506.44
.S675

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

NEUVIÈME SÉRIE. — TOME VI

Nos 1 et 2

1903-1904

Smithsonian Institution,
NOV 15 1904
National Museum.
194311

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE

1904

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons trimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1904

Président : M. Dongier, 82, rue Claude-Bernard, Paris, V^e^.

Vice-Président : M. E.-L. Bouvier, 39, rue Claude-Bernard.

Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard, Paris, 5^e^.

Secrétaire des publications : M. H. Coutière, 12, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris, VI^e^.

Vice-Secrétaire des publications : M. Henri Neuville, 55, rue de Buffon, Paris, V^e^.

Secrétaire des séances: M. Légaillon, 28, rue Berthollet, Paris, V^e^.

Vice-Secrétaire des séances : M. Leau, 6, rue Vavin, Paris, VI^e^.

Trésorier : M. Et. Rabaud, 104, rue d'Assas.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2^e^ et 4^e^ Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le Bulletin.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

NEUVIÈME SÉRIE. — TOME VI

Nos 1 et 2

1903-1904

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

1904

Membres du Conseil
pour les années 1902, 1903 et 1904.

MM.

Bourgeois, 1, boulevard Henri VI.

Henneguy, 9, rue Thénard.

Laisant, 162, avenue Victor Hugo.

Leroy, 8, rue de l'Abbé de l'Epée.

Lévy (Lucien), 12, rue du Regard.

Pellegrin, 143, rue de Rennes.

Vaillant, 2, rue de Buffon.

Vincent, 207, rue de Vaugirard.

Membres du Bureau
pour 1904.

Président : M. Dongier.

Vice-Président : M. Bouvier, 39, rue Claude Bernard.

Trésorier : M. Rabaud, 104, rue d'Assas.

Secrétaire des séances : M. Légaillon, 28, rue Berthollet.

Vice-Secrétaire des séances : M. Leau, 6, rue Vavin.

Secrétaire du bulletin : M. Coutière, 12, rue Notre-Dame-des-Champs.

Vice-Secrétaire du bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.

Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

ABRÉVIATIONS :

M. I.	Membre de l'Institut.
P. F. S.	Professeur à la Faculté des Sciences.
P. M.	» au Muséum.
P. C. F.	» au Collège de France.
P. E. N.	» à l'École Normale supérieure.
P. E. P.	» à l'École Polytechnique.
E. E. P.	Examinateur id.
P. H.	Professeur honoraire.
P. P. C.	» à l'École des Ponts et Chaussées.
M. A. M.	Membre de l'Académie de Médecine.
P. E. Ph.	Professeur à l'Ecole de Pharmacie.
P. C.	» au Conservatoire des Arts et Métiers.
I. G. A.	Inspecteur Général de l'Agriculture.
A. M.	Assistant au Muséum.
P.A.F.M.	Professeur agrégé à la Faculté de Médecine.

RÈGLEMENT

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

Adopté dans la Séance générale du 25 Juin 1898.

CHAPITRE Ier

Dispositions générales.

ARTICLE PREMIER. — La Société Philomathique a un objet purement scientifique. Ses travaux embrassent les Sciences mathématiques, les Sciences physiques et les Sciences naturelles. Elle reçoit dans ses séances les communications scientifiques de ses Membres et des personnes étrangères qui demandent à être entendues (1). Elle publie un Bulletin.

ART. 2. — La Société est composée de Membres titulaires, de Membres honoraires et de Correspondants.

ART. 3. — La Société est partagée en trois sections composées chacune de Membres honoraires et de vingt Membres titulaires.

ART. 4. — La première section (section des Sciences mathématiques) comprend : les Mathématiques pures, la Mécanique appliquée, l'Astronomie, la Géodésie, l'Hydrographie et la Navigation.

ART. 5. — La deuxième section (section des Sciences physiques) comprend : la Physique, la Météorologie, la Chimie et la Minéralogie.

ART. 6. — La troisième section (section des Sciences naturelles) comprend : la Géologie, la Botanique, l'Économie rurale, l'Anatomie, la Physiologie, la Zoologie et la Médecine.

ART. 7. — Tout Membre titulaire devient Membre honoraire après

(1) Le but de la Société n'est pas seulement de faire des découvertes..., mais encore de mettre ses Membres parfaitement au courant de celles qui ont été faites (*Règlement primitif de la Société Philomathique*).

les dix ans qui suivent sa nomination si la Section est complète. Il se trouve alors dispensé de toute cotisation et continue de jouir des droits des Membres titulaires.

CHAPITRE II

Élections.

ART. 8. — Un mois après la déclaration d'une vacance dans une section, les Membres titulaires et les Membres honoraires de la Section seront convoqués à l'effet de nommer une Commission chargée de présenter une liste de candidats.

ART. 9. — Les candidats seront choisis parmi les savants connus par leurs publications et qui auront manifesté le désir d'être admis dans la Société.

La présentation de la liste des candidats sera faite par une Commission composée de trois Membres, pris dans la Section pour laquelle se présente chaque candidat.

La Commission présentera son rapport dans la quinzaine.

ART. 10. — La présentation de la liste des candidats et la discussion de leurs titres se feront en Comité secret. La Société pourra toujours, après discussion et vote, ajouter un ou plusieurs noms à la liste présentée par la Section.

ART. 11. — L'élection pourra avoir lieu dans la séance où se fera la présentation, pourvu que le nombre des votants soit au moins égal à la moitié des Membres titulaires inscrits ; s'il est moindre, l'élection sera reportée à la séance suivante. Le nouveau scrutin est valable, quel que soit le nombre des votants.

ART. 12. — Un candidat n'est élu que s'il a réuni la majorité absolue. Dans le cas où cette majorité ne serait obtenue ni au premier, ni au second tour de scrutin, on devra procéder à un scrutin de ballotage entre les deux candidats qui auront réuni le plus de voix au second. En cas de partage, l'élection sera renvoyée à la séance suivante et de nouvelles lettres de convocation seront adressées à tous les Membres.

ART. 13. — Les Membres correspondants seront choisis parmi les Membres habitant Paris, la Province et l'Étranger.

ART. 14. — La présentation des candidats au titre de correspondant devra être faite par trois Membres.

ART. 15. — Dans la séance qui suivra la présentation, les Membres

qui l'auront faite exposeront en comité secret les titres des candidats.

ART. 16. — L'élection aura lieu après la discussion des titres, pourvu que le nombre des votants soit au moins égal à vingt. S'il était moindre, l'élection serait renvoyée à la séance suivante, et cette fois serait valable quel que fût le nombre des votants.

ART. 17. — Tout Membre titulaire qui cessera d'habiter Paris, deviendra, sur sa demande, Correspondant. En cas de retour, il pourra, sur sa demande également, reprendre le rang de titulaire, s'il n'en résulte pas un nombre de titulaires supérieur à la limite fixée par l'article 3.

CHAPITRE III

Administration et fonctionnement.

ART. 18. — La Société est administrée par un Conseil composé de huit Membres élus pour trois ans par l'Assemblée générale. Le Président, le Vice-Président, les Secrétaires, le Trésorier font partie de droit du Conseil, dont le nombre des Membres est ainsi porté à treize.

En cas de vacances, le Conseil pourvoit au remplacement de ses Membres, sauf ratification par la plus prochaine Assemblée générale.

Le renouvellement du Conseil a lieu intégralement; les Membres sortants sont rééligibles.

ART. 19. — Le Conseil se réunit tous les trois mois et chaque fois qu'il est convoqué par son Président ou sur la demande du quart de ses Membres.

La présence du tiers des Membres du Conseil d'administration est nécessaire pour la validité des délibérations.

Il est tenu procès-verbal des séances.

Les procès-verbaux sont signés par le Président et le Secrétaire.

ART. 20. — Toutes les fonctions de Membre du Conseil d'administration sont gratuites.

ART. 21. — L'Assemblée générale des Membres titulaires de la Société se réunit dans la première quinzaine de janvier et chaque fois qu'elle est convoquée par le Conseil d'administration ou sur la demande du quart au moins de ses Membres.

Son ordre du jour est réglé par le Conseil d'administration.

Son bureau est celui du Conseil.

Elle entend les rapports sur la gestion du Conseil d'administration. sur la situation financière et morale de la Société.

Elle approuve les comptes de l'exercice clos, vote le budget de

l'exercice suivant, délibère sur les questions mises à l'ordre du jour et pourvoit au renouvellement du Conseil d'administration.

Le rapport annuel et les comptes sont adressés chaque année à tous les Membres, au Préfet du département, au Ministre de l'Intérieur et au Ministre de l'Instruction publique.

Art. 22. — Le Conseil pourra nommer des commissions et des rapporteurs pour des affaires spéciales.

Les Membres des commissions pourront être pris en dehors du Conseil parmi les Membres titulaires et honoraires.

Art. 23. — Les délibérations du Conseil d'administration relatives aux acquisitions, échanges et aliénations d'immeubles, aliénations de biens, provenant du fonds de réserve, prêts hypothécaires, emprunts, constitutions d'hypothèques, et baux excédant neuf années ne sont valables qu'après l'approbation de l'Assemblée générale.

Art. 24. — Les délibérations du Conseil d'administration relatives à l'acceptation des dons et legs, les délibérations de l'Assemblée générale relatives aux acquisitions ou échanges d'immeubles, aliénations de biens dépendant du fonds de réserve et prêts hypothécaires ne sont valables qu'après l'approbation du Gouvernement.

Art. 25. — La Société nomme chaque année, dans sa première séance de janvier et à la majorité absolue, un Vice-Président choisi parmi ses membres titulaires ou honoraires. Il sera Président l'année suivante et ne pourra être immédiatement réélu Vice-Président.

Art. 26. — Le Président fait exécuter le règlement, maintient l'ordre dans les séances, provoque les communications intéressantes et dirige les discussions.

Art. 27. — Le Président a voix prépondérante en cas de partage ; il peut convoquer des réunions ordinaires et extraordinaires de la Société, du Conseil et des Commissions ; il signe toutes les pièces importantes.

Art. 28. — Le Président, le Secrétaire des séances et le Trésorier font partie de droit, avec voix délibérative, de toutes les réunions et Commissions.

Art. 29. — En cas d'absence, le Président en exercice est remplacé par le Vice-Président. Si celui-ci est également absent, il sera remplacé par celui des anciens Présidents qui est le plus récemment sorti de fonctions. Dans le cas où aucun ancien Président n'assisterait à la séance, le doyen d'âge présidera.

Art. 30. — La Société nomme deux Secrétaires : un Secrétaire des séances et un Secrétaire des publications. Le premier est chargé de

rédiger les procès-verbaux des séances, le second de surveiller la publication du Bulletin et d'en assurer la distribution régulière. Les Secrétaires sont élus pour deux ans ; ils sont rééligibles.

ART. 31. — La Société nomme deux Vice-Secrétaires, l'un des séances, l'autre des publications, pour remplacer les Secrétaires dans le cas où ceux-ci se trouveraient empêchés d'assister aux séances. Ils sont élus pour deux ans et rééligibles.

ART. 32. — Le Trésorier est élu dans la première séance de janvier, au scrutin secret et à la majorité absolue. Il est rééligible.

CHAPITRE IV

Bibliothèque et Archives.

ART. 33. — Un Archiviste-Bibliothécaire est chargé de la conservation des livres, archives, manuscrits et documents, tels que dessins photographies, etc. ; il doit en tenir le catalogue à jour.

Il est nommé en même temps que le Bureau et est rééligible.

ART. 34. — Les Membres de la Société peuvent consulter la bibliothèque et les archives pendant le temps des séances, ainsi qu'aux jours et heures fixés d'avance et indiqués par une affiche spéciale.

Ils devront s'adresser soit à l'Archiviste, soit à un Préposé choisi par lui sous sa responsabilité, accepté par le Conseil et indiqué également sur l'affiche.

ART. 35. — Ils sont tenus de remettre exactement entre les mains de l'Archiviste ou du Préposé les ouvrages de la bibliothèque et les pièces des archives.

ART. 36. — S'ils désirent emporter un ouvrage, ils devront inscrire très lisiblement sur un registre spécial :

1° le titre de l'ouvrage emprunté ;
2° le nombre de volumes ;
3° la date du jour ;
4° leur nom.

ART. 37. — On ne peut emporter plus de trois volumes à la fois, ni les garder plus d'un mois. Passé ce terme, les Membres seront soumis à une amende de 1 franc par semaine de retard.

ART. 38. — Tout ouvrage égaré devra être remplacé aux frais de l'emprunteur, dans un délai de trois mois.

ART. 39. — Les pièces des archives, les registres des procès-verbaux,

ainsi que certaines publications rares, désignés par le Conseil, sur la proposition de l'Archiviste, ne pourront être emportés hors du local de la Société.

ART. 40. — L'Archiviste remettra, à la fin de l'année, au Secrétaire des publications, la liste des publications reçues, liste qui sera publiée dans le Bulletin de la Société.

Il communiquera chaque mois au Trésorier la liste des emprunteurs en retard, après avoir parafé le registre des emprunts.

CHAPITRE V

Séances.

ART. 41. — Les séances ordinaires ont lieu à Paris, au siège de la Société, les deuxième et quatrième samedis de chaque mois, à 8 heures et demie ; dans le cas où la date de l'une des séances coïnciderait avec un jour férié, le Bureau désignera un autre jour.

Toutefois, il n'y aura pas de séances ordinaires du 1er août au 15 octobre, à raison des vacances.

Chaque année une carte indiquant les jours des séances sera adressée à chacun des Membres.

ART. 42. — Les travaux de chaque séance ont lieu dans l'ordre suivant :

1° Lecture du procès-verbal de la séance précédente ;
2° Dépouillement de la correspondance ;
3° Dépôts des ouvrages offerts ;
4° Élection des Membres titulaires et correspondants ;
5° Présentation de nouvelles candidatures ;
6° Rapports et mémoires divers ;
7° Communications verbales ;
8° Fixation de l'ordre du jour de la séance suivante et Comité secret s'il y a lieu.

ART. 43. — Afin de mettre la Société au courant des principales actualités scientifiques, des Conférences seront faites de temps en temps aux séances ordinaires, après les communications originales, par des Membres appartenant aux diverses Sections. Ces Conférences seront annoncées à l'avance.

ART. 44. — Les séances dites d'*Assemblée générale* sont annoncées par convocation spéciale, mentionnant le but de la réunion.

Elles se tiennent aux jours et heures des séances ordinaires.

Art. 45. — Les Membres correspondants peuvent prendre part aux discussions d'ordre scientifique, mais non aux discussions et votes d'ordre intérieur ; ce droit est réservé aux titulaires et honoraires.

Art. 46. — Les personnes étrangères à la Société sont autorisées à assister aux séances et à faire des communications quand elles auront été présentées par un Membre de la Société ; mais elles ne peuvent prendre part aux discussions, à moins d'invitation spéciale du Président de la séance.

Art. 47. — Toutes décisions en séance ordinaire seront prises par vote public, à moins que le scrutin secret ne soit demandé par trois Membres au moins.

Art. 48. — A chaque séance, les Membres et les étrangers présents devront, à leur entrée, donner leur signature sur le registre de présence.

CHAPITRE VI

Publications.

Art. 49. — La Société fait paraître, tous les ans, un Bulletin de ses travaux, comprenant les notes et mémoires qui lui sont communiqués et des extraits des procès-verbaux des séances.

Art. 50. — Le Conseil élira chaque année, dans son sein, à la majorité absolue, une Commission de publication, composée d'au moins six Membres qui seront rééligibles. Le Président, le Secrétaire des publications et le Trésorier font partie de droit de cette Commission, qui se réunira sur la demande du Secrétaire des publications.

Art. 51. — Les notes et mémoires devront être remis au Secrétaire des publications aussitôt après la communication faite.

Art. 52. — L'impression des travaux de chaque Membre correspondant est limitée à 16 pages par an.

Art. 53. — Les auteurs auront le droit de faire imprimer, à leurs frais, tel nombre de tirages à part qu'ils jugeront convenable. La demande devra en être faite au Secrétaire des publications, en même temps que la remise du manuscrit. Ils devront, dès le tirage, désintéresser l'imprimeur.

Tous ces exemplaires porteront, en tête de la première page, la mention : « Extrait du Bulletin de la Société philomathique », avec l'indication du volume et de la pagination.

Art. 54. — Toutes les questions relatives à l'insertion des figures et

planches accompagnant les notes ou les mémoires devront être soumises à l'examen du Bureau si ces figures et planches sont fournies par les auteurs, à l'examen de la Commission de publication si elles sont laissées aux frais de la Société.

CHAPITRE VII

Ressources annuelles et fonds de réserve.

ART. 55. — Les ressources annuelles de l'Association se composent : 1° Des cotisations et souscriptions de ses Membres ; 2° des subventions qui pourront être accordées ; 3° du produit des libéralités dont l'emploi immédiat a été autorisé et des ressources créées à titre exceptionnel et, s'il y a lieu, avec l'agrément de l'autorité compétente ; 4° enfin, du revenu de ses biens et valeurs de toute nature.

ART. 56. — La cotisation des Membres titulaires est fixée à vingt francs par an, et celle des correspondants à dix francs.

ART. 57. — Le fonds de réserve comprend :

1° La dotation ; 2° le dixième au moins du revenu net des biens meubles et immeubles de l'Association ; 3° le capital provenant des libéralités, à moins que l'emploi immédiat n'en ait été autorisé.

ART. 58. — Le fonds de réserve est placé en rentes nominatives sur l'État ou en obligations nominatives de chemins de fer dont le minimum d'intérêt est garanti par l'État.

Il peut également être employé en acquisitions d'immeubles, pourvu que ces immeubles soient nécessaires au fonctionnement de la Société, ou en prêts hypothécaires, pourvu que le montant de ces prêts réuni aux sommes garanties par les autres inscriptions ou privilèges qui grèvent l'immeuble ne dépasse pas les deux tiers de sa valeur estimative.

ART. 59. — Le Trésorier est chargé de recouvrer les cotisations et les autres recettes de la Société, d'acquitter les dépenses, de faire les achats des objets reconnus nécessaires et de veiller à la conservation du matériel.

ART. 60. — Chaque année, les comptes du Trésorier sont examinés par une Commission de trois Membres nommés par la Société au scrutin de liste; cette Commission présente son rapport à l'Assemblée générale annuelle qui prononce sur l'approbation définitive des comptes.

ART. 61. — Cette Commission est tenue au courant par le Trésorier du nom des Membres qui ne paieraient pas leur cotisation. Elle peut,

selon les circonstances, donner un acquit des sommes dues, décider la radiation des Membres et au besoin demander l'inscription de leur nom en tête du premier Bulletin qui paraîtra après sa décision.

Art. 62. — Les dépenses sont ordonnancées par le Président. L'association est représentée en justice et dans tous les actes de la vie civile par le Trésorier.

Le représentant de la Société doit jouir du plein exercice de ses droits civils.

CHAPITRE VIII

Modifications des Statuts et Règlement ; Dissolution.

Art. 63. — Les Statuts ne peuvent être modifiés que sur la proposition du Conseil d'administration ou du dixième des Membres titulaires soumise au Bureau au moins un mois avant la séance.

L'Assemblée extraordinaire spécialement convoquée à cet effet ne peut modifier les Statuts qu'à la majorité des deux tiers des Membres présents.

L'Assemblée doit se composer du quart au moins des Membres en exercice.

Art. 64. — L'Assemblée générale appelée à se prononcer sur la dissolution de la Société, et convoquée spécialement à cet effet, doit comprendre au moins la moitié plus un des Membres en exercice. Si cette proportion n'est pas atteinte, l'Assemblée est convoquée de nouveau, mais à quinze jours au moins d'intervalle et cette fois elle peut valablement délibérer quel que soit le nombre des Membres présents. Dans tous les cas, la dissolution ne peut être votée qu'à la majorité des deux tiers des Membres présents.

Art. 65. — En cas de dissolution, ou en cas de retrait de la reconnaissance de la Société comme établissement d'utilité publique, l'Assemblée générale désigne un ou plusieurs Commissaires chargés de la liquidation des biens de l'Association. Elle attribue l'actif net à un ou plusieurs établissements analogues, publics ou reconnus d'utilité publique.

Ces délibérations sont adressées sans délai au Ministre de l'Intérieur et au Ministre de l'Instruction publique.

Dans le cas où l'Assemblée générale n'aurait pas pris les mesures indiquées, un Décret interviendrait pour y pourvoir ; les détenteurs de fonds, titres et archives, appartenant à la Société, s'en dessaisiront valablement entre les mains du Commissaire liquidateur délégué par le Décret.

Art. 66. — Les délibérations de l'Assemblée générale prévues aux articles 63, 64, 65 ne sont valables qu'après l'approbation du Gouvernement.

Art. 67. — Toute proposition tendant à modifier le présent Règlement doit être signée par au moins cinq Membres titulaires ou honoraires.

Art. 68. — La Société discute, en Comité Secret, s'il y a lieu de la prendre en considération.

Art. 69. — Si elle est de cet avis, une Commission de cinq Membres, chargée de faire un rapport, est proposée par le Conseil et nommée par la Société.

Elle devra comprendre deux Membres au moins des cosignataires.

Art. 70. — Le rapport est lu et discuté en Comité secret.

Art. 71. — Le vote a lieu en Assemblée générale. Il doit y avoir, entre le jour du dépôt de la proposition et celui de la discussion, un intervalle d'un mois au moins.

Art. 72. — Pour que la décision soit valable, l'Assemblée doit réunir vingt Membres au moins, et la majorité comprendre les deux tiers des Membres présents.

Art. 73. — Un exemplaire des Statuts et Règlement de la Société sera remis à chaque nouveau Membre.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société en Mai 1904

PREMIÈRE SECTION. — SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1859. (12 févr.) Lévy (Maurice), M.I., P.C.F., 5, avenue du Trocadéro.
1860. (2 juin) Haton de la Goupillière (J.-Napoléon), M.I., 56, rue de Vaugirard.
— (id.) Mannheim (Amédée), 1, boulevard Beauséjour, Passy.
— (24 nov.) Laussedat (Aimé), M.I., Directeur du Conservatoire des Arts et Métiers.
1861. (13 avril) Tissot (Nic.-Aug.), E.E.P., à Voreppe (Isère).

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1863. (28 mars) Rouché (Eugène), M.I., 213, boulevard Saint-Germain.
1871. (23 déc.) Collignon (Édouard), 6, rue de Seine.
— (id.) Darboux (Gaston), M.I., (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. de la F. des Sc., 36, rue Gay-Lussac.
1872. (27 janv.) Jordan (Camille), M.I., P.E.P., P.C.F., 48, rue de Varennes.

1875. (26 juin) Fouret (Georges), E.E.P., 16, rue Washington.
1876. (23 déc.) Picquet (Henri), E.E.P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— (id.) André (Désiré), P.H., 70 bis, rue Bonaparte.
1878. (26 janv.) Leauté, M.I., 20, boulevard de Courcelles.
— (9 fév.) Laisant, E.E.P., 162, avenue Victor-Hugo.
— (id.) Tannery, Dir. des Sc. à l'École Normale sup., 45, rue d'Ulm.
1881. (11 fév.) Le prince C. De Polignac, Radmannsdorf. Carniole (Autriche).
— (id.) Humbert (Georges), M.I., 10, rue d'Aubigny.
— (12 nov.) Chemin, P.P.C., 33, avenue Montaigne.
1884. (3 nov.) Lévy (Lucien), E.E.P., 12, rue du Regard.
1887. (17 déc.) Koenigs, P.F.S., 101, boulevard Arago.
1892. (26 janv.) Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue Notre-Dame-des-Champs.
1900. (10 mars) Leau, Prof. Stanislas, 6, rue Vavin.
— (22 déc.) Le Roy, Prof. Stanislas, 8, rue de l'Abbé de l'Épée.
1902. (27 juin) Deschamps, 11, rue Du Sommerard.
1902. (13 déc.) Grévy, Prof. Saint-Louis. 62, rue Sainte-Placide.

MEMBRE CORRESPONDANT

1903. (28 mars) Commandant Brocard, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1855. (9 mars) Berthelot (Pierre-Eugène-Marcellin), M.I. (Secrét. perpét.), P.C.F., 3, rue Mazarine (Institut).
1860. (24 nov.) Riche (Alfred), P.H.E.Ph., 11, quai Conti, à la Monnaie.
1861. (25 mai) Gaudry (Albert), M.I., P.H.M., 7 bis, rue des Saints-Pères.
1862. (10 juill.) Troost (Louis), M.I., P.H.F.S., 84, rue Bonaparte.
— (6 déc.) Le Roux, P. Hon. E.Ph., 120, boulevard Montparnasse.
1863. (21 fév.) Luynes (Victor de), P.C., 16, rue de Bagneux.
— (18 juill.) Grandeau (Louis), I.G.A., 4, avenue de la Bourdonnais.

1864. (31 janv.) Wolf (Charles), M.I., P.F.S., 1, rue des Feuillantines.
1865. (1 juill.) Janssen, M.I., Directeur de l'observatoire physique, à Meudon (Seine-et-Oise).
1872. (22 juin). Gernez (Désiré), P.E.N., 18, rue Saint-Sulpice.
1873. (12 avril) Fron, Météorologiste tit. au Bureau Central, 176, rue de l'Université.
1874. (23 mai) Branly, Profess. à l'Inst. Catholique, 21, avenue de Tourville.
1875. (10 avril) Cailletet, M.I., 75, boulevard Saint-Michel.
1875. (27 avril) Thénard (Arnould, 6, place Saint-Sulpice.
1876. (27 mai) Bouty, P.F.S., 9, rue du Val-de-Grâce.
1877. (24 fév.) Lippmann (Gabriel), M.I., P.F.S., 10, rue de l'Éperon.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1880. (13 mars) Duter, P.H., 47, rue Taibout.
— (13 nov.) Pellat (Henri), P.F.S., 3, avenue de l'Observatoire.
— (27 nov.) Becquerel (H.), M.I., P.M., 6, rue Dumont-Durville.
1882. (11 fév.) Cochin, député, 53, rue de Babylone.
1884. (9 avril) Bourgeois (Léon), A.M., 1, boulevard Henri IV.
1886. (17 avril) Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887. (9 juill.) Vallot (Joseph), Dir. de l'Obs. du Mont-Blanc, 114, avenue des Champs-Elysées.
1901. (26 janv.) Vincent, Profess. Lycée Saint-Louis, 207, rue de Vaugirard.
— (14 déc.) Benoist, Profess. Lycée Henri IV, 26, rue des Écoles.
— (28 déc.) Dongier, Sous-direct. de Laboratoire F.S., 82, rue Claude Bernard.
1902. (11 janv.) Ponsot, Pr. Lycée Janson, 26, rue Gustave Courbet.
— (13 déc.) Matignon, M.C.F.S., 17, boulevard Carnot, Bourg la Reine.
1903. (28 fév.) Winter, 44, rue Sainte-Placide.
— (14 mars) Berthelot (Daniel), P.E.Ph., 3, rue Mazarine.
— id. Desgrez, P.A.F.M., 240, rue Saint-Jacques.
— (12 déc.) Darzens, Répétit. E.P., 12, avenue Ledru-Rollin.
1904. (23 janv.) Chauveau, Météor. adjoint Observatoire de Paris, 3, avenue Rapp.
— (9 avril) Hanriot, M.A.M., P.F.M., 4, rue Monsieur le Prince.
— (29 mai) Moureu, P.A.E.Ph., 84, boulevard Saint-Germain.
— id. Malher, 35, avenue Mac-Mahon.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1856. (20 déc.) Prillieux (Éd.), M.I, Sénateur, 14, rue Cambacérès.
1862. (7 mai) Bureau (Éd.), P.M., M.A.M., 24, quai de Béthune.
1863. (31 janv.) Vaillant (Léon-Louis), P.M., 36, rue Geoffroy Saint-Hilaire.
1871. (9 déc.) De Seynes (Jules), P.A.F.M., 15, rue Chanaleilles.
— (23 déc.) Grandidier (A), M.I, 6, Rond-point des Champs-Élyseés.
— (26 déc.) Van Tieghem (Philippe), M.I., P.M., 22, rue Vauquelin.
1871. (26 déc.) Chatin, (Joannes), M.I., P.F.S., 174, boulevard Saint-Germain.
1872 (13 avril) Oustalet, (Émile), P.M., 57, rue Cuvier.
1879. (10 mai) Henneguy (Louis-Félix), P.C.F., 9, rue Thénard.
1883. (26 mai) Mocquart, A.M., 40, rue de Campoformio.
1886. (13 fév.) Bouvier, P.M., M., 39, rue Claude-Bernard.
1888. (11 fév.) Morot, A.M., 9, rue du Regard.
1890. (21 fév.) Roché, (Georges), 4, rue Dante.
1893. (11 mars) Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
— (10 juin) Jousseaume, 29, rue Gergovie.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1893. (27 oct.) De Guerne, 6, rue de Tournon.
1894. (17 mars) Prince Roland Bonaparte, 10, avenue d'Iéna.
1899. (14 janv.) Lécaillon, Prép. Col. de Fr., 118, rue Monge.
— (25 mars) Neuville, Prép. Museum, 55, rue de Buffon.
1901. (12 janv.) Pellegrin, Prép. Museum, 143, rue de Rennes.
— (18 mai) Guieysse, à Bois le Roi, Marne.
1902. (11 janv.) Chauveaud, Direct, adj. de Lab. (Hautes-Études), 61, rue de Buffon.
— (8 fév.) Rabaud, 104, rue d'Assas.
— (27 juin) Lesage, 49, rue de Lille.
— (22 nov.) Anthony, Prép. Museum, 12, rue Chevert.
1903. (28 févr.) Coutière, P.E. Ph., 12, rue N.-D. des Champs.
— (11 avril) Langeron, Pr. F.M., 11, rue Férou.
— (27 juin) Noé, prépar. F.M., 88, boulevard Port Royal.
1904. (9 janv.) Grandidier, (G.), 9, Avenue Marceau.

1904. (23 janv.) De Boissieu, 80, Avenue d'Iéna.
— (id.) Joubin, P.M., 22, boulevard Saint-Germain.
— (26 mars) Gravier, Ass. M., 55, rue de Buffon.
— (23 avril) Ménégaux, Ass. M., 55, rue de Buffon.
— (29 mai) Michel (Auguste), professeur au lycée Michelet.
— (9 juillet) Launoy (L.), Prép. E. Ph.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903. (27 juin) L. Petit, 27, rue d'Elbeuf, Rouen.
— (28 nov.) Devez, Cayenne.
1904. (23 avril) Bull, Prép. à l'Institut Marey.
— (id.) Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— (id.) Malard, Lab. de Zool. marit., St-Waast-la-Hougue (Manche).
— (29 mai) Marceau, P.E.M. Besançon.

Liste des Périodiques reçus par la Société Philomathique

FRANCE

Aix-en-Provence. — Mémoires de l'Académie des Sciences, Agriculculture, Arts et Lettres.

Alger. — Bulletin de la Société d'Agriculture.

Amiens. — Bulletin de la Société Linnéenne du Nord de la France.

Id. — Mémoires de la Société Linnéenne du Nord de la France.

Id. — Mémoires de l'Académie des Sciences, Agriculture, Commerce, Belles-Lettres et Arts du département de la Somme.

Angers. — Bulletin de la Société d'Études scientifiques.

Id. — Mémoires de la Société Académique de Maine-et-Loir.

Id. — Mémoires de la Société nationale d'Agriculture, Sciences et Arts.

Arcueil. — Mémoires de la Société de Physique et Chimie.

Autun. — Bulletin de la Société d'Histoire naturelle.

Auxerre. — Bulletin de la Société des Sciences historiques et naturelles de l'Yonne.

Bagnères-de-Bigorre. — Société Ramond. Observations météorologiques.

Beauvais. — Mémoires de la Société académique d'Archéologie, Sciences et Arts du département de l'Oise.

Belfort. — Bulletin de la Société belfortaine d'Émulation.

Besançon. — Recueil de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.

Id. — Mémoire de la Société d'Émulation du Doubs.

Béziers. — Bulletin de la Société archéologique, scientifique et littéraire.

Blois. — Mémoires de la Société des Sciences et Lettres de Loir-et-Cher.

Bône (Algérie). — Bulletin de l'Académie d'Hippone.

Bordeaux. — Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles.

Bourges. — Mémoires de la Société Historique, Artistique et Scientifique du Cher.

Brest. — Bulletin de la Société Académique.

CAEN. — Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie.
Id. — Id. d'Agriculture et de Commerce.
Id. — Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Id. — Mémoires de la Société d'Agriculture et de Commerce.
Id. — Id. Linnéenne du Calvados.
Id. — Id. Linnéenne de Normandie.
CAMBRAI. — Mémoires de la Société d'Émulation.
CHALON-SUR-SAÔNE. — Bulletins de la Société des Sciences naturelles de Saône-et-Loire.
CHALONS-SUR-MARNE. — Mémoires de la Société d'Agriculture du département de la Marne.
CHERBOURG. — Mémoires de la Société des Sciences naturelles.
DAX. — Bulletin de la Société de Borda.
DIJON. — Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres.
DOUAI. — Bulletin Agricole de l'Arrondissement.
Id. — Société d'Agriculture, des Sciences et des Arts.
Id. — Mémoires de la Société d'Agriculture, des Sciences et des Arts du département du Nord.
DUNKERQUE. — Bulletin de la Société Dunkerquoise pour l'encouragement des Sciences.
Id. — Mémoires de la Société Dunkerquoise pour l'encouragement des Sciences.
GRENOBLE. — Bulletin de l'Académie Delphinale.
Id. — Bulletin de la Société de Statistique des Sciences naturelles et des Arts.
HAVRE. — Bulletin de la Société Géologique de Normandie.
LAON. — Bulletin de la Société Académique.
LE PUY. — Annales de la Société d'Agriculture, Sciences, Arts et Commerce.
LILLE. — Mémoires de la Société Géologique du Nord.
Id. — Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts.
Id. — Recueils des Travaux de la Société d'amateurs des Sciences, de l'Agriculture et des Arts.
LONS-LE-SAUNIER. — Mémoires de la Société d'Émulation du Jura.
LYON. — Annales de l'Université.
Id. — Id. de la Société Linnéenne.
Id. — Id. de la Société d'Agriculture, d'Histoire naturelle et Arts.
LYON. — Mémoires de l'Académie des Sciences, des Belles-Lettres et Arts.

LYON. — Union des Chambres syndicales Lyonnaises.
LE MANS. — Bulletin de la Société d'Agriculture, Sciences et Arts de la Sarthe.
MARSEILLE. — Annales de l'Institut colonial.
Id. — Bulletin de la Société Scientifique industrielle.
Id. — Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
Id. — Société de Médecine.
Id. — Annales du Musée d'Histoire naturelle.
Id. — Annales de la Faculté des Sciences.
MAYENNE. — Bulletin de la Société d'Agriculture de l'arrondissement.
MEAUX. — Bulletin du Syndicat de l'arrondissement de Meaux.
MONTBÉLIARD. — Mémoires de la Société d'Émulation.
MONTBRISON. — Bulletin de la Diana.
MONTPELLIER. — Mémoires de l'Académie des Sciences.
Id. — Mémoires et Documents de la Sériciculture.
MOULINS. — Revue scientifique du Bourbonnais.
NANCY. — Bibliographie anatomique.
Id. — Mémoires de la Société des Sciences, Lettres et Arts.
Id. — Mémoires de l'Académie de Stanislas.
NANTES. — Annales de la Société Académique.
Id. — Bulletin de la Société des Sciences naturelles de l'Ouest de la France.
NÎMES. — Annales de Mathématiques pures et appliquées.
Id. — Bulletin de la Société d'Études des Sciences naturelles.
PARIS. — Annales du Conservatoire des Arts et Métiers.
Id. — Id. Maritimes et Coloniales.
Id. — Id. de l'Institut national Agronomique.
Id. — Id. de la Société Entomologique de France.
Id. — Id. Scientifiques de l'École normale supérieure.
Id. — Id. de la Société d'Horticulture de France.
Id. — Id. de l'Agriculture française.
Id. — Id. de Chimie ou recueils concernant la Chimie.
Id. — Bibliographie des Travaux scientifiques.
Id. — Bulletin de la Société Philotechnique.
Id. — Id. de l'Institut des Actuaires français.
Id. — Id. de la Société Zoologique de France.
Id. — Id. de la Société Mathématique.
Id. — Id. mensuel de la Société d'Acclimatation.
Id. — Id. de la Société entomologique de France.
Id. — Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences.

Paris. — L'Institut, journal universel des Sciences et des Sociétés Savantes de France et de l'Étranger.
Id. — L'Intermédiaire des Mathématiciens.
Id. — Journal de la Société d'Horticulture de France.
Id. — — de l'École Polytechnique.
Id. — — de Chimie médicale, de Pharmacie et de Toxicologie.
Id. — Bulletin des Séances de la Société française de Physique.
Id. — Société française de Physique. — Collection des Mémoires relatifs à la Physique.
Rouen. — Précis analytique des travaux de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres.
Id. — Bulletin des travaux de la Société libre d'Émulation.
Saïgon. — Bulletin de la Société des Études indo-chinoises.
Saint-Étienne. — Annales de la Société d'Agriculture, Industrie, Sciences et Arts.
Id. — Bulletin de la Société d'Agriculture.
Id. — Le Glaneur, aide-mémoire des Agriculteurs.
Saint-Jean-d'Angely. — Bulletin de la Société Linnéenne de la Charente-Inférieure.
Saint-Quentin. — Annales Agricoles, Scientifiques et Industrielles du département de l'Aisne.
Id. — Société industrielle de Saint-Quentin et de l'Aisne.
Id. — Société Académique des Sciences, Arts, Belles-Lettres et Agriculture.
Soissons. — Bulletin de la Société Archéologique, Historique et Scientifique.
Toulouse. — Annales de la Société d'Horticulture de la Haute-Garonne.
Id. — Annales de la Faculté des Sciences.
Id. — Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise.
Id. — Annuaire de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise.
Id. — Bulletin de l'Université.
Id. — Mémoires de la Société Archéologique du Midi de la France.
Id. — Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres.
Id. — Bulletin de la Société des Sciences physiques et naturelles.

VALENCIENNES. — Revue Agricole, Industrielle et Artistique.
VERDUN. — Mémoires de la Société Philomathique.

ÉTRANGER

ALLEMAGNE

BALE. — Naturforschende Gesellschaft in Basel (Publications).
BERLIN. — Sitzungsberichte der K. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Id. — Jahrbuch über die Fortschritte Mathematique.
Id. — Ornithologische Monatsberichte.
BRESLAU. — Jahresb. Schlesischen Ges. für vaterländische Cultur.
FRANCFORT-SUR-LE-MEIN. — Bericht über die Senckenbergischen naturforschenden Gesellchaft.
GÖTTINGEN. — Göttingische gelehrte Anzeiger.
HAMBOURG. — Mittheilungen aus dem Naturhistorischen Museum.
IENA. — Jenaische Zeitschrift für Medicin.
KÖNIGSBERG. — Schriften der Physikalisch Ökonomischen Gesellschaft.
LEIPZIG. — Zoologischer Anzeiger.
METZ. — Mémoires de l'Académie.
MUNICH. — Almanach der Königlichen bayereischen Akademie der Wissenschaften.

AUTRICHE

LEMBERG. — Société Scientifique de Chevtchèseko (Publications).
PRAGUE. — Sitzungsberichte der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.
PRAGUE. — Jahresbericht der Königl.-Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.
VIENNE. — Sitzungsberichte der mathematisch naturwissenschaftlichen Klasse der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien.
Id. — Annalen des K. K. Naturhistorischen Hofmuseums.

BELGIQUE

BRUXELLES. — Bulletin de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Arts.
Id. — Annuaire de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts.

BRUXELLES. — Conférence maritime tenue à Bruxelles pour l'adoption d'un système uniforme d'observations météorologiques sur la mer.

LIÈGE. — Mémoires de la Société royale des Sciences.

BRÉSIL

RIO DE JANEIRO. — Paceer da Sociedade de Medicina de Rio de Janeiro.

CHILI

SANTIAGO. — Actes de la Société scientifique du Chili.

ESPAGNE

MADRID. — La Naturaleza.

ÉTATS-UNIS

BOSTON. — Memoirs of the Boston Society of Natural History.
Id. — Boston Journal of Natural History.
Id. — Proceedings of Boston Society of Natural History.

CALIFORNIE. — Contribution to biology of the Hopkins laboratory of biology.

CAMBRIDGE. — Illustrated catalogue of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.
Id. — Annual report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.
Id. — Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.

CAMBRIDGE. — Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.
Id. — The organization and Progress of the Anderson School.
Id. — Transactions of the Cambridge philosophical Society.
Id. — Annals of the astronomical Observatory of Harvard College.

CHICAGO. — Academy of Sciences (Publications).

KANSAS. — To Kansas University Quarterly. Lawrence. Kansas.

MADISON. — Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters.

NEW-YORK. — Science Bulletin of the Museum of the Brooklyn Institut.
Id. — Annals of Lycæum of Natural History of N. Y.

PHILADELPHIE. — Journal of the Academy of Natural Sciences.
Id. — Proceedings of the Academy of Natural Sciences.
Id. — Reports of the Academy of Natural Sciences.
SALEM. — Proceedings of the American Association for the advancement of Sciences.
SAN FRANCISCO. — Proceedings of the California Academy of Sciences.
Id. — Memoirs of the California Academy of Sciences.
WASHINGTON. — Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution. Bureau of Ethnology.
URBANA (Illinois). — Bulletin of the Illinois State Laboratory of Natural History.

GRANDE BRETAGNE

ÉDIMBOURG. — Proceedings of the Royal Society.
LONDRES. — Proceedings of the London Mathematical Society.
Id. — The Quaterly Journal of pur and applic. Mathem.
Id. — Monthly Notice of the Royal Microscopical Society.
Id. — Memoirs of the Royal Astronomical Society.
Id. — Science Gossip.
Id. — British Museum (Publications).
Id. — Zoological Society (Publications).

INDES NÉERLANDAISES

BATAVIA. — Transactions of the Batavian Society of Arts and Sciences.
Id. — Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasche Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
Id. — Verhandelingen van het Bataviaasche Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
Id. — Tijdschrift voor indische Taal-Land en Volkenkunde.

INDES ORIENTALES

CALCUTTA. — Journal of the Asiatic Soc. of Bengal.

ITALIE

BOLOGNE. — Opuscoli Scientifici 1817-23.
Id. — Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.

Bologne. — Memorie dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
Florence. — Bolettino della Società entomologica Italiana.
Gênes. — Annali del Museo Civico di Storia Naturale.
Livourne. — Atti dell' Accademia Italiana di Lettere ed Arti.
Modène. — Atti della Società dei Naturalisti di Modena.
Naples. — Rendiconto dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche.
Palerme. — Atti della Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.
Id. — Giornale di Scienze naturali ed economiche pubblicato per cura del Consiglio di perferzionamento annesso al R. Istituto tecnico di Palermo.
Id. — Giornale ed atti della Società di acclimazione e di agricoltura in Sicilià.
Id. — Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo.
Rome. — Memorie dell' Osservatorio del Collegio Romano.
Sienne. — Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena.
Turin. — Annales de l'observatoire de l'Académie.
Id. — Bollettino del consiglio subalpino di sanità ossia Giornale fisico medico del Piemonte.
Id. — Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della Università.
Id. — Memoire della Società delle scienze biologiche in Torino.
Id. — Mémoires de l'Académie Impériale de Turin, 1805-23.

JAPON

Tokio. — Memoirs of the literature College Imperial University of Japon.
Id. — The Zoological Magazine, organ of the Zoological Society of Tokio.

LUXEMBOURG

Luxembourg. — Publications de l'Institut Royal grand-ducal de Luxembourg.

MEXIQUE

Mexico. — Memorias y Revista de la Sociedad Cientifica « Antonio Alzate ».

NORWÈGE

CHRISTIANA. — Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.

PAYS-BAS

AMSTERDAM. — Verhandelingen der K. Akademie van Wetenschappen.
HARLEM. — Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.
Id. — Natuurkundige Verhandelingen van de la Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem.
Id. — Archives du Musée Taylor.

RÉPUBLIQUE ARGENTINE

BUENOS-AIRES. — Annales de la Officina meteorologica Argentina.
Id. — Resultados del Observatorio Nacional Argentino.

RUSSIE

HELSINGFORS. — Meddelanden af Societas pro Fauna et Flora Fennica.
KIEW. — Mémoire de la Société des Naturalistes.
MOSCOU. — Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes.
SAINT-PÉTERSBOURG. — Bulletin de l'Académie des Sciences.

SUÈDE

STOCKHOLM. — Journal Entomologique.
Id. — Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.
Id. — Ofversigt af Kongl. Vetenekaps-Akademias Förhandlingar.
UPSAL. — Bulletin of the Geological institution of the University.
Id. — Acta societatis regia scientiarum Upsaliensis.
Id. — Nova Acta regia societatas scientiarum Upsaliensis.
Id. — Bulletin Météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université.

SUISSE

BERNE. — Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft.
GENÈVE. — Bibliothèque britannique rédigée par Pictet et Maurice, 1796-1815.

GENÈVE. — Bulletin de l'Institut national Genevois.
Id. — Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle.
Id. — Mémoires de l'Institut national Genevois.
NEUFCHATEL. — Bultetin de la Société Neuchâtelloise de Géographie.

URUGUAY

MONTEVIDEO. — Anales del Museo nacional.

BANQUET ANNUEL

Le banquet annuel, à l'occasion du 116e anniversaire de la fondation de la Société, a eu lieu le lundi 8 février 1904, au restaurant Champeaux, sous la présidence de M. R. Dongier, Président de la Société.

M. Prillieux, membre de l'Institut, doyen de la Section des Sciences naturelles, a pris part à cette fête et y a prononcé une allocution fort applaudie.

Vingt-quatre membres, dont les noms suivent, ont assisté au banquet :

MM. D. André, Benoist, E.-L. Bouvier, Chauveau, Chauveaud, Darzens, Devez, Dongier, Fouret, G. Grandidier, Prince de Polignac, Morot, F. Henneguy, Hua, Laisant, Lécaillon, Lesage, Noé, Ponsot, Prillieux, Rabaud, Léon Vaillant, Vincent, Winter.

MM. Anthony, D. Berthelot, Bourgeois, Brocard, Deschamps, Grévy, Guieysse, Joubin, Langeron, Maurice Lévy, Mocquard, Neuville, Oustalet, s'étaient excusés par lettre ou par dépêche.

Au champagne, M. Dongier prononce les paroles suivantes :

Messieurs et chers confrères,

« C'est M. André, notre cher Président de l'an dernier, qui me fit admettre à la Société Philomathique. Je crois qu'il prit part à la conspiration, j'allais dire à l'imprudence, qui vous impose aujourd'hui mon bavardage. Veuillez ne pas lui en garder rancune. M. André a acquis des droits à notre reconnaissance, par le zèle, le tact et la parfaite distinction avec lesquels il s'est acquité de ses fonctions de Président, pendant l'année écoulée. D'ailleurs, ayant conscience des devoirs que m'impose son exemple, je vais m'efforcer de ne pas le compromettre davantage à vos yeux.

Nous voilà réunis autour de la même table que l'année dernière ; la Société philomathique de Paris est revenue à ses traditions anciennes. C'est une marque de vitalité dont nous devons nous réjouir. Il en existe une autre encore. Nos séances de quinzaine sont suivies et bien remplies comme aux époques de prospérité, dont notre illustre confrère, M. Gaudry, nous a fait, l'an dernier, un tableau si saisissant et si spirituel.

Les causes de ce regain de vie sont de diverses natures.

Notre Société, pour être prospère, n'avait qu'à se conformer au

programme que résume sa devise où « l'amitié et l'étude » sont si harmonieusement unies. La recherche scientifique, ainsi placée sous la protection de l'amitié, apparaît avec des charmes irrésistibles ; comme elle procure alors la meilleure des sensations, on la poursuit avec entrain et par conséquent avec succès. L'effort est décuplé lorsqu'il est secondé par le concours simultané du cœur et de l'esprit.

Le caractère encyclopédique de notre Société, qui avait pu éloigner d'elle, il y a quelque trente ans, des esprits désireux de se spécialiser, représente lui aussi un élément de succès. Les Sociétés savantes spéciales remplissaient alors et remplissent encore aujourd'hui un rôle important. Mais la multiplicité des moyens d'action et la variété des connaissances s'imposent, de nos jours plus que jamais, à celui qui se livre à la recherche scientifique.

Les barrières qui séparaient les différentes branches de la Science tendent à disparaître. Désormais, la Physique est reliée à la Chimie par le chemin que couvre la Chimie physique. La Thermodynamique, l'outil indispensable de la Chimie physique, s'est étendue et s'est développée ; elle est devenue ce qu'on appelle l'Énergétique. En dehors des applications qu'on en fait dans la Physique et dans la Chimie, la Thermodynamique nous révèle les lois qui régissent les réactions de l'organisme et nous renseigne sur les phénomènes de la vie. Elle permet encore d'expliquer quelques formations géologiques. Les transformations que subissent les substances non organisées peuvent ainsi être rapprochées de l'évolution des êtres organisés. La physiologie et la géologie nous apparaissent donc comme les tributaires d'une même Science ; ce voisinage était bien inattendu.

L'analyse mathématique, qu'on ne peut pas ignorer dans les sciences physiques, paraît devoir étendre son champ d'action jusque vers la Science biologique. Vous avez tous présente à la mémoire la tentative heureuse qu'un de nos confrères a publiée dans le *Bulletin* de la Société.

Il serait oiseux, mes chers confrères, de multiplier les exemples. Vous croyez tous, comme moi, que les connaissances encyclopédiques sont nécessaires à celui qui veut faire une œuvre originale.

Le spectacle des découvertes récentes est un sujet d'étonnement ; chaque semaine voit éclore des résultats imprévus. A cause du grand nombre des mémoires dont s'enrichit la littérature scientifique, il n'est pas possible de lire et d'interpréter tout ce qui est publié. Pour résoudre cette difficulté, la solution unique qui se présente, c'est de faire partie d'une Société comme la nôtre, où toutes les branches de la Science ont des représentants. Telle question d'actualité intéresse-t-

elle un certain nombre d'entre nous, un de nos confrères se charge aussitôt d'en faire un exposé en l'éclairant de sa compétence spéciale. Ces causeries donnent à nos réunions une intensité de vie digne des époques les plus florissantes.

Grâce aux démarches de quelques-uns de nos confrères, qui nous sont chers, nous jouissons des avantages d'une installation confortable à la Sorbonne. Ces confrères, qui n'avaient pas désespéré de la Société philomathique, nous ont accueilli avec une aimable courtoisie; ils nous ont fait goûter le plaisir des relations cordiales qui sont de tradition dans notre Société. Je leur exprime la sincère gratitude des nouveaux venus dont je fais partie.

Messieurs,

Je suis heureux de saluer tout particulièrement deux membres, parmi nos doyens, qui n'ont pas craint de braver les intempéries de la saison pour se retrouver au milieu de nous. Je veux parler de M. Prillieux dont nous fêterons, je l'espère, dans deux ans, le cinquantenaire de son entrée à la Société philomathique, de M. Vaillant qui, depuis quarante ans, est resté fidèle à nos réunions de quinzaine. Qu'il me soit permis de souhaiter en votre nom de les voir, de nombreuses années encore, s'associer au toast que votre Président porte au développement, à la durée indéfinie de la Société philomathique de Paris. »

Ce discours est accueilli par des applaudissements unanimes.

M. Prillieux se lève et prononce l'allocution suivante, pleine de charmes, où il rappelle ses souvenirs de jeune philomathe.

Mes chers confrères,

« Je suis heureux de pouvoir exprimer ici, au milieu de vous, mes vœux pour la longue prospérité et l'éternelle jeunesse de notre chère Société Philomathique.

Plus heureuse que nous, elle rajeunit sans cesse et de jeunes recrues de travailleurs ardents et actifs viennent remplacer ceux pour lesquels l'heure de la retraite ou du départ a sonné.

Je garde toujours vivant le souvenir des sentiments de joie et de fierté que j'ai ressentis quand j'ai été élu membre de la Société philomathique. J'ai été bien des années parmi les plus assidus aux samedis de la Philomathique. Bien des longues amitiés s'y formaient. Tous les botanistes de la Société s'y réunissaient et allaient ensuite tous ensemble finir la soirée au Luxembourg, dans le salon de Jacques Gay où tous les amis des plantes de passage à Paris, voyageurs et savants du monde entier, se donnaient rendez-vous.

Depuis cette époque lointaine, bien des sociétés spéciales se sont créées, se sont multipliées et même divisées, de façon que chacune y trouve un petit public tout particulièrement disposé à s'intéresser à telle ou telle espèce de travaux. Ces sociétés à domaine réduit et limité ont leur très grande utilité ; elles ont prospéré et c'est fort heureux, mais elles n'enlèvent rien au charme de cette petite Académie qu'est la Société philomathique, où les plus méritants et les plus distingués des travailleurs de tout ordre de sciences traitent les questions les plus variées devant un auditoire d'élite, où chacun sait profiter de tout ce qui peut ouvrir dans le domaine un peu étroit de sa spécialité des aperçus nouveaux et des horizons plus vastes.

Messieurs, restons fidèles à la belle devise « Étude et Amitié » qui est inscrite sur les vieux jetons de la Société Philomathique, et que toujours nos jeunes confrères soient assurés, en entrant dans notre Société d'y trouver chez leurs anciens la plus affectueuse sympathie et le plus cordial dévouement.

Je lève mon verre aux jeunes, aux nouveaux venus dans la Société Philomathique. »

M. E.-L. Bouvier, en présentant les regrets de notre confrère, M. Neuville, de n'avoir pu assister au banquet, souhaite à ce dernier, qui est à la veille de son départ pour une mission d'études dans les régions du Haut-Nil, un heureux voyage et une ample moisson scientifique. M. Bouvier fait ressortir le dévoûment avec lequel M. Neuville veille, depuis quelques années, aux détails d'exécution du *Bulletin* de la Société. (*Applaudissements.*)

La soirée s'est prolongée fort agréablement par des conversations particulières empreintes d'une grande cordialité ; chacun était heureux du réveil de la Société et projetait de prendre une part efficace à son développement et à son succès. On s'est séparé en se donnant rendez-vous à l'année prochaine pour le 117e anniversaire.

Extraits des Comptes-rendus des Séances

DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

(Pour le 2e Semestre de 1903)

Séance du 11 juillet 1903.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

M. J. Noé fait une communication sur les études qu'il a entreprises « sur la vie oscillante » considérée chez divers animaux.

M. Coutière fait une communication sur les prétendues glandes venimeuses palatines des Murènes. Bottard a décrit un appareil d'inoculation, d'après lequel le venin s'écoulerait autour des dents articulées médianes, lors d'une pression exercée à la base de ces dents, qui traversent librement, d'après lui, muqueuse et glande palatines. Cette description est de pure fantaisie, il n'existe ni glande, ni appareil d'inoculation.

Séance du 25 juillet 1903.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

M. Rabaud présente un extrait du *Journal des savants* de 1680, signalant un soi-disant œuf prodigieux.

Séance du 24 Octobre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

La Société décide de faire don au gouvernement américain, s'il en fait la demande, des publications qui figureront à l'Exposition internationale de St-Louis.

M. Neuville présente, au nom de MM. Bouvier et Anthony, la candidature, comme membre correspondant dans la 3e section, de M. le Dr Devez, à Cayenne, habitant provisoirement 6, rue du Pont de Lodi.

(1) Les auteurs des communications sont priés de remettre au secrétaire des séances, dans la séance même où la communication est faite, ou *au plus tard* dans les huit jours qui suivent, *un résumé* de la question traitée. Ce résumé est publié dans les extraits des comptes-rendus.

Une commission, composée de MM. Bouvier, Anthony et Neuville, est nommée pour examiner cette candidature.

M. Anthony présente un travail qu'il vient de publier sur « les modifications craniennes consécutives à l'ablation d'un crotaphyte chez le chien ».

Ayant enlevé d'un côté ce muscle à de jeunes chiens nouveau-nés, il a constaté, 9 mois après, un développement plus considérable de l'hémisphère cérébral correspondant et une diminution dans la profondeur des empreintes des circonvolutions sur l'endocrâne de la voûte.

MM. Lesage et André présentent quelques observations au sujet de ce travail.

M. Ponsot signale certaines colorations spéciales qu'il a obtenues dans des expériences sur la photographie des couleurs.

Séance du 14 Novembre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

M. Laisant s'excuse de ne pouvoir assister à la séance ; il adresse à la société un mémoire de géométrie dont l'auteur est M. Louis Berdon et demande que ce mémoire soit publié dans le *Bulletin*. La société décide que la solution à cette question sera adoptée ultérieurement.

M. Neuville fait un rapport favorable sur la candidature de M. Devez. Le vote sur les conclusions de ce rapport est ajourné à la prochaine réunion.

M. Dongier présente la candidature, comme membre titulaire dans la 2e section, de M. Darzens, agrégé des sciences physiques, répétiteur de chimie à l'Ecole Polytechnique. MM. André, Dongier et Winter sont désignés pour examiner cette proposition.

M. Vaillant donne lecture de la notice biographique qu'il avait été chargé de faire sur M. Alix, membre décédé de la société. Cette notice sera publiée dans le *Bulletin*.

M. Rabaud signale une expérience faite par M. Eismond, de Varsovie. Cet expérimentateur, en enlevant l'ébauche embryonnaire dans un embryon de Sélacien, a vu se reformer deux ébauches nouvelles, l'une à droite, l'autre à gauche de la partie enlevée.

M. Bouvier signale la présence en Kroumirie d'une Crevette d'eau douce, *Atyephyra Desmaresti*. Il mentionne aussi la découverte d'une espèce nouvelle, *Caridina Madagascariensis*.

Séance du 28 Novembre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

M. Devez est élu membre correspondant dans la 3e section.

M. Dongier fait un rapport favorable sur la candidature de M. Darzens ; le vote sur ces conclusions est ajourné à la prochaine réunion.

Sur la demande de M. Laisant, la société décide de publier dans le *Bulletin* le mémoire de M. Louis Berdon.

M. Deschamps fait une communication sur la marche des rayons lumineux dans les milieux réfringents et la construction des rayons réfractés dans le prisme. MM. Dongier, Grévy et Laisant présentent diverses observations à propos de cette communication.

Séance du 12 Décembre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

M. le Président donne lecture d'une lettre de M. le Ministre de l'Instruction publique informant la Société que le congrès des sociétés savantes s'ouvrira à la Sorbonne le mardi 5 avril prochain.

M. Darzens est élu membre titulaire dans la 2e section.

M. Bouvier présente la candidature, comme membre titulaire dans la 3e section, de M. Guillaume Grandidier, naturaliste et explorateur. MM. Bouvier, Coutière et Hua sont désignés pour examiner cette candidature.

M. André propose à la société d'élire une commission chargée d'organiser le banquet annuel de la société. MM. Lécaillon, Noé et Rabaud sont désignés.

M. André fait une communication et présente un mémoire sur « les équations différentielles linéaires à coefficients constants ou variables dont l'équation dérivée est régulière ».

M. Anthony fait une communication sur la morphologie et la morphogénie des muscles adducteurs des Lamellibranches.

MM. Laisant et Bouvier présentent diverses observations à propos de cette communication.

M. Leau offre à la société un volume qu'il vient de faire paraître, en collaboration avec M. Couturat, sur la question de la langue universelle. Il donne en même temps des renseignements sur l'état actuel de cette question.

MM. Laisant et Dongier présentent diverses observations sur les avantages de certains systèmes de téléphones.

Séance du 26 Décembre 1903.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ

M. Bouvier fait un rapport sur la candidature de M. Guillaume Grandidier ; il conclut à l'admission du candidat. Le vote sur cette conclusion est ajourné à la prochaine séance.

M. Dongier présente la candidature, comme membre titulaire dans la 2e section, de M. Chauveau, météorologiste adjoint à l'observatoire de Paris. MM. Darzens, Dongier et Winter sont chargés d'examiner cette candidature.

M. Hua présente la candidature, comme membre titulaire dans la 3e section, de M. de Boissieu. MM. Chauveaud, Hua et Lesage sont désignés pour examiner cette candidature.

M. Vaillant présente la candidature, comme membre titulaire dans la 3e section, de M. Joubin, professeur de Malacologie au Muséum d'Histoire naturelle. MM. Bouvier, Neuville et Vaillant sont désignés pour examiner la candidature de M. Joubin.

M. Darzens fait une communication sur la composition de l'eau de rose ; il présente à la société différents produits qu'il a obtenus au cours de ses recherches. M. J. Winter fait une communication sur une modification du procédé Adam pour le dosage du beurre dans le lait.

La seule méthode de dosage du beurre dans le lait qui donne des résultats toujours exacts, est celle qui consiste à épuiser le caséum par l'éther, soit à froid, soit à la température d'ébullition de l'éther.

Cette méthode présente l'inconvénient d'être un peu longue et d'exiger l'évaporation lente d'une quantité assez notable d'éther. Ces deux reproches, qui s'évanouissent quand on n'est pas pressé, sont de nature à gêner l'expertise courante dans un laboratoire particulier où l'on a beaucoup d'examens à faire. On y emploie de préférence, en France surtout, le procédé d'Adam ou quelque autre procédé plus ou moins rapide et d'une exactitude douteuse.

Le procédé d'Adam, d'un emploi commode, présente deux inconvénients graves déjà maintes fois signalés : il produit facilement des coagulums dans l'appareil même, où l'on épuise le lait ; il n'est pas applicable à un lait altéré.

Dès que, dans l'appareil à épuisement d'Adam, il se produit un coagulum, si minime soit-il en apparence, le dosage du beurre est

faussé dans de *larges proportions ;* c'est, par conséquent, un procédé incertain, exposant à de graves méprises.

Cette méthode, toutefois, donne des résultats *très voisins* de la réalité quand l'épuisement se fait normalement, sans aucune coagulation.

La cause réelle de ces coagulations partielles est fort obscure, car elles se produisent sans aucune modification apparente des conditions opératoires habituelles.

Ce qui est certain, c'est qu'elles cessent de se produire dès qu'à l'*alcool ammoniacal* qui entre dans la composition de la liqueur d'Adam on substitue l'*alcool potassique*, dans les conditions et les proportions que je vais indiquer. C'est cette modification au procédé d'Adam que je crois utile de faire connaître ; je l'ai étudiée longuement.

Je suppose connue la technique d'Adam. Son appareil à *une* boule et à *large* tige peut servir à la condition d'atteindre une contenance d'au moins 52^{cc}. Mais tout autre appareil à décantation est utilisable.

Voici comment il convient d'opérer avec la modification potassique.

Après avoir aspiré dans la tige les 10^{cc} de lait habituels, on laisse couler par dessus, sans agiter, d'abord 10^{cc} d'eau distillée puis 15^{cc} d'alcool absolu, tenant en dissolution 1 gramme de potasse pure dans 100^{cc} d'alcool. On ajoute 2 gouttes de phénol-phtaléine dans l'alcool et on mélange pendant quelques instants ; toute la masse prend une couleur rouge uniforme. On y verse alors 15^{cc} d'éther et on mélange à nouveau, doucement comme dans le procédé usuel, jusqu'à ce que le liquide soit devenu *limpide*. On laisse reposer pendant quelques minutes. Deux couches se forment : une couche inférieure *rouge* ; une couche supérieure moins importante et décolorée. Cette dernière *parfois* se dédouble elle-même en deux autres par suite de la séparation *partielle* du beurre se rassemblant en une mince couche huileuse à sa surface. On évacue alors la majeure partie de la couche inférieure *rouge*. Quand il n'y en a plus que deux ou trois cc. on lave la solution éthérée du beurre en faisant couler le long de la paroi, sans agiter, 5 ou 6^{cc} d'eau distillée qui tombent au fond de l'appareil et se mêlent à la partie colorée. Après 5 minutes de repos on évacue définitivement tout le liquide coloré aqueux et on reçoit toute la portion décolorée dans une capsule tarée d'une contenance de 15^{cc}. On lave l'appareil vide avec 2^{cc} d'éther qu'on ajoute dans la capsule. On laisse évaporer l'éther à l'air libre. Au bout de deux heures on peut achever

l'évaporation au bain-marie. On porte la capsule sous l'exsiccateur pendant 2 ou 3 heures et on pèse.

Comme contrôle on fait fondre le beurre après cette première pesée; on y verse 5 ou 6cc de benzène; la dissolution doit se faire *sans* résidu et dans ce cas la pesée est exacte.

S'il y a un résidu insoluble, comme cela est à peu près habituel avec le procédé d'Adam et peut également se produire avec tous les procédés similaires à décantation, on évacue la solution benzénique aussi exactement que possible et on dessèche et pèse à nouveau la capsule avec son résidu. La différence entre les deux pesées est égale au poids du beurre.

Ce procédé est applicable même au lait coagulé et fermenté. La seule difficulté dans ce cas est d'obtenir un lait homogène par rapport au beurre. Exemple :

Beurre du lait frais.	39,20 gr.	1004
Après une fermentation de *8 jours*,		
beurre.	29,30 »	»

La différence entre les deux dosages peut aussi bien être attribuée à l'hétérogénéité du lait coagulé dans la seconde pesée qu'à la transformation définitive d'une certaine quantité de beurre par la fermentation. Dans les cas de ce genre le procédé d'Adam est inutilisable.

L'emploi de la solution de potasse provoque la dissolution complète de la caséine *avant* l'addition d'éther. L'éther, en effet, clarifie presque instantanément le mélange. Dans le procédé d'Adam la dissolution de la caséine est absolument insuffisante.

Quand on opère avec la solution potassique, sur des laits fortement fermentés comme dans l'exemple précité, l'épuisement par l'éther laisse quelques flocons qui tombent au fond de l'appareil et ne gênent pas la décantation. Le dépôt, insoluble même dans la potasse, est lié au développement des ferments figurés.

L'objection qui vient naturellement à l'esprit contre l'emploi de la potasse alcoolique est la possibilité d'une saponification partielle des graisses. L'expérience ne justifie pas cette crainte.

Voici, parmi beaucoup d'autres, quelques exemples qui suffiront à donner une idée moyenne des résultats que l'on peut trouver.

Je désigne par A le résultat obtenu par la méthode d'Adam ; par

W celui fourni par le procédé que je viens d'indiquer; par E le beurre obtenu par épuisement du caséum par l'éther.

	A	W	E	
I.	40,3	55,70	non fait (lait de femme)	
II.	41,40	44,45	non fait (lait de vache)	
III.	48,70	60,50	61,6	»
IV.	35,7	36,40	37,9	»
V.	41,5	42,3	43,30	»
VI.	25,4	38,3	38,70	»

Les exemples I et II sont des premières comparaisons que j'ai établies entre A et W. Leurs différences notables m'ont poussé à établir toujours le contrôle par E.

III, IV et V représentent les résultats comparés que l'on obtient communément quand tout marche normalement. On trouve parfois A *légèrement* plus grand que W et même que E ou W plus grand E et A. Ces fluctuations me paraissent surtout liées à l'instabilité de l'émulsion lactée ; il est à peu près impossible d'avoir un lait parfaitement homogène pendant 5 minutes successives. Mais la règle est que $A < W$ et E.

L'exemple VI se rapporte à un cas où s'est produit un léger coagulum dans le procédé d'Adam. La différence entre A et E ou W est ici énorme. Et ce cas n'est pas isolé.

Séance du 9 Janvier 1904

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ

M. Lucien Lévy s'excuse de ne pouvoir assister à la séance.

M. Dongier fait un rapport sur la candidature de M. Chauveau et conclut à l'admission de celui-ci. Le vote sur cette conclusion est remis à la prochaine séance.

M. Guillaume Grandidier est élu membre titulaire dans la 3e section.

M. Hua fait un rapport favorable sur la candidature de M. de Boissieu. Le vote sur cette candidature est remis à la prochaine séance.

M. Bouvier fait un rapport sur la candidature de M. Joubin et conclut à l'admission de celui-ci. Le vote sur cette candidature est ajourné à la prochaine séance.

M. Bouvier est élu vice-président de la société pour l'année 1903-1904.

M. Mabille est réélu trésorier par acclamation.

M. Coutière est élu secrétaire des publications en remplacement de M. Bouvier.

M. Darzens fait une communication sur la composition des musces synthétiques.

Séance du 13 janvier 1904

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER

M. le Président annonce la mort de M. Mabille, trésorier de la société, et exprime les regrets causés par cette mort.

M. Vaillant remet à la société le fac-simile d'une médaille décernée à M. Reyckaert par la société géologique de France. La société, à cette occasion, remercie M. Reyckaert des services qu'il lui a rendus depuis 24 ans qu'il est son employé.

M. Rabaud est élu trésorier en remplacement de M. Mabille décédé.

MM. Chauveau, de Boissieu et Joubin sont élus membres titulaires le 1er dans la 2e section, les deux derniers dans la 3e section.

M. Ponsot fait une communication sur le transport électrique dans les dissolutions salines.

Séance du 13 février 1904

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER

M. le Ministre de l'Instruction publique informe la société qu'il s'ouvrira à Athènes, en 1905, un congrès international archéologique et appelle l'attention sur l'intérêt qu'il y aurait pour la science française à être largement représentée à ce congrès.

M. le Président consulte l'assemblée sur l'intérêt qu'il pourrait y avoir à publier le Bulletin après chaque séance ou au moins tous les mois. L'assemblée décide de prendre ultérieurement une décision à ce sujet.

M. Henneguy dépose un travail de M. Guieysse « sur le système digestif de la Langouste ».

M. Dongier fait une communication sur l'extension de la méthode de mesure des inductances qu'il a décrite en 1903. On emploie le monotéléphone dans l'étude des écrans électromagnétiques, dans l'observation des cycles d'hystérésis des corps magnétiques, dans la recherche

des directions de plus grande perméabilité des corps cristallisés magnétiques.

Séance du 27 février 1904

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER

M. Anthony, au nom de M. Joubin et au sien, présente la candidature, comme membre titulaire dans la 3e section, de M. Gravier, agrégé de l'Université, docteur ès-sciences naturelles, assistant au Muséum d'histoire naturelle.

Une commission, composée de MM. Anthony, Joubin et Rabaud, est désignée pour examiner cette candidature.

M. Matignon fait une communication sur le *Néodyme*. (Le travail dont il s'agit a été fait par l'auteur en collaboration avec M. Cazes.)

M. Anthony fait une communication sur la morphogénie et l'histologie musculaire des Tridacnes.

Séance du 12 Mars 1904

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER

M. le Ministre de l'Instruction publique informe la Société qu'il vient de lui accorder sa subvention annuelle habituelle.

M. Anthony fait un rapport sur la candidature de M. Gravier et conclut à l'admission de celui-ci. Le vote sur ces conclusions est ajourné à la prochaine séance.

M. Laisant présente la candidature comme membre titulaire dans la 2e section de M. le Dr Hanriot, membre de l'académie de médecine. MM. Darzens, Matignon et Winter sont désignés pour faire un rapport sur cette candidature.

M. Darzens fait une communication sur la question « des roulements à billes ».

Séance du 26 Mars 1904

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER

Sur la proposition de M. Lesage, la Société est d'avis qu'il y aurait lieu de reviser la liste des échanges du bulletin et de l'insérer dans un prochain numéro. L'extension des échanges permettrait de répandre davantage le Bulletin, surtout à l'étranger.

M. Gravier est élu, à l'unanimité, membre titulaire dans la 3e section.

M. Anthony présente la candidature comme membre correspondant

dans la 3e section, de M. Bull, préparateur à l'Institut Marey. Une commission, composée de MM. Anthony, Noé et Rabaud est chargée de faire un rapport sur cette candidature.

M. Matignon fait un rapport favorable sur la candidature de M. Hanriot. Le vote sur ces conclusions est remis à la prochaine séance.

M. Ponsot expose ses recherches sur la règle des phases.

M. Matignon fait une communication sur la prévision des réactions chimiques en se basant sur la règle des phases et la constance de la variation d'entropie.

Le Secrétaire des séances,

A. LÉCAILLON.

Notice sur EDMOND ALIX (1823-1903)

par **Léon VAILLANT**.

Le docteur Alix (Pierre-Henri-Edmond) est né à Paris le 6 octobre 1823. Il entrait à la pension Favart en 1835 et suivait les cours du Collège Charlemagne, pour lequel cette fameuse institution était alors un des plus sérieux éléments de succès au Concours général. En août 1843, à quelques jours d'intervalle, il obtenait ses deux premiers titres universitaires de bachelier ès lettres, alors obligatoire pour toutes les carrières libérales, et de bachelier ès sciences. C'est assez dire les aptitudes au travail, dont il faisait preuve dès cette époque.

L'année suivante, il était reçu licencié ès-sciences naturelles ayant déjà commencé ses études médicales, qu'il terminait le 11 décembre 1848 en soutenant à la Faculté une thèse sur l'Ictère.

Nous le voyons en 1852 chargé du service médical de l'Ecole mutuelle de jeunes filles, rue du Renard, il était depuis un an médecin du bureau de bienfaisance du VII[e] arrondissement (aujourd'hui IV[e]), fonctions qu'il conserva jusqu'en 1855, et les services qu'il rendit lors de l'épidémie cholérique de 1854 lui firent décerner une médaille de bronze, cette même distinction lui fut encore accordée comme ayant été attaché aux ambulances municipales du IV[e] arrondissement en 1870-71. D'ailleurs, jusqu'à un âge avancé, Alix continua d'exercer avec zèle l'art médical, dans lequel son caractère réfléchi et observateur, son calme et sa bienveillance, l'aménité que respirait toute sa personne, lui assuraient le succès, si sa passion pour l'étude des sciences ne l'avait empêché de se livrer à la pratique autant qu'il eut été nécessaire pour acquérir la place que son intelligence et son savoir lui y assignaient.

D'un esprit très ouvert, il cherchait par tous les moyens à étendre ses connaissances et dans les diverses Sociétés dont il fit partie, Société philomathique de Paris, Société d'anthropologie, Société des sciences médicales, Société zoologique de France, etc , il se fit constamment remarquer par son zèle, bien que la nôtre, la première où il entra, en juillet 1864, ait toujours eu la meilleure part de ses sympathies. Au reste, rien ne lui était étranger : le droit, la linguistique, le captivaient tour à tour et jusqu'au dernier moment il ne cessa de s'en occuper, persuadé qu'aucun genre d'étude n'est étranger à cette recherche de la vérité qui ne cessa de l'attirer invinciblement. Toutefois

les sciences naturelles eurent toujours ses préférences et dans sa thèse qui semble, par son titre, exclusivement médicale, se trouvaient déjà consignées d'intéressantes remarques sur l'augmentation du volume du foie chez les animaux hibernants.

Au moment où Alix terminait ses études classiques pour entrer à l'Ecole de médecine, Ducrotay de Blainville, depuis plus de dix ans, était devenu, par la mort de Cuvier, titulaire de la chaire d'Anatomie comparée au Muséum. Ses leçons, aussi bien là qu'à la Sorbonne, jetaient sur la zoologie un éclat, dont cette science porte encore la trace. Le jeune étudiant que ses études d'anatomie humaine préparaient d'une manière toute spéciale à saisir l'importance des vues du maître, se laissa facilement entraîner à suivre ce courant. C'est à cette époque qu'il fut remarqué de Gratiolet, lequel l'introduisit dans le laboratoire du Muséum. Alors se forma entre ces deux hommes, si bien faits pour se comprendre, cette liaison intime, qui se continua, pourrait-on dire, après la mort du second, dont Alix s'efforça toujours de compléter l'œuvre, en publiant surtout plusieurs mémoires posthumes, d'un intérêt capital pour l'anatomie comparée, lesquels, sans un collaborateur, si bien identifié avec Gratiolet, prématurément ravi à la science, n'auraient, sans doute, pu voir le jour.

Elevé à semblable école, on comprend que les travaux d'Alix aient eu presqu'exclusivement pour objet l'étude de l'Anatomie comparée proprement dite, spécialement celle des Vertébrés supérieurs. Toutefois il sut aborder avec non moins de succès l'histologie et l'embryogénie, on peut citer le mémoire publié en 1865 dans le Bulletin de la Société philomathique, sous le titre d'*Essai sur la forme, la structure et le développement de la plume*, sujet d'un grand intérêt, mais d'une étude particulièrement difficile, étant donnée la complication singulière de l'organe en question. L'auteur a été conduit à décrire de nouveau la plume complète pour en mieux définir les parties composantes. Il fait cette observation nouvelle, que le duvet du fœtus au lieu de se former sur des papilles profondément enfoncées dans la peau, comme chez l'adulte, se développe librement à l'extérieur, baigné dans les eaux de l'amnios.

Ces travaux toutefois, malgré leur valeur, sont en quelque sorte accessoires et l'œuvre à laquelle Alix s'est particulièrement voué fut l'étude de l'appareil musculaire chez les Vertébrés les plus supérieurs, les Mammifères et les Oiseaux, en vue de recherches sur la locomotion, car il a toujours reconnu l'importance du côté physiologique, c'est-à-dire de l'être considéré à l'état dynamique. En poursuivant ces recherches, il a dû, sans doute, ne pas négliger les

organes passifs de la locomotion et toucher à l'ostéologie aussi bien qu'à la syndesmologie, mais il est facile de reconnaître que la myologie, d'une étude si pénible, pour ne pas dire si rebutante, est toujours le but principal qu'il veut atteindre.

Ce n'est toutefois qu'après avoir longtemps travaillé dans le laboratoire et longuement mûri son sujet, qu'il commence en 1863, il avait atteint sa quarantième année, à publier ses premières notes dans nos Bulletins, qui ont eu l'heureuse chance de recevoir la très grande majorité de ses travaux, car, dans une notice publiée en 1879 à l'appui d'une candidature à la chaire d'anatomie comparée au Muséum, devenue vacante par la mort de Paul Gervais, sur 76 notes ou mémoires énumérés, bien près des trois quarts ont paru dans notre recueil.

Ces travaux relatifs pour la presque totalité à l'étude des Vertébrés supérieurs, bien qu'on y remarque quelques notes intéressantes sur les Reptiles, les Poissons, même les Insectes (*Corethra plumicornis*), constituent un ensemble où les anatomistes peuvent trouver de précieux renseignements. Alix, ne perdant jamais de vue son sujet a su mettre à profit les nombreux et riches matériaux que pouvaient lui offrir les laboratoires du Muséum, pour disséquer quantité d'animaux rares, il suffira de citer l'Ornithorhynque, l'Échidné, le Kanguroo, le Phascolome, le Phalanger, l'Aï, la Roussette, le Serval, le Tarsier, l'Aye-aye, parmi les Mammifères, plusieurs espèces d'Autruches, le *Nothura major*, le *Rhynchotus rufescens*, ces derniers de la classe des Oiseaux, et nombre d'autres espèces dont il est inutile de grossir cette liste, suffisante pour faire comprendre l'importance de ses recherches.

Quelqu'intérêt que puissent présenter ces notes monographiques, elles n'étaient considérées par Alix que comme l'acheminement à un travail de généralisation plus élevé. « Les faits, dit-il, n'acquièrent une véritable valeur qu'en tant qu'ils parlent à l'intelligence. Il faut qu'ils deviennent des choses de l'esprit, que l'esprit s'en empare et les conçoive en lui-même comme s'il les créait. On peut dire alors véritablement qu'il les possède et la vue lumineuse qu'il en a, se manifeste par la clarté du langage qui sert à les exprimer, des figures et des dessins qui servent à les représenter. » C'est le but qu'il s'efforça d'atteindre dans une œuvre qui résume ses vues sur la motilité chez les Vertébrés supérieurs et qu'il présenta, en 1874, comme thèse inaugurale pour le doctorat ès sciences sous le titre d'*Essai sur l'appareil locomoteur des Oiseaux*.

Cet important mémoire de près de 600 pages d'impression et ac-

compagné de trois planches dessinées par l'auteur, offre le double intérêt, non seulement de nous faire connaître les recherches et les idées générales de celui-ci sur le sujet, mais encore on y trouve exposées plusieurs théories anatomiques dues à Blainville et Gratiolet, qu'on chercherait vainement dans leurs ouvrages, surtout pour le dernier d'entre eux, prodigue de sa science avec les élèves dans des leçons orales, mais qui leur a bien souvent laissé le soin de publier ses vues, toujours empreintes d'une si vive originalité.

Dès 1850 Alix avait conçu l'idée de cette étude et en avait commencé la rédaction. Forcé par les circonstances de donner à la pratique médicale une plus grande part de son temps, ce ne fut qu'en 1868 qu'il le reprit d'une manière plus sérieuse, le remaniant sans cesse, si bien que, lorsqu'il se décide à le faire paraître « le but, dit-il, fuit toujours devant moi et aujourd'hui je m'arrête sans être parvenu au point que je voulais atteindre. » Expression du sentiment de ce travailleur passionné pour lequel jamais les recherches ne paraissent suffisamment approfondies, le regard toujours fixé au delà de ce qu'il a vu et souvent peut voir.

Le Mémoire se divise en trois parties.

Dans la première est exposée la conception du type idéal de l'appareil locomoteur chez les animaux vertébrés. On y trouve d'intéressantes remarques sur l'endosquelette et l'exosquelette comparés dans les cinq classes de cet embranchement, ce qui concerne les Oiseaux étant naturellement traité beaucoup plus en détail. Dans un second chapitre sur l'appareil actif de la locomotion, est développée avec soin la conception de l'appareil musculaire, telle que l'exposait Gratiolet, lequel avait poussé très loin ces vues théoriques en ramenant à un double système de muscles, les uns superficiels, annulaires, les autres profonds, longitudinaux, tous les organes actifs de la locomotion. Enfin, sous la désignation de parties accessoires de l'appareil locomoteur, l'auteur étudie l'appareil pulmonaire, dont il fait ressortir l'importance en tant qu'utile à la station d'une manière générale et, pour les Oiseaux, rappelant ce rôle particulier de diminuer la densité du corps puisqu'il pénètre en quelque sorte tout l'organisme par les sacs aériens.

La seconde partie, la description particulière de l'appareil locomoteur des Oiseaux est plus personnelle, on y trouve successivement étudiés en deux chapitres les organes passifs et les organes actifs chez ces Vertébrés. Le squelette des Oiseaux, connu depuis longtemps dans sa disposition générale, n'avait cependant pas donné lieu à des travaux aussi nombreux que ceux faits sur ce même appareil chez les Mammifères, en ce qui concerne l'étude des groupes principaux en lesquels on

les divise, cela certainement parce que les différences morphologiques frappent moins, le type général paraissant, à première vue, très uniforme. Alix cependant s'attache à démontrer qu'il peut fournir, en particulier par l'examen de la tête, des caractères venant corroborer les divisions principales qu'admettent les zoologistes, alors que la considération exclusive du bec et des pattes, sur laquelle la classification est plutot fondée, pourrait conduire à des rapprochements fautifs.

Le second chapitre, quoique d'une importance capitale, serait difficile à analyser vu l'abondance des détails qu'il renferme, et son côté essentiellement descriptif. Après un exposé historique de la question, exposé qui se trouve comme en-tête à tous les chapitres, mais présente ici un intérêt spécial, étant donnée la compétence toute particulière de l'auteur sur ce point, les muscles sont étudiés par régions, colonne vertébrale, tête et hyoïde, membre thoracique, membre abdominal, la disposition des organes indiquée pour les Oiseaux étant chaque fois comparée à celle qu'on observe chez les Reptiles supérieurs, Crocodiliens, Chéloniens, Sauriens, avec une précision et une hauteur de vue, qui font de cette partie du travail l'une certainement des plus remarquables de l'ouvrage.

Enfin, conséquent avec son principe de ne voir dans l'étude anatomique que des prémisses pour l'étude physiologique, Alix intitule la troisième partie : Théorie de la locomotion chez les Oiseaux. Successivement il étudie la locomotion aérienne soit ramée, soit à la voile, la locomotion terrestre comprenant la station, le percher, la marche, etc., la locomotion aquatique, action du nager et du plonger, enfin pour épuiser en quelque sorte le sujet, un dernier chapitre, sur des mouvements particuliers, s'occupe du mouvement des plumes, de la langue, mentionne la voix et quelques autres faits analogues, mais on ne peut disconvenir que ces considérations semblent s'écarter un peu du but poursuivi par l'auteur, l'étude de la locomotion.

La méthode suivie par Alix dans ces recherches physiologiques est uniquement basée sur l'observation des mouvements mise en rapport avec l'étude anatomique et il arrive à montrer, suivant ses propres expressions, que « une fois déterminées *a priori* les conditions du vol, la structure des organes montre *a posteriori* comment ces conditions sont remplies; comment la nature a obtenu la solidité, la légèreté, la puissance; comment elle évite à l'Oiseau une fatigue inutile en substituant à propos aux éléments musculaires, des ligaments élastiques: comment une partie de l'aile, soumise à la nécessité mécanique, exécute des mouvements d'une manière invariable et prévue d'avance,

tandis que sous d'autres rapports on voit apparaître la variété et la liberté. »

Ce résumé rapide fera, j'espère, juger de l'importance de ce travail, auquel devront recourir ceux qui voudraient pousser plus loin ces questions, aussi bien pour rapidement et exactement connaître ce qui avait été fait sur le sujet avant cette époque, que pour étudier l'innombrable quantité de faits nouveaux qu'il renferme.

Bien que cet ouvrage reste son œuvre capitale, Alix depuis n'en continua pas moins ses recherches zoologiques, surtout en ce qui concerne l'appareil musculaire, ajoutant sans cesse aux très intéressantes découvertes déjà faites par lui. C'est en effet en 1876 qu'il publia ses études sur la myologie du *Rhynchotus*, et en 1870 et 1879 sur celle de l'Aye-Aye. Ce sujet le passionnait au point qu'il fit paraître dans nos bulletins, l'année qui suivit la soutenance de sa thèse, une classification myologique des Mammifères. Sans doute, comme il en fait lui-même la remarque, on ne peut se dissimuler ce qu'il y a d'artificiel dans cette classification « mais il n'en est pas moins curieux de voir que les divisions qu'elle permet d'établir, coïncident précisément avec les groupes naturels fondés à la fois sur les caractères extérieurs et sur tout l'ensemble de l'organisation ». Elle le conduit, par exemple, à regarder les Proboscidiens, les Insectivores, les Cheiroptères, comme groupes distincts, confirmant ainsi ce qu'avait déjà fait admettre la classification basée sur la disposition du placenta.

Ce n'est pas à ces travaux de cabinet et de laboratoire qu'Alix limitait son activité scientifique : le professorat, pour lequel il avait des aptitudes incontestables, ne l'attirait pas moins. En 1867 il faisait un cours complémentaire d'Anatomie comparée à la salle Gerson ; en 1875 et 1876 un Cours d'hygiène à la mairie du IV^e^ arrondissement. Mais ses idées générales sur la Zoologie furent surtout développées de 1876 à 1880 dans ses cours à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris, dont il resta professeur honoraire, lorsque cette Université fut transformée en Institut.

A partir de 1880, époque à laquelle Alix nous donna une note sur les connexions de la cage brachiale de la Lamproie, ses travaux deviennent plus rares. Ce n'est pas qu'il perdit complètement de vue ses études de prédilection, car, en 1895, il publiait des remarques sur la théorie du vol sauté, mais, homme de devoir avant tout, il s'était consacré aux soins de sa famille et à l'éducation d'un fils dont la première enfance avait été à un certain moment une de ses principales préoccupations.

Celui-ci toutefois devenait plus tard son soutien et il eut la satis-

faction, à la fin de sa carrière, de lui voir acquérir, quoique dans une autre voie que celle où lui-même s'était fait connaître, une situation telle qu'il avait pu le souhaiter.

Ce fut sa plus grande joie, le bonheur de ses dernières années, et heureux des soins que lui prodigua une épouse dévouée, entouré par la famille de ce fils chéri, il put voir d'un œil calme l'entrée dans cette vie d'au delà, à laquelle ses sentiments l'avaient préparé de longue date, ayant toujours vécu dans cette pensée qu'il donnait comme épigraphe à son principal travail : *Cœli enarrant gloriam Dei*.

Alix s'éteignait le 18 mars 1903.

LISTE DES OUVRAGES ET MÉMOIRES

publiés par Edmond ALIX

1848. De l'Ictère. — *Thèse pour le doctorat en médecine.*

1853. Note sur le Cancérule. — *Société des Sciences médicales.*

1859. Quelques mots sur la rotule, sur ses attaches et principalement sur un ligament tibio-rotulien interne non encore décrit. — *Moniteur des Sciences.*

Doigts surnuméraires pédiculés. — *Moniteur des Sciences.*

1862. Étude sur les effets des tractions et des torsions exercées sur la main et l'avant-bras des enfants. — *Mém. de 70 pages in-8°.*

1863. Mouvements de l'avant-bras chez les Oiseaux. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les muscles fléchisseurs des doigts des Oiseaux. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Formule du système musculaire dans la larve du *Corethra plumicornis*. — *Bulletin de la Société philomathique,*

Sur l'existence d'un muscle carré pronateur à la face dorsale de la jambe chez le Phascolome. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1864. Sur le membre abdominal des Oiseaux et principalement de l'Aigle pris pour exemple. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'absence de l'accessoire du fléchisseur perforé chez le Grand-Duc. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le bassin de la Taupe. — *Société des Sciences médicales.*

1865. Sur le muscle fléchisseur de la phalange terminale chez l'Orang-Outan. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'articulation tibio-tarsienne dans les Singes Anthropoïdes. *Bulletin de la Société philomathique.*

Essai sur la forme, la structure et le développement de la plume. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'aplatissement du nez et de l'existence de l'os intermaxillaire chez l'Homme. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Nouvelles observations sur la myologie du Tarsier. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Recherches sur l'anatomie du *Troglodytes Aubryi*, par Pierre Gratiolet et Edmond Alix. — *Nouvelles Archives du Muséum.*

1866. Sur les organes de la parturition chez les Kanguroos. —

Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences, et *Bulletin de la Société philomathique*.

1866. Sur un squelette de Chimpanzé provenant du Gabon. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les vertèbres cervicales de l'Aï. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le membre abdominal du Phalanger fuligineux. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'absence du muscle accessoire du fléchisseur perforé chez certains Oiseaux percheurs. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les fonctions de l'âme et sur le Règne humain. — *Bulletin de la Société d'anthropologie.*

1867. Notice sur les travaux anthropologiques de Gratiolet, lue dans la séance du 20 juin.— *Mémoires de la Société d'anthropologie.*

Comparaison des os et des muscles des Oiseaux avec ceux des Mammifères. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'appareil locomoteur de la Roussette d'Edwards. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'appareil locomoteur de l'Ornithorynque et de l'Echidné. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Recherches sur l'anatomie de l'Hippopotame, par Pierre Gratiolet. — Publiées par les soins du docteur Edmond Alix.

Recherches sur la disposition des lignes papillaires de la main et du pied, précédées de considérations générales sur la forme et les fonctions de ces deux organes. — *Annales des Sciences naturelles.*

1868. Sur l'anatomie de l'Autruche d'Afrique. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1869. Discussion sur le transformisme. — *Bulletin de la Société d'anthropologie.*

1870. Sur les muscles courts du pouce et du gros orteil. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1872. Sur l'existence du nerf dépresseur chez l'Hippopotame. — *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences* et *Journal de Zoologie.*

Sur la glande parotide de l'Hippopotame. — *Journal de Zoologie.*

1873. Sur le bassin du Crocodile. — *Bulletin de la Société philomathique* et *Journal de Zoologie*, 1874.

1874. Sur la détermination du muscle long supinateur chez les Oiseaux. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les rémiges des ailes des Oiseaux. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les connexions de l'os carré avec l'étrier chez les Ophidiens. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le larynx inférieur de la Cigogne. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les muscles fléchisseurs des orteils chez les Oiseaux, considérés au point de vue de la classification. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur quelques points de l'anatomie du Nandou. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les mouvements des os de l'épaule chez les Chéloniens. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le muscle quadrato-cutané des Ophidiens. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Mémoire sur l'ostéologie et la myologie du *Nothura major*. — *Journal de Zoologie.*

Essai sur l'appareil locomoteur des Oiseaux. — Thèse pour le Doctorat ès sciences naturelles.

1875. Sur les organes locomoteurs des Oiseaux au point de vue de la navigation aérienne. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur la soi-disant fenêtre ronde des Chéloniens. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le mouvement batrachoïde des Tortues. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur une classification myologique des Mammifères. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1876. Sur la myologie du *Rhynchotus rufescens*. — *Journal de Zoologie.*

Mémoire sur la myologie du Putois. — *Journal de Zoologie.*

1877. Sur la théorie de la vision. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur la conformation de l'isthme du gosier chez les Crocodiles. — *Bulletin de la Société philomathique* et *Bulletin de la Société zoologique.*

Sur le rôle des muscles intercostaux. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le cerveau à l'état fœtal. — *Bulletin de la Société d'anthropologie.*

1877. Sur les poches pharyngiennes de l'Ours malais. — *Bulletin de la Société philomathique* et *Bulletin de la Société zoologique.*

Sur la présence du muscle épiméral chez l'Ours malais. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur la fossette pharyngienne du Serval. — *Bulletin de la Société zoologique.*

Sur l'anatomie du Pélican. — *Bulletin de la Société zoologique.*

Sur le mécanisme de la mastication chez les Kanguroos. — *Bulletin de la Société zoologique.*

Ostéologie et myologie des Manchots ou Sphéniscides (en collaboration avec M. P. Gervais). — *Journal de zoologie.*

1878. Sur un nouvel anthropoïde (*Gorilla Mayema*) venant du Congo, par MM. Alix et A. Bouvier. — *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences* et *Bulletin de la Société zoologique.*

Sur l'anatomie de l'Autruche. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'anatomie de l'Aye-aye. — *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences* et *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le nerf dépresseur chez les Singes. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le nerf vertébral du Chameau. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le système nerveux de la Sarigue. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1879. Sur la glande lacrymale de l'Hippopotame. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur les organes de la parturition chez les Marsupiaux. — *Bulletin de la Société philomathique* et *Bulletin de la Société zoologique.*

Sur la fossette pharyngienne du Chien. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur l'anatomie de l'Aye-Aye (2e note). — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le plexus cervical de l'Hippopotame. — *Bulletin de la Société philomathique.*

Sur le grand sympathique de l'Hippopotame. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1880. Sur les connexions de la cage branchiale des Lamproies. — *Bulletin de la Société philomathique.*

1882. Notice sur les principaux animaux domestiques du littoral et du sud de la Tunisie.

1883. Le suicide des Scorpions. — *Revue scientifique.*

1889. Sur la classification musculaire des Vertébrés. — *Mémoires publiés à l'occasion du centenaire de la Société philomathique.*

1890. L'esprit de nos bêtes. (Baillière.)

1892. Le prétendu sens de direction chez les animaux. — *Revue scientifique.*

1895. Théorie du vol sauté, précédée d'une étude sur l'appareil locomoteur du Martinet, de l'Hirondelle et de l'Engoulevent. (Masson.)

SUR UN NOUVEAU TRANSPORT ÉLECTRIQUE DES SELS DISSOUS

découvert et étudié par M. Chassy.

Analyse de ce travail par M. Ponsot.

En 1890, M. Chassy soutenait, devant la Faculté des Sciences de Paris, la thèse suivante : *Sur un nouveau transport électrique des sels dissous.*

Toutes les expériences décrites dans le travail de M. Chassy avaient été faites au Laboratoire des Recherches physiques de la Sorbonne. Ce patient et habile expérimentateur avait été conduit par ses résultats expérimentaux à formuler des lois simples et importantes. Ces lois sont cependant restées inaperçues, et même Kohlrausch a édifié sur la conductibilité des dissolutions une théorie reposant sur des lois différentes concernant les mêmes faits expérimentaux. De plus, depuis peu, on s'occupe de la conductibilité des gaz dans des conditions spéciales. Il y a donc un réel intérêt à présenter le travail de M. Chassy et à montrer l'importance des lois qu'il a énoncées.

Électrolysons une dissolution aqueuse de sulfate de cuivre dans laquelle plongent deux lames de cuivre servant d'électrodes, la dissolution est placée dans une éprouvette à pied, l'anode est au fond de l'éprouvette, la cathode près de l'ouverture supérieure.

Au bout d'un temps suffisant, nous décantons à peu près la moitié de la solution, en évitant de produire toute agitation qui mélangerait les couches successives de la partie non décantée.

Nous constatons : 1° Que l'augmentation de poids p de la cathode, est égale à la diminution de poids de l'anode ; 2° que la partie de la solution décantée donne par l'analyse e grammes d'eau et s_1 grammes de sulfate de cuivre, tandis que la solution originelle renfermait pour e grammes d'eau s grammes de sel, $s > s_1$; d'où conclusion : elle a perdu $(s - s_1)$ grammes de sel, que nous retrouvons au contraire en excès dans l'autre partie de la solution baignant l'anode.

Recommençons l'expérience, dans les mêmes conditions, avec un même poids de cuivre déposé, nous constaterons que la perte de sel $(s - s_1)$ invariable est localisée dans une partie de la solution avoisinant la cathode (à 2 ou 3 centimètres de distance) ; que le gain $s - s_1$

est aussi localisé dans le voisinage de l'anode (pourvu toutefois que l'expérience ne dure pas trop longtemps) ; et qu'il y a une région intermédiaire où la concentration de la dissolution n'a pas changé.

L'ensemble des changements survenus dans l'électrolyte *équivaut* à un transport, à travers cette région intermédiaire ; on peut se le représenter de la manière suivante imaginée par Hittorf.

Lorsque 1 équivalent de cuivre ou $31^{gr},5$ de cuivre, a été déposé sur la cathode, la solution cathodique n'accuse qu'une perte de sulfate de cuivre égale à une fraction n d'équivalent du sulfate de cuivre, contenant n équivalent de Cu et n équivalent de SO^4, il a donc fallu que $1 - n$ équivalent de Cu arrive dans la région cathodique.

Le dépôt de 1 équivalent de Cu sur la cathode a rendu libre 1 équivalent de SO^4 dont une partie $1 - u$ s'unit à la quantité équivalente de Cu apportée ; l'autre partie, n est transportée dans la région anodique.

Ici 1 équivalent de Cu de l'anode est entré dans la dissolution ; on a vu que la fraction $1 - n$ avait été transportée vers la cathode ; la fraction n restant s'unit à n SO^4 venu de la cathode.

Les nombres n et $1 - n$ ont été appelés par Hittorf *facteurs de transport*.

n pour l'anion SO^4.

$1 - n$ pour le cathion Cu.

A travers une section quelconque de la région intermédiaire sont passés en même temps :

n équivalent de SO^4 allant vers l'anode.

$1 - n$ équivalent de Cu allant vers la cathode.

Chacun de ces ions a donc dans la région intermédiaire une vitesse constante, pour une même intensité du courant ; comme les ions Cu et SO^4 en mouvement sont en nombre égal, ils ont donc des vitesses différentes u et v telles que

$$\frac{u}{v} = \frac{n}{1 - n}$$

Les facteurs de transports varient avec la température ; ils varient aussi avec la dilution, surtout dans les sels à ions plurivalents et d'autant plus que le sel est plus fortement hydrolysé.

Par un raisonnement, fondé sur plusieurs hypothèses, Kohlrausch a établi des relations entre la conductibilité moléculaire et les vitesses de transport u et v.

M. Chassy a d'abord étudié un cas plus complexe que celui que j'ai donné comme exemple.

Le liquide électrolyte est, par exemple, une solution de sulfate de cuivre qui contient encore d'autres sels tels que des sulfates de zinc, de sodium, de magnésium ; les deux électrodes sont en cuivre. Les mêmes changements que précédemment se produisent aux électrodes pendant le passage du courant ; par conséquent on peut admettre que le sulfate de cuivre est seul électrolysé : les autres sels sont appelés *non électrolysés*.

Après le passage du courant, on peut constater par l'analyse *qu'il y a eu transport de chacun des sels non électrolysés :* leur concentration n'ayant varié que dans le voisinage des électrodes.

Le transport des sels non électrolysés obéit aux lois suivantes :

1° Il se fait toujours dans le sens du courant ;

2° Il est proportionnel à la quantité d'électricité qui a traversé l'électrolyte, quelle que soit l'intensité du courant ;

3° Il est indépendant de la quantité de liquide soumis à l'électrolyse, de la forme et de la grandeur des électrodes ;

4° Il est le même dans une solution et celles qu'on obtient avec cette solution par une dilution quelconque ;

5° Il est proportionnel, pour chaque sel non électrolysé, à la fraction du poids du mélange de tous les sels dissous, constitué par ce sel ;

6° Les coefficients de proportionnalité du transport des sels non électrolysés sont indépendants de la nature du sel électrolysé et dans le même rapport que leurs poids moléculaires à l'état anhydre.

Les lois quantitatives du transport sont représentées par les relations suivantes :

Soit une solution contenant :

E grammes d'eau
p_e — de sulfate de cuivre
p_1 — de sulfate de zinc
p_2 — de sulfate de soude

q_e, q_1, q_2, étant les poids de ces sels transportés correspondant au dépôt de 1 équivalent ou $31^{gr},50$ de cuivre sur la cathode ; on a

$$(1) \qquad q_1 = A_1 \frac{p_1}{p_e + p_1 + p_2}$$

$$(2) \qquad q_2 = A_2 \frac{p_2}{p_e + p_1 + p_2}$$

$$(3) \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{(Z_n SO^4)_g}{(N_a^2 SO^4)_g}$$

(4) ou $\frac{A_1}{(Zn SO^4)_g} = \frac{10^{gr},23}{161^{gr}} = 0,0635$

Cette dernière relation est la moins rigoureuse. L'auteur prend comme moyenne du rapport ci-dessus A : M = 0,0636.

Ces relations ont été vérifiées lorsque la solution électrolytique renfermait jusqu'à 8 sels dissous et de même acide. M. Chassy donne un exemple où les acides sont différents et où il se produit une double décomposition entre deux sels dissous, seulement il vérifie ses relations pour le transport d'un sel qui ne prend pas part à cette double décomposition. Quant au transport des sels entre lesquels s'est produite une action chimique, M. Chassy ne l'a pas étudié : cela l'aurait entraîné trop loin.

Transport des sels électrolysés.

Dans une solution de sulfate de cuivre et de sulfate de zinc, avec deux électrodes de cuivre, on observe le transport du sulfate de zinc, considéré comme non électrolysé et on détermine expérimentalement le coefficient de transport A défini d'après les relations précédentes.

Quand la solution électrolytique contient du sulfate de zinc et du sulfate de potasse, avec deux électrodes de zinc, le sulfate de zinc est électrolysé.

Soit, dans un poids E d'eau, p_1 de sulfate de potasse, p_e de sulfate de zinc, on cherche le transport q_e du sulfate de zinc.

$\frac{p_e}{E}$ étant constant, on observe que, si p_1 varie il en est de même de q_e et on remarque que $q_e - A\frac{p_e}{p_e + p_1}$ au lieu d'être nul est constant $= q'_e$; d'où la relation :

$$q_e = q'_e + A\frac{p_e}{p_e + p_1}$$

où q'_e ne dépend que de $\frac{p_e}{E}$ et non de p_1 c'est-à-dire qu'il reste le même si $p_1 = 0$, alors qu'on a :

$$q_e = q'_e + A.$$

Cas de 2 sels électrolysés mélangés ou non à d'autres sels non électrolysés.

En employant des mélanges de sels, tels qu'il se dépose sur la cathode, deux métaux à la fois, q'_e est proportionnel au poids du métal déposé correspondant, c'est-à-dire à la quantité d'électricité qui au-

rait été nécessaire pour déposer ce poids de métal d'une solution pure du sel considéré ; *ex*, un mélange des sels suivants : azotates de baryte, de potasse, d'argent et de cuivre ; la cathode était en platine afin de permettre l'analyse des dépôts.

L'auteur en tire une application intéressante, lorsqu'il n'y a pas de dépôt métallique, le transport d'un des sels dissous étant déterminé expérimentalement, permet, selon qu'il est réglé ou non par les relations précédentes, de dire si un sel est non électrolysé, seul électrolysé ou s'il y a plusieurs sels électrolysés simultanément.

Enfin, soit un tube en U contenant dans sa courbure une solution de sulfate de zinc et, au-dessus, dans chaque branche une solution de sulfate de cuivre avec électrodes en cuivre : M. Chassy prouve expérimentalement que le transport dans le sulfate de zinc se fait comme s'il était électrolysé entre deux électrodes de zinc.

Si on ajoute à cette solution de sulfate de zinc du sulfate de cuivre en quantité croissante, sa loi de transport est d'abord celle d'un sel électrolysé en présence d'un autre sel électrolysé, puis enfin celle d'un sel non électrolysé ; c'est-à-dire que le transport étant rapporté à 31gr,5 de cuivre déposé à la cathode, dans la relation

$$q_e = q'_e + A\frac{p_e}{p_e + p_1} \tag{5}$$

le terme q'_e décroît de sa valeur initiale, celle pour laquelle $p_1 = 0$ jusqu'à une valeur nulle, obtenue alors que le poids du sel de cuivre est relativement petit par rapport à celui du sulfate de zinc $\frac{1}{50}$ par exemple.

M. Chassy a fait une étude à part du transport des sels ammoniacaux. Non électrolysés et en présence d'un sel métallique électrolysé, la loi de leur transport est

$$q = A\frac{p_a}{Cp_a + p_e} \tag{7}$$

où A et c sont deux constantes indépendantes du sel électrolysé.

Quant au sel métallique électrolysé sa loi de transport est

$$q_e = q'_e + A_c\frac{p_e}{p_e + Cp_a} \tag{8}$$

ces relations ne diffèrent des relations analogues et précédentes que par le coefficient c qui est indépendant de la nature du sel ammoniacal et égal à 0,781.

Les coefficients A, pour les sels ammoniacaux, sont proportionnels à leurs poids moléculaires M, mais $\frac{A}{M} = 0{,}033$; il n'a donc pas

la même valeur que pour les sels métalliques. Je remarquerai que la relation donnant le transport du sel ammoniacal peut-être écrite :

$$(9) \qquad q = A' \frac{Cp_a}{Cp_a + p_e}$$

alors $\frac{A'}{M}$ a une valeur moyenne de $\frac{0{,}033}{0{,}781} = 0{,}042$.

Enfin M. Chassy a étudié le transport des acides : on vient de voir que les formules pour les sels ammoniacaux différaient de celles des sels métalliques parce que le poids p_a du sel ammoniacal doit être multiplié par un facteur constant c ; pour les acides, p doit être remplacé par une formule algébrique empirique de la forme

$$cp\,(1 + c'p)$$

ou même encore plus complexe que je représente par R alors :

$$(10) \qquad q_a = A_a \frac{R}{R + p_1 + p_2 \cdots + p_e}$$

$$(11) \qquad q_e = q'_e + A_e \frac{p_e}{R + p_1 + p_2 \cdots + p_e}$$

Il n'y a plus proportionnalité entre les poids moléculaires des acides et leur coefficient A correspondant.

M. Chassy termine sa thèse en énonçant l'influence de substances telles que l'alcool, la glycérine ajoutées à l'eau.

Leur transport est tout à fait nul.

Le transport des sels non électrolysés ne dépend pas de la fraction du poids de la dissolution formée par ces corps. Quand on les ajoute à une solution aqueuse, l'expérience montre qu'ils font varier le transport du sel électrolysé, comme si on faisait seulement varier la quantité d'eau.

Les lois du transport sont les mêmes dans l'alcool absolu que dans l'eau.

Il est regrettable que l'auteur n'ait pas appuyé ces dernières conclusions par des résulats numériques, leur importance étant capitale si on veut donner une représentation aussi simple qu'exacte du phénomène de transport.

Toutefois la première de ces conclusions a été vérifiée récemment en Hollande par Lobry de Bruyn : le dissolvant d'un sel électrolysé étant un mélange d'eau et d'alcool méthylique, cet expérimentateur a vérifié que les masses de ces deux corps existant dans un volume quelconque restaient dans un rapport invariable à la cathode et à l'anode.

On comprend alors que le phénomène de transport des sels soit soumis à des lois qualitatives indépendantes de la nature du dissolvant. Ce qui serait intéressant à connaître, et ce serait ainsi continuer le travail de M. Chassy, ce serait de savoir si les coefficients caractéristiques du transport sont absolument indépendants du dissolvant.

Par exemple, on a vu que la loi du transport d'un sel électrolysé est contenue dans la relation.

$$(12) \qquad q_e = q'_e + A_e \frac{p_e}{p_e + \Sigma p}$$

Σp étant le total du poids des sels non électrolysés q'_e est indépendant de Σp de telle sorte que si $\Sigma p = 0$ on a

$$(13) \qquad q_e = q'_e + A_e.$$

Il semble naturel de penser, et c'est là l'hypothèse formulée par M. Chassy, que la partie A_e du sel électrolysé est transportée par un processus analogue à celui qui produit le transport des sels non électrolysés, tandis que le transport de la partie q' peut être considéré comme résultant du mouvement séparé des deux sortes d'ions tel qu'il a été représenté par Hittorf.

On voit combien il serait utile de connaître ce coefficient A_e dans les différents dissolvants.

Quoi qu'il en soit, l'hypothèse d'Hittorf sur la cause du transport des sels dissous ne permettait pas de prévoir les résultats expérimentaux de M. Chassy. On peut dire que si ces résultats ne détruisent pas entièrement cette hypothèse, ils montrent du moins qu'elle est incomplète. Et on conclut que la plupart des relations où entre les coefficients de transport d'Hittorf, reposant sur une base aussi peu solide, ne doivent être accueillies qu'avec défiance.

La conclusion donnée par M. Chassy sur le transport des sels électrolysés étant ainsi d'une importance capitale pour la théorie des phénomènes électrolytiques, je crois bon de l'appuyer par de nouvelles considérations, en utilisant les matériaux mêmes du travail de M. Chassy.

Sur une loi expérimentale du transport électrique des sels métalliques dissous [1].

On a vu que M. Chassy avait établi et vérifié les relations suivantes, où je représente par Σp le poids total de tous les sels dissous :

$$(1) \qquad q_1 = A_1 \frac{p'}{\Sigma p}$$

1. Note de M. A. Ponsot présentée à l'Académie des Sciences le 25 janvier, par M. Lippmann.

(2) $$q_2 = A_2 \overline{d\Sigma}$$

(3) $$q_e = q'_e + A_e \frac{p_e}{\Sigma p}$$

(4) $$\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_e}{M_2} = \frac{A_e}{M_e} = 0{,}0636$$

De ces relations je tire facilement :

(5) $$\frac{q_1}{M_1} = 0{,}0636 \frac{p_1}{\Sigma p}$$

(6) $$\frac{q_2}{M_2} = 0{,}0636 \frac{p_2}{\Sigma p}$$

(7) $$\frac{q_e}{M_e} \frac{q'_e}{M_e} + 0{,}0636 \frac{p_e}{\Sigma p}$$

(8) $$\frac{d_2}{\Sigma} \frac{q}{M} = \frac{q'_e}{M_e} +,0{,}0636.$$

Or, $\frac{q'_e}{M_e}$ ne dépend, comme l'a montré M. Chassy, que du rapport $\frac{p_e}{E}$ qui définit la concentration du sel électrolysé, si ce rapport reste constant, $\Sigma \frac{q}{M}$ reste invariable, d'où la loi suivante :

Dans l'électrolyse d'une dissolution d'un mélange de sels d'un même acide, dont l'un est électrolysé, le nombre total des molécules transportées ne dépend que de la nature et de la concentration de ce sel électrolysé. Il est indépendant de la présence des sels non électrolysés et de leur concentration.

Lorsqu'il y a deux sels électrolysés simultanément, p_x et p_e étant leurs poids dans la solution, si α est la fraction d'équivalent du premier sel qui est électrolysée en même temps que $1 - \alpha$ d'équivalent du deuxième sel, q_e et q_x étant les transports mesurés.

q_e étant la valeur du premier terme de la relation (3) convenant au premier sel quand il est seul électrolysé dans une même quantité de dissolvant.

q'_x étant défini de la même manière, outre les relations (5) et (6) on a :

Ici encore les résultats de M. Chassy conduisent à la loi suivante :

(9) $$\frac{q_e}{M_e} = \frac{q'_e}{M_e} \alpha + 0{,}0636 \frac{p_x}{\Sigma p}$$

$$(10) \qquad \frac{q_x}{M_x} = \frac{q'_x}{M_e}(1-\alpha) + 0{,}0636\,\frac{p_x}{\Sigma p}$$

$$(11) \qquad \Sigma\frac{q}{M} = \frac{q'_e}{M_e}\alpha + \frac{q'_x}{M_x}(1-\alpha) + 0{,}0636.$$

Quand il y a deux sels électrolysés, le nombre total de molécules transportées dépend de la nature de ces sels, de leur concentration, de la fraction d'équivalent électrolysée de chacun d'eux. Il ne dépend pas des sels non électrolysés ajoutés aux deux précédents.

Revenons au cas d'un sel électrolysé (8).

E et p_e étant constants, on a vu que $\Sigma\frac{q}{M}$ est constant, indépendant des sels non électrolysés : il y a lieu d'insister sur ce fait que les relations ayant servi à établir cette loi ont été vérifiées par M. Chassy, Σp ayant varié dans des limites très étendues, et le nombre des sels non électrolysés ayant porté jusqu'à *sept*.

Or, lorsque p_e est petit par rapport à Σp, les 0,0636 molécules-grammes transportées sont presque entièrement constituées par des molécules des sels non électrolysés ; le transport du sel électrolysé étant à peu près représenté par le terme $q'_e : M_e$.

Lorsque Σp diminue, une partie croissante des 0,0636 molécules est constituée par des molécules du sel électrolysé et lorsque $\Sigma p = p_e$ tout le transport est évidemment constitué par des molécules du sel électrolysé.

Mais, comme dans tous ces cas, $\Sigma\frac{q}{M}$ est constant, il paraît naturel d'admettre que les molécules du sel électrolysé qui remplacent, dans le transport, et en nombre égal, les molécules des sels non électrolysés, *sont transportées de la même manière que ces dernières c'est-à-dire sans avoir subi la dissociation électrolytique.*

Quant au terme $\frac{q'_e}{M_e}$ il représenterait peut-être un transport dû au mouvement des ions, comme dans l'hypothèse d'Hittorf.

Ces conclusions sont celles de M. Chassy, mais il me semble qu'elles sont mieux justifiées, par des considérations moléculaires que j'ai introduites.

En les admettant on arriverait aux conséquences suivantes :

1° Lorsque 1 équivalent de cuivre s'est déposé à la cathode dans une solution de sulfate de cuivre électrolysée il y a eu 1 équivalent de sulfate de cuivre électrolysé, $1 - n'$ équivalents de cuivre ont été

apportés à la cathode par le mouvement des ions et 0.0636×2 par un transport direct.

$$1 - n' + 0{,}0636 \times 2 = n.$$

Sur 1 équivalent de SO^4 rendu libre à la cathode n' ont été transportés à l'anode ; mais le transport direct en a enlevé $0{,}0636 \times 2$: d'où la résultante du transport

$$n = n' - 0{,}0636 \times 2.$$

Le transport de l'anion dans la nouvelle hypothèse serait supérieur à son transport dans l'hypothèse d'Hittorf.

2° Les hypothèses sur lesquelles Kohlrausch base son raisonnement pour relier la conductibilité moléculaire d'une dissolution aux nombres de transport des ions devraient être abandonnées ou tout au moins modifiées.

En terminant, je ferai remarquer que la relation $\frac{A}{M} = 0{,}0636$ peut être utilisée pour la détermination très approximative du poids moléculaire M d'un sel métallique ; il suffira de déterminer A expérimentalement.

A. Ponsot.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A COEFFICIENTS CONSTANTS OU VARIABLES DONT L'ÉQUATION DÉRIVÉE EST RÉGULIÈRE

par M. **Désiré ANDRÉ.**

L'objet de la présente Note est de compléter les détails que nous avons donnés, dans deux Mémoires déjà anciens [1], sur la théorie et l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, à coefficients constants ou variables, dont l'équation dérivée est régulière.

Soit

$$A_0F(n)Y_0^{(n)} + A_1F(n-1)Y_0^{(n-1)} + \cdots + A_kF(n-k)Y_0^{(n-k)} = 0,$$

cette équation dérivée régulière. Dans cette équation, on le sait, les coefficients A, ainsi que l'indice k, sont indépendants de n, c'est-à-dire constants; $F(n)$ est une fonction quelconque de n; et $Y_0^{(n)}$, $Y_0^{(n-1)}$, $Y_0^{(n-2)}$, ... représentent, pour $x = 0$, les valeurs numériques des dérivées d'ordre n, $n-1$, $n-2$, ... de la fonction Y de la seule variable x.

Cette fonction Y est, d'ailleurs, celle qui figure dans l'équation différentielle que l'on considère, de telle façon que l'intégration de cette équation différentielle revient simplement à la détermination de cette fonction.

Or, dans le premier [2] de nos deux Mémoires, nous avons montré que cette fonction Y est représentée par une série entière, ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, et dont le terme général U_n est défini par l'égalité

$$U_n = \frac{u_n}{n!\,F(n)}\,x^n,$$

dans laquelle le numérateur u_n désigne le terme général d'une série récurrente proprement dite, qui admet l'équation génératrice, déduite immédiatement de l'équation dérivée régulière,

$$A_0z^k + A_1z^{k-1} + A_2z^{k-2} + \cdots + A_k = 0.$$

Il s'ensuivait que l'intégration, sous forme explicite et finie,

1. Journal de Mathématiques, années 1880, 1881.
2. Journal de Mathématiques, année 1880, page 27.

de l'équation différentielle considérée se ramenait à ces deux opérations :

1° résolution de l'équation algébrique en z qu'on vient d'écrire et que nous avons nommée équation caractéristique ;

2° sommation, sous forme explicite et finie, de la série entière, ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de x, dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{u_n}{n\,!\,F(n)}\,x^n.$$

Telles étaient les deux opérations auxquelles nous ramenions l'intégration proposée, opérations qui dépendaient en quelque sorte l'une de l'autre, puisque u_n, qui entrait dans la seconde, était le terme général d'une série récurrente proprement dite, admettant, pour équation génératrice, l'équation en z dont la résolution constitue la première.

Depuis lors, nous avons résolu [1], sur les séries ordonnées, ce problème très général :

Étant donnée la somme d'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x, trouver celle de la série qu'on obtient en multipliant tous les termes de la série proposée par les termes de même rang d'une série récurrente proprement dite quelconque.

Ce problème une fois résolu, la sommation de la série qu'il s'agissait de sommer se ramène à celle de la série, beaucoup plus simple, qu'on obtient en remplaçant par l'unité, dans le terme général donné plus haut, le numérateur u_n. En conséquence, l'intégration de notre équation différentielle se ramène finalement à ces deux opérations :

1° résolution de l'équation caractéristique

$$A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_2 z^{k-2} + \cdots + A_k = 0;$$

2° sommation de la série ordonnée dont le terme général V_n est défini par l'égalité

$$V_n = \frac{1}{n\,!\,F(n)}\,x^n.$$

De ces deux opérations, la première demeure ce qu'elle était dans nos deux Mémoires ; mais la seconde devient beaucoup plus simple. En outre, cette seconde opération ne dépend plus de la première,

1. Solution d'un problème général sur les séries (Comptes Rendus, année 1881, page 697). — Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable (Annales de l'Ecole Normale, année 1883, page 287.)

puisque le numérateur u_n a cessé de figurer dans le terme général de la série qu'il s'agit de sommer.

Nous devons ajouter que la nature de l'intégrale cherchée ne dépend que de la somme de la série ainsi simplifiée. Si nous représentons cette somme par $\Phi(x)$, l'intégrale cherchée est une fonction rationnelle, entière et linéaire, de la somme $\Phi(x)$ et de ses dérivées successives, multipliées, s'il le faut, par des polynomes entiers en x.

Quoi qu'il en soit, pour bien faire comprendre la simplification que nous venons d'indiquer, nous allons reprendre les équations différentielles données comme exemples dans nos deux précédents Mémoires, et dire, pour chacune d'elles, à quelle résolution d'équation et à quelle sommation de série s'en ramène l'intégration.

Pour intégrer l'équation différentielle [1]

$$(x^4 + x^3 + x^2)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x^3 + x^2 - 2x)\frac{dY}{dx} + (2x^2 - x + 2)Y = 0,$$

il nous suffit de résoudre l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

et de sommer la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Pour intégrer l'équation différentielle [2]

$$x^2\frac{d^2Y}{dx^2} - 2x(x+1)\frac{dY}{dx} + 2(x+1)Y = 0,$$

il nous suffit de résoudre l'équation

$$z - 2 = 0,$$

et de sommer la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Pour intégrer l'équation différentielle [3]

$$(x^3 - 7x^2 + 12x)\frac{d^3Y}{dx^3} + (5x^2 - 28x + 36)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x - 14)\frac{dY}{dx} = 0,$$

il suffit de résoudre l'équation

$$12z^2 - 7z + 1 = 0,$$

et de sommer la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

1. Journal de Mathématiques, année 1880, page 38.
2. Journal de Mathématiques, année 1880, page 42.
3. Journal de mathématiques, année 1880, page 45.

Enfin, pour intégrer l'équation différentielle [1]

$$(2x^2-3x+1)\frac{d^2Y}{dx^2}+\left(\frac{16}{3}x-4\right)\frac{dY}{dx}+\frac{8}{9}Y=0,$$

il suffit de résoudre l'équation

$$z^2-3z+2=0,$$

et de sommer la série

$$\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\frac{1.4.7}{3\,6.9}x^3+\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4+\cdots$$

La résolution des quatre équations en z qui figurent dans ces exemples s'effectue immédiatement; il en est de même de la sommation des quatre séries qui leur sont associées; et, par suite, de l'intégration des quatre équations différentielles considérées.

1. Journal de mathématiques, année 1881, page 283.

Mémoire de Géométrie :

THÉORIE DES DIVISIONS HÉTÉROGRAPHIQUES THÉORIE DES COURBES ALGÉBRIQUES

Par M. Louis Berdon.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE

Nous nous sommes proposé dans ce Mémoire de donner, sous une forme nette et précise, une théorie des courbes algébriques. Donner une théorie des courbes algébriques d'ordre n, aussi complète que celle du second ordre que l'on donne en « Mathématiques spéciales » tel est notre but.

Ce travail est donc la suite et le complément naturel du traité de Géométrie supérieure de Chasles. Il est composé dans le même esprit et suivant la même méthode.

Je crois que tous les résultats que je donne sont nouveaux.

L'espace à notre disposition ne nous permettant pas de donner tous les développements que demande le sujet, nous condensons notre travail autant que possible.

Nous divisons ce travail en deux parties : la première étant la base de la seconde.

1re Partie : Théorie des Divisions Hétérographiques.

2e Partie : Théorie des Courbes Algébriques.

Ire PARTIE

Théorie des Divisions Hétérographiques, Algébriques.

Introduction

On sait qu'on appelle Division de points une suite quelconque de points situés sur une ligne droite.

Cette droite est la base de la Division.

Quand on a deux divisions de points, sur une même droite ou sur deux droites différentes et telles qu'à un point de l'une des divisions

corresponde un certain nombre de points dans l'autre, on dit que les deux Divisions sont correspondantes.

Les points qui se correspondent sont appelés Points correspondants.

Soient x, x' les abscisses de deux points correspondants. Il existera entre x et x' une certaine relation.

$$y(x, x') = 0 \qquad (1)$$

dont la forme dépendra de la nature de la correspondance des deux divisions.

Si l'on donne à x une certaine valeur, la relation (1) deviendra une équation en x' dont les racines détermineront tous les points correspondants de celui dont l'abscisse est x.

Nous dirons que les points d'abscisse x appartiennent à la première Division, ceux d'abscisse x' à la seconde.

Quand les divisions sont à bases différentes, il est évident que chaque base a son origine des abscisses.

Nous nous mettons toujours dans ce cas, excepté quand nous dirons le contraire.

La relation (1) détermine les points à l'aide d'abscisses. Nous l'appelerons l'Équation Fondamentale des divisions.

Quand l'équation

$$y(xx') = 0$$

est algébrique et rationnelle en x et x',

Nous dirons que les divisions qu'elle représente sont des Divisions Hétérographiques correspondantes algébriques, ou simplement algébriques.

Nous ne considérons dans ce travail que ces dernières.

Notations et Définitions.

Soit a un point quelconque de la 1re division; à ce point correspondent dans la 2e un certain nombre, soit n', de points. Nous représenterons ces points par

$$a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots, \quad a'_i, \quad \ldots, \quad a'_{n'}.$$

De même à un point b' on fera correspondre les n points $b_1 \ldots, b_n$; si à un point de la 2e division correspondent n de la 1re.

Nous dirons que les nombres n et n' sont les ordres ou les indices de la correspondance des deux divisions.

Dans ce Mémoire, nous disons aussi que n et n' sont les ordres des divisions quoique l'expression soit inexacte.

Maintenant:

A chaque point a_i par exemple correspondront n' points que nous représenterons par

$$a_i 1, \quad a_i' 2, \quad \ldots \quad a_i' j, \quad \ldots \quad a_i n'.$$

ou simplement par

$$\overset{i=n'}{\underset{j=1}{|}} a_i' j$$

Enfin l'ensemble des points

$$a \overset{i=n'}{\underset{i=1}{|}} a_i'$$

formeront ce que nous appellerons une correspondance complète de la 2e division et du 1er degré.

L'ensemble des points

$$a \overset{i=n'}{\underset{i=1}{|}} a_i' \quad \text{et de tous les points}$$

$$\overset{j=n}{\underset{=1}{|}} \overset{i=n}{\underset{i=1}{|}} a_i j$$

formeront ce que nous appellerons une correspondance complète du second degré. On pourrait continuer ainsi.

Nous appellerons l'ensemble des points $a \mid a_i' \mid$ c'est-à-dire ceux d'une correspondance complète de la 2e division : celle du point a de la 1re.

De même soit b' un point de la seconde division. Les correspondants dans la première seront $\overset{i=n}{\underset{i=1}{|}} b_i$, et les correspondants de ceux-ci dans la seconde $\overset{i=n'}{\underset{i=1}{|}} \overset{j=n}{\underset{j=1}{|}} b_i' j$.

ÉTUDE DES DIVISIONS ALGÉBRIQUES

DU NOMBRE DE COUPLES DE POINTS CORRESPONDANTS QUI DÉTERMINE DEUX DIVISIONS

Soit

$$y(xx') = 0$$

l'équation fondamentale.

Mettons-la sous la forme

$$x^n \varphi_0(x') + x^{n-1} \varphi_1(x') + \cdots + x \varphi_{n-1}(x') + \varphi_n(x') = 0$$

$\varphi(x')$ représentant une fonction algébrique de degré n'. On voit alors que le nombre de termes de l'équation fondamentale sera

$$(n+1)(n'+1).$$

Le nombre de couples de points correspondants qui déterminent deux divisions algébriques est donc

$$nn' + n + n'.$$

Quand on se donne ces $nn' + n + n'$ couples de points on pourra déterminer l'équation fondamentale, sous forme de déterminant.

Des Points I et des Points J'.

Reprenons l'équation fondamentale sous la forme

$$x^n\varphi_0(x') + \cdots + \varphi_n(x') = 0.$$

Au point à l'infini de la 1re division correspondent dans la seconde n' points dont les abscisses seront données par

$$\varphi_0(x') = 0.$$

Nous représenterons ces points par

$$J'_1, \quad J'_2, \quad \ldots, \quad J'_i, \quad \ldots, \quad J'_{n'}.$$

On peut aussi mettre l'équation fondamentale sous la forme

$$x'^{n'}\psi_0(x) + x'^{n-1}\psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) = 0$$

et au point à l'infini de la seconde correspondront n points de la 1re dont les abscisses seront données par

$$\psi_0(x) = 0$$

et que nous représenterons par

$$I_1 . \ I_2 \ldots\ldots . \ I_n$$

Des différentes manières de représenter les divisions algébriques.

Toute équation équivalente à l'équation fondamentale pourra représenter les deux divisions.

De sorte que pour obtenir les différentes équations pouvant représenter les divisions il suffira d'introduire dans l'équation fondamentale de nouveaux éléments.

Ces équations sont donc en nombre infini et pourront toutes être obtenues à l'aide de l'équation fondamentale.

A chacune d'elles correspondent des propriétés géométriques des divisions. On comprend donc l'importance de ces équations et l'importance de pouvoir les former facilement.

Nous les classerons de la manière suivante.

Toutes ces équations renferment des coefficients. Dans les unes tous ces coefficients sont indépendants les uns des autres, déterminés tous pour des divisions données, ou quelques-uns arbitraires.

Dans d'autres les coefficients, tout en étant déterminés ne sont pas indépendants mais liés entre eux par des relations.

Nous aurons donc trois familles d'équations.

1re famille d'équations.

Celles dans lesquelles les coefficients sont déterminés mais indépendants.

2e famille d'équations.

Celles dans lesquelles les coefficients sont déterminés mais dépendants.

3e famille d'équations.

Celles dans lesquelles les coefficients sont indéterminés.

Il ne peut pas y avoir de 4e famille, car cette famille serait celle à coefficients dépendants et arbitraires : or donnons aux coefficients arbitraires des valeurs quelconques : les autres fonctions de ces arbitraires et étant toujours au nombre de $nn' + n + n'$ seront également fonction des abscisses des $nn' + n + n'$ couples de points correspondants qui déterminent les divisions : or ces derniers doivent rester arbitraires pour avoir le cas général : il ne saurait donc y avoir de relations entre les coefficients déterminés en fonction de ceux qui sont arbitraires.

Pour trouver toutes ces équations on peut partir comme nous l'avons dit de l'équation fondamentale. Les éléments nouveaux qu'il faut y introduire sont des points.

Or quand deux points a et b sont donnés ils déterminent un segment géométrique ab.

Si a et b étaient les abscisses de ces points ce segment serait représenté par la différence $b - a$.

Toutes ces équations pourront donc s'écrire de deux manières différentes : algébriquement ou géométriquement. Comme chacune d'elles est ou toute algébrique ou toute géométrique il n'y aura aucun inconvénient de représenter l'abscisse d'un point a par la même lettre a. On pourra de la sorte passer facilement des unes aux autres. C'est ce que nous ferons.

Nous allons maintenant établir les équations des différentes familles.

ÉQUATIONS DE LA 1re FAMILLE

1° ÉQUATION GÉNÉRALE DE CETTE FAMILLE

Soit $$F(xx') = 0$$
l'équation fondamentale.

Soient $a, b, \ldots l$ les abscisses de n points arbitraires de la 1re di-

vision et

$$\theta_1(x) = 0$$

l'équation qui donne ces abscisses.

Soient de même α', β', ... λ' les abscisses de n' points de la seconde et

$$\theta_2(x') = 0$$

l'équation dont les racines sont ces quantités α', β', ... λ'. Puis considérons la fonction

$$\frac{F(xx')}{\theta_1(x)\theta_2(x')}$$

elle est rationnelle en x. Décomposons-là en fractions simples, nous aurons

$$\frac{F(xx')}{\theta_1(x)\theta_2(x')} = \frac{\varphi_0(x')}{\theta_2(x')} + \sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{\theta_1'(a)} \cdot \frac{F(ax')}{\theta_2(x')} \qquad (i)$$

$\varphi_0(x')$ est le coefficient de x^n dans $F(xx')$, celui de θ étant l'unité.

On peut de même décomposer les deux fractions $\frac{\varphi_0}{\theta_2}$, $\frac{F(ax')}{\theta_2}$ nous aurons

$$\frac{\varphi_0(x')}{\theta_2(x')} = 1 + \sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{x'-\alpha'} \cdot \frac{\varphi_0(\alpha')}{\theta_2'(\alpha')}$$

$$\frac{F(ax')}{\theta_2(x')} = \Psi_0(a) + \sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{x'-\alpha'} \cdot \frac{F(a\alpha')}{\theta_2'(\alpha')}$$

Ψ_0 est le coefficient de $x'^{n'}$ dans $F(xx')$. Portant dans (i) il vient :

$$\frac{F(xx')}{\theta_1(x).\theta_2(x')} = 1 + \sum \frac{1}{x-a} \cdot \frac{\Psi_0(a)}{\theta_1'(a)} + \sum \frac{1}{x'-\alpha'} \cdot \frac{\varphi_0(\alpha')}{\theta_2'(\alpha')}$$

$$+ \sum \frac{\frac{1}{\theta_1'(a)}}{x-a} \left[\sum \frac{1}{x'-a'} \cdot \frac{F(a\alpha')}{\theta_2'(\alpha')} \right] = 0$$

comme le premier membre est nul pour tous les couples de points correspondants on aura pour représenter les deux divisions l'équation

$$1 + \sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{x-a} - \frac{\Psi_0(a)}{\theta_1'(a)} + \sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{x'-\alpha'} \cdot \frac{\varphi_0(\alpha')}{\theta_2'(\alpha')} + \sum_{a=a}^{a=l} \frac{\frac{1}{\theta_1'(a)}}{x-a}$$

$$\left[\sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{x'-\alpha'} \cdot \frac{F(a\alpha')}{\theta' x(\alpha')} \right] = 0 \qquad (i)$$

c'est l'équation écrite algébriquement que nous cherchions. Écrite

géométriquement elle sera, en représentant les coefficients par λ, μ et ν avec des indices :

$$1 + \sum \frac{\lambda i}{am} + \sum \frac{\mu i}{\alpha' m'} + \sum \frac{1}{am}\left[\sum \frac{\nu i}{\alpha' m'}\right] = 0. \qquad \text{(II)}$$

Nous allons maintenant donner la signification géométrique des coefficients.

L'équation

$$\Psi_0(x) = 0$$

a pour racines les abscisses des points I.

Donc

$$\Psi_0(a) = \mathrm{I}_1 a \,.\, \mathrm{I}_2 a \,\ldots\, \mathrm{I}_n a.$$

De même l'équation

$$\varphi_0(x') = 0$$

a pour racines les abscisses des points J'.

$$\varphi_0(\alpha') = \mathrm{J}'_1\alpha' \,.\, \mathrm{J}'_2\alpha' \,\ldots\, \mathrm{J}'_{n'}.$$

On fera de même pour toutes les autres quantités telles que $\varphi_0(a)$ et $\varphi_0(\alpha')$.

De plus

$$\theta_1(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - l)$$

par suite

$$\theta'_1(a) = (a - b)(a - c) \ldots (a - l)$$

c. à. d. géométriquement

$$\theta'_1(a) = ba \,.\, ca \,\ldots\, la$$

de même

$$\theta'_2(\alpha') = \beta'\alpha' \,.\, \lambda'\alpha' \,\ldots\, \lambda'\alpha'.$$

Enfin

$$\mathrm{F}(ax') = \Psi_0(a)(x' - a'_1)(x' - a'_2) \ldots (x' - a'_{n'})$$

car les racines de $\mathrm{F}(ax') = 0$ sont les quantités a'_i.

On a donc géométriquement

$$\mathrm{F}(ax') = (\mathrm{I}_1 a \,\ldots\, \mathrm{I}_n a)(a_1\alpha' \,\ldots\, a'_{n'}\alpha').$$

Remplaçant toutes ces quantités par leurs expressions équivalentes dans l'équation (i) nous aurons enfin

$$1 - \sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{a\mathrm{I}_1 \,.\, .\, a\mathrm{I}_n}{ab \,.\, .\, al} - \sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=h'} \frac{1}{\alpha' m'} \cdot \frac{\alpha'\mathrm{J}'_1 \,.\, .\, \alpha'\mathrm{J}'_{n'}}{\alpha'\beta' \,.\, .\, \alpha'\lambda'}$$
$$+ \sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{a\mathrm{I}_1 \,.\, .\, a\mathrm{I}_n}{ab \,.\, .\, al}\left[\sum_{\alpha=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{\alpha' m'} \cdot \frac{\alpha' a'_1 \,.\, .\, \alpha' a'_{n'}}{\alpha'\beta' \,.\, .\, \alpha'\lambda'}\right] = 0 \quad (iii)$$

m et m' étant les points courants.

Telle est l'équation géométrique, avec la signification géométrique des coefficients, que nous cherchions. On voit facilement que chacun

de ces coefficients ne peut avoir qu'une seule valeur, indépendante de celle des autres.

Les points $a\ldots$ et $\alpha' \ldots \lambda'$ étant tout à fait quelconques, cette équation sera la plus générale de la famille. En choisissant pour ces points $a, b \ldots ; \alpha', \beta' \ldots$ des points particuliers on obtiendra des équations particulières correspondantes, fournissant des relations géométriques d'autant plus intimes que les points choisis représentent mieux la nature de la correspondance des divisions.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

II

Supposons que nous fassions, dans les quantités du chapitre précédent

$$\theta_1(x) = \mathrm{F}(xa') \qquad \theta z(x') = \mathrm{F}(\alpha x') = 0.$$

alors l'équation III deviendra en remarquant que

$$ab.ac \ldots al = a_i a_1 . a_i a_2 \ldots a_i a_{i-1} . a_i a_{i+1} \ldots a_i a_n = a_i a_1 \ldots a_i a_n.$$

(d'une façon générale).

$$1 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{a_i m} \cdot \frac{a_i \mathrm{I}_1 \ldots a_i \mathrm{I}_n}{a_i a_1 \ldots a_i a_n} - \sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{\alpha'_i m'} \cdot \frac{\alpha'_i \mathrm{J}'_1 \ldots \alpha' \mathrm{J}'_{n'}}{\alpha'_i \alpha'_1 \ldots \alpha'_i \alpha'_{n'}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{a_i m} \cdot \frac{a_i \mathrm{I}_i \ldots a_i \mathrm{I}_n}{a_i a_1 \ldots a_i a_n} \left[\sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{\alpha'_i m'} \cdot \frac{\alpha'_i a'_{i1} \ldots \alpha'_{in'}}{\alpha'_i \alpha_1 \ldots \alpha' \alpha'_{n'}} \right] = 0. \qquad \text{IV}$$

on sait ce que $a'ij$ représente : c'est le j^{me} point du point a_i qui est le i^{me} du point a'.

Cette équation est très belle, appliquée à des divisions particulières elle fournit des relations très importantes caractérisant ces divisions. Nous ne pouvons en dire plus ici.

III

Supposons maintenant que

$$\theta_2(x') \equiv \mathrm{I}.$$

Alors comme plus haut on aura successivement

$$\frac{\mathrm{F}(xx')}{\theta(x)} = \varphi_0(x') + \sum_{a=l'}^{a=l} \frac{1}{x-a} \cdot \frac{\mathrm{F}(ax')}{\theta'(a)} \qquad (a)$$

puis

$$\varphi_0(x') = \mathrm{J}'_1 m' . \mathrm{J}'_2 m' \ldots \mathrm{J}'_{n'} m'.$$
$$\theta'(a) = ba.ca \ldots la.$$
$$\mathrm{F}(x') = \Psi(a) . a'_1 m' . a'_2 m' . a'_{n'} m',$$

m et m' étant les points dont les abscisses sont x, x'.

Donc l'équation dans ce cas sera

$$J'_1 m' \dots J'_{n'} m' + \sum_{a=a}^{a=l} \frac{aI_1 \dots aI_n}{ab \dots al} \cdot \frac{a'_1 m' \dots a'_{n'} m'}{am} = 0 \qquad (V)$$

il est évident que l'équation suivante

$$I_1 m \dots I_n m + \sum_{\alpha'=\alpha}^{\alpha'=h'} \frac{\alpha' J'_1 \dots \alpha' J'_{n'}}{\alpha'\beta' \dots \alpha' h'} \cdot \frac{\alpha_1 m \dots \alpha_n m}{\alpha' m'} = 0 \qquad (VI)$$

est la même équation.

L'équation (V) peut se mettre sous une autre forme très intéressante. On sait que

$$\frac{1}{F(ax')} = \sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{x' - a'_i} \cdot \frac{1}{F'(aa'_i)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\varphi_0(x')} = \sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{J_i m'} \cdot \frac{1}{\varphi'_0(J'_i)}$$

remplaçant dans l'équation (a) on obtient

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{J'_i m'} \cdot \frac{1}{J'_i J'_1 \dots J'_i J'_n}} + \sum_{a=a}^{i=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{1}{ab \dots al}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{a_i m'} \cdot \frac{1}{aI_1 \dots aI_n} \cdot \frac{1}{a'_i a'_1 \dots a'_i a'_{n'}}} = 0. \qquad (VII)$$

et si maintenant on suppose

$$\theta(x) = F(x\alpha')$$

elle deviendra :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n'} \frac{1}{J'_i m'} \cdot \frac{I_1 \alpha_i \dots I_n \alpha_i}{J'_i J'_i \dots J'_i J'_{n'}}} + \frac{1}{J'_i \alpha' \dots J'_{n'} \alpha'} \left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\alpha_i m} \cdot \frac{1}{\alpha_i \alpha_1 \dots \alpha_i \alpha_n} \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sum_{i=1\, j=1i}^{i=n'\, j=n} \frac{1}{\alpha'_{ij} m'} \cdot \frac{1}{I_1 \alpha_i \dots I_n \alpha_i} \cdot \frac{1}{\alpha_{i_1} \alpha_{ij} \dots \alpha_{in} \alpha_{ij}}} \right] = 0. \qquad (VIII)$$

IV

Cette famille renferme d'autres types d'équations, un peu moins générales que celle du chapitre I.

Nous allons en donner deux autres ici, et en mentionner un autre type dans l'étude des équations de la 3me famille, car c'est là qu'on le trouve tout naturellement.

V

Supposons que les fonctions $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x')$ au lieu d'être de degré n et n' soient de degrés $n+1$ et $n'+1$ respectivement nous introduirons ainsi $n+1$ points $a, b, \ldots l$ et $n'+1$ points $\alpha', \beta', \ldots \lambda'$. Dans ce cas l'équation générale sera :

$$\sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{aI_1 \,..\, aI_n}{ab \,..\, al} \left[\sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{\alpha' m'} \cdot \frac{\alpha' a'_1 \,\ldots\, \alpha' a'_{n'}}{\alpha'\beta' \,..\, \alpha'\lambda'} \right] = 0. \qquad \text{(IX)}$$

et celle-ci comme l'équation III pourra donner toutes les équations correspondant aux équations IV, V,... VIII.

VI

Le troisième type d'équation que nous avons mentionné est plus important que le précédent. Il va nous donner la propriété géométrique caractéristique des divisions algébriques les plus générales.

Ce type est obtenu en introduisant $n+1$ points $\alpha, \ldots l$, et n points $\alpha', \ldots \lambda'$.

L'équation qui en résulte sera

$$\sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{I_1 a \,..\, I_n a}{ab \,..\, al} + \sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{I_1 a \,..\, I_n a}{ab \,..\, al} \left[\sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{\alpha' m'} \cdot \frac{a'_1 \alpha' \,..\, a'_{n'} \alpha'}{\alpha'\beta' \,..\, \alpha'\lambda'} \right] \text{(X)}$$

Supposons que dans cette équation tous les points α', β', λ' soient à l'infini, en recommençant la décomposition pour ce cas $(\theta_2(x) \equiv 1)$ on trouve l'équation

$$\sum_{a=a}^{a=l} \frac{aI_1 \,..\, aI_n}{ab \,..\, al} \cdot \frac{a'_1 m' \,..\, a'_{n'} m'}{am} = 0. \qquad \text{(XI)}$$

Nous appellerons cette équation l'équation homogène à $n+1$, correspondances complètes.

Nous allons lui donner une forme un peu plus générale.

On a toujours

$$F(a\alpha') = (I_1 a \,..\, I_n a)(a'_1 \alpha' \,\ldots\, a'_{n'} \alpha') = (J'_1 \alpha' \,..\, J'_{n'} \alpha')(\alpha_1 a \,..\, \alpha_n a)$$

par suite

$$aI_1 \,\ldots\, aI_n = \alpha' J'_1 \,..\, \alpha' J'_{n'} \frac{a\alpha_1 \,\ldots.\, a\alpha_n}{\alpha' a'_1 \,..\, \alpha' a'_{n'}}$$

remplaçant dans XI on obtient enfin

$$\sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{ab \,\ldots\, al} \cdot \frac{a\alpha_1 \,\ldots\, a\alpha_n}{a'_1 \alpha' \,..\, a'_{n'} \alpha'} \cdot \frac{a'_1 m' \,\ldots\, a'_{n'} m'}{am} = 0. \qquad \text{(XII)}$$

On trouverait de même l'équation

$$\sum_{z=z'}^{z=\lambda'} \frac{1}{\alpha'\beta'\ldots\alpha'\lambda'} \cdot \frac{\alpha' a'_1 \ldots \alpha' a'_{n'}}{\alpha_1 a \ldots \alpha_n a} \cdot \frac{\alpha_1 m \ldots \alpha_n m}{\alpha' m'} = 0. \qquad \text{(XIII)}$$

Ces équations sont les plus importantes de cette famille.

PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE CARACTÉRISTIQUE
des Divisions Algébriques.

L'équation XII peut s'écrire

$$\sum_{a=a}^{a=l} h \frac{a'_1 m' \ldots a'_{n'} m'}{am} = 0.$$

Dans cette équation les h sont des constantes ayant une valeur unique bien déterminée et que l'on peut exprimer à l'aide d'une correspondance complète supplémentaire quelconque :

soit $\alpha', \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n.$

ou $\beta', \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n.$

Comme ces coefficients ont une valeur unique bien déterminée, on conclut que si l'on exprime successivement ces coefficients à l'aide de l'une et de l'autre de ces correspondances, les équations que l'on obtiendra ainsi auront leurs coefficients proportionnels.

On conclut de là que

$$\frac{a\alpha_1 \ldots a\alpha_n}{a'_1\alpha' \ldots a'_{n'}\alpha'} : \frac{a\beta_1 \ldots a\beta_n}{a'_1\beta' \ldots a'_{n'}\beta'} = \frac{b\alpha_1 \ldots b\alpha_n}{b'_1\alpha' \ldots b'_{n'}\alpha'} : \frac{b\beta_1 \ldots b\beta_n}{b'_1\beta' \ldots b'_{n'}\beta'} = \ldots\ldots$$

c'est-à-dire que

$$\frac{a\alpha_1 \ldots a\alpha_n}{a\beta_1 \ldots a\beta_n} : \frac{b\alpha_1 \ldots b\alpha_n}{b\beta_1 \ldots b\beta_n} = \frac{\alpha' a'_1 \ldots \alpha' a'_{n'}}{\alpha' b'_1 \ldots \alpha' b'_{n'}} : \frac{\beta' a'_1 \ldots \beta' a'_{n'}}{\beta' b'_1 \ldots \beta' b'_{n'}} \qquad \text{(XIV)}$$

C'est la relation que nous cherchions.

Elle est très importante.

En général elle ne peut servir à représenter deux divisions, excepté quand le nombre de couples de points correspondants qui déterminent les divisions est inférieur à $2(n+n)-1$, ce qui arrive par exemple dans quelques divisions en involution et toujours pour les divisions dont les ordres de correspondance sont 1 et n. En effet dans ce dernier cas on aura, en prenant les points b et b' pour points courants, l'équation

$$\frac{\alpha_1 m \ldots \alpha_n m}{\beta_1 m \ldots \beta_n m} : \frac{a\alpha_1 \ldots a\alpha_n}{a\beta_1 \ldots a\beta_n} = \frac{\alpha' m'}{\beta' m'} : \frac{\alpha' a'}{\beta' a'}$$

et qui détermine les divisions puisque $2n+1$ couples de points correspondants en sont connus.

Cette propriété XIV exprime au fond que l'équation

$$F(xa') = 0$$

est rationnelle. On aurait pu l'établir directement en partant de cette propriété de $F(xa')$.

Mais nous voulions exposer la méthode que nous avons suivie pour la trouver parce que en l'appliquant à certaines divisions, ou plutôt aux équations qui les représentent, on trouve des relations importantes et qu'il serait très difficile d'établir autrement, vu que l'on ne connaît pas d'avance la propriété analytique qu'elles expriment. C'est tout ce que nous dirons ici des équations de la 1re famille.

ÉQUATIONS DE LA DEUXIÈME FAMILLE

Équation générale.

Pour l'obtenir, il suffit d'introduire N points $a,\ b,\ \ldots\ l$ et N points $\alpha',\ \beta',\ \ldots\ h'$, les nombres N et N′ étant supérieurs respectivement à $n+1$ et $n'+1$.

L'équation que l'on obtient ainsi est :

$$\sum_{a=a}^{a=l} \frac{1}{am} \cdot \frac{aI_1 \,..\, aI_n}{ab \,..\, al} \left[\sum_{\alpha'=\alpha'}^{\alpha'=\lambda'} \frac{1}{\alpha' m'} \cdot \frac{\alpha' a'_1 \,..\, \alpha' a'_{n'}}{\alpha'\beta' \ldots \alpha'\lambda'} \right] = 0$$

quels que soient les nombres de points introduits, ce qui est très important.

D'une façon générale on pourra poser pour obtenir des équations particulières

$$\theta_1(x) = F(x\alpha').(Fx\beta').\ldots.(Fx\lambda').f_1(x$$
$$\theta_2(x) = (Fax'F(bx')\ldots F(lx').f_2(x').$$

f_1 et f_2 étant des fonctions dont les zéros sont des quantités arbitraires, et même dans certains cas on pourra choisir pour les $F(x)$ etc. des fonctions telles que

$$F(x\alpha')F(x\alpha_{ij}),\ \text{etc.}$$
$$F(\alpha x_i),\ \text{etc.}$$

ce qui introduira des correspondances complètes à un degré quelconque.

Nous allons maintenant passer aux équations de la troisième famille.

Remarque. — Toutes les équations précédentes peuvent se généraliser un peu à l'aide de la relation caractéristique (XIV) ce qu'il faudra

toujours faire quand on étudiera des divisions particulières comme par exemple les divisions d'ordre 1 et 2.

ÉQUATIONS DE LA 3e FAMILLE

Nous ne donnerons pour cette famille qu'une proposition générale pour les former, et l'équation la plus importante de la famille.

Proposition. — Toute équation où entrent des segments tels que $am.bm\ldots$ de la 1re division, et des segments tels que $\alpha'm'.\beta'm'\ldots$ de la 2e et telle qu'un quelconque de ses termes se compose de produits de segments tels que $am.bm\ldots lm$, multipliés par des produits tels que $\alpha'm'.\beta'm'\ldots\lambda'm'$, tous ces produits étant du reste tels que les segments $am\ldots\alpha'm'\ldots$ n'y entrent qu'au 1er degré et tels aussi que le nombre de facteurs est au plus n pour les produits $am\ldots$ et n' pour les produits $\alpha'm'$, une pareille équation, dis-je, représente toujours deux divisions algébriques d'ordres (n, n').

Si le nombre de termes est inférieur à $nn'+n+n'+1$ l'équation représentera un système de divisions particulières.

Si le nombre de ses termes égale $nn'+n+n'+1$ l'équation pourra représenter une division quelconque et cela d'une seule manière.

Si enfin le nombre des termes est plus grand que $nn'+n+n'+1$ l'équation pourra représenter deux divisions quelconques d'une infinité de manières.

Cette proposition est facile à démontrer.

Nous allons l'appliquer.

Equation homogène à $n+n'$ couples de points correspondants.

Lemme. — Si C_m^n désigne le nombre de combinaisons de m objets n à n, il est facile de démontrer que l'on a toujours :

$$C_{n+n'}^{n} = C_{n+n'}^{n'} > nn'$$

par suite

$$C_{n+n'}^{n'} \geqslant nn'+1.$$

Soient maintenant $n+n'$ points quelconques $ab-l$ et $a'b'-l'$ un système quelconque de leurs points correspondants : il existe $C_{n+n'}^{n} = C_{n+n'}^{n'}$ fractions telles que

$$\frac{am.\ bm\ldots hm}{a'm'b'm'\ldots h'm'}.$$

Le nombre de facteurs au numérateur comme au dénominateur

étant n. Or

$$C^{n}_{n+n'} \geqslant nn' + 1.$$

L'équation

$$\sum \lambda . \frac{am.\ bm \ldots hm}{a'm'b'm' \ldots h'm'} = 0$$

peut donc toujours représenter deux divisions algébriques quelconques.

Quand le nombre de termes est $nn' + 1$ les h admettent un système unique de valeurs. (On aura des équations de la 1re famille.) Quand le nombre de termes est plus grand que $nn' + 1$ il en admet plusieurs (a).

Ces équations sont importantes : pour l'homographie on a l'équation bien connue

$$\frac{am}{a'm'} = \lambda \frac{bm}{b'm'}.$$

On peut donner aux constantes des valeurs remarquables. En toutes ces équations il convient de distinguer celle où toutes les quantités telles que $\frac{am \ldots hm}{a'm' \ldots h'm'}$ y entrent, c. à. d. l'équation à $Cn^{n'} + n'$ termes.

Nous l'appelons l'équation caractéristique des divisions ; nous verrons pourquoi.

La proposition précédente est évidente si on remarque que les h sont déterminés à l'aide de nn' autres couples de points correspondants, puisque $n + n'$ couples y entrent déjà, déterminant la forme de l'équation.

On a ainsi tout un système d'équations caractéristiques, que l'on obtiendra en faisant varier le nombre des fractions telles que $\frac{am \ldots\ldots hm}{a'm' \ldots\ldots h'm'}$ qui peuvent y entrer.

On distinguera surtout les équations à $nn' + 1$ termes ou à nombre minimum de termes.

Nous reviendrons sur ces équations un peu plus loin.

C'est tout ce que nous dirons ici sur l'étude générale des divisions.

Nous allons maintenant étudier vivement quelques divisions dont nous aurons besoin dans l'étude des courbes algébriques, et pour l'étude d'autres divisions.

DES DIVISIONS HÉTÉROGRAPHIQUES ALGÉBRIQUES DISTRIBUTIVES TOTALES

Ce sont les divisions dans lesquelles tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$

correspondants d'un même point a' de la seconde division admettent tous dans cette seconde division les mêmes points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_i$, pour correspondants, et réciproquement les correspondants de l'un quelconque des n' points a'_i sont les n points a_i.

Ces divisions se rencontrent fréquemment.

Equations fondamentales de ces divisions.

Les divisions étant algébriques on a

$$\frac{a_1\alpha \ldots a_n\alpha}{b_1\alpha \ldots b_n\alpha} : \frac{a_1\beta \ldots a_n\beta}{b_1\beta \ldots b_n\beta} = \frac{a'\alpha'_1 \ldots a'\alpha'_{n'}}{b'\alpha'_1 \ldots b'\alpha_{n'}} : \frac{a'\beta'_1 \ldots \alpha'\beta'_{n'}}{b'\beta'_1 \ldots b'\beta'_{n'}}$$

Supposons dans cette relation que α soit le point α_i et β le point α_j d'une même correspondance : alors par hypothèse cette relation deviendra

$$\frac{a_1\alpha_i \ldots a_n\alpha_i}{b_1\alpha_i \ldots b_n\alpha_i} : \frac{a_1\alpha_j \ldots a_n\alpha_j}{b_1\alpha_j \ldots b_n\alpha_j} = 1 ;$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_1\alpha_i \ldots a_n\alpha_i}{b_1\alpha_i \ldots b_n\alpha_i} = \frac{a_1a_j \ldots a_n\alpha_j}{b_1\alpha_j \ldots b_n\alpha_j} = K$$

k étant une constante pour tous les points α_i.

En d'autres termes si

$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \varphi_2(x) = 0$$

sont les équations qui donnent les abscisses des points a_i et b_i l'équation qui donnera les α_i sera

$$\varphi_1 + k\varphi_2 = 0$$

à chaque valeur de k correspond un système unique de points α_i. De même les points α'_i seront donnés par une équation telle que

$$\psi_1 + k'\psi_2 = 0,$$

il est facile de voir que les constantes k et k' sont homographiques entre elles (c'est-à-dire qu'à une valeur de k ne correspond qu'une valeur de k' et réciproquement). Or pour

$$k = 0, \qquad k' = 0$$

et pour $\qquad k = \infty, \qquad k' = \infty$

Si $\varphi_1 = 0$ et $\psi_1 = 0$ donnent les points a et a', on voit que

$$k = hk',$$

h étant une constante.

On aura donc

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} + h\frac{\Psi_1(x')}{\Psi_2(x')} = 0$$

qui sera l'équation fondamentale cherchée.

Écrite géométriquement elle devient :

$$\frac{a_1 m \ldots a_n m}{b_1 m \ldots b_n m} = h \frac{a'_1 m' \ldots a'_{n'} m'}{b'_1 m' \ldots b'_{n'} m'} \qquad (I)$$

qui sera l'équation caractéristique pouvant représenter les divisions.

Cette relation peut s'écrire en cherchant la valeur la plus générale de h.

$$\frac{a_1 m \ldots a_n m}{b_1 m \ldots b_n m} : \frac{a_1 p \ldots a_n p}{b_1 p \ldots b_n p} = \frac{a'_1 m \ldots a'_{n'} m'}{b'_1 m' \ldots b'_{n'} m'} : \frac{a'_1 p' \ldots a'_{n'} p'}{b'_1 p' \ldots b'_{n'} p'}. \qquad (II)$$

Nous pourrions prendre les équations générales des divisions algébriques et les appliquer à ces divisions, mais l'espace ne nous le permet pas.

ÉTUDE DES DIVISIONS ALGÉBRIQUES DE MÊME BASE

On peut leur appliquer toutes les équations indiquées plus haut.

Définition. — On appelle coïncidence simple de deux divisions de même base un point tel que considéré de l'une ou l'autre des divisions il se confond avec un de ses correspondants.

D'après le théorème connu de Chasles deux divisions d'ordres n et n' ont $n + n'$ coïncidences.

De l'équation caractéristique.

Cette équation, comme nous l'avons dit, est

$$\sum \lambda \frac{am.\, bm \ldots hm}{a'm' b'm' \ldots h'm'} = 0$$

l'équation renfermant le nombre maximum de termes, représentons les points coïncidences par $\gamma_1 . \gamma_2 \ldots \gamma_{n+n'}$.

Alors l'équation précédente pourra s'écrire

$$\sum \lambda \frac{\gamma_1 m \ldots \gamma_n m}{\gamma_1 m' \ldots \gamma_n m'} = 0 \qquad (I)$$

C'est cette équation que nous appelons réellement l'équation caractéristique des divisions (de même base. A bases différentes la caractéristique n'a pas la même importance). Voici pourquoi :

D'abord elle peut s'écrire aussi

$$\sum \mu \cdot \frac{\gamma_1 m' \ldots \gamma_{n'} m'}{\gamma_1 m \ldots \gamma_{n'} m} = 0 \qquad (II)$$

maintenant il est facile de mettre ces équations sous la forme suivante :

$$\sum \lambda \left(\frac{1}{m'm} - \frac{1}{m'\gamma_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{m'm} - \frac{1}{m'\gamma_n}\right) = 0 \qquad (\text{I } bis).$$

$$\sum \mu \left(\frac{1}{mm'} - \frac{1}{m\gamma_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{mm'} - \frac{1}{m\gamma_{n'}}\right) = 0 \qquad (\text{II } bis).$$

Les constantes étant supposées connues, I *bis* définit le point m connaissant les points γ et le point m', elle le définit comme le conjugué géométrique d'une certaine nature du point m par rapport aux $n + n'$ points γ.

De même *II bis* définit le point m' comme le conjugué géométrique d'une certaine nature du point m par rapport aux points γ.

Si les λ ou μ sont tous égaux à l'unité, les points m sont les conjugués harmoniques d'ordre n du point m' par rapport aux points γ, et les points m' les conjugués harmoniques d'ordre n' du point m par rapport aux mêmes points.

C'est pourquoi, il nous semble bon de dire que les équations

$$\sum \left(\frac{1}{m'm} - \frac{1}{m'\gamma_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{m'm} - \frac{1}{m'\gamma_n}\right) = 0$$

$$\sum \left(\frac{1}{mm'} - \frac{1}{m\gamma_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{mm'} - \frac{1}{m\gamma_{n'}}\right) = 0$$

dans lesquels les coefficients sont tous égaux à l'unité représentent deux divisions algébriques harmoniques d'ordre n et n'.
et par oppositition, les équations i, ii, représenterons deux divisions algébriques anharmoniques d'ordre n, n'.

Cette distinction semble utile vu l'importance des conjugu és harmoniques dans les courbes algébriqu es.

On voit donc que deux divisions homographiques en involutions sont en même temps harmoniques ; il n'en est pas de même pour les divisions d'ordres supérieurs.

Pour montrer l'utilité de cette distinction, bien admise pour l'homographie, prenons deux divisions d'ordre *1* et n. Les caractéristiques seront, les coïncidences étant : r_1, r_2, r_{n+1}.

$$\Sigma\mu \frac{r_1 m'}{r_1 m} = 0$$

pour les divisions anharmoniques et

$$\Sigma \frac{r_1 m'}{r_1 m} = 0$$

pour les divisions harmoniques.

Si m est à l'infini : alors

$$\Sigma \mu r_1 m' = 0 \qquad \Sigma r_1 m' = 0$$

c'est-à-dire que m' sera le centre des distances proportionnelles, dans le premier cas et des moyennes distances dans le second.

Ces mêmes équations donnent

$$\frac{1}{mm'} \Sigma \mu = \Sigma \frac{\mu}{mr_1}$$

$$\frac{1}{mm_1} (n + n') = \Sigma \frac{1}{mr_1}$$

la deuxième donne ce qu'on appelle la moyenne harmonique et la première la moyenne « proportionnelle (!) » ou « anharmonique » et dont la définition sera donnée par

$$\frac{1}{r} \Sigma \mu = \Sigma \frac{\mu}{r_1}.$$

L'étude des divisions harmoniques est très intéressante. Par exemple l'équation

$$\frac{a'm'_1 \ldots a'm'n'}{a_1 m \ldots a_n m} \Sigma r_1 m \ldots r_n m = \mathrm{K}.$$

k étant une constante s'applique aux divisions d'ordres n, n'. Si $n' = 1$ alors

$$\Sigma \frac{1}{\gamma_i r_2 \ldots \gamma_i \gamma_{n+1}} \cdot \frac{\gamma_i \alpha_1 \ldots \gamma_i \alpha_n}{\gamma_i \alpha'} \cdot \frac{\gamma_1 m'}{\gamma_i m} = 0$$

peut représenter les divisions :

On aura du reste :

$$\frac{r_1 \alpha_1 \ldots r_1 \alpha_n}{r_1 \alpha'} : \frac{r_i \alpha_1 \ldots \alpha_i \alpha_n}{r_i \alpha'} = \frac{r_1 r_2 \ldots r_1 r_{n+1}}{r_i r_1 \ldots r_i r_{n+1}}$$

C'est tout ce que nous en dirons ici.

Ainsi donc, il paraît utile de diviser les divisions de même bases en divisions harmoniques et en divisions anharmoniques.

Pour terminer ces notions sur les divisions de même base, mentionnons encore les équations obtenues en décomposant les fonctions

$$\frac{\mathrm{F}(xx')}{\mathrm{F}(xx)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{F}(xx')}{\mathrm{F}(xx)\mathrm{F}(x'x')}$$

et la proposition suivante.

Les centres des moyennes distances des deux systèmes de points $\mathrm{I}_1 \ldots \mathrm{I}_{n_1} \mathrm{J}'_1 \ldots \mathrm{J}'_{n'}$ d'une part et des points

$$r_1 - r_n \quad r_{n+1} - r_{n+n'} \quad \text{de l'autre}$$

coïncident dans tout système de divisions algébriques d'ordre $n_1 n'$ de même base.

Nous allons maintenant étudier quelques divisions particulières de

même base, très importante : nous voulons parler des divisions en Involution.

DIVISIONS EN INVOLUTION

Il y en a de deux sortes : les divisions en Involution ordinaire et les divisions Commutatives.

1° — Divisions en involution ordinaires

Il y en a de deux sortes : les partielles et les totales. Nous ne considérons ici que ces dernières.

Divisions totales.

Deux divisions sont en involution totale ordinaire quand le point a considéré de l'une ou de l'autre division admet pour correspondants les mêmes points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n'}$.

1. — L'équation fondamentale

$$F(xx') = 0$$

devant donner

$$F(x'x) = 0$$

il est facile de déterminer la forme de cette équation.

2. — Le nombre de ses termes sera

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

pour les déterminer il faut donc

$$\frac{n(n+3)}{2}$$

de couples de points correspondants.

3. — Les points I et J' coïncident.

4. — On peut appliquer très aisément à ces divisions les équations générales que nous avons données.

2° — Divisions commutatives

Nous appellerons divisions en Involution Totale Commutatives, les divisions dans lesquelles tous les points d'une même correspondance, telle que $a_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n'}$, considérés de l'une ou de l'autre division admettent pour correspondants les autres points de la correspondance considérée. De sorte que si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les points $a_0, a'_1, \ldots, a'_{n'}$ les correspondants du point a_i seront les autres points $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$.

Equation fondamentale de ces divisions.

Reprenons la relation connue établie ci-dessus.

$$\frac{a_1\alpha \ldots\ldots a_n\alpha}{b_1\alpha \ldots\ldots b_n\alpha} : \frac{a_1\beta \ldots a_n\beta}{b_1\beta \ldots b_n\beta} = \frac{a'\alpha'_1 \ldots a'\alpha'_{n'}}{b'\alpha'_1 \ldots b'\alpha'_{n'}} : \frac{a'\beta'_1 \ldots a'\beta'_{n'}}{b'\beta'_1 \ldots b'\beta'_{n'}}.$$

Si on représente par

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

les points d'une même correspondance, elle pourra s'écrire

$$\frac{a_1\alpha \ldots a_n\alpha}{b_1\alpha \ldots b_n\alpha} : \frac{a_1\beta \ldots a_n\beta}{b_1\beta \ldots b_n\beta} = \frac{a_0\alpha'_1 \ldots a_0\alpha'_n}{b_0\alpha'_1 \ldots b_0\alpha'_n} : \frac{a_0\beta'_1 \ldots a_0\beta'_n}{b_0\beta'_1 \ldots b_0\beta'_n}.$$

Supposons que les points α et β représentent les points αi et αj.

Alors on aura en mettant les indices en évidence :

$$\frac{a_1\alpha_i \ldots a_n\alpha_i}{b_1\alpha_i \ldots b_n\alpha_i} : \frac{a_1\alpha_j \ldots a_n\alpha_j}{b_1\alpha_j \ldots b_n\alpha_j}$$

$$= \frac{a_0\alpha_0 \ldots\ldots a_0\alpha_{i-1} \cdot a_0\alpha_{i+1} \ldots a_0\alpha_n}{b_0\alpha_0 \ldots b_0\alpha_{i-1} \cdot b_0\alpha_{i+1} \ldots b_0\alpha_n} : \frac{a_0\alpha_0 \ldots a_0\alpha_{j-1} \cdot a_0\alpha_{j+1} \ldots a_0\alpha_n}{b_0\alpha_0 \ldots b_0\alpha_{j-1} \cdot b_0\alpha_{j+1} \ldots b_0\alpha_{j2}}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{a_0\alpha i a_1\alpha_i \ldots a_n\alpha_i}{b_0\alpha_i b_1\alpha_i \ldots b_n\alpha_i} = \frac{a_0\alpha_j a_i\alpha_j \ldots\ldots a_n\alpha_j}{b_0\alpha_j b_1\alpha_j \ldots b_n\alpha_j}$$

comme la même propriété s'étend à tous les points, on conclut que l'on aura d'une façon générale

$$\frac{a_0m \cdot a_1m \ldots a_nm}{b_0m \cdot b_1m \ldots b_nm} = \frac{a_0m' \cdot a_1m' \ldots a_nm'}{b_0m' \cdot b_1m' \ldots b_nm'}. \qquad (I)$$

Cette équation peut évidemment représenter les divisions. Cette équation est très importante.

Si $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont les équations qui donnent les racines $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ des points $a_0, \ldots, b_0, \ldots$, (1) pourra s'écrire

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x')}{\psi(x')}$$

ou

$$\frac{\varphi(x)\psi(x') - \varphi(x')\psi(x)}{x - x'} = 0$$

qui sera l'équation fondamentale cherchée.

I. — Cette équation montre qu'il faut $2n$ couples de points correspondants pour déterminer les divisions.

II. — Si dans (I) on suppose m' à l'infini, on aura

$$a_0\mathrm{I} \cdot a_1\mathrm{I} \ldots a_n\mathrm{I} = b_0\mathrm{I} \ldots b_n\mathrm{I} = \text{constant},$$

ce qui montre que les points I pourraient être appelés des points centraux.

III. — Nous donnerons la proposition suivante, sans la démontrer : Etant données deux divisions distributives totales, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n'}$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, b'_{n'}$ deux correspondances complètes, puis $e, f, \ldots, l$, les points coïncidences.

Les deux systèmes de points

$$a_1\ a_2\ \ldots\ a_n,\ b'_1\ b'_2\ \ldots\ b'_{n'}$$
$$b_1\ b\ \ldots\ b_n,\ a'_1\ a'_2\ \ldots\ a'_{n'}$$

déterminent deux divisions commutatives dont les $n + n'$ points $e, f, g, \ldots, l$ forment une correspondance complète.

Nous allons donner maintenant une théorie très importante, celle du Rapport commutatif, c'est en un mot celle du Rapport anharmonique généralisée.

Les démonstrations des différentes propositions étant très simples, nous nous contenterons de les énoncer.

Théorie du rapport commutatif

Définition. — Nous appellerons systèmes commutatifs de points d'ordre n des systèmes de n points

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n,\ c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

tels qu'on peut en considérer un système quelconque comme une correspondance complète de deux divisions en involution commutatives totales formées par deux autres systèmes quelconques des points donnés.

La relation caractéristique de ces points est donc

$$\frac{a_1b_i \ldots a_nb_i}{c_1b_i \ldots c_nb_i} = \frac{a_1b_j \ldots\ldots a_nb_j}{c_1b_j \ldots c_nb_j}. \qquad (I)$$

Etant donnés 4 systèmes de points commutatifs, nous appellerons Rapport commutatif de ces 4 systèmes l'expression

$$\frac{a_1c_i.\ a_2c_i \ldots a_nc_i}{b_1c_i.\ b_2c_i \ldots b_nc_i} : \frac{a_1d_j.\ a_2d_j \ldots a_nd_j}{b_1d_j.\ b_2d_j \ldots b_nd_j}.$$

Les 4 systèmes de points étant

$$a_1, \ldots, a_n,\quad b_1, \ldots, b_n,\quad c_1, \ldots, c_n,\quad d_1, \ldots, d_n. \qquad (1)$$

Nous représenterons ce rapport par le symbole

$$(a_kb_kc_id_j)_{k=1}^{k=n}.$$

I. — Ce rapport ne change pas de valeur quand on y permute deux quelconques des points d'un même système [on le démontre à l'aide de la relation (1) facilement].

II. — Les 4 systèmes de points commutatifs (I) donnent lieu à six rapports commutatifs, dont 3 sont les inverses des 3 autres. Il suffit

donc d'en considérer trois. Nous appellerons ces rapports h_1, h_2, h_3. Ce seront les suivants

$$(a_k b_k c_i d_j)_{k=1}^{k=n} = h_1.$$
$$(a_k c_k d_i b_j)_{k=1}^{k=n} = h_2.$$
$$(a_k d_k b_i c_j)_{k=1}^{k=n} = h_3.$$

Relations entre ces rapports. — Ces relations sont

$$\frac{1}{h_2} = 1 - h_1, \quad \frac{1}{h_3} = 1 - h_2,$$

$$\frac{1}{h_1} = 1 - h_3.$$

III. — La propriété caractéristique du rapport commutatif est

$$(a_k b_k c_i d_j)_{k=1}^{k=n} = (c_k d_k a_i b_j)_{k=1}^{k=n}$$

c'est-à-dire que si dans le rapport commutatif $(a_k b_k c_i d_j)_{k=1}^{k=n}$ on permute deux lettres quelconques ainsi que les deux autres, la valeur du rapport ne change pas.

IV. — Mentionnons aussi l'expression suivante du rapport commutatif

$$(a_k b_k c_i d_j)_{k=1}^{k=n} = \frac{\dfrac{m_1 b \ldots m_n b.}{a_1 b \ldots a_n b} - \dfrac{m_1 d \ldots m_n d.}{a_1 d \ldots a_n d}}{\dfrac{m_1 b \ldots m_n b.}{a_1 b \ldots a_n b} - \dfrac{m_1 c \ldots m_n c.}{a_1 c \ldots a_n d}}.$$

L'étude du rapport anharmonique et celle du rapport commutatif sont donc une seule et même étude.

Nous préférons le nom de rapport commutatif à celui de anharmonique car ce dernier suggère le rapport harmonique qui n'existe pas pour les courbes d'ordre supérieur à l'unité, et que nous avons déjà fait la grande distinction entre divisions harmoniques et divisions anharmoniques, qui paraît beaucoup plus utile et nécessaire que celle de l'invention d'un rapport harmonique : c'est du reste beaucoup plus conforme à la nature des choses. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin, dans l'étude des courbes.

Avant de terminer cette première partie de notre Mémoire nous allons donner quelques propositions générales d'une très grande utilité.

Propositions Générales

I. — Soient 3 divisions de points x, x' x'', si les deux divisions x, x' sont algébriques d'ordre n, n' respectivement, et si les divisions x, x'' sont algébriques d'ordre n, n'' respectivement, les deux divisions x', x'' seront algébriques d'ordres nn', nn'' respectivement.

II. — Étant données deux divisions algébriques d'ordres n, n'

respectivement. Soient x'_i, x'_j deux points d'une même correspondance complète $x \mid {}^{x'1}_{x'n'}$, on peut faire correspondre au point x'_i le point x'_j et réciproquement, on obtiendra ainsi deux nouvelles divisions algébriques d'ordres $n(n'-1)$, $n(n'-1)$ respectivement et qui seront en involution commutative partielle.

III. — Si dans la proposition précédente on suppose $n = 1$ on aura :

IV. — Étant données deux divisions algébriques d'ordres 1 et n, si x'_i, x'_j désignent deux correspondants quelconques d'un même point de la première division, les deux points x_i, x_j seront les correspondants de deux divisions en involution commutative totale.

Ces propositions, faciles à établir, permettent d'écrire des relations très intimes des divisions.

Nous finissons ici la première partie de notre Mémoire.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DES COURBES ALGÉBRIQUES

Nous représenterons une courbe algébrique d'ordre n par le symbole O^n.

DES COURBES ALGÉBRIQUES CORRESPONDANTES

Soient

$$\varphi_1(xy\alpha) = 0 \qquad \varphi_2(xy\beta) = 0$$

les équations de deux familles de courbes algébriques, α et β étant des paramètres variables.

Si entre α, β, il existe une relation

$$\theta(\alpha\beta) = 0,$$

on pourra faire correspondre à une courbe de la 1re famille une courbe de la seconde.

Nous appellerons ceci une correspondance de courbes.

Si la relation θ est algébrique et rationnelle, nous dirons que la correspondance est algébrique. Si $\theta(\alpha\beta)$ est d'ordres p et p' en α et β, nous dirons que la correspondance est d'ordres p et p'.

Dans ce Mémoire nous ne considérons que les *courbes algébriques* et les *correspondances algébriques*.

Définitions. — Étant donnée une famille de courbes, si par un point quelconque du plan passent i courbes de la famille, nous dirons que i est l'indice point de la famille.

Étant donnée une famille de courbes, si à une droite quelconque du plan on peut mener j courbes tangentes à la droite, nous dirons que j est l'indice ligne de la famille.

Relations. — Entre les indices i et j, il existe les deux relations suivantes

$$j = 2i(n-1)$$
$$i = 2j(m-1)$$

n étant l'ordre des courbes, m la classe, il va sans dire que ces relations ne peuvent avoir lieu en même temps.

Ces relations sont analogues à celles qui existent entre les nombres

n et m qui représentent l'ordre et la classe des courbes.

Ces formules sont faciles à démontrer.

THÉORIE DES FAISCEAUX DE COURBES

Définitions. — Nous appellerons faisceaux points, ou faisceaux de 1re espèce, de courbes d'ordre n, et d'indice point i, une famille de courbes d'ordre n telle que par un point quelconque du plan passent i de ces courbes.

De même, nous appellerons faisceau ligne ou faisceau de 2e espèce, de courbes d'ordre n et d'indice ligne j, une famille de courbes d'ordre n et telle qu'on peut mener j de ces courbes tangentes à une droite quelconque donnée du plan.

On remarquera que ces courbes formant faisceau ne passent pas nécessairement par des points fixes. De là la grande généralité de nos propositions.

Des faisceaux de courbes correspondants.

Étant donnés deux faisceaux de courbes, soient

$$\varphi(xy\alpha) = 0, \qquad \Psi(xy\beta) = 0$$

les équations de courbes données des deux faisceaux. Si entre α et β il existe une relation algébrique

$$\theta(\alpha\beta) = 0$$

de degré p en α et p' en β nous pourrons faire correspondre à une courbe du 1er faisceau p' courbes du second. Soient $O^{n'}_1$, $O^{n'}_2$, ... $O^{n'}_{p'}$ ces courbes, réciproquement à une courbe du second faisceau on pourra faire correspondre p courbes du 1er faisceau. Soient O^{n}_1, O^{n}_2, ... O^{n}_p ces courbes, on suppose évidemment que les courbes du 1er faisceau sont d'ordre n, celles du second d'ordre n'. On obtient ainsi deux faisceaux de courbes tels, qu'à une courbe de l'un, on peut faire correspondre un nombre déterminé de courbes de l'autre.

Nous appellerons un pareil système de faisceaux, faisceaux correspondants de courbes algébriques d'ordre n, n', les indices ou ordres de correspondance étant p et p'.

Il y aura donc deux espèces de faisceaux correspondants : les faisceaux points et les faisceaux lignes ; les indices des 1ers seront i et ceux des seconds j.

Comme pour les divisions correspondantes algébriques de points nous dirons que les courbes

$$O^{n}, \quad O^{n'}_1, \quad O^{n'}_2, \quad \ldots \quad O^{n}_{p},$$

ou les courbes

$$O^{n'},\quad O^{n}_{1},\quad O^{n}_{2},\quad \ldots\quad O^{n}_{\mu}$$

forment une correspondance complète.

Propositions fondamentales.

I. — Étant donnés deux faisceaux points correspondants d'indices respectifs i, i', de courbes algébriques O^{n}, $O^{n'}$, d'ordres n, n' la correspondance étant algébrique et d'ordres respectifs p, p', une courbe quelconque O^{n}, du 1er faisceau rencontre les courbes correspondantes $O^{n'}_{i}$, O^{n}_{i}, du second en des points M. Les points M engendrent une courbe O dont l'ordre sera

$$npi' + n'p'i'.$$

En effet cherchons l'intersection de O avec une droite quelconque D.

Par un point quelconque m de cette droite passent i courbes O^{n}, à chacune d'elles correspondent p' courbes $O^{n'}$ et chacune de ces dernières rencontrent D en n' points m', il y aura donc $ip'n'$ points m' que nous ferons correspondre au point m.

Réciproquement, à un point m' nous pourrons faire correspondre $i'pn$ points m.

On obtient ainsi deux divisions algébriques correspondantes d'ordres pni', $p'n'i$.

Chaque coïncidence de ces divisions est un point de la courbe O dont l'ordre sera bien

$$pni' + p'n'i'.$$

II. — Étant donnés deux faisceaux points de courbes, comme dans la proposition précédente, si $n' > n$, et que μ courbes O^{n} coïncident avec « une des parties » de leurs correspondantes, décomposées en des courbes $O^{n'-n}$ et O^{n}, les points M engendreront une courbe O d'ordre

$$pni' + p'n'i - \mu n.$$

La démonstration est à peu près la même que la précédente.

III. — Étant donnés deux faisceaux lignes correspondants d'indices respectifs j, j', de courbes algébriques O^{m}, $O^{m'}$, de classes m, m', la correspondance algébrique étant d'ordres, p, p', une courbe quelconque O^{m} du 1er faisceau avec les courbes $O^{m'}_{i}$ du second admettent un certain nombre de tangentes communes. L'enveloppe de ces tangentes communes est une courbe de la classe $pmj' + p'n'j$.

C'est la proposition corrélative de la proposition i, on pourrait en énoncer une pour la proposition ii, et les démontrer comme les propositions directes, si nécessaire.

Une fois pour toutes, toutes les propositions suivantes admettent des propositions corrélatives : on peut les énoncer directement sans autre démonstration. Du reste il serait facile de donner des démonstrations directes en substituant aux points des droites, etc.

IV. — Étant donnés deux faisceaux de courbes algébriques, à correspondances algébriques d'ordres p, p', les faisceaux étant d'indices i, i', les courbes d'ordre n, n', si les courbes de chaque faisceau, O^n, $O^{n'}$, passent toutes par un même point commun A, ce point sera un point multiple d'ordre $ip' + i'p$ de la courbe engendrée O.

En effet menons en A les tangentes aux courbes correspondantes O^n, $O^{n'}$. Elles formeront deux faisceaux de droites dont les ordres de correspondance seront respectivement ip' et $i'p$. Le nombre de rayons « coïncidents » de ces faisceaux de droites est $ip' + i'p$. Chaque droite coïncidente représente une tangente en A, à la courbe engendrée.

V. — Étant donnés deux faisceaux de courbes, O^n, $O^{n'}$, à indices i, i', les ordres de correspondance étant p, p', si toutes les courbes de l'un des faisceaux, celui du 1er par exemple, passent par un point fixe A, ce point sera un point multiple d'ordre $i'p$, de la courbe O engendrée par les points communs à une même correspondance complète.

Et d'abord A est un point de la courbe O. Soit A_1 un point voisin de A. Par ce point passent i' courbes $O^{n'}$ auxquelles correspondent $i'p$ courbes O^n, chacune de celles-ci coupant sa correspondante $O^{n'}$ en un point voisin de A_1 puisqu'elles passent toutes par A. Joignons A à ces points communs. Quand A_1 viendra en A ces droites deviendront des tangentes à la courbe O dont le nombre est évidemment $i'p$ puisque ces points communs se déplacent sur $i'p$ courbes différentes.

VI. — Toutes les courbes O^n, d'ordre n, d'un même faisceau d'indice point i, forme sur une droite quelconque deux divisions algébriques en involution dont les deux ordres de correspondance sont $i(n-1)$.

En effet soit m un point quelconque de la droite. Par ce point passent i courbes O^n rencontrant la droite en $i(n-1)$ autres points m' que l'on pourra faire correspondre à m et réciproquement à un point m on pourra faire correspondre $i(n-1)$ points m, on obtient ainsi deux divisions de points, d'ordres $i(n-1)$, $i(n-1)$ respectivement. Le point m considéré de la première ou de la seconde division admet la même correspondance, les divisions sont donc en involution.

Nous verrons plus loin qu'un faisceau de courbes d'indice point 1 est tel que toutes les courbes du faisceau passent par n^2 points fixes si l'ordre des courbes est n.

De là l'importance de la proposition suivante.

VII. — Toutes les courbes O^n d'un même faisceau d'indice point 1, les courbes étant d'ordre n, déterminent sur une droite quelconque deux divisions algébriques en involution commutative totale, d'ordres $(n-1)$, $(n-1)$.

C'est la proposition VI particularisée.

Nous n'énonçons pas les propositions corrélatives ici.

THÉORIE DES FAISCEAUX DE COURBES COMMUTATIFS.

Définitions. — Etant donnés n^2 points α, par lesquels on peut faire passer plusieurs courbes O^n d'ordre n, nous dirons que ces n^2 points constituent un système de points commutatif d'ordre n.

Soient O^n_1, O^n_2... un nombre quelconque de courbe O^n, d'ordre n, qui passent par un système de points commutatif d'ordre n.

Ces courbes constituent un faisceau de courbes à indice point 1.

Nous appellerons ce faisceau, faisceau commutatif de courbes d'ordres n.

Propriétés des faisceaux commutatifs de courbes.

i. — Si les courbes du faisceau sont d'ordre n, sur une sécante quelconque ces courbes détermineront deux divisions en Involution commutatives totales d'ordres $n-1$, $n-1$.

ii. — Tout faisceau de courbes d'indice point 1 est commutatif: *c. a. d.* qu'il passe par n^2 points fixes si les courbes sont d'ordre n.

En effet soient O^n_1, O^n_2, deux courbes du faisceau ; A, un point d'intersection de ces courbes. Sur une sécante quelconque passant par ce point les courbes O^n déterminent deux divisions en Involution commutatives ; au point A on pourra faire correspondre deux correspondances complètes dans l'une ou l'autre division. Ce qui montre que deux facteurs linéaires au premier degré entrent dans l'équation fondamentale des divisions. Le point A est donc bien fixe.

iii. — Etant donnés deux courbes quelconques d'ordre n, et un point quelconque A de leur plan, menons par ce point une sécante quelconque, prenons sur cette dernière un point m tel que si a_1, a_2,... a_n, b_1, b_2,... b_n sont les points d'intersection de la sécante avec

les courbes O_1^n, O_2^n données, on ait

$$\frac{a_1m.a_2m\ldots a_nm}{b_1m.b_2m\ldots b_nm} : \frac{a_1A.a_2A\ldots a_nA}{b_1A.b_2A\ldots b_nA} = K. \qquad (1)$$

K étant une constante les points m décriront une courbe O^n, d'ordre n passant par les points communs de O_1^n, O_2^n.

Si K est différent de 1, sur la sécante Am il n'y aura d'après la relation (1) que n points m.

Aucun de ces points m ne peut coïncider avec le point A, car il faudrait $K = 1$ (ceci est important pour la démonstration). La courbe des points m est donc bien d'ordre n. Enfin on voit que quand la sécante passe par l'un des points d'intersection de O_1^n,O_2^n, la relation (1) est satisfaite pour ce point. O^n passe donc par ce point.

Si $K = 1$, A est toujours un point de la courbe O^n ; puis les trois courbes O_1^n, O_2^n, O^n déterminent sur une sécante quelconque passant par A deux divisions en involution commutatives totales d'après (1) : il n'y aura donc quand A est quelconque que $n-1$ autres points m sur la sécante, car d'après la remarque faite, $K = 1$, alors (I) devient

$$\frac{a_1m\ldots a_nm}{b_1m\ldots b_nm} = \frac{a_1A\ldots a_nA}{b_1A\ldots b_nA}.$$

Ce qui montre que m est correspondant de A dans les divisions commutatives et par suite il ne peut y avoir que $n-1$ autres points m différents de A.

Ceci est important, car la courbe O^n, pour $K = 1$ n'est autre chose que la courbe passant par les points communs à $O_1^nO_2^n$ et A ; ce qui la détermine.

Pour $n = 1$ la relation

$$\frac{am}{bm} : \frac{aA}{bA} = K$$

montre que m décrit une droite, ce qui est bien connu, mais pour $K = 1$ la droite, qui d'après Chasles ne doit pas exister, se confond avec la droite passant par A et le point commun aux droites données.

En d'autres termes le rapport anharmonique égal à 1 a une signification géométrique bien déterminée : ce qui est très utile dans les applications.

IV. — Étant données 4 courbes O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n d'un faisceau commutatif de courbes d'ordre n, une sécante quelconque recontre ces courbes en 4 systèmes de n points commutatifs.

1° Le rapport commutatif de ces 4 systèmes de points est constant quelle que soit la position de la sécante.

2° Ce rapport commutatif est égal au rapport anharmonique des 4 tangentes menées aux 4 courbes $O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n$, en l'un quelconque de leurs n^2 points communs.

En effet soient $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$; $c_1, c_2\ c_n$; $d_1, d_2, \ldots d_n$ les points d'intersection des courbes $O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n$, avec la sécante; ces points forment deux divisions en involution commutatives.

Soient maintenant A l'un quelconque des points communs aux courbes O^n puis O_i^n une autre courbe quelconque des courbes O^n, cette courbe rencontre la sécante en n points m. Menons la tangente en A à O_i^n rencontrant la sécante donnée en m'.

On pourra faire correspondre au point m' les n points m et réciproquement à l'un quelconque des points m le point m'.

On obtient ainsi évidemment deux divisions algébriques correspondantes, dont les ordres de correspondance sont 1 et n.

Par suite si en A on mène les tangentes aux courbes $O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n$, rencontrant la sécante en a', b', c', d' les correspondances complètes des divisions qui correspondent à ces points sont

$$\begin{array}{l} a', a_1, a_2 \ldots a_n \\ b', b_1, b_2 \ldots b_n \\ c', c_1, c_2 \ldots c_n \\ d', d_1, d_2 \ldots d_n \end{array}$$

et l'on aura d'après une équation bien connue

$$\frac{a_1 c \,.\, a_2 c \ \ldots\ a_n c}{b_1 c \,.\, b_2 c \ \ldots\ b_n c} : \frac{a_1 d \,.\, a_2 d \ \ldots\ a_n d}{b_1 d \,.\, b_2 d \ \ldots\ b_n d} = \frac{a\,c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

c'est-à-dire

$$(a_k b_k c_i d_j)_{k=1}^{k=n} = (a'b'c'd'). \qquad (1)$$

ce qui démontre la proposition.

Cette relation fait encore ressortir davantage que le rapport anharmonique n'est qu'un rapport commutatif. D'après cela on peut dire, comme pour 4 droites, que le rapport (i) est le rapport commutatif des 4 courbes $O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n$.

Remarque. — L'étude des divisions que nous avons appelées harmoniques est intimement liée à celle des courbes dites polaires, comme pour les coniques.

Voilà donc une généralisation utile et nécessaire.

Du reste le mot harmonique pourrait se justifier par l'harmonie naturelle que présente l'équation qui peut représenter les divisions

dans laquelle, comme on sait en effet, tous les coefficients sont égaux. Une pareille justification d'un terme est meilleure que celle du mot harmonique dérivée des Anciens. Elle a aussi l'avantage de détruire le moins possible de termes et de notions acquises.

Nous disons ceci parce que l'on pourrait être tenté de désigner le rapport commutatif par le terme anharmonique et appeler le rapport commutatif égal à (-1), rapport harmonique. Si on faisait cela, sans rien changer au fond des choses après tout, on arriverait à une terminologie singulière.

Car, par exemple, reprenons les courbes O_1^n, O_2^n, puis faisons correspondre à la courbe O_i^n la courbe $O_{i'}^n$, ces courbes étant telles que leur rapport commutatif soit -1. Les propriétés correspondantes des coniques ne sont plus généralisées et quoiqu'on obtienne des propriétés particulières très intéressantes, la valeur géométrique de ces résultats n'est pas à comparer à celle des divisions que nous avons appelées harmoniques. Du reste la valeur géométrique des divisions commutatives, des points commutatifs et des courbes commutatives est trop importante et leur étude trop intimement liée à celle du rapport commutatif pour pouvoir désigner ce dernier par rapport anharmonique dont la justification ne se trouverait que dans une valeur numérique particulière du rapport et *dans cette valeur numérique seule*.

On ne trouvera peut-être pas ces quelques lignes tout à fait inutiles.

PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX COMMUTATIFS CORRESPONDANTS, LA CORRESPONDANCE ÉTANT ALGÉBRIQUE, ET LES ORDRES DE CETTE CORRESPONDANCE ÉTANT CHACUN ÉGAL A L'UNITÉ.

I. — D'après ce que nous avons vu, les courbes de chaque faisceau passent par n^2 ou n'^2 points fixes, n et n' étant les ordres des courbes des deux faisceaux correspondants.

II. — Soient O_i^n, $O_i^{n'}$, deux courbes correspondantes des deux faisceaux, A l'un des points fixes par lequel passent toutes les courbes O^n, B' l'un quelconque des points fixes par lequel passent toutes les courbes $O^{n'}$. En ces points A et B', menons les tangentes aux courbes O_i^n, $O_i^{n'}$ qui se correspondent, ces tangentes formeront deux faisceaux homographiques de droites.

Car soit Aa une droite quelconque passant par A; à cette droite on ne peut mener qu'une seule courbe O_i^n tangente en A et passant par les autres points A, à cette courbe O_i^n ne correspond par hypothèse qu'une seule courbe $O_i^{n'}$ du second faisceau et à $O_i^{n'}$ on ne peut mener qu'une tangente en B soit Ba' et réciproquement, donc etc...

III. — Le rapport anharmonique de 4 tangentes du premier faisceau de courbes est donc égal à celui des 4 tangentes correspondantes dans le second.

IV. — Étant donnés deux faisceaux commutatifs de courbes d'ordres respectifs n, n', les ordres de la correspondance (algébrique) étant chacun égal à l'unité; soient O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n, 4 courbes quelconques du 1er faisceau et $O_1^{n'}$, $O_2^{n'}$, $O_3^{n'}$, $O_4^{n'}$ les 4 courbes correspondantes du second. Le rapport commutatif des 4 premières est égal au rapport commutatif des 4 dernières.

Cette proposition résulte immédiatement de la précédente et de la proposition IV.

V. — La proposition III nous donne encore la suivante :

Étant donnés n^2 points commutatifs fixes A, ainsi que n'^2 points commutatifs B. Pour déterminer deux faisceaux de courbes O^n, $O^{n'}$, commutatifs et se correspondant courbe à courbe, les ordres de la correspondance étant égal à l'unité pour chaque faisceau, il suffit de se donner trois correspondances de courbes.

$$O_1^n, O_1^{n'}, \qquad O_2^n, O_2^{n'}, \qquad O_3^n, O_3^{n'}.$$

Car soit O_4^n une courbe quelconque du 1er faisceau, menons la tangente en l'un des centres commutatifs à O_4^n puis la droite homologue du faisceau des tangentes dans le second faisceau de courbes. La courbe $O_4^{n'}$ sera tangente à cette droite au centre correspondant; cette courbe est donc bien déterminée. Donc, etc...

En comparant tous ces résultats avec la théorie des faisceaux homographiques on voit toute l'importance de ces propositions.

Propriétés des systèmes de points commutatifs

Les points commutatifs jouissent de nombreuses propriétés très importantes.

Nous ne pouvons en donner que deux ici, dont nous aurons à en faire usage dans le prochain chapitre.

Proposition I. — Étant donnés $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points fixes, ω. Tout point A du plan détermine avec les points ω un système commutatif de points, d'ordre n, *c. à. d.* les courbes passant par ces points seront d'ordre n.) Soient α les points au nombre de $n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1$ qui avec les points ω et le point A font partie du système.

Quand le point A décrit une courbe O^m, d'ordre m, tous les points α décrivent la même courbe O d'ordre $2mn^2 - n$.

En effet soient ω' et ω'' deux autres points quelconques fixes, ils déterminent avec les points ω deux systèmes commutatifs que nous appelerons ω', ω''.

Par le système ω' faisons passer une courbe quelconque $O^n\omega'$ d'ordre n, elle coupera la courbe O^m en mn points A. Par chacun de ces points A et les points du système ω'' on pourra faire passer une courbe $O^n\omega''$ d'ordre n, on obtient ainsi mn courbes $O^n\omega''$ que l'on pourra faire correspondre à la courbe $O^n\omega'$.

Réciproquement on pourra faire correspondre à une courbe $O^n\omega''$, mn courbes $O^n\omega'$.

Nous avons ainsi formé deux faisceaux commutatifs de courbes, les ordres de la correspondance étant mn chacun.

Par suite la courbe décrite par les points d'intersection d'une courbe de l'un des faisceaux avec ses correspondantes décrivent une courbe O d'ordre $2mn^2$.

Mais comme la courbe qui passe par les points $\omega\omega'$ et ω'' constitue une coïncidence des courbes génératrices, on voit que l'ordre de la courbe cherchée est $2mn^2 - n$.

Ces points d'intersection sont précisément les points α, donc etc.

Nous n'étudierons pas la courbe O^{2mn^2-n}.

Proposition II. — Il existe toujours sur une courbe donnée O^m, d'ordre m, $\frac{n(n+3)}{2}$ points commutatifs, *c. à. d.* appartenant à un même système commutatif.

En effet prennons sur O^m, $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points arbitraires mais fixes. Soit A un point quelconque de O^m. Quand A se déplace sur O^m les points α qui avec A et ω déterminent un même système commutatif décrivent une certaine courbe O.

Cette courbe O coupe O^m en des points θ. Soient θ_1 l'un de ces points. Quand l'un des points α sera en θ_1, A sera en un certain point A_1 et les $\frac{n(n+3)}{2}$ points A_1, θ_1 et ω seront commutatifs, donc etc.

On peut remarquer que la courbe O passe par le point A_1, *c. à. d.* que A_1 sera l'un des points θ.

Proposition III. Étant donnés $\frac{n(n+3)}{2} - 2 - i$ points ω fixes sur une courbe O^m, d'ordre m, et i points variables ω' sur O^m, si on peut trouver $1+i$ points ω'' sur O^m qui avec les points ω et ω', ω et ω'

forment un système commutatif, et si, quand on fait varier l'un des points ω'', les autres points α qui avec les points ω, ω' ω'' forment un même système décrivent une même courbe O, alors dis-je on pourra trouver sur la courbe donnée O^m $\frac{n(n+3)}{2}+i$ points commutatifs et si on fait varier l'un des points ω les points α qui appartiennent à tous ces systèmes de points décrivent une courbe O_1.

En effet, puisque quand l'un des points ω'' varie, (soit ω'' ce point), les α décrivent une courbe O, cette courbe rencontre O^m en des points 0. Soit 0_1 l'un de ces points. Quand l'un des points α sera en 0_1 le point ω_1 sera en un certain point ϖ_1 et la 1re partie de la proposition est démontrée.

Considérons maintenant un de ces systèmes de points commutatifs: il se composera de $\frac{n(n+3)}{2}-2-i$ points ω et de $2i+2$ autres points que nous désignerons par β (les ω', ω'' et 0_1). Les points α qui appartiennent à ce système et qui ne sont pas sur O^m se trouvent d'une part sur la courbe O et d'autre part sur une courbe O^n d'ordre n passant par les ω et les β, et un autre point arbitraire pour bien la déterminer. Prenons maintenant l'un quelconque des points ω et faisons-le varier sur O^m. La courbe O^n se déplacera suivant une certaine loi (il suffit de déterminer son indice point pour connaître cette loi, mais nous n'en avons pas besoin ici ; il est du reste facile de le faire). Il en est de même de la courbe O, donc les points d'intersections de O et de O^n se déplacent suivant une certaine loi, *c. à. d.* décrivent une courbe O_1.

Les deux dernières propositions nous donnent immédiatement la suivante, celle que nous nous proposions d'établir ici.

Proposition. — Sur toute courbe $O^{n+n'}$, d'ordre $n+n'$, n et n' étant deux nombres quelconques positifs, il existe toujours, sur $O^{n+n'}$, des systèmes de n^2 points commutatifs d'ordre n.

En effet d'après la proposition II il existe d'abord sur $O^{n+n'}$ $\frac{n(n+3)}{2}$ points ω commutatifs, d'après III quand l'un de ces points varie, les points α du système en dehors de $O^{n+n'}$ décrivent une courbe O donc on pourra trouver $\frac{n(n+3)}{2}+1$ points ω commutatifs sur $O^{n+n'}$ d'après la première partie de la proposition III.

En continuant ainsi successivement, on pourra (avec la prop. : III.) trouver sur $O^{n+n'}$ $\frac{n(n+3)}{2}+i$ points ω commutatifs.

Il s'agit de savoir si i peut devenir assez grand pour que

$$\frac{n(n+3)}{2} + i = n^2.$$

Il faut pour cela que

$$i = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

or d'après la manière dont nous avons obtenu ces points, nous commençons par $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points fixes ω, puis nous en enlevons successivement i de ces points ω pour les rendre variables, pour que le problème soit donc possible il faut que

$$i < \frac{n(n+3)}{2} - 2.$$

ce qui revient à

$$n > 0 ;$$

— donc etc.

Cette proposition forme la base du chapitre suivant.

GÉNÉRATION DES COURBES ALGÉBRIQUES D'ORDRE n.

Dans la première partie de notre travail nous nous sommes proposé de déterminer une courbe définie par les points d'intersection des courbes correspondantes de deux faisceaux de courbes correspondants.

Nous nous proposons maintenant le problème inverse *c. à. d.*

Etant donnée une courbe algébrique quelconque nous nous proposons de la décrire ou de l'engendrer à l'aide des points d'intersection des courbes correspondantes de deux faisceaux de courbes correspondants bien déterminés.

Il y a beaucoup de solutions ; elles peuvent toutes se mettre sous une forme unique que nous allons donner et en déduire les autres selon nos besoins.

I

Proposition fondamentale de la Génération des courbes algébriques.

Étant donnée une courbe algébrique quelconque $O^{n+n'}$, d'ordre $n+n'$; n et n' étant deux nombres quelconques dont la somme est égale à l'ordre de la courbe.

Il existe toujours une infinité de systèmes de faisceaux correspondants de courbes O^n $O^{n'}$, d'ordres respectifs n et n', les faisceaux étant

commutatifs et les ordres de la correspondance (algébrique) étant chacun égal à l'unité et tels que les nn' points d'intersection d'une courbe quelconque O_i^n du premier faisceau avec sa correspondante $O_i^{n'}$ dans le second engendrent la courbe donnée $O^{n+n'}$ quand on fait varier la courbe O_i^n.

Nous appellerons pour simplifier le langage ces faisceaux: Faisceaux générateurs de la courbe donnée.

Nous allons décomposer la démonstration de cette proposition en trois parties.

1re Partie.

Pour fixer les idées supposons $n' > n$.

Alors si $n \geqslant 3$ on aura

$$n'n > \frac{n+3}{2},$$

par suite

$$nn' > \frac{n(n+3)}{2}$$

et si $n < 3$ on aura

$$n' - n \geqslant \frac{3-n}{2}.$$

Car le 1er membre est toujours plus grand que l'unité ou lui est égal.

Donc

$$n' \geqslant \frac{n+3}{2},$$

par suite

$$nn' \geqslant \frac{n(n+3)}{2}.$$

Ainsi si $n' > n$ on aura dans tous les cas

$$nn' \geqslant \frac{n(n+3)}{2}.$$

D'un autre côté on aura toujours

$$nn' > n^2.$$

Ces deux relations montrent qu'étant donnés nn' points situés comme on voudra sur une courbe quelconque $O^{n+n'}$ il y en aura toujours $\frac{n(n+3)}{2}$ de ces points qui ne détermineront qu'une seule courbe d'ordre n. Il est facile de voir cela. Cette courbe pourra passer par tous les autres points, mais il n'y en aura jamais deux dans ce cas.

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Proposition. — Étant donnés nn' points situés comme on veut sur

une courbe quelconque $O^{n+n'}$ d'ordre $n+n'$, il y en aura toujours parmi ces nn' points, $\frac{n(n+3)}{2}$ qui ne déterminent qu'une seule courbe d'ordre n.

2e Partie.

Soit maintenant, sur la courbe donnée, $O^{n+n'}$, un système commutatif quelconque de points ω', d'ordre n'.

Par ces points menons deux courbes $O_1^{n'}$, $O_2^{n'}$; rencontrant $O^{n+n'}$, la première en nn' autres points α, et la seconde en nn' autres points β.

Parmi les points α prenons $\frac{n(n+3)}{2}$ points qui ne déterminent qu'une seule courbe O_1^n d'ordre n et considérons cette courbe.

Considérons de même la courbe O_2^n obtenue à l'aide de $\frac{n(n+3)}{2}$ points des points β.

L'ensemble des courbes $O_1^{n'}$, O_2^n, forment une certaine courbe d'ordre $n+n'$, soit $O_1^{n+n'}$, il en est de même de l'ensemble des courbes $O_2^{n'}$, O_1^n. Soit $O_2^{n+n'}$ cette dernière.

Ces courbes $O_1^{n+n'}$, $O_2^{n+n'}$, se coupent en $(n+n')^2$ points commutatifs.

En d'autres termes les n'^2 points ω', les $\frac{n(n+3)}{2}$ points α et les $\frac{n(n+3)}{2}$ points β que nous avons considérés déterminent un système de points commutatifs d'ordre $n+n'$.

Je dis qu'ils n'en déterminent qu'un.

Car sinon, soit A un quelconque des points de l'un de ces systèmes. Par un autre point quelconque B du plan et les points de ce système il ne passera qu'une seule courbe d'ordre $n+n'$.

Supposons maintenant que B soit sur $O_1^{n'}$ ou $O^{n'}$ en dehors des points ω'. La courbe se décomposera évidemment en $O^{n'}$, O^n ou en $O_2^{n'}O_1^n$, selon le cas choisi, car cette courbe a avec $O_1^{n'}$, par exemple, si β est sur $O_1^{n'}$:

$$n'^2n^2 + n(n+3) + 1 \quad \text{points communs.}$$

Comme $n'^2 + n(n+3) + 1 > (n+n')n' - \frac{(n'-1)(n'-2)}{2}$ a toujours lieu quels que soient n et $n'(n' > n)$ puisqu'on peut la mettre sous la forme :

$$(n'-n-1)(n'-n-2) + n^2 + 3n + 2 > 0,$$

et comme la courbe que nous considérons est unique, on voit bien qu'il y a décomposition en les courbes $O_1^{n'}$ et O_2. Ce qui prouve que A est sur l'une des courbes $O_1^{n'}$ ou O_2^n et de même sur l'une des courbes $O_2^{n'}$ ou O_1^n.

Il n'y a donc bien qu'un seul système commutatif déterminé par les courbes $O_1^{n+n'}$, $O_2^{n+n'}$.

D'après cela la courbe déterminée par ce système et un point quelconque du plan est unique.

Cherchons maintenant le nombre de points de ce système commutatif $(O_1^{n+n'}, O_2^{n+n'})$ qui se trouvent sur la courbe donnée.

Il y a d'abord les n'^2 points ω'

puis les $\dfrac{n(n+3)}{2}$ points α et β.

En tout

$$n'^2 + n(n+3)$$

points. Or

$$n'^2 + n(n+3) > \frac{(n+n')(n+n'+3)}{2} - 1,$$

car cette inégalité revient à

$$(n'-n-1)(n'-n-2) > 0,$$

ce qui a toujours lieu.

On conclut de là que la courbe donnée $O^{n+n'}$ passe par tous les points communs aux 4 courbes $O_1^{n'}$, $O_2^{n'}$ O_1^n, O_2^n, se coupant deux à deux.

De là nous concluons déjà la proposition suivante qui est fondamentale.

Proposition fondamentale. — n' étant plus grand que n, toute courbe $O^{n'}$ qui passe par n'^2 points ω' commutatifs d'ordre n' et situés sur une courbe $O^{n+n'}$ rencontre cette dernière en nn' autres points α, qui sont tous situés sur une courbe O^n, d'ordre n et cette courbe O^n passera par n^2 points ω fixes commutatifs d'ordre n situés sur $O^{n+n'}$ quand on fera varier la courbe $O^{n'}$.

Cette proposition montre d'abord que, $n' > n$, sur toute courbe $O^{n+n'}$, à un système commutatif de points ω', d'ordre n', on pourra faire correspondre un autre système de points ω commutatifs d'ordre n également sur la courbe $O^{n+n'}$.

Nous dirons que ces deux systèmes ω, ω' sont conjugués.

3e Partie.

Considérons maintenant les faisceaux commutatifs correspondants de courbes O^n, $O^{n'}$, d'ordres n, n', ces courbes passant par les points

de deux systèmes commutatifs ω, ω' conjugués sur la courbe donnée.

Pour déterminer ces deux faisceaux il faut nous donner trois correspondances. Nous prendrons les suivantes :

$$O_1^n O_1^{n'} ; \quad O_2^n, \; O_2^{n'},$$

puis à la courbe O_3^n passant par un autre point quelconque A de $O^{n+n'}$ nous ferons correspondre la courbe $O_3^{n'}$ passant par le même point.

Dans ce système de faisceaux, les courbes O^n rencontrent leur correspondante en des points qui décriront une courbe d'ordre $n + n'$.

Soit $O_1^{n+n'}$. — Cette dernière passe par les

n^2 points ω, les n'^2 points ω',

les nn' points α, les nn' points β,

enfin le point A.

En tout $(n + n')^2 + 1$ points tous situés sur la courbe $O^{n+n'}$. Donc elle coïncidera avec $O^{n+n'}$.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

La proposition a été démontrée dans le cas où n et n' sont tous deux positifs.

La proposition a également lieu quand l'un d'eux est négatif. Nous n'en donnerons pas la démonstration ici.

Il semble en réfléchissant un peu qu'on puisse simplifier cette démonstration. Il existe en effet d'autres démonstrations en apparence très courtes, mais on peut à toutes leur faire l'objection suivante : Les points considérés et déterminant la courbe $O^{n+n'}$, avec le point A peuvent être commutatifs quel que soit le point A. Et on sait que ces cas sont très nombreux. Qu'on prenne par exemple 20 points sur une quartique et une courbe du 5e ordre, tout point A avec ces 20 points seront commutatifs. Il fallait éviter cette objection.

Avant de montrer la portée de cette proposition nous allons compléter la proposition directe.

Proposition. — n' étant plus grand que n, toute courbe O^n qui passe par n^2 points fixes commutatifs situés sur une courbe $O^{n+n'}$ rencontre cette dernière en nn' autres points.

Si parmi ces nn' points on en prend $\frac{n'(n'+3)}{2}$, ou bien nn' étant plus petit que $\frac{n'(n'+3)}{2}$, si on prend tous ces points et $\frac{n'(n'+3)}{2} - nn'$ autres arbitraires ω' fixes, et qu'on y fasse passer une courbe $O^{n'}$ d'ordre n', cette courbe rencontre $O^{n+n'}$ en d'autres points ω' qui avec les premiers formeront un système commutatif.

Toute autre courbe $O_2^{n'}$ coupera $O^{n+n'}$ sur une courbe O^n passant par les ω et réciproquement.

Pour le démontrer il suffit de considérer le cas

$$nn' < \frac{n'(n'+3)}{2}.$$

En considérant les faisceaux commutatifs correspondants, les ordres de la correspondance étant chacun l'unité, déterminés par les 3 correspondances

$$\begin{matrix} O_1^n & O_1^{n'} \\ O_2^n & O_2^{n'} \\ O_3^n & O_3^{n'}, \end{matrix}$$

O_1^n, $O_1^{n'}$, O_2^n, $O_2^{n'}$ étant déterminés comme nous l'avons dit, O_3^n étant une courbe quelconque passant par les ω et un point arbitraire de $O^{n+n'}$, $O_3^{n'}$, la courbe passant par ce point et les points communs à $O_1^{n'}$, $O_2^{n'}$.

Alors O_i^n rencontre $O_i^{n'}$ en des points qui décrivent une courbe $O_1^{n+n'}$ ayant avec $O^{n+n'}$

$$n^2 + \frac{n'(n'+3)}{2} + nn' + 1 \quad \text{points communs.}$$

c'est-à-dire en tout

$$\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2} + \frac{(n-3)n+2}{2}.$$

Les courbes $O_1^{n+n'}$ et $O^{n+n'}$ coïncident donc si ces points ne déterminent qu'une seule courbe. C'est ce qui a lieu. Mais nous ne donnerons pas la démonstration de ce dernier point ici, l'espace ne le permettant pas.

Cette dernière proposition montre que pour déterminer les faisceaux générateurs de la courbe $O^{n+n'}$ on peut commencer indistinctement par les points ω ou les points ω', ce qui était le point important que nous voulions faire remarquer.

Appliquons maintenant la proposition directe et fondamentale à quelques cas particuliers:

Nous aurons successivement les beaux théorèmes suivants.

Théorème I. — Étant donnés $(n-1)^2$ points ω commutatifs sur une courbe O^n, d'ordre n, toute courbe O^{n-1} d'ordre $n-1$ passant par ces points coupe O^n en $n-1$ autres points α.

1° Ces points sont tous sur une droite.

2° Cette droite passe par un point fixe ω' situé sur O^n.

Théorème II. — Étant donnés $(n-2)^2$ points ω commutatifs sur

une courbe O^n, toute courbe O^{n-2} passant par ces points coupe O^n en $2(n-2)$ autres points α.

1° Ces points α sont tous sur une conique.

2° Cette conique passe par 4 points ω' fixes situés sur O^n quand O^{n-2} varie.

Et ainsi de suite dans cet ordre d'idées.

Théorème III. — Il existe une infinité de systèmes de faisceaux commutatifs correspondants, les ordres de la correspondance étant l'unité chacun, les courbes du 1er faisceau étant d'ordre $n-1$ et le second faisceau étant un faisceau de lignes droites et tels qu'une droite quelconque du second rencontre la courbe correspondante dans le 1er faisceau en $n-1$ points qui engendreront une courbe donnée O^n, d'ordre n.

Théorème IV. — Il existe une infinité de systèmes de faisceaux correspondants de courbes O^{n-2} et de coniques, les ordres de la correspondance étant chacun l'unité et tels qu'une conique quelconque du 2me rencontre sa courbe correspondante dans le 1er faisceau en $2(n-2)$ qui engendreront une courbe donnée quelconque d'ordre n.

Et ainsi de suite.

Nous avons donné explicitement ces 4 théorèmes, quoique en apparence inutiles, pour montrer la valeur de la proposition fondamentale et parce que ces 4 théorèmes sont les bases des belles propriétés des courbes algébriques d'ordre quelconque que nous allons donner.

Mais d'abord appliquons le théorème III aux cubiques.

Constructions des cubiques par points.

Soient 9 points A déterminant une cubique. Prenons 4 de ces points A_1, A_2, A_3, A_4, faisons y passer une conique quelconque, par exemple celle composée des deux droites A_1A_2, A_3A_4.

A_1A_2 rencontre la cubique en a, ce point est très facile à construire géométriquement.

A_3A_4 rencontre la cubique en b; ce point est aussi connu géométriquement. Enfin ab rencontre la cubique en ω' également facile à construire. Alors on pourra considérer deux faisceaux de droites passant par ω' et de coniques passant par A_1, A_2, A_3, A_4, commutatifs correspondants pour décrire par point la cubique donnée.

Tout revient à déterminer les 3 points a, b, ω pour pouvoir le faire.

Or il est facile de déterminer à l'aide du compas et la règle seuls, le 3me point d'intersection d'une droite avec une cubique, connaissant deux des points. Nous ne donnerons pas cette solution ici.

Voilà donc un moyen très simple pour décrire par point une cubique quelconque.

Construction des quartiques par points.

Soient $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$, 4 des 14 points qui déterminent la courbe.

Par ces points faisons passer une conique, celle composée des deux droites $\omega_1\omega_2$, $\omega_3\omega_4$.

$\omega_1\omega_2$ coupe la courbe en a et b (ces points peuvent se construire géométriquement, je donnerai la solution plus tard), de même $\omega_3\omega_4$ coupe la courbe en a', b' ; ab et $a'b'$ coupent la courbe aux 4 points $\omega'_1\omega'_2\omega'_3\omega'_4$.

Les points ω et ω sont deux systèmes commutatifs conjugués.

On peut donc facilement déterminer des faisceaux générateurs de coniques de la courbe.

Pour construire la courbe il suffira donc de chercher l'intersection de 2 coniques connues.

Cette dernière construction ne peut se faire avec la règle et le compas seuls, mais la géométrie a dit son dernier mot quand elle dit tout ce qu'elle peut.

Du reste, dans ce genre de construction, l'emploi répété du compas et de la règle n'est pas si exact que la construction directe de 2 coniques. Si donc le problème était possible il serait inutile.

Cette dernière remarque a son importance, car il existe des classes de courbes qui peuvent se construire par points à l'aide du compas et de la règle seuls, mais ces constructions sont inutiles, et si on considère les faisceaux générateurs ordinaires on arrive à des constructions plus exactes au point de vue pratique. C'est tout ce que nous en dirons ici.

Nous allons maintenant étudier quelques propriétés générales des courbes algébriques.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES COURBES ALGÉBRIQUES

I. — Propriétés des sécantes.

Proposition. — Les courbes correspondantes $O^n O^{n'}$ de deux faisceaux générateurs quelconques, d'une courbe algébrique $O^{n+n'}$ déterminent sur une sécante quelconque deux divisions de points, algébriques correspondantes distributives totales, les ordres de la correspondance étant n, n' respectivement et dont les coïncidences sont les points d'intersection de la sécante et de la courbe donnée $O^{n+n'}$.

En effet, soit une sécante quelconque, prenons sur cette sécante un point quelconque m.

Par ce point passe une seule courbe O^n du 1er faisceau, à cette courbe ne correspond qu'une seule courbe $O^{n'}$ du second. $O^{n'}$ rencontre la sécante en n' points m' que l'on pourra faire correspondre au point m, ou à l'un quelconque des n points m d'intersection de O^n avec la sécante.

Et réciproquement. Donc, etc.

Soient O_1^n, $O_1^{n'}$, O_2^n, $O_2^{n'}$, O_3^n, $O_3^{n'}$, trois correspondances quelconques des faisceaux.

Représentons les points d'intersection de ces courbes avec la sécante respectivement par

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, \ldots a_n; \quad a'_1, a'_2, \ldots a'_{n'},\\ &b_1, b_2, \ldots b_n; \quad b'_1, b'_2, \ldots b'_{n'},\\ &c_1, c_2, \ldots c_n; \quad c'_1, c'_2, \ldots c'_{n'}, \end{aligned}$$

enfin soient m, m' deux points correspondants quelconques, on aura entre ces points la relation suivante (qui est comme on sait l'équation caractéristique pouvant représenter les divisions distributives)

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{a_1m.a_2m \ldots a_nm}{b_1m.b_2m \ldots b_nm} : \frac{a_1c_i.a_2c_i \ldots a_nc_i}{b_1c_i.b_2c_i \ldots b_nc_i} = \frac{a'_1m' \ldots a'_{n'}m'}{b'_1m' \ldots b'_{n'}m'} : \frac{a'_1c'_j \ldots a'_{n'}c'_j}{b'_1c'_j \ldots b'_{n'}c'_j}.$$

La courbe $O^{n+n'}$ rencontre la sécante en $n+n'$ points, pour ces points m on aura

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{a_1m \ldots a_nm}{b_1m \ldots b_nm} : \frac{a_1c \ldots a_nc}{b_1c \ldots b_nc} = \frac{a'_1m \ldots a'_{n'}m}{b'_1m \ldots b'_{n'}m} : \frac{a'_1c' \ldots a'_{n'}c'}{b'_1c' \ldots b'_{n'}c'};$$

enfin si c est sur la courbe, soit p, il viendra

$$(\mathrm{III}) \quad \frac{a_1m \ldots a_nm}{b_1m \ldots b_nm} : \frac{a_1p \ldots a_np}{b_1p \ldots b_np} = \frac{a'_1m \ldots a'_{n'}m}{b'_1m \ldots b'_{n'}m} : \frac{a'_1p \ldots a'_{n'}p}{b'_1p \ldots b'_{n'}p}.$$

Ces relations nous seront très utiles.

Proposition. — Etant données deux correspondances $O_1^nO_1^{n'}$, $O_2^nO_2^{n'}$, de deux faisceaux générateurs d'une courbe $O^{n+n'}$ quelconque, et un point fixe A, quelconque, du plan. Par A menons une sécante quelconque rencontrant les courbes $O_1^nO_1^{n'}$, $O_2^nO_2^{n'}$, aux points $a_1a_2 \ldots a_n$; $a'_1a'_2 \ldots a'_{n'}$; $b_1b_2 \ldots b_n$; $b'_1b'_2 \ldots b'_{n'}$.

Les points m, où la sécante rencontre la courbe donnée $O^{n+n'}$ satisfont à la relation

$$\frac{a_1m \ldots a_nm}{b_1m \ldots b_nm} : \frac{a_1\mathrm{A} \ldots a_n\mathrm{A}}{b_1\mathrm{A} \ldots b_n\mathrm{A}} = k. \frac{a'_1m \ldots a'_{n'}m}{b'_1m \ldots b'_{n'}m} : \frac{a'_1\mathrm{A} \ldots a'_{n'}\mathrm{A}}{b'_1\mathrm{A} \ldots b'_{n'}\mathrm{A}} \quad (\mathrm{I}),$$

k étant une constante quelle que soit la direction de la sécante.

En effet reprenons les courbes des trois correspondances $O_1^n O_1^{n'}$, $O_2^n O_2^{n'}$, $O_3^n O_3^{n'}$, et appliquons-leur la relation démontrée dans la théorie des faisceaux commutatifs. On aura

$$\frac{a_1 c_i \dots a_n c_i}{b_1 c_i \dots b_n c_i} : \frac{a_1 A \dots a_n A}{b_1 A \dots b_n A} = k_1,$$

k étant une constante quelle que soit la direction de la sécante. On aura de même

$$\frac{a'_1 c_j \dots a'_{n'} c_j}{b'_1 c_j \dots b'_{n'} c_j} : \frac{a'_1 A \dots a'_{n'} A}{b'_1 A \dots b'_{n'} A} = k_2.$$

En combinant avec la relation I ci-dessus on obtient la relation cherchée.

La formule I se prête à beaucoup d'applications.

Proposition. — Étant donnés deux faisceaux générateurs d'une courbe algébrique $O^{n+n'}$. Toute courbe O^n du premier faisceau rencontre une sécante quelconque passant par deux des points d'intersection de la correspondante $O_i^{n'}$ de O_i^n avec $O^{n+n'}$ en des points qui forment deux divisions en involution commutatives totales dont les points communs à $O_i^{n'}$, $O^{n+n'}$ et la sécante sont deux points correspondants.

Il est facile d'établir cette proposition.

Supposons $n = 2$, $n' = n - 2$.

On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition. — **Propriété du quadrilatère inscrit dans une courbe algébrique.** — Etant donné un quadrilatère quelconque inscrit dans une courbe algébrique $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$, considérons un système commutatif ω' de points d'ordre $n-2$ conjugué des points ω.

Une courbe quelconque O^{n-2} passant par ces points admet avec la courbe donnée $O^{n+n'}$ des sécantes passant par deux de leurs points communs m_i, m_j. Ces sécantes rencontrent les côtés du quadrilatère en des points qui avec les points m_i, m_j de la courbe $O^{n+n'}$ forment deux divisions homographiques en involution.

En appliquant aux cubiques, on obtient :

Proposition. — Etant donnés 4 points d'une cubique. Soit ω le point commutatif conjugué du système commutatif de ces 4 points. Une sécante quelconque passant par ω rencontre les côtés du quadrilatère des 4 points et la cubique en 6 points en involution.

Supposons que le quadrilatère soit celui formé par les 4 points des 2 points de contact à l'infini sur deux asymptotes. On a la belle proposition suivante :

Proposition. — Étant donnée une cubique quelconque O^3. Soient φ_1, φ_2, φ_3, les trois points à distance finie où les asymptotes coupent la courbe (ces points sont en ligne droite). Une sécante quelconque passant par l'un de ces points φ coupe la courbe et les asymptotes qui ne passent pas par ce point en des points tels que les segments compris entre la courbe et ces asymptotes soient égaux (c'est une propriété correspondante à celle de l'hyperbole).

En faisant de même pour une courbe quelconque on a :

Proposition. — Étant donnée une courbe quelconque. Soient $\varphi_1 \ldots \varphi_i$ les points où les asymptotes rencontrent la courbe à distance finie. (Ces points sont tous sur une courbe O^{n-2} d'ordre $n-2$.)

Soient Δ_1 Δ_2, deux quelconques des asymptotes, tous les points φ qui ne sont pas sur Δ_1 Δ_2, au nombre de $(n-2)^2$ sont commutatifs. Une courbe quelconque O^{n-2} passant par ces points coupe la courbe donnée en des points m.

Toute sécante joignant deux de ces points m coupe les asymptotes Δ_1 Δ_2 en des points tels que les segments compris entre ces asymptotes et ces deux points m soient égaux.

(Soient m_1 m_2 les deux points m, par où passe la sécante, et a_1 a_2 les points de Δ_1 Δ_2 sur la sécante, on aura $a_1m_1 = a_2m_2$.)

La même proposition appliquée aux courbes générales donne :

Proposition. — Étant donnée sur une courbe O^n d'ordre n, un système quelconque commutatif de points d'ordre $n-1$, soit ω' le point commutatif conjugué de ce système, et O_1^{n-1}, O_2^{n-1} deux courbes quelconques passant par le 1er système. Toute droite passant par ω' rencontre les courbes O^n, O_1^{n-1}, O_2^{n-1}, en 3 systèmes de $n-1$ points qui appartiennent à une division en involution commutative totale.

On pourrait encore formuler d'autres propositions intéressantes ; mais comme elles sont toutes contenues dans la proposition générale, nous nous contenterons de mentionner encore l'avant-dernière proposition appliquée aux quartiques. Et nous allons maintenant traiter de propriétés plus en rapport avec le but de ce Mémoire.

II. — Propriétés des asymptotes des courbes algébriques.

Proposition. — Soit O^n une courbe d'ordre n. Soient θ_1, θ_2, ..., θ_n, ses n asymptotes, et $\varphi_{(ij)}$ les points à distance finie où ces droites rencontrent O_n.

Tous ces points au nombre de $n(n-2)$ sont tous sur une courbe O^{n-2} d'ordre $n-2$. Nous l'appellerons la courbe des points φ ou O_φ^{n-2}.

Il est facile de démontrer cette proposition.

Il est facile de voir aussi que tous les points sur θ_φ^{n-2} et $n-2$ asymptotes quelconques donnent $(n-2)^2$ de points φ commutatifs.

Proposition. — Soient O^n une courbe algébrique, O_φ^{n-2} sa courbe des φ et A un point quelconque du plan.

Par ce point menons une droite quelconque rencontrant les asymptotes au point α_i, la courbe des φ aux points β_i et la courbe O^n en des points m.

Quelle que soit la sécante on aura

$$\frac{\alpha_1 m . \alpha_2 m \dots \alpha_n m}{\beta_1 m . \beta_2 m \dots \beta_{n-2} m} : \frac{\alpha_1 A \dots \alpha_n A}{\beta_1 A \dots \beta_{n-2} A} = K, \qquad (I)$$

K étant une constante quelle que soit la direction de la droite.

Il est facile de démontrer cette proposition, car en prenant $(n-1)^2$ de points ω, situés sur $n-1$ asymptotes θ, la courbe des φ et la droite de l'infini on obtient un système commutatif dont le point commutatif ω', conjugué est le point à l'infini sur la dernière asymptote.

En appliquant à ces systèmes la proposition générale sur les sécantes la relation (I) se trouvera établie.

Nous ne ferons aucune application ici de cette proposition.

Si on représente par d_i la distance du point m de la courbe à l'asymptote θ_i la relation (I) pourra s'écrire

$$d_1 . d_2 \dots d_n . \frac{\beta_1 A \dots \beta_{n-2} A}{\beta_1 m \dots \beta_{n-2} m} = K. \qquad (II)$$

K étant également une constante.

III. — Propriétés géométriques des foyers d'une courbe algébrique.

On sait qu'on appelle foyer d'une courbe algébrique un des points de rencontre des tangentes issues des points cycliques à la courbe.

Une courbe algébrique a en général $n^2(n-1)^2$ de foyers, dont $n(n-1)$ sont réels.

Proposition. — Etant donnée une courbe algébrique O^n d'ordre n. Soient F l'un de ses foyers et D la droite qui joint les points de contact des droites isotropes issues du foyer. (Nous appellerons cette droite la directrice du foyer F.)

Menons les tangentes à O^n aux points où la directrice rencontre cette courbe. Soient δ_i ces tangentes. Ces tangentes rencontrent O^n en des points ψ.

1° Ces points ψ sont tous sur une courbe O^{n-2} d'ordre $n-2$. Nous l'appellerons la courbe des ψ ou O_ψ^{n-2}.

Soit enfin A un point quelconque du plan. Par ce point menons

une droite quelconque rencontrant la courbe des ψ aux points a_i, et la courbe O^n aux points m_i.

Représentons enfin par d_i la distance du point m de la courbe à l'une des tangentes δ_i et par d, la distance du même point à la directrice, pour tout point m de la courbe on aura :

$$\frac{d^2}{R^2 . d_1 . d_2 \ldots d_{n-2}} \cdot \frac{a_1 m \ldots a_{n-2} m}{a_1 A \ldots a_{n-2} A} = K, \qquad (I).$$

R étant la distance de m au foyer, F et K une constante.

Il est facile de démontrer cette relation. Nous n'indiquerons que les points saillants de la démonstration.

Soient α_1, α_2, les points de contact des droites isotropes issues de F.

Les coniques tangentes en α_1 et α_2 à la courbe O^n forment un faisceau commutatif de courbes du second ordre. Les $(n-2)^2$ points ψ qui ne sont pas sur les droites isotropes forment un système commutatif d'ordre $n-2$ conjugué des points $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$ on connaît donc ainsi deux faisceaux générateurs particuliers de la courbe donnée.

En appliquant à ce système la proposition générale sur la sécante la relation (I) se trouvera établie.

On peut généraliser les propositions sur les asymptotes et sur les foyers.

Faisons remarquer que quand la directrice et le foyer correspondant sont connus il est facile de déterminer géométriquement la courbe O^{n-2} à l'aide de la relation (I), ce qui est utile car on ne connaît pas géométriquement les droites isotropes.

IV. — Propriétés des systèmes commutatifs de points sur une courbe algébrique

Étant donnée une courbe $O^{n+n'}$, algébrique et d'ordre $n+n'$ et soit ω' un système commutatif de points d'ordre n' sur $O^{n+n'}$, une courbe quelconque $O_i^{n'}$ passant par ces points rencontre $O^{n+n'}$ en nn' points e. Nous appellerons ces points e les points du système E_i des points ω'.

Proposition. — Étant donnée une courbe $O^{n+n'}$, $(n' < n)$.

Soit ω' un système commutatif d'ordre n' sur $O^{n+n'}$.

Considérons 4 systèmes E_1, E_2, E_3, E_4 quelconques des points ω'.

Un système commutatif d'ordre n conjugué du système ω' est toujours tel :

1° que les courbes O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n, qui passent par ce système ω et

l'un quelconque des points e des systèmes E passent par tous les autres points e du même système E.

2° Le système conjugué ω se déplaçant sur la courbe $O^{n+n'}$, le rapport commutatif des quatre courbes O_1^n, O_2^n, O_3^n, O_4^n est constant quel que soit le système ω sur $O^{n+n'}$.

D'après tout ce que nous avons dit, il n'est pas difficile d'établir cette proposition.

Proposition. — Étant donnés $(n+n')^2$ de points commutatifs d'ordre $n+n'$, si parmi ces points il y en a n^2 commutatifs entre eux d'ordre n tous les autres points du 1er système seront sur une courbe d'ordre $2n'$.

En effet considérons deux systèmes de faisceaux générateurs de courbes, O^n, $O^{n'}$ et O^n $\theta^{n'}$, de deux courbes $O_2^{n+n'}$, $O_1^{n+n'}$ passant par le système d'ordre $n+n'$, ces faisceaux étant construits à l'aide du système d'ordre n, nous donnant ainsi des courbes O^n communes aux deux systèmes de faisceaux.

D'après cela les faisceaux $O^{n'}$ et $\theta^{n'}$ seront également correspondants et $O^{n'}$ rencontrera $\theta^{n'}$ en des points sur une courbe $O^{2n'}$ qui passera par tous les points du système d'ordre $n+n'$ et n'appartenant pas au système d'ordre n, donc etc.

V. — Propriétés des normales a une courbe algébrique menées par un point donné P.

Soit O^n la courbe donnée.

Considérons un point quelconque à l'infini. Soit O_i^{n-1} sa polaire par rapport à O^n, O_i^{n-1} passe par $(n-1)^2$ de points fixes.

A ces polaires O_i^{n-1} faisons correspondre les droites perpendiculaires menées par P (le point donné) aux tangentes, toutes parallèles, menées par les $n(n-1)$ points communs de O^n et de O_i^{n-1}.

Nous formerons ainsi deux faisceaux commutatifs de courbes et de droites.

Les points communs à une même correspondance décrivent une courbe d'ordre n, cette courbe passe par :

1° les pieds des normales menées de P à O^n.

2° par P.

3° par les $(n-1)^2$ pôles de la droite de l'infini par rapport à O^n.

4° par les points singuliers de O^n.

De plus :

5° Si $M\infty$ est un point à l'infini de cette courbe des pieds des normales et si on prend le conjugué harmonique d'ordre 1 de ce point

par rapport à O^n, soit $M'\infty$ ce point, l'angle $M\infty PM'\infty$ sera droit.

6° On peut mener n^2 normales par un point donné à une courbe d'ordre n.

Nous finirons ce Mémoire par la proposition suivante sur les courbes polaires, comme application directe des propositions précédentes, ajoutons que toute la théorie des courbes polaires pourrait se faire aussi simplement que celles des coniques faite à l'aide de l'homographie, si on veut se servir de l'hétérographie algébrique que nous venons d'exposer.

VI. — Propriétés des courbes polaires.

Proposition. — Les courbes polaires d'ordre i d'un point fixe P, par rapport à toutes les courbes d'un faisceau de courbes commutatif d'ordre n passent par i^2 points fixes.

Proposition. — Le lieu géométrique des pôles d'une droite fixe par rapport à toutes les courbes O^n, d'un faisceau commutatif de courbes d'ordre n est une courbe $O^{2(n-1)}$ d'ordre $2(n-1)$

Cette courbe passe :

1° Par tous les points singuliers des courbes O^n du faisceau donné, dont le nombre est $3(n-1)^2$.

2° Par toutes les $2(n-1)$ coïncidences des divisions en involution commutatives totales déterminées par les courbes O^n sur la droite donnée.

3° Par les $(n-1)^2$ points fixes par lesquels passent les polaires d'ordre $n-1$ d'un point quelconque de la droite donnée par rapport aux courbes O^n.

On peu démontrer ces deux propositions aisément à l'aide des théories précédentes.

On remarquera cependant que la démonstration ne donnera pas le nombre $3(n-1)^2$ de points singuliers qu'admettent toutes les courbes O^n du faisceau donné. Il faut établir ce point séparément. On le fera à l'aide de la théorie des polaires.

La solution géométrique est simple, la démonstration analytique est un peu délicate et longue.

ÉTUDE DU SYSTÈME DIGESTIF DE LA LANGOUSTE

Examiné dans son ensemble, l'appareil digestif de la Langouste ne semble pas très compliqué. Il se compose, faisant suite à la bouche, d'un estomac, garni d'une armature de plaques dures, auquel fait suite un intestin parfaitement rectiligne qui parcourt la queue et vient s'ouvrir à un anus situé à la base de la partie en éventail appelée telson ; à ce système est annexé un organe double d'apparence glandulaire dont chaque partie communique à l'estomac par un court canal, et que les naturalistes désignent sous le nom de foie ou hépato-pancréas.

Voilà ce que nous apprend l'anatomie descriptive ; mais, si poussant plus loin nos recherches, nous étudions au microscope ces différents organes, nous serons frappés immédiatement de l'impossibilité dans laquelle sont ces organes, appelés estomac et intestin, de remplir les fonctions physiologiques auxquelles leur nom semble les destiner, c'est-à-dire de digérer et d'absorber des aliments, et, même à un examen superficiel, nous pouvons acquérir la certitude que c'est l'organe appelé foie qui remplit ces fonctions.

Dans cet article, je vais étudier d'abord la structure de l'estomac et de l'intestin, ensuite celle du foie, et j'essayerai d'en expliquer le fonctionnement cellulaire ; j'exposerai enfin une série d'expériences que je compte faire plus tard, par lesquelles j'essayerai de prouver que la théorie que j'avance est exacte.

La technique que j'ai employée n'a rien de nouveau ; j'ai fixé les pièces[1] au liquide de Flemming et au liquide de Zenker ; après passage dans des alcools de plus en plus forts, je les ai imprégnées au xylol, incluses dans la paraffine et coupées au microtome Minot. J'ai coloré les pièces fixées au Flemming par la safranine et le carmin d'indigo picriqué (je signale ici une coloration que j'ai toujours vu se produire par cette méthode, et qui est souvent utile ; la membrane basale des épithéliums se colore en bleu vert, et tranche par cette coloration sur la couleur verte du protoplasma et rouge du noyau). Les pièces fixées par le Zenker ont été colorées à l'hématéine et l'éo-

1. Les pièces provenaient de petites langoustes longues de 15 à 20 centimètres au plus.

sine, à l'hématoxyline à l'alun de fer par la méthode d'Heidenhain, et par la triple coloration d'Erlich-Biondi.

Je conserverai leur nom à l'estomac et à l'intestin à cause de leur forme, mais je préfère donner au foie le nom d'organe digestif; quoique je reconnaisse que cet organe remplit la fonction glycogénique, je pense que son rôle principal est l'absorption et l'assimilation des aliments, et, en le désignant simplement sous le nom d'organe digestif, je crois être plus dans le vrai.

Estomac et Intestin.

L'estomac est une poche musculeuse armée de plaques dures; je n'étudierai pas la disposition de ces plaques, que l'on trouvera décrites dans les traités de zoologie; ce qui nous intéresse surtout, au point de vue du fonctionnement, c'est l'épithélium.

Cet épithélium est formé, comme dans l'intestin, d'une seule rangée de cellules assez hautes, 20 à 30 μ, cylindriques, peu serrées les unes contre les autres. Mais, ce qui est assez intéressant, c'est que d'un bout à l'autre du tube digestif, ces cellules sont recouvertes d'une épaisse couche cuticulaire. Cette couche, probablement de même nature que la carapace chitineuse externe, est formée de couches stratifiées. Dans l'estomac, elle atteint une épaisseur assez considérable, 20 à 30 μ; elle n'adhère que faiblement aux cellules sous-jacentes, et, généralement, elle apparaît détachée dans la coupe, mais les cellules sont recouvertes d'une couche mince qui adhère fortement et semble faire partie de la cellule. Détail assez curieux, cette cuticule est bordée du côté libre par une couche qui se colore énergiquement par la safranine et l'hématoxyline au fer. Cette couche est mince, elle n'a guère que 3 ou 4 μ. La partie sous-jacente se colore par les couleurs acides.

Dans l'intestin, elle est infiniment plus mince; les deux parties, acidophile et basophile, sont à peu près de la même épaiseur.

Le protoplasma de ces cellules ne présente rien de particulier, il semble légèrement strié; il ne contient pas de graisse, ni aucun produit de sécrétion; on n'y trouve pas non plus de différenciations protoplasmiques.

Le noyau est volumineux, riche en grains de chromatine, mais je n'y ai pas vu de nucléole vrai.

L'intestin, vu en coupe, présente une série de villosités vraies (j'insiste sur cet adjectif, car dans l'organe digestif, nous aurons à étudier de fausses villosités), c'est-à-dire des villosités formées par du tissu conjonctif et musculaire. Ces villosités forment des bandes

continues dans le sens de la longueur, parallèles à l'axe de l'intestin qui s'étendent d'un bout à l'autre de l'organe, ainsi qu'on peut le voir à l'œil nu.

De cette étude, il me semble ressortir avec évidence que l'estomac et l'intestin ne sont que des canaux, adducteur et abducteur des substances alimentaires. L'estomac, avec son système de plaques dures, doit simplement parfaire le broyage. On comprendrait difficilement que sous son épaisse cuticule, avec ses cellules sans caractère glandulaire, il puisse produire un suc gastrique. Il en est de même de l'intestin, il me semble être dans l'impossibilité complète d'absorber les matières digérées.

Il en est tout autrement de l'organe digestif. Ses cellules offrent toutes les marques d'une grande activité ; nous allons passer à son étude.

Organe digestif.

Examinée à un faible grossissement, une coupe de l'organe digestif présente un ensemble de nombreux culs-de-sac coupés dans toutes les directions ; sur la quantité, beaucoup étant coupés perpendiculairement à l'axe, nous pouvons facilement en comprendre la disposition. Chaque cul-de-sac se compose d'une membrane conjonctive sur laquelle repose une seule rangée de cellules ; mais ces

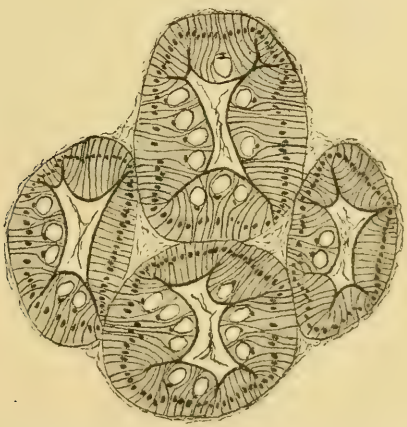


Fig. 1. — Coupe de l'organe digestif, faible grossissement. — Quatre culs-de-sac dont les cellules contiennent de grosses vacuoles, représentées vides pour la clarté du dessin, mais contenant en réalité des masses coagulées.

cellules, de taille inégale, disposées en rang de taille, si je puis m'exprimer ainsi, dessinent dans le cul-de-sac une lumière en forme de

croix ou d'étoile dont l'extrémité des branches est souvent divisée en deux (*fig.* 1). A la première inspection, on pourrait penser que l'on a affaire à des villosités, comme les villosités qui dans l'intestin de la langouste et des animaux supérieurs, augmentent la surface de l'organe, mais, dans le cas qui nous occupe, nous avons affaire à de fausses villosités ; en effet, le tissu conjonctif n'y prend aucune part, et elles ne sont formées que par les dimensions plus ou moins grandes des cellules. La taille des cellules partant de 30 à 40 μ pour les plus petites, arrive rapidement et régulièrement à 70 et 80 μ pour les plus grandes, elle diminue ensuite. Il y a ainsi, en suivant la circonférence d'un cul-de-sac, de trois à cinq grandes élevures, avec généralement de plus petites situées entre les grandes, et dont la hauteur n'atteint que 48 à 50 μ.

Presque toujours, les cellules les plus élevées contiennent une ou plusieurs énormes vacuoles deux ou trois fois plus grosses que la cellule qui les contient. Ces vacuoles déchiquètent le sommet de la villosité et lui donnent un aspect de dentelle assez remarquable. C'est surtout sur cette apparence qu'à un faible grossissement on a l'impression que ces cellules sont douées d'une grande activité.

Sur une coupe passant par l'axe d'un cul-de-sac, et intéressant en même temps d'un côté les cellules à grosses vacuoles, de l'autre les cellules les plus basses, on peut voir que ces cellules sont de même ordre sur toute la longueur de la partie coupée ; il est facile d'en conclure que ces replis sont parallèles à l'axe et forment des colonnes demi-cylindriques bombant plus ou moins dans la lumière du cul-de-sac.

Du côté de la lumière, les cellules sont limitées par une ligne parfaitement nette qui correspond, comme nous le verrons plus loin, à un plateau finement strié.

Suivant l'abondance et la dimension des vacuoles, la lumière du cul-de-sac est assez large ou réduite à la dimension d'une fente. Elle contient presque toujours une sorte de ruban pelotonné sur lui-même et que nous verrons provenir de la chûte en masse des plateaux. Souvent aussi elle est remplie de matières, coagulées par les réactifs, qui doivent être des matières alimentaires.

Si, sur des coupes sériées, nous suivons un cul-de-sac, nous voyons qu'à une certaine distance de son extrémité sa lumière devient très large, et que les vacuoles disparaissent complètement. A cet endroit, les cellules du cul-de-sac sont en non activité ; cette constatation est importante, car nous aurons ainsi des repères précis pour l'essai de fonctionnement que je présenterai, lorsque nous aurons étudié les cellules.

Tel est, à un faible grossissement, sur une coupe d'ensemble, l'as-

pect des culs-de-sac de l'organe digestif. Si, maintenant, nous prenons un grossissement plus puissant, nous constatons que la présence des vacuoles n'est pas la seule différence qu'il y ait entre les cellules, et, à côté des cellules vacuolaires, nous en voyons d'autres, parmi les cellules basses, dont le protoplasma est rempli de granulations, d'autres dont le protoplasma est nettement fibrillaire. Les noyaux ne sont pas non plus identiques, tantôt très vésiculeux, tantôt sombres et

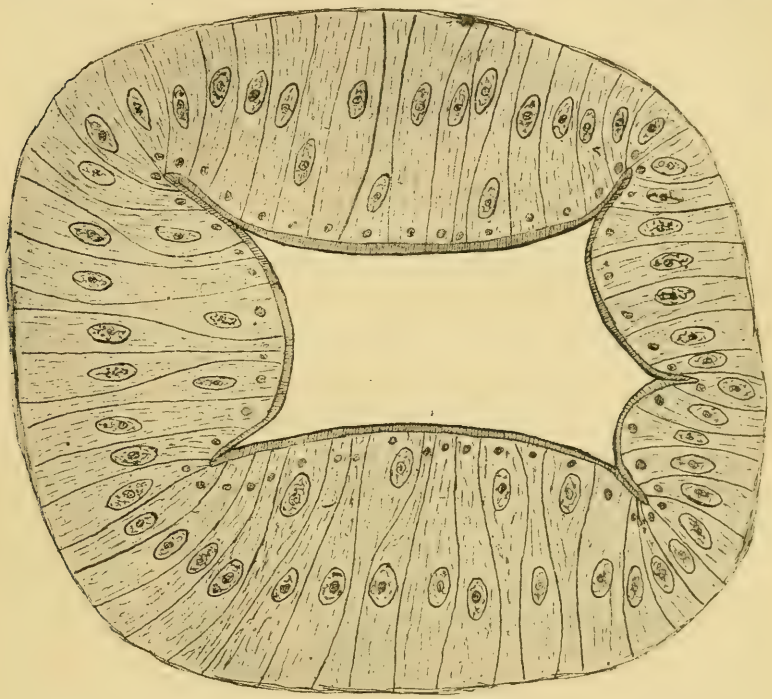


Fig. 2. — Coupe d'un cul-de-sac dont toutes les cellules sont au repos. (Objectif — 1/12 Nachet, oculaire 2.)

chargés de chromatine, mais contenant le plus souvent un gros nucléole vrai. De plus, dans toutes les cellules, nous constatons l'existence d'une différenciation protoplasmique sous la forme d'un grain homogène, tantôt basophile, tantôt acidophile. Pour essayer d'expliquer le fonctionnement de cet organe dont les cellules, parties d'un même type, arrivent à une si grande complication, nous allons étudier la cellule au repos que l'on voit vers l'extrémité des culs-de-sac.

1° Cellules en non activité. — Ces cellules présentent à étudier le protoplasma, le noyau, le grain différencié et le plateau (*fig.* 2).

Ce sont des éléments cylindriques, allongés, qui dans leur plus petite taille atteignent 20 à 30 μ ; au sommet des colonnes leur dimension atteint 70 à 80 μ et, ainsi que je l'ai dit au début, leur taille augmente progressivement sans ressaut brusque.

Le protoplasma est nettement strié dans le sens de la longueur ; à l'état de repos cette striation est un peu diffuse, mais ainsi que nous l'étudierons plus loin, dans certains cas elle apparaît avec une telle netteté que je ne pourrais mieux comparer la cellule qu'à une mèche de cheveux. Dans d'autres cellules, l'aspect est plutôt granuleux et cet aspect s'exagérera aussi dans la pleine activité. Doit-on dire que ces cellules sont différentes, je ne le crois pas, mais je pourrais dire qu'elles viennent de remplir des fonctions différentes ; à part cette légère dissemblance, que j'essayerai d'expliquer, ces cellules sont analogues.

Le noyau est un gros noyau ovalaire contenant de nombreux grains de chromatine réunis entre eux par de fins filaments ; il contient presque toujours un gros nucléole vrai à réaction acidophile ; sur les coupes colorées uniquement par le carmin d'indigo ou l'éosine, sans coloration nucléaire, ce nucléole apparaît, dans le premier cas vert, dans le second rose, seul coloré dans le noyau. Le noyau mesure environ 10 μ dans son grand diamètre, le nucléole 3 à 4 μ.

La position des noyaux mérite d'être étudiée particulièrement, car, de cette position, on peut conclure d'avance que telle cellule est destinée à l'absorption, telle autre à la sécrétion. Excepté au niveau des grosses colonnes ils sont tous placés à la même hauteur, vers le tiers inférieur de la cellule. Dans les grosses colonnes, une partie est au même niveau, une autre est située plus près de la superficie, (cet aspect pourrait faire croire à une double rangée de cellules, mais il est facile de voir, à condition que la coupe soit exactement perpendiculaire à l'axe, que à chaque noyau correspond une cellule qui occupe toute la largeur de la colonne) ; or, nous retrouverons des noyaux élevés dans les cellules à grosses vacuoles, ces noyaux embrassent la vacuole à son plein développement, et il semble que leur présence soit nécessaire pour sa formation. En suivant des séries de cellules où la vacuole se développe, il est facile de voir que ce ne sont que les cellules à noyau élevé qui leur donne naissance. La place du noyau est donc déjà, dans la cellule au repos, une marque de la future différenciation fonctionnelle de la cellule.

Le grain différencié que le professeur Henneguy décrit, sous le nom de parasome, dans les cellules hépatiques de l'écrevisse (La Cellule, page 156), est une formation absolument constante dans la cel-

lule à l'état de repos. Il est toujours situé dans une position fixe, au milieu de la cellule, à 5 ou 6 μ du plateau supérieur ; il semble absolument homogène, et est plus réfringent que les autres parties du protoplasma. Sa réaction est toujours acidophile dans les cellules au repos, mais nous verrons apparaître au cours de l'activité des corpuscules à grains basophiles. La disposition concentrique des fibrilles du protoplasma autour de ce parasome, n'est pas absolument nette dans le cas qui nous occupe.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, toutes les cellules sont bordées par un plateau qui présente la plus grande ressemblance avec le plateau des cellules intestinales des animaux supérieurs. Ces plateaux semblent se souder bord à bord de façon à recouvrir les cellules d'une couche continue. Ils sont énergiquement acidophiles ; ils sont finement striés, et semblent jouir d'une assez grande élasticité, car, dans les cellules en activité que nous allons étudier, lorsque la surface devient trois ou quatre fois plus grande, le plateau continue à les recouvrir et semble s'étirer, il devient alors plus clair, et la striation apparaît alors plus nettement.

Il est très fréquent d'observer dans ces culs-de-sac où toutes les cellules sont au repos des cellules en karyokinèse. Ces figures présentent ceci de remarquable, que la plaque équatoriale est, dans la grande majorité des cas, placée parallèlement à l'axe de la cellule ; les centrosomes, qui sont infiniment petits, sont situés de chaque côté près du bord ; la division a donc lieu longitudinalement. Le fuseau achromatique se colore vigoureusement par le carmin d'indigo et apparaît très nettement.

2° Cellules en activité.—Dans ces culs-de-sac où les cellules hautes sont remplies de grosses vacuoles, nous avons à étudier ces cellules et les cellules basses. Nous commencerons par les cellules vacuolaires, que nous étudierons en suivant le développement de la vacuole ; nous avons à analyser le développement de la vacuole et d'une nouvelle différenciation cellulaire, que j'appellerai l'organe de l'absorption, et que je crois être formée par le parasome.

Ainsi que je l'ai déjà exposé, c'est dans les cellules dont le noyau est le plus élevé que l'on voit apparaître la vacuole sous l'aspect d'un espace circulaire dans le protoplasma, non délimité nettement. Dans ces cellules, le noyau est volumineux, parfaitement sphérique, ce qui semblerait indiquer que la tension à l'intérieur est plus élevée.

Le parasome est placé sous le plateau et a augmenté un peu de volume.

Lorsque la vacuole est devenue énorme, elle apparaît remplie

d'une matière coagulée. Le noyau est aplati contre elle et affecte la forme d'un croissant (*fig.* 3) intimement appliqué à sa surface; il devint alors plus petit et se colore d'une façon plus diffuse par la safranine, son nucléole a disparu.

Du côté du sommet, on observe des changements plus importants; le protoplasma est tassé en une masse qui se colore énergiquement par les couleurs acides, il est séparé du plateau par une mince ligne claire, *mais il est réuni à lui par une série de fins filaments.* Or, si nous examinons le parasome dans des cellules dont la vacuole présente déjà une certaine dimension, nous voyons qu'il s'isole, pour ainsi dire, dans la cellule, qu'il devient plus gros, plus diffus et qu'il envoie des filaments au plateau. La masse de protoplasma, ainsi en rapport avec le plateau, serait donc formée par le parasome, et, vu sa situation, ses rapports avec le plateau et la formation de la vacuole, il y a donc tout lieu de penser que cette partie de la cellule joue un rôle dans l'absorption, et pourrait par conséquent être appelée l'organe de l'absoption.

J'ai souvent observé entre le plateau strié et l'organe de l'absorption, dans l'espace clair, une ligne de petits points fort nets, analogues au segment intermédiaire des cils vibratiles.

Il arrive parfois par un heureux hasard que la coupe passe parallèlement à la surface du plateau, on voit alors par transparence, l'organe de l'absorption: au milieu d'un polygone généralement hexagonal formé par le plateau, on voit une masse sombre plus petite, peu nette et qui envoie en rayonnant une quantité de petites lignes vers le plateau.

Du côté du plateau, on observe que celui-ci est devenu plus clair et que la striation est devenue plus nette; sa partie libre semble subir une modification par laquelle sa substance devient plus homogène et finalement se détache avec tous les plateaux voisins qui s'unissent; les plateaux ainsi détachés forment une sorte de ruban pelotonné dans la lumière du cul-de-sac.

La formation du nouveau plateau se ferait aux dépens de la partie claire intermédiaire et le plateau serait formé, ainsi qu'on le voit, sous les plateaux qui se détachent, par de fins filaments en brosse.

Le protoplasma forme les parois de la vacuole, il est tassé à la périphérie; à la partie inférieure, il se place comme un coin entre les cellules voisines.

Les cellules dont le noyau est resté à la base des colonnes envoient entre les cellules vacuolaires des travées de protoplasma qui séparent ces dernières les unes des autres. Elles ne remplissent aucun rôle

dans l'absorption, mais ont peut-être une activité secrétrice, on les voit en effet contenir une assez grande quantité de grains différenciés, qui, contrairement au parasome, se colorent par la safranine et l'hématoxyline au fer. J'ai tout lieu de croire, ainsi que je l'exposerai plus loin, que ce sont ces cellules dont le protoplasma devient fibrillaire.

Etudions maintenant les cellules qui occupent les parties basses entre les colonnes. Nous constatons immédiatement qu'elles présentent cette particularité d'être séparées les unes des autres par un petit espace ; les unes sont bourrées de granulations, les autres sont fibrillaires, mais la quantité des cellules granuleuses l'emporte beaucoup sur les cellules fibrillaires.

Ces cellules, qui semblent très différentes des cellules voisines, ne sont en réalité que ces mêmes cellules dont le fonctionnement dans l'absorption est terminé, et dont une nouvelle fonction, fonction glycogénique probablement, apparaît. En effet, il est facile de suivre cette évolution, car on trouve tous les repères nécessaires pour étudier les passages intermédiaires.

Parmi les cellules granuleuses, on en trouve qui contiennent une vacuole beaucoup moins grosse que celles que nous venons d'étudier et dont le contenu est comprimé par le protoplasma de la cellule. Ces particularités, abondance de granulations dans le protoplasma, masse coagulée comprimée par les parois de la vacuole et surtout diminution totale de la cellule, prouvent que ces cellules sont à la fin de la période d'absorption, et les distinguent facilement de celles qui commencent leur évolution.

D'autres cellules n'ont plus de vacuoles et sont beaucoup plus petites, mais remplies de boules et de grains (*fig.* 3, C) ; les uns se colorent par la safranine, les autres présentent naturellement une coloration jaunâtre (je pense que dans ce cas il s'agit de glycogène), enfin il y a souvent de la graisse. Les noyaux de ces cellules sont gros, ils sont parfaitement sphériques et contiennent un volumineux nucléole.

On voit réapparaître le parasome sous la forme d'une boule claire, homogène, presque aussi grosse que le noyau, à contours moins nets que dans les cellules en activité, et contenant un ou deux grains à réaction basophile.

Comme nous avons suivi la transformation des cellules vacuolaires, nous pouvons suivre celle des cellules à protoplasma fibrillaire. Je n'ai aucun doute sur leur origine, elles proviennent des cellules situées entre les cellules vacuolaires et la striation apparaît lors du mouvement rétrograde des cellules vacuolaires. Elles sembleraient donc

remplir un rôle de soutien et former des sortes d'organes myoïdes. A mesure que la cellule se raccourcit, la striation devient de plus en plus nette, et la cellule prend une forme un peu globuleuse. Au milieu de ces fibrilles, apparaît comme dans les cellules précédentes le

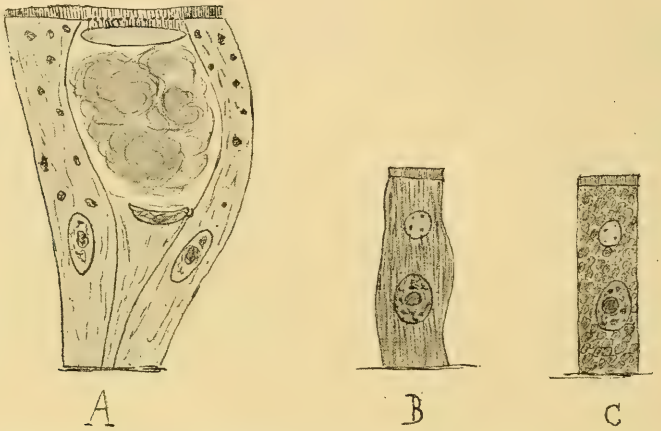


Fig. 3. — A. Une cellule à grosse vacuole entourée de deux cellules hautes.
B. Cellule à protoplasma fibrillaire.
C. Cellule à protoplasma granuleux.
Dans B et C le parasome se reforme sous l'apparence d'une large tache claire contenant des grains basophiles. En A, à sa place, se trouve l'organe d'absorption. (Objectif 1/18 Nachet, Oculaire 2.)

parasome qui se reforme sous l'aspect d'une tache pâle contenant des grains basophiles. Leur noyau est absolument semblable à celui des cellules voisines.

Je signalerai encore dans ces cellules granuleuses, et fibrillaires, une formation dans le protoplasma dont j'ignore la valeur fonctionnelle. A la base des cellules, depuis le moment où les cellules entrent dans la période de régression et d'assimilation, apparaît une masse homogène plus colorable que le reste de la cellule, et retenant assez fortement la safranine. Cette masse est grande, environ 10 μ sur 5 et disposée dans l'axe de la cellule.

La graisse que l'on trouve parfois en grande quantité dans ces cellules n'est pas une production constante ; j'ai des pièces où on ne la trouve qu'en quantité négligeable, dans d'autres elle est extrêmement abondante. Colorée en noire par l'acide osmique, elle se présente sous forme de gouttelettes ayant jusqu'à 7 ou 8 μ de diamètre, rarement plus. Elle est surtout abondante dans les cellules à grandes vacuoles et elle est placée au-dessous des vacuoles, vers la base ; la quantité en est quelquefois considérable, au point que toute la cel-

lule apparaît noire, mais je n'en ai jamais trouvé dans les vacuoles ; la reconstitution de la graisse se ferait donc dans le protoplasma après décomposition pour l'absorption.

On en trouve aussi dans les autres cellules, mais en moins grande quantité, et dans les culs-de-sac au repos, beaucoup de cellules, surtout celles de petite dimension, n'en contiennent pas.

Sur des pièces contenant de la graisse et fixées par le liquide de Zenker, le protoplasma apparaît criblé de petites vacuoles.

Maintenant que nous connaissons les divers éléments que l'on voit dans les culs-de-sac de l'organe digestif, nous pouvons tenter un essai sur l'évolution des cellules dans l'absorption et l'assimilation.

Prenons les cellules au repos ; parmi ces cellules, celles qui sont désignées pour l'absorption se reconnaissent à leur noyau plus élevé que les autres ; au-dessus de ce noyau apparaît une vacuole claire ; à ce moment, le parasome s'approche du plateau, et se met en rapport avec lui par de fins filaments ; il perd sa forme sphérique, devient moins net, et s'étale sous le plateau, il lui est alors relié par une infinité de filaments ; la vacuole a augmenté considérablement de volume, et contient une matière coagulée, qui ne la remplit pas complètement, il y a donc aussi des liquides. Le noyau, collé contre cette énorme vacuole, s'est déformé et aplati ; sa présence est à noter, car, ainsi qu'on le sait depuis longtemps, lorsque dans une cellule l'activité s'exagère en un point, le noyau se place en cet endroit. Le plateau a subi un changement à la suite de l'absorption ; sa striation, d'abord plus apparente au début, s'est effacée et le plateau se détache avec les autres plateaux voisins. Mais, en-dessous de lui, la masse du parasome semble reformer un nouveau plateau.

Cependant la cellule, après avoir absorbé les matières alimentaires, les assimile. Nous voyons alors la vacuole diminuer, la partie liquide disparaît d'abord, la partie, qui se trouve coagulée sur les pièces fixées et qui est probablement de l'albumine, diminue au contact du protoplasma qui maintenant est rempli de grains et de boules, les unes de substances indéterminables, d'autres probablement glycogéniques et d'autres graisseuses. Pendant cette transformation, un nouveau parasome apparaît. A ce moment, le rôle de la cellule change, l'absorption terminée, la cellule *intestinale* se transforme, et devient cellule *hépatique* chargée du rôle glycogénique.

Les cellules voisines, dont le noyau est resté dans la partie inférieure, sont étirées avec les cellules vacuolaires ; pendant l'absorption elles contiennent quelques boules différenciées et sont probablement sécrétantes. Je n'ai pu suivre l'évolution du parasome dans ces

cellules ; mais étant donnée la chûte en ruban continu des plateaux et l'apparition d'une grosse tache pâle dans le protoplasma lorsque la cellule redevient plus petite, il y a tout lieu de penser qu'il évolue dans ces cellules de la même façon que dans les cellules vacuolaires. Lorsque l'absorption est achevée, et que les cellules assimilent le contenu de la vacuole, les cellules inter-alvéolaires semblent devenir temporairement des organes myoïdes.

Telle est la description sommaire de ce que l'on voit sur une coupe de l'organe digestif de la langouste. On remarquera que j'ai négligé beaucoup de points intéressants, mais accessoires (tissu conjonctif, vaisseaux, innervation) ; je ne me suis attaché qu'à l'étude des éléments nobles. J'ai passé rapidement sur l'anatomie topographique, et je n'ai pas étudié la façon dont les aliments peuvent entrer dans l'organe digestif, et dont les déchets en sont rejetés. Mais le travail que je présente actuellement n'est qu'une étude préparatoire et devra être complété.

De même, dans l'essai que j'ai tenté du fonctionnement cellulaire, les preuves ne sont tirées que de déductions plus ou moins discutables. Je compte pour les contrôler faire une série d'expériences que je n'ai pu exécuter jusqu'ici à cause des mauvaises conditions dans lesquelles je travaille (impossibilité de conserver longtemps les animaux vivants) et manque de quelques instruments indispensables.

Les expériences que je veux tenter sont les suivantes :

Examen en coupes, après fixation ordinaire (Flemming et sublimé) d'organe digestifs : 1° ayant subi un long jeûne ; 2° après injection de substances modifiant les sécrétions ; 3° après injection de substances reconnaissables, telles que de la graisse.

Essai de détermination sur des coupes par congélation : 1° du contenu des grosses vacuoles, contenu qui me semble, *a priori*, devoir être une masse d'albumine (partie coagulée), placée dans un liquide à réaction probablement acide ; 2° du contenu des cellules revenues sur elle-même, recherche du glycogène par le sérum iodé.

Je pense que de cette façon, ce travail sera à peu près complet. Je compte tenir au courant la Société Philomathique des résultats de ces expériences et des autres recherches de même ordre que j'ai l'intention de faire porter sur la plus grande variété possible d'animaux.

A. Guieysse.

Fait à Beaulieu-sur-Mer, janvier 1904.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, Directeur.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

NEUVIÈME SÉRIE. — TOME VI

N° 3

1903-1904

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1904

Le Secrétaire-Gérant,

H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons trimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1904

Président : M. Dongier, 82, rue Claude-Bernard, Paris, V^e^.

Vice-Président : M. E.-L. Bouvier, 39, rue Claude-Bernard.

Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard, Paris, 5^e^.

Secrétaire des publications : M. H. Coutière, 12, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris, VI^e^.

Vice-Secrétaire des publications : M. Henri Neuville, 55, rue de Buffon, Paris, V^e^.

Secrétaire des séances : M. Lécaillon, 28, rue Berthollet, Paris, V^e^.

Vice-Secrétaire des séances : M. Léau, 6, rue Vavin, Paris, VI^e^.

Trésorier : M. Et. Rabaud, 104, rue d'Assas.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2^e^ et 4^e^ Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le Bulletin.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

Extraits des Comptes-rendus des Séances

DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

(2e trimestre 1904)

Séance du 9 Avril 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

M. Hanriot est élu comme membre titulaire dans la 2e section.

M. Rabaud présente la candidature, comme membre correspondant dans la 3e section, de M. Jean Turr, assistant à l'Université de Varsovie. Commissaires rapporteurs : MM. Anthony, Lécaillon et Rabaud.

M. Rabaud fait un rapport sur la candidature de M. Bull. Le vote sur les conclusions favorables de ce rapport est remis à la prochaine séance.

M. André fait une communication sur la lemniscate et donne des exemples de production de lemniscates dans certains phénomènes naturels.

M. Ponsot fait une communication sur la règle des phases. Il en donne une démonstration en considérant les masses des composants comme variables, mais en imposant au système la condition d'être formé de phases de volume constant, ce qui introduit autant de relations que de phases entre les accroissements des composantes.

M. Deschamps fait une communication sur une propriété dite d'atomicité des déterminants symétriques.

Séance du 23 Avril 1904. (Assemblée générale.)

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

M. Rabaud fait un rapport favorable sur la candidature de M. Jean Turr ;

Elections de M. Bull et de M. Jean Turr comme membres correspondants.

M. André présente la candidature comme membre titulaire dans la 2e section, de M. Pierre Mahler, 35, avenue Mac-Mahon. Commissaires-rapporteurs : MM. Berthelot, Matignon et Winter.

M. Winter présente la candidature, comme membre titulaire dans la 2e section, de M. Moureu, professeur agrégé à l'Ecole de Pharmacie, 84, boulevard St-Germain. Commissaires rapporteurs : MM. Hanriot, Vincent et Winter.

M. Anthony présente la candidature, comme membre correspondant dans la 3e section, de M. Marceau, docteur en médecine et docteur ès sciences naturelles, professeur suppléant à l'Ecole de médecine de Besançon. Commissaires rapporteurs : MM. Anthony, Noé et Rabaud.

L'assemblée accueille favorablement la demande de M. Ménégaux, assistant au Muséum d'Histoire naturelle, qui désire rentrer comme membre titulaire dans la 3e section. M. Ménégaux avait déjà été élu membre titulaire (13 Avril 1889), puis était devenu membre correspondant (11 janvier 1890) de la Société.

M. Malard, préparateur au laboratoire de zoologie maritime de St-Waast-la-Hougue, élu précédemment membre titulaire dans la 3e section, sera considéré dorénavant, sur sa demande, comme membre correspondant.

La Société décide qu'à partir de l'année 1904-1905 le Bulletin paraîtra aux dates fixes suivantes : 1er février, 1er avril, 1er juin, 1er août, 1er octobre et 1er décembre.

M. Winter lit le rapport de la Commission des comptes. Ce rapport est adopté à l'unanimité.

M. Hanriot fait une communication sur les métaux solubles.

Séance du 14 Mai 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER

M. Winter fait un rapport favorable sur la candidature de M. Moureu. Vote renvoyé à la prochaine réunion.

M. Anthony fait un rapport sur la candidature de M. Marceau. Le vote sur les conclusions favorables de ce rapport est ajourné à la prochaine séance.

M. Henneguy présente la candidature, comme membre titulaire dans la 3e section, de M. Auguste Michel, agrégé de l'Université, docteur ès sciences naturelles, professeur au lycée Michelet. Commissaires rapporteurs : MM. Bouvier, Coutière et Lécaillon.

M. Guieysse entretient la Société d'un projet ayant pour but de mettre en rapport les uns avec les autres les divers laboratoires de biologie. Il y aurait particulièrement intérêt à publier le sujet des questions à l'étude dans ces laboratoires.

M. Anthony fait une communication sur l'anatomie et la morphogénie des Œtheriidœ.

M. Daniel Berthelot fait un rapport favorable sur la candidature de M. Mahler. Le vote sur cette candidature est remis à la séance suivante.

Séance du 28 Mai 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

M. le Président fait part à la Société du décès de M. Marey, professeur au Collège de France, et se fait l'interprète des regrets que l'assemblée éprouve au sujet de cette perte. MM. Anthony et Bull sont désignés pour préparer une notice biographique sur M. Marey; cette notice sera publiée dans le Bulletin.

M. le Président annonce également la mort d'un autre membre de la Société, M. Drake del Castillo. Il exprime les regrets de tous au sujet de ce nouveau deuil. M. Guillaume Grandidier est désigné pour publier, dans le Bulletin de la Société, une notice sur M. Drake del Castillo.

M. Moureu est élu membre titulaire dans la 2e section.

M. Marceau est élu membre correspondant.

M. Lécaillon fait un rapport sur la candidature de M. Michel. Le vote sur les conclusions favorables de ce rapport est remis à la prochaine séance.

M. P. Mahler est élu membre titulaire dans la 2e section.

M. Coutière présente la candidature comme membre titulaire dans la 3e section de M. Launoy, docteur ès sciences naturelles, préparateur à l'Ecole de Pharmacie, 20, rue des Écoles. Commissaires rapporteurs : MM. Anthony, Coutière et Rabaud.

M. Bull fait une communication sur les mouvements très rapides étudiés au moyen de la microphotographie.

M. Rabaud fait une communication sur la monstruosité appelée hernie diaphragmatique.

Séance du 11 Juin 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

M. le Président annonce la mort de M. Victor de Luynes, membre de la Société depuis 1863. Il exprime tous les regrets causés à l'assemblée par cette nouvelle perte. M. Winter est désigné pour publier dans le Bulletin une notice sur M. V. de Luynes.

M. Auguste Michel est élu membre titulaire dans la 3e section. Par

suite de cette élection, M. Hua devient membre honoraire de la Société.

M. Dongier présente la candidature comme membre titulaire dans la 2e section de M. le Dr Marage, docteur ès sciences, 14, rue Duphot. Commissaires rapporteurs : MM. Dongier, Moureu et Winter.

M. Dongier fait une communication sur le rapport entre le coefficient de self-induction et le coefficient d'induction mutuelle.

M. Rabaud fait une communication sur les Anencéphales et Pseudencéphales.

Séance du 25 Juin 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

M. Coutière fait un rapport favorable sur la candidature de M. Launoy. Le vote sur cette élection est ajourné à la prochaine séance.

M. Dongier fait un rapport sur la candidature de M. le Dr Marage et conclut à l'admission de celui-ci. Le vote sur cette candidature est ajourné à la prochaine séance.

M. Guieysse fait une communication sur les causes qui entraînent la regression des diverses parties de la queue du tétard au moment de la métamorphose.

M. Bouvier signale la présence de deux colonies d'abeilles vivant à l'état libre au Jardin des plantes et dont l'une a donné récemment un essaim établi actuellement en plein air, sur une branche.

Le Secrétaire des séances,
A. LÉGAILLON.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES

par M. **WINTER**

Messieurs et Chers Confrères,

Au nom de la Commission des Finances, après examen et règlement des comptes de l'année 1903, j'ai l'honneur de vous soumettre le rapport financier relatif à cet exercice.

Au 1er janvier 1903, notre actif s'élevait à la somme de 8.821 fr. 33, dont 7.515 fr. 05 représentés par des obligations et des titres de rente et 1.308 fr. 28 en espèces.

Les recettes de l'année 1903 ont atteint 2.190 fr. 50 et les dépenses n'ont été que de 1.610 fr. 03.

Notre actif, au 1er janvier 1904, est donc de 9.401 fr. 80, représentés par 7.513 fr. 05 en obligations et titres de rente et 1.888 fr. 75 en espèces, le tout déposé entre les mains de M. Rabaud, trésorier.

Vous trouverez ci-joint le détail des recettes et des dépenses dont je viens de donner le résumé, ce détail prête à des observations intéressantes, que je voudrais vous signaler.

Dans son rapport de 1903, M. Deschamps constatait la situation prospère de la Société, dont les dépenses ont notablement diminué depuis notre installation à la Sorbonne. Notre rapporteur, indiquant l'écart entre le nombre des membres titulaires et celui que comportent nos Statuts, émettait l'espoir que, grâce aux efforts de tous, nous verrions bientôt cet écart disparaître. Je suis heureux de vous annoncer que cet espoir est en pleine voie de réalisation : le montant des cotisations courantes qui, pour l'exercice 1902, atteignait seulement le chiffre de 460 fr., s'est élevé cette année à 620 fr. ; c'est dire que, dans un temps très court, notre Société a vu le nombre de ses membres s'accroître très notablement.

L'élan est maintenant donné, et nous pouvons prévoir un avenir prochain où, nos cadres complétés, la Société reverra les beaux jours d'autrefois ; ce sera la récompense de ses anciens membres, qui ont su ne pas désespérer dans les moments difficiles et qui ont donné aux jeunes un bel exemple d'activité et de confiance en une bonne œuvre.

Nous avons fait cette année une perte bien sensible en la personne

de M. Mabille, notre trésorier ; nous ne saurions oublier le dévouement avec lequel il gérait notre modeste fortune ; il était de ceux qui ont aidé notre Société à entrer dans la phase de prospérité actuelle et nous lui en garderons un souvenir reconnaissant.

M. Rabaud, qui est un de nos membres les plus actifs et qui nous a déjà donné tant de preuves de son dévouement à notre Société, a bien voulu accepter d'être notre trésorier, nous lui adressons nos vifs remerciements, le priant d'en transmettre une part à M. Reyckaert, notre agent, dont le concours nous a toujours été si précieux.

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

COMPTES DE L'ANNÉE 1903

Recettes.

Actif au 1er janvier 1904			8.821 33
Cotisations — Courantes		620 00	
Cotisations — Arriérées		120 00	
Cotisations — Correspondants		20 00	760 00
Abonnements et vente de bulletins			184 00
Subvention ministérielle			1.000 00
Intérêt des obligations			246 50
			11.011 83

Dépenses.

Port de lettres; bulletins, etc.		152 08	
Imprimés		75 00	
Impression du *Bulletin*	702 30		
» des tirés à part	116 55		
Portrait de M. Filhol	45 35	864 20	
Reliure (exposition)		3 75	
Etrennes		15 00	
Appointements — M. Vézinaud		200 00	
Appointements — M. Reyckaert		300 00	1.610 03
Solde débiteur			9.401 80
			11.011 83

Actif au 1er janvier 1904.

Entre les mains de M. Mabille, trésorier :			
14 obligations d'Orléans		5.460 00	
25 fr. de rente à 3 %		811 05	
3 obligations 2 ½ P. L. M.		1.242 00	
Espèces		487 09	7.990 14
Entre les mains de M. Reyckaert, agent			1.411 65
			9.401 80

Total : Neuf mille quatre cent un francs, quatre-vingt centimes.

LA BRIÈVETÉ PRIMITIVE DE L'ŒSOPHAGE

ET L'ECTOPIE INTRA-THORACIQUE DE L'ESTOMAC ET DU FOIE

par **Étienne RABAUD**

Sous le nom de « hernie diaphragmatique congénitale », on désigne actuellement un ensemble d'anomalies qui ont pour caractère commun le passage apparent ou réel de divers viscères abdominaux dans l'une ou l'autre des cavités thoraciques. Rien ne révèle, à l'extérieur, ces dispositions insolites ; mais elles frappent immédiatement, dès que l'on ouvre la paroi du corps ; elles frappent d'autant plus, que, chez un très grand nombre d'individus, c'est un lobe hépatique volumineux qui occupe la majeure partie du thorax.

Ces « hernies diaphragmatiques » ont fait l'objet de quelques travaux d'ensemble — thèses médicales pour la plupart — dont le principal mérite est de fournir un relevé assez complet des observations éparses. D'une façon générale, les auteurs s'en tiennent aux faits les plus saillants ; ils examinent attentivement et décrivent minutieusement la forme et les dimensions de l'ouverture diaphragmatique, tandis qu'ils n'accordent qu'une simple mention aux organes déplacés. Sans s'arrêter spécialement sur aucun de ces derniers, ils cherchent à établir la fréquence ou la rareté de leurs déplacements. Est-il d'ailleurs nécessaire de procéder autrement ? puisque, suivant eux, il y a « hernie », déplacement réel des viscères, ces viscères se disposent évidemment au hasard, sans déterminisme précis.

Dans un précédent mémoire concernant un cas de ce genre [1], j'émettais l'opinion que l'étiquette de « hernie diaphragmatique » s'appliquait probablement à un ensemble assez hétérogène ; j'étais conduit à penser qu'il fallait reprendre, en l'adaptant aux acquisitions récentes, la théorie fort délaissée de Cruveilheir, qui, renversant les termes de la proposition, voyait dans la prétendue perforation du diaphragme, non pas un phénomène de rupture consécutive à la pression des viscères refoulés de bas en haut par une force hypothétique, mais un phénomène de non-formation résultant d'un chan-

1. Etienne Rabaud, *Ectopie intra-thoracique des viscères abdominaux par brièveté primitive de l'œsophage* (*Société d'obstétrique de Paris*, juin 1903).

gement de situation primitif des viscères. A l'appui de mon dire, j'apportais un exemple très net où le fait d'*ectopie* ne pouvait être mis en doute. Seulement, j'avais en vain dépouillé toute la « littérature » relative à ces dispositions anormales : des descriptions incomplètes, qui ne sont le plus souvent que des protocoles d'autopsie et non le résultat d'une étude attentive, je n'avais pu extraire qu'un seul cas se rapportant avec quelque certitude à celui que je relatais ; je concluais donc à l'extrême rareté d'une pareille anomalie J'ajoutais, que l'ensemble des autres cas de « hernie » paraissait se répartir en trois ou quatre groupes distincts, caractérisés, chacun, par des processus spéciaux siégeant sans doute sur le tube digestif, remontant à l'une ou l'autre des phases évolutives de ce tube, étrangers, dans tous les cas, à tout phénomène de hernie.

Depuis l'année dernière, l'occasion s'est offerte à nouveau pour moi d'étudier un cas se rapportant au complexe « hernie diaphramatique » [1] ; j'ai retrouvé des faits très comparables à ceux que j'avais déjà vus ; j'ai pu les observer d'une façon plus précise, car ma première dissection se ressentait forcément de l'ignorance où j'étais des dispositions générales de l'anomalie. De plus, la répétition des mêmes observations liée à la constatation de variations accessoires m'a suggéré quelques idées qui me paraissent de nature à faire comprendre la genèse d'un certain nombre de cas et à jeter quelque clarté sur la majorité des autres. Dores et déjà, je crois pouvoir séparer un type tératologique bien déterminé, ayant pour caractéristique essentielle la brièveté primitive de l'œsophage. Accessoirement, et grâce à la constatation de certaines dispositions secondaires, il serait possible d'isoler deux ou trois types non encore précisés quant à leur processus initial, mais qui reconnaissent certainement pour origine une anomalie de l'œsophage ou de l'estomac. Quelques formes resteraient, dans lesquelles le foie paraît être l'organe important, sur l'origine desquelles il est actuellement impossible de se prononcer.

I

Description Anatomique.

Les renseignements font absolument défaut sur le fœtus, objet de

1. Le fœtus dont il s'agit appartenait, comme le précédent, à la série des Pseudencéphaliens que M. le professeur A. Prenant a bien voulu me confier. Je tiens à lui renouveler une fois encore mes très vifs sentiments de reconnaissance.

cette observation. Il paraît âgé de cinq mois, six au plus. Son aspect extérieur est celui de tous les Pseudencéphaliens : nous n'avons pas à y insister ici. Nous signalerons simplement l'existence d'une cyphose assez accentuée, siégeant à la partie supérieure de la colonne vertébrale,

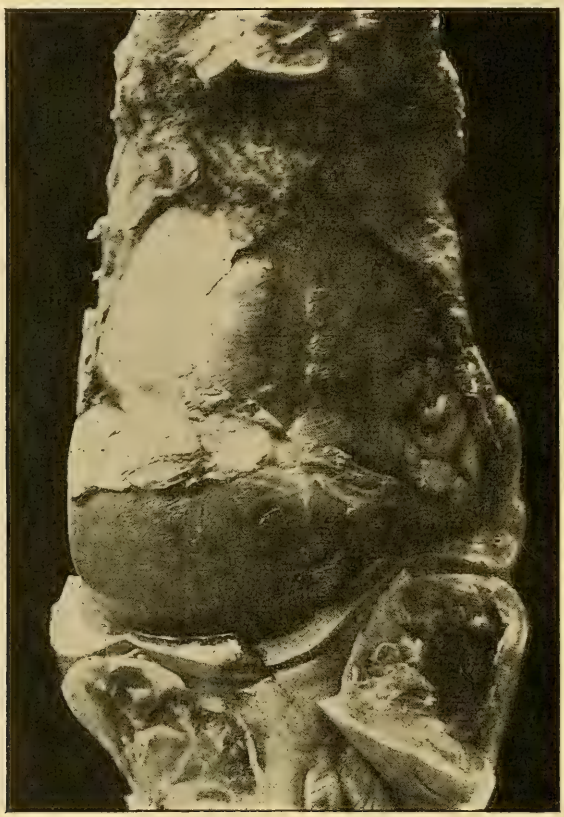


Fig. 1. — Photographie de face.

La paroi thoraco-abdominale ayant été enlevée, on aperçoit nettement le foie dont le lobe droit est en situation normale et le lobe gauche redressé occupe la cavité thoracique gauche. A droite de ce lobe (à gauche sur la figure) le péricarde contenant le cœur. Entre le lobe hépatique et le péricarde, on aperçoit la section du diaphragme droit.

et telle que les trois ou quatre premières vertèbres dorsales, ainsi que les dernières des vertèbres cervicales, sont fortement projetées en avant. C'est là un caractère commun à tous les Pseudencéphaliens, ca-

ractère dont nous n'avions pas saisi l'intérêt au point de vue particulier de la hernie diaphragmatique, lors de la publication de notre premier mémoire et que nous n'avions pas cru devoir relever. En fait, la cyphose dorso-cervicale est un précieux argument pour la discussion du mécanisme de la monstruosité.

On ne constate pas d'autre anomalie extérieure, soit sur le corps, soit sur les membres ; aucune particularité de l'aspect superficiel ne révèle l'état des dispositions viscérales : l'abdomen n'est pas plus aplati, ni le thorax plus bombé qu'à l'ordinaire.

Foie. — Aussitôt que l'on a incisé la paroi thoraco-abdominale, l'attention est tout de suite attirée par un foie volumineux occupant la majeure partie de la cavité abdominale et de la cavité thoracique gauche. Examiné en place, ce foie présente une face antérieure convexe et lisse divisée en deux lobes inégaux par un sillon profond. Le lobe droit occupe sa situation normale dans l'hypochondre droit ; il est en rapport direct avec la partie droite du diaphragme ; — le lobe gauche, au lieu de se diriger horizontalement à gauche, se redresse de bas en haut et vient occuper la cavité thoracique gauche en traversant le plan du diaphragme (fig. 1) ; ce lobe hépatique s'applique contre le médiastin et le refoule légèrement. Il est complètement à nu dans la cavité thoracique, au contact immédiat du poumon et du thymus qui habitent avec lui cette cavité : c'est là un détail qui mérite d'être mentionné avec insistance ; on le traduit d'ordinaire en disant que la « hernie » est une « hernie sans sac », attribuant ainsi une grande valeur à l'absence ou à l'existence d'un sac. Nous aurons à voir ce que vaut cette distinction.

La face postérieure du foie regarde obliquement à gauche et en arrière ; à droite, elle recouvre, sans les comprimer, quelques anses intestinales qui marquent leur empreinte sur la substance hépatique ; à gauche, elle recouvre celles des anses intestinales qui ont émigré dans le thorax. Cette face postérieure est assez tourmentée pour qu'il soit difficile d'y reconnaître les dispositions habituelles ; néanmoins, on distingue le hile, situé au niveau du sillon de séparation des deux lobes, un peu vers la droite. Je n'ai pu discerner la vésicule biliaire ; on sait, d'ailleurs que cet organe fait fréquemment défaut en pareil cas.

Considérés dans leur ensemble, le lobe abdominal et le lobe thoracique du foie correspondent respectivement aux lobes droit et gauche normaux. Mais tous deux ont subi, relativement à la position normale, une déviation marquée : le lobe droit a tourné sur son axe horizontal, de telle sorte que sa face supérieure est devenue antérieure

et sa face inférieure, postérieure ; le lobe gauche a effectué le même mouvement, et en outre il s'est redressé de bas en haut en tournant sur sa base, de telle sorte que son axe longitudinal est devenu perpendiculaire à l'axe longitudinal du lobe droit. Au demeurant, il n'y a là qu'une forme de langage ; rien ne permet de supposer que le foie ait primitivement occupé sa situation habituelle, pour en acquérir secondairement une autre. Aucune trace de glissement, de tiraillement, de déchirure ne révèle l'action d'une force extérieure qui aurait déterminé les dispositions observées. Suivant toutes probabilités, ces dispositions sont primitives ; elles ont été acquises au fur et à mesure que la masse hépatique se développait. C'est là un point fort important, que nous devons retenir dès maintenant.

Notons enfin, que du bord postéro-supérieur se détachent deux petits lobules, dont l'un refoule le diaphragme à droite, dont l'autre s'engage au-dessous de l'estomac, ce dernier étant compris, comme nous le verrons, entre le lobe thoracique et le lobule aberrant.

Diaphragme. — Aux dispositions du foie sont liées celles du diaphragme. De même que le foie occupe à droite sa place normale, de même le muscle possède de ce côté ses attaches, ses dimensions, son épaisseur normales ; il revêt la face antéro-supérieure de la glande hépatique. — A gauche, au contraire, le diaphragme présente une large solution de continuité qui livre passage au lobe intra-thoracique. Cependant, le tissu musculaire ne fait pas entièrement défaut ; il est simplement réduit à une bande charnue qui s'attache sur la face interne des côtes à partir du sternum et va s'amincissant vers la gauche, pour se terminer sur la paroi costo-latérale. Cette lame triangulaire correspond aux 2/3 du pourtour diaphragmatique antéro-latéral gauche ; elle présente ceci de particulier qu'elle s'insinue et se dissimule presque complètement entre les deux lobes du foie, dans un sillon profond de la substance hépatique ; on peut alors dire, suivant une expression fort usitée en l'occasion, que le foie est « à cheval sur le diaphragme. » La glande et la lame musculaire ne contractent entre elles aucune adhérence ; le bord musculaire libre qui se trouve au contact du tissu hépatique a la forme d'un bourrelet peu épais, non cicatriciel, de contours réguliers.

La paroi postérieure du thorax ne présente aucune trace de diaphragme. Cependant, les deux piliers, droit et gauche, existent nettement ; c'est entre eux que s'insinue le lobule supplémentaire du foie, qui va, d'autre part, comprimer la partie droite du diaphragme, au voisinage du médiastin. L'absence de cloison diaphragmatique

attenant à la paroi postérieure ferait rentrer notre cas dans le groupe des « hernies postérieures ».

L'ensemble de la cloison thoraco-abdominale n'est pas situé dans un plan horizontal. Ainsi qu'on peut s'en assurer par l'examen de la figure 1, ce plan est sensiblement incliné à gauche et en bas, faisant un angle d'environ 45° avec l'horizon : il est donc surbaissé du côté de la « hernie ».

L'orifice anormal du diaphragme correspond par sa forme à la « hernie en croissant » de Duguet. Ce ne peut être là qu'une simple comparaison, car il ne nous paraît plus possible, actuellement, de fonder des distinctions valables sur la forme, la situation ou les dimensions de l'orifice. Au surplus, les parties du diaphragme que nous venons de mentionner ne sont pas les seules qui existent. Un examen attentif de la cloison elle-même et des organes qui la traversent permet de constater l'existence d'une lame musculaire en forme de triangle rectangle située dans un plan perpendiculaire à celui du diaphragme (fig. 2). Cette lame s'attache à la colonne vertébrale par le petit côté de l'angle droit, elle fait corps avec le diaphragme par le grand côté du même angle, tandis que l'hypothénuse correspond à un bord libre. Ce septum antéro-postérieur est, suivant toute évidence, un lambeau redressé de la partie gauche du diaphragme. Sa constitution musculaire, sa continuité absolue avec la cloison thoraco-abdominale suffiraient à lui assigner cette signification ; et si quelques doutes persistaient, le fait que l'œsophage (fig. 2 *œ*) traverse le septum en contractant avec lui les adhérences habituelles les lèverait entièrement. La disposition des parties, l'absence de toute déchirure, de tout tiraillement, l'existence d'insertions sur la paroi postérieure du tronc, tout permet d'affirmer, que ce lambeau musculaire s'est constitué en la forme et dans la situation où nous l'observons. D'ailleurs, ce septum sagittal n'est probablement pas exceptionnel ; rapproché de certaines dispositions que nous avons précédemment observées, il paraît de nature à éclairer la question — secondaire sans doute, mais fort débattue cependant — de la « hernie avec ou sans sac.

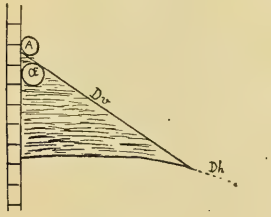


Fig. 2. — Représentation schématique de la portion verticale du diaphragme : *dv* Bord libre du diaphragme vertical, *dh* ligne d'intersection du diaphragme horizontal et du septum vertical. *A*, section de l'aorte au contact de la colonne vertébrale ; *œ* section de l'œsophage.

Paquet intestinal. — Le paquet intestinal ne présente qu'un intérêt tout à fait restreint. A son sujet, il suffit d'indiquer qu'il est en partie situé dans le thorax, en arrière et en dehors du foie (fig. 3). On ne

Fig. 3. — Photographie de profil montrant la disposition des anses intestinales dans la cavité thoracique gauche.

trouve aucune anse dans l'hypochondre droit. L'intestin grêle est en majeure partie situé dans le thorax avec la presque totalité des colons ; le cœcum est tout à fait en haut, sous le dôme pleural.

Dans leur ensemble, les anses intestinales sont reliées entre elles, à la paroi et aux organes adjacents par des épiploons, ligaments et mésos ; ces divers liens ne traduisent nullement l'effort résultant d'un déplacement secondaire, ils ne sont ni tordus, ni tiraillés, ni déchirés ;

leur aspect n'est pas celui d'une adhérence cicatricielle. Suivant toute évidence, ces liens sont des liens primitifs.

Estomac et duodénum. — L'estomac est assez difficilement reconnaissable au premier abord, car son aspect extérieur est sensiblement celui d'une anse de gros intestin. Son identité ne peut être nettement établie que par la connaissance de ses connexions avec l'intestin grêle d'une part, avec l'œsophage de l'autre. Il est situé en arrière du lobe hépatique gauche, presque sur la ligne médiane, à peu de distance du médiastin ; par rapport au plan normal de séparation du thorax et de l'abdomen, il est en partie au-dessus, en partie au-dessous de ce plan (fig. 4). La forme de l'estomac est celle d'une anse coudée dont les deux segments sont perpendiculaires l'un avec l'autre. Cette forme peut être aisément rapprochée de la forme normale, si l'on considère l'angle droit déterminé par les deux segments, comme l'équivalent de la petite courbure. Dans ces conditions l'estomac est placé de champ : la grande courbure regarde en avant, elle est partiellement au contact direct du foie intra-thoracique ; — la petite courbure regarde en arrière, délimitant avec la paroi du corps une assez large ouverture comblée par une lobule hépatique ; — la face normalement postérieure regarde à gauche ; — la face antérieure est tournée vers la droite et confine à la face postéro-latérale du lobe thoracique du foie qui la sépare du médiastin.

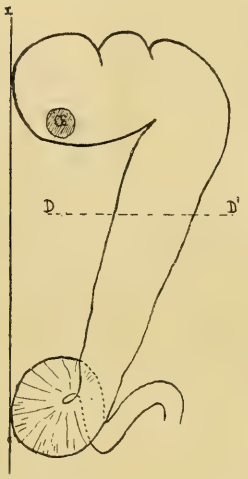


Fig. 4. — Configuration extérieure et disposition de l'estomac.
xx' Direction de la colonne vertébrale ; DD' Plan du diaphragme. *œ* orifice œsophagien. L'estomac est continué par un duodénum de forme anormale.

Le segment horizontal de l'estomac, correspondant à la région du cardia, est entièrement située dans le thorax ; il a une longueur de 2 centimètres. Sa surface extérieure présente deux ou trois lobes qui lui donnent une ressemblance marquée avec un segment de gros intestin. La région pylorique, perpendiculaire à la précédente, est très légèrement oblique à l'axe longitudinal du corps ; longue de 37 millimètres, elle appartient au thorax par son premier tiers, à l'abdomen par les deux derniers ; son calibre est sensiblement inférieur à celui de la région du cardia ; sa surface est à peu près lisse.

Au pylore fait suite le duodénum. Situé sur la ligne médiane au-dessous du plan du diaphragme, sa disposition est tout à fait irrégulière : il forme avec l'extrémité inférieure de l'estomac une courbe gauche enroulée d'arrière en avant, dans le trajet de laquelle se confondent les diverses portions que l'on distingue à l'ordinaire. Il semble, cependant, que cette *boucle duodénale* renferme seulement les deux premières portions, la première se dirigeant en arrière, en haut et à gauche, la seconde décrivant un arc ouvert en bas qui passe, de droite à gauche, en arrière du pylore. L'extrémité inférieure de l'arc est continuée par une anse montante qui représente probablement le 3e segment duodénal. Ces détails n'ont peut-être pas une grande importance ; mais étant donné le petit nombre de termes de comparaison, il est prudent de ne négliger aucune indication : chacune d'elles prendra, avec le temps, la valeur qui lui revient.

Déjà, d'ailleurs, nous pouvons rapprocher le duodénum dont il s'agit de celui que nous avons précédemment décrit. Ils sont évidemment assez différents l'un de l'autre, puisqu'ici les trois portions ne se distinguent pas d'une façon précise, tandis qu'elles étaient parfaitement délimitées dans le duodénum de notre premier cas. Mais il est un point de ressemblance qui mérite d'être mis en relief : dans les deux cas, la direction générale de la deuxième portion, très sensiblement la même par rapport à l'estomac, est inverse de la direction normale ; si nous supposons l'estomac en place, elle est inféro-supérieure au lieu d'être supéro-inférieure.

Dans le cas présent, nous n'avons pu retrouver le pancréas ; peut-être ne s'est-il pas formé, peut-être n'avons-nous pas su l'isoler dans la masse confuse que forment en ce lieu les épiploons.

Signalons enfin, que la rate est située dans le fond de la cavité thoracique gauche, en connexion avec la grosse tubérosité de l'estomac. Elle constitue une masse volumineuse accolée à la paroi postérieure du corps.

Œsophage. — L'œsophage est l'organe sur lequel paraît devoir se concentrer tout l'intérêt de cette observation. Son étude ne pouvait cependant être utilement abordée, qu'après l'examen précis et suffisamment détaillé de l'ensemble des autres organes.

C'est en vain que l'on cherche l'œsophage dans la cavité thoracique gauche : l'extrémité de la grosse tubérosité de l'estomac est directement appliquée contre le septum diaphragmatique vertical par sa face droite (face antérieure normale) et c'est sur cette face que se trouve l'orifice œsophagien. Pour voir et suivre l'œsophage, il faut dégager

complètement la cavité thoracique droite des organes qu'elle renferme. Cela fait, on constate que l'œsophage est situé dans son entier, non pas simplement à droite de la ligne médiane, mais encore à droite du médiastin. Il part du pharynx, se dirige immédiatement et franchement à droite, s'infléchit vers la gauche en décrivant une courbe assez accusée et parvient ainsi au contact du septum diaphragmatique vertical ; là, il se retourne presque en angle droit et traverse le septum immédiatement après, perpendiculairement au plan de ce dernier et dans son angle supérieur (v. fig. 2). Le segment horizontal de l'œsophage est donc extrêmement court ; sa longueur, qui ne dépasse pas 2 millimètres, est entièrement comprise dans l'épaisseur du septum musculaire, avec lequel il contracte des adhérences intimes, comme à l'état normal.

La longueur totale de l'œsophage est de 4 centimètres, tandis que la distance qui sépare l'extrémité inférieure du pharynx du diaphragme est de 56 millimètres, en tenant compte, — comme il convient —, de la courbure de la paroi postérieure, que l'œsophage suit exactement. La distance de l'orifice œsophagien au plan du diaphragme est alors de 16 millimètres. Il résulte de ces chiffres, que l'œsophage est notablement trop court. Cette brièveté n'est pas une brièveté relative due à des inflexions successives ; c'est une brièveté absolue et l'on doit lui imputer nécessairement la surélévation de l'estomac.

Il importe de remarquer que les contours généraux de l'œsophage sont très exactement comparables aux contours habituellement décrits ; on retrouve les deux inflexions principales à droite, puis à gauche, avec des proportions relatives sensiblement normales. La brièveté du conduit ne reconnaît donc pas pour origine l'absence de l'un quelconque de ses segments, mais bien un retard de croissance portant sur la totalité de sa longueur et proportionnel à chacun de ses divers segments. Par contre, le processus ne paraît pas avoir intéressé la croissance en épaisseur. Le calibre, en effet, est en rapport avec les dimensions générales de l'organisme ; il est en l'espèce de 7 millimètres. Nous avons noté, dans notre précédent mémoire, cette opposition entre l'arrêt de croissance en longueur et l'expansion du calibre ; elle est ici presque aussi marquée.

Poumons. Cœur. Thymus.— L'étude des organes qui habitent normalement le thorax présente un grand intérêt. D'une façon générale ces organes sont refoulés et sensiblement déplacés. Mais ces constatations superficielles sont insuffisantes, et si l'on veut se faire une idée de la genèse du déplacement, du moment auquel il s'est effectué, il

importe d'énumérer avec soin, tant la forme des organes que les connexions nouvelles qu'ils ont contractées.

Nous remarquerons, en premier lieu, que le thorax est nettement divisé en ses deux cavités secondaires par un médiastin qui ne présente aucune solution de continuité et sépare de la façon la plus complète les viscères abdominaux enfermés dans le thorax gauche des viscères thoraciques accumulés — un poumon excepté — dans le thorax droit. L'existence de ce médiastin complet nous permet de penser dores et déjà, que la migration du cœur remonte à une période très précoce de l'ontogenèse, que cette migration s'est effectuée sans effort, sans violence.

Il y a peu de choses à dire sur l'appareil respiratoire. La trachée occupe la ligne médiane dans la région du cou. Dès son entrée dans le thorax, elle dévie vers la droite et se divise en deux bronches principales. Sa longueur paraît normale. La bronche principale droite se dirige à droite et un peu en arrière et aboutit au poumon droit. Celui-ci, appliqué contre la paroi postéro-latérale, est entièrement masqué par le cœur. Ses trois lobes sont parfaitement distincts. — La bronche principale gauche se dirige à gauche et un peu en haut, traverse le médiastin et aboutit aussitôt au poumon gauche situé dans le thorax gauche, entre le médiastin d'une part, la grosse tubérosité de l'estomac et le colon de l'autre. Bien que extrêmement aplati transversalement et assez déformé, on distingue néammoins sur sa surface la ligne de démarcation des deux lobes.

La majeure partie de la cavité thoracique droite est occupée par le cœur. Celui-ci est enfermé dans un péricarde d'aspect normal qui adhère au médiastin à droite, au diaphragme en bas. La poche péricardique ne présente aucune trace d'arrachement, aucune déchirure, aucun plissement ; sa surface est complètement lisse et son expansion régulière. Le cœur lui-même n'est ni comprimé, ni déformé ; ses diverses parties sont parfaitement reconnaissables et occupent, les unes par rapport aux autres, leur situation normale. Le volume de l'organe est proportionnel à l'ensemble du développement de l'individu. Ce qu'il y a de changé, en dehors de sa situation dans le thorax droit, c'est la position du cœur par rapport à la cavité qui le renferme. Tandis qu'à l'ordinaire, l'axe longitudinal du cœur est légèrement oblique en bas et à gauche, il est ici nettement et franchement *horizontal* et *antéro-postérieur* : la pointe regarde directement en avant et la base en arrière ; il est couché sur le diaphragme, de telle sorte que sa face postérieure est devenue inférieure et sa face antérieure supérieure.

L'oreillette droite repose directement sur le diaphragme ; elle reçoit la veine cave inférieure qui traverse le diaphragme immédiatement au-dessous de l'oreillette et aborde celle-ci *sans effectuer le moindre trajet dans le thorax*. C'est là une particularité importante à noter.

La veine cave supérieure aboutit également à l'oreillette droite. Le tronc de la veine mesure 14 millimètres entre le cœur et le confluent des troncs veineux brachio-céphaliques. Le tronc brachio-céphalique droit descend du cou suivant une ligne droite, sans inflexion ni sinuosité ; il est notablement plus court qu'à l'ordinaire. Par contre, le tronc brachio-céphalique gauche a une longueur démesurée : au niveau de la racine du cou, il tourne brusquement à droite faisant un angle droit avec sa portion cervicale, puis il marche horizontalement à la rencontre de son homonyme du côté opposé et la rejoint à 14 millimètres environ au-dessus du cœur, ayant effectué un trajet intra-thoracique de 21 millimètres. L'asymétrie entre les deux troncs veineux du même nom est tout à fait remarquable. Tous deux sont situés dans un plan superficiel, au-devant de l'aorte.

L'aorte naît du ventricule gauche. Elle marche horizontalement en arrière et légèrement à gauche, passe en avant de l'œsophage, arrive au niveau du médiastin qu'elle traverse immédiatement au-dessus de l'angle supérieur du septum diaphragmatique. L'artère commence alors à se recourber tout en gagnant la région postérieure du thorax gauche ; elle devient enfin verticale. En ce point de son trajet, elle est en contact par son côté gauche avec la grosse tubérosité de l'estomac.

Au niveau de son inflexion (crosse), un peu à droite de la ligne médiane représentée par le médiastin, l'aorte donne naissance au tronc artériel brachio-céphalique droit, à la carotide primitive et à la sous-clavière gauches. Le plan de la crosse étant antéro-postérieur, ces trois troncs vasculaires sont disposés l'un derrière l'autre, le tronc brachio-céphalique en avant, la sous-clavière gauche en arrière.

Le tronc artériel brachio-céphalique et la carotide primitive embrassent la face latérale gauche de la trachée-artère.

Nous observerons encore ici que l'aspect général des diverses parties ne trahit l'intervention d'aucun agent mécanique violent, bien que l'ensemble du cœur et des vaisseaux annexes ait effectué un mouvement de bascule compliqué d'un mouvement de rotation sur l'axe transversal.

Pour terminer cette description, il suffit de signaler :

1° à la partie supérieure du thorax, la présence d'un volumineux thymus ne présentant aucune trace de compression.

2° dans l'abdomen, les deux reins, normaux quant à leur disposition générale et leurs contours extérieurs. Le rein gauche est surélevé d'environ 2 centimètres, son extrémité supérieure confine aux limites de séparation normale de la cavité thoracique.

II

Mécanisme de l'anomalie.

La brièveté de l'œsophage.

De la description qui précède, il n'est point malaisé de faire ressortir le mécanisme qui a présidé à la formation de l'anomalie. A ce sujet, d'ailleurs, la discussion est très limitée : sommes-nous en présence d'une *hernie*, d'un déplacement d'organes ayant précédemment occupé une situation différente d'où les a chassé une force brutale quelconque ? sommes-nous au contraire en présence d'une *ectopie*, de la formation ou du développement d'organes en un lieu ou dans un sens inaccoutumé ?

Nous ne saurions nous arrêter à une troisième hypothèse, spécialement appliquée par Jules Guérin à la « hernie diaphragmatique »(1), d'après laquelle il faudrait admettre l'intervention du système nerveux. La démonstration repose uniquement sur la coexistence de l'anencéphalie dans un cas, de l'hydrocéphalie dans un autre cas avec la situation anormale des viscères abdominaux. Sans doute, les deux cas que nous avons nous-même observés se sont rencontrés chez des individus atteints de Pseudencéphalie à des degrés divers. Nous ne saurions voir là qu'une coïncidence fortuite. En dehors des raisons multiples qui nous permettent d'affirmer l'indépendance du développement des ébauches vis-à-vis du système nerveux (1), nous savons actuellement que la Pseudencéphalie est une maladie de l'axe cérébro-spinal intervenant à un âge où le diaphragme et les viscères ont acquis depuis quelque temps déjà leur forme et leur situation définitives. Au surplus, si nous observons quelquefois la coïncidence d'altérations du système nerveux avec les dispositions viscérales qui nous occupent, il est beaucoup plus fréquent de rencontrer ces dispositions coïncidant avec un système nerveux sain. Il n'y a vraiment là qu'une simple

(1) Jules Guérin. — Recherches sur les difformités chez les monstres, le fœtus et l'enfant. Paris, 1880, pages 438 et 492.
(2) Etienne Rabaud. — Les stigmates anatomiques de la dégénérescence mentale. Revue de l'École d'Anthropologie, 1904.

coïncidence, sur laquelle on ne songerait même pas à s'arrêter, si les théories les plus bizarres ne trouvaient des défenseurs d'autant plus ardents, qu'ils ignorent davantage les faits fondamentaux de la biologie générale.

Théorie mécanique. — Les vues de Jules Guérin peuvent, d'ailleurs, se rattacher à la théorie mécanique. D'après celle-ci, l'estomac, le foie, les anses intestinales ont été chassés de leurs situations respectives sous l'action d'une poussée quelconque. Si cette poussée est une réalité, elle peut fort bien résulter d'une contraction déterminée par une excitation du système nerveux. Dans ce cas, l'altération de celui-ci ne serait plus qu'un agent pouvant avoir toute une série d'équivalents.

Nous ne nions pas l'existence de véritables hernies diaphragmatiques. Ces hernies se produisent chez l'adulte et, sans être très fréquentes, elles sont bien connues (1). Rien ne s'oppose, théoriquement, à ce qu'il s'en produise également chez le fœtus. Mais les dispositions que nous avons observées et celles que révèlent les relations renfermant des données un peu précises ne paraissent nullement répondre à un mécanisme de ce genre. Tous les cas, sans doute, ne relèvent pas de processus identiques; néammoins il semble incontestable qu'une hernie ne pourrait se produire sans laisser après elle des traces non équivoques. Ces traces, — plissements, tiraillements, déformations ou déchirures, — nous ne les rencontrons sous aucune forme. S'il est vrai que le diaphragme présente une solution de continuité, celle-ci est d'une régularité vraiment remarquable pour être le résultat d'une rupture. Dira-t-on que les lambeaux de l'orifice herniaire ont été secondairement résorbés, que les bords de l'orifice se sont régularisés sous l'influence d'un processus de réparation et sous l'action compressive des organes herniés ? Mais alors nous retrouverions la marque de cette réparation, à la fois sous la forme de brides cicatricielles et d'adhérences solides entre le muscle réparé et les organes au contact desquels il se trouve. Rien de cela n'existe. Le diaphragme est incomplet, mais la structure des parties qui se sont constituées est entièrement musculaire.

Et l'on avancerait à tort que la production de processus cicatriciels est incompatible avec des tissus jeunes, en état de multiplication constante. Outre qu'il serait facile d'opposer à une telle affirmation les faits indéniables et bien connus de brides et d'adhérences intervenant chez le fœtus, nous pourrions rappeler encore que le tissu cicatri-

(1) Blum et Ombredanne.— Hernies diaphragmatiques d'origine traumatique. — Archives générales de médecine, 1896.
V. Hauger. — Sur un cas de hernie diaphragmatique étranglée. — La Loire médicale, 15 mai 1903.

ciel se rencontre chez l'embryon même. Nous en avons relaté un exemple précis, relatif à une adhérence entre l'amnios et le système nerveux (1) : au niveau de l'adhérence, les éléments nerveux avaient cédé la place à un bouchon scléreux assez dense. L'adhérence était évidemment le fait d'un frottement ; or un tel frottement se produirait nécesssairement entre une plaie diaphragmatique et la glande hépatique en contact constant l'un avec l'autre. D'ailleurs, l'ensemble des faits observés n'est pas favorable à l'hypothèse : aucun des organes n'offre les caractères d'un organe secondairement déplacé. Le cœur lui-même et les vaisseaux adjacents, qui ont manifestement émigré dans la cavité thoracique droite, ne trahissent nullement un déplacement brusque ; la disposition des troncs veineux et artériels résulte évidemment d'une adaptation lente, harmonique, s'étant effectuée à droite de la même façon qu'elle se serait effectuée à gauche, à partir de la ligne médiane qui est son lieu de formation.

J'entends bien, que suivant un point de vue récemment émis par G. Paillard (2) et P. Nau (3) les hernies survenues chez le fœtus seraient caractérisée par la présence « d'un sac », ce qui revient à dire que le diaphragme serait simplement refoulé et non déchiré, — tandis que les hernies « embryonnaires » seraient caractérisées par la solution de continuité du diaphragme. Cette distinction permettrait évidemment de comprendre la forme régulière de l'orifice abdomino-thoracique, puisque la perforation de la cloison serait antérieure à la différenciation des fibres musculaires ; mais, ce point de vue mis à part, la distinction ne paraît nullement valable. Dans le cas que nous avons précédemment publié, en effet, bien qu'il y eût un « sac », l'ensemble des faits était exactement superposable à l'ensemble de ceux que nous rapportons aujourd'hui : nulle part, dans ce premier cas, ne se remarque la trace d'un déplacement secondaire brusque. Nous indiquerons d'ailleurs, dans un instant, ce que vaut exactement l'absence ou la présence d'un sac.

Les déchirures et la cicatrisation consécutive n'entreraient pas en ligne de compte, si, suivant la théorie classique, la hernie reconnaît comme processus initial un arrêt de développement du diaphragme. Ces hernies appartiennent au groupe que Paillard et Nau dénomment

(1) Etienne Rabaud. — Adhérence amniotique chez un embryon monstrueux. — Société de Biologie, 16 mai 1901.
(2) Georges Paillard. — Les variétés anatomiques de la hernie diaphragmatique congénitale. — Thèse de Paris, 1903.
(3) P. Nau. — Hernies diaphragmatiques. — Société Anatomique de Paris, janvier 1904.

« hernies embryonnaires », ce qui signifie probablement que la hernie est la conséquence d'un phénomène embryonnaire, car il ne paraît guère raisonnable de soutenir que des organes encore rudimentaires puissent être victimes d'un déplacement herniaire. Comme déterminant de la « hernie embryonnaire » les auteurs invoquent la *presse abdominale*. Il serait facile de répondre, que l'absence du diaphragme est une disposition normale chez certains vertébrés et que, néanmoins, les hernies de ce genre ne paraissent pas fréquentes, si même elles se produisent ; que, même, ce ne sont pas les organes abdominaux qui remontent, mais les organes thoraciques, le cœur en particulier, qui tendent à descendre. A cette objection, dont la portée ne saurait échapper, se joint d'ailleurs la série de celles qui précèdent relativement à la disposition générale des organes. On peut également ajouter que l'existence d'un médiastin complet, sans perforation ni réparation, n'implique pas précisément le passage récent du cœur dans le thorax droit.

Quant à la cause invoquée, la presse abdominale, — dont il resterait à trouver la raison chez le fœtus en dehors des contractions d'origine cérébro-spinale — elle est justement, dans nos deux cas, en contradiction avec les faits. Une conséquence presque fatale de la Pseudencéphalie est une cyphose plus ou moins accentuée, portant sur la colonne cervicale et les 4 ou 5 premières vertèbres dorsales, qui a pour effet de diminuer sensiblement le diamètre vertical de la cavité thoracique. Suivant toute apparence, cette cyphose s'établit assez tard, comme la Pseudencéphalie elle-même, et elle doit s'établir assez brusquement, sous l'effort de contractions musculaires (1). Le moment où une compression d'origine abdominale pourrait déterminer une hernie intra-thoracique serait très rapproché de celui où s'établit la cyphose. Et alors, étant directement antagoniste, ou bien celle-ci s'opposerait à la pénétration des organes dans le thorax, ou bien elle leur ferait reprendre leur situation primitive, s'ils étaient déjà herniés.

Arrêt de croissance en longueur de l'œsophage. — D'ailleurs, dans le cas particulier qui nous occupe, la théorie mécanique se heurte tout spécialement contre le fait de la brièveté de l'œsophage ; car je ne suppose pas que l'on puisse valablement faire intervenir, en ce qui concerne ce conduit, un phénomène de rétraction secondaire, — hypothèse que rien ne légitimerait. Or, l'œsophage est ici beaucoup trop court et cette brièveté, nous l'avons vu, ne dépend nullement de sinuosités, de rebroussements ou de déviations. L'œsophage parcourt directement

(1) Mes recherches sur la Pseudencéphalie seront ultérieurement publiées.

son trajet entre le pharynx et le cardia ; sa situation est peu différente de sa situation habituelle et ses contours sont exactement superposables aux contours habituellement décrits ; de plus, il traverse un septum musculaire qui fait partie intégrante du diaphragme, contractant avec lui des adhérences.

Le processus qui frappe l'œsophage est un arrêt de croissance simple, c'est-à-dire, suivant la distinction que j'ai établie et qui se confirme tous les jours, un processus appartenant au groupe des *processus consécutifs*, par opposition aux *processus primitifs* (1). Ceux-ci ont trait à la formation même des organes ; ceux-là interviennent sur leur ébauche déjà formée, pour accélérer ou retarder sa croissance, sa différenciation ou son développement. Tout permet de croire, en effet, que l'œsophage s'est formé d'une façon normale, mais qu'une fois formé, son élongation s'est ralentie; elle a cessé de progresser parallèlement à la croissance longitudinale du tronc ; il s'est produit une *hétérochronie*, suivant l'expression de Giard (2) ; secondairement, le processus s'est répercuté sur le diaphragme, dans le sens que nous avons indiqué.

Il importe de spécifier que le processus porte spécialement sur la croissance : c'est la multiplication des éléments cellulaires qui est en jeu et nullement leur différenciation, ainsi que le montre nettement l'examen histologique. Ce processus présente ici, comme dans mon observation précédente,— d'une façon plus atténuée peut-être, mais non douteuse cependant, — une particularité tout à fait curieuse et que je n'ai vue signalée nulle part ailleurs. Nous remarquerons, en effet, que si la longueur de l'œsophage n'est pas telle qu'elle devrait être, le calibre, pour sa part, n'a subi aucune modification ; il n'a subi, du moins qu'une modification insignifiante. Ce calibre correspond, à peu de choses près, à celui d'un œsophage normalement long; il n'est certainement pas en rapport avec la brièveté marquée du conduit alimentaire. Par conséquent, dire que la multiplication des éléments a subi un retard ou un arrêt n'est pas exprimer un fait suffisamment précis : c'est la multiplication dans un certain sens qui, seule, s'est trouvée ralentie ou supprimée par l'action incidente. Nous sommes ainsi conduits à reconnaître, que les plastides épithéliaux, au lieu de se diviser dans tous les sens de façon à augmenter simultanément le calibre et la longueur, se sont simplement divisés suivant des plans parallèles à

(1) Étienne Rabaud. — Caractères généraux des processus tératologiques processus primitifs et processus consécutifs.— C. R. de l'Académie des Sciences, 6 mai 1901.

(2) Alfred Giard.— Sur les hétérochronies embryonnaires. — Archives de zoologie expérimentale et générale, t. I, 1872.

l'axe longitudinal, de telle sorte que les éléments nouvellement formés se trouvent tous sur le même plan horizontal que les éléments souche. Dans ces conditions, la circonférence du cylindre s'accroît, tandis que la longueur reste fixe (1).

Ce processus si simple est, sans aucun doute, le point de départ de l'anomalie tout entière ; à lui seul il détermine l'ensemble des dispositions que nous avons relevées. Le processus d'arrêt a pour conséquence immédiate de maintenir l'estomac, tandis que la paroi du corps ne cesse de s'allonger ; tout se passe comme si l'estomac remontait dans la cavité thoracique : en fait, l'estomac soutenu par l'œsophage à simplement cessé de suivre l'élongation générale du tronc.

Dans notre première observation, l'estomac avait, suivant toute évidence, joué un rôle purement passif ; sa forme répondait à la forme normale et son volume relatif était proportionnel à l'état de développement général de l'individu. Ici, l'estomac semble, au contraire, avoir participé au processus dans une certaine mesure : il est morphologiquement méconnaissable et sa disposition relative assez singulière. Néammoins, cette participation au processus n'ajoute rien à la monstruosité ; elle est négligeable. Tout dépend en réalité de l'œsophage seul, soit directement, soit indirectement.

Sans doute, l'œsophage n'est pas l'auteur immédiat de la solution de continuité du diaphragme qui doit être imputée à l'estomac et surtout à la masse hépatique ; mais il prend néammoins une part prépondérente à la constitution anormale du muscle. Nous avons noté, en effet, l'existence d'un septum diaphragmatique vertical, au travers duquel passe l'œsophage. Ce septum représente certainement la région normale de l'orifice œsophagien. A partir du moment où l'œsophage cesse de prendre part à la croissance générale de l'organisme — moment assez précoce, mais qu'il n'est guère possible de préciser — la ré-

(1) De ces faits se dégage cette notion générale fort importante, que dans les cellules d'un tissu, aussi bien que dans une cellule isolée, la direction des plans de division est très étroitement soumise à l'existence de certaines conditions : la croissance en longueur et la croissance en largeur sont deux processus distincts, habituellement, mais non nécessairement liés : leur dissociation se produit, s'il survient une modification dans l'incidence des actions externes. Dans les deux cas qui nous occupent, le processus porte sur l'œsophage tout entier ; mais on peut se demander si le processus ne peut rester localisé à des segments plus ou moins courts d'un organe. En cette occurrence, nous pourrions comprendre certains rétrécissements ou étranglements que l'on observe parfois dans le trajet du tube digestif : ils auraient pour origine un défaut de croissance en largeur des régions intéressées, la longueur restant normale. Ce serait le phénomène inverse de celui que nous observons ici, mais ce serait un phénomène tératologique et non pathologique, tel qu'une réparation cicatricielle que l'on invoque souvent en l'espèce.

gion correspondante du diaphragme se trouve mécaniquement arrêtée; elle se redresse peu à peu, pour acquérir finalement la disposition dans laquelle nous l'observons. La traction imprimée au diaphragme ne détermine pas nécessairement une déchirure ; elle pourrait provoquer simplement une voussure ; la solution de continuité résulte d'une autre intervention et c'est évidemment le foie qu'il faut incriminer, c'est lui qui a réduit l'étendue du muscle diaphragmatique en l'empêchant de se développer, de sorte que l'effort de l'œsophage a porté sur un simple lambeau.

La remarque la plus importante à faire pour l'instant, c'est que ce lambeau, ce septum dont les dimensions sont ici très restreintes peut avoir de plus grandes dimensions, ces dimensions dépendant de la situation de l'extrémité inférieure de l'œsophage. Ce septum peut être suffisamment étendu pour revêtir une partie du foie ectopié et prendre l'aspect de ce que les auteurs décrivent sous le nom de « sac ». Si nous nous reportons, en effet, à notre cas antérieur, nous constatons que « à partir du sternum, la cloison diaphragmatique cesse de s'insérer sur les côtes ; son bord antérieur est libre et présente l'aspect d'un bourrelet. Néammoins cette solution de continuité n'est nullement un orifice herniaire : le diaphragme recouvre constamment le lobe gauche du foie, il se relève avec lui, *remontant presque verticalement, s'attache à la paroi thoracique postérieure* pour se terminer au niveau de l'angle de la deuxième et de la troisième côte gauche. Cette portion gauche du diaphragme a la forme d'un triangle qui aurait pour base la ligne antéro-postérieure du corps (1) passant par l'appendice xiphoïde et pour sommet l'insertion supérieure ». Dans les deux cas, on le voit, la forme et la disposition sont sensiblement les mêmes : c'est un triangle perpendiculaire sur le plan horizontal ; dans les deux cas, l'œsophage traverse ce septum au niveau de son angle supérieur. La seule différence porte sur la hauteur du triangle ; mais il faut observer que si, de part et d'autre, l'œsophage est remarquablement bref, sa direction n'est pas exactement la même. Dans la présente observation, l'œsophage occupe constamment le thorax droit, en dedans du médiastin, il aborde l'estomac sur la ligne médiane : le septum est compris tout entier dans le plan médian, sa hauteur se trouve réduite au minimum. Au contraire, dans notre première observation, l'œsophage « descend verticalement depuis le pharynx, *oblique assez brusquement à gauche* pour traverser le septum diaphragmatique et contracter avec lui des adhérences très solides, comme à l'état nor-

(1) représenté par le bord gauche du diaphragme droit.

mal ». L'œsophage traverse donc la ligne médiane et parcourt un certain trajet à gauche ; de plus sa brièveté est plus accusée encore que dans le cas actuel et c'est très haut, au niveau de la deuxième côte gauche, presque au milieu de la cavité thoracique, que se trouve le cardia.

Ces variations de l'œsophage sont évidemment tout à fait secondaires par rapport à sa brièveté même; néanmoins, rapprochées des dispositions du septum diaphragmatique gauche, elles permettent de comprendre ces dernières. L'identité des deux formations paraît évidente : dans un cas, le septum a une étendue très restreinte, il ne recouvre rien et passerait inaperçu au cours d'une autopsie hâtive ; dans le second cas, il est d'une étendue plus grande, il revêt le foie et prend alors la valeur d'un « sac ». De part et d'autre l'origine est la même, c'est un fragment du diaphragme bridé par l'œsophage. Cela nous montre le peu d'importance qu'il faut accorder aux distinctions établies entre les « hernies avec sac » et les « hernies sans sac ». En l'espèce, tout dépend, non pas du moment où s'est produite la soi-disant hernie, mais de la longueur et de la situation de l'œsophage au moment où est intervenu le processus d'arrêt. Large ou étroit, le septum n'a pas été refoulé par le foie, il occupe une situation primitive.

Ce qui devient tout à fait insignifiant, c'est l'existence ou l'absence d'une bande diaphragmatique antérieure conservant ses insertions normales. Cette formation dépend probablement, sinon du volume de la masse hépatique, du moins de la situation qu'elle acquiert. De toutes façons, la bande musculaire antérieure n'a et ne peut avoir aucune signification : dans deux cas parfaitement comparables, l'un présente cette bande et l'autre en est dépourvu.

III

Actions corrélatives et effets mécaniques.

Ainsi, le mécanisme se précise. Dores et déjà nous pouvons affirmer que nous sommes en présence non d'une *hernie*, mais d'une *ectopie*. Mais, *ectopie* peut signifier, soit qu'un organe s'est formé en une place différente de sa place normale, soit qu'ayant apparu en sa situation habituelle, mais devant, au cours de l'ontogenèse, venir occuper une situation différente, il est resté où il était. Les deux processus sont tout à fait distincts : l'un est primitif, l'autre consécutif.

L'ectopie de l'estomac est une *ectopie consécutive* ; elle n'a et ne

peut avoir d'autre origine que l'action d'arrêt imprimée par l'œsophage. Il paraît non moins certain que la situation du foie en est une conséquence indirecte ayant, à son tour, pour contre-coup l'émigration des anses intestinales dans la cavité thoracique gauche et, en dernière analyse, le passage du cœur dans la cavité thoracique droite ; mais il s'agit, dans ces derniers cas, d'ectopie primitive.

Migration du foie. — Au moment où j'ai publié mon premier cas d'ectopie, je n'avais pu m'expliquer la cause du déplacement du foie, des anses intestinales et du pancréas ; j'avais simplement supposé, qu'à la suite de l'ectopie gastrique, le foie et les autres organes s'étaient engagés dans un espace ouvert devant eux, non encore habité par ses hôtes normaux, le cœur et les poumons. L'explication me satisfaisait médiocrement ; elle ne pouvait être que provisoire. Une fois rejetée l'hypothèse d'une action mécanique, la pénétration du foie dans le thorax devenait un problème difficile. Ce n'est pas lui qui a pu refouler l'estomac ni les anses intestinales, puisqu'il se trouve en avant d'eux sans les comprimer ; il ne reste que deux solutions : ou bien il a pris un chemin ouvert devant lui, ou bien il a été entraîné par l'estomac. Je n'avais pas envisagé cette dernière.

Observés isolément, certains faits, certaines dispositions, sans passer inaperçus, n'acquièrent pas aux yeux de l'observateur leur signification propre et leur valeur intrinsèque. Un examen comparatif fait ressortir divers détails d'apparence insignifiants. C'est ainsi que j'ai été conduit à rechercher les connexions précises du lobe hépatique gauche avec l'estomac. Or, si l'on se reporte aux descriptions du foie chez le fœtus, et si, comme je l'ai fait, on contrôle ces descriptions sur les fœtus normaux de divers âges, on se convainc que le lobe hépatique gauche occupe tout l'hypochondre gauche où il entre en rapport, par sa face inférieure, avec la petite courbure et la face antérieure de l'estomac. Uniquement considérées à l'état normal, ces relations entre la glande et la poche gastrique n'offrent rien de particulièrement intéressant ; rien n'autorise à voir en elles autre chose que des connexions de voisinage, déterminées par le lieu d'origine de la masse hépatique. mais laissant entière l'indépendance réciproque des deux organes.

L'examen comparatif des cas d'ectopie montre que ces rapports sont conservés aussi exactement que possible, alors que l'estomac et le foie sont hors de leur place habituelle. Dans notre premier cas, en effet, l'estomac possédant sa forme normale est recouvert par le foie de telle sorte que le lobe intra-thoracique de celui-ci, qui n'est autre chose que le lobe gauche normal, soit en contiguité avec la face anté-

rieure et la petite courbure de l'estomac ; et comme l'estomac se trouve sur la ligne médiane de la cavité thoracique gauche, le foie est lui aussi sur la ligne médiane, c'est-à-dire qu'il ne touche ni au médiastin à droite, ni à la paroi latérale à gauche restant, par ses bords correspondants, à égale distance de l'une et l'autre paroi. L'espace de séparation est, de part et d'autre, assez étroit ; à gauche il ne peut recevoir qu'une seule anse intestinale. Nous constatons, en outre, que la face inférieure du foie est devenue directement postérieure, de sorte que la situation nouvelle du foie n'est pas simplement le résultat d'une flexion sur l'axe longitudinal, mais aussi d'une torsion de ce lobe gauche entrainant sa face inférieure vers la paroi postérieure contre laquelle est appliqué l'estomac.

Dans notre second cas, l'estomac est situé aux confins de la ligne médiane, sa face antérieure est devenue la face latérale droite et la petite courbure regarde en arrière. Malgré ces dispositions insolites, le lobe hépatique gauche affecte presque intégralement avec l'estomac ses rapports habituels ; mais il ne peut le faire qu'en se redressant d'une façon complète et en venant s'appuyer très étroitement contre le médiastin. Nous observons effectivement, que l'axe du lobe intra-thoracique est franchement perpendiculaire sur l'axe du lobe abdominal, tandis que la face inférieure, au lieu de regarder directement en arrière, regarde en arrière et à gauche, la masse hépatique s'insinuant entre le médiastin et l'estomac. De plus, les rapports entre la petite courbure et le foie sont assurés par un petit lobule (lobule de Spiegel ?) qui s'insinue dans l'orifice délimité par la petite courbure et la paroi postérieure du corps. De l'adossement du foie contre le médiastin résulte un espace libre relativement considérable entre le foie et la paroi latérale gauche ; cet espace est occupé par les anses du colon.

Ces constatations faites, les rapports du lobe hépatique gauche et de l'estomac prennent un sens tout nouveau. Il ne s'agit plus simplement de rapports de contiguité laissant intacte l'indépendance réciproque des deux organes ; ces rapports sont, à n'en pas douter, des rapports de corrélation embryonnaire. Cette corrélation, nous la retrouvons, non seulement dans nos cas, mais dans le plus grand nombre des cas où existe l'ectopie de l'estomac. A ce point de vue, la statistique fournie par G. Paillard [1] est tout à fait instructive. Sur 58 observations relatant la situation intra-thoracique de la poche gastrique, on constate 53 fois le déplacement concomitant du foie [2]. Bien que les détails fassent com-

(1) Op. cit.

(2) A cette statistique, nous devons ajouter le cas publié par T. L. Chadbourne : A Case of diaphragmatic hernia ; death from acute distension (The american

plètement défaut sur les variations corrélatives entre les dispositions de l'estomac et celles du foie, s'ajoutant à nos deux observations précises, ces chiffres sont concluants. Dès lors, l'émigration du foie dans le thorax gauche devient très claire : elle ne dépend pas d'une action mécanique secondaire, elle n'est pas déterminée par l'existence d'un orifice béant ; elle résulte d'un entraînement, d'une sorte d'attraction exercée par l'estomac. Sans doute, nous ignorons la nature des liens invisibles qui unissent ainsi deux organes [1] ; sur l'existence même de ces liens, il n'est plus permis, aujourd'hui, d'émettre le moindre doute. Ces liens, certes, ne sont point indestructibles ; s'ils entrent en jeu au cours de l'ontogenèse normale, s'ils persistent fréquemment dans les ontogenèses anormales, ils peuvent cependant être brisés : divers faits le démontrent amplement. Mais il suffit que ces liens existent, pour que nous ayons le droit de faire fonds sur eux, de les faire intervenir, en toute certitude, dans nos interprétations. Nous pouvons conclure que la forme anormale du lobe gauche du foie est une forme primitive résultant d'un développement désorienté sous l'action corrélative de l'estomac ; pour cet organe encore, il y a ectopie. Seulement, ce n'est plus une ectopie consécutive, passive, comme celle de l'estomac, c'est une ectopie active ; la pullulation du foie s'étant effectuée dans un sens anormal, ce n'est point à un phénomène d'hétérochronie qu'il doit sa situation intra-thoracique. Il était intéressant de relever cette particularité.

Cela posé, la solution de continuité du diaphragme s'explique d'elle-même. Il ne s'agit plus d'un arrêt de développement initial ; il s'agit d'un obstacle apporté au développement du tissu musculaire, comme le pensait Cruveilhier. D'une part, l'estomac stationnant assez haut dans le thorax a maintenu la cloison thoraco-abdominale ; d'autre part, l'ébauche primitive du diaphragme a été progressivement envahie par les bourgeons du foie embryonnaire ; le foie s'est substitué au diaphragme sans effraction, sans déchirure : la substitution a été plus ou moins complète, suivant les cas.

C'est également par une action corrélative que je m'explique maintenant que, d'une façon générale, ainsi que cela ressort des descriptions et aussi de mes observations propres, le pancréas épouse la direction de l'estomac, restant en rapport avec la moitié supérieure de sa face

journal of the medical sciences, août 1903). Ce cas rentre dans les exceptions, ce qui fait 53 déplacements corrélatifs sur 59 observations.

(1) Sur ce sujet voir mon article : Les Corrélations embryonnaires au point de vue de l'embryologie générale. (Revue des Idées, 15 octobre 1904.)

postérieure. Et c'est peut-être sous la traction simultanée du pancréas et du foie, que la deuxième portion du duodénum occupe la situation inverse que j'ai observée dans mes deux cas. J'avais précédemment émis l'hypothèse contraire : sans m'expliquer pourquoi la deuxième partie du duodénum prenait une direction anormale, j'attribuais à cette direction les variations de position des organes, et plus particulièrement du pancréas. La manière de voir que j'adopte aujourd'hui me paraît beaucoup plus juste ; elle a tout au moins l'avantage de reposer sur des données positives.

Il ne faudrait évidemment pas exagérer dans cette voie ; les liens corrélatifs normaux, quelle que soit leur importance, ne sont pas tout dans l'ontogenèse anormale. Si nous pouvons affirmer leur intervention dans certains cas, il en est d'autres où nous pouvons aussi bien prétendre qu'ils n'interviennent pas. Néanmoins, il ne serait pas absolument surprenant que les dispositions hétéroclites de la masse intestinale ne soient dominées par une relation du même ordre entre le foie ou l'estomac d'une part, et le gros intestin de l'autre. Je ne puis fournir sur ce point aucune preuve décisive ; je me contente simplement de signaler ce fait que, dans mes deux observations, les anses du colon et le cœcum étaient massés vers la gauche ; dans le cas où le foie obstruait largement le thorax, une seule anse du colon s'insinuait dans le thorax ; dans le cas où le foie ménageait un espace suffisant entre lui et la paroi thoracique, la pénétration des anses du colon était plus complète. Peut-être ces dispositions répondent-elles simplement à des nécessités mécaniques qui nous échappent.

D'ailleurs, il ne faut pas voir dans ces corrélations des actions nécessaires ; il ne faut surtout pas y voir des actions constamment bilatérales. Parfois ce ne sont pas deux organes qui sont liés entre eux, c'est un organe qui en tient un autre sous sa dépendance : quand le premier varie, il détermine fréquemment la variation du second ; mais, si la variation affecte celui-ci, celui-là n'est nullement affecté. C'est ainsi que les choses paraissent se passer entre l'estomac et le foie : les variations du foie n'ont aucune répercussion sur l'estomac.

Pour ce qui est de la rate, il n'est pas nécessaire d'invoquer une action corrélative. Son mode de formation suffit, à lui seul, pour expliquer sa présence constante à côté de la grosse tubérosité de l'estomac.

Transposition du cœur. — Un dernier point reste à élucider : c'est le mode de migration du cœur dans la cavité thoracique droite. Nos conclusions à cet égard découleront logiquement du mécanisme que

nous avons admis pour expliquer la présence de l'estomac et du foie dans la cavité thoracique gauche.

Le simple examen du cœur et des vaisseaux conduit forcément à penser, que sa situation anormale ne peut être le fait d'un déplacement secondaire plus ou moins violent. Sans insister sur l'absence de déformation du cœur lui-même, ni sur sa position couchée qui est, à coup sûr, un phénomène accessoire et contingent ; sans insister non plus sur l'intégrité du médiastin, nous remarquerons l'absence de tiraillements, de plissements, de déchirements dans les vaisseaux, mais, bien au contraire, leurs dispositions en quelque sorte harmoniques. S'ils parcourent des trajets inaccoutumés, si les vaisseaux du côté gauche sont allongés dans une large mesure, cette élongation ne résulte nullement d'une tension, car celle-ci ne se serait pas opérée sans entraîner des ruptures plus ou moins importantes, en dépit de l'élasticité des tissus vasculaires.

Nous constatons, d'ailleurs, du côté de la veine cave inférieure une disposition tout à fait explicite. La constatation n'a pas seulement trait à l'orifice diaphragmatique de cette veine ; bien que cet orifice soit sensiblement déplacé vers la droite, par rapport à la moyenne, on pourrait, à la rigueur, ne voir là qu'une variation insignifiante, sans relation nécessaire avec l'ensemble de l'organisation monstrueuse. Ce qui est tout à fait significatif, c'est l'absence de trajet intra-thoracique de la veine elle-même ; c'est ce fait que la veine s'ouvre dans l'oreillette droite, couchée sur le diaphragme, aussitôt après avoir traversé la cloison musculaire. Aucun doute ne subsiste sur ce point. Or, dans l'hypothèse d'un déplacement secondaire, la veine aurait nécessairement un segment intra-thoracique qui, sous l'influence du changement de position du cœur, se serait plus ou moins infléchi, plus ou moins engagé sous le cœur lui-même. On n'observe rien de semblable, et nous ne supposons pas que l'on puisse invoquer un phénomène de rétraction secondaire du segment intra-thoracique, hypothèse purement gratuite. Sans doute, une action compressive exercée par le cœur d'un côté, par le diaphragme de l'autre, aurait déterminé l'oblitération du vaisseau ; mais cette oblitération eut été définitive et non suivie de la constitution d'un orifice secondaire dans l'oreillette, précisément à la place de l'orifice originel. Au surplus, nous retrouverions, sous une forme quelconque, les vestiges du canal oblitéré. Le point de vue n'est pas soutenable, et nous ne l'envisageons que pour répondre, par avance, aux objections plus ou moins fondées, devant lesquelles ne reculeraient pas les partisans quand même de la formation mécanique de la « hernie ». En fait, la veine

cave inférieure, aussi bien que les autres troncs vasculaires, est exactement adaptée à sa situation. — On se rend compte également, que si la position du cœur résultait d'une poussée violente, qui est celle d'une hernie, l'aorte ne présenterait pas les contours que nous avons décrits, sa crosse serait déformée, sinueuse, irrégulière.

Il serait cependant absurde de dire que le cœur et ses annexes sont nés en la place où nous les avons trouvés. Nul n'ignore que l'ébauche primitive de l'organe central de la circulation apparaît sur la ligne médiane du corps embryonnaire ; ce n'est qu'à la suite d'un déplacement qu'il vient se loger dans la cavité thoracique gauche. Au fur et à mesure que la migration s'effectue — et elle s'effectue très lentement — la croissance des vaisseaux s'adapte à la situation qu'ils vont occuper : ceux de gauche s'allongent moins que ceux de droite ; ils gagnent leur point de traversée du diaphragme, alors que celui-ci n'est encore qu'un tissu peu résistant. Eh bien ! nous pensons que les processus qui entrent en jeu au cours ordinaire des choses interviennent également dans les cas anormaux de l'ordre qui nous occupe. Le cœur des sujets affectés d'ectopie gastro-hépatique n'a jamais occupé le thorax gauche ; il a gagné directement le thorax droit, les troncs vasculaires s'adaptant progressivement à cette situation nouvelle, de la même manière qu'ils se seraient adaptés à la situation habituelle. C'est après la migration que le médiastin s'est définitivement constitué ; c'est après la migration que l'orifice diaphragmatique de la veine cave inférieure s'est consolidé, contractant avec le vaisseau les adhérences qui le maintiennent. La transposition du cœur est donc, elle aussi, primitive ; considérée en soi, elle s'est effectuée normalement.

Mais il est bien évident que cette transposition reconnaît pour cause déterminante la pénétration du lobe hépatique gauche dans le thorax. Venant occuper la place ordinairement dévolue au cœur, il oppose à la migration de ce dernier vers la gauche une barrière infranchissable. L'intervention de la dilatation gastrique n'est d'ailleurs pas négligeable, et l'on peut se demander si elle n'entre pas la première en jeu, la grosse tubérosité de l'estomac notablement surélevée, se trouvant au niveau du cœur. Il ne paraît pas nécessaire d'invoquer ici l'une ou l'autre des actions corrélatives sur lesquelles nous insistions tout à l'heure ; ce serait une vue sans fondement et l'obstacle mécanique suffit à rendre compte des dispositions observées.

Compression des poumons. — La situation du cœur étant ainsi comprise, les particularités relatives à l'appareil respiratoire ne sou-

lèvent aucune difficulté. Tandis que la trachée est déviée vers la droite, entraînant avec elle l'ébauche pulmonaire gauche, celle-ci est ensuite contrainte de se développer dans l'étroit espace compris entre le sommet du thorax et le foie ; elle s'accommode comme elle peut dans ces limites restreintes, sans que l'accommodation paraisse liée à aucune règle précise, ainsi que nous l'indique l'examen comparatif de nos deux observations. Ici, le poumon gauche, aplati, s'est insinué entre la paroi et le foie ; là, il s'est allongé en gagnant vers la paroi latérale. Tout dépend vraisemblablement du volume occupé par les organes ectopiés.

Quant au poumon droit, il s'est trouvé pris entre le cœur, organe contractile et résistant, et la paroi thoracique. Lui aussi s'est accommodé à l'espace qui lui était dévolu.

Il est une remarque qui s'adresse au tissu pulmonaire et qui a son intérêt : la compression subie ne paraît pas porter une atteinte sensible à l'accroissement des ébauches. Ce fait concorde avec une série d'autres observations ; il contribue à établir cette notion qu'une action compressive quelconque peut déformer un orgagne, et le déformer de la façon la plus complète, mais qu'elle n'entrave nullement le développement de cet organe, pas plus sa croissance que sa différenciation, — contrairement à ce que divers auteurs expriment dans des termes plus ou moins précis.

IV

Conclusions générales.

Des descriptions et considérations qui précèdent, se dégage, semble-t-il, un type tératologique nettement défini. Sous la domination d'un processus initial, particulièrement simple dans son essence, se déroule toute une ontogenèse anormale faisant intervenir des liens corrélatifs héréditaires, utilisant des effets mécaniques par action progressive et lente, et aboutissant à une constitution générale parfaitement harmonique. Le point de départ étant donné, nous remontons aisément toute la série des phases, et nous concevons que des phases semblables pourront se succéder chaque fois que le même processus initial sera déterminé. Sans doute, si nous pénétrons dans les détails nous relèverons un certain nombre de variations ; mais ces variations sont éminemment contingentes ; elles ne changent rien aux lignes essentielles de la monstruosité ; quelques-unes, d'ailleurs, sont étroitement liées aux modalités diverses du processus initial. Telle est,

par exemple, la forme et l'étendue du septum diaphragmatique vertical.

Mais précisément parce qu'elles sont accessoires et contingentes, ces variations sont extrêmement instructives. C'est sur elles que reposent les distinctions actuellement établies parmi les cas de « hernie diaphragmatique ». Les auteurs s'étendent à l'envie sur l'existence ou l'absence d'un « sac » ; s'ils ont reconnu, à l'encontre de Duguet, que, avec ou sans sac, ces diverses « hernies » sont toutes congénitales, ils n'en attribuent pas moins à ce caractère une importance capitale. Tout récemment encore, Nau [1] établissait une relation entre l'absence d'un « sac » et l'existence d'une bande musculaire antérieure. Au dire de cet auteur, « la hernie classique est postérieure ; elle n'a jamais de sac ; elle contient exceptionnellement du foie : elle n'est autre chose que la persistance de la communication pleuro-péritonéale normale à un certain stade de la vie intra-utérine ; le pilier de Uskow gauche ne s'est pas développé, mais le diaphragme primaire est intact ». Le même auteur inspirait à Paillard la distinction entre les hernies embryonnaires (sans sac) et la hernie fœtale (avec sac). Je ne sais s'il est fréquent de rencontrer la coexistence d'une bande musculaire et d'un lobe hépatique intra-thoracique ; moins heureux que Nau, je n'ai pu trouver des renseignements précis dans les observations publiées. Ce qui me paraît infiniment probable, c'est que le fait n'a aucune signification majeure, la formation d'une bande musculaire antérieure étant sans doute liée au volume des organes ectopiés, ainsi que je l'ai indiqué plus haut. Si le foie occupe toute la place, le diaphragme ne peut se constituer ; si le foie ménage un certain espace entre lui et la paroi thoracique, la formation diaphragmatique pourra s'établir — ainsi qu'on l'observe dans le cas que nous rapportons aujourd'hui ; à plus forte raison, cette bande musculaire se développera-t-elle, si le foie n'émigre pas dans le thorax.

Quant à la présence ou à l'absence même d'un sac, je crois avoir montré quelles conclusions ressortaient du rapprochement de mes deux observations. L'une et l'autre appartiennent manifestement au même type tératologique ; elles sont aussi comparables que peuvent l'être deux monstruosités ; nous avons constaté que le lambeau diaphragmatique qui constitue le « sac » de la première se retrouve dans la seconde, sous une forme assez réduite, assurément, mais néanmoins avec une netteté suffisante pour qu'il n'y ait pas le le moindre doute

(1) P. Nau. Malformations multiples chez un nouveau-né. Hernie diaphragmatique. Soc. anat. de Paris, 1903, n° 7.

sur sa valeur et sa signification. Et cependant, au gré des conceptions courantes, l'une devrait être rangée dans le groupe des « hernies avec sac », l'autre dans le groupe des « hernies sans sac ».

Au demeurant, les distinctions actuellement établies ne reposent sur aucun caractère fixe et véritablement important. L'attention des observateurs s'est laissé détourner par des faits très frappants, mais tout à fait accessoires relativement à l'usage qu'ils en ont voulu faire; ils ont été ainsi conduits à considérer comme une hernie ce qui est une ectopie.

Si nous voulons établir quelques catégories dans l'ensemble des cas d'ectopie intra-thoracique, nous devons rechercher le siège et le point de départ du processus initial et cesser de nous arrêter uniquement sur le diaphragme qui subit, en quelque sorte, le contre-coup du processus, sans coopérer lui-même activement à la constitution de l'anomalie. D'ores et déjà, nous pouvons établir un type bien défini, caractérisé par un arrêt de croissance en longueur de l'œsophage d'où résulte nécessairement la surélévation de l'estomac, — et présentant un certain nombre de dispositions connexes, en particulier la migration fréquente du lobe hépatique gauche dans le thorax du même côté.

Ce type se rencontre-t-il fréquemment ? La lecture des observations publiées ne fournit à cet égard aucun renseignement précis ; le plus grand nombre des auteurs passent l'œsophage sous silence, ou, dans tous les cas, ne lui accordent qu'une mention brève, tout à fait insuffisante. On pourrait, à la rigueur, tabler sur la disposition de l'estomac et s'il était vrai, comme l'avance Paillard, que cet organe est le plus ordinairement vertical, nous pourrions admettre la grande fréquence de ce type d'ectopie. Seulement, l'affirmation de Paillard paraît être en contradiction avec la réalité des choses ; en fait, nous n'avons trouvé qu'une seule observation, celle de Boulland (1), relatant une pareille disposition. D'autre part, certaines descriptions, celle de Chadbourne (2) en particulier, mentionnent un trajet récurrent de l'extrémité inférieure de l'œsophage, trajet récurrent qui laisse supposer que la surélévation de l'estomac provient d'un autre processus que d'un arrêt de croissance de l'œsophage.

Nonobstant, nous croyons que le type ayant pour caractère fondamental la brièveté primitive de l'œsophage n'est pas un type exceptionnel. Sans relever la curieuse coïncidence de dispositions semblables dans les deux cas soumis à notre examen qui appartiennent à deux fœtus

(1) Boulland. Soc. anat., 1846.
(2) Op. cit.

tout à fait étrangers l'un à l'autre, nous avons des raisons de croire qu'un bon nombre de cas présentent une ectopie gastrique se rattachant à notre type. Sans doute, l'estomac n'est pas toujours vertical ou n'est pas décrit comme tel ; mais nos deux observations montrent que la brièveté de l'œsophage, que la situation de ce conduit subissent des variations importantes. Le retard de croissance peut être insuffisant pour provoquer une surélévation très marquée de l'estomac, mais suffisant pour ramener l'estomac au-dessus du plan du diaphragme, tout en lui permettant d'acquérir une situation plus ou moins différente de la verticale, en le déplaçant, dans une certaine mesure, vers la ligne médiane.

Notre point de vue, on voudra bien le remarquer, ne tend nullement à remplacer une exagération par une autre. Nous limitons strictement notre type aux cas où existe, d'une façon positive, une surélévation de l'estomac et où cette surélévation ne peut être expliquée par une autre mécanisme que la brièveté de l'œsophage. Chaque fois que l'estomac ne se trouvera pas dans le thorax, qu'il y ait ou non ectopie du foie ; chaque fois que la longueur du conduit œsophagien sera sensiblement égale à la moyenne, il faudra nécessairement penser à un autre processus. En particulier, on ne saurait songer à faire intervenir un arrêt de croissance lorsque le foie occupe la cavité thoracique droite, ou lorsque l'intestin seul se trouve déplacé.

Il importe, on le voit, de pratiquer l'examen anatomique des cas de soi-disant hernie diaphragmatique avec un soin minutieux, sans accorder *a priori* plus de valeur à tel détail plutôt qu'à tel autre. La valeur relative des faits ne peut s'établir que par une étude attentive dépouillée de toute idée préconçue, par la comparaison des faits de même ordre ou paraissant tels.

Ce n'est point là une recherche sans portée ; les anomalies les plus simples, les plus banales en apparence, aident parfois, dans une large mesure, à résoudre les problèmes les plus intéressants, et aussi les plus ardus, de l'embryologie générale.

Laboratoire d'Évolution des êtres organisés, à la Sorbonne, mai 1904.

SUR UN TYPE NOUVEAU D'AMPHIPODE

Grandidierella Mahafalensis,

PROVENANT DE MADAGASCAR

PAR **H. COUTIÈRE**

Parmi les Crustacés recueillis par M. G. Grandidier à Madagascar, en 1901-1902, se trouvent trois exemplaires d'un Amphipode remarquable, pour lesquels il est nécessaire de créer le nouveau genre *Grandidierella* (1).

Mâle. (fig. 1). — Corps peu comprimé, entièrement lisse et glabre. Tête plus longue que l'ensemble des deux premiers segments du mesosome, lobes latéraux semi-circulaires, angle inférieur droit.

Plaques coxales des quatre premiers segments peu développées, deux fois et demie moins hautes que le segment correspondant, la seconde étant la plus grande. Plaques coxales 5, 6, 7 avec lobe antérieur d'importance décroissante, au moins deux fois plus haut que le lobe postérieur sur la cinquième plaque, un peu plus haut seulement sur la septième.

Plaques épimérales du métasome avec l'angle postéro-inférieur arrondi.

Yeux bien marqués, circulaires, placés au centre des lobes latéraux céphaliques.

Antennes supérieures atteignant à peu près la longueur de la tête et des huit premiers segments du corps, article basal du pédoncule un peu plus long que la tête, portant une série de six épines inféro-internes. Article médian plus grêle et plus allongé, article distal égal au quart du précédent.

Flagellum de 19-20 articles, plus court que le pédoncule. Un très court flagelle accessoire interne, 1-articulé, muni de quelques soies distales, plus court que le premier article du flagelle principal (fig. 3).

Antennes inférieures robustes, sensiblement égales aux précédentes

(1) Je dois remercier ici le R. Th. Stebbing, dont l'autorité est si grande en matière d'Amphipodes, d'avoir bien voulu, avec la plus extrême obligeance, confirmer le bien fondé de mes diagnoses.

ou légèrement plus courtes. Tous les articles visibles en dehors de la tête. Articles 3, 4, 5 cylindriques, de grosseur décroissante, le médian (mérocérite) étant le plus long. Flagellum un peu plus long que la moitié du carpocérite, comprenant neuf articles, dont le dernier, très petit, porte un bouquet de soies. L'avant-dernier avec deux fortes épines, les précédents avec chacun une épine et quelques soies (fig. 4).

Lèvre antérieure arrondie avec une très légère dépression sur son bord libre (fig. 5).

Processus molaire des mandibules bien marqué. Bord tranchant avec cinq dents obtuses ; lobe accessoire terminé par deux épines et suivi d'une rangée de douze fortes soies plumeuses ; palpe à trois articles, les deux premiers presque égaux, le troisième (distal) un peu plus long, plus élargi et terminé par de longues soies (fig. 7 et 7′).

Lèvre inférieure avec des lobes externes munis d'un prolongement conique, très développés, lobes internes ovales, ciliés sur toute leur surface (fig. 6).

Maxilles 1 (fig. 8) avec un lobe interne extrêmement peu marqué, arrondi, sans trace de soies. Lobe externe portant sur son bord libre une série de onze épines, dont un groupe de quatre plus fortes à l'angle distal externe, les sept autres ramifiées (fig. 8″). L'article distal du palpe porte une rangée de six épines et quelques longues soies éparses (fig. 8′).

Maxilles 2 avec un lobe interne garni d'une double rangée de soies, insérées l'une sur le bord libre, l'autre sur une ligne parallèle ; lobe externe avec une rangée de soies sur le bord distal (fig. 9).

Maxillipèdes (fig. 10) avec le lobe du basipodite garni de soies, parmi lesquelles deux ou trois épines fortes et courtes. Lobe de l'ischiopodite arrondi avec une rangée d'épines de longueur croissante et quelques soies (fig. 10″). Propodite avec un bouquet de fortes soies, dactyle conique, court, portant deux fortes épines, dont une terminale (fig. 10′).

Gnathopodes 1 très volumineux. Carpe deux fois et demi plus long que large, à bords presque parallèles dans sa moitié distale. Le bord postérieur se prolonge pour former, avec le bord palmaire, une forte saillie épineuse. Une autre saillie obtuse sur le bord palmaire, près de l'articulation du propodite ; celui-ci égale à peu près en longueur la largeur du carpe et porte 4 petites épines. Le dactyle, courbé à sa pointe, peut se fermer sur le bord postérieur du carpe. Il est rempli par une glande (fig. 11).

Gnathopodes 2 beaucoup plus petits. Propodite avec trois épines, non opposable au carpe, dactyle robuste, régulièrement courbé, se

fermant sur le bord palmaire du propodite, qui est muni d'une rangée de soies parallèles (fig. 12).

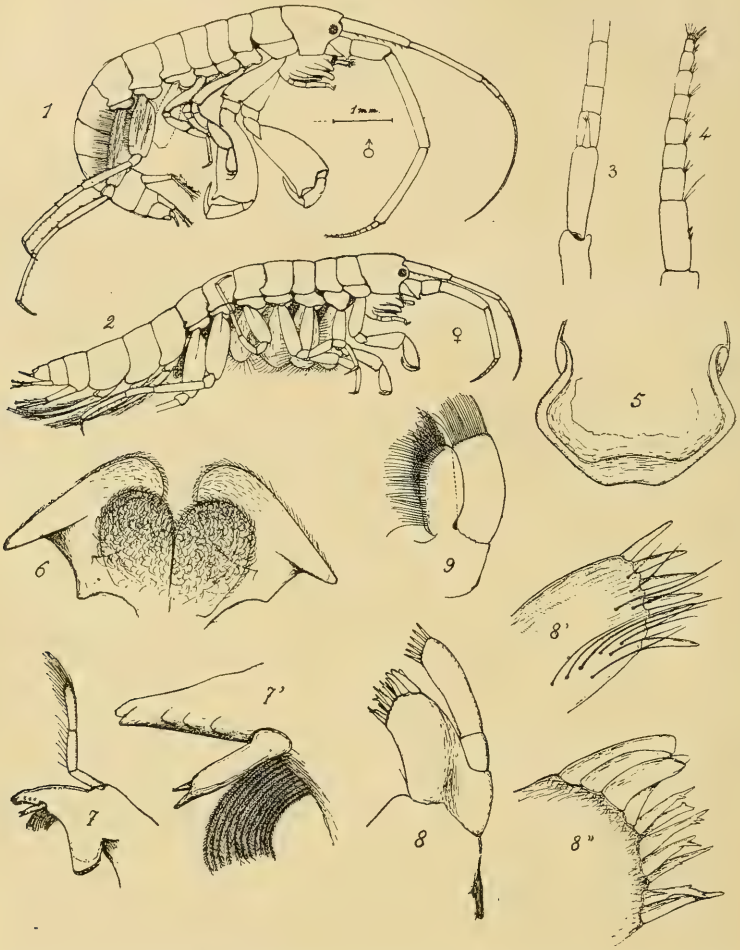


Fig. 1. Grandidierella Mahafalensis, ♂ (type). — Fig. 2. id. ♀ (type). — Fig. 3. Fouet antennulaire accessoire, détails. — Fig. 4. Détails du fouet antennaire. — Fig. 5. Lèvre supérieure. — Fig. 6. Lèvre inférieure. — Fig. 7. Mandibule, et 7' détails du psalistome. — Fig. 8. Maxille 1 ; Fig. 8' et 8" détails du palpe et du lobe externe. — Fig. 9. Maxille 2.

Péréiopodes 1 et 2 presque égaux, propodite et méropodite d'égale longueur, carpe plus petit, dactyle simple, légèrement courbé, glanduleux (fig. 15). Péréiopodes 3, 4, 5 de longueur croissante, le cinquième

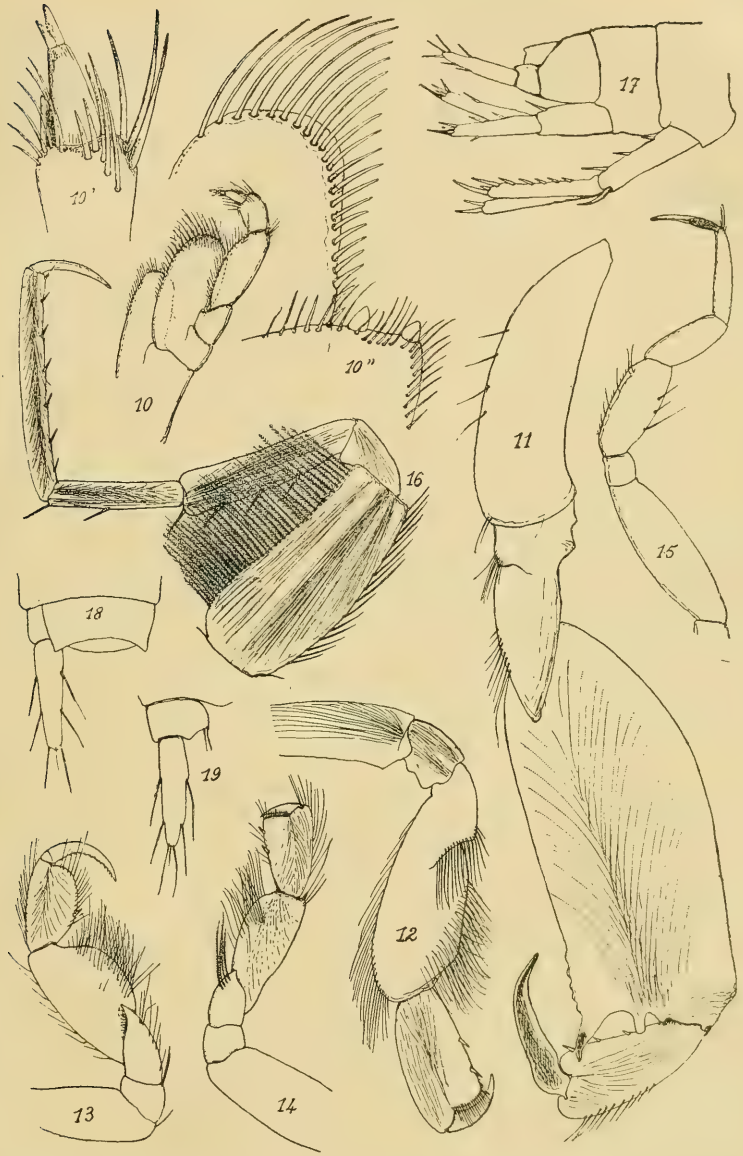


Fig. 10. Maxillipède; fig. 10' et 10", détails du propodite et des processus de l'ischio et du basipodite. — Fig. 11. Gnathopode 1 du ♂. — Fig. 12. Gnathopode 2 du ♂. — Fig 13. Gnathopode 1 de la ♀. — Fig. 14. Gnathopode 2 de la ♀ — Fig. 15. Péréiopode 1 de la ♂. — Fig. 16. Péréiopode 5 du ♂. — Fig. 17. Urosome et uropodes, vus latéralement. — Fig. 18. Telson et uropode 3. — Fig. 19. Uropode 3, isolé.

presque deux fois aussi long que le troisième. Dactyle et propodite inversés, le second avec une rangée de six épines. Carpe et méropodite avec respectivement deux et quatre épines. Basipodite très élargi, ovale, avec son bord postérieur frangé de longues soies plumeuses (fig. 16).

Uropodes de la première paire avec la hampe cylindrique, munie de quatre épines, dont une, plus grande, à la naissance des deux rames. Celles-ci avec huit épines, dont deux terminales et inégales.

Uropodes de la deuxième paire semblables, hampe avec une seule épine, rames avec cinq épines terminales (fig. 17).

Uropodes de la troisième paire uniramés, hampe dilatée en dedans, portant deux soies. Rame unique, ovale, aplatie, portant trois paires de soies (fig. 19).

Telson plus large que long, angles distaux saillants, limitant le bord postérieur arrondi (fig. 18).

Femelle (fig. 2). — Dimorphisme très accentué, portant sur les antennes et les gnathopodes.

Antennes supérieures légèrement plus longues que les inférieures, comme chez les ♂, mais ne dépassant pas la longueur de la tête et des quatre premiers segments du corps. Articles 1 et 2 du pédoncule sensiblement égaux, flagellum principal à 16 articles, flagellum accessoire comme chez le ♂.

Gnathopodes 1 plus courts, mais plus volumineux que ceux de la 2^{me} paire. Carpe avec le bord postérieur fortement arqué, environ 2 fois aussi long que large, dépourvu de bord palmaire. Propodite arqué également sur le bord postérieur, 2 fois aussi long que large, ne se repliant pas sur le carpe, Dactyle régulièrement et fortement courbé, entièrement opposable au propodite, muni de spinules sur son bord interne (fig. 13).

Gnathopodes 2 avec le basipodite ovale, plus long et plus élargi que sur l'appendice précédent, carpe plus étroit, presque 2 fois 1/2 plus long que large. Propodite ovale, tronqué distalement, bord palmaire très marqué ; dactyle un peu courbé, ne dépassant pas, fermé, l'extrémité du bord palmaire. Cet appendice rappelle d'assez près son homologue chez le ♂, sauf que le carpe est moins élargi et le dactyle plus court (fig. 14).

Péréiopodes, uropodes, telson, forme du corps et des plaques coxales comme chez le ♂.

Par le faible développement des plaques coxales, le volume des antennes, la forme des pièces buccales, des gnathopodes et des uropodes, le genre *Grandidierella* doit être rangé dans la famille des

Corophiidae, telle que l'a définie Stebbing. Deux genres lui sont particulièrement comparables, *Chevreuxius* Kœhler, représenté par *Ch. grandimanus* Kœhler, et *Camacho* Stebbing, réduit également à une espèce, *C. bathyploüs* Stb. L'un et l'autre de ces Amphipodes sont aveugles et proviennent des grandes profondeurs.

Camacho bathyploüs (1), recueilli par le Challenger dans les eaux de la Nouvelle-Zélande par 1100 brasses (2900 m.), est représenté par une seule ♀ très mutilée. La comparaison avec *Grandidierella* peut se poursuivre très loin.

L'article basal de l'antennule, seul présent chez l'exemplaire de *C. bathyploüs*, est plus long que chez *Grandidierella*. Sur les mandibules, c'est l'article médian du palpe qui est le plus long. Les maxilles 1 portent un lobe interne bien marqué, avec soie.

Les maxilles 2 ont le lobe externe ovale et non tronqué. Les deux derniers articles du palpe des maxillipèdes sont plus allongés.

Les gnathopodes 1 et 2 sont presque semblables entre eux, le premier, de même que chez *Grandidierella*, est légèrement plus robuste, surtout par le carpe et le propodite un peu plus élargis, mais sur le gnathopode 2 le dactyle vient se fermer sur le bord postérieur, comme sur l'appendice précédent, tandis qu'il se ferme, chez *Grandidierella*, sur le bord palmaire, différenciant nettement les gnathopodes 1 et 2.

Le telson est plus allongé chez *Camacho*, mais ses angles distaux sont distincts et le bord postérieur compris entre eux, comme chez *Grandidierella*.

Les uropodes 3 se distinguent en ce qu'ils portent 2 rames. L'interne est, à vrai dire, très petite, munie de 3 soies. L'externe est conique, avec un pinceau de soies terminales.

Bien qu'elles portent uniquement sur la ♀, les différences énumérées ci-dessus suffisent à différencier les deux genres; il est probable que la découverte du ♂ de *Camacho bathyploüs* ne ferait que les accentuer, surtout en ce qui concerne les gnathopodes 1 et 2.

Chevreuxius grandimanus (2), représenté seulement par des exemplaires ♂, est plus facile à distinguer de *Grandidierella*.

Le 3e article du pedoncule antennulaire est plus long, le flagellum accessoire a 2 articles, le 5e article (carpocérite) de l'antenne est très allongé, le flagellum a 4 articles seulement.

---

(1) Amphipodes du Challenger, p. 1178. pl. 127.
(2) Expédition du « Caudan », Zoologie, p. 663, pl. 40, fig. 3.

Le palpe mandibulaire a son 3e article le plus long. Le lobe interne de la maxille 1 est bien distinct et porte une soie ; les basi-et ischiopodite du maxillipède portent seulement 4-5 fortes et courtes épines.

Les gnathopodes de la 1re paire sont très volumineux, comme chez *Grandidierella* ♂, la forme du carpe est très semblable, mais cet article est plus court, et surtout le propodite, non opposable, et en forme de quadrant ; le dactyle, très court aussi, s'oppose ainsi, non plus au bord postérieur, mais à la fois au bord palmaire du carpe, réduit presque à une forte saillie épineuse, et au propodite, également muni d'un lobe saillant.

Les gnathopodes 2 et les péréiopodes, le telson, paraissent très semblables à leurs homologues chez *Grandidierella*, ainsi que les uropodes de la 1re paire. Par contre, les uropodes de la 2e et 3e paires sont l'un et l'autre uniramés, comme dans le genre *Cerapus*, alors que la 3e seulement est uniramée chez *Grandidierella*.

Chevreuxius grandimanus a été recueilli par le « Caudan », dans le golfe de Gascogne, sur un fond de vase, par 950 m. Il est, comme *Camacho bathyploüs*, complètement dépourvu d'yeux.

Le genre *Unciola* Say, présente tous les caractères de *Grandidierella*, y compris la dimension relative des gnathopodes 1 et 2, et l'uropode 3 uniramé. Mais il s'en distingue par la longueur des segments 1 et 2 du mésosome, par les antennes beaucoup plus robustes chez le ♂, le 2e article du palpe mandibulaire plus long et plus fort que le 3e, le lobe interne de la maxille 1 très marqué, le lobe du basipodite du maxillipède peu apparent.

Le gnathopode 1, chez la ♀, a le propodite très volumineux et le carpe très court, la gnathopode 2 se termine par une véritable pince didactyle.

L'uropode 3 a sa hampe prolongée latéralement en un lobe presque aussi long que la rame unique, et le telson est de forme régulièrement ovale, non échancré.

Le genre *Dryopoïdes* Stebbing, très voisin d'*Unciola* Say = *Dryope* Bate, diffère nettement de *Grandidierella* ; les plaques coxales sont plus hautes, le troisième article du palpe mandibulaire est plus long et de forme différente, le premier gnathopode du ♂ est moins robuste, et ne diffère pas de celui de la ♀ comme forme, le troisième uropode se termine par deux rames très petites, le telson est ovale et mucroné.

La diagnose du nouveau genre peut donc être établie comme suit : corps peu comprimé, plaques coxales étroites.

Antennes supérieures avec les articles 1 et 2 du pédoncule allongés, le troisième court. Flagelle accessoire 1- articulé, très petit.

Antennes inférieures au plus égales aux précédentes, articles 4 et 5 du pédoncule allongés.

Mandibules avec palpe à trois articles, de longueur croissante, peu inégaux, processus mandibulaire étroit, psalistome denté.

Lèvre inférieure avec processus des lobes externes longs et coniques.

Maxille 1 avec lobe interne presque nul, sans trace de soies, lobe externe avec onze épines.

Maxille 2 avec lobe interne muni de deux franges de soies.

Maxillipède avec une rangée d'épines sur le lobe de l'ischiopodite, dactyle court, comme unguiculé.

Gnathopodes 1 et 2 subchéliformes, dissemblables, le premier plus robuste que le second, présentant un dimorphisme sexuel très accentué comme dimensions et forme.

Péréiopodes 3, 4, 5 avec basipodite élargi, le cinquième presque deux fois aussi long que le troisième.

Uropodes 3 uniramés, pédoncule un peu élargi en dedans, plus court que la rame. Telson échancré, plus large que long.

Nous proposons, pour l'unique espèce du genre, le nom de *Mahafalensis*. Les trois spécimens qui la composent (2 ♂ et 1 ♀ ovée) ont été recueillis, par M. G. Grandidier, dans le lac Tsimanampetsotsa, dans une région jusqu'alors inexplorée du pays Mahafaly. Ce lac est une dépression lagunaire allongée, situé entre 24° et 24° 30′ lat. S. et par 41° 30′ long. O. Il est distant de la côte ouest d'une dizaine de kilomètres et ne possède plus de communications avec la mer. Sa salure, variable avec les précipitations atmosphériques, est plus forte que celle de la mer pendant la saison sèche et sa faune paraît très pauvre.

Grandidierella Mahafalensis a été recueillie dans la vase des bords du lac. Les spécimens sont fortement pigmentés, leur couleur brun-marron est due à des chromatophores dendritiques presque confluents sur le dos et les plaques coxales, plus clairsemés et faciles à délimiter sur les membres. Habitat et pigmentation se retrouvent semblables chez plusieurs Corophiidae des mers européennes, *Microdeutopus*, *Corophium*, par exemple.

La ressemblance étroite de *Grandidierella* avec des formes aussi complètement abyssales que *Chevreuxius* et surtout *Camacho*, est

certainement la plus remarquable des particularités que présente le nouvel Amphipode. Il serait très désirable que l'on pût lui comparer le ♂ encore inconnu de *C. bathyploüs*. Il serait intéressant aussi de connaître les spécimens marins de l'espèce, qui ne peuvent manquer de se trouver sur la côte ouest, pour les comparer à leurs congénères vivant isolés dans le lac.

NOTE

SUR

LA FORME ET LA STRUCTURE DES MUSCLES ADDUCTEURS DES MOLLUSQUES ACÉPHALES

par **M. R. ANTHONY.**

Ayant entrepris depuis plusieurs années déjà une étude de morphologie et de morphogénie générales des Mollusques acéphales, mon attention a été dès le premier abord attirée par la forme toute particulière et la structure des muscles adducteurs de ces animaux.

I. — MORPHOLOGIE.

Au point de vue du nombre de leurs muscles adducteurs les Acéphales peuvent être groupés en deux catégories : les Dimyaires qui ont deux muscles adducteurs, et les Monomyaires qui n'en ont qu'un. Ces catégories n'ont évidemment aucune valeur au point de vue de la classification systématique, les muscles étant en effet des organes extrêmement variables, extrêmement malléables, s'adaptant avec une facilité vraiment remarquable aux conditions d'existence extérieures; et, les classifications devant au contraire être l'expression la plus parfaite des rapports phylogéniques. En conséquence, elles doivent nécessairement être basées sur les caractères les moins variables, ceux qui se laissant peu influencer par les conditions d'existence extérieures se transmettent aux descendants avec le moins de changements.

Les Dimyaires se divisent en deux sous-catégories suivant que leurs deux muscles sont à peu près égaux ou inégaux : les Isomyaires et les Anisomyaires. On a donc en résumé à ce point de vue parmi les Acéphales 3 groupes dans lesquels on peut citer les genres suivants :

Dimyaires	Isomyaires : Nucula, Arca, Pectunculus, Unio, Cardium, Tapes, Psammobia Lutraria, Mya, Pholas, Chama, Cyrena, etc.
	Anisomyaires : Modiola, Mytilus, Dreyssensia, etc.

Monomyaires : Pecten, Ostrea, Anomia, Placuna, Mulleria, etc.

Un simple coup d'œil jeté sur ce tableau montre qu'il peut y avoir dans tous les groupes naturels des Isomyaires, des Anisomyaires et des Monomyaires.

Ces types sont ce qu'on appelle des types convergents dus à l'action de causes morphogéniques identiques s'exerçant sur des animaux appartenant à des groupes différents.

Il semble que de ces trois formes, la forme dimyaire isomyaire ait été la plus primitive, et il me paraît que l'ancêtre des Acéphales actuels ait dû être un Isomyaire voisin des Nucules faisant le passage avec les Gasteropodes diotocardes primitifs à symétrie bilatérale dont le Bellorophon quoique trop évolué déjà peut nous donner une idée approximative. Les résultats de l'anatomie comparée et de l'embryogénie corroborent cette manière de voir dans quelque mesure. Les formes anisomyaires et monomyaires seraient dérivées des précédentes par des processus qu'il n'y a pas lieu d'exposer ici.

Si l'on pratique une coupe antéro-postérieure sagittale d'un Acéphale régulier quelconque (en exceptant les types à adaptations très spéciales tels que Teredo ou Aspergillum dont je ne m'occuperai pas dans cette note) c'est-à-dire une coupe passant entre les deux valves, on constate immédiatement que dans la plupart des espèces à l'état frais, chacun de leurs muscles adducteurs est formé, comme l'avaient déjà observé pour quelques types isolés Coutance (1), Raph. Blanchard(2), Jolyet et Sellier(3), de deux parties bien distinctes, l'une blanche nacrée, l'autre jaunâtre plus opaque. Cette différence de coloration remarquablement nette chez certains comme l'Huître et le Pecten, l'est moins chez d'autres comme le *Mytilus edulis* (Linn) par exemple où cependant elle ne peut passer inaperçue. Chez *Dosinia exoleta* (Linn) et chez *Venus mercenaria* (Linn) qui sont des animaux très voisins, j'ai observé que la partie jaune opaque présentait une teinte rose saumon que je n'ai jamais constatée ailleurs et dont je ne puis m'expliquer la signification.

Que l'on ait affaire à un Dimyaire (isomyaire ou anisomyaire) ou à un Monomyaire la partie blanche nacrée est toujours périphérique, la partie jaunâtre opaque centrale par rapport à l'animal. Les figures re-

(1) Coutance, *De l'énergie et de la structure musculaire chez les Mollusques acéphales*, Paris, 1878.

(2) R. Blanchard, *Note sur la présence de muscles striés chez les Acéphales monomyaires*, *Rev. Int. Sc.*, T. V, n° 4, 1880.

(3) Jolyet et Sellier, *Contribution à l'étude de la physiologie comparée de la contraction musculaire chez les animaux invertébrés*, Travail du labor. d'Arcachon, 1899.

présentées rendront mieux compte que toute description de cette disposition chez les différents types. (Voy. fig. 1 à 11).

Parfois les deux portions du muscle sont complètement séparées par une aponévrose très nette, un peu distantes même quelquefois comme chez le Pecten. D'autres fois les fibres nacrées touchent directement aux fibres opaques comme chez l'Huître. Dans une troisième catégorie de cas, qnoiqu'on reconnaisse bien encore les fibres nacrées des fibres opaques, le passage des unes aux autres est insensible et leur limite indécise ; c'est le cas du *Cardium edule* (Lmck) par exemple. Dans une quatrième catégorie de cas on ne reconnaît qu'avec difficulté la division du muscle en ses deux parties constitutives tellement la transition est insensible ; c'est le cas de *Mytilus edulis* (Linn). Dans une dernière catégorie enfin on peut placer les cas dans lesquels le muscle semble tout entier constitué de fibres nacrées comme chez les Pholades par exemple.

A ces 5 aspects macroscopiques différents des muscles adducteurs pour lesquels on peut prendre comme types les animaux suivants :

Aspect 1. *Pecten maximus* (Lmck).
» 2. *Ostrea edulis* (Lmck).
» 3. *Cardium edule* (Lmck).
» 4. *Mytilus edulis* (Linn).
» 5. *Pholas dactylus* (Linn).

correspondent des structures différentes. En effet, on a :

	PARTIE NACRÉE	PARTIE OPAQUE
Aspect 1	Lisse	Stries transversales
» 2	»	Stries obliques
» 3	»	Stries obliques
» 4	»	Stries obliques paraissant nulles
» 5	»	»

Autrement dit plus les deux parties du muscle tendent à s'individualiser, ce qui veut dire que leurs fonctions sont très différentes, plus leur structure diffère.

En considérant la section transversale d'un muscle adducteur d'Acéphale on s'aperçoit immédiatement que la ligne de séparation des fibres opaques est le plus souvent courbe avec sa concavité dirigée du côté du centre, de l'animal (*Ostrea edulis* (Lmck) fig. 10) quelquefois droite (*Mytilus edulis* (Linn) fig. 8) ; quelquefois enfin elle affecte une

forme toute spéciale chez l'Anomia et la Placuna ainsi qu'on peut s'en rendre compte sur la figure 11. J'ai recherché la raison des formes différentes que peut affecter cette ligne chez les différents individus et je vais tâcher de l'exposer.

Ainsi qu'on a pu voir sur le tableau précédent, où j'ai dû anticiper sur le paragraphe que je compte consacrer à la structure de ces fibres, la partie nacrée du muscle est constituée de fibres lisses, la partie opaque de fibres striés. Bien que, comme on le verra plus loin, ces fibres ne soient pas absolument de même nature tant par leur fonction que par leur structure que celles correspondantes des animaux vertébrés, leurs fonctions semblent se rapprocher des leurs. En effet, Coutance d'une part, Jolyet et Sellier de l'autre, ont reconnu depuis longtemps que des deux parties du muscle adducteur, l'une, l'opaque, avait pour fonction de rapprocher les valves, l'autre la nacrée avait pour fonction de les maintenir coaptées lorsqu'une fois l'opaque les avait rapprochées par sa contraction. Jolyet et Sellier même ont étudié par la méthode myographique les contractions des parties nacrées et opaques séparément. De mon côté j'ai recommencé sur le *Pecten maximus* (Lmk), l'*Anodonta Cygnea* (Linn) et le *Cardium Norvegicum* (Speng) les expériences de ces auteurs et je suis arrivé aux mêmes conclusions qu'eux.

Tous, nous avons vu que le muscle opaque avait une contraction rapide et peu soutenue, que le muscle nacré au contraire avait une contraction plus lente mais beaucoup plus soutenue. Une expérience que j'ai souvent répétée à ce sujet me semble intéressante à rapporter : je prends une moule (*Mytilus edulis*) par exemple et je l'abandonne hors de l'eau sur une table. Au bout d'un temps variable, 2 ou 3 jours quelquefois, l'animal ayant perdu à peu près toute son eau par les ouvertures répétées de ses valves ne tarde pas à dépérir. Au moment où je suppose sa mort prochaine, je l'excite à la fermeture soit mécaniquement, soit électriquement, et je m'aperçois que cette fermeture s'opère avec une lenteur considérable par rapport à celle d'un *Mytilus edulis* (Linn) en bonne santé. Dans ce dernier cas en effet c'est le muscle opaque qui par sa contraction détermine la fermeture, dans le premier au contraire le muscle opaque s'est paralysé au moment de la mort et le muscle nacré fonctionnant seul a déterminé la fermeture lente des valves. Des expériences de Coutance, de Jolyet et Sellier et des miennes, il résulte donc que le muscle nacré des Acéphales fonctionne sensiblement comme un muscle lisse et leur muscle opaque comme un muscle strié de Vertébré, tous deux naturellement étant volontaires. Ceci est donc un premier point bien établi.

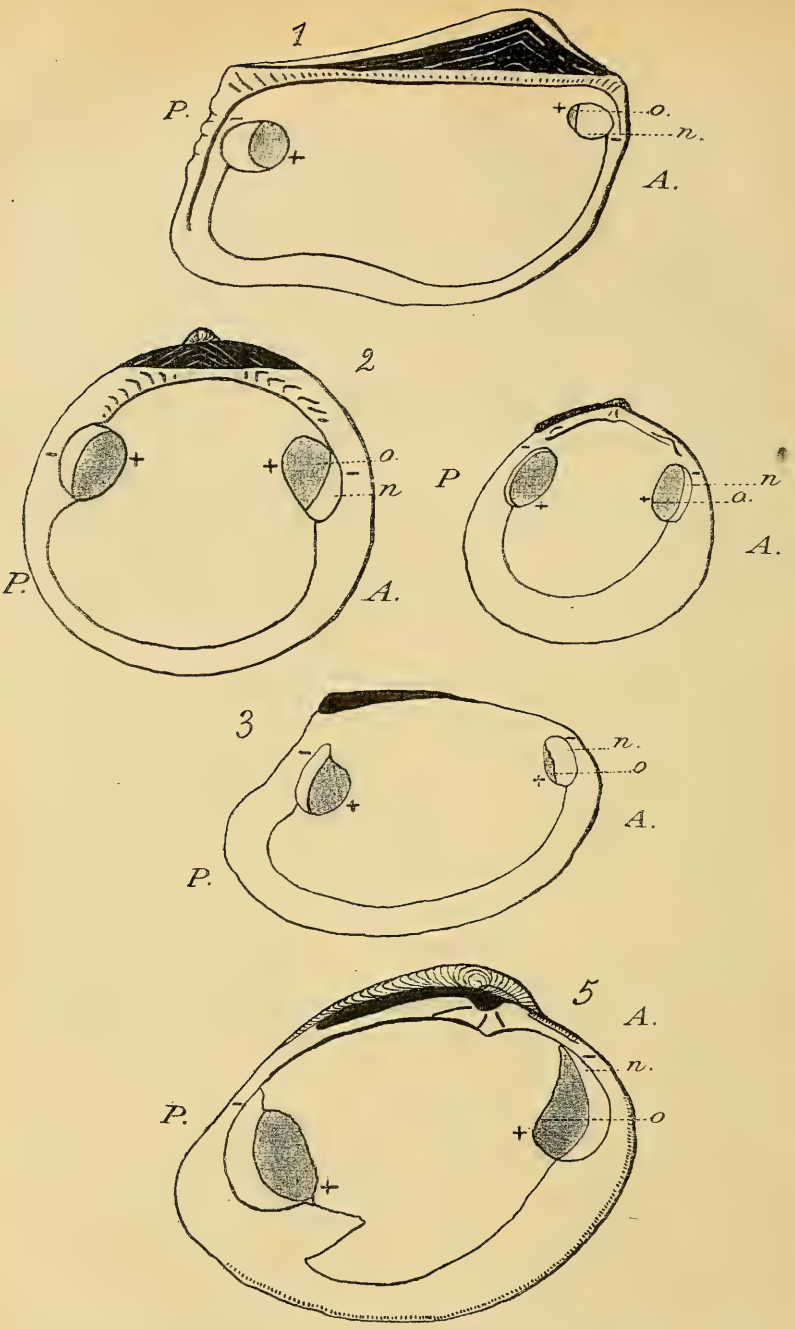
Si maintenant l'on détache soigneusement de ses insertions un mus-

cle adducteur d'Acéphale on s'aperçoit qu'une fois isolé ce muscle présente l'aspect d'un volume cylindrique dont la section perpendiculaire à l'axe est dans certains cas (Pectunculus fig. 2) un cercle à peu près régulier, dans d'autres une ellipse, dans d'autres enfin une surface quelconque. A ses deux extrémités le cylindre est limité par la surface de la coquille. Cette surface est tantôt à peu près plane dans la région où se fait l'insertion ; d'autres fois elle se courbe, soit en forme de portion de cylindre, de sphère ou d'ellipsoïde, soit même parfois présentant une irrégularité telle quelle ne peut être comparée à aucune surface connue géométriquement. Les surfaces limitantes du muscle ne sont généralement pas parallèles mais telles que si on les prolongeait elles formeraient lorsqu'elles sont planes un angle dièdre variable suivant l'espèce considérée. Il en résulte que toutes les génératrices du cylindre ne sont pas de même longueur, les unes sont beaucoup plus longues que les autres et il se trouve que les plus longues sont les plus centrales par rapport à l'animal alors que les plus courtes sont les plus périphériques. De plus la région où les génératrices sont les plus courtes n'est pas celle qui est le plus près de la charnière, et, celle où elles sont les plus longues n'est pas celle qui en est le plus loin ; l'une et l'autre sont situées respectivement pour l'Anodonte par exemple aux points marqués sur la figure des signes + et — (voy. fig. 3).

En faisant en plâtre des moules internes de coquilles et en travaillant ensuite soigneusement à l'aide d'un canif les moulages ainsi obtenus, je suis arrivé à isoler et à reconstituer en quelque sorte le muscle adducteur en plâtre, et, sur ce moulage il m'était plus facile d'étudier la forme de cet organe que sur le muscle lui-même qui se déforme et se rétracte dès qu'il a été séparé de ses points d'insertion. C'est ainsi qu'à l'aide de mesures convenablement prises j'ai pu arriver à dessiner très exactement sur la surface limitante de mon cylindre en plâtre (qui répond à la forme de la coquille) la ligne de séparation de fibres nacrées et des fibres opaques.

Je me suis alors aperçu immédiatement que cette ligne constitue non seulement la séparation des fibres nacrées et des fibres opaques mais aussi la limite à peu près exacte de toutes les génératrices du cylindre ayant une longueur donnée ; autrement dit en désignant cette longueur donnée par l, d'un côté de la ligne (du côté périphérique) se trouveront toutes les génératrices $> l$, de l'autre côté (du côté central) se trouveront toutes les génératrices $< l$.

Or, puisqu'il est nécessaire que je fasse encore ici une anticipation, toutes les fibres sont dirigées suivant les génératrices du cylindre et le muscle est constitué de telle façon qu'aucune de ces fibres ne se ter-



A. Extrémité antérieure. — P. Extrémité postérieure. — *n*. Portion nacrée. *o*. Portion opaque. — +. Région à fibres les plus longues — — Région à fibres les plus courtes.

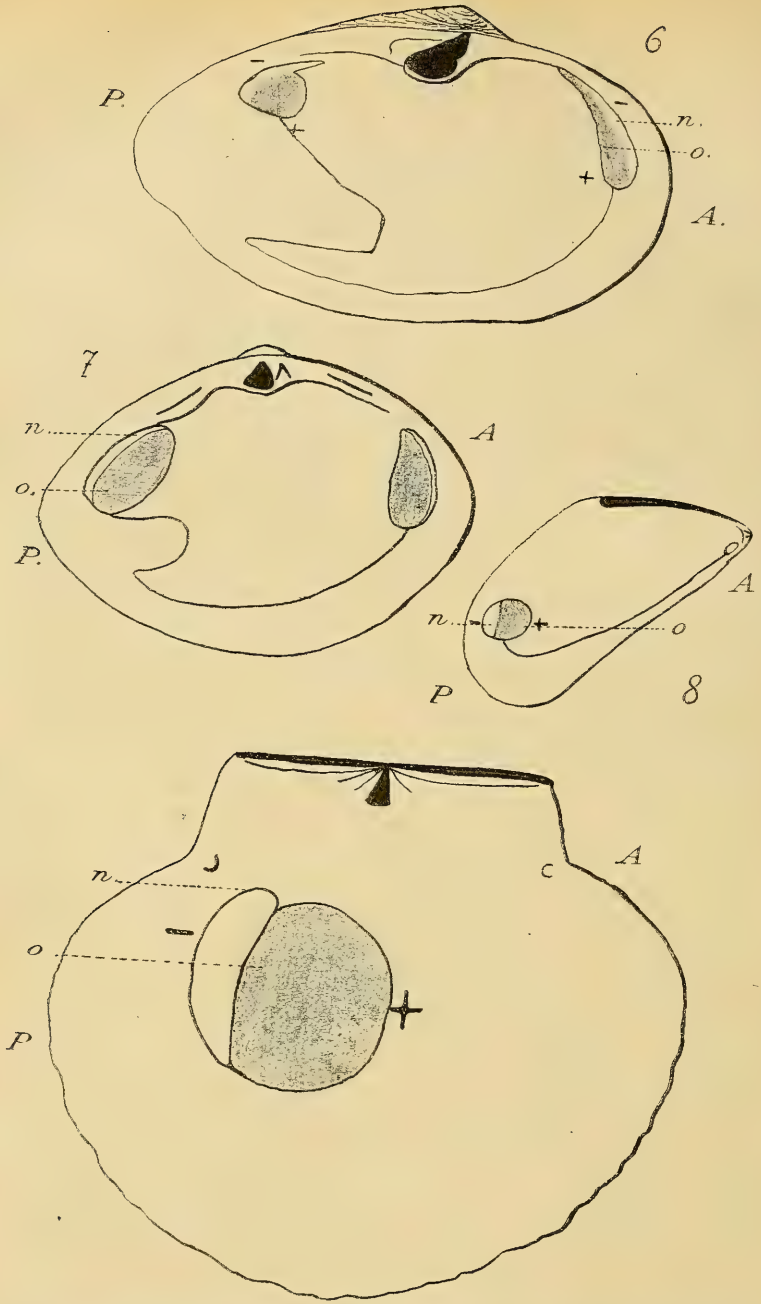
Fig. 1. Forme de l'insertion des adducteurs chez *Arca tetragona* (Lmck).
Fig. 2. — — — *Pectunculus glycimeris* (Linn).
Fig. 3. — — — *Anodonta cygnea* (Linn).
Fig. 4. — — — *Cardium norwegicum* (Speng).
Fig. 5. — — — *Venus mercenaria* (Linn).

mine par un tendon appréciable ; il est musculaire d'un bout à l'autre.

Il résulte de tout ceci que dans le muscle adducteur de l'Acéphale la portion nacrée ou lisse est d'une façon générale plus courte que la portion opaque ou striée. Il semblerait qu'à partir d'une certaine longueur variable suivant les espèces et que j'ai déterminée pour quelques-unes le muscle devienne strié.

Après avoir fait des moules internes de coquilles closes, si l'on fait des moules internes de ces mêmes coquilles entr'ouvertes à différents degrés, on s'aperçoit que, par le fait que la région — n'est pas la plus près de la charnière et que la région + n'en n'est pas la plus éloignée, le coefficient de raccourcissement des fibres n'est pas le même pour toutes. Considérons en effet la figure 13 qui représente une coupe suivant AP de *Cardium norwegicum* (Speng) par exemple (voy. fig.4). En A est le muscle antérieur, en P le muscle postérieur. Dans la position 1 la coquille est ouverte, dans la position 2 elle est fermée. On voit très bien que pour le passage de 1 à 2, les muscles se sont raccourcis d'une quantité $= q$ qui est la même que l'on considère la portion la plus courte ou la portion la plus longue. Donc la portion la plus courte se rétracte davantage que la portion la plus longue ; les fibres nacrées ou lisses des Acéphales semblent avoir autrement dit un coefficient de raccourcissement plus considérable que les fibres opaques ou striées ; cette différence dans le coefficient de raccourcissement est encore plus nette lorsque l'on considère un muscle de Pecten par exemple détaché de ses insertions (voy. fig. 14). Il semblerait donc que la valeur du coefficient de raccourcissement des fibres soit en rapport avec leur position sur la valve ; une fibre lisse à coefficient de raccourcissement considérable ne pourrait se trouver placée en un endroit où les deux valves sont très écartées, ou bien il faudrait qu'elle se terminât d'un côté ou de l'autre par un tendon, de même une fibre striée à coefficient de raccourcissement faible ne pourrait se trouver placée à un endroit ou les valves sont très rapprochées, ou bien il faudrait qu'une cavité existât en cet endroit. C'est ainsi, je crois, que l'on peut envisager la loi de la position relative des fibres nacrées et des fibres opaques, la striation n'étant compatible qu'avec un certain coefficient de raccourcissement au-delà duquel les fibres restent lisses.

Étant donné que les muscles lisses ou nacrés se trouvent être les plus courts et les muscles striés ou opaques les plus longs on peut, en connaissant la forme et la direction des surfaces limitantes et la longueur minima des fibres opaques déterminer mathématiquement ou empiriquement la forme et la position de la ligne de séparation de ces deux sortes de muscles qui est en somme le lieu géométrique des géné-



A. Extrémité antérieure. — P. Extrémité postérieure. — *n*. Portion nacrée. *o*. Portion opaque. — +. Région à fibres les plus longues. — —. Région à fibres les plus courtes.

Fig. 6. Forme de l'insertion des adducteurs chez *Mya arenaria* (Lmck.
Fig. 7. — — *Mactra stultorum* (Lmck)
Fig. 8. — — *Mytilus edulis* (Linn).
Fig. 9. — — *Pecten maximus* (Lmck).

ratrices du cylindre ayant une longueur donnée. Il serait en effet facile d'établir mathématiquement que si les surfaces limitantes sont des plans ou à peu près, on a, comme chez *Mytilus edulis* (Linn) (voy. fig. 8), pour ligne de séparation, une droite ; si ce sont des portions de sphère opposées par leur concavité, la ligne de séparation est une courbe à concavité centrale comme dans *Cardium norwegicum* (Speng) par exemple ; de même si les portions de sphère sont opposées par leur convexité la ligne de séparation est une courbe à convexité centrale. Et voici ainsi l'explication qu'on peut invoquer à mon avis de la localisation des fibres nacrées et de fibres opaques ainsi que de la forme de leur ligne de séparation.

Le tableau des figures 1 à 11 donne l'aspect de la section transversale des muscles adducteurs, chez différents Acéphales que j'ai choisis comme caractéristiques parmi ceux que j'ai étudiés.

Dimyaires isomyaires.

I. *Arca tetragona* (Lmk).

II. *Pectunculus glycimeris* (Linné).

III. *Anodonta cygnea* (Linn). Chez les Ætheries qui ne sont autre chose que des Unionidæ fixés, des animaux très voisins des Anodontes par conséquent, le bord central de l'impression des muscles opaques est déchiquetée, persillée en quelque sorte. Cette même disposition se retrouve chez des animaux d'un autre phyllum les Chames qui, comme les Æthéries avec lesquelles elles ont plusieurs points de convergence, sont fixées en position pleurothétique, et ont une forme arrondie. De plus chez les Æthéries et chez les Chames l'impression du muscle adducteur antérieur est très allongée dorso-ventralement. La limite des deux portions musculaires n'offre rien de particulier chez les Ætheries.

IV. *Cardium norwegicum* (Speng).

V. *Venus mercenaria* (Linn).

VI. *Mya arenaria* (Lmck).

VII. *Mactra stultorum* (Lmck).

Dimyaires anisomyaires.

VIII. *Mytilus edulis* (Linn). Dans le muscle antérieur la partie nacrée existe seule. A ce propos il est utile de rappeler que chez les Tridacnes qui sont en réalité comme des *Moules* de Cardium les surfaces limi-

tantes du cylindre musculaire affectent une forme très tourmentée, gaufrée en quelque sorte. Il eût été intéressant de voir la forme de la ligne de séparation des deux parties du muscle, mais n'ayant jamais eu d'animaux frais à ma disposition je n'ai pu faire cette constatation avec certitude.

Monomyaires.

IX. *Pecten maximus* (Lmck).

X. *Ostrea edulis* (Lmck).

XI. *Anomia ephippium* (Lmck). Dans ce cas comme on le voit la ligne de séparation est très différente de ce qu'elle est chez les autres Acéphales. Chez les Placunes la disposition est la même ; elle s'explique par la forme spéciale de la surface limitante, qui est convexe souvent au lieu d'être concave comme chez les autres Acéphales.

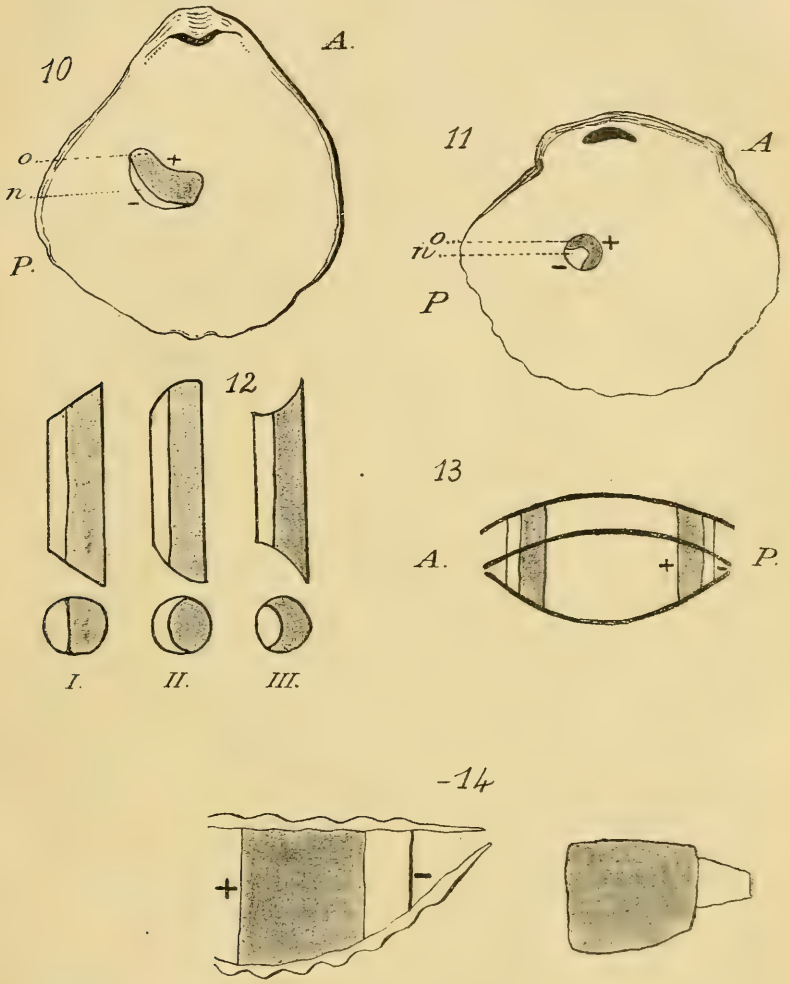
II. — STRUCTURE.

J'ai longuement tâtonné avant d'arriver à une méthode qui me permît de voir d'une façon qui me satisfasse la structure de fibres musculaires des adducteurs des Acéphales. La méthode des coupes à la paraffine qui nécessite comme l'on sait l'emploi d'éclaircissants tels que le xylol ou le toluène ne me donnait aucun résultat satisfaisant. En effet, après éclaircissement de mes coupes, il m'était impossible de distinguer sur les fibres opaques les striations que j'avais nettement vues à la dissociation. Ce n'est pas que je pense que le xylol ou le toluène fassent disparaître ces striations, mais ces liquides éclaircissant d'une façon égale toute la pièce, la distinction des parties claires et des parties sombres devenait difficile.

Après l'essai de plusieurs fixateurs, de plusieurs éclaircissants, de plusieurs colorants, j'ai abandonné la méthode des coupes et me suis borné à celle des dissociations qui pour le but que je voulais atteindre, l'étude de la striation comme complément de mes recherches de morphologie, m'était suffisante [1]. Je pratique mes dissociations en faisant agir pendant 24 heures sur un petit fragment de muscle frais la solution d'acide azotique à 20 % et j'examine ensuite dans l'eau distillée ne pratiquant même aucune coloration. C'est la méthode très simple à laquelle je me suis arrêté et qui m'a suffi pour obtenir les résultats mentionnés ici.

(1) Ceux qui, depuis mes premières recherches, ont étudié en détails le côté histologique de la question, ont obtenu de bons résultats en colorant leurs coupes à l'hématoxyline au fer. Ce procédé, qui d'ailleurs est excellent, ne me semble pas donner au point de vue de la striation des renseignements plus complets que ceux que j'ai obtenus par mon procédé. (Note sur les épreuves).

Elle m'a permis d'établir, comme il a déjà été dit, que le muscle



A. Extrémité antérieure. — P. Extrémité postérieure. — N. Portion nacrée à O. Portion opaque. — +. Région à fibres les plus longues. — — Région. fibres les plus courtes.

Fig. 10. — Forme de l'insertion des adducteurs chez *Ostrea edulis* (Lmck). — Fig. 11. Forme de l'insertion des adducteurs chez *Anomia Ephippium* (Lmck). — Fig. 12. — Différentes formes de cylindres musculaires avec leurs sections transversales correspondantes (schématique). — Fig. 13. — Coupe d'Acéphale suivant AP : 1. Position entrouverte. — 2. Position fermée (schématique). — Fig. 14. — Muscle adducteur de Pecten maximus en contraction normale ; en rétraction.

nacré ou périphérique est constitué chez tous les Acéphales de fibres

étroites et lisses alors que le muscle opaque ou central au contraire est constitué de fibres d'un calibre un peu plus fort et qui de plus, diffèrent de fibres nacrées au point de vue de leur structure. Si on les examine en effet chez un *Cardium edule* (Linn) ou une Anodonte par exemple à un fort grossissement, on voit qu'elles présentent sur leur surface une sorte de mosaïque formée de losanges sombres séparés les uns des autres par des lignes claires. Ces losanges forment des lignes spirales qui font ressembler ces fibres à quelque chose d'analogue à une microscopique tige de Lepidodendron. Suivant les espèces auxquelles on s'adresse, ces losanges sont plus ou moins rapprochés, les lignes spirales suivant lesquelles ils sont disposés sont plus ou moins régulières, leur forme est plus ou moins allongée et leurs coins plus ou moins arrondis. L'état de rétraction et de relâchement des fibres doit aussi avoir une influence sur la forme des losanges, je ne m'en suis pas encore occupé. Je ne me suis pas non plus occupé encore du noyau et de sa forme. Ces fibres se terminent par des extrémités en pointe mousse et ne vont pas d'un bout à l'autre du muscle, c'est-à-dire d'une valve à l'autre ; le muscle est constitué par de courtes fibres placées les unes à côté des autres mais dont aucune ne se termine par un tendon, de telle façon que si on pratique dans le muscle des coupes transversales, on le voit à quelque niveau que passe la coupe toujours entièrement constitué de fibres musculaires, autrement dit si l'on prend dans le cylindre musculaire une génératrice quelconque, on voit que cette génératrice est toujours quelle que soit entièrement constituée de substance musculaire.

Cette structure de la portion opaque du muscle que Jolyet et Sellier ainsi que les auteurs cités par eux et d'autres avaient déjà constaté en partie me paraît être la structure habituelle des muscles adducteurs des Acéphales (partie opaque). Je l'ai rencontrée, avec une netteté toute particulière, chez les Arches, les Unionidæ et les Cardiums.

Chez certains autres types comme le *Mytilus edulis* (Linn), les fibres de la partie opaque du muscle, nettement distincte de la partie nacrée, sont toujours plus volumineuses que les fibres lisses mais je n'ai pu y rencontrer pour encore aucune striation oblique, soit qu'elle n'existe pas, soit qu'il faille pour la mettre en évidence des procédés autres que ceux que j'emploie et que je n'ai pas encore découverts.

Chez certains Acéphales tels que le Pecten par exemple on sait depuis longtemps et M. Raph. Blanchard a contribué à l'établir d'une façon indiscutable que la partie jaune opaque est formée de fibrilles striées transversalement comme celle des Vertébrés et des Arthropodes. On sait d'ailleurs la rapidité de la fermeture des valves chez ces animaux. Mais les fibrilles striées transversalement du Pecten

ne correspondent nullement morphologiquement aux fibres striées obliquement de l'Anodonte par exemple. Les unes en effet sont des *fibrilles*, les autres sont des *fibres* (ce qui revient à dire que les unes ne peuvent être considérées par rapport aux autres que comme des parties par rapport à un tout). J'ai constaté, et M. Marceau me dit avoir fait de son côté la même constatation que moi, des anastamoses entre ces fibrilles. Ce qui prouve bien que les fibrilles striées transversalement du Pecten ne sont que des composants par rapport à une fibre, c'est qu'on les retrouve chez l'Anomie, où elles sont mal séparées les unes des autres et où réunies en petits groupes, elles arrivent à donner l'illusion d'une fibre présentant des stries transversales sur plusieurs rangs.

J'arrête là l'exposé de mes résultats actuels sur la structure des fibres musculaire des adducteurs des Acéphales, comptant reprendre cette étude un jour.

III. — CONCLUSIONS

En résumé et en ne rappelant ici que les conclusions ayant un caractère très général, il semble que la striation qui caractérise certaines des fibres des muscles adducteurs des acéphales soit un caractère anatomique que ces fibres acquièrent (par un mécanisme qui nous échappe) en raison de leur position sur la valve et de leurs conditions spéciales de fonctionnement, la structure lisse constituant l'adaptation aux mouvements lents, la structure striée (oblique ou transversale) l'adaptation aux mouvements rapides. Il semble de plus qu'il existe chez les animaux à l'état adulte et en considérant diverses espèces tous les passages entre la structure lisse et la structure striée transversalement ; de telle sorte que l'on puisse établir la série suivante :

Fibre lisse (muscle nacré de tous les Acéphales).

Fibre lisse plus volumineuse (muscle opaque de *Mytilus edulis* (Linn) où les striations ont été jusqu'à ce jour invisibles pour moi).

Fibre striée obliquement (muscle opaque de l'Anodonte et du Cardium).

Fibre striée transversalement avec début de division en fibrilles (muscle opaque de l'Anomie).

Fibre striée transversalement absolument dissociée en fibrilles (muscle opaque du Pecten).

La striation précéderait donc la division en fibrille et le muscle strié obliquement serait un stade de passage vers le muscle à stries transversales.

S'il en est ainsi véritablement, on doit retrouver le stade à stries obliques et à fibrilles encore confondues de l'Anodonte dans le développement du Pecten. L'embryogénie seule confirmera ou infirmera cette manière de voir que je donne ici sous toute réserve.

Je n'insisterai pas davantage actuellement sur cette question des muscles des Acéphales (1).

Laboratoire d'Anatomie comparée du Museum,
le 26 décembre 1903.

R. ANTHONY.

(1) Cette communication a été faite à la Soc. Phil. le 26 décembre 1903. Notre collègue Marceau, de Besançon, à qui j'avais signalé l'intérêt de la question a fait paraître depuis plusieurs notes où il a envisagé avec détails le côté histologique et physiologique de la question.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR

LA RÉGRESSION DE LA QUEUE CHEZ LES TÊTARDS

DE BUFO VULGARIS.

Dans un Mémoire, qui paraîtra ultérieurement, je compte reprendre en détail l'étude de l'histolyse de la queue des têtards des amphibiens anoures; en attendant, je vais exposer quelques faits qui expliquent selon moi la disparition totale de la queue ; je dirai aussi quelques mots sur la provenance des phagocytes qui englobent les sarcolytes.

La cause de la disparition de la queue des têtards a été expliquée par deux hypothèses, l'inanition (Barfurth, Loos) et l'asphyxie (Bataillon). Je ne discuterai pas ces hypothèses qui s'appuient sur de nombreux faits et des expériences très délicates renvoyant le lecteur aux mémoires des auteurs ; ce que je veux exposer en quelques mots c'est la genèse, l'évolution de la régression qui dépend de causes secondaires plus évidentes.

Que ce soit l'inanition ou l'asphyxie qui entraîne la régression de la queue, cela importe peu pour ce que je vais dire : mais si ces causes premières sont difficiles à prouver, et ne font que reculer la question, il y a des causes secondaires faciles à observer et qui simplifient les recherches en faisant dépendre la disparition totale de la queue de l'atrophie d'un seule groupe d'éléments, les fibres musculaires ; atrophie qui entraîne la régression de tous les autres organes par un processus mécanique.

Bataillon a bien attiré l'attention sur ce point, mais pas assez à mon avis et il me semble que l'on peut énoncer avec quelque vérité cette proposition : la régression des fibres musculaires, par le raccourcissement et la diminution qu'elle fait éprouver à la queue, entraîne mécaniquement la dégénérescence de la peau, de la corde dorsale, de la moelle, des nerfs et des vaisseaux. Comme le dit fort bien Bataillon : « De tous les éléments constitutifs de la queue, le muscle seul ne présente pas d'une façon générale les traces d'une rétraction mécanique ».

C'est à la peau que ce phénomène est le plus frappant. Au début de

la régression de la queue, on constate la dégénérescence de nombreuses fibres musculaires, au milieu de fibres intactes ; à ce moment, la peau ne présente aucun changement elle est toujours composée de deux ou trois assises de grandes cellules épithéliales ; sa surface est parfaitement lisse et plate. De l'atrophie des fibres musculaires résulte bientôt un raccourcissement de la queue, et alors on assiste à une série de transformations de la peau qui s'épaissit d'abord par augmentation du nombres des assises de cellules, puis enfin, lorsque la queue n'est plus qu'un moignon, se couvre de villosités, On ne pourrait mieux comparer ces transformations qu'à celles que subit l'enveloppe en caoutchouc d'un ballon qu'on dégonfle : épaississement d'abord, puis formation de replis. Ces replis, toutefois, n'intéressent que l'épiderme ; le derme n'y prend aucune part.

Jusqu'à ce moment les cellules de la peau n'ont pas éprouvé de changements, mais à partir du moment où les villosités se forment, la surface subit une desquammation furfuracée et se couvre de plaques écailleuses qui tombent. Il y a d'autres phénomènes de désintégration de la peau ; émission de boyaux et de balles chromatiques, dégénérescence pigmentaire (Bataillon) ; mais, à mon avis, c'est la desquammation écailleuse qui est le phénomène le plus important.

Pendant tout ce long travail mécanique la peau semble lutter contre la dégénérescence imposée par le raccourcissement de la queue ; et ce qui me fait employer ce verbe, lutter, c'est qu'il n'est pas rare, alors que la queue est réduite à l'état d'un moignon de trouver dans la peau des cellules en état de division karyokinétique. Je ne suis pas de l'avis de Bataillon qui explique ainsi ces figures : irritation mécanique, d'où tendance à la multiplication. Je crois plutôt que si la dégénérescence musculaire n'opposait pas une si grande force à la peau et ne l'obligeait pas à se rétracter, ce qui change son évolution et entraîne sa dégénérescence, elle continuerait à s'accroître, et que ses cellules en voie de division sont, pour ainsi dire, un souvenir de sa croissance entravée.

Même observation pour la corde dorsale, avec un mécanisme un peu différent. D'abord parfaitement rectiligne, elle devient bientôt flexueuse, puis lorsqu'elle est trop comprimée, elle éclate en plusieurs points : ses cellules qui au début sont de grandes cellules claires à parois assez épaisses, donnant l'impression de cellules de moelle de sureau, se condensent et deviennent libres ; leur noyau subit une dégénérescence de la chromatine, et elles sont enfin absorbées par les phagocytes.

Il en est de même pour la moelle épinière et pour les nerfs ; ce n'est

que lorsqu'ils sont devenus flexueux et que leur vitalité est ainsi compromise qu'ils sont englobés par les phagocytes.

Origine des phagocytes qui absorbent les sarcolytes. — Je me range ici pleinement à l'avis de Metchnikoff ; la fibre qui va dégénérer se remplit de noyaux, et ce sont ces noyaux dont le sarcoplasma s'est développé qui deviennent les phagocytes et englobent les sarcolytes, ce qui est aussi l'avis de de Bruyne pour la destruction des muscles dans la métamorphose de la *Musca vomitoria*. Seulement Metchnikoff ne dit pas comment les noyaux des fibres se multiplient ; je crois pouvoir affirmer que ces noyaux se divisent par amitose, très rapidement. J'ai vu, en effet, assez souvent des noyaux étranglés en biscuit, dans des fibres musculaires non encore touchées par la dégénérescence. Non seulement ces noyaux se divisent en deux, mais la division doit se refaire immédiatement et à plusieurs reprises, car il n'est pas rare d'en voir des files dont les extrémités se touchent ; j'en ai compté ainsi jusqu'à sept placés bout à bout. Parmi ces noyaux, les uns sont encore allongés, les autres commencent à s'arrondir, et il est visible que ce sont ces mêmes noyaux, dont le sarcoplasma s'est développé, qui entourent ensuite les sarcolytes.

A. GUIEYSSE.

LA CHRONOPHOTOGRAPHIE

DES MOUVEMENTS RAPIDES

L'étude d'un mouvement à l'aide de la Chronophotographie nécessite la prise d'un nombre suffisant d'images pour le décomposer dans toutes ses phases. Or, quand il s'agit d'un mouvement aussi rapide que le battement de l'aile chez les Insectes, dont la durée, le plus souvent, est inférieure à $\frac{1}{100}$ de seconde, l'intervalle de temps qui sépare ces prises d'images successives devra être extrêmement court. Pour obtenir dans ce centième de seconde seulement dix épreuves, l'intervalle ne sera donc que $\frac{1}{1000}$ de seconde, ce qui exige une prise de mille images à la seconde.

Les appareils chronophotographiques actuels, plus connus sous le nom de cinématographes, ne peuvent fournir une pareille fréquence et se prêtent donc difficilement à ces études. Dans ces appareils, les images sont reçues sur une bande de pellicule sensible placée au foyer de l'objectif qu'ouvre et ferme périodiquement un obturateur. La dissociation des impressions successives est opérée par un mouvement de translation imprimé à la pellicule; son déplacement n'a lieu toutefois que pendant la période d'obturation de l'objectif, car pendant toute la durée de son ouverture la surface sensible doit rester immobile afin que l'image conserve sa netteté. Les arrêts fréquents auxquels la pellicule doit être ainsi soumise limitent nécessairement la vitesse de translation qu'on peut lui imprimer et, par conséquent, le nombre d'images par seconde que peut fournir l'appareil.

Pour atteindre des vitesses de translation considérables, il faut donc remplacer ce mouvement intermittent de la pellicule par un mouvement continu, ce qui nous est permis à une condition : celle de réduire la durée de la pose à un degré tel que le déplacement de la pellicule pendant cette période soit négligeable. Comme un déplacement d'un dixième de millimètre produit déjà un flou appréciable, on conçoit que ces temps de pose, dans le cas d'une translation rapide, devront être d'une brièveté extrême et nécessiter une disposition particulière de l'éclairage pour obtenir des images suffisamment vigoureuses.

L'emploi du fond lumineux tel que nous le fournit la concentration des rayons solaires par un condensateur, et sur lequel le sujet se détache en silhouette, permet d'abréger très considérablement le temps de pose. Marey[1], en coupant le faisceau lumineux ainsi produit, par un disque obturateur percé de fentes étroites et tournant à grande vitesse, a obtenu des photographies d'Insectes au vol avec $\frac{1}{25.000}$ de seconde de pose. Cette période, quoique suffisamment courte pour donner des images nettes des extrémités des ailes en mouvement, nécessitait encore l'arrêt de la pellicule et empêchait ainsi de dépasser une fréquence d'une soixantaine d'images à la seconde.

Lendenfeld[2], avec des périodes d'éclairement de $\frac{1}{42.000}$ de seconde obtenues de la même manière, a employé le premier un mouvement continu pour la rapide dissociation des images et a atteint ainsi une fréquence de plus de 2000 images par seconde. Il opérait cette dissociation non par la translation de la surface sensible, mais en déplaçant, au contraire, les images par rapport à elle, en les faisant tomber d'abord sur un miroir qui les renvoyait sur une plaque photographique : un mouvement d'oscillation rapide communiqué à ce miroir pendant la marche de l'obturateur dissociait sur la plaque les images fournies par les éclairements successifs.

Ce procédé, susceptible de donner comme on vient de voir de très grandes fréquences, présente plusieurs inconvénients. Le nombre total d'images recueillies ne peut jamais être considérable et elles ne peuvent se prêter à la synthèse du mouvement ; enfin il persiste dans ces photographies un certain degré de flou, dû, malgré la rapidité de la pose employée, au déplacement de l'image pendant cette période. Il est difficile en effet, avec des obturateurs mécaniques d'obtenir des temps de pose suffisamment courts. Pour dissocier en une seconde 2000 images n'ayant chacune qu'un centimètre de large, on est obligé de déplacer soit l'image, soit la surface sensible à une vitesse de $2000 \times 1 = 2000$ centimètres ou de 20 mètres par seconde ; la période de temps dans laquelle l'une ou l'autre aura parcouru $\frac{1}{10}$ de millimètre, c'est-à-dire $\frac{1}{200.000}$ de seconde, sera la pose maxima que l'on puisse donner pour obtenir une épreuve suffisamment nette.

[1] Marey, *Le Mouvement*, p. 250.

(1) Lendenfeld, *Beitragzum Studium des Fluges der Insecten mit Hilfe der Momentphotographie* (*Biologischen Centralblatt*, 1903, Band XXIII).

L'éclairement du fond au moyen de l'étincelle électrique permet, en raison de la faible durée de celle-ci, de réaliser les dissociations les plus rapides en conservant toute la netteté de l'image. Pour appliquer ce mode d'éclairement à la chronophotographie et obtenir des séries d'images équidistantes, condition nécessaire si l'on veut en opérer la

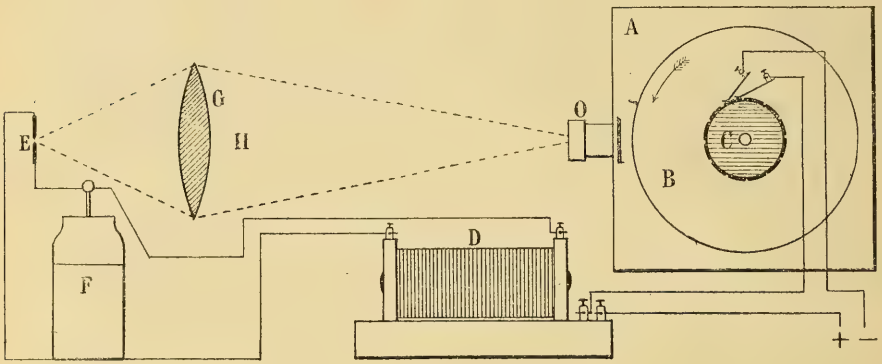


Fig. 1.

synthèse, il nous suffit de provoquer les étincelles à des intervalles de temps correspondant à des déplacements égaux d'une pellicule. La figure 1 montre d'une façon schématique le dispositif que nous employons pour assurer ce synchronisme, et qui nous a permis d'atteindre des fréquences de 2 000 images par seconde.

Dans une boîte A, fermée de tous côtés, un cylindre B entouré d'une pellicule sensible tourne sur un axe horizontal. Sur ce même axe, mais en dehors de la boîte, est monté un interrupteur rotatif destiné à rompre, un certain nombre de fois par tour, le circuit primaire

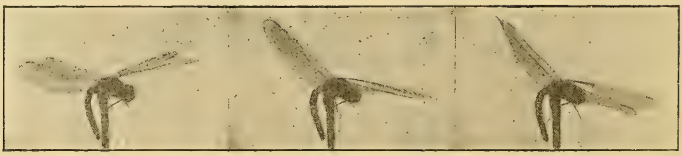


Fig. 2.

d'une bobine d'induction D. Cet interrupteur est constitué, ainsi qu'un collecteur de machine dynamo, par un disque épais d'ébonite portant, autour de sa circonférence, une cinquantaine de lames métalliques isolées les unes des autres et sur lequel reposent deux balais

suivant une génératrice. Quand l'appareil est en mouvement, le passage de chaque lame sous les balais détermine une fermeture et une rupture du courant dans la bobine et la production d'une étincelle induite. Celle-ci, renforcée par un condensateur F, éclate entre deux électrodes en magnésium en E, derrière la lentille G qui concentre les rayons dans l'objectif O au foyer duquel tourne le cylindre. Ce cylindre étant animé d'un mouvement de rotation rapide, il jaillit à chaque tour, en E, un nombre d'étincelles correspondant au nombre de contacts sur l'interrupteur : il suffit, à ce moment, de démasquer l'objectif pendant la durée d'un tour pour obtenir une série d'images régulièrement espacées d'un objet situé en H entre la lentille G et l'objectif.

Les photographies obtenues ainsi sur fond lumineux ne sont nécessairement que des silhouettes et il est souvent difficile, excepté par des considérations très délicates telles que des différences de mise au point, de nous rendre compte de l'orientation exacte du sujet. La figure 2, qui montre une libellule captive, peut être interprétée de deux manières suivant que l'observateur voit la tête de l'insecte tournée vers lui, ou du côté opposé.

La stéréoscopie, qui nous permet d'apprécier la plus faible différence de plan, devait être ici d'un aide précieux, et pour obtenir des images

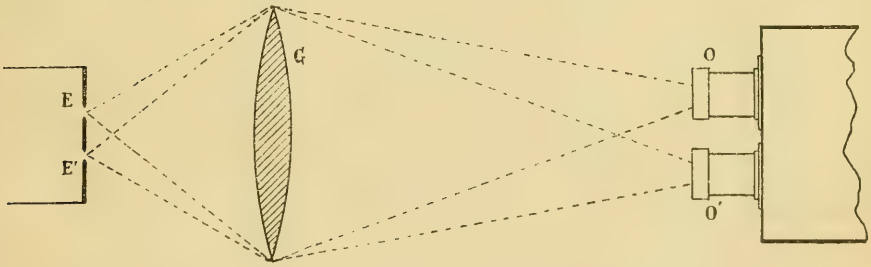


Fig 3.

stéréoscopiques nous avons modifié le dispositif déjà décrit de la façon suivante, fig. 3. Dans le circuit secondaire de la bobine, au lieu d'une seule coupure que doit franchir l'étincelle, nous en avons fait deux d'égale longueur.

Deux étincelles éclatent ainsi en même temps derrière la lentille condensatrice et envoient vers l'appareil deux faisceaux lumineux qui sont reçus par deux objectifs stéréoscopiques situés à l'écartement voulu ; ceux-ci transmettent les images aux deux bandes parallèles de

pellicule dont est habillé, dans ce cas, le cylindre. La figure 7 montre une photographie de l'appareil, la partie supérieure de la boîte étant enlevée pour le chargement des pellicules, opération qui doit naturellement être faite dans l'obscurité.

Pour que la durée de l'ouverture des objectifs corresponde toujours exactement à celle d'un tour de cylindre aux différentes vitesses de rotation, nous avons disposé à proximité de celui-ci l'obturateur représenté par les figures 4, 5 et 6. Une plaque de laiton est percée de deux fenêtres ayant les dimensions des images et qui, avant l'expérience, sont fermées par une paire de rideaux mobiles A, A′ ; leur départ détermine l'ouverture des fenêtres que deux autres rideaux B, B′ viendront refermer un tour après. Deux taquets disposés sur les bords du cylindre suivant une génératrice provoqueront l'abaissement des rideaux au moment voulu par une disposition spéciale. Les rideaux A, A′, aussi bien que B, B′, sont tous quatre disposés sur des lames d'acier qui pivotent autour des points O,O′ ; ces lames sont légèrement coudées de façon à ce que, quand elles sont abandonnées à elles-mêmes,

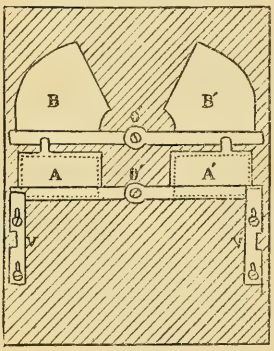


Fig. 4.

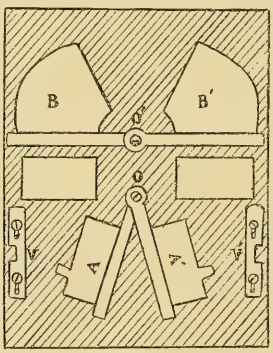


Fig. 5.

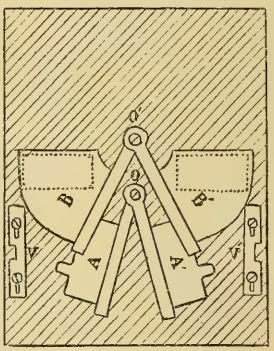


Fig. 6.

leurs extrémités libres se détachent de la platine, et se portent à la rencontre des taquets dont est muni le cylindre. Pour obtenir que cette mise en prise des lames d'acier et des taquets ne se produise qu'au moment voulu, celles-ci sont maintenues appliquées contre la platine, les rideaux A, A′ au moyen de deux verrous V, V′, les rideaux B, B′ par deux prolongements de la partie supérieure des rideaux A, A′. Quand l'opérateur veut commencer l'expérience, il ouvre simultanément, au moyen d'un levier situé à l'extérieur de l'appareil, les deux verrous V, V′. Aussitôt les extrémités des rideaux A, A′, se relèvent en vertu de l'élasticité de leurs lames d'acier, et, au passage suivant des

taquets, reçoivent un choc qui les abaisse brusquement en les faisant pivoter autour de leur point de rotation, fig. 5. Leur départ détermine l'ouverture des fenêtres, et en même temps permet aux rideaux B, B′ de se redresser : ceux-ci sont abaissés de la même façon que les premiers un tour après, et, obturent de nouveau les fenêtres, fig. 6.

Les figures 8 et 9 reproduisent deux fragments de séries obtenues à l'aide de ce chronophotographe électrique. La première montre l'effet du passage d'un projectile en papier, lancé par un ressort, à travers une bulle de savon : les images se lisent de haut en bas et ont été prises à des intervalles de $\frac{1}{800}$ de seconde. La seconde montre une mouche en plein vol, les images ici sont stéréoscopiques et sont séparées par des intervalles de $\frac{1}{1200}$ de seconde.

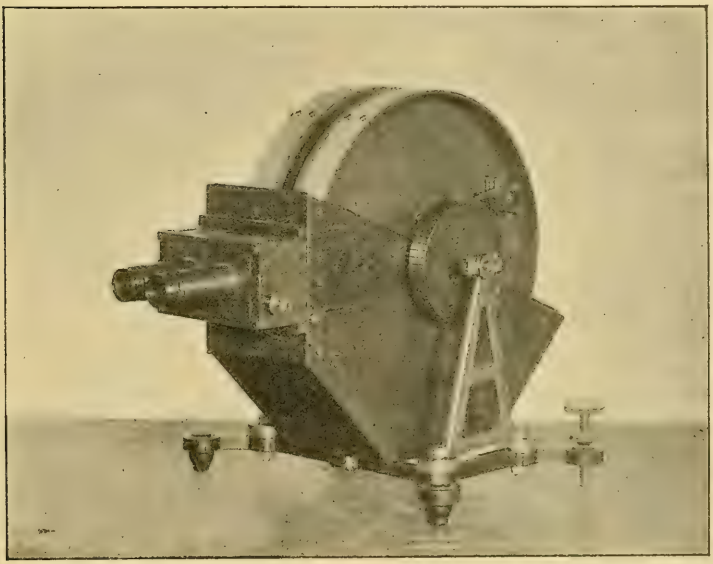


Fig. 7.

La mesure des intervalles de temps se fait à l'aide d'un diapason de 50 V.D. disposé de telle façon que deux petits prolongements en fil de fer de ses branches soient photographiés pendant l'expérience. En comptant le nombre d'images prises durant une période de vibration.

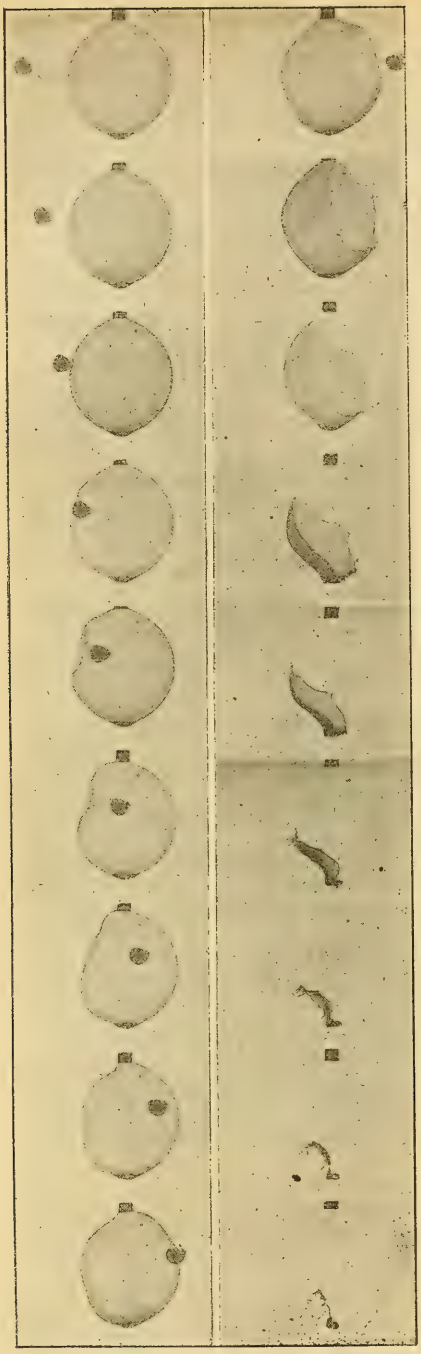


Fig. 8.

Fig. 9.

il est facile de déterminer l'intervalle de temps qui les sépare. Une règle divisée, en verre, placée également dans le champ de l'objectif permet de mesurer le déplacement du sujet en expérience.

Lucien Bull.

Institut Marey, le 11 Juin 1904.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, dir.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

NEUVIÈME SÉRIE. — TOME VI

N° 4

1903-1904

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1904

Le Secrétaire-Gérant,

H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons trimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1904

Président : M. Dongier, 82, rue Claude-Bernard, Paris, V^e^.

Vice-Président : M. E.-L. Bouvier, 39, rue Claude-Bernard.

Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard, Paris, 5^e^.

Secrétaire des publications : M. H. Coutière, 12, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris, VI^e^.

Vice-Secrétaire des publications : M. Henri Neuville, 55, rue de Buffon, Paris, V^e^.

Secrétaire des séances : M. Lécaillon, 28, rue Berthollet, Paris, V^e^.

Vice-Secrétaire des séances : M. Leau, 6, rue Vavin, Paris, VI^e^.

Trésorier : M. Et. Rabaud, 104, rue d'Assas.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2^e^ et 4^e^ Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le Bulletin.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

Extraits des Comptes rendus des Séances

DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

(Pour le 2e Semestre 1904)

Séance du 9 juillet 1904.

Présidence de M. Dongier.

M. Marceau adresse un mémoire sur la structure du cœur chez les Gastéropodes et les Lamellibranches.

Elections de M. Marage dans la 2e section et de M. Launoy dans la 3e section. Par suite de cette dernière élection, M. Jousseaume devient membre honoraire de la Société philomathique de Paris.

M. Noé fait une communication sur la modification de certains poisons par addition de substances solubles non toxiques.

M. Dongier fait une communication sur la visibilité des corps ultra microscopiques.

Séance au 23 juillet 1904.

Présidence de M. Dongier.

M. Guieysse fait une communication sur une anomalie qu'il a observée dans la régression de la queue des têtards. Il annonce à la Société qu'il est en train d'installer un laboratoire maritime à Beaulieu et qu'il met ce laboratoire à la disposition des membres de la Société qui désireraient aller travailler dans cette région.

M. Deschamps fait une communication sur un point de la théorie des lentilles.

M. Mahler dépose sur le bureau un exemplaire de ses études sur les combustibles solides, liquides et gazeux.

Séance du 22 octobre 1904.

Présidence de M. Dongier.

M. le Président annonce la mort de MM. Bernard Renault, président

de la Société d'Histoire naturelle d'Autun et Auguste-François Le Jolis, directeur de la Société des Sciences naturelles de Cherbourg, membre correspondant de la Société.

M. André présente la candidature, dans la 1re section, de M. Raoul Perrin, inspecteur général des mines, 80, rue de Grenelle. Commissaires rapporteurs : MM. André, Deschamps et Grévy.

M. Anthony présente la candidature, comme correspondant, de M. Maignon, chef des travaux de physiologie à l'École vétérinaire de Lyon. Commissaires rapporteurs : MM. Anthony, Marage et Noé.

M. Chevallier fait une communication sur la végétation des régions tropicales.

Séance du 12 novembre 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

Rapport favorable de M. André, sur la candidature de M. Perrin. L'élection est remise à la prochaine séance.

M. Anthony fait un rapport sur la candidature de M. Maignon. Le vote sur les conclusions favorables de ce rapport est ajourné à la prochaine séance.

M. Bull présente un appareil stéréoscopique qui reproduit, beaucoup plus lentement que ne le permettraient les cinématographes ordinaires, divers mouvements rapides tels que le battement des ailes chez les Insectes. M. Bull fait remarquer que dans la synthèse cinématographique, il n'est pas nécessaire de voir un grand nombre d'images par seconde pour éprouver la sensation de continuité dans l'impression visuelle. Un très petit nombre suffit (3 à 4), à la condition que leur substitution s'opère dans un temps suffisamment court, 1/50 de seconde environ.

M. Launoy fait une communication sur l'action du chlorhydrate de pilocarpine sur le pancréas.

M. Chauveau fait une communication sur la déperdition de l'électricité des conducteurs métalliques au voisinage de sources thermales.

Séance du 26 novembre 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

Elections de MM. Perrin et Maignon.

M. Anthony fait une communication sur le mode d'arrondissement chez les Mollusques dimyaires fixés en position pleurothétique.

M. Rabaud fait une communication sur les effets de la contraction musculaire sur le fœtus.

Séance du 10 décembre 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

MM. André et Grévy présentent la candidature, comme titulaire dans la 1re section, de M. Maillet, docteur ès sciences, répétiteur à l'Ecole polytechnique, 11, rue de Fontenoy, à Bourg-la-Reine.

Commissaires rapporteurs : MM. André, Grévy et Perrin.

M. André demande la parole et propose à la Société de s'occuper de l'organisation du banquet annuel. MM. Lécaillon, Noé et Rabaud sont désignés à cet effet. La date du banquet est fixée au lundi 6 février.

M. Mahler fait la communication suivante sur la manipulation de la bombe calorimétrique :

L'emploi déjà ancien de l'oxygène industriel, comprimé à l'avance. a simplifié la manipulation de la bombe calorimétrique et contribué à répandre dans les laboratoires scientifiques et industriels la méthode de M. Berthelot.

On s'est d'abord servi, suivant mes indications, de l'oxygène fabriqué par la « Compagnie Continentale d'oxygène » (procédé Brin, bioxyde de baryum). Le gaz livré était exempt d'hydrogène et contenait seulement une petite proportion d'azote, d'ailleurs sans influence sur les expériences calorimétriques ordinaires.

Maintenant, on se sert d'oxygène électrolytique. M. Berthelot a signalé (1) qu'on ne saurait introduire cet oxygène dans la bombe qu'après l'avoir purifié de l'hydrogène qui l'accompagne toujours, en quantité notable. C'est une complication que les chimistes éviteront, probablement, en recourant à l'oxygène provenant de l'air liquéfié à l'aide, par exemple, de l'appareil de M. Linde.

M. Chauveau fait une communication sur la loi de déperdition de l'électricité.

Séance du 24 décembre 1904.

PRÉSIDENCE DE M. DONGIER.

La Société décide d'accorder l'échange de son Bulletin avec celui de la Société d'histoire naturelle du Doubs.

M. Grévy fait un rapport sur la candidature de M. Maillet. Le vote

(1) Comptes rendus, 17 novembre 1902.

sur les conclusions de ce rapport est remis à la prochaine séance.

M. Anthony présente la candidature, comme titulaire dans la 2e section, de M. le Dr Hallion, 54, rue du Faubourg-Saint-Honoré, chef de laboratoire à l'École des Hautes-Etudes. Commissaires rapporteurs : MM. Dongier, Hanriot et Moureu.

M. le Président adresse les félicitations de la Société à M. D. André, qui a obtenu le prix Poncelet à l'Académie des sciences.

M. Chauveau fait une communication sur la loi de déperdition de l'électricité.

M. Bull fait une communication sur les rayons N.

Le Secrétaire des séances,

A. LÉGAILLON.

OPTIQUE GRAPHIQUE

ÉTUDE DE LA MARCHE DES RAYONS CENTRAUX DANS UN SYSTÈME OPTIQUE

par **M. Joseph DESCHAMPS**

Nous avons montré dans un précédent mémoire (1) qu'il est possible de suivre, à l'aide de constructions tout à la fois rigoureuses et simples, la marche des rayons lumineux dans un système optique quelconque, et par conséquent de déterminer *a priori* la position exacte de l'image d'un point ou d'un objet. Ces constructions montrent en particulier que l'image d'un point, qui n'est jamais un point, ne coïncide jamais non plus avec cet autre point qu'on appelle le *foyer conjugué* du premier, et que les théories ordinaires assignent cependant comme son image. L'écart entre la position exacte de l'image et celle du foyer conjugué, écart qui constitue ce qu'on appelle l'aberration longitudinale, est toujours relativement considérable.

La raison de cet écart est facile à comprendre. Le foyer conjugué d'un point est en effet, par définition, la *limite* des positions des points de rencontre du rayon central non dévié avec les rayons réfractés voisins, lorsque ceux-ci se rapprochent de plus en plus du précédent. Or, dans la pratique, une surface réfringente n'est jamais infiniment petite ; elle a toujours des dimensions finies. C'est pourquoi l'image d'un point ne peut pas coïncider avec le foyer conjugué qui n'est que sa position limite jamais atteinte. Quant à l'écart entre ces deux positions, il est d'ordre supérieur à celui qui peut résulter des erreurs d'observation, et par suite il est toujours sensible. Pour que cet écart rentrât dans l'ordre de ceux que peuvent fournir les observations, la surface réfringente devrait être réduite à des dimensions si petites que sa réalisation physique deviendrait pour ainsi dire impossible et que la quantité de lumière transmise serait pratiquement nulle. Il est facile d'ailleurs de se rendre compte qu'au foyer conjugué l'éclairement est non-seulement minimum, mais encore égal à zéro.

---

(1) *Caustiques et anticaustiques*, Bulletin de la Société Philomathique, nos 3-4, année 1902-1903.

Cela revient à dire qu'il est essentiel de maintenir la distinction qui existe entre les quantités infiniment petites dont le caractère primordial est la variabilité et les grandeurs réalisées qui, si petites qu'elles soient, sont constantes et par là même finies.

La théorie des foyers conjugués, qui ne sont au fond que les points de rebroussement des caustiques, doit donc perdre l'importance qui lui a toujours été attribuée à tort dans l'étude des systèmes optiques. Néanmoins, il peut y avoir avantage à les conserver dans une première approximation ; car, d'après leur position, on peut apprécier à peu de chose près l'effet produit par une combinaison. Mais alors il est nécessaire que la détermination de leur position puisse se faire facilement et rigoureusement, le défaut de l'une de ces deux conditions entraînant avec elle l'inutilité complète d'une opération dont la nature exige qu'elle soit faite rapidement et de plus qu'elle ne soit pas entachée d'erreurs nouvelles susceptibles de la rendre complètement illusoire.

Il est superflu de démontrer que les méthodes employées ne présentent pas ce double caractère de rapidité et d'exactitude. Nous nous proposons de donner ici la solution graphique complète du problème de la détermination des foyers conjugués dans les systèmes optiques. D'après les explications données plus haut, c'est la recherche des images fournies par les rayons infiniment voisins de l'axe central du système, c'est-à-dire de ce qu'on appelle abréviativement les *rayons centraux*.

Pour la commodité de l'exposition, nous rappellerons les principes fondamentaux de la théorie des divisions homographiques à laquelle le sujet se rattache directement.

HOMOGRAPHIE EN GÉNÉRAL

1° Relation homographique.

On donne le nom de relation homographique à une relation entre deux variables x_1 et x_2 de la forme générale

$$(1) \qquad ax_1x_2 + bx_2cx_2 + d = 0.$$

Cette relation, quadratique en elle-même, mais linéaire par rapport aux variables x_1 et x_2, détermine pour chaque valeur attribuée à l'une d'entre elles, une valeur et une seule pour l'autre. Cette propriété est souvent prise comme définition de l'homographie, et sa traduction analytique la plus générale fournit la relation (1) écrite plus haut.

La relation homographique n'est pas en général symétrique par rapport aux variables x_1 et x_2, et par suite elle n'est pas réciproque. Il y a exception si l'on a $c = b$, auquel cas elle devient

$$(2) \qquad ax_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + d = 0,$$

et prend alors le nom de *relation involutive*.

Quand l'un au moins des coefficients b, c ou d devient nul, la relation homographique conserve, malgré cette particularité, ses propriétés générales. Il n'en est pas de même si le coefficient a est égal à zéro ; en prenant la forme exclusivement linéaire

$$(3) \qquad bx_1 + cx_2 + d = 0,$$

elle cesse d'être, à proprement parler, la relation homographique et devient *la relation homothétique*.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, $a \neq 0$. On peut alors diviser par a les deux membres de la relation (1) et lui donner la forme

$$(4) \qquad x_1 x_2 + px_1 + qx_2 + r = 0,$$

ne contenant plus explicitement que trois coefficients.

— Il est naturel de chercher à interpréter géométriquement la relation homographique.

Les diverses valeurs de la variable x_1 peuvent être regardées comme représentant les abscisses d'un point variable sur une certaine droite, abscisses comptées à partir d'un point fixe de celle-ci. De même, les valeurs de la variable x_2 peuvent être considérées comme les abscisses d'un autre point variable comptées sur une seconde droite à partir d'un de ses points supposé fixe.

Quand ces deux droites sont distinctes, on dit que *les couples de points définis par des valeurs correspondantes de x_1 et de x_2 définissent deux divisions homographiques de bases différentes*. En particulier, lorsque les droites, qui sont ainsi appelées les bases des deux divisions homographiques, sont sécantes, et que les points qui sont pris sur chacune d'elles comme origines des abscisses, coïncident avec leur point commun, on peut rattacher, suivant la méthode ordinaire, un point du plan à chaque couple de valeurs de x_1 et x_2. L'équation (1), ou, ce qui est la même chose, l'équation (4) définit alors une courbe, qui est une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux droites coordonnées, bases des deux divisions.

Au lieu d'être distinctes, ces deux droites peuvent être confondues. On dit, dans ce cas, *que les couples de points définis par les valeurs correspondantes des variables x_1 et x_2, forment deux divisions homo-*

graphiques de même base. Il y a lieu alors de distinguer l'une de l'autre les deux divisions. Cette distinction se fait en affectant de l'indice 1 les points dont les abscisses sont représentées par les diverses valeurs de la variable x_1, et de l'indice 2 ceux dont les abscisses sont représentées par les diverses valeurs de la variable x_2. Les premiers points sont dits les points du premier système; les seconds sont dits les points du second système. A chaque point du premier système correspond alors un point et un seul point du second, et réciproquement.

Inversement, un point quelconque A de la droite peut être considéré comme appartenant à l'un ou à l'autre système, suivant que sa position sur la droite, base de l'homographie, est représentée par l'une ou l'autre des variables x_1, x_2. Par conséquent, le point qui lui correspond en vertu de la relation homographique, n'est pas le même, suivant qu'il appartient au premier ou au second système. Par exemple, s'il appartient au premier système, on le désignera par A_1, et son correspondant dans le second sera représenté par B_2; si, au contraire, il appartient au second système, on le désignera par A_2, et son correspondant dans le premier système sera représenté par B_1. Le même point A admet donc, suivant les cas, le point B_1 ou le point B_2 comme point correspondant, et ces deux points sont en général distincts, à moins toutefois que la relation ne soit involutive, c'est-à-dire symétrique en x_1 et x_2, et que les abscisses représentatives des valeurs variables x_1 et x_2 soient comptées à partir de la même origine.

Il faut remarquer que les valeurs de x_1 et x_2, tout en étant des mesures de longueurs situées sur une même droite, peuvent représenter des longueurs comptées à partir d'origines différentes et non nécessairement à partir de la même origine. Il importe donc essentiellement, pour la véritable interprétation de la relation homographique, de faire savoir si, sur la même droite, les longueurs sont, ou non, rapportées à la même origine, et, dans ce dernier cas, de faire connaître la position mutuelle de ces deux origines.

Ces deux cas ne sont cependant pas essentiellement distincts. On peut en effet passer de l'un à l'autre, par exemple d'une origine commune à deux origines différentes en déplaçant l'origine de l'un seulement des systèmes de valeurs de x_1 ou x_2; la formule de transformation, qui permet d'effectuer ce déplacement, possède en effet la propriété de ne pas altérer la forme de la relation primitive et par conséquent de lui conserver la forme homographique.

2° Points remarquables d'une homographie.

Nous supposons d'abord que la relation homographique générale (4) définit deux divisions de même base rapportées à une même origine. Dans ces conditions, parmi les couples de points conjugués en nombre infini, il en est qui présentent des particularités susceptibles d'être signalées.

1° *Points doubles.* — On donne ce nom aux points qui coïncident avec leurs conjugués. Pour obtenir les abscisses de ces points, il suffit de faire $x_2 = x_1$ dans la relation homographique, qui devient ainsi

$$x^2 + (p + q)x + r = 0. \tag{5}$$

On voit ainsi que, dans une homographie sur même droite, il y a deux points doubles, réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

Les deux points coïncidents et conjugués, qui par leur réunion forment chaque point double, présentent, entre tous les couples de points conjugués, la particularité d'être réciproques. Dans le cas de la relation involutive, où les points conjugués sont tous réciproques, les points doubles n'ont d'autre propriété que celle d'être confondus.

La réalité des points doubles dépend du signe de la quantité $(p + q^2) - 4r$, ce qui correspond ainsi à trois cas différents. Cette distinction entraîne au point de vue géométrique le partage des divisions homographiques sur une même droite en deux catégories. On démontre en effet :

1° que, dans toute homographie à points doubles réels, le rapport anharmonique des distances de deux points conjugués quelconques sur deux points doubles est constant ; et réciproquement, que les divers couples de points d'une droite, tels que le rapport anharmonique de leurs distances à deux points fixes de la même droite, forment sur cette droite deux divisions homographiques de même base admettant comme points doubles réels les deux points fixes considérés ;

2° que, dans toute homographie à points doubles imaginaires, les droites qui joignent deux points conjugués quelconques à un certain point fixe situé hors de la droite qui supporte les deux divisions homographiques, forment un angle constant ; et réciproquement, que lorsqu'on fait tourner un angle autour de son sommet, les points où les côtés de cet angle rencontrent une droite fixe ne passant pas par son sommet, forment sur cette droite deux divisions homographiques de même base à points doubles imaginaires.

Ces résultats s'obtiennent en cherchant la relation analytique qui existe entre les abscisses rapportées à une même origine des couples

de points qui sont liés par l'une ou l'autre des relations géométriques qui viennent d'être indiquées.

Le cas où ces points sont liés par la constance du rapport anharmonique mérite d'être examiné particulièrement. Soient C et D les deux points fixes, A_1 et A_2 deux points conjugués ; on a par hypothèse

$$\frac{CA_1}{CA_2} : \frac{DA_1}{DA_2} = k. \tag{6}$$

En rapportant à une même origine O les quatre distances précédentes, on trouve entre les abscisses variables x_1 et x_2 des points A_1 et A_2 une relation de la forme (1), c'est-à-dire une relation homographique dans laquelle la condition de réalité des points doubles est remplie, ces points n'étant autres que les points C et D.

La réciproque est vraie, avons-nous dit, par conséquent, homographie à points doubles réels et constance du rapport anharmonique sont deux choses absolument équivalentes.

Ce que nous venons de dire suppose implicitement les deux points doubles distincts l'un de l'autre. Or, il peut arriver que ces points, tout en restant réels sont confondus. Au point de vue de l'interprétation géométrique correspondante, ce cas doit être considéré comme le cas limite des deux cas généraux précédents. Ainsi, 1° en supposant que les deux points doubles, considérés comme réels et distincts, se rapprochent de plus en plus l'un de l'autre jusqu'à se confondre, on voit que le rapport anharmonique, nécessairement différent de l'unité, tant que les points doubles sont distincts, tend vers l'unité lorsqu'ils se rapprochent et devient égal à l'unité lorsqu'ils sont confondus ; 2° en supposant les points doubles imaginaires, mais en supposant en même temps que dans l'expression algébrique qui les définit, la partie réelle reste constante, tandis que la partie imaginaire tend vers zéro et devient finalement nulle, on voit que le sommet de l'angle se rapproche de la base de l'homographie, en même temps que la valeur de l'angle diminue et tend vers zéro. A la limite, quand la partie imaginaire est devenue égale à zéro, les deux points doubles se confondent en un seul point double réel et alors le sommet de l'angle se trouve sur la base et sa valeur est devenue égale à zéro.

Ce cas limite présente donc la particularité de rentrer dans les deux cas généraux au point de vue de l'interprétation géométrique qui subsiste, en sorte que celle-ci est absolument générale. Néanmoins cette interprétation géométrique limite ne peut pas être regardée comme pouvant définir l'homographie, c'est-à-dire comme permettant de construire le conjugué d'un point, ainsi qu'on le constate aisément.

La définition de l'homographie dans ce cas particulier est alors, à proprement parler, algébrique ; néanmoins, à ce cas particulier se rattache, comme nous le verrons plus loin, une interprétation géométrique spéciale.

Avant de quitter la question des points doubles, nous ferons remarquer que le rapport anharmonique dont l'existence et la constance entraînent l'existence d'une homographie à points doubles réels, peut être égale à -1. Pour cette valeur, le rapport est dit harmonique, et l'on constate que la forme homographique correspondante est celle que nous avons appelée plus haut la forme involutive, représentée par l'équation (2) symétrique en x_1 et x_2. Cette forme se distingue, comme nous l'avons dit, de la forme générale, par la réciprocité des points conjugués.

Le cas particulier où les points doubles coïncident et le cas de la relation involutive présentent donc cette circonstance intéressante que, pour l'un comme pour l'autre, la valeur absolue du rapport anharmonique est égale à l'unité. Nous verrons plus loin que cette analogie, qui établit un lien entre ces deux cas, entraîne une autre analogie qui rattache plus profondément encore ces deux cas l'un à l'autre.

2° *Centre de l'homographie.* — On donne ce nom au point milieu de la distance des points doubles. Ce point, dont l'abscisse a pour valeur $-\frac{p+q}{2}$, existe toujours, même quand les points doubles sont imaginaires. Dans ce cas, le sommet fixe autour duquel tourne l'angle générateur de l'homographie se trouve sur la perpendiculaire menée par le centre de l'homographie à la droite qui la supporte.

Le centre de l'homographie peut être considéré comme un point appartenant à l'un ou à l'autre des deux systèmes, et l'on peut alors, dans chacune de ces deux hypothèses, chercher son conjugué. On constate aisément que ces deux conjugués sont de part et d'autre du centre de l'homographie et à égales distances de celui-ci.

Lorsque les deux points doubles coïncident, le centre de l'homographie coïncide avec le point double unique, et ses deux conjugués coïncident avec lui.

3° *Points conjugués de l'infini.* — Lorsqu'un point de l'un ou l'autre système s'éloigne indéfiniment sur la droite, son conjugué tend vers une position limite, qu'on appelle le conjugué du point de ce système situé à l'infini, ou simplement le conjugué de l'infini. D'après cela, il existe dans une homographie deux points conjugués de l'infini ; nous désignerons par I_2 le point du second système conjugué du point situé

à l'infini dans le premier, et par J_1 le point du premier système conjugué du point situé à l'infini dans le second.

Pour calculer les abscisses de ces points, il suffit de donner alternativement à x_1 et à x_2 des valeurs infinies dans la relation homographique générale (4). Pour $x_1 = \infty$, on obtient, en représentant par i_2 l'abscisse de son conjugué I_2,

$$i_2 = -p; \tag{7}$$

et pour $x_2 = \infty$, on trouve pour l'abscisse j_1 de son conjugué J_1

$$j_1 = -q. \tag{8}$$

On déduit de là

$$\frac{i_2 + j_1}{2} = -\frac{p+q}{2},$$

en sorte que les points conjugués de l'infini sont à des distances égales du centre de l'homographie et de part et d'autre de celui-ci.

A cause de l'absence de réciprocité, les points conjugués de l'infini sont distincts ; mais, dans le cas de la relation involutive, ils sont confondus et coïncident avec le centre de l'involution.

Nous verrons plus loin le rôle considérable que jouent dans l'homographie les points conjugués de l'infini.

3° Formes particulières de la relation homographique.

Bien que la relation homographique se présente toujours sous la forme générale (4) caractérisée par la présence du terme en x_1x_2, elle peut, suivant le choix de l'origine, présenter certaines formes particulières méritant d'être signalées.

C'est ainsi 1° qu'on peut prendre pour origine le centre de l'homographie. Dans ce cas l'équation aux points doubles (5) a ses deux racines égales en valeur absolue mais de signes contraires ; on doit donc avoir

$$p + q = 0,$$

d'où

$$q = -p.$$

La relation homographique prend alors la forme

$$x_1x_2 + p(x_1 - x_2) + r = 0. \tag{9}$$

2° On peut prendre pour origine l'un des points conjugués de l'infini, le point J_1 de l'exemple. Dans ce cas on a pour l'abscisse de ce point $j_1 = 0$, et par suite, d'après la valeur $j_1 = -q$ trouvée plus haut, il faut qu'on ait

$$q = 0.$$

La relation homographique perd alors un terme et prend la forme plus simple

(10) $$x_1x_2 + px_1 + r = 0.$$

De même, en prenant le point I_2 pour origine, on aurait la forme réduite

(11) $$x_1x_2 + qx_2 + r = 0.$$

3° On peut prendre l'un des points doubles pour origine. Comme, dans cette hypothèse, l'une des racines de l'équation (5) des points doubles doit être nulle, il faut qu'on ait $r = 0$. Dans ce cas encore, la relation homographique perd un terme et prend la forme simple

(12) $$x_1x_2 + px_1 + qx_2 = 0.$$

— Les résultats qui viennent d'être trouvés fournissent l'interprétation géométrique de la perte d'un quelconque des trois derniers termes dans la relation homographique, le premier terme ne pouvant, ainsi que nous l'avons dit, jamais faire défaut.

On peut alors se demander quelle serait la signification de la relation homographique si elle cessait de contenir deux des trois derniers termes.

Supposons, par exemple, que l'on ait à la fois $p = 0$, $q = 0$, il reste l'équation

(13) $$x_1x_2 + r = 0.$$

L'homographie est, comme dans le premier cas particulier examiné, rapportée à son centre ; mais comme l'équation (13) est symétrique par rapport aux variables x_1 et x_2, elle définit une relation involutive L'équation réduite (13) représente donc une involution rapportée à son centre.

Si maintenant on avait à la fois $-q = 0$, $r = 0$, il resterait l'équation

(14) $$x_1x_2 + px_2 = 0.$$

En se rapportant aux explications données plus haut, cette équation devrait représenter une homographie rapportée à la fois à un de ses points doubles et à un des points conjugués de l'infini pour origine. Ces deux circonstances semblent devoir s'exclure mutuellement, car un point conjugué de l'infini ne peut pas être un point double. Pour expliquer ce qui se passe, nous remarquerons que l'équation (14) peut s'écrire

(14) $$x_1(x_2 + p) = 0,$$

si cette dernière est satisfaite, quel que soit x_1 par $x_2 = -p$, et

aussi, quel que soit x_2 par $x_1 = 0$. La valeur d'aucune des deux variables x_1 et x_2 ne s'exprime donc en fonction de l'autre, et par suite l'équation (14) ne définit pas une relation fonctionnelle au sens propre du mot. On peut dire néanmoins, en raison des formes particulières de solutions trouvées plus haut que la relation (14) définit une homographie *singulière* dans laquelle : 1° tous les points du premier système admettent pour conjugué commun le point ayant pour abscisse $x_2 = -p$; 2° tous les points du second système admettent l'origine pour conjugué commun.

On voit ainsi pourquoi et comment l'origine est à la fois point double et point conjugué de l'infini. La forme (14) ne se rencontrera donc que dans des cas exceptionnels, et par suite, sauf le cas de l'involution, les seules formes réduites usuelles sont les formes (10) ou (11) et (12), cette dernière présentant sur les deux autres l'avantage de la symétrie par rapport aux variables x_1 et x_2.

— C'est pourquoi la forme (12) peut être employée de préférence à toutes les autres. En divisant tous les termes par x_1x_2 et en transposant, on peut l'écrire encore

$$-\frac{q}{x_1} - \frac{p}{x_2} = 1 ;$$

d'où en tenant compte des valeurs de j_1 et de i_2 qui définissent les conjugués de l'infini

$$\frac{j_1}{x_1} + \frac{i_2}{x_2} = 1. \tag{15}$$

Telle est la forme simple et commode sous laquelle nous présenterons le plus souvent la relation homographique ; nous l'appellerons *la forme canonique*.

4° Nous avons jusqu'à présent explicitement rapporté à une même origine les points des deux divisions. Nous pouvons au contraire, suivant une remarque faite plus haut, choisir deux origines différentes, une pour chaque division. Seulement, pour pouvoir retirer un avantage de cette manière de procéder, il faut que les deux nouvelles origines, au lieu d'être quelconques, satisfassent à certaines conditions.

Pour trouver la forme nouvelle de la relation homographique, nous supposerons d'abord celle-ci rapportée à une origine commune 0, qui peut être quelconque, ce qui donne la forme générale (4). Nous poserons en même temps pour abréger

$$F(x_1, x_2) \equiv x_1x_2 + px_1 + qx_2 + r.$$

Cela étant, nous allons supposer qu'on rapporte les points de la première division, c'est-à-dire du premier système, à une nouvelle

origine O_1 de position connue et définie par son abscisse α_1 relativement à l'origine O, et les points du second système à une nouvelle origine O_2 définie par son abscisse α_2 relativement à l'origine O ; et nous allons chercher la forme transformée de la relation homographique.

Les formules de transformation sont évidemment

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + x'_1 \\ x_2 = \alpha_2 + x'_2, \end{cases}$$

et par suite l'équation transformée est

$$F(\alpha_1 + x'_1,\ \alpha_2 + x'_2) = 0.$$

En appliquant la formule du développement de Taylor et remarquant que ce développement se limite ici au troisième terme, il vient

$$F(\alpha_1,\ \alpha_2) + (x'_1 F'\alpha_1 + y'_1 F'\alpha_2) + \frac{1}{1.2}(x'^2_1 F''\alpha_1^2 + 2x'_1 x'_2 F''\alpha_1\alpha_2 + x'^2_2 F''\alpha_2^2) = 0.$$

Or les dérivées secondes $F''\alpha_1^2$, $F''\alpha_2^2$ sont nulles ; la dérivée $F''\alpha_1\alpha_2$ est égale à l'unité ; par conséquent l'équation précédente peut s'écrire

$$x'_1 x'_2 + (x'_1 F'\alpha_1 + x'_2 F'\alpha_2) + F(\alpha_1,\ \alpha_2) = 0. \qquad (16)$$

Telle est la forme générale nouvelle, après transformation, de la relation homographique. On constate l'analogie qui existe entre cette formule de transformation et celle qui correspond à la transformation de l'équation des coniques par simple déplacement d'origine. Nous allons, d'ailleurs, en tirer, par les mêmes procédés, les mêmes conséquences particulières.

Avant cela, nous faisons la remarque que les dérivées premières de la fonction F ont pour valeurs

$$\begin{cases} F'x_1 = x_2 + p \\ F'y_1 = x_1 + q. \end{cases}$$

La formule (16) peut alors s'écrire

$$x'_1 x'_2 + (\alpha_2 + p)x'_1 + (\alpha_1 + q)x'_2 + F(\alpha_1,\ \alpha_2) = 0. \qquad (16')$$

5° On peut déterminer les nouvelles origines par la condition qu'elles satisfassent aux deux relations

$$\begin{cases} F'\alpha_1 = 0 \\ F'\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha_2 + p = 0 \\ \alpha_1 + q = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \alpha_2 = -p \\ \alpha_1 = -q. \end{cases}$$

Les deux nouvelles origines sont les points conjugués de l'infini, en sorte que les points de chaque système sont rapportés au point conjugué de l'infini situé dans le même système.

La relation homographique se réduit à la forme simple

$$x'_1 x'_2 + F(\alpha_1 \alpha_2) = 0. \tag{17}$$

Nous retombons ainsi sur la forme réduite (15) que nous avons vu définir, mais dans le cas d'une seule origine, la relation involutive. Cette équation exprime que *dans toute homographie, le produit des distances de deux points conjugués aux points conjugués de l'infini correspondants est constant.*

Cet énoncé constitue une propriété générale des systèmes homographiques et peut servir de définition à l'homographie. Il est à remarquer d'ailleurs que cette définition identifie complètement la relation homographique générale avec la relation involutive, En effet, en définissant les couples de points conjugués par la condition que *le produit de leurs distances respectives à deux points fixes soit constant*, on voit que si ces deux points fixes coïncident, l'homographie devient une involution. On sait d'ailleurs que, dans une involution, les deux points conjugués de l'infini coïncident entre eux et avec le centre de l'involution.

Pour avoir, dans l'hypothèse adoptée, la forme explicite de la relation homographique, il n'y a plus qu'à calculer la quantité $F(\alpha_1 \alpha_2)$. Ce résultat est intéressant surtout lorsque la relation primitive, au lieu d'être mise sous la forme la plus générale (4), est mise sous la forme (12) qui suppose que l'origine primitive unique est un des points doubles de l'homographie. On a en effet dans ce cas

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = F(-q, -p) = -pq.$$

En se reportant aux valeurs de j_1 et de i_2 précédemment calculées, on voit que la relation homographique prend la forme

$$x'_1 x'_2 = j_1 i_2. \tag{18}$$

C'est la forme que nous appellerons *la forme de Newton*. Elle exprime que le produit des distances respectives de deux points conjugués quelconques aux points conjugués de l'infini correspondants est égal au produit des distances d'un point double à ces deux points, ce qui est certain *a priori*, puisque d'une part le produit est constant d'après l'équation fondamentale (17), et que d'autre part un point double est la réunion de deux points conjugués.

L'équation (18), bien qu'étant établie dans l'hypothèse explicite où les points doubles sont réels, est cependant générale, et l'on vérifie aisément par un calcul direct que, dans l'équation générale (17) où α_1 et α_2 représentent les abscisses des points conjugués de l'infini, l'expression $-F(\alpha_1, \alpha_2)$ représente le produit des distances respectives des points conjugués de l'infini à un même point double, réel ou imaginaire.

6° On peut, dans l'équation transformée (16), déterminer les abscisses α_1, α_2 des nouvelles origines par la condition

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \tag{19}$$

Il y a une infinité de manières de satisfaire à cette condition unique. L'une des origines peut être choisie arbitrairement; l'autre est alors déterminée par la relation (19) exprimant qu'elle est le point conjugué de la première dans l'homographie considérée. En d'autres termes, la relation (19) établie entre les deux origines nouvelles exprime qu'elles sont deux points conjugués l'un de l'autre dans l'homographie en question; et, comme il y a une infinité de systèmes de points conjugués, il y a une infinité de manières de faire cette réduction.

Dans cette hypothèse, la relation transformée (16) devient

$$x'_1x'_2 + x'_1F'\alpha_1 + x'_2F'\alpha_2 = 0. \tag{20}$$

ou, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs

$$x'_1x'_2 + (\alpha_2 + p)x'_1 + (\alpha_1 + q)x'_2 = 0. \tag{20'}$$

On retrouve ainsi la forme (12) qui correspond au cas d'une origine unique, cette origine étant un point double.

Ce résultat est intéressant et entraîne, comme on le verra, d'importantes conséquences. Envisagé au point de vue purement algébrique, il prouve que la forme réduite (12)

$$x_1x_2 + px_1 + qx_2 = 0 \tag{12}$$

est la forme qui correspond au cas général de deux origines distinctes, mais conjuguées l'une de l'autre dans l'homographie considérée. Il explique en même temps pourquoi on retrouve cette forme dans le cas d'une origine unique, cette origine étant un point double.

Il montre en outre que les points doubles sont loin d'avoir l'importance qu'on pouvait leur attribuer de prime abord, et que la distinction qui pouvait en résulter entre les homographies à points doubles réels et à points doubles imaginaires manque en réalité de fondement, puisqu'une forme qui semblait particulière devient au contraire générale.

L'homographie étant ainsi rapportée à deux origines conjuguées est

représentée par la relation

$$x'_1x'_2 + p'x'_1 + q'x'_2 = 0; \tag{21}$$

il y a lieu de rechercher les distances aux origines correspondantes des points conjugués de l'infini. En faisant alternativement $x'_1 = \infty$ et $x'_2 = \infty$, on trouve en désignant, comme on l'a déjà fait, par I_2 et J_1 les points conjugués de l'infini dans le premier et dans le second système

$$i'_2 = -p'$$
$$j'_1 = -q'';$$

et alors en divisant tout par $x'_1x'_2$, on retrouve la forme canonique

$$\frac{j'_1}{x'_1} + \frac{i'_2}{x'_2} = 1, \tag{22}$$

identique à la forme (15).

4° Détermination d'une homographie.

La relation homographique générale contenant trois paramètres, trois conditions sont nécessaires et suffisantes pour déterminer une homographie.

Le procédé le plus conforme à la méthode analytique consiste à se donner trois couples de points conjugués déterminés par leurs abscisses, dont la connaissance permet de calculer les coefficients p, q, r de l'équation générale (4).

Or de ces trois couples de points conjugués, un ou deux peuvent contenir le point de l'infini. D'après cela on peut déterminer une homographie :

1° pour trois couples de points conjugués situés tous à distance finie ;

2° par deux couples de points conjugués et le conjugé dans l'un des systèmes du point de l'infini ;

3° par un couple de points conjugués et par les deux points conjugués de l'infini.

Ce dernier mode de détermination est le plus simple et le plus commode de tous. C'est le plus simple, parce qu'il exige le nombre minimum de points : savoir les deux points conjugués A_1, A_2, et les deux points conjugués de l'infini, I_2, J_1. Ce nombre peut même être réduit à trois, si les deux points conjugués coïncident et forment par leur réunion un point double. C'est, dans tous les cas, le mode le plus avantageux, parce qu'il permet de mettre toujours la relation homo-

graphique sous la forme canonique (22), laquelle ne contient que les deux constantes i'_2 et j'_1, laissant ainsi de côté la troisième donnée, qui est la distance des deux points conjugués donnés, A_1, A_2,. Cette donnée reste à l'état de donnée purement géométrique et n'intervient en aucune façon dans le calcul. Il y a, dans ce fait curieux, une circonstance remarquable, absolument caractéristique, que nous allons utiliser dans le paragraphe suivant. Cette circonstance consiste dans l'indépendance complète des divisions des deux systèmes, ou plutôt dans ce fait que la nature des divisions de chaque système est indépendante des droites qui les portent. Ces droites peuvent être distinctes ou confondues et, lorsqu'elles sont confondues, elles peuvent glisser l'une sur l'autre, sans que rien soit changé aux positions mutuelles des points d'une même division. On peut, par conséquent, faire glisser ces deux droites l'une sur l'autre, de façon à donner à deux points conjugués quelconques toutes les positions, toutes les distances possibles, y compris la distance nulle. Dans ce déplacement, les divisions de chaque système sont entraînées d'un mouvement d'ensemble qui ne les altère en aucune façon.

5° Construction du conjugué d'un point.

La relation homographique, quelle que soit sa forme, permet de calculer l'abscisse du conjugué d'un point donné quelconque et par conséquent de déterminer sa position. Il est intéressant de chercher si la même question ne peut pas être résolue géométriquement.

Nous avons vu plus haut que la distinction, dans le cas d'une origine commune des homographies en deux groupes : celles à points doubles réels, celles à points doubles imaginaires, entraîne deux modes correspondants distincts de génération géométrique de ces homographies.

Les premières, celles à points doubles réels, sont telles que le rapport anharmonique des distances de deux points conjugués aux deux points doubles est constant. Cette définition entraîne la construction du conjugué d'un point par la constance du rapport anharmonique. Les points doubles étant supposés connus et la valeur du rapport anharmonique étant déterminée, la construction du conjugué d'un point a été indiquée par Chasles et se fait de la manière suivante.

Soient C et D les deux points doubles, $\frac{m}{n}$ la valeur du rapport anharmonique ; le point A_1 étant un point donné du premier système,

il s'agit de trouver un point A_2 satisfaisant à la condition

$$\frac{CA_1}{DA_1} : \frac{CA_2}{DA_2} = \frac{m}{n}.$$

Pour cela (fig. 1), sur une droite de direction quelconque passant par le point A_1, prenons à partir du point A_1 deux longueurs A_1P, A_1Q respectivement égales à m et à n; menons les droites CP, DQ se coupant en R, puis, par le point R, une parallèle à la droite A_1P; le point A où elle rencontre la droite A_1D est le point cherché. La similitude des divers triangles donne en effet

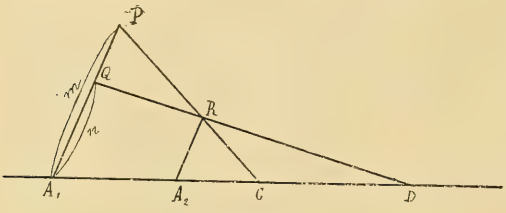


Fig. 1.

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{A_1P}{A_2R}$$

$$\frac{DA_1}{DA_2} = \frac{A_1Q}{A_2R},$$

d'où par division

$$\frac{CA_1}{CA_2} : \frac{DA_1}{DA_2} = \frac{A_1P}{A_2Q} = \frac{m}{n}.$$

Ce mode de construction suppose l'homographie déterminée par les deux points doubles supposés réels, c'est-à-dire par deux couples de points conjugués, et par le rapport anharmonique, qui constitue la troisième condition nécessaire. Il est facile en effet de voir que la connaissance du rapport anharmonique équivaut à celle d'un couple de points conjugués autres que les points doubles, puisqu'il permet la détermination d'un de ces couples. Inversement, la connaissance d'un couple de points conjugués entraîne la connaissance du rapport anharmonique. En effet, si l'on connaît, avec les points doubles C et D, le couple conjugué (A_1, A_2), il suffit d'exécuter en sens inverse la construction précédente. Après avoir mené par les points A_1, A_2, deux droites parallèles de direction quelconque, on mène par le point C une droite également quelconque rencontrant ces parallèles respectivement en P et en R; on mène ensuite la droite DR qui rencontre A_1P en Q. Le rapport $\frac{A_1P}{A_1Q}$ est égal à $\frac{m}{n}$.

Pour achever la détermination graphique de l'homographie ainsi déterminée, il faut construire les points conjugués de l'infini. On remarquera pour cela que si, dans la relation (23) on suppose le

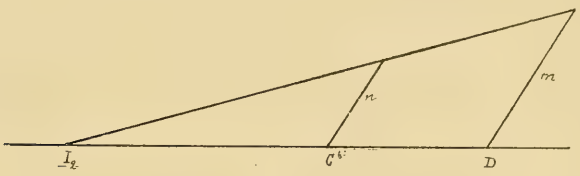


Fig. 2.

point A_1 du premier système rejeté à l'infini, le point A_2 devient le point I_2, en même temps que cette relation devient

$$\frac{CI_2}{DI_2} = \frac{n}{m}.$$

Le point I_2 est ainsi déterminé, et l'on peut (fig. 2) le construire aisément. On construira le point J_1 d'une manière analogue ; mais il est plus simple de se rappeler qu'il est le symétrique du point I_2 par rapport au centre de l'homographie qui est le point O milieu de la distance CD.

Il est à remarquer que toutes ces constructions peuvent s'effectuer à l'aide de la règle seule, en sorte que le problème résolu est exclusivement linéaire.

– Lorsqu'il s'agit d'une homographie à points doubles imaginaires, la question devient plus compliquée. Nous avons dit plus haut, en acceptant simplement une démonstration que nous ne reproduisons pas, que, dans ce cas, l'homographie est engendrée par un angle de grandeur constante qui tourne autour d'un point fixe extérieur à la droite qui supporte l'homographie, point qu'on appelle le sommet de celle-ci. Pour chaque position de l'angle, les points de rencontre de ses côtés avec la base de l'homographie constituent un couple de points conjugués. Les points d'une même division sont ceux qui sont situés sur le même côté de l'angle ; il est donc nécessaire de bien distinguer l'un de l'autre ces deux côtés qui se prolongent d'ailleurs de part et d'autre du sommet. Lorsque l'angle est quelconque, le même point n'admet pas le même conjugué suivant qu'il appartient à l'un ou à l'autre système, à cause de la distinction qui existe entre les deux côtés de l'angle. Mais lorsque l'angle est droit, cette distinction cesse d'exister à cause de la symétrie, et alors l'homographie devient une

involution. En ce qui concerne les points conjugués de l'infini, ils correspondent aux positions de l'angle pour lesquelles un de ses côtés est parallèle à la base de l'homographie.

Ce mode de construction montre que l'homographie est, dans le cas examiné, complètement déterminée par son sommet et par l'angle. Le sommet équivaut à lui tout seul à deux conditions, car il correspond à l'ensemble des deux points doubles qui sont ici imaginaires; quant à l'angle, il représente la troisième condition, car deux points conjugués suffisent à le déterminer. Inversement, la connaissance de trois couples de points conjugués doit permettre de retrouver l'angle et le sommet. Mais nous n'insisterons pas sur cette question qui est pour nous sans utilité, et nous ferons simplement remarquer que la construction qui vient d'être indiquée n'est plus simplement linéaire, ce qui est évidemment un inconvénient.

— Il est possible de supprimer la distinction qui existe jusqu'à présent entre les homographies à points doubles réels et celles à points doubles imaginaires, et de donner une construction unique s'appliquant à tous les cas possibles.

Nous avons vu en effet d'abord que, dans le cas des points doubles réels, une homographie rapportée à l'un d'eux est représentée par la relation (15)

$$\frac{j_1}{x_1} + \frac{i_2}{x_2} = 1. \qquad (15)$$

Or supposons que les abscisses des points des deux divisions soient comptées sur deux axes différents OX, OY, à partir de l'origine commune O (fig. 3), l'équation précédente montre que, si après avoir déterminé les abscisses x_1 et x_2 correspondant à un couple de points conju-

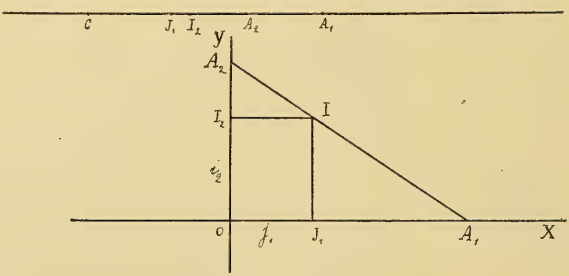


Fig. 3.

gués, on prend sur OX une longueur $OA_1 = x_1$, et sur OY une longueur $OA_2 = x_2$, la droite variable A_1A_2 passe toujours par le point I dont les coordonnées sont j_1 et i_2.

Donc, inversement, si, après avoir déterminé les abscisses j_1 et i_2 des points conjugués de l'infini dans chaque système, on construit le point I ayant j_1 et i_2 pour coordonnées relativement aux axes OX et OY, la droite joignant le point I à un point quelconque A_1 de l'axe OX rencontre l'axe OY en un point A_2 tel que la longueur OA_2 est conjuguée de la longueur OA_1. Plus généralement, *une droite quelconque passant par le point* I *rencontre les axes* OX *et* OY *en deux points* A_1 *et* A_2 *tels que les longueurs* OA_1 *et* OA_2 *sont conjuguées.*

On a ainsi un procédé très simple permettant la construction rapide d'autant de couples de longueurs conjuguées qu'on veut. Il suffit de reporter ces longueurs à partir de l'origine commune, sur la droite qui doit supporter l'homographie.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une homographie quelconque ; nous avons vu qu'en rapportant les points des deux divisions à deux points conjugués A_1 et A_2, pris pour origine des abscisses dans les systèmes correspondants, la relation homographique conserve la forme canonique (15), qui est ici

$$\frac{j'_1}{x'_1} + \frac{i'_2}{x'_2} = 1. \qquad (22)$$

La seule différence avec le cas précédent est que les longueurs conjuguées x'_1, x'_2 sont comptées respectivement à partir des points A_1 et A_2. Or prenons encore (fig. 4) deux axes OX′ et OY′ sur chacun desquels nous porterons à partir de l'origine commune et les longueurs des deux divisions, celles de la première sur l'axe OX'_1, celles de la seconde sur l'axe OY'_1, puis, comme précédemment, construisons le point I′ ayant pour coordonnées les abscisses j'_1 et i'_2 des points conjugués de l'infini dans chaque système. *Toute droite passant par le point* I′ *rencontre les axes* OX′ *et* OY′ *en deux points* A'_1 *et* A'_2 *tels que les longueurs* OA'_1, OA'_2 *sont conjuguées*, et plus généralement les longueurs affectées des indices 1 et 2.

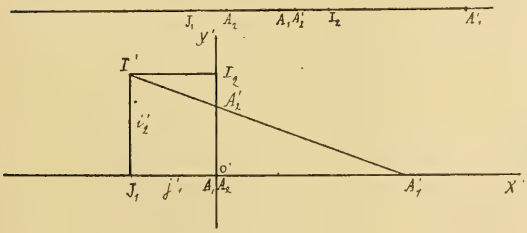


Fig. 4.

La construction est, comme on le voit, identique à celle du cas précédent. La seule différence consiste en ce que les longueurs conjuguées qu'elle fournit doivent être portées sur la base de l'homographie à partir des origines conjuguées correspondantes A_1 et A_2 et non

plus à partir d'une seule et même origine. Les résultats ainsi obtenus géométriquement confirment ce que nous avons dit plus haut sur le peu d'importance de la distinction qui peut être établie entre les homographies à points doubles réels et celles à points doubles imaginaires. Analytiquement et géométriquement, un couple de points conjugués possède exactement les mêmes propriétés qu'un point double, dans lequel la coïncidence des deux points conjugués peut être regardée comme une coïncidence accidentelle, fortuite, n'entraînant avec elle aucune conséquence importante. La véritable caractéristique d'une homographie consiste dans la position mutuelle des points de l'une des divisions comparée à celle des points correspondants de l'autre.

Il est même, à ce point de vue, intéressant de remarquer que la nature d'une homographie dépend à proprement parler d'un seul paramètre. L'équation canonique (22) qui la représente semble, il est vrai, contenir deux paramètres j_1' et i_2' qui sont les distances aux deux origines conjuguées choisies des deux points conjugués de l'infini, l'un des trois paramètres contenus dans l'équation générale ayant déjà disparu par le fait du choix des origines dont la distance supposée connue peut d'ailleurs varier, puisque son changement revient à donner un mouvement de glissement d'ensemble au système de points qui forme l'une des deux divisions. Or, de ceux des paramètres restants, l'un d'eux j_1' peut être supposé avoir, dans tous les cas, une valeur constante ; en effet, le couple des deux origines conjuguées A_1 et A_2 étant arbitraire, on peut toujours, quelle que soit l'homographie considérée, choisir pour point A_1 celui des points de la première division qui se trouve à une distance du point conjugué de l'infini J_1 correspondant à une distance constante, arbitraire d'ailleurs, et égale à j_1'. Les diverses homographies se distingueront alors les unes des autres uniquement par la distance i_2' du second point conjugué de l'infini I_2 au point A_2 conjugué du point A_1. La relation homographique rentre alors dans la catégorie des relations simples à un seul paramètre, et cela lui enlève beaucoup de sa complication apparente.

On peut, par exemple, supposer $j_1' = -1$. Les homographies se partageront alors en deux groupes : celles pour lesquelles le paramètre i_2' est positif, et celles pour lesquels il est négatif. Le calcul et le graphique montrent alors que pour les premières, la valeur de x_2' est positive pour toutes les valeurs de x_1', excepté pour celles qui sont comprises entre -1 et 0 ; tandis que, pour les secondes, la valeur de x_2' est négative pour toutes les valeurs de x_1', sauf encore pour celles qui sont comprises entre -1 et 0. En raison des appli-

cations optiques que nous aurons à faire plus tard, nous donnerons aux premières le nom d'homographies *convergentes* et aux secondes celui d'homographies divergentes.

— Parmi tous les cas en nombre infini possible auxquels s'applique la construction que nous venons d'indiquer, nous devons signaler deux cas particuliers intéressants.

Le premier est celui où les points doubles sont coïncidents. Dans ce cas, les deux points conjugués de l'infini sont de part et d'autre et à des distances égales de ce point qui est en même temps le centre de l'homographie. Il en résulte que les deux coordonnées j'_1 et i'_2 du pôle I sont égales en valeur absolue mais de signes contraires, en sorte que ce point se trouve sur la seconde bissectrice et par conséquent dans le deuxième ou le quatrième angle. Pour avoir la forme particulière de l'équation canonique (15) qui convient à ce cas, il suffit d'y faire $i'_2 = j'_1$; celle-ci devient alors

$$\frac{j_1}{x_1} - \frac{j_1}{x_2} = 1,$$

qu'on peut écrire plus symétriquement

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{j_1}. \tag{23}$$

Cette relation exprime *que la différence des inverses de deux longueurs conjuguées est constante.*

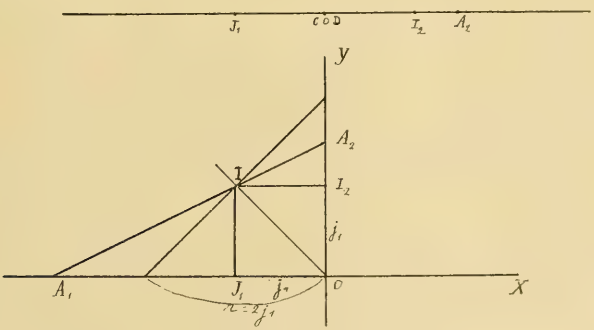


Fig. 5.

En menant par le pôle I (fig. 5) une perpendiculaire à la seconde bissectrice, cette perpendiculaire rencontre l'axe OX en un point tel que la distance à l'origine O a pour valeur

$$r = 2j_1.$$

La formule précédente peut alors s'écrire

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{2}{r}. \qquad (23')$$

Le second cas à mentionner est celui de la relation involutive, dans lequel les deux points conjugués de l'infini coïncident. Les deux coordonnées j_1 et i_2 du pôle I sont alors égales en valeur et en signe, en

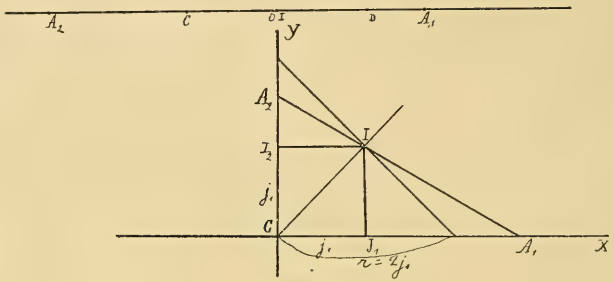


Fig. 6.

sorte qu'il se trouve sur la première bissectrice dans le premier ou dans le troisième angle des axes de coordonnées. Pour avoir la forme particulière de l'équation canonique qui convient à ce cas, il suffit d'y faire $i_2 = j_1$, ce qui donne

$$\frac{j_1}{x_1} + \frac{j_1}{x_2} = 1$$

ou plus symétriquement

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{j_1}, \qquad (24)$$

relation exprimant *que la somme des inverses de deux longueurs conjuguées est constante.*

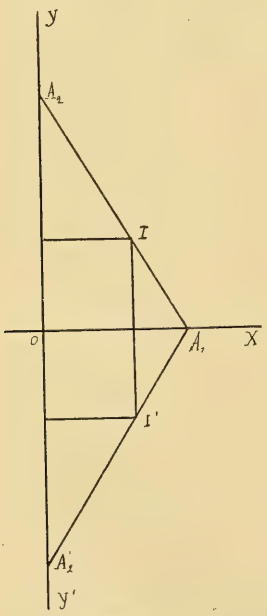


Fig. 7.

En menant par le pôle I (fig. 6) une perpendiculaire à la première bissectrice, cette perpendiculaire rencontre l'axe OX en un point tel que la distance à l'origine a pour valeur

$$r = 2j_1.$$

La formule précédente peut alors s'écrire

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{r}. \qquad (24')$$

Les deux cas que nous venons d'examiner et que nous avons vu être liés l'un à l'autre par la valeur absolue du rapport anharmonique qui est pour tous les deux égale à l'unité, présentent encore et comme conséquence une autre analogie importante. Supposons en effet que, dans ces deux homographies particulières, les valeurs de j_1 soient égales; leurs pôles seront alors (fig. 7) symétriques par rapport à l'axe OX. En cherchant dans chacune d'elles, le conjugué d'un même point de l'axe OX, les deux conjugués obtenus seront symétriques par rapport à OX; en d'autres termes, en donnant à j_1 et à x_1 les mêmes valeurs dans les relations (23) et (24), on trouvera pour x_2 des valeurs qui ne différeront que par le signe.

Il suit de là que, dans ces conditions, les deux homographies font subir les mêmes modifications aux positions mutuelles des différents points de l'axe OX. La seule différence consiste en ce que les positions transformées se trouvent après le rabattement de l'axe OY sur l'axe OX symétriques les unes des autres par rapport au point O. Donc, à cette différence près, les deux transformations produisent le même effet; plus exactement, les deux transformations se déduisent l'une de l'autre par une rotation de 180° autour du point O.

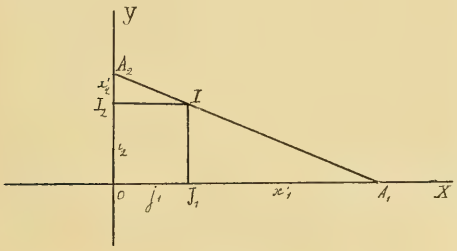


Fig. 8.

— La forme (18) de Newton peut également donner lieu à d'autres constructions du conjugué d'un point, linéaires ou non. Mais il est inutile de les mentionner en raison surtout de ce fait que la construction précédente, si simple et si générale, contient en outre l'interprétation de la formule de Newton,

(18) $$x'_1 x'_2 = j_1 i_2.$$

La similitude des triangles A_1IJ_1, A_2II_2 (fig. 8) donne en effet

$$\frac{J_1A_1}{J_1I} = \frac{I_2I}{I_2A_2}$$

c'est-à-dire, en tenant compte que, dans cette formule, les points conjugués A'_1, A'_2 sont comptés à partir des points J_1 et I_2

$$\frac{x'_1}{i_2} = \frac{j_1}{x'_2}$$

d'où l'on retire la formule (18).

La construction qui correspond à la forme canonique doit donc être regardée comme la construction propre de l'homographie et la traduction la plus naturelle et la plus légitime de la propriété homographique. Elle s'applique en effet à tous les cas et convient à toutes les interprétations.

6° Propriété différentielle de la relation homographique.

Prenons la relation homographique sous la formule (12) par exemple ; la différentiation nous donne

$$(x_2 + j)dx_1 + (x_1 + q)dx_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x_2 - i_2)dx_1 + (x_1 - j_1)dx_2 = 0.$$

On tire de là

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2 - i_2}{x_1 - j_1}.$$

En se reportant à la construction de la forme canonique, on voit qu'on a

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{A_2I_2}{A_1I_1}.$$

Le rapport des différentielles des deux longueurs conjuguées est donc égal au rapport des distances des deux points conjugués qu'elles définissent aux points conjugués de l'infini correspondants.

7° Système de deux homographies ayant une division commune.

Soient sur une même droite deux homographies rapportées à une origine unique commune et définies respectivement par les relations

(25) $$x_1x_2 + px + qx_2 + r = 0,$$

(26) $$x_2x_3 + p'x_2 + q'x_3 + r' = 0.$$

Ces deux divisions ont, comme on le voit, une division homographique commune, en sorte que les deux autres divisions sont homographiques à cette division commune. Ainsi étant donné un point A_1

choisi arbitrairement, la relation (23) définit son conjugué A_2 dans la première homographie ; ce point A_2 étant considéré ensuite comme appartenant à la seconde homographie, la relation (24) définit son conjugué A_3. Il suit de là que les deux points A_1 et A_3, appartenant respectivement à deux homographies différentes, admettent le même conjugué A_2. Ces deux points A_1 et A_3 sont donc liés entre eux, et par suite il existe entre leurs abscisses variables x_1 et x_3 une relation qu'on obtient en éliminant x_2 entre les équations (23) et (24) ce qui donne

$$(27) \qquad (q'-p)x_1x_3+(r'-pp')x_1+(qq'-r)x_3+(qr'-rp')=0.$$

On obtient ainsi, pour définir x_3 en fonction de x_1, une nouvelle relation homographique, ce qui conduit au théorème connu :

Deux divisions, homographiques à une troisième, sont homographiques entre elles.

Il y a exception toutefois si l'on a $p=q_1$, car, dans ce cas, l'homographie résultante se réduit à une homothétie.

Quoi qu'il en soit, le point A_1 étant donné, il est possible d'obtenir directement le point A_3, sans passer par l'intermédiaire du point A_2. La chose est d'ailleurs possible aussi bien géométriquement qu'algébriquement. Il est en outre possible d'appliquer à l'homographie résultante tout ce qui a été dit sur les homographies en général. C'est ainsi qu'on peut la ramener à la forme canonique en rapportant les distances des divisions 1 et 3 à deux points conjugués quelconques préalablement déterminés.

En d'autres termes, on peut passer de la division 1 à la division 3 de deux façons : ou bien directement, ou bien par l'intermédiaire de la division 2. Ce sont les circonstances qui, dans chaque cas, indiqueront la marche à suivre la plus avantageuse ; en effet, si le procédé par élimination est plus rapide, il est en revanche et assez souvent utile d'être renseigné sur la valeur et la position des quantités intermédiaires.

8° Système de plusieurs homographies de même base ayant deux à deux une division commune.

Il est facile de passer du cas de deux homographies à un nombre quelconque d'homographies de même base liées entre elles de telle façon que la seconde division de chacune soit la première division de la suivante. En procédant de proche en proche, c'est-à-dire en remplaçant deux homographies consécutives par une homographie unique,

on arrive finalement à ce résultat que les deux divisions extrêmes forment une homographie.

Il est donc possible de remplacer le système proposé par une homographie unique qu'on peut appeler l'homographie résultante. Dans ces conditions, le dernier conjugué d'un point peut s'obtenir soit par une construction unique, soit par la suite des constructions que fournissent ses conjugués intermédiaires.

HOMOGRAPHIE OPTIQUE

L'étude un peu détaillée que nous venons de faire de l'homographie va être justifiée par l'application qui va en être faite à l'Optique géométrique dans la réfraction sur des surfaces sphériques, application dans laquelle les résultats obtenus et les constructions indiquées trouveront leur emploi. La méthode, en apparence détournée, que nous avons suivie, est donc en réalité avantageuse, car nous allons constater que les théories de l'Optique géométrique, théories qui paraissent jusqu'à présent si embrouillées et même si obscures, se rattachent directement à l'homographie, dont elles ne sont qu'un cas particulier. Ce lien, qui les rattache ainsi à une théorie connue, jette sur elles une grande clarté et établit leur véritable et définitive signification.

1° Réfraction sur une seule surface sphérique.

Soit P_1 (fig. 9) un point lumineux situé à une distance $OP_1 = l_1$ du centre de la sphère réfringente, et soit OC le rayon passant par ce point et par rapport auquel tout est symétrique. Considérons le rayon incident P_1A faisant avec le rayon OA un angle d'incidence i_1 ; le rayon réfracté correspondant AR fait avec le rayon OA un angle de réfraction i_2 et rencontre l'axe OC en un point Q. Désignons par l_2 la longueur OQ, et posons en outre

$$AP_1 = \rho_1$$
$$AQ = \rho_2.$$

Les triangles OAP_1, OAQ nous donnent, en désignant par ω l'angle variable COA,

$$\frac{l_1}{\rho_1} = \frac{\sin i_1}{\sin \omega}$$
$$\frac{l_2}{\rho_2} = \frac{\sin i_2}{\sin \omega},$$

d'où en divisant membre à membre

$$\frac{l_2}{\rho_2} : \frac{l_1}{\rho_1} = \frac{\sin i_2}{\sin i_1}.$$

Par suite en appelant n_1 l'indice de réfraction relatif au milieu dans

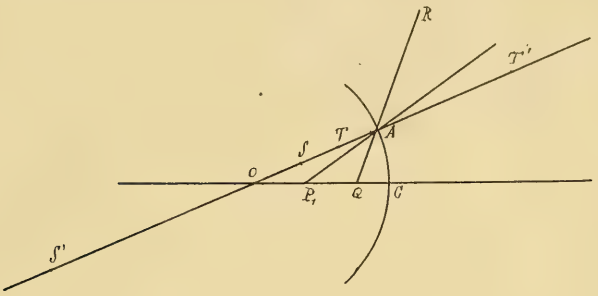


Fig. 9

lequel est situé le point P, et n_2 l'indice de réfraction relatif au second milieu

$$\frac{l_2}{\rho_2} : \frac{l_1}{\rho_1} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{28}$$

Cette relation, qui exprime que le rapport anharmonique des quatre longueurs ρ_1, ρ_1, ρ_2, ρ_2 est constant, entraîne, comme conséquence immédiate, une méthode particulière de construction du rayon réfracté. Menons en effet la bissectrice P_1S de l'angle OP_1A_1 et la bissectrice QT de l'angle OQA, nous avons

$$\frac{OS}{AS} = \frac{l_1}{\rho_1}$$
$$\frac{OT}{AT} = \frac{l_2}{\rho_2},$$

d'où par division

$$\frac{OT}{AT} : \frac{OS}{AS} = \frac{l_2}{\rho_2} : \frac{l_1}{\rho_2}$$
$$= \frac{n_1}{n_2}.$$

Le point T est donc sur le rayon OA, le conjugé anharmonique du point S par rapport aux deux points O et A.

De même, en menant les bissectrices extérieures, PS′ et QT′, en P et en Q, on constate encore que le point T′ est sur OA le conjugué anharmonique du point S′ par rapport aux deux points fixes O et A. Il est

donc possible de construire les points T et T′, par la méthode de Chasles par exemple ; et alors le point Q du rayon OC appartient à la circonférence décrite sur TT′ comme diamètre.

On a ainsi un procédé graphique pour construire, à l'aide de la règle et du compas, le rayon réfracté AQ. Toutefois ce procédé est moins simple que ceux indiqués par nous dans le mémoire cité plus haut, et ne peut pour cette raison figurer sur nombre des méthodes pratiques dont nous poursuivons l'emploi.

Cette remarque faite, supposons que le point d'incidence A se rapproche indéfiniment du point C. La longueur $AP_1 = \rho_1$ se rapproche indéfiniment de la longueur connue $CP_1 = p_1$; en même temps le point Q variable avec P_1A tend (fig. 10) vers une position limite P_2 définie comme seconde extrémité de la longueur limite CP_2 vers laquelle tend la longueur $AQ = \rho_2$.

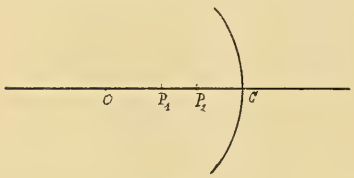


Fig. 10.

Cette dernière longueur que nous désignons par p_2 s'obtient en remplacant ρ_1 et ρ_2 respectivement par p_1 et p_2 dans la relation fondamentale (25). Il vient ainsi, pour définir la position du point P_2,

$$\frac{l_2}{p_2} : \frac{l_1}{p_1} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{29}$$

Cette relation montre que les points P_1 et P_2 sont conjugués anharmoniques par rapport aux deux points fixes O et C, le rapport anharmonique constant étant égal au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des indices de réfraction des deux milieux.

Le point P_2 est dit *le foyer conjugué* du point P_1.

Le point P_1 étant considéré comme variable sur le diamètre OC, on voit que les divers points de ce diamètre et leurs foyers conjugués forment sur cette droite deux divisions homographiques dont les deux points doubles réels sont le centre O de la surface sphérique réfringente et l'extrémité C du diamètre OC.

Quant à la relation (26) qui établit le lien entre les points P_1 et P_2, il est possible de la mettre sous une autre forme en rapportant toutes les distances à une origine commune, le point C par exemple. En désignant par r le rayon OC, on trouve ainsi

$$\frac{r - p_2}{p_2} : \frac{r - p_1}{p_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

d'où

$$(30) \qquad (n_1 - n_2)p_1p_2 + n_2rp_1 - n_1rp_2 = 0.$$

On retrouve ainsi la forme (12) que prend la relation homographique quand l'origine est un des points doubles.

Foyers principaux. — Les points conjugués de l'infini portent ici le nom de *foyers principaux*. Nous les désignons par F_1 et par F_2, l'indice désignant la division à laquelle ils appartiennent. Ainsi F_1 représentent le point de la première division qui est le conjugué du point de l'infini dans la seconde. En appelant f_1 et f_2 leurs distances au sommet C, on a d'après ce qui a été dit plus haut sur les abscisses des points conjugués de l'infini

$$(31) \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{n_1}{n_1 - n_2} r \\ f_2 = -\dfrac{n_2}{n_1 - n_2} r. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier par ces valeurs que les deux foyers principaux F_1 et F_2 sont respectivement à égale distance des points O et C, points doubles de l'homographie. et par suite également distants du point milieu du rayon OC, qui est le centre de l'homographie.

En introduisant les valeurs de f_1 et f_2 dans la relation homographique (30), celle-ci prend la forme canonique

$$(32) \qquad \frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1.$$

Construction du foyer conjugué d'un point. — Tout ce que nous avons dit plus haut sur la construction du conjugué d'un point dans une homographie, trouve ici son entière application. Après avoir pris deux axes (*fig.* 11) que, pour plus de commodité, l'on choisit rectangulaires, ou détermine le point F ayant pour abscisse la longueur f_1 et pour ordonnée la longueur f_2, on prend sur l'axe des x, dans le sens voulu, à partir de l'origine, une longueur p_1 égale à la distance au sommet C du point donné ; on joint ensuite l'extrémité de cette longueur au point F par une droite que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec l'axe CY. La distance à l'origine du point de rencontre représente en grandeur et en signe la distance au sommet C du foyer conjugué cherché.

Nous ferons simplement quelques remarques destinées à faciliter l'application de cette règle si simple et si commode.

En premier lieu, nous conviendrons de compter sur l'axe de symé-

trie de la surface refringente les distances positives dans le sens de la marche des rayons lumineux, c'est-à-dire, comme on le fait habituellement, de gauche à droite. Dans ces conditions, le rayon r est positif ou négatif (fig. 11 et 12) suivant que la courbure tourne sa convexité ou sa concavité vers le premier milieu. En ce qui concerne la distance p_1 qui exprime la position du point P_1, elle est négative lorsque ce point est placé dans les conditions ordinaires en avant de la surface réfringente, et par conséquent, relativement à nous, à gauche de celle-ci. Cette distance p_1 est au contraire négative, lorsque le point P_1 est un point lumineux *imaginaire*, c'est-à-dire formé par la rencontre de rayons convergents qui iraient se rencontrer à droite de la surface réfringente, si celle-ci n'existait pas. Quant à la distance p_2 elle est positive ou négative, suivant que le foyer conjugué P_2 est réel ou imaginaire, et par suite situé à droite ou à gauche de la surface réfringente.

Notre seconde remarque est relative aux distances focales principales f_1 et f_2, qui sont les coordonnées du point F servant de base à toutes nos constructions. Des formules (28) qui en fournissent les valeurs, on tire par division d'abord, par addition ensuite,

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2} \tag{33}$$

$$f_1 + f_2 = r. \tag{34}$$

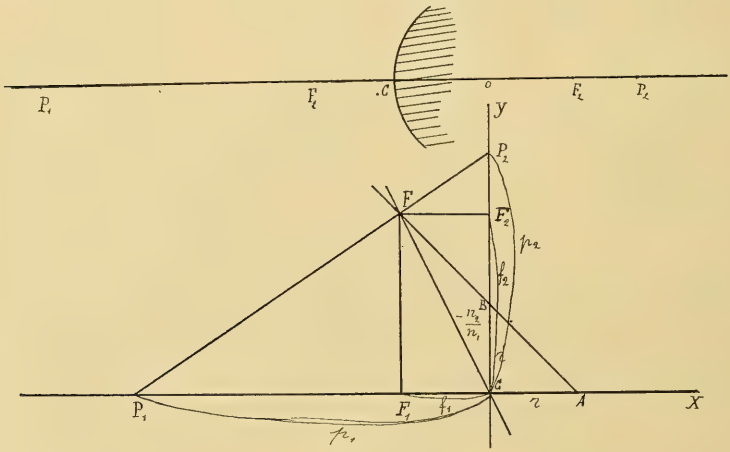


Fig. 11.

La formule (30) montre que le point F est sur la droite

$$y = -\frac{n_2}{n_1} x$$

passant par l'origine et dont le coefficient angulaire est $-\frac{n_2}{n_1}$. La formule (32) montre qu'il est aussi sur la droite

$$x + y = r,$$

qui est parallèle à la seconde bissectrice et intercepte sur les axes des segments égaux à r.

Ces deux droites sont très faciles à construire, en sorte que le point F peut lui-même être déterminé par des constructions purement géométriques. La méthode graphique s'applique donc ici d'une façon absolue. Toutefois, pour la précision des résultats et pour éviter les incertitudes résultant de la difficulté d'obtenir exactement le point de rencontre de deux droites faisant un angle le plus souvent très petit, il est plus avantageux de *calculer* les distances f_1 et f_2, et d'employer les formules (30) et (31) à titre de vérifications.

Nous signalerons enfin ce point que les valeurs de f_1 et f_2 sont toujours de signes contraires. Il en résulte que le point F est toujours

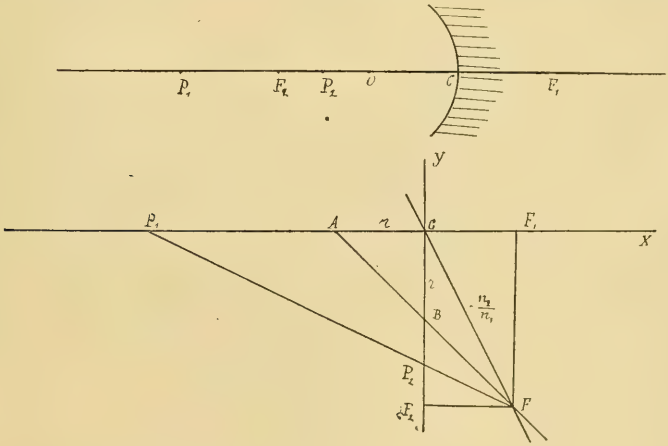


Fig. 12.

dans le second ou dans le quatrième angle des coordonnées. De cette double position possible résulte le classement des surfaces réfringentes en deux catégories : celles pour lesquelles le point F est dans le deuxième angle, et celles pour lesquelles il est dans le quatrième. Pour les premières, le foyer conjugué d'un point est réel pour toutes les positions de ce point, excepté lorsqu'il est situé entre le premier foyer principal F_1 et la surface. Pour les secondes, c'est le contraire : le foyer conjugué d'un point est toujours virtuel, excepté quand ce

point est situé entre la surface et le foyer principal F_1, ce qui exige qu'il soit virtuel.

Les premières surfaces sont *convergentes ;* les secondes sont *divergentes.*

Les conditions de convergence ou de divergence sont mentionnées dans le tabeau suivant :

$$\left.\begin{array}{ll} n_1 < n_2 & r > 0 \\ n_1 > n_2 & r < 0 \end{array}\right\} \text{ surfaces convergentes.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n_1 < n_2 & r < 0 \\ n_1 > n_2 & r > 0 \end{array}\right\} \text{ surfaces divergentes.}$$

La construction montre encore mieux que toutes les discussions de formules, les variations de positions du foyer conjugué d'un point suivant les diverses positions de ce point. Ainsi en particulier dans le cas des surfaces convergentes, on voit qu'un point et son conjugué supposés réels tous les deux sont à égale distance du sommet de la surface lorsque l'on a

$$p_1 = f_1 - f_2,$$

c'est-à-dire lorsque, en tenant compte des signes, la valeur absolue de la distance p_1 est égale à la somme des valeurs absolues des distances focales principales. Pour des valeurs absolues de p_2 plus grandes que celle-ci, le foyer conjugué est plus rapprochée de la surface que le point lui-même ; le contraire a lieu pour des valeurs plus petites.

Supposons maintenant que la valeur de p_1 étant supposée fixée, on l'augmente de la quantité infiniment petite dp_1, la variation correspondante dp_2 de p_2 sera, en se reportant à la formule (**22** *bis*) établie plus haut,

$$\frac{dp_2}{dp_1} = -\frac{p_2 - f_2}{p_2 - f_1}. \tag{35}$$

On voit ainsi que *le rapport des valeurs absolues des différentielles des deux longueurs conjuguées est égal au rapport des distances des deux points conjugués aux foyers principaux correspondants.*

On peut se rendre compte ainsi d'une façon à la fois très sûre et très simple de la grandeur du déplacement que peut subir l'un des points par le fait du déplacement de l'autre.

Grossissement. — Soient P_1 un point situé sur l'axe de la surface réfringente et P_1Q_1 une droite de petite dimension perpendiculaire à cet axe. On *admet*, dans la théorie ordinaire que l'image de P_1Q_1 est une droite P_2Q_2 passant par le foyer conjugué P_2 du point P_1, per-

pendiculaire elle aussi à l'axe de la surface et dont la longueur est limitée en Q_2 par l'axe secondaire du point Q_1.

Une telle affirmation est complètement inexacte. Néanmoins, dans un assez grand nombre de cas, le fait qu'elle exprime diffère assez peu de la réalité pour qu'on puisse le regarder comme sensiblement exact, On peut donc le regarder comme une hypothèse permettant de se faire une idée approchée du phénomène beaucoup plus complexe produit par la réfraction.

Dans ces conditions, on appelle *grossissement* le rapport de grandeur de l'image hypothétique P_2Q_2 à l'objet P_1Q_1. En le désignant par G_1 on a par définition

$$G = \frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}.$$

Nous nous proposons de montrer qu'il est possible en prenant pour base le dispositif déjà employé, de construire très facilement l'image en grandeur et par suite d'avoir une méthode graphique pour la mesure du grossissement.

Pour cela, nous commencerons par établir, par la méthode connue la formule qui fournit, en fonction des données de la question, la

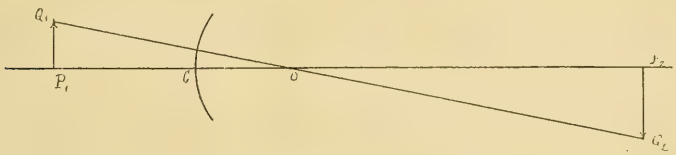


Fig. 13.

valeur du grossissement. La similitude (fig. 13) des triangles OP_1Q_1, OP_2Q_2 nous donne en désignant, comme plus haut, par l_1 et l_2 les distances OP_1, OP_2,

$$G = \frac{P_2Q_2}{P_1Q_1} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Or de la relation fondamentale

$$\frac{l_2}{p_2} : \frac{l_1}{p_1} = \frac{n_1}{x_2} \tag{29}$$

on tire

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}.$$

D'autre part de la relation

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1 \tag{32}$$

on déduit

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{f_2}{p_1 - f_1}.$$

On a ainsi par substitution

$$G = \frac{n_1}{n_2} \frac{f_2}{p_1 - f_1}$$

D'ailleurs de la formule

$$\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1} \tag{30}$$

on tire

$$f_2 = -\frac{n_2}{n_1} f_1.$$

Il en résulte

$$G = -\frac{f}{p_1 - f_1},$$

et finalement

$$G = \frac{f_1}{f_1 - p_1}. \tag{36}$$

Il reste à remarquer que la valeur de G peut être positive ou négative. Le premier cas correspond aux images virtuelles qui sont droites, et le second, aux images réelles qui sont renversées.

Cela étant, menons par le point P_1 (fig. 14) perpendiculairement à l'axe OX la droite P_1Q_1 égale à la longueur de la droite dont on cherche l'image ; menons ensuite la droite Q_1F_1 jusqu'à la rencontre en Q_2 avec l'axe OY. Je dis que la longueur OQ_2 est égale à l'image demandée. On a en effet

$$\frac{OQ_2}{P_1Q_1} = \frac{OF_1}{P_1F_1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{OQ_2}{P_1Q_1} = \frac{\text{val. abs. } f_1}{\text{val. abs. } (f_1 - p_1)}.$$

La comparaison avec la valeur de G donne $OQ_2 = PQ_2$.

En ce qui concerne le sens de l'image ainsi obtenue OQ_2, on remarquera que OQ_2 et P_1Q_1 sont de même sens ou de sens contraires suivant que l'origine O est entre les points F_1 et P_1 ou bien extérieur à P_1F_1, c'est-à-dire suivant que les deux distances F_1O et F_1Q_1 sont de même sens ou de sens contraires, c'est-à-dire justement suivant que G est positif ou négatif.

La construction qui vient d'être indiquée peut donner lieu à plusieurs remarques intéressantes. Nous nous contenterons de signaler cette circonstance particulière que, dans le cas des surfaces conver-

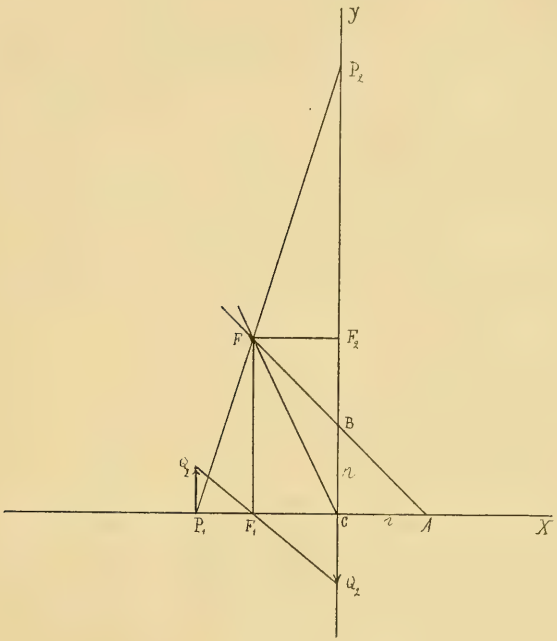


Fig. 14.

gentes, l'image est égale en grandeur à l'objet, lorsque les deux distances F_1P_1 et OF_1 sont égales, c'est-à-dire lorsque la distance p_1 est le double de la distance focale principale f_1.

Aberration chromatique centrale. — Les résultats précédents sont relatifs à des rayons de lumière homogène issus d'un même point. Lorsqu'il s'agit de lumière blanche, le phénomène se complique parce qu'à chaque couleur différente correspond un indice de réfraction différent. La réfraction opère alors la dissociation des rayons de réfrangibilités différentes, en sorte qu'à un rayon incident unique correspond tout un faisceau de rayons réfractés.

En ce qui concerne les rayons centraux, la différence de réfrangibilité se traduit par ce fait qu'à un même point correspondent plusieurs points conjugués différents; la formule (27) nous montre en effet que la valeur de p_2 qui fixe la position de ce conjugué, dépend

du rapport $\frac{n_1}{n_2}$. L'écart de position des points conjugués qui correspondent aux valeurs extrêmes des indices de réfraction des rayons visibles extrêmes constitue l'*aberration chromatique longitudinale*.

La valeur de cette aberration peut être déterminée par le calcul ; mais elle peut être aussi déterminée graphiquement d'une manière très simple. Pour cela nous observerons qu'à chaque valeur de l'indice de réfraction correspondent des foyers principaux différents, et par suite des points tels que F_D, F_H (fig. 16) auxquels il suffit de joindre le point donné P_1, pour obtenir ses divers conjugués. En faisant cette construction pour les deux positions extrêmes de F, on obtient la valeur de l'aberration longitudinale (fig. 16 et 15).

Cette méthode graphique présente sur la méthode de calcul, non seulement l'avantage de la simplicité et de la rapidité, mais encore

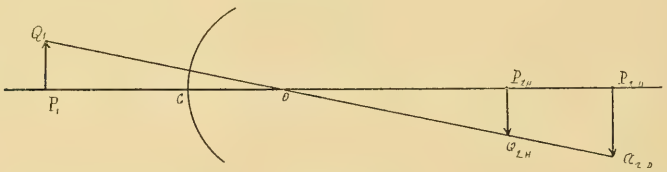


Fig. 15.

celui de pouvoir suivre très facilement les variations que subit cette aberration quand le point P_1 se déplace. On voit ainsi que l'aberration a sa valeur minima quand le point P_1 est à l'infini, valeur qui est égale à la différence entre les deux distances focales extrêmes de même rang, tandis qu'elle augmente au delà de toutes limites lorsque le point P_1 se rapproche de la région de l'axe sur laquelle se trouvent les foyers principaux.

On voit même que la dissociation par la réfraction des rayons de réfrangibilités différentes peut produire un phénomène assez curieux consistant en ce que, pour certaines positions du point P_1, un certain nombre de ses foyers conjugués sont réels, tandis que les autres sont imaginaires. Cela arrive quand le point P_1 coïncide avec l'un des foyers principaux intermédiaires ; en le joignant aux divers points F, on obtient des droites qui rencontrent l'axe OY à des distances très grandes, les unes d'un côté, les autres de l'autre. Dès lors, au lieu d'avoir une région irisée tout entière réelle ou imaginaire, dans laquelle les couleurs se succèdent d'une manière continue du rouge au violet, on aura deux régions colorées, l'une réelle, l'autre imaginaire, et de colorations différentes, correspondant chacune aux régions

extrêmes du spectre. Dans l'une, le rouge fera défaut; dans l'autre, ce sera le violet.

Nous devons mentionner cette circonstance intéressante que tous les points F se trouvent sur la même droite

$$x + y = r;$$

il en résulte, pour la figure complète, une grande régularité et une

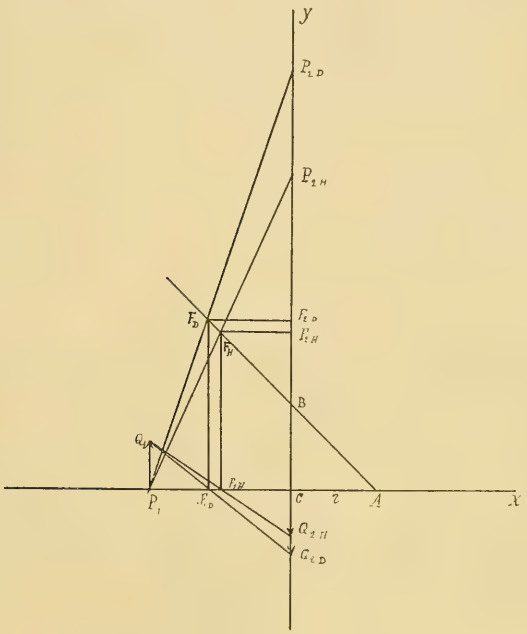


Fig. 16.

grande symétrie, complétée par ce fait que les différences de position entre les foyers principaux extrêmes de même rang, c'est-à-dire situés les uns sur OX, les autres sur OY, sont égales, ainsi que cela résulte de la relation

(34) $$f_1 + f_2 = r.$$

Il en résulte aussi cette circonstance géométriquement intéressante que si l'on joint le point P_1 à quatre points différents F, *le rapport anharmonique des quatre foyers conjugués obtenus est égal au rapport anharmonique des quatre points* F, *et par suite au rapport anharmonique des quatre foyers principaux correspondants.*

On déduit de là ce théorème intéressant :

Quelle que soit la position du point P_1 *sur l'axe de la surface réfringente, le rapport anharmonique des quatre foyers conjugués correspondant à des réfrangibilités déterminées est constant.*

Ce théorème régit, comme on le voit, les variations de l'aberration longitudinale, non seulement dans son ensemble, mais plutôt dans ses diverses parties, dont il règle les alternatives de dilatation et de contraction.

Pour se rendre un compte encore plus exact de l'influence exercée par les variations de la réfrangibilité sur la position du foyer conjugué d'un point, il est avantageux de calculer ce qu'on peut appeler *la différentielle d'aberration*. Différentions pour cela la formule (32)

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1, \tag{32}$$

en remarquant que la relation

$$f_1 + f_2 = r, \tag{34}$$

on tire

$$df_1 + df_2 = 0,$$

il vient, toutes réductions faites

$$(p_1 - f_1)dp_2 + (p_1 - p_2)df_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$dp_2 = \frac{p_2 - p_1}{p_1 - f_1} df_1.$$

Cette formule montre que l'aberration est nulle, lorsqu'on

$$p_2 - p_1 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque le point coïncide avec son conjugué. Dans ces conditions, le point est un point double de l'homographie, centre du sommet de la surface réfringente. Ce résultat était certain *a priori*.

Pour voir ce qui se passe dans les autres cas, remplaçons dans la formule précédente p_2 par sa valeur tirée de la formule (29), il vient

$$dp_2 = \frac{p_1(r - p_1)}{(p_1 - f_1)^2} df_1.$$

Cette formule qui fournit le rapport $\frac{dp_2}{df_1}$, montre que les valeurs extrêmes de ce rapport sont: l'unité, pour $p_1 = \infty$, et l'infini pour $p_1 = f_1$. Pour examiner ce qui a lieu dans les autres cas, nous remarquerons que le produit $p_1(r - p_1)$ pris en valeur absolue représente l'aire du rectangle dont les dimensions sont les longueurs OP_1 et P_1A,

tandis que $(p - f_1)^2$ représente l'aire du carré dont le côté est P_1F_1. Par conséquent, suivant la position mutuelle des quatre points O, A, F_1, P_1, le rapport $\frac{p_1(r - p_1)}{(p_1 - f_1)^2}$ est en valeur absolue tantôt inférieur et tantôt supérieur à l'unité. Ainsi, dans le cas particulier d'une surface convergente dont le rayon est positif, si le point P_1 est à gauche du point F_1, les deux distances OP_1 et OP_1A sont l'une et l'autre supérieures à P_1F_1 ; il en résulte que dp_2 surpasse df_1 en valeur absolue. Si, au contraire, le point P_1 est à droite du point A, c'est l'inverse qui a lieu, et la valeur de dp_2 est inférieure à celle de df_1. Ces résultats sont d'ailleurs mis très nettement en évidence par les constructions graphiques.

Quant à la valeur de df_1, elle dépend de la variation de l'indice et peut être aisément calculée. Posons en effet $\frac{n_1}{n_2} = n$; la valeur de f_1 devient alors

$$f_1 = \frac{nr}{n - 1}.$$

Il en résulte

$$df_1 = -\frac{rdn}{(n-1)^2}.$$

On voit ainsi que, pour une même valeur de dn, la valeur de df_1 est proportionnelle à la valeur de r, mais varie en sens inverse de n. L'aberration chromatique longitudinale est donc d'autant plus grande que la réfrangibilité est plus faible, tandis qu'elle est beaucoup plus faible pour les milieux fortement réfringents. On trouve encore dans les graphiques la confirmation très nette de tous ces résultats.

2° Réfraction sur un système de deux surfaces sphériques.

Considérons un système de deux surfaces sphériques comprenant entre elles un même milieu qu'elles limitent et séparent de deux autres milieux. Leur ensemble est de révolution autour de la droite qui joint leurs centres. Sur cette droite et dans un des milieux extrêmes que nous appellerons le premier milieu, nous supposerons un point lumineux P_1. Les rayons émanés de celui-ci passeront dans le second milieu, celui compris entre les deux surfaces, et finalement de ce second milieu dans le troisième. Par l'effet de la première réfraction, le point P_1 admet un conjugué P_2 ; celui-ci admet à son tour, par le

fait de la seconde réfraction, un conjugué P_3. On dit alors que le point P_3 est le conjugué du point P_1 dans le système des deux réfractions consécutives.

Le problème à résoudre consiste dans la recherche de la position du point P_3 en fonction de la position du point P_1 et des éléments qui déterminent, en même temps que les deux systèmes réfringents, leur position mutuelle. Ces éléments sont les indices n_1, n_2, n_3, relatifs aux trois milieux pour la longueur d'onde considérée dans le cas d'une lumière homogène, les rayons r_1 et r_2 des deux surfaces en grandeur et en signe, et enfin la distance δ des deux surfaces réfringentes qu'on appelle l'épaisseur de la lentille, dans le cas où les deux surfaces limitent un milieu solide transparent, généralement en verre.

La recherche du point P_3 conjugué dans le système du point P_1 peut se faire algébriquement ou graphiquement de deux manières.

La manière la plus naturelle et la plus simple comme méthode consiste, en suivant l'ordre des faits eux-mêmes, à chercher d'abord le point P_2 conjugué du point P_1 dans la première réfraction, puis à chercher le point P_3 conjugué du point P_2 dans la seconde.

Sur cette détermination successive par le calcul, nous n'avons rien à dire, si ce n'est qu'elle se fait à l'aide de deux formules analogues à la formule (27). La seule précaution à employer consiste à tenir compte de l'épaisseur δ dans l'évaluation de la distance du point P_2 à la seconde surface ; il est à remarquer en effet que la première des formules dont on fait usage suppose les distances rapportées au sommet de la première surface, tandis que la seconde la suppose rapportée au sommet de la seconde comme origine.

Construction graphique des conjugués d'un point. — En ce qui concerne la détermination par le graphique des points P_2 et P_3, elle exige la construction d'un *canevas* préalable. A chaque réfraction on fait correspondre un système d'axes rectangulaires, et l'on construit dans chacun d'eux le point que, pour abréger, nous appellerons désormais le *pôle* et dont les coordonnées sont les distances focales principales correspondantes. On a soin ensuite de prendre sur ce canevas la précaution indiquée dans le précédent calcul, précaution qui consiste à tenir compte de l'épaisseur. Pour cela on porte (fig. 17) sur l'axe CY du premier système et *dans le sens positif* une longueur CC′ égale à cette épaisseur, on porte ensuite sur l'axe C′X′ du second système, mais alors *dans le sens négatif*, la même longueur C′C.

Cela étant fait, on marque sur l'axe CX du premier système la position du point P_1. En joignant par une droite ce point au pôle et en la prolongeant jusqu'à l'axe CY, on a sur cet axe la position du point

P_2. On reporte alors sur l'axe C'X' du second système et dans le sens voulu, la distance $C'P_2$, c'est-à-dire la distance CP_2 diminuée de la longueur $CC' = \delta$; on tient ainsi compte de l'épaisseur. Il n'y a

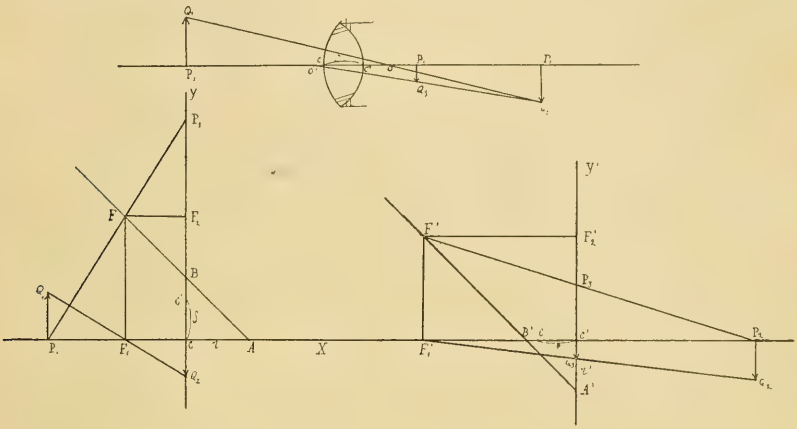


Fig. 17.

plus qu'à joindre au second pôle le point P_2 ainsi transporté pour avoir sur l'axe O'Y' la position du point P_3, dont la distance au sommet de la seconde surface est égale à $C'P_3$.

Grossissement. — La même méthode fournit le grossissement que donne la réfraction sur les deux surfaces, en s'appuyant encore sur l'hypothèse que l'image d'un objet se forme à la distance où se trouve le foyer conjugué de son pied. Il suffit en effet de construire successivement les deux images de l'objet P_1Q_1 en employant la méthode indiquée page 238. La première réfraction donne l'image CQ'_1, qu'il suffit de transporter en P_2Q_2 dans la seconde construction pour avoir en OQ'_2 l'image définitive.

Cette construction est, comme on le voit, très simple et d'ailleurs absolument rigoureuse.

Recherche directe du dernier conjugué d'un point. — La seconde méthode pour traiter la question consiste à rechercher directement le dernier conjugué P_3 du point P_1, sans passer par le premier conjugué P_2. La possibilité d'opérer ainsi résulte de ce que l'on peut, entre les deux équations que donne la solution du problème, éliminer l'inconnue qui fournit la position du point intermédiaire P_2.

Il est nécessaire, pour faire cette élimination, de ramener toutes les distances à une origine unique, par exemple au sommet de la pre-

mière surface. En procédant ainsi et en désignant par p_3 la distance du point P_3 à cette origine, la première équation du problème est l'équation (27). Quant à la seconde, elle se déduit de la précédente par des substitutions faciles à comprendre qui lui donnent la forme :

$$(n_2 - n_3)(p_2 - \delta)(p_3 - \delta) + n_3 r_2 (p_2 - \delta) - n_2 r_2 (p_3 - \delta) = 0.$$

Les deux équations à résoudre sont alors les suivantes :

$$(37)\quad (n_1 - n_2)p_1 p_2 + n_2 r_1 p_1 - n_1 r_1 p_2 = 0,$$

$$(38)\quad \begin{cases} (n_2 - n_3)p_2 p_3 + \{ n_3 r_2 - (n_2 - n_3)\delta \} p_2, \\ \quad - \{ n_2 r_2 + (n_2 - n_3)\delta \} p_3 + (n_2 - n_3)(\delta - r_2)\delta = 0. \end{cases}$$

L'élimination de p_2 entre ces deux équations est évidemment possible et fournit une équation unique permettant de calculer p_3 en fonction de p_1.

En ce qui concerne le calcul en lui-même et l'équation à laquelle il donne naissance, on peut dire que l'on a toujours été beaucoup plus préoccupé des coefficients de cette équation que de sa forme. Les coefficients de l'équation (38) sont déjà compliqués ; à plus forte raison en est-il ainsi des coefficients de l'équation résultante, lesquels s'expriment en fonction des données assez nombreuses de la question. Et c'est en raison de cette complication, complication qui provient surtout de l'élément δ, qu'on a cherché à simplifier la question, mais alors en cessant de rester dans le domaine de l'exactitude pour entrer dans celui de l'approximation. On voit que, si l'on suppose l'épaisseur δ assez petite pour qu'on puisse la négliger sans erreur sensible, l'équation (38) prend exactement la même forme que l'équation (37), et alors l'élimination de p_2 entre les deux équations fournit la suivante

$$(39)\quad \{ n_1 - n_2)r_2 + (n_2 - n_3)r_1 \} p_1 p_2 + n_3 r_3 r_2 p_6 - n_1 r_1 r_2 p_3 = 0,$$

équations qu'on peut encore écrire

$$(39')\qquad \frac{n_2}{p_1} - \frac{n_3}{p_3} = \frac{n_1 - n_2}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_3}.$$

Cette dernière forme qu'on peut approcher de la forme

$$(37')\qquad \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r_1}$$

sous laquelle on peut écrire l'équation (37) est évidemment très symétrique et très simple ; l'analogie elle-même entre l'équation résultante et les équations primitives est intéressante à considérer. Mais il ne faut pas que le souci de la simplicité prime celui de l'exactitude, ce qui est malheureusement trop souvent arrivé.

Or si, laissant de côté les valeurs des coefficients des équations (37) et (38), on ne considère que leur forme relativement aux inconnues, on voit qu'elles définissent deux homographies ayant une division commune; il en résulte immédiatement que les deux divisions non communes sont homographiques entre elles. Par conséquent, non seulement la relation définitive qui existe entre les variables p_1 et p_3 est de la forme générale des relations homographiques, mais encore, et par suite, le système des valeurs correspondantes de p_1 et p_3 possède toutes les propriétés des systèmes homographiques. C'est là évidemment la circonstance fondamentale, vraiment intéressante, celle qui domine toutes les autres et en particulier celle relative aux valeurs des coefficients de l'homographie résultante.

Il est donc, à proprement parler, indifférent que l'épaisseur δ ait une valeur plus ou moins grande et que l'homographie résultante ait une relation plus ou moins simple de position avec les deux homographies d'où elle découle. L'essentiel est que ses éléments caractéristiques soient déterminés en grandeur et en position, ces éléments étant, comme on le sait, les deux points conjugués de l'infini, c'est-à-dire ce qu'on appelle encore les foyers principaux et un système de deux points conjugués, qu'on prendra comme nouvelles origines. En désignant par φ_1 et φ_2 les distances à ces points des foyers principaux et par π_1 et π_2 deux longueurs conjuguées rapportées à ces mêmes origines, la relation homographique pourra être mise sous la forme canonique

$$\frac{\varphi_1}{\pi_1} + \frac{\varphi_2}{\pi_3} = 1. \tag{40}$$

Cette détermination des éléments caractéristiques de la nouvelle homographie peut être faite sans difficulté par le calcul. Mais la méthode graphique peut encore intervenir pour opérer plus simplement et plus rapidement encore.

C'est ainsi que les foyers principaux φ_1 et φ_3 du système s'obtiennent immédiatement; le premier, en reportant le point F_1' sur l'axe $O'X'$ et en le joignant au pôle F_1', le second en reportant le point F_1' sur OY et en le joignant au pôle F. Nous remarquerons qu'en faisant ces reports, on obtient sur les deux axes CY et $C'X''$ les deux longueurs F_2F_1' égales entre elles à la distance qui sépare sur l'axe du système réfringent le foyer F_2 relatif à la première surface du foyer F_1' relatif à la seconde.

Il reste à déterminer un système de points conjugués de l'homographie optique résultante. Pour cela, il suffit en principe de prendre un point quelconque de l'axe CX et de chercher, par deux construc-

tions successives, son conjugué final. Le plus simple est alors de prendre le sommet C de la première surface qui est à lui-même son conjugué dans la première réfraction et de chercher son conjugué

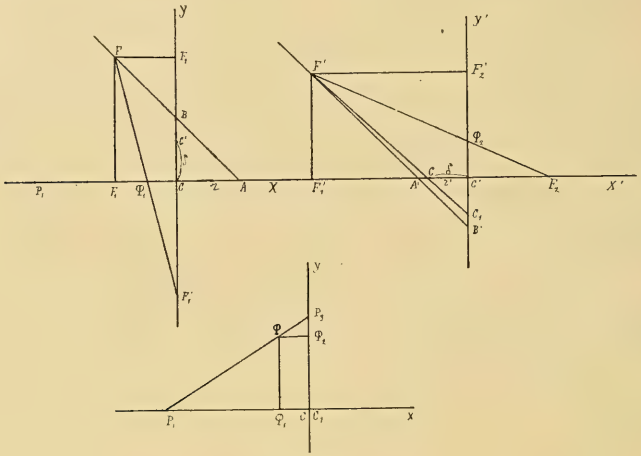


Fig. 18.

dans la seconde. Comme ce point a déjà été transporté en C (fig. 18) sur l'axe C'X', il n'y a plus qu'à le joindre au pôle F' pour obtenir immédiatement son conjugué.

Mais nous allons voir que, parmi les systèmes de points conjugués en nombre infini, il en est un qui doit être choisi de préférence à tous les autres. C'est le système des points principaux dont la découverte est due à Gauss.

Points principaux. — Les points principaux du système des deux surfaces réfringentes sont définis comme étant les points tels que les images des objets placés en ces points soient égales en grandeur aux objets eux-mêmes et orientés de la même façon, ou, ce qui est la même chose, tels que, pour ces points, le grossissement soit positif et égal à l'unité.

S'il existe un point principal Π_1, on voit de suite, en vertu du principe du retour inverse des rayons, qu'il en existe un second, qui est le conjugué Π_2 du premier. Il existe donc un ou plusieurs couples de points principaux.

Pour établir leur position, nous devons d'abord chercher l'expression du grossissement fourni par le système considéré.

Ce grossissement G est égal au produit des grossissements g et g'

produits par chaque surface ; en d'autres termes

$$G = gg'.$$

Or désignons par (f_{11}, f_{12}), (f_{21}, f_{22}) les distances focales principales de la première et de la seconde surfaces comptées à partir du sommet O de la première, et par (f'_{11}, f'_{12}), (f'_{21}, f'_{22}) les mêmes distances focales comptées à partir du sommet O′ de la seconde. Dans cette notation, le premier indice se rapporte à la surface (1re ou 2e), tandis que le second indice représente l'ordre de la division où se trouve pour chaque surface le foyer considéré, cet ordre étant compté dans le sens de la marche des rayons lumineux supposés tombant d'abord sur la première surface. En représentant, comme nous l'avons déjà fait, par δ l'épaisseur du milieu intermédiaire, ces notations entraînent les relations

(41) $$f_{12} = f'_{12} + \delta,$$

(42) $$f_{21} = f'_{21} + \delta.$$

Désignons enfin par p_1 la distance du point lumineux P_1 au sommet C de la première surface, par p_2 et par p'_2 les distances de son premier conjugué aux sommets C et C′ des deux surfaces, et par p_3 et p'_3 les distances aux même sommets de son dernier conjugué ; nous aurons encore la relation

(43) $$p_2 = p'_2 + \delta.$$

Cela étant, en appliquant la formule (33) du grossissement sur une surface, on a à l'aide des notations précédentes

$$g = \frac{f_1}{f_{11} - p_1}.$$

$$g' = \frac{f'_{21}}{f'_{21} - p'_2}.$$

Or des relations (42) et (43) on déduit

$$f'_{21} - p'_2 = f_{21} - p_2.$$

D'ailleurs de la formule

$$\frac{f_{11}}{p_1} + \frac{f_{12}}{p_2} = 1$$

relative à la réfraction sur la première surface on déduit

$$p_2 = \frac{p_1 f_{12}}{p_1 - f_{11}},$$

puis, tous calculs faits,

$$f'_{21} - p'_2 = f_{21} - p_2 = \frac{f_{11} f_{21} - p(f_{21} - f_{12})}{f_{11} - p_1}.$$

En transportant dans la valeur de g', et multipliant l'une par l'autre les valeurs de g et de g', il vient

$$(45) \qquad G = \frac{f_{11}f'_{21}}{f_{11}f_{21} - p_1(f_{21} - f_{12})}.$$

Ayant obtenu cette valeur du grossissement, nous rappellerons que les points principaux sont définis par la condition

$$G = +1.$$

En portant cette hypothèse dans l'expression (44) du grossissement, et, en désignant par P_1 la distance du sommet O de la première surface du premier point principal, on a

$$(45) \qquad P_1 = \frac{f_{11}(f_{21} - f_{21})}{f_{21} - f_{12}},$$

c'est-à dire en tenant compte de la première formule (42)

$$(45') \qquad P_1 = \frac{f_{11}\delta}{f_{21} - f_{12}}.$$

Pour obtenir la position du second point principal, il suffit de chercher le conjugué définitif du premier par rapport au système des deux surfaces. Mais, en s'appuyant sur le principe du retour inverse des rayons, on peut obtenir immmédiatement sa position par rapport au sommet de la seconde surface par simple interversion des indices et des accents dans la formule (45). Il vient ainsi

$$P'_3 = \frac{f'_{22}(f'_{12} - f_{12})}{f'_{12} - f'_{21}} = \frac{f'_{22}(f_{12} - f'_{12})}{f'_{21} - f'_{12}},$$

c'est-à-dire

$$(46) \qquad P'_3 = \frac{f'_{22}\delta}{f'_{21} - f'_{12}}.$$

D'ailleurs des formules (41) et (42) on déduit

$$f'_{21} - f'_{12} = f_{21} - f_{12}.$$

La valeur de P'_3 peut alors s'écrire

$$(46') \qquad P = \frac{f'_{22}\delta}{f_{21} - f_{12}}.$$

En divisant membre à membre les formules (45') et (46'), on obtient la formule

$$(47) \qquad \frac{P_1}{P'_3} = \frac{f_{11}}{f'_{22}},$$

qui se traduit par l'énoncé connu :

Le rapport des distances des points principaux aux sommets des surfaces correspondantes est égal au rapport des distances focales extrêmes.

Mais, indépendamment de ce résultat, les formules (45′) et (46′) permettent de construire les points principaux Π_1 et Π_2. Menons en effet, dans la figure XCY (fig. 19), par le point C′ une parallèle à la droite

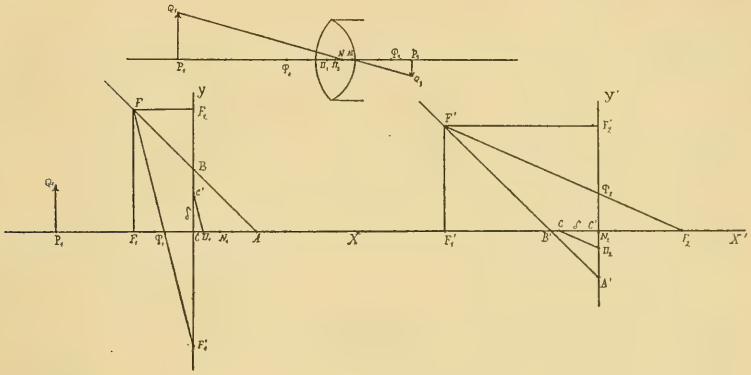


Fig. 19.

F_1F qui a servi à la détermination du foyer principal Φ_1 du système ; je dis que le point de rencontre de cette droite avec CX est le point principal Π_1.

En effet, les triangles semblables $CC'\Pi_1$, $F_1'F_2F$ donnent

$$\frac{C\Pi_1}{F_2F} = \frac{CC'}{F_2FF_1'},$$

d'où

$$C\Pi_1 = \frac{F_2F \times CC'}{F_2F_1'},$$

c'est-à-dire

$$C\Pi_2 = \frac{\text{val. abs. } f_{11} \times \delta}{\text{val. abs. } (f_{21} - f_{12})}.$$

Il reste à prouver que la longueur $O\Pi_1$ a bien le signe, c'est-à-dire le sens, exigé par la formule (45′).

Or, la distance δ étant positive, cette formule montre que la longueur à construire Π_1 est de même signe que f_{11} ou de signe contraire, suivant que la différence $f_{21} - f_{12}$ est positive ou négative, c'est-à-dire suivant que sur CY le point F_1' est au-dessus ou au-dessous de F_2. Dans le premier cas, la droite FF_1' est ascendante à partir du point F, et alors la parallèle menée à cette droite à partir du point O′ jusqu'à l'axe OX est, par rapport à OY, du même côté que

la droite FF'_1 elle-même. La longueur $C\Pi_1$ est donc de même sens et, par suite, de même signe que la longueur F_2F. Dans le second cas, c'est-à-dire quand le point fixe F'_1 est au-dessous du point F_2, la droite FF' est descendante à partir du point F, et alors la parallèle $C'\Pi_1$ est, par rapport à OY, du côté opposé où elle se trouve elle-même. La longueur $C\Pi_1$ est donc de sens différent de la longueur F_2F et par suite de signe contraire.

Le second point principal Π_2 se construit d'une façon analogue. Sur la figure X'C'Y' (fig. 19), on mène par le point C une parallèle à la droite F_2F' qui a servi à la construction du second foyer principal Φ_2 ; le point où cette parallèle rencontre l'axe C'Y' est le second point principal Π_2. La démonstration est, de tous points, analogue à la précédente.

On sait de quelle utilité sont les points principaux dans la théorie des lentilles pour la construction des images. Nous ne reviendrons pas sur ce sujet qui est exposé dans tous les traités d'Optique ; cela serait d'ailleurs superflu, puisque notre méthode graphique remplace avantageusement tous les autres procédés de construction.

L'intérêt des points principaux provient pour nous, indépendamment de ce fait qu'ils constituent un système de points conjugués faciles à construire, d'une autre propriété très simple relative au grossissement, propriété déjà connue d'ailleurs que nous allons rapidement exposer.

Cherchons d'abord les distances du foyer Φ_1 du système au sommet C de la première surface et au point principal Π_1. Pour trouver la première distance $C\Phi_1$ que nous désignerons par F_1, nous remarquerons que le point Φ_1 est relativement à la première surface le conjugué du foyer principal F'_1 de la seconde, ce point étant regardé comme appartenant à la seconde division dans l'homographie qui se rattache à la réfraction sur la première surface. Il suffit donc de remplacer p_2 par f_{21} et p_1 par F_1 dans la formule

$$\frac{f_{11}}{p_1} + \frac{f_{12}}{p_2} = 1$$

relative à la première surface. On trouve ainsi

$$F_1 = \frac{f_{11}f_{21}}{f_{21} - f_{12}}. \qquad (48)$$

Pour trouver la seconde distance $\Phi_1\Pi_1$, que nous représentons par φ_1, nous remarquerons qu'on a :

$$\Pi_1\Phi_1 = C\Phi_1 - C\Pi_1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 = F_1 - P_1.$$

En remplaçant F_1 et P_1 par leurs valeurs (48) et (45), il vient

$$\varphi_1 = \frac{f_{11}f_{21}}{f_{21}-f_{12}} - \frac{f_{11}(f_{21}-f'_{21})}{f_{21}-f_{12}}$$

d'où

$$\varphi_1 = \frac{f_{11}f'_{21}}{f_{21}-f_{12}}. \tag{49}$$

Cela étant, la formule (44) qui donne le grossissement G_1 pour un objet P_1Q_1 situé à la distance $OP_1 = p_1$, peut s'écrire

$$G = \frac{\dfrac{f_{11}f'_{21}}{f_{21}-f_{12}}}{\dfrac{f_{11}f_{21}}{f_{21}-f_{12}} - p},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des résultats précédents,

$$G = \frac{\varphi_1}{F_1 - p_1}.$$

Or

$$F_1 - p_1 = C\Phi_1 - CP_1 = P_1\Phi_1.$$

D'autre part, en prenant pour nouvelles origines les points principaux Π_1 et Π_2, nous poserons

$$\Pi_1P_1 = \pi_1,$$

et nous aurons alors

$$P_1\Phi_1 = \Pi_1\Phi_1 - \Pi_1P_1$$
$$= \varphi_1 - \pi_1.$$

Il en résulte

$$F_1 - p_1 = \varphi_1 - \Pi_1,$$

et, par suite, la valeur de G peut s'écrire

$$G = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \pi_1}. \tag{50}$$

On voit ainsi, par la comparaison des formules (33) et (50), que *lorsqu'on rapporte les distances aux points principaux* Π_1 *et* Π_2, *l'expression du grossissement définitif se présente sous la même forme que chacun des grossissements partiels.*

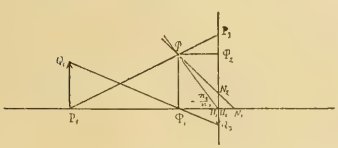


Fig. 20.

Ce résultat est pour nous, et au point de vue de nos constructions, très intéressant. En effet, en choisissant pour nouvelles origines les deux points principaux Π_1 et Π_2 (fig. 20), non seulement nous pouvons

trouver le conjugué définitif du point P_1 par une construction unique, identique à celle que fournit son conjugué dans une seule réfraction, construction qui représente à proprement parler au point de vue géométrique le résultat de l'élimination de la construction intermédiaire, exactement comme la formule unique

$$\frac{\varphi_1}{\pi_1} + \frac{\varphi_2}{\pi_2} = 1$$

représente, au point de vue algébrique, le résultat de l'élimination de la distance intermédiaire p_2 entre les deux équations

$$\frac{f_{11}}{p_1} + \frac{f_{12}}{p_2} = 1,$$
$$\frac{f'_{21}}{p'_2} + \frac{f'_{22}}{p'_3} = 1;$$

mais encore le grossissement définitif peut s'obtenir par une construction unique qui est exactement semblable à celle qui donne les grossissements partiels.

— Nous terminerons ces considérations sur les points principaux en calculant la distance du second foyer principal Φ_2 du système au point principal H_2. Cette distance φ_2 se déduit de la valeur φ_1 trouvée plus haut en intervertissant dans la formule (49) les indices et les accents ; on trouve ainsi

$$\varphi_2 = \frac{f'_{22} f_{12}}{f'_{12} - f'_{21}} = -\frac{f_{12} f'_{22}}{f'_{21} - f'_{12}},$$

c'est-à-dire

(51) $$\varphi_2 = -\frac{f_{12} f'_{22}}{f_{21} - f_{12}}.$$

En divisant membre à membre les formules (49) et (51) on obtient

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{f_{11}}{f_{12}} \cdot \frac{f_{21}}{f'_{22}}.$$

Or on a trouvé plus haut (form. 30)

$$\frac{f_{11}}{f_{12}} = -\frac{n_1}{n_2};$$

de la même manière on a

$$\frac{f'_{21}}{f'_{22}} = -\frac{n_2}{n_3}.$$

Il en résulte

(52) $$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{n_1}{n_3}.$$

On voit ainsi que les distances focales principales φ_1 et φ_2 comptées à partir des points principaux sont fixées par la même relation que les distances focales principales comptées à partir des sommets des surfaces réfringentes dans chacune des réfractions partielles.

Ce résultat, déjà connu sans doute, est intéressant pour nous au point de vue de nos constructions ; il nous montre en effet que le pôle

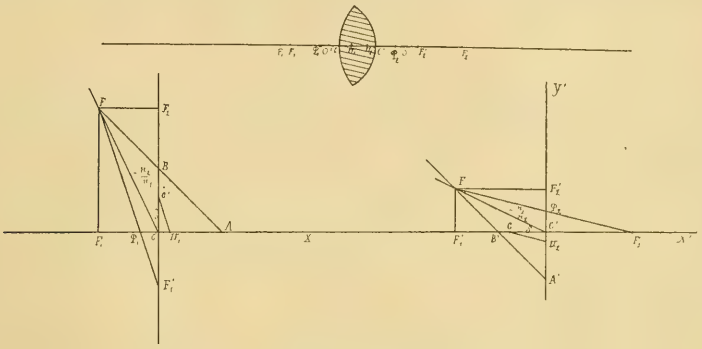


Fig. 21.

Φ qui en est l'élément fondamental se trouve encore sur une droite dont le coefficient angulaire est $-\frac{n_1}{n_3}$, et que, par suite ce point Φ est, de même que les pôles F et F', toujours situé dans l'un des angles (2) ou (4). Le système des deux réfractions est donc, dans son ensemble, un système soit convergent, soit divergent, comme le sont chacune des réfractions élémentaires.

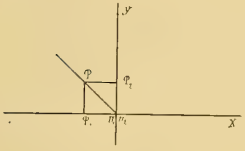


Fig. 22.

Dans le cas particulier où les milieux extrêmes sont identiques, on a $n_3 = n_1$, et par suite le pôle Φ se trouve sur la seconde bissectrice (fig. 22). Les deux foyers principaux Φ_1 et Φ_2 sont alors à égale distance des points principaux.

Points nodaux. — Ces points, dont la découverte est due au physiologiste Listing, jouent eux aussi un rôle important dans la théorie ordinaire des lentilles. Tandis que les points principaux sont, dans un système de deux surfaces réfringentes, les analogues du sommet d'une surface réfringente unique, les points nodaux sont les analogues du centre de cette dernière. De même que tout rayon passant par le centre d'une surface sphérique passe sans déviation du premier milieu dans le second, de même un rayon qui, dans le premier des deux

milieux séparés par un système de deux surfaces réfringentes, passe par le premier point nodal, émerge dans le second milieu extrême parallèlement à sa direction primitive, c'est-à-dire sans déviation. La seule différence avec le cas d'une surface unique consiste dans un déplacement du rayon parallèlement à lui-même, qui le fait émerger par le second point nodal, déplacement qui n'existe pas dans le cas d'une surface unique. L'effet produit sur le rayon incident est alors le même que celui produit par une lame à faces parallèles.

On utilise cette propriété des points nodaux, concurremment avec celle des points principaux, pour la construction des images dans une lentille; cette construction est alors simple et de tous points analogue à celle employée dans le cas d'une seule surface. Dans la méthode graphique que nous exposons, cette utilité des points nodaux disparaît; il y a néanmoins avantage à introduire encore et à conserver ces points, mais alors pour une raison tout à fait différente qui présente un intérêt tout à fait fondamental et se rattachant au principe même de la méthode.

Les points nodaux, N_1 et N_2, forment un système de points conjugués définis par les relations suivantes

$$\overline{\Phi_1 N_1} = \overline{\Pi_2 \Phi_2} = \varphi_2$$
$$\overline{\Phi_2 N_2} = \overline{\Pi_1 \Phi_1} = \varphi_1$$

envisagées au double point de vue de la grandeur et du signe. En d'autres termes, pour avoir le premier point nodal N_1, on porte à

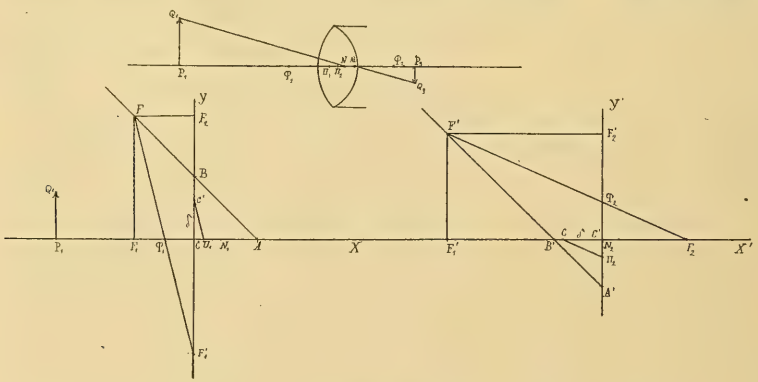


Fig. 19.

partir du foyer principal Φ_1 une longueur de même grandeur et de même sens que la distance du foyer principal Φ_2 au second point principal Π_2. On opère d'une façon analogue par le second point nodal N_2. En acceptant ces résultats tels qu'ils sont fournis par la

théorie ordinaire des lentilles épaisses, nous remarquerons qu'on déduit des formules précédentes

$$(53)\qquad \begin{cases} \overline{\Pi_1 N_1} = \overline{\Phi_1 N_1} - \overline{\Phi_1 \Pi_1} = \varphi_2 + \varphi_1 \\ \overline{\Pi_2 N_2} = \overline{\Phi_2 N_2} - \overline{\Phi_2 \Pi_2} = \varphi_2 + \varphi_2. \end{cases}$$

On voit ainsi que les distances des points nodaux aux points principaux correspondants sont égales en grandeur et de même signe; et alors en appelant ρ cette distance commune, on a

$$(54)\qquad \varphi_1 + \varphi_2 = \rho.$$

Or, dans la construction unique qui fournit le conjugué d'un point dans le système des deux surfaces, le pôle φ a pour coordonnées les longueurs φ_1 et φ_2 qui satisfont, comme on l'a vu, à la relation

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{n_1}{n_3},$$

laquelle fournit un premier lieu du point φ. La relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \rho,$$

que nous venons de trouver, montre que ce point se trouve sur la droite

$$x + y = \rho,$$

exactement comme dans le cas d'une surface unique de rayon r, le pôle F se trouvait sur la droite.

$$x + y = r.$$

Le pôle Φ se trouve ainsi à la rencontre de deux droites faciles à construire, ce qui permet de l'obtenir lui-même par des constructions géométriques simples, les constructions, dans le cas d'un système de deux surfaces étant d'ailleurs absolument identiques à celles qu'on effectue dans le cas d'une surface unique. Et l'on voit que, non seulement les points principaux et les points nodaux sont les analogues du sommet et du centre de la surface unique, mais encore que la distance d'un point nodal au point principal correspondant est l'analogue du rayon de la surface unique et sert aux mêmes usages. Il est d'ailleurs à remarquer que, des relations (52) et (54), on déduit pour les distances focales principales comptées respectivement à partir des points principaux correspondants

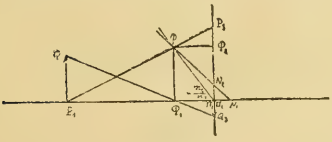


Fig. 20.

$$(55)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{n_1 \rho}{n_1 - n_3} \\ \varphi_2 = -\dfrac{n_3 \rho}{n_1 - n_3}, \end{cases}$$

formules identiques à celles d'une surface unique.

Il est alors possible d'avoir, dans le cas d'un système de deux surfaces, une formule de réfraction identique à celle d'une surface unique, dans laquelle on fait figurer le rayon de la surface et les indices de réfraction. Cette formule, qui est la formule (30),

$$(30) \qquad (n_1 - n_2)p_1p_2 + n_2rp_1 - n_1rp_2 = 0,$$

peut encore s'écrire

$$(30') \qquad \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Dans le cas de deux surfaces, on aura de même, en remplaçant dans la forme canonique

$$(40) \qquad \frac{\varphi_1}{\pi_1} + \frac{\varphi_2}{\pi_2} = 1,$$

φ_1 et φ_2 par leurs valeurs (55)

$$(56) \qquad \frac{n_1}{\pi_1} - \frac{n_3}{\pi_2} = \frac{n_1 - n_3}{\rho}.$$

On peut donc dire que, abstraction faite de la distance $\Pi_1\Pi_2$ qui sépare les deux points principaux, la succession des deux réfractions produit le même effet que la réfraction unique produite par une surface sphérique séparant les deux milieux extrêmes dont le rayon ρ est exprimé par l'une des formules (54), en fonction des distances focales φ_1 ou φ_2, les valeurs de φ_1 et de φ_2 s'exprimant elles-mêmes en fonction des données n_1, n_2, n_3, r et r' par les formules (49) et (50).

Et alors, en tenant compte de l'écart des points principaux, on est conduit au théorème suivant.

Théorème I. — *Deux réfractions successives par deux surfaces sphériques centrées sur le même axe, séparant trois milieux différents, produisent le même effet qu'une réfraction sur une seule surface sphérique séparant les deux milieux extrêmes, cette réfraction étant suivie d'un glissement d'ensemble sur l'axe du système.*

On sait d'ailleurs que la réfraction sur une lame à deux faces parallèles ne produit aucun déplacement dans les positions mutuelles des points situés sur une même perpendiculaire aux faces de la lame; lorsque la lame sépare deux milieux identiques, elle produit simplement un déplacement d'ensemble de ces points sur la droite qui les porte.

On peut donc remplacer les réfractions sur deux surfaces sphériques par la réfraction sur une seule surface sphérique placée entre les deux milieux extrêmes, suivie d'un passage à travers une lame à faces parallèles, cette lame étant formée de la substance du premier milieu.

Lorsque les deux milieux extrêmes sont identiques, la formule (52) dans laquelle on fait $n_3 = n_1$, devient

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -1$$

de laquelle on tire

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

Les formules (53) qui donnent les distances des points nodaux aux points principaux deviennent

$$\begin{cases} \Pi_1 N_1 = 0 \\ \Pi_1 N_2 = 0. \end{cases}$$

Donc, dans ce cas, les points nodaux coïncident avec les points principaux, ainsi qu'on l'a depuis longtemps démontré.

Nous ajouterons, en ce qui concerne spécialement nos constructions, que les deux droites sur lesquelles se trouve le pôle Φ, se confondent l'une et l'autre avec la bissectrice du second angle. La condition $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ entraîne en effet $\rho = 0$, et par suite la droite

$$x + y = \rho$$

devient

$$x + y = 0$$

c'est-à-dire la seconde bissectrice. On ne peut plus alors regarder le pôle Φ comme l'intersection de deux droites, l'une de coefficient angulaire connu, l'autre perpendiculaire à la première bissectrice. Les éléments caractéristiques de la réfraction font donc défaut sur la figure. Ils font d'ailleurs défaut dans la réalité. Une réfraction est, en effet, essentiellement un passage d'un milieux dans un milieu différent. Or, comme, dans le cas présent, les milieux extrêmes sont identiques, il est impossible d'obtenir par une réfraction proprement dite unique le passage du premier lieu au dernier.

Pour interpréter l'effet produit par cette transformation unique, nous remarquerons que, abstraction faite de la distance des points principaux, l'hypothèse

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

nous ramène à la relation homographique dans le cas particulier où les points doubles coïncident. Or nous avons vu que cette relation produit, mais en sens inverse, la même transformation qu'une relation involutive de même distance focale. Comme d'ailleurs la relation involutive est, analytiquement et graphiquement, l'interprétation d'une réflexion, nous sommes conduits au théorème suivant :

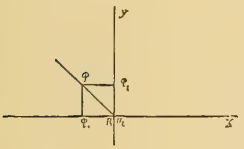


Fig. 22.

Théorème II. — *Deux réfractions successives à travers deux surfaces sphériques limitant un milieu placé dans un milieu de nature différente produisent sur la position mutuelle des points de l'axe du système le même effet qu'une réflexion unique, cette réflexion étant suivie d'une rotation de* 180° *autour du sommet du miroir et d'un glissement sur l'axe.*

Ce qui est intéressant dans la circonstance, c'est que, après ces deux réfractions, la position mutuelle des points est la même qu'après une réflexion. Il est permis d'exprimer ce résultat en disant que ces deux réfractions équivalent à une réflexion renversée.

Or la réflexion est une transformation simple dépendant d'un paramètre unique qui est le rayon de la surface réfléchissante. Donc, le phénomène complexe de deux réfractions successives lequel dépend des cinq paramètres n_1, n_2, r, r' et δ équivaut à une réflexion suivie d'un glissement, c'est-à-dire à un phénomène à deux paramètres.

Points de Bravais. — Ces points signalés par Bravais et sur lesquels M. A. Martin a appellé l'attention, sont les points doubles de l'homographie résultante. Ainsi que nous l'avons dit plus haut, ces points, qui n'existent pas toujours d'ailleurs, n'ont pour ainsi dire aucune importance tant au point de vue de la théorie qu'au point de vue des constructions. Au point de vue optique, ils sont caractérisés par cette circonstance que l'image d'un objet coïncide avec l'objet lui-même quand celui-ci a son pied en coïncidence avec l'un d'eux. Néanmoins pour ne laisser aucune lacune dans cette exposition, nous devons indiquer comment on peut reconnaître leur existence et les construire.

Nous nous reporterons pour cela à la formule (17), exprimant que dans toute homographie le produit des distances de deux points conjugués aux deux points conjugués de l'infini est constant. Lorsque deux points conjugués coïncident en un point double, ce produit constant est égal au produit des distances de ce point aux deux points conjugués de l'infini et la formule (17) devient la forme (18) de Newton. Or nous avons ici deux points conjugués qui sont les points principaux Π_1 et Π_2 (fig. 23), dont les distances aux foyers principaux Φ_1 et φ_3 sont connues ; on a en effet

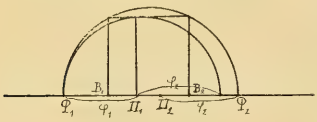


Fig. 23.

$$\Phi\,\Pi_1 = -\,\Pi_1\Phi_1 = -\,\varphi_1$$

$$\Phi_2\varphi_2 = -\,\Pi_2\Phi_2 = -\,\varphi_2.$$

Le produit de ces distances est donc égal à $\varphi_1\varphi_2$. D'autre part, en appelant, comme nous l'avons fait dans la théorie générale, j_1 et i_2 les

distances à un point double des foyers principaux, nous aurons l'égalité

$$\varphi_1\varphi_2 = j_1 i_2.$$

Mais à cause de l'égalité (52)

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{n_1}{n_3}, \tag{53}$$

le produit $\varphi_1\varphi_2$ est négatif : il en résulte que le point double, s'il existe, est entre les foyers principaux Φ_1 et Φ_2, et que par suite, la somme des valeurs absolues des distances j_1 et i_2 est égale à la distance $\Phi_1\Phi_2$ des deux foyers principaux. On est alors ramené, pour la construction des points doubles, à la résolution du problème connu : *Construire deux longueurs, connaissant leur somme et leur produit, ou, plus correctement, leur moyenne proportionnelle.* On sait d'ailleurs que ce problème n'est pas toujours possible, en sorte que les points doubles n'existent pas nécessairement, ce que nous savions déjà.

Quoi qu'il en soit, leur existence est révélée plus sûrement et plus rapidement par la géométrie que par le calcul, ce qui montre que, dans la question de la réfraction, la supériorité de la méthode graphique sur la méthode algébrique s'étend à tous les détails de la question.

Aberration chromatique. — Ce que nous avons dit à ce sujet, dans la

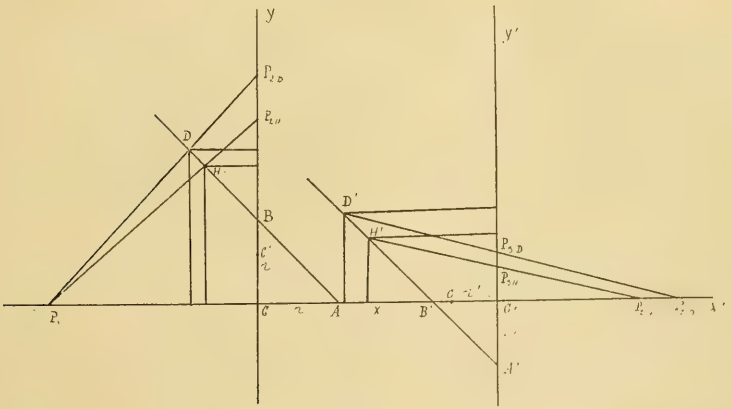


Fig. 24.

réfraction sur une seule surface, s'étend à la réfraction sur un système de deux surfaces. Il suffit de déterminer (fig. 24) les foyers principaux intermédiaires et définitifs correspondant aux diverses réfrangibilités et en particulier aux réfrangibilités extrêmes ou du moins considérées

comme telles, pour obtenir les positions des foyers conjugués correspondant à chacune d'elles, et par suite pour obtenir la valeur de l'aberration longitudinale produite par le système.

En ce qui concerne la construction unique pouvant remplacer les deux constructions successives, on se rappellera qu'elle est tout entière liée à la détermination des points principaux. Or à chaque réfrangibilité correspond, en même temps qu'un couple de foyers principaux, un couple de points principaux ; il en résulte que pour un même point P_1, tous les éléments des formules (40) et (50)

$$(40) \qquad \frac{\varphi_1}{\pi_1} + \frac{\varphi_2}{\pi_2} = 1$$

$$(50) \qquad G = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \pi_1}$$

qui déterminent la position de l'image définitive et sa grandeur sont variables, en sorte que le même objet admet plusieurs images qui se distinguent à la fois par leur coloration, par leur position et par leur grandeur. C'est précisément là ce qui constitue le phénomène du chromatisme tel qu'il est ordinairement perçu.

3° Réfraction sur un nombre quelconque de surfaces sphériques.

Il est possible et facile d'étendre à un nombre quelconque de réfractions successives ce qui vient d'être dit sur un système de deux réfractions.

Ainsi, pour obtenir le conjugué définitif d'un point, on peut procéder soit par constructions successives, soit par une construction unique qui équivaut à une élimination. Il en est de même en ce qui concerne le grossissement.

Sur la méthode par constructions successives nous n'avons rien à ajouter sinon qu'elle fait connaître les effets de chacune des réfractions successives. C'est donc essentiellement une méthode d'analyse et de recherche.

Quant à la méthode par une construction unique, sa possibilité et ses caractères dérivent de ce que, par application répétée du théorème général (page 258), l'ensemble des réfractions définit une homographie au même titre que chacune d'elles. En d'autres termes, les diverses positions du point lumineux sur l'axe du système supposé centré et les positions sur le même axe de leurs conjugués définitifs forment un système de deux divisions homographiques, dont il suffit de détermi-

ner les éléments caractéristiques pour pouvoir ensuite obtenir à volonté tous les autres, ces éléments caractéristiques étant les deux points conjugués de l'infini ou *foyers principaux du système*, et un système de deux points conjugués. Ces éléments étant déterminés, et, en prenant pour origines les foyers principaux, les divers couples de points conjugués sont définis par la formule générale de forme canonique

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1.$$

Pour achever d'établir l'analogie entre un nombre quelconque de réfractions par des surfaces sphériques centrées sur le même axe, il reste à établir l'existence d'un couple particulier de points conjugués définis comme les points principaux dont nous avons parlé et possédant les mêmes propriétés.

Nous emploierons à cet effet la méthode dite de *récurrence* et nous allons démontrer que, si l'on a deux systèmes optiques centrés ou définis l'un et l'autre par le couple de leurs foyers principaux et celui de deux points conjugués possédant les propriétés des points principaux, c'est-à-dire étant tels que le système étant rapporté à ces deux points comme origines, le grossissement ait, pour une distance p_1 de l'objet au premier point principal, une valeur définie par la formule générale

$$g = \frac{f_1}{f_1 - p_1},$$

le système unique résultant de la juxtaposition sur le même axe des deux systèmes possède lui aussi, indépendamment du couple des foyers principaux, un couple de deux points conjugués principaux, c'est-à-dire possédant relativement au grossissement définitif la même propriété exprimée par la formule générale précédente.

Soient Π_1 et Π_2 les points principaux du premier système, Φ_1 et Φ_2 ses foyers principaux ; soient Π'_1, Π'_2, Φ'_1, Φ'_2 les mêmes points du second. La position mutuelle des deux systèmes est complètement définie par la distance δ qui existe entre le second point principal Π_2 du premier système et le premier point principal Π_1 du second. Les deux systèmes sont alors individuellement représentés par les formules canoniques

$$\frac{\varphi_{11}}{\pi_{11}} + \frac{\varphi_{12}}{\pi_{12}} = 1 \qquad (54)$$

$$\frac{\varphi'_{21}}{\pi'_{21}} + \frac{\varphi'_{22}}{\pi'_{22}} = 1, \qquad (55)$$

les premiers indices se rapportant au numéro d'ordre de système et les seconds indiquant le rang du point suivant qu'il appartienne à la première ou à la seconde division. La réunion des deux systèmes s'effectuera en prenant simultanément les équations (54) et (55) et le passage de l'une à l'autre en tenant compte de la distance δ se fera par les formules

$$(56) \qquad \begin{cases} \varphi_{12} = \varphi'_{12} + \delta \\ \varphi_{21} = \varphi'_{21} + \delta \\ \pi_{12} = \pi'_{12} + \delta. \end{cases}$$

Les équations simultanées (54) et (55) expriment alors que les deux divisions extrêmes sont homographiques à la division intermédiaire qui est commune aux deux systèmes ; elles sont donc homographiques entre elles, et par suite elles admettent un couple de foyers principaux et un nombre illimité de couples de points conjugués.

En tenant compte des formules de grossissement

$$g = \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{11} - \pi_{11}}$$

$$g' = \frac{\varphi'_{21}}{\varphi'_{21} - \pi'_{21}}$$

vraies par hypothèse pour chaque système et en répétant exactement le calcul fait plus haut pour établir l'existence et la propriété du couple des points principaux dans le système de deux surfaces réfringentes, on démontrera de la même manière l'existence dans le système unique considéré d'un couple de points conjugués définis par la condition

$$G = gg' = +1,$$

et l'on fera voir encore qu'en rapportant le système définitif à ces deux points principaux pour origines, ce qui donne pour la représenter la forme canonique

$$(57) \qquad \frac{F_1}{P_1} + \frac{F_2}{P_2} = 1,$$

le grossissement a lui aussi la même forme

$$(58) \qquad G = \frac{F_1}{F_1 - P_1},$$

qu'on peut appeler la forme canonique du grossissement. Ces points principaux se déterminent d'ailleurs graphiquement par les constructions indiquées dans le cas de deux surfaces.

Il suit immédiatement de là que c'est toujours la même méthode graphique qui permet d'obtenir le conjugué définitif d'un point, c'est

aussi toujours la même construction simple qui fournit la grandeur de la dernière image.

Aux points principaux du système résultant se rattachent, comme plus haut, le couple des points nodaux et les points de Bravais, ces points étant définis de la même manière et possédant les mêmes propriétés.

Il reste à ajouter que, si l'on a les deux relations

$$\frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = -\frac{n_1}{n_2}$$
$$\frac{\varphi'_{21}}{\varphi'_{22}} = -\frac{n_2}{n_3},$$

n_1 et n_3 désignant les indices de réfraction des milieux extrêmes, et n_2 l'indice relatif au milieu intermédiaire commun, on a également

$$\frac{F_1}{F_2} = -\frac{n_1}{n_3}.$$

Il en résulte que le pôle F qui sert de base à la construction finale se trouve sur la droite de coefficient angulaire $-\frac{n_1}{n_3}$.

En particulier, si l'on a $n_3 = n_1$, c'est-à-dire si les milieux extrêmes sont identiques, on a

$$\frac{F_1}{F_2} = -1,$$

en sorte que les deux foyers principaux sont à égale distance, mais en sens contraires, des points principaux correspondants. En même temps le pôle F est sur la seconde bissextrice des axes.

Dans tous les cas, le pôle F est toujours dans l'un des angles 2 ou 4 des axes de coordonnées, et par suite le système résultant est convergent ou divergent dans les mêmes conditions qu'une surface unique. — Il suit immédiatement de cette démonstration qu'un système de surfaces réfringentes sphériques en nombre quelconque, centrées sur le même axe, admet, en même temps qu'un couple de foyers principaux, un couple de points principaux. En effet, dans une surface sphérique, le sommet est à la fois le point double réel de l'homographie et le système des deux points principaux. Il est en effet le seul point pour lequel l'image se confond en grandeur et en position avec l'objet, c'est-à-dire pour lequel le grossissement est positif et égal à l'unité; il est tel d'ailleurs que, en le prenant pour origine commune des deux divisions, on a

$$g = \frac{f_1}{f_1 - p_1}.$$

Donc, en réunissant deux surfaces sphériques, puis en réunissant à leur ensemble une troisième, au nouvel ensemble une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment, on obtient toujours, quel que soit le nombre des surfaces, un système homographique unique, admettant outre le couple des foyers principaux, un couple de points principaux, c'est-à-dire un couple de points conjugués possédant les propriétés qui les définissent comme tels dans le cas de deux surfaces sphériques. L'existence de ces points permet d'exprimer l'homographie résultante sous la forme canonique

$$\frac{F_1}{P_1} + \frac{F_2}{P_2} = 1.$$

De plus en appelant n_1 et n_k les indices des milieux extrêmes, on a entre les distances focales principales rapportées aux points principaux correspondants la relation

$$\frac{F_1}{F_2} = -\frac{n_1}{n_k},$$

en sorte que, sur le graphique représentatif unique, le pôle F se trouve dans le second ou dans le quatrième angle sur la droite de coefficient $-\frac{n_k}{n_1}$.

Le système homographique résultant admet aussi un couple de points nodaux qui se construisent comme dans le cas de deux surfaces sphériques et fournissent les mêmes conséquences graphiques. C'est ainsi qu'on a les égalités

$$F_1N_1 - F_1P_2 = F_2 + F_1 = R$$
$$F_2N_2 - F_2P_2 = F_1 + F_2 = R.$$

Le pôle R se trouve alors sur la droite

$$x + y = R,$$

perpendiculaire à la première bissectrice et les distances focales principales ont pour valeurs

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{n_1 R}{n_1 - n_k}, \\ F_2 = -\dfrac{n_k R}{n_1 - n_k}. \end{cases}$$

En même temps la relation homographique peut se mettre sous la forme

$$\frac{n_1}{P_1} - \frac{n_k}{P_2} = \frac{n_1 - n_k}{R}.$$

Il y a exception lorsque l'on a $n_k = n_1$, c'est-à-dire lorsque les

milieux extrêmes sont identiques. On a alors

$$F_1 + F_2 = R = 0 ;$$

les distances focales principales sont égales en valeur absolue et de signes contraires, et le pôle F se trouve sur la seconde bissectrice. En même temps, la relation homographique se présente sous la forme simple

$$\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{F_1},$$

ou en posant $2F_1 = R$

$$\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{2}{R}.$$

Donc 1° *étant donné un système optique centré quelconque séparant deux milieux différents, l'effet produit par ce système sur les positions relatives des deux points de l'axe est le même que celui produit par une réfraction unique sur une surface sphérique de rayon convenable séparant les deux milieux extrêmes ;*

2° *Quand le système optique donné sépare deux milieux identiques, il produit sur les positions relatives des points de l'axe le même effet qu'une réflexion unique sur une surface sphérique de rayon convenable.*

Ces résultats, qui ne s'appliquent qu'à une lumière homogène, nous montrent *qu'il y a une infinité de systèmes optiques capables de produire le même effet.*

En effet, une réflexion unique et une réfraction unique à travers une surface séparant deux milieux déterminés dépendent d'un seul paramètre qui est le rayon de la surface. On peut donc disposer à volonté de tous les éléments, sauf un, qui composent un système optique multiple, pour produire un effet déterminé.

Ce que nous venons de dire ne s'applique qu'aux positions relatives des points de l'axe. Si l'on veut s'occuper de leurs positions absolues, il faut introduire un second élément qui est l'écart des points principaux du système et qui représente le glissement qu'il faut faire subir à l'axe commun après la réfraction résultante ainsi que pour donner à ses points la position absolue qu'ils occupent par suite des réfractions successives.

On voit par là combien il est inutile de compliquer un système optique pour produire un effet déterminé au point de vue de la position et du grossissement. Les complications peuvent être légitimées, seulement d'une part par les difficultés de construction qu'on peut rencontrer dans la réalisation d'un système plus simple, d'autre part pour le souci de corriger les aberrations de diverses natures.

C'est là un sujet important et difficile que nous écartons dans le présent article où nous avons voulu simplement exposer les principes

d'une méthode pouvant avantageusement remplacer toutes les méthodes employées jusqu'à présent.

En rattachant, comme nous venons de le faire, à l'homographie l'étude des phénomènes de réfraction, nous avons donné à la théorie, jusqu'à présent obscure et compliquée, des lentilles sa véritable signification. Nous aurions pu, en même temps et par conséquence naturelle, montrer par quelles constructions à la fois rigoureuses et simples on peut obtenir le conjugué d'un point de l'axe d'un point du système optique et l'image d'un objet ayant son pied en ce point.

Ces constructions exigent la construction préalable d'une espèce de *diagramme*, qui présente le très grand avantage de construire et de mettre en évidence, de façon à faire image, tous les éléments qui caractérisent le système: indices de réfractions, courbures, épaisseurs, foyers principaux. Dans le cas d'un système multiple, on peut obtenir le résultat de deux manières : ou bien par une suite de constructions, toutes analogues, qui font connaître les effets particuliers produits par chaque réfraction ; ou bien, par une construction unique toujours analogue aux précédentes et mettant en évidence les caractères propres du système résultant qui sont, outre ses foyers principaux, le couple de ses points nodaux, c'est-à-dire ce que l'on a appelé ses éléments cardinaux.

Il est en outre intéressant de faire remarquer que l'on peut grouper un certain nombre de réfractions consécutives, pour en former une réfraction unique. Cette possibilité de groupement qu'on réalise en particulier lorsqu'on étudie isolément l'objectif et l'oculaire, généralement composés d'un instrument, pour les réunir ensuite, établit une analogie avec l'addition arithmétique ou algébrique et, avec la multiplication, qui sont des opérations dans lesquelles les groupements sont permis. Il y a toutefois entre elles et les suites de réfraction cette différence que, dans ces dernières, il n'est pas possible d'intervertir l'ordre des réfractions successives. En d'autres termes, d'un seul mot, la réfraction est un phénomène susceptible d'*association* mais non de *commutation*.

Ces principes étant exposés, il reste à montrer leur application à la construction et à la correction des aberrations de diverses natures des systèmes optiques. Mais c'est là un sujet qui dépasse les limites que nous nous sommes imposées dans cette simple exposition des procédés fondamentaux dont l'ensemble constitue les bases de l'*Optique graphique*, celle-ci devant désormais marcher de pair avec l'optique actuelle qui est encore plus analytique que géométrique.

NOUVEAU CHLORURE DE SAMARIUM [1]

par C. MATIGNON et E. CAZES

L'élément néodyme possède une propriété curieuse qui nous a conduit à la préparation d'un nouveau type de sel dans le groupe des terres rares.

Un petit morceau de métal projeté dans une solution étendue d'acide chlorhydrique réagit vivement en dégageant de l'hydrogène; il se produit en même temps autour du morceau une auréole brun foncé, qui persiste quelque temps après la disparition complète du néodyme, et laisse apercevoir un dégagement gazeux dans sa masse. Ces particularités paraissent s'expliquer ainsi simplement : le métal réagit sur la solution chlorhydrique étendue en formant un sous-chlorure soluble en rouge brun foncé, puis le sous-chlorure passe lui-même au chlorure normal faiblement coloré en rose, tandis que l'hydrogène continue à se dégager.

Pour chercher à obtenir ce sous-chlorure, nous avons d'abord étudié l'action de l'hydrogène sur le chlorure normal $NdCl^3$ et constaté qu'il n'y avait aucune réaction. D'autre part, des recherches thermochimiques effectuées comparativement sur certains sels des métaux rares, semblent indiquer que la chaleur de formation du chlorure de samarium doit être inférieure à celle du chlorure de néodyme, par conséquent que sa réduction doit être plus facile. Effectivement, nous avons reconnu que l'hydrogène réduit le chlorure samarique $SmCl^3$.

La réduction exige une température assez élevée : on opère dans un tube épais en verre d'Iéna fortement chauffé ; la matière noircit et le système binaire de deux chlorures fond aussitôt en un liquide épais qui bouillonne par suite du départ du gaz chlorhydrique. La substance est placée dans une nacelle de porcelaine ou mieux de platine à cause de la difficulté de détacher la substance fondue du vase en porcelaine. On réduit de préférence une quantité de chlorure assez faible, par suite de la lenteur de la réaction qui n'est pas éloignée des conditions limites de sa possibilité.

On active la réduction en remplaçant l'hydrogène par le gaz ammoniac, mais il importe alors de laisser refroidir le sous-chlorure dans

[1] Communication faite en mars 1904.

l'hydrogène pour éviter la formation de combinaisons d'addition avec l'ammoniaque.

Dans une première opération $0^{gr}5262$ de $SmCl^3$ ont perdu $0^{gr}0739$, dans une deuxième $0^{gr}2725$ ont abandonné $0_{gr}0377$. Les résidus analysés ont donné les valeurs suivantes en chlore et samarium :

	I	II	Calculé pour $SmCl^2$
Chlore	32.12	32.11	32.08
Samarium	67.98	67.84	67.91

Les pertes de poids concordent aussi avec la transformation de $SmCl^3$ en $SmCl^2$.

	Trouvé	Calculé
I	14.04	13.82
II	13.83	

Le chlorure samareux fondu se présente sous la forme d'une masse cristalline brun foncé ; la poudre est rouge brun. Examinée au microscope, cette poudre est rouge transparente et cristalline. La densité a été trouvée égale à 3,687. Le sulfure de carbone, le benzène, le toluène, le chloroforme, la pyridine, etc., ne dissolvent pas le chlorure samareux. Il absorbe l'ammoniaque à froid et forme un chlorure ammoniacal.

L'eau dissout immédiatement ce chlorure en donnant une liqueur rouge brun très foncée, mais en même temps il y a dégagement d'hydrogène et peu à peu la décoloration se produit. Il reste dans l'eau un résidu jaunâtre insoluble. La liqueur séparée de ce résidu contient tout le chlore en même temps que la partie insoluble est formée par l'oxyde de samarium. La décomposition qui suit la dissolution se traduit par l'équation suivante :

$$6SmCl^2 + 3H^2O = 4SmCl^3 + Sm^2O^3Sq + 3H^2.$$

Exposé à l'air, le chlorure samareux attire rapidement l'humidité en même temps qu'il éprouve la transformation précédente.

La décomposition de l'eau par le protochlorure de samarium rend compte, dans une certaine mesure, de la difficulté de sa préparation par l'hydrogène à partir du trichlorure.

LA SYNTHÈSE EN CHRONOPHOTOGRAPHIE

J'ai exposé ici il y a quelques mois, une méthode chronophotographique qui permet d'obtenir jusqu'à 2 000 photographies par seconde d'un objet en mouvement et qui peut donc s'appliquer à l'analyse de phénomènes de très courte durée. Mais pour compléter les renseignements que peut fournir cette méthode, il fallait pouvoir reproduire ce mouvement à une vitesse où l'œil puisse facilement le suivre.

Il existe des appareils de synthèse connus de tous sous le nom de cinématographes. Leur principe consiste à présenter devant les yeux une première image, immobile, la remplacer rapidement par une seconde, celle-ci par une troisième et ainsi de suite. Quand le temps employé à remplacer une image par la suivante est très court, qu'il ne dépasse pas $\frac{1}{50}$ de seconde, l'œil ne s'aperçoit pas du changement et éprouve la sensation d'une impression continue. Mais dans le cinématographe, en raison de sa construction, la durée de cette période dépend de la vitesse à laquelle on fait fonctionner l'appareil et l'on se trouve obligé, pour la réduire à $\frac{1}{50}$ de seconde, de faire passer devant les yeux en une seconde une quinzaine d'images. Reproduire à cette fréquence de 15 images un mouvement qui aura été analysé à raison de 1 500 par exemple, ralentit cent fois ce mouvement et permet généralement à l'œil de le suivre avec facilité. Il y a des cas cependant où ce ralentissement est insuffisant et où, pour faciliter l'étude, on voudrait l'exagérer encore. Il y a deux moyens d'y parvenir. Le premier est d'augmenter le nombre de photographies prises par seconde, ce qui n'est pas toujours possible. Le second, plus simple, consiste à réduire le nombre d'images que l'on fait passer par seconde devant les yeux quand on fait la synthèse du mouvement. Nous pourrons parfaitement avoir la sensation d'une impression continue en ne voyant que deux ou trois images par seconde, à la condition que leur substitution se fasse en moins de $\frac{1}{50}$ de seconde.

Pour y arriver, j'ai utilisé, avec quelques modifications, le principe d'un appareil que j'ai construit il y a quelques années en collaboration avec M. Kossonis. Le principe d'ailleurs n'était pas absolument

nouveau, mais n'avait jamais reçu, à ma connaissance, d'application scientifique.

Dans ce système (Fig. I) on oblige la pellicule P qui porte les images à suivre sur une certaine longueur, un trajet en arc de cercle. Au centre de cet arc se trouve un petit miroir plan M qui réfléchit l'image dans l'œil de l'observateur O. Si nous entraînons maintenant la pellicule d'un mouvement continu dans le sens indiqué par la flèche, chaque point, après un trajet égal à la largeur d'une image, aura décrit un certain arc que mesure l'angle α. L'image réfléchie décrirait le même angle si le miroir restait fixe. Mais en vertu des lois de la réflexion, une rotation $\frac{\alpha}{2}$ de ce miroir, dans le même sens la maintiendra immobile. Au moment où l'image considérée se sera déplacée de l'angle α, le miroir est brusquement ramené par un ressort à sa position initiale, réfléchit aussitôt la seconde image en la maintenant immobile comme la première, et ainsi de suite.

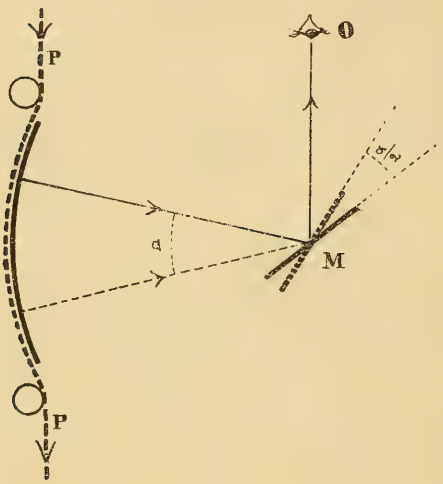


Fig. I.

C'est donc ici le rappel du ressort qui effectue la substitution des images ; comme sa période est constante et peut être très rapide, on conçoit qu'il est possible de beaucoup diminuer le nombre d'impressions sur la rétine sans perdre la sensation de continuité.

Ce principe que j'utilise ici pour un appareil stéréoscopique peut également se prêter à la projection et à la prise des images.

Lucien Bull.

Institut Marey, 12 Novembre 1904.

NOTE SUR LA STRUCTURE DU CŒUR

CHEZ LES GASTÉROPODES ET LES LAMELLIBRANCHES

par **M. F. MARCEAU**

Les fibres cardiaques des Gastéropodes et des Lamellibranches sont constituées sur le même plan que celles des Céphalopodes, des Vertébrés inférieurs ou des embryons des Vertébrés supérieurs. En effet, elles ont une forme cylindrique et émettent des branches latérales dont le plus grand nombre s'anastomosent avec des fibres voisines, mais dont quelques-unes cependant, régulièrement effilées, se terminent librement. Ces fibres, groupées en faisceaux plus ou moins volumineux ou travées musculaires, entrecroisées dans tous les sens, sont formées par une colonne sarcoplasmique axiale très développée, riche en fines granulations assez régulièrement disposées et entourée par une écorce contractile.

Les différents auteurs sont loin d'être d'accord sur la structure fine de cette écorce contractile (1). Les recherches que j'ai entreprises pour élucider cette question, sans être complètement achevées, me permettent néanmoins de préciser certains points et d'expliquer les contradictions apparentes des différents auteurs. J'en fais connaître dès maintenant les premiers résultats en raison de notes publiées récemment par MM. Vigier et Mader sur cette question (2).

1° Contrairement à tous les auteurs, j'estime qu'il est impossible d'isoler complètement les fibres et que celles-ci sont anastomosées en réseaux présentant néanmoins quelques branches libres. Comme Vigier, j'ai observé des fibres en forme de fuseaux ramifiés à leurs extrémités, mais la plupart de ces ramifications présentaient des traces de ruptures artificielles.

2° Observées après une simple dissociation dans l'acide azotique à

---

(1) Pour les uns, elle est formée de fibrilles homogènes enroulées en hélice et analogues à celles de la partie vitreuse des muscles adducteurs des Lamellibranches [Fol (tous les Mollusques), Mader (Nasse)]. Pour d'autres, elle est formée de fibrilles striées du type simple [Prenant (Escargot), B. Haller (Fissurelle), Vigier (Anodonte, Moule). Fred Vles (Huître Portugaise)]. Vigier et Mader admettent d'ailleurs la possibilité de ces deux catégories de fibres chez des espèces différentes.

(2) C. R. Académie des Sciences, 13 juin 1904.

20 °/₀, tantôt l'écorce contractile paraît véritablement striée (Escargot, Haliotide, Huître, Lymnée, Pecten), tantôt elle paraît formée de fibrilles enroulées en hélice (*Cardium Norvegicum*, *Dosinia exoleta*, *Lutraria elliptica*, *Solens*, *Tellina crassa*). Il faut dire que l'observation est souvent délicate, gênée qu'elle est par l'abondance des granulations sarcoplasmiques assez régulièrement disposées et qui peuvent simuler une véritable striation. Parfois, c'est seulement dans les régions rétrécies où l'axe sarcoplasmique est peu développé qu'on peut observer les détails de la striation de l'écorce.

La méthode des coupes colorées à l'hématoxyline ferrique, permet seule de trancher la question, encore que le plus souvent les granulations sarcoplasmiques, très fortement colorées par la laque ferrique, masquent la striation des fibrilles.

3° Chez l'Haliotide, les fibres, dont le sarcoplasma est très peu granuleux, ont une écorce contractile formée de fibrilles striées ordinaires, où les stries de Hensen et surtout les disques minces sont très nets. Hauteur de l'élément musculaire :

$$(De) + 2(Bc) + (Dm) \qquad \text{ou} \qquad (Q) + 2(J) + (Z) = 2\mu 8).$$

Les coupes transversales montrent que les fibrilles sont groupées par très petits paquets à la périphérie du sarcoplasma.

4° Chez l'Escargot, la Lymnée, l'Huître ordinaire, l'Huître portugaise, il existe des fibrilles striées du type simple (sans disques minces) telles que les a décrites Vigier dans la note précitée et dont les éléments sont ordonnés en bandes transversales ou à peine obliques. L'observation de ces fibrilles est délicate en raison de la petitesse de leurs éléments, et de la présence de granulations sarcoplasmiques très fortement colorées en noir intense.

5° Chez *Lutraria elliptica* où les fibrilles paraissent enroulées en hélice, il existe aussi des fibrilles striées du type simple, mais dont les éléments, au lieu d'être disposés en bandes transversales ou un peu obliques, alternent souvent assez régulièrement et figurent une sorte de damier oblique, analogue à celui que dessinent les fibrilles hélicoïdes des fibres de la portion vitreuse des muscles adducteurs de la plupart des Lamellibranches, mais sans en avoir la même structure. En effet, tandis que, dans ces dernières fibres, ce sont les mailles (colorées par la laque ferrique) qui sont contractiles, dans les premières, au contraire, c'est très probablement leur contenu (présentant les mêmes réactions colorantes) qui l'est. C'est peut-être l'absence de disques minces, destinés à unir les fibrilles à des niveaux correspondants, qui permet cet agencement spécial des éléments des fibrilles, celles-ci pouvant glisser plus ou moins les unes par rapport aux autres. Il

arrive, en effet, que dans une même fibre, tantôt les éléments correspondants des fibrilles sont disposés en bandes transversales ou un peu obliques, tantôt ils sont disposés en alternant régulièrement et forment la *véritable striation dite en chevrons*, observée par Fol et d'autres auteurs dans le muscle adducteur des Limes (1). On ne peut interpréter l'image du damier oblique comme un entrecroisement de fibrilles homogènes, car la coloration à l'hématoxyline ferrique montre que les fibrilles ne sont pas homogènes comme celles des fibres des muscles adducteurs de la plupart des Lamellibranches, mais bien formées de segments colorés et incolores alternant avec régularité.

6° Enfin, contrairement aux auteurs, j'ai observé que les travées musculaires du cœur de tous les Mollusques sont tapissées, comme chez les Vertébrés inférieurs, par une très mince assise de cellules endothéliales dont les noyaux forment parfois des saillies assez appréciables et sont éloignés les uns des autres.

(1) J'ai observé bien plus nettement cette structure dans une partie des muscles adducteurs d'*Anomia ephippium*.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME VI (1904)

Pages.

André D. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants ou variables, dont l'équation dérivée est régulière 64

Anthony R. — Forme et structure des muscles adducteurs des mollusques acéphales (fig.) 175

Banquet annuel. 28

Berdon L. — Théorie des divisions hétérographiques ; théorie des courbes algébriques. 68

Bull L. — La chronophotographie des mouvements rapides (fig.) 192

— La synthèse en chronophotographie (fig.) 271

Coutière H. — *Grandidierella mahafalensis*, type nouveau d'Amphipode de Madagascar (fig.) 166

Deschamps J. — Optique graphique ; Étude de la marche des rayons centraux dans un système optique (fig.) 205

Extraits des comptes rendus des séances. 32, 129, 190

Guieysse A. — Recherches sur l'appareil digestif de la Langouste (fig.) . . 117

— La régression de la queue chez les têtards du *Bufo vulgaris*. 189

Liste des membres de la Société (mai 1904). 13

Liste des périodiques reçus par la Société. 18

Marceau F. — Structure du cœur chez les Gastéropodes et les Lamellibranches 273

Matignon et Cazes. — Nouveau chlorure de samarium. 269

Ponsot. — Sur un nouveau transport électrique des sels dissous. (Analyse d'un travail de M. Chassy) 54

Rabaud E. — La brièveté primitive de l'œsophage, et l'ectopie intra-thoracique de l'estomac et du foie (fig.) 136

Rapport de la Commission des comptes. 133

Règlement de la Société. 3

Vaillant L. — Notice sur Edmond Alix. 42

Winter J. — Modification du procédé Adam pour le dosage du beurre dans le lait (1) 35

(1) Cette note de M. J. Winter a été par erreur imprimée dans les Extraits des Comptes rendus des séances.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, dir.

TABLE DES MATIÈRES CONTENUES DANS CE FASCICULE

Pages.

Comptes-rendus des séances 129

Rapport de la Commission des finances 133

E. Rabaud. — La brièveté primitive de l'œsophage, et l'ectopie intra-thoracique de l'estomac et du foie. 136

H. Coutière. — Note sur un type nouveau d'Amphipode, *Grandidierella Mahafalensis*. 166

Anthony. — Note sur la forme et la structure des muscles adducteurs des mollusques acéphales 175

Guieysse. — La régression de la queue chez les têtards de *Bufo vulgaris*. . 189

Bull. — La chronophotographie des mouvements rapides 192

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
	—	—	—	—	—	—	—
Une feuille	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille.	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille. . .	3 15	4 »	5 »	5.60	7.20	8 10	9 »
Un quart de feuille. .	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6 30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3 15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles . .	4 »	5.40	6 30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°
Chaque année pour les Membres de la Société	5 francs
— pour le public	12 francs

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

À L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à : MM. Désiré André ; E. Becquerel, de l'Institut ; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut ; Bouty ; Bourgeois ; Descloizeaux, de l'Institut ; Fouret ; Gernez ; Hardy ; Haton de la Goupillière, de l'Institut ; Laisant ; Laussedat ; Léauté ; Mannheim ; Moutier ; Peligot, de l'Institut ; Pellat. *Pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix ; Bureau ; Bouvier ; Chatin ; Drake del Castillo ; Duchartre, de l'Institut ; H. Filhol ; Franchet ; Grandidier, de l'Institut ; Henneguy ; Milne Edwards, de l'Institut ; Mocquard ; Poirier ; A. de Quatrefages, de l'Institut ; G. Roze ; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs.

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

1630

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01526 6745