FREUNDLICH

LOS FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN

CALPE

LOS FUNDAMENTOS

DE LA

TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN

Papel fabricado especialmente por La Papelera Española.

LOS FUNDAMENTOS

DE LA

TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN

POR

ERWIN FREUNDLICH

CON UN PRÓLOGO DE

ALBERTO EINSTEIN

Traducido de la cuarta edición alemana

POR

JOSÉ MARÍA PLANS Y FREYRE

Catedrático de Mecánica celeste en la Universidad de Madrid.

CALPE
MADRID-BARCELONA
1920

Imprenta de Eduardo Arias, San Lorenzo, 5, Madrid.—1920.

PRÓLOGO

El *Sr. Freundlich* se ha propuesto, en el siguiente trabajo, ilustrar a un círculo extenso de lectores acerca de los orígenes, tanto en el terreno de los principios como en el de la experiencia, de la teoría general de la Relatividad. De su lectura he sacado la impresión de que el autor ha conseguido hacer accesibles las ideas fundamentales de la teoría a todo el que esté medianamente familiarizado con los métodos de las ciencias físico-matemáticas. Las relaciones del problema con las Matemáticas, la Filosofía, la Física y la Astronomía están expuestas de una manera atractiva, y en especial las profundas ideas introducidas por el notable matemático *Riemann*, que tanto se adelantó a su época. El *Sr. Freundlich* no sólo, como buen conocedor del terreno científico en cuestión, es un excelente expositor del asunto, sino que también ha sido el primero, entre los compañeros de especialidad, que se ha esforzado con empeño en dar las pruebas de la Teoría. ¡Ojalá esta obrita guste mucho!

A. Einstein.

PRÓLOGO DE LA TERCERA EDICIÓN

La tercera edición de este librito presenta diversas correcciones con respecto a las dos ediciones precedentes. Especialmente el capítulo preliminar sobre la teoría especial de la Relatividad ha sido enteramente redactado de nuevo y además completado con notas aclaratorias. También el capítulo siguiente sobre la métrica de la variedad espacio-tiempo ha experimentado diversas alteraciones, no sólo donde pareció conveniente para la corrección de estilo, sino mucho más donde la claridad y rigor de los razonamientos hacían desear tales variaciones. En cambio, permanecen esencialmente intactos los capítulos sobre la Mecánica clásica y la teoría de *Einstein;* sólo se han citado brevemente los desarrollos de *Einstein* sobre la estructura geométrica del Universo, y en el capítulo final se ha dado cuenta de los progresos realizados en la confirmación de la nueva teoría durante los últimos años.

Yo he de dar de un modo especial sinceramente las gracias al *Sr. Einstein* que, con su franca crítica y dispuesto siempre a aconsejarme, me ha ayudado en la corrección de este librito.

ERWIN FREUNDLICH.

Neubabelsberg, diciembre 1919.

INTRODUCCIÓN

A fines del año 1915, *A. Einstein* ha llegado en definitiva a una teoría de la gravitación como fundamento de un principio general de la Relatividad de todos los movimientos. Su objeto inmediato no era formar una imagen representativa de las acciones atractivas entre los cuerpos, sino más bien una Mecánica de los movimientos relativos de los cuerpos, unos respecto a otros, bajo la influencia de la inercia y de la gravitación. El camino condujo a este objeto muy distante, a expensas, ciertamente, de causar víctimas en conceptos antiguos. Pero, en cambio, se llega a un punto de vista que, desde hace muchos años, había sido la meta de los que se han ocupado en los fundamentos de la Física teórica. Que la nueva teoría cause tales víctimas sólo puede despertar confianza en ella; pues en vista de la tentativa infructuosa de hace siglos, de encajar satisfactoriamente la teoría de la gravitación en las ciencias físicas, era necesario comprender que esto no sería posible sin concesiones en varios conceptos sólidamente arraigados. En efecto, retrocede *Einstein* hasta los pilares fundamentales de la Mecánica, para allí sentar las bases de su teoría, y no contento solamente con una transformación de la ley de *Newton*, obtener el ajuste de los nuevos conceptos.

Para avanzar hacia la inteligencia de las ideas de *Einstein*, es preciso comparar el punto de vista principal que ha adoptado *Einstein* con el de la Mecánica clásica con respecto a la misma cuestión. Luego se ve cómo de la teoría de la Relatividad especial un lógico desarrollo conduce a la general y al mismo tiempo a una teoría de la gravitación.

I

La teoría de la Relatividad especial como primer paso hacia la teoría de la Relatividad general.

La revolución completa, de la cual somos testigos, surgió de dificultades habidas al ultimar la construcción de la Electrodinámica. Pero lo importante del ulterior desarrollo era que sólo se salía de estas dificultades fundamentando de nuevo la Mecánica (*).

La Electrodinámica no había estado influída esencialmente por los resultados de la Mecánica y se había desarrollado a su vez sin influencia en ésta, mientras ella se redujo a los fenómenos electrodinámicos de los cuerpos en reposo. Se pudo emprender el estudio de los fenómenos electrodinámicos en la materia en movi-

(*) Las mayores objeciones contra el nuevo desarrollo precisamente se han levantado, sin duda, a causa de esto, porque una disciplina, la cual parecía que no tenía derecho a intervenir en asuntos de Mecánica, pretendía una influencia tan profunda en sus fundamentos. Se sale al paso, sin embargo, a estas objeciones, como se ve, puesto que ellas obedecen al deseo de considerar la Mecánica como una disciplina puramente matemática, análoga a la Geometría, sin tener en cuenta el hecho de que los fundamentos de la Mecánica contienen hipótesis puramente físicas, aunque ciertamente no se habían reconocido estas hipótesis hasta ahora como tales.

miento, sólo porque en las ecuaciones de *Maxwell* estaba establecido un fundamento para ello. Según la teoría de *Maxwell* pertenecen también todos los fenómenos ópticos a los electrodinámicos, y éstos se verifican o entre cuerpos celestes, los cuales están en movimiento relativo unos respecto a otros, o en la Tierra, la cual da la vuelta alrededor del Sol (con una velocidad de unos 30 km. por segundo) y además efectúa junto con éste un movimiento de traslación (de la misma velocidad aproximadamente) con respecto a las estrellas fijas. En seguida surgieron preguntas de significación muy importante: ¿el movimiento de un manantial luminoso se hace sensible en la velocidad de la luz que de él parte? y ¿cómo influye el movimiento de la Tierra en los fenómenos ópticos realizados en su superficie, por ejemplo, en los experimentos ópticos del Laboratorio? Se había de desarrollar, por consiguiente, una teoría de aquellos fenómenos en que aparecen enlazados los electrodinámicos con los mecánicos [1]. La Mecánica, desde hace mucho tiempo cuidadosamente edificada, había de someterse a la prueba de ver si sus recursos bastaban para la explicación de tales fenómenos. Así, el problema de los fenómenos electrodinámicos para la materia en movimiento se convertía al mismo tiempo en un problema decisivo de la Mecánica.

El primer ensayo de una explicación de los fenómenos electrodinámicos en los cuerpos en movimiento lo hizo *H. Hertz*. Éste restauró la teoría de Maxwell, haciéndola válida también para la influencia del movimiento de la materia en los fenómenos electrodinámicos, e implantó en sus principios el concepto caracteristico de su teoría, o sea, de que el vehículo del campo electromagnético, el éter luminoso, en todas partes participaba del movimiento de la materia. A consecuencia de esto aparece en sus ecuaciones, junto al campo electromagnético considerado como estado especial del éter, el estado de movimiento de este éter luminoso. Como es sabido, las ideas de *Hertz* no se pueden poner de acuerdo con la experiencia, por ejemplo, con el resultado del experimento de *Fizeau* (véase nota 2), de modo que sólo tienen un interés histórico, como una etapa en el camino de la Electrodinámica de la materia móvil. *Lorentz* fué el primero que logró obtener, por medio de la teoría electromagnética de *Maxwell*, ecuaciones fundamentales para la materia móvil, las cuales están esencialmente de acuerdo con la experiencia. Ciertamente esto fué a expensas de abandonar un principio de significación fundamental, como era la idea de que el principio de Relatividad de la Mecánica clásica de *Galileo-Newton* debía regir al mismo tiempo también para la Electrodinámica. En vista de las consecuencias prácticas de la teoría de *Lorentz*, por de pronto se podía casi pasar por alto esta víctima. Después estableció respecto a este punto la resolución de que la situación de la Mecánica clásica definitivamente se hacía insostenible. Para la inteligencia de este desarrollo hace falta por esto tratar, como introducción, del principio de Relatividad en las ecuaciones de la Física.

Se entiende por principio de Relatividad de la Mecánica clásica la consecuencia desprendida de las ecuaciones del movimiento de *Newton*, de que para la explicación de los fenómenos mecánicos son equivalentes los sistemas de referencia que se mueven unos con respecto a otros con movimiento rectilíneo y uniforme. Para nuestras observaciones en la Tierra esto dice que cualquier fenómeno mecánico en la superficie de la Tierra, por ejemplo, el movimiento de un grave, no se modifica por la circunstancia de que la Tierra no esté en reposo, sino que se mueva, como aproximadamente ocurre, con movimiento rectilíneo y uniforme. Con este postulado de Relatividad no está, sin embargo, todavía caracterizado por completo el principio de Relatividad de *Galileo-Newton* si también en él ha de expresarse el hecho de experiencia que restituye el verdadero sentido de este principio de Relatividad. Es preciso todavía completar el postulado de Relatividad con aquellas fórmulas de transformación por medio de las cuales el observador puede pasar de las coordenadas x, y, z, t que aparecen en las ecuaciones del movimiento de *Newton* a las coordenadas x', y', z', t' relativas a su sistema de referencia que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. Aquí las coordenadas x, y, z que aparecen en las ecuaciones de *Newton* representan, en general, los resultados de las medidas obtenidas, empleando escalas rígidas, según las reglas de la Geometría euclídea, en los cambios de posición de los cuerpos en el espacio durante el fenómeno considerado, y la cuarta coordenada t el instante correspondiente al mismo fenómeno, dado por las agujas de un reloj situado en el lugar en que aquél se verifica. La Mecánica clásica completaba ahora el postulado de Relatividad arriba formulado con ecuaciones de transformación de la forma

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

si se trata de la relación entre las coordenadas con respecto a dos sistemas de referencia que se mueven uno con respecto a otro con la velocidad constante v en la dirección del eje de las x. Este grupo de transformaciones, llamadas de *Galileo*, está caracterizado, aún también en el caso general de una dirección de movimiento orientada de cualquier modo con respecto a los ejes coordenados, por el hecho de que la coordenada-tiempo t siempre se transforma por la identidad $t=t'$ en el valor del tiempo referido al segundo sistema de referencia; aquí se pone de manifiesto el carácter absoluto de las medidas del tiempo en la Teoría clásica. Las ecuaciones del movimiento de la Mecánica de *Newton* no alteran de forma si en ellas se reemplazan las coordenadas x, y, z, t, mediante estas ecuaciones de transformación, por las coordenadas x', y', z', t'. Por lo tanto, mientras entre todos los sistemas de referencia nos circunscribimos a aquéllos que se deducen unos de otros por transformaciones de la clase indicada, no tiene sentido alguno hablar de reposo absoluto o de movimiento absoluto; pues de dos sistemas que así se muevan, cualquiera de los dos se puede considerar, sin incompatibilidad alguna, como el que está en reposo o el móvil. La Mecánica clásica creía, ciertamente, que sólo las transformaciones de *Galileo* podían servir para relacionar unos con otros sistemas de referencia equivalentes, según el postulado de Relatividad. Sin embargo, no es así. El conocimiento de que también pueden servir para este objeto otras ecuaciones de transformación que están ciertamente conformes con los hechos de experiencia que se quiere justificar, es la marca característica de la teoría de la Relatividad especial de *Lorentz-Einstein*, la cual reemplazó a la de *Galileo-Newton*. A ella condujeron las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica de la materia móvil de *Lorentz*. Esta, que está de acuerdo satisfactoriamente con la experiencia, se apoya, en oposición a la teoría de *Hertz*, en la idea de un éter absoluto, rígido, en reposo. Sus ecuaciones fundamentales suponen, como sistema privilegiado, el sistema de coordenadas en reposo en el éter luminoso.

Pero estas ecuaciones fundamentales electrodinámicas de *Lorentz* cambian de forma si en ellas se reemplazan las coordenadas x, y, z, t con respecto a un sistema de referencia previamente escogido, por medio de las relaciones de transformación del principio de Relatividad de *Galileo-Newton*, por las coordenadas x', y', z', t' referidas a un sistema que se mueve, con respecto al primero, con movimiento rectilíneo y uniforme. ¿Es preciso de esto deducir que para los fenómenos electrodinámicos los sistemas de referencia, que se mueven unos con respecto a otros con movimiento rectilíneo y uniforme, no son equivalentes y que para la Electrodinámica no hay principio alguno de Relatividad? No; de esto no hay que sacar tal conclusión, puesto que, conforme se indicó, el principio de Relatividad de la Mecánica clásica, con su grupo de transformaciones, no representa la única manera de poder expresar la equivalencia de sistemas de referencia, animados, unos respecto a otros, de movimiento rectilíneo y uniforme. Como nosotros expondremos a continuación, el postulado de Relatividad puede ser igualmente enlazado con otro grupo de transformaciones. Tampoco la experiencia parece ofrecer motivo alguno para contestar afirmativamente a la anterior pregunta; pues han fracasado todos los esfuerzos realizados para comprobar, por experimentos de óptica en nuestros laboratorios terrestres, el movimiento de traslación de la Tierra [1]. En virtud de nuestras observaciones, los fenómenos electrodinámicos del laboratorio se pueden explicar tanto suponiendo la Tierra en reposo como en movimiento; ambas hipótesis están igualmente autorizadas.

Con esto se llega a la convicción absoluta de que para todos los fenómenos existe un principio de Relatividad, sean ellos mecánicos o electrodinámicos. Pero tal principio debe ser único y no haber uno para la Mecánica y otro para la Electrodinámica; pues si hubiese dos principios, en su acción recíproca se anularían, puesto que de ellos se podría derivar, en asuntos en los cuales aparecieran reunidos fenómenos mecánicos y electrodinámicos, un sistema privilegiado con respecto al cual tendría sentido hablar simultáneamente de reposo absoluto y de movimiento.

Un recurso había para salir de esta dificultad, que es el adoptado por *Einstein.* Hay que establecer, en lugar del principio de Relatividad de *Galileo-Newton*, uno nuevo que abarque los fenómenos de la Mecánica y Electrodinámica. Esto puede realizarse, sin alteración del *postulado* de Relatividad antes formulado, estableciendo un nuevo grupo de transformaciones, las cuales relacionen entre sí las coordenadas referidas a sistemas igualmente autorizados. Ciertamente es preciso, luego, que sean transformadas también las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de modo que ellas conserven su forma al efectuar una tal transformación. De elementos para esta nueva formación ya disponemos. A saber, se había hallado empíricamente que las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica de *Lorentz* admitían una nueva clase de transformación de coordenadas, o sea transformaciones de la forma

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$c =$ velocidad de la luz en el vacío.

Así, el nuevo principio de Relatividad, que *Einstein* estableció, dice: *Para la explicación de todos los fenómenos físicos son enteramente equivalentes los sistemas animados unos con respecto a otros de un movimiento de traslación rectilíneo y uniforme. Pero las ecuaciones de transformación que hacen posible el paso de las coordenadas referidas a uno de tales sistemas a las referidas a otro, si ambos sistemas se mueven paralelamente a su eje de las* x, *con la velocidad constante* v, *no dicen*

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' - t,$$

sino

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

El principio de Relatividad de *Galileo-Newton* de la Mecánica clásica y el principio de Relatividad especial de *Lorentz-Einstein* se distinguen, por consiguiente, sólo en la forma de las ecuaciones de transformación que efectúan el paso a sistemas de referencia igualmente autorizados [3].

Comparando las anteriores fórmulas de transformación entre sí, se ve inmediatamente que las ecuaciones de transformación de *Galileo-Newton* pueden ser deducidas de las nuevas de *Lorentz-Einstein* por un sencillo paso al límite. Si, en efecto, se supone la velocidad v relativa de ambos sistemas de referencia tan pequeña, comparada con la velocidad de la luz c, que se puedan despreciar los cocientes $\frac{v^2}{c^2}$, $\frac{v}{c^2}$ con respecto a los términos restantes (hipótesis que era admisible en todos los casos de que la Mecánica clásica hasta ahora se había ocupado), las transformaciones de *Lorentz-Einstein* se convierten en las de *Galileo-Newton.*

Cabe así, pues, hacer una pregunta que, según lo expuesto hasta aquí, está a la vista: ¿Qué es propiamente lo que nos obliga a abandonar el principio de Relatividad de la Mecánica clásica?; esto es: ¿Qué hipótesis físicas en sus ecuaciones de transformación están en contradicción con la experiencia? La contestación es la siguiente: El principio de Relatividad de *Galileo-Newton* no está conforme con los hechos que se desprenden del experimento de *Fizeau* y del de *Michelson*, de los cuales puede deducirse, para la velocidad de la luz, el carácter especial de una constante universal en las relaciones de transformación correspondientes al principio de Relatividad. El por qué aparece en la expresión de las nuevas ecuaciones de transformación este carácter de la velocidad de la luz necesita ciertamente todavía ser explicado a fondo.

Las ecuaciones de transformación del principio de Relatividad de *Galileo-Newton* contienen una hipótesis (hasta ahora no reconocida como tal). A saber; se había considerado tácitamente cumplida como evidente la siguiente hipótesis: Si un observador mide en un sistema de coordenadas S la velocidad v de propagación de cualquier acción, por ejemplo, de una onda sonora, un observador en otro sistema de coordenadas S', que se mueve con respecto a S, mide necesariamente otra velocidad de propagación para la misma acción. Esto debía regir para toda velocidad *finita* v; sólo la velocidad *infinitamente* grande debía caracterizarse por la propiedad singular de venir dada en todo sistema, independientemente de su estado de movimiento, por el mismo resultado en las medidas, esto es, infinitamente grande.

Esta hipótesis (pues se trata aquí, naturalmente, de una hipótesis puramente física), estaba a la vista; no se tenía para ella en adelante apoyo alguno, puesto que ya una velocidad finita, a saber, la velocidad de la luz, presentaba aquella propiedad singular que, siguiendo la idea más sencilla, nos inclinábamos a atribuír sólo a una velocidad infinitamente grande.

El conocimiento que nos proporcionó el experimento de *Michelson* fué la propiedad de la isotropía (esto es, equivalencia de todas las direcciones), en la propagación de la luz para el observador independientemente del movimiento eventual de traslación de su sistema de referencia (véase nota 2); de modo que estaba ya muy próxima la hipótesis de que se había de asignar la misma cantidad como valor de la velocidad de la luz en general para todo sistema de referencia. Sin duda era sorprendente la nueva noción, a que se llegaba con esto; pero es menos extraña que aquella revelada por el papel especial de la velocidad de la luz en las ecuaciones de *Maxwell*, fundamento de nuestra teoría de la materia.

A consecuencia de esta especialidad aparece la velocidad de la luz en las ecuaciones de la Cinemática, como constante universal. Para entender mejor esto haremos la siguiente reflexión: Mucho tiempo antes de las discusiones de los fenómenos electrodinámicos en los cuerpos en movimiento ya se habría podido plantear, con completa generalidad, esta cuestión. ¿Cómo se han de relacionar entre sí las coordenadas relativas a dos sistemas de referencia que se mueven el uno con respecto al otro con movimiento rectilíneo y uniforme? El problema, puramente *matemático*, se podía acometer con completa claridad, mediante las hipótesis contenidas en los principios, como han hecho más tarde *Frank* y *Rothe* [4]. Se llega entonces a ecuaciones de transformación, las cuales son mucho *más generales* que las escritas en la página 16. Teniendo en cuenta las condiciones especiales que nos ofrece la Naturaleza, por ejemplo, la isotropía del espacio, se puede derivar de ellas formas especiales, cuyo valor intrínseco se hace patente en las hipótesis establecidas para obtenerlas. Ahora aparece en estas ecuaciones generales de transformación una magnitud que merece atención especial. Hay invariantes de estas ecuaciones de transformación; esto es, magnitudes que no alteran su valor al efectuar una tal transformación. Entre estas invariantes se halla una velocidad. Esto quiere decir lo siguiente: si se propaga en un sistema una acción con la velocidad v, *en general* la velocidad de propagación de esta misma acción en otro sistema es distinta de v, si el segundo sistema se mueve con respecto al primero. Sólo la velocidad invariante conserva en todos los sistemas su valor enteramente igual, cualquiera que sea la velocidad constante con que ellos se muevan, uno con respecto a otro. El valor de esta velocidad invariante entra como constante característica en las ecuaciones de transformación. Por consiguiente, si se quiere hallar las relaciones de transformación *físicamente* válidas, es preciso que se averigüe aquella velocidad singular que desempeña este papel fundamental. Su comprobación es, por lo tanto, problema del físico experimentador. Si él sienta esta *hipótesis:* una velocidad *finita* nunca puede ser una tal invariante; degeneran las ecuaciones *generales* de transformación en las del principio de Relatividad de *Galileo-Newton.* (Esta hipótesis fué, aunque también inconscientemente, hecha en la Mecánica de *Newton.*) Es preciso que ella sea abandonada, una vez autorizada, según los resultados de *Michelson* y el experimento de *Fizeau*, la idea de que *la velocidad de la luz* juega el papel de una velocidad invariante. Entonces las ecuaciones *generales* de transformación degeneran en las del principio de Relatividad especial de *Lorentz* y *Einstein.*

Esta nueva formación de las transformaciones de coordenadas del principio de Relatividad nos condujo a conocimientos de gran significación en el terreno de los principios, como es la sorprendente idea de que la noción de simultaneidad de fenómenos distantes en el espacio, en la cual se fundan todas las mediciones de tiempo, sólo tiene significación relativa; esto es, que dos fenómenos que son simultáneos para un observador, para otro observador, en general, no serán simultáneos (*). Por esto pierden los valores del tiempo el

(*) La frase: «El Sol sale en un lugar determinado de la Tierra a las $5^h\ 10^m\ 6^s$» significa: «que la salida del Sol en un lugar detercarácter absoluto que hasta ahora les distinguía de las coordenadas de espacio. Sobre este asunto, en los últimos años se ha escrito tanto, que nosotros aquí no necesitamos tratar de él más.

Con la nueva formación de las ecuaciones de transformación no se agota, sin embargo, en modo alguno, la influencia del principio de Relatividad especial en la Mecánica clásica. Casi todavía es de mayor transcendencia la alteración que él origina en la noción de masa.

La Mecánica de *Newton* atribuye a cada cuerpo una cierta masa inerte, como un atributo, el cual, de ningún modo depende de las condiciones físicas, a las que el cuerpo está sometido. A consecuencia de esto, aparece también el principio de conservación de la masa en la Mecánica clásica, enteramente independiente del principio de la energía, es decir, del principio de la conservación de la energía. El principio de Relatividad especial

minado de la Tierra es simultánea con el hecho de la posición de las agujas del reloj marcando $5^h\ 10^m\ 6^s$ en aquel lugar de la Tierra». En resumen: la determinación del instante en que acaece un fenómeno es la determinación de la *simultaneidad* de la realización de *dos* fenómenos, de los cuales, el uno es una posición determinada de una aguja de un reloj en el lugar de observación. La comparación de datos referentes al tiempo en que comienza un mismo fenómeno, que varios observadores observan desde distintos lugares, exige que los datos de los relojes en dichos lugares sean comparables. El análisis de las compatibilidades precisas para ello ha conducido a *Einstein* al conocimiento fundamental de que la noción de «simultaneidad» es sólo relativa, por cuanto que la relación entre las medidas del tiempo, en sistemas que se mueven uno con respecto a otro, depende de su estado de movimiento. Este ha sido el punto de partida para las reflexiones que han conducido al establecimiento del principio de Relatividad especial.

arrojó una luz enteramente nueva sobre estas relaciones cuando condujo a la idea de que también la energía manifiesta masa inerte, y por esto, ambos teoremas de conservación, el de la masa y el de la energía, se han fundido en uno solo. Este concepto de nueva especie de la noción de masa está motivado por la circunstancia siguiente:

Las ecuaciones del movimiento de la Mecánica de *Newton* no conservan su forma si se introducen nuevas coordenadas mediante las transformaciones de *Lorentz-Einstein*. A causa de esto, necesitaban las ecuaciones fundamentales de la Mecánica ser transformadas convenientemente. Por esto resultó que la ley fundamental de *Newton* del movimiento: *Fuerza* = *Masa* $\times$ *Aceleración*, no puede ser conservada, y que la expresión de la energía cinética de un cuerpo no está ya dada por la fórmula sencilla en función de la masa y la velocidad: $\frac{1}{2} m \cdot v^2$; dos consecuencias de la variación que se hace necesaria en nuestro concepto de la esencia de la masa material. El nuevo principio de Relatividad y las ecuaciones de la Electrodinámica suministraron más bien, como nuevo conocimiento fundamental, que también a toda energía pertenece una cierta masa inerte y un punto material por absorción o emisión de energía, gana o pierde masa inerte, como en la nota 5 del Apéndice se demuestra en un caso sencillo. La relación simple entre la energía cinética de un cuerpo y su velocidad relativa con respecto al sistema de referencia se ha perdido por esto en la nueva Cinemática. Esta sencillez de la expresión de la energía cinética hizo posible en la Mecánica de *Newton* la descomposición de la energía de un cuerpo en la energía cinética de su movimiento de traslación y la energía independiente de éste. Se consideraba, por ejemplo, una vasija con cualesquiera elementos materiales que se hallen en movimiento en ella. Si se descompone la velocidad de cada elemento en dos partes constitutivas, en la velocidad del centro de gravedad común a todos y la velocidad individual del elemento con respecto al centro de gravedad, así se divide, según las fórmulas de la Mecánica clásica, la energía cinética en dos partes: una, que contiene exclusivamente la velocidad del centro de gravedad y representa la expresión usual de la energía cinética del sistema total (Masa de la vasija, más la masa de los elementos), y otra parte constitutiva, la cual contiene sólo las velocidades internas del sistema. Esta separación de la energía interna no es ya posible cuando la expresión de la energía cinética no contiene la velocidad sólo como factor cuadrático, de modo que uno se ve conducido a la idea de que también la energía interna del cuerpo interviene en el valor de la energía de su movimiento de traslación, y esto por una elevación de la masa inerte del cuerpo.

Este descubrimiento de la inercia de la energía creó hipótesis enteramente nuevas para la Mecánica. La Mecánica clásica concibe la masa inerte de un cuerpo como una magnitud inherente a él, absoluta, invariable. La teoría de la Relatividad especial, a la verdad, inmediatamente no dice nada sobre la inercia de la *materia;* pero ella enseña que toda *energía* posee también inercia. Ahora, puesto que toda materia en todo tiempo contiene una cantidad probablemente muy grande de energía latente, la inercia de un cuerpo observada por nosotros se compone de dos componentes: la inercia de la materia y la inercia de su contenido en energía, y varía, en consecuencia, según sea la cantidad de este contenido de energía. Esta idea conduce, naturalmente, a atribuir en general el fenómeno de la inercia en los cuerpos a su contenido en energía.

Con esto surgió el importante problema de compaginar estos nuevos conocimientos de la esencia de la masa inerte con los principios de la Mecánica. Aquí se alzó una dificultad, la cual en cierto modo descubre los límites de la capacidad productiva de la teoría de la Relatividad especial. Uno de los hechos de experiencia más seguros de la Mecánica es, en efecto, la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada de los cuerpos. En la certeza de que esto subsiste nosotros medimos la masa inerte de un cuerpo siempre por su peso. El *peso* de un cuerpo está, sin embargo, sólo definido *con relación a un campo gravitatorio* (véase nota 18), para nosotros con relación al de la Tierra; pero la *masa inerte* de un cuerpo está definida como atributo de la materia, *sin tomar en cuenta las condiciones físicas, cualesquiera que sean, exteriores al cuerpo.* Pero entonces, ¿cómo viene a establecerse la enigmática concordancia en los valores de la masa inerte y la masa pesada de los cuerpos? Esta pregunta tampoco puede contestarla la teoría de la Relatividad especial. Todavía más. Sus consecuencias parecen hasta poner en riesgo la igualdad entre la masa inerte y la pesada, que pertenece a los hechos de experiencia más seguros de toda la Física. Pues la teoría de la Relatividad especial exige a la verdad una inercia, pero no ofrece ningún punto de apoyo para un peso de la energía. A consecuencia de esto un cuerpo gana, a la verdad, por aumento de energía, en masa inerte, pero no necesariamente en masa pesada equivalente, y el principio de la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada tampoco halla, por lo tanto, en la teoría de la Relatividad especial, ningún fundamento profundo. Para esto hacía falta una teoría de los fenómenos pesados, una teoría de la Gravitación. He aquí por qué la teoría de la Relatividad especial, puede sólo considerarse como el *primer paso* hacia una general, la cual compagine satisfactoriamente los fenómenos de la Gravitación con los principios de la Mecánica.

Aquí se meten las investigaciones de *Einstein* sobre una teoría de Relatividad general. Ellas han demostrado que por *una extensión del principio de Relatividad a movimientos acelerados* y por la *inclusión de los fenómenos de Gravitación en los principios fundamentales de la Mecánica*, es posible un nuevo fundamento para ésta, con el cual se resuelven todas las dificultades principales. Esta teoría de la Relatividad general representa una lógica extensión de los conocimientos adquiridos en la teoría de la Relatividad especial. Ciertamente esta construcción de la teoría ha obligado a ampliar esencialmente y a profundizar en los fundamentos generales en los cuales se basan todas nuestras explicaciones de los fenómenos físicos. Por esto sólo es posible una entera comprensión de la teoría de la Relatividad general si se entiende perfectamente la posición que adopta con respecto a estas nociones fundamentales teóricas. Yo, en vista de esto, principio la presentación de la nueva teoría así, estableciendo dos postulados generales, a los cuales deben satisfacer todas las leyes físicas, y que, sin embargo, no eran cumplidos por las leyes fundamentales de la Mecánica clásica. En cambio, su cumplimiento riguroso da a la nueva teoría su sello característico; de este modo se abre aquí una puerta de entrada hacia la inteligencia de los fundamentos esenciales de la teoría de la Relatividad general.

II

Dos postulados fundamentales para formular matemáticamente las leyes físicas.

Newton estableció la sencilla y fructífera ley de que dos cuerpos, aunque ellos, como por ejemplo los astros, no estén ligados visiblemente unos con otros, actúan el uno sobre el otro y se atraen con una fuerza que es proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia mutua. Esta ley ya la rehusaron *Huygens* y *Leibniz*, puesto que no satisfacía a una condición fundamental que era preciso establecer en toda ley física: la condición de la *continuidad* (continuidad en la transmisión de la fuerza, acción de contacto). ¿Cómo debían dos cuerpos actuar uno sobre otro sin un medio que transmitiera la acción? En efecto; la necesidad de una contestación satisfactoria a esta pregunta era tan grande que para satisfacerla se admitió definitivamente la existencia de una substancia que llenase el Universo entero impregnándolo todo, el éter universal, aunque esta substancia parecía condenada a ser perpetuamente invisible e impalpable y, por lo tanto, inobservable para nuestros sentidos, y se necesitaba también, por otra parte, atribuirle toda clase de propiedades contradictorias una con otra. Pero con el tiempo se alzó, en oposición a tales hipótesis, la condición siempre decisiva de que *al formular las leyes físicas sólo deben enlazarse entre sí cosas que realmente puedan someterse a la observación*, condición que se origina, sin duda, por igual orientación, en busca del conocimiento del asunto, que aquella de la continuidad y que da, en primer lugar, al principio de causalidad el verdadero carácter de una ley del *mundo experimental.*

En el enlace y consiguiente cumplimiento de estos dos postulados estriba, a mi entender, el alma de la índole de investigaciones de *Einstein;* ellos prestan a sus resultados la significación que tienen de gran transcendencia en la formación de la imagen física del Universo. En este sentido, sus tendencias no hallarán en los físicos oposición alguna en materia de principios, pues los dos postulados, *el de la continuidad y el del enlace de causalidad de cosas puramente observables en las leyes físicas están conformes con la Naturaleza;* a lo más podía dudarse de si es *conveniente* renunciar a una representación auxiliar fructífera como la acción a distancia.

El principio de continuidad exige que todas las leyes físicas se puedan formular como leyes diferenciales. Es preciso, por consiguiente, que todas las leyes físicas puedan dar un concepto tal que determinen completamente el estado físico en cualquier lugar por los de la inmediata proximidad. A consecuencia de esto no pueden en ellas aparecer puntos a distancia finita, sino solamente puntos infinitamente próximos. La ley de atracción de *Newton*, antes indicada, tropieza, como ley de acción a distancia, en esta primera condición.

El segundo postulado, el del concepto riguroso de causalidad en las leyes físicas, está en estrecha relación con una teoría general de Relatividad de los movimientos. Un tal principio de Relatividad general exige la equivalencia de todos los sistemas de referencia posibles en la Naturaleza para la explicación de los fenómenos físicos, y evita por esto la introducción de la noción problemática del espacio absoluto, la cual, por razones conocidas (véase capítulo IV), la Mecánica de *Newton* no pudo eludir. Una teoría de Relatividad general, excluyendo la magnitud ficticia, espacio absoluto, reduciría las leyes de la Mecánica a cuestiones sobre movimientos relativos de los cuerpos unos con respecto a otros, los cuales son, en efecto, los únicos que podemos observar. Sus leyes, según esto, se fundarán más completamente solo en lo observable que las leyes de la Mecánica clásica.

Pero la incondicional admisión del principio de Continuidad y del principio de Relatividad, en su concepto más general, afecta profundamente al asunto de la expresión matemática de las leyes físicas. Por esto es preciso establecer aquí alguna consideración sobre este asunto, en el terreno de los principios.

III

Referente al cumplimiento de ambos postulados.

Una ley física se expresa en lenguaje matemático por medio de una fórmula. Esta abarca y reemplaza, por una ecuación, el resultado de un conjunto de medidas que reproducirían la marcha del fenómeno numéricamente. Entonces nosotros no sólo aplicamos tales fórmulas, si disponemos de medios para comprobar el resultado de los cálculos con medidas reales, sino también sólo con que las medidas se consideren posibles, aunque no las podamos realizar. Así, por ejemplo, cuando se habla de la distancia de la Luna a la Tierra y se la expresa en metros, como si fuese realmente factible medirla por colocación sucesiva de la unidad metro.

Con este medio auxiliar del Análisis hemos extendido el dominio de la investigación exacta más allá de las medidas realmente accesibles en la práctica, tanto por encima de los límites de las cantidades inaccesibles por su gran magnitud como por debajo de las inaccesibles por su pequeñez. En una tal fórmula para la explicación de un fenómeno, aparecen ahora símbolos para aquellas cantidades que, en cierta manera, son los elementos fundamentales de las medidas, con cuyo auxilio nosotros intentamos comprender el fenómeno; por lo tanto, por ejemplo, en todas las medidas de espacio, símbolos para la longitud de una barra, el volumen de un cubo, etc. En la formación de estos elementos fundamentales de las medidas de espacio, nos guiaba hasta ahora el concepto de cuerpo rígido que podía moverse libremente sin que alteraran las relaciones de sus dimensiones. Por colocación repetida de una unidad de medida rígida junto al cuerpo que se ha de medir, nos enteramos de sus relaciones de magnitud en el espacio. Esta noción de la unidad de medida ideal, rígida, libremente móvil, en la práctica sólo realizable hasta un cierto grado, a causa de toda clase de influencias perturbadoras, como, por ejemplo, de la dilatación por el calor, representa la noción fundamental de la Geometría métrica. La formación de las expresiones matemáticas que se han de introducir como símbolos para estos elementos fundamentales de las medidas, por ejemplo, longitud de una barra, volumen de un cubo, etc. (para abandonar luego, por decirlo así, al Análisis todas las responsabilidades de las consecuencias), es ahora un problema fundamental de la Física teórica y *está en estrecha relación con los dos postulados* de que nosotros hablamos al principio. Para verlo es preciso volver a los fundamentos de la Geometría y analizarlos desde los puntos de vista adoptados por *Helmholtz* en distintas Memorias y por *Riemann* en su trabajo de Habilitación (1854) «Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría». *Riemann* indica casi proféticamente el camino que *Einstein* ha emprendido ahora.

a) El elemento lineal de la variedad-espacio de tres dimensiones expresado en forma compatible con ambos postulados.

Todo punto del espacio queda determinado sin ambigüedad por tres números x_1, x_2, x_3 que podemos asignarle como coordenadas, por ejemplo, de un sistema cartesiano rectangular; cuando variamos estos tres números de una manera continua, podemos ir especificando cada uno de los puntos del espacio. El sistema de puntos del espacio representa, según frase de *Riemann*, una «magnitud múltiplemente extensa» (Multiplicidad o Variedad), entre cuyos elementos individuales (Puntos), es posible una transición *continua*. Conocemos todavía otras variedades continuas, por ejemplo, el sistema de los colores, el sistema de los sonidos, etcétera. Es cualidad común a todas ellas que para fijar un elemento dentro de la variedad (un punto, un color, o un sonido *determinado)*, es preciso determinar un cierto número característico de magnitudes, que constituye lo que se llama el *número de dimensiones* de la variedad de que se trate. Así, el espacio tiene «tres» dimensiones, la superficie «dos», la línea «una». El sistema de los colores es, por ejemplo, una variedad continua de «tres» dimensiones, correspondientes al número de «colores fundamentales», rojo, verde, violeta, por cuya mezcla se puede obtener cualquier color.

Pero aceptando la continuidad del paso de un elemento a otro dentro de una variedad y fijando su número de dimensiones, todavía nada se dice sobre la *posibilidad de comparar entre sí partes limitadas de esta variedad*, por ejemplo, dos sonidos o dos colores; es decir, nada todavía se ha dicho sobre las «relaciones de magnitud» en la variedad, por ejemplo, sobre la índole de las reglas con las cuales se pueden tomar medidas dentro de la variedad. Más bien, necesitamos para esto primeramente que la experiencia nos enseñe a conocer hechos con los cuales podamos establecer las leyes de medida válidas en las distintas condiciones físicas para la variedad de la cual nos ocupamos (puntos del espacio, colores, sonidos); estas leyes de medida podrán resultar distintas según y conforme qué hechos de experiencia para ello traigamos a colación [6].

Para la variedad de los puntos del espacio la experiencia nos ha enseñado a conocer el hecho de que sistemas rígidos de puntos a distancia finita pueden moverse libremente en el espacio, sin que varíen su forma y sus dimensiones; y la noción de «congruencia», deducida de este hecho, ha sido un factor de capital importancia para una determinación de medidas [7]. Ella nos plantea el problema de formar, con los números x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 que corresponden a dos puntos determinados del espacio y que podemos imaginar como los extremos de una reglita rígida, una expresión matemática que se pueda considerar como medida de su distancia mutua, esto es, por lo tanto, como expresión de la longitud de la reglita, y se pueda introducir como tal en las fórmulas de las leyes físicas.

Ahora contienen las ecuaciones de las leyes físicas, si ellas (para cumplir la condición de continuidad) son leyes diferenciales, sólo las distancias ds de puntos infinitamente próximos, los llamados *elementos lineales*. Es preciso que preguntemos para ello si nuestros dos postulados influyen en la expresión analítica del *elemento lineal* ds y, en caso afirmativo, qué expresión es compatible con los dos. *Riemann* exige primero de un elemento lineal sólo que pueda ser comparado, en cuanto a su longitud, con otro cualquiera, independientemente de lugar y tiempo. Esta es una marca característica de la métrica del espacio y significa, prácticamente, la libre movilidad de las unidades de medida; en la variedad de los sonidos y en la de los colores, por ejemplo, no existe esta marca (véase nota 6). *Riemann* formula esta condición por medio de las siguientes palabras: «que las líneas deben poseer una longitud independiente de la posición y toda línea debe ser medible por otra». Luego él halla que, si designamos por x_1, x_2, x_3 y por $x_1 + dx_1$ $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ dos puntos del espacio infinitamente próximos y los números variables continuamente x_1, x_2, x_3 originan cualquier correspondencia de números con los puntos del espacio (coordenadas), la raíz cuadrada de una función entera, homogénea, de segundo grado, constantemente positiva, de las diferenciales dx_1, dx_2, dx_3 posee todas las propiedades [8] que es preciso que tenga el elemento lineal como expresión de la longitud de una reglita rígida infinitamente pequeña. Se tendrá, por consiguiente, en la fórmula

$$ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + \ldots + g_{33}dx_3^2},$$

en la cual los coeficientes $g_{\mu\nu}$ son funciones continuas de las tres variables x_1, x_2, x_3 una expresión para el elemento lineal en el punto x_1, x_2, x_3.

En esta expresión no se hace ninguna hipótesis sobre la clase de coordenadas que están representadas por las tres variables x_1, x_2, x_3, por consiguiente, sobre propiedades métricas especiales de la variedad, que resultan de la condición de la libre movilidad de las unidades de medida. Pero si se exige especialmente que todo punto en la variedad pueda ser determinado por coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z porque se hacen hipótesis particulares sobre la posibilidad de colocación de las unidades de medida, toma el elemento lineal, en estas variables especiales, la forma

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Esta expresión de la longitud del elemento lineal ha sido, hasta ahora, siempre introducida en todas las leyes físicas; ella está contenida en la expresión general del elemento lineal *ds* de *Riemann*, como caso especial correspondiente a los valores $g_{\mu\nu}\begin{cases} = 1 \ \mu = \nu \\ = 0 \ \mu \neq \nu. \end{cases}$

La reducción a esta forma especial del elemento lineal hace posible en todas las medidas de espacio la aplicación de las leyes de la Geometría métrica euclídea. Pero el admitir esta naturaleza métrica particular del espacio implica, como *Helmholtz* ha discutido con todo detalle, entre otras, la hipótesis de que sistemas rígidos *finitos* de puntos, por consiguiente, distancias rígidas *finitas* pueden moverse libremente en el espacio y coincidir, por superposición, con otros sistemas de puntos (congruentes). Con respecto al postulado de *continuidad*, parece esta hipótesis inconsecuente, en cuanto ella introduce implícitamente afirmaciones sobre distancias *finitas*, en pura ley diferencial, en la cual sólo aparecen *elementos lineales;* pero no está en *contradicción* con él.

Por otra parte, se dispone el postulado de la Relatividad de todos los movimientos para poder dar al elemento lineal la forma especial euclídea (*) y esto se efectúa fundándose en lo siguiente:

Según el principio de Relatividad de todos los movimientos es preciso que todos los sistemas de referencia que resultan unos de otros por movimientos relativos de los cuerpos puedan regir por completo como igualmente auto-

(*) En rigor yo necesitaría aquí dejar sentado que las anteriores reflexiones claramente son válidas también al generalizarlas a la variedad de cuatro dimensiones espacio-tiempo, en la cual suceden, en realidad, todos los fenómenos y refiriéndose las transformaciones entonces a las cuatro variables. Sin embargo, en las reflexiones generales expuestas, el prescindir de la cuarta dimensión nada significa. Esto se razonará en el párrafo 3 *b).*

rizados. Por consiguiente, es preciso que las leyes naturales conserven su forma al pasar de uno de tales sistemas a otro, esto es, las transformaciones de las variables x_1, x_2, x_3 que correspondan a dicho paso, no pueden variar la expresión analítica de la ley física considerada.

Esto conduce a establecer un principio de Relatividad que debe ser denominado en lo sucesivo principio de Relatividad general, el cual exige la invariancia de las leyes físicas con respecto a sustituciones arbitrarias de las cuatro variables. También el elemento lineal que aparece en ellas es preciso que conserve su forma por una transformación *arbitraria* de las variables. A esta condición se ajusta, en efecto, el elemento lineal

$$ds = \sqrt{g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + \ldots\ldots + g_{33} dx_3^2},$$

en el cual no se ha hecho ninguna clase de reserva restrictiva sobre la índole de la métrica del espacio, es decir, sobre lo que deben significar como coordenadas las variables x_1, x_2, x_3. El elemento lineal euclídeo

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

conserva su forma solamente con respecto a las transformaciones de la teoría de la Relatividad *especial*, la cual se limita a sistemas que se mueven rectilínea y *uniformemente*. A consecuencia de esto es preciso que el elemento de arco se acomode a las ulteriores condiciones de una teoría de Relatividad general, de modo que conserve su forma con respecto a sustituciones arbitrarias. Pero esto conduce al elemento lineal de *Riemann*, no al euclídeo.

La elección de la expresión

$$ds^2 = \sum_1^3 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

para el elemento lineal en las leyes físicas se ha de considerar, a pesar de su gran generalidad, sin embargo, como una hipótesis, como ya *Riemann* hizo notar. Pues también otras funciones de las diferenciales dx_1, dx_2, dx_3, por ejemplo, la raíz cuarta de una expresión diferencial homogénea de cuarto grado, podrían dar una medida para la longitud del elemento lineal [9]. Pero no se presenta en la actualidad ningún motivo para abandonar la expresión general más sencilla del elemento lineal, es decir, la de segundo grado, y adoptar funciones más complicadas. En el marco de los dos postulados que nosotros imponemos a la explicación de los fenómenos físicos, ella cumple todas las exigencias. Sin embargo, nunca se puede olvidar que en la elección de la expresión analítica para el elemento lineal siempre hay encerrado algo hipotético y que es deber del físico darse cuenta, en todo tiempo, de este hecho, sin prejuicios. *Riemann* concluye, a propósito de esto, también su trabajo (*) con las siguientes proposiciones que ahora adquieren especial importancia:

«La cuestión de la validez de las hipótesis de la Geometría en los infinitamente pequeños se relaciona con

---

(*) *B. Riemann:* Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría. Nuevamente redactado y aclarado por *H. Weyl.* Berlín, Casa editorial de Julius Springer, 1919.

la cuestión del fundamento interno de la métrica del espacio. En esta cuestión, que bien puede ser contada todavía en la teoría del espacio, viene a aplicarse la advertencia hecha anteriormente de que en una variedad discreta [10] el principio o carácter de sus relaciones métricas ya está contenido en la noción de esta variedad, pero en una continua es preciso que venga de otra parte. Por consiguiente, es necesario, o que la realidad que constituye el fundamento del espacio forme una variedad discreta, o que busquemos fuera el fundamento de sus relaciones métricas, en fuerzas de enlace que actúen en ella.

»La decisión de estas cuestiones sólo puede hallarse cuando se parte del concepto de los fenómenos acreditado hasta ahora por la experiencia, cuyos fundamentos puso *Newton*, y se va retocando éste paulatinamente a medida que lo requieren los hechos que por él no se pueden explicar; investigaciones como las aquí indicadas, que parten de nociones generales, pueden sólo servir para que este trabajo no sea estorbado por la excesiva limitación de los conceptos y el progreso en el conocimiento de las relaciones de las cosas no sea detenido por prejuicios tradicionales.

»Esto conduce al terreno de otra ciencia, la Física, en el cual la índole de la ocasión actual no nos permite entrar.»

Por lo tanto, según la idea de *Riemann*, vienen a decidirse estas cuestiones, si se parte del concepto de *Newton* acerca de los fenómenos y éste se va retocando paulatinamente a medida que lo requieren los hechos que hasta ahora no se pueden explicar por él. Esto es lo que *Einstein* ha hecho. Las «fuerzas de enlace» que

Riemann indicaba nosotros las hallaremos de nuevo, en efecto, en la teoría de *Einstein*. Pues, como veremos en el capítulo V, la teoría de la Gravitación de *Einstein* se apoya en la idea de que las fuerzas de Gravitación son las «fuerzas de enlace», es decir, representan el «fundamento interno de las relaciones métricas» del espacio.

b) El elemento lineal de la variedad espacio-tiempo de cuatro dimensiones expresado en forma compatible con ambos postulados.

Las relaciones métricas que debemos poner como fundamento al formular las leyes físicas se habrían podido tratar inmediatamente con respecto a la variedad de cuatro dimensiones espacio-tiempo. Pues la teoría de la Relatividad especial ha conducido al importante conocimiento de que la variedad espacio-tiempo posee las mismas relaciones métricas en sus cuatro dimensiones. Me gusta, sin embargo, tratar separadamente la medida del tiempo, por una parte, porque justamente este resultado de la Teoría de la Relatividad ha encontrado en los partidarios de la Mécanica clásica la mayor oposición, y por otra, porque también la Mecánica clásica es preciso que llegue a fijar conceptos acerca de la medida del tiempo, pero nunca en este asunto ha llegado a un completo acuerdo. Las dificultades con las cuales la Mécanica clásica ha de luchar están ya escondidas en sus primeras nociones fundamentales. Especialmente la ley de inercia dió siempre ocasión a la crítica de los fundamentos de la Mécanica, y puesto que también los fundamentos de la medida del tiempo habían sido puestos en estrecha relación con dicha ley, estas críticas afectaban siempre también a los fundamentos de la medida del tiempo.

En esta ley de la inercia que dice: Un cuerpo no sometido a influencias exteriores se mueve con velocidad constante siguiendo una trayectoria rectilínea: hace falta determinar dos elementos esenciales, la referencia del movimiento a un sistema de coordenadas determinado y una medida determinada del tiempo; sin medida del tiempo no se puede hablar de una velocidad constante, es decir, de movimiento *uniforme*.

Según una idea propuesta por *C. Neumann* se ha empleado la misma ley de inercia para dar una definición de la medida del tiempo, formulándola así [11]: «Dos puntos materiales, de los cuales cada uno se abandona a sí mismo, se mueven de tal manera que, a longitudes iguales de trayectoria recorridas por uno de ellos, corresponden siempre longitudes iguales de trayectoria del otro». Fundándonos en este principio, en el cual la medida del tiempo no entra explícitamente, nosotros podemos «definir intervalos iguales de tiempo como aquéllos, dentro de los cuales un punto abandonado a sí mismo recorre longitudes iguales de trayectoria».

Han adoptado también este punto de vista en investigaciones posteriores sobre la ley de inercia, por ejemplo, *L. Lange* y *H. Seeliger*. También *Maxwell* (en «Matter and Motion», «Materia y Movimiento») ha escogido esta definición. En cambio, especialmente *H. Streintz* [12] (siguiendo a *Poisson* y *d'Alembert)* ha exigido desligar la medida del tiempo de la ley de inercia, puesto que las hipótesis en que radica el concepto de tiempo tenían un fundamento más profundo y general que el principio de inercia. Según su opinión, todo fenómeno físico, que se puede repetir realmente en condiciones idénticas, puede servir para fijar una unidad de medida del tiempo, puesto que todo fenómeno *idéntico* es preciso que reclame igual duración; de otro modo quedaría excluída toda descripción legítima de los fenómenos físicos. En efecto, en este principio se funda el reloj; él conduce a un observador, *por lo menos para su lugar de observación*, a una medida del tiempo. En cambio, relacionando la medida del tiempo con la ley de inercia, se tiene, a la verdad, una *definición de transcursos iguales de tiempo*, libre de dificultades, pero la *medida* de longitudes iguales de trayectoria recorridas por un cuerpo que se mueve uniformemente, y con ello la *fijación* de una unidad de tiempo, sólo es entonces físicamente posible para un lugar de observación si el observador y el cuerpo están en constante relación, por ejemplo, por medio de señales luminosas. Y no se está autorizado, sin ulteriores hipótesis, para suponer que dos observadores que se consideran en traslación uniforme el uno con respecto al otro, y que, por consiguiente, son equivalentes según la ley de inercia, lleguen de esta manera, utilizando el mismo cuerpo móvil, a idénticas medidas del tiempo. La idea de *Poisson* hacía posible, por consiguiente, *en un mismo lugar dado de observación*, una medida satisfactoria del tiempo, en cierto modo, la construcción de un reloj, pero de ninguna manera tocaba la cuestión de las relaciones de los tiempos de *distintos* lugares de observación entre sí; en cambio, la idea de *Neumann* propone justamente esta cuestión, sobre la cual ha habido tantas discusiones, desde que *Einstein* estableció el principio de Relatividad.

Por la aspiración de reducir la Mecánica clásica al menor número posible de principios, sin contradicción unos con otros, se recurrió a *construcciones ideales* y *experimentos imaginarios*. Con esto no se llegó a la conjetura de que el estado de movimiento del observador podía influir en la fijación de una unidad de tiempo, fundándose en la ley de inercia, por lo tanto, en la medida de una longitud (porción de trayectoria). Se admitió que los datos obtenidos por las observaciones necesarias para establecer una simultaneidad y la evaluación de la longitud de una porción de trayectoria tenían una significación absoluta enteramente independiente de las condiciones de observación. Sin embargo, no ocurre así, como *Einstein* ha demostrado. Antes bien, justamente este nuevo conocimiento de la Relatividad del tiempo y de las medidas de longitud ha formado su punto de partida para establecer el principio de Relatividad especial [13]. Ella es una consecuencia necesaria de la significación universal de la velocidad de la luz, de la cual nosotros hablamos en el capítulo I. Su conocimiento nos ha suministrado primeramente las ecuaciones exactas de transformación para relacionar entre sí las medidas de espacio-tiempo en sistemas que se mueven el uno con respecto al otro rectilínea y uniformemente, con lo cual se llega a la idea de *Neumann* de establecer una medida de tiempo por medio de la ley de inercia. Pero en las nuevas ecuaciones de transformación no es idénticamente $t' = t$, sino

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Las medidas del tiempo en el segundo sistema que está en movimiento relativamente al primero dependen esencialmente, por lo tanto, de la velocidad v de uno de los dos sistemas con respecto al otro. A consecuencia de esto, establecer una medida de tiempo fundándose en la ley de inercia, como propuso *Neumann*, no conduce, de ningún modo, al resultado de que las medidas del tiempo sean enteramente independientes del estado de movimiento de los sistemas que se mueven uno con respecto a otro, como se supone en la Mecánica clásica. Sólo las investigaciones de *Einstein* referentes a la teoría de la Relatividad especial, han puesto enteramente en claro los principios hipotéticos de nuestras medidas del tiempo, y por esto han llenado un vacío sensible de la Mecánica clásica.

Que ciertamente sólo hasta después de tantos años se hayan reconocido estos defectos en las hipótesis sobre las medidas del tiempo, se explica por el hecho de que incluso las velocidades que aparecen en Astronomía son tan pequeñas en comparación con la de la luz, que no se podían presentar, entre las observaciones y la teoría, discrepancias que llamaran la atención. A consecuencia de esto no se manifestaron sensiblemente los puntos débiles de la teoría, hasta que el estudio de los movimientos de los electrones, en los cuales aparecen velocidades del orden de magnitud de la velocidad de la luz, demostró que la teoría existente era inadmisible.

De las particularidades que se deducen de la Relatividad de las medidas de espacio-tiempo, se ha hablado tanto en los últimos años, que muchas veces sólo se lee lo mismo repetido. De las consideraciones de este capítulo es esencial la idea a la cual se llega, de que espacio y tiempo representan una *variedad única* de cuatro dimensiones con *relaciones de medida únicas* [14]. Por efecto de esto se han de aplicar, a manera de consecuencia, las reflexiones del párrafo precedente *a)*, sobre las relaciones métricas de una variedad, a la variedad de cuatro dimensiones espacio-tiempo, y en atención a los dos postulados fundamentales—de continuidad y de relatividad—se ha de poner, cuando se adopta el tiempo como cuarta dimensión, para el elemento lineal, la expresión

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + \ldots\ldots + g_{34}dx_3dx_4 + g_{44}dx_4^2,$$

en la cual las $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ son funciones de las variables x_1, x_2, x_3, x_4.

A tomar esta posición mucho más general con respecto a las cuestiones de las leyes de medida en las fórmulas físicas nos ha conducido, hasta ahora, sólo la necesidad de no introducir desde el principio, para formular las leyes físicas, más hipótesis que las compatibles con los dos postulados y procurar admitir las ideas a las cuales ha conducido la teoría de la Relatividad *especial*. Resumiendo, podemos decir: la suposición de la validez de las relaciones de medida *euclídeas* es ciertamente *compatible* con el postulado de *continuidad*, si bien aparecen en ella hipótesis especiales restrictivas que no era necesario hacer. Pero el segundo postulado: reducción de *todos* los movimientos a movimientos relativos nos *obliga* a abandonar dicha métrica euclídea (página 35). Una descripción de las dificultades todavía subsistentes en la Mecánica, hará aún más comprensible la necesidad de este paso.

IV
Las dificultades en los principios de la Mecánica clásica.

En un espacio reducido no cabe exponer, de una manera acabada, los fundamentos de la Mecánica clásica. Sólo puedo hacer resaltar claramente, para el objeto actual, los motivos que hacen dudar de la teoría, sin serme posible hacer la debida justicia a sus éxitos anteriores. Todas las dudas referentes a la Mecánica clásica principian ya al formular la ley de inercia que *Newton* establece como ley capital.

Como ya se hizo notar en la pág. 38, en la afirmación de que el movimiento de un punto abandonado a sí mismo es rectilíneo y uniforme, se puede echar de menos la referencia a un sistema de coordenadas determinado. Aquí surge una dificultad insuperable: la Naturaleza no nos suministra, en realidad, sistema alguno de coordenadas con relación al cual fuese posible un movimiento rectilíneo y uniforme; pues así que un sistema de coordenadas está ligado a un cuerpo cualquiera, por ejemplo, a la Tierra, al Sol, etc. (y solamente esto le presta un sentido físico), la hipótesis de la ley de inercia (el estar libre de influencias exteriores) no se cumple a causa de la atracción mutua de los cuerpos. Es preciso, conforme a esto, o adjudicar al movimiento de un cuerpo una significación en sí, esto es, admitir movimientos con relación al espacio absoluto o recurrir a experimentos ideales, introduciendo, como *C. Neumann*, un cuerpo hipotético Alfa y refiriendo a éste un sistema de ejes con relación al cual debe regir la ley de inercia (Sistema de inercia) [15]. La alternativa ante la cual estamos es muy poco satisfactoria. La introducción del espacio absoluto ocasiona las dificultades de concepto con frecuencia discutidas, por las cuales flaquearon los fundamentos de la mecánica de *Newton*. Y la introducción del sistema de referencia Alfa toma, a la verdad, tan en cuenta la relatividad de los movimientos, que todos los ulteriores sistemas en movimiento uniforme con respecto a un sistema Alfa se consideran, desde luego, como *equivalentes;* pero nosotros podemos afirmar ciertamente que de ningún modo hay un sistema Alfa visible y también que nunca se llegará a establecer definitivamente un tal sistema. (A lo más se llegará, tomando reiteradamente en cuenta la influencia de las estrellas sobre el sistema solar y la mutua de ellas entre sí, a un sistema de coordenadas que, para el sistema solar, pueda desempeñar, con *suficiente exactitud*, el papel de un tal sistema de inercia). A consecuencia de esto, el mismo autor de la idea, *C. Neumann*, reconoce que ella siempre será «poco satisfactoria» y «enigmática», y que la Mecánica así fundada sería verdaderamente una teoría bien caprichosa.

Según esto, parece enteramente natural que *E. Mach* [16] proponga formular la ley de inercia de modo que inmediatamente aparezca la relación con las estrellas fijas. «En vez de decir: la dirección y la velocidad de una masa μ permanecen constantes en el espacio, se puede también emplear la expresión: la aceleración media de la masa μ con respecto a las masas m, m', m''...., a las distancias r, r', r''..... es igual a cero, o

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = 0.$$

La última expresión es equivalente a la primera, mientras se consideren sólo grandes masas en número suficiente y suficientemente distantes..... » Pero esta manera de formular tampoco puede satisfacer. Además de una cierta precisión le falta también el carácter de ley de contacto, de modo que su elevación a la categoría de ley fundamental (en vez de la de inercia), no viene al caso.

La causa interna de estas dificultades se ha de encontrar seguramente en una insuficiente conexión entre los principios fundamentales y la observación. En realidad, nosotros sólo *observamos* el movimiento de cuerpos unos *relativamente* a otros y éste *nunca* es en absoluto rectilíneo y uniforme. *El puro movimiento de inercia es, por lo tanto, una idea deducida por la abstracción de un experimento ideal, una ficción.*

Así como puede ser muchas veces fructífero e imprescindible el experimento ideal, así también, sin embargo, siempre amenaza el peligro de que una exagerada abstracción haga que se evapore el contenido físico científico de las nociones en que se funda. Y así sucede aquí. Si en nuestro concepto no tiene sentido hablar del «movimiento de un cuerpo» en el espacio, mientras sólo exista un cuerpo, ¿tiene entonces sentido adjudicar también todavía al cuerpo atributos como el de *masa inerte*, el cual sólo procede de nuestra observación de *varios* cuerpos que se mueven unos *con relación* a otros?

Si no lo tiene, tampoco se puede atribuir a la noción de «masa inerte de un cuerpo» una significación absoluta, es decir, independiente de todas las otras condiciones físicas, como hasta ahora se había hecho. Tales dudas sirvieron de nuevo apoyo a la idea de que la teoría de la Relatividad especial también atribuya inercia a toda energía [17].

Este resultado de la teoría de la Relatividad especial hacía que se tambaleara todo nuestro concepto de la inercia de la materia, pues arrebataba al principio de la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada de los cuerpos su validez rigurosa. Ahora debía un cuerpo tener otra masa inerte, según su contenido de energía, sin que hubiese variado su masa pesada. Pero siempre se había determinado su masa por su peso, sin que se hubiesen mostrado discrepancias [18].

Una tal dificultad fundamental podía presentarse, porque el principio de la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada no se había enlazado estrechamente con los principios fundamentales de la Mecánica, y en los fundamentos de la Mecánica de Newton *no se atribuye a los fenómenos gravitatorios la misma significación que a los fenómenos de inercia, como era preciso hacer, según la experiencia.* La gravitación, como fuerza de acción a distancia, se introducía sólo como fuerza especial para un dominio reducido de fenómenos, y del hecho sorprendente de la igualdad, válida siempre y en todas partes, entre la masa inerte y la pesada, no se sacaron ulteriores consecuencias. Para evadir estas dificultades *es preciso establecer, en lugar de la ley de inercia, una ley fundamental que abarque los fenómenos de inercia y los gravitatorios. Esto puede realizarse pasando lógicamente al* *principio de Relatividad de todos los movimientos*, *como* Einstein *ha tenido la perspicacia de ver*. *Por esto* Einstein *escogió esta circunstancia para punto de partida de sus desarrollos*.

El principio de la *igualdad entre la masa inerte y la pesada*, en el cual se refleja la estrecha dependencia entre los fenómenos de inercia y los gravitatorios, se puede todavía aclarar por otro lado, y por ello descubrir *su estrecha relación con el principio de Relatividad general*.

A pesar de que *Newton* verdaderamente se resistía a la idea del «espacio absoluto», él creía, sin embargo, ver en la aparición de las fuerzas centrífugas un apoyo esencial para su existencia. Si gira un cuerpo, aparecen en él fuerzas centrífugas. Su aparición permite comprobar la rotación del cuerpo, *aun sin la presencia de otros cuerpos visibles*. Aunque la Tierra estuviese constantemente encerrada dentro de una capa impenetrable de nubes, se podría, sin embargo, afirmar su rotación diurna por el experimento del péndulo de *Foucault*. De esta particularidad de las rotaciones dedujo *Newton* la existencia de movimientos absolutos. Pero considerada puramente desde el punto de vista *cinemático*, no se distingue, en manera alguna, respecto a este asunto, la rotación de la Tierra de la traslación; nosotros *observamos* también aquí sólo movimientos *relativos* de cuerpos, y podríamos imaginar igualmente que todos los cuerpos del Universo giran alrededor de la Tierra. En efecto, *E. Mach* ha afirmado, no sólo la equivalencia cinemática, sino también la dinámica de ambos fenómenos; pero entonces es preciso admitir que las fuerzas centrífugas que aparecen en la Tiera en *rotación*, aparecerían por completo idénticamente como manifestación de la *atracción de las masas* de todos los cuerpos del Universo *girando alrededor de la Tierra* en reposo [19].

La autorización para tal concepto, cuyo origen es, por de pronto, sólo cinemático, nos la da en esencia el hecho experimental de la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada de los cuerpos. Según el concepto que hasta ahora se tenía, las fuerzas centrífugas son provocadas por la inercia del cuerpo que gira (o, mejor aún, por la inercia de sus distintos puntos materiales, los cuales intentan constantemente seguir la acción de su inercia, y por ella querrían salirse, escapando por la tangente, de las trayectorías circulares que están obligados a recorrer). El campo centrífugo es, por consiguiente, un *campo de inercia* [20]. El que nosotros lo podamos concebir también como un campo gravitatorio (y esto hacemos así que *afirmamos* la relatividad de las rotaciones, también en sentido dinámico, puesto que es preciso entonces que admitamos que el conjunto de las masas que giran alrededor del cuerpo en reposo *desarrollan* en él, por su atracción, las llamadas fuerzas centrífugas) se funda en la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada de los cuerpos, establecida por *Eötvös* con extraordinaria exactitud, justamente utilizando las fuerzas centrífugas de la Tierra en rotación [21]. *Se ve por estas consideraciones cómo un principio general de Relatividad de todos los movimientos conduce al mismo tiempo a una teoría de los campos gravitatorios.*

De todo lo dicho no se puede ya dejar de sacar la impresión de que es de absoluta necesidad edificar la Mecánica sobre bases enteramente nuevas. Sin tener en cuenta la *Relatividad de todos los movimientos*, no hay que esperar formular satisfactoriamente la ley de inercia, ni, por consiguiente, tampoco librar a la Mecánica de la noción artificial del movimiento absoluto; además, el descubrimiento de la *inercia de la energía* ha enseñado a conocer hechos que no encajan, en general, en el sistema existente y exigen una revisión de los fundamentos de la Mecánica. Las condiciones que nosotros necesitamos establecer de antemano son (véase pág. 27): «Eliminar de las leyes fundamentales las acciones a distancia y todas las magnitudes inaccesibles a la observación; esto es, *establecer una ecuación diferencial que abarque el movimiento de un cuerpo bajo la influencia de la inercia y de la gravedad y exprese la relatividad de todos los movimientos.* Con estas condiciones cumple perfectamente la teoría de la Gravitación y teoría general de la Relatividad de *Einstein.* El sacrificio que para ello es preciso que nosotros hagamos es renunciar a la hipótesis, por cierto sólidamente arraigada, de que todos los fenómenos físicos tienen lugar en un espacio cuyas relaciones métricas (Geometría) nos son *à priori* dadas de antemano, independientemente de todo conocimiento físico. Como veremos en el capítulo siguiente, la teoría general de la Relatividad conduce más bien a la idea de que nosotros podemos concebir las relaciones métricas en el entorno de los cuerpos como dependientes de su gravitación. Por esto la Geometría (del Físico experimental) se funde íntimamente con las restantes ramas de la Física.

Para resumir aquí lo que hemos deducido hasta ahora de los postulados fundamentales formulados al principio, podemos decir: el postulado de la Relatividad general exige la independencia completa de las leyes fundamentales, de la elección especial del sistema de referencia. Puesto que el elemento lineal euclídeo no conserva su forma, al pasar arbitrariamente de un sistema de referencia a otro, se ha de poner en su lugar el elemento lineal general

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Mientras que (véase pág. 34) por el postulado de continuidad sólo puede parecer conveniente no introducir las hipótesis restrictivas de la Geometría métrica euclídea, el principio de Relatividad general no nos deja ya lugar a duda.

La razón de hacer hincapié en este principio, como en general en la condición de que sólo deben aparecer en las leyes físicas magnitudes observables, no se origina sólo de una necesidad formal, sino de la aspiración de dar al principio de causalidad, realmente la significación de una ley válida para el mundo experimental. El postulado de la Relatividad de todos los movimientos hay que valorarlo por esta necesidad de nuestros *conocimientos teóricos* [22]. Es preciso, según esto, aspirar a la posibilidad de no introducir en las leyes físicas, al lado de magnitudes observables, otras que sean de naturaleza ficticia, como, por ejemplo, el «espacio» de la Mecánica Newtoniana. Pues de otro modo, el principio de causalidad nada dice realmente sobre causas y acciones de la experiencia pura, las cuales precisamente han de ser el objeto de toda descripción de la Naturaleza.

V

La Teoría de la Gravitación de Einstein.

a) La ley fundamental del movimiento y el principio de equivalencia de la nueva teoría.

Después de lo expuesto anteriormente, nosotros podremos pasar a la breve exposición de la teoría de la Gravitación de *Einstein*. Dentro del marco de conocimientos matemáticos aquí supuestos, naturalmente sólo será posible hacer un diseño suficientemente extenso de los rasgos más salientes de la nueva teoría, de modo que las hipótesis y principios característicos de ella resalten claramente y se ponga de manifiesto su relación con los dos postulados fundamentales del capítulo II. Nosotros partimos de la ley fundamental del movimiento en la Mécanica clásica, es decir, de la ley de inercia. Puesto que ya en la ley de inercia se ponen de manifiesto todos los puntos débiles de la antigua teoría, es de absoluta necesidad para la nueva Mecánica una nueva ley fundamental del movimiento. Se ve, por lo tanto, inmediatamente que hay que principiar por este lado la construcción de la nueva teoría. La nueva ley del movimiento es preciso que sea una ley diferencial, la cual, en primer lugar, explique el movimiento de un punto material bajo la influencia de la inercia y de la gravedad, y en segundo lugar, siempre conserve la misma forma, cualquiera que sea la clase de sistema de coordenadas a que se refiera, de modo que ningún sistema de referencia lleve ventaja a otro. La primera condición se origina de la necesidad de atribuir, en el nuevo fundamento de la Mecánica, igual significación a los fenómenos gravitatorios que a los de inercia; por esto es preciso también que la ley contenga términos que caractericen el estado gravitatorio del campo de un punto a otro; la segunda condición se origina del postulado de la Relatividad general de los movimientos.

Una ley que satisface a estas condiciones se halló en la ecuación del movimiento de un punto no sometido a influencias exteriores, según la teoría de la Relatividad especial. Esta ley decía que la trayectoria del punto debía ser la línea «más corta» o «más directa» [23] (por lo tanto, «la línea recta», si el elemento lineal ds de la trayectoria es el euclídeo). Escrita en forma de ecuación de variación esta ley es

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\left\{\int \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2}\right\} = 0.$$

Si este principio, de que en el movimiento verdadero el móvil debe seguir la trayectoria más directa, se quiere elevar a la categoría de ley diferencial general para el movimiento en un campo gravitatorio, teniendo en cuenta el principio de relatividad de todos los movimientos, es preciso poner como nueva ley fundamental

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\left\{\int \sqrt{g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + \ldots\ldots + g_{44}dx_4^2}\right\} = 0. \quad [1]$$

Pues sólo esta forma del elemento lineal permanece invariable (es invariante) por transformaciones arbitrarias de las $x_1 \ldots\ldots x_4$. Como algo nuevo esencial aparecen aquí los factores $g_{11} \ldots\ldots g_{44}$ que anteriormente no fueron interpretados. La idea extraordinariamente fructífera de *Einstein* fué ahora la siguiente. Puesto que la nueva ley debe regir para movimientos cualesquiera, por consiguiente, también para los acelerados, como nosotros éstos los observamos en todos los campos gravitatorios, es preciso hacer responsable, justamente, de la aparición de estos diez factores $g_{\mu\nu}$, al campo gravitatorio en que el movimiento observado se realiza. Por lo tanto, es preciso que los diez coeficientes $g_{\mu\nu}$, los cuales, en general, serán funciones de las variables $x_1 \ldots\ldots x_4$, para que la nueva ley fundamental deba ser útil, puedan ser relacionados con el campo gravitatorio en que el movimiento se efectúa, de modo que queden determinados por dicho campo, y el movimiento *dado por la ecuación* [**1**] concuerde con el *observado*. Esto es posible, en efecto. Las $g_{\mu\nu}$ son los potenciales gravitatorios de la nueva teoría, esto es, ellos se encargan del papel que en la teoría de *Newton* desempeña el potencial gravitatorio único, pero sin que ellos tengan las propiedades especiales que un potencial posee según el concepto que hasta ahora teníamos de él.

Conforme a las relaciones métricas de una variedad espacio-tiempo fundada en el elemento lineal

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

la cual ahora es el fundamento de la Mecánica a causa de la Relatividad de todos los movimientos, es preciso, también, formular las restantes leyes físicas, de modo que sean independientes de la elección eventual de las variables. Sin embargo, antes de que entremos en esto, consideremos la marca característica que ha de adoptar la teoría de la Gravitación caracterizada por la ecuación **[1]**.

La idea de la nueva teoría, de que las leyes de la Mecánica sólo deben contener expresiones sobre movimientos relativos de los cuerpos, y que, en especial, el movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio de los restantes está dado por la fórmula

$$\delta\left\{\int\sqrt{\sum_{1}^{4} g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}}\right\}=0,$$

supone la validez de una hipótesis física sobre la esencia de los fenómenos de gravitación, que *Einstein* denomina *hipótesis de la equivalencia* o *principio de equivalencia* [24]. Éste dice lo siguiente: *Una variación eventual que un observador percibe en el transcurso de un fenómeno como acción de un campo gravitatorio, él la percibiría exactamente del mismo modo si el campo gravitatorio no existiese, pero él (el observador) transfiriese a su sistema de referencia la aceleración correspondiente a dicho campo en su lugar de observación.* Es decir, si se someten las variables x, y, z, t en la ecuación del movimiento del punto material que se mueve rectilínea y uniformemente (por lo tanto, sin influencia de gravitación)

$$\delta\{\int ds\}=\delta\{\int\sqrt{-dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2}\}=0,$$

a cualquier transformación, esto es, se pasa de las coordenadas del sistema de partida, por cualquier transformación, a las coordenadas $x_1 \ldots\ldots x_4$ de un sistema de referencia acelerado de cualquier modo con respecto a él, aparecen en la expresión transformada de ds, en general, coeficientes $g_{\mu\nu}$ que son funciones de las nuevas variables, de modo que la ecuación transformada toma la forma

$$\delta\left\{\int\sqrt{g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + \ldots\ldots + g_{44}dx_4^2}\right\} = 0.$$

Según la hipótesis de la equivalencia, se debe ahora (con respecto al dominio ampliado de validez de la anterior ecuación) poder concebir las funciones $g_{\mu\nu}$, *producidas* por una transformación de aceleración [25], también como debidas a la acción de un campo gravitatorio, el cual manifestase su existencia precisamente por las aceleraciones correspondientes. *Así, los problemas de gravitación en el estudio general del movimiento nacen de una teoría de Relatividad de todos los movimientos.*

La afirmación de la equivalencia entre los fenómenos de gravitación y aceleración eleva el hecho fundamental de que todos los cuerpos caigan igualmente acelerados en el campo gravitatorio de la Tierra, a una hipótesis fundamental de una teoría de los fenómenos de gravitación. A este hecho, aunque estaba comprobado con la mayor seguridad por nuestra experiencia, no se le había, en general, asignado ningún lugar, hasta ahora, entre los fundamentos de la Mecánica. Antes bien, con la ley de inercia de *Galileo* un fenómeno nunca observado (el movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo que no esté sometido a ninguna fuerza exterior) se ponía en primer lugar entre las leyes fundamentales de la Mecánica. Y así se formó una idea extraña, como si los fenómenos de inercia y de gravedad, los cuales probablemente no están menos estrechamente enlazados entre sí que los eléctricos y magnéticos, nada tuviesen que ver unos con otros. El fenómeno de la inercia es colocado, como propiedad fundamental de la materia, en el pináculo de la Mecánica clásica; la gravedad, en cambio, se introduce, por decirlo así, sólo como una de las muchas fuerzas posibles de la Naturaleza, dada por la ley de *Newton*. El hecho asombroso de la igualdad entre la masa inerte y la masa pesada de los cuerpos aparece en ella sólo como accidental.

El principio de equivalencia de *Einstein* señala a este hecho el lugar que le pertenece en la teoría de los fenómenos de movimiento. La nueva ley de movimiento **[1]** debe explicar los movimientos *relativos* de los cuerpos unos con respecto a otros bajo la influencia de su inercia y gravitación. Los fenómenos de inercia y de gravitación están soldados entre sí, por el único principio del movimiento, en la línea geodésica ($\delta \int ds = o$). Puesto que el elemento de arco

$$ds = \sqrt{\sum_{1}^{4} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}}$$

conserva su forma por transformación arbitraria de las variables, son todos los sistemas de referencia *igualmente* autorizados, es decir, ninguno es privilegiado con respecto a otro.

La parte más importante del problema, ante el cual se vió *Einstein* colocado, fué la formación de las ecuaciones diferenciales para las $g_{\mu\nu}$, los potenciales gravitatorios de la nueva teoría. Con auxilio de estas ecuaciones diferenciales se había de poder determinar las $g_{\mu\nu}$ por la repartición de las magnitudes que engendran el campo gravitatorio; y era preciso, para que la teoría prosperara, que el movimiento dado por estas $g_{\mu\nu}$, fundándose en la ecuación **[1]** (por ejemplo, el movimiento de los planetas), concordara con el observado.

Einstein utiliza para la formación de las ecuaciones diferenciales de los potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$ la experiencia adquirida por la teoría de *Newton*. Según la ecuación de *Poisson* $\Delta\varphi = - 4\pi \cdot \rho$ para el potencial gravitatorio de *Newton*, el *factor generador* del campo (en la ecuación de *Poisson*, la densidad de masa ρ) es proporcional a una *expresión diferencial de segundo orden* del potencial. Si las nuevas ecuaciones diferenciales deben poseer una forma semejante a la ecuación de *Poisson*, el camino para llegar a las ecuaciones diferenciales de las $g_{\mu\nu}$ está como prescrito.

Conforme a nuestra idea arraigada de la relación mutua entre la inercia y la gravitación, y de la relación de la inercia con el contenido de energía del cuerpo, aparecen como magnitudes generadoras del campo, en vez de la densidad de masa ρ de la ecuación de *Poisson*, las diez componentes de la magnitud que se mide por el estado *energético* del campo en cada lugar y que se introduce ya en la teoría de la Relatividad especial como «*Tensor-Tensión-Energía*».

En cuanto a las expresiones diferenciales de segundo orden en las $g_{\mu\nu}$ que deben corresponder a la $\Delta\varphi$ de la ecuación de *Poisson*, *Riemann* ha demostrado lo siguiente. Para las relaciones métricas de una variedad fundada en el elemento lineal

$$ds^2 = \sum_{1}^{4} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

es competente una expresión diferencial (el tensor de cuarto orden de *Riemann-Christoffel*) independiente de la elección eventual de las variables $x_1 \ldots x_4$, por medio de la cual pueden ser desarrolladas (por operaciones algebraicas y diferenciales) las ulteriores expresiones diferenciales, independientes de la elección eventual de las variables $x_1 \ldots x_4$, y que contengan sólo las $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Esta expresión diferencial conduce determinadamente a las diez expresiones diferenciales de *segundo* orden en las $g_{\mu\nu}$. Y ahora *Einstein* hace a estas diez expresiones diferenciales proporcionales a las diez componentes del Tensor-Tensión-Energía, como magnitudes generadoras del campo, para llegar a las ecuaciones diferenciales buscadas; como factor de proporcionalidad, él pone la constante de gravitación. Estas ecuaciones diferenciales para las $g_{\mu\nu}$, junto con el principio del movimiento antes dicho, representan la ley fundamental de la nueva teoría. Ellas conducen, en efecto, en primera aproximación, a aquellas formas de movimiento que nos son conocidas por la teoría de *Newton* [26]. Pero avanzando en la aproximación, ellas suministran también, sin ulteriores hipótesis suplementarias, el único fenómeno que no se había podido explicar en la teoría de los planetas por medio de la ley de *Newton*, a saber, el término residual en el movimiento del perihelio de Mercurio. Estas consecuencias demuestran que, siguiendo el camino establecido para llegar a las ecuaciones diferenciales de las $g_{\mu\nu}$, al parecer, se está en lo cierto. Sin embargo, es preciso darse cuenta de que en estos principios admitidos, como en el principio de la ley fundamental del movimiento, hay una cierta arbitrariedad. Sólo la construcción cuidadosa de la nueva teoría, con todas sus consecuencias, y su comprobación por la experiencia, podrá demostrar si la forma dada a las nuevas leyes fundamentales es definitiva.

Puesto que las fórmulas de la nueva teoría se fundan en una variedad espacio-tiempo, cuyo elemento lineal tiene la forma general

$$ds = \sqrt{\sum_{1}^{4} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}},$$

es preciso (véase pág. 55), para la conclusión de la teoría de la Relatividad general, que también todas las restantes leyes físicas correspondientes a las nuevas relaciones métricas reciban una forma independiente de la elección eventual de las cuatro variables $x_1 \ldots\ldots x_4$.

Para la resolución de este problema tiene ya la Matemática efectuado el trabajo de antemano en el Cálculo diferencial absoluto; *Einstein* lo ha restaurado para su objeto especial (*). *Gauss* formó el Cálculo diferencial

---

(*) En su trabajo *Über die formalen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, «Sobre los fundamentos formales de la teoría general de la Relatividad.—Sitz. Ber. d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. (Actas de las sesiones de la Real Academia de Ciencias de Prusia). XLI, 1916, pág. 1.080.

absoluto para estudiar, en la teoría de superficies, aquellas propiedades que permanecen intactas al variar la posición de la superficie en el espacio y al doblar o desarrollar la misma sin rasgarla, de modo que el valor del elemento lineal no varíe en ningún lugar de la superficie. Puesto que tales propiedades sólo dependen de las relaciones métricas *internas* de la superficie, se evita en la teoría de superficies la relación con el sistema usual de coordenadas, esto es, la relación con puntos que no están en la superficie. Antes bien, se fija cada punto de la superficie de manera que se cubra la misma por una especie de red, con dos familias arbitrarias de curvas, en las cuales cada curva está caracterizada por un parámetro; todo punto de la superficie está entonces determinado unívocamente por dos parámetros correspondientes a las dos curvas que pasan por él. En este concepto de las superficies, por ejemplo, una superficie cilíndrica y un plano no se han de considerar como figuras distintas, pues las dos pueden ser desarrolladas, sin alterar su extensión, la una sobre la otra, y en ambas rige, según esto, la misma Planimetría (las relaciones métricas internas en estas dos variedades son iguales)[27]. En la misma idea, pero ahora, no de las superficies como variedades de dos dimensiones, sino de la variedad de *cuatro dimensiones* espacio-tiempo, se funda la teoría general de la Relatividad. Puesto que las cuatro variables espacio-tiempo $x_1 \ldots\ldots x_4$, desprovistas de toda significación física, sólo se han de concebir como cuatro parámetros, se escoge, naturalmente, una representación para las leyes físicas que suministre leyes diferenciales independientes de la elección eventual de las $x_1 \ldots\ldots x_4$. Esto lo efectúa el Cálculo diferencial absoluto.

Resumiendo el resultado de los párrafos precedentes, cuyo alcance total sólo se reconoce de veras por un estudio concienzudo de los desarrollos matemáticos precisos, se puede decir lo siguiente:

Una Mecánica de los movimientos relativos de los cuerpos, que esté en consonancia con los dos postulados fundamentales de continuidad y de relatividad, sólo se puede edificar sobre una ley fundamental del movimiento que conserve su forma independientemente de la manera que se mueva el sistema de referencia. Se obtiene una ley útil de esta clase, si la ley del movimiento a lo largo de una línea geodésica, la cual en la teoría de la Relatividad especial sólo rige para el punto móvil libre de fuerzas, se eleva a ley diferencial general del movimiento en un campo gravitatorio. En esta ley general es preciso dar al elemento lineal de la trayectoria del cuerpo móvil la forma general

$$ds = \sqrt{\sum_{1}^{4} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}},$$

a la cual nosotros llegamos fundándonos en los dos postulados fundamentales del capítulo segundo. Las nuevas funciones $g_{\mu\nu}$ que aparecen se pueden interpretar, admitiendo la hipótesis de la equivalencia (pág. 55), como los potenciales del campo gravitatorio. Para el cálculo de las magnitudes $g_{\mu\nu}$, por medio de los factores determinativos del campo gravitatorio, materia y energía, se presenta, como principio a propósito, un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, que están constituídas análogamente a la ecuación diferencial de *Poisson* para el potencial gravitatorio *Newtoniano*. Estas ecuaciones diferenciales, junto con la ley fundamental del movimiento, representan las ecuaciones fundamentales de la nueva Mecánica y teoría de la Gravitación.

Puesto que la nueva teoría calcula con coordenadas curvilíneas generales x_1, x_2, x_3, x_4 y no con las coordenadas cartesianas de la Geometría euclídea, es preciso también que todas las leyes restantes de la Naturaleza obtengan una forma general que sea independiente de la elección especial de las coordenadas. El Cálculo diferencial absoluto ofrece los medios auxiliares matemáticos para esta nueva constitución de las fórmulas.

Esta teoría, edificada en las hipótesis más generales, vuelve a conducir, en primera aproximación, a las leyes del movimiento de *Newton*. Allí donde se manifiestan las discrepancias de la teoría antigua surge la posibilidad de la confirmación experimental de la nueva teoría. Antes de que nosotros insistamos sobre este punto, queremos volver la vista atrás para llegar con ello a ver claro qué posición nos obliga a adoptar la teoría general de la Relatividad, frente a las distintas cuestiones principales que, en el transcurso de este trabajo, han sido tocadas.

b) **Mirada retrospectiva.**

1. Las nociones de masa «inerte» y «pesada» no tienen ya la significación absoluta que en la Mecánica de *Newton*. La «inercia» de un cuerpo se origina de la

acción recíproca del mismo con los restantes cuerpos del Universo. La igualdad de la masa inerte y pesada aparece como principio válido riguroso en el lugar más preeminente de la Teoría. La hipótesis de la equivalencia complementa la consecuencia de la teoría de la Relatividad especial de que toda energía posee inercia, adjudicando también a toda energía un peso correspondiente. Es posible (ciertamente mediante ulteriores hipótesis especiales en las cuales nosotros aquí no podemos entrar) también concebir las rotaciones como movimientos relativos, de modo que el campo centrífugo de un cuerpo que gira pueda ser interpretado como campo gravitatorio, producido por la rotación de toda la masa del Universo alrededor del cuerpo, supuesto desprovisto de rotación. La Mecánica llega a ser así una teoría completa general de los movimientos relativos de los cuerpos. Puesto que nuestras afirmaciones sólo se refieren a observaciones de movimientos relativos, basta a la nueva Mecánica, en el sentido más amplio, la condición de que en las leyes físicas sólo se puedan establecer vínculos de causalidad entre cosas observables. Ella cumple también la condición de continuidad, puesto que las nuevas leyes fundamentales de la Mecánica son leyes *diferenciales*, las cuales sólo contienen el elemento lineal ds y no distancias finitas de cuerpos.

2. El principio de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, que tenía una significación peculiar en la teoría de la Relatividad especial, pierde en la teoría de la Relatividad general su universal validez. Conserva sólo su validez en dominios de potencial gravitatorio constante, los cuales, en una extensión finita, en realidad nunca pueden ser observados. El campo

gravitatorio en la superficie de la Tierra es tan aproximadamente constante que, dentro de la exactitud de nuestras medidas, fué preciso deducir, del experimento de *Michelson*, que la velocidad de la luz era una constante independiente de la dirección. Pero en un campo gravitatorio, con potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$ variables de un lugar a otro, la velocidad de la luz *no* es constante; las trayectorias, según las cuales se propaga la luz, serán por consiguiente, en general, curvas. La comprobación de la curvatura de un rayo de luz que pase junto al Sol es una de las más importantes pruebas posibles de la nueva teoría.

3. La teoría de la Relatividad general ha transformado poderosamente nuestro concepto del espacio y del tiempo (*). Según *Riemann*, la expresión del elemento lineal

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

determina las relaciones métricas de la variedad continua espacio-tiempo, y según *Einstein*, tienen los coeficientes $g_{\mu\nu}$ del elemento lineal ds, en la teoría de la Relatividad general, la significación de *potenciales gravitatorios*. Magnitudes que, hasta aquí, han tenido significación puramente geométrica, quedan con esto por pri-

(*) Este aspecto del problema lo trata especialmente claro y detallado el libro de Mauricio Schlick *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik*, «Espacio y tiempo en la Física actual». (Casa editorial de Julio Springer).

mera vez animadas de sentido físico. Que recaiga en la Gravitación el papel fundamental de regir las leyes métricas en el espacio y el tiempo parece enteramente natural. Pues no hay ningún fenómeno físico libre de su cooperación, puesto que ella impera en todas partes donde la materia y la energía entran en juego. Es, además, según el conocimiento que de ella teníamos, hasta ahora la única fuerza que se exterioriza con absoluta independencia de la naturaleza física y química de los cuerpos. Ella tiene, por consiguiente, sin duda una significación de especie única para la imagen física del Universo.

Según la teoría de *Einstein* es, por lo tanto, la Gravitación «el fundamento interno de las relaciones métricas del espacio y tiempo», en el sentido de *Riemann* (véase el párrafo de conclusión del trabajo de *Riemann* «Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría» citado en la pág. 37). Si nos mantenemos fijos en la idea de la estructura continua de la variedad espacio-tiempo, sus relaciones métricas no están contenidas en su definición de variedad continua de «cuatro» dimensiones. Antes bien, es preciso que las obtengamos sólo por la experiencia. Y hay que buscar, según *Riemann* (lo cual constituye un asunto de Física), el fundamento interno de estas eventuales relaciones métricas en «las fuerzas de enlace que actúen en la cuestión». Para este problema tan claramente establecido en primer lugar por *Riemann*, *Einstein* ha hallado, en su teoría de la Gravitación, una solución. Al mismo tiempo él da una contestación a la pregunta acerca de la verdadera Geometría del espacio físico, sobre la cual, desde hace un siglo, nada se había dicho, contestación que es ciertamente de especie enteramente distinta de la que se había esperado.

En la alternativa entre las Geometrías euclídea o no-euclídea, no hay que decidirse a favor de ninguna de las dos; antes bien, hay que eliminar, en general, de las leyes físicas el espacio considerado como una cosa física con propiedades geométricas dadas; como el éter, por la teoría de la Relatividad especial de *Lorentz-Einstein*, fué eliminado de las leyes de la Electrodinámica. También esto es un avance en el sentido de la condición de que sólo debe figurar en las leyes físicas lo observable. Las relaciones métricas de la variedad espacio-tiempo, en la cual se realizan todos los fenómenos físicos, tienen, según la idea de *Einstein*, su fundamento interno en los estados de Gravitación. En el constante movimiento de los cuerpos, unos respecto a otros, varían sin cesar estos estados de Gravitación, y por esto tampoco se puede hablar de una Geometría métrica invariable, dada de antemano, de curvatura constante (sea euclídea o no-euclídea). Puesto que las leyes físicas, en la teoría general de la Relatividad, conservan su forma independiente de la elección eventual de las cuatro variables x_1 ..... x_4, tampoco tienen éstas ninguna significación física constante de por sí. De aquí, por ejemplo, x_1, x_2, x_3 no designarán, en general, tres distancias, que se podrían medir con un metro, y luego x_4 un instante, que se puede determinar por medio de un reloj. Las cuatro variables tienen sólo el carácter de cuatro números, parámetros, y no permiten sin más una interpretación objetiva. Espacio y tiempo, por lo tanto, no tienen, para la descripción de los fenómenos naturales, la significación de cosas reales físicas.

Y, sin embargo, parece como si la nueva teoría pudiese hasta dar una contestación determinada a la alternativa anterior, si se postula su validez para el Universo en conjunto. La aplicación de las fórmulas de la nueva teoría al Universo en conjunto condujo, al principio, a dificultades iguales a las que se habían también manifestado en la Mecánica clásica. No se logró establecer condiciones límites en el infinito plenamente satisfactorias que estuvieran de acuerdo con la condición de la Relatividad general. Sin embargo, llegó *Einstein* (*) a ampliar las ecuaciones diferenciales de los potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$, de tal manera que llegase, a ser posible, una aplicación de su teoría de la gravitación al Universo. Con esto, las dificultades que surgían para las condiciones límites en el infinito, desaparecen mediante un fundamento extraordinariamente interesante. Se demuestra, a saber, que con estas nuevas fórmulas, un espacio lleno uniformemente de materia en reposo, en primera aproximación resultaría un espacio verdaderamente ilimitado, pero cerrado y finito, de modo que, por consiguiente, no aparecen para nada condiciones límites en el infinito. Si bien es cierto que las hipótesis que conducen a este resultado no llegan a ser cumplidas en el Universo, sin embargo, hay que pensar que las velocidades de la materia que hay en los astros son extraordinariamente pequeñas con respecto a la velocidad de la luz que ahora figura como unidad. Tampoco

(*) *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie.* «Consideraciones cosmológicas referentes a la teoría de la Relatividad general.»—Sitz. Ber. d. Preuss. Akad der Wiss. (Actas de las sesiones de la Academia de Ciencias de Prusia), 1917, 142.

en conjunto la repartición de la materia muestra hasta ahora faltas de uniformidad tan extraordinarias, que la idea de *Einstein* de un Universo estacionario, lleno uniformemente, se aparte por completo de la realidad. Esta consecuencia de la teoría contestaría, por tanto, a la anterior alternativa en este sentido: la Geometría que nosotros hemos de poner como fundamento de los fenómenos del espacio, verdaderamente no es ni euclídea ni no-euclídea, sino, como antes se detalló, depende de los estados de gravitación, que varían, en general, de un lugar a otro. Pero un Universo construído según el esquema más sencillo, se portaría en la nueva teoría, en conjunto, como una variedad finita cerrada, por consiguiente, no-euclídea. Aunque también este resultado es, ante todo, de significación teórica, puesto que el sistema de estrellas que nosotros vemos a nuestro alrededor no cumple las hipótesis de *Einstein* (en especial, el indudable achatamiento de la Vía Láctea no es compatible con dichas hipótesis sencillas), y puesto que nosotros todavía no poseemos sobre los sistemas de estrellas fuera de la Vía Láctea conocimiento ninguno relativo a esto, sin embargo, este aspecto de la Teoría abre perspectivas insospechadas para nuestro concepto del Universo.

4. A diferencia de la teoría de *Newton*, no se construye la teoría de la gravitación, que se deduce de la teoría de la Relatividad general, sobre una ley elemental de la *fuerza de Gravitación*, sino sobre una ley elemental del movimiento de un cuerpo en *el campo gravitatorio*. A consecuencia de esto, aquellas expresiones que en la nueva teoría se habrían de *interpretar* como las fuerzas de gravitación, sólo desempeñan un papel

secundario en la construcción de la teoría (como, en general, la noción de fuerza en la Mecánica sólo ha de considerarse como una noción auxiliar, si se entiende que el problema de la Mecánica es la explicación acabada, sin dejar lagunas, de los fenómenos de movimiento).

La teoría de *Einstein* no intenta tampoco explicar la esencia de la Gravitación; ella no busca un modelo mecánico que simbolice la acción mutua de gravitación de dos masas. Esta ha sido la aspiración de las diversas teorías del éter, bajo fecunda aplicación de magnitudes hipotéticas y nunca observadas, como el átomo de éter. Es muy dudoso si tales aspiraciones conducirían nunca a una teoría satisfactoria de la Gravitación. Pues las dificultades de la Mecánica de *Newton* no están solamente en que ella formula la ley de la gravitación como una ley de acción a distancia. Mucho más esencial es que la relación estrecha entre los fenómenos de inercia y los de la Gravitación en general no se tiene en cuenta, aunque *Newton* conocía ya el hecho de la igualdad entre la masa pesada y la inerte, y que la Mecánica de *Newton* no representa ninguna teoría de los movimientos relativos de los cuerpos, siendo así que éstos son los únicos que nosotros observamos. Una transformación de la ley de la Gravitación de *Newton*, para hacer aceptable la atracción de las masas, todavía no nos habría proporcionado una teoría satisfactoria de los fenómenos de movimiento [28].

Lo que caracteriza a la teoría de *Newton* es la sencillez extraordinaria de sus fórmulas matemáticas. Por esto también la Mecánica clásica que se construye sobre los principios de *Newton*, como excelente teoría matemática para la deducción por el cálculo, de los fenómenos de movimiento observados, nunca perderá su importancia.

Por otra parte, la teoría de *Einstein* satisface, con respecto a la unificación de sus nociones fundamentales, todas las condiciones que se ponen a una teoría física científica. Aunque ella (con el abandono de la métrica euclídea) obliga a dejar la representación corriente en coordenadas cartesianas, no producirá por esto perturbación, así que se haya generalizado el empleo del medio auxiliar de Análisis por ella reclamado. Construída matemáticamente esta teoría, se plantea al mismo tiempo, como problema importante de la Astronomía, su comprobación experimental en aquellos fenómenos en los cuales resultan discrepancias medibles con respecto a la clásica.

VI

La comprobación de la nueva Teoría por la Experiencia.

Hasta ahora se han presentado tres medios de poder comprobar, por la experiencia, la teoría de la Gravitación de *Einstein;* los tres sólo se pueden llevar a cabo con la cooperación de la Astronomía. Uno de ellos (que procede de una discrepancia del movimiento de un punto material en un campo gravitatorio, según la ley de *Einstein*, con respecto al exigido por la de *Newton)* ha decidido ya la cuestión en favor de la nueva teoría; lo mismo uno de los otros dos, que resulta del enlace de los fenómenos electromagnéticos con la Gravitación.

Puesto que el Sol sobrepuja considerablemente en masa a todos los otros cuerpos del sistema solar, el movimiento de cada planeta depende, ante todo, del campo gravitatorio del Sol. Bajo su acción describe el planeta, según la teoría de *Newton*, una elipse Kepleriana, cuyo eje mayor, el que une el punto de la trayectoria más próximo al Sol (perihelio) y el más lejano (afelio), está en reposo relativamente al sistema de estrellas fijas. Sobre este movimiento Kepleriano de un planeta se acumulan ahora las influencias (perturbaciones) de los restantes planetas, más o menos grandes, pero que no alteran esencialmente la forma de la elipse; estas influencias producen, en parte, sólo fluctuaciones periódicas de los elementos de la elipse de partida (eje mayor, excentricidad, etc.....), y en parte, un aumento o disminución continua de los mismos. A la última clase de «perturbaciones» pertenece la lenta *rotación* del eje mayor observada en todos los planetas, y por ello, en el transcurso del tiempo, también de su perihelio, relativamente al sistema de estrellas fijas. En general en los grandes planetas concuerdan los movimientos del perihelio *observados* (excepto en pequeñas discrepancias, que todavía no han quedado definitivamente establecidas, por ejemplo, en Marte) con los deducidos del *cálculo* de las perturbaciones; pero los cálculos en Mercurio suministran un valor unos 43″ demasiado pequeño por siglo. Para la explicación de esta diferencia se han ideado las hipótesis más variadas, pero ninguna de ellas es satisfactoria. Necesitan recurrir a masas todavía desconocidas en el sistema solar y, puesto que todas las pesquisas referentes a masas que fuesen suficientemente grandes para explicar la anomalía Mercurial han sido inútiles, necesitan entonces de nuevo hacer, sobre la repartición de estas masas hipotéticas, conjeturas que deben explicar su *invisibilidad*. Todas estas hipótesis auxiliares carecen, según esto, de toda probabilidad intrínseca.

Según la teoría de *Einstein,* se mueve un planeta, por ejemplo, a la distancia de Mercurio al Sol, bajo la acción de la atracción del Sol, en la «trayectoria más directa», según la ecuación

$$\delta\{\int ds\}=\delta\{\int \sqrt{g_{11}dx_1^2+g_{12}dx_1dx_2+\ldots\ldots+g_{44}dx_4^2}\}=0.$$

Las $g_{\mu\nu}$ pueden ser deducidas de las ecuaciones diferenciales dadas para ellas, teniendo en cuenta las condiciones especiales que resultan por la ***presencia, supuesta única, del Sol y del planeta considerado como punto material.*** El principio de *Einstein* conduce, en primera aproximación, también a la elipse Kepleriana como trayectoria; pero, en segunda aproximación, se demuestra que el radio vector del Sol al planeta describe, entre dos pasos consecutivos por el perihelio y el afelio, respectivamente, un ángulo que próximamente es unos 0,05″ mayor que 180°, de modo que, en una revolución, el eje mayor de la trayectoria (recta de unión entre perihelio y afelio) ha girado próximamente 0,1″ en el sentido del movimiento en la trayectoria; por lo tanto, en cien años (Mercurio efectúa una revolución en unos 88 días) unos 43″. La nueva teoría, por consiguiente, explica, en efecto ya, ***por la acción de la gravitación del Sol***, el valor hasta ahora inexplicado de 43″ por siglo, en el movimiento del perihelio de Mercurio. (Las contribuciones aportadas por las perturbaciones de los restantes planetas diferirían de las suministradas por la teoría de *Newton* en cantidades inapreciables.) Como única constante arbitraria, entra aquí en estos cálculos sólo la constante de gravitación, la cual figura como factor de proporcionalidad en las ecuaciones diferenciales de los potenciales gravitatorios $g_{\mu\nu}$, como ya se dijo (véase pág. 59). Este resultado de la nueva teoría es de inestimable valor.

Por lo demás, que en Mercurio, el planeta más próximo al Sol, exista una discrepancia medible con respecto a la teoría de *Newton*, pero no en los otros planetas más lejanos del Sol, consiste en que esta desviación disminuye rápidamente al crecer la distancia del planeta al Sol, de modo que sería ya imperceptible a la distancia de la Tierra. En Venus es tan pequeña, por desgracia, la excentricidad de la trayectoria, que ésta apenas discrepa de una circunferencia y, por tanto, la posición del perihelio sólo es conocida con mucha inseguridad.

De los dos restantes medios de comprobación de la Teoría, el uno se origina de la influencia de la gravitación en la duración de un fenómeno. El siguiente ejemplo enseña cómo puede resultar tal influencia. Según la hipótesis de la equivalencia, no puede un observador distinguir, sin más, si una variación observada por él en la duración de un fenómeno procede de la acción de un campo gravitatorio o de una aceleración correspondiente a su lugar de observación (sistema de referencia). Supongamos ahora nosotros un campo gravitatorio invariable, caracterizado por líneas de fuerza paralelas a la dirección del eje de las *z negativas* y por un valor constante γ de la aceleración, con la cual *todos los cuerpos* en él caen *acelerados*, por lo tanto, caracterizado por condiciones como las que existen aproximadamente en la superficie de la Tierra. Según la teoría de *Einstein*, cualquier fenómeno transcurre en este campo como transcurriría con relación a un *sistema de coordenadas animado de una aceleración* γ en la dirección del eje de las z *positivas*. Si ahora va un *rayo de luz*, de período ν_1, del lugar A, que al tiempo de la salida del rayo puede estar en reposo relativamente al sistema de coordenadas de referencia, en la dirección del eje de las z, hacia un lugar B que se halle a la distancia h, un observador en B habrá alcanzado, a consecuencia de su aceleración propia γ, a la llegada del rayo, la velocidad $\gamma \cdot \frac{h}{c}$ (c es la velocidad de la luz). Según el principio normal de *Doppler*, él atribuirá por esto al *rayo de luz*, en vez del período ν_1, el período

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \gamma \frac{h}{c^2}\right),$$

en primera aproximación. Si nosotros trasplantamos el mismo fenómeno al campo gravitatorio equivalente, admite este resultado la siguiente expresión: el período ν_2 de un rayo luminoso en un lugar B, el cual se distingue del lugar A por el valor $\pm \Phi$ del potencial gravitatorio, fundándose en el principio de equivalencia de la teoría de la Gravitación de *Einstein*, está, con respecto al período allí observado, en la relación

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 \pm \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Este caso demuestra cómo ha de entenderse la dependencia de la duración de un fenómeno, del estado de gravitación. Ahora se puede considerar a todo objeto en vibración (una línea espectral) como un reloj, cuya «marcha» depende, según las explicaciones ahora mismo dadas, del valor del potencial gravitatorio en su sitio. Este mismo «reloj» tendrá, según sea el potencial gravitatorio, en otro lugar del campo, otra duración de oscilación, esto es, otra marcha. A consecuencia de esto, una línea espectral determinada de la luz enviada por *el Sol*, por ejemplo, una raya del hierro, es preciso que aparezca corrida en el espectroscopio con respecto a la raya del hierro correspondiente de un manantial de luz *terrestre* (lámpara de arco); el potencial gravitatorio en la superficie exterior del Sol tiene, conforme a su mayor masa, otro valor que en la superficie de la Tierra, y un determinado período (color) está caracterizado en el espectro por un lugar determinado (rayas de *Fraunhofer*). Pero este efecto, el cual para una longitud de onda $\gamma = 400\ \mu\mu$ vale aproximadamente 0,008 $\mathring{A}$, no se ha podido hasta ahora comprobar con seguridad. Pues las proporciones de emisión de la luz en la superficie del Sol no están todavía averiguadas con suficiente exactitud, y también las adulteraciones sistemáticas de las longitudes de onda en los manantiales terrestres de luz que sirven de comparación, la lámpara de arco, no son tan exactamente conocidas, que los resultados, hasta ahora negativos, de la observación, puedan ser considerados como decisivos. Esto es tanto más cierto cuanto que para las estrellas fijas hay señales indudables de la existencia de un corrimiento gravitatorio de las líneas espectrales (*). Una determinación segura de

(*) Véase *Die Naturwissenschaften*, 7, 629, 1919.

este efecto es un problema especialmente importante de la Astronomía, pues este corrimiento gravitatorio de las líneas espectrales es una consecuencia inmediata de la hipótesis de la equivalencia y no supone los demás principios de la Teoría, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales del campo gravitatorio.

La tercera consecuencia, igualmente importante de la teoría de *Einstein*, es la dependencia de la velocidad de la luz, del potencial gravitatorio y la *curvatura*, de esto resultante (fundándose en el principio de *Huygens)*, de un rayo luminoso por su paso a través de un campo gravitatorio. La teoría da para un rayo de luz, que pase muy próximo al Sol, el cual proceda, por ejemplo, de una estrella fija, una *cierta curvatura* de su trayectoria. A consecuencia de la curvatura es preciso que se vea a la estrella corrida, con respecto a su lugar verdadero en el Cielo, una cierta cantidad, la cual vale en el borde del Sol 1,7″ y disminuye proporcionalmente a la distancia al centro del Sol. Pero puesto que las fotografías de estrellas, cuya luz pase junto al Sol, sólo es posible si se intercepta la luz deslumbradora del Sol antes de la entrada en nuestra atmósfera, sólo hay que tomar en cuenta para esta observación y la solución del problema los eclipses totales, tan poco frecuentes. El eclipse de Sol de 29 de mayo de 1919, durante el cual, en dos lugares de observación, se sacaron fotografías con vistas a este problema, en cuanto los resultados de las medidas permiten formar juicio definitivo, ha fallado el asunto en favor de la teoria general de la Relatividad.

La base experimental de la teoría de la Gravitación de *Einstein* no está, por consiguiente, todavía ultimada.

Si la teoría, sin embargo, ya hoy puede reclamar la atención general, es debido a la extraordinaria unidad y la lógica de sus fundamentos. Ella, en realidad, resuelve de una vez todos los enigmas que el movimiento de los cuerpos había dejado a los físicos, desde la época de *Newton*, en el concepto usual de la significación del espacio y del tiempo.

APÉNDICE

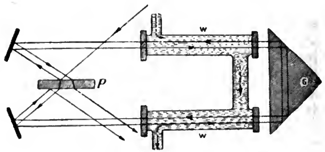
Nota 1 (pág. 10). Acerca de la cuestión de si un movimiento del manantial de luz se hace sensible en la velocidad de propagación de la misma, mientras no se conocía la significación *universal* de la velocidad de la luz, había dos hipótesis posibles. O se podía suponer que la velocidad del foco luminoso se añade a la *velocidad con que se propaga la luz* cuando procede de un manantial en reposo, o se podía suponer que el movimiento del foco luminoso no tiene influencia alguna en la velocidad de propagación de la luz que de él sale. En este segundo caso, uno se imaginaba que el foco luminoso sólo provoca los estados que cambian periódicamente, a partir del reposo, en el llamado éter luminoso, que no participa del movimiento de la materia (manantial de luz), y que estos estados se propagan entonces con una *velocidad característica del éter*, observable para nosotros como onda luminosa. Este concepto, en esencia, había predominado en definitiva. Sólo la teoría de la Relatividad especial y la hipótesis de los *quanta* han hecho esta idea imposible. La teoría de la Relatividad especial, haciendo perder a la expresión «el éter luminoso en reposo» su significado, toda vez que se puede definir a discreción todo sistema como en reposo en el éter luminoso (dentro del marco de las traslaciones uniformes), y quitando al éter luminoso su existencia, les quitó a las ondas luminosas el vehículo. Y la hipótesis de los *quanta*, elevando los *quanta* de luz a la categoría de individuos independientes, quitó a la *velocidad de la luz* el carácter de una constante característica del *éter luminoso*. La idea de los *quanta* de luz conduce, por consiguiente, de nuevo, a una especie de teoría de emisión de la luz. En una teoría de emisión, según la Mecánica clásica, la velocidad del foco luminoso se tenía que añadir a la velocidad de la luz procedente del manantial en reposo. Nosotros volvemos, por lo tanto, a la primera hipótesis antes citada. Ahora era preciso dar lugar a una tal superposición de velocidades en los notables fenómenos de las estrellas dobles espectroscópicas (de Sitter-Phys. Zeitschrift, 14, 429). Pues si se mueven dos estrellas en trayectorias circulares Keplerianas, una alrededor de otra, y se coloca nuestra visual en el plano común de las trayectorias, debíamos nosotros observar lo siguiente: Si es $2\,T$ la duración de la revolución del sistema, u la velocidad de una de las dos componentes (la más brillante) en su trayectoria, Δ la distancia del sistema total a la Tierra y, finalmente, c la velocidad de la luz en el vacío, procedente de un manantial luminoso en reposo, la velocidad de la luz en la época de máxima velocidad positiva en la dirección de la visual sería $c+u$, y en la de mínima $c-u$. A consecuencia de esto, el intervalo de tiempo entre dos de estas épocas consecutivas, para el observador terrestre, tomaría alternativamente los valores

$$T+\frac{2\,u\,\Delta}{c^2} \quad \text{y} \quad T-\frac{2\,u\,\Delta}{c^2},$$

como un sencillo cálculo demuestra. Puesto que a la distancia colosal de las estrellas, el término $\frac{2\,u\,\Delta}{c^2}$ puede ser tan grande, que hasta llegue a ser mayor que T, debíamos poder observar en las estrellas dobles espectroscópicas anomalías enteramente determinadas, pues era preciso que el intervalo de tiempo entre dos de dichas épocas de la trayectoria, pudiese reducirse a cero y llegar a ser negativo, y que nosotros no pudiésemos interpretar el efecto Doppler medido por simples fenómenos de movimiento en elipses Keplerianas. Pero estas anomalías nunca se presentan en la realidad. La experiencia enseña en estos objetos de prueba muy sensibles (las estrellas dobles espectroscópicas) que el movimiento del foco luminoso no se hace perceptible en el de la propagación de la luz. Con esto se ha hecho también insostenible la primera idea. Sólo la teoría de la Relatividad especial, con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz y su nuevo teorema de adición de las velocidades, nos ha conducido a adoptar una posición en este asunto que no encierra en sí contradicción y es compatible con la experiencia (véase nota 2).

Nota 2 (pág. 15). Dos son esencialmente las experiencias de Óptica fundamentales, que sirven de base a la idea de la significación privilegiada de la velocidad de la luz en la Naturaleza: el experimento de *Fizeau* sobre la velocidad de la luz en el agua en movimiento, y el experimento de *Michelson*. La aberración, en cambio, no tiene nada que ver directamente con la cuestión de si se puede por experiencias ópticas de Laboratorio comprobar un movimiento de la Tierra relativamente al éter luminoso. La aberración de las estrellas solamente dice que el movimiento *relativo* de la Tierra, con respecto a la estrella considerada, *varía* periódicamente en el transcurso del año. Si nos colocamos en el punto de vista de que hay un éter luminoso que lo invade todo, vehículo de la propagación de la luz, para poder explicar satisfactoriamente el fenómeno de la aberración, se ha de suponer que este éter luminoso no participa del movimiento de la Tierra.

Ahora, el experimento de *Fizeau* debía decidir definitivamente la cuestión de si el movimiento de la materia influye en el éter luminoso y decirnos cuánto vale, para el observador en reposo, la velocidad de la luz en la materia en movimiento. El experimento, repetido, con las correcciones debidas, por *Michelson* y *Morley*, fué dispuesto de la siguiente manera: Un haz de luz de un foco luminoso terrestre penetra por ambos lados en un tubo en forma de U, por el cual circula agua. Los dos haces luminosos, después de haber atravesado el agua, el uno en el sentido de la corriente y el otro en el contrario, se hacen interferir. Por consiguiente, en una rama del tubo, la velocidad de la luz y la del agua están dirigidas en el mismo sentido, en la segunda rama en sentido



contrario. Ahora, por de pronto, parece que hay dos cosas posibles: o el agua, circulando por el tubo con la velocidad v, arrastra el vehículo de la propagación de la luz, es decir, el éter luminoso; entonces la velocidad de la luz en una rama es $\frac{c}{n} + v$, y en la otra $\frac{c}{n} - v$, pues $\frac{c}{n}$ es, siendo n el índice de refracción del agua, la velocidad de la luz en el agua en reposo; o el movimiento del agua no tiene influencia alguna en el éter luminoso que propaga la luz; entonces sería en ambos lados la velocidad de la luz $\frac{c}{n}$. Según cuál de estas dos hipótesis fuera la válida, era preciso que, al conmutar el sentido de la corriente del agua, las franjas de interferencia se corriesen o permaneciesen quietas. La experiencia no se decidió en favor de ninguna de las dos. Verdad es que se corrieron las franjas de interferencia, pero no la cantidad esperada, sino solamente como si el éter luminoso hubiese tomado en el agua la velocidad $v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ y no el valor total v. A este valor $1 - \frac{1}{n^2}$ se le llama coeficiente de arrastre de *Fresnel*. Sin embargo, esta designación es equivocada, por cuanto que en la Electrodinámica complicada de *Lorentz*, al interpretar el experimento de *Fizeau*, se habla justamente de un éter absoluto *en reposo*, y el llamado coeficiente de arrastre sólo es una consecuencia de la estructura de la materia, especialmente de la acción recíproca entre electrones y materia, sobre lo cual nosotros aquí no podemos entrar en más detalles. En todo caso, aparecían en el estadio de la Ciencia, antes del experimento de *Michelson*, la aberración y la experiencia de *Fizeau*, ambas favorables a la idea de hablar de un éter absoluto en reposo.

El experimento de *Michelson* debía ahora afirmar la existencia de la corriente de éter, a través de la cual la Tierra constantemente pasa, ya que el éter nunca toma parte en su movimiento. (Véase el esquema de este experimento en la pág. 84.)

Un rayo luminoso que sale de L recorre la distancia

$$LP + PS_1 + S_1P + PF,$$

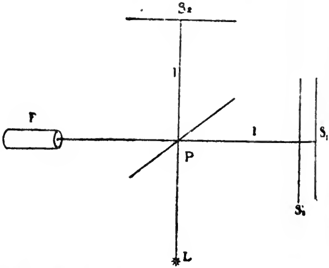
donde S_1 y S_2 son dos espejos, en los que el rayo incide normalmente; P, una lámina de vidrio que refleja una parte de la luz y refracta otra parte, y F, el anteojo del observador. Otro rayo luminoso recorre la distancia $LP + PS_2 + S_2P + PF$. Sea aquí $PS_1 = PS_2 = l$; además, FS_1 está en la dirección del movimiento de la Tierra. Se supone que el éter luminoso no participa del movimiento de la Tierra; sea q el valor de la velocidad de la Tierra. Entonces la velocidad relativa de la luz con respecto al instrumento (Tierra) es, y

En la dirección

$PS_1 = c - q$; y el tiempo invertido por la luz $\frac{l}{c-q}$.

$S_1P = c + q$; y el tiempo invertido por la luz $\frac{l}{c+q}$.

$PS_2 = \sqrt{c^2 - q^2}$; y el tiempo invertido por la luz
$S_2P = \sqrt{c^2 - q^2}$; y el tiempo invertido por la luz $\Big\}\ \frac{l}{\sqrt{c^2-q^2}}$.



A consecuencia de esto, la distancia $PS_1 + S_1P$ es recorrida en el tiempo

$$t_1 = l\left(\frac{1}{c-q} + \frac{1}{c+q}\right) = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)$$

y $PS_2 + S_2P$ en el tiempo

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-q^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2}\right).$$

La diferencia embre ambos es $(t_1 - t_2)_1 = \frac{l}{c} \cdot \frac{q^2}{c^2}$.

Si se permutan S_1 y S_2, cuando se hace girar todo el aparato 90°, es $(t_1 - t_2)_2 = -\frac{l}{c} \cdot \frac{q^2}{c^2}$.

Si se hacen interferir ambos rayos luminosos en F, era preciso que las rayas de interferencia se corrieran por la rotación de 90° del aparato. El valor de este corrimiento se puede fácilmente calcular. Si se designa por τ el período de vibración, correspondiente al rayo luminoso utilizado en el experimento, la longitud de onda es $c \,.\, \tau = \lambda$. Entonces el corrimiento que era de esperar, dado en partes fraccionarias de la distancia entre las rayas, es igual a

$$\frac{(t_1 - t_2)_1 - (t_1 - t_2)_2}{\tau} = \frac{2\,l}{\lambda} \cdot \frac{q^2}{c^2}.$$

Por repetidas reflexiones de la luz, fué $2\,l$ aumentado, de modo que $\frac{2\,l}{\lambda}$ se hizo del orden de magnitud de 10^7; por ejemplo; si $2\,l = 30$ m. $= 30.10^2$ cm., $\lambda = 6.10^{-5}$ cm. $=$ $=$ la longitud de onda de la luz de sodio; es $\frac{2\,l}{\lambda} = 5.10^7$ centímetros; por otra parte, es $\frac{q^2}{c^2}$ del orden de magnitud $\left(\frac{30 \text{ km.}}{300000 \text{ km.}}\right)^2$, o sea de 10^{-8}. El corrimiento esperado de las rayas era preciso entonces que fuese de unas 0,56 de anchura de franja. Fué observado un valor del orden de magnitud de 0,02 de anchura de franja. Por lo tanto, no se hizo ópticamente perceptible la corriente de éter por efecto del movimiento de la Tierra. Por este medio, ya que el experimento fué realizado en distintas épocas del año, salió al encuentro de la objeción posible de que hubiese el movimiento de traslación de todo el sistema solar compensado eventualmente el movimiento de la Tierra en su trayectoria alrededor del Sol.

El experimento de *Michelson* ha demostrado en definitiva que, físicamente, no tiene sentido hablar de un espacio absoluto o de una traslación con relación al espacio absoluto, puesto que todos los sistemas que se mueven rectilínea y uniformemente, unos respecto a otros, son equivalentes para la descripción de los fenómenos físicos. Es, por lo tanto, cuestión de convenio considerar un sistema en reposo y otro en movimiento. A la velocidad de la luz se le puede atribuir, en todos los sistemas, el mismo valor. Una teoría concluyente de estos experimentos fundamentales se halla en todas las exposiciones detalladas de la teoría de la Relatividad especial. Yo menciono solamente el trabajo original de *A. Einstein* (Annalen der Physik Bd. 17, 1905, S. 891) y la «Introducción a la teoría de la Relatividad» del Dr. *W. Bloch*, de la colección «Aus Natur und Geisteswelt», Leipzig, 1918.

Nota 3 (pág. 16). Abandonar las transformaciones del principio de Relatividad de *Newton* y reemplazarlas por las llamadas transformaciones de *Lorentz-Einstein* significaba un paso de extraordinario alcance. Este se justificaba porque la nueva teoría de la Relatividad, que de él procedía, confirmaba fácilmente los resultados de todos los experimentos fundamentales de Óptica y Electrodinámica. En cuanto al experimento de *Michelson*, *Lorentz*, para explicar dentro de su Electrodinámica su resultado negativo, había necesitado establecer la hipótesis de que las dimensiones de todos los cuerpos se acortaban en la dirección de su movimiento. Pero ahora demostró *Einstein* que, dando una definición rigurosa de la noción de simultaneidad, teniendo en cuenta el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, las empíricamente halladas transformaciones de *Lorentz* resultan ahora ser necesariamente las ecuaciones de transformación que deben relacionar entre sí las coordenadas de dos sistemas que se mueven uno con respecto a otro rectilínea y uniformemente. Y como consecuencia inmediata de estas transformaciones resulta, sin más hipótesis, aquella contracción de las longitudes que *Lorentz* había ideado para la interpretación del experimento de *Michelson*. Pero esta contracción de una longitud l, en la dirección de su movimiento, hasta $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, es, dentro de la nueva teoría, expresión del hecho general, de que las dimensiones de un cuerpo sólo tienen una significación relativa, esto es, en cuanto a su valor, dependen del estado de movimiento del observador. Esto rige, tanto en la extensión (espacio) como también en la duración (tiempo) de las cosas. Desde el punto de vista del nuevo principio de Relatividad, el resultado negativo del experimento de *Michelson* era cosa evidente. ¿Pero cómo quedaba con los otros hechos fundamentales de la Óptica y Electrodinámica? Ahora el resultado del experimento de *Fizeau* sobre la velocidad de la luz en el agua en movimiento llegó a ser como piedra de toque de la Cinemática deducida de las nuevas fórmulas. Según las transformaciones de *Lorentz*, no se añaden sencillamente las dos velocidades q y v, por ejemplo, de dos locomotoras que se encuentran, de modo que $q + v$ sea la velocidad relativa de ambas una con respecto a otra; antes bien hallará cada uno de los maquinistas como velocidad de su marcha relativa, según las nuevas fórmulas, el valor

$$\frac{q+v}{1+\frac{q \cdot v}{c^2}}.$$

Este es el teorema de la adición de las velocidades en la nueva teoría; él suministra inmediatamente, como velocidad de la luz en el agua en movimiento, la cantidad observada según el experimento de *Fizeau*. Lo mismo resultan sin dificultad la aberración y el efecto *Doppler* en su verdadera magnitud. Una discusión detallada de estas cuestiones se halla en toda exposición de la teoría de la Relatividad «especial» (véanse datos bibliográficos en la nota 2).

Nota 4 (pág. 19). *Ph. Frank* y *H. Rothe*, Ann. d. Phys, 4.ª serie, tomo 34, pág. 825.

Las hipótesis para las ecuaciones generales de transformación, por las cuales dos sistemas S y S', que se mueven uno con respecto a otro *rectilínea* y *uniformemente* con la velocidad q, se relacionan entre sí, son:

1. Las ecuaciones de transformación forman un grupo lineal homogéneo con el parámetro variable q, es decir, por lo tanto, el resultado de dos ecuaciones de transformación sucesivas, de las cuales la una refiere el sistema S a S' y la segunda S' a S'' (S debe tener, con respecto a S', la velocidad constante q, S' respecto a S'' la velocidad constante q'), conduce de nuevo a una ecuación de transformación de igual forma que la que tienen las ecuaciones de partida; el parámetro q'' que aparece en la nueva ecuación depende de una manera determinada de q' y q.

2. Las contracciones de las longitudes dependen sólo del valor del parámetro q. Es preciso, naturalmente, contar, desde el principio, con la posibilidad de que la longitud de una barra medida desde el sistema en reposo resulte distinta de la medida en el sistema móvil. La condición 2 exige ahora que, si se manifiestan contracciones (es decir, variaciones de las longitudes, en estas distintas maneras de determinación), éstas deben depender, en cuanto al valor, sólo de la magnitud de la velocidad relativa de ambos sistemas y no de la dirección de su movimiento en el espacio. Esta condición da, por consiguiente, al espacio la propiedad de la isotropía, y corresponde próximamente a aquella condición del capítulo III *a)* de que todo elemento lineal pueda ser comparado, en cuanto a la longitud, con cualquier otro, independientemente del lugar y de la dirección.

Es esencial ver que en las dos hipótesis, 1 y 2, no se exige la constancia de la velocidad de la luz. Antes bien, la propiedad singular de una velocidad determinada, de conservar su valor en todos los sistemas deducidos unos de otros por tales transformaciones, es una consecuencia rigurosa de estas dos condiciones generales, y el resultado del experimento de *Michelson* es sólo la determinación del valor de esta velocidad singular, el cual, naturalmente, sólo podía ser obtenido por la experiencia.

Nota 5 (pág. 22). *Einstein* ha demostrado, en un ejemplo sencillo, que, fundándose en las fórmulas de la teoría de la Relatividad especial, un punto material, por emisión de energía, pierde en masa inerte.

Supongamos que un punto material emita, en una dirección, una onda luminosa de energía $\frac{L}{2}$, y en la dirección contraria, una onda luminosa de igual energía $\frac{L}{2}$. Entonces, en atención a la simetría del fenómeno de la radiación, el punto material permanecerá en reposo con respecto al sistema de referencia primitivamente elegido de coordenadas x, y, z, t. Sea E_0 la energía total del punto material referida a este sistema, en cambio sea H_0 la referida a un segundo sistema que se mueva relativamente al primero con la velocidad uniforme v. Nosotros queremos aplicar a este fenómeno el principio de la energía. Si son ν y A la frecuencia y la amplitud de la onda luminosa en el sistema de partida, ν', A', x', y', z', t' la frecuencia, la amplitud y las coordenadas en el segundo sistema móvil, además φ el ángulo formado por la normal a la onda y la recta de unión, punto material-observador, el principio de *Doppler* da como frecuencia de la onda luminosa medida en el sistema móvil

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Análogamente, las fórmulas de la teoría de la Relatividad especial dan como amplitud en el sistema móvil

$$A' = A \cdot \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Según la teoría de *Maxwell*, la energía de la onda luminosa, por unidad de volumen, es $\frac{1}{8\pi} \cdot A^2$. Nosotros queremos ahora también calcular la densidad de energía correspondiente con respecto al sistema móvil. Aquí es preciso que nosotros tengamos en cuenta que, a consecuencia de la contracción de las longitudes, según las fórmulas de transformación de *Lorentz-Einstein*, el volumen V de una esfera, en el sistema en reposo, se transforma en el de un elipsoide, medido desde el sistema móvil, y este volumen del elipsoide es

$$V' = V \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

Por consiguiente, las densidades de energía en el sistema acentuado y en el no-acentuado están, una con respecto a la otra, en la relación

$$\frac{L'}{L} = \frac{\frac{1}{8\pi} \cdot A'^2 \cdot V'}{\frac{1}{8\pi} \cdot A^2 \cdot V} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Si llamamos ahora E_1 a la cantidad de energía del punto material después de la emisión de la onda luminosa, H_1 a la magnitud correspondiente referida al sistema móvil, se tiene

$$E_1 = E_0 - \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right] \quad \text{ó} \quad E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

en cambio

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\,\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{L}{2}\,\frac{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right].$$

De aquí se obtiene inmediatamente

$$[H_0 - E_0] - [H_1 - E_1] = L\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right].$$

¿Qué expresa ahora esta ecuación?

Toda vez que H y E son los valores de la energía del mismo punto material, una vez referido a un sistema, con respecto al cual el punto material se mueve y en segundo lugar referido a un sistema en el cual está en reposo, es preciso que la diferencia H-E sea igual, prescindiendo de una constante aditiva, a la energía *cinética* del punto material, referida al sistema móvil. Por consiguiente, nosotros podemos escribir

$$H_0 - E_0 = K_0 + C, \qquad H_1 - E_1 = K_1 + C;$$

aquí C significa una constante, la cual no varía durante la emisión de luz del punto material, puesto que, por la simetría del fenómeno, el punto material permanece en reposo con respecto al sistema de partida. Nosotros llegamos con esto a la relación

$$K_0 - K_1 = L\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] = \frac{1}{2}\,\frac{L}{c^2}\cdot v^2 \,\ldots..$$

Interpretada esta ecuación dice lo siguiente: Puesto que el punto material, por emisión de luz, irradia la energía L, baja su energía cinética, referida a un sistema móvil, de K_0 al valor K_1, correspondiendo a una pérdida en masa inerte, cuyo valor es $\frac{L}{c^2}$; pues, según la Mecánica clásica, la expresión $\frac{1}{2} m \cdot v^2$, donde m es la masa inerte del cuerpo observado, mide la energía cinética de este cuerpo referida a un sistema con respecto al cual él se mueve con la velocidad v. Por lo tanto, ha de regir, como masa inerte de una cantidad de energía L, el valor $\frac{L}{c^2}$.

Nota 6 (pág. 31). Que para todo par de puntos en el espacio exista una misma relación cuantitativa, a saber, la distancia mutua, y que, con auxilio de esta relación, todo par de puntos pueda ser comparado con otro cualquiera, es el sello característico que distingue el espacio de las restantes variedades continuas conocidas. Nosotros medimos la distancia entre dos puntos situados en el suelo y la distancia entre dos puntos colocados verticalmente, uno encima de otro, en la pared de la habitación, con la misma unidad de medida, que podemos poner arbitrariamente en cualquier dirección. Por esto podemos comparar la distancia mutua del par de puntos en el suelo con la distancia mutua de cualquier otro par de puntos en la pared.

En el sistema de los sonidos, al contrario, las relaciones referentes a esto son enteramente distintas. El sistema de los sonidos representa una variedad de dos dimensiones, si se determina cada sonido, en conjunto, por su altura y su intensidad. Si embargo, no es posible comparar la «distancia» de *dos sonidos de igual altura pero distinta intensidad* (análogos a los dos puntos en el suelo), con la «distancia» de *dos sonidos de distinta altura pero de igual intensidad* (análogos a los dos puntos en la pared). Las relaciones métricas son, por lo tanto, en esta variedad, enteramente distintas.

También, en el sistema de los colores, tienen las relaciones métricas su carácter especial. La variedad de los colores tiene igual número de dimensiones que el espacio, puesto que todo color puede ser obtenido por mezcla de los *tres* «colores fundamentales». Pero entre dos colores arbitrarios no existe ninguna relación que corresponda a la distancia de dos puntos del espacio. Solamente, si se deduce por mezcla de dos colores, un tercero, se llega a una ecuación entre estos tres colores semejante a aquélla que enlaza a tres puntos del espacio que están en línea recta.

Estos ejemplos, sacados de las Memorias de *Helmholtz*, demuestran que las relaciones métricas de una variedad continua no vienen ya dadas al definirla como tal variedad y fijar su número de dimensiones. Una variedad continua es, en general, susceptible de distintas relaciones métricas. Sólo por la experiencia se pueden deducir las leyes métricas que rigen en una variedad particular. El hecho de experiencia de que las dimensiones de los cuerpos son independientes de su posición especial y de su movimiento condujo a las leyes de la Geometría euclídea, donde la *congruencia* es el factor decisivo en la comparación de distintas porciones del espacio. *Helmholtz* ha tratado hasta la saciedad, en diversos trabajos, estas cuestiones.

Bibliografía: *Riemann*, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría (1854). Nuevamente redactado y aclarado por *H. Weyl*. Berlín, 1919.

Helmholtz, Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Sobre los verdaderos fundamentos de la Geometría. Trabajos científicos de este autor, tomo 2, pág. 610.

Helmholtz, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Sobre los hechos en que se funda la Geometría. Trabajos científicos, tomo 2, pág. 618.

Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vorträge und Reden. Sobre el ori-

gen y la significación de los axiomas geométricos. Explicaciones y conversaciones, tomo 2, pág. 1.

Nota 7 (pág. 32). La condición de la libre movilidad de cuerpos rígidos finitos se puede explicar, con la mayor claridad, en el dominio de dos dimensiones. Si imaginamos dibujado, en una *esfera* y en un *plano*, un triángulo, en la primera limitado por arcos de circunferencia máxima y en el plano por líneas rectas, se pueden correr estos triángulos arbitrariamente a lo largo de las dos superficies y se los puede hacer coincidir con otros, sin que por ello varíen las longitudes de los lados ni los ángulos. Esto es posible, como *Gauss* ha demostrado, porque la *curvatura*, en todos los lugares de la esfera (o plano), tiene el mismo valor. Y, sin embargo, la Geometría de la *esfera* es distinta de la del *plano*, puesto que estas dos configuraciones no se pueden desarrollar la una sobre la otra, sin rasgarse (véase nota 27). Pero en *las dos* pueden moverse libremente las figuras planimétricas y, a consecuencia de esto, rigen, en ambas, teoremas de congruencia. Si, en vez de esto, determinásemos, en cualquier superficie ovalada, un triángulo por medio de las tres líneas más cortas que unan tres puntos en ella, hallaríamos que, en distintos lugares de esta superficie, se pueden verdaderamente construir triángulos con lados de longitudes respectivamente iguales, pero éstos no formarían los mismos ángulos que los lados correspondientes del triángulo inicial y, a consecuencia de esto, tales triángulos no serían congruentes. Por lo tanto, en una superficie ovalada las figuras no se pueden correr sin alteración de sus dimensiones, y por el estudio de sus relaciones geométricas no se llega a los teoremas conocidos de congruencia. Consideraciones totalmente análogas se pueden establecer en tres y cuatro dimensiones; *pero naturalmente no disponemos, en estos casos, de representaciones adecuadas*. Si nosotros exigimos que en el espacio los cuerpos deban poderse mover libremente, sin alteración de sus dimensiones, es preciso que la *curvatura* del espacio sea igual en todas partes. La noción de curvatura de una variedad de más de dos dimensiones se puede, para ello, formular matemáticamente con rigor; el nombre solamente indica su significación análoga a la noción de curvatura de una superficie. También en tres dimensiones se pueden distinguir diversos casos como los de la esfera o del plano en dos dimensiones. La esfera corresponde a un espacio no-euclídeo de curvatura constante positiva, el plano al espacio euclídeo de curvatura nula. En los dos espacios los cuerpos se pueden mover libremente sin alteración de sus dimensiones; pero el espacio euclídeo es, al mismo tiempo, infinitamente extenso, mientras que el espacio «esférico» es ciertamente ilimitado, como la superficie de la esfera, pero no es infinitamente extenso. Estas cuestiones se hallan expuestas magistralmente y con detalle en la conocida Memoria de *Helmholtz* «Sobre el origen y la significación de los axiomas geométricos». (Explicaciones y conversaciones, tomo 2, pág. 1).

Nota 8 (pág. 33). Las propiedades, que es preciso que tenga la expresión analítica de la longitud del elemento lineal, se pueden ver de la siguiente manera:

En cualquier variedad continua, por ejemplo, una superficie, pueden los números x_1, x_2 designar cualquier punto. Luego se da, al mismo tiempo, un cierto entorno alrededor del punto, el cual contiene puramente puntos de la superficie. *D. Hilbert* ha definido rigurosamente, en sus «Grundlagen der Geometrie» (Fundamentos de la Geometría), pág. 177, la noción de magnitud múltiplemente extensa (variedad) sobre la base de la teoría de conjuntos. En esta definición, la noción de «entorno» de un punto da, al postulado de *Riemann* de la dependencia *continua* entre los elementos de la variedad, un concepto riguroso. Se puede ahora, saliendo del punto x_1, x_2 marchar continuamente dentro de su entorno y en todo lugar, por ejemplo, en un lugar $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2$, preguntar por la «distancia» de este punto al punto inicial. La función que mide esta distancia dependerá de los valores

x_1, x_2, dx_1, dx_2 y en todo punto *intermedio* del camino que nos ha conducido de x_1, x_2 al punto $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$ variará de una manera continua y podemos suponer que tome valores continuamente *crecientes*. En el punto x_1, x_2 mismo se anulará; para cualquier otro punto del entorno es preciso que sea positiva. Además es de esperar que en un punto intermedio, caracterizado por los números $x_1 + d\xi_1$, $x_2 + d\xi_2$ en que $d\xi_1 = \frac{1}{2}\,dx_1$, $d\xi_2 = \frac{1}{2}\,dx_2$, la función buscada que ha de medir la distancia tomará un valor que sea la mitad del correspondiente al punto $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$. Bajo estas hipótesis, la función buscada será homogénea y de 1.er grado en las dx; su valor aparecerá entonces multiplicado por el factor en el cual se aumenten eventualmente las dx. Además, si todas las dx son nulas, ella también debe anularse, y si todas las dx cambian de signo, su valor siempre positivo no debe variar. Se comprende, sin más, que la función

$$ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}dx_2^2}$$

se ajusta a todas estas condiciones; pero no es en modo alguno la única función de esta clase.

Nota 9 (pág. 36). Pero, por ejemplo, la expresión de cuarto grado para el elemento lineal no permitiría ninguna interpretación geométrica de las fórmulas, como es posible con la expresión

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + \ldots\ldots + g_{33}dx_3^2,$$

que se puede considerar como una generalización del teorema de Pitágoras.

Nota 10 (pág. 37). Se dice que una variedad es discreta, cuando entre sus distintos elementos no es posible una transición continua, sino que todo elemento en cierta manera representa un individuo independiente. Son variedades discretas, por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros, el de todos los planetas del sistema solar, etc.; en general, los llamados conjuntos numerables, en la teoría de conjuntos, son variedades discretas. En una variedad discreta las «medidas» se realizan sencillamente «contando» y no nos plantean ningún problema especial, puesto que todas las variedades de esta clase se someten a este mismo principio de medida. Cuando *Riemann* entonces continúa: «por lo tanto, es preciso, o que la realidad que constituye el fundamento del espacio forme una variedad discreta, o que se busque fuera el fundamento de sus relaciones métricas, en fuerzas de enlace que actúen en ella», él quiere con esto sólo indicar una posibilidad, la cual ciertamente en la actualidad es todavía remota, pero que, en principio, es preciso siempre dejarla de manifiesto. Justamente en estos últimos años se ha verificado realmente una alteración análoga en el concepto de otra variedad que en Física juega un gran papel, a saber, la «energía», y en este ejemplo se entenderá más fácilmente el sentido de la indicación anterior.

Hasta hace pocos años, se consideraba la energía que un cuerpo emite por radiación como una magnitud continuamente variable y se procuraba por esto *medir* sus distintos valores por una sucesión de números variables continuamente. Sin embargo, las investigaciones de *M. Planck* han conducido a la idea de que esta energía se emite por *quanta*, y por esto la «medida» de su importe sale inmediatamente de un «recuento» de los *quanta*. La realidad que, según esto, constituye el fundamento de la energía de radiación sería, por lo tanto, una variedad discreta, no una continua. Si suponemos ahora que el concepto arraigase cada vez más, por una parte que todas las medidas del espacio se refiriesen sólo a distancias entre átomos de éter y, por otra parte, que éstas sólo pudiesen tomar determinados valores, todas las distancias en el espacio se obtendrían «contando» estos valores y habría de considerarse el espacio como una variedad discreta.

Nota 11 (pág. 39). *C. Neumann,* Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Sobre los principios de la teoría de Galileo-Newton. Leipzig, 1870, pág. 18.

Nota 12 (pág. 39). *H. Streintz,* Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Los fundamentos físicos de la Mecánica. Leipzig, 1883.

Nota 13 (pág. 41). *A. Einstein,* Annalen der Physik, 4.ª serie, tomo 17, pág. 891.

Nota 14 (pág. 43). *Minkowski* ha sido el primero en llamar especialmente la atención sobre esta consecuencia del principio de Relatividad especial.

Nota 15 (pág. 45). La denominación de «sistema de inercia» no se aplicaba primitivamente al sistema que *Neumann* asoció al cuerpo hipotético Alfa. Pero ahora se entiende, en general, por sistema de inercia un sistema de coordenadas rectilíneas, con respecto al cual, un punto material sometido sólo a su inercia se mueve rectilínea y uniformemente. Así como *C. Neumann* ideó, para formular la ley de inercia, el cuerpo Alfa como una creación absolutamente hipotética, investigaciones siguientes, especialmente las de *L. Lange*, obedecieron a la idea de que, fundándose en reflexiones cinemáticas rigurosas, podía deducirse un sistema de coordenadas que poseyese las propiedades de un tal sistema de inercia. Pero, como *C. Neumann* y *J. Petzoldt* han demostrado, estos desarrollos contenían hipótesis defectuosas y no daban a la ley de inercia fundamento mejor cimentado que el cuerpo Alfa introducido por *Neumann*. Por lo demás, un tal sistema de inercia está determinado por las líneas rectas que unen tres puntos materiales infinitamente distantes unos de otros, los cuales, por consiguiente, no ejercen entre sí influencias mutuas ni tampoco, por otra parte, están sometidos a fuerza alguna. Se ve por esta definición por qué en la Naturaleza no se hallará un sistema de inercia y por qué, a consecuencia de esto, nunca podrá ser formulada la ley de inercia de una manera científica satisfactoria.

Bibliografía: *C. Neumann*, Sobre los principios de la teoría de Galileo-Newton. Leipzig, 1870.

L. Lange, Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wis., math.-phil. Klasse. Memorias de la Real Sociedad Científica de Sajonia, Sección Filosófico-Matemática, 1885.

L. Lange, Die Geschichte der Entwickelung des Bewegungsbegriffes. La historia del desarrollo de la noción de movimiento. Leipzig, 1886.

H. Seeliger, Ber. der Bayr. Akad. Memorias de la Academia de Baviera, 1906. Fascículo 1.°

C. Neumann, Ber. der. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math. phys. Klasse. Memorias de la Real Sociedad Científica de Sajonia, Sección Físico-Matemática, 1910, tomo 62, páginas 69 y 383.

J. Petzoldt, Ann. der Naturphilosophie, tomo 7.

Nota 16 (pág. 45). *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer. Entwickelung. La Mecánica en su desarrollo. 4.ª edición, pág. 244.

Nota 17 (pág. 47). Los nuevos puntos de vista sobre la esencia de la inercia provienen del estudio de los fenómenos de radiación electro-magnética. La teoría de la Relatividad especial, por el teorema de la inercia de la energía, los ha incorporado orgánicamente a todo el edificio de la Física teórica. La dinámica de la radiación en el vacío, esto es, la dinámica de un espacio limitado por paredes sin masa y lleno de radiación electromagnética, enseñaba que un tal sistema opone a toda variación de movimiento una resistencia, como un cuerpo móvil pesado. El estudio de los electrones (cargas eléctricas libres), en estado de poderse mover libremente, por ejemplo, en un tubo de rayos catódicos, enseñaba análogamente que estas minúsculas partículas se portan como cuerpos inertes, pero su inercia no es consecuencia de materia, a la cual su carga estuviese ligada, sino de las acciones del campo electromagnético a las cuales el electrón móvil está sometido. De esto resultó la noción de masa aparente (electromagnética) de un electrón. La teoría de la Relatividad especial condujo, finalmente, a la conclusión de que a toda energía se ha de atribuir la propiedad de la inercia.

Todo cuerpo contiene energía (por ejemplo, en su interior una cantidad determinada en forma de radiación calorífica). La inercia que él manifiesta es debida, por consiguiente, en parte, a esta cantidad de energía. Puesto que esta parte, según la teoría de la Relatividad especial, representa una magnitud relativa, esto es, dependiente de la elección del sistema de referencia, la cantidad total de masa inerte de un cuerpo no tiene tampoco un valor absoluto, sino sólo relativo. Si esta cantidad de energía en calor radiante se reparte ahora por todo el cuerpo en todo su volumen, se podrá, por lo tanto, hablar de la cantidad de energía de la unidad de volumen, y de esto deducir la noción de densidad de energía. Esta densidad de energía es, entonces, también una magnitud que, en cuanto a su valor, depende del sistema de referencia.

Bibliografía: *M. Planck*, Ann. der Phys., 4.ª serie, tomo 26.

M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Teoría electromagnética de la radiación. 2.ª edición, 1908.

Nota 18 (pág. 47). La determinación de la masa inerte de un cuerpo, por la medida de su peso, es sólo posible fundándose en el hecho de experiencia de que todos los cuerpos, en el campo gravitatorio que hay en la superficie de la Tierra, caen con igual aceleración. Si se designan por p y p' las presiones que dos cuerpos ejercen en el mismo soporte (es decir, sus pesos respectivos), por g la aceleración en el campo gravitatorio de la Tierra en el lugar de observación de que se trate, se tiene

$$p = m \cdot g \text{ dinas} \quad \text{y} \quad p' = m' \cdot g \text{ dinas},$$

donde m y m' son los dos factores de proporcionalidad que se denominan las *masas* de los dos cuerpos en cuestión. Puesto que en las dos ecuaciones entra el mismo valor g, se tiene

$$\frac{p'}{p} = \frac{m'}{m},$$

y se pueden, según esto, medir las masas de los cuerpos, en el mismo lugar, por sus *pesos*.

Aunque ya *Newton* había demostrado que todos los cuerpos, en el mismo lugar de la Tierra, caen con igual aceleración (si se elimina la acción de la resistencia del aire), sin embargo, a este hecho tan notable no se le ha asignado ningún lugar entre los fundamentos de la Mecánica. Sólo el «principio de la equivalencia» de *Einstein* (véase capítulo **V**, pág. 55), le otorga la posición que indudablemente le corresponde.

Nota 19 (pág. 49). *B.* y *J. Friedländer* han propuesto un experimento sacado de las mismas reflexiones para demostrar la relatividad de los movimientos de rotación y, por consiguiente, la reversibilidad de los fenómenos centrífugos («Absolute und relative Bewegung». Movimiento absoluto y relativo, Berlín.—Leonardo Simion, 1896). A causa de la pequeñez del efecto, el experimento no puede ejecutarse con éxito en la actualidad, pero es absolutamente adecuado para facilitar la inteligencia del contenido físico de este postulado.

«El más sensible de todos los instrumentos es, como es sabido, la balanza de torsión. Ahora bien, las mayores masas en rotación, con que nosotros podemos realizar experiencias, son los grandes volantes que hay en los laminadores y en otras grandes máquinas. Las fuerzas centrífugas se manifiestan, como es sabido, por una presión que tiende hacia fuera del eje de rotación. Por lo tanto, si colocamos una balanza de torsión a una distancia, que no sea excesivamente grande, de un gran volante, de modo que el punto de suspensión de la parte giratoria de la balanza de torsión (es decir, de la aguja), esté, exacta o aproximadamente, en la prolongación del eje del volante, era preciso que la aguja, si ella no era de antemano paralela al plano del volante, tendiese a aproximarse a esta posición y diese una correspondiente sacudida; pues en todo elemento material, que no está en el eje de rotación, actúa la fuerza centrífuga tendiendo a alejarle del eje. Se ve enseguida que se alcanza la mayor distancia posible, cuando la aguja está paralela.»

El experimento propuesto por *B.* y *J. Friedländer* representa sólo una variante de aquel experimento que guió a *Newton* a su idea sobre el carácter absoluto de la rotación. *Newton* suspendía de un cordel una vasija cilíndrica llena de agua, la hacía girar alrededor del eje definido por el cordel, hasta que éste estuviese enteramente tieso; cuando la vasija y el líquido quedaban por completo en reposo, él dejaba que el cordel se destorciese de nuevo, con lo cual la vasija y el líquido entraban en rotación rápida, y observaba entonces lo siguiente: inmediatamente después de haber soltado el cordel, sólo la vasija tomaba parte en la rotación, puesto que el rozamiento del agua en las paredes de la misma no bastaba para comunicar en seguida al líquido la rotación; mientras esto ocurría, permanecía la superficie libre del agua plana y horizontal; pero cuanto más el agua era arrastrada por las paredes en rotación, tanto más claramente aparecían las fuerzas centrífugas y empujaban el agua hacia arriba en las paredes, de modo que finalmente su superficie libre tomaba la forma de un paraboloide de revolución. De esta observación dedujo *Newton* que la *rotación relativa* de las paredes de la vasija con respecto al agua no produce en la misma ninguna fuerza. Sólo, si el agua misma toma parte en la rotación, se hacen perceptibles las fuerzas centrífugas. De esto él dedujo el carácter *absoluto* de las rotaciones.

Este experimento ha sido posteriormente discutido muchas veces, y ya *E. Mach* alzó, contra la consecuencia de *Newton*, la objeción de que no se podía, sin más, afirmar que la rotación relativa de las paredes de la vasija con respecto al agua, en general, no tenga influencia en la misma. Se puede muy bien imaginar que, si la masa de la vasija fuese bastante grande, por ejemplo, sus paredes de muchos kilómetros de espesor, entonces, en una vasija en rotación, la superficie libre del agua en reposo no permanecería plana. Esta objeción está absolutamente de acuerdo con la idea de la teoría de la Relatividad general. Según ésta, las fuerzas centrífugas pueden ser consideradas también como las fuerzas de gravitación que la totalidad de las masas en rotación alrededor del agua ejerce en la misma. La acción de gravitación de las paredes de la vasija en el líquido encerrado es naturalmente pequeña y despreciable con respecto a la de toda la masa del Universo. Sólo si el agua se halla en rotación con respecto a ésta, hay que esperar fuerzas centrífugas perceptibles. El experimento de los hermanos *B.* y *J. Friedländer* había ahora de perfeccionar el experimento establecido por *Newton*, poniendo, en vez del agua, una balanza de torsión sensible, la cual ya cede a fuerzas muy pequeñas y en lugar de la vasija la masa de un poderoso volante. Pero esta disposición tampoco puede conducir a ningún resultado positivo, puesto que aun el volante mayor posible, que pudiese utilizarse en la actualidad, representa sólo una masa pequeña despreciable en comparación de la masa del Universo.

Nota 20 (pág. 49). Se habla de *campos de fuerza*, cuando, la fuerza de que se trate, varía continuamente de un lugar a otro, y en todo lugar está dada por el valor de una función del lugar. Las fuerzas centrífugas, en el interior y en la superficie de un cuerpo en rotación, tienen una tal repartición en forma de campo sobre todo el volumen del cuerpo, y nada se opone a imaginar este campo continuado también hacia fuera sobre la superficie del cuerpo; por ejemplo, sobre la superficie de la Tierra hacia fuera en su atmósfera. Por lo tanto, se puede hablar abreviadamente del campo centrífugo de la Tierra; y puesto que las fuerzas centrífugas, según las ideas precedentes, sólo dependen de la *inercia* del cuerpo y no de su *peso*, este campo es un *campo de inercia*, en oposición al *campo de la gravedad*, bajo cuya influencia, todos los cuerpos que no están suspendidos o apoyados caen en la Tierra.

En la Tierra se superponen, según esto, las acciones de varios campos de fuerza; la acción del *campo de la gravedad*, el cual procede de la atracción mutua de los elementos materiales de la Tierra y que está dirigido hacia el centro de la Tierra; la acción del *campo centrífugo*, el cual puede ser considerado, según *Einstein*, también como un *campo gravitatorio* y cuya acción está dirigida paralelamente al plano del ecuador hacia fuera; y, finalmente, la acción del *campo gravitatorio* de los diversos cuerpos celestes, en primera línea, del Sol y de la Luna.

Nota 21 (pág. 49). *Eötvös* ha publicado el resultado de sus medidas en los «Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn». Memorias de Ciencias matemáticas, físicas y naturales de Hungría, tomo 8, pág. 64, 1891.

D. Pekár da una exposición detallada: «Das Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität». La ley de la proporcionalidad entre la inercia y la gravedad. (Die Naturwissenschaft, 1919, 7, pág. 327.)

Mientras que las anteriores investigaciones de *Newton* y *Bessel* acerca de la atracción de la Tierra sobre diversas substancias (Astr. Nachr. 10, pág. 97, y Trabajos de Bessel, tomo 3, pág. 217.) se fundaban en observaciones del péndulo, *Eötvös* ha trabajado con balanzas de torsión sensibles.

La fuerza, por efecto de la cual todos los cuerpos caen, resulta de dos componentes: de la *fuerza de atracción de la Tierra*, la cual (prescindiendo de desviaciones que por de pronto se pueden despreciar) está dirigida hacia el centro de la Tierra; y de la *fuerza centrífuga*, la cual está dirigida paralelamente al ecuador, hacia fuera. Si la fuerza de atracción de la Tierra sobre dos cuerpos de igual masa, pero de distinta substancia, fuese distinta, sería preciso que la resultante de la atracción y de la fuerza centrífuga tuviese en ellos distintas direcciones. *Eötvös* escribe luego: «Por cálculo hallamos que si la diferencia entre las atracciones de la Tierra sobre dos cuerpos, de igual masa, pero de distinta substancia, fuese de una milésima, las direcciones de la gravedad en ambos cuerpos formarían entre sí un ángulo de 0,356 segundos, esto es, aproximadamente, de un tercio de segundo; y si dicha diferencia importase un veinteavo de millonésima, sería preciso que este ángulo fuese de $^{356}/_{20}$ de millonésima de segundo, esto es, algo más de un sesentavo de milésima de segundo»; y más adelante:

«Yo fijaba en mis balanzas de torsión, en los extremos de una cruz de 25-50 cm. de larga, la cual colgaba de un delgado alambre de platino, distintos cuerpos de 30 g. de peso, próximamente. Después de colocada la cruz perpendicularmente al meridiano, yo determinaba exactamente su posición por medio de un espejo móvil unido a ella y otro fijo en la caja del instrumento. Entonces yo giraba 180° el instrumento, junto con la caja, de modo que el cuerpo, que antes se hallaba en el extremo Este de la cruz, ahora venía al extremo Oeste y ahora determinaba de nuevo la posición de la cruz con respecto al instrumento. Si los pesos de los cuerpos colocados en ambos lados tuviesen distinta dirección, sería preciso que resultase una torsión del alambre de suspensión. Pero, colocando constantemente en un lado una esfera de latón, y en el otro, vidrio, corcho o antimonio cristalizado, dicha torsión no aparecía, siendo así que una desviación de $^{1}/_{60000}$ de segundo en la dirección de la gravedad había de producir una torsión de un minuto, la cual es observable con exactitud.»

Eötvös alcanza, por lo tanto, una exactitud próximamente como la que se alcanza en las balanzas, y éste era su objeto, pues el método de determinar la masa de los cuerpos por balanzas se apoya en el teorema fundamental de que la atracción de la Tierra sobre diversos cuerpos sólo depende de su masa y no de la naturaleza de su substancia. Era preciso, por consiguiente, que este teorema fundamental fuese demostrado con un grado de exactitud igual al que se alcanza en las pesadas. Si, en general, existe una tal diferencia en el peso de cuerpos distintos de igual masa, pero de substancias diversas, debe ser, según *Eötvös*, para latón, vidrio, antimonita y corcho, menor que un veinteavo de millonésima; para aire y latón, menor que una cienmilésima.

Nota 22 (pág. 51). Véase también: *A. Einstein*, «Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie». Fundamentos de la teoría general de la Relatividad. Ann. d. Phys. 4.ª serie, tomo 49, pág. 769.

Nota 23 (pág. 53). La ecuación $\delta\left\{\int ds\right\} = 0$ dice que la variación de la longitud de trayectoria entre dos puntos de la misma suficientemente próximos se anula para la trayectoria realmente seguida; esto es, de todas las trayectorias posibles entre dos puntos, el movimiento verdadero escoge la más corta. Si primero uno permanece en el terreno de la Mecánica antigua, el siguiente ejemplo aclarará el sentido de este teorema fundamental. Siendo la recta siempre la línea de unión más corta entre dos puntos del espacio, un punto material que se pueda mover libremente recorrerá esta línea recta de un punto a otro, si no hay, por otra parte, influencias perturbadoras (ley de inercia). Si el punto material está obligado a moverse sobre cualquier superficie curva, pasará de un punto a otro a lo largo de una línea geodésica de esta superficie, puesto que las líneas geodésicas representan las líneas de unión más cortas entre los puntos de la superficie. En la teoría de *Einstein* rige ahora un principio que corresponde del todo a éste, sólo que es mucho más general. Bajo la influencia de la *inercia* y de la *gravitación* todo punto material avanza a lo largo de las líneas geodésicas de la variedad espacio-tiempo. El que estas líneas, en general, no sean líneas *rectas* depende de que el campo gravitatorio somete al punto material en cierta manera a una ligadura, así por el estilo como la superficie curva restringía la libertad de movimiento del punto material. *Enrique Hertz*, en su Mecánica, había ya elevado a la categoría de principio fundamental para todos los movimientos un principio que corresponde enteramente al anterior.

Nota 24 (pág. 55). Véase *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 4.ª serie, tomo 35, pág. 898.

Nota 25 (pág. 56). La expresión «transformación de aceleración» significa que la transformación, que se considera como fundamental, de las variables x, y, z, t, en un sistema de variables x_1, x_2, x_3, x_4, puede ser concebida como la relación de dos sistemas de referencia entre sí, que se hallan uno relativamente a otro en movimiento *acelerado*. La índole del estado de movimiento de dos sistemas de referencia uno con respecto a otro halla su expresión en la forma analítica de las ecuaciones de transformación de sus coordenadas.

Nota 26 (pág. 59). A continuación: 1.º, se escribirán explícitamente las ecuaciones fundamentales de la nueva teoría; y 2.º, se ejecutará el paso a las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de *Newton*.

De la ecuación de variación $\delta \int ds = 0$, donde es

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

resultan, desarrollando la variación, las cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \quad [1]$$

Estas son las ecuaciones del movimiento de un punto material en el campo gravitatorio de las $g_{\mu\nu}$.

Aquí, el símbolo $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ representa la expresión

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha} g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right).$$

El símbolo $g^{\sigma\alpha}$ representa el menor adjunto de $g_{\sigma\alpha}$ en el determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} \cdots\cdots g_{14} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{41} \cdots\cdots g_{44} \end{vmatrix},$$

dividido por este determinante.

Las diez ecuaciones diferenciales para los «potenciales gravitatorios» $g_{\mu\nu}$ son

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}=\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \quad [2]$$

Las cantidades $T_{\mu\nu}$ y T son expresiones que están en una relación sencilla con los componentes del tensor Tensión-Energía (el cual en la nueva teoría aparece, en lugar de la densidad de masa, como magnitud generadora del campo). $\varkappa$ es, en esencia, igual a la constante de gravitación de la teoría de *Newton*.

Las ecuaciones diferenciales [1] *y* [2] *son las ecuaciones fundamentales de la nueva teoría*. Una deducción detallada de las mismas se halla en la obra de *A. Einstein*, «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». Los fundamentos de la teoría general de la Relatividad. J. A. Barth, Leipzig, 1916.

2. Para obtener el ajuste de estas ecuaciones con la teoría de *Newton*, es necesario hacer diversas hipótesis simplificadoras. En primer lugar, supondremos que las $g_{\mu\nu}$ sólo dis-

crepan, en cantidades pequeñas con respecto a la unidad, de los valores dados por el esquema

$$\left\{\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\}.$$

Estos valores de las $g_{\mu\nu}$ caracterizan el caso de la teoría de la Relatividad especial, es decir, el caso del estado libre de gravitación. También admitiremos que, a distancia infinita, las $g_{\mu\nu}$ se convierten en los valores anteriores, esto es, que la materia no se extiende hasta el infinito.

En segundo lugar, admitiremos que las velocidades de la materia son pequeñas con respecto a la velocidad de la luz y pueden ser consideradas como cantidades infinitamente pequeñas de primer orden. Entonces las cantidades

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

son infinitamente pequeñas de primer orden, y $\frac{dx_4}{ds}$, prescindiendo de cantidades de segundo orden, es igual a 1. Por la ecuación de definición de las $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ se reconoce entonces que estas cantidades son infinitamente pequeñas de primer orden. Si se desprecian cantidades de segundo orden y se admite, finalmente, que en las pequeñas velocidades de la materia las variaciones del campo gravitatorio con el tiempo son pequeñas, esto es, que las derivadas de las $g_{\mu\nu}$ con respecto al tiempo pueden ser despreciadas al lado de las que se refieren a las coordenadas de espacio, el sistema de ecuaciones [1] toma la forma

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3). \qquad [1a]$$

Esta sería ya la ecuación del movimiento de un punto material según la Mecánica de *Newton*, si $\frac{1}{2} g_{44}$ representase el potencial gravitatorio general. Por consiguiente, es preciso que nosotros veamos ahora lo que viene a ser de la ecuación diferencial de g_{44} en la nueva teoría bajo las hipótesis simplificadoras aquí escogidas.

El tensor Tensión-Energía generador del campo se reduce, por nuestras hipótesis enteramente especiales, a la densidad de masa ρ

$$T = T_{44} = \rho.$$

En las ecuaciones diferenciales [**2**], el segundo término del primer miembro es el producto de dos cantidades, que se han de considerar, según las anteriores reflexiones, como infinitamente pequeñas de primer orden. Por lo tanto, podemos prescindir del segundo término, como infinitamente pequeño de segundo orden. El primer término, en cambio, da para $\mu = \nu = 4$, si, como antes, se desprecian los términos diferenciados con respecto al tiempo y, por consiguiente, se considera el campo gravitatorio como «estacionario»

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

Por lo tanto, degenera la ecuación diferencial de g_{44} en la ecuación de *Poisson*

$$\Delta g_{44} = \varkappa \cdot \rho. \qquad [\mathbf{2}\,a]$$

En primera aproximación, es decir, si se considera la velocidad de la luz como infinitamente grande, lo cual ciertamente, como se explicó con detalle en el párrafo 3 *b*), es una marca característica de la teoría clásica, y se hacen ciertas hipótesis sencillas sobre el proceder de las $g_{\mu\nu}$ en el infinito, y se desprecian las variaciones del campo gravitatorio con el tiempo, las ecuaciones diferenciales de la teoría de *Einstein*, obtenidas fundándose en principios enteramente generales, se convierten en las conocidas ecuaciones de la Mecánica de *Newton*.

Nota 27 (pág. 61). La teoría de superficies, esto es, el estudio de la Geometría en una superficie, conduce inmediatamente a la conclusión de que los teoremas adquiridos para una superficie son válidos también para cualquier otra que se pueda engendrar doblando la primera *sin rasgarla.* Es decir, si se pueden relacionar una con otra dos superficies, punto a punto, de modo que, *en puntos correspondientes*, los elementos lineales sean iguales, también lo son los arcos finitos correspondientes, los ángulos, áreas de figuras, etc. Por lo tanto, se llega en ambas superficies a los mismos teoremas planimétricos. Tales superficies se dice que son *aplicables* una sobre otra. La condición necesaria y suficiente para tal cualidad es que la expresión del elemento lineal de una superficie

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2,$$

pueda ser transformada en la de la otra

$$ds'^2 = g'_{11}\, dx_1'^2 + g'_{12}\, dx_1'\, dx_2' + g'_{22}\, dx_2'^2.$$

Según un teorema de *Gauss*, es *necesario* para ello que las dos superficies tengan igual *curvatura*. Si ella es, al mismo tiempo, constante a lo largo de toda la superficie, como ocurre, por ejemplo, en una superficie cilíndrica o en un plano, se satisfacen todas las condiciones para que las superficies sean aplicables. En otro caso, ecuaciones especiales aclaran la cuestión de si las superficies, o pedazos de las mismas, pueden ser aplicadas una sobre otra. Los numerosos problemas parciales que resultan en estos asuntos son resueltos con todos sus pormenores en todos los libros de *Geometría diferencial* (por ejemplo, Bianchi-Lukat). Esta disciplina, que hasta ahora sólo era de interés para los matemáticos, adquiere ahora también gran importancia en las ciencias físicas.

Nota 28 (pág. 70). Tampoco hay que dejarse engañar por la idea de considerar de alguna manera la ley fundamental de la gravitación de *Newton* como una *explicación* de la Gravitación. La noción de fuerza de atracción la adquirimos por medio de nuestra sensación muscular, y por esto transportarla a la materia inanimada no tiene ningún sentido. *C. Neumann*, que se ha afanado mucho por establecer la Mecánica de *Newton* sobre una base sólida, ha glosado también este punto de una manera ejecutiva, al principio de su trabajo antes citado a menudo, por medio de una narración, la cual aclara mucho los defectos del concepto que hasta ahora se tenía.

«Supongamos que un explorador del Polo Norte nos hablara de aquel enigmático mar; que él hubiese logrado penetrar en el mismo y se le hubiese presentado un espectáculo notable; que él hubiera visto dos montañas de hielo flotando en medio del mar, a bastante distancia una de otra, una grande y otra pequeña; que del interior de la montaña grande hubiera sonado una voz que en tono imperativo gritase: «¡diez pies más acá!», y en seguida, la montaña de hielo pequeña haya obedecido la orden y se haya corrido diez pies aproximándose hacia la grande; y de nuevo haya la grande mandado «¡seis pies más acá!», y en seguida la otra haya ejecutado de nuevo la orden; y así hubiesen resonado órdenes sucesivas, y la pequeña montaña de hielo hubiese estado en perpetuo movimiento, esforzándose solícita en ejecutar instantáneamente toda orden con la mayor exactitud posible.

»Seguramente nosotros relegaríamos un tal relato al reino de las fábulas. ¡Sin embargo, no nos burlemos tan pronto! Las ideas que aquí nos parecen extrañas son las mismas que sirven de fundamento a la parte más acabada de las ciencias físicas, y a las que el más célebre de entre los investigadores debe la fama de su nombre.

»Pues en los ámbitos del Universo resuenan continuamente tales órdenes, procedentes de los distintos cuerpos celestes del Sol, planetas, Luna y cometas. Cada astro da oídos a las órdenes de los restantes que le llaman, esforzándose continuamente en ejecutar tales órdenes con la mayor puntualidad posible. Nuestra Tierra se precipitaría en línea recta a través del espacio, si ella no estuviese gobernada y guiada por la voz de mando que suena en cada instante procedente del Sol, a la cual se mezclan las órdenes menos perceptibles de los demás cuerpos del Universo.

»Ciertamente estas órdenes se dan en silencio y asimismo en silencio son ejecutadas. También *Newton* ha designado este juego recíproco de orden y obediencia con otro nombre. Él habla sin más ni más de la fuerza de atracción mutua que tiene lugar entre los astros. Pero la cosa es la misma. Pues esta acción mutua consiste en esto, en que un cuerpo da órdenes y otro las obedece.»

INDICE

Páginas.