302	3853	5853	34856	4068	
0,290	6708	42611	5521	5893	35087	4721	
0,291	6756	42922	7191	5932	35319	5374	
0,292	6804	43233	0,378865	5972	35552	6025	
0,293	6852	43547	0,380542	6012	35785	6676	
0,294	6901	43861	2222	6052	36019	7326	
0,295	6950	44177	3906	6092	36253	7975	
0,296	6999	44493	5593	6132	36489	8623	
0,297	7048	44812	7283	6172	36725	9271	
0,298	7097	45131	0,388977	6213	36961	0,239917	
0,299	7147	45452	0,390673	6253	37199	0,240563	
0,300	7196	45774	2374	6294	37437	1207	

TAFEL II. (siehe Art. 93)

9

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,0000	0,0000000	0,0040	0,0038332	0,0080	0,0076133
01	0965	41	0,0039284	81	7071
02	1930	42	0,0040235	82	8009
03	2894	43	1186	83	8947
04	3858	44	2136	84	0,0079884
05	4821	45	3086	85	0,0080821
06	5784	46	4036	86	1758
07	6747	47	4985	87	2694
08	7710	48	5934	88	3630
09	8672	49	6883	89	4566
10	0,0009634	50	7832	90	5502
11	0,0010595	51	8780	91	6437
12	1556	52	0,0049728	92	7372
13	2517	53	0,0050675	93	8306
14	3478	54	1622	94	0,0089240
15	4438	55	2569	95	0,0090174
16	5398	56	3515	96	1108
17	6357	57	4462	97	2041
18	7316	58	5407	98	2974
19	8275	59	6353	0,0099	3906
20	0,0019234	60	7298	0,0100	4838
21	0,0020192	61	8243	01	5770
22	1150	62	0,0059187	02	6702
23	2107	63	0,0060131	03	7633
24	3064	64	1075	04	8564
25	4021	65	2019	05	0,0099495
26	4977	66	2962	06	0,0100425
27	5933	67	3905	07	1356
28	6889	68	4847	08	2285
29	7845	69	5790	09	3215
30	8800	70	6732	10	4144
31	0,0029755	71	7673	11	5073
32	0,0030709	72	8614	12	6001
33	1663	73	0,0069555	13	6929
34	2617	74	0,0070496	14	7857
35	3570	75	1436	15	8785
36	4523	76	2376	16	0,0109712
37	5476	77	3316	17	0,0110639
38	6428	78	4255	18	1565
39	7380	79	5194	19	2491
0,0040	0,0038332	0,0080	0,0076133	0,0120	0,0113417

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,0120	0,0113417	0,0160	0,0150202	0,0200	0,0186501
21	4343	61	1115	01	7403
22	5268	62	2028	02	8304
23	6193	63	2941	03	0,0189205
24	7118	64	3854	04	0,0190105
25	8043	65	4766	05	1005
26	8967	66	5678	06	1905
27	0,0119890	67	6589	07	2805
28	0,0120814	68	7500	08	3704
29	1737	69	8411	09	4603
30	2660	70	0,0159322	10	5502
31	3582	71	0,0160232	11	6401
32	4505	72	1142	12	7299
33	5427	73	2052	13	8197
34	6348	74	2961	14	9094
35	7269	75	3870	15	0,0199992
36	8190	76	4779	16	0,0200889
37	0,0129111	77	5688	17	1785
38	0,0130032	78	6596	18	2682
39	0952	79	7504	19	3578
40	1871	80	8412	20	4474
41	2791	81	0,0169319	21	5369
42	3710	82	0,0170226	22	6264
43	4629	83	1133	23	7159
44	5547	84	2039	24	8054
45	6465	85	2945	25	8948
46	7383	86	3851	26	0,0209842
47	8301	87	4757	27	0,0210736
48	0,0139218	88	5662	28	1630
49	0,0140135	89	6567	29	2523
50	1052	90	7471	30	3416
51	1968	91	8376	31	4309
52	2884	92	0,0179280	32	5201
53	3800	93	0,0180183	33	6093
54	4716	94	1087	34	6985
55	5631	95	1990	35	7876
56	6546	96	2893	36	8768
57	7460	97	3796	37	0,0219659
58	8374	98	4698	38	0,0220549
59	0,0149288	0,0199	5600	39	1440
0,0160	0,0150202	0,0200	0,0186501	0,0240	0,0222330

TAFEL II.

11

h	$\log yy$	h	$\log yy$	h	$\log yy$
0,0240	0,0222330	0,0280	0,0257700	0,0320	0,0292626
41	3220	81	8579	21	3494
42	4109	82	0,0259457	22	4361
43	4998	83	0,0260335	23	5228
44	5887	84	1213	24	6095
45	6776	85	2090	25	6961
46	7664	86	2967	26	7827
47	8552	87	3844	27	8693
48	0,0229440	88	4721	28	0,0299559
49	0,0230328	89	5597	29	0,0300424
50	1215	90	6473	30	1290
51	2102	91	7349	31	2154
52	2988	92	8224	32	3019
53	3875	93	9099	33	3883
54	4761	94	0,0269974	34	4747
55	5647	95	0,0270849	35	5611
56	6532	96	1723	36	6475
57	7417	97	2597	37	7338
58	8302	98	3471	38	8201
59	0,0239187	0,0299	4345	39	9064
60	0,0240071	0,0300	5218	40	0,0309926
61	0956	01	6091	41	0,0310788
62	1839	02	6964	42	1650
63	2723	03	7836	43	2512
64	3606	04	8708	44	3373
65	4489	05	0,0279580	45	4234
66	5372	06	0,0280452	46	5095
67	6254	07	1323	47	5956
68	7136	08	2194	48	6816
69	8018	09	3065	49	7676
70	8900	10	3936	50	8536
71	0,0249781	11	4806	51	0,0319396
72	0,0250662	12	5676	52	0,0320255
73	1543	13	6546	53	1114
74	2423	14	7415	54	1973
75	3303	15	8284	55	2831
76	4183	16	0,0289153	56	3689
77	5063	17	0,0290022	57	4547
78	5942	18	0890	58	5405
79	6821	19	1758	59	6262
0,0280	0,0257700	0,0320	0,0292626	0,0360	0,0327120

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,0360	0,0327120	0,040	0,0361192	0,080	0,0681057
61	7976	0,041	69646	0,081	88612
62	8833	0,042	78075	0,082	0,0696146
63	0,0329689	0,043	86478	0,083	0,0703661
64	0,0330546	0,044	0,0394856	0,084	11157
65	1401	0,045	0,0403209	0,085	18633
66	2257	0,046	11537	0,086	26090
67	3112	0,047	19841	0,087	33527
68	3967	0,048	28121	0,088	40945
69	4822	0,049	36376	0,089	48345
70	5677	0,050	44607	0,090	55725
71	6531	0,051	52814	0,091	63087
72	7385	0,052	60997	0,092	70430
73	8239	0,053	69157	0,093	77754
74	9092	0,054	77294	0,094	85060
75	0,0339946	0,055	85407	0,095	92348
76	0,0340799	0,056	0,0493496	0,096	0,0799617
77	1651	0,057	0,0501563	0,097	0,0806868
78	2504	0,058	09607	0,098	14101
79	3356	0,059	17628	0,099	21316
80	4208	0,060	25626	0,100	28513
81	5059	0,061	33602	0,101	35693
82	5911	0,062	41556	0,102	42854
83	6762	0,063	49488	0,103	49999
84	7613	0,064	57397	0,104	57125
85	8464	0,065	65285	0,105	64235
86	0,0349314	0,066	73150	0,106	71327
87	0,0350164	0,067	80994	0,107	78401
88	1014	0,068	88817	0,108	85459
89	1864	0,069	0,0596618	0,109	92500
90	2713	0,070	0,0604398	0,110	0,0899523
91	3562	0,071	12157	0,111	0,0906530
92	4411	0,072	19895	0,112	13520
93	5259	0,073	27612	0,113	20494
94	6108	0,074	35308	0,114	27451
95	6956	0,075	42984	0,115	34391
96	7804	0,076	50639	0,116	41315
97	8651	0,077	58274	0,117	48223
98	0,0359499	0,078	65888	0,118	55114
0,0399	0,0360346	0,079	73483	0,119	61990
0,0400	0,0361192	0,080	0,0681057	0,120	0,0968849

<i>h</i>	log <i>yy</i>	<i>h</i>	log <i>yy</i>	<i>h</i>	log <i>yy</i>
0,120	0,0968849	0,160	0,1230927	0,200	0,1471869
0,121	75692	0,161	37192	0,201	77653
0,122	82520	0,162	43444	0,202	83427
0,123	89331	0,163	49682	0,203	89189
0,124	0,0996127	0,164	55908	0,204	0,1494940
0,125	0,1002907	0,165	62121	0,205	0,1500681
0,126	09672	0,166	68321	0,206	06411
0,127	16421	0,167	74508	0,207	12130
0,128	23154	0,168	80683	0,208	17838
0,129	29873	0,169	86845	0,209	23535
0,130	36576	0,170	92994	0,210	29222
0,131	43264	0,171	0,1299131	0,211	34899
0,132	49936	0,172	0,1305255	0,212	40565
0,133	56594	0,173	11367	0,213	46220
0,134	63237	0,174	17466	0,214	51865
0,135	69865	0,175	23553	0,215	57499
0,136	76478	0,176	29628	0,216	63123
0,137	83076	0,177	35690	0,217	68737
0,138	89660	0,178	41740	0,218	74340
0,139	0,1096229	0,179	47778	0,219	79933
0,140	0,1102783	0,180	53804	0,220	85516
0,141	09323	0,181	59818	0,221	91089
0,142	15849	0,182	65821	0,222	0,1596652
0,143	22360	0,183	71811	0,223	0,1602204
0,144	28857	0,184	77789	0,224	07747
0,145	35340	0,185	83755	0,225	13279
0,146	41809	0,186	89710	0,226	18802
0,147	48264	0,187	0,1395653	0,227	24315
0,148	54704	0,188	0,1401585	0,228	29817
0,149	61131	0,189	07504	0,229	35310
0,150	67544	0,190	13412	0,230	40793
0,151	73943	0,191	19309	0,231	46267
0,152	80329	0,192	25194	0,232	51730
0,153	86701	0,193	31068	0,233	57184
0,154	93059	0,194	36931	0,234	62628
0,155	0,1199404	0,195	42782	0,235	68063
0,156	0,1205735	0,196	48622	0,236	73488
0,157	12053	0,197	54450	0,237	78903
0,158	18357	0,198	60268	0,238	84309
0,159	24649	0,199	66074	0,239	89705
0,160	0,1230927	0,200	0,1471869	0,240	0,1695092

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,240	0,1695092	0,280	0,1903220	0,320	0,2098315
0,241	0,1700470	0,281	08249	0,321	0,2103040
0,242	05838	0,282	13269	0,322	07759
0,243	11197	0,283	18281	0,323	12470
0,244	16547	0,284	23286	0,324	17174
0,245	21887	0,285	28282	0,325	21871
0,246	27218	0,286	33271	0,326	26562
0,247	32540	0,287	38251	0,327	31245
0,248	37853	0,288	43224	0,328	35921
0,249	43156	0,289	48188	0,329	40591
0,250	48451	0,290	53145	0,330	45253
0,251	53736	0,291	58094	0,331	49909
0,252	59013	0,292	63035	0,332	54558
0,253	64280	0,293	67968	0,333	59200
0,254	69538	0,294	72894	0,334	63835
0,255	74788	0,295	77811	0,335	68464
0,256	80029	0,296	82721	0,336	73085
0,257	85261	0,297	87624	0,337	77700
0,258	90484	0,298	92518	0,338	82308
0,259	0,1795698	0,299	0,1997406	0,339	86910
0,260	0,1800903	0,300	0,2002285	0,340	91505
0,261	06100	0,301	07157	0,341	0,2196093
0,262	11288	0,302	12021	0,342	0,2200675
0,263	16467	0,303	16878	0,343	05250
0,264	21638	0,304	21727	0,344	09818
0,265	26800	0,305	26569	0,345	14380
0,266	31953	0,306	31403	0,346	18935
0,267	37098	0,307	36230	0,347	23483
0,268	42235	0,308	41050	0,348	28025
0,269	47363	0,309	45862	0,349	32561
0,270	52483	0,310	50667	0,350	37090
0,271	57594	0,311	55464	0,351	41613
0,272	62696	0,312	60254	0,352	46130
0,273	67791	0,313	65037	0,353	50640
0,274	72877	0,314	69813	0,354	55143
0,275	77955	0,315	74581	0,355	59640
0,276	83024	0,316	79342	0,356	64131
0,277	88085	0,317	84096	0,357	68615
0,278	93138	0,318	88843	0,358	73093
0,279	0,1898183	0,319	93582	0,359	77565
0,280	0,1903220	0,320	0,2098315	0,360	0,2282031

TAFEL II.

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,360	0,2282031	0,400	0,2455716	0,440	0,2620486
0,361	86490	0,401	59940	0,441	24499
0,362	90943	0,402	64158	0,442	28507
0,363	95390	0,403	68371	0,443	32511
0,364	0,2299831	0,404	72578	0,444	36509
0,365	0,2304265	0,405	76779	0,445	40503
0,366	08694	0,406	80975	0,446	44492
0,367	13116	0,407	85166	0,447	48475
0,368	17532	0,408	89351	0,448	52454
0,369	21942	0,409	93531	0,449	56428
0,370	26346	0,410	0,2497705	0,450	60397
0,371	30743	0,411	0,2501874	0,451	64362
0,372	35135	0,412	06038	0,452	68321
0,373	39521	0,413	10196	0,453	72276
0,374	43900	0,414	14349	0,454	76226
0,375	48274	0,415	18496	0,455	80171
0,376	52642	0,416	22638	0,456	84111
0,377	57003	0,417	26775	0,457	88046
0,378	61359	0,418	30906	0,458	91977
0,379	65709	0,419	35032	0,459	95903
0,380	70053	0,420	39153	0,460	0,2699824
0,381	74391	0,421	43269	0,461	0,2703741
0,382	78723	0,422	47379	0,462	07652
0,383	83050	0,423	51485	0,463	11559
0,384	87370	0,424	55584	0,464	15462
0,385	91685	0,425	59679	0,465	19360
0,386	0,2395993	0,426	63769	0,466	23253
0,387	0,2400296	0,427	67853	0,467	27141
0,388	04594	0,428	71932	0,468	31025
0,389	08885	0,429	76006	0,469	34904
0,390	13171	0,430	80075	0,470	38778
0,391	17451	0,431	84139	0,471	42648
0,392	21725	0,432	88198	0,472	46513
0,393	25994	0,433	92252	0,473	50374
0,394	30257	0,434	0,2596300	0,474	54230
0,395	34514	0,435	0,2600344	0,475	58082
0,396	38766	0,436	04382	0,476	61929
0,397	43012	0,437	08415	0,477	65771
0,398	47252	0,438	12444	0,478	69609
0,399	51487	0,439	16467	0,479	73443
0,400	0,2455716	0,440	0,2620486	0,480	0,2777272

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,480	0,2777272	0,520	0,2926864	0,560	0,3069938
0,481	81096	0,521	30518	0,561	73437
0,482	84916	0,522	34168	0,562	76931
0,483	88732	0,523	37813	0,563	80422
0,484	92543	0,524	41455	0,564	83910
0,485	0,2796349	0,525	45092	0,565	87394
0,486	0,2800151	0,526	48726	0,566	90874
0,487	03949	0,527	52355	0,567	94350
0,488	07743	0,528	55981	0,568	0,3097823
0,489	11532	0,529	59602	0,569	0,3101292
0,490	15316	0,530	63220	0,570	04758
0,491	19096	0,531	66833	0,571	08220
0,492	22872	0,532	70443	0,572	11678
0,493	26644	0,533	74049	0,573	15133
0,494	30411	0,534	77650	0,574	18584
0,495	34173	0,535	81248	0,575	22031
0,496	37932	0,536	84842	0,576	25475
0,497	41686	0,537	88432	0,577	28915
0,498	45436	0,538	92018	0,578	32352
0,499	49181	0,539	95600	0,579	35785
0,500	52923	0,540	0,2999178	0,580	39215
0,501	56660	0,541	0,3002752	0,581	42641
0,502	60392	0,542	06323	0,582	46064
0,503	64121	0,543	09890	0,583	49483
0,504	67845	0,544	13453	0,584	52898
0,505	71565	0,545	17011	0,585	56310
0,506	75281	0,546	20566	0,586	59719
0,507	78992	0,547	24117	0,587	63124
0,508	82700	0,548	27664	0,588	66525
0,509	86403	0,549	31208	0,589	69923
0,510	90102	0,550	34748	0,590	73318
0,511	93797	0,551	38284	0,591	76709
0,512	0,2897487	0,552	41816	0,592	80096
0,513	0,2901174	0,553	45344	0,593	83481
0,514	04856	0,554	48869	0,594	86861
0,515	08535	0,555	52390	0,595	90239
0,516	12209	0,556	55907	0,596	93612
0,517	15879	0,557	59420	0,597	0,3196983
0,518	19545	0,558	62930	0,598	0,3200350
0,519	23207	0,559	66436	0,599	03714
0,520	0,2926864	0,560	0,3069938	0,600	0,3207074

x oder z	ξ	ζ	x oder z	ξ	ζ
0,000	0,0000000	0,0000000	0,040	0,0000936	0,0000894
0,001	001	001	0,041	0984	0938
0,002	002	002	0,042	1033	0984
0,003	005	005	0,043	1084	1031
0,004	009	009	0,044	1135	1079
0,005	014	014	0,045	1188	1128
0,006	021	020	0,046	1242	1178
0,007	028	028	0,047	1298	1229
0,008	037	036	0,048	1354	1281
0,009	047	046	0,049	1412	1334
0,010	057	057	0,050	1471	1389
0,011	070	069	0,051	1532	1444
0,012	083	082	0,052	1593	1500
0,013	097	096	0,053	1656	1558
0,014	113	111	0,054	1720	1616
0,015	130	127	0,055	1785	1675
0,016	148	145	0,056	1852	1736
0,017	167	164	0,057	1920	1798
0,018	187	183	0,058	1989	1860
0,019	209	204	0,059	2060	1924
0,020	231	226	0,060	2131	1988
0,021	255	249	0,061	2204	2054
0,022	280	273	0,062	2278	2121
0,023	306	298	0,063	2354	2189
0,024	334	325	0,064	2431	2257
0,025	362	352	0,065	2509	2327
0,026	392	381	0,066	2588	2398
0,027	423	410	0,067	2669	2470
0,028	455	441	0,068	2751	2543
0,029	489	473	0,069	2834	2617
0,030	523	506	0,070	2918	2691
0,031	559	539	0,071	3004	2767
0,032	596	575	0,072	3091	2844
0,033	634	611	0,073	3180	2922
0,034	674	648	0,074	3269	3001
0,035	714	686	0,075	3360	3081
0,036	756	726	0,076	3453	3162
0,037	799	766	0,077	3546	3244
0,038	844	807	0,078	3641	3327
0,039	889	850	0,079	3738	3411
0,040	0,0000936	0,0000894	0,080	0,0003835	0,0003496

x oder z	ξ	ζ	x oder z	ξ	ζ
0,080	0,0003835	0,0003496	0,120	0,0008845	0,0007698
0,081	3934	3582	0,121	8999	7822
0,082	4034	3669	0,122	9154	7948
0,083	4136	3757	0,123	9311	8074
0,084	4239	3846	0,124	9469	8202
0,085	4343	3936	0,125	9628	8330
0,086	4448	4027	0,126	9789	8459
0,087	4555	4119	0,127	0,0009951	8590
0,088	4663	4212	0,128	0,0010115	8721
0,089	4773	4306	0,129	0280	8853
0,090	4884	4401	0,130	0447	8986
0,091	4996	4496	0,131	0615	9120
0,092	5109	4593	0,132	0784	9255
0,093	5224	4691	0,133	0955	9390
0,094	5341	4790	0,134	1128	9527
0,095	5458	4890	0,135	1301	9665
0,096	5577	4991	0,136	1477	9803
0,097	5697	5092	0,137	1654	0,0009943
0,098	5819	5195	0,138	1832	0,0010083
0,099	5942	5299	0,139	2012	0224
0,100	6066	5403	0,140	2193	0366
0,101	6192	5509	0,141	2376	0509
0,102	6319	5616	0,142	2560	0653
0,103	6448	5723	0,143	2745	0798
0,104	6578	5832	0,144	2933	0944
0,105	6709	5941	0,145	3121	1091
0,106	6842	6052	0,146	3311	1238
0,107	6976	6163	0,147	3503	1387
0,108	7111	6275	0,148	3696	1536
0,109	7248	6389	0,149	3891	1686
0,110	7386	6503	0,150	4087	1838
0,111	7526	6618	0,151	4285	1990
0,112	7667	6734	0,152	4484	2143
0,113	7809	6851	0,153	4684	2296
0,114	7953	6969	0,154	4886	2451
0,115	8098	7088	0,155	5090	2607
0,116	8245	7208	0,156	5295	2763
0,117	8393	7329	0,157	5502	2921
0,118	8542	7451	0,158	5710	3079
0,119	8693	7574	0,159	5920	3238
0,120	0,0008845	0,0007698	0,160	0,0016131	0,0013398

TAFEL III.

x oder z	ξ	ζ	x oder z	ξ	ζ
0,160	0,0016131	0,0013398	0,200	0,0025877	0,0020507
0,161	6344	3559	0,201	6154	0702
0,162	6559	3721	0,202	6433	0897
0,163	6775	3883	0,203	6713	1094
0,164	6992	4047	0,204	6995	1292
0,165	7211	4211	0,205	7278	1490
0,166	7432	4377	0,206	7564	1689
0,167	7654	4543	0,207	7851	1889
0,168	7878	4710	0,208	8139	2090
0,169	8103	4878	0,209	8429	2291
0,170	8330	5047	0,210	8722	2494
0,171	8558	5216	0,211	9015	2697
0,172	8788	5387	0,212	9311	2901
0,173	9020	5558	0,213	9608	3106
0,174	9253	5730	0,214	0,0029907	3311
0,175	9487	5903	0,215	0,0030207	3518
0,176	9724	6077	0,216	0509	3725
0,177	0,0019961	6252	0,217	0814	3932
0,178	0,0020201	6428	0,218	1119	4142
0,179	0442	6604	0,219	1427	4352
0,180	0685	6782	0,220	1736	4562
0,181	0929	6960	0,221	2047	4774
0,182	1175	7139	0,222	2359	4986
0,183	1422	7319	0,223	2674	5199
0,184	1671	7500	0,224	2990	5412
0,185	1922	7681	0,225	3308	5627
0,186	2174	7864	0,226	3627	5842
0,187	2428	8047	0,227	3949	6058
0,188	2683	8231	0,228	4272	6275
0,189	2941	8416	0,229	4597	6493
0,190	3199	8602	0,230	4924	6711
0,191	3460	8789	0,231	5252	6931
0,192	3722	8976	0,232	5582	7151
0,193	3985	9165	0,233	5914	7371
0,194	4251	9354	0,234	6248	7593
0,195	4518	9544	0,235	6584	7816
0,196	4786	9735	0,236	6921	8039
0,197	5056	0,0019926	0,237	7260	8263
0,198	5328	0,0020119	0,238	7601	8487
0,199	5602	0312	0,239	7944	8713
0,200	0,0025877	0,0020507	0,240	0,0038289	0,0028939

x oder z	ξ	ζ	x oder z	ξ	ζ
0,240	0,0038289	0,0028939	0,270	0,0049485	0,0036087
0,241	8635	9166	0,271	0,0049888	6337
0,242	8983	9394	0,272	0,0050292	6587
0,243	9333	9623	0,273	0699	6839
0,244	0,0039685	0,0029852	0,274	1107	7091
0,245	0,0040039	0,0030083	0,275	1517	7344
0,246	0394	0314	0,276	1930	7598
0,247	0752	0545	0,277	2344	7852
0,248	1111	0778	0,278	2760	8107
0,249	1472	1001	0,279	3178	8363
0,250	1835	1245	0,280	3598	8620
0,251	2199	1480	0,281	4020	8877
0,252	2566	1716	0,282	4444	9135
0,253	2934	1952	0,283	4870	9394
0,254	3305	2189	0,284	5298	9654
0,255	3677	2427	0,285	5728	0,0039914
0,256	4051	2666	0,286	6160	0,0040175
0,257	4427	2905	0,287	6594	0437
0,258	4804	3146	0,288	7030	0700
0,259	5184	3387	0,289	7468	0963
0,260	5566	3628	0,290	7908	1227
0,261	5949	3871	0,291	8350	1491
0,262	6334	4114	0,292	8795	1757
0,263	6721	4358	0,293	9241	2023
0,264	7111	4603	0,294	0,0059689	2290
0,265	7502	4848	0,295	0,0060139	2557
0,266	7894	5094	0,296	0591	2826
0,267	8289	5341	0,297	1045	3095
0,268	8686	5589	0,298	1502	3364
0,269	9085	5838	0,299	1960	3635
0,270	0,0049485	0,0036087	0,300	0,0062421	0,0043906

Anhang.

I.

Schreiben des Herrn Hofraths Gauss, Directors der Göttinger Sternwarte,
an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten. (Nr. 474.)
Göttingen 1843. April 1.

Um aus Elementen für eine gegebene Zeit einen Ort zu berechnen, brauche ich zur Berechnung der Anomalie gern die Burckhardt'sche Tafel, die aber nur bis $163^{\circ} 45'$ geht, und daher für den gegenwärtigen Stand des Cometen nach Herrn Galle's Elementen unzureichend wird. Barker's Tafel reicht zwar überall aus, wird aber bei grossen Anomalien wegen des beschwerlichen Interpolirens sehr unbequem. In solchen Fällen pflege ich ein besonderes Verfahren anzuwenden, dessen Mittheilung Ihnen vielleicht angenehm sein wird. Ist M die Zahl mit der (oder für grössere Werthe mit deren Logarithmen) man in die Barker'sche Tafel eingehen müsste, also $M = \frac{\text{Zwischenszeit}}{n \frac{1}{2}}$, wo $\log n = 0,0398723$, so setze ich $\log \frac{MM}{16875} = 3P$,

und suche in meiner kleinen Logarithmentafel, A und B in der dortigen Bedeutung genommen, der Gleichung $3A + 2B = 3P$ Genüge zu leisten, was immer, wenn P gross ist, sehr schnell bewirkt wird. Ist dann a die zum Logarithmen A gehörige Zahl, so wird, die Anomalie $= v$ gesetzt,

$$\text{tang } \frac{1}{2} v = V(3a) \text{ oder } \log \text{tang } \frac{1}{2} v = \frac{1}{2}(A + \log 3).$$

Auch der Logarithme des radius vector wird dann äusserst bequem berechnet, indem man mit $A + \log 3$ wieder in die erste Columnne eingeht, oder $A + \log 3 = A'$ und die dazu gehörige Grösse in der zweiten Columnne $= B'$ folgt, wodurch sogleich der Logarithme des radius vector $= A' + B' + \log q$ wird.

Die indirecte Auflösung jener Gleichung geschieht, wenigstens für die ersten Versuche, etwas bequemer und fast à vue in der Form $C = P + \frac{1}{2} B$; man kann zuerst P in der dritten Columnne aufsuchen, oder $P = C'$ und die dazu gehörige Grösse in der zweiten Columnne $= B'$ setzen, dann $P + \frac{1}{2} B' = C''$ und dazu aus der Tafel die Grösse der zweiten Columnne $= B''$, dann (wo nöthig) $P + \frac{1}{2} B'' = C'''$ und dazu gehörig B''' nehmen u. s. w., welche Rechnung sehr schnell zum Stillstand kommt. Will man sich mit der Genauigkeit, welche fünfzigfige Logarithmen geben, nicht begnügen, so kann man die Matthiessen'sche Tafel (welche ich sonst wegen der unzeitigen Oekonomie, womit sie ganz unnöthigerweise gedruckt ist, nicht gern gebrauche) hier mit Vortheil zu Hülfe nehmen, was ich aber lieber erst dann thue, wenn ich durch die kleinere Tafel die beiden Stellen, zwischen welchen der Definitivwerth von A fällt, schon bestimmt habe, und dann wende ich lieber die Gleichung in ihrer ursprünglichen Form $3A + 2B = 3P$ an.

Soll z. B. die Anomalie für Februar 48,33333, oder für die Zeit nach der Sonnennähe $20^{\circ} 87663$ bestimmt werden, so ist nach Galle's Elementen

$$\begin{array}{r}
 q^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots 7,080\ 9490 \\
 n\sqrt{16875} \dots\dots\dots 2,153\ 4942 \\
 \text{Const. Logarithme} = 9,234\ 4432
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 20,876\ 63 \dots\dots 1,319\ 6604 \\
 \underline{9,234\ 4432} \\
 2,085\ 2172 \\
 \text{Also } 3P = 4,170\ 4344 \\
 P = 1,390\ 1448
 \end{array}$$

Mit den kleinen Tafeln findet sich daraus

$$\begin{array}{r}
 B = 0,018\ 06 \\
 B' = 0,017\ 81
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 C' = 1,396\ 16 \\
 C'' = 1,396\ 08
 \end{array}$$

womit die Rechnung schon steht, und $A = 1,378\ 27$ wird. Matthiessen's Tafel giebt genauer $A = 1,378\ 2739$. Die weitere Rechnung wird dann

$$\begin{array}{r}
 A = 1,378\ 2739 \\
 3 \dots\dots\dots 0,477\ 1213 \\
 \underline{1,855\ 3952} \\
 0,927\ 6976 = \log \tan 83^{\circ} 15' 49'' 53 \\
 \text{und die wahre Anomalie} = 166\ 31\ 39,06 \\
 \text{Ferner gehört zu } A' = 1,855\ 3952 \\
 B' = 0,006\ 0170 \\
 q \dots\dots 8,053\ 9660
 \end{array}$$

$$\text{Logarithme des radius vector} = 9,915\ 3782$$

Man sieht übrigens, dass diese Methode nichts weiter ist, als eine indirecte Auflösung der bekannten cubischen Gleichung zwischen der Tangente der halben Anomalie und der Sectorfläche und zugleich, dass meine, oder für schärfere Rechnung die Matthiessen'sche Logarithmentafel auf ganz ähnliche Weise zu einer sehr bequemen Auffindung aller reellen Wurzeln jeder algebraischen Gleichung, die nicht mehr als drei effective Glieder hat, benutzt werden kann, wie ich in Beziehung auf die quadratische Gleichung unlängst bei der letzten Ausgabe der Vega'schen Logarithmentafel schon gezeigt habe.

II.

Tafel aus dem ersten Bande der Pariser Annalen.

Statt der sehr umfangreichen Barker'schen Tafel und der dazu erforderlichen Hilfstafel, wenn v sich 180° nähert, ist hier die im ersten Bande der Annalen der kaiserlichen Sternwarte zu Paris befindliche Tafel zum Abdrucke gebracht.

Bezeichnet $q = \frac{1}{3}p$ = den Perihelabstand in der Parabel, v = die wahre Anomalie, t = die Zeit vor oder seit dem Periheldurchgange, μ = die (in der Regel = 0 zu setzende) Masse des in der Parabel sich bewegenden Himmelskörpers, $\log k = 8,085\ 0664\ 436$, so ist $T = t\sqrt{\frac{1+\mu}{q^3}}$, und man hat $\tan \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\tan \frac{1}{2}v^3 = kT$; $T = \frac{1}{3k} (3 \tan \frac{1}{2}v + \tan \frac{1}{2}v^3)$.

Setzt man den Werth für k in diese letzte Gleichung, so wird

$T = 27,403\ 89544 (3 \tan \frac{1}{2}v + \tan \frac{1}{2}v^3) = 1,0961\ 55816 (75 \tan \frac{1}{2}v + 25 \tan \frac{1}{2}v^3)$, und daher, wenn man $k' = 0,9122\ 79061$ setzt, $75 \tan \frac{1}{2}v + 25 \tan \frac{1}{2}v^3 = k'T$; wobei $\log k' = 9,9601\ 277069$.

Die Barker'sche Tafel giebt $k'T$ für das Argument v . Die mittlere tägliche Bewegung oder die in der Barker'schen Tafel mit M bezeichnete Grösse wird durch die Pariser Tafel für einen beliebigen Werth von v erhalten, wenn man den entsprechenden Werth von T mit k

multiplicirt. Die Tafel*) giebt v , indem die Werthe für T als Argument dienen, und die wahre Anomalie, welche diesem Argumente entspricht, wird gefunden durch die Formel

$$v = v_0 + A_1(T - T_0) + A_2(T - T_0)^2 + A_3(T - T_0)^3 + \text{etc.}$$

Hier ist T_0 ein specieller Werth, welcher sich unter den Argumenten der Tafel findet, und welchen man so wählt, dass die Differenz $T - T_0$ möglichst klein wird. Die für A_1, A_2, A_3 geltenden Vorzeichen sind den Logarithmen dieser Grössen beigemittelt.

Zur Erläuterung wählen wir dasselbe Beispiel, welches Herr Professor Encke in seiner Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung „Ueber die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen“ pag. 241 gegeben hat. Für den grossen Cometen von 1843 hat man nach Santini's Parabel $\log q = 7,9027200$, woraus $\log m = 3,1060477$. Man sucht die wahre Anomalie für März 20. 8^h mittlere Berliner Zeit oder 7^h 15^m 46^s Pariser Zeit. Hier ist also, da die Zeit des Perihels auf Februar 27. 6^h 19^m 59^s mittlere Pariser Zeit fällt,

$$t = 21,03874, \text{ folglich } \log M = \log mt = 4,4290674.$$

Geht man hiermit in die Barker'sche Tafel ein, so findet man mit Rücksicht auf zweite Differenzen

$$v = 168^\circ 44' 24'' 23$$

Benutzt man die Halfatafel, so wird

$$\log \sin w = \frac{1}{2}(\log 200 - \log M) = 2,2906542$$

$$\text{woraus } w = 168^\circ 44' 20'' 44$$

$$+ \delta = \frac{3,78}{3,78}$$

$$v = 168^\circ 44' 24,22$$

Nach der hier mitgetheilten Tafel wird mit $t = 21,03874$ und $\log q = 7,9027200$, $T = 29440,13$; die Differenz von $T_0 = 30000$ ist also $T - T_0 = -559,87$

$$\text{mithin } v_0 = 168^\circ 48' 41'' 17$$

$$A_1(T - T_0) = -4\ 13\ 71$$

$$A_2(T - T_0)^2 = -\quad\quad 3\ 19$$

$$A_3(T - T_0)^3 = -\quad\quad 0\ 05$$

$$v = 168^\circ 44' 24'' 22$$

Wenn T über die Grenze der Tafel ($T_0 = 40000$) hinausgeht, so kann man die Formel brauchen $v = 180^\circ - [6,0947259] \left(\frac{1}{T}\right)^4 - [6,87718] \left(\frac{1}{T}\right)^5 - [7,313] \left(\frac{1}{T}\right)^6 \text{ etc.}$

wobei die in Klammern stehenden Ziffern Logarithmen sind.

Ist v gegeben, und man verlangt T zu finden, so hat man

$$T - T_0 = \frac{v - v_0}{A_1} - \frac{A_2}{A_1} (T - T_0)^2 - \frac{A_3}{A_1} (T - T_0)^3$$

Behuf einer ersten Annäherung kann man die von dem Quadrate und dem Cubus von $T - T_0$ abhängenden Glieder vernachlässigen, und der so für $T - T_0$ gefundene Werth wird so lange verbessert, bis er der Gleichung genau Genüge thut. Wenn v über 169° herausgeht, so nimmt man statt der Tafel die Formel:

$$T = [1,9149336] \tan \frac{1}{2} v + [1,4378123] \tan \frac{1}{2} v^3.$$

Aber auch bei einem kleineren v kann man, falls man es bequemer hält, sich dieser Formel bedienen.

Wählt man bei dem im Art. 39 der Theoria motus gelehrteten Verfahren, die hier abgedruckte Tafel statt der Barker'schen, so bezeichnet w den Werth für v , welcher dem Argumente $T = \frac{at}{k^2 B}$ entspricht. Will man in dem, im Art. 41 abgehandeltem Falle diese Tafel zur Bestimmung von t statt der Barker'schen Tafel anwenden, so geschieht dies dadurch, dass man den, dem w entsprechenden Werth für T mit $\frac{k^2 B}{a}$ multiplicirt.

*) Die Burekhardt'sche Tafel, in Bowditch's Anhang zum dritten Bande der „Mécanique Céleste“ ist ähnlich, nur dass dort $\log T$, statt T zum Argumente dient.

T_n	v_n	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
0	0° 0' 0",00	+ 3,700 5216	- 0,00000	- 9,695
2	2 47 11,83	3,700 0079	0,47160	9,691
4	5 34 0,00	3,698 4710	0,76930	9,681
6	8 20 1,19	3,695 9236	0,93987	9,664
8	11 4 52,82	3,692 3863	1,05702	9,641
10	13 48 13,31	+ 3,687 8872	- 1,14430	- 9,610
12	16 29 42,39	3,682 4613	1,21171	9,571
14	19 9 1,36	3,676 1493	1,26497	9,525
16	21 45 53,23	3,668 9972	1,30744	9,470
18	24 20 2,89	3,661 0547	1,34135	9,405
20	26 51 17,15	+ 3,652 3748	- 1,36825	- 9,329
22	29 19 24,78	3,643 0121	1,39829	9,239
24	31 44 16,52	3,633 0224	1,40535	9,130
26	34 5 44,97	3,622 4621	1,41714	8,994
28	36 23 44,51	3,611 3863	1,42520	8,814
30	38 38 11,23	+ 3,599 8496	- 1,43003	- 8,538
32	40 49 2,74	3,587 9044	1,43201	- 7,847
34	42 56 18,02	3,575 6011	1,43149	+ 8,237
36	44 59 57,33	3,562 9877	1,42877	8,585
38	47 0 2,00	3,550 1091	1,42410	8,753
40	48 56 34,33	+ 3,537 0077	- 1,41772	+ 8,857
42	50 49 37,39	3,523 7227	1,40983	8,928
44	52 39 14,95	3,510 2905	1,40060	8,978
46	54 25 31,32	3,496 7444	1,39020	9,013
48	56 8 31,24	3,483 1149	1,37878	9,038
50	57 48 19,82	+ 3,469 4297	- 1,36645	+ 9,056
52	59 25 2,41	3,455 7140	1,35333	9,067
54	60 58 44,53	3,441 9903	1,33952	9,073
56	62 29 31,82	3,428 2790	1,32512	9,076
58	63 57 29,99	3,414 5981	1,31021	9,075
60	65 22 44,74	+ 3,400 9637	- 1,29486	+ 9,071
64	68 5 26,60	3,373 8900	1,26308	9,056
68	70 38 21,86	3,347 1520	1,23025	9,035
72	73 2 13,17	3,320 8214	1,19672	9,008
76	75 17 40,91	3,294 9510	1,16277	8,978
80	77 25 22,94	+ 3,269 5785	- 1,12863	+ 8,945
84	79 25 54,44	3,244 7291	1,09447	8,910
88	81 19 47,97	3,220 4185	1,06044	8,874
92	83 7 33,52	3,196 6546	1,02665	8,837
96	84 49 38,62	3,173 4393	0,99319	8,798

T_0	v_0	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
100	86° 26' 28'' 52	+ 3,150 7694	- 0,960 12	+ 8,760
104	87 58 26,32	3,128 6388	0,92749	8,721
108	89 25 53,18	3,107 0382	0,89534	8,682
112	90 49 8,43	3,085 9565	0,86370	8,643
116	92 8 29,76	3,065 3811	0,83257	8,605
120	93 24 13,33	+ 3,045 2984	- 0,80199	+ 8,567
124	94 36 33,98	3,025 6943	0,77194	8,529
128	95 45 45,25	3,006 5544	0,74244	8,491
132	96 51 59,60	2,987 8638	0,71347	8,454
136	97 55 28,43	+ 2,969 6079	- 0,68505	+ 8,418
140	98 56 22,24	2,951 7723	0,65716	8,382
144	99 54 50,68	2,934 3427	0,62979	8,346
148	100 51 2,62	2,917 3052	0,60293	8,311
152	101 45 6,25	2,900 6462	0,57658	8,276
156	102 37 9,12	+ 2,884 3526	- 0,55071	+ 8,242
160	103 27 18,23	2,868 4116	0,52534	8,209
164	104 15 40,03	2,852 8110	0,50043	8,176
168	105 2 20,49	2,837 5388	0,47598	8,143
172	105 47 25,18	2,822 5838	0,45198	8,111
176	106 30 59,23	+ 2,807 9349	- 0,42841	+ 8,080
180	107 13 7,45	2,793 5817	0,40526	8,049
184	107 53 54,28	2,779 5141	0,38253	8,018
188	108 33 23,87	2,765 7223	0,36020	7,988
192	109 11 40,10	2,752 1971	0,33826	7,959
196	109 48 46,58	+ 2,738 9297	- 0,31670	+ 7,930
200	110 24 46,69	2,725 9114	0,29551	7,901
210	111 50 16,87	2,694 4032	0,24407	7,831
220	113 9 55,67	2,664 2838	0,19472	7,764
230	114 24 20,89	2,635 4467	0,14732	7,700
240	115 34 4,97	+ 2,607 7961	- 0,10174	+ 7,637
250	116 39 35,94	2,581 2455	0,05786	7,577
260	117 41 18,16	2,555 7170	0,01556	7,519
270	118 39 32,86	2,531 1401	9,97476	7,463
280	119 34 38,67	2,507 4507	9,93535	7,409
290	120 26 51,98	+ 2,484 5910	- 9,89725	+ 7,356
300	121 16 27,30	2,462 5078	9,86038	7,305
310	122 3 37,49	2,441 1532	9,82467	7,256
320	122 48 34,01	2,420 4831	9,79006	7,208
330	123 31 27,11	2,400 4569	9,75648	7,161

T_n	v_n	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
340	124° 12' 25" 97	+ 2,381 0379	- 9,72387	+ 7,116
350	124 51 38,87	2,362 1918	9,69219	7,072
360	125 29 13,25	2,343 8873	9,66139	7,029
370	126 5 15,87	2,326 0956	9,63142	6,987
380	126 39 52,85	2,308 7898	9,60224	6,947
390	127 13 9,75	+ 2,291 9450	- 9,57381	+ 6,907
400	127 45 11,66	2,275 5384	9,54610	6,868
420	128 45 48,63	2,243 9555	9,49269	6,794
440	129 42 16,43	2,213 8871	9,44176	6,723
460	130 35 2,66	2,185 1991	9,39310	6,655
480	131 24 30,82	+ 2,157 7741	- 9,34654	+ 6,589
500	132 11 1,09	2,131 5086	9,30188	6,527
520	132 54 50,84	2,106 3114	9,25901	6,467
540	133 36 15,19	2,082 1011	9,21777	6,409
560	134 15 27,33	+ 2,058 8051	- 9,17805	+ 6,353
580	134 52 38,80	2,036 3588	9,13976	6,299
600	135 27 59,81	2,014 7037	9,10278	6,247
640	136 33 45,52	2,973 5615	9,03246	6,148
680	137 33 45,39	1,935 0140	8,96649	6,055
720	138 28 48,27	+ 1,898 7593	- 8,90438	+ 5,968
760	139 19 33,81	1,864 5446	8,84571	5,885
800	140 6 34,57	1,832 1564	8,79012	5,807
850	141 0 45,22	1,793 9648	8,72451	5,714
900	141 50 30,05	1,758 0440	8,66275	5,627
950	142 36 24,37	+ 1,724 1428	- 8,60441	+ 5,544
1000	143 18 57,20	1,692 0492	8,54915	5,466
1050	143 58 32,66	1,661 5826	8,49665	5,392
1100	144 35 30,95	1,632 5881	8,44666	5,321
1150	145 10 9,20	1,604 9315	8,39896	5,254
1200	145 42 41,98	+ 1,578 4963	- 8,35333	+ 5,189
1250	146 13 21,82	1,553 1804	8,30962	5,127
1300	146 42 19,55	1,528 8937	8,26767	5,068
1350	147 9 44,57	1,505 5568	8,22735	5,011
1400	147 35 45,11	1,483 0989	8,18853	4,956
1450	148 0 28,40	+ 1,461 4567	- 8,15110	+ 4,903
1500	148 24 0,83	1,440 5738	8,11498	4,851
1600	149 7 55,10	1,400 8865	8,04631	4,754
1700	149 48 6,25	1,363 6849	7,98190	4,663
1800	150 25 5,10	1,328 6785	7,92126	4,576

T_0	v_0	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
1900	150° 59' 16",75	+ 1,295 6243	- 7,86398	+ 4,495
2000	151 31 1,89	1,264 3177	7,80971	4,418
2100	152 0 37,76	1,234 5845	7,75814	4,345
2200	152 28 18,85	1,206 2750	7,70993	4,275
2300	152 54 17,45	1,179 2601	7,66216	4,208
2400	153 18 44,05	+ 1,153 4272	- 7,61732	+ 4,145
2500	153 41 47,70	1,128 6779	7,57435	4,084
2600	154 3 36,21	1,104 9254	7,53310	4,025
2700	154 24 16,39	1,082 0930	7,49344	3,969
2800	154 43 54,21	1,060 1125	7,45526	3,914
2900	155 2 34,93	+ 1,038 9230	- 7,41844	+ 3,862
3000	155 20 23,19	1,018 4698	7,38289	3,811
3200	155 53 38,39	0,979 5803	7,31529	3,715
3400	156 24 7,80	0,943 1040	7,25186	3,625
3600	156 52 14,00	0,908 7603	7,19213	3,540
3800	157 18 15,42	+ 0,876 3145	- 7,13568	+ 3,459
4000	157 42 27,29	0,845 5688	7,08218	3,383
4200	158 5 2,33	0,816 3545	7,03133	3,311
4400	158 26 11,25	0,788 5269	6,98289	3,242
4600	158 46 3,15	+ 0,761 9607	- 6,93664	+ 3,176
4800	159 4 45,83	0,736 5469	6,89238	3,113
5000	159 22 25,99	0,712 1902	6,84996	3,053
5200	159 39 9,45	0,688 8063	6,80923	2,995
5600	160 10 6,00	0,644 6674	6,73234	2,885
6000	160 38 9,17	+ 0,603 6264	- 6,66082	+ 2,783
6400	161 3 45,36	0,565 2780	6,59398	2,688
6800	161 27 15,57	0,529 2915	6,53125	2,599
7200	161 48 56,78	0,495 3934	6,47215	2,514
7600	162 9 2,89	0,463 3554	6,41629	2,435
8000	162 27 45,39	+ 0,432 9843	- 6,36332	+ 2,359
8400	162 45 13,90	0,404 1157	6,31297	2,287
8800	163 1 36,52	0,376 6081	6,26499	2,219
9200	163 17 0,16	0,350 3393	6,21916	2,154
9600	163 31 30,72	0,325 2029	6,17531	2,091
10000	163 45 13,32	+ 0,301 1054	- 6,13326	+ 2,031
10500	164 1 20,80	0,272 3199	6,08303	1,959
11000	164 16 27,66	0,244 8894	6,03516	1,891
11500	164 30 40,23	0,218 6921	5,98944	1,826
12000	164 44 3,94	0,193 6223	5,94568	1,764

T_0	v_0	$\log A_1$	$\log A_2$	$\log A_3$
13000	165° 8' 42" 90	+ 0,146 5042	- 5,86343	+ 1,646
14000	165 30 55,26	0,102 9147	5,78733	1,538
15000	165 51 4,63	0,062 3627	5,71652	1,437
16000	166 9 29,58	0,024 4528	5,65032	1,342
17000	166 26 24,88	9,988 8624	5,58817	1,254
18000	166 42 2,53	+ 9,955 3241	- 5,52959	+ 1,170
19200	166 59 18,90	9,917 4751	5,46348	1,076
20400	167 15 11,32	9,881 9393	5,40141	0,987
21600	167 29 51,00	9,848 4507	5,34290	0,904
22800	167 43 27,11	9,816 7866	5,28758	0,825
24000	167 56 7,28	+ 9,786 7585	- 5,23512	+ 0,750
26000	168 15 26,77	9,739 9215	5,15328	0,633
28000	168 32 51,95	9,696 5794	5,07755	0,525
30000	168 48 41,17	9,656 2474	5,00706	0,424
32000	169 3 8,84	9,618 5347	4,94116	0,330
34000	169 16 26,46	+ 9,583 1221	- 4,87926	+ 0,242
36000	169 28 43,36	9,549 7452	4,82093	0,159
38000	169 40 7,19	9,518 1828	4,76573	0,080
40000	169 50 44,28	9,488 2481	4,71346	0,005

III.

Schreiben des Herrn Marth, Observators an der Sternwarte zu Durham, an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten (Nr. 1016).

Das Gauss'sche Verfahren, die Ortscoordinaten in einer Ellipse von starker Excentricität zu bestimmen, lässt bekanntlich nichts zu wünschen übrig. Indessen ist die damit verbundene Rechnung nicht ganz angenehm und in Folge davon wird sie, wenn ich mich nicht irre, von einigen Astronomen selbst in solchen Fällen vermieden, in welchen die gewöhnlicheren Methoden Resultate von zweifelhafter Zuverlässigkeit ergeben. Die Rechnung lässt sich aber nicht unwesentlich erleichtern, wenn man die Mühe, die darin vorkommenden Grössen $(1 - \frac{1}{2}A + C)^{-1}$ und $\frac{1 - \frac{1}{2}A + C}{1 - \frac{1}{2}A + C}$ (in den Zeichen der Theor. mot.) in diesen Formen jedesmal speciell zu berechnen, durch eine einfache Hülfstafel beseitigt. Denn so unbedeutend diese Mühe in einem einzelnen Falle ist, so wird sie, wenn man eine Reihe von Werthen zu bestimmen hat, wegen der von B abhängigen, wiederholten Näherungen und der damit wiederkehrenden Interpolationen, doch etwas lästig, verursacht zum wenigsten völlig vermeidbaren Zeitverlust. Nicolai hat vor langen Jahren eine kleine specielle Hülfstafel bei Gelegenheit

seiner Rechnungen über den Olbers'schen Cometen bekannt gemacht*) und zugleich die Berechnung einer allgemeinen Tafel in Aussicht gestellt; da indessen dies Vorhaben weder von seiner Seite, noch in einer der neuern Cometenmonographien meines Wissens zur Ausführung gekommen ist, so habe ich gelegentlich Veranlassung genommen, eine solche allgemeine Tafel in gehöriger Vollständigkeit zu entwerfen und erlaube mir, dieselbe hier mitzutheilen, in der Meinung, dass sie vielleicht auch Anderen mitunter bei Cometenrechnungen von Nutzen sein kann. Sie giebt zum Argument $2A$ die Werthe der Grössen $\log \sigma = \log (1 + C - \frac{1}{2}A)^{-1}$ und $\log v = \log \sqrt{\frac{1+C+\frac{1}{2}A}{1+C-\frac{1}{2}A}}$; auch ist, um alles Nöthige beisammen zu haben, $\log B$ aus der Theor. mot. hinzugefügt. Man hat damit also

$$\begin{aligned} \tan \frac{v}{2} &= \gamma \sigma \tan \frac{w}{2} \text{ und} \\ r &= \frac{q}{(r \cos \frac{v}{2})^3} \end{aligned}$$

oder allgemeiner, um r nicht durch $\cos \frac{v}{2}$ zu finden, falls v im zweiten Quadranten liegt,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r}{q}} \cdot r \sin \frac{v}{2} &= \gamma \sigma \tan \frac{w}{2} \\ \sqrt{\frac{r}{q}} \cdot v \cos \frac{v}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Die cubische Gleichung, aus welcher w zu bestimmen ist, schreibt Gauss in der Form $75 \tan \frac{1}{2} w + 25 \tan \frac{1}{4} w^3 = \frac{\alpha t}{\beta}$, um sie mit Hülfe der Barker'schen Tafel auflösen zu können.

Da man indessen den Winkel w selbst nicht nöthig hat, sondern nur $\tan \frac{w}{2}$ zu kennen braucht, so scheint es mir vortheilhafter, die Gleichung indirect aufzulösen und dazu dasselbe Verfahren allgemein anzuwenden, welches Gauss bei Gelegenheit des März-Cometen von 1843 für grosse Anomalien als zweckmässig empfiehlt.**) Bei der bequemen Einrichtung der Zösch'schen Tafel macht sich die Rechnung sehr einfach, wenn man der Mühe der ersten Versuche durch eine kleine Hülftafel überhoben wird.

Die Gleichung $x^2 + a.c - b = 0$, in welcher a und auch b positiv sind, indem man bei negativem b , als Unbekannte $-x$ statt x einführen und dann die Vorzeichen umkehren kann, lässt sich nämlich schreiben

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x^2}}\right) \left(\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ oder auch} \\ \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{a}}\right) \left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

oder, wenn man statt $1 + \frac{1}{x}$ das Zeichen $\{z\}$ einführt, so dass also $\log \{z\}$ den in der Tafel der Additionslogarithmen zum Argument $\log x$ gehörenden Tafelwerth bedeutet,

$$\begin{aligned} \left\{\frac{a}{x^2}\right\} \left(\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ oder} \\ \left\{\frac{x^2}{a}\right\} \left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

woraus $\log \frac{a}{x^2}$ und $\log \frac{x^2}{a}$ und somit auch x leicht gefunden wird.

*) Lindennau und Bohnenberger, Zeitschrift für Astronomie, Bd. 1, Seite 317.

**) Astronomische Nachrichten, Nr. 474 (siehe oben Anhang Seite 21).

Man hat die erste oder zweite Form der Gleichung anzuwenden, je nachdem $\frac{b}{a^3}$ kleiner oder grösser als 2 ist.

Die zweite Hilfstafel, die ich beilege, erspart alles überflüssige Suchen, indem man daraus den Werth von $\log z$ (auf 4 oder am Schluss auf 3 Stellen) entnehmen kann, der zum Argument $\log \frac{b}{a^3}$ in der ersten oder dritten Spalte gehört. Zu diesem $\log z$ und ebenso zu dem nächsten Tafelargument der Additionslogarithmen berechnet man dann die genauen Werthe von $\log \{z\} z^{-1}$ oder resp. $\log \{z\} z^{\frac{1}{2}}$ und erhält damit durch eine einfache Interpolation den scharfen, zu $\log \frac{b}{a^3}$ gehörigen Werth von $\log z$.

Das altbekannte directe Verfahren, die cubische Gleichung goniometrisch aufzulösen (welches Herr Professor Grunert, wie ich beiläufig anmerke, zum Gegenstand eines besonderen Aufsatzes in den Astr. Nachr. gemacht hat¹⁾), ist wohl nur in solchen Fällen nicht unvortheilhaft, in welchen die Benutzung der Barker'schen Tafel weitläufig wird und in welchen man es somit in einer Form anwenden darf, die das sonst nützliche neue Aufschlagen der trigonometrischen Tafeln erspart, nämlich in der Form $x^3 + ax - b = 0$

$$\frac{2}{b} \left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \tan \varphi$$

$$\sqrt[3]{\tan \frac{\varphi}{2}} = \sin \psi$$

$$x = \frac{\cos \psi^3}{\sin \psi} \sqrt{\frac{a}{3}}$$

Verliert bei kleinem $\frac{b}{a}$ der Uebergang von $\sin \psi$ auf $\cos \psi^3$ zu sehr an Sicherheit, so ist die Anwendung der Barker'schen Tafel offenbar wieder zweckmässiger. Das indirecte Verfahren vereinigt bei grosser Bequemlichkeit, mit dem Vorzuge immer mit Leichtigkeit anwendbar zu sein, auch den, immer möglichst scharfe Resultate zu geben und ich halte es daher, wenigstens für den gegenwärtigen Zweck für das vortheilhafteste.

Die vollständigen Rechnungsvorschriften, denen ich folge, um in dem der Sonne näheren Theile einer elliptischen Cometenbahn die Ortscoordinaten mit Genauigkeit zu bestimmen, gestalten sich nun folgendermassen:

Es sei a die halbe grosse Axe der Bahn, q die Periheldistanz, e die Excentricität, ϵ die Abweichung der Excentricität von der Einheit, also $\frac{q}{a} = 1 - e = \epsilon$; es sei ferner v die wahre Anomalie, r der radius vector, τ die in mittleren Sonnentagen ausgedrückte, seit dem Periheldurchgange verlossene Zeit — so hat man zunächst die Constanten α' , β' , γ' zu berechnen, nach den Formeln

$$\beta' = \frac{3\epsilon}{1 - \frac{9}{10}\epsilon}$$

$$\alpha' = \frac{k}{V^2} \cdot \frac{1}{q\sqrt{\alpha'\beta'}} = \frac{k}{V_{60}} \cdot V \frac{1+9\epsilon}{q^2}$$

$$\gamma' = \sqrt{\frac{\beta'}{\epsilon \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}}} = \sqrt{15 \cdot \frac{1+\epsilon}{1+9\epsilon}}$$

$$\log \frac{k}{V^2} = 8,085\,0664 \cdot 5$$

$$\log \frac{k}{V_{60}} = 7,346\,5058 \cdot 3$$

¹⁾ Astronomische Nachrichten Nr. 805.

$\log \frac{1}{1 - \frac{9}{10}\epsilon}$ kann man mit dem Argument $\log \frac{10}{9\epsilon}$ und

$\log \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ mit $\log \frac{2}{1}$ unmittelbar aus der Tafel der Subtractions-

logarithmen nehmen. — Ich benutze die doppelten Formen, um bei dem Mangel einer strengen Controlle mehr gesichert zu sein. — Bezeichnet nun B_0 einen Näherungswert von B ($B_0 = 1$, wenn ganz unbekannt), so sucht man, wenn

$$1) \frac{\alpha' r}{B_0} < 2$$

$\log z$ auf indirectem Wege aus der Gleichung

$$\{z\} z^{-1} = \frac{\alpha' r}{B_0} \text{ oder}$$

$\log \{z\} - \frac{1}{2} \log z = \log \frac{\alpha' r}{B_0}$, wobei man die vorläufigen Versuche erspart, indem

man mit $\log \frac{\alpha' r}{B_0}$ in die erste Spalte der kleinen Hülfstafel eingeht und den zugehörigen Werth von $\log z$ aus der zweiten Spalte nimmt. Ist mit Hülfe der Zech'schen Tafel $\log z$ genauer gefunden, so nimmt man mit

$$2 A = \frac{\beta' r}{z}$$

aus der Ellipsentafel $\log B$, berechnet $\log z$ von Neuem aus der Gleichung $\log \{z\} - \frac{1}{2} \log z = \log \frac{\alpha' r}{B}$ und wiederholt die Operation, bis zwei successive Werthe übereinstimmen. Ist $\log z$ in aller Schärfe gefunden, so nimmt man mit dem Argument

$$2 A = \frac{\beta' r}{z}$$

aus der Ellipsentafel $\log \sigma$ und $\log \nu$ und hat dann

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \sin \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{r \sigma}{z}}$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \cos \frac{\nu}{2} = 1,$$

wodurch also $\frac{\nu}{2}$ und $\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu$, mithin auch r , bekannt werden. Ist

2) $\frac{\alpha' r}{B_0} > 2$, so behandelt man in ganz analoger Weise die Gleichungen

$$\log \{z\} + \log z + \frac{1}{2} \log z = \log \frac{\alpha' r}{B}$$

$$2 A = \beta' z$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \sin \frac{\nu}{2} = \gamma' \sigma \sqrt{z}$$

$$\sqrt{\frac{r}{q}} \cdot \nu \cos \frac{\nu}{2} = 1.$$

Hat man eine Reihe von Oertern in hinlänglich kleinen Intervallen zu bestimmen, so fallen natürlich alle Weitläufigkeiten in den Näherungen weg und die Rechnung wird ganz leicht und angenehm.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass ich zu grösserer Sicherung der eingeschalteten Werthe, für einen Theil der Tafel, C und $\log B$ neu berechnet, übrigens aber nur 8 Decimalen angewandt habe, so dass die letzte Ziffer der Tafelwerthe hin und wieder um eine Einheit unsicherer sein wird. Der daraus entspringende Fehler kommt natürlich nicht in Betracht. Aus diesem Grunde und zugleich der leichteren Interpolation halber habe ich auch $\log r$ und nicht sein Doppeltes angesetzt.

$z A$	$\log a$	$\log r$	$\log B$	$z A$	$\log a$	$\log r$	$\log B$
0,000	000 0000	000 0000	0000	0,040	003 4984	004 3692	0030
001	0 0869 ⁸⁶⁹	0 1086 ¹⁰⁸⁶	00 041	00 041	3 5865 ⁸⁸¹	4 4791 ¹⁰⁹⁹	31
002	0 1738 ⁸⁶⁹	0 2172 ¹⁰⁸⁶	00 042	00 042	3 6746 ⁸⁸¹	4 5891 ¹¹⁰⁰	33
003	0 2607 ⁸⁶⁹	0 3259 ¹⁰⁸⁷	00 043	00 043	3 7627 ⁸⁸²	4 6991 ¹¹⁰⁰	35
004	0 3477 ⁸⁷⁰	0 4346 ¹⁰⁸⁷	00 044	00 044	3 8509 ⁸⁸²	4 8091 ¹¹⁰⁰	36
005	0 4347 ⁸⁷⁰	0 5433 ¹⁰⁸⁷	01 045	01 045	3 9391 ⁸⁸²	4 9191 ¹¹⁰¹	38
006	0 5217 ⁸⁷⁰	0 6520 ¹⁰⁸⁸	01 046	01 046	4 0273 ⁸⁸³	5 0292 ¹¹⁰¹	40
007	0 6088 ⁸⁷¹	0 7608 ¹⁰⁸⁸	01 047	01 047	4 1156 ⁸⁸³	5 1393 ¹¹⁰²	41
008	0 6958 ⁸⁷¹	0 8696 ¹⁰⁸⁹	01 048	01 048	4 2039 ⁸⁸³	5 2495 ¹¹⁰²	43
009	0 7829 ⁸⁷²	0 9785 ¹⁰⁸⁹	02 049	02 049	4 2922 ⁸⁸⁴	5 3396 ¹¹⁰²	45
0,010	000 8701	001 0874	0002	0,050	004 3806	005 4698	0047
011	0 9573 ⁸⁷²	1 1963 ¹⁰⁸⁹	02 051	02 051	4 4690 ⁸⁸⁴	5 5801 ¹¹⁰³	49
012	1 0445 ⁸⁷²	1 3052 ¹⁰⁸⁹	03 052	03 052	4 5574 ⁸⁸⁴	5 6904 ¹¹⁰³	51
013	1 1317 ⁸⁷³	1 4142 ¹⁰⁹⁰	03 053	03 053	4 6458 ⁸⁸⁵	5 8007 ¹¹⁰³	53
014	1 2190 ⁸⁷³	1 5232 ¹⁰⁹¹	04 054	04 054	4 7343 ⁸⁸⁵	5 9110 ¹¹⁰⁴	55
015	1 3063 ⁸⁷³	1 6323 ¹⁰⁹¹	04 055	04 055	4 8228 ⁸⁸⁶	6 0214 ¹¹⁰⁴	57
016	1 3936 ⁸⁷³	1 7414 ¹⁰⁹¹	05 056	05 056	4 9114 ⁸⁸⁶	6 1318 ¹¹⁰⁵	59
017	1 4809 ⁸⁷⁴	1 8505 ¹⁰⁹¹	05 057	05 057	5 0000 ⁸⁸⁶	6 2423 ¹¹⁰⁵	61
018	1 5683 ⁸⁷⁴	1 9596 ¹⁰⁹²	06 058	06 058	5 0886 ⁸⁸⁶	6 3528 ¹¹⁰⁵	63
019	1 6557 ⁸⁷⁴	2 0688 ¹⁰⁹²	07 059	07 059	5 1772 ⁸⁸⁶	6 4633 ¹¹⁰⁵	65
0,020	001 7431	002 1780	0007	0,060	005 2658	006 5738	0067
021	1 8306 ⁸⁷⁵	2 2872 ¹⁰⁹²	08 061	08 061	5 3545 ⁸⁸⁷	6 6844 ¹¹⁰⁶	69
022	1 9181 ⁸⁷⁵	2 3965 ¹⁰⁹³	09 062	09 062	5 4432 ⁸⁸⁷	6 7950 ¹¹⁰⁶	72
023	2 0057 ⁸⁷⁶	2 5059 ¹⁰⁹⁴	10 063	10 063	5 5320 ⁸⁸⁸	6 9056 ¹¹⁰⁷	74
024	2 0932 ⁸⁷⁶	2 6152 ¹⁰⁹⁴	11 064	11 064	5 6208 ⁸⁸⁸	7 0163 ¹¹⁰⁷	77
025	2 1808 ⁸⁷⁶	2 7246 ¹⁰⁹⁴	12 065	12 065	5 7096 ⁸⁸⁹	7 1270 ¹¹⁰⁸	79
026	2 2684 ⁸⁷⁷	2 8340 ¹⁰⁹⁴	13 066	13 066	5 7985 ⁸⁸⁹	7 2378 ¹¹⁰⁸	82
027	2 3561 ⁸⁷⁷	2 9434 ¹⁰⁹⁵	14 067	14 067	5 8874 ⁸⁸⁹	7 3486 ¹¹⁰⁸	84
028	2 4438 ⁸⁷⁸	3 0529 ¹⁰⁹⁵	15 068	15 068	5 9763 ⁸⁸⁹	7 4594 ¹¹⁰⁹	87
029	2 5316 ⁸⁷⁷	3 1624 ¹⁰⁹⁶	16 069	16 069	6 0652 ⁸⁹⁰	7 5703 ¹¹⁰⁸	89
0,030	002 6193	003 2720	0017	0,070	006 1542	007 6811	0092
031	2 7071 ⁸⁷⁸	3 3816 ¹⁰⁹⁶	18 071	18 071	6 2432 ⁸⁹⁰	7 7920 ¹¹⁰⁹	0094
032	2 7949 ⁸⁷⁸	3 4912 ¹⁰⁹⁶	19 072	19 072	6 3322 ⁸⁹⁰	7 9030 ¹¹¹⁰	0097
033	2 8827 ⁸⁷⁸	3 6008 ¹⁰⁹⁶	20 073	20 073	6 4213 ⁸⁹¹	8 0140 ¹¹¹¹	0100
034	2 9705 ⁸⁷⁸	3 7105 ¹⁰⁹⁷	22 074	22 074	6 5104 ⁸⁹¹	8 1251 ¹¹¹¹	0103
035	3 0584 ⁸⁷⁹	3 8202 ¹⁰⁹⁷	23 075	23 075	6 5995 ⁸⁹¹	8 2361 ¹¹¹⁰	0105
036	3 1464 ⁸⁸⁰	3 9299 ¹⁰⁹⁷	24 076	24 076	6 6887 ⁸⁹²	8 3472 ¹¹¹¹	0108
037	3 2343 ⁸⁸⁰	4 0397 ¹⁰⁹⁸	26 077	26 077	6 7779 ⁸⁹²	8 4583 ¹¹¹²	0111
038	3 3223 ⁸⁸⁰	4 1495 ¹⁰⁹⁸	27 078	27 078	6 8671 ⁸⁹³	8 5695 ¹¹¹²	0114
039	3 4103 ⁸⁸¹	4 2593 ¹⁰⁹⁹	28 079	28 079	6 9564 ⁸⁹³	8 6807 ¹¹¹²	0117
0,040	003 4984	004 3692	0030	0,080	007 0457	008 7919	0120

$z A$	$\log u$	$\log v$	$\log B$	$z A$	$\log u$	$\log v$	$\log B$
0,080	007 0457 ⁸⁹³	008 7919 ¹¹¹³	0120	0,120	010 6432 ⁹⁰⁶	013 2695 ¹¹²⁷	0272
081	7 1350 ⁸⁹⁴	8 9032 ¹¹¹³	0123	121	010 7338 ⁹⁰⁶	013 3822 ¹¹²⁷	0276
082	7 2244 ⁸⁹⁴	9 0145 ¹¹¹³	0126	122	010 8244 ⁹⁰⁷	013 4949 ¹¹²⁷	0281
083	7 3138 ⁸⁹⁴	9 1258 ¹¹¹⁴	0129	123	010 9151 ⁹⁰⁷	013 6076 ¹¹²⁷	0285
084	7 4032 ⁸⁹⁴	9 2372 ¹¹¹⁴	0133	124	011 0058 ⁹⁰⁷	013 7203 ¹¹²⁸	0290
085	7 4926 ⁸⁹⁵	9 3486 ¹¹¹⁴	0136	125	011 0965 ⁹⁰⁸	013 8331 ¹¹²⁹	0295
086	7 5821 ⁸⁹⁵	9 4600 ¹¹¹⁵	0139	126	011 1873 ⁹⁰⁸	013 9460 ¹¹²⁹	0300
087	7 6716 ⁸⁹⁵	9 5715 ¹¹¹⁵	0142	127	011 2781 ⁹⁰⁸	014 0589 ¹¹²⁹	0304
088	7 7611 ⁸⁹⁶	9 6830 ¹¹¹⁵	0146	128	011 3689 ⁹⁰⁸	014 1718 ¹¹²⁹	0309
089	7 8507 ⁸⁹⁶	9 7945 ¹¹¹⁶	0149	129	011 4597 ⁹⁰⁹	014 2847 ¹¹³⁰	0314
0,090	007 9403 ⁸⁹⁶	009 9061 ¹¹¹⁶	0152	0,130	011 5506 ⁹⁰⁹	014 3977 ¹¹³⁰	0319
091	8 0299 ⁸⁹⁷	010 0177 ¹¹¹⁷	0155	131	011 6415 ⁹¹⁰	014 5107 ¹¹³⁰	0324
092	8 1196 ⁸⁹⁷	010 1294 ¹¹¹⁷	0159	132	011 7325 ⁹¹⁰	014 6237 ¹¹³¹	0329
093	8 2093 ⁸⁹⁷	010 2411 ¹¹¹⁷	0162	133	011 8235 ⁹¹⁰	014 7368 ¹¹³¹	0334
094	8 2990 ⁸⁹⁸	010 3528 ¹¹¹⁷	0166	134	011 9145 ⁹¹⁰	014 8499 ¹¹³¹	0339
095	8 3888 ⁸⁹⁸	010 4645 ¹¹¹⁸	0169	135	012 0055 ⁹¹¹	014 9631 ¹¹³²	0344
096	8 4786 ⁸⁹⁸	010 5763 ¹¹¹⁸	0173	136	012 0966 ⁹¹¹	015 0763 ¹¹³²	0350
097	8 5684 ⁸⁹⁹	010 6881 ¹¹¹⁹	0177	137	012 1877 ⁹¹¹	015 1895 ¹¹³²	0355
098	8 6583 ⁸⁹⁹	010 8000 ¹¹¹⁹	0181	138	012 2789 ⁹¹²	015 3027 ¹¹³³	0360
099	8 7482 ⁸⁹⁹	010 9119 ¹¹¹⁹	0184	139	012 3701 ⁹¹²	015 4160 ¹¹³³	0365
0,100	008 8381 ⁹⁰⁰	011 0238 ¹¹¹⁹	0188	0,140	012 4613 ⁹¹²	015 5293 ¹¹³⁴	0371
101	8 9281 ⁹⁰⁰	011 1357 ¹¹²⁰	0192	141	012 5525 ⁹¹³	015 6427 ¹¹³⁴	0376
102	9 0181 ⁹⁰⁰	011 2477 ¹¹²⁰	0196	142	012 6438 ⁹¹³	015 7561 ¹¹³⁴	0381
103	9 1081 ⁹⁰⁰	011 3597 ¹¹²¹	0200	143	012 7351 ⁹¹³	015 8695 ¹¹³⁵	0386
104	9 1981 ⁹⁰¹	011 4718 ¹¹²¹	0204	144	012 8264 ⁹¹⁴	015 9830 ¹¹³⁵	0392
105	9 2882 ⁹⁰¹	011 5839 ¹¹²¹	0208	145	012 9178 ⁹¹⁴	016 0965 ¹¹³⁵	0397
106	9 3783 ⁹⁰¹	011 6960 ¹¹²²	0212	146	013 0092 ⁹¹⁵	016 2101 ¹¹³⁶	0403
107	9 4684 ⁹⁰²	011 8082 ¹¹²²	0216	147	013 1007 ⁹¹⁵	016 3237 ¹¹³⁶	0409
108	9 5586 ⁹⁰²	011 9204 ¹¹²²	0220	148	013 1922 ⁹¹⁵	016 4373 ¹¹³⁷	0415
109	9 6488 ⁹⁰³	012 0326 ¹¹²³	0224	149	013 2837 ⁹¹⁵	016 5510 ¹¹³⁷	0420
0,110	009 7391 ⁹⁰²	012 1449 ¹¹²³	0228	0,150	013 3752 ⁹¹⁶	016 6647 ¹¹³⁷	0426
111	009 8293 ⁹⁰³	012 2572 ¹¹²³	0232	151	013 4668 ⁹¹⁶	016 7784 ¹¹³⁷	0431
112	009 9196 ⁹⁰⁴	012 3695 ¹¹²⁴	0236	152	013 5584 ⁹¹⁶	016 8921 ¹¹³⁸	0437
113	010 0100 ⁹⁰⁴	012 4819 ¹¹²⁴	0240	153	013 6500 ⁹¹⁶	017 0059 ¹¹³⁸	0443
114	010 1003 ⁹⁰⁵	012 5943 ¹¹²⁵	0245	154	013 7416 ⁹¹⁷	017 1197 ¹¹³⁹	0449
115	010 1907 ⁹⁰⁵	012 7068 ¹¹²⁵	0249	155	013 8333 ⁹¹⁸	017 2336 ¹¹³⁹	0455
116	010 2812 ⁹⁰⁵	012 8192 ¹¹²⁶	0254	156	013 9251 ⁹¹⁸	017 3475 ¹¹⁴⁰	0461
117	010 3716 ⁹⁰⁶	012 9317 ¹¹²⁶	0258	157	014 0169 ⁹¹⁸	017 4614 ¹¹⁴⁰	0467
118	010 4621 ⁹⁰⁶	013 0443 ¹¹²⁶	0263	158	014 1087 ⁹¹⁸	017 5754 ¹¹⁴⁰	0473
119	010 5527 ⁹⁰⁵	013 1569 ¹¹²⁶	0267	159	014 2005 ⁹¹⁹	017 6894 ¹¹⁴⁰	0479
0,120	010 6432	013 2695	0272	0,160	014 2924	017 8034	0485

$z A$	$\log \sigma$	$\log \nu$	$\log B$	$z A$	$\log \sigma$	$\log \nu$	$\log B$
0,240	021 7511		1102	0,280	025 5638		1507
241	021 8457 ⁹⁴⁶	027 0465 ¹¹⁷⁰	1111	281	025 6598 ⁹⁶⁰	031 7588 ¹¹⁸⁶	1518
242	021 9404 ⁹⁴⁷	027 1635 ¹¹⁷¹	1121	282	025 7559 ⁹⁶¹	031 8774 ¹¹⁸⁷	1529
243	022 0351 ⁹⁴⁷	027 2806 ¹¹⁷²	1130	283	025 8520 ⁹⁶²	031 9961 ¹¹⁸⁷	1540
244	022 1298 ⁹⁴⁷	027 3978 ¹¹⁷¹	1139	284	025 9482 ⁹⁶²	032 1148 ¹¹⁸⁷	1551
245	022 2246 ⁹⁴⁸	027 5149 ¹¹⁷²	1148	285	026 0444 ⁹⁶²	032 2335 ¹¹⁸⁷	1562
246	022 3194 ⁹⁴⁸	027 6321 ¹¹⁷³	1158	286	026 1406 ⁹⁶²	032 3522 ¹¹⁸⁸	1573
247	022 4142 ⁹⁴⁸	027 7494 ¹¹⁷³	1168	287	026 2368 ⁹⁶²	032 4710 ¹¹⁸⁹	1584
248	022 5091 ⁹⁴⁹	027 8667 ¹¹⁷³	1178	288	026 3331 ⁹⁶³	032 5899 ¹¹⁸⁹	1596
249	022 6040 ⁹⁴⁹	027 9840 ¹¹⁷⁴	1187	289	026 4295 ⁹⁶⁴	032 7088 ¹¹⁸⁹	1607
		028 1014 ¹¹⁷⁴	1187			032 8277 ¹¹⁸⁹	1618
0,250	022 6990 ⁹⁴⁹	028 2188 ¹¹⁷⁴	1197	0,290	026 5259 ⁹⁶⁴	032 9466 ¹¹⁹⁰	1629
251	022 7939 ⁹⁵⁰	028 3362 ¹¹⁷⁵	1207	291	026 6223 ⁹⁶⁴	033 0656 ¹¹⁹¹	1641
252	022 8889 ⁹⁵¹	028 4537 ¹¹⁷⁵	1217	292	026 7187 ⁹⁶⁵	033 1847 ¹¹⁹¹	1652
253	022 9840 ⁹⁵¹	028 5712 ¹¹⁷⁵	1226	293	026 8152 ⁹⁶⁵	033 3038 ¹¹⁹¹	1664
254	023 0791 ⁹⁵¹	028 6887 ¹¹⁷⁶	1236	294	026 9117 ⁹⁶⁶	033 4229 ¹¹⁹¹	1675
255	023 1742 ⁹⁵²	028 8063 ¹¹⁷⁶	1246	295	027 0083 ⁹⁶⁶	033 5420 ¹¹⁹²	1687
256	023 2694 ⁹⁵²	028 9240 ¹¹⁷⁷	1256	296	027 1049 ⁹⁶⁶	033 6612 ¹¹⁹³	1698
257	023 3646 ⁹⁵²	029 0417 ¹¹⁷⁷	1266	297	027 1915 ⁹⁶⁶	033 7805 ¹¹⁹³	1710
258	023 4598 ⁹⁵²	029 1594 ¹¹⁷⁷	1276	298	027 2981 ⁹⁶⁷	033 8997 ¹¹⁹³	1722
259	023 5550 ⁹⁵²	029 2771 ¹¹⁷⁷	1286	299	027 3948 ⁹⁶⁸	034 0190 ¹¹⁹⁴	1734
0,260	023 6503 ⁹⁵³	029 3949 ¹¹⁷⁸	1296	0,300	027 4916 ⁹⁶⁸	034 1384 ¹¹⁹⁴	1745
261	023 7457 ⁹⁵⁴	029 5127 ¹¹⁷⁹	1306	301	027 5884 ⁹⁶⁸	034 2578 ¹¹⁹⁴	1757
262	023 8410 ⁹⁵⁴	029 6306 ¹¹⁷⁹	1317	302	027 6852 ⁹⁶⁸	034 3772 ¹¹⁹⁵	1769
263	023 9364 ⁹⁵⁴	029 7485 ¹¹⁷⁹	1327	303	027 7820 ⁹⁶⁹	034 4967 ¹¹⁹⁵	1781
264	024 0319 ⁹⁵⁵	029 8664 ¹¹⁸⁰	1337	304	027 8789 ⁹⁶⁹	034 6162 ¹¹⁹⁶	1793
265	024 1274 ⁹⁵⁵	029 9844 ¹¹⁸⁰	1347	305	027 9758 ⁹⁷⁰	034 7358 ¹¹⁹⁶	1805
266	024 2229 ⁹⁵⁵	030 1024 ¹¹⁸¹	1358	306	028 0728 ⁹⁷⁰	034 8554 ¹¹⁹⁷	1817
267	024 3184 ⁹⁵⁶	030 2205 ¹¹⁸¹	1368	307	028 1698 ⁹⁷⁰	034 9750 ¹¹⁹⁷	1829
268	024 4140 ⁹⁵⁶	030 3386 ¹¹⁸¹	1378	308	028 2668 ⁹⁷¹	035 0947 ¹¹⁹⁷	1841
269	024 5096 ⁹⁵⁶	030 4567 ¹¹⁸²	1388	309	028 3639 ⁹⁷¹	035 2144 ¹¹⁹⁸	1854
0,270	024 6053 ⁹⁵⁷	030 5749 ¹¹⁸²	1399	0,310	028 4610 ⁹⁷¹	035 3342 ¹¹⁹⁸	1866
271	024 7010 ⁹⁵⁷	030 6931 ¹¹⁸³	1410	311	028 5581 ⁹⁷²	035 4540 ¹¹⁹⁸	1878
272	024 7967 ⁹⁵⁷	030 8114 ¹¹⁸³	1421	312	028 6553 ⁹⁷²	035 5738 ¹¹⁹⁹	1890
273	024 8924 ⁹⁵⁸	030 9297 ¹¹⁸³	1431	313	028 7525 ⁹⁷³	035 6937 ¹¹⁹⁹	1903
274	024 9882 ⁹⁵⁸	031 0480 ¹¹⁸⁴	1442	314	028 8498 ⁹⁷³	035 8136 ¹²⁰⁰	1915
275	025 0840 ⁹⁵⁸	031 1664 ¹¹⁸⁴	1452	315	028 9470 ⁹⁷⁴	035 9336 ¹²⁰⁰	1927
276	025 1799 ⁹⁵⁹	031 2848 ¹¹⁸⁴	1463	316	029 0443 ⁹⁷⁴	036 0536 ¹²⁰¹	1939
277	025 2758 ⁹⁶⁰	031 4032 ¹¹⁸⁵	1474	317	029 1417 ⁹⁷⁵	036 1736 ¹²⁰¹	1952
278	025 3718 ⁹⁶⁰	031 5217 ¹¹⁸⁵	1485	318	029 2391 ⁹⁷⁵	036 2937 ¹²⁰²	1964
279	025 4678 ⁹⁶⁰	031 6402 ¹¹⁸⁶	1496	319	029 3366 ⁹⁷⁴	036 4138 ¹²⁰²	1977
0,280	025 5638	031 7588	1507	0,320	029 4340	036 5339	1997

$z A$	$\log \sigma$	$\log \nu$	$\log B$	$z A$	$\log \sigma$	$\log \nu$	$\log B$
0,400	037 3542	046 2798	3120	0,440	041 4077	051 2543	3793
401	037 4548	046 4033	3136	441	041 5098	051 3796	3811
402	037 5554	046 5269	3152	442	041 6120	051 5049	3829
403	037 6560	046 6505	3168	443	041 7143	051 6302	3847
404	037 7567	046 7741	3184	444	041 8166	051 7556	3865
405	037 8574	046 8978	3200	445	041 9189	051 8810	3882
406	037 9582	047 0215	3216	446	042 0212	052 0065	3900
407	038 0590	047 1453	3232	447	042 1236	052 1320	3918
408	038 1598	047 2692	3249	448	042 2261	052 2576	3936
409	038 2607	047 3930	3215	449	042 3286	052 3832	3954
0,410	038 3616	047 5169	3282	0,450	042 4311	052 5089	3973
411	038 4626	047 6409	3298	451	042 5336	052 6346	3991
412	038 5636	047 7649	3315	452	042 6362	052 7603	4009
413	038 6646	047 8889	3331	453	042 7389	052 8861	4027
414	038 7657	048 0130	3348	454	042 8416	053 0119	4046
415	038 8668	048 1371	3364	455	042 9443	053 1378	4064
416	038 9679	048 2613	3381	456	043 0471	053 2637	4082
417	039 0582	048 3855	3397	457	043 1499	053 3897	4100
418	039 1704	048 5097	3414	458	043 2527	053 5157	4119
419	039 2717	048 6340	3431	459	043 3556	053 6417	4137
0,420	039 3730	048 7584	3448	0,460	043 4585	053 7678	4156
421	039 4743	048 8828	3465	461	043 5615	053 8940	4175
422	039 5757	049 0072	3482	462	043 6646	054 0202	4194
423	039 6771	049 1317	3499	463	043 7676	054 1464	4212
424	039 7786	049 2562	3516	464	043 8707	054 2727	4231
425	039 8801	049 3807	3533	465	043 9738	054 3990	4250
426	039 9817	049 5053	3550	466	044 0770	054 5254	4269
427	040 0833	049 6300	3567	467	044 1803	054 6518	4287
428	040 1849	049 7547	3584	468	044 2835	054 7782	4306
429	040 2866	049 8794	3601	469	044 3868	054 9047	4325
0,430	040 3883	050 0042	3618	0,470	044 4902	055 0313	4344
431	040 4901	050 1290	3635	471	044 5936	055 1579	4363
432	040 5919	050 2538	3653	472	044 6970	055 2845	4382
433	040 6937	050 3787	3670	473	044 8005	055 4112	4401
434	040 7956	050 5037	3688	474	044 9040	055 5379	4420
435	040 8975	050 6287	3705	475	045 0075	055 6647	4440
436	040 9994	050 7537	3723	476	045 1111	055 7915	4459
437	041 1014	050 8788	3740	477	045 2147	055 9184	4478
438	041 2035	051 0039	3758	478	045 3184	056 0453	4498
439	041 3056	051 1291	3775	479	045 4221	056 1722	4517
0,440	041 4077	051 2543	3793	0,480	045 5259	056 2992	4537

$z A$	$\log a$	$\log v$	$\log B$	$z A$	$\log a$	$\log v$	$\log B$
0,480	045 5259	056 2992	4537	0,520	049 7108	061 4116	5351
481	045 6297	056 4263	4556	521	049 8163	061 5455	5372
482	045 7335	056 5534	4576	522	049 9219	061 6745	5394
483	045 8374	056 6805	4595	523	050 0275	061 8035	5415
484	045 9413	056 8077	4615	524	050 1331	061 9325	5436
485	046 0453	056 9349	4634	525	050 2388	062 0616	5457
486	046 1493	057 0622	4654	526	050 3445	062 1907	5479
487	046 2534	057 1895	4674	527	050 4502	062 3198	5500
488	046 3575	057 3168	4694	528	050 5560	062 4490	5522
489	046 4616	057 4442	4714	529	050 6618	062 5783	5544
0,490	046 5658	057 5717	4734	0,530	050 7677	062 7076	5566
491	046 6700	057 6992	4754	531	050 8737	062 8369	5587
492	046 7743	057 8267	4774	532	050 9796	062 9661	5609
493	046 8786	057 9543	4794	533	051 0856	063 0958	5631
494	046 9829	058 0819	4814	534	051 1917	063 2253	5653
495	047 0873	058 2096	4834	535	051 2978	063 3548	5675
496	047 1917	058 3374	4854	536	051 4040	063 4844	5697
497	047 2962	058 4652	4874	537	051 5102	063 6140	5719
498	047 4007	058 5930	4894	538	051 6164	063 7437	5741
499	047 5053	058 7209	4914	539	051 7207	063 8735	5763
0,500	047 6099	058 8488	4935	0,540	051 8290	064 0032	5785
501	047 7145	058 9767	4955	541	051 9354	064 1330	5807
502	047 8192	059 1047	4976	542	052 0418	064 2629	5829
503	047 9239	059 2327	4996	543	052 1482	064 3928	5851
504	048 0287	059 3608	5017	544	052 2547	064 5228	5874
505	048 1335	059 4890	5037	545	052 3612	064 6528	5896
506	048 2384	059 6172	5058	546	052 4678	064 7829	5919
507	048 3433	059 7454	5078	547	052 5744	064 9130	5941
508	048 4482	059 8737	5099	548	052 6811	065 0432	5964
509	048 5532	060 0020	5120	549	052 7878	065 1734	5986
0,510	048 6582	060 1304	5141	0,550	052 8946	065 3036	6009
511	048 7633	060 2588	5161	551	053 0014	065 4339	6031
512	048 8684	060 3873	5182	552	053 1082	065 5643	6054
513	048 9736	060 5158	5203	553	053 2151	065 6947	6077
514	049 0788	060 6444	5224	554	053 3221	065 8251	6100
515	049 1840	060 7730	5245	555	053 4290	065 9556	6122
516	049 2893	060 9016	5266	556	053 5360	066 0861	6145
517	049 3946	061 0303	5287	557	053 6431	066 2166	6168
518	049 5000	061 1590	5309	558	053 7502	066 3474	6191
519	049 6054	061 2878	5330	559	053 8574	066 4781	6214
0,520	049 7108	061 4116	5351	0,560	053 9646	066 6088	6237

z	A	$\log u$	$\log v$	$\log B$	$2A$	$\log u$	$\log v$	$\log B$
0,560	053	9646	066 6088	6237	0,580	056 1179	069 2336	6708
561	054	0718	066 7396	6260	581	056 2260	069 3653	6732
562	054	1791	066 8704	6283	582	056 3347	069 4971	6756
563	054	2864	067 0013	6306	583	056 4425	069 6290	6780
564	054	3938	067 1322	6330	584	056 5508	069 7609	6804
565	054	5012	067 2632	6353	585	056 6691	069 8928	6828
566	054	6087	067 3942	6376	586	056 7674	070 0248	6852
567	054	7162	067 5253	6399	587	056 8758	070 1568	6876
568	054	8238	067 6564	6423	588	056 9843	070 2889	6901
569	054	9314	067 7875	6446	589	057 0928	070 4211	6925
0,570	055	0390	067 9187	6470	0,590	057 2013	070 5533	6950
571	055	1467	068 0500	6493	591	057 3099	070 6855	6974
572	055	2544	068 1813	6517	592	057 4186	070 8178	6999
573	055	3622	068 3127	6540	593	057 5272	070 9501	7023
574	055	4700	068 4441	6564	594	057 6359	071 0825	7048
575	055	5779	068 5756	6588	595	057 7447	071 2150	7072
576	055	6858	068 7071	6612	596	057 8535	071 3475	7097
577	055	7938	068 8386	6636	597	057 9624	071 4800	7122
578	055	9018	068 9702	6660	598	058 0713	071 6126	7147
579	056	0098	069 1019	6684	599	058 1803	071 7452	7172
0,580	056	1179	069 2336	6708	0,600	058 2893	071 8779	7196

$\log(\{z\}z^{-1})$	$\log z$	$\log(\{z\}z^1)$	$\log(\{z\}z^{-1})$	$\log z$	$\log(\{z\}z^1)$
0,3010	99	0,00	0,3010	101	0,1124
2911	100	0,01	3111	100	1036
2811	98	0,02	3211	102	0948
2713	98	0,03	3313	102	0861
2615	98	0,04	3415	102	0774
2517	96	0,05	3517	104	0688
2421	96	0,06	3621	103	0602
2324	97	0,07	3724	105	0517
2229	95	0,08	3829	105	0432
2134	95	0,09	3934	105	0348
0,2039	95	0,10	0,4039	106	0,0264
1945	94	0,11	4145	107	0,0181
1852	93	0,12	4252	107	0,0099
1759	93	0,13	4359	107	0,0016
1666	93	0,14	4466	109	9,9935
1575	91	0,15	4575	109	9,9854
1484	91	0,16	4684	109	9,9773
1393	91	0,17	4793	109	9,9693
1303	90	0,18	4903	110	9,9613
1213	90	0,19	5013	110	9,9534
0,1124	89	0,20	0,5124	111	9,9455
					0,40
					0,7455

$\log(\{z\}z^{-4})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^3)$		$\log(\{z\}z^{-4})$	$\log z$	$\log(\{z\}z^3)$		
9,9455	78	0,40	0,7455	122	9,6639	64	0,80	1,2639	136
9377	78	0,41	7577	122	6575	63	0,81	2775	137
9299	77	0,42	7699	123	6512	63	0,82	2912	137
9222	77	0,43	7822	123	6449	63	0,83	3049	137
9145	76	0,44	7945	124	6386	62	0,84	3186	138
9069	76	0,45	8069	124	6324	62	0,85	3324	138
8993	76	0,46	8193	124	6262	62	0,86	3462	138
8917	76	0,47	8317	124	6200	62	0,87	3600	138
8842	75	0,48	8442	125	6138	62	0,88	3738	138
8768	74	0,49	8568	124	6076	62	0,89	3876	138
	75			125		61			139
9,8693		0,50	0,8693		9,6015		0,90	1,4015	
8619	74	0,51	8819	126	5954	61	0,91	4154	139
8546	73	0,52	8946	127	5893	61	0,92	4293	139
8473	73	0,53	9073	127	5832	61	0,93	4432	139
8401	72	0,54	9201	128	5772	60	0,94	4572	140
8328	72	0,55	9328	127	5712	60	0,95	4712	140
8257	71	0,56	9457	128	5652	60	0,96	4852	140
8185	71	0,57	9585	128	5592	60	0,97	4992	140
8114	71	0,58	9714	129	5532	60	0,98	5132	141
8043	71	0,59	9843	129	5473	59	0,99	5273	141
	70			130		59			141
9,7973		0,60	0,9973		9,5414		1,00	1,5414	
7993	70	0,61	1,0193	130	5355	59	1,01	5555	141
7834	69	0,62	1,0234	131	5296	59	1,02	5696	141
7765	69	0,63	1,0365	131	5237	59	1,03	5837	141
7696	69	0,64	1,0496	131	5179	58	1,04	5979	142
7627	69	0,65	1,0627	131	5121	58	1,05	6121	142
7559	68	0,66	1,0759	132	5063	58	1,06	6263	142
7491	68	0,67	1,0891	132	5005	58	1,07	6405	142
7424	67	0,68	1,1024	133	4947	58	1,08	6547	142
7357	67	0,69	1,1157	133	4889	58	1,09	6689	142
	67			133		57			143
9,7290		0,70	1,1290		9,4832		1,10	1,6832	
7224	66	0,71	1424	134	4775	57	1,11	6975	143
7157	67	0,72	1557	133	4718	57	1,12	7118	143
7092	65	0,73	1692	135	4661	57	1,13	7261	143
7026	66	0,74	1826	134	4604	57	1,14	7404	143
6961	65	0,75	1961	135	4547	57	1,15	7547	143
6896	65	0,76	2096	135	4491	56	1,16	7691	144
6831	65	0,77	2231	135	4434	57	1,17	7834	143
6767	64	0,78	2367	136	4378	56	1,18	7978	144
6703	64	0,79	2503	136	4322	56	1,19	8122	144
	64			136		56			144
9,6639		0,80	1,2639		9,4266		1,20	1,8266	

$\log(\{z\}z^{-1})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^{\frac{1}{2}})$		$\log(\{z\}z^{-\frac{1}{2}})$		$\log z$	$\log(\{z\}z^{\frac{1}{2}})$	
9,4266	⁵⁶	1,20	1,8266	¹⁴⁴	9,2108	⁵³	1,60	2,4108	¹⁴⁷
4210	⁵⁶	1,21	8410	¹⁴⁴	2055	⁵²	1,61	2,4255	¹⁴⁸
4154	⁵⁶	1,22	8554	¹⁴⁴	2003	⁵²	1,62	2,4403	¹⁴⁸
4098	⁵⁵	1,23	8698	¹⁴⁵	1951	⁵³	1,63	2,4551	¹⁴⁷
4043	⁵⁵	1,24	8843	¹⁴⁵	1898	⁵²	1,64	2,4698	¹⁴⁸
3988	⁵⁶	1,25	8988	¹⁴⁴	1846	⁵²	1,65	2,4846	¹⁴⁸
3932	⁵⁵	1,26	9132	¹⁴⁵	1794	⁵²	1,66	2,4994	¹⁴⁸
3877	⁵⁵	1,27	9277	¹⁴⁵	1742	⁵²	1,67	2,5142	¹⁴⁸
3822	⁵⁵	1,28	9422	¹⁴⁵	1690	⁵²	1,68	2,5290	¹⁴⁸
3767	⁵⁵	1,29	9567	¹⁴⁵	1638	⁵²	1,69	2,5438	¹⁴⁸
	⁵⁵			¹⁴⁵		⁵²			¹⁴⁸
9,3712	⁵⁴	1,30	1,9712	¹⁴⁶	9,1586	⁵²	1,70	2,5586	¹⁴⁸
3658	⁵⁴	1,31	1,9858	¹⁴⁵	1534	⁵²	1,71	2,5734	¹⁴⁸
3603	⁵⁴	1,32	2,0003	¹⁴⁶	1482	⁵²	1,72	2,5882	¹⁴⁸
3549	⁵⁴	1,33	2,0149	¹⁴⁵	1430	⁵²	1,73	2,6030	¹⁴⁸
3494	⁵⁴	1,34	2,0294	¹⁴⁶	1378	⁵¹	1,74	2,6178	¹⁴⁹
3440	⁵⁴	1,35	2,0440	¹⁴⁶	1327	⁵²	1,75	2,6327	¹⁴⁸
3386	⁵⁴	1,36	2,0586	¹⁴⁵	1275	⁵²	1,76	2,6475	¹⁴⁸
3331	⁵⁴	1,37	2,0731	¹⁴⁶	1223	⁵²	1,77	2,6623	¹⁴⁹
3277	⁵⁴	1,38	2,0877	¹⁴⁶	1171	⁵¹	1,78	2,6771	¹⁴⁹
3223	⁵³	1,39	2,1023	¹⁴⁷	1120	⁵²	1,79	2,6920	¹⁴⁸
	⁵³			¹⁴⁷		⁵²			¹⁴⁸
9,3170	⁵⁴	1,40	2,1170	¹⁴⁶	9,1068	¹⁰³	1,80	2,7068	²⁹⁷
3116	⁵⁴	1,41	2,1316	¹⁴⁶	0965	¹⁰³	1,82	2,7365	²⁹⁷
3062	⁵⁴	1,42	2,1462	¹⁴⁶	0862	¹⁰²	1,84	2,7662	²⁹⁸
3008	⁵³	1,43	2,1608	¹⁴⁷	0760	¹⁰³	1,86	2,7960	²⁹⁷
2955	⁵⁴	1,44	2,1755	¹⁴⁶	0657	¹⁰³	1,88	2,8257	²⁹⁷
2901	⁵³	1,45	2,1901	¹⁴⁷	0554	¹⁰²	1,90	2,8554	²⁹⁸
2848	⁵³	1,46	2,2048	¹⁴⁷	0452	¹⁰²	1,92	2,8852	²⁹⁸
2795	⁵⁴	1,47	2,2195	¹⁴⁶	0350	¹⁰³	1,94	2,9150	²⁹⁷
2741	⁵³	1,48	2,2341	¹⁴⁷	0247	¹⁰²	1,96	2,9447	²⁹⁸
2688	⁵³	1,49	2,2488	¹⁴⁷	0145	¹⁰²	1,98	2,9745	²⁹⁸
	⁵³			¹⁴⁷		¹⁰²			²⁹⁸
9,2635	⁵³	1,50	2,2635	¹⁴⁷	9,0043	¹⁰¹	2,00	3,0043	²⁹⁹
2582	⁵³	1,51	2,2782	¹⁴⁷	8,903	¹⁰¹	2,20	3,303	²⁹⁹
2529	⁵³	1,52	2,2929	¹⁴⁷	8,802	¹⁰¹	2,40	3,602	²⁹⁹
2476	⁵³	1,53	2,3076	¹⁴⁷	8,701	¹⁰⁰	2,60	3,901	²⁹⁹
2423	⁵²	1,54	2,3223	¹⁴⁸	8,601	¹⁰¹	2,80	4,201	³⁰⁰
2371	⁵³	1,55	2,3371	¹⁴⁷	8,500	¹⁰⁰	3,00	4,500	³⁰⁰
2318	⁵³	1,56	2,3518	¹⁴⁷	8,400	¹⁰⁰	3,20	4,800	³⁰⁰
2265	⁵³	1,57	2,3665	¹⁴⁷	8,300		3,40	5,100	
2213	⁵²	1,58	2,3813	¹⁴⁸	8,200		3,60	5,400	
2160	⁵³	1,59	2,3960	¹⁴⁷	8,100		3,80	5,700	
	⁵²			¹⁴⁸					
9,2108	⁵²	1,60	2,4108	¹⁴⁸	8,000		4,00	6,000	

IV.

Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstände von der Erde abzuleiten: des Himmelskörpers *heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne und wahren Abstand von der Erde.* Von Dr. Gauss in Braunschweig.

(Vergl. Art. 74 der Theoria motus.)

Bedeutung der Zeichen.

<p><i>Gegeben:</i></p> <p>Q Länge des aufsteigenden Knotens. V Länge der Sonne. α Geocentrische Länge des Himmelskörpers. β Geocentrische Breite. <i>i</i> Neigung der Bahn. R Abstand der Sonne von der Erde.</p>	<p><i>Gesucht:</i></p> <p>r heliocentrische Länge des Himmelskörpers in der Bahn. r Wahrer Abstand von der Sonne. Δ Wahrer Abstand von der Erde. A B C etc. } Hilfswinkel.</p>
--	---

I.

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \quad & \frac{\cos(V-Q)\tan\beta}{\sin(V-\alpha)} = \tan A; & \frac{\sin A \tan(V-Q)}{\sin(A+i)} &= \tan(v-Q) \\
 2^{\circ} \quad & \frac{\sin(V-\alpha)\tan i}{\cos(V-Q)} = \tan B; & \frac{\cos B \sin\beta \tan(V-Q)}{\sin(B+\beta)\cos i} &= \tan(v-Q) \\
 3^{\circ} \quad & \frac{\sin(V-Q)\tan\beta}{\sin(V-\alpha)\tan i} = \tan C; & \frac{\sin C \sin(V-Q)}{\sin(C+V-Q)\cos i} &= \tan(v-Q) \\
 4^{\circ} \quad & \frac{\cos(V-Q)\tan\beta}{\cos(V-\alpha)\tan i} = \tan D; & \frac{\sin D \tan(V-Q)\cos(V-\alpha)}{\sin(D+V-\alpha)\cos i} &= \tan(v-Q)
 \end{aligned}$$

Anmerkung. Da Winkel, die um 180° verschieden sind, einerlei Tangenten haben, so ist hier noch eine Vorschrift nöthig, wie die durch ihre Tangenten bestimmten Winkel A, B, C etc. und $v-Q$ angesetzt werden müssen. Den Winkel $v-Q$ hat man allezeit zwischen 0 und 180° anzunehmen, wenn β positiv (nördlich) ist; ist hingegen die Breite südlich, so muss $v-Q$ zwischen 180° und 360° , oder, welches einerlei ist, zwischen -180° und 0 fallen. Ist $\beta = 0$, so ist der Himmelskörper in einem Knoten, und man wird nie zweifelhaft sein, ob es Q oder \bar{Q} ist. Der analytischen Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass in diesem Falle der Himmelskörper in $\left\{ \begin{smallmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{smallmatrix} \right\}$ ist, nachdem $\sin(V-\alpha)$ und $\sin(\alpha-Q)$ {einerlei} Zeichen haben. Die Hilfswinkel A, B, C, D aber, so wie die folgenden E, F etc. kann man in dieser Hinsicht ganz nach Belieben ansetzen; wobei es sich jedoch von selbst versteht, dass man auf die Zeichen \pm gehörige Rücksicht nehme; ich habe sie in folgendem Beispiele immer zwischen -90° und $+90^{\circ}$ genommen.

II.

$$\begin{aligned}
 5^{\circ} \quad & \frac{\tan\beta}{\sin(\alpha-Q)} = \tan E; & \frac{\sin E \sin(V-Q)}{\sin(i-E)\sin(v-Q)} &= \frac{r}{R} \\
 6^{\circ} \quad & \tan i \sin(\alpha-Q) = \tan F; & \frac{\cos F \sin(V-Q)\sin\beta}{\sin(F-\beta)\sin(v-Q)\cos i} &= \frac{r}{R} \\
 7^{\circ} \quad & \cos i \tan(v-Q) = \tan G; & \frac{\cos G \sin(V-\alpha)}{\sin(\alpha-Q)\cos(v-Q)} &= \frac{r}{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8^{\circ} \quad & \frac{\operatorname{tang}(\alpha - \Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang} H; \quad \frac{\sin H \sin(V - \alpha)}{\sin(H - (v - \Omega)) \sin(\alpha - \Omega)} = \frac{r}{R} \\
 9^{\circ} \quad & \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin i \cos(\alpha - \Omega)} = \operatorname{tang} I; \quad \frac{\sin I \cos(V - \beta)}{\sin(v - \Omega - I)} = \frac{r}{R} \\
 10^{\circ} \quad & \sin i \cos(\alpha - \Omega) \operatorname{tang}(v - \Omega) = \operatorname{tang} K; \quad \frac{\cos K \sin \beta \cos(V - \Omega)}{\sin(K - \beta) \cos(v - \Omega)} = \frac{r}{R} \\
 11^{\circ} \quad & \frac{\sin C \sin(V - \alpha)}{\cos(C + V - \alpha) \operatorname{tang}(V - \Omega) \cos i} = \operatorname{tang} L; \quad \frac{\sin L}{\sin M} = \frac{r}{R} \\
 12^{\circ} \quad & \frac{\sin D \cos(V - \Omega)}{\cos(D + V - \Omega) \cos i} = \operatorname{tang} M; \quad \frac{\sin(v - \Omega - L) \cos(V - \Omega)}{\sin(v - \Omega - M) \cos(V - \Omega)} = \frac{r}{R}
 \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}
 13^{\circ} \quad & \frac{r \sin(v - \Omega) \sin i}{\sin \beta} = A \\
 14^{\circ} \quad & \frac{R \sin E \sin(V - \Omega) \sin i}{\sin(i - E) \sin \beta} = \frac{R \cos E \sin(V - \Omega) \sin i}{\sin(i - E) \sin(\alpha - \Omega) \cos \beta} = A \\
 15^{\circ} \quad & \frac{R \cos F \sin(V - \Omega) \operatorname{tang} i}{\sin(F - \beta)} = \frac{R \sin F \sin(V - \Omega) \sin(\alpha - \Omega)}{\sin(F - \beta)} = A
 \end{aligned}$$

Und so lassen sich noch mehrere Ausdrücke für A aus der Verbindung von 13° mit allen Formeln II ableiten.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
 \Omega &= 80^{\circ} 59' 12'' 07 \\
 V &= 281 1 34,99 \\
 \alpha &= 53 23 2,46 \\
 i &= 10 37 9,55 \\
 \log \operatorname{tang} \beta &= 8,734 9698 n \\
 \log i &= 9,992 6158 \\
 \beta &= -3^{\circ} 6' 33'' 561 \\
 &\text{negativ oder südlich} \\
 \text{Folglich } V - \Omega &= 200^{\circ} 2' 22'' 92 \\
 V - \alpha &= 227 38 32,53 \\
 \alpha - \Omega &= -27 36 9,61
 \end{aligned}$$

 2° .

$$\begin{aligned}
 \log \sin(V - \alpha) &\dots 9,868 6173 n \\
 \log \operatorname{tang} i &\dots 9,272 9872 \\
 \text{Compl. log cos}(V - \Omega) &\dots 0,027 1238 n \\
 \log \operatorname{tang} B &\dots 9,168 7283 \\
 \log \cos B &\dots 9,995 3277 \\
 \log \sin \beta &\dots 8,734 3300 n \\
 \log \operatorname{tang}(V - \Omega) &\dots 9,562 0014 \\
 \text{Compl. log sin}(B + \beta) &\dots 1,036 0961 \\
 \text{Compl. log cos } i &\dots 0,007 5025 \\
 \log \operatorname{tang}(v - \Omega) &\dots 9,335 2577 n \text{ wie oben.}
 \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned}
 B &= 8^{\circ} 23' 21'' 888 \\
 B + \beta &= 5 16 48,327
 \end{aligned}$$

 1° .

$$\begin{aligned}
 \log \operatorname{tang} \beta &\dots 8,734 9698 n \\
 \log \cos(V - \Omega) &\dots 9,972 8762 n \\
 \text{Compl. log sin}(V - \alpha) &\dots 0,131 3827 n \\
 \log \operatorname{tang} A &\dots 8,839 2287 n \\
 \log \sin A &\dots 8,838 1955 n \\
 \log \operatorname{tang}(V - \Omega) &\dots 9,562 0014 \\
 \text{Compl. log sin}(A + i) &\dots 0,935 0608 \\
 \log \operatorname{tang}(v - \Omega) &\dots 9,335 2577
 \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned}
 A &= -3^{\circ} 57' 2'' 136 \\
 A + i &= 6 40 7,414
 \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned}
 v - \Omega &= -12^{\circ} 12' 37'' 942 \\
 \text{also } v &= 68^{\circ} 46' 34'' 128
 \end{aligned}$$

 3° .

$$\begin{aligned}
 \log \sin(V - \Omega) &\dots 9,534 8776 n \\
 \log \operatorname{tang} \beta &\dots 8,734 9698 n \\
 \text{Compl. log sin}(V - \alpha) &\dots 0,131 3827 n \\
 \text{Compl. log tang } i &\dots 0,727 0128 \\
 \log \operatorname{tang} C &\dots 9,128 2429 n \\
 \log \sin C &\dots 9,124 3583 n \\
 \log \sin(V - \Omega) &\dots 9,534 8776 n \\
 \text{Cpl. log sin}(C + V - \Omega) &\dots 0,668 5194 n \\
 \text{Compl. log cos } i &\dots 0,007 5025 \\
 \log \operatorname{tang}(v - \Omega) &\dots 9,335 2578 n \text{ wie vorhin.}
 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
 C &= -7^{\circ} 39' 7'' 056 \\
 C + V - \Omega &= 192 23 15,864 \\
 &6^{\circ}
 \end{aligned}$$

4°.

$\log \cos (V-Q)$	9.972 8762 n
$\log \tan \beta$	8.734 9698 n
$\text{Compl. } \log \cos (V-e)$	0.171 4973 n
$\text{Compl. } \log \tan i$	0.727 0128
$\log \tan D$	9.606 3561 n
$\log \sin D$	9.573 5295 n
$\log \tan (V-Q)$	9.562 0014
$\log \cos (V-e)$	9.828 5027 n
$\text{Cpl. } \log \sin (D+V-e)$	0.363 7217 n
$\text{Compl. } \log \cos i$	0.007 5025
$\log \tan (v-Q)$	9.335 2578 n wie oben.

Also

$$D = -21^{\circ} 59' 51'' 18z$$

$$D + V - \alpha = 205 38 41, 348$$

6°.

$\log \tan i$	9.272 987z
$\log \sin (\alpha-Q)$	9.665 8973 n
$\log \tan F$	8.938 8845 n
$\log \cos F$	9.998 3674
$\log \sin \beta$	8.734 3300 n
$\log \sin (V-Q)$	9.534 8776 n
$\text{Compl. } \log \sin (F-\beta)$	1.489 6990 n
$\text{Compl. } \log \sin (v-Q)$	0.674 6802 n
$\text{Compl. } \log \cos i$	0.007 5025 n
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4567

Nahc wie
vorher.

Daher

$$F = -4^{\circ} 57' 53'' 955$$

$$F - \beta = -1 51' 20,394$$

8°.

$\log \tan (\alpha-Q)$	9.718 3744 n
$\log \cos i$	9.992 4975
$\log \tan H$	9.725 8769 n
$\log \sin H$	9.671 7672 n
$\log \sin (V-e)$	9.868 6173 n
$\text{Cpl. } \log \sin (H-(v-Q))$	0.564 9695 n
$\text{Compl. } \log \sin (\alpha-Q)$	0.334 1027 n
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4567 wie vorher.

Folglich

$$H = -28^{\circ} 0' 39'' 879$$

$$H - (v-Q) = -15 48' 1, 937$$

5°.

$\log \tan \beta$	8.734 9698 n
$\log \sin (\alpha-Q)$	9.665 8973 n
$\log \tan E$	9.069 0725
$\log \sin E$	9.066 1081 n
$\log \sin (V-Q)$	9.534 8776 n
$\text{Compl. } \log \sin (i-E)$	1.163 7907
$\text{Compl. } \log \sin (e-Q)$	0.674 6802 n
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4566

Also

$$E = 6^{\circ} 41' 12'' 41z$$

$$i - E = 3 55 57, 138$$

Ferner

$$\log r = \log R + \log \frac{r}{R} = 0,432 0724$$

7°.

$\log \cos i$	9.992 4975
$\log \tan (v-Q)$	9.335 2577 n
$\log \tan G$	9.327 7552 n
$\log \cos G$	9.990 3922
$\log \sin (V-e)$	9.868 6173 n
$\text{Cpl. } \log \sin (\alpha-Q-G)$	0.570 5092 n
$\text{Compl. } \log \cos (v-Q)$	0.009 9379
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4566 wie oben.

Also

$$G = -12^{\circ} 0' 27'' 118$$

$$\alpha - Q - G = -15 35 42, 492$$

9°.

$\log \tan \beta$	8.734 9698 n
$\text{Compl. } \log \sin i$	0.734 5153
$\text{Compl. } \log \cos (\alpha-Q)$	0.052 4771
$\log \tan I$	9.521 9622 n
$\log \sin I$	9.499 1749 n
$\log \cos (V-Q)$	9.972 8762 n
$\text{Cpl. } \log \sin (v-Q-I)$	0.967 4054
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4565 wie vorher.

Hieraus

$$I = -18^{\circ} 23' 55'' 334$$

$$v - Q - I = 6 11 17, 392$$

10°.

In der Nähe des Knotens weniger scharf.

$\log \sin i$	9.265 4847
$\log \cos(\alpha - \Omega)$	9.947 5229
$\log \tan(v - \Omega)$	9.335 2577 n
$\log \tan \hat{K}$	8.548 2653 n
$\log \cos \hat{K}$	9.999 7290
$\log \sin \beta$	8.734 3300 n
$\log \cos(V - \Omega)$	9.972 8762 n
Compl. $\log \sin(\hat{K} - \beta)$	1.722 5836
Compl. $\log \cos(v - \Omega)$	0.009 9379
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4567 wie vorhin.

Also

$$K = -2^{\circ} 1' 26'' 344$$

$$K - \beta = 1 \ 5 \ 7, \ 217$$

12°.

$D + V - \Omega = 178^{\circ} 2' 31'' 738$	
$\log \sin D$	9.573 5295 n
$\log \cos(V - \Omega)$	9.972 8762 n
Cpl. $\log \cos(D + V - \Omega)$	0.000 2536 n
Compl. $\log \cos i$	0.007 5025
$\log \tan(\hat{M} = L)$	9.554 1618 n

Wie oben in 11°.

Der übrige Theil der Rechnung eben so wie dort.

11°.

$$C + V - \alpha = 219^{\circ} 59' 25'' 474$$

$\log \sin C$	9.124 3583 n
$\log \sin(V - \alpha)$	9.868 6173 n
Cpl. $\log \cos(C + V - \alpha)$	0.115 6850 n
Compl. $\log \tan(V - \Omega)$	0.437 9986
Compl. $\log \cos i$	0.007 5025
$\log \tan L$	9.554 1617 n
$\log \sin L$	9.527 9439 n
Comp. $\log \sin(v - \Omega - L)$	0.884 3888
Compl. $\log \cos(V - \Omega)$	0.027 1238 n
$\log \frac{r}{R}$	0.439 4565 wie zuvor.

Also

$$L = -19^{\circ} 42' 32'' 533$$

$$v - \Omega - L = 7 \ 29 \ 54, \ 591$$

13°.

$\log r$	0.432 0724
$\log \sin(v - \Omega)$	9.325 3198 n
$\log \sin i$	9.265 4847
Compl. $\log \sin \beta$	1.265 6700 n
$\log \mathcal{A}$	0.288 5469

V.

Zusatz zu Art. 90 und 100 der Theoria motus corporum coelestium.
(Vergleiche Berliner Jahrbuch für 1814).

Zur Auflösung der wichtigen Aufgabe, aus zweien radiis vectoribus und dem eingeschlossenen Winkel die elliptischen oder hyperbolischen Elemente zu bestimmen, habe ich mich mit grossem Vortheil einer Hilfsgrösse ξ bei der Ellipse, ζ bei der Hyperbel bedient, für welche ich jenem Werke eine Tafel angehängt habe. Berechnet ist diese Tafel nach einem dort angeführten continuirten Bruche, dessen vollständige Ableitung aber dort nicht gegeben ist, und zu dessen theoretischer Entwicklung, die mit andern Untersuchungen zusammenhängt, ich bisher noch nicht Gelegenheit gefunden habe. Es wird daher Mauchem lieb sein, hier einen andern Weg angezeigt zu finden, auf welchem man jene Hilfsgrösse ebenso bequem hätte berechnen können.

Wir haben (Art. 90)

$$\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{10}{9x} = \frac{xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9}}{X}$$

Der Zähler des Bruchs verwandelt sich leicht, wenn man für x die dort gegebene Reihe substituirt, in

$$\frac{8}{105}x^2(1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}x^2 + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3 + \frac{5.8.10.12.14}{9.11.13.15}x^4 + \text{etc.})$$

Setzt man also die Reihe

$$1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}xx + \text{etc.} = A,$$

so wird

$$xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105}Ax^2$$

$$X = \frac{4}{3} \frac{(1 - \frac{12}{175}Ax^2)}$$

$$1 - \frac{6}{5}x$$

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}Ax^2(1 - \frac{6}{5}x)}{1 - \frac{12}{175}Ax^2},$$

nach welcher Formel man ξ immer bequem und sicher berechnen kann. Für (Art. 100) braucht man nur z statt x zu setzen.

Ich bemerke nur noch, dass man A noch bequemer nach folgender Formel berechnen kann

$$A = (1-x)^{-2} \left(1 + \frac{1.5}{2.9}x + \frac{1.3.5.7}{2.4.9.11}xx + \frac{1.3.5.5.7.9}{2.4.6.9.11.13}x^3 + \text{etc.} \right)$$

allein die Ableitung dieser Reihe aus der vorigen beruht auf Gründen, die hier nicht angeführt werden können.

VI.

Auszug aus Zach's Monatlicher Correspondenz, Band 28, p. 501 folgende.

Beobachtungen des zweiten Cometen vom Jahre 1813, angestellt auf der Sternwarte zu Göttingen, nebst einigen Bemerkungen über die Berechnung parabolischer Bahnen, von Carl Friedrich Gauss (vorgelegt der königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 10. September 1813). Aus dem Lateinischen übersetzt.

Den Cometen, welchen mein würdiger und geliebter College, Herr Professor Harding, am dritten April dieses Jahres im Sternbilde des Poniatowskyschen Stieres entdeckte, beobachtete ich selbst seit dem 7ten April auf hiesiger Sternwarte. Folgendes sind die Bestimmungen, welche ich mit dem Kreis-Mikrometer des zehlfüssigen Teleskops erhielt:

1813	Mittlere Zeit in Göttingen.	Scheinbare gerade Aufsteigung.	Scheinbare Abweichung.
April 7	13 ^h 12 ^m 2 ^s	271° 7' 19".3	5° 34' 36".7 N.
9	13 35 40	270 10 33.5	4 11 3.4
11	13 17 43	269 1 19.9	2 33 0.7
14	13 7 36	266 44 5.5	0 33 0.8 S.
21	14 23 0	256 39 19.3	12 57 56.0

Folgendes sind die corrigirten Elemente, welche Herr Doctor Gerling herausgebracht hat, und welche sich sowohl an die hiesigen Beobachtungen, als auch an die des Herrn Doctor Olbers, so genau als möglich anschliessen:

Zeit des Durchganges durchs Perihelium, im Meridian von Göttingen . . . 1813 Mai 19.44.507	
Logarithmus des Abstandes im Perihel	0,084 9212
Länge des Periheliums	197° 43' 7''
Länge des aufsteigenden Knotens	42 40 15, 2
Neigung der Bahn	81 2 11, 8
Bewegung rückläufig.	

Es sei mir erlaubt, hier noch einige Rechnungsabkürzungen aneinander zu setzen, deren ich mich öfter, bei der ersten Bestimmung der parabolischen Bahn eines Cometen nach der Methode des Herrn Doctor Olbers, mit Vortheil bedient habe, und wodurch diese an sich schon so einfache Methode noch mehr zusammengezogen und zur numerischen Rechnung noch bequemer gemacht werden kann. Sie beziehen sich auf die Berechnung der radii vectores, und besonders der Chorde zwischen dem ersten und dritten Orte. Zu dem Ende wendet Herr Doctor Olbers Ausdrücke von der Form $V(f+g\varrho+h\varrho\varphi)$ an, und bestimmt die Coefficienten f, g, h durch Formeln, die an sich zwar einfach genug sind, deren Zusammensetzung aber in den meisten Fällen keine hinreichende Genauigkeit verstattet, wenn man nicht etwa grössere Logarithmentafeln mit sechs oder sieben Decimalstellen anwenden will. Statt dieser Ausdrücke nun habe ich andere substituirt, die theils zur numerischen Rechnung geeigneter zu sein scheinen, theils den Vortheil gewähren, dass man bei allen Operationen nur Tafeln mit fünf Decimalen anzuwenden nöthig hat. Das ganze Verfahren besteht in Folgendem:

Man bezeichne durch

L, L', L'' die Längen der Sonne in der ersten, zweiten und dritten Beobachtung,

R, R', R'' die Distanzen der Sonne von der Erde,

$\alpha, \alpha', \alpha''$ die geocentrischen Längen und

β, β', β'' die geocentrischen Breiten des Cometen,

r, r', r'' seine Entfernungen von der Sonne,

$\varrho, \varrho', \varrho''$ seine curtirten Abstände von der Erde,

t, t', t'' die Beobachtungszeiten,

k die Chorde zwischen dem ersten und dritten Orte des Cometen, und es sei

$$M = \frac{\varrho''}{\varphi},$$

so hat man

$$[1] \quad r = V[(\varrho \cos \alpha - R \cos L)^2 + (\varrho \sin \alpha - R \sin L)^2 + \varphi \varrho \tan \beta^2]$$

$$[2] \quad r'' = V[(M \varphi \cos \alpha'' - R'' \cos L'')^2 + (M \varphi \sin \alpha'' - R'' \sin L'')^2 + M M \varphi \varrho \tan \beta''^2]$$

$$[3] \quad k = V[(M \varphi \cos \alpha'' - \varphi \cos \alpha - R'' \cos L'')^2 + (M \varphi \sin \alpha'' - \varphi \sin \alpha - R'' \sin L'')^2 + (M \varphi \tan \beta'' - \varphi \tan \beta)^2].$$

Die Gleichungen 1, 2 verwandeln sich in folgende:

$$r = V\left[\frac{\varphi \varrho}{\cos \beta^2} - 2 \varphi R \cos(\alpha - L) + R R\right]$$

$$r'' = V\left[\frac{M M \varphi \varrho}{\cos \beta''^2} - 2 M \varphi R'' \cos(\alpha'' - L'') + R'' R''\right]$$

Setzt man also

$$\cos \beta \cos(\alpha - L) = \cos \psi, \quad R \sin \psi = B$$

$$\cos \beta'' \cos(\alpha'' - L'') = \cos \psi'', \quad R'' \sin \psi'' = B''$$

so folgt

$$r = V\left[\left(\frac{\varphi}{\cos \beta} - R \cos \psi\right)^2 + B B\right]$$

$$r'' = V\left[\left(\frac{M \varphi}{\cos \beta''} - R'' \cos \psi''\right)^2 + B'' B''\right]$$

Bestimmt man ferner (fünf) Hilfsgrößen g, G, h, H, ζ so, dass man habe

$$\begin{aligned} R' \cos L'' - R \cos L &= g \cos G \\ R' \sin L'' - R \sin L &= g \sin G \\ M \cos \alpha'' - \cos \alpha &= h \cos \zeta \cos H \\ M \sin \alpha'' - \sin \alpha &= h \cos \zeta \sin H \\ M \tan \beta'' - \tan \beta &= h \sin \zeta \end{aligned}$$

so verwandelt sich die Formel 3 in folgende:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{[(\varrho h \cos \zeta \cos H - g \cos G)^2 + (\varrho h \cos \zeta \sin H - g \sin G)^2 + \varrho \varrho h h \sin^2 \zeta]} \\ &= \sqrt{(\varrho \varrho h h - 2 \varrho h g \cos \zeta \cos(G-H) + g^2)} \end{aligned}$$

Macht man also

$$\cos \zeta \cos(G-H) = \cos \varphi, \quad g \sin \varphi = A$$

so wird

$$k = \sqrt{(\varrho h - g \cos \varphi)^2 + A A}$$

oder, wenn man überdies noch $\varrho h - g \cos \varphi = u$ setzt,

$$k = \sqrt{(u u + A A)}.$$

Es wird mehreren Lesern nicht unangenehm sein, hier nicht nur alle zu diesen Umwandlungen erforderlichen Operationen noch einmal neben einander gestellt, sondern auch alle übrigen Operationen beigelegt zu sehen, um alles, was zur ersten Berechnung einer parabolischen Bahn gehört, hier beisammen zu haben. Zugleich werde ich dieses Verfahren durch ein von unserm Cometen hergenommenes Beispiel erläutern. Zu dem Ende wähle ich meine Beobachtungen vom 7., 14. und 21. April, aus denen man nach gehöriger Reduction folgende Data erhält:

t	$= 7,55002$		
t'	$= 14,54694$		
t''	$= 21,59931$		
α	$= 271^\circ 16' 38''$	β	$= +29^\circ 2' 0''$
α'	$= 266 27 22$	β'	$= +22 52 18$
α''	$= 256 48 8$	β''	$= +9 53 12$
L	$= 17 47 41$	$\log R$	$= 0,00091$
L'	$= 24 38 45$	$\log R'$	$= 0,00175$
L''	$= 31 31 25$	$\log R''$	$= 0,00260$

I. Die erste Operation besteht in der genäherten Bestimmung der Grösse M , wofür man folgenden Ausdruck hat

$$M = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{\tan \beta' \sin(\alpha - L') - \tan \beta \sin(\alpha' - L')}{\tan \beta'' \sin(\alpha' - L') - \tan \beta \sin(\alpha - L')}$$

Im gegenwärtigen Falle findet man $\log M = 9,75799$.

II. Alsdann müssen die Grössen g, G, h, H, ζ nach folgenden Formeln bestimmt werden, welche offenbar den obigen gleichgeltend, und für die Rechnung noch bequemer sind:

$$\begin{aligned} R' \cos(L'' - L) - R &= g \cos(G - L) \\ R' \sin(L'' - L) &= g \sin(G - L) \\ M - \cos(\alpha'' - \alpha) &= h \cos \zeta \cos(H - \alpha'') \\ \sin(\alpha'' - \alpha) &= h \cos \zeta \sin(H - \alpha'') \\ M \tan \beta'' - \tan \beta &= h \sin \zeta \end{aligned}$$

*) Ueber die Bedeutung der Hilfsgrößen g, G, h, H, ζ cf. Encke, p. 246 und 247 in seiner Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung.

g ist die Chorde der Erdbahn zwischen dem ersten und dritten Orte der Erde.

G die Länge des ersten Erdlorts vom dritten aus gesehen.

Wenn N ein Punkt dessen Coordinaten bezogen auf den dritten Erdort sind:

$$\varrho \cos \alpha, \varrho \sin \alpha, \varrho \tan \beta$$

so sind $h \varrho, H, \zeta$ die Polarcordinaten des dritten Cometenorts, bezogen auf N als Anfangspunkt, nämlich Abstand, Länge und Breite; h wird immer positiv genommen.

In unserm Beispiele erhält man

$$\begin{aligned} G &= 113^{\circ} 43' 57'' \\ \log g &= 9,38029 \\ H &= 109^{\circ} 5' 49'' \\ \zeta &= 44^{\circ} 13' 9'' \\ \log h &= 9,81477. \end{aligned}$$

III. Ferner setzt man

$$\begin{aligned} \cos \zeta \cos (G - H) &= \cos \varphi \\ \cos \beta \cos (\alpha - L) &= \cos \psi \\ \cos \beta' \cos (\alpha' - L') &= \cos \psi'' \\ g \sin \varphi &= A \\ R \sin \psi &= B \\ R' \sin \psi'' &= B'. \end{aligned}$$

Sollte es sich hier zufällig treffen, dass die Cosinus der Winkel φ , ψ , ψ'' nur wenig von der Einheit verschieden wären, so wird es gut sein, bei dieser Rechnung Logarithmen mit sechs oder sieben Decimalen zu gebrauchen. Es ist übrigens nicht nöthig, die Winkel φ , ψ , ψ'' in Graden, Minuten und Sekunden zu berechnen, sondern man kann sogleich in den Tafeln von den Logarithmen der Cosinus dieser Winkel zu denen der Sinus übergehen.

In unserm Beispiele wird

$$\begin{aligned} \log A &= 9,22527 \\ \log B &= 9,98706 \\ \log B' &= 9,86038 \end{aligned}$$

IV. Endlich setze man

$$\begin{aligned} h \cos \beta &= b \\ \frac{h \cos \beta'}{M} &= b'' \\ g \cos \varphi - b R \cos \psi &= c \\ g \cos \varphi - b' R' \cos \psi'' &= c'' \end{aligned}$$

In unserm Beispiele ist

$$\begin{aligned} \log b &= 9,75645 \\ \log b'' &= 0,05028 \\ c &= +0,31365 \\ c'' &= +0,95443 \end{aligned}$$

V. Nach diesen Transformationen hängen die radii vectores r , r'' und die Chorde k von der unbekanntem Grösse u auf folgende Art ab:

$$\begin{aligned} r &= V \left[\left(\frac{u+c}{b} \right)^2 + BB \right] \\ r'' &= V \left[\left(\frac{u+c''}{b''} \right)^2 + B'B' \right] \\ k &= V (uu + AA) \end{aligned}$$

Hieraus muss u durch Versuche so bestimmt werden, dass dadurch der Gleichung

$$(r + r'' + k)^2 - (r + r'' - k)^2 = \frac{r'' - r}{m}$$

ein Gentüge geschehe, in welcher m die Zeit von 9,6887401 Tagen bedeutet, wovon der Logarithmus = 0,9862673. Der Grösse $(r + r'' - k)^2$ müsste das Zeichen $+$ vorgesetzt werden, wenn der vom Cometen in der Zeit $t' - t$ durchlaufene heliocentrische Bogen grösser als 180° wäre. Dieser Fall kann indess bei den Voraussetzungen, worauf diese erste Bahnbestimmung sich gründet, nicht statt finden. Uebrigens wird es kaum nöthig sein zu bemerken, dass man bei der numerischen Berechnung von r einen Hülfswinkel ϑ einführt, so dass

$$\frac{bB}{u+c} = \tan \vartheta$$

wodurch $r = \frac{B}{\cos \vartheta}$ wird, und eben so bei r'' und k . Auch sieht man leicht ein, dass bei allen diesen Operationen meine Hilfstafel zur unmittelbaren Auffindung der Logarithmen der Summen und Differenzen sehr gute Dienste leisten werde.

In unserm Beispiele ist $\log \frac{t''-t}{u} = 0,16139$, und nach wenigen Versuchen findet man $u = 0,24388$.)

VI. Ist u bekannt, so hat man

$$\varrho = \frac{u+g \cos \varphi}{h}, \quad \varphi'' = M\varrho$$

(in unserm Beispiele $\log \varrho = 9,80364$, $\log \varphi'' = 9,56163$).

Die nun folgenden Operationen sind zwar hiulänglich bekannt; damit indes hier alles beisammen sei, so will ich auch die übrigen Formeln, deren ich mich gewöhnlich bediene, hersetzen. Es seien demnach

λ, λ'' die heliocentrischen Längen des Cometen bei der ersten und dritten Beobachtung,

δ, δ'' die heliocentrischen Breiten,

r, r'' die Längen in der Bahn,

Q die Länge des aufsteigenden Knotens,

i die Neigung der Bahn, die zwischen 0° und 90° angenommen werden muss, wenn man, wie gewöhnlich, rechtläufige und rückläufige Bewegung unterscheidet,

ω die Länge des Periheliums,

T die Zeit des Durchganges durchs Perihelium,

q der Abstand im Perihelio.

VII. Die heliocentrischen Positionen findet man durch die Formeln

$$\begin{aligned} \varrho \cos (\alpha - L) - R &= r \cos \delta \cos (\lambda - L) \\ \varrho \sin (\alpha - L) &= r \cos \delta \sin (\lambda - L) \\ \varrho \tan \beta &= r \sin \delta \\ \varrho'' \cos (\alpha'' - L'') - R'' &= r'' \cos \delta'' \cos (\lambda'' - L'') \\ \varrho'' \sin (\alpha'' - L'') &= r'' \cos \delta'' \sin (\lambda'' - L'') \\ \varrho'' \tan \beta'' &= r'' \sin \delta'' \end{aligned}$$

Stimmen die aus diesen Ausdrücken erhaltenen Werthe für r, r'' mit denen überein, die vorhin aus der Grösse u abgeleitet waren, so wird dieses die Richtigkeit der Rechnung bestätigen. Die Bewegung des Cometen wird rechtläufig oder rückläufig sein, je nachdem λ'' grösser oder kleiner ist als λ .

*) cf. Encke, p. 248. Kennt man sonst keine Näherung für ϱ , oder r und r'' , wodurch u genähert bekannt würde, so kann man ausgehen von

$$u = \pm V \left[\left(\frac{t''-t}{41} \right)^2 - AA \right]$$

Diese Versuche werden durch die unten Seite 52 folgende Tafel erleichtert, welche für

$$\varphi = \frac{x(t''-t)^\mu}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}$$

den Werth von μ giebt, durch welchen strenge den Werthen von r, r'' und $t''-t$ entsprechend wird:

$$k = \frac{x(t''-t)^\mu}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}$$

wo $\log x = 8,536614$.

Man kann dabei den Gang so nehmen, dass man für einen Werth von u aus V. berechnet k, r', r'' , dann vermittelst der Tafel aus r, r'' das zugehörige φ berechnet, hiermit μ aus der Tafel nimmt, und so einen Werth für k erhält, der den Werthen von $r, r'', t''-t$ entspricht. Es wird u so lange variiert, bis dieser zweite Werth von k völlig übereinstimmt mit dem aus der obigen Formel sub V. berechneten.

In unserm Beispiele findet sich

$$\lambda = 225^{\circ} 4' 22'', \quad \delta = +14^{\circ} 51' 39'', \quad \log r = 0,13896$$

$$\lambda'' = 223^{\circ} 6' 55'', \quad \delta'' = +2^{\circ} 49' 28'', \quad \log r'' = 0,11068$$

Die Bewegung des Cometen ist also *rückläufig*.

VIII. Zur Bestimmung der Länge des aufsteigenden Knotens und der Neigung bediene ich mich folgender Formeln:

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{tang} \delta &= \operatorname{tang} i \sin (\lambda - \Omega) \\ \pm \frac{\operatorname{tang} \delta'' - \operatorname{tang} \delta \cos (\lambda'' - \lambda)}{\sin (\lambda'' - \lambda)} &= \operatorname{tang} i \cos (\lambda - \Omega), \end{aligned}$$

wo die obere Zeichen sich auf rechtläufige, die untern auf rückläufige Bewegung beziehen. Die Längen in der Bahn erhält man dann durch die Ausdrücke

$$\frac{\operatorname{tang} (\lambda - \Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang} (v - \Omega)$$

$$\frac{\operatorname{tang} (\lambda'' - \Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang} (v'' - \Omega),$$

wo $v - \Omega$, $v'' - \Omega$ resp. in denselben Quadranten genommen werden müssen, in denen $\lambda - \Omega$, $\lambda'' - \Omega$ sind.*)

Für unsern Cometen erhält man

$$\begin{aligned} \Omega &= 42^{\circ} 40' 8'' \\ i &= 81 \quad 1 \quad 3 \\ v &= 237 \quad 43 \quad 7 \\ v'' &= 225 \quad 31 \quad 32. \end{aligned}$$

IX. Die Länge des Periheliums und die Distanz im Perihelio geben folgende Formeln:

$$\frac{1}{V r} + \frac{1}{V q} \cos \frac{1}{2} (v - \omega)$$

$$\frac{\operatorname{cotang} \frac{1}{2} (v'' - v)}{V r} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2} (v'' - v) \cdot V r''} = \frac{1}{V q} \sin \frac{1}{2} (v - \omega)$$

Bei unserm Cometen wird $\omega = 197^{\circ} 37' 51''$, $\log q = 0,08469$.

X. Endlich nimmt man aus der Barker'schen Tafel die mittleren Bewegungen, welche den wahren Anomalien $v - \omega$, $v'' - \omega$ oder $\omega - v$, $\omega - v''$ entsprechen. Bezeichnet man sie durch M , M'' , so erhält man

$$T = t \mp M n q^{\frac{1}{2}} = t'' \mp M'' n q^{\frac{1}{2}}$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn bei rechtläufiger Bewegung $v > \omega$, $v'' > \omega$, oder bei rückläufiger $v < \omega$, $v'' < \omega$; die untern in entgegengesetzten Fällen. Die Grösse n ist eine Constante, und ihr Logarithmus = 0,0398723. Die Uebereinstimmung der beiden Werthe für T ist eine zweite Bestätigung der Richtigkeit des Calculs.

In unserm Beispiele findet man

$$\begin{aligned} T &= 49,518 \\ T &= 49,517 \end{aligned}$$

so dass man für die Zeit des Durchganges durchs Perihelium annehmen kann Mai 19,5175.

Berechnet man nach diesen Elementen den geocentrischen Ort des Cometen für die Zeit der mittlern Beobachtung, so findet sich die Länge = $266^{\circ} 27' 15''$, die nördliche Breite = $22^{\circ} 52' 18''$, jene bis auf $7''$, diese genau mit der Beobachtung übereinstimmend.

*) Auch hat man hier (cf. Encke, p. 249) noch die Prüfung, dass der früher für die Chorde k berechnete Werth übereinstimmen muss mit:

$$\sqrt{(r^2 + r''^2 - 2 r r'' \cos (v'' - v))}$$

TAFEL

zur Auflösung der Lambert'schen Gleichung.

η	$\lg \mu$	Diff.	η	$\log \mu$	Diff.	η	$\log \mu$	Diff.
0,00	0,000 0000		0,30	0,001 6733	1168	0,60	0,007 3526	2835
0,01	0018	018	0,31	1 7901	1211	0,61	7 6361	2913
0,02	0072	054	0,32	1 9112	1255	0,62	7 9274	2994
0,03	0162	090	0,33	2 0367	1299	0,63	8 2268	3077
0,04	0289	127	0,34	2 1666		0,64	8 5345	
		163			1344			3163
0,05	0452	200	0,35	2 3010	1389	0,65	8 8508	3251
0,06	0652	236	0,36	2 4399	1435	0,66	9 1759	3344
0,07	0888	273	0,37	2 5834	1481	0,67	9 5103	3439
0,08	1161	309	0,38	2 7315	1528	0,68	9 8542	3539
0,09	1470		0,39	2 8843		0,69	10 2081	
		346			1577			3642
0,10	0,000 1816		0,40	0,003 0420	1625	0,70	0,010 5723	3750
0,11	2199	383	0,41	3 2045	1675	0,71	10 9473	3862
0,12	2618	419	0,42	3 3720	1725	0,72	11 3335	3980
0,13	3074	456	0,43	3 5445	1777	0,73	11 7315	4104
0,14	3568	494	0,44	3 7222		0,74	12 1419	
		531			1828			4233
0,15	4099	569	0,45	3 9050	1881	0,75	12 5652	4370
0,16	4668	607	0,46	4 0931	1936	0,76	13 0022	4514
0,17	5275	645	0,47	4 2867	1991	0,77	13 4536	4666
0,18	5920	683	0,48	4 4858	2048	0,78	13 9202	4829
0,19	6603		0,49	4 6906		0,79	14 4031	
		722			2105			5001
0,20	0,000 7325		0,50	0,004 9011	1264	0,80	0,014 9032	5186
0,21	0 8086	761	0,51	5 1175	1223	0,81	15 4218	5385
0,22	0 8886	800	0,52	5 3398	2285	0,82	15 9603	5599
0,23	0 9725	839	0,53	5 5683	2347	0,83	16 5202	5831
0,24	1 0604	879	0,54	5 8030		0,84	17 1033	
		919			2411			6086
0,25	1 1523	960	0,55	6 0441	2478	0,85	17 7119	6367
0,26	1 2483	1001	0,56	6 2919	2546	0,86	18 3486	6679
0,27	1 3484	1041	0,57	6 5465	2615	0,87	19 0165	7010
0,28	1 4525	1083	0,58	6 8080	2686	0,88	19 7195	7434
0,29	1 5608		0,59	7 0766		0,89	20 4629	
		1125			2760			7900
0,30	0,001 6733		0,60	0,007 3526	2835	0,90	0,021 2529	8463
0,31	1 7901	1168	0,61	7 6361	2913	0,91	22 0992	9168
0,32	1 9112	1211	0,62	7 9274		0,92	23 0160	

VII.

Einige Bemerkungen zur Vereinfachung der Rechnung für die geocentrischen Oerter der Planeten. Von Dr. Gauss in Braunschweig.

(Vergl. Art 53—57 der *Theoria motus*.)

Seit der Erfindung der Pendeluhrn beziehen sich alle unsere Beobachtungen der Fixsterne, Planeten und Cometen nicht auf ihre Lage gegen die Ecliptik, sondern unmittelbar auf ihre Lage gegen den Aequator. In unsern neuesten und besten Sternverzeichnissen und Sternkarten sind gleichfalls nicht Länge und Breite, sondern Rectascension und Declination zum Grunde gelegt. Man hat daher sehr häufig Veranlassung, für Planeten und Cometen ihre geocentrischen Oerter in Beziehung auf den Aequator aus ihren heliocentrischen Oertern in ihrer Bahn zu berechnen; und man würde diese Veranlassung noch häufiger haben, wenn man sich entschloesse, in den astronomischen Ephemeriden anstatt der wenig nützenden Längen und Breiten der Planeten durchgängig die in jeder praktischen Hinsicht viel brauchbarern geraden Aufsteigungen und Abweichungen anzusetzen. Dies hat der vortreffliche Römer (in einem Briefe an Leibnitz. Horrebowl Opera T. II, p. 142) bereits vor hundert Jahren angerathen und besonders wird es ganz unentbehrlich für die beiden neuesten Planeten, die so schwer zu beobachten; und nur vermittelt sehr detaillirter Himmelskarten aus den sie umgebenden kleinen Fixsternen herauszufinden sind. Eben so häufig würde die allgemeinere Befolgung eines andern Vorschlages zu jener Rechnung Gelegenheit geben, nämlich bei Vergleichung des beobachteten Orts eines Planeten oder Cometen mit dem berechneten unmittelbar die beobachtete gerade Aufsteigung und Abweichung zum Grunde zu legen, und nicht erst, wie gewöhnlich geschieht, aus diesen eine sogenannte beobachtete Länge und Breite abzuleiten. Die mit diesem Verfahren verbundenen Vortheile sind bereits von einem competenten Richter im V. Bande der M. C. S. 594 erwähnt worden.

Aus diesem Gesichtspunkte hat man die geocentrische Länge und Breite des Planeten nur als Mittelgrößen anzusehen, um seine Lage gegen den Aequator zu finden. Es wird daher obigen Vorschlägen vielleicht zu einer Empfehlung mehr dienen, dass man dieser Zwischenrechnung, ja selbst der Reduction des heliocentrischen Orts in der Bahn auf den heliocentrischen Ort in Beziehung auf die Ecliptik ganz überhoben sein, und durch sehr einfache und geschmeidige Formeln, welche in gegenwärtigem Aufsatze entwickelt werden sollen, aus jenem die geocentrische Rectascension und Declination unmittelbar ableiten kann. Zu diesen Vortheilen kann man noch die grosse Leichtigkeit hinzufügen, womit sich bei diesem Verfahren die Parallaxe auch in dem Falle mit in Rechnung bringen lässt, wenn der Planet sich ausser dem Meridiane des Beobachtungsorts befindet, welches zwar seltener nöthig, dann aber auch bei andern Methoden ungleich beschwerlicher ist.

Durch den Mittelpunkt der Sonne lege man drei auf einander senkrechte Ebenen, die eine parallel mit dem Erdaequator, die zweite durch die Punkte der Nachtgleichen, also die dritte durch die Punkte der Sonnewenden. Es heissen die senkrechten Abstände des Mittelpunkts der Erde von diesen drei Ebenen respective Z, Y, X , und die Abstände eines Planeten von eben denselben z, y, x . Diese Abstände sollen als positiv angenommen werden bei der ersten Ebene auf der Seite, wo der Nordpol liegt, bei der zweiten auf der Seite der Sommer-sonnenwende, bei der dritten auf der Seite der Frühlings-Nachtgleiche. Es werden demnach $z - Z, y - Y, x - X$ die auf ähnliche Art genommenen senkrechten Abstände des Planeten von dreien, den obigen parallel durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebenen sein. Bezeichnet man also die geocentrische gerade Aufsteigung des Planeten durch α , seine Abweichung durch δ , den Abstand von der Erde durch J , so wird

$$x - X = J \cos \delta \cos \alpha; \quad y - Y = J \cos \delta \sin \alpha; \quad z - Z = J \sin \delta.$$

Man findet folglich α durch die Formel $\tan \alpha = \frac{y - Y}{x - X}$, wo das positive oder negative Zeichen des Zählers entscheiden muss, ob α in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen ist. Sodann wird $J \cos \delta = \frac{x - X}{\cos \alpha} = \frac{y - Y}{\sin \alpha}$, und $\tan \delta = \frac{z - Z}{J \cos \delta}$.

Auf diese Weise erhält man also die Rectascension und Declination des Planeten aus dem Mittelpunkt der Erde gesehen. Verlangt man dieselben, wie sie aus einem Punkte auf der Oberfläche der Erde erscheinen, so ist in obigen Formeln weiter keine Aenderung nöthig, als dass man statt der Coordinaten des Mittelpunkts X, Y, Z , die Abstände des Beobachtungsortes von den drei Fundamentelebenen gebrauchen muss. Ist der Halbmesser der Erde = ϱ , die Polhöhe des Beobachtungsorts = φ , und die Sternzeit, die derselbe im Augenblicke der Beobachtung zählt, im Bogen, oder die gerade Aufsteigung des culminirenden Punkts des Aequators = δ ; so werden jene Abstände, wie man leicht übersehen wird:

$$X + \varrho \cos \varphi \cos \delta; \quad Y + \varrho \cos \varphi \sin \delta; \quad Z + \varrho \sin \varphi.$$

Hierbei ist die Erde als eine Kugel angenommen. Fände man es nöthig, auch auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen (welcher Fall bei Cometen eintreten könnte, die der Erde sehr nahe kämen), so dürfte man nur für ϱ die Entfernung des Beobachtungsorts vom Mittelpunkte der Erde, und für φ seine sogenannte verbesserte Polhöhe setzen, die nach bekannten Regeln bestimmt werden.

Man sieht jetzt also, dass es lediglich darauf ankommt, eine bequeme Methode zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z, x, y, z aufzusuchen. In dieser Absicht sei um die Sonne eine Kugelfläche mit unbestimmten Halbmesser beschrieben; auf derselben bezeichne P den Nordpol der Ecliptic, p den Nordpol der Ebene der Planetenbahn; K den Ort der Erde, k den heliocentrischen Ort des Planeten; endlich $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ diejenigen Pole der drei Fundamentebenen, die auf der Seite liegen, wo die Abstände x, y, z positiv genommen werden; also \mathfrak{Z} den Nordpol des Aequators, \mathfrak{X} den Punkt der Frühlings-Nachtgleiche, \mathfrak{Y} den Punkt des Aequators, der 90° Rectascension hat (eine Figur wird sich hiernach jeder, der es nöthig findet, leicht selbst entwerfen können). Setzen wir nun den Abstand der Erde von der Sonne = R , so wird offenbar

$$X = R \cos \mathfrak{X}K; \quad Y = R \cos \mathfrak{Y}K; \quad Z = R \cos \mathfrak{Z}K.$$

Folglich, da in dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{X}PK$ die Seite $PK = 90^\circ$, also $\cos \mathfrak{X}K = \sin \mathfrak{X}P \cos \mathfrak{X}PK$ ist,

$$X = R \sin \mathfrak{X}P \cos \mathfrak{X}PK, \text{ und ebenso } Y = R \sin \mathfrak{Y}P \cos \mathfrak{Y}PK \text{ und} \\ Z = R \sin \mathfrak{Z}P \cos \mathfrak{Z}PK$$

Ganz auf ähnliche Weise werden die Coordinaten des Planeten, wenn wir dessen Abstand von der Sonne durch r bezeichnen

$$x = r \sin \mathfrak{X}p \cos \mathfrak{X}pk; \quad y = r \sin \mathfrak{Y}p \cos \mathfrak{Y}pk; \quad z = r \sin \mathfrak{Z}p \cos \mathfrak{Z}pk.$$

Wir bemerken hier ein für allemal, dass wir den sphärischen Winkel $\mathfrak{X}PK$ so verstanden wissen wollen, wie der Schenkel PK auf den Schenkel $P\mathfrak{X}$ nach der Ordnung der Zeichen folgt, so dass also derselbe mit $KP\mathfrak{X}$ nicht gleichbedeutend sein soll, sondern beide einander zu 360° ergänzen. Eben so soll jeder andere sphärische Winkel zu verstehen sein. Durch eine solche nähere Bestimmung gewinnen wir den Vortheil, dass die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sich ohne weiteres auch auf Dreiecke mit Winkeln über 180° ausdehnen lassen, und weichen so der sonst Statt findenden Nothwendigkeit aus, mehrere einzelne Fälle unterscheiden zu müssen. Uebrigens werden Winkel, deren Unterschied 360° oder ein Vielfaches davon beträgt, jederzeit als gleichbedeutend angesehen werden.

*) Dieser ist also dem Sinus der mittleren Horizontalparallaxe der Sonne gleich, wenn die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit angenommen wird.

Wir nehmen nun zuvörderst die Coordinaten X , Y , Z vor, und setzen die Schiefe der Eclyptik $= \epsilon$, die heliocentrische Länge der Erde $= \lambda$ ($=$ geocentrische Länge der Sonne $+$ 180°). In obigen Formeln wird also $\mathfrak{X}P = 90^\circ$, $\mathfrak{Y}P = 90^\circ + \epsilon$, $\mathfrak{Z}P = \epsilon$, $\mathfrak{X}PK = \lambda$, $\mathfrak{Y}PK = \mathfrak{Z}PK = \lambda - 90^\circ$, folglich

$$X = R \cos \lambda; \quad Y = R \sin \lambda \cos \epsilon; \quad Z = R \sin \lambda \sin \epsilon.$$

Für den Planeten setzen wir Kürze halber $\mathfrak{X}p = a$, $\mathfrak{Y}p = b$, $\mathfrak{Z}p = c$, seine Entfernung in der Bahn vom aufsteigenden Knoten auf der Eclyptik $= t$, und die Winkel $\mathfrak{X}pP$, $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ respective $= A$, B , C . Man wird leicht übersehen, dass $Ppk = t - 90^\circ$ (oder nach obiger Anmerkung $= \gamma + 270^\circ$), also $\mathfrak{X}pk = A + t - 90^\circ$, $\mathfrak{Y}pk = B + t - 90^\circ$, $\mathfrak{Z}pk = C + t - 90^\circ$. Es wird demnach

$$x = r \sin a \sin(A + t); \quad y = r \sin b \sin(B + t); \quad z = r \sin c \sin(C + t).$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Größen a , A u. s. w., die nur von der Lage der Bahn des Planeten, nicht von seinem jedesmaligen Orte in derselben abhängig sind, aus der Neigung der Ebene dieser Bahn und der Länge des aufsteigenden Knotens abzuleiten; wir bezeichnen jene mit i , diese mit n . Die Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{X}pP$ giebt uns folgende drei Gleichungen:

$$\cotang \mathfrak{X}pP = \frac{\sin pP \cotang \mathfrak{X}P - \cos pP \cos pP \mathfrak{X}}{\sin pP \mathfrak{X}}$$

$$\cos \mathfrak{X}p = \cos pP \cos \mathfrak{X}P + \sin pP \sin \mathfrak{X}P \cos pP \mathfrak{X}$$

$$\sin \mathfrak{X}p = \frac{\sin \mathfrak{X}P \sin pP \mathfrak{X}}{\sin \mathfrak{X}pP}$$

Ebenso geben die Dreiecke $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ jedes drei ähnliche Gleichungen, welche hier herzusetzen unnötig ist, da man, um sie zu erhalten, in den drei obigen nur \mathfrak{X} mit \mathfrak{Y} und \mathfrak{Z} zu vertauschen hat. Nun ist $pP = i$, $pP\mathfrak{X} = 90^\circ - n$, $pP\mathfrak{Y} = pP\mathfrak{Z} = 180^\circ - n$. Mit diesen und den übrigen Substitutionen werden unsere neun Gleichungen diese:

$$\cotang A = -\cos i \tang n$$

$$\cos a = \sin i \sin n;$$

$$\sin a = \frac{\cos n}{\sin A}$$

$$\cotang B = \frac{-\sin i \tang \epsilon + \cos i \cos n}{\sin n}$$

$$\cos b = -\cos i \sin \epsilon - \sin i \cos \epsilon \cos n;$$

$$\sin b = \frac{\cos \epsilon \sin n}{\sin B}$$

$$\cotang C = \frac{\sin i \cotang \epsilon + \cos i \cos n}{\sin n}$$

$$\cos c = \cos i \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \cos n;$$

$$\sin c = \frac{\sin \epsilon \sin n}{\sin C}$$

Die Unbestimmtheit, ob man A , B und C in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen habe, wird man so entscheiden, dass die Sinus von a , b und c positiv werden. Man nimmt also A in den beiden ersten Quadranten, wenn $\cos n$ positiv, B und C in eben denselben, wenn $\sin n$ positiv ist; in den entgegengesetzten Fällen aber in den beiden letzten Quadranten.

Die vierte, fünfte, siebente und achte dieser Gleichungen lassen sich durch die Einführung von Hilfswinkeln noch bequemer einrichten. Dies kann auf eine doppelte Weise geschehen:

Erstlich wenn man $\frac{\tan g i}{\cos n} = \tan g E$ und $\tan g i \cos n = \tan g F$ setzt, so wird

$$\begin{aligned}\cotang B &= \frac{\sin i \cos (E+i)}{\sin n \cos i \sin E} = \frac{\cos i \cos (E+i)}{\tan g n \cos i \cos E} \\ \cos b &= -\frac{\cos i \sin (F+i)}{\cos F} = -\frac{\sin i \cos n \sin (F+i)}{\sin F} \\ \cotang C &= \frac{\sin i \sin (E+i)}{\sin n \sin i \sin E} = \frac{\cos i \sin (E+i)}{\tan g n \sin i \cos E} \\ \cos c &= -\frac{\cos i \cos (F+i)}{\cos F} = \frac{\sin i \cos n \cos (F+i)}{\sin F}.\end{aligned}$$

Zweitens, macht man $\frac{\tan g i}{\cos n} = \tan g G$, und $\tan g i \cos n = \tan g H$, so wird:

$$\begin{aligned}\cotang B &= \frac{\cos (G+i)}{\tan g n \cos G} = \frac{\tan g i \cos (G+i)}{\sin i \sin G} \\ \cos b &= -\frac{\sin i \sin (G+i)}{\sin G} = -\frac{\cos n \cos i \sin (G+i)}{\cos G} \\ \cotang C &= \frac{\sin (H+i)}{\sin n \tan g i \cos H} = \frac{\sin (H+i)}{\tan g n \sin H} \\ \cos c &= \frac{\cos i \cos (H+i)}{\cos H} = \frac{\sin i \cos n \cos (H+i)}{\sin H}.\end{aligned}$$

Es wird wohl der Mühe werth sein, noch einige Relationen zwischen den Grössen A , a u. s. w. zu entwickeln. Das sphärische Dreieck $\bar{x}p\bar{y}$ giebt $\cos \bar{x}y) = \cos \bar{x}p \cos \bar{y}p + \sin \bar{x}p \sin \bar{y}p \cos \bar{x}p\bar{y}$. Allein $\bar{x}y) = 90^\circ$ und $\bar{x}p\bar{y}) = \bar{x}pP - \bar{y}pP = A - B$. Also $\cos(A - B) = -\cotang a \cotang b$.

Ebenso geben die Dreiecke $\bar{y}p\bar{z}$, $\bar{z}p\bar{x}$

$$\begin{aligned}\cos(B - C) &= -\cotang b \cotang c \\ \cos(C - A) &= -\cotang c \cotang a\end{aligned}$$

Ferner wird in dem Dreiecke $\bar{x}p\bar{y}$, $\cos a = \cos p \bar{y} \bar{x} \sin b$, und in dem Dreiecke $\bar{y}p\bar{z}$, $\sin \bar{z}p\bar{y} = \sin \bar{y}p\bar{z} \sin c$. Da nun $\bar{z}p\bar{y} + p\bar{y}\bar{x} = \bar{z}p\bar{x} = 90^\circ$, so hat man $\cos a = \sin b \sin c \sin \bar{y}p\bar{z}$, oder da $\bar{y}p\bar{z} = B - C$ ist

$$\sin(B - C) = \frac{\cos a}{\sin b \sin c}$$

Ganz auf ähnliche Art findet man

$$\sin(C - A) = \frac{\cos b}{\sin c \sin a}; \quad \sin(A - B) = \frac{\cos c}{\sin a \sin b}$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den vorigen giebt noch

$$\cotang(A - B) = -\frac{\cos a \cos b}{\cos c}; \quad \cotang(B - C) = -\frac{\cos b \cos c}{\cos a}$$

$$\begin{aligned}\cotang(C - A) &= -\frac{\cos c \cos a}{\cos b} \\ \cos a^2 &= \cotang(A - B) \cotang(C - A) \\ \cos b^2 &= \cotang(B - C) \cotang(A - B) \\ \cos c^2 &= \cotang(C - A) \cotang(B - C)\end{aligned}$$

und auf ähnliche Art lassen sich die Quadrate der Sinus und Tangenten der Seiten a , b , c durch die Winkel $A - B$, $B - C$, $C - A$ darstellen.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, wollen wir einige derselben auf die Pallas anwenden, und dabei die neuesten Elemente dieses Planeten für 1803 zum Grunde legen. Wir setzen also

$$\begin{aligned}i &= 34^\circ 38' 1''; & n &= 172^\circ 28' 13'' \\ \varepsilon &= 23^\circ 27' 55'' 8 \text{ (mittlere Schiefe nach Maskelyne für 1803)}.\end{aligned}$$

Mit diesen Elementen steht die Rechnung folgendermaassen:

$\log \cos i$	\equiv	9,915 2958	$\log \cos t$	\equiv	0,880 0665
$\log \tan n$	\equiv	9,121 1553 <i>n</i>	$\log \sin (E + \epsilon)$	\equiv	9,295 9318
$\log \cotang A$	\equiv	9,036 4511	$\text{Compl. } \log \sin \epsilon$	\equiv	0,399 9023
Also <i>A</i>	\equiv	263° 47' 35" 4	$\log \cotang C$	\equiv	0,575 9006
$\log \cos n$	\equiv	9,996 2390 <i>n</i>	$\log \sin \epsilon$	\equiv	14° 52' 12" 5
$\log \sin a$	\equiv	9,997 4467 <i>n</i>	$\log \cos \epsilon$	\equiv	9,962 5114
$\log \sin a$	\equiv	9,998 7923	$\log \sin n$	\equiv	9,117 3944
$\log \sin i$	\equiv	9,754 5982	$\text{Compl. } \log \sin B$	\equiv	0,912 1791
$\log \sin n$	\equiv	9,117 3944	$\log \sin b$	\equiv	9,992 0849
$\log \cos a$	\equiv	8,871 9926	$\log \sin \epsilon$	\equiv	9,600 0977
Hieraus <i>a</i>	\equiv	85° 43' 44" 8	$\log \sin n$	\equiv	9,117 3944
$\log \tan i$	\equiv	9,839 3024	$\text{Compl. } \log \sin C$	\equiv	0,590 6942
$\log \cos n$	\equiv	9,996 2390 <i>n</i>	$\log \sin c$	\equiv	9,308 1863
$\log \tan E$	\equiv	9,843 0634 <i>n</i>	$\log \cos i$	\equiv	9,915 2958
$\log \tan F$	\equiv	9,835 5414 <i>n</i>	$\log \cos F'$	\equiv	9,916 5035 <i>n</i>
Also <i>E</i>	\equiv	145° 8' 2" 4	$\log \sin (F' + \epsilon)$	\equiv	9,998 7923 <i>n</i>
<i>F</i>	\equiv	145° 35' 52" 9	$\log \cos (F' + \epsilon)$	\equiv	9,278 1142
<i>E</i> + ϵ	\equiv	168° 35' 58" 2	$\log \cos C$	\equiv	9,992 0399 <i>n</i>
<i>F</i> + ϵ	\equiv	169° 3' 48" 7	$\log \cos b$	\equiv	9,276 9065
$\log \cos i$	\equiv	9,915 2958	$\log \cos C$	\equiv	9,990 8322
$\text{Compl. } \log \tan n$	\equiv	0,878 8447 <i>n</i>	Also <i>b</i>	\equiv	79° 5' 39" 4
$\text{Compl. } \log \cos E$	\equiv	0,085 9260 <i>n</i>	<i>c</i>	\equiv	11° 43' 52" 8
$\log \cos t$	\equiv	0,880 0665			
$\log \cos (E + \epsilon)$	\equiv	9,991 3455 <i>n</i>			
$\text{Compl. } \log \cos \epsilon$	\equiv	0,837 4886			
$\log \cotang B$	\equiv	0,908 9009 <i>n</i>			
Hieraus <i>B</i>	\equiv	172° 58' 7" 4			

Wenn man nur die Sinus von *a*, *b*, *c* verlangt, so ist die Rechnung für ihre Cosinus nicht nöthig, und man kann also auch den Hüllswinkel *F* entbehren. Will man aber auch *a*, *b*, *c* selbst kennen, so dienen die Cosinus (wovon nachher noch ein Gebrauch vorkommt) dazu, die Zweideutigkeiten, welche die Sinus allein dabei übrig lassen, zu entscheiden. Auch geben sie dann, wenn die Sinus näher bei 1 sind, eine schärfere Bestimmung, und zugleich eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung. Zu dieser letzten Absicht ist auch noch der Umstand brauchbar, dass $\frac{\cos i}{\cos F} = +\sin a$ ist, wo das obere Zeichen gilt, wenn *F* mit *A* zugleich in den beiden ersten oder letzten Quadranten liegt; das untere, wenn *F* in einer andern Hälfte des Umfangs angenommen ist als *A*. (Zur Entwicklung des Grundes davon dient die Bemerkung, dass *F* im ersten Falle mit dem Winkel *PXp* einerlei, im zweiten 180° davon verschieden ist).

Die Grössen ϵ , *n*, *i* sind Secularänderungen unterworfen; dasselbe wird also auch der Fall mit den davon abhängigen *A*, *a*, *B*, *b*, *C*, *c* sein. Sind die jährlichen Aenderungen von jenen bekannt, so können die Aenderungen von *A*, *a* u. s. w. durch leicht zu entwickelnde Differentialformeln berechnet werden, bei welchen wir uns hier nicht aufhalten wollen. Man kann auch die Werthe von *A*, *a* u. s. w. für eine entferntere Epoche von neuem berechnen, und daraus ihre jährlichen Aenderungen ableiten.

Ausserdem leiden diese Grössen wegen der Nutation noch periodische Aenderungen, die mit jedem Umlaufe der Mondsknoten wiederkehren. Da man nämlich die geocentrische Lage des Planeten gegen den wahren Aequator verlangt, so muss eigentlich für ϵ nicht die mittlere, sondern die wahre Schiefe der Ekliptik, und für *n* die Entfernung des aufsteigenden

Knotens vom wahren, nicht vom mittlern Aequinoctialpunkte genommen werden. Die hieraus entspringenden periodischen Aenderungen können nach eben den Differentialformeln wie die Seculäränderungen berechnet, und in eine Tafel, deren Argument die Länge des Mondknotens ist, gebracht werden. Wenn man eine zahlreiche Menge geocentrischer Orter für einen nicht zu grossen Zeitraum zu berechnen hat, wird man es in Ermangelung einer solchen Tafel am bequemsten finden, für zwei Epochen zu Anfang und Ende desselben die wahren Werthe von A , a u. s. w. zugleich unmittelbar aus den wahren Werthen von t , i , n zu berechnen, und für dazwischen liegende Zeiten sie daraus durch einfache Interpolation abzuleiten. Ein Jahr hindurch kann man ohne Bedenken diese Aenderungen als gleichförmig ansehen.

Man könnte auch die von der Nutation abhängigen periodischen Aenderungen ganz übergehen, und sich der mittlern Werthe von A , a u. s. w. bedienen: dann müsste man aber auch bei der Erde für ϵ die mittlere Schiefe der Ekliptik gebrauchen, und von der Länge λ die Nutation weglassen, um den Abstand vom mittlern Aequinoctium zu haben. Der Erfolg davon ist sodann, dass man die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten in Beziehung auf den mittlern Aequator erhält, woraus man dann seine Lage gegen den wahren Aequator eben so ableitet, wie man den mittlern Ort eines Fixsterns durch Anbringung der Nutation auf den scheinbaren reducirt.

Wir haben jetzt nur noch einiges über die Perturbationen hinzuzufügen. Die Störungen der Breite, von denen allein natürlich hier die Rede ist, sind bei allen ältern Planeten so unbedeutend, dass man sie mit Recht ganz vernachlässigen kann; bloss bei der Ceres und Pallas wird es wegen der starken Neigung der Bahnen dieser Planeten gegen die Jupitersbahn notwendig, sie mit in Rechnung zu nehmen. Es giebt dazu einen doppelten Weg. Man kann nämlich entweder diejenigen Elemente, welche die Lage der Bahn bestimmen, die Neigung und die Länge des Knotens, als veränderlich ansehen und ihre mittlern Werthe durch periodische Gleichungen verbessern, oder auch geradezu untersuchen, wie viel der Planet aus der mittlern Ebene seiner Bahn herauszuweichen durch fremde Kräfte geüchigt sein wird. Im ersten Falle wird man jene Aenderungen auch auf die Grössen A , a u. s. w. übertragen, also diesen ausser den von der Nutation abhängenden noch andere periodische Gleichungen beifügen, deren Argumente mit denen für die Gleichungen der Neigung und der Länge des Knotens übereinkommen werden. Dieses Verfahren ist jedoch bisher nicht üblich gewesen. Bei der zweiten Methode hingegen werden die Störungstafeln die Perturbation der heliocentrischen Breite angeben, welche aber eigentlich nichts anders ist, als die heliocentrische Breite des Planeten über der mittlern Ebene seiner Bahn. Es sei dieselbe $= \beta$, gegen den Nordpol zu als positiv, gegen den Südpol zu als negativ angesehen. In dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{P}pk$ ist also die Seite pk nicht wie vorher $= 90^\circ$ sondern $= 90^\circ - \beta$ folglich

$$x = r \cos \mathfrak{A} k = r (\sin \beta \cos a + \cos \beta \sin a \sin (t + A));$$

und ebenso

$$y = r (\sin \beta \cos b + \cos \beta \sin b \sin (t + B))$$

$$z = r (\sin \beta \cos c + \cos \beta \sin c \sin (t + C))$$

In so fern hier β höchstens nur einige Minuten betragen kann, wird man $\cos \beta = 1$ und $\sin \beta = \beta$ setzen dürfen. Hieraus erhellt, dass man wegen der Störungen zu den ohne sie gefundenen Werthen von x , y , z nur noch die Grössen $\beta r \cos a$, $\beta r \cos b$, $\beta r \cos c$ hinzuzusetzen habe, wo β in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden muss.

VIII.

Auszug aus einer Abhandlung des Herrn Professors Dr. Klinkerfues über Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen (aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pag. 196 bis 205). *Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei Beobachtungen, von denen eine unvollständig ist. Mit Tafeln.*

Es ist bekannt, dass die Astronomen bei Beobachtung der Cometen sich vorzugsweise des Kreismikrometers bedienen müssen, und dass die Declinationsbestimmungen mit diesem Instrumente gewisse Vorsichtsmaassregeln erfordern, wenn dieselben gelingen sollen. Die Rectascension wird, wie den Beobachtern bekannt ist, immer viel leichter erhalten. Besonders sind meist in der Nacht der Entdeckung die Umstände für die sichere Beobachtung in Declination ungünstig, weil dieselbe das Aufsuchen eines guten Vergleichsterns, kurz Vorbereitungen erfordert, zu welchen keine Zeit bleibt. Ueberhaupt findet in den ersten Tagen nach der Entdeckung und vor Berechnung einer Ephemeride eine grössere Schwierigkeit in dieser Beziehung Statt, wenn auch in geringerem Grade als bei der Entdeckung selbst. So häufig deshalb der Fall, dass eine der drei Declinationen unsicher, oder überhaupt nicht erhalten ist, vorkommt, so hat doch meines Wissens, noch Niemand bis jetzt die erste Bahnbestimmung auf solche fünf Daten gestützt, sondern man hat eine dritte vollständige Beobachtung abgewartet. Ich weiss keinen andern Grund dafür zu finden, als den, dass hier die Olbers'sche Methode nicht passt. Zur Noth kann man allerdings damit eine Bahn drei Längen und zwei Breiten anschliessen, aber diese Combination hat keine praktische Bedeutung, abgesehen davon, dass die Rechnung doch recht mühsam ausfallen würde.

Die folgende Methode, aus drei geocentrischen Beobachtungen, von denen eine die Declination gar nicht oder nur geschätzt enthält, eine parabolische Bahn zu berechnen, bleibt, wie ein Beispiel unten zeigen wird, auch in ungünstigen Fällen noch sehr bequem. Als günstigster Fall nämlich ist zu betrachten, wenn die unvollständige Beobachtung, deren Rectascension im Folgenden immer mit α' bezeichnet ist, die zweite ist, und wenn ausserdem das Zeitintervall zwischen der ersten und dritten Beobachtung $t' - t$ durch t' nahe halbt wird; alsdann gelangt man am Leichtesten zu dem beliebigen scharfen Resultate, welches sich durch die Methode erzielen lässt. Die ungünstigeren Fälle, für welche übrigens die Form dieselbe bleibt, (indem eben stets α' die Rectascension der unvollständigen Beobachtung vorstellt) sind die, wobei dieser unvollständige Ort der erste oder der dritte ist.

Die Parallaxe und Aberration wird, soweit ich den Gebrauch der Rechner kenne, meinst bei der ersten Bahnbestimmung vernachlässigt; es kann dies nur in seltenen Fällen erhebliche Folgen haben und erscheint wegen der Mühe, die die Berücksichtigung bei der Olbers'schen Methode verursachen würde, ganz gerechtfertigt. Da aber, wie eben bemerkt, diese Vernachlässigung von bedeutenderem Einfluss werden kann, so ist es nicht gleichgültig, dass bei der vorliegenden Methode der obige Grund für die Vernachlässigung wegfällt. Uebrigens ist schon weiter oben von der Art, Parallaxe und Aberration zu berücksichtigen, auch von der für die Bahnberechnung (und zugleich für die Beobachter) bequemsten Form, die Beobachtungen mitzutheilen, die Rede gewesen, wobei ich also, da es hier ungewändert Anwendung findet, nicht verweile.

Der Methode selbst schiebe ich eine Reihenentwicklung für das Verhältniss des parabolischen Sectors zum Dreieck voraus, welche sich in dem *Gauss'schen Nachlasse* findet. Wenn nämlich r und r' die den Sector

begrenzenden und zwei Zeiten t und t' entsprechenden Radien Vektoren sind, x die beide verbindende Sehne, so setzt Gauss

$$\frac{x}{r+r'} = \sin \varphi$$

und kann alsdann die Lambert'sche Gleichung in folgender Form schreiben

$$2k(t'-t) = x \sqrt{r+r'} \frac{2+\cos \varphi}{3 \cos \frac{1}{2} \varphi} = x \sqrt{r+r'} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \alpha - \frac{1}{128} \alpha^2 - \frac{1}{1024} \alpha^3 - \dots \text{etc.} \right\}$$

wobei $\alpha = \frac{x^2}{(r+r')^2}$. Ausserdem wird aber noch

$$\frac{\text{Ausschnitt}}{\text{Dreieck}} = \frac{2+\cos \varphi}{3 \cos \frac{1}{2} \varphi} = 1 + \frac{1}{3} \alpha + \frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{5}{24} \alpha^3 + \frac{35}{192} \alpha^4 + \dots \text{etc.}$$

Setzt man daher

$$\frac{4k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3} = \beta$$

so wird

$$\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}} = 1 - \frac{1}{3} \beta - \frac{1}{6} \beta^2 - \frac{1}{6} \beta^3 - \frac{499}{5184} \beta^4 - \dots \text{etc.}^*)$$

Nach dieser Reihenentwicklung habe ich eine kleine Tafel berechnet, welche für $\frac{k^2(t'-t)^2}{(r+r')^3}$ als Argument $\log \frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$ giebt.

Da, wie man sehen wird, die drei bei der Bahnbestimmung in Betracht kommenden Radien Vektoren leicht erhalten werden können, so fällt der Nutzen dieser Tafel in die Augen. Von derselben habe ich bei der folgenden Rechnung Gebrauch gemacht, bevor ich eine andere Hilfstafel construirt hatte, die für die scharfe Bestimmung einer parabolischen Bahn möglichst compendiös ist. Nach dem Vorhergehenden wird $\sin \frac{1}{2} \varphi$ die kleinste positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{2} \frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\text{Setzt man daher } \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \zeta = \sin 3\psi, \text{ so wird}$$

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \sin \psi \cdot \sqrt{2}$$

Man könnte nun die Lambert'sche Gleichung durch die Relation

$$x = (r+r') \sin \varphi$$

ersetzen, aber diese Form ist für Construction einer Tafel nicht bequem wegen der grossen Ausdehnung, die man einer solchen geben müsste; es wird aber auch

$$x = \frac{2k(t'-t)}{\sqrt{r+r'}} \cdot \frac{3 \cos \frac{1}{2} \varphi}{2 + \cos \varphi} = 6 \cdot \zeta (r+r') \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{2 + \cos \varphi}$$

Ich habe in einer der beifolgenden Tafeln für alle Tausendtel des Arguments ζ zwischen 0 und 0,4 $\log \left(\frac{6 \cos \frac{1}{2} \varphi}{2 + \cos \varphi} \right)$ berechnet. Ausserdem enthält diese Tafel aber noch eine Columnne für $\log \frac{\text{Dreieck}}{\text{Sector}} = \log \left(\frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi} \right)$. Die folgenden Vorschriften für die Berechnung der parabolischen Bahn aus fünf Daten werden erhalten, wenn man, wie oben, die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= cx + c'x'' \\ y' &= cy + c'y'' \\ z' &= cz + c'z'' \end{aligned}$$

*) Gültiger Mittheilung des Herrn Professors Klünkerfues verdanken wir die Bemerkung, dass das letzte Glied dieser Reihe, Inhalts einer Dissertation des Herrn Doctors Tietjen, nicht völlig richtig sei, indem statt $-\frac{499}{5184} \beta^4$ gelesen werden müsse $-\frac{55}{648} \beta^4$. Dieser Unterschied sei jedoch für die Tafel unmerklich.

mit derjenigen *) verbindet, welche die unvollständige Beobachtung liefert, nämlich mit

$$\frac{y' - Y'}{x' - X'} = \tan \alpha'$$

Man kommt hierbei auf die folgende Relation zwischen den Distancen von der Erde ϱ und ϱ''

$$(4) \dots c'' \varrho'' = M' - Mc - M'' c'' - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \delta''} \cdot c \varrho$$

worin

$$\begin{aligned} M &= (Y' \cos \alpha' - X' \sin \alpha') \sec \delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha') \\ M' &= (Y'' \cos \alpha' - X'' \sin \alpha') \sec \delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha') \\ M'' &= (Y''' \cos \alpha' - X''' \sin \alpha') \sec \delta'' \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha') \end{aligned}$$

c und c'' haben mit consequenter Berücksichtigung der Vorzeichen die Bedeutung, wie im Vorhergehenden, d. h.

$$c = \frac{r r'' \sin(\alpha'' - \alpha')}{r r'' \sin(\alpha'' - \alpha')}, \quad c'' = \frac{r r'' \sin(\alpha'' - \alpha')}{r r'' \sin(\alpha'' - \alpha')}$$

Wenn man die Verhältnisse $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$, und zwar η dem Intervalle $\ell'' - \ell'$, η'' dem Intervalle $\ell' - t$ und η' dem Intervalle $\ell'' - t$ entsprechend einführt, so wird man haben

$$c = \frac{\ell'' - \ell'}{\ell'' - t} \cdot \frac{\eta}{\eta'}, \quad c'' = \frac{\ell' - t}{\ell'' - t} \cdot \frac{\eta''}{\eta'}$$

Einstweilen c und c'' als bekannt angenommen, findet man auf folgende Weise die heliocentrischen Coordinaten x, y, z, x', y', z' . Man bringt r^2 und r''^2 auf die Form

$$r^2 = A + B\varrho + \varrho^2; \quad r''^2 = A'' + B''\varrho'' + \varrho''^2$$

und ebenso sei

$$\kappa^2 = C + D\varrho + E\varrho^2$$

wenn κ die Sehne bedeutet, welche r und r'' verbindet. Um diese Form zu erhalten, hat man

$$A = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad A'' = X''^2 + Y''^2 + Z''^2$$

$B = 2(X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta)$; $B'' = 2(X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta'')$

Um die Aufstellung des Ausdrucks für κ übersichtlicher zu machen, sei nach (4) der Zusammenhang zwischen ϱ und ϱ'' bei einer Annahme für c und c''

$$\varrho'' = F + f\varrho$$

dann wird

$$C = (X'' - X + F \cos \delta'' \cos \alpha'')^2 + (Y'' - Y + F \cos \delta'' \sin \alpha'')^2 + (Z'' - Z + F \sin \delta'')^2$$

$$\frac{D}{2} = (X'' - X + F \cos \delta'' \cos \alpha'') (f \cdot \cos \delta'' \cos \alpha'' - \cos \delta \cos \alpha)$$

$$+ (Y'' - Y + F \cos \delta'' \sin \alpha'') (f \cdot \cos \delta'' \sin \alpha'' - \cos \delta \sin \alpha) + (Z'' - Z + F \sin \delta'') (f \sin \delta'' - \sin \delta)$$

$$E = (f \cos \delta'' \cos \alpha'' - \cos \delta \cos \alpha)^2 + (f \cos \delta'' \sin \alpha'' - \cos \delta \sin \alpha)^2 + (f \sin \delta'' - \sin \delta)^2$$

Wenn man die Logarithmen der hier vorkommenden Factoren in einer gewissen Ordnung neben oder unter einander schreibt, ist die Berechnung von C, D und E nichts weniger als beschwerlich. A, B, A'', B'' sind ganz constant, ihre Berechnung gehört daher zur Vorbereitung.

Sobald diese Ausdrücke aufgestellt sind, wird ϱ so zu bestimmen sein, dass der Lambert'schen Gleichung

$$(r'' + r + \kappa)^3 - (r'' + r - \kappa)^3 = 6k(\ell'' - \ell')$$

Genüge geschieht; denn die Gleichung (4) giebt zu jedem Werthe von ϱ ein bei der Hypothese

*) In der vorhergehenden Abhandlung des Herrn Professors Klinkerfuß bezeichnen x, y, z, x', y', z' , x'', y'', z'' die heliocentrischen Coordinaten zu den Zeiten t, t', t'' ; X, Y, Z u. s. w. die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsorts zu den drei Zeiten; c, c', c'' die wahren Anomalien des Gestirns.

zugehöriges e'' . Diese Auflösung der Lambert'schen Gleichung gestattet offenbar dieselben Hilfsmittel, deren man sich sonst dabei bedient, z. B. die Benutzung der bekannten Tafel von Encke oder der im Anfange mitgetheilten Tafel. Aus ϱ und e'' , welche sich so ergeben haben, findet man dann x, y, z, x', y', z' auf hinlänglich bekannte Weise, und r' aus der Gleichung $r'^2 = (cx + e''x'')^2 + (cy + e''y'')^2 + (cz + e''z'')^2$. Es ist hiernit Alles bekannt, was nöthig ist, η, η', η'' zu bestimmen, da diese Grössen von $r+r', r+r''$ und $r'+r''$ abhängen. Wenn die neuen Werthe von c und e'' mit denjenigen, welche man angenommen hat, übereinstimmen, werden alle gefundenen Werthe in Schärfe einer Parabel entsprechen; im andern Falle legt man die neuen Werthe, welche sehr viel angenäherter sein werden, bei der Wiederholung der Rechnung zu Grunde.

Die erste Hypothese für c, e'' kann auf verschiedene Weise gebildet werden; am Meisten möchte sich aber wohl empfehlen,

$$r = r' = r'' = 1$$

zu setzen, und hiernach η, η', η'' mit Hülfe der Tafel zu bestimmen. Hält man den Cometen noch für sehr entfernt von der Sonne, oder ihr viel näher als die Erde, so kann man danach leicht die erste Hypothese modificiren.

Ein Beispiel, die Anwendung auf den Cometen 1857 III, wird hinreichen, die Bequemlichkeit der Methode zu zeigen, zumal der Fall so ungünstig gewählt ist. Die Berliner Beobachtungen, von Herrn Dr. Förster in Nr. 1124 der Astronomischen Nachrichten mitgetheilt, sind zwar alle vollständig; ich ignoriere aber die Declinationsbestimmung vom 23. Juni und lege folgende Data zu Grunde:

	Mittl. Zeit Berlin	Rectascension	Decl.
1857. Juni 23.	12 ^h 56 ^m 53 ^s	53 ^h 6 ^m 53 ^s .4	
	27. 12 56 37	61 20 51,1	+44 ^o 43' 50"1
Juli 2.	13 27 37	77 2 50,6	+48 47 8,8

Die Unvollständigkeit einer Beobachtung legt, wenigstens in der Praxis, der Reduction vom scheinbaren Ort auf den mittleren kein Hinderniss in den Weg; die Beobachtungen können also auf das mittlere Aequinoctium von 1857 bezogen und von der Aberration der Fixsterne befreit werden. Die Erddaten, auf dasselbe Aequinoctium bezogen, sind dem Nautical Almanac entnommen, da dieses Jahrbuch die Reduction vollständig enthält; endlich sind zur Berücksichtigung der Parallaxe, weil sie mit so leichter Mühe zu haben, die heliocentrischen Coordinaten des Beobachtungsortes selbst abgeleitet. Die corrigirte Grundlage der Rechnung wird danach durch folgende Grössen gebildet:

t, t', t''	... Juni 27, 539 32	Juni 23, 539 50,	Juli 2, 560 85
e, e', e''	61 ^o 20' 48"	53 ^o 6' 51"	77 ^o 2' 44"
δ, δ''	+44 43 46		+48 47 4
X, X', X''	0,109 53	0,042 03	0,193 50
Y, Y', Y''	-0,927 30	-0,931 83	-0,015 69
Z, Z', Z''	-0,402 35	-0,404 32	-0,397 31

Die folgende Rechnung ist, wie in ähnlichen Fällen dem Zweck entsprechend geschieht, auf fünf Decimalstellen geführt. Wenn man auf mehr Stellen rechnet, so kann doch der bedeutendste Theil der Arbeit mit fünf Stellen erledigt werden, da nur die Vorbereitungsrechnung und die letzte Hypothese über die Genauigkeit entscheiden. Aus demselben Grunde würde es auch Zeitverlust sein, auf die provisorischen Lösungen der Lambert'schen Gleichung die grösste Sorgfalt zu verwenden.

Im gegenwärtigen Falle findet man

$$\log M = 0,382 05_n, \log M' = 0,346 04_n, \log M'' = 0,420 85_n, \log \left(\frac{\sin(x-a'')}{\sin(x'-a'')} \right) \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} = 9,580 47$$

also

$$e'' e'' = -2,218 40 + (0,382 05) c + (0,420 85) e'' - (9,580 47) c e''$$

als die für alle Hypothesen gültige Relation zwischen φ und φ'' , in welcher die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten. Auch wird für die ganze Rechnung

$$r^2 = 1,03376 - 1,64791\varphi + \varphi^2$$

$$r'^2 = 1,03400 - 1,71656\varphi' + \varphi'^2$$

Bildet man auf die obige Art die erste Hypothese, so wird

$$\log \eta = 9,99818, \quad \log \eta'' = 9,99966, \quad \log \eta' = 9,99947, \quad \text{also } \log c = 0,25315,$$

$$\log c' = 9,90139.$$

$$\varphi'' = 0,00163 + (9,93223)\varphi$$

Für das Quadrat der Sehne erhält man

$$x^2 = 0,0072908 - 0,038719\varphi + 0,055033\varphi^2$$

Es genügt der Lambert'schen Gleichung $\log \varphi = 0,01088$ wozu $\log \varphi'' = 9,94392$ gehört.

Für die drei Radien Vectors erhält man $\log r = 9,79854$, $\log r' = 9,85160$, $\log r'' = 9,73679$.

Mit diesen Werthen wird als Grundlage für die zweite Hypothese gefunden

$$\log \eta = 9,99273, \quad \log \eta'' = 9,99886, \quad \log \eta' = 9,99730$$

$$\log c = 0,24987, \quad \log c' = 9,90276.$$

Als Lösung ergibt sich jetzt

$$\log \varphi = 0,04359$$

$$\log \varphi'' = 9,99404$$

ausserdem

$$\log r = 9,81883$$

$$\log r' = 9,86810$$

$$\log r'' = 9,74816$$

Man kann schon hinreichend sicher an die Zeiten die Correction wegen der Aberration anbringen.

Da nämlich $\log \varphi' = 0,08478$ gefunden wird, sind die reductiones temporum bei t , t' , t''

$$- 0,00631$$

$$- 0,00694$$

$$- 0,00563$$

demnach die corrigirten Zeiten

$$\text{Juni } 27. \quad 53301$$

$$\text{Juni } 23. \quad 53256$$

$$\text{Juli } 2. \quad 55522$$

Der dritten Hypothese wird $\log c = 0,25029$, $\log c'' = 9,90260$, zu Grunde zu legen sein; sie führt auf folgende Zahlen

$$\log \varphi = 0,04014$$

$$\log \varphi'' = 9,98845$$

$$\log r = 9,81639$$

$$\log r' = 9,86651$$

$$\log r'' = 9,74602$$

Für die vierte Hypothese würde folgen $\log c = 0,25016$, $\log c'' = 9,90259$. Man kann nun aber gleich aus dem Gange der Verbesserungen schliessen, dass die Annahme

$$0,25021 \text{ für } \log c$$

etwas genauer sein wird. Es ergibt sich dann schliesslich

$$\log \varphi = 0,04087$$

$$\log \varphi'' = 9,98963$$

($v'' - v$) folgt aus der Formel

$$4 r r' \sin \frac{1}{2}(v'' - v) = x^2 - (r'' - r)^2$$

es wird hier $\frac{1}{2}(v'' - v) = 5^\circ 48' 22''$.

Bekanntlich bestehen die Gleichungen

$$\frac{\cotang \frac{1}{2}(r''-v)}{\sqrt{r}} = \frac{\operatorname{cosec.} \frac{1}{2}(e''-v)}{\sqrt{r''}} = \frac{\sin \frac{1}{2}e}{\sqrt{q} \cos \frac{1}{2}e}$$

wenn q der Perihelabstand des Cometen ist. Man findet hier

$$\log q = 9,565\ 28$$

und die Zeit des Perihels

$$T = \text{Juli } 18,008\ 17$$

Ohne die übrigen Elemente zu berechnen, erhält man

$$\begin{aligned} x &= (9,972\ 58) \sin (211^{\circ} 18' 25'' + v)r \\ y &= (9,933\ 28) \sin (288^{\circ} 35' 41'' + v)r \\ z &= (9,791\ 71) \sin (149^{\circ} 2' 48'' + v)r \end{aligned}$$

Hiermit ist die Rechnung beendet; es kann aber von Interesse sein, zu sehen, wie genau wohl die nicht bei der Rechnung zugezogene Declination vom Juni 23 dargestellt wird. Auf das Aequinoctium von 1857, o bezogen, ist diese Declination nach der Beobachtung

$$+40^{\circ} 59' 34''3$$

Die Rechnung ergibt $+40^{\circ} 59' 35''$.

Diese fast völlige Uebereinstimmung ist, zumal die Rechnung auf fünf Decimalstellen geführt wurde, theilweise dem Zufall zuzuschreiben; indessen zeigt sie doch die grösste Zuverlässigkeit der Methode, und dies um so augenfälliger, als ein so beträchtlicher Theil des geocentrischen Laufs, 24 Grade in Rectascension, 8 Grade in der Declination umfasst werden. Dieser Umstand nämlich erschwert es offenbar, sich an die Beobachtungen innerhalb gewisser Grenzen anzuschliessen, während er die Sicherheit der Bahnbestimmung an und für sich erhöht. Gewöhnlich werden zwei Hypothesen eine hinreichende Genauigkeit gewähren, ganz besonders aber dann, wenn die unvollständige Beobachtung die zweite ist. In Nr. 1103 der Astronomischen Nachrichten hat Dr. Pape aus den Beobachtungen Juni 23, Juli 3 zu Berlin und Juli 14 zu Altona ein Elementensystem berechnet, welches nahezu als definitiv gelten kann. Er findet

$$\begin{aligned} \log q &= 9,565\ 259 \\ T &= \text{Juli } 18,011\ 75 \end{aligned}$$

womit obiges Resultat höchst befriedigend übereinstimmt.

TAFEL

für die Auflösung der Lambert'schen Gleichung und das Verhältniss des Dreiecks zum parabolischen Sector.

ζ	$\log \mu$	$\log \eta$	ζ	$\log \mu$	$\log \eta$	ζ	$\log \mu$	$\log \eta$
0,000	0,301 030	0,000 000	0,038	0,301 135	9,999 160	0,076	0,301 451	9,996 603
0,001	0,301 030	0,000 000	0,039	0,301 140	9,999 115	0,077	0,301 463	9,996 512
0,002	0,301 030	9,999 998	0,040	0,301 146	9,999 069	0,078	0,301 474	9,996 419
0,003	0,301 031	9,999 995	0,041	0,301 152	9,999 022	0,079	0,301 485	9,996 325
0,004	0,301 031	9,999 991	0,042	0,301 158	9,998 974	0,080	0,301 497	9,996 230
0,005	0,301 032	9,999 986	0,043	0,301 164	9,998 924	0,081	0,301 509	9,996 133
0,006	0,301 033	9,999 980	0,044	0,301 171	9,998 873	0,082	0,301 521	9,996 036
0,007	0,301 034	9,999 972	0,045	0,301 177	9,998 821	0,083	0,301 533	9,995 936
0,008	0,301 035	9,999 963	0,046	0,301 184	9,998 768	0,084	0,301 545	9,995 836
0,009	0,301 036	9,999 953	0,047	0,301 191	9,998 713	0,085	0,301 558	9,995 734
0,010	0,301 037	9,999 942	0,048	0,301 198	9,998 658	0,086	0,301 570	9,995 631
0,011	0,301 039	9,999 930	0,049	0,301 205	9,998 601	0,087	0,301 583	9,995 526
0,012	0,301 040	9,999 917	0,050	0,301 212	9,998 543	0,088	0,301 596	9,995 421
0,013	0,301 042	9,999 902	0,051	0,301 219	9,998 484	0,089	0,301 609	9,995 313
0,014	0,301 044	9,999 887	0,052	0,301 227	9,998 423	0,090	0,301 622	9,995 205
0,015	0,301 046	9,999 870	0,053	0,301 235	9,998 361	0,091	0,301 636	9,995 096
0,016	0,301 049	9,999 852	0,054	0,301 242	9,998 298	0,092	0,301 649	9,994 985
0,017	0,301 051	9,999 833	0,055	0,301 250	9,998 234	0,093	0,301 663	9,994 873
0,018	0,301 054	9,999 812	0,056	0,301 258	9,998 169	0,094	0,301 677	9,994 759
0,019	0,301 056	9,999 791	0,057	0,301 267	9,998 102	0,095	0,301 691	9,994 645
0,020	0,301 059	9,999 768	0,058	0,301 275	9,998 034	0,096	0,301 705	9,994 528
0,021	0,301 062	9,999 744	0,059	0,301 283	9,997 965	0,097	0,301 719	9,994 411
0,022	0,301 065	9,999 719	0,060	0,301 292	9,997 895	0,098	0,301 734	9,994 292
0,023	0,301 068	9,999 693	0,061	0,301 301	9,997 823	0,099	0,301 748	9,994 172
0,024	0,301 072	9,999 666	0,062	0,301 310	9,997 751	0,100	0,301 763	9,994 050
0,025	0,301 075	9,999 637	0,063	0,301 319	9,997 677	0,101	0,301 778	9,993 928
0,026	0,301 079	9,999 608	0,064	0,301 328	9,997 601	0,102	0,301 793	9,993 804
0,027	0,301 083	9,999 577	0,065	0,301 338	9,997 525	0,103	0,301 808	9,993 677
0,028	0,301 087	9,999 545	0,066	0,301 347	9,997 447	0,104	0,301 823	9,993 551
0,029	0,301 091	9,999 512	0,067	0,301 357	9,997 368	0,105	0,301 839	9,993 423
0,030	0,301 095	9,999 477	0,068	0,301 367	9,997 288	0,106	0,301 854	9,993 293
0,031	0,301 099	9,999 442	0,069	0,301 376	9,997 207	0,107	0,301 870	9,993 161
0,032	0,301 104	9,999 405	0,070	0,301 387	9,997 124	0,108	0,301 886	9,993 028
0,033	0,301 109	9,999 367	0,071	0,301 397	9,997 041	0,109	0,301 902	9,992 894
0,034	0,301 114	9,999 328	0,072	0,301 408	9,996 956	0,110	0,301 918	9,992 758
0,035	0,301 119	9,999 288	0,073	0,301 419	9,996 869	0,111	0,301 934	9,992 622
0,036	0,301 124	9,999 247	0,074	0,301 429	9,996 782	0,112	0,301 951	9,992 484
0,037	0,301 129	9,999 204	0,075	0,301 440	9,996 693	0,113	0,301 968	9,992 344

ζ	$\log \mu$	$\log \eta$	ζ	$\log \mu$	$\log \eta$	ζ	$\log \mu$	$\log \eta$
0,114	0,301 985	9,992 204	0,162	0,303 991	9,983 641	0,210	0,304 402	9,970 964
0,115	0,302 002	9,992 061	0,163	0,303 016	9,983 422	0,211	0,304 436	9,970 646
0,116	0,302 019	9,991 917	0,164	0,303 041	9,983 202	0,212	0,304 470	9,970 326
0,117	0,302 037	9,991 772	0,165	0,303 066	9,982 980	0,213	0,304 505	9,970 004
0,118	0,302 054	9,991 625	0,166	0,303 092	9,982 756	0,214	0,304 539	9,969 678
0,119	0,302 072	9,991 477	0,167	0,303 118	9,982 530	0,215	0,304 574	9,969 351
0,120	0,302 090	9,991 327	0,168	0,303 144	9,982 302	0,216	0,304 609	9,969 021
0,121	0,302 108	9,991 176	0,169	0,303 171	9,982 072	0,217	0,304 645	9,968 688
0,122	0,302 126	9,991 023	0,170	0,303 197	9,981 841	0,218	0,304 680	9,968 353
0,123	0,302 144	9,990 868	0,171	0,303 223	9,981 608	0,219	0,304 716	9,968 015
0,124	0,302 163	9,990 713	0,172	0,303 250	9,981 374	0,220	0,304 752	9,967 675
0,125	0,302 181	9,990 556	0,173	0,303 276	9,981 137	0,221	0,304 788	9,967 333
0,126	0,302 200	9,990 397	0,174	0,303 303	9,980 899	0,222	0,304 825	9,966 990
0,127	0,302 219	9,990 237	0,175	0,303 330	9,980 658	0,223	0,304 861	9,966 643
0,128	0,302 238	9,990 075	0,176	0,303 358	9,980 416	0,224	0,304 898	9,966 293
0,129	0,302 258	9,989 911	0,177	0,303 385	9,980 171	0,225	0,304 935	9,965 940
0,130	0,302 277	9,989 746	0,178	0,303 413	9,979 925	0,226	0,304 971	9,965 585
0,131	0,302 297	9,989 580	0,179	0,303 441	9,979 676	0,227	0,305 009	9,965 227
0,132	0,302 317	9,989 413	0,180	0,303 469	9,979 426	0,228	0,305 047	9,964 866
0,133	0,302 337	9,989 244	0,181	0,303 497	9,979 175	0,229	0,305 085	9,964 502
0,134	0,302 357	9,989 074	0,182	0,303 526	9,978 923	0,230	0,305 123	9,964 136
0,135	0,302 377	9,988 902	0,183	0,303 554	9,978 668	0,231	0,305 161	9,963 768
0,136	0,302 398	9,988 728	0,184	0,303 583	9,978 411	0,232	0,305 200	9,963 399
0,137	0,302 419	9,988 553	0,185	0,303 612	9,978 152	0,233	0,305 239	9,963 026
0,138	0,302 440	9,988 376	0,186	0,303 642	9,977 891	0,234	0,305 278	9,962 649
0,139	0,302 460	9,988 197	0,187	0,303 671	9,977 627	0,235	0,305 317	9,962 270
0,140	0,302 482	9,988 017	0,188	0,303 701	9,977 362	0,236	0,305 356	9,961 888
0,141	0,302 503	9,987 836	0,189	0,303 731	9,977 095	0,237	0,305 396	9,961 502
0,142	0,302 525	9,987 653	0,190	0,303 761	9,976 825	0,238	0,305 436	9,961 113
0,143	0,302 546	9,987 468	0,191	0,303 791	9,976 553	0,239	0,305 476	9,960 722
0,144	0,302 568	9,987 281	0,192	0,303 821	9,976 279	0,240	0,305 516	9,960 327
0,145	0,302 590	9,987 093	0,193	0,303 852	9,976 003	0,241	0,305 557	9,959 930
0,146	0,302 612	9,986 903	0,194	0,303 882	9,975 725	0,242	0,305 598	9,959 531
0,147	0,302 635	9,986 712	0,195	0,303 913	9,975 444	0,243	0,305 639	9,959 128
0,148	0,302 657	9,986 519	0,196	0,303 943	9,975 162	0,244	0,305 680	9,958 722
0,149	0,302 680	9,986 324	0,197	0,303 976	9,974 877	0,245	0,305 721	9,958 312
0,150	0,302 703	9,986 127	0,198	0,304 007	9,974 589	0,246	0,305 763	9,957 899
0,151	0,302 726	9,985 929	0,199	0,304 039	9,974 300	0,247	0,305 805	9,957 483
0,152	0,302 749	9,985 730	0,200	0,304 071	9,974 008	0,248	0,305 847	9,957 063
0,153	0,302 772	9,985 529	0,201	0,304 103	9,973 714	0,249	0,305 889	9,956 639
0,154	0,302 795	9,985 326	0,202	0,304 135	9,973 418	0,250	0,305 931	9,956 213
0,155	0,302 819	9,985 122	0,203	0,304 168	9,973 120	0,251	0,305 973	9,955 784
0,156	0,302 843	9,984 915	0,204	0,304 201	9,972 819	0,252	0,306 016	9,955 353
0,157	0,302 868	9,984 707	0,205	0,304 234	9,972 515	0,253	0,306 059	9,954 920
0,158	0,302 892	9,984 497	0,206	0,304 267	9,972 210	0,254	0,306 102	9,954 482
0,159	0,302 916	9,984 285	0,207	0,304 300	9,971 902	0,255	0,306 146	9,954 039
0,160	0,302 941	9,984 072	0,208	0,304 334	9,971 592	0,256	0,306 190	9,953 593
0,161	0,302 966	9,983 857	0,209	0,304 368	9,971 279	0,257	0,306 234	9,953 145

ζ	$\log u$	$\log \eta$	ζ	$\log u$	$\log \eta$	ζ	$\log u$	$\log \eta$
0,258	0,306 279	9,952 693	0,306	0,308 723	9,926 086	0,354	0,311 904	9,885 168
0,259	0,306 324	9,952 235	0,307	0,308 781	9,925 408	0,355	0,311 980	9,884 082
0,260	0,306 369	9,951 776	0,308	0,308 839	9,924 724	0,356	0,312 057	9,882 983
0,261	0,306 414	9,951 318	0,309	0,308 898	9,924 033	0,357	0,312 134	9,881 871
0,262	0,306 459	9,950 847	0,310	0,308 957	9,923 337	0,358	0,312 211	9,880 746
0,263	0,306 505	9,950 377	0,311	0,309 016	9,922 638	0,359	0,312 289	9,879 609
0,264	0,306 551	9,949 902	0,312	0,309 075	9,921 933	0,360	0,312 367	9,878 459
0,265	0,306 597	9,949 423	0,313	0,309 134	9,921 220	0,361	0,312 446	9,877 301
0,266	0,306 643	9,948 944	0,314	0,309 194	9,920 500	0,362	0,312 525	9,876 127
0,267	0,306 690	9,948 455	0,315	0,309 254	9,919 773	0,363	0,312 605	9,874 938
0,268	0,306 737	9,947 965	0,316	0,309 314	9,919 039	0,364	0,312 685	9,873 732
0,269	0,306 785	9,947 469	0,317	0,309 375	9,918 298	0,365	0,312 765	9,872 511
0,270	0,306 832	9,946 973	0,318	0,309 436	9,917 550	0,366	0,312 846	9,871 274
0,271	0,306 880	9,946 472	0,319	0,309 498	9,916 794	0,367	0,312 927	9,870 022
0,272	0,306 927	9,945 970	0,320	0,309 560	9,916 032	0,368	0,313 008	9,868 754
0,273	0,306 975	9,945 462	0,321	0,309 623	9,915 268	0,369	0,313 090	9,867 470
0,274	0,307 024	9,944 949	0,322	0,309 686	9,914 496	0,370	0,313 172	9,866 170
0,275	0,307 074	9,944 431	0,323	0,309 749	9,913 716	0,371	0,313 256	9,864 860
0,276	0,307 124	9,943 910	0,324	0,309 813	9,912 927	0,372	0,313 341	9,863 531
0,277	0,307 173	9,943 383	0,325	0,309 878	9,912 130	0,373	0,313 427	9,862 184
0,278	0,307 223	9,942 852	0,326	0,309 944	9,911 325	0,374	0,313 512	9,860 818
0,279	0,307 272	9,942 315	0,327	0,310 007	9,910 512	0,375	0,313 598	9,859 432
0,280	0,307 322	9,941 776	0,328	0,310 073	9,909 690	0,376	0,313 684	9,858 029
0,281	0,307 373	9,941 235	0,329	0,310 139	9,908 860	0,377	0,313 771	9,856 606
0,282	0,307 424	9,940 691	0,330	0,310 205	9,908 022	0,378	0,313 857	9,855 164
0,283	0,307 475	9,940 140	0,331	0,310 271	9,907 180	0,379	0,313 945	9,853 704
0,284	0,307 525	9,939 584	0,332	0,310 337	9,906 331	0,380	0,314 032	9,852 225
0,285	0,307 576	9,939 023	0,333	0,310 404	9,905 472	0,381	0,314 122	9,850 723
0,286	0,307 626	9,938 457	0,334	0,310 471	9,904 602	0,382	0,314 213	9,849 198
0,287	0,307 678	9,937 886	0,335	0,310 539	9,903 724	0,383	0,314 304	9,847 653
0,288	0,307 730	9,937 310	0,336	0,310 607	9,902 835	0,384	0,314 395	9,846 085
0,289	0,307 783	9,936 727	0,337	0,310 676	9,901 937	0,385	0,314 487	9,844 495
0,290	0,307 836	9,936 141	0,338	0,310 745	9,901 029	0,386	0,314 579	9,842 883
0,291	0,307 889	9,935 554	0,339	0,310 814	9,900 111	0,387	0,314 671	9,841 250
0,292	0,307 943	9,934 962	0,340	0,310 884	9,899 185	0,388	0,314 763	9,839 594
0,293	0,307 996	9,934 364	0,341	0,310 954	9,898 249	0,389	0,314 856	9,837 917
0,294	0,308 051	9,933 760	0,342	0,311 025	9,897 302	0,390	0,314 951	9,836 219
0,295	0,308 105	9,933 150	0,343	0,311 095	9,896 347	0,391	0,315 046	9,834 466
0,296	0,308 160	9,932 535	0,344	0,311 167	9,895 381	0,392	0,315 144	9,832 691
0,297	0,308 215	9,931 914	0,345	0,311 238	9,894 407	0,393	0,315 241	9,830 889
0,298	0,308 271	9,931 287	0,346	0,311 310	9,893 422	0,394	0,315 339	9,829 063
0,299	0,308 327	9,930 653	0,347	0,311 383	9,892 428	0,395	0,315 437	9,827 212
0,300	0,308 383	9,930 015	0,348	0,311 455	9,891 424	0,396	0,315 536	9,825 335
0,301	0,308 439	9,929 376	0,349	0,311 528	9,890 411	0,397	0,315 635	9,823 436
0,302	0,308 495	9,928 731	0,350	0,311 602	9,889 388	0,398	0,315 733	9,821 509
0,303	0,308 551	9,928 079	0,351	0,311 677	9,888 352	0,399	0,315 833	9,819 559
0,304	0,308 608	9,927 421	0,352	0,311 753	9,887 304	0,400	0,315 934	9,817 582
0,305	0,308 666	9,926 756	0,353	0,311 828	9,886 242			

Die vorstehende Tafel (in welcher die sechste Decimalstelle der Rechnung noch mit aufgeführt ist, um die fünfte mehr zu sichern, und welche, in Folge einer durch Herrn Professor Klinckert's Veranlassung Revision, hier in einem correcteren Abdrucke erscheint, als im zehnten Bande der Abhandlungen etc.), dient zur Bestimmung der Sehne x vermittelst der Lambert'schen Gleichung in folgender Weise. Man setze

$$\frac{k(r-t)}{(r+t)^{\frac{1}{2}}} = \zeta,$$

so giebt die Tafel $\log \mu$ und es ist

$$x = (r+t)^{\frac{1}{2}} \mu \zeta.$$

Die zweite Columne enthält den $\log \frac{\Delta}{\text{Sector}}$.

TAFEL

für $\frac{\Delta}{\text{Sector}}$ in der Parabel nach der Gauss'schen Reihenentwicklung, Seite 60.

β	$\log \frac{\Delta}{\text{Sector}}$	β	$\log \frac{\Delta}{\text{Sector}}$	β	$\log \frac{\Delta}{\text{Sector}}$
0,000	0,000 00	0,010	9,994 05	0,020	9,987 76
0,001	9,999 42	0,011	9,993 44	0,021	9,987 11
0,002	9,998 84	0,012	9,992 82	0,022	9,986 46
0,003	9,998 25	0,013	9,992 20	0,023	9,985 80
0,004	9,997 66	0,014	9,991 58	0,024	9,985 14
0,005	9,997 07	0,015	9,990 95	0,025	9,984 47
0,006	9,996 47	0,016	9,990 32	0,026	9,983 80
0,007	9,995 87	0,017	9,989 68	0,027	9,983 13
0,008	9,995 26	0,018	9,989 05	0,028	9,982 45
0,009	9,994 66	0,019	9,988 40	0,029	9,981 77
0,010	9,994 05	0,020	9,987 76	0,030	9,981 09

Auch diese Tafel ist einer nochmaligen Revision unterzogen. Während bei der Reihenentwicklung $\beta = \frac{4k^2(r-t)^2}{(r+t)^2}$ ist, ist hier $\beta = \frac{k^2(r-t)^2}{(r+t)^2}$ also $= \zeta^2$ und man kann daher leicht diese kleine, nach der Reihenentwicklung berechnete Tafel mit der vorangehenden grösseren controliren.

IX.

Ueber den Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung aus denselben drei vollständigen Beobachtungen

hat Herr Professor Encke in den Nummern 640 und 641 der Astronomischen Nachrichten sich ausgesprochen. Auf diese Abhandlung muss daher hier verwiesen werden. Setzt man $m = cQ \sin \omega$; $q = (\omega + \alpha)$, so wird die Gleichung IV im Artikel [141](#) der Theoria motus, falls r' grösser als R'

$$m \sin z^4 = \sin(z - q),$$

und falls r' kleiner als R'

$$m \sin z^4 = \sin(z + q),$$

wobei m stets positiv.

Folgendes sind die Bedingungen, unter denen es möglich ist, eine von der Erdbahn verschiedene Planetenbahn zu finden, welche drei vollständigen Beobachtungen Genüge leisten soll.

Erstens. Die Gleichung

$$m \sin z^4 = \sin(z + q)$$

muss vier reelle Wurzeln haben. — Hiezu ist erforderlich, dass ohne Rücksicht auf das Zeichen $\sin q$ kleiner sein muss als $\frac{1}{2}$, und dass m zwischen den Grenzen m' und m'' liegen muss. (m' und m'' sind in der umstehenden Tafel angegeben.)

Zweitens. Von diesen vier reellen Wurzeln müssen drei positiv und eine negativ sein. Um diese Bedingung zu erfüllen, ist es nothwendig, dass $\cos q$ positiv bleiben muss für alle vier derjenigen Werthe, für welche $\sin q$ kleiner ist, als $\frac{1}{2}$; die beiden im zweiten und dritten Quadranten sind ausgeschlossen, und nur Werthe zwischen $-36^\circ 52'$ und $+36^\circ 52'$ beizubehalten.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so muss stets eine der drei positiven reellen Wurzeln der Erdbahn entsprechen, und diese kann daher nicht in Frage kommen. Im Allgemeinen wird es nicht zweifelhaft sein, welche der beiden anderen Wurzeln zur Lösung der Aufgabe zu benutzen ist. Unter Anwendung der obigen Bezeichnung auf die Artikel [139](#) und [140](#) der Theoria motus hat man

$$\frac{\sin z}{R'} = \frac{\sin(\delta' - z)}{e'} = \frac{\sin \delta'}{r'}$$

Es müssen daher nicht nur z und δ' stets kleiner sein als 180° , sondern es muss auch $\sin(\delta' - z)$ positiv sein, mithin δ' grösser als z .

Stellt man nun die drei reellen positiven Wurzeln nach Ordnung ihrer absoluten Grösse zusammen, so lassen sich drei Fälle unterscheiden. Entweder die kleinste Wurzel nähert sich dem Werthe für δ' am meisten und entspricht mithin der Erdbahn. In diesem Falle ist die Aufgabe unmöglich, weil die Bedingung, dass δ' grösser als z , nicht erfüllt werden kann. Oder die mittlere Wurzel coincidirt mit δ' ; dann kann die Aufgabe nur mittelst der kleinsten Wurzel gelöst werden. Oder endlich die grösste der drei Wurzeln ist nur wenig verschieden von δ' . In diesem Falle hat man die Wahl zwischen beiden kleineren Wurzeln, von denen jede eine planetarische Bahn liefert, weil beide alle Bedingungen erfüllen, und es muss dann erst durch Zuziehung von anderen, als den drei gegebenen, der bisherigen Rechnung zum Grunde liegenden Beobachtungen bestimmt werden, welche Bahn die richtige ist.

Den von Herrn Professor Encke in Nr. 641 der Astronomischen Nachrichten gegebenen Rechnungsbeispielen fügen wir auf Seite [72](#) noch ein dem Astronomischen Journale von Gould, Band I, Nr. [19](#), entnommenes Exempel hinzu.

$m \sin z' = \sin(z - q), \quad m \text{ und } q \text{ positiv.}$											
q	$\log m'$		z'		z''		z'''		z^{IV}		
	$\log m'$	$\log m''$	m''	m'	m''	m'	m''	m'	m''	m'	
1°	4,2976	9,9999	1° 0'	1° 20'	1° 20'	89° 40'	89° 40'	177° 37'	180° 55'	181° 0'	
2	3,3950	9,9996	2 0	2 40	2 40	89 20	89 20	175 14	181 51	182 0	
3	2,8675	9,9992	3 0	4 0	4 0	89 0	89 0	172 52	182 46	183 0	
4	2,4938	9,9986	4 0	5 20	5 20	88 40	88 40	170 28	183 42	184 0	
5	2,2044	9,9978	5 0	6 41	6 41	88 19	88 19	168 5	184 37	185 0	
6	1,9686	9,9968	6 0	8 1	8 1	87 59	87 59	165 41	185 32	186 0	
7	1,7698	9,9957	7 1	9 22	9 22	87 38	87 38	163 18	186 28	186 59	
8	1,5981	9,9943	8 1	10 42	10 42	87 18	87 18	160 52	187 23	187 59	
9	1,4473	9,9928	9 2	12 3	12 3	86 57	86 57	158 28	188 18	188 58	
10	1,3130	9,9911	10 3	13 25	13 25	86 35	86 35	156 3	189 13	189 57	
11	1,1922	9,9892	11 5	14 46	14 46	86 14	86 14	153 37	190 9	190 56	
12	1,0824	9,9871	12 7	16 8	16 8	85 52	85 52	151 10	191 4	191 54	
13	0,9821	9,9848	13 9	17 31	17 31	85 29	85 29	148 43	191 59	192 52	
14	0,8898	9,9823	14 12	18 53	18 53	85 7	85 7	146 14	192 54	193 49	
15	0,8045	9,9796	15 16	20 17	20 17	84 43	84 43	143 45	193 49	194 46	
16	0,7254	9,9767	16 20	21 40	21 40	84 20	84 20	141 14	194 44	195 42	
17	0,6518	9,9736	17 26	23 5	23 5	83 55	83 55	138 42	195 39	196 38	
18	0,5830	9,9702	18 33	24 30	24 30	83 30	83 30	136 9	196 33	197 33	
19	0,5185	9,9667	19 41	25 56	25 56	83 4	83 4	133 34	197 28	198 28	
20	0,4581	9,9629	20 51	27 23	27 23	82 37	82 37	130 58	198 23	199 22	
21	0,4013	9,9588	22 2	28 50	28 50	82 10	82 10	128 19	199 17	200 15	
22	0,3479	9,9545	23 15	30 19	30 19	81 41	81 41	125 38	200 11	201 8	
23	0,2976	9,9499	24 31	31 49	31 49	81 11	81 11	122 55	201 6	202 0	
24	0,2501	9,9451	25 49	33 20	33 20	80 40	80 40	120 9	202 0	202 51	
25	0,2053	9,9400	27 10	34 53	34 53	80 7	80 7	117 20	202 54	203 42	
26	0,1631	9,9345	28 35	36 28	36 28	79 32	79 32	114 27	203 47	204 32	
27	0,1232	9,9287	30 4	38 5	38 5	78 55	78 55	111 30	204 41	205 22	
28	0,0857	9,9226	31 38	39 45	39 45	78 15	78 15	108 27	205 35	206 11	
29	0,0503	9,9161	33 18	41 27	41 27	77 33	77 33	105 19	206 28	207 0	
30	0,0170	9,9092	35 5	43 13	43 13	76 47	76 47	102 3	207 21	207 48	
31	9,9857	9,9019	37 1	45 4	45 4	75 56	75 56	98 37	208 14	208 36	
32	9,9565	9,8940	39 9	47 1	47 1	74 59	74 59	95 0	209 6	209 24	
33	9,9292	9,8856	41 33	49 6	49 6	73 54	73 54	91 6	209 58	210 11	
34	9,9040	9,8765	44 21	51 22	51 22	72 38	72 38	86 49	210 50	210 58	
35	9,8808	9,8665	47 47	53 58	53 58	71 2	71 2	81 53	211 41	211 46	
36	9,8600	9,8555	52 31	57 13	57 13	68 47	68 47	75 40	212 32	212 33	
q'	9,8443	9,8443	63 26	63 26	63 26	63 26	63 26	63 26	213 15	213 15	

$$q' = 36^\circ 52' 11'', 64.$$

$$\sin q' = 0,6 = \frac{3}{5}.$$

$m \sin z' = \sin(z + q)$. m und q positiv.										
q	$\log m'$	$\log m''$	z'		z''		z'''		z^{IV}	
			m'	m''	m''	m'	m'	m''	m''	m'
1°	4,2976	9,9999	2° 23'	90° 20'	90° 20'	178° 40'	178° 40'	179° 0'	359° 0'	359° 5'
2	3,3950	9,9996	4 46	90 40	90 40	177 20	177 20	178 0	358 0	358 9
3	2,8675	9,9992	7 8	91 0	91 0	175 0	175 0	177 0	357 0	357 14
4	2,4938	9,9986	9 32	91 20	91 20	174 40	174 40	176 0	356 0	356 18
5	2,2044	9,9978	11 55	91 41	91 41	173 19	173 19	175 0	355 0	355 23
6	1,9686	9,9968	14 19	92 1	92 1	171 59	171 59	174 0	354 0	354 28
7	1,7698	9,9957	16 42	92 22	92 22	170 38	170 38	172 59	353 1	353 32
8	1,5981	9,9943	19 7	92 42	92 42	169 18	169 18	171 59	352 1	352 37
9	1,4473	9,9928	21 32	93 3	93 3	167 57	167 57	170 58	351 2	351 42
10	1,3130	9,9911	23 57	93 25	93 25	166 35	166 35	169 57	350 3	350 47
11	1,1922	9,9892	26 23	93 46	93 46	165 14	165 14	168 55	349 4	349 51
12	1,0824	9,9871	28 50	94 8	94 8	163 52	163 52	167 54	348 6	348 56
13	0,9821	9,9848	31 17	94 31	94 31	162 29	162 29	166 51	347 8	348 1
14	0,8898	9,9823	33 46	94 53	94 53	161 7	161 7	165 48	346 11	347 6
15	0,8045	9,9796	36 15	95 17	95 17	159 43	159 43	164 44	345 14	346 11
16	0,7254	9,9767	38 46	95 40	95 40	158 20	158 20	163 40	344 18	345 16
17	0,6518	9,9736	41 18	96 5	96 5	156 55	156 55	162 34	343 22	344 21
18	0,5830	9,9702	43 51	96 30	96 30	155 30	155 30	161 27	342 27	343 27
19	0,5185	9,9667	46 26	96 56	96 56	154 4	154 4	160 19	341 32	342 32
20	0,4581	9,9629	49 2	97 23	97 23	152 37	152 37	159 9	340 38	341 37
21	0,4013	9,9588	51 41	97 50	97 50	151 10	151 10	157 58	339 45	340 43
22	0,3479	9,9545	54 22	98 19	98 19	149 41	149 41	156 45	338 52	339 49
23	0,2976	9,9499	57 5	98 49	98 49	148 11	148 11	155 29	338 0	338 54
24	0,2501	9,9451	59 51	99 20	99 20	146 40	146 40	154 11	337 9	338 0
25	0,2053	9,9400	62 40	99 53	99 53	145 7	145 7	152 50	336 18	337 6
26	0,1631	9,9345	65 33	100 28	100 28	143 32	143 32	151 25	335 28	336 13
27	0,1232	9,9287	68 30	101 5	101 5	141 55	141 55	149 56	334 38	335 19
28	0,0857	9,9226	71 33	101 45	101 45	140 15	140 15	148 22	333 49	334 25
29	0,0503	9,9161	74 41	102 27	102 27	138 33	138 33	146 42	333 0	333 32
30	0,0170	9,9092	77 57	103 13	103 13	136 46	136 46	144 55	332 12	332 39
31	9,9857	9,9019	81 23	104 4	104 4	134 56	134 56	142 59	331 24	331 46
32	9,9565	9,8940	85 0	105 1	105 1	132 59	132 59	140 51	330 36	330 54
33	9,9292	9,8856	88 54	106 6	106 6	130 54	130 54	138 27	329 49	330 2
34	9,9040	9,8765	93 11	107 22	107 22	128 38	128 38	135 38	329 2	329 10
35	9,8808	9,8665	98 7	108 58	108 58	126 2	126 2	132 13	328 14	328 19
36	9,8600	9,8555	104 20	111 13	111 13	122 47	122 47	127 29	327 27	327 28
q'	9,8443	9,8443	116 34	116 34	116 34	116 34	116 34	116 34	326 45	326 45

$$q' = 36^\circ 52' 11'', 64. \quad \sin q' = 0,6 = \frac{3}{5}.$$

Bei dem fünften Cometen des Jahres 1847 leitete Herr Dr. Gould aus der ersten Hypothese die Gleichung ab:

$$[9,9\text{ö}2\ 1264] \sin z^4 = \sin(z + 32^\circ 53' 28'' 5)$$

für δ' war gefunden: $\delta' = 133^\circ 0' 31''$.

Man hat also $\sin q$ kleiner als $\frac{2}{3}$ und ein Blick auf die Tafel zeigt, dass der (als Logarithmus gegebene) Factor in der Klammer zwischen m' und m'' liegt. Es sind folglich hier vier reelle Wurzeln vorhanden, von denen drei positiv sind. Hier nähert sich daher z'' so sehr dem gegebenen δ' , dass darüber kein Zweifel bestehen kann. Es tritt mithin der Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung ein, wobei nach der Tafel die beiden möglichen Werthe für z liegen zwischen $88^\circ 29'$ bis $105^\circ 59'$ und zwischen $105^\circ 59'$ bis $131^\circ 7'$. Thatsächlich sind die vier Wurzeln:

$$\begin{aligned} z' &= 95^\circ 31' 43'' 5 \\ z'' &= 117^\circ 31' 13,1 \\ z''' &= 137^\circ 38' 16,7 \\ z^{IV} &= 329^\circ 58' 35,5. \end{aligned}$$

Die zweite Wurzel (117° u. s. w.) lieferte eine Ellipse von sehr kurzer Umlaufzeit, aber die anderen Beobachtungen zeigten, dass dies nicht die wahre Bahn war.

Dieser Ausnahmefall kann, wie ein Blick auf die Tafel ausweist, niemals eintreten, sobald δ' kleiner ist als $63^\circ 26'$.

Die Wurzel z^{IV} ist nur der Vollständigkeit wegen in die Tafel mit aufgenommen, indem die Wurzel z^{IV} , da für dieselbe $\sin z$ negativ ausfällt, nie in Frage kommen kann.

Fehler-Verzeichniss der deutschen Uebersetzung.

A. Im Hauptwerke.

Seite	Zelle von oben	Zelle von unten	lies	statt	Bemerkungen
13	—	12	mehren	mehrern	
27	—	8	ist das Komma hinter dem Worte <i>Rechnung</i> zu tilgen		
30	—	4	v	u	
64	—	6	$\frac{1}{2}(Q' - A)$	$\frac{1}{2}(Q' - A)$	
97	18	—	9,674 95 n	6,674 95 n	rechts
97	—	2	0,473 10 dM	9,473 10 dM	
98	3	—	0,029 35 da	0,029 25 da	
174	—	12	ist das Komma hinter dem Worte <i>werden</i> zu tilgen		

B. In der Tafel II bei *loggy*.

9	13	—	1557	1556	in Spalte 1
9	—	2	7381	7380	" " 1
11	—	6	3304	3303	" " 1
11	—	2	6822	6821	" " 1
12	13	—	60998	60997	" " 2
13	13	—	40564	40565	" " 3
14	—	13	28026	28025	" " 3
14	—	11	37091	37090	" " 3
16	7	—	0,280 0152	0,280 0151	" " 1
16	—	18	09889	09890	" " 2

Anmerkung des Uebersetzers. Die in dieser Tafel vorkommenden Berichtigungen, welche (gleichwie die im Fehler-Verzeichnisse der lateinischen Ausgabe mit einem * bezeichneten Stellen) nur um eine Einheit in der siebenten Decimale differiren, sind das Resultat einer mit Anwendung von zehnstelligen Logarithmen angestellten Prüfung derjenigen Zweifel, welche sich ergeben hatten, nachdem die sämmtlichen Tafelangaben für *log gy* zunächst durch Bildung der Differenzen untersucht waren.

C. Im Anhang.

28			—4,765 76	—4,765 73	beim Argumente 38000 resp.
28			—4,713 43	—4,713 46	40000 für <i>log d</i>

