





















ACADÉMIE DES SCIENCES  
(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXI<sup>e</sup> ANNÉE.

(1917.)

U.S. BUREAU  
STANDARDS  
LIBRARY  
~~CANCELLED~~

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

1919.



UNIVERSITY OF  
TORONTO  
LIBRARY



ACADÉMIE DES SCIENCES  
(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXI<sup>e</sup> ANNÉE.

(1917.)

**CANCELLED**



PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

1919.

CANCELLED

By Transfer  
Bureau of Standards

JAN 25 1932

LOUIS WIESNER  
PRAGUE

LOUIS WIESNER, PRAGUE.



## Table des auteurs.

	Pag.
Dr. <i>Vinzenz Jarolimek</i> : Zur Konstruktion einer Fläche II. Ordnung aus neun gegebenen Punkten oder Berührungsebenen. . .	1
<i>Miloš Kössler</i> : Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion	9
<i>Friedrich Procházka</i> und <i>Joseph Ždárek</i> : Über die harmonischen Mittelpunkte eines vierpunktigen Systems: . . . . .	13
<i>M. Kössler</i> : Über Entwicklungen für analytische Funktionen. . . . .	30
<i>Miloslav Pelíšek</i> : Über eine Rollfläche achter Ordnung. . . . .	50
Dr. <i>Jos. Woldřich</i> : Über die ersten Machaerodus-Funde im Höhlendiluvium von Mähren und Nieder-Österreich . . . . .	85
Dr. <i>B. Němec</i> : Einiges über zentrifugierte Pflanzenzellen . . . . .	93
<i>František Slavík</i> : Die Chistolithschiefer in der Umgebung von Rožmitál . . . . .	105
<i>J. Sobotka</i> : Zur Konstruktion einer Fläche 2. Ordnung aus neun Punkten . . . . .	113
<i>J. Sobotka</i> : Zur Konstruktion von Kegelschnitten aus imaginären Punkten . . . . .	129
<i>František Slavík</i> : Über Spilite in Příbramer Algonkium . . . . .	137
Dr. <i>Ot. Vodrážka</i> : Über die Stärkescheide in den Blattpolstern. . .	153
Dr. <i>Václav Šebesta</i> : Beitrag zur Messung von Selbstinduktionen. .	161
Dr. <i>Josef Woldřich</i> : Die geologischen Verhältnisse im Talgebiete des Kačákbaehes zwischen Unhoř und Nenačovíc . . . . .	167
<i>J. V. Želízko</i> : Neue untersilurische Fauna von Rožmitál in Böhmen	194
<i>J. V. Želízko</i> : Nachträge zur diluvialen Fauna von Wolin . . . . .	199
<i>J. Perner</i> : Über neue Phyllocariden aus der Bande F- $f_1$ . . . . .	225
<i>C. Klouček</i> : Über die $a_1\gamma$ = Schichten und ihre Trilobitenfauna. . .	231
Dr. <i>Jan Zavřel</i> : Die Mundteile der Tanypinen-Larven . . . . .	247
<i>R. Sokol</i> : Über die stoffliche Inhomogenität des Magma im Erdinnern	263

Dr. Inž. <i>Bohuslav Stočes</i> : Studien über das Bohutíne Erzrevier. I. Teil. Quarzbiotithornblendediorit von Bohutín .....	312
<i>Vojtěch Rosický</i> : Beiträge zur Petrographie des mittelböhmischen Granitmassives.....	328
<i>Zdenko Frankenberger</i> : Ein Beitrag zur Morphologie und Systematik des Geschlechtsapparates der Gattung <i>Leucochroa</i> Beck .....	354
Dr. <i>Václav Simandl</i> : Beitrag zum Büschel von Flächen zweiter Ord- nung .....	374
<i>J. Janošík</i> : Die Entwicklung der Milz .....	382

---



# Zur Konstruktion einer Fläche II. Ordnung aus neun gegebenen Punkten oder Berührungsebenen.

(Verhandlungen der Česká Akademie. Jahrgg. XXV., Nr. 14.)

Vom

k. k. Hofrat Dr. VINZENZ JAROLÍMEK,

o. ö. Professor a. d. k. k. böhm. techn. Hochschule in Prag.

(Vorgelegt am 11. Februar 1916.)

Ich habe meine Lösung dieser beiden Probleme im II. Teile meines Kompendiums „Grundzüge der Geometrie der Lage“ schon im Jahre 1912 publiziert, jedoch nur in allgemeinen Umrissen. Seither habe ich diese Methode derart vereinfacht, daß nunmehr die Konstruktion alle bisher bekannten Lösungen an Einfachheit übertreffen dürfte und ich hoffen kann, durch Mitteilung derselben das Interesse der Herren Fachgenossen zu erwecken.

## I.

Im ersten Falle sind im Raume *neun*, von einander unabhängige Punkte  $a \dots h k$  gegeben, so daß keine acht von denselben „assoziert“ sind. Wir legen durch *acht* Punkte, etwa  $a, b, c, d, e, f, g, h$  zwei *windschiefe* Flächen II. Ordnung  $\varepsilon^2, \omega^2$ , i. a. Hyperboloide.<sup>1)</sup> Diese bestimmen einen Flächenbüschel  $\mathcal{Z}$ , welcher die gesuchte, durch den neunten Punkt  $k$  gehende Fläche  $\varphi^2$  enthält. Alle Flächen des Büschels  $\mathcal{Z}$  gehen durch die biquadratische Raumkurve („erster Art“)  $L^4$ , in welcher sich die Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$  durchdringen. Es ist jedoch nicht nötig, die Kurve  $L^4$ , welche mit dem Punkte  $k$  die Fläche  $\varphi^2$  genügend bestimmen würde, zu konstruieren, und es wird auch genügen, von den Hilfshyperboloiden  $\varepsilon^2, \omega^2$  je drei Leitlinien zu bestimmen.

---

<sup>1)</sup> Dieser Grundgedanke findet sich auch in Reye's Geometrie der Lage, aber meine Konstruktion von  $\varepsilon^2, \omega^2$  ist viel einfacher.

Ein Hyperboloid  $\varepsilon^2$  durch acht Punkte  $a, b \dots h$  wird bestimmt sein, wenn wir die Verbindungsgerade von zwei Punkten, etwa  $\overline{ab} \equiv P$ , als eine Leitlinie desselben annehmen; denn der neunte, die Fläche  $\varepsilon^2$  bestimmende Punkt kann auf der Geraden  $\overline{ab}$  beliebig angenommen werden. Wir legen nun durch je drei weitere Punkte die Ebenen  $(c d e) \equiv \varrho$ ,  $(f g h) \equiv \sigma$ , welche  $\varepsilon^2$  in zwei Kegelschnitten  $R^2, S^2$  schneiden werden. Diese Kurven müssen sich, weil sie auf  $\varepsilon^2$  liegen, in zwei, auf der Schnittlinie der Ebenen  $\overline{\varrho \sigma} \equiv O$  liegenden Punkten  $x, y$  schneiden, welche wir erhalten wie folgt. Schneidet die Leitlinie  $P$  die Ebene  $\varrho$  im Punkte  $r$ , so geht der Kegelschnitt  $R^2$  durch die Punkte  $c, d, e, r$ , gehört also einem Kegelschnittbüschel an, welcher die Gerade  $O$  in einer Punktinvolution  $I$  schneidet. Zwei Punktepaare derselben  $m_1 m_2, n_1 n_2$  erhalten wir als Schnitte der Geraden  $O$  mit den degenerierten Kegelschnitten des Büschels, welche aus den Geraden  $\overline{cd}, \overline{er}; \overline{ce}, \overline{dr}$  bestehen. Ist ferner der Schnittpunkt  $(P \sigma) \equiv s$ , so gehört der Kegelschnitt  $S^2$  einem zweiten, in der Ebene  $\sigma$  liegenden Büschel an, dessen Grundpunkte  $f, g, h, s$  sind. Dieser Büschel schneidet aus  $O$  eine zweite Punktinvolution  $I'$  aus, deren zwei Paare  $p_1 p_2, q_1 q_2$  wir in den Schnittpunkten der Geraden  $\overline{fg}, \overline{hs}; \overline{fh}, \overline{gs}$  mit  $O$  erhalten. Nun konstruieren wir die Punkte  $x, y$  als gemeinsames Punktepaar der beiden Involutionen  $I, I'$  auf  $O$ , dann die Kegelschnitte  $R^2, S^2$  in den Ebenen  $\varrho, \sigma$  aus den Punkten  $c, d, e, x, y$  resp.  $f, g, h, x, y$  gleichviel, ob  $x, y$  reell oder imaginär sind.<sup>1)</sup>

Durch die Leitlinien  $P, R^2, S^2$  ist das Hyperboloid  $\varepsilon^2$  bestimmt; die Gerade  $P$  schneidet  $R^2, S^2$  in den Punkten  $r, s$ , und die Kegelschnitte  $R^2, S^2$  schneiden sich in den auf  $O$  liegenden Punkten  $x, y$ . Jede Ebene, welche durch die Gerade  $P$  gelegt wird, schneidet die Kurven  $R^2, S^2$  (außer  $r, s$ ) in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade eine Erzeugende von  $\varepsilon^2$  gibt.

Ebenso legen wir durch dieselben acht Punkte  $a, b \dots h$  ein zweites Hyperboloid  $\omega^2$ , deren eine Leitlinie etwa die Verbindungsgerade  $\overline{cd} \equiv Q$  ist, und konstruieren zwei Leitkegelschnitte  $U^2, V^2$  wie oben  $R^2, S^2$ .

Jede durch den neunten gegebenen Punkt  $k$  gelegte Ebene  $\tau$  schneidet nun die Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$  in zwei Kegelschnitten  $G^2, H^2$  und den Flächenbüschel  $\Sigma$  in einem Kegelschnittbüschel, welcher durch  $G^2, H^2$  bestimmt

<sup>1)</sup> Wir projizieren die Involutionen  $I, I'$  auf eine beliebige Kreislinie  $U$  aus irgend einem auf  $U$  liegenden Punkte  $\tau$ , bestimmen die Mittelpunkte  $\varepsilon, \varphi$  der beiden auf  $U$  erhaltenen Involutionen, ferner die Schnittpunkte  $\xi, \eta$  der Geraden  $\varepsilon \varphi$  mit  $U$ , und projizieren die Punkte  $\xi, \eta$  aus dem Punkte  $\tau$  zurück auf die Gerade  $O$  in die Punkte  $x, y$ . Sind jedoch die Punkte  $\xi, \eta$ , daher auch  $x, y$  imaginär, so suchen wir den Pol  $\delta$  des Kreises  $U$  zur Polare  $\varepsilon \varphi$ , ziehen durch ihn zwei Sekanten, und projizieren ihre Schnittpunkte mit  $U$  aus dem Punkte  $\tau$  auf die Gerade  $O$ ; damit sind zwei Punktepaare der elliptischen Involution  $I''$  auf  $O$  gefunden, welche die Punkte  $x, y$  als imaginäre Doppelpunkte von  $I''$  genügend bestimmen.  $I''$  ist dieselbe Involution harmonischer Pole, welche beide Kurven  $R^2, S^2$  auf  $O$  erzeugen; weiters sind Konstruktionen von Kegelschnitten aus konjugiert-imaginären Punkten (wie  $x, y$ ) bekannt.



ist; der in demselben enthaltene und durch den Punkt  $k$  gehende Kegelschnitt  $K^2$  liegt auf der gesuchten Fläche  $\varphi^2$ . Wir brauchen jedoch nur die Schnittpunkte von  $G^2$  und  $H^2$ , als Grundpunkte des Büschels, durch welche auch  $K^2$  gehen muß. Es wird von Vorteil sein, die Ebene  $\tau$  durch den Punkt  $k$  und die Gerade  $P \equiv \overline{ab}$  zu legen. Dieselbe schneidet das Hyperboloid  $\varepsilon^2$  in der Geraden  $P$  und in einer zweiten Geraden  $P_1$  (Verbindungsgerade der Schnittpunkte von  $\tau$  mit  $R^2, S^2$ ), so daß der Schnitt  $G^2$  von  $\tau$  mit  $\varepsilon^2$  in die Geraden  $P, P_1$  zerfällt. Die Ebene  $\tau$  schneidet ferner die Leitlinien  $Q, U^2, V^2$  (des Hyperboloides  $\omega^2$ ) in fünf Punkten, welche den Kegelschnitt  $(\tau \omega^2) \equiv H^2$  bestimmen; die Schnittpunkte  $(P_1 H^2) \equiv m, n$  können wir bekanntlich konstruieren, ohne die Kurve  $H^2$  zu verzeichnen; und die Gerade  $P$  schneidet das Hyperboloid  $\omega^2$ , also auch die Kurve  $H^2$  in den Punkten  $a, b$ . Durch die fünf Punkte  $a, b, m, n, k$  legen wir den Kegelschnitt  $K^2$ , welcher der gesuchten Fläche  $\varphi^2$  angehört.

Die Ebenen  $(cde), (fgh)$  schneiden den Kegelschnitt  $K^2$  in den Punkten  $l, t$ , resp.  $u, v$ ; wir zeichnen noch die Kegelschnitte  $(cde lt) \equiv L^2, (fgh uv) \equiv M^2$ , welche auf  $\varphi^2$  liegen. Die gesuchte Fläche  $\varphi^2$  ist durch die drei Kegelschnitte  $K^2, L^2, M^2$  bestimmt und die Aufgabe gelöst. Unsere Methode erfordert also die Verzeichnung von nur vier Hilfskegelschnitten  $R^2, S^2, U^2, V^2$ ; sämtliche übrigen Konstruktionen können mit Geraden und Kreislinien ausgeführt werden.

## II.

Im zweiten Falle konstruieren wir zwei windschiefe Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$ , welche acht, etwa  $\alpha \dots \lambda$  von den neun gegebenen Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \kappa, \lambda, \pi$  berühren.<sup>1)</sup> Sie bestimmen eine Flächenschar  $\Omega$ , welche die gesuchte Fläche  $\varphi^2$  enthält, und eine abwickelbare Umhüllungsfläche vierter Klasse  $\lambda^{IV}$ . Wir bedürfen jedoch der Fläche  $\lambda^{IV}$  nicht, und es wird auch hier genügen, von den Hilfshyperboloiden  $\varepsilon^2, \omega^2$  je drei Leitlinien zu bestimmen.

Das Hyperboloid  $\varepsilon^2$  aus acht Berührungsebenen  $\alpha, \beta \dots \lambda$  wird bestimmt sein, wenn wir die Schnittlinie von zwei Ebenen, etwa  $\overline{\alpha\beta} \equiv P$  als eine Leitlinie desselben annehmen; denn die neunte, die Fläche  $\varepsilon^2$  bestimmende Ebene kann durch die Gerade  $\overline{\alpha\beta}$  beliebig gelegt werden. Bezeichnen wir die Schnittpunkte je dreier Ebenen  $(\gamma \delta \varepsilon) \equiv r, (\varphi \kappa \lambda) \equiv s$ . Aus ihnen wird das Hyperboloid  $\varepsilon^2$  durch zwei Kegel  $\varrho^2, \sigma^2$  projiziert, welche zwei gemeinsame Berührungsebenen  $\xi, \eta$  besitzen, und diese gehen durch die Schnittlinie  $\overline{\varrho\sigma} \equiv O$ ; es sind die Berührungsebenen, welche die Gerade  $O$

<sup>1)</sup> Diese Aufgabe ist zur I. dual; dennoch wird es vorteilhaft sein, in einigen Konstruktionen vom streng reziproken Vorgange abzuweichen. — Auch hier setzen wir voraus, daß keine acht von den gegebenen Ebenen „assoziiert“ sind, wie z. B. die gemeinsamen Berührungsebenen von drei Flächen II. Ordnung.

nach dem Hyperboloide  $\varepsilon^2$  ausschickt. Legen wir die Ebene  $(P r) \equiv \varrho$ . Der Kegel  $\varrho^2$  wird die durch den Punkt  $r$  gehenden Ebenen  $\gamma, \delta, \varepsilon, \varrho$  berühren, also derjenigen Kegelschar angehören, welche durch diese vier Berührungsebenen bestimmt ist. Diese Schar wird aus der Geraden  $O$  durch eine Ebeneninvolution projiziert, welche das Ebenenpaar  $\xi, \eta$  enthält. Diese Involution ist durch zwei Ebenenpaare  $\mu_1 \mu_2, \nu_1 \nu_2$  gegeben, welche die Schnittlinien der Ebenen  $\overline{\gamma \delta}, \overline{\varepsilon \varrho}; \overline{\gamma \varepsilon}, \overline{\delta \varrho}$  — als zwei degenerierte Kegel der Schar — aus der Geraden  $O$  projizieren.

Ist ferner die Ebene  $(P s) \equiv \sigma$ , so wird der Kegel  $\sigma^2$  in der Kegelschar  $(\varphi \kappa \lambda \sigma)$  enthalten sein, deren zwei Ebenenpaare  $\tau_1 \tau_2, \psi_1 \psi_2$  die Schnittlinien der Ebenen  $\overline{\varphi \kappa}, \overline{\lambda \sigma}; \overline{\varphi \lambda}, \overline{\kappa \sigma}$  aus  $O$  projizieren. Die Ebenen  $\xi, \eta$  werden nun als gemeinsames Ebenenpaar der beiden Ebeneninvolutionen konstruiert (mittels ihrer Schnitte mit einer beliebigen Geraden, welche zu  $O$  windschief ist). Zu den durch den Punkt  $r$  gehenden Ebenen  $\gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \eta$  konstruieren wir den Berührungskegel  $\varrho^2$ , und zu den durch  $s$  gehenden Ebenen  $\varphi, \kappa, \lambda, \xi, \eta$  den Berührungskegel  $\sigma^2$ . Das Hyperboloid  $\varepsilon^2$  ist durch die Leitlinie  $P$  und die ihm umschriebenen Kegel  $\varrho^2, \sigma^2$  bestimmt; diese haben zwei gemeinsame Berührungsebenen  $\xi, \eta$ , und die Gerade  $P$  berührt die Kegel  $\varrho^2, \sigma^2$ , indem sie in ihren Berührungsebenen  $\varrho$ , resp.  $\sigma$  liegt. Nehmen wir auf der Geraden  $P$  einen Punkt  $m$  an, legen durch ihn (außer  $\varrho$ ) noch eine zweite Berührungsebene  $\mu$  an den Kegel  $\varrho^2$  und (außer  $\sigma$ ) noch eine zweite Berührungsebene  $\nu$  an den Kegel  $\sigma^2$ ; die Schnittlinie dieser Ebenen  $\overline{\mu \nu} \equiv K$  gibt eine Erzeugende des Hyperboloides  $\varepsilon^2$ ; denn  $K$  schneidet die Leitlinie  $P$  und berührt die Kegel  $\varrho^2, \sigma^2$ . Zwei andere auf  $P$  angenommene Punkte geben auf dieselbe Weise zwei weitere Erzeugende  $L, M$ . Die drei Erzeugenden  $K, L, M$  bestimmen das Hyperboloid  $\varepsilon^2$ . Analog konstruieren wir drei Erzeugende des zweiten Hyperboloides  $\omega^2$ , welches etwa durch die Berührungsebenen  $\alpha, \beta, \varepsilon, \varphi, \kappa, \lambda$  und die Schnitt- als Leitlinie  $\overline{\gamma \delta}$  gegeben ist.

Nun soll in der Flächenschar  $\Omega$  ( $\varepsilon^2 \omega^2$ ) diejenige Fläche  $\varphi^2$  bestimmt werden, welche auch noch die neunte gegebene Ebene  $\pi$  berührt. Wenn wir in der Ebene  $\pi$  einen beliebigen Punkt  $v$  annehmen, so können durch ihn vier gemeinsame Berührungsebenen an die Hyperboloide  $\varepsilon^2$  und  $\omega^2$  gelegt werden, welche mit der Ebene  $\pi$  einen Tangentialkegel II. Ordnung  $\alpha^2$  bestimmen, und dieser wird auch der gesuchten Fläche  $\varphi^2$  umschrieben sein. Wir konstruieren diesen Kegel  $\alpha^2$  wie folgt. Auf dem Hyperboloide  $\varepsilon^2$  nehmen wir eine Gerade an, am besten  $\overline{\alpha \beta} \equiv P$ , suchen den Schnittpunkt  $(P \pi) \equiv v$  und die zweite Erzeugende  $J$  auf  $\varepsilon^2$ , welche durch den Punkt  $v$  geht. Durch die Gerade  $P$  gehen zwei (von den gegebenen) Ebenen  $\alpha, \beta$ , welche *beide* Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$  berühren; legen wir noch durch die Gerade  $J$  die Berührungsebenen  $\tau, \vartheta$  an das zweite Hyperboloid  $\omega^2$ . Diese vier Ebenen  $\alpha, \beta, \tau, \vartheta$  sind gemeinsame Berührungsebenen beider Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$ , daher auch Tangentialebenen der Umhüllungsfläche  $\lambda^{IV}$  und der gesuchten Fläche  $\varphi^2$ . Zu den fünf Ebenen  $\alpha, \beta, \tau, \vartheta, \pi$ , welche durch denselben Punkt  $v$



gehen, konstruieren wir den Tangentialkegel II. Ordnung  $\alpha^2$ , welcher die Fläche  $\varphi^2$  längs eines Kegelschnittes  $U^2$  berühren wird. Nun können wir zwei verschiedene, jedoch gleich vorteilhafte Wege einschlagen. Entweder

1. Bestimmen wir die Berührungspunkte  $f, g$  der Ebene  $\alpha$  auf den Hyperboloiden  $\varepsilon^2, \omega^2$  und die Berührungsgerade  $R$  der Ebene  $\alpha$  auf dem Kegel  $\alpha^2$ ; die Ebene  $\alpha$  berührt die Umhüllungsfläche  $\lambda^{IV}$  längs der Geraden  $\overline{fg} \equiv F$  und die Fläche  $\varphi^2$  im Schnittpunkte  $(FR) \equiv a$ . Auf dieselbe Weise erhalten wir die Berührungspunkte  $b, t$  der Ebenen  $\beta, \tau$  auf der Fläche  $\varphi^2$ , und legen eine Ebene durch die Punkte  $(abt) \equiv \psi$ , welche die Ebenen  $\alpha, \beta$  in den Geraden  $\overline{\alpha\psi}, \overline{\beta\psi}$  und den Kegel  $\alpha^2$  in dem Kegelschnitte  $U^2$  schneidet. Diesen  $U^2$  konstruieren wir aus den Punkten  $a, b, t$  und den Tangenten  $\overline{\alpha\psi}, \overline{\beta\psi}$ . Analog bestimmen wir noch einen Punkt  $s$  auf der Fläche  $\varphi^2$  mittels eines zweiten Tangentialkegels  $\beta^2$ , zu welchem wir aus einer anderen Erzeugenden  $N$  des Hyperboloides  $\varepsilon^2$  auf demselben Wege gelangen, wie vorhin zum Kegel  $\alpha^2$  aus der Geraden  $P$ . Nun legen wir eine Ebene durch die Punkte  $(vas)$ , suchen ihren Schnittpunkt  $c$  (der zweite ist  $a$ ) mit der Kurve  $U^2$ , und verzeichnen den Kegelschnitt  $V^2$ , in welchem die Ebene  $(vas)$  die Fläche  $\varphi^2$  schneidet, aus den Punkten  $a, s, c$  und den Tangenten  $\overline{av}, \overline{cv}$ . In der Ebene  $(vbs)$  erhalten wir ebenso einen dritten Kegelschnitt  $W^2$ , so daß die gesuchte Fläche  $\varphi^2$  durch die drei Kegelschnitte  $U^2, V^2, W^2$  völlig bestimmt ist.

2. Oder, nachdem der Kegel  $\alpha^2$  konstruiert ist, bestimmen wir die Schnittpunkte von je dreien gegebenen Ebenen  $(\gamma\delta\varepsilon) \equiv r, (\varphi\kappa\lambda) \equiv s$ , legen durch den Punkt  $r$  die Berührungsebenen  $\vartheta_1, \vartheta_2$  an den Kegel  $\alpha^2$ , und konstruieren den Tangentialkegel  $\beta^2$  zu den Ebenen  $\gamma, \delta, \varepsilon, \vartheta_1, \vartheta_2$ ; ferner durch den Punkt  $s$  die Berührungsebenen  $\xi_1, \xi_2$  an den Kegel  $\alpha^2$ , und konstruieren den Tangentialkegel  $\gamma^2$  zu den Ebenen  $\varphi, \kappa, \lambda, \xi_1, \xi_2$ . Die drei Tangentialkegel der Fläche  $\varphi^2$  bestimmen diese zur genüge; drei Kegelschnitte auf derselben erhalten wir wie folgt. Die Kegel  $\alpha^2, \beta^2$  werden die Fläche  $\varphi^2$  längs zweier Kegelschnitte  $A^2, B^2$  berühren, und diese sich in zwei Punkten  $m, n$  schneiden. Um diese zu bestimmen, legen wir durch die Verbindungsgerade der Kegelspitzen  $\overline{rs}$  an die Kegel  $\alpha^2, \beta^2$  zwei gemeinsame Berührungsebenen und bestimmen die Berührungskanten, welche sich zu je zweien in den Punkten  $m, n$  schneiden. Der dritte Kegel  $\gamma^2$  berührt die Fläche  $\varphi^2$  längs eines Kegelschnittes  $C^2$ , dessen Schnittpunkte  $p, q$  mit der Kurve  $B^2$  wir erhalten mittels der gemeinsamen Berührungsebenen der Kegel  $\beta^2, \gamma^2$ , welche durch die Gerade  $\overline{rs}$  gehen. Die Punkte  $m, n, p, q$  liegen auf der Kurve  $B^2$ ; legen wir durch dieselben eine Ebene und konstruieren ihren Schnitt mit dem Kegel  $\beta^2$ . Die gemeinsamen Berührungsebenen der Kegel  $\alpha^2, \gamma^2$  liefern schließlich die Berührungspunkte  $u, v$  auf dem Kegelschnitt  $C^2$ , welcher als Schnitt der Ebene  $(pquv)$  mit dem Kegel  $\gamma^2$  erhalten wird. Die Punkte  $u, v$  liegen auch auf dem Kegelschnitte  $A^2$ , so daß wir diesen als Schnitt der Ebene  $(mnuv)$  mit dem

Kegel  $\alpha^2$  konstruieren. Mit den drei Kegelschnitten  $A^2, B^2, C^2$  ist die Aufgabe gelöst.

### III.

Ein spezieller Fall der II. Aufgabe ist *das durch acht Berührungsebenen  $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \varphi \kappa \lambda$  gegebene Paraboloid*; die neunte Berührungsebene  $\pi$  ist im Unendlichen. Wir konstruieren die beiden Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$  aus denselben Elementen wie in der II. Aufgabe. Die Leitlinie  $P \equiv \overline{\alpha \beta}$  des Hyperboloides  $\varepsilon^2$  schneidet die Ebene  $\pi$  im unendlich fernen Punkte  $v$ , so daß die durch  $v$  gehende Erzeugende (des zweiten Systems)  $P_1 \parallel P$ . Wir bestimmen die Gerade  $P_1$  auf  $\varepsilon^2$  und legen durch dieselbe die Berührungsebenen  $\tau, \vartheta$  an das zweite Hyperboloid  $\omega^2$ . Die Ebenen  $\alpha, \beta, \tau, \vartheta$  sind gemeinsame Berührungsebenen der Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$ , folglich auch Tangentialebenen des gesuchten Paraboloides  $\varphi^2$ . Diese vier Ebenen gehen durch denselben unendlich fernen Punkt  $v$ ; wir können daher zu ihnen einen parabolischen Berührungszylinder  $\alpha^2$  konstruieren, welcher das Paraboloid  $\varphi^2$  längs einer Parabel  $A^2$  berühren wird; und diese erhalten wir wie folgt. Wir bestimmen die Berührungspunkte  $f, g$  der Ebene  $\alpha$  auf den Hyperboloiden  $\varepsilon^2, \omega^2$ , und die Gerade  $R$ , längs welcher die Ebene  $\alpha$  den Zylinder  $\alpha^2$  berührt; verbinden  $\overline{fg} \equiv F$ . Die Ebene  $\alpha$  berührt (wie in der II. Aufgabe) das Paraboloid  $\varphi^2$  im Schnittpunkte  $(FR) \equiv a$ . Analog erhalten wir die Berührungspunkte  $b, t, u$  der Ebenen  $\beta, \tau, \vartheta$  auf  $\varphi^2$ . Die Punkte  $a, b, t, u$  müssen in einer Ebene  $\sigma$  liegen, weil der Zylinder in diesen vier Punkten das Paraboloid  $\varphi^2$  berührt, ihm sonach umschrieben ist und dasselbe längs einer Parabel  $A^2$  berühren muß; wir konstruieren demnach diese Parabel aus den Punkten  $a, b, t, u$ . Außerdem sind die Schnittlinien der Ebenen  $\overline{\alpha \sigma}, \overline{\beta \sigma} \dots$  Tangenten der Parabel  $A^2$  in den Punkten  $a, b \dots$ , der Schnittpunkt  $(\overline{\alpha \sigma}, \overline{\beta \sigma}) \equiv p$  ist der Pol zur Polare  $\overline{ab}$ , also die Gerade  $X_1$ , welche  $p$  mit dem Mittelpunkte der Sehne  $\overline{ab}$  verbindet, ein Durchmesser der Parabel  $A^2$ ; die Gerade  $X_1$  ist sonach parallel zur Achse der Parabel  $A^2$  und zugleich zur Achse  $X$  des Paraboloides  $\varphi^2$ . Analog bestimmen wir noch einen Punkt  $s$  auf  $\varphi^2$  mittels eines zweiten Tangentialzylinders  $\beta^2$ , welcher parallel ist zu einer anderen (beliebigen) Erzeugenden  $N$  des Hyperboloides  $\varepsilon^2$ , und legen durch den Punkt  $s$  eine Ebene  $\psi \perp X_1$ , welche die Parabel  $A^2$  in zwei Punkten  $m, n$  schneidet;  $\psi$  schneidet ferner die an den Zylinder  $\alpha^2$  durch  $m, n$  gelegten Berührungsebenen  $\mu, \nu$  in den Geraden  $\overline{\psi \mu} \equiv M, \overline{\psi \nu} \equiv T$ , und das Paraboloid  $\varphi^2$  in einem Kegelschnitte  $C^2$ . Diesen verzeichnen wir aus den Punkten  $s, m, n$  und den Tangenten  $M, T$ . Durch den Mittelpunkt  $o$  von  $C^2$  geht die Achse des Paraboloides  $X \parallel X_1$ . Ist  $m_1$  der Schnittpunkt der Ebene  $\mu$  mit der Achse  $X$ , so gibt der Mittelpunkt  $v$  der Strecke  $\overline{om_1}$  den Scheitel des Paraboloides  $\varphi^2$ . Der Scheitel  $v$ , die Achse  $X$  und die Kurve  $C^2$  lösen die Aufgabe. Je nach dem Charakter der Kurve  $C^2$  ist das Paraboloid  $\varphi^2$  elliptisch oder hyperbolisch.



## IV.

Wir fügen noch die Aufgabe hinzu: *ein Paraboloid sei durch acht Punkte  $a, b, c, d, e, f, g, h$  gegeben.* Durch die gegebenen Punkte legen wir zwei windschiefe Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$  wie in der I. Aufgabe. Die unendlich ferne Ebene schneidet das Flächenbüschel  $\Sigma$  ( $\varepsilon^2 \omega^2$ ) in einem Kegelschnittbüschel  $S$ , welches durch die unendlich fernen Kegelschnitte  $K^2, L^2$  der Hyperboloide  $\varepsilon^2, \omega^2$  bestimmt ist; die Grundpunkte des Büschels  $S$  sind die (reel. o. imag.) gemeinsamen Punkte  $m, n, \bar{p}, \bar{q}$  der Kurven  $K^2, L^2$ . Die degenerierten Kegelschnitte des Büschels  $\overline{mn}, \overline{pq}; \overline{m\bar{p}}, \overline{n\bar{q}}; \overline{m\bar{q}}, \overline{n\bar{p}}$  sind unendlich entfernte Gerade von drei Paraboloiden, welche der Aufgabe genügen. Die Diagonalepunkte  $(\overline{mn}, \overline{pq}) \equiv x, (\overline{m\bar{p}}, \overline{n\bar{q}}) \equiv y, (\overline{m\bar{q}}, \overline{n\bar{p}}) \equiv z$  des vollständigen Viereckes  $mn\bar{p}\bar{q}$  sind die unendlich fernen Punkte der Achsen  $X, Y, Z$  der Paraboide und zugleich Ecken des gemeinsamen Poldreieckes  $xyz$  im Büschel  $S$ . Um dieselben zu erhalten, projizieren wir aus einem beliebigen Punkte  $s$  im Raume die unendlich fernen Kurven  $K^2, L^2$ : wir ziehen durch  $s$  Parallele zu fünf Erzeugenden des Hyperboloides  $\varepsilon^2$ , schneiden sie durch eine beliebige Ebene  $\sigma$ , und verbinden die Schnittpunkte durch einen Kegelschnitt  $K_1^2$ ; ebenso bekommen wir die Zentralprojektion  $L_1^2$  der Kurve  $L^2$  aus  $s$  auf  $\sigma$ . Ferner konstruieren wir das gemeinsame Poldreieck  $x_1 y_1 z_1$  der Kurven  $K_1^2, L_1^2$  und verbinden  $\overline{s x_1} \equiv X_1, \overline{s y_1} \equiv Y_1, \overline{s z_1} \equiv Z_1$ . Diese Strahlen sind die Richtungen der Paraboloidachsen. Nun können drei Fälle eintreten: 1. alle vier gemeinsamen Punkte  $m_1, n_1, \bar{p}_1, \bar{q}_1$  der Kurven  $K_1^2, L_1^2$ , somit auch das  $\triangle x_1 y_1 z_1$  sind reell: alle drei Paraboide sind reell und hyperbolisch. 2. Alle vier Punkte sind imaginär (zu zweien konjugiert), so daß nur zwei ihrer Verbindungsgeraden, etwa  $\overline{m_1 n_1}, \overline{\bar{p}_1 \bar{q}_1}$  (Kollineationsachsen von  $K_1^2, L_1^2$ ) reell sind, das  $\triangle x_1 y_1 z_1$  ist jedoch ganz reell; in diesem Falle sind auch alle drei Paraboide reell, aber nur das eine ist hyperbolisch [sein unendlich ferner Punkt  $(\overline{mn}, \overline{pq}) \equiv x$ ], die übrigen zwei sind elliptisch (unendlich ferne Punkte  $y, z$ ). 3. Zwei Grundpunkte sind reell, etwa  $m_1, n_1$ , die übrigen  $c_1, d_1$  konjugiert imaginär, sonach wieder nur zwei Verbindungsgeraden  $\overline{m_1 n_1}, \overline{\bar{p}_1 \bar{q}_1}$  reell; das  $\triangle x_1 y_1 z_1$  hat nur die Ecke  $x_1$  und die Gegenseite  $\overline{\bar{p}_1 \bar{q}_1}$  (nur der Lage nach) reell, während die auf derselben liegenden Ecken  $y_1, z_1$  imaginär sind. Ein Paraboloid ist somit reell und hyperbolisch, die übrigen zwei sind imaginär.

Um nun das erste Paraboloid  $\varphi^2$  zu konstruieren, dessen Achse  $X$  die schon gefundene Richtung  $\overline{s x_1} \equiv X_1$  hat, legen wir durch zwei von den acht gegebenen Punkten, etwa  $a, b$  die Ebene  $\alpha \parallel X_1$  und verzeichnen die Parabel  $A^2$  als Schnitt der Ebene  $\alpha$  mit  $\varphi^2$ . Zu dem Ende ziehen wir in der Ebene  $\alpha$  eine Gerade  $R \parallel X_1$  welche den Büschel  $\Sigma$  in einer Punktinvolution schneidet, deren zwei Punktepaare  $f_1 f_2, g_1 g_2$  wir in den Schnittpunkten der Geraden  $R$  mit den Hyperboloiden  $\varepsilon^2, \omega^2$  erhalten; und da die Gerade  $R$  das Paraboloid  $\varphi^2$  im Unendlichen schneidet, so wird der zweite

Schnittpunkt  $(R \varphi^2) \equiv r$  im *Mittelpunkte* der Involution  $f_1 f_2, g_1 g_2$  liegen. Dieser Mittelpunkt  $r$  wird bestimmt und in der Ebene  $\alpha$  aus den Punkten  $a, b, r$  und der Achsenrichtung  $X_1$  die Parabel  $A^2$  konstruiert. Die durch die gegebenen Punkte  $c, d, e$  gelegte Ebene  $\beta$  schneidet die Parabel  $A^2$  in zwei Punkten  $u, v$  und das Paraboloid  $\varphi^2$  in einem Kegelschnitte  $B^2$ , welchen wir durch die fünf Punkte  $c, d, e, u, v$  legen. Eine durch den gegebenen Punkt etwa  $h$  gelegte Ebene  $\gamma \perp X_1$  schneidet ferner die Kurven  $A^2, B^2$  in vier Punkten, welche mit dem Punkte  $h$  einen Kegelschnitt  $C^2$  bestimmen. Durch den Mittelpunkt  $o$  der Kurve  $C^2$  ziehen wir die Achse des Paraboloides  $X \parallel X_1$ . Die Ebene  $(h X)$  schneidet die Kurve  $C^2$  noch in einem zweiten Punkte  $h_1$ ; wir erhalten leicht den Scheitel  $v$  der Parabel, welche durch die Punkte  $h, h_1$  und die Achse  $X$  bestimmt ist, ohne die Parabel zu verzeichnen.  $v$  ist zugleich Scheitel des Paraboloides  $\varphi^2$ ; durch ihn, die Achse  $X$  und den Kegelschnitt  $C^2$  in der Ebene  $\gamma \perp X$  ist die Aufgabe gelöst. Nach der Art des Kegelschnittes  $C^2$  ist das Paraboloid  $\varphi^2$  elliptisch oder hyperbolisch. Analog werden auch die übrigen zwei Paraboloiden konstruiert, falls sie reell sind.

---



# Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion.\*)

Von  
MILOŠ KÖSSLER  
in Prag.

(Vorgelegt am 19. April 1916.)

Bezeichnen wir mit  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen, welche kleiner sind als  $x$ , so ist die Riemannsche Primzahlfunktion durch die Gleichung

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} \pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

definiert. Nach Riemann ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s \log \zeta(s) ds}{s}, \quad b \geq 1.$$

Die bekannte Riemannsche Primzahlformel

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\rho} [Li(x^{\rho}) + Li(\bar{\rho})] + \int_x^{\infty} \frac{dy}{y(y^2-1) \log y} - \log 2$$

wird aus der vorhergehenden Integraldarstellung dadurch gewonnen, daß man für  $\log \zeta(s)$  eine in der ganzen Ebene gültige Entwicklung einsetzt. Die in dieser Formel vorkommenden komplexen Nullstellen der Funktion  $\zeta(s)$  sind heutzutage noch nicht alle bestimmt.

Zur Berechnung des Integrals brauchen wir aber die Nullstellen gar nicht zu kennen; es genügt uns dazu vollkommen eine solche Reihe für  $\log \zeta(s)$ , welche nicht in der ganzen Ebene, sondern nur in der Um-

---

\*) Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvčíselnou. Rozpravy České Akademie cis. Frant. Josefa. XV. 26. 1916.

gebung des Integralweges gleichmäßig konvergiert. Eine solche Entwicklung kann wirklich mit Hilfe der Lagrangeschen Reihe nach den Potenzen von  $\frac{s-a}{s}$  konstruiert werden.

Die Berechnungen werden zuerst allgemeiner auf der Dirichletschen Reihe

$$D(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^s}$$

durchgeführt. Erstens bekommen wir die Integraldarstellung

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s^r} D(s) ds = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=1}^{[x]} b_k (\log x - \log k)^{r-1} \dots (1)$$

Weiter wird die Formel

$$\left. \begin{aligned} \frac{D(s)}{s^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{s-a}{s}\right)^k, \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{da^k} \{a^{k-3} D(a)\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

bewiesen, wobei  $a$  eine beliebige, in der Konvergenzhalbebene der Dirichletschen Reihe liegende, Konstante bezeichnet.

Wenn wir uns vorläufig auf den Fall  $r \geqq 4$  beschränken, so entfließt daraus

$$\left. \begin{aligned} f(x, r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_k^{(r)}(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{da^k} \{a^{k-3} D(a)\}, \\ J_k^{(r)}(x) &= \frac{1}{(k+r-3)!} \frac{d^{k+r-3}}{ds^{k+r-3}} \{x^s (s-a)^k\}_{s=0}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Diese Reihe ist absolut und in jedem endlichen Intervalle auch gleichmäßig konvergent.

Um jetzt auch den Fall  $4 > r \geqq 1$  zu erledigen, setzen wir in die Formel für  $f(\xi, 4)$  nacheinander  $\xi = x + \epsilon$ ,  $\xi = \sqrt[3]{(x+\epsilon)^2 x}$ ,  $\xi = \sqrt[3]{(x+\epsilon) x^2}$ ,  $\xi = x$  und berechnen aus dem so entstandenen Systeme von linearen Gleichungen die Summen

$$S_k = \sum_{n=1}^{[x]} b_n \log^k n, \quad (k = 0, 1, 2, 3.)$$

So ist z. B.



$$\left. \begin{aligned}
 f(x, 1) &= \sum_{k=1}^{[x]} b_k = \frac{27}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{J}_k(x), \\
 \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d a^k} \{a^{k-3} D(a)\}, \\
 \bar{J}_k(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d s^{k+1}} \left\{ (s-a)^k \cdot \left( \sqrt[3]{(x+\varepsilon)^s} - \sqrt[3]{x^s} \right)^3 \right\}_{s=0}.
 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Die Zahl  $\varepsilon$  ist eine beliebige auf die Ungleichung

$$[x] + 1 > x + \varepsilon$$

gebundene reelle Konstante.

Wenn wir diese allgemeinen Resultate auf den speziellen Fall

$$D(s) = \log \xi(s)$$

benützen, so bekommen wir endlich mittels der letzten Formel eine Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion

$$\left. \begin{aligned}
 f(x) &= \frac{27}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{J}_k(x), \\
 \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d a^k} \{a^{k-3} \log \xi(a)\};
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

dabei kann  $\bar{J}_k(x)$  anstatt durch den vorhergehenden Differentialquotienten auch durch diese Gleichungen definiert werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{J}_k(x) &= J_k(x+\varepsilon) - 3 J_k(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^2 \cdot x}) + 3 J_k(\sqrt[3]{(x+\varepsilon) x^2}) - J_k(x), \\
 (k+1) J_k(x) &= (2k - a \log x) J_{k-1}(x) - (k-1) J_{k-2}(x); \\
 J_0(x) &= \log x, J_1(x) = \log x - \frac{a}{2} \log^2 x.
 \end{aligned} \right\} (5a)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und ist von den Nullstellen der Zetafunktion vollkommen unabhängig. Alles, was wir von dieser Funktion wissen müssen, läßt sich in den folgenden Satz zusammenfassen. Erstens setzen wir die triviale Erkenntnis voraus, daß die Funktion  $\log \xi(s)$  sich in eine Dirichletsche Reihe entwickeln läßt, welche in der Halbebene  $R(s) > 1$  konvergiert, und zweitens halten wir die Werte von  $\xi(a)$ ,  $\xi'(a)$ ,  $\xi''(a)$  u. s. w. für bekannt, wobei  $a$  eine Konstante bedeutet, welche der Bedingung  $R\left(\frac{a}{2}\right) > 1$  entspricht.

Durch die angedeutete Methode können noch andere Entwicklungen für die Funktionen  $f(x)$  und  $\pi(x)$  erreicht werden, von welchen ich da ohne Beweis der Konvergenz die folgenden aufschreibe:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k L_k(x), \\ \beta_k &= \frac{a}{k!} \frac{d_k}{d a^k} \{a^{k-1} \log \xi(a)\}, \\ L_k(x) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \{x^s (s-a)^k\}_{s=0}; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

daraus ergibt sich durch einfache Überlegungen

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k M_k(x). \dots\dots\dots (7)$$

Die Funktionen  $M_k(x)$  werden am einfachsten durch die symbolische Formel definiert

$$\left. \begin{aligned} M_k(x) &= v \cdot L_k(x^v), \\ v^1 &= 0; \quad v^k = \frac{1}{\xi^{(k)}}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7a)$$

Also z. B.

$$M_0(x) = \theta, \quad M_1(x) = -a \frac{\log x}{\xi(2)}; \quad M_2(x) = -2a \frac{\log x}{\xi(2)} + \frac{a^2 \log^2 x}{2 \xi(3)}.$$

Diese Reihe für  $\pi(x)$  enthält nicht mehr die gewissermaßen auf die Kenntnis der Primzahlen gebundenen Moebiuschen Faktoren  $\mu(k)$ , was mittels der Riemannschen Formel nicht erreicht werden kann.

Der Gleichung (6) können wir auch die folgende Form geben:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= Li(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_k + \lambda_k) L_k(x), \\ \lambda_k &= \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k(a-1)^{k-1}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

Wie gewöhnlich, bezeichnet dabei  $Li(x)$  den Integrallogarithmus.



# Über die harmonischen Mittelpunkte eines vierpunktigen Systems.

(Verhandlungen der Česká Akademie etc. Jhrg. XXV., Nr. 31.)

Vom

Hofrat FRIEDRICH PROCHÁZKA

und

Assistenten JOSEPH ŽDÁREK.

Vorgelegt am 27. September 1916.

Hofrat Dr. Emil Weyr hat in zwei besonders interessanten Abhandlungen <sup>1)</sup> die Beziehungen zwischen den Punkten einer biquadratischen Raumkurve zweiter Art und den Berührungspunkten der durch dieselben Punkte gehenden Schmiegungs- und Doppeltangentialebenen abgeleitet. In der späteren Abhandlung: „*Notiz über harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels*“ <sup>2)</sup> weist er auf die innere Verwandtschaft dieser Beziehungen zu den Konstruktionen der harmonischen Mittelpunkte eines Quadrupels hin. Jedoch, da er nicht von den Grundpunkten des vierpunktigen Systems ausgeht, sondern zu ihnen durch eine biquadratische Konstruktion gelangt, wir aber, die harmonischen Mittelpunkte suchend, diese vier Punkte immer im vorhinein als gegeben betrachten, werden wir im folgenden jene Konstruktionen auf dieser Grundlage selbstständig ableiten und ihnen eine andere, von den Eigenschaften der erwähnten Kurve unabhängige, Erklärung geben.

1. Die Haupteigenschaften einer *kubischen Punktinvolution* auf einem Kegelschnitte als bekannt voraussetzend, <sup>3)</sup> widmen wir unsere Aufmerksamkeit zuerst einer solchen auf einem *Kreise*  $K$  liegenden Involution für

---

<sup>1)</sup> „Über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt“ und „Weitere Bemerkungen über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt“, in den Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wiss. in Wien, im Jahre 1875, resp. 1876.

<sup>2)</sup> Sitzungsberichte derselben Akademie im J. 1880.

<sup>3)</sup> Insofern dieselben in der trefflichen Abhandlung Dr. Emil Weyrs: „*Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen*“, Prag 1874 erwähnt sind.

den Fall, daß der entsprechende Involutionseggelschnitt  $J$  eine mit  $K$  konzentrische Ellipse ist.<sup>1)</sup>

Sei  $o$  (Fig. 1) der gemeinschaftliche Mittelpunkt von  $K$  und  $J$ ,  $M, N$  die Achsen von  $J$ , dann gehören zu jedem Punktetripel in der kubischen Involution des Kreises  $K$  in Bezug auf die Achsen  $M, N$ , sowie auf den Mittelpunkt  $o$  symmetrische Tripel. Den Durchschnittspunkten  $g_1, h_1$  von  $K$  und der Achse  $N$  entsprechende (gegenüberliegende) Tangenten  $g_2, g_3 \equiv G_1, h_2, h_3 \equiv H_1$  von  $J$  sind zu  $M$  parallel und stellen zugleich die Scheiteltangenten desselben Kegelschnittes vor. Ebenso sind die den Punkten  $e_1, f_1$  — in denen die Achse  $M$  den Kreis  $K$  schneidet — entsprechenden Tangenten  $E_1, F_1$  parallel mit  $N$  und bilden die übrigen Scheiteltangenten von  $J$  (Fig. 1).

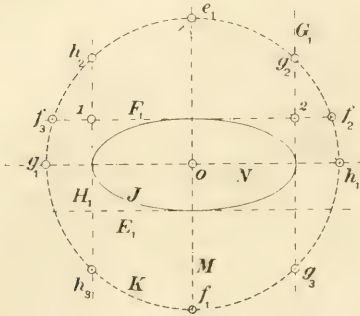


Fig. 1.

Es sind die beiden in Bezug auf  $M$  symmetrischen Tripel  $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$ , als die kubische Involution bestimmend, vorausgegeben, so ist damit auch der Involutionseggelschnitt  $J$  (der bekanntlich die sechs Seiten der beiden Dreiecke  $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$  berührt) bestimmt. Um die dem Punkte  $f_1$  entsprechende Scheiteltangente  $F_1 \equiv f_2, f_3$  zu finden, benützen wir den bekannten Satz:<sup>2)</sup> Die Seiten  $F_1, G_1, H_1$  eines Dreieckes schneiden den Kreis  $K$  in drei Punktepaaren  $f_2, f_3, g_2, g_3, h_2, h_3$ , die mit den drei Punkten  $f_1, g_1, h_1$ , in denen die Scheitel des Dreieckes aus einem beliebigen Punkte  $c_1$  von  $K$  auf diesen Kegelschnitt projiziert werden, drei Tripel derselben kubischen Involution bilden. Demgemäß projizieren wir die Punkte  $g_1, h_1$  aus  $c_1$  auf  $H_1, G_1$  in 1, 2; die Verbindungslinie  $\overline{12} \equiv F_1 \equiv f_2, f_3$ .

Aus der Konstruktion geht sofort heraus, daß die vier Ecken eines durch die Scheiteltangenten des Involutionseggelschnittes gebildeten Rechteckes auf den vier Seiten eines durch die Durchschnittspunkte der Achsen dieses Kegelschnittes mit dem Träger  $K$  gebildeten Quadrats liegen. Sind also  $a, b$  die beiden Halbachsen von  $J$ ,  $r$  der Halbmesser von  $K$ , so findet immer eine von den beiden folgenden Relationen statt:

$$a \pm b = r,$$

je nachdem die Ecken 1, 2... innerhalb oder außerhalb der betreffenden Strecke  $\overline{g_1, e_1}, \overline{e_1, h_1}$ ... liegen. Merken wir uns noch den Umstand, daß zu den beiden Achsendurchschnittspunkten z. B.  $f_1, h_1$  gegenüberliegende

<sup>1)</sup> Keine von den mit  $K$  konzentrischen Hyperbeln kann als ein entsprechender Involutionseggelschnitt angenommen werden, da beide Kegelschnitte soviel reelle gemeinschaftliche Tangenten als Durchschnittspunkte haben müssen.

<sup>2)</sup> Dr. Emil Weyr: „Über die Grundaufgabe der Involutionen dritten Grades“. Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrg. 1872.

Seiten  $F_1 H_1$  der beiden Involutionendreiecke  $f_1 f_2 f_3$ ,  $h_1 h_2 h_3$  sich auf der Verbindungslinie  $c_1 g_1$  beider übriger Achsendurchschnittspunkte (im Punkte 1) schneiden.

Umgekehrt kann jede mit  $K$  konzentrische Ellipse  $J$ , deren Halbachsen der obigen Relation Genüge leisten, als ein Involutionseggelschnitt einer auf dem Kreise  $K$  liegenden kubischen Punktinvolution betrachtet werden.

2. Um alle solche Ellipsen zu bekommen, wähle man auf  $K$  (Fig. 2) einen Punkt  $u$  und fälle von ihm die Senkrechten  $u i$ ,  $u j$  auf die Achsen  $M$  und  $N$ , deren Fußpunkte  $i j$  man durch die Gerade  $R$  verbinde. Bewegt sich nun die Strecke  $i j$  in der Art, daß ihre zwei Punkte  $i j$  die Achsen  $M N$  durchlaufen, so wird bekanntlich jeder Punkt von  $R$  eine Ellipse erzeugen, die  $M N$  für Achsen hat und deren Halbachsen die obige Relation erfüllen. Der Punkt  $u$  ist, wie ersichtlich, das entsprechende Momentanzentrum<sup>1)</sup> für diese elliptische Bewegung der unveränderlichen Strecke  $i j$ .

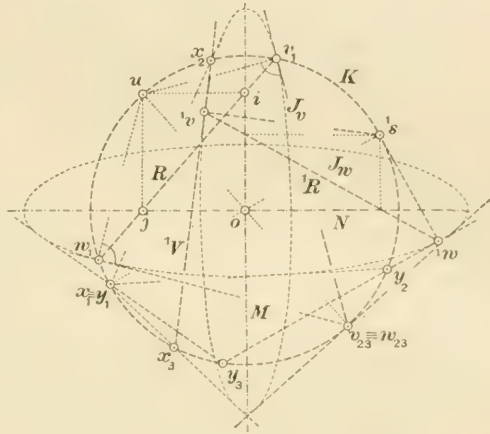


Fig. 2.

Widmen wir nun unsere Aufmerksamkeit den beiden kubischen Involutionen, deren Involutionseggelschnitte,  $J_v, J_w$  durch beide Schnittpunkte  $v_1, w_1$  von  $R$  mit  $K$  erzeugt werden. (Fig. 2.)

Dem Punkte  $v_1$  als Verzweigungspunkte der ersten Involution gehört ein mit ihm ein Verzweigungstriplett bildender Doppelpunkt  $v_{2,3}$  an; derselbe ist ein Schnitt der im  $v_1$  an  $J_v$  geführten Tangente mit dem Kreise  $K$ . Da aber für die angedeutete Lage der beweglichen Geraden  $R$  das Momentanzentrum im Punkte  $u$  liegt, so steht diese Tangente zu  $u v_1$  senkrecht, und der Punkt  $v_{2,3}$  ist der zweite Endpunkt des Kreisdurchmessers  $o u$ . Aus demselben Grunde fällt auch der mit  $w_1$  eine Gruppe der anderen Involution (deren Involutionseggelschnitt  $J_w$  ist) bildender Doppelpunkt  $w_{2,3}$  auf denselben Kreisdurchmesser und ist demzufolge mit  $v_{2,3}$  identisch. Die im  $v_{2,3} \equiv w_{2,3}$  geführte Tangente von  $K$  berührt zugleich auch — als Verbindungslinie zusammenfallender Involutionspaare  $v_2 \equiv v_3, w_2 \equiv w_3$  — beide Ellipsen  $J_v, J_w$ .

Nun ist aber evident, daß die Kegelschnitte  $K J_v J_w$ , ihrer symmetrischen Lage zu  $M$  und  $N$  wegen, dieselben vier Tangenten gemeinschaftlich haben müssen, deren Berührungspunkte mit  $K$  gemeinschaftliche Doppelpunkte beider erwähneter Involutionen sind, zu denen auch

<sup>1)</sup> Centre instantané de rotation.



$u$  gehört. Dieselben Involutionen bezeichnen wir als *beigecordnete kubische Involutionen*.

3. Läßt man die Gerade  $R$  so bewegen, daß ihre zwei Punkte  $i j$  die Kreisdurchmesser  $M N$  durchlaufen, so erzeugt der Punkt  $v_1$  die Ellipse  $J_v$ . Weil aber jeder neuen Lage  ${}^1R$  dieser Geraden ein einziger Punkt  ${}^1v$  (Fig. 2) auf  $J_v$  und ein einziges Momentanzentrum  ${}^1s$  auf  $K$  entspricht, sind diese beiden Reihen  $v_1 {}^1v \dots, u {}^1s \dots$  projektiv. Jede im  ${}^1v$  an  $J_v$  geführte Tangente  ${}^1V$  schneidet  $K$  in einem Punktepaare  $x_2 x_3$ , und ergänzt man denselben mit dem Punkte  $x_1$  zu einem Tripel der Involution, deren Involutionseggelschnitt  $J_v$  ist, so wird auch die in dieser Art abgeleitete Punktreihe  $x_1 \dots$  mit der Reihe  ${}^1s$  projektiv. Fällt nun  ${}^1s$  mit  $u$  zusammen, so deckt sich  $x_1$  mit  $v_{23}$  und umgekehrt, d. h. die beiden Punktfolgen  ${}^1s \dots, x_1 \dots$  liegen involutorisch. Da dasselbe von den beiden anderen Doppelpunkten gültig ist, so ist  $o$  der Mittelpunkt dieser Involution und infolgedessen sind die Punkte  ${}^1s x_1$  die beiden Endpunkte desselben Kreisdurchmessers.

Ist der Punkt  $v_1$  bei der Bewegung der Geraden  $R$  nach  ${}^1v$  gekommen, so gelangt der Punkt  $w_1$  gleichzeitig in die Lage  ${}^1w$ . Die im  ${}^1w$  auf  $J_w$  gezogene Tangente schneidet  $K$  in  $y_2$  und  $y_3$  und konstruiert man den mit diesen ein Tripel der Involution — die durch  $J_w$  als Involutionseggelschnitt bestimmt ist — bildenden Punkt  $y_1$ , so ist dieser Kreispunkt wieder dem  ${}^1s$  gegenüberliegend, also mit  $x_1$  identisch.

Ist umgekehrt  $x_1 \equiv y_1$  der gemeinschaftliche Punkt beider beigecordneter kubischen Involutionen auf  $K$ , so ist die Verbindungslinie  ${}^1R$  der Berührungspunkte  ${}^1v {}^1w$  beider diesem Punkte entsprechender Tangenten mit den Ellipsen  $J_v J_w$  eine von den Lagen der beweglichen Geraden  $R$ , durch deren elliptische (oben definierte) Bewegung diese Punkte beide Involutionseggelschnitte erzeugen; das zugehörige Momentanzentrum ist der dem Punkte  $x_1 \equiv y_1$  gegenüberliegende Punkt  ${}^1s$  auf  $K$ .

4. Bevor wir aber zu den harmonischen Mittelpunkten eines vierpunktigen Systems schreiten, müssen wir noch auf eine für unsere Zwecke passende Konstruktion *der harmonischen Mittelpunkte zweiten Grades einer dreipunktigen Gruppe* aufmerksam machen.

Dr. Emil Weyr hat in der Abhandlung „Über Polargruppen“<sup>1)</sup> die Aufgabe in folgender Art gelöst:

„Es seien die Grundpunkte  $a b c$  sowie der Pol  $x$  auf einem Kegelschnitte  $K$  gegeben. Legt man in  $a b c$  an  $K$  die Tangenten und verbindet die Ecken des entstehenden Dreieckes mit den Berührungspunkten  $a b c$  der gegenüberliegenden Seiten, so werden die erhaltenen Strahlen, welche sich in einem Punkte  $o$  schneiden, den Kegelschnitt  $K$  in den Punkten  $a' b' c'$  treffen, welche zu  $a, b, c$  bezüglich den Punkten  $b c, c a, a b$  konjugiert harmonisch sind. Projiziert man die Punkte  $a' b' c'$  aus dem Punkte  $x$  von  $K$  auf die drei Geraden  $\overline{b c}$ , resp.  $\overline{c a}$ ,  $\overline{a b}$ , so erhält man drei mit  $o$  in

<sup>1)</sup> Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Jahrg. 1880.

einer Geraden liegende Punkte  $a_0, b_0, c_0$ , welche Gerade den Kegelschnitt  $K$  in den gesuchten Mittelpunkten  $x_1, x_2$  2. Grades trifft.“

Projiziert man die vier harmonischen Punkte  $bca a'$  aus  $x$  auf die Gerade  $\overline{bc}$  in die Punkte  $bcm a_0$ , so ist  $m \equiv (\overline{xa} \overline{bc})$  eine Ecke des diagonalen Dreieckes  $mnp$  [ $n \equiv (\overline{ab} \overline{xc})$ ,  $p \equiv (\overline{ca} \overline{xb})$ ] des vollständigen Viereckes  $abcx$ ;  $a_0$  muß also auf der Seite  $\overline{np}$  desselben Dreieckes liegen; ebenso fällt  $b_0$  auf die Seite  $\overline{mp}$  und  $c_0$  auf  $\overline{mn}$  zu. Man kann also sagen: *Das Dreieck  $abc$  der Grundpunkte liegt mit dem Diagonaldreiecke des Viereckes  $abcx$  perspektivisch, wobei die perspektive Achse den  $K$  in den beiden harmonischen Mittelpunkten 2. Grades schneidet.*<sup>1)</sup>

5. Indem wir zum eigentlichen Thema hinschreiten, wählen wir auf einer Geraden  $P$  (Fig. 3) vier Punkte  $\alpha \beta \gamma \delta$  als Grundpunkte des vierpunktigen Systems und konstruieren für jeden dieser Punkte als Pol die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades in Bezug auf die drei übrigen als Grundpunkte.

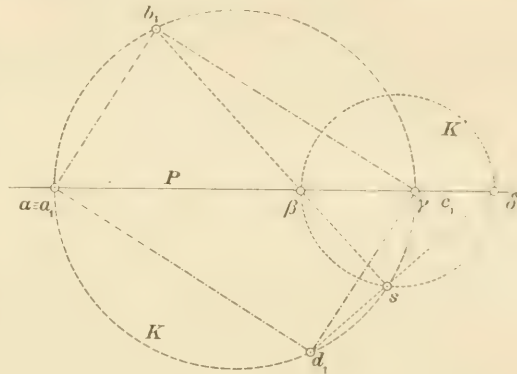


Fig. 3.

Zu dem Zwecke, vorausgesetzt, daß die Strecken  $\alpha \gamma, \beta \delta$  sich teilweise decken, zeichnet man über diese Strecken als Durchmesser Kreise  $K$  und  $K'$  und projiziert diese Punkte aus einem der Schnittpunkte  $s$  derselben auf den Kreis  $K$  in die ein Rechteck bildenden Punkte  $a_1 \equiv \alpha, b_1, c_1 \equiv \gamma, d_1$ .

Im folgenden werden wir immer von solchen vier Punkten auf dem Kreise  $K$  ausgehen und uns bei weiteren Konstruktionen mit solchen Projektionen begnügen.

Um also die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades  $a_2, a_3$  auf dem Kreise  $K$  (Fig. 4) für den Pol  $a_1$  in Bezug auf die Grundpunkte  $b_1, c_1, d_1$  zu bekommen, zeichne man nach dem vorgehenden Abschnitte das diagonale Dreieck des Rechteckes  $a_1 b_1 c_1 d_1$ . Die eine Seite desselben ist die Gerade im Unendlichen, die beiden anderen  $M, N$  sind die zu einander senkrechten und mit den Seiten des Rechteckes parallelen Kreisdurchmesser. Dieses Dreieck liegt mit dem Dreiecke  $b_1 c_1 d_1$  perspektivisch, und die perspektivische Achse  $\overline{pk}$  [ $p \equiv (N \overline{b_1 c_1}), k \equiv (M \overline{c_1 d_1})$ ] schneidet  $K$  in den gesuchten Punkten  $a_2, a_3$ . Ist analog  $r \equiv (N \overline{a_1 d_1}), q \equiv (M \overline{a_1 b_1})$  und sind  $b_2, b_3, c_2, c_3, d_2, d_3$  die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades für die Pole  $b_1, c_1, d_1$  und für die übrigen Tripel der vier Punkte  $a_1, b_1, c_1, d_1$  als Grundpunkte, so liegen  $b_2, b_3$  auf  $\overline{kr}$ ,  $c_2, c_3$  auf  $\overline{qr}$  und  $d_2, d_3$  auf  $\overline{pq}$ . Es liegt also immer ein Paar der

<sup>1)</sup> Diese Konstruktion wurde auch von Th. Monin in der Zeitschrift: „Časopis pro pěst. matematiky a fysiky“, XVI. Jahrg., S. 242, abgeleitet.





Bestimmen wir nun ein diese Involution auf  $K$  erzeugenden Kegelschnittbüschel.

Ist  $f \equiv (M K)$  (Fig. 4) ein Grundpunkt,  $A \equiv \overline{f a_1 a_2 a_3}$ ,  $B \equiv \overline{f b_1 b_2 b_3}$  zwei der degenerierten Kegelschnitte des Büschels, so sind  $k \equiv (a_2 a_3 b_2 b_3)$ ,  $m \equiv (a_2 a_3 f b_1)$   $l \equiv (b_2 b_3 f a_1)$  die anderen Grundpunkte desselben, und ein beliebiger Kegelschnitt  $X$  dieses Kegelschnittbüschels (Fig. 4) schneidet  $K$  außer in  $f$  noch in drei Punkten  $x_1 x_2 x_3$ , die eine Gruppe der erwähnten Involution bilden. Das Büschel erhält noch den dritten degenerierten Kegelschnitt  $F \equiv \overline{f k m l}$ ; die Gerade  $\overline{f k} \equiv M$  schneidet  $K$  noch in  $f_1$ ,  $\overline{m l}$  in  $f_2, f_3$ ; somit ist diese Gerade eine Scheiteltangente von  $J$ .<sup>1)</sup>

6. Zieht man an jeden Kegelschnitt des Büschels ( $A B \dots F \dots X \dots$ ) Tangente in  $f$ , so schneidet dieser Tangentenbüschel  $K$  in einer zu dem Kegelschnittbüschel projektiven Punktreihe  $a_0 b_0 \dots f_0 \dots x_0 \dots$  (Fig. 4); in Bezug auf die degenerierten Kegelschnitte  $A B F$  ist wohl  $a_0 \equiv a_1$ ,  $b_0 \equiv b_1$ ,  $f_0 \equiv f_1$ .

Legt man nun auf  $K$  eine neue, mit der kubischen Involution  $a_1 a_2 a_3$ ,  $b_1 b_2 b_3$ ,  $c_1 c_2 c_3 \dots x_1 x_2 x_3 \dots$  projektive Punktreihe  $a b c \dots x \dots$  so, daß  $a \equiv a_1$ ,  $b \equiv b_1$ ,  $c \equiv c_1$  ist, dann ist dieselbe auch mit dem Kegelschnittbüschel  $A B C \dots X \dots$  und mit der Punktreihe  $a_0 b_0 c_0 \dots x_0 \dots$  projektiv; die Punkte  $a \equiv a_0$  und  $b \equiv b_0$  sind Doppelpunkte der genannten konjektiven einfachen Punktreihen, die eine involutorische Reihe bilden, wie sogleich gezeigt werden wird.

Denn legt man durch die Punkte  $f k l m c (\equiv c_1)$  den Kegelschnitt  $C$  (Fig. 4) des Büschels ( $f k m l$ ), so liegt der Pol  $\pi$  der Geraden  $\overline{m l}$  in Bezug auf  $C$  in der Seite  $\overline{\mu \nu}$  [ $\mu \equiv (f m k l)$ ,  $\nu \equiv (f l k m)$ ] des Diagonaldreieckes  $\mu \nu \varrho$  des dem  $C$  eingeschriebenen Viereckes  $f k l m$ , und ist also mit dem Schnittpunkte von  $\overline{\mu \nu}$  mit der in  $m$  an  $C$  gelegten Tangente identisch. Sucht man aber dieselbe Tangente mit Anwendung des Pascalschen Lehrsatzes als die unendlich kleine Seite des eingeschriebenen Sechsecks  $m k c f l m$ , so ist  $\overline{\mu \nu}$  zugleich die Pascalsche Gerade, durch deren Schnittpunkt  $\pi$  mit  $\overline{c f}$  diese Tangente gehen muß. Demzufolge sind  $\overline{c f}$   $\overline{l m}$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $C$  zu einander konjugiert, und ihre Endpunkte  $c f$ ,  $l m$  werden aus jedem Punkte von  $C$  durch vier harmonische Strahlen projiziert. Wählt man für das Projektionszentrum den Punkt  $f$  und sucht man die Schnittpunkte  $c c_0 a b$  der projizierenden Strahlen mit  $\overline{K}$ , so liegen dieselben harmonisch auf  $K$ , und die Verbindungslinie  $\overline{c c_0}$  homologischer Punkte beider obgenannter Punktreihen muß durch den Schnittpunkt  $\sigma$

<sup>1)</sup> Bezeichnet man in Fig. 2 die Doppelpunkte nach Weyr's Art mit  $d_1 d_2 d_3 d_4$  und die Verzweigungspunkte beider beigeordneter kubischen Involutionen mit  $v_1 v_2 v_3 v_4$  resp.  $w_1 w_2 w_3 w_4$ , so ist man im Stande in Bezug auf die Fig. 4 den Satz auszusprechen: „Die Tripel  $d_1 v_1 w_1, \dots, d_4 v_4 w_4$  gehören derselben kubischen Involution an; die Punkte z. B.  $v_1 w_1$  sind harmonische Mittelpunkte 2. Grades für  $d_1$  als Pol und  $d_2 d_3 d_4$  als Grundpunkte; damit ist eine neue Bestimmungsart beider durch 4 Doppelpunkte bestimmter kubischer Involutionen gegeben.“

beider Doppelpunktstangenten in  $a \equiv a_0$  und  $b \equiv b_0$  an  $K$  gehen, und damit ist die involutorische Lage beider Punktreihen bewiesen.

Der durch  $d_1 d_2 d_3$  gehende Kegelschnitt  $D$  des Büschels liegt zu  $C$  symmetrisch in Bezug auf die Achse  $M$ ; ihm entspricht die zu  $\overline{f c_0}$  symmetrische Tangente  $\overline{f d_0}$ ; die Verbindungslinie  $\overline{\sigma d_0}$  schneidet  $K$  im  $d \equiv d_1$ , welcher Punkt also *der vierte Doppelpunkt* der Reihe  $a b c \dots$  und der kubischen Involutionsreihe ist.

Um für einen beliebigen Punkt  $x$  der Reihe  $a b c \dots$  das homologische Punktetripel  $x_1 x_2 x_3$  der kubischen Involution zu bekommen, suche man zuerst den Punkt  $x_0$  als Durchschnitt des Kreises  $K$  mit dem Strahle  $\overline{\sigma x}$ , worauf der durch die Punkte  $f k l m$  gehender und die Gerade  $\overline{f x_0}$  tangierender Kegelschnitt  $X$  den Kreis  $K$  in den gesuchten Punkten  $x_1 x_2 x_3$  trifft (Fig. 4).

*Die auf diese Art konstruierten Punkte  $x_1 x_2 x_3$  nennt man die harmonischen Mittelpunkte 3. Grades für den Pol  $x$  in Bezug auf  $a_1 b_1 c_1 d_1$  als Grundpunkte.*

Jedem Grundpunkte, z. B.  $a$  als Pole gehören demnach die Punkte  $a_1 \equiv a, a_2, a_3$  als harmonische Mittelpunkte 3. Grades. Dem Pole  $f \equiv (K M)$  gehört das Tripel  $f_1 f_2 f_3$ , wo  $f_1$  der andere Schnittpunkt von  $K$  und  $M$  und  $\overline{f_2 f_3}$  die Scheiteltangente von  $J$  ist. Analoges gilt auch natürlich für den Punkt  $e \equiv f_1$  sowie für die Punkte  $g_1 h_1$ , in denen  $N$  den Kreis  $K$  trifft.

7. Die soeben angeführte Konstruktion ist nur dann vorteilhaft, wenn es sich um die Mittelpunkte für einen einzigen Pol handelt, da man bei dieser kubischen Aufgabe die Konstruktion eines allgemeinen Kegelschnittes nicht vermeiden kann. Geht es aber um diese Punkte für verschiedene Pole, bezogen auf dieselben vier Grundpunkte, die z. B. auf einer Geraden  $P$  als  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$  gegeben sind, so kann man diese Aufgabe folgenderweise durchführen.

Man konstruiert zuerst für zwei der vier Punkte, etwa  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  als Pole die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades  $\alpha_2 \alpha_3$  resp.  $\beta_2 \beta_3$  für  $\beta_1 \gamma_1 \delta_1$  resp.  $\alpha_1 \gamma_1 \delta_1$  als Grundpunkte.<sup>1)</sup>

Damit ist die Projektivität zwischen der kubischen Involution  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \beta_1 \beta_2 \beta_3, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$  und der einfachen Punktreihe  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$  bestimmt und man kann die irgend einem Punkte  $\xi$  der letzteren als Pole entsprechende Punktgruppe  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  der ersteren darstellen.

Zu dem Zwecke<sup>2)</sup> projiziert man beide Punktreihen aus einem beliebigen Punkte, z. B. aus dem unendlich entfernten Punkte  $s_\infty$  (Fig. 5) in der zu  $P$  senkrechten Richtung, durch zwei konlokale projektiven Strahlenbüschel, von denen das eine kubisch-involutorisch und das andere

<sup>1)</sup> Am besten projiziert man die Grundpunkte wie in Fig. 3 in ein Rechteck aus  $s$  auf einen Kreis, führt dann die Konstruktion wie in Fig. 4 aus und projiziert die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades von  $s$  auf  $P$  in  $\alpha_2 \alpha_3, \beta_2 \beta_3$  zurück.

<sup>2)</sup> Anders wurde dieselbe Aufgabe von Weyr in der Abhandlung: *Weitere Bemerkungen* etc. (siehe Seite 1, erste Bemerkung) auf der Seite 3 und 4 behandelt.

einfach ist. Zieht man durch einen beliebigen Punkt — in Fig. 5 wurde der auf  $P$  im Unendlichen liegende Punkt  $\sigma_\infty$  gewählt — zwei beliebige Strahlen  $AB$ , die die Strahlen  $\overline{s_\infty \alpha_1}$ ,  $\overline{s \beta_1}$  in  $a_1$  resp.  $b_1$  und die Strahlen des kubisch-involutorischen Büschels  $s_\infty (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$  und  $s_\infty (\beta_1 \beta_2 \beta_3)$  in  $a_1 a_2 a_3$  resp.  $b_1 b_2 b_3$  treffen, so ist durch diese 6 Punkte und durch  $s_\infty$  als Doppelpunkt eine kubische Kurve  $K$  bestimmt, die man in bekannter Weise zeichnen kann.<sup>1)</sup>

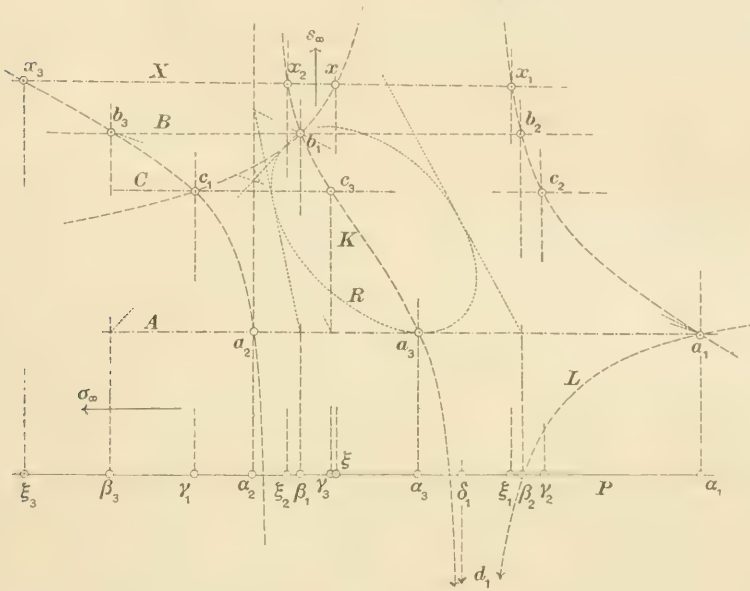


Fig. 5.

Auf dieser Kurve  $K$  ist nun durch die zwei geraden Gruppen  $a_1 a_2 a_3$ ,  $b_1 b_2 b_3$  eine kubische Involution bestimmt. Der Punkt  $\sigma_\infty$  ist ihr Zentrum. Jeder durch  $\sigma_\infty$  gehende Strahl — z. B.  $C$ , der durch den Schnittpunkt  $c_1$  von  $K$  mit  $\overline{s_\infty \gamma_1}$  geht — trifft  $K$  in einem Tripel  $c_1 c_2 c_3$  derselben Involution.

Die beiden projektiven Strahlenbüschel  $\sigma_\infty (ABC \dots X \dots)$  und  $s_\infty (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \xi \dots)$  erzeugen einen Kegelschnitt  $L$  (in unserem Falle eine gleichseitige Hyperbel), der durch die fünf Punkte  $s_\infty \sigma_\infty a_1 b_1 c_1$  bestimmt ist, und natürlich auch durch  $d_1 \equiv (\overline{s_\infty \delta_1} K)$  geht.

<sup>1)</sup> Dr. Emil Weyr: *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*, Leipzig 1869, Seite 106. In Fig. 5 wurde — in Bezug auf die Konstruktion Weyr's —  $a_1$  für den Mittelpunkt des einfachen Strahlenbüschels, der mit dem projektiven quadratischen Involutionbüschel mit dem Mittelpunkte  $s_\infty$  die Kurve  $K$  erzeugt, gewählt. Der einfache Strahlenbüschel wurde durch den Strahl  $\overline{s_\infty \alpha_2}$ , der quadratisch-involutorische durch  $A$  geschnitten, für welchen Fall der Kegelschnitt  $R$  (Fig. 5) Direktionskegelschnitt ist.





ecke  $x_1 x_2 x_3 \dots$  derselbe, was bei uns, wie die Punkte (f) (e) (g) (h) zeigen, nicht vorkommt.<sup>1)</sup>

Also gehört jedem Pole  $x$  durch die angeführte Konstruktion nur ein einziger Punkt ( $x$ ) und umgekehrt, d. h. die Punkte (a) (b) ... (x) ... bilden eine mit  $a b \dots x \dots$  projektive Punktreihe und erfüllen eine Kurve  $L$ , die evident zu den Achsen  $M$  und  $N$  symmetrisch ist (Fig. 7). Um

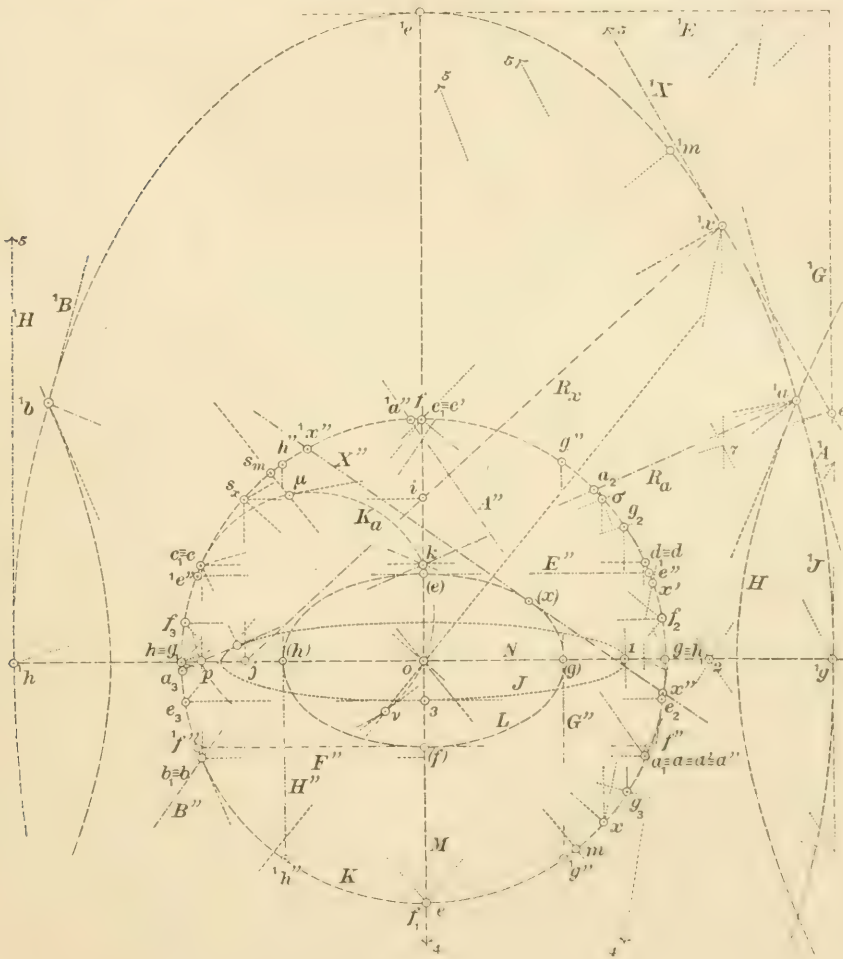


Fig. 7.

den Grad derselben festzustellen, stelle man sich vor, daß ein Punkt ( $x$ ) nur dann auf  $K$  fallen kann, wenn zugehöriges Punkttripel der Involution in einen Doppel- und Verzweigungspunkt degeneriert, wobei sich ( $x$ ) mit dem ersteren vereinigt.  $L$  schneidet  $K$  also in vier Punkten, ist also ein Kegelschnitt (Fig. 7).

<sup>1)</sup> Dies geschieht nur dann, wenn die Grundpunkte harmonisch liegen.

Die Verbindungslinien  $A'' B'' \dots X'' \dots$  der harmonischen Mittelpunkte 2. Grades werden eine Kurve umhüllen, von der bewiesen wird, daß sie mit  $L$  identisch ist. Stellen wir die Klasse dieser Umhüllungslinie fest. Hat man für das Tripel  $x_1 x_2 x_3$  den Punkt  $(x)$  konstruiert und zieht man von diesem die beiden Tangenten an  $K$ , so fallen für den Berührungspunkt  $m_x$  einer von ihnen als Pol die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades in Bezug auf die Grundpunkte  $x_1 x_2 x_3$  in dem Berührungspunkte  $n_x$  der anderen Tangente zusammen und umgekehrt.<sup>1)</sup> Wäre nun  $x$  mit  $m_x$  (oder  $n_x$ ) identisch, so wäre diese (oder die erste) Tangente von  $K$  zugleich die Tangente  $X''$  der gesuchten Umhüllungslinie. Der Anzahl solcher gemeinschaftlichen Tangenten gleicht, wie ersichtlich, der Menge der Doppelpunkte beider verwandter Punktreihen  $x, \dots$  und  $m_x n_x \dots$ . Jedem Punkte  $x$  der ersten Reihe entsprechen zwei Punkte  $m_x n_x$  der anderen. Zieht man umgekehrt in  $m_x$  an  $K$  Tangente, so schneidet dieselbe  $L$  in zwei Punkten  $(x)$   $(y)$  denen in der Polreihe zwei Pole  $x$   $y$  entsprechen; die soeben besprochene Verwandtschaft ist damit zwei-zwei-deutige, hat also vier Doppelpunkte. Dann hat auch unsere Umhüllungslinie mit  $K$  vier gemeinschaftliche Tangenten und kann also nur ein Kegelschnitt sein, dessen Achsen sich (der Symmetrie wegen) mit  $M$  und  $N$  decken. Die Geraden  $E'' F'' G'' H''$  sind Scheiteltangenten dieses Kegelschnittes, der also mit  $L$  identisch sein muß.

Da jede Tangente  $X''$  von  $L$  durch den Punkt  $(x)$  desselben Kegelschnittes geht, so berührt die Gerade  $X''$  den  $L$  in  $(x)$ . Die Schar der Tangenten  $X''$  ist somit mit der Punktreihe  $(x)$  und dadurch auch mit der Polreihe  $x$  projektiv. Da man schon für die Pole  $e f g h$  die homologischen Strahlen  $E'' F'' G'' H''$  kennt, so ist damit die Projektivität mehr als genügend bestimmt, und man kann für jeden Pol  $x$  die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades  $x''^1 x''^2$  auf dem homologischen Strahle  $X''$  bestimmen, ohne früher die harmonischen Mittelpunkte 3. Grades, darzustellen.<sup>2)</sup>

Um die Konstruktion zu vereinfachen, ziehe man für jedes der Dreiecke  $x_1 x_2 x_3$  die Gerade  $^1X$ , welche die drei Punkte, in denen jede Seite derselben die im gegenüberliegenden Scheitel an  $K$  geführte Tangente schneidet, verbindet (Fig. 6). Diese Gerade  $^1X$  ist, wie ersichtlich, Polare von  $(x)$  in Bezug auf  $K$ ; damit werden alle solche Geraden  $^1X$  einen zu  $L$  für  $K$  als Basiskurve polarreciproken Kegelschnitt  $^1J$  umhüllen. Da  $L$  durch die Doppelpunkte der kubischen Involution  $x_1 x_2 x_3$  geht, so berühren die in denselben an  $K$  geführten Tangenten zugleich  $J$  und  $^1J$ .

1) E. Weyr: „Über Polargruppen“, Sitzungsber. der k. Ak. d. Wiss. in Wien 1880, Seite 3.

2) Zu der konstruktiven Behandlung ziehe man über  $(g)$   $(h)$  und  $(e)$   $(f)$  (Fig. 7) als Durchmesser Kreise und beziehe dieselben zu  $L$  affin mit der negativen Charakteristik; durch diese Affinitäten wird jeder Punkt  $(x)$  in die zwei mit  $x$  auf demselben Kreisdurchmesser  $ox$  liegenden Punkte überführt, womit umgekehrt eine sehr einfache Konstruktion von  $(x)$  und  $X''$  gegeben ist.



Einen Punkt der Scheiteltangente  ${}^1G$  von  ${}^1J$  (Fig. 7) bekommt man, wenn man die Seite  $\overline{g_1 g_2}$  mit der Tangente im  $g_3$  an  $K$  schneidet. Trifft nun  $\overline{g_2 g_3}$  die  $N$ -Achse in dem Scheitel  $l$  von  $J$ , und ist  ${}^1g$  der Scheitel von  ${}^1J$  auf  ${}^1G$ , so zeigt eine einfache Rechnung, daß  $\overline{o{}^1g} = r(2r - a) : (2a - r)$  ist, wo  $r$  Halbmesser von  $K$ ,  $a = \overline{o1}$  die Halbachse von  $J$  bedeutet. Ist nun  $b = r - a$  die andere Halbachse von  $J$ , und konstruiert man ebenso mit Anwendung des Dreiecks  $e_1 e_2 e_3$  die Scheiteltangente  ${}^1E$  mit dem Scheitel  ${}^1e$  von  ${}^1J$ , so gilt  $\overline{e_1{}^1e} = r(r + b) : (r - 2b) = r(2r - a) : (2a - r)$ .

Es ist dadurch (Fig. 7)  $\overline{o{}^1g} = \overline{e_1{}^1e}$ , oder  $\overline{o{}^1e} - \overline{o{}^1g} = r$ , d. h. die Differenz der Halbachsen von  ${}^1J$  gleicht dem Halbmesser von  $K$ ;  ${}^1J$  ist somit (Abschn. 1) ein Involutionskegelschnitt einer neuen kubischen Involution auf  $K$ . Da nun  $KJ{}^1J$  dieselben vier Tangenten besitzen, sind die beiden kubischen Involutionen *beigeordnet*. (Abschn. 2.)

Die durch  ${}^1J$  auf  $K$  erzeugte Involution ist, wie ersichtlich auch zu den Achsen  $M$  und  $N$  symmetrisch, d. h. den Punkten  $efgh$  (Fig. 7) gegenüberliegenden Tangenten  ${}^1E{}^1F{}^1G{}^1H$  von  $J$  sind ihre Scheiteltangenten. Da die Verbindungslinie  $\overline{f\overline{h}}$  durch den Schnittpunkt von Scheiteltangenten  ${}^1G{}^1E$  geht, so sind dieselben (Abschn. 1) den Punkten  $g, e$  entsprechend.

Die Tangenten  ${}^1X \dots$  von  ${}^1J$  haben wir mit Anwendung der Dreiecke  $x_1 x_2 x_3$  (als Pascalsche Geraden) konstruiert. Da sie zugleich Polaren von  $(x)$  auf  $K$  sind, so bilden sie eine zu der Polreihe  $x$  auf  $K$  projektive Schar. Man kann sie jedoch auch als den Punkten von  $K$  entsprechende Tangenten von  ${}^1J$  konstruieren, indem man durch diese Punkte beide Tangenten an  ${}^1J$  zieht und ihre Schnittpunkte mit  $K$  verbindet. Da man nun für die vier Punkte  $efgh$  durch das erste sowie durch das andere Verfahren dieselben vier Tangenten  ${}^1E{}^1F{}^1G{}^1H$  erlangt, so muß auch jedem weiteren Punkte  $x$  der Polreihe dieselbe Tangente von  ${}^1J$  durch beide Konstruktionen gehören.

Ist  ${}^1x$  der Berührungspunkt von  ${}^1X$  mit  ${}^1J$ , so bilden diese Punkte auf  ${}^1J$  eine zu der Polreihe  $x$  auf  $K$  projektive Punktreihe. Da  ${}^1x$  evident ein Pol der Geraden  $X''$  — auf der die harmonischen Mittelpunkte 2. Grades  $x''{}^1x''$  liegen — in Bezug auf  $K$  ist, so kommt man somit zur folgenden neuen Konstruktion dieser Punkte:

*Man ermittelt den Berührungspunkt  ${}^1x$  der dem Pole  $x$  entsprechenden (gegenüberliegenden) Tangenten  ${}^1X$  in der kubischen Involution, welche  ${}^1J$  zum Involutionskegelschnitt hat; die Polare  $X''$  von  ${}^1x$  an  $K$  enthält die gesuchten harmonischen Mittelpunkte 2. Grades.*

Der dem Punkte  $x$  gegenüberliegende Kreispunkt  $s_x$  ist (Abschn. 3, Schluß) das Momentanzentrum für jene Lage  $R_x$  der beweglichen Geraden  $R$ , die durch den Punkt  ${}^1x$  geht, welcher den zweiten Involutionskegelschnitt  ${}^1J$  erzeugt. Fällt man also von  $s_x$  (Fig. 7) die Senkrechten  $\overline{s_x i}$ ,  $\overline{s_x j}$  zu  $M$  und  $N$ , erhält man  $R_x \equiv \overline{ij}$ ; da bei der elliptischen Bewegung der Geraden  $R_x$  der Punkt  ${}^1x$  die Ellipse  ${}^1J$  erzeugt, muß  $\overline{o{}^1g} = \overline{i{}^1x}$ , womit

eine neue Bestimmungsart von  ${}^1x$  und damit auch der harmonischen Mittelpunkte 2. Grades gegeben ist.

Für einen der vier Grundpunkte z. B.  $a_1$  wird  $c_1$  (Fig. 7), Momentanzentrum, und demzufolge ist  $R_a \equiv \overline{kp} \equiv \overline{a_2 a_3}$ . Die zugehörige Tangente  ${}^1A$  von  ${}^1J$  geht durch den Schnittpunkt von  $a_2 a_3$  mit der Kreistangente in  $a_1$ , welcher also zugleich der Berührungspunkt  ${}^1a$  von  ${}^1A$  mit  ${}^1J$  wird. Somit ist  $\overline{k}{}^1a = \overline{o}{}^1g = \overline{i}{}^1x$  und  $\overline{p}{}^1a = \overline{j}{}^1x = \overline{o}{}^1e$ , so daß die Halbachsen von  ${}^1J$  sehr leicht bestimmbar sind. Man sieht auch sofort, daß sich für jeden der Grundpunkte z. B.  $a \equiv a_1$  als Pol einer der beiden harmonischen Mittelpunkte  $a''$  mit diesem Pole vereinigt und der andere  ${}^1a''$  mit jenem harmonisch zu  $a_2 a_3$  liegt.

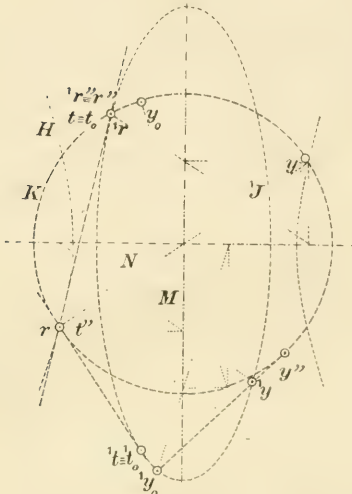


Fig. 8.

10. Zu einer anderen Konstruktion der harmonischen Mittelpunkte 2. Grades des vierpunktigen Systems gelangt man wie folgt:

Jedem Pole  $x$  gehören immer zwei solche Mittelpunkte  $x'' {}^1x''$ . Ist umgekehrt  $y''$  (Fig. 8) der harmonische Mittelpunkt 2. Grades und sucht man den zugehörigen Pol  $y$ , so ziehe man in  $y''$  an  $K$  Tangente, die  ${}^1J$  in zwei Punkten  ${}^1y, {}^1y_0$  trifft, denen in der Polreihe auf  $K$  zwei Punkte  $y, y_0$  projektivisch entsprechen. Die Verwandtschaft der Pole mit den harmonischen Mittelpunkten 2.

Grades ist somit *zwei-zweideutige*.

Die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare beider Punkt-reihen werden eine Kurve 4. Klasse umhüllen, da durch jeden Kreis-punkt 4 solche Strahlen durchgehen; in unserem Falle zerfällt jedoch diese Kurve in zwei *zusammenfallende Kegelschnitte*  $H$ . Denn nimmt man den Doppelpunkt  $r$  der kubischen Involution (Fig. 8), deren Involutionskegel-schnitt  ${}^1J$  ist, für den Pol, so berührt die entsprechende Tangente  $\overline{r}{}^1r$  den Kegelschnitt  ${}^1J$  in dem zugehörigen Verzweigungspunkte  ${}^1r$ , dessen Polare zu  $K$  auf diesem die miteinander und mit  ${}^1r$  vereinigten Mittelpunkte  $r'' \equiv {}^1r'' \equiv {}^1r$  ausschneidet; die unendlich nahe benachbarten Tangenten  $\overline{r}{}^1r', \overline{r}{}^1r''$  unserer Kurve berühren somit dieselbe in  $r$ . Betrachtet man jedoch denselben Doppelpunkt  $r$  als einen harmonischen Mittelpunkt 2. Grades  $t''$  und sucht man die zugehörigen Pole, so ziehe man (nach dem obigen) in  $t''$  Tangente an  $K$ , die zugleich Tangente von  ${}^1J$  ist und zwar dem Punkte  ${}^1r$  entsprechend. Den zusammenfallenden Schnittpunkten  ${}^1t \equiv {}^1t_0$  derselben mit  ${}^1J$  gehören somit die zusammenfallenden Pole  $\overline{t} \equiv \overline{t_0}$ , die sich mit  ${}^1r$  vereinigen. Die in  $t''$  sich schneidenden Tangenten  $\overline{t''}{}^1t, \overline{t''}{}^1t_0$  der Kurve 4. Klasse sind dadurch wieder unendlich nahe benachbart.

Aus dem gesagten ist evident, daß  $r^1 r^2$  Doppeltangente der erwähnten Kurve ist, deren beide Berührungspunkte sich in  $r$  vereinigen. Da nun die Kurve 4. Klasse ist und vier solche Doppeltangenten besitzt, muß sie notwendig in einen Doppelkegelschnitt  $H$  zerfallen. Faßt man die Bedeutung dieser Kurve ins Auge, so sieht man, daß die von einem Punkte  $x$  von  $K$  als Pole an dieselbe geführten Tangenten in  $K$  die beiden harmonischen Mittelpunkte  $x''^1 x''^2$  2. Grades ausschneiden.

Durch dieselbe Konstruktion bekommt man jedoch umgekehrt die beiden Pole für den gegebenen Mittelpunkt 2. Grades. Somit *schneidet jede Tangente von  $H$  den Kreis  $K$  in zwei Punkten so, daß je einem als Pole der andere als einer von den harmonischen Mittelpunkten 2. Grades zukommt und umgekehrt*: die erwähnte zwei-zweideutige Verwandtschaft ist somit eine *symmetrische*; ihre Doppelpunkte erster Art sind die vier Grundpunkte  $a_1 b_1 c_1 d_1$ , da z. B.  $a \equiv a_1 \equiv a''$  ist.<sup>1)</sup> Somit sind die Kreistangenten in den Grundpunkten zugleich Tangenten von  $H$ .<sup>2)</sup> Der Kegelschnitt  $H$  ist in Fig. 7 eine Hyperbel, deren Achsen  $M N$  sind. Außer den soeben besprochenen kann man leicht eine Anzahl anderer Tangenten, z. B.  $a^1 a''$ ,  $e e''$  usw. ziehen. Schlägt man jedoch über  $c_1 o$  als Durchmesser den Kreis  $K_a$  (Rollkreis der elliptischen Bewegung) und führt man von  $^1 a$  Tangenten  $^1 a \mu$   $^1 a \nu$  an denselben, so gehören deren Berührungspunkte  $\mu$ ,  $\nu$  schon den Asymptoten  $o \mu$   $o \nu$  von  $H$  an; bei der elliptischen Bewegung beschreibt nämlich  $\mu$  den Kreisdurchmesser  $\mu o \equiv m s_m$ . Gelangt  $\mu$  nach  $s_m$ , wird er Momentanzentrum für den Pol  $m$ , und die Gerade  $\mu^1 a$  geht in die Tangente  $s_m^1 m$  von  $K$  über. Somit wird  $s_m$  mit  $m''$  identisch und  $m m''$  als Tangente von  $H$ , durch deren Mittelpunkt  $o$  gehend, ihre Asymptote.

11. Der zu  $x$  in Bezug auf  $x''^1 x''^2$  konjugiert harmonische Punkt  $x'$  heißt der harmonische Mittelpunkt 1. Grades für  $x$  als Pol und die Grundpunkte  $a_1 b_1 c_1 d_1$ .

Der Punkt  $x'$  ist auch harmonischer Mittelpunkt des ersten Grades für den Pol  $x$  in Bezug auf die Grundtripel  $x_1 x_2 x_3$ .

Da  $^1 x$  (Fig. 7) der Pol von  $X'' \equiv x''^1 x''^2$  auf  $K$  ist, so bestimmt man  $x'$ , indem man die Verbindungsgerade des Poles  $x$  mit dem Berührungspunkte  $^1 x$  der entsprechenden Tangente des Involutionkegelschnittes  $^1 J$  mit der Kreislinie  $K$  zum Schnitt bringt.

Für jeden der Grundpunkte z. B.  $a_i \equiv a$  vereinigt sich  $a'$  mit demselben, da  $a^1 a$  eine Tangente des Kreises  $K$  ist.

Den Polen  $e f g h$  auf der Achsen  $M N$  gehört jedem immer der entgegengesetzte Punkt  $e' f' g' h'$  derselben Achse als harmonischer Mittelpunkt 1. Grades, welcher jedoch zugleich einer der harmonischen Mittelpunkte 3. Grades für denselben Pol ist.

<sup>1)</sup> Die Doppelpunkte zweiter Art sind, wie soeben gezeigt wurde, mit den Verzweigungspunkten der durch  $^1 J$  erzeugten Involution identisch.

<sup>2)</sup> Man kann leicht zeigen, daß  $^1 a$  der Berührungspunkt der Tangenten  $a^1 a$  ist.



12. Zum Schluß werden wir noch kurz die *Verwandtschaften harmonischer Mittelpunkte des vierpunktigen Grundsystems* mit ihren Polen besprechen, von denen die zwei-zweideutige symmetrische Verwandtschaft der Pole und der harmonischen Mittelpunkte 2. Grades schon erwähnt wurde (Abschn. 10).

Jedem Pole  $x$  von  $K$  entspricht ein einziger Mittelpunkt 1. Grades  $x'$ , den man bekommt, wenn man zu  $x$  den entsprechenden Punkt  ${}^1x$  in der Punktreihe auf  ${}^1J$  aufsucht, und den Strahl  $\overline{x}{}^1x$  mit  $K$  zum Schnitt bringt. (Fig. 7). Ist nun umgekehrt  $x'$  gegeben und sucht man den Pol  $x$ , so geht es um das Aufsuchen solcher durch  $x'$  gehender Strahlen, die die beiden homologischen Punkte der genannten Punktreihen treffen. Projiziert man die Polreihe  $x \dots$  aus  $x'$  durch den Strahlenbüschel, so treffen dessen Strahlen  ${}^1J$  in Punktepaaren einer Involution, die zu der konlokalen Punktreihe  ${}^1x \dots$  projektiv ist und mit ihr bekanntlich drei Doppelpunkte hat (von denen einer der Punkt  ${}^1x$  ist). Projiziert man dieselben aus  $x'$  auf  $K$ , so erhält man drei Pole, denen  $x'$  als harmonischer Mittelpunkt 1. Grades zugehört. *Die Verwandtschaft der Polreihe und der Reihe der harmonischen Mittelpunkte 1. Grades ist somit drei-eindeutige.*

Die Verwandtschaft der Polen mit den harmonischen Mittelpunkten 3. Grades ist (Abschn. 6) *ein-dreideutig*. Bezeichnet man für einen Augenblick dieselbe als die erste und die vorige als die zweite, so kann man beweisen, dass sie *identisch* sind.

Denn eine ein-dreideutige Verwandtschaft ist bestimmt, sobald man 7 Paare entsprechender Elemente kennt.<sup>1)</sup> Haben nun zwei solche Verwandtschaften 7 gemeinschaftliche Elementenpaare, so sind sie identisch. In unserem Falle kennt man jedoch schon 8 solche Punktepaare. Denn in Bezug auf die erste Verwandtschaft gehören den 8 Polen  $a b c d e f g h$  als Punkten der einfachen Reihe als harmonische Mittelpunkte 3. Grades resp. die Punkte  $a b c d f e h g$  zu. Bei der zweiten Verwandtschaft sind denselben 8 harmonischen Mittelpunkten 1. Grades, als zu der einfachen Punktreihe zugehörigen, die anderen 8 Punkte als Pole zugeordnet, womit die Behauptung bewiesen ist.

*Gehören also dem Punkte  $x$  als Pole in Bezug auf die Grundpunkte  $a_1 b_1 c_1 d_1$  die Punkte  $x_1 x_2 x_3$  als harmonische Mittelpunkte des 3. Grades, dann ist für jeden dieser Punkte als Pol der Punkt  $x$  der harmonische Mittelpunkt des 1. Grades.<sup>2)</sup>*

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare werden somit in beiden Verwandtschaften dieselbe Kurve umhüllen, die man auch als

<sup>1)</sup> Dr. Emil Weyr: „Die Erzeugung alg. Curven durch mehrdeutige Elementargebilde“, Abhandl. der k. böhm. Ges. d. Wiss. 1870, Seite 7.

<sup>2)</sup> Den Satz kann man zur *neuen Konstruktion des harm. Mittelpunktes 1. Grades  $x'$*  für den Pol  $x$  benutzen: In Bezug zum Abschn. 6 (Fig. 4) zieht man in  $f$  an den durch die Punkte  $f k l m x$  gehenden Kegelschnitt Tangente, deren Schnittpunkt mit  $K$  wird aus  $\sigma$  auf dieselbe Kreislinie in den gesuchten Punkt  $x'$  projiziert.

Produkt beider projektiver Punktreihen  $x \dots$  auf  $K$  und  ${}^1x \dots$  auf  ${}^1J$  erzeugen kann. Somit ist dieselbe bekanntlich eine rationale Kurve 4. Klasse 6. Ordnung, die beide Achsen  $MN$  sowie die unendlich ferne Gerade für Doppeltangenten hat. Sie berührt den Kreis  $K$  in den vier Grundpunkten  $a_1 b_1 c_1 d_1$ . Liegen dieselben harmonisch, so geht sie in die Asteroide über.

Konstruiert man für das Poletripel  $x_1 x_2 x_3$  die harmonischen Mittelpunkte 3. Grades, so bekommt man 9 harmonische Mittelpunkte 3. Grades, denen derselbe Mittelpunkt 1. Grades  $x$  zugeordnet ist und umgekehrt. *Die Verwandtschaft der harmonischen Mittelpunkte des ersten und dritten Grades ist somit ein-neuendeutig.*<sup>1)</sup> Von den 10 Doppelpunkten fallen 4 in die Grundpunkte zu, die vier weiteren sind die Punkte  $e f g h$  und die letzten zwei liegen in den imaginären Kreispunkten.<sup>2)</sup>

*Die Verwandtschaft der harmonischen Mittelpunkte des ersten und zweiten Grades ist zwei-sechsdeutig; ebenso die der harmonischen Mittelpunkte des zweiten und dritten Grades.* Erstere hat die Verzweigungspunkte, letztere die Doppelpunkte der von  ${}^1J$  erzeugten kubischen Involution für Doppelpunkte. Dieselben sind jedoch von besonderer Natur: In den ersten vereinigen sich zwei harmonische Mittelpunkte des zweiten Grades mit dem entsprechenden des ersten Grades; in den letzteren liegen zwei des dritten und ein des zweiten Grades. Die übrigen Doppelpunkte beider Verwandtschaften liegen in den Grundpunkten.

13. Aus dem über die konstruktive Behandlung der harmonischen Mittelpunkte des drei- und vierpunktigen Systems gesagten ist auch der induktive Weg klar, wie die harmonischen Mittelpunkte für die höheren Grundsysteme darzustellen: Sind  $a_1 b_1 c_1 \dots n_1$  die  $n$  Grundpunkte, so zeichne für zwei derselben, z. B.  $a_1 b_1$  als Pole die harmonischen Mittelpunkte  $(n-2)$  Grades  $a_2 a_3 \dots a_{n-1}$  und  $b_2 b_3 \dots b_{n-1}$  für die übrigen  $(n-1)$  Grundpunkte  $b_1 c_1 \dots n_1$  resp.  $a_1 c_1 \dots n_1$ . Die  $(n-1)$  Punkte  $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ , sowie  $b_1 b_2 \dots b_{n-1}$  bestimmen eine Involution  $(n-1)$  Grades. Weiset man dieselbe projektivisch einer einfachen Punktreihe  $a b c \dots$ , wo  $a \equiv a_1$ ,  $b \equiv b_1$ ,  $c \equiv c_1$ , als Polreihe zu, so daß  $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ,  $b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ ,  $c_1 c_2 \dots c_{n-1}, \dots \pi a, b, c, \dots$ , dann bildet die dem Pole  $x$  zugehörige Gruppe  $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$  der Involution die harmonischen Mittelpunkte  $(n-1)$  Grades des Grundsystems  $a_1 b_1 \dots n_1$ , deren man sich auch zu der Darstellung der übrigen harmonischen Mittelpunkte für denselben Pol  $x$  bedienen kann.

<sup>1)</sup> Für  $n$ -punktiges Grundsystem ist die Verwandtschaft der harmonischen Mittelpunkte  $r$ -ten und  $s$ -ten Grades die  $r(n-s) - s(n-r)$  deutige.

<sup>2)</sup> Liegen die 4 Grundpunkte auf einer Geraden, so konstruiert man diese Doppelpunkte als Doppelpunkte 3 quadratischer Involuntionen, die man bestimmt, indem man die Grundpunkte zu zwei in zwei Paare solche Involuntion bestimmender Punkte zusammenstellt. Je zwei Paare von diesen Doppelpunkten liegen harmonisch.

# Über Entwicklungen für analytische Funktionen.

(Ein kurzgefaßter Inhalt der Abhandlung: O rozvojič platných pro funkci analytickou v daném oboru.)

Von M. KÖSSLER in Prag.

Vorgelegt am 11. November 1916.

Herr G. Faber hat in zwei Abhandlungen „Über polynomische Entwicklungen“<sup>1)</sup> einen Weg eingeschlagen, welcher einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist. Wenn wir nämlich anstatt der konformen Abbildung des unendlichen Gebietes der  $z$  Ebene außerhalb einer regulären Kurve  $C$  auf das ganze Innere des Einheitskreises der  $\tau$  Ebene eine allgemeinere Abbildung nur der Umgebung der Kurve  $C$  auf die Umgebung des Einheitskreises benützen, die nicht einmal überall konform und eineindeutig zu sein braucht, so werden wir durch das Integral von Cauchy zu einem allgemeineren Entwicklungssatze geführt. Dieser Satz I. liefert uns erstens eine Entwicklung für jede im Innern von  $C$  analytische Funktion und eine Nullentwicklung, welche für das Äußere der Kurve  $C$  gültig ist, zweitens eine Entwicklung für jede im Äußeren von  $C$  analytische Funktion und eine Nullentwicklung, die in Innern von  $C$  konvergiert.

Ich beschränke mich in diesem Auszuge auf den Beweis des allgemeinen Satzes I.; was die Beweise der Sätze II. bis VI. sowie der Folgerungen I. bis III. betrifft, so verweise ich auf die Originalabhandlung.

Im III. Abschnitte ist gezeigt, wie man die Ergebnisse für die Entwicklungspraxis verwerten kann.

## I. Der allgemeine Entwicklungssatz.

Die Ebene der komplexen Veränderlichen  $z$  sei durch eine geschlossene oder unendliche Kurve  $C$  in zwei einfach zusammenhängende

---

<sup>1)</sup> Mathem. Ann. 1903, p. 389, 1907, p. 116.



Bereiche  $K_1$  und  $K_2$  geteilt. Wir bezeichnen mit  $k_r$  jeden endlichen und geschlossenen Bereich, der ganz im Bereiche  $K_r$  liegt und dessen Grenzen nirgends berührt.

Die Kurve  $C$  definieren wir durch die Gleichung

$$z = g(\tau), \dots\dots\dots(1)$$

in welcher  $g(\tau)$  eine eindeutige Funktion bedeutet. Diese Funktion sei im Kreisringe

$$1 > r \leq |\tau| \leq R > 1$$

und in der Umgebung jedes Punktes an seinen Grenzen analytisch und soll folgende Eigenschaften besitzen.

1. Wenn  $\tau$  die Punkte des Einheitskreises durchläuft, das ist, wenn

$$\tau = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

so soll der durch die Gleichung (1) definierte Punkt  $z$  in eigener Ebene entweder einen oder nacheinander mehrere reguläre Jordansche Bogen durchlaufen, die in ihrer Gesamtheit die Kurve  $C$  bilden. Es soll dabei möglich sein, daß sich einige Teile oder auch ganze Bogen decken, so daß zweien oder auch mehreren Punkten des Einheitskreises *ein einziger* Punkt der Kurve  $C$  entspricht. Die Punkte, in welchen einzelne Bogen aneinander grenzen, teilen die Kurve  $C$  in einige Teile, die wir *Stücke* benennen wollen.

2. Wenn  $\tau$  den Einheitskreis im positiven Sinne einmal umkreist, so soll der Punkt  $z$  das  $k$ -te Stück der Kurve  $C$   $n_k$ -mal im positiven und  $(n_k - 1)$ -mal im negativen Sinne durchlaufen. Den Sinn denken wir uns dabei im Bezuge auf den Bereich  $K_1$  definiert. Die Integration längs aller Jordanschen Bogen ist dann äquivalent mit der einfachen Integration längs der Kurve  $C$  im positiven Sinne.

Es ist ersichtlich, daß die Anzahl der Jordanschen Bogen sich nur dann von der Einheit unterscheiden wird, wenn mindestens in einem Punkte  $\tau_1$  des Einheitskreises die Gleichung

$$g'(\tau_1) = 0$$

erfüllt ist.<sup>1)</sup> In einem solchen Punkte grenzen dann zwei Jordansche Bogen aneinander. Existiert kein solcher Punkt  $\tau_1$ , so definiert die Gleichung (1) einen einzigen glatten regulären Bogen.

Die Kurven, welche eine solche abbildende Funktion (1) zulassen, bilden eine sehr ausgedehnte Gruppe. So gehört zu ihnen z. B. jede reguläre Kurve überhaupt; eine solche besitzt sogar eine unbegrenzte Anzahl von solchen abbildenden Funktionen (siehe z. B. II. § 1).

Auf den Satz von Cauchy gestützt beweisen wir jetzt folgenden allgemeinen Entwicklungssatz.

<sup>1)</sup> Daraus folgt, daß die durch die Gleichung (1) gegebene Abbildung nicht überall konform zu sein braucht.

Satz I. Wir bezeichnen mit  $\gamma$  den Einheitskreis in der  $\tau$  Ebene und mit  $h(\tau)$  eine beliebige Funktion, die analytisch und von Null verschieden ist in der Umgebung jedes Punktes auf der Peripherie von  $\gamma$ .

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\tau) g'(\tau) \tau^{-(k+1)}}{g(\tau) - z} d\tau = b_k(z)$$

definiert die Funktion  $b_k(z)$ , welche im Bereiche  $K_1$  analytisch ist.

Dasselbe Integral definiert im Bereiche  $K_2$  eine andere analytische Funktion  $c_k(z)$ .

1. Jede Funktion  $F_1(z)$ , die im Bereiche  $K_1$  <sup>1)</sup> und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve  $C$  analytisch ist, gibt Anlaß zu zwei Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad F_1(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k(z), \\ \beta) \quad 0 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k c_k(z), \\ A_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1[g(\tau)] \tau^k d\tau}{h(\tau)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Die Reihe  $\alpha)$  ist absolut und gleichmäßig konvergent in jedem Bereiche  $k_1$ , die Reihe  $\beta)$  in jedem Bereiche  $k_2$ .

2. Jede Funktion  $F_2(z)$ , die im Bereiche  $K_2$  und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve  $C$  analytisch ist, gibt Anlaß zu zwei Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} \gamma) \quad F_2(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k c_k(z), \\ \delta) \quad 0 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k b_k(z), \\ E_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_2[g(\tau)] \tau^k d\tau}{h(\tau)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2a)$$

Die Reihe  $\gamma)$  ist absolut und gleichmäßig konvergent in jedem Bereiche  $k_2$  und die Reihe  $\delta)$  in jedem Bereiche  $k_1$ .

Die Funktionen  $b_k(z)$  und  $c_k(z)$  hängen von der Form der Funktionen  $F_1(z)$  und  $F_2(z)$  nicht ab.

Beweis. Es sei zuerst die Kurve  $C$  geschlossen und im Endlichen: das durch sie begrenzte endliche Gebiet bezeichnen wir als  $K_1$ .

Nach dem Cauchyschen Satze ist dann

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F_1(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1[g(\tau)]}{h(\tau)} \cdot \frac{h(\tau) g'(\tau) d\tau}{g(\tau) - z} \dots\dots (3)$$

<sup>1)</sup> Wenn der Bereich den unendlichen Punkt enthält, so muß  $F(z)$  außerdem noch die Bedingung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot F(z) = \text{einer endl. Konstante}$$

befriedigen.

Die Funktion  $g(\tau)$  ist analytisch und also stetig in der Umgebung jedes Punktes auf dem Einheitskreise. Daraus folgt, daß die Gleichung (1) die nahe Umgebung des Einheitskreises in der  $\tau$  Ebene auf die nahe Umgebung der Kurve  $C$  in der  $z$  Ebene abbildet. Wir denken uns z. B. in der  $\tau$  Ebene einen engen Kreisring  $\delta$  gezeichnet, der den Mittelpunkt im Anfange hat und so gelegen ist, daß die Peripherie des Einheitskreises  $\gamma$  in diesem Bereiche  $\delta$  liegt. Durch die Gleichung (1) wird dieser Kreisring auf einen Bereich  $d$  der  $z$  Ebene abgebildet, welcher so geformt ist, daß die Peripherie der Kurve  $C$  in ihm liegt. Wie die Grenzen dieses Bereiches  $d$  geformt sind, davon brauchen wir gar nichts zu wissen. Nur eines ist sicher. Wenn sich nämlich die Grenzen des Kreisringes  $\delta$  beiderseits der Peripherie des Einheitskreises  $\gamma$  nähern, so werden sich auch die Grenzen des Bereiches  $d$  der Peripherie der Kurve  $C$  so nähern, daß im Grenzfalle sich der Bereich  $\delta$  auf die bloße Peripherie von  $\gamma$  und der Bereich  $d$  auf die bloße Peripherie von  $C$  reduziert. Das ist eine selbstverständliche Folge der Stetigkeit der Funktion  $g(\tau)$ .

Wir denken uns jetzt im Bereiche  $K_1$  einen beliebigen Bereich  $k_1$ . Nach dem Vorausgehenden können wir immer den Kreisring  $\delta$  so eng wählen, daß sein Bild in der  $z$  Ebene — das ist der Bereich  $d$  — nirgends die Grenze des Bereiches  $k_1$  berührt, so daß für alle Punkte des Kreisringes  $\delta$  und für alle  $z$  des Bereiches  $k_1$  die Ungleichung

$$|g(\tau) - z| > 0$$

erfüllt ist.

Bezeichnen wir weiter mit  $h(\tau)$  eine beliebige im  $\delta$  analytische Funktion, so definiert auch der Bruch

$$\frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

eine im Bereiche  $\delta$  analytische Funktion der Veränderlichen  $\tau$ , so daß wir die folgende Laurentsche Reihe aufschreiben können

$$\left. \begin{aligned} \frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z) \cdot \tau^k, \\ b_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\tau) g'(\tau) \cdot \tau^{-(k+1)} d\tau}{g(\tau) - z}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

deren Konvergenzbereich durch  $\delta$  gegeben ist. Wenn also  $z$  einen festgewählten Punkt im Bereiche  $k_1$  bezeichnet, so ist, wie bekannt, die Reihe (4) für alle Punkte  $\tau$  auf der Peripherie von  $\gamma$  gleichmäßig konvergent. Wir können also die Entwicklung (4) in das Integral (3) einsetzen und gliedweise integrieren. Wenn weiter die beliebige Funktion  $h(\tau)$  durch die Annahme beschränkt wird, daß sie sich in keinem Punkte  $\tau$  auf der Peripherie von  $\gamma$  annulliert, so bekommen wir die Entwicklung (2)  $\alpha$ .



Die Funktionen  $b_k(z)$  sind dabei durch das Integral (4) definiert. Es kann leicht bewiesen werden, daß dieses Integral eine im ganzen Bereiche  $K_1$  analytische Funktion darstellt. Das Integral kann nämlich auf die Form

$$b_k(z) = \int_{\gamma} S(\tau, z) d\tau \dots\dots\dots (4 \text{ bis})$$

schematisiert werden. Die Funktion  $S(\tau, z)$  ist eine stetige für beide Veränderlichen  $\tau$  und  $z$ , solange nur  $\tau$  auf der Peripherie von  $\gamma$  und  $z$  im  $k_1$  verbleibt. Erteilt man ferner  $\tau$  einen beliebigen Wert, so verhält sich  $S(\tau, z)$ , als Funktion von  $z$  allein betrachtet, im Bereiche  $k_1$  analytisch. Daraus kann man schließen, daß  $b_k(z)$  eine in jedem Bereiche  $k_1$  analytische Funktion darstellt.<sup>1)</sup> Aus (4) ist auch ersichtlich, daß  $b_k(z)$  von  $F_1(z)$  unabhängig ist.

Ganz ähnlich leitet man die Entwicklung (2)  $\beta$ ) ab. Wenn wir nämlich den Punkt  $z$  im Bereiche  $K_2$ , das ist außerhalb  $C$  wählen, so bekommen wir anstatt (3)

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1[g(\tau)]}{h(\tau)} \cdot \frac{h(\tau) g'(\tau) d\tau}{g(\tau) - z} \dots\dots\dots (3 a)$$

und anstatt (4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - z} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z) \cdot \tau^k, \\ c_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\tau) g'(\tau) \cdot \tau^{-(k+1)}}{g(\tau) - z} d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 a)$$

Der Bereich  $k_1$  wird dabei gegen den Bereich  $k_2$  vertauscht.

Die Funktionen  $b_k(z)$  in (4) und  $c_k(z)$  in (4a) sind nur scheinbar identisch. In der Formel (4) bedeutet nämlich  $z$  einen Punkt im Bereiche  $K_1$ . Die Verschiedenheit beider Funktionen begreift man am leichtesten an folgendem Beispiele.

Wir setzen

$$h(\tau) \equiv 1, \quad g(\tau) \equiv \tau.$$

Die Kurve  $C$ , die da durch die Gleichung

$$z = \tau$$

gegeben ist, wird zu dem Einheitskreise in der  $z$  Ebene. Durch  $K_1$  bezeichnen wir das Innere, durch  $K_2$  das Äußere dieses Kreises.

Die erzeugende Reihe (4) für die Funktionen  $b_k(z)$  ist in diesem Falle

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\tau^2} + \frac{z^2}{\tau^3} + \dots, \quad |\tau| \geq 1, \quad |z| < |\tau|,$$

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. B., 2. Aufl., p. 307, 7. Satz.

und also

$$b_0(z) = 0, \quad b_k(z) = 0,$$

$$b_{-k}(z) = z^{k-1}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Für  $c_k(z)$  ist die erzeugende Entwicklung (4 a)

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \frac{\tau^2}{z^3} \dots, \quad |z| > |\tau|$$

und also

$$c_0(z) = -\frac{1}{z}, \quad c_k(z) = -\frac{1}{z^{k+1}}$$

$$c_{-k}(z) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die entsprechenden Entwicklungen (2)  $\alpha$ ) und (2 a)  $\gamma$ ) sind da die Taylorsche und Laurentsche Reihe. Die Reihen (2)  $\beta$ ) und (2 a)  $\delta$ ) reduzieren sich auf bloße Identitäten  $0 = 0$ .

Wir haben bisher angenommen, daß die Kurve  $C$  geschlossen und ganz im Endlichen gelegen ist. Jetzt wollen wir auch den Fall behandeln, daß sie sich ins Unendliche erstreckt. Wir denken uns den Bereich  $K_1$  vollständig begrenzt durch einen Teil der Kurve  $C$  und durch einen Kreisbogen  $k$ , der den Mittelpunkt im Anfange und einen sehr großen Halbmesser hat. Die Funktion  $F_1(z)$  muß dabei die Bedingung erfüllen

$$\lim z \cdot F_1(z) = \text{einer endl. Konstante.}$$

Dann bekommen wir anstatt (3)

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F_1(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{F_1(t) dt}{t-z}.$$

Das erste Integral ist längs des entsprechenden Teiles der Kurve  $C$ , das zweite längs des Kreisbogens  $k$  genommen. Bei unendlich wachsendem Halbmesser des letzteren verschwindet das zweite Integral und das erste erstreckt sich dann längs der ganzen Kurve  $C$ . Es behalten also die Gleichung (3) und die Entwicklungen (2)  $\alpha$ )  $\beta$ ) auch in diesem Falle ihre Gültigkeit.

Ein analoges Verfahren benützen wir in dem Falle, daß die Kurve  $C$  zwar geschlossen ist und ganz im Endlichen liegt, wir aber die Entwicklungen (2 a) für die Funktion  $F_2(z)$  ableiten wollen. Den Kreisbogen  $k$  ersetzen wir durch den ganzen sehr großen Kreis. Mit wachsendem Halbmesser des letzteren konvergiert das längs dieses genommene Integral von Cauchy zur Null, so daß wir da anstatt (3) die Gleichung bekommen

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F_2(t) dt}{t-z}.$$

Das negative Zeichen beim Integral wird folgendermaßen begründet. Wenn wir den Bereich  $K_2$  im positiven Sinne umlaufen wollen, so müssen wir uns längs der Kurve  $C$  im entgegengesetzten Sinne bewegen als im Falle des positiven Umlaufes des Bereiches  $K_1$ . Die letzte Gleichung tritt an die Stelle von (3); dann benützt man die Entwicklung (4 a) und bekommt die Entwicklung (2 a)  $\gamma$ ). Ganz ähnlich wird auch die Entwicklung (2 a)  $\delta$ ) bewiesen.

Um den Beweis des Satzes I. zu vervollständigen, müssen wir noch die gleichmäßige und absolute Konvergenz der Reihen (2) und (2 a) beweisen.

Wir denken uns im Bereiche  $K_1$  einen kleineren und geschlossenen  $k_1$ . Bei der Ableitung der Entwicklung (4) haben wir bewiesen, daß man immer in der  $\tau$  Ebene einen Kreisring  $\delta$  so konstruieren kann, daß in ihm der Bruch

$$\frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - z}$$

eine analytische Funktion der Veränderlichen  $\tau$  darstellt, wenn nur  $z$  fest im  $k_1$  gewählt ist. Die Grenzen des Kreisringes  $\delta$  sind dabei zwei Kreise, von welchen der erste einen Halbmesser besitzt, der größer ist als 1 und der zweite einen Halbmesser, der kleiner ist als 1. Im Innern des Bereiches  $\delta$  denken wir uns einen noch engeren Kreisring  $\delta_1$ . Wir definieren ihn näher durch die Ungleichungen

$$1 < \lambda \leq |\tau| \leq \mu < 1.$$

In diesem Bereiche und auch in jedem Punkte an seiner Grenze konvergiert, wie bekannt, die Reihe (4) absolut bei festgewähltem  $z$  im  $k_1$ . Nach dem Cauchyschen Kriterium für absolute Konvergenz müssen also die Ungleichungen

$$\sqrt[n]{|b_n(z)|} \cdot |\tau| \leq 1, \quad \sqrt[n]{|b_n(z)|} \cdot \frac{1}{|\tau|} \leq 1$$

erfüllt werden für alle  $n$ , die größer sind als eine gewisse endliche und positive Zahl  $N'$ . In Verbindung mit den vorausgehenden Ungleichungen für  $\tau$  bekommen wir also das Ergebnis

$$\sqrt[n]{|b_n(z)|} \leq \frac{1}{\lambda} < 1; \quad \sqrt[n]{|b_n(z)|} \leq \mu < 1. \quad \dots\dots\dots (5)$$

Die Grenze  $N'$  ist dabei eine Funktion von  $z$ . Wenn also  $z$  nacheinander alle Punkte des Bereiches  $k_1$  durchläuft, so wird sich dabei  $N'$  fortwährend ändern; sie bleibt aber immer *endlich*. Wenn wir also mit  $N$  die endliche und positive obere Grenze aller diesen Zahlen bezeichnen, so werden die Ungleichungen (5) für jedes

$$n > N$$

und für jedes  $z$  aus dem Bereiche  $k_1$  erfüllt.



Einer ähnlichen Behandlung unterwerfen wir die Funktion

$$\frac{\tau \cdot F_1 [g(\tau)]}{h(\tau)},$$

die sich in der Umgebung jedes Punktes auf dem Einheitskreise der  $\tau$  Ebene analytisch verhält. Man kann also immer einen Kreisring

$$1 < l \leq |\tau| \leq m < 1$$

auswählen in welchem der behandelte Bruch die Laurentsche Entwicklung besitzt

$$\frac{\tau \cdot F_1 [g(\tau)]}{h(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \tau^k,$$

$$E_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1 [g(\tau)] \tau^k}{h(\tau)} d\tau.$$

Ganz analogisch, wie bei (5) kann man hier die Ungleichungen ableiten

$$\sqrt[n]{|E_n|} \leq \frac{1}{l}, \quad \sqrt[n]{|E_{-n}|} \leq m,$$

welche für alle  $n$  gelten, die nicht kleiner sind als eine positive und endliche Zahl  $N_1$ .

Wenn wir den Integralausdruck für  $E_n$  mit den Koeffizienten der Reihe (2) vergleichen, so sehen wir, daß

$$E_{-n} = A_n$$

und also

$$\sqrt[n]{|A_{-n}|} \leq \frac{1}{l}, \quad \sqrt[n]{|A_n|} \leq m \quad \dots \dots \dots (5a)$$

Mit Rücksicht auf (5) können wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{|A_n b_n(z)|} &< m < 1, \\ \sqrt[n]{|A_{-n} b_{-n}(z)|} &< \frac{1}{l} < 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

für alle  $z$  des Bereiches  $k_1$  und für alle  $n$ , die größer sind als die größere der Zahlen  $N$  und  $N_1$ . Dabei sind  $l$ ,  $m$ ,  $N$  und  $N_1$  von  $z$  unabhängige Konstanten.

Wenn wir nun die Glieder der absolut konvergenten Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m^k$$

mit den Gliedern der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} | A_k b_k(z) |, \quad \sum_{k=-1}^{\infty} | A_k b_k(z) |$$

vergleichen, so sehen wir, daß alle Bedingungen des Weierstraßschen Kriteriums<sup>1)</sup> für absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k(z)$$

im Bereiche  $k_1$  erfüllt sind.

Durch eine fast unveränderte Betrachtung kann man auch die gleichmäßige und absolute Konvergenz der übrigen Reihen (2) und (2a) beweisen. Dadurch ist also der Beweis des I. Satzes im ganzen Umfange erledigt.

Die Entwicklungsfunktionen  $b_k(z)$  und  $c_k(z)$  sind in diesem Satze durch Kurvenintegrale definiert. Es wird uns aber in vielen Fällen gelingen, die Laurentsche Reihe der Funktion

$$\frac{h(\tau) \cdot g'(\tau)}{g(\tau) - Z}$$

anders zu verwirklichen,<sup>2)</sup> wodurch wir auch zur bequemeren Definition der  $b_k(z)$  und  $c_k(z)$  gelangen.

Mit Hilfe der Ungleichungen (5) sind wir im Stande den folgenden Satz zu beweisen.

*Satz II.* Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten  $A_k$  die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[k]{|A_k|} \leq 1, \quad \sqrt[k]{|A_{-k}|} \leq 1,$$

für alle Indexe  $k$ , die größer sind als eine endliche und positive Zahl  $N$ , so konvergieren absolut und gleichmäßig die Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k b_k(z), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k c_k(z),$$

und zwar die erste in jedem Bereiche  $k_1$  und die zweite in jedem Bereiche  $k_2$ . Es definiert also die erste Reihe eine im  $K_1$  und die zweite eine im  $K_2$  analytische Funktion.

Wir haben gesehen, daß uns jede Funktion  $F_1(z)$  oder  $F_2(z)$  zu einer *Nullentwicklung* (2)  $\beta$ ) oder (2a)  $\delta$ ) führt. In manchen Fällen<sup>3)</sup> reduzieren sich diese Nullentwicklungen auf bloße Identitäten  $0 = 0$ ; aber es geschieht nicht immer so. Ist z. B. *keine* der Funktionen  $b_k(z)$  für ein positives oder negatives  $k$  identisch gleich Null, so existiert eine unbeschränkte Anzahl von nicht identisch verschwindenden Nullentwicklungen

1) Siehe z. B. Osgood, l. c. p. 96.

2) Siehe II., § 2, § 4 und III.

3) III. § 3.

gen. Für  $h(\tau) = 1$  können wir sogar eine solche Entwicklung direkt ableiten. Sie lautet

$$0 = -B_{-1} b_{-1}(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k+1} b'_{-(k+2)}(a) b_k(z),$$

$$B_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau [g(\tau) - a]}.$$

Dabei bedeutet  $a$  einen beliebigen im Bereiche  $K_1$  liegenden Punkt; der Strich bei dem Summenzeichen soll die Weglassung des Index  $k = -1$  andeuten.

Der folgende Satz ist nun evident.

*Satz III.* Wenn man mindestens eine nicht identisch verschwindende Nullentwicklung (2a)  $\delta$ ) ableiten kann, so existiert für jede Funktion  $F_1(z)$  neben der *Hauptentwicklung* (2)  $\alpha$ ) eine unbeschränkte Anzahl von *Nebenentwicklungen* der Form

$$F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k + \lambda B_k) b_k(z).$$

Dabei ist  $\lambda$  eine beliebige Konstante.

Ein ähnlicher Satz ist auch für jede Funktion  $F_2(z)$  gültig.

## II. Entwicklungen, welche zur eindeutigen und konformen Abbildung gehören.

### § 1. Allgemeine Entwicklungen.

Wie schon am Anfange gesagt wurde, beschränken wir uns im folgenden auf die bloße Aufzählung der Resultate. Die Beweise sind in der Originalabhandlung enthalten.

Die Kurve  $C$  sei durch einen einzigen einfachen glatten und geschlossenen Jordanschen Bogen gegeben. Das Innere bezeichnen wir als  $K_1$ , das Äußere als  $K_2$ .

Dann ist es immer möglich, eine unbeschränkte Anzahl von folgenden abbildenden Funktionen zu konstruieren.

Die Gleichung

$$z = g(\tau) \dots \dots \dots (\bar{1}_1)$$

soll das Innere und beide Grenzen des Kreisringes  $\varepsilon_1$  in der  $\tau$  Ebene

$$1 > r_1 \leq |\tau| \leq R_1 > 1$$

eindeutig stetig und, von einigen Punkten der Begrenzung abgesehen, auch konform auf die Umgebung der Kurve  $C$  in der  $z$  Ebene abbilden. Dabei sollen die Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises  $\gamma$  in der



$\tau$  Ebene den Punkten auf der Peripherie der Kurve  $C$  in der  $z$  Ebene einander entsprechen.

In jedem Punkte des Bereiches  $\varepsilon_1$  ist

$$g'(\tau) \neq 0,$$

von jenen Punkten der Grenze abgesehen, in denen die Abbildung konform zu sein aufhört. Jedem Kreise in der  $\tau$  Ebene, der den Mittelpunkt im Anfange hat und dessen Halbmesser  $\varrho_k$  die Ungleichungen erfüllt

$$r_1 \leq \varrho_k \leq R_1,$$

entspricht in der  $z$  Ebene eine gewisse Kurve  $C_k$ . Wir erteilen dem Halbmesser  $\varrho_k$  den Namen „das Parameter der Kurve  $C_k$ “. Diese Kurven haben folgende Eigenschaften:

1. Jede Kurve  $C_k$  wird durch einen einzigen glatten und geschlossenen Jordanschen Bogen gebildet, welcher sich nirgends schneidet. Auch zwei verschiedene Kurven  $C_k$  schneiden sich nicht.

2. Die Grenzkurven, welche den Parametern  $R_1$  und  $r_1$  entsprechen, können Ecken besitzen und zwar in den Punkten, wo

$$g'(\tau) = 0.$$

3. Den Parametern  $\varrho_k < 1$  entsprechen die Kurven eines Bereiches, z. B.  $K_1$ , den Parametern  $\varrho_k > 1$  die Kurven des zweiten Bereiches.

Das Innere der Kurve  $C_k$  bezeichnen wir mit  $K_1^{(k)}$ , das Äußere mit  $K_2^{(k)}$ .

Die analytische und sonst beliebige Funktion  $h(\tau)$  sei im Bereiche

$$1 < R_2 \leq |\tau| \leq r_2 < 1$$

definiert. Im folgenden bezeichnen wir mit  $R$  die *kleinere* der beiden Zahlen  $R_1, R_2$ , mit  $r$  die *größere* der Zahlen  $r_1, r_2$  und mit  $\varepsilon$  den Kreisring, welcher von den Kreisen mit den Halbmessern  $R$  und  $r$  begrenzt ist.

*Satz IV.* Die Kurve  $C_k$ , welche zum Parameter  $\varrho_k$  gehört, teilt die  $z$  Ebene in die Bereiche  $K_1^{(k)}$  und  $K_2^{(k)}$ .

Jede Funktion  $F_1^{(k)}(z)$ , welche im  $K_1^{(k)}$  und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve  $C_k$  sich analytisch verhält, gibt Anlaß zu den Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad F_1^{(k)}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n b_n(z), \\ \beta) \quad 0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n c_n(z), \\ A_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_k} \frac{F_1^{(k)}[g(\tau)] \tau^n d\tau}{h(\tau)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Jede Funktion  $F_2^{(k)}(z)$ , welche im  $K_2^{(k)}$  und in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve  $C_k$  analytisch ist, gibt Anlaß zu den Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma) \quad F_2^{(k)}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n c_n(z), \\
 \delta) \quad 0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n b_n(z), \\
 B_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varrho_k} \frac{F_2^{(k)}[g(\tau)] \tau^n d\tau}{h(\tau)}.
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7a)$$

Die Funktionen  $b_n(z)$  und  $c_n(z)$  ändern sich *nicht* mit dem Parameter  $\varrho_k$ .

Im übrigen ist alles, was in dem Satze I. von den Entwicklungen (2) und (2a) gesagt wurde, auch für die Entwicklungen (7) und (7a) gültig mit der einzigen Abänderung, daß man anstatt  $K_1$  und  $K_2$  sich  $K_1^{(k)}$  und  $K_2^{(k)}$  denken muß.

Der wesentliche Unterschied zwischen diesem und dem I. Satze liegt darin, daß im I. Satze die Funktionen  $b_n(z)$  und  $c_n(z)$  zu einer *einzig*en Kurve  $C$  gehören, während sie im IV. Satze der ganzen Gruppe der Kurven  $C_k$  zugeordnet sind.

Anstatt des II. Satzes erhalten wir da den

*Satz V.* 1. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten  $A_n$  die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[n]{|A_n|} < R, \quad \sqrt[n]{|A_{-n}|} < \frac{1}{\varrho_k}$$

für alle Indexe  $n$ , die größer sind als eine endliche positive Zahl  $N$ , so konvergiert absolut und gleichmäßig die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n b_n(z)$$

in jedem endlichen Bereiche  $k_1$ , der ganz im  $K_1^{(k)}$  so liegt, daß die Grenzen beider Bereiche sich nirgends berühren.

2. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten  $B_n$  die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[n]{|B_n|} < \varrho_k, \quad \sqrt[n]{|B_{-n}|} < \frac{1}{r}$$

für alle Indexe  $n$ , die größer sind als eine endliche positive Zahl  $N$ , so konvergiert absolut und gleichmäßig die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n c_n(z)$$

in jedem endlichen Bereiche  $k_2$ , der ganz im  $K_2^{(k)}$  so gelegen ist, daß die Grenzen beider Bereiche sich nirgends berühren.

3. Wenn die Reihe der sonst beliebigen Konstanten  $D_n$  die Ungleichungen erfüllt

$$\sqrt[n]{|D_n|} < \varrho_k, \quad \sqrt[n]{|D_{-n}|} < \frac{1}{\varrho_k}$$

für alle Indexe  $n$ , die größer sind als  $N$ , so konvergieren absolut und gleichmäßig die Reihen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n b_n(z), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n c_n(z),$$

und zwar die erste in jedem Bereiche  $k_1$  und die zweite in jedem Bereiche  $k_2$ .

Alle diese Bedingungen sind für die absolute und gleichmäßige Konvergenz hinreichend, aber nicht notwendig.

§ 2. Polynomische Entwicklungen von Faber.

Die einfachste Form, welche die Gleichung der Kurve  $C$  einnehmen kann, entsteht, wenn die abbildende Funktion

$$z = g(\tau)$$

das ganze Äußere der Kurve  $C$  in der  $z$  Ebene auf das ganze Äußere des Einheitskreises in der  $\tau$  Ebene abbildet oder wenn diese Abbildung das Innere beider eben genannten Kurven betrifft. Aus der Lehre von der konformen Abbildung ist bekannt, daß im erstgenannten Falle die abbildende Funktion die Form hat

$$z = \alpha \tau + P\left(\frac{1}{\tau}\right) \dots\dots\dots(8)$$

Die Potenzreihe

$$P\left(\frac{1}{\tau}\right) = a_0 + a_1 \tau^{-1} + a_2 \tau^{-2} + \dots$$

konvergiert im Bereiche

$$|\tau| > 1 - \eta,$$

wobei  $\eta$  eine positive Zahl bedeutet, die kleiner ist als die Einheit. Mit Hinsicht auf (4) erhält man da durch eine kurze Rechnung bei der Wahl  $h(\tau) \equiv 1$

$$\left. \begin{aligned} b_{-1}(z) &= 1; \quad b_n(z) = 0, \quad n \geq 0 \\ \alpha \cdot b_{-n}(z) &= b_{-n+1}(z) \cdot (z - a_0) - b_{-n+2}(z) \cdot a_1 - \dots - b_{-1}(z) \cdot a_{n-2} - (n-2) a_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$n \geq 2.$$

Es ist also  $b_{-n}(z)$  ein Polynom  $(n - 1)$ sten Grades der Größe  $\left(\frac{z - a_0}{\alpha}\right)$ , dessen erstes Glied ist

$$\left(\frac{z - a_0}{\alpha}\right)^{n-1}.$$

Wir erhalten für  $F_1^{(k)}(z)$  eine polynomische Entwicklung von der Form (7)  $\alpha$ ), welche im wesentlichen mit der Faberschen<sup>1)</sup> identisch ist.

Die allgemeinste Form der Funktion  $h(\tau)$  ist

<sup>1)</sup> Math. An. 1. c.



$$\left. \begin{aligned} h(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{n=m} \bar{d}_n \tau^n, \\ \lambda &\leq |\tau| \leq \kappa > 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

Die Größe  $m$  ist entweder eine positive endliche oder unendliche ganze Zahl oder eine endliche negative ganze Zahl.

Wir bezeichnen diesmal die zugehörigen Entwicklungsfunktionen mit  $\beta_n(z)$ , für welche wir die Rekursionsformeln bekommen

$$\left. \begin{aligned} \beta_m(z) &= 0, \quad \beta_{m+k}(z) = 0, \\ \beta_{m-k}(z) &= \bar{d}'_m b_{-k}(z) + \bar{d}'_{m-1} b_{-k+1}(z) + \dots + \bar{d}'_{m-k+1} b_{-1}(z) \\ m \text{ endlich, } &k \geq 1; \\ \beta_n(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{d}'_{n+k} b_{-k}(z), \quad m \text{ unendlich,} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

wobei  $b_{-k}(z)$  durch die Gleichungen (9) bestimmt werden. Bei endlichem  $m$  ist also  $\beta_n(z)$  ein Polynom  $(m - n - 1)$ -ten Grades der Größe

$$\frac{z - a_0}{\alpha}.$$

Wir erhalten für  $F_1^{(k)}(z)$  eine Entwicklung der Form (7)  $\alpha$ ) nach den Funktionen (11).

Dabei ist erstens die Kurve  $C_k$  auf die Ungleichungen

$$\rho_k > 1 - \eta, \quad \lambda \leq \rho_k \leq \kappa$$

gebunden und zweitens darf der Kreis  $\rho_k$  durch keinen Nullpunkt der Funktion  $h(\tau)$  durchgehen. Über die Bedeutung dieser Punkte für die Nullentwicklungen wird im folgenden die Rede sein.

Der zweite einfache Fall ist durch die konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises auf das Innere der Kurve  $C$  gegeben. Die abbildende Funktion ist da

$$z = P(\tau) \dots\dots\dots (12)$$

$$P(\tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots,$$

$$|\tau| < 1 + \eta.$$

Dabei bedeuten  $a_k$  und  $\eta$  andere Zahlen als in (8).

Für  $h(\tau) = 1$  erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} c_0(z) &= \frac{a_1}{a_0 - z}, \quad c_n(z) = 0 \\ c_n(z)(a_0 - z) + c_{n-1}(z)a_1 + \dots + c_0(z) \cdot a_n &= (n + 1)a_{n+1}, \\ n &\geq 1. \end{aligned} \right\} (13)$$

Es ist also  $c_n(z)$  ein Polynom  $(n+1)$ -ten Grades der Größe

$$\frac{z_1}{a_0 - z}.$$

Wir erhalten für jede Funktion  $F_\nu^{(k)}(z)$  eine Entwicklung von der Form (7a)  $\gamma$ ), welche ein Gegenstück zu den polynomischen Entwicklungen von Faber bildet.

Im allgemeinsten Falle ist

$$h(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n \tau^n,$$

$$1 > \lambda \leq |\tau| \leq \mu,$$

wobei  $m$  eine endliche positive oder negative oder auch eine unendliche positive Zahl bedeutet. Die Entwicklungsfunktionen bezeichnen wir diesmal mit  $\gamma_n(z)$ . Man findet

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{-m}(z) = 0, \quad \gamma_{-m-k}(z) = 0, \\ \gamma_{-m+k}(z) = d_{-m} c_k(z) + d_{-m+1} c_{k-1}(z) + \dots + d_{-m+k} \cdot c_0(z); \\ m \text{ endlich, } k \geq 1; \\ \gamma_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n-k} \cdot c_k(z), \quad m \text{ unendlich.} \end{aligned} \right\} \cdot (14)$$

Jede Funktion  $F_2^{(k)}(z)$  besitzt also eine Entwicklung von der Form (7a)  $\gamma$ )

$$F_2^{(k)}(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} B_n \gamma_n(z).$$

Die Peripherie des Kreises  $q_k$  darf auch diesmal keinen Nullpunkt der Funktion  $h(\tau)$  berühren.

### § 3. Gleichmäßig konvergente Reihen nach den Polynomen $\beta_n(z)$ oder $\gamma_n(z)$ und die Nullentwicklungen.

Ist eine Reihe beliebiger Konstanten  $A_n$  gegeben, so wird die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z)$$

nach dem Satze V. beurteilt. Außerdem kann folgender Satz bewiesen werden.

*Satz VI.* Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z)$$

absolut und gleichmäßig im Inneren der Kurve  $C_k$  und auch in der Umgebung jedes Punktes auf dieser Kurve, so kann man eine Funktion  $G(z)$  durch die Reihe definieren

$$G(z) = h[\gamma(z)] \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \gamma^n(z),$$

die in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve  $C_k$  sich analytisch verhält und die Eigenschaft besitzt, daß

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_k} \frac{G[g(\tau)] \tau^n d\tau}{h(\tau)}.$$

Dabei ist  $\gamma(z)$  die inverse Funktion zur Gleichung (8). Für das Innere der Kurve  $C_k$  ist

$$\sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{G(t) dt}{t - z}.$$

Dieser Satz ist nur fürs endliche  $m$  gültig.

Für die *Nullentwicklungen* nach den Polynomen  $\beta_n(z)$  erhalten wir drei Folgerungen.

*Folgerung I.* Existiert überhaupt eine Nullentwicklung

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{m-1} A_n \beta_n(z),$$

die im Innern der Kurve  $C_k$  und in der Umgebung jedes Punktes dieser Kurve absolut und gleichmäßig konvergiert, so kann man die Koeffizienten durch folgende gemeinsame Formel ausdrücken

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_k} \frac{G[g(\tau)] \tau^n d\tau}{h(\tau)},$$

dabei ist  $G(z)$  eine Funktion, die sich in der Umgebung jedes Punktes auf der Kurve  $C_k$  und in dem ganzen Teile der  $z$  Ebene analytisch verhält, den das Äußere der Kurve  $C_k$  bildet; außerdem ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot G(z) = \text{eine endl. Konstante.}$$

*Folgerung II.* Aus den Polynomen (9) oder (11) kann man bei endlichem  $m$  keine Nullentwicklungen konstruieren, welche im Innern der Kurve  $C_k$  und in der Umgebung jedes Punktes auf dieser Kurve absolut und gleichmäßig konvergieren, solange nur die Funktion  $h(\tau)$  keinen Nullpunkt im Äußeren des Kreises  $Q_k$  besitzt.

Infolgedessen ist jede absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung nach diesen Polynomen eine *Hauptentwicklung* für eine nicht identisch verschwindende analytische Funktion.

Auf die Frage, wann also die Nullentwicklungen existieren, gibt die Antwort folgende



*Folgerung III.* Die Nullentwicklungen für das Innere der Kurve  $C_k$  nach den Polynomen (11) existieren nur in diesen zwei Fällen:

1. Die Zahl  $m$  ist endlich und die Funktion  $h(\tau)$  hat im Bereiche (10) mindestens einen Nullpunkt  $\tau_1$ , welcher die Ungleichung erfüllt

$$|\tau_1| > \varrho_k.$$

2. Die Zahl  $m$  ist positiv und unendlich.

Diese Bedingungen sind für die Existenz der Nullentwicklungen notwendig und hinreichend.

Wir haben bisher in diesem Paragraphen ausschließlich von den Polynomen (11) gesprochen; alle diese Betrachtungen könnten wir aber fast unverändert auf die Funktionen (14) übertragen. Wir erhalten wieder einen Satz und drei Folgerungen, welche man aus dem Satze VI. und den Folgerungen I., II., III. folgendermaßen bekommt. Es werden die Worte „das Innere der Kurve  $C_k$ “ gegen die Worte „das Äußere der Kurve  $C_k$ “ und die Funktionen „(11)“ — das ist „ $\beta_n(z)$ “ — gegen die Funktionen „(14)“ — das ist „ $\gamma_n(z)$ “ — vertauscht.

### III. Entwicklungen, welche zu den rationalen Kurven gehören.

Die Kurve  $C$  sei algebraisch und rational. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Kurve kann man, wie bekannt, mit Hilfe zweier rationalen Funktionen des Parameters  $\eta$  in der Form ausdrücken

$$\begin{aligned} x &= u_1(\eta), & y &= v_1(\eta), \\ -\infty &\leq \eta \leq +\infty. \end{aligned}$$

Durch die Transformation

$$\begin{aligned} \eta &= i \frac{1 + \tau}{1 - \tau}, & \tau &= e^{i\varphi}, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

erhalten wir daraus eine neue parametrische Gleichung, mit deren Hilfe wir den Ausdruck konstruieren

$$x + iy = \frac{u(\tau)}{v(\tau)},$$

wobei  $u(\tau)$  und  $v(\tau)$  teilfremde Polynome der Veränderlichen  $\tau$  bedeuten. Dadurch haben wir für die Kurve  $C$  eine abbildende Funktion

$$z = \frac{u(\tau)}{v(\tau)} = g(\tau) \dots \dots \dots (15)$$

konstruiert, welche die Form der Gleichung (1) oder (7<sub>1</sub>) besitzt. Man kann also dazugehörige Entwicklungen (2), (2a) oder (7) und (7a) für die im

Innern oder im Äußern der Kurve  $C$  analytischen Funktionen sofort aufschreiben. Es ist aber dabei möglich, die Entwicklungsfunktionen  $b_k(z)$  oder  $c_k(z)$  explicit darzustellen, ohne das Kurvenintegral benutzen zu müssen. Mit Rücksicht darauf, daß die in der Gleichung (15) auftretenden Funktionen  $u(\tau)$  und  $v(\tau)$  Polynome sind, können wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} v(\tau) &= b_0(\tau - \beta_1)(\tau - \beta_2)\dots(\tau - \beta_m), \\ u(\tau) - z v(\tau) &= a_0(\tau - \alpha_1)(\tau - \alpha_2)\dots(\tau - \alpha_n), \\ m &\geq n. \end{aligned} \right\} \dots(16)$$

Die Zahlen  $b_0$  und alle  $\beta_k$  sind von  $z$  unabhängige Konstanten, während  $a_0$  und alle  $\alpha_k$  als algebraische Funktionen der Veränderlichen  $z$  aufgefaßt werden müssen. Es sei

$$|\beta_1| \leq |\beta_2| \leq |\beta_3| \leq \dots \leq |\beta_m|$$

und bei festgewähltem  $z$

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_n|.$$

Wenn die Kurve  $C$  geschlossen ist und  $z$  einen Punkt in ihrem Innern bedeutet, so kann man folgende Sätze beweisen.

A. Keine von den Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  ist dem absoluten Betrage nach gleich der Einheit.

B. Bezeichnen wir mit  $p$  die Anzahl der Konstanten  $\beta$ , welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die Einheit, so sind von den Zahlen  $\alpha$  ( $p+1$ ) dem absoluten Betrage nach kleiner als die Einheit. Diese Anzahl ist von der Lage des Punktes  $z$  im Innern der Kurve  $C$  unabhängig und jede symmetrische Funktion dieser ( $p+1$ ) Größen ist für den Bereich  $K_1$  eine *eindeutige* Funktion der Veränderlichen  $z$ .

C. Wenn der Punkt  $z$  im Äußern der Kurve  $C$  liegt, so ist die Anzahl der Wurzeln  $\alpha$ , welche kleiner sind als die Einheit, gleich der Zahl  $p$ .

Wir wählen die beliebige Funktion am einfachsten, d. i. gleich der Einheit; dann werden die Funktionen  $b_k(z)$  durch die Entwicklung (4) definiert

$$\frac{g'(\tau)}{g(\tau) - z} = \frac{d}{d\tau} \frac{[g(\tau) - z]}{g(\tau) - z} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tau - \alpha_k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\tau - \beta_k}.$$

also nach dem Vorhergesagten

$$\begin{aligned} & \frac{g'(\tau)}{g(\tau) - z} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \tau^k [\alpha_1^{-(k+1)} + \alpha_2^{-(k+1)} + \dots + \alpha_{p+1}^{-(k+1)} - \beta_1^{-(k+1)} - \beta_2^{-(k+1)} - \dots - \beta_p^{-(k+1)}] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k [\beta_{p+1}^{-(k+1)} + \beta_{p+2}^{-(k+1)} + \dots + \beta_m^{-(k+1)} - \alpha_{p+2}^{-(k+1)} - \alpha_{p+3}^{-(k+1)} - \dots - \alpha_n^{-(k+1)}]. \end{aligned}$$

Daraus sieht man, daß

$$\left. \begin{aligned} b_k(z) &= [\beta_{p+1}^{(k+1)} + \dots + \beta_m^{(k+1)} - \alpha_{p+2}^{(k+1)} - \dots - \alpha_n^{(k+1)}], & k \geq 0; \\ b_k(z) &= -[\beta_1^{(k+1)} + \dots + \beta_p^{(k+1)} - \alpha_1^{(k+1)} - \dots - \alpha_{p+1}^{(k+1)}], & k < 0. \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

Ähnlich erhält man für die Funktionen  $c_k(z)$

$$\left. \begin{aligned} c_k(z) &= [\beta_{p+1}^{(k+1)} + \dots + \beta_m^{(k+1)} - \alpha_{p+1}^{(k+1)} - \dots - \alpha_n^{(k+1)}], & k \geq 0; \\ c_k(z) &= -[\beta_1^{(k+1)} + \dots + \beta_p^{(k+1)} - \alpha_1^{(k+1)} - \dots - \alpha_p^{(k+1)}], & k < 0. \end{aligned} \right\} \dots (17a)$$

Sucht man also die Entwicklung für eine Funktion  $F(z)$ , welche im Innern oder Äußern einer rationalen Kurve sich analytisch verhält, so konstruiert man zuerst mit Hilfe der parametrischen Gleichung die abbildende Funktion (15), berechnet dann aus (16) die Wurzeln  $\beta$  und  $\alpha$ , aus diesen baut man die Entwicklungsfunktionen (17) oder (17a) auf und benützt dann den Satz I. oder IV.

So hat z. B. die *Ellipse*

$$x = a \cos \varphi = a \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad y = b \sin \varphi = b \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

die abbildende Funktion (15)

$$z = x + iy = \frac{\tau^2(a+b) + a-b}{2\tau}.$$

Aus (16) berechnen wir

$$\beta_1 = 0; \quad m = p = 1;$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b}.$$

Bedeutet  $z$  einen inneren Punkt der Ellipse, so ist nach dem Satze B.  $|\alpha_1| < 1$ ,  $|\alpha_2| < 1$  und nach (17)

$$b_k(z) = 0, \quad k \geq 0;$$

$$b_k(z) = \alpha_1^{(k+1)} + \alpha_2^{(k+1)}, \quad k < 0.$$

Jede im Innern der Ellipse analytische Funktion besitzt also die Entwicklung (2)  $\alpha$

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \frac{(z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2})^{k-1} + (z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2})^{k-1}}{(a+b)^{k-1}}.$$

Bedeutet  $z$  einen äußeren Punkt der Ellipse, so ist  $|\alpha_1| < 1$ ,  $|\alpha_2| > 1$  und nach (17a)

$$c_k(z) = - \left( \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b} \right)^{-(k+1)}, \quad k \geq 0;$$



$$c_k(z) = \left( \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b} \right)^{-(k+1)}, \quad k < 0.$$

Jede im Äußern der Ellipse analytische Funktion besitzt also die Entwicklung (2 a)  $\gamma$ )

$$F_2(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left( \frac{a + b}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}} \right)^{k+1} + \sum_{k=-1}^{\infty} B_k \left( \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a + b} \right)^{-(k+1)}.$$

Die Nullentwicklung (2 a)  $\delta$ ) reduziert sich nach der Folgerung II. auf die bloße Identität  $0 = 0$ . Dagegen existiert immer die Nullentwicklung (2)  $\beta$ ). So ist z. B. für  $F_1(z) = z$

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tau^2(a+b) + a-b}{2} \cdot \tau^{k-1} d\tau$$

und also

$$2 \cdot A_{-2} = a + b, \quad 2 \cdot A_0 = a - b;$$

für alle übrigen Indexe  $k$  ist  $A_k = 0$ . Daraus folgt nach (2)  $\beta$ )

$$(a+b) \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b} - (a-b) \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b} = 0.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist evident; man kann anstatt dessen schreiben

$$\left( \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b} \right)^k = \left( \frac{a-b}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}} \right)^k.$$

Es existieren also unbeschränkt viele Nullentwicklungen von der Form

$$\sum_{k=1}^n D_n \left( \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b} \right)^k - \sum_{k=1}^n D_n \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^k \left( \frac{a+b}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}} \right)^k = 0,$$

wobei die  $D_n$  beliebige Konstanten bedeuten. Diese Tatsache führt zur folgenden Nebenentwicklung für die Funktion  $F_2(z)$

$$F_2(z) = B_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k (a+b)^{k+1} + B_{-k-2} \cdot (a-b)^{k+1}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2})^{k+1}}.$$

Die Ellipse wurde als Beispiel nur der Einfachheit halber gewählt. Ebenso leicht könnten wir jede andere rationale Kurve z. B. eine beliebige Epi- oder Hypocykloide behandeln. In der Originalabhandlung findet man mehrere Beispiele dieser Art.

# Über eine Rollfläche achter Ordnung.

Von

MILOSLAV PELÍŠEK,

o. ö. Professor

an der k. k. böhmischen technischen Franz Josef-Hochschule in Brünn.

Mit zwölf Figuren im Text.

(Vorgelegt am 14. Jänner 1916.)

## 1. Die gemeine Rollfläche.

Rollt ein Kreis  $\kappa$  vom Halbmesser  $r$  auf dem inneren Umfange des Grundkreises  $k$  vom Halbmesser  $2r$ , so daß ihre Ebenen stets zusammenfallen, dann beschreibt bekanntlich ein beliebiger Punkt  $a$  des Umfanges des Kreises  $\kappa$  den Durchmesser  $ab$  des Grundkreises, der doppelt zählt, weil derselbe hin und her beschrieben wird. Sei  $\varphi$  der am Grundkreise abgerollte Winkel (Fig. 1), dann ist der Berührungspunkt  $o$  des rollenden (nicht eingezeichneten) und des festen Kreises der Momentanpol der Rollung, und die Verbindungslinie  $op$  ist die Normale der Rollkurve, also senkrecht zu  $ab$ .

### Die orthogonale Rollkurve.

Rollt der Kreis  $\kappa$  am Kreise  $k$ , so daß ihre Ebenen zu einander stets senkrecht sind, so beschreibt derselbe Punkt  $a$  eine Raumkurve, welche wir kurz die orthogonale Rollkurve nennen werden. Um einen beliebigen Punkt  $q$  derselben zu erhalten, drehen wir den (nicht eingezeichneten) Kreis  $\kappa$  um die Tangente  $t$  im Momentanpol  $o$  um  $90^\circ$ ; dann beschreibt der Punkt  $p$  einen Quadranten des Kreises  $\kappa$ , dessen Ebene senkrecht zur Tangente  $t$  ist. Füllen wir also die Senkrechte  $pq$  auf  $t$ , so ist der Fußpunkt  $q_1$  der Grundriß eines beliebigen Punktes der betrachteten Kurve; seinen Aufriß und Seitenriß erhalten wir, indem wir von  $q_1$  die betreffenden Projektionsstrahlen ziehen und auf dieselben von den betreffenden Achsen die Strecke  $p q_1$  auftragen. Sei  $q_1 r$  die Senkrechte zu  $ab$ , und betrachten wir das Koordinatensystem, dessen Anfang der Mittelpunkt  $s$  des Grund-

kreis ist, und dessen  $X$ -Achse mit  $a b$  zusammenfällt, dann finden wir aus der Fig. 1:

$$s p = r \cos \varphi, \quad o p = r \sin \varphi, \quad o q_1 = r \sin \varphi \cos \varphi, \quad p q_1 = r \sin^2 \varphi, \\ p r = r \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad \text{und} \quad q_1 r = r \sin^3 \varphi$$

Der Punkt  $q$  hat also folgende rechtwinklige Koordinaten:

$$(1) \quad x = r \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi), \quad y = r \sin^3 \varphi, \quad z = r \sin^2 \varphi.$$

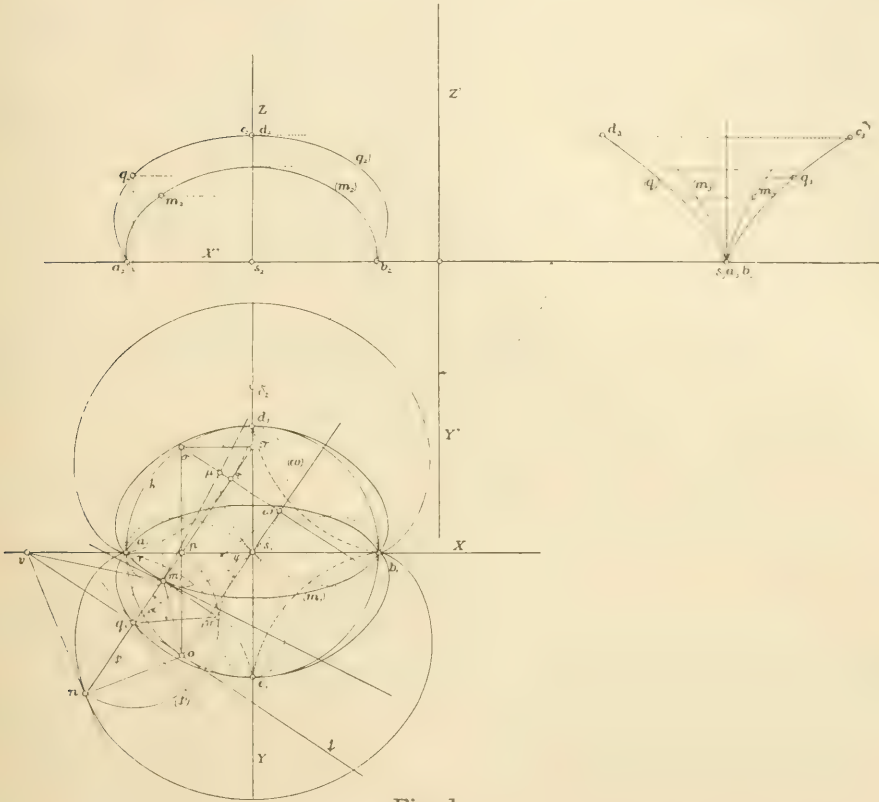


Fig. 1.

Die vollständige orthogonale Rollkurve entsteht, wenn der ganze Umfang des Grundkreises, also zwei Umfänge des rollenden Kreises abrollen; daraus ist ersichtlich, daß die orthogonale Rollkurve symmetrisch zu den Ebenen  $XZ$  und  $YZ$  ist und daß sich dieselbe ganz über oder unter der Ebene  $XY$  befindet, je nach dem die Ebenen beider Kreise den Winkel  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$  einschließen.

Die Gleichung des Grundkreises der orthogonalen Rollkurve erhalten wir durch Elimination des Winkels  $\varphi$  aus den Ausdrücken für  $x$  und  $y$ ; die betreffende Rechnung ergibt:

$$(2) \quad (x^2 + y^2 - r^2)^3 + r^2 y^2 (3x^2 + 4y^2 - 4r^2) = 0.$$



Der Grundriß der orthogonalen Rollkurve ist also eine trizirkuläre Sextik, welche durch die Punkte  $a_1 b_1 c_1 d_1$  geht und symmetrisch zu den Durchmessern  $a_1 b_1$ ,  $c_1 d_1$  ist. (Ich konnte nicht feststellen, ob dieselbe schon bekannt ist.)

Aus der Fig. 1 ist ersichtlich, daß  $p\pi = r$  ist, da  $o p \pi s$  ein Parallelogramm ist; die Senkrechte  $p q_1$  umhüllt also die Astroide, welche dem Grundkreise eingeschrieben ist und durch die Punkte  $a_1 b_1 c_1 d_1$  geht; daraus geht aber folgende Erzeugung derselben Kurve hervor:

*Bewegt sich ein rechter Winkel  $o q_1 p$ , so daß der Schenkel  $o q_1$  den Grundkreis  $k$ , der Schenkel  $p q_1$  jedoch die diesem Kreise eingeschriebene Astroide umhüllt, dann beschreibt der Scheitel  $q_1$  desselben dieselbe Sextik.*

Der Momentanpol für die Bewegung der Strecke  $p\pi$  ist  $\sigma$ . Füllen wir die Senkrechte  $\sigma\tau$  auf  $p\pi$ , so ist  $\tau$  ein Punkt der Astroide, und  $\sigma\tau$  ist ihre Normale. Sei  $\omega$  der Schnittpunkt von  $os$  und  $\sigma\tau$ , dann ist offenbar  $\omega$  der Momentanpol für die Bewegung des rechten Winkels  $o q_1 p$ , und daher ist  $\omega q_1$  die Normale der Sextik, somit die Senkrechte zu derselben die Tangente dieser Sextik.

Wir beweisen leicht, daß der geometrische Ort von  $\omega$  eine vierblättrige Rhodonea ist, welche dem Kreise  $k$  eingeschrieben ist und durch  $a_1 b_1 c_1 d_1$  geht. Seien nämlich  $\varrho$  und  $\varphi$  die Polarkoordinaten von  $\omega$ , dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $o\sigma\omega$ :

$$(r + \varrho)^2 = (2r \sin \varphi)^2 - (2r \sin \varphi \cos \varphi)^2, \text{ oder: } \varrho + r = 2r \sin^2 \varphi.$$

Wir erhalten also in den rechtwinkligen Koordinaten  $\xi, \eta$  die Gleichung:

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 = r^2 (\xi^2 - \eta^2)^2.$$

Dies ist aber die Gleichung der vierblättrigen Rhodonea oder Korolla (siehe: Loria-Schütte, Spezielle Kurven 1910, Band I., pag. 269 und 272); es ist dies zugleich ein Spezialfall des Satzes von Bella vitis (vergl. Loria-Schütte II. Band, p. 109).

Die Gleichung des Aufrisses der orthogonalen Rollkurve erhalten wir durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $z$ ; die betreffende Rechnung ergibt:

$$(3) \quad (r + z)^2 (r - z) = r x^2.$$

Der Aufriß der orthogonalen Rollkurve ist also eine Kubik, die aus Symmetriegründen doppelt zählt und zwar der speziellste Fall Newtons divergenter Parabel.<sup>1)</sup> Die Kurve geht durch  $a_2 b_2 c_2 d_2$ , wenn  $s_2 a_2 = s_2 b_2 = s_2 c_2 = s_2 d_2 = r$  bedeutet, und  $\delta_2$  ist ihr Doppelpunkt, wenn  $s_2 d_2 = -s_2 \delta_2$  ist. Wenn die Ebenen beider Rollkreise den Winkel  $+90^\circ$  einschließen, gilt nur der Teil der Kurve, der über der  $X$ -Achse ist; der

<sup>1)</sup> Loria-Schüttel. c. p. 19, Absatz IV.; es ist zu substituieren:  $a_2 = -r$ ,  $a_1 = +r$ ,  $a_0 = -\frac{1}{r}$ . Siehe auch Teixeira: Courbes spéciales, tome I, p. 131.

übrige Teil der Kurve ist dann der Aufriß von imaginär-konjugierten Punkten der Raumkurve.

Die Gleichung des Seitenrisses der orthogonalen Rollkurve ( $q_3$ ) erhalten wir durch Elimination von  $\varphi$  aus  $y$  und  $z$ ; die Rechnung ergibt:

$$(4) \quad z^3 = r y^2.$$

Der Seitenriß der orthogonalen Rollkurve ist die semikubische Parabel von Neil, oder — nach Longchamps — eine einfache Kubik mit einem Kuspidualpunkte, oder auch nach Newman Whipsnake genannt.<sup>1)</sup> Aus Gründen der Symmetrie zählt dieselbe doppelt; es ist wieder zu bemerken, daß nur die Punkte für  $z = 0$  bis  $z = r$  Seitenrisse reeller Punkte der Raumkurve sind, während die übrigen Projektionen konjugiert imaginärer Punkte sind.

### Klinogonale Rollkurve.

Drehen wir den (nichtgezeichneten Kreis)  $\kappa$  (Fig. 1) um die Tangente  $t$  im Punkte  $o$  um einen beliebigen Winkel  $\alpha$ , so beschreibt der Punkt  $p$  den Bogen  $p m$  des oben angeführten Kreises  $\kappa$ , der in Fig. 1 in der Umklappung gezeichnet ist. Füllen wir die Senkrechte ( $m$ )  $m_1$  auf  $p q_1$ , so ist  $m_1$  der Grundriß eines beliebigen Punktes der klinogonalen Rollkurve; da ( $m$ )  $m_1$  der Abstand des Punktes  $m$  von der Ebene  $X Y$  ist, erhalten wir leicht den Aufriß  $m_2$  und den Seitenriß  $m_3$  des Punktes  $m$ . Aus der Fig. 1 finden wir:

$$p m_1 = p q_1 - m_1 q_1 = p q_1 (1 - \cos \alpha) = 2 p q_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{ und daher:}$$

$$(5) \quad \frac{p m_1}{p q_1} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \text{Const.}$$

Die Grundrisse  $m_1$  der Punkte der klinogonalen Rollkurve teilen also die Strecken  $p q_1$  zwischen dem Durchmesser  $a_1 b_1$  und der Kurve ( $q_1$ ) in konstantem Verhältnisse; die Kurve ( $m_1$ ) kann daher aus der Kurve ( $q_1$ ) mittelst eines Reduktionswinkels abgeleitet werden. Wir können dieses Resultat auch folgendermaßen formulieren:

Die veränderliche Strecke  $p q_1$  bewegt sich so, daß ihre Endpunkte  $p_1$  und  $q_1$  den Durchmesser  $a_1 b_1$  und die Kurve ( $q_1$ ) beschreiben, und der Punkt  $m_1$ , der die Strecke  $p q_1$  in konstantem Verhältnisse teilt, beschreibt die Kurve ( $m_1$ ). Wir können also die bekannte Konstruktion von Mannheim<sup>2)</sup> anwenden, die Normale der Kurve ( $m_1$ ) in  $m_1$  zu konstruieren:

Sei  $\mu$  der Punkt, welcher die Strecke  $\sigma \omega$  in demselben Verhältnisse teilt wie der Punkt  $m_1$  die Strecke  $p q_1$ , dann ist die Verbindungslinie

<sup>1)</sup> Siehe: Loria - Schütte 1. c. Bd. I, p. 95 u Bd. II., p. 23 oder Wieleitner 1. c. p. 54.

<sup>2)</sup> Mannheim: Géom. descrip. 1880, p. 174.

$m_1 \mu$  die Normale der Kurve ( $m_1$ ) im Punkte  $m_1$ . Den Punkt  $\mu$  erhalten wir also mittelst desselben Reduktionswinkels.

Da auf den Geraden  $\rho q_1$  und  $\sigma \omega$  die Punkte  $m_1$  und  $\mu$  zwei ähnliche Reihen bilden, so ist ersichtlich:

Die Normalen der Grundrisse aller klinogonalen Rollkurven für die Punkte desselben Kreisschnittes  $\mathfrak{k}$  hüllen eine Parabel ein.

Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes  $m$  in Bezug auf das frühere System ebenfalls mit  $x y z$ , dann folgt aus Fig. 1:

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi + r \sin^2 \varphi \cos \varphi (1 - \cos \alpha), & y &= r \sin^3 \varphi (1 - \cos \alpha), \\ z &= r \sin^2 \varphi \sin \alpha. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus je zweien dieser Gleichungen erhalten wir die Gleichungen des Grundrisses, Aufrisses und Seitenrisses der klinogonalen Rollkurven; die betreffende Rechnung ergibt:

$$(7a) \quad \begin{aligned} 4 k^6 \sin^4 \frac{\alpha}{2} - 12 r^2 y^2 k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \\ + r^2 y^2 \left[ r^2 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^3 + 16 y^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^6 \frac{\alpha}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

wobei  $k^2 = x^2 + y^2 - r^2$  ist.

$$(7b) \quad \left( r \cos \frac{\alpha}{2} + z \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 (z - r \sin \alpha) + r x^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0$$

und

$$(7c) \quad z^3 - r y^2 \sin^3 \alpha = 0.$$

Die klinogonalen Rollkurven sind also ebenfalls Raumkurven sechster Ordnung.

Ist insbesondere  $\alpha = 180^\circ$ , so erhalten wir die Rollung in der Ebene des Grundkreises und auf dem äußerem Umfange desselben. Die Rollkurve heißt dann *Nephroide* — und zwar nach *Proctor*, zu unterscheiden von der von *Freeth*.<sup>1)</sup> Wir können dieselbe auch ohne Rollung konstruieren, indem wir  $q_1 \rho = q_1 n$  machen. Die Gleichungen (6) übergeben dann für  $\alpha = 180^\circ$  in folgende:

$$(8) \quad x = r \cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi), \quad y = 2 r \sin^3 \varphi, \quad z = 0.$$

Durch Elimination des Winkels  $\varphi$  aus  $x$  und  $y$  erhalten wir die Gleichung der Nephroide:

$$4 (x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27 r^4 y^2.$$

Als Kontrolle erhalten wir dieselbe Gleichung, wenn wir in (7a) für  $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$  setzen.

<sup>1)</sup> Loria-Schütte l. c., Bd. 1, p. 281.

<sup>2)</sup> Loria-Schütte l. c., Bd. 1, p. 281, oder *Wieleithner*: Spezielle ebene Kurven 1908 p. 140.



### Die Fläche der gemeinen Rollkurven.

Alle Rollkurven, welche vom Punkte  $a$  ausgehen und allen Werten von  $\alpha$  entsprechen, erfüllen eine Fläche, deren Gleichung wir erhalten, indem wir  $\alpha$  und  $\varphi$  aus (6) eliminieren; die betreffende Rechnung ergibt:

$$(9) \quad 4 y^2 k^6 + z^4 k^4 + 18 r^2 y^2 z^2 k^2 + 4 r^2 z^6 - 27 r^4 y^4 = 0,$$

wobei  $k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$  bedeutet; daher:

*Die Fläche der gemeinen Rollkurven* — oder kurz die gemeine Rollfläche — *ist achter Ordnung*; dies Resultat war vorausszusehen, da die Ebene  $XY$  die Fläche in dem doppelt zählenden Durchmesser  $ab$  und in der Nephroide, die sechster Ordnung ist, also in einer zerfallenden Kurve achter Ordnung schneidet.

Die Fläche ist zu den Koordinatenebenen  $XY$ ,  $XZ$  und  $YZ$  und daher auch zum Mittelpunkt  $s$  symmetrisch.

Der Mittelpunkt  $s$  des Grundkreises ist zugleich der Mittelpunkt der Fläche.

Durch Einführung homogener Koordinaten erkennen wir leicht:

*Der absolute Kreis im Unendlichen ist eine Doppellinie der Fläche.*

Für  $z = 0$  erhalten wir aus (9):

$$y^2 = 0 \text{ und } 4(x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27 r^4 y^2.$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene  $XY$  zerfällt also tatsächlich in den doppelten Durchmesser  $ab$  und in die Nephroide.

Für  $y = 0$  erhalten wir aus (9):

$$z^4 = 0 \text{ und } (x^2 + z^2 - r^2)^2 + 4 r^2 z^2 = 0.$$

Da in der Ebene  $XY$  nur die Doppelgerade  $ab$  vorkommt, so ist in der Ebene  $XZ$  außer derselben noch eine Doppelgerade, die ihr unendlich nahe liegt; mit anderen Worten:

*Der Durchmesser  $ab$  ist eine Doppelgerade der Fläche, nach welcher sich die Fläche selbst berührt.* Außerdem schneidet die  $XZ$ -Ebene die Fläche nach zwei Nullkreisen, die mit den Punkten  $a$  und  $b$  zusammenfallen.

Für  $x = 0$  zerfällt die Gleichung (9) in das Produkt:

$$[z^2 + (y - r)^2 - r^2][z^2 + (y + r)^2 - r^2][(z^2 - r^2)^2 + 4(y^2 + z^2)(y^2 + r^2)] = 0.$$

Die  $YZ$ -Ebene schneidet die Fläche in zwei Kreisen vom Halbmesser  $r$ , welche sich im Punkte  $s$  der  $Z$ -Achse berühren.

Den letzten Faktor kann man auch schreiben:

$$(z^2 + 2y^2 + r^2)^2 = 0 \text{ oder: } \frac{z^2}{(ir)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ir}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Die Ebene  $YZ$  schneidet also die Fläche noch in einer Doppellinie und zwar in einer imaginären Ellipse, deren Halbachsen sind  $ir$  und  $\frac{ir}{\sqrt{2}}$ .

### Konstruktion der Fläche.

Teilen wir den Grundkreis (Fig. 2) in gleiche Teile z. B. 24; die Teilpunkte 1...24 sind die Momentanpole  $o$ , beziehungsweise  $\sigma$  der Fig. 1. In diesen Punkten ziehen wir die Tangenten  $t$  zum Grundkreise, Ferner zeichnen wir die Rechtecke, die durch diese Punkte und die Achsen  $X$  und  $Y$  bestimmt sind, und ziehen in denselben die Diagonalen, die nicht durch  $s$  gehen, und verlängern dieselben über die  $X$ -Achse. Diese Diagonalen

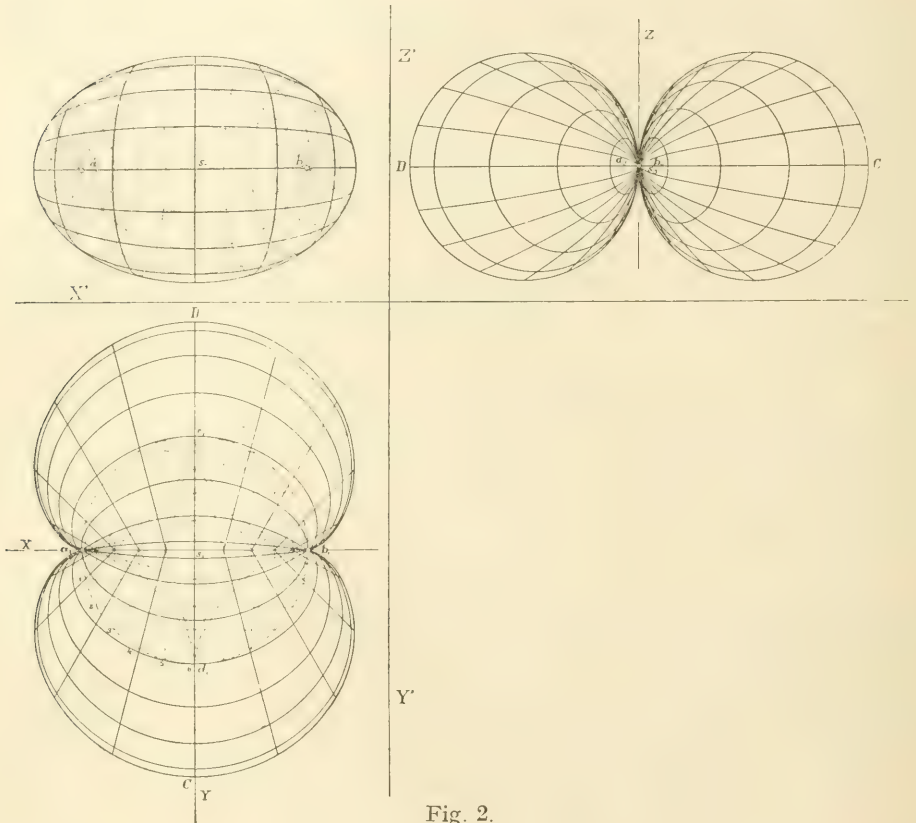


Fig. 2.

hüllen die oben angeführte Astroide ein und sind senkrecht zu den Tangenten  $t$  in den entsprechenden Punkten. Die Fußpunkte dieser Senkrechten, d. i. die Schnittpunkte der Diagonalen mit den entsprechenden Tangenten, bilden den Grundriß der orthogonalen Rollkurve; ihren **Aufriß** und **Seitenriß** erhalten wir in bekannter Weise, indem wir die betreffenden Projektionsstrahlen ziehen und auf dieselben von den entsprechenden Achsen die Längen dieser Senkrechten auftragen und zwar sowohl in der positiven als auch in der negativen Richtung. Übertragen wir im Grundrisse die Längen dieser Senkrechten vom Grundriß der orthogonalen Rollkurve auf die entgegengesetzte Seite der Tangenten,

so erhalten wir die Punkte der Nephroide. Dieselbe ist aus Symmetriegründen der Umriß der Fläche im Grundrisse; der Durchmesser  $ab$  ist ebenfalls Umriß im Grundrisse.

Die Strecken auf den Diagonalen zwischen dem Durchmesser  $ab$  und der Nephroide sind die Grundrisse der Kreisschnitte  $\mathfrak{f}$  der Fläche; ihre Aufrisse und Seitenrisse sind im allgemeinen Ellipsen, welche in besonderen Lagen in Kreise oder Strecken übergehen. Die Seitenrisse der größten Kreisschnitte  $sC$ ,  $sD$  haben wirkliche Größe und sind aus Symmetrierücksichten Umriss im Seitenrisse; ihre Aufrisse sind Strecken auf der  $Z$ -Achse von der Länge  $ab$ . Die Achsen aller Ellipsen erhalten wir in bekannter Weise und konstruieren die Ellipsen mittelst der Streifenkonstruktion.

Aus dem Grundrisse ist ersichtlich:

Die Fläche hat unendlich viele Kreisschnitte, deren Ebenen zu  $XY$  senkrecht sind und einen geraden Zylinder umhüllen, dessen Grundlinie die oben angegebene Astroide ist. Die Kreisschnitte sind paarweise zur Ebene  $XZ$  (und ebenso  $YZ$ ) symmetrisch und berühren einander in den Punkten der  $X$ -Achse. Daraus ist schon ersichtlich, daß die Fläche längs des Durchmessers  $ab$  sich selbst berührt. Ferner ist aus Symmetrierücksichten klar, daß zu jedem Kreisschnitte ein paralleler existiert, und daß beide einander in denselben Kreispunkten im Unendlichen schneiden, woraus ersichtlich ist, daß der imaginäre Kugelkreis im Unendlichen eine Doppellinie der Fläche ist. Ferner konstruieren wir die Grundrisse der klinogonalen Rollkurven, welche den Werten  $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ, 45^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ \dots$  entsprechen. Für  $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ \dots$  wären diese Neigungen schon durch die oben angeführte Teilung im Grundrisse bestimmt, und die oben angeführten Rechtecke bestimmten bereits auf der  $Y$ -Achse die Scheitel der gesuchten Kurven. Mittelst entsprechender Reduktionswinkel verkürzen wir alle anderen Durchmesser der Kreisschnitte.

Die Aufrisse und Seitenrisse dieser Kurven können wir als Schnittpunkte der entsprechenden Projektionsstrahlen mit den früher angeführten Ellipsen erhalten; oder genauer, indem wir die Kreisschnitte umklappen und die betreffenden Ordinaten auftragen; dadurch erhalten wir eine Kontrolle für die Ellipsen. Berücksichtigen wir, daß die Aufrisse der Kurven  $\alpha$  und  $90-\alpha$  gemeinschaftliche Scheitel auf der  $Z$ -Achse haben; ferner, daß alle Kurven im Seitenrisse durch  $s$  gehen sowie durch die Teilpunkte auf den Umrißkreisen.

### Der Normalkegel und der umschriebene Kegel.

Die Verbindungslinie des Momentanpoles  $o$  (Fig. 1) mit dem Punkte  $m$  der klinogonalen Rollkurve, welche dem Winkel  $\alpha$  entspricht, ist eine Normale dieser Rollkurve; dieselbe Gerade ist aber auch die Normale des Kreisschnittes  $\mathfrak{f}$ , da dieselbe eine Erzeugende des Rotationskegels ist, dessen Scheitel  $o$ , und dessen Grundlinie  $\mathfrak{f}$  ist; daher:



Die Verbindungslinie des Momentanpoles  $o$  mit einem beliebigen Punkte  $m$  des entsprechenden Kreisschnittes  $\mathfrak{K}$  ist eine Normale der Fläche, und der Rotationskegel  $o\mathfrak{K}$  ist ein Normalkegel der Fläche.

Sei  $v$  der Schnittpunkt der Tangente  $t = oq_1$  im Momentanpole mit dem Durchmesser  $ab$ . Drehen wir den rechten Winkel  $opv$  um die Tangente  $t$ , so bleibt  $op$  Normale, und daher  $vp$  Tangente der Fläche in den Punkten des Kreisschnittes  $\mathfrak{K}$ ; daher:

Der Rotationskegel  $v\mathfrak{K}$  ist der Fläche längs des Kreisschnittes  $\mathfrak{K}$  umschrieben. Derselbe Kegel ist die Enveloppe der Tangentialebenen der Fläche in den Punkten des Kreises  $\mathfrak{K}$ . Die Scheitel  $v$  aller Rotationskegel, welche der Fläche längs der Kreisschnitte  $\mathfrak{K}$  umschrieben sind, erfüllen die Gerade  $ab$  und zwar außerhalb des Grundkreises.

Mittelst dieser umschriebenen Kegel können wir verschiedene Aufgaben über Tangentialebenen lösen, ferner die scheinbaren Umrisse der Fläche bestimmen und die Trennungslinie zwischen Licht und Schatten bei paralleler oder zentraler Beleuchtung konstruieren.

### Der scheinbare Umriß im Aufrisse.

Legen wir (Fig. 3) durch den Scheitel  $v$  die Tangentialebene zum Kegel  $v\mathfrak{K}$ , welche zur Ebene  $XZ$  senkrecht ist; ihre Grundrißspur  $S_1$  geht durch  $v$  und ist senkrecht zur  $X$ -Achse. Füllen wir vom Momentanpol  $o$  die Senkrechte zu  $S_1$ , so schneidet dieselbe den Kreis  $\mathfrak{K}$  im gesuchten Berührungspunkte  $u$ . Durch Umklappung des Kreises  $\mathfrak{K}$  erhalten wir den Abstand des Punktes  $u$  von der  $XY$ -Ebene und daher auch den Aufriß  $u_2$  und den Seitenriß  $u_3$ . Die Verbindungslinie  $vu_2$  ist die Aufrißspur  $S_2$  der zur Aufrißebene senkrechten Berührungsebene mit dem Berührungspunkte  $u$ ; daher ist  $u_2$  ein Punkt des scheinbaren Umrisses der Fläche im Aufrisse, und  $vu_2$  ist dessen Tangente, während  $u$  ein Punkt des wahren Umrisses ist, der diesem scheinbaren Umriss im Aufrisse entspricht, nämlich ein Punkt der Raumkurve, längs welcher der aufrißprojizierende Zylinder die Fläche berührt. Bezeichnen wir wieder  $x, y$  und  $z$  die Koordinaten des Punktes  $u$ , dann finden wir aus Fig. 3 die Werte:

$$(10) \quad x = 2r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z^2 = r^2 (\sin^4 \varphi - \cos^4 \varphi).$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $y$  erhalten wir die Gleichung des Grundrisses dieses wahren Umrisses:

$$(10a) \quad \frac{x^2}{(2r)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1; \text{ daher:}$$

Der Grundriß des wahren Umrisses, der dem scheinbaren Umriss im Aufrisse entspricht, ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $2r$  und  $r$ ; von dieser Ellipse gelten nur gewisse Bogenlängen.

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $z$  erhalten wir die Gleichung:

$$(10b) \quad \frac{x^2}{2r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1; \text{ daher:}$$

Der scheinbare Umriß im Aufrisse ist eine doppelt zählende Ellipse von den Halbachsen  $r\sqrt{2}$  und  $r$ . Die Punkte  $a$  und  $b$  sind ihre Brennpunkte. Außerdem sind die beiden Nullkreise in den Punkten  $a$  und  $b$  weitere Teile des scheinbaren Umrisses im Aufrisse.

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $y$  und  $z$  erhalten wir die Gleichung:

$$(10c) \quad \frac{y^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1; \text{ daher:}$$

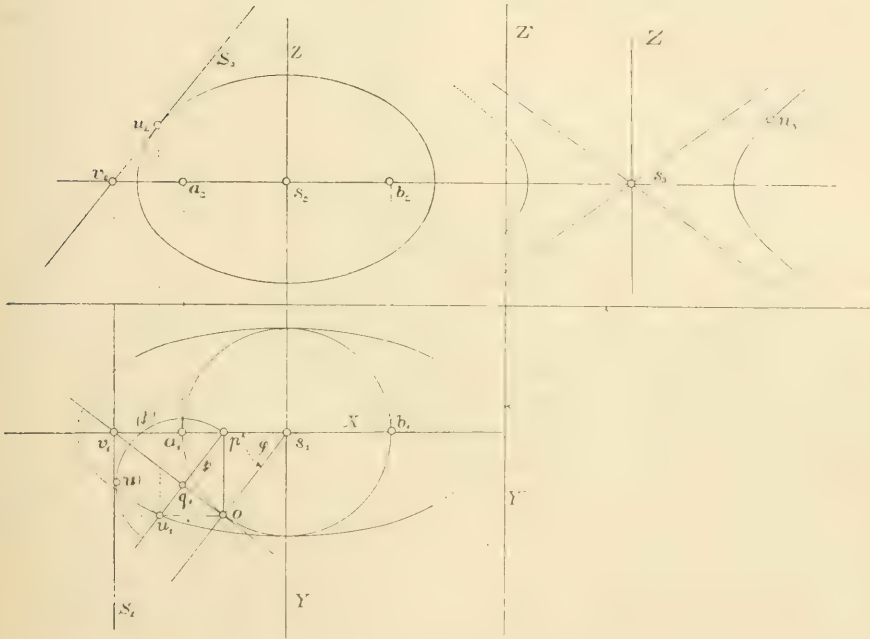


Fig. 3.

Der Seitenriß des wahren Umrisses, der dem scheinbaren Umrisse im Aufrisse entspricht, ist eine Hyperbel mit den Halbachsen  $\frac{r}{\sqrt{2}}$  und  $r$ ; auch von dieser Hyperbel haben nur bestimmte Bogenlängen Gültigkeit.

Der wahre Umriß, der dem scheinbaren Umriß im Aufrisse entspricht, ist eine Raumkurve vierter Ordnung.

### Der scheinbare Umriß im Seitenrisse.

Derselbe besteht aus den beiden Kreisen vom Halbmesser  $r$ , welche im Punkte  $s$  die  $Z$ -Achse berühren, und außerdem aus dem Punkte  $s$ , welcher einen doppelt zählenden Nullkreis repräsentiert. Der wahre Umriß, der

dem scheinbaren Umrisse im Seitenrisse entspricht, besteht aus den zwei Kreisen vom Halbmesser  $r$  und aus dem doppelt zählenden Durchmesser  $a b$ .

### Zentralbeleuchtung der Fläche.

Wählen wir der Einfachheit wegen den leuchtenden Punkt  $u$  auf der  $Z$ -Achse (Fig. 4) und bezeichnen  $s u = h$ . Der Punkt  $m$  der Trennungslinie zwischen Licht und Schatten, der auf dem Kreise  $\mathfrak{f}$  liegt, wird erhalten,

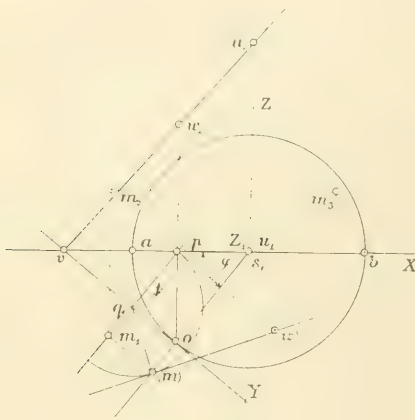


Fig. 4.

indem wir  $uv$  ziehen und den Schnittpunkt  $w$  dieser Verbindungslinie mit der Ebene des Kreises  $\mathfrak{f}$  bestimmen und endlich die Tangenten aus  $w$  zu  $\mathfrak{f}$  konstruieren. In unserem speziellen Falle liegt eine derselben in der Ebene  $XZ$  und berührt  $\mathfrak{f}$  im Punkte  $p$  des Durchmessers  $a b$ ; dieser Durchmesser, doppelt zählend, ist demnach ein Teil der Trennungslinie. Die andere Tangente berührt  $\mathfrak{f}$  im Punkte  $m$ . Durch Umklappung von  $\mathfrak{f}$  erhalten wir die

Entfernung des Punktes  $m$  von der  $XY$ -Ebene und daher auch den Aufriß  $m_2$  und Seitenriß  $m_3$ . Bezeichnen wie mit  $x, y$  und  $z$  die Koordinaten von  $m$ , dann erhalten wir aus Fig. 4 nach einander:

$$s p = r \cos \varphi, o p = r \sin \varphi, p q_1 = r \sin^2 \varphi, p v = \frac{r \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, s v = \frac{r}{\cos \varphi},$$

$$p w = h \sin^2 \varphi, m_1 q_1 = \frac{r (h \sin^2 \varphi - z)}{h}, p m_1 = \frac{r (2 h \sin^2 \varphi - z)}{h}.$$

Für die Punkte der Trennungslinie finden wir dann die Werte der Koordinaten:

$$(11) \quad x = \frac{r \cos \varphi (h + 2 h \sin^2 \varphi - z)}{h}, \quad y = \frac{r (2 h \sin^2 \varphi - z) \sin \varphi}{h}$$

$$\text{und } z = \frac{2 r^2 h \sin^2 \varphi}{r^2 + h^2}.$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $y$  ergibt sich als Gleichung des Grundrisses der Trennungslinie:

$$(11a) \quad 4 h^4 (r^2 + h^2)^2 k^6 - 12 h^2 r^4 (r^2 + h^2) (r^2 - 3 h^2) y^2 k^2 +$$

$$+ r^4 y^2 [16 r^4 h^2 y^2 + (r^2 + h^2) (r^2 - 3 h^2)^2] = 0,$$

wobei  $k^2 = x^2 + y^2 - r^2$  ist.



Ebenso folgt durch Elimination von  $\varphi$  aus den Ausdrücken für  $x$  und  $z$  die Gleichung des Aufrisses:

$$(11b) \quad (r^2 + h z)^2. [(r^2 + h^2) z - 2 r^2 h] + 2 r^4 h x^2 = 0.$$

Endlich durch Elimination von  $\varphi$  aus  $y$  und  $z$  die Gleichung des Seitenrisses:

$$(11c) \quad h (r^2 + h^2) z^3 = 2 r^4 y^2.$$

Der Grundriß der Trennungslinie ist also eine trizirkulare Sextik, der Aufriß eine doppelt zählende Kubik, und ebenso der Seitenriß; die Trennungslinie selbst ist also eine Raumkurve sechster Ordnung.

Diese Resultate erfahren eine besondere Vereinfachung, wenn wir den Lichtpunkt  $u$  so wählen, daß  $r^2 = 3 h^2$  wird; dann übergehen die Gleichungen 11  $a b c$  in folgende:

$$(12) \quad 4 (x^2 + y^2 - 3 h^2)^3 + 81 h^2 y^2 = 0, (3 h - z)^2 (2 z - 3 h) + 9 h x^2 = 0 \\ \text{und } 2 z^3 = 9 h y^2.$$

Die Strecke wird in bekannter Weise konstruiert.

### Eingeschriebene Kugeln.

Da der Rotationskegel  $o \mathfrak{f}$  (Fig. 1) ein Normalkegel der Fläche ist, so ist die Kugel, deren Mittelpunkt der Momentanpol  $o$  ist, und deren Halbmesser der Abstand des Punktes  $o$  von dem festen Durchmesser  $a b$  ist, unserer Fläche längs des Kreisschnittes  $\mathfrak{f}$  eingeschrieben; diese Kugel dient zur Lösung verschiedener Konstruktionsaufgaben, namentlich zur Bestimmung der Isophoten. Es ist aber auch folgende Erzeugung der Fläche ersichtlich:

*Bewegt sich eine veränderliche Kugel, so daß ihr Mittelpunkt  $o$  den Grundkreis  $k$  beschreibt, und welche stets den festen Durchmesser  $a b$  berührt, so ist die Enveloppe dieser Kugeln unsere Fläche.*

### Die Hauptkrümmungslinien.

Da die Rotationskegel  $o \mathfrak{f}$  Normalkegel der Fläche sind, so ist unmittelbar ersichtlich:

*Die Kreisschnitte  $\mathfrak{f}$  bilden die erste Schar der Hauptkrümmungslinien der Fläche.*

Die zweite Schar der Hauptkrümmungslinien sind also die orthogonalen Trajektorien dieser Kreisschnitte; vor allem ist ersichtlich, daß der Durchmesser  $a b$  und die angeführte Nephroide zu denselben gehört, da sie alle Kreise  $\mathfrak{f}$  rechtwinklig schneiden. Es läßt sich leicht beweisen, daß jede durch  $a b$  gelegte Ebene die Fläche in einer Hauptkrümmungslinie der zweiten Schar schneidet; in der Tat schneidet solche Ebene alle umschriebenen Rotationskegel  $v \mathfrak{f}$  in Erzeugenden, welche Tangenten der Schnittkurve sind; diese Erzeugenden sind aber zum Kreise  $\mathfrak{f}$  senkrecht.

Jede durch  $a b$  gelegte Ebene schneidet also die Kreise  $\mathfrak{f}$  rechtwinklig; daher:

*Das Ebenenbüschel  $a b$  schneidet die Fläche in Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar.*

Die Gleichung einer solchen Ebene ist  $z = a y$ , wobei  $a = t g \omega$  die Richtungstangente bedeutet; substituieren wir diesen Ausdruck in (9), so erhalten wir:

$$4 y^2 [x^2 + (1 + a^2) y^2 - r^2]^3 + a^4 y^4 [x^2 + (1 + a^2) y^2 - r^2]^2 + 18 a^2 r^2 y^4 [x^2 + (1 + a^2) y^2 - r^2] + 4 a^6 r^2 y^5 - 27 r^4 y^4 = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in  $y^2 = 0$  und:

$$(13) \quad 4 k^6 + a^4 y^2 k^4 + 18 a^2 r^2 y^2 k^2 + y^2 (4 a^6 r^2 y^2 - 27 r^4) = 0, \\ \text{wobei } k^2 = x^2 + (1 + a^2) y^2 - r^2 \text{ bedeutet.}$$

Die Grundrisse der Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar sind also auch Sextiken, aber nicht trizirkular.

Da  $1 + a^2 = \sec^2 \omega$  ist, so ist  $(1 + a^2) y^2 = y_1^2$ , wenn  $y_1$  die entsprechende Ordinate für die *wirkliche Größe* der *Schnittkurve* bedeutet.

Die Gleichung der Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar ist also:

$$(14) \quad 4 (1 + a^2)^2 k^6 + a^4 (1 + a^2) y^2 k^4 + 18 a^2 (1 + a^2) r^2 y^2 k^2 + y^2 [4 a^6 r^2 y^2 - 27 (1 + a^2) r^4] = 0,$$

wobei  $k^2 = x^2 + y^2 - r^2$  ist.

*Die Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar sind also trizirkulare Sextiken.*

Um die Aufrisse derselben zu erhalten, setzen wir in (9)  $y = \frac{z}{a}$  oder,

wenn  $b = \frac{1}{a} = \cot g \omega$  bedeutet,  $y = bz$ , dann bekommen wir nach Weglassung von  $z^2 = 0$ :

$$(15) \quad 4 b^2 [x^2 + (1 + b^2) z^2 - r^2]^3 + z^2 [x^2 + (1 + b^2) z^2 - r^2]^2 + 18 b^2 r^2 z^2 [x^2 + (1 + b^2) z^2 - r^2] + 4 r^2 z^2 (z^2 - 27 b^4 r^2) = 0.$$

Die Aufrisse der Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar sind ebenfalls Sextiken, jedoch nicht zirkular.

Für  $\omega = 90^\circ$  ist  $b = 0$ , somit nach Weglassung von  $z^2 = 0$ :

$$(x^2 + z^2 - r^2)^2 + 4 r^2 z^2 = 0.$$

In der  $XZ$ -Ebene sind also die Nullkreise  $a_1 b$  ebenfalls Hauptkrümmungslinien.

### Tangentenfläche der orthogonalen Rollkurve.

In Fig. 5 ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen aus der Fig. 1  $q_1$  und  $q_2$  der Grund- und Aufriss eines beliebigen Punktes der orthogonalen





dann beschreibt der Punkt  $p$  bekanntlich eine Ellipse (Fig. 6), deren große Halbachse  $a$  und kleine Halbachse  $b$  ist. Dieselbe Ellipse entsteht bekanntlich,

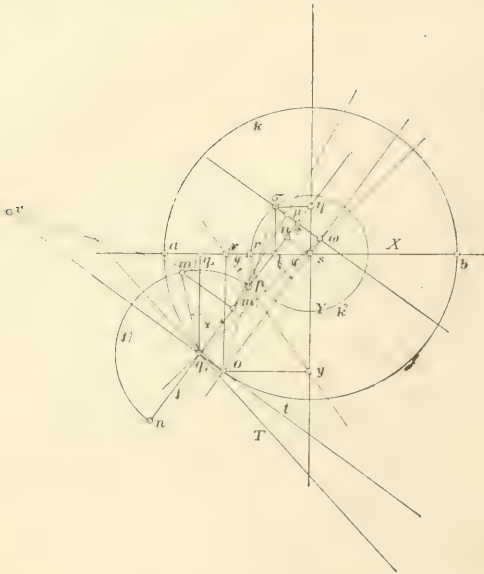


Fig. 6.

wenn sich eine Strecke  $xy$  von der konstanten Länge  $r$  so bewegt, daß ihre Endpunkte  $x$  und  $y$  die Achsen  $X$  und  $Y$  beschreiben; dann beschreibt der Punkt  $p$  dieser Strecke, der vom Punkte  $x$  den Abstand  $b$  hat, dieselbe Ellipse. Die Senkrechten in  $x$  und  $y$  zu den Achsen  $X$  und  $Y$  schneiden sich in einem Punkte  $o$  des Grundkreises  $k$ , welcher der Momentanpol sowohl der Rollbewegung des Kreises  $x$  als auch der Bewegung der Strecke  $xy$  ist; die Verbindungslinie  $op$  ist daher die Normale der Ellipse im Punkte  $p$ , während  $aso = \varphi$  der am Grundkreise abgerollte Winkel ist.

### Orthogonale Rollkurve.

Rollt der Kreis  $x$  so am Grundkreise  $k$ , daß ihre Ebenen stets an einander senkrecht sind, dann beschreibt der Punkt  $p$  eine Raumkurve, welche wir kurz orthogonale Rollkurve nennen.

Um einen Punkt  $q$  derselben zu erhalten, drehen wir den (nicht eingezeichneten) Kreis  $x$  um die Tangente  $t$  im Punkte  $o$  des Grundkreises um einen rechten Winkel; dann beschreibt der Punkt  $p$  einen Quadranten des Kreises  $k$ , der zu der Tangente  $t$  senkrecht ist. Füllen wir also von  $p$  die Senkrechte  $p q_1$  auf  $t$ , so ist dieselbe der Grundriß dieses Quadranten, und der Fußpunkt  $q_1$  dieser Senkrechten ist der Grundriß eines beliebigen Punktes  $q$  der orthogonalen Rollkurve. Sein Aufriß  $q_2$  und Seitenriß  $q_3$  ergeben sich daraus, daß  $p q_1$  der Abstand des Punktes  $q$  von der Grundrißebene ist. Füllen wir noch die Senkrechte von  $q_1$  auf  $ab$  und legen wir das Koordinatensystem fest, dessen Anfang der Mittelpunkt  $s$  des Grundkreises ist, und dessen Achsen  $X$  und  $Y$  sind, während die Senkrechte im Anfangspunkte zum Grundkreise die  $Z$ -Achse ist. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes  $q$  mit  $x, y, z$ , dann ist in Fig. 6 der Reihe nach:

$$s x = r \cos \varphi, x o = r \sin \varphi, r x = b \cos \varphi, p r = b \sin \varphi, s r = a \cos \varphi,$$

$$s \xi = (a - b) \cos \varphi, \xi n = (a - b) \cos^2 \varphi, p q_1 = a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi$$

und daher:

$$(18) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \varphi + (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi) \cos \varphi, y = b \sin \varphi + \\ &+ (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi) \sin \varphi, z = a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Die vollständige orthogonale Rollkurve entsteht, wenn ein Umfang des Grundkreises, und somit zwei Umfänge des Rollkreise abrollen; daraus ist ersichtlich, daß die Rollkurve zu den Ebenen  $XZ$  und  $YZ$  symmetrisch ist und ganz oberhalb oder unterhalb der Ebene  $XY$  sich befindet, je nachdem der Winkel der beiden Kreise  $\pm 90^\circ$  ist. Die Gleichung des Grundrisses der orthogonalen Rollkurve erhalten wir durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $y$  in (18); die Rechnung ergibt:

$$(18a) \quad \begin{aligned} &(a+b)k^6 - 4b(a+b)(2a-b)k^4 + (a^2-b^2)[(3a+5b)y^2 + 4b^2(5a-b)]k^2 + \\ &+ (a-b)(a^2-b^2)y^4 - (a-b)(a^4 + 14a^3b + 32a^2b^2 + 18ab^3 - b^4)y^2 - \\ &- 16ab^3(a+b)(a-b)^2 = 0, \end{aligned}$$

wobei  $k^2 = x^2 + y^2 - (a-b)^2$  ist.

Der Grundriß der orthogonalen Rollkurve ist eine trizirkulare Sextik.

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $z$  erhalten wir die Gleichung des Aufrisses:

$$(18b) \quad (a-z)(a+z)^2 = (a-b)x^2.$$

Der Aufriß der orthogonalen Rollkurve ist eine Kubik, die aus Symmetriegründen doppelt zählt.

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $y$  und  $z$  folgt die Gleichung des Seitenrisses:

$$(18c) \quad (z-b)(z+b)^2 = (a-b)y^2.$$

Der Seitenriß der orthogonalen Rollkurve ist ebenfalls eine doppelt zählende Kubik.

Somit:

Die orthogonale Rollkurve ist eine Raumkurve sechster Ordnung.

Die Gerade  $p q_1$  (Fig. 6) schneidet auf der Achse  $X$  und  $Y$  die Abschnitte  $= s \xi = (a-b) \cos \varphi$  und  $s \eta = (a-b) \sin \varphi$ ; daraus folgt, daß diese Gerade  $p q_1$  eine Astroide einhüllt, welche dem Kreise  $k'$  vom Radius  $a-b$  eingeschrieben ist, weil die Strecke  $\xi \eta = a-b$  von konstanter Länge ist. Daraus folgt eine neue Erzeugung des Grundrisses der orthogonalen Rollkurve:

*Bewegt sich der rechte Winkel  $o q_1 p$ , so daß der Schenkel  $o q_1$  den Grundkreis  $k$ , der andere Schenkel  $p q_1$  jedoch die dem Kreise  $k'$  eingeschriebene Astroide einhüllt, dann beschreibt der Scheitel  $q_1$  desselben den Grundriß der orthogonalen Rollkurve.*

Ist wieder  $\sigma$  der Momentalpol für die Bewegung der konstanten Strecke  $\xi \eta$ , und fällen wir von  $\sigma$  die Senkrechte  $\sigma \tau$  auf  $\xi \eta$ , dann ist der Fußpunkt  $\tau$  derselben der Berührungspunkt auf der Astroide, und der Schnittpunkt  $\omega$  von  $\sigma \tau$  mit  $o s$  ist der Momentanpol für die Bewegung des rechten Winkels  $o q_1 p$ ; daher ist die Verbindungsgerade  $\omega q_1$  die Normale

des Grundrisses der orthogonalen Rollkurve; die Senkrechte zu derselben ist die Tangente. Aus der Figur ist ersichtlich:

$$s \omega = n \tau = (a - b) - 2(a - b) \cos^2 \varphi \quad \text{oder} \quad s \omega = (a - b) (1 - 2 \cos^2 \varphi).$$

Bezeichnen wir die Polarkoordinaten von  $w$  mit  $\rho$  und  $\varphi$ , dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes von  $w$ :

$$\rho = (a - b) (1 - 2 \cos^2 \varphi)$$

und die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2)^3 = (a - b)^2 (x^2 - y^2)^2.$$

*Der geometrische Ort des Momentanpoles  $\omega$  ist also vierblättrige Rosenkurve, welche dem Kreise  $k'$  vom Radius  $a - b$  eingeschrieben ist.*

### Klinogonale Rollkurven.

Drehen wir (den nicht eingezeichneten) Rollkreis  $\alpha$  um die Tangente  $t$  im Momentanpol  $o$  um einen beliebigen Winkel  $\alpha$ , dann beschreibt der Punkt  $p$  seiner Ebene einen Kreisbogen  $p m$  des oben angeführten Kreises  $k$ , der in der Fig. 6 in seiner Umklappung gezeichnet ist. Füllen wir von  $(m)$  die Senkrechte  $(m) m_1$  auf  $p q_1$ , so ist  $m_1$  der Grundriß eines beliebigen Punktes der klinogonalen Rollkurve, welche dem Neigungswinkel  $\alpha$  entspricht. Den Aufriß  $m_2$  und Seitenriß  $m_3$  desselben erhalten wir durch Auftragung der Strecke  $(m) m_1$  auf die betreffenden Projektionsstrahlen. Aus der Figur finden wir wie früher (5)

$$p m_1 = p q (1 - \cos \alpha) \quad \text{und somit:} \quad \frac{p m_1}{p q_1} = (1 - \cos \alpha) = \text{konst.}$$

Die Grundrisse  $m_1$  der klinogonalen Rollkurve teilen also die Strecke  $p q_1$  zwischen der Ellipse  $(p)$  und dem Grundrisse  $(q_1)$  der orthogonalen Rollkurve in konstantem Verhältnisse; es kann also die Kurve  $(m_1)$  aus den beiden anderen durch Anwendung eines Reduktionswinkels abgeleitet werden.

Wir können dies auch so ausdrücken:

Die veränderliche Strecke  $p q_1$  bewegt sich, so daß ihre Endpunkte  $p$  und  $q_1$  die Ellipse  $(p)$  und den Grundriß der orthogonalen Rollkurve  $(q_1)$  beschreiben, und der Punkt  $m_1$ , der diese veränderliche Strecke in konstantem Verhältnis teilt, beschreibt den Grundriß der klinogonalen Rollkurve  $(m_1)$ ; wir können daher nach dem oben zitierten Satze von Mannheim die Normale der Kurve  $(m_1)$  leicht konstruieren. Da  $o \omega = 2(a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi)$  und daher  $o \omega = 2 p q_1$  ist, so muß die Normale der Ellipse  $o p$  durch  $\sigma$  gehen und es muß  $o p = p \sigma$  sein. Konstruieren wir also einen Punkt  $\mu$ , so daß derselbe die Strecke  $\sigma \omega$  in demselben Verhältnisse teilt, wie  $m_1$  die Strecke  $p q_1$  teilt, dann ist die Verbindungslinie  $m_1 \mu$  die Normale des Grundrisses der klinogonalen Rollkurve im Punkte



$m_1$ . Den Punkt  $\mu$  können wir also mittelst desselben Reduktionswinkels erhalten. Aus oben angeführten Gründen umhüllen die Normalen in allen Punkten  $m_1$ , welche am Grundrisse desselben Kreises  $\mathfrak{k}$  liegen, eine Parabel.

Bezeichnen wir mit  $x, y, z$  die Koordinaten des Punktes  $m$  in Bezug auf das frühere Koordinatensystem, so ergeben sich aus Fig. 6 die Werte:

$$(19) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \varphi + (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi) \cos \varphi (1 - \cos \alpha), \\ y &= b \sin \varphi + (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi) \sin \varphi (1 - \cos \alpha), \\ z &= (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus je zwei dieser Gleichungen erhalten wir wieder die Gleichungen des Grund — Auf — und Seitenrisses der klinogonalen Rollkurve, die dem Neigungswinkel  $\alpha$  entspricht,

$$(20a) \quad \begin{aligned} &4 k^6 \sin^4 \frac{\alpha}{2} - 4 [2 \mu^4 + (a + b) v^3] k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \\ &+ \mu^4 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 \left[ (a + b)^2 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - 4 a b \cos^4 \frac{\alpha}{2} \right] - \\ &- 16 v^6 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^6 \frac{\alpha}{2} = 0 ; \end{aligned}$$

dabei bedeutet:

$$\begin{aligned} k^2 &= x^2 + y^2 - (a^2 + a b + b^2), \quad \mu^4 = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \\ \text{und } v^3 &= b x^2 + a y^2 - a b (a + b). \end{aligned}$$

Der Grundriß der klinogonalen Rollkurve ist eine trizirkulare Sextik.

$$(20b) \quad (z - a \sin \alpha) \left( z \sin \frac{\alpha}{2} + a \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 + (a - b) x^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Der Aufriß der klinogonalen Rollkurve ist eine doppelzählende Kubik

$$(20c) \quad (z - b \sin \alpha) \left( z \sin \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 - (a - b) y^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Der Seitenriß der klinogonalen Rollkurve ist also ebenfalls eine doppelt zählende Kubik.

*Die klinogonalen Rollkurven sind also ebenfalls Raumkurven sechster Ordnung.*

Im Falle  $\alpha = 180^\circ$  erhalten wir die Rollung in der Ebene des Grundkreises auf dem äußeren Umfange desselben. Die Rollkurve ist bekanntlich die verkürzte Nephroide. Wir können dieselbe auch ohne Rollung erhalten, indem wir die Punkte der Ellipse im  $180^\circ$  um die entsprechenden Tangenten des Grundkreises drehen, also  $p q_1 = q_1 n$  machen, wodurch eine einfache Beziehung zwischen den beiden Kurven festgelegt ist.

Die Gleichungen für  $x$  und  $y$  in (19) übergehen dann in folgende:

$$(19a) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \varphi + 2 \cos \varphi (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi), \\ y &= b \sin \varphi + 2 \sin \varphi (a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus denselben erhalten wir als Gleichung der verkürzten Nephroide, wenn  $k^2 = x^2 + y^2 - (a - b)^2$  gesetzt wird:

$$(21) \quad [2k^2 - 3b(a-b)]^3 - 9b(a+b)[2k^2 - 3b(a-b)]^2 - 54(a-b)(a+b)^3y^2 = 0$$

welche thatsächlich für  $b = 0$ ,  $a = r$  in die Gleichung der gemeinen Nephroide übergeht.

Die verkürzte Nephroide schneidet die  $X$ -Achse in Scheiteln, deren Abszisse  $\pm(a + 2b)$  ist, und hat auf derselben isolierte Doppelpunkte, deren Abszisse  $\pm\sqrt{\frac{(a-b)(2a+b)}{2}}$  ist. Die  $Y$ -Achse wird in Scheiteln geschnitten, deren Ordinate  $\pm(2a + b)$  ist und außerdem in imaginären Doppelpunkten.

### Die Fläche der verkürzten Rollkurven.

Alle Rollkurven, welche aus dem Punkte  $A$  ausgehen und allen Werten von  $\alpha$  entsprechen, erfüllen eine Fläche, welche wir kurz *die verkürzte Fläche* nennen, und deren Gleichung durch Elimination von  $\varphi$  und  $\alpha$  aus (19) erhalten wird; die betreffende Rechnung ergibt:

$$(22) \quad 4(a^2 - b^2)y^2(k^2 + 3b^2)^3 + u^6(k^2 + 3b^2)^2 - 18(a+b)(a^2 - b^2)y^2u^3(k^2 + 3b^2) - 4(a+b)u^9 - 27(a+b)^2(a^2 - b^2)^2y^4 = 0,$$

wobei

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (a - b)^2$$

$$\text{und } u^3 = 2b(x^2 + y^2) - (a - b)z^2 - b(a - b)(2a + b)$$

bedeutet.

*Die verkürzte Rollfläche ist ebenfalls achter Ordnung.* Dieses Resultat war vorauszusehen, da die  $XY$ -Ebene die Fläche in einer Ellipse und in einer verkürzten Nephroide, also in einer zerfallenden Kurve achter Ordnung schneiden.

*Der absolute Kreis im Unendlichen ist eine Doppellinie der Fläche;* dies geht einfach aus der Gleichung (22) hervor, aber auch geometrisch, da zu jedem Kreisschnitte  $\mathfrak{k}$  ein paralleler zugehört, welche beide die gemeinsame Gerade im Unendlichen in denselben imaginären Kreispunkten schneiden.

### Konstruktion der Fläche.

Teilen wir (Fig. 7) den Grundkreis in 24 gleiche Teile, so erhalten wir die Momentanpole 0...24 und ziehen in denselben die Tangenten  $t$  an den Grundkreis; weiter zeichnen wir die Rechtecke, welche von diesen Punkten ausgehen, und ziehen die Diagonalen in denselben, welche nicht durch den Mittelpunkt  $s$  gehen. Es sind dies verschiedene Lagen der Strecke  $xy = z$ , deren Punkt  $p$  die Ellipse erzeugt. Aus den Punkten  $x$  tragen wir  $xp = b$  auf und erhalten die Ellipsenpunkte 0...24. Die Verbindungs-

linien gleichzeichneter Punkte des Grundkreises und der Ellipse sind Normalen der Ellipse. Von den Punkten  $0 \dots 24$  der Ellipse fallen wir Senkrechte auf die zugehörigen Tangenten  $t$ ; ihre Fußpunkte erfüllen den Grundriß der orthogonalen Rollkurve. Dann tragen wir die Längen dieser Senkrechten auf die entgegengesetzte Seite der Tangenten und erhalten die Punkte  $0 \dots 24$  der verkürzten Nephroide. Die Strecken  $0,0 \dots 24, 24$ , welche gleich bezeichnete Punkte der Ellipse und Nephroide verbinden, sind die Grundrisse der Kreisschnitte  $k$ , welche senkrecht zur Ebene  $X Y$  und je

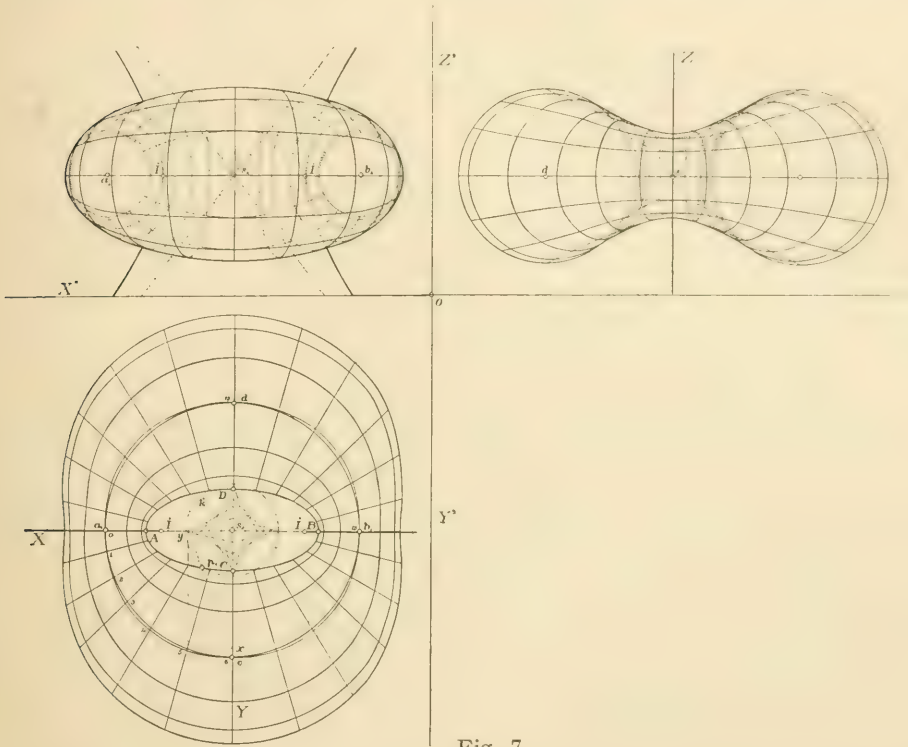


Fig. 7.

zwei symmetrisch zu den Ebenen  $X Z$  und  $Y Z$  sind. Ihre Ebenen umhüllen einen geraden Zylinder, dessen Grundlinie in  $X Y$  die besagte Astroide ist, welche dem Kreise vom Halbmesser  $a-b$  eingeschrieben ist.

Die Aufrisse und Seitenrisse dieser Kreisschnitte sind im allgemeinen Ellipsen, welche aus den Achsen mittelst der Streifenkonstruktion gezeichnet werden. Die Kreise  $00, 12, 12$  projizieren sich im Aufrisse in wirklicher Größe als Kreise vom Halbmesser  $b$ , und ihre Seitenrisse sind Strecken auf  $Z$  von der Länge  $2b$ . Die Kreise  $66, 18, 18$  projizieren sich in Seitenrisse in wirklicher Größe als Kreise vom Halbmesser  $a$ , und ihre Aufrisse sind Strecken auf  $Z$  von der Länge  $2a$ .

Die vollständigen Schnitte der Fläche mit den Ebenen  $X Z$  und  $Y Z$  erhalten wir aus der Gleichung (22).



Für  $y = 0$  erhalten wir als Gleichung des Schnittes mit der Ebene  $XZ$ :  
 $u^6(k^2 + 3b^2)^2 - 4(a+b)u^3 = 0$  oder  $u^6 = 0$  und  $(k^2 + 3b^2)^2 - 4(a+b)u^3 = 0$ .

Der erste, doppeltzählende Wert liefert:

$$\frac{\frac{x^2}{(a-b)(2a+b)}}{2} - \frac{z^2}{b(2a+b)} = 1; \text{ somit:}$$

In der Ebene  $XZ$  hat die Fläche eine Doppellinie und zwar eine reelle Hyperbel, deren Halbachsen

$$\sqrt{\frac{(a-b)(2a+b)}{2}} \text{ und } \sqrt{b(2a+b)}$$

sind; diese Hyperbel hat ihre Scheitel in den isolierten Doppelpunkten der verkürzten Nephroide II.

Der zweite Wert liefert das Resultat:

$$[x^2 + z^2 - (a-b)^2 + 3b^2]^2 - 4(a+b)[2by^2 - (a-b)z^2 - b(a-b)(2a+b)] = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in das Produkt:

$$\{[x - (a+b)]^2 + z^2 - b^2\} \cdot \{[x + (a+b)]^2 + z^2 - b^2\} = 0.$$

Dies sind aber die oben angeführten Kreise vom Halbmesser  $b$ , deren Mittelpunkte in  $a$  und  $b$  sind. Das erste Resultat erheischt eine nähere Besprechung. Die besagte doppeltzählende Hyperbel ist der geometrische Ort der isolierten Doppelpunkte sämtlicher ebener Schnitte der Fläche. Die Ebenen von je zwei Kreisschnitten  $\mathfrak{K}$ , welche symmetrisch in Bezug auf die Ebene  $XZ$  sind, schneiden sich in einer Geraden  $P \parallel Z$  dieser Ebene, und beide symmetrischen Kreise schneiden diese Gerade  $P$  in denselben imaginären Punkten. Es wäre jedoch die Schlußfolgerung unrichtig, daß der Doppelkegelschnitt in der Ebene  $XZ$  deshalb imaginär sein muß. Die Gerade  $P$  schneidet nämlich die oben angeführte Hyperbel in denselben imaginären Punkten wie die beiden symmetrischen Kreise. Wir können also kurz sagen:

*Die symmetrischen Kreise  $\mathfrak{K}$  schneiden sich in imaginären Punkten der reellen Doppel-Hyperbel.* Die lineare Exzentrizität dieser Hyperbel ist

$$\sqrt{\frac{(a+b)(2a+b)}{2}};$$

die Hyperbel wird also aus ihren Scheiteln und Brennpunkten konstruiert.

Für  $x = 0$  erhalten wir als Gleichung des Schnittes der Fläche mit der Ebene  $YZ$ :

$$\begin{aligned} & 4(a^2 - b^2)y^2[(y^2 + z^2) - (a^2 - 2ab - 2b^2)]^3 + [2by^2 - (a-b)z^2 - b(2a^2 - ab - b^2)]^2 \\ & [(y^2 + z^2) - (a^2 - 2ab - 2b^2)]^2 - 18(a+b)(a^2 - b^2)y^2[2by^2 - (a-b)z^2 - b(2a^2 - ab - b^2)] \\ & [(y^2 + z^2) - (a^2 - 2ab - 2b^2)] - 4(a+b)[2by^2 - (a-b)z^2 - b(2a^2 - ab - b^2)]^3 - \\ & - 27(a+b)^2(a^2 - b^2)^2y^4 = 0. \end{aligned}$$

Dieselbe zerfällt aber in das Produkt:

$$\{[y - (a + b)]^2 + z^2 - a^2\} \cdot \{[y + (a + b)]^2 + z^2 - a^2\} \cdot \\ \{2 a y^2 + (a + b) z^2 + a (a + b) (a + 2 b)\}^2 = 0.$$

Der Schnitt der Fläche mit der  $YZ$ -Ebene zerfällt also in die besagten Kreise vom Halbmesser  $a$ , deren Mittelpunkte  $c$  und  $d$  sind, und in eine doppeltzählende imaginäre Ellipse, deren Halbachsen

$$i \sqrt{\frac{(a + b)(a + 2b)}{2}} \text{ und } i \sqrt{a(a + 2b)} \text{ sind.}$$

Dann konstruieren wir den Auf- und Seitenriß der orthogonalen Rollkurve in bekannter Weise. Schließlich konstruieren wir die klinogonalen Rollkurven, welche den Werten  $\alpha = 30^\circ 60^\circ \dots$  entsprechen.

Um ihre Grundrisse zu erhalten, klappen wir den Kreis 66 um, teilen ihn in 12 gleiche und projizieren die Teilpunkte zurück auf die Strecke 66. Mittels Reduktionswinkel konstruieren wir die korrespondierenden Punkte auf den übrigen Kreisschnitten und verbinden dieselben. Die Auf- und Seitenrisse der klinogonalen Rollkurven erhalten wir, indem wir aus dem Grundriß die entsprechenden Projektionsstrahlen ziehen und dieselben mit den betreffenden Ellipsen zum Schnitte bringen; oder genauer, indem wir alle Kreisschnitte umklappen und die betreffenden Ordinaten von den Achsen auf die Projektionsstrahlen auftragen, wodurch wir eine Kontrolle für die Ellipsen erhalten.

### Normalkegel und umschriebener Kegel.

Aus denselben Gründen wie oben finden wir:

Die Verbindungslinie des Momentanpoles  $o$  mit einem beliebigen Punkte  $m$  des entsprechenden Kreisschnittes  $\mathfrak{k}$  ist eine Normale der Fläche, und der Rotationskegel  $o\mathfrak{k}$  ist ein Normalkegel der Fläche.

Sei  $v$  der Schnittpunkt der Tangente  $t$  im Momentanpole  $o$  mit der Tangente der Ellipse im Punkte  $p$  (Fig. 6), dann ist aus denselben Gründen wie früher gültig:

Der Rotationskegel  $v\mathfrak{k}$  ist der Fläche längs des Kreisschnittes umschrieben.

### Konturen der Fläche.

Der Umriß im Grundrisse besteht aus der Ellipse und der verkürzten Nephroide. Die Kreise vom Halbmesser  $b$  sind Teilumrisse im Aufrisse, und die Kreise vom Halbmesser  $a$  sind Teilumrisse im Seitenrisse.

Ziehen wir (Fig. 8) durch den Scheitel  $v$  die Tangentialebene an den umschriebenen Kegel  $v\mathfrak{k}$ , welche senkrecht zur Aufrißebene ist; die Grundrißspur  $S_1$  geht durch  $v$  und ist senkrecht zu  $X$ . Füllen wir vom Momentanpole  $o$  die Senkrechte auf  $S_1$ , dieselbe schneidet  $\mathfrak{k}$  im gesuchten Berührungspunkte  $u$ ; durch Umklappung des Kreises  $\mathfrak{k}$  erhalten wir seine Ordinate

$z$  und somit auch den Aufriß  $u_2$  und Seitenriß  $u_3$ . Die Verbindungslinie  $v_2 u_2$  ist die Aufrißspur  $S_2$  der aufrißprojizierenden Ebene, welche die Fläche in  $u$  berührt; es ist somit  $u_2$  ein Punkt des scheinbaren Umrisses im Aufrisse, und  $S_2$  ist dessen Tangente.

Bezeichnen wir  $x, y, z$  die Koordinaten des Punktes  $u$ , dann folgt aus Fig. 8:

$$(23) \quad x = 2a \cos \varphi, y = (a + b) \sin \varphi \text{ und } z^2 = a^2 (\sin^4 \varphi - \cos^4 \varphi) + 2ab \cos^2 \varphi.$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $y$  folgt als Gleichung des Grundrisses:

$$(23a) \quad \frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} = 1; \text{ daher:}$$

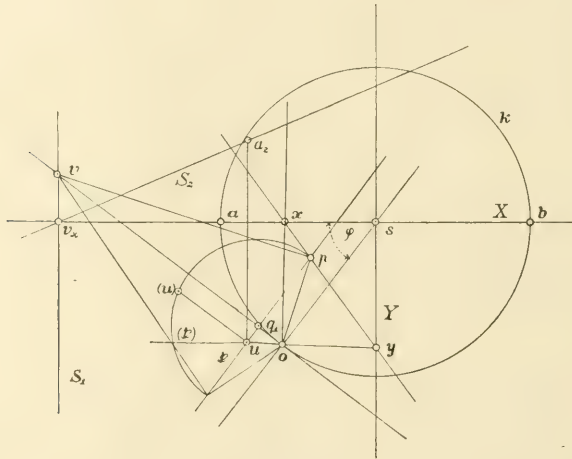


Fig. 8.

Der Grundriß des wahren Umrisses, der dem scheinbaren Umriss im Aufrisse entspricht, ist eine Ellipse, deren Halbachsen  $2a$  und  $a + b$  sind.

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $z$  erhalten wir

$$(23b) \quad \frac{x^2}{2a^3} + \frac{z^2}{a^2} = 1; \text{ daher:}$$

Der scheinbare Umriß im Aufrisse ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a \sqrt{\frac{2a}{a-b}}$  und  $a$ ; diese berührt natürlich die besagten Kreise vom Halbmesser  $b$ .

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $y$  und  $z$  folgt:

$$(23c) \quad \frac{y^2}{2(a+b)^2(a-2b)} - \frac{z^2}{a(a-2b)} = 1; \text{ daher}$$



Der Seitenriß des wahren Umrisses, der dem scheinbaren Umriss im Aufrisse entspricht, ist eine Hyperbel mit den Halbachsen

$$(a + b) \sqrt{\frac{a - 2b}{2(a - b)}} \quad \text{und} \quad \sqrt{a(a - 2b)}.$$

Der wahre Umriß selbst, der dem scheinbaren Umriss im Aufrisse entspricht, ist eine Raumkurve vierter Ordnung.

Legen wir (Fig. 9) durch den Scheitel  $v$  die Tangentialebene an den Berührungskegel  $v\mathfrak{k}$ , welche senkrecht zur dritten Projektionsebene ist; die Grundrißspur  $S_1$  derselben geht durch  $v$  und ist senkrecht zur  $Y$ -Achse. Füllen wir vom Momentanpol  $o$  die Senkrechte auf  $S_1$ , so schneidet dieselbe  $\mathfrak{k}$  in dem gesuchten Berührungspunkte  $w$ ; durch Umklappung des Kreises  $\mathfrak{k}$  erhalten wir die  $z$ -Ordinate desselben und daher auch den Aufriß und Seitenriß des Punktes  $w$ . Die Verbindungsgerade  $v_3 w_3$  ist die Seitenrißspur  $S_3$  der seitenrißprojizierenden Ebene, welche die Fläche in  $w$  berührt; deshalb ist  $w_3$  ein Punkt des scheinbaren Umrisses im Seitenrisse und  $S_3$  dessen Tangente, während  $w$  ein Punkt des wahren Umrisses ist, der dem scheinbaren Umriss im Seitenrisse entspricht.

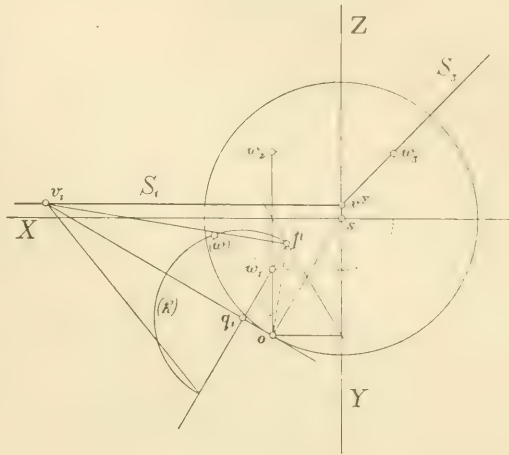


Fig. 9.

Bezeichnen wir wieder mit  $x, y, z$  die Koordinaten des Punktes  $w$ , so liefert die Fig. (9) folgende Werte:

$$(24) \quad x = (a + b) \cos \varphi, \quad y = 2b \sin \varphi \quad \text{und} \quad z^2 = b^2 (\cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi) + 2ab \sin^2 \varphi.$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $y$  folgt:

$$(24a) \quad \frac{x^2}{(a + b)^2} + \frac{y^2}{(2b)^2} = 1; \quad \text{daher:}$$

Der Grundriß des wahren Umrisses, der dem scheinbaren Umriss im Seitenrisse entspricht, ist eine Ellipse, deren Halbachsen  $a + b = r$  und  $2b$  sind.

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $x$  und  $z$  erhalten wir:

$$(24b) \quad \frac{x^2}{(a + b)^2 (2a - b)} + \frac{z^2}{b (2a - b)} = 1; \quad \text{daher:}$$

$$\frac{x^2}{2(a - b)}$$

Der Aufriß des wahren Umrisses, der dem scheinbaren Umriss im Seitenrisse entspricht, ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$(a + b) \sqrt{\frac{2a - b}{2(a - b)}} \text{ und } \sqrt{b(2a - b)}.$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus  $y$  und  $z$  erhalten wir:

$$(24c) \quad \frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{\frac{2b^3}{a - b}} = 1; \text{ daher:}$$

Der scheinbare Umriß im Seitenrisse ist eine Hyperbel mit den Halbachsen  $b$  und  $b \sqrt{\frac{2b}{a - b}}$ . Der wahre Umriß, der dem scheinbaren Umriss im Seitenrisse entspricht, ist also ebenfalls eine Raumkurve vierter Ordnung.

### Geometrischer Ort der Scheitel $v$ der Berührungskegel.

Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes  $v$  mit  $x$  und  $y$ , dann kann man aus der Fig. 8 folgende Bestimmungsgleichungen für dieselben ableiten:

$$(25) \quad x \cos \varphi - y \sin \varphi = a + b \text{ und } b x \cos \varphi - a y \sin \varphi = a b.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Werte für die Koordinaten des Scheitels  $v$  eines beliebigen Rotationskegels, der unsere Fläche nach einem Kreisschnitte  $\mathfrak{f}$  berührt:

$$(26) \quad x = \frac{a^2}{(a - b) \cos \varphi} \text{ und } y = -\frac{b^2}{(a - b) \sin \varphi}.$$

Durch Elimination von  $\varphi$  aus diesen Gleichungen erhalten wir die Gleichung:

$$(27) \quad (a^2 - b^2) x^2 y^2 = b^4 x^2 + a^4 y^2; \text{ daher:}$$

Der geometrische Orts der Scheitel  $v$  aller Rotationskegel, welche die Rollfläche nach den Kreisschnitten  $\mathfrak{f}$  berühren, ist eine *spezielle Kreuzkurve*; setzen wir nämlich  $\frac{a^4}{a^2 - b^2} = A^2$  und  $\frac{b^4}{a^2 - b^2} = B^2$ , so übergeht

(27) in

$$(27a) \quad \frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = 1.1)$$

Dieselbe hat  $X$  und  $Y$  zu Asymptotenrichtungen; den unendlich fernen Punkten derselben entsprechen also die Rotationszylinder, welche die Fläche längs der Kreisschnitte vom Halbmesser  $a$  beziehungsweise  $b$  berühren und zu den betreffenden Projektionsebenen senkrecht sind; daher geben diese Zylinder diese Kreise als scheinbare Umrisse.

1) Siehe: Loria-Schütte, l. c. pag. 226.

### Eingeschriebene Kugeln.

Aus demselben Grunde wie oben gilt:

Die Kugel, deren Mittelpunkt der Momentanpol  $o$ , und deren Radius die Normale  $o\phi$  der Ellipse ist, ist der Fläche längs des Kreisschnittes  $\mathfrak{f}$  eingeschrieben. Diese eingeschriebene Kugel dient insbesondere zur Konstruktion der Isophoten der Fläche; aus ihr ergibt sich auch folgende einfache Erzeugung der Fläche:

*Bewegt sich eine veränderliche Kugel, so daß ihr Mittelpunkt  $o$  den Grundkreis  $k$  beschreibt, und welche stets jene Ellipse berührt, welche mit dem Kreise konzentrisch ist und in seiner Ebene liegt, und deren Halbachsensumme gleich dem Radius des Grundkreises ist, dann hüllt diese veränderliche Kugel die verkürzte Rollfläche ein.*

### Die Hauptkrümmungslinien der Fläche.

Die Kreisschnitte  $\mathfrak{f}$  der Fläche bilden die erste Schar der Hauptkrümmungslinien derselben. Die andere Schar sind also orthogonale Trajektorien dieser Kreise. Die verkürzte Nephroide und die Ellipse bilden eine zerfallende Hauptkrümmungslinie der zweiten Schar, weil dieselben von allen Kreisen  $\mathfrak{f}$  senkrecht geschnitten werden.

Die Erzeugenden aller Berührungskegel  $v\mathfrak{f}$  sind senkrecht zu diesen Kreisen, sind daher Tangente; der Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar; es gilt somit:

Die Tangentenflächen aller Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar haben ihre gemeinsame Spur in der  $X Y$ -Ebene in der oben erwähnten speziellen Kreuzkurve; dieselben sind also vierter Ordnung. Umgekehrt: jede developpable Fläche, deren Grundrisßspur diese spezielle Kreuzkurve ist und deren Erzeugende die Erzeugenden der Berührungskegel  $v\mathfrak{f}$  sind, berührt die Rollfläche in ihrer Rückkehrkante, und diese Rückkehrkante der developpablen Fläche ist eine Hauptkrümmungslinie der zweiten Schar.

### Spezialfall dieser Fläche.

Ist der beschreibende Punkt der Mittelpunkt des rollenden Kreises, also  $a = b = \frac{r}{2}$ , dann zerfällt die Gleichung (22) in folgende:

$$(4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 3r^2)^2 - 64r^2(x^2 + y^2) = 0 \text{ und } (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Die erste Gleichung bedeutet die Wulstfläche, welche umhüllt wird, wenn eine Kugel vom Radius  $\frac{r}{2}$  sich so bewegt, daß ihr Mittelpunkt einen Kreis vom Radius  $r$  beschreibt; die zweite Gleichung bedeutet einen unendlich schmalen, doppeltzählenden Rotationszylinder, der mit der  $Z$ -Achse zusammenfällt. Die auf der allgemeinen Fläche auftretende doppeltzählende Hyperbel übergeht in diesem Spezialfalle ebenfalls in die doppeltzählende  $Z$ -Achse.



### III. Die Fläche der verlängerten Rollkurven.

Rollt der Kreis  $X$  am inneren Umfange eines doppelt so großen Kreises  $k$  vom Halbmesser  $r$ , so daß ihre Ebenen stets zusammenfallen, so beschreibt bekanntlich ein beliebiger Punkt  $p$  der Ebene des rollenden Kreises, der vom äußeren Umfange desselben den Abstand  $b$  hat und vom inneren Umfange den Abstand  $a$ , wobei  $b < a$  und  $a - b = r$  ist, eine Ellipse mit den Halbachsen  $a, b$ . Dieselbe Ellipse entsteht bekanntlich, wenn die Strecke  $xy$  von konstanter Länge  $r$  sich so bewegt, daß ihre Endpunkte  $x, y$  auf zwei zu einander senkrechten Achsen  $X, Y$  gleiten, wobei die Strecke

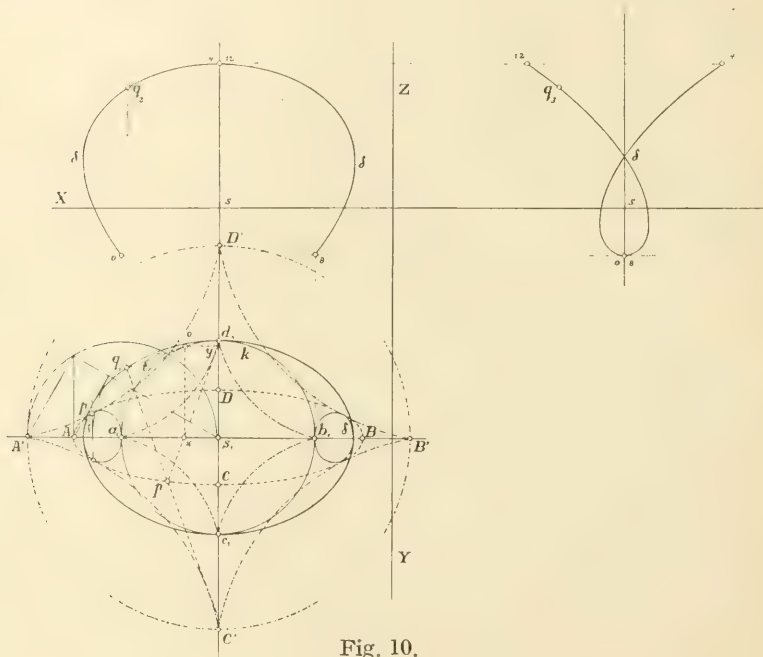


Fig. 10.

$xy$  selbst die Astroide umhüllt, welche dem Grundkreise eingeschrieben ist; dann beschreibt der Punkt  $p$ , der dieserhalb  $xy$  liegt und von  $x$  und  $y$  die Abstände  $b$  und  $a$  hat, wobei  $a - b = r$  ist, dieselbe Ellipse. Wir erhalten also diesen Fall aus dem vorhergehenden, indem wir statt eines positiven  $b$  ein negatives voraussetzen. Alle Konstruktionen und Gleichungen bleiben wesentlich dieselben; die Kurven jedoch, die in diesem Falle auftreten, und die Fläche selbst ändert ihre Gestalt wesentlich und enthält verschiedene Einzelheiten, auf die es notwendig ist näher einzugehen.

#### Die orthogonale Rollkurve.

Ihren Grundriß erhalten wir (Fig. 10), indem wir aus dem Ellipsenpunkte  $p$  auf die Tangente  $t$  im zugehörigen Momentanpole  $o$  die Senkrechte fallen, deren Fußpunkt  $q_1$  der Grundriß eines beliebigen Punktes  $q$  der

orthogonalen Rollkurve ist. Es ist jedoch nötig zu beachten, daß den Momentanpolen unter der  $X$ -Achse Ellipsenpunkte über der  $X$ -Achse entsprechen und umgekehrt, und daß folglich die mehrgenannten Kreischnitte  $\mathfrak{f}$  in diesem Falle die  $X$ -Achse umschließen; die Gleichung des Grundrisses der orthogonalen Rollkurve ist:

$$(18\alpha) \quad (a-b)k^6 + 4b(a-b)(2a+b)k^4 + (a^2-b^2)[(3a-5b)y^2 + 4b^2(5a+b)]k^2 \\ + (a+b)(a^2-b^2)y^4 - (a+b)(a^4 - 14a^3b + 32a^2b^2 - 18ab^3 - b^4)y^2 + \\ + 16ab^3(a-b)(a+b)^2 = 0,$$

wobei

$$k^2 = x^2 + y^2 - (a+b)^2 \text{ ist.}$$

Aus der Konstruktion und der Gleichung geht hervor:

Der Grundriß der rechtwinkligen Rollkurve ist eine trizirkuläre Sextik, welche in  $a, b, c, \bar{a}$  den Grundkreis  $k$  berührt, und in den Punkten  $\delta$  auf  $X$  reelle Doppelpunkte hat, deren Abstand von  $s$  gleich  $\pm\sqrt{a^2-b^2}$  ist; aus denselben gehen symmetrische Schleifen nach den Scheiteln  $a$  und  $b$ . Dieselbe hat die Gestalt einer Kornoide.

Die Gleichung des Aufrisses der orthogonalen Rollkurve ist:

$$(18\beta) \quad (a-z)(a+z)^2 = (a+b)x^2.$$

Dieser Aufriß ist also eine divergente kubische Parabel,<sup>1)</sup> und zwar doppeltzählend, welche in den Punkten 0, 8 die Tiefe  $b$  und im Punkte  $\delta$  die Höhe  $b$  hat und endlich in Scheitel 4, 12 die Höhe  $a$  besitzt. Die  $X$ -Achse schneidet dieselbe im Abstände  $a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$  von  $s$ .

Der Seitenriß der rechtwinkligen Rollkurve hat die Gleichung:

$$(18\gamma) \quad (z+b)(z-b)^2 = (a+b)y^2.$$

Derselbe ist also wiederum eine doppeltzählende Kubik, und zwar eine divergente Parabel, welche die  $Z$ -Achse in den Punkten  $z = \pm b$  schneidet und im Punkte  $z = +b$  einen Doppelpunkt hat, aus dem eine symmetrische Schleife ausgeht. Die größte Höhe  $a$  erreicht dieselbe in den Punkten, für welche  $y = \pm r$  ist.

Die orthogonale Rollkurve ist also eine Raumkurve sechster Ordnung.

Der Grundriß der orthogonalen Rollkurve entsteht auch, wenn sich ein rechter Winkel  $oq_1p$  so bewegt, daß der Schenkel  $oq_1$  den Grundkreis einhüllt, während der Schenkel  $pq_1$  die dem Kreise vom Halbmesser  $a+b$  eingeschriebene Astroide einhüllt; dann beschreibt dessen Scheitel  $q_1$  diese Sextik. Daraus konstruieren wir wiederum leicht den Pol  $\omega$ , dessen Ort die vierblättrige Rhodonea ist, welche dem Kreise vom Halbmesser  $a+b$  eingeschrieben ist, und deren Gleichung ist:

$$(x^2 + y^2)^3 = (a+b)^2(x^2 - y^2)^2.$$

<sup>1)</sup> Siehe: Teixeira l. c. p. 131.

Die klinogonalen Rollkurven konstruieren wir ebenso wie früher mittelst der Reduktionswinkel; unter Benützung der Mannheimschen Konstruktion erhalten wir auch deren Tangenten und Normalen. Die Projektionen der klinogonalen Rollkurven haben die Gleichungen:

$$(20\alpha) \quad 4k^6 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 4k^2 [2u^4 + (a-b)v^3] \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \\ - u^4 \left[ (a-b)^2 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + 4ab \cos^4 \frac{\alpha}{2} \right] \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \\ - 16v^6 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^6 \frac{\alpha}{2} = 0,$$

wobei bedeutet:

$$k^2 = x^2 + y^2 - (a^2 - ab + b^2), \quad u^4 = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \\ \text{und} \quad v^3 = -bx^2 + ay^2 + ab(a-b).$$

Der Grundriß ist also trizirkuläre Sextik.

$$(20\beta) \quad (z - a \sin \alpha) \left( z \sin \frac{\alpha}{2} + a \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 + (a+b)x^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} a = 0.$$

$$(20\gamma) \quad (z + b \sin \alpha) \left( z \sin \frac{\alpha}{2} - b \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = (a+b)y^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Der Auf- und Seitenriß sind also verschiedene Formen divergenter kubischer Parabeln. Für  $\alpha = 180^\circ$  erhalten wir die verlängerte Nephroide, deren Gleichung ist:

$$(21\alpha) \quad [2k^2 + 3b(a+b)]^3 + 9b(a-b)[2k^2 + 3b(a-b)]^2 - \\ - 54(a+b)(a-b)^3 y^2 = 0,$$

wobei  $k^2 = x^2 + y^2 - (a+b)^2$  ist.

Dieselbe schneidet die  $X$ -Achse in den Scheiteln, deren Abstand vom Mittelpunkt  $s$  gleich ist  $\pm (a-2b)$ , und hat auf dieser Achse Doppelpunkte, deren Abszissen  $\pm \sqrt{\frac{(a+b)(2a-b)}{2}}$  ist. Die Achse  $Y$  wird in den Punkten von der Ordinate  $\pm (2a-b)$  geschnitten und in imaginären Doppelpunkten.

### Die Fläche der verlängerten Rollkurven.

Alle verlängerten Rollkurven, welche vom Punkte  $A$  ausgehen und allen Werten von  $\alpha$  entsprechen, erfüllen eine Fläche, die wir kurz die verlängerte Rollfläche nennen; ihre Gleichung ist:

$$(22*) \quad 4(a^2 - b^2)^2 (k^2 + 3b^2)^3 + u^6 (k^2 + 3b^2)^2 - 18(a-b)(a^2 - b^2)y^2 u^3 (k^2 + 3b^2) - \\ - 4(a-b)u^9 - 27(a-b)^2(a^2 - b^2)^2 y^4 = 0,$$

wobei

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (a+b)^2, \quad u^3 = -2b(x^2 + y^2) - (a+b)z^2 + b(a+b)(2a-b)$$

bedeutet.



Für  $z = 0$  zerfällt der Schnitt in die oben angeführte Ellipse und verlängerte Nephroide.

Für  $y = 0$  folgt:

$$u^6 (k^2 + 3 b^2)^2 - 4 (a - b) u^9 = 0$$

und daher:

$$u^6 = 0 \text{ und } (k^2 + 3 b^2)^2 - 4 (a - b) u^3 = 0.$$

Dem ersten Werte entspricht doppelt:

$$\frac{x^2}{\frac{(a - b)(2a - b)}{2}} + \frac{z^2}{b(2a - b)} = 1.$$

Die Fläche hat also in der  $XZ$ -Ebene eine reelle Doppellinie und zwar eine Ellipse, deren Halbachsen

$$\sqrt{\frac{(a - b)(2a - b)}{2}} \text{ und } \sqrt{b(2a - b)}$$

sind; diese Ellipse geht durch die reellen Doppelpunkte der verlängerten Nephroide, und in den Punkten dieser Doppellinie schneiden sich symmetrische Kreisschnitte  $\mathfrak{f}$ . Dem zweiten Werte entspricht:

$$(x^2 + z^2)^2 - 2(a^2 - 2ab + 2b^2)x^2 + 2a(a - 2b)z^2 + a^2(a - 2b)^2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich in das Produkt zerlegen:

$$\{[x - (a - b)]^2 + z^2 - b^2\} \cdot \{[x + (a - b)]^2 + z^2 - b^2\} = 0.$$

Die  $XZ$ -Ebene schneidet die Fläche noch in Kreisen vom Halbmesser  $b$ , deren Mittelpunkte die Punkte  $a, b$  des Grundkreises sind.

Für  $x = 0$  erhalten wir als Gleichung des Schnittes der Fläche mit der Ebene  $YZ$ :

$$\begin{aligned} & 4(a^2 - b^2)y^2[(y^2 + z^2) - (a^2 + 2ab - 2b^2)]^3 + [-2by^2 - (a + b)z^2 + \\ & + b(2a^2 + ab - b^2)]^2[(y^2 + z^2) - (a^2 + 2ab - 2b^2)]^2 - 18(a - b) \\ & (a^2 - b^2)y^2[-2by^2 - (a + b)z^2 + b(2a^2 + ab - b^2)] \cdot [(y^2 + z^2) - \\ & (a^2 + 2ab - 2b^2)] - 4(a - b)[-2by^2 - (a + b)z^2 + b(2a^2 + ab - b^2)]^3 - \\ & - 27(a - b)^2(a^2 - b^2)^2y^4 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung zerfällt in folgendes Produkt:

$$\{[y - (a - b)]^2 + z^2 - a^2\} \cdot \{[y + (a - b)]^2 + z^2 - a^2\} \cdot \\ \{2ay^2 + (a - b)z^2 + a(a - b)(a - 2b)\}^2 = 0.$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene  $YZ$  zerfällt also in zwei Kreise mit dem Halbmesser  $a$ , deren Mittelpunkte die Punkte  $c, d$  des Grundkreises sind, und in eine imaginäre Doppellinie, deren Halbachsen sind

$$i\sqrt{\frac{(a - b)(a - 2b)}{2}} \text{ und } i\sqrt{a(a - 2b)}.$$



Nephroide, der dem Kreise vom Halbmesser  $a+b$  eingeschriebenen Astroide und des Grundrisses der orthogonalen Rollkurve; außerdem berühren sich in diesem Punkte die Ellipse und die Astroide. Durch diese Umbilikalpunkte  $p$  müssen auch alle klinogonalen Rollkurven gehen; ihre Grundrisse müssen sich in diesem Punkte berühren.

### Konstruktion der Fläche.

Wir theilen (Fig. 12) den Grundkreis — da der Verlauf der Fläche komplizierter ist — in 36 gleiche Teile, ziehen die Tangenten in den Teilungspunkten, zeichnen die zugehörigen Rechtecke und deren Diagonalen. Die nicht durch  $s$  gehenden Diagonalen umhüllen die dem Grundkreise eingeschriebene Astroide. Auf diese Diagonalen  $xy$  übertragen wir von der  $X$ -Achse auf die Verlängerung die Strecke  $xp = b$  und erhalten die Punkte  $0 \dots 36$  der Ellipse, deren Scheitel  $ABCD$  sind. Aus diesen Punkten fallen wir die Senkrechten auf die zugehörigen Tangenten des Grundkreises, ihre Fußpunkte  $0 \dots 36$  erfüllen den Grundriss der orthogonalen Rollkurve. Die Längen dieser Senkrechten übertragen wir auf die entgegengesetzte Seite der Tangenten und erhalten die Punkte  $0 \dots 36$  der verlängerten Nephroide.

Die Strecken, welche gleich. bezeichnete Punkte der Ellipse und der Nephroide verbinden, sind die Grundrisse der Kreisschnitte  $\mathfrak{k}$  und hüllen die dem Kreise vom Halbmesser  $a+b$  eingeschriebene Astroide. Die Aufrisse und Seitenrisse dieser Kreise sind im allgemeinen Ellipsen, die wir mittelst der Streifenkonstruktion zeichnen. Die Kreise  $0, 0$ ;  $18, 18$  projizieren sich im Aufrisse in wirklicher Größe als Kreise vom Halbmesser  $b$ ; die Kreise  $9, 9$ ;  $27, 27$  projizieren sich im Seitenrisse in wirklicher Größe als Kreise vom Halbmesser  $a$ . Dann konstruieren wir die klinogonalen Rollkurven, die den Winkeln  $22\frac{1}{2}^\circ$ ,  $45^\circ \dots$  entsprechen. Ihre Grundrisse erhalten wir mittelst der Reduktionswinkel; ihre Auf- und Seitenrisse durch Umklappung der Kreisschnitte in die Grundrißebene. Endlich konstruieren wir die Umbilikalpunkte im Grundrisse und die Doppelellipse im Aufrisse, in deren Punkten sich symmetrische Kreise schneiden.

Es ist ein besonderes Augenmerk auf den Verlauf der Kreisschnitte im Grundrisse vom Scheitel  $A$  der Ellipse bis zum Umbilikalpunkte  $p$  und dann auf der Nephroide von diesem Umbilikalpunkte bis zum Doppelpunkte derselben zu richten.

Von den Normalkegeln und den umschriebenen Kegeln gelten ebenfalls die früher angeführten Sätze.

### Umriss der Fläche.

Der scheinbare und der wirkliche Umriß im Grundrisse ist die Ellipse und die verlängerte Nephroide. Die Kreise vom Halbmesser  $b$  sind der



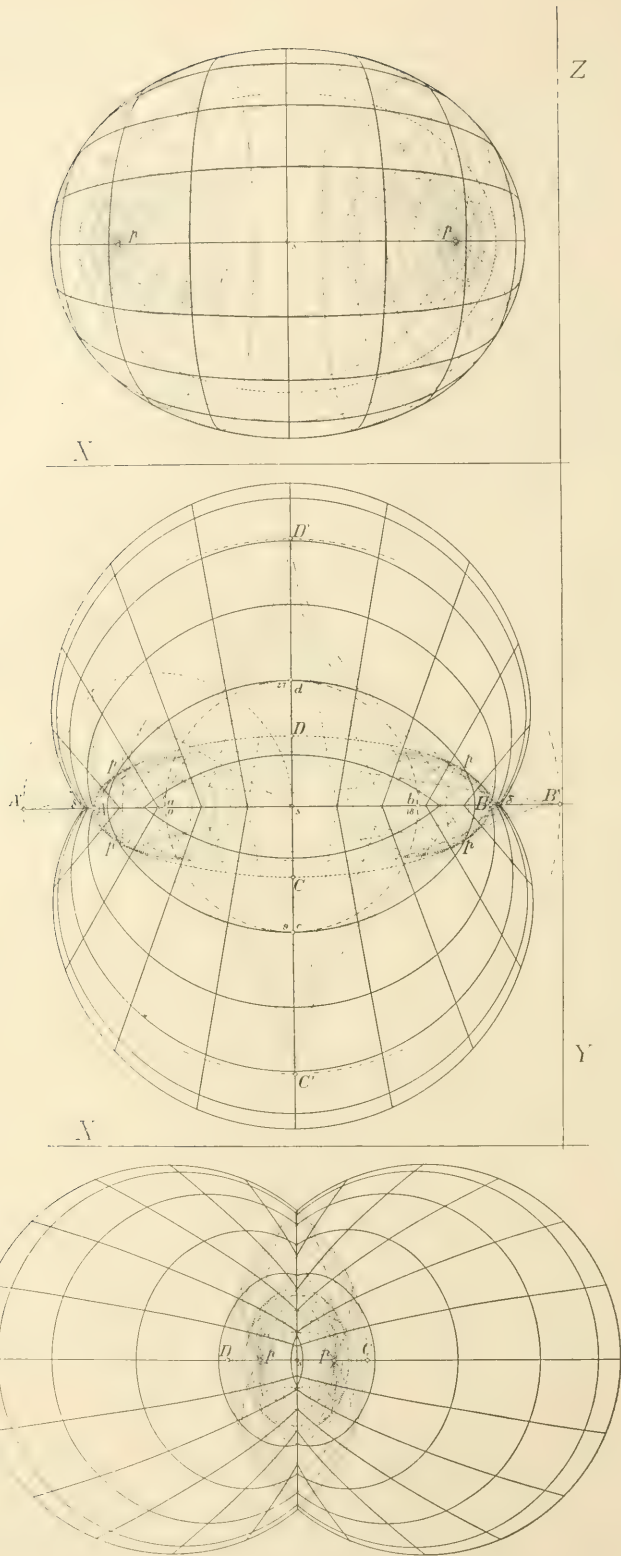


Fig. 12.

innere Umriß im Aufrisse, und die Kreise vom Halbmesser  $a$  sind der äußere Umriß im Seitenrisse.

Ferner gilt:

Der scheinbare Umriß im Aufrisse ist eine doppeltzählende Ellipse, deren Halbachsen  $a\sqrt{\frac{2a}{a+b}}$  und  $a$  sind; der zugehörige Grundriß der Berührungskurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $2a$  und  $a-b$ ; der zugehörige Seitenriß ist eine Hyperbel mit den Halbachsen

$$(a-b)\sqrt{\frac{a+2b}{2(a+b)}} \text{ und } \sqrt{a(a+2b)}.$$

Der wahre Umriß, der dem scheinbaren Umrisse im Aufrisse entspricht, ist also eine Raumkurve vierter Ordnung.

Der scheinbare innere Umriß im Seitenrisse ist eine doppeltzählende Ellipse mit den Halbachsen  $b$  und  $b\sqrt{\frac{2b}{a-b}}$ ; der zugehörige Grundriß der Berührungskurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a-b$  und  $2b$ ; der zugehörige Seitenriß ist eine Hyperbel mit den Halbachsen

$$(a-b)\sqrt{\frac{2a+b}{2(a-b)}} \text{ und } \sqrt{b(2a-b)}.$$

Der wahre Umriß, der dem scheinbaren Umrisse im Seitenrisse entspricht, ist also ebenfalls eine Raumkurve vierter Ordnung.

Der geometrische Ort der Scheitel  $v$  aller Rotationskegel, welche der Fläche längs der Kreisschnitte  $\mathfrak{k}$  umschrieben sind, ist dieselbe spezielle Kreuzkurve wie früher.

Die Kugeln, deren Mittelpunkte Momentanpole  $o$  sind, und welche die Ellipse  $ABCD$  berühren, sind der Fläche längs der Kreisschnitte  $\mathfrak{k}$  eingeschrieben; daher folgende Erzeugung der Fläche:

*Bewegt sich eine veränderliche Kugel, so daß ihr Mittelpunkt den Grundkreis  $\mathfrak{k}$  beschreibt, und welche stets die konzentrische, mit dem Kreise in derselben Ebene liegende Ellipse berührt, deren Halbachsenunterschied dem Halbmesser des Grundkreises gleich ist, dann umhüllt diese veränderliche Kugel die verlängerte Rollfläche.*

Die Kreisschnitte  $\mathfrak{k}$  bilden die erste Schar der Hauptkrümmungslinien. Die zweite Schar sind die orthogonalen Trajektorien derselben. Die Ellipse und verlängerte Nephroide bilden eine Hauptkrümmungslinie der zweiten Schar. Die gemeinsame Grundrißspur der aufwickelbaren Tangentflächen der Hauptkrümmungslinien der zweiten Schar ist wiederum der oben angeführte spezielle Kreuzkurve, und umgekehrt.

Jede aufwickelbare Fläche, deren Grundrißspur diese Kreuzkurve ist, und deren Erzeugende die Erzeugenden der Berührungskegel  $\tau$   $\mathfrak{k}$  sind, berührt die verlängerte Rollfläche längs der Rückkehrkante, und diese Rückkehrkante ist eine Hauptkrümmungslinie der zweiten Schar.

### Spezialfall der verlängerten Rollfläche.

Ist der beschreibende Punkt  $p$  im Unendlichen, so sind  $a$  und  $b$  unendlich groß, deren Unterschied  $a - b = r$  ist aber endlich, wobei  $r$  gegenüber  $a$  und  $b$  unendlich klein ist; es ist daher  $a = b$ . Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (22\*) erhalten wir die Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^4 = 0; \text{ daher}$$

*Wenn der beschreibende Punkt  $p$  ins Unendliche fällt, so übergeht unsere Fläche in diesem Grenzfall in die vierfachzählende Kugel vom unendlich großen Radius, also in die unendlich ferne Ebene.*

Schließlich sei dankend erwähnt, daß die Figuren die Herren Assistent Vladimir Mašek und Dozent Dr. V. Simandl gezeichnet haben.

---



# Über die ersten Machaerodus-Funde im Höhlendiluvium von Mähren und Nieder-Österreich.

Von

Doz. Dr. JOS. WOLDŘICH.

(Mit 1 Tafel und 5 Textfiguren.)

Vorgelegt am 14. Jänner 1916.

Während meines Aufenthaltes in Brünn besuchte ich öfters den Jurafelsen „*Stránská skála*“, welcher etwa eine halbe Stunde östlich der Stadt gelegen ist. Ich sammelte hier im Jurakalkstein paläontologisches Material und bestimmte dasselbe teilweise im geologisch-paläontologischen Institute der Universität zu Berlin. Bei dieser Gelegenheit gedenke ich gerne des werten Zuvorkommens, dessen ich in diesem Institute, insbesondere durch Herrn Geheimrat Prof. W. Branca und Herrn Prof. Stremme, teilhaft wurde. Die Bearbeitung des Jurassischen Materials konnte ich bisher nicht zu Ende führen, da hiezu ein längerer Aufenthalt außerhalb Prag notwendig wäre.

Die „*Stránská skála*“ besteht aus Kalkstein, welcher zahlreiche Hornsteinlager enthält; er fällt mäßig gegen S. ein. Zum erstenmale wurde er wissenschaftlich von dem jüngst verstorbenen hervorragenden Geologen Uhlig<sup>1)</sup> erforscht. Derselbe sprach auf Grund des von ihm gesammelten spärlichen Materials die Ansicht aus, daß dieser Kalkstein mit den Ruditzerschichten gleichalterig ist; er würde also der Bimammatenzone des oberen Oxfordian oder dem Malmß angehören.

Eine größere Anzahl von Versteinerungen, die ich daselbst sammelte, stimmt mit der von Uhlig ausgesprochenen Ansicht überein; vielleicht sind hier auch noch höhere Horizonte des Malm vertreten.

---

<sup>1)</sup> V. Uhlig, Jurabildungen i. d. Umgebung v. Brünn. Beitr. zur Paläont. und Geol. Österreich-Ungarns. 1881. Bd. I.

Die Kalksteine werden zur Kalkbrennerei, Zementfabrikation und zu Schotter verwendet. Nach einer vom Technologischen Gewerbe-Museum in Wien ausgeführten Analyse haben sie folgende Zusammensetzung:

SiO <sub>2</sub> .....	1·70
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	0·75
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	0·35
CaO.....	54·02
MnO.....	0·14
CO <sub>2</sub> .....	42·38
In HCl unlösl. Bestandteile.....	0·55
	99·89

Beim Steinbruchbetriebe wurde während meines Aufenthaltes in Brünn eine kleine Höhle bloßgelegt, deren Vernichtung ich zur rechten Zeit verwehren konnte. Sie war zum großen Teile mit Diluviallehm ausgefüllt, welcher reichlich Knochen und Zähne insbesondere diluvialer Säugetiere enthielt.

Den Zugang zu der Höhle bildete ein etwa  $1\frac{1}{2}$  m breiter Gang. Die Höhle selbst war ca 4 m breit; hinten wurde sie durch einen Felsenvorsprung in zwei Seitenkammern geteilt. Die Länge vom Anfange des oben erwähnten Ganges bis zum Felsenvorsprunge betrug beiläufig 9 m, ihre Höhe im vorderen Teile ca  $1\frac{3}{4}$  m bis 3 m. Von den beiden genannten Kammern im Hintergrunde der Höhle erreichte die eine die Länge von 2 m und Höhe von 3 m, die andere eine Länge von etwa 3 m und eine Höhe von  $1\frac{1}{2}$  m.

Ich begann mit Hilfe einiger Arbeiter systematisch den ganzen Komplex der oberen dunkelbraunen und unteren helleren fossilreichen Lehme abzugraben.<sup>2)</sup> Im tonigen Lehme fand ich zahlreiche Stücke von Holzkohle und manche Knochen waren mit Asche bedeckt oder kalziniert; Reste von Feuerstätten bezeugen wohl die Anwesenheit des Menschen zur Diluvialzeit.

Im untersten braunen Lehme fand ich außer zahlreichen Knochen und Zähnen von Säugetieren einen linken oberen Reißzahn, der durch seine Platttheit sogleich auffallend war. Er gehört der im Diluvium ausgestorbenen Felide aus der Gattung *Machaerodus* an, deren diluviale Reste in Europa überaus spärlich und selten sind. In der Nachbarschaft dieses Zahnes lagen Knochen von *Felis spelaea*, *Hyaena spelaea*, *Ursus spelaeus*, *Elephas primigenius*, wahrscheinlich auch *Elephas antiquus* und andere. In dieser Arbeit will ich hauptsächlich den seltenen vereinzeltten Fund des linken oberen Reißzahnes (P<sup>4</sup>) unseres *Machaerodus* beschreiben.

<sup>2)</sup> Hiebei war mir bereitwilligst und wesentlich Herr IngC. J. Mazáč aus Brünn behilflich. Auch wurde ich in zuvorkommender Weise von den damaligen Besitzern der Stránská skála unterstützt.

Nach Boule<sup>3)</sup> tritt die Gattung *Machaerodus* in Europa zum erstenmale im Eozän auf; aus dem mittleren Miozän kennt man zwei Arten, *Machaerodus palmidens* Blainv. und *Machaerodus Jourdani* Filh.; aus dem oberen Miozän *Machaerodus aphanistus* Kauf von Eppelsheim, Pikermi, Samos etc. Aus dem Pliozän wurden die Arten *Machaerodus cultridens* Cuv. (Valdarno und Auvergne), *Machaerodus crenatidens* Weith. (Valdarno, Sainzelles u. Ceyssagnet, wahrscheinlich auch aus den Forestbeds in England) und *Mach. Nestianus* (Valdarno) beschrieben; letztere Art möchte Boule eher mit der vorhergehenden zusammenfassen. Aus dem Diluvium wird eine einzige Art, nämlich *Mach. latidens* Owen beschrieben. Ihre Reste wurden in den Kenthöhlen in England, in Frankreich in der Höhle La Baume, bei Montmaurin und Abbeville, ferner in Ligurien vorgefunden. In Mitteleuropa fand wohl zum erstenmale Überreste dieser Art F r e u d e n b e r g<sup>4)</sup> in der Höhle von Hundsheim in Unterösterreich.

Bei weitem mehr als in Europa war die Gattung *Machaerodus* (auch *Smilodon*) im Diluvium Amerikas spezialisiert. Aus Südamerika (Brasilien und Argentinien) kennen wir *Smilodon neogaeus*, aus Nordamerika einige Arten, wie *Smilodon californicus* (Kalifornien, s. Taf. Fig. IV.), *Smilodon gracilis* (Pennsylvanien u. a.).

Das bezeichnendste Merkmal der Machaeroden sind die oberen Eckzähne, welche eine ungewöhnliche Länge erreichten (vergl. Taf. Fig. IV.); aber auch Gestalt, Form und Dimension der oberen Reißzähne sind für die einzelnen Arten dieser Gattung charakteristisch (vergl. S. 4, Fig. 1—5). Ihre Krone besteht aus drei Loben, dem vorderen (Protostyl), mittleren (Paracon) und hinteren (Metacon) Lobus. Bei allen miozänen Arten ist der Protostyl der oberen Reißzähne durch eine tiefe Rinne in eine kleinere vordere und eine größere hintere Spitze geteilt, bei *Mach. aphanistus* entstehen hiedurch aus dem Protostyl sozusagen zwei selbständige Loben (siehe S. 4, Fig. 5). Bei den pliozänen Arten ist der Protostyl der oberen Reißzähne nicht geteilt, während man bei den diluvialen Nachkommen über Art und Gestalt dieser Zähne bisher nichts wußte. *Es wurden nämlich bisher nirgends in ganz Europa obere Reißzähne diluvialer Machaeroden gefunden und beschrieben, so daß die beiden von uns beschriebenen Funde wesentlich die Kenntnis dieser im europäischen Diluvium so überaus seltenen und spärlich aufgefundenen Feliden ergänzen.*

Die Zugehörigkeit des von mir im untersten Höhlenlehm der Stránská skála aufgefundenen oberen Reißzahnes zur Gattung *Machae-*

<sup>3)</sup> M. Boule. Revision des espèces européennes de Machaerodus. Bulletin de la soc. géolog. de France 1901, S. 551. — Derselbe. Les grands chats des Cavernes. Annales de Paléontol. Paris 1906.

<sup>4)</sup> W. Freudenberg. Die Fauna von Hundsheim in Niederösterreich. Jahrb. d. geol. Reichsanst. Wien 1908. S. 197.



*rodus* läßt keinen Zweifel zu. Er verrät sich durch die ungewöhnliche Schärfe der Zahnschneide, die teilweise Kerbung an den distalen und proximalen Rändern der einzelnen Loben, das Fehlen des Protocon an der Innenseite der Krone und durch seine ungewöhnliche Platttheit (Taf. Fig. I—II.);<sup>5)</sup> durch diese Merkmale unterscheidet er sich wesentlich von den oberen Reißzähnen anderer Feliden.

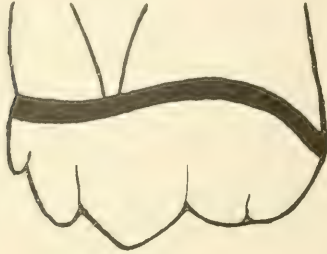


Fig. 1.

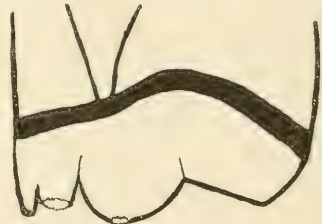


Fig. 2.

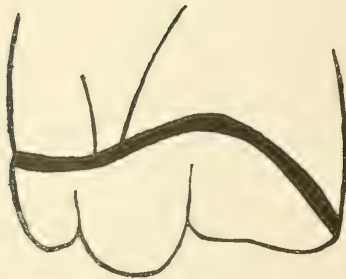


Fig. 3.

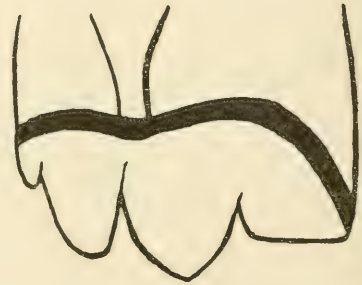


Fig. 4.

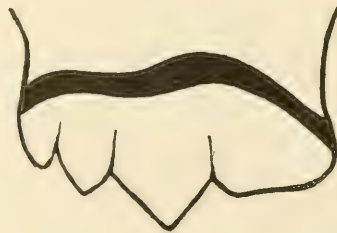


Fig. 5.

Schemat. Abbildungen der oberen linken Reißzähne (natürl. Gr.)

Fig. 1. *Machaerodus morav. n. sp.* Höhlendiluvium. Stránská skála bei Brünn. Mähren.

Fig. 2. *Mach. latidens* Owen. Höhlendiluvium. Hundsheim. Nieder-Österreich.

Fig. 3. *Mach. crenatidens* Fabrini. Pliozän. Valdarno, Italien.

Fig. 4. *Smilodon neogaens.* Diluvium. Süd-Amerika.

Fig. 5. *Mach. aphanistus* Kaup. Ober-Miozän. Pikermi. (Fig. 5. nach Boule.)

<sup>5)</sup> Die Photographien 1—3 auf Taf. I. stellte freundlichst H. Univers.-Präparator J. Rejs ek her.

In seinen Dimensionen und nach seiner Oberfläche erinnert unser Zahn am ehesten an die *pliozäne* Art *Mach. crenatidens* aus dem Valdarno (vergl. S. 4, Fig. 1. und 3.), welche von Fabrini beschrieben wurde.<sup>6)</sup> Die Länge der Krone ist bei beiden Zähnen fast gleich, die Höhe des mittleren Lobus ist in unserem Falle etwas größer, ebenso die Höhe des Zahnes bei der hinteren Wurzel; auch weist der mährische Zahn eine noch größere Platttheit auf, als dies bei der pliozänen Art *M. crenatidens* der Fall ist (siehe die Übersichtstabelle auf Seite 6).

Von den drei Loben der Krone unseres Reißzahnes ist der Protostyl abermals deutlich in zwei Spitzen geteilt, von welchen die vordere bei weitem kleiner als die hintere ist (s. Taf. Fig. I—II.). Charakteristisch ist die Kerbung, die man am vorderen Rande der größeren Spitze des Protostyls und des Paracon und an hinteren Rande des Metacon beobachten kann. Noch deutlicher pflegt diese Kerbung an den Erzkähnen der Machaeroden aufzutreten. An der Innenseite ist der hintere Teil des mittleren Lobus unseres Zahnes sowie der vordere Teil des hinteren Lobus abgenützt, so daß sich eine Kerbung nicht bemerken läßt.

Die Höhe des vorderen Lobus beträgt an der Außenseite der Zahnes 1.6 cm, des mittleren Lobus 2 cm, des hinteren Lobus etwa in seiner Mitte, durch welche eine seichte Furche verläuft, 1.9 cm.

Der beschriebene Reißzahn hat 3 Wurzeln, von denen die hintere viel breiter ist als die vorderen; ersterer fügt sich der ganze hintere und die Hälfte des mittleren Kronenlobus an (siehe S. 4, Fig. 1 und Taf., Fig. I—II.). Die Oberfläche der Zahnkrone ist infolge von zahlreichen Längsrinnen und rundlichen Vertiefungen ziemlich rauh, ähnlich wie dies Fabrini bei *Mach. crenatidens* feststellte. Von diesem unterscheidet sich jedoch unser Zahn durch ein wichtiges Kennzeichen, nämlich die Zweiteilung des Protostyls. Dieser Meinung ist auch M. Boule, der sich speziell mit den europäischen Machaeroden befaßte und dem ich auch eine Abbildung des mährischen Zahnes zusandte.<sup>7)</sup>

Anfangs war ich der Ansicht, daß unser Reißzahn der bisher einzigen, bekannten diluvialen Art *Mach. latidens* Owen angehört. Durch die Freundlichkeit des Herrn Dr. F. X. Schaffer, Kustos des naturwissenschaftlichen Hofmuseums in Wien, erhielt ich auf mein Ansuchen einen Gipsabguß des rechten Oberkiefers von *Machaerodus latidens*, welcher von *Freudenberg* (l. c. 3) in der Höhle von Hundsheim

<sup>6)</sup> M. Fabrini, J. Machairodus del Valdarno sup. Bollet. del R. Com. geol. d'Italia. 1890. Taf. 4—6, S. 121, 161.

<sup>7)</sup> Ich entnehme seiner Zuschrift: „Je ne connais pas de carnassière supérieure du *M. latidens*, et je ne crois pas, qu'on en connaisse. — Jusqu'à present on ne connaissait pas la carnassière supérieure de *Mach. latidens*.“ — Was die Zweiteilung des vorderen Lobus, auf die ich aufmerksam machte, anbelangt, sagt Boule: „Cela distingue ces deux pièces (den mährischen und niederösterreichischen Reißzahn) de *M. crenatidens*, pliocène.“

in Nieder-Österreich ausgegraben wurde; in diesem Oberkiefer ist auch der Reißzahn erhalten. Nebstdem wurden von *Freudenberg* hier noch zahlreiche andere Überreste dieser diluvialen *Machaerodus*art, wie Eckzähne, Unterkiefer, Wirbel, Beckenknochen, Rippen, Extremitätenknochen und Schädelfragmente aufgefunden, jedoch bisher nicht näher beschrieben.

Das genannte Oberkieferfragment mit dem zugehörigen Reißzahne ist ein ganz allein dastehender, überaus wichtiger Fund, da er uns zum erstenmale mit dem oberen Reißzahne des diluvialen *Mach. latidens* bekanntmacht. (Vergl. S. 4, Fig. 2 und Taf. Fig. III.)

Ich konnte gelegentlich das Original im Hofmuseum zu Wien besichtigen. Die Länge der Krone dieses Reißzahnes ist etwas kleiner als beim mährischen Exemplare; ebenso ist die Höhe des mittleren Lobus geringer und die Zahndicke etwas bedeutender (vergleiche die folgende Tabelle). Auffallend ist insbesondere auch die Glattheit der Krone, welche den Zahn wesentlich von unserem mährischen Funde und von *Mach. crenatidens* unterscheidet. Mit ersterem stimmt er jedoch durch die deutliche Zweiteilung des vorderen Lobus überein. <sup>8)</sup>

Die nachstehende Tabelle belehrt uns über die Dimensionen der oberen Reißzähne bei der pliozänen Art *Mach. crenatidens*, bei den diluvialen Arten *Mach. n. sp.*, *Stránská skála*, und *Mach. latidens* von Hundsheim, sowie bei zwei amerikanischen *Smilodonten*.

In mm	<i>M. crenatidens</i> Valdarno <sup>9)</sup>	<i>Mach. n. sp.</i> Stránská skála	<i>M. latidens</i> Hundsheim	<i>Smil. neogaeus</i> Süd- <sup>10)</sup> Amerika	<i>Smil. gracilis</i> Port <sup>11)</sup> Kennedy
Länge der Krone	45	43	40	45	31
Höhe des mittl. Lobus	18	20	16	21	
Zahnhöhe bei der hint. Wurzel	37	ca 39			
Zahndicke beim hint. Lobus	13	10	12	13	14

Ein bemerkenswertes und wichtiges Merkmal ist beim mährischen und niederösterreichischen Reißzahne die Zweiteilung des Protostyls. Wir begegnen diesem Merkmal bei geologisch viel älteren, insbesondere

<sup>8)</sup> Am Gipsabgusse (Taf. Fig. III.) ist diese Teilung nicht erkennbar.

<sup>9)</sup> Nach *Fabrin* l. c. 2.

<sup>10)</sup> Nach einem Gipsabgusse aus dem Senckenbergschen Museum zu Frankfurt, der mir freundlichst leihweise durch Herrn Kustos Prof. Dr. *Drevermann* zugesandt wurde.

<sup>11)</sup> Nach *E. D. Cope*. The fossil Vertebra from the fissure at Port Kennedy. *Proceed. Acad. natur. Sciences. Philadelphia* 1895, S. 446.



bei *miozänen* Machaerodenarten. Bei diesen ist allerdings der vordere Lobus des oberen Reißzahnes auch viel breiter als bei den pliozänen und bei unseren diluvialen Arten. Während er beim *miozänen Mach. aphanistus* fast ein Drittel der Kronenlänge einnimmt, entspricht er bei letzteren bloß etwa einem Viertel derselben oder noch weniger (vergl. S. 4, Fig. 1—3, 5). Eine Ausnahme bildet der südamerikanische *Smilodon neogaeus*, dessen oberer Reißzahn in seinen Dimensionen ziemlich mit jenem von *Mach. aphanistus* übereinstimmt. *Boule* hält ihn deshalb auch für einen Nachkommen der letztgenannten Art.

Hingegen ist bei *pliozänen* Arten der vordere Lobus nicht geteilt. Die Zweiteilung desselben tritt jedoch, wie vorher erwähnt, abermals bei den von uns beschriebenen *diluvialen* Arten auf. Offenbar handelt es sich bei diesen um ein atavistisches Merkmal, welches an einen ursprünglich primitiveren Stand dieser Feliden erinnert. So fand man z. B. eine solche Teilung auch bei den oberen Reißzähnen des Milchgebisses von *Felis spelaea*. Die Dimensionen, die Abnützung, sowie die übrigen Eigenschaften der von uns beschriebenen Zähne schließen allerdings ihre etwaige Zugehörigkeit zum Milchgebisse aus.

Es ist gewiß interessant, daß dieses atavistische Merkmal sich nicht bloß — wie wir zum erstenmale in dieser Arbeit feststellten — bei den europäischen diluvialen Machaerodusarten vorfindet, sondern sich auch bei dem parallelen amerikanischen Aste der Smilodonten, der eine weit größere Spezialisierung als der europäische diluviale Machaerodus aufweist, bemerkbar macht. Eine Zweiteilung des Protostyls am oberen Reißzahne läßt sich bei *Smilodon neogaeus* aus Süd-Amerika (S. 4, Fig. 4) erkennen, wie ich am erwähnten Gipsabgusse feststellen konnte; ebenso wohl auch bei *Smilodon californicus* (Taf., Fig. IV.) — soweit ich nach einer mir freundlichst von *H. Prof. Dr. Drevermann* zugesandten Photographie des Originals im Senckenbergischen Museum zu Frankfurt urteilen kann. Dasselbe Merkmal findet man auch nach *Cope* (l. c. 8) bei einer kleineren amerikanischen Art *Smilodon gracilis*.

Wenn ich schließlich die beiden, von uns beschriebenen oberen Reißzähne der europäischen diluvialen Machaeroden vergleiche, so finde ich, daß sie — ungeachtet der für Machaerodus überhaupt charakteristischen Merkmale — in der atavistischen Zweiteilung des vordern Lobus zwar übereinstimmen, sonst jedoch vielfach von einander abweichen. Die Krone des mährischen Zahnes ist infolge von zahlreichen Furchen und Vertiefungen rau — ähnlich wie beim pliozänen *M. crenatidens* —, beim Reißzahn von Hundsheim jedoch vollständig glatt — wie beim pliozänen *M. cultridens*. Beim mährischen Reißzahne sind einige Lobenränder gekerbt, beim niederösterreichischen konnte ich dies nicht beobachten, obwohl hier nicht die Möglichkeit ausgeschlossen ist, daß die Kerben durch Abnützung des Zahnes verschwunden sind. Es möge gleichwohl erwähnt werden, daß sich in ähnlicher Weise — was die Kerbung anbelangt — die oberen

Eckzähne der pliozänen Arten *M. crenatidens* und *M. cultridens* von einander unterscheiden. — Weiterhin findet man am hinteren Lobus des Zahnes von Hundsheim nicht jene Furche, welche bei der mährischen Art so deutlich hervortritt.

Da die Zugehörigkeit des Hundsheimer Oberkiefers samt Reißzahn zum diluvialen *M. latidens* Owen infolge der gleichzeitigen Auffindung von unzweifelhaften Skelettresten dieser Art feststeht, bin ich der Ansicht, daß der durch die rauhe Kronenoberfläche, seine Dimensionen und noch anders von jenem abweichende Reißzahn aus der Stránská skála bei Brünn, einer anderen, neuen diluvialen Art angehört, die ich *Machaerodus moravicus n. sp.* benennen will.

Boule spricht in seiner ausgezeichneten Arbeit über die europäischen Machaerodusarten — allerdings vorläufig — die Ansicht aus, daß *Mach. latidens* vom pliozänen *M. crenatidens* abstammen dürfte. Auf Grund der von mir gemachten, oben erwähnten Untersuchungen und Beobachtungen halte ich es eher nicht für ausgeschlossen, daß *Mach. moravicus n. sp.* vom pliozänen *Mach. crenatidens*, hingegen *Mach. latidens* vom pliozänen *Mach. cultridens* abstammen könnte.

Schließlich möchte ich noch erwähnen, daß der Reißzahn unseres *Mach. moravicus* im untersten braunen Höhlenlehme in Gesellschaft eines kleinen, wohl ersten Milchzahnes, der höchstwahrscheinlich dem *Elephas antiquus* angehört, von mir vorgefunden wurde. Die Vergesellschaftung von *Machaerodus* mit *Elephas antiquus*, zu denen sich weiters *Ursus spelaeus*, *Hyaena spelaea*, *Bos primigenius*, *Equus caballus foss.* — allerdings auch *Elephas primigenius* — gesellt, bezeugt, daß hier wohl mit *Machaerodus* vorherrschend eine sog. warme Fauna lebte. Ähnliche faunistische Gesellschaften, wie wir sie im untersten Höhlendiluvium der Stránská skála fanden, kennt man auch von manchen anderen Lokalitäten, so z. B. aus der englischen Höhle von Kirkdale u. ä.; sie pflegen vielfach als präglazial betrachtet zu werden. Wohl zeugt die Gesellschaft von *Machaerodus* und *Elephas antiquus* dafür, daß die betreffenden untersten Höhlenlehmschichten dem älteren Diluvium angehören. Für die Annahme eines pliozänen Alters sind wir insbesondere in Anbetracht der anderen hier aufgefundenen faunistischen Reste nicht berechtigt.

Geolog.-paläontologisches Institut der böhm. Universität, Prag.

## ERKLÄRUNGEN ZUR TAFEL.

Fig. 1. *Mach. moravicus n. sp.* Der obere linke Reißzahn von der Außenseite. Nat. Größe.

Fig. 2. Derselbe von der Innenseite. Nat. Größe.

Fig. 3. *Mach. latidens* Owen. Der obere rechte Reißzahn von der Außenseite; nach einem Gipsabgusse. Natürl. Größe.

Fig. 4. *Smilodon californicus* Bov. Linker Oberkiefer. Nat. Größe.

J. WOLDŘICH: ÜBER DIE ERSTEN MACHAERODUSFUNDE IM  
HÖHLENDILUVIUM VON MÄHREN UND NIEDER-ÖSTERREICH.



Fig. I.



Fig. II.

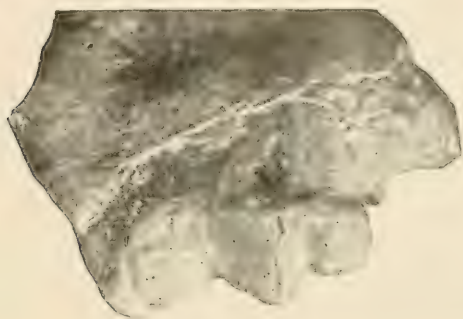
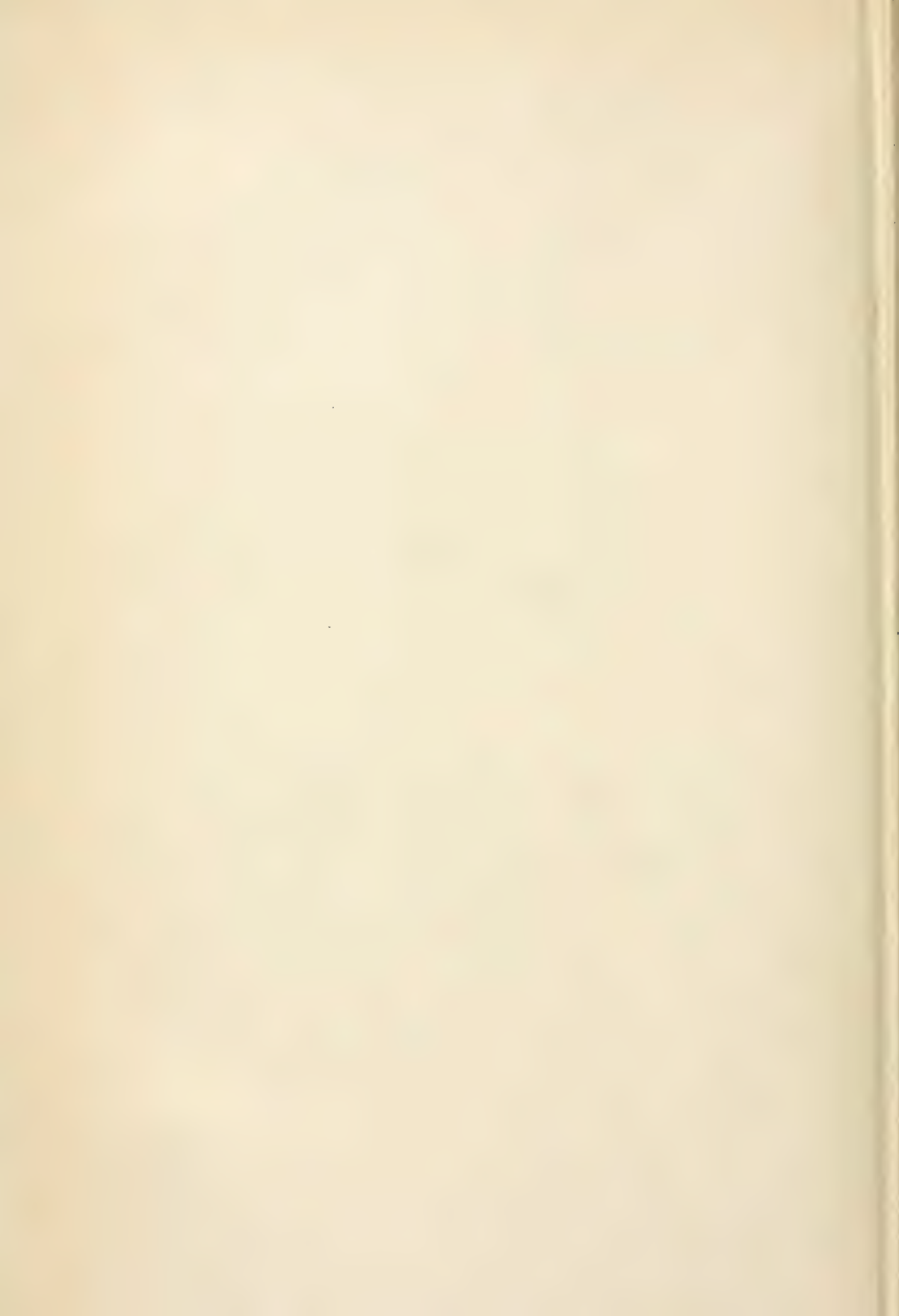


Fig. III.



Fig. IV.





# Einiges über zentrifugierte Pflanzenzellen.

Von

Dr. B. NĚMEC.

Mit 10 Mikrophotographien im Text.

Vorgelegt am 12. März 1915.

Ich begann bereits vor dreizehn Jahren den Einfluß des Zentrifugierens auf die Pflanzenzellen zu untersuchen, zunächst mit Rücksicht auf den Geotropismus, später auch in Bezug auf die Kern- und Zellteilung. Einen Teil der Resultate veröffentlichte ich im J. 1902, dann wieder im J. 1910.<sup>1)</sup>

Für meine Fragen erwies sich von allen, den Einfluß des Zentrifugierens auf die Pflanzenzellen behandelnden Arbeiten (Mottier, Küster, Andrews, van Wisselingh usw.) jene von Mottier<sup>2)</sup> als die wichtigste. In den Staubfadenhaaren von *Tradescantia* untersuchte er auch die Einwirkung der Zentrifugalkraft auf die Teilungsfiguren. Er konnte feststellen, daß sich die ganze Figur wie ein einheitliches spezifisch schwereres Körperchen verhält. Bei der Verschiebung in ein Zellende beobachtete er auch eine Krümmung der Teilungsfigur (Fig. 7). Er glaubt folgern zu dürfen, daß die Fasern den auf dieselben während des Zentrifugierens drückenden Chromosomen einen gewissen Widerstand leisten, aber den Druck ertragen. Selten konnte er auch andere Störungen der Teilungsfigur wahrnehmen (p. 338). Aus meinen eigenen Erfahrungen schließe ich, daß die Zellen, in welchen Mottier derartige Störungen feststellen konnte, nicht ganz gesund waren. Denn in meinen Versuchen hatte die Zentrifugalkraft in gesunden Zellen niemals irgend welche deutliche Zerstörung der Figur zur Folge; es gibt hier auch jene individuellen Ungleich-

---

<sup>1)</sup> N ě m e c B., 1910, Das Problem der Befruchtungsvorgänge etc. Berlin, Gebr. Borntraeger.

<sup>2)</sup> M o t t i e r D a v i d M., 1899, The effect of centrifugal force upon the cell. Ann. of Botany, V. XIII, p. 325.

heiten zwischen den Figuren, auf welche wir auch in nicht zentrifugierten normalen Geweben gewöhnt sind, aber nicht in einem gesteigerten Maße. Nur selten sah ich in gesunden, zentrifugierten Wurzelspitzen von *Vicia faba* Figuren, welche schwach S-förmig verbogen waren. Es waren dies hauptsächlich Telophasen (Fig. 8, 9). Bei der Erbse fand ich nicht einmal solche schwache Deformationen. Hingegen zeigten sich an Wurzeln, die sich unter abnormen Verhältnissen befanden, ziemlich viele und verschiedenartige Deformationen an den Teilungsfiguren.

Zu den Versuchen benützte ich Keimwurzeln der Erbse (*Pisum sativum*), der Pferdebohne (*Vicia faba*), vom Ricinus (*R. zanzibariensis* und andere

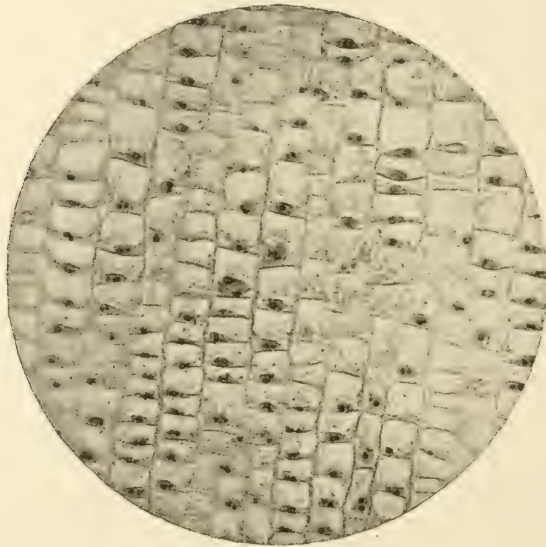


Fig. 1. Aus einem Längsschnitt durch eine 7 Min. lang zentrifugierte Wurzel von *Pisum sativum*. In den mittleren zwei Reihen zwei schräg stehende Figuren.

Arten) und vom Kürbis (*Cucurbita pepo*). Die Wurzeln wurden sofort nach Beendigung des Versuches in schwacher Flemmingscher Lösung fixiert, in Paraffin eingebettet und die Schnitte dann mit Eisenhämatoxylin gefärbt.

Schon nach einem 7 Minuten währenden Zentrifugieren, wobei die Zentrifugalkraft 150 g betrug, waren in den Wurzeln von *Pisum* und *Vicia* alle Kerne des hinter dem eigentlichen Meristemkegel befindlichen Periblems bis zu den Zellwänden verschoben, mag sich die Wurzel in der verschiedensten Lage befunden haben. In schräg orientierten Wurzeln waren die Kerne in die Zellecke verschoben (Fig. 7). Im eigentlichen Meristemkegel sowie in Dermatogenzellen, die mit dichtem Plasma erfüllt waren, ebenso im meristematischen Teile des Pleroms, waren die Kerne noch nicht umgelagert.

Auch ist das Zytoplasma einseitig zentrifugal angehäuft, wogegen die größeren Vakuolen zu einem einzigen Zentripetal gerückten Safttraume zusammengefloßen sind. Immerhin bleibt auch im zentripetalen Ende der Zelle ein dünner, der Wand anliegender Plasmabelag erhalten. Auch die Amyloplaste sind verschoben. Das Verhalten der Mitochondrien habe ich nicht untersucht.

In den erwähnten Zellen sind auch alle Teilungsfiguren zentrifugal verschoben (Fig. 1—9). Das gilt auch für solche Stadien, wo soeben die Scheidewand angelegt wird, jene Fälle ausgenommen, wo die Scheidewand schon an die Zellwand der Mutterzelle angewachsen ist. Ist sie jedoch nur

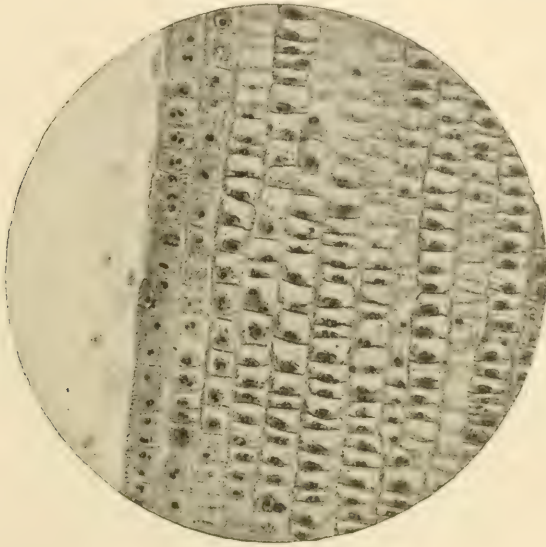


Fig. 2. Wie Fig. 1. Eine schräge Metakinesis in der dritten Rindenschicht.

einseitig angewachsen, so ist ihr freier Rand dem zentrifugalen Ende der Zelle genähert, so daß die Scheidewand gekrümmt oder schräg orientiert erscheint. Dabei erfahren auch die beiden Schwesterkerne eine entsprechende Umlagerung.

Solange an den Präparaten die achromatische Spindel zu sehen ist, verhält sich die Teilungsfigur wie ein Ganzes. Es ist mir in keinem Fall gelungen, die beiden Gruppen der Tochterchromosomen von einander zu trennen, auch nicht die Anlagen der Tochterkerne, solange sie durch einen Phragmoplasten verbunden sind, destoweniger irgend ein Chromosom aus der Figur herauszureißen. Die Teilungsfigur verhält sich daher wie ein einheitliches Gebilde und wird unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft etwa so verschoben, wie der Kern. Sobald jedoch die Fasern des Phragmoplasten verschwinden, werden beide Tochterkerne frei beweglich



und man kann sie mit Hilfe der Zentrifugalkraft leicht der Scheidewand entlang bewegen, an dieselbe andrücken oder von ihr entfernen.

In Zellen, welche der Teilungsfigur genug Raum bieten, nimmt sie unter normalen Verhältnissen eine ganz bestimmte Stellung ein. Sie steht in den Periblemzellen, welche wir hier hauptsächlich behandeln, in der Längsachse der Zelle. Bei der Einwirkung einer schwächeren Zentrifugalkraft wird sie zunächst in dieser Richtung verschoben, und zwar bis zur Scheidewand. Sobald jedoch die Figuren mit ihrer Polspitze an die Zellwand anstoßen, beginnen sie sich zu dieser oder jener Seite zu neigen, bei genügend starkem Zentrifugieren neigen sie sich so lange, bis sie mit der Zellwand, an die sie durch die Zentrifugalkraft gedrückt werden,

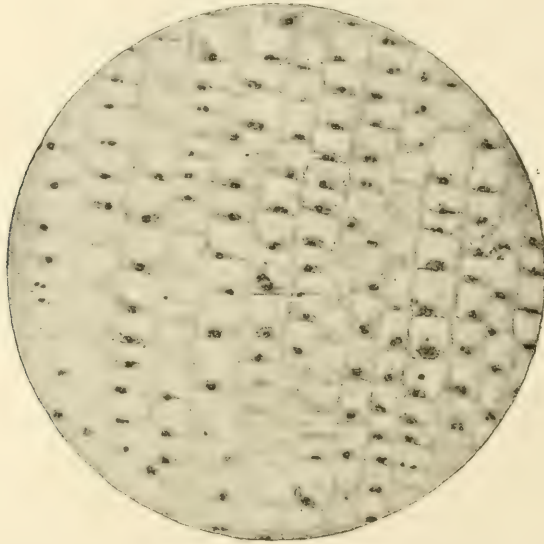


Fig. 3. Wie Fig. 1. In der mittleren Reihe eine schräge Metakinesis.

in möglichst große Berührung kommen. Die Metakinesen liegen dann gewöhnlich parallel zur Wand. Die Telophasen mit einem tonnenförmigen Phragmoplasten nehmen eine schräge Stellung ein. Man kann zwischen der Längsstellung der Figur und der definitiven Ruhelage d. h. parallel zur zentrifugalen Zellwand, alle Übergangsstadien in den kurz zentrifugierten Wurzeln auffinden.

Jene Stadien, in welchen die Figuren eine zugespitzte Spindel besitzen, sowie Stadien mit einem tonnenförmigen Phragmoplasten (Fig. 1, 4) zeigen die größte Tendenz sich aus der Längsachse der Zelle auszuneigen. Hingegen sind sehr viele von den Figuren, wo die Spindel breite, nicht zugespitzte Pole besitzt, nicht aus der Längsachse der Zelle geneigt. Sie berühren die zentrifugale Zellwand mit ihrem breiten



Spindelpole, was sowohl bei der Erbse als auch bei der Bohne gesehen wurde (Fig. 5).

Da ich wußte, daß Figuren, in welchen die achromatischen Fasern parallel verlaufen, somit die Spindelpole breit sind, besonders häufig in den Wurzelspitzen des Kürbisses vorkommen, wo man also zahlreiche Figuren als garbenförmig bezeichnen könnte, so habe ich *Cucurbita pepo* speziell auf diesen Punkt hin untersucht. Die Keimwurzeln wurden 7—30 Minuten lang zentrifugiert (150 g) und sofort fixiert. Fast alle Figuren, welche zentrifugal verschoben wurden, behielten ihre Richtung in der Längsachse der Zelle, sie saßen der zentrifugalen Zellwand mit ihrem breiten Pole an.

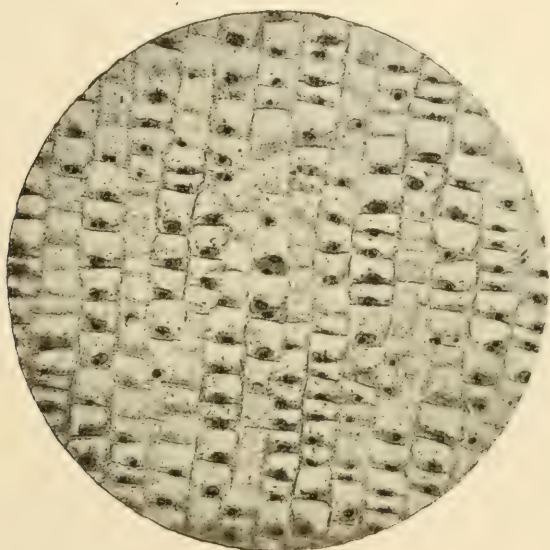


Fig. 4. Wie Fig. 1. In der Mittelreihe Phragmoplaste mit schräger Scheidewandanlage.

Die Länge der Teilungsfiguren ist bis zum Stadium eines breiten Phragmoplasten größer als ihr Querdurchmesser. Die eben beschriebenen Beobachtungen über das Ausneigen der Figuren aus der Längsachse der Zelle, wenn sie bei der zentrifugalen Verschiebung an die Zellwand anstoßen, lassen sich sehr leicht als Ausneigungen eines festen Körpers aus einer labilen in eine stabile Gleichgewichtslage erklären. Labil ist die Lage der zentrifugierten Figuren, solange sie die Zellwand an einer ganz kleinen Fläche berühren. Vergrößert sich diese Fläche, so vergrößert sich auch die Standfestigkeit der Figuren, sie bewahren dann eher ihre ursprüngliche Richtung. Die garbenförmigen Figuren von *Cucurbita* werden daher seltener aus ihrer Richtung herausgedreht und umgeworfen, als die mit zugespitzten Enden versehenen Spindeln von

*Pisum und Vicia.* Einmal aus ihrer labilen Lage herausgedreht, dreht sich die Figur so lange, bis sie in eine beständigere oder stabile Gleichgewichtslage gelangt (Fig. 5). Das ist für die Metakinesen jene Lage, wo die Figur in ihrer ganzen Länge der Zellwand anliegt, an die sie durch die Zentrifugalkraft gedrückt wird. Die Phragmoplasten nehmen je nach ihrer Gestalt eine verschiedenartige schräge Richtung ein. In dieser Lage werden auch die Scheidewände angelegt und wachsen so, daß die Mutterzelle in zwei ungleich große, durch eine schiefe Wand getrennte Zellen geteilt wird (Fig. 1, 4).

Wenn sich nun die Figuren wie einheitliche Gebilde verhalten, aus denen es nicht möglich ist durch das Zentrifugieren irgendeinen

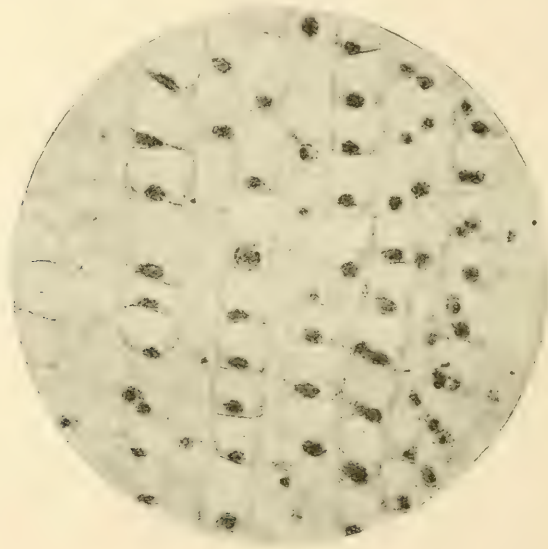


Fig. 5. Aus einem Längsschnitt durch eine 7 Min. lang zentrifugierte Wurzel von *Vicia faba*. In der mittleren Zellreihe eine nicht ausgeneigte Figur mit breiten Polen. In der dritten Reihe links eine an die Zellwand völlig angepreßte Metakinesis.

Teil herauszureißen, und wenn sie sich aus einer labilen in eine stabile, standfeste Lage herausdrehen, so kann man dies so deuten, daß sie im ganzen ein *starres*, einheitliches Gebilde vorstellen. Sie verhalten sich so, wie wenn sie aus einer festen Substanz bestehen würden, oder wie wenn sie wenigstens ein festes Gerüst besäßen. Jedenfalls ist es undenkbar, daß sich eine flüssige Substanz so verhalten könnte, wie es die Teilungsfiguren während des Zentrifugierens tun. Die Flüssigkeit müßte sich ellipsoidisch abplatteln, wenn sie durch die Zentrifugalkraft an die Zellwand gedrückt wäre. Es wäre nicht möglich, daß sie, ohne ihre Gestalt zu verändern, aus einer labilen in die stabile Gleichgewichtslage übergehen könnte.

Nicht nur die Metakinesen, sondern auch Prophasen mit entwickelter achromatischer Spindel verhalten sich wie ein einheitliches und starres System. Wenn die Spindel an die Zellwand stößt, beginnt sie sich aus der labilen Lage zu neigen (Fig. 1, 6). Dabei gleitet gewöhnlich der Spindelpol entlang der Zellwand. Das beweist, daß die Spindel ein reales, schon in vivo existierendes Gebilde ist und daß sie ebenfalls als starr angesehen werden kann.

Deutliche Deformationen der Spindel oder der ganzen Teilungsfigur konnte ich in meinen Versuchen an den Präparaten, die schon erwähnten Fälle (Fig. 8, 9) ausgenommen, nicht sicher feststellen. Dies wäre jedoch nicht ausgeschlossen bei Anwendung von stärkeren Zentri-

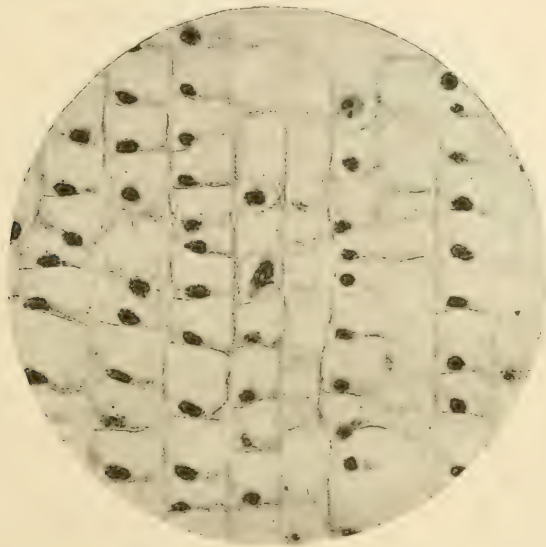


Fig. 6. Wie Fig. 5. In der Mittelreihe eine schräge Metakinesis.

fugalkräften und es wäre ganz gut mit der eben vorgebrachten Anschauung über den Charakter der Teilungsfigur vereinbar.

Auch ein starres System kann durch eine genügend große Zentrifugalkraft deformiert werden. Es wäre dann interessant festzustellen, welche Stadien am leichtesten deformiert werden können und wie dann die Kernteilung fortschreiten würde. Denn die Kernteilung verläuft auch während der Zentrifugierung und zwar ganz normal. Schon nach einem 20—30 Min. währenden Zentrifugieren gab es in den Präparaten zahlreiche beendigte Zellteilungen, was leicht daraus zu schließen ist, daß sich die Mutterzelle in zwei ungleich große Zellen geteilt hat, von denen die kleinere immer zentrifugal gelegen ist. Die Scheidewand steht häufig, wie zu erwarten war, schräg.



Die Fäserchen der achromatischen Spindel erleiden durch das Zentrifugieren keine Veränderung. Ihre Zahl ist nicht verringert, auch ist an ihnen keine Körnelung zu beobachten, wie das sonst unter dem Einflusse von verschiedenen abnormen Faktoren oft der Fall ist.

Ich habe auch Versuche angestellt, um die Teilungsfigur zu zerreißen oder wenigstens aus der Figur einzelne Chromosomen dadurch zu entfernen, daß ich in kurzen Intervallen die Richtung der auf die Wurzeln einwirkenden Zentrifugalkraft änderte. So z. B. wurden die Wurzeln fünf Minuten lang mit der Spitze zentrifugal gerichtet, fünf Minuten zentripetal zentrifugiert usw. Die Figuren verschoben sich, wie eine zeitweise Fixierung der Wurzeln bewies, aus einem Zellende in das

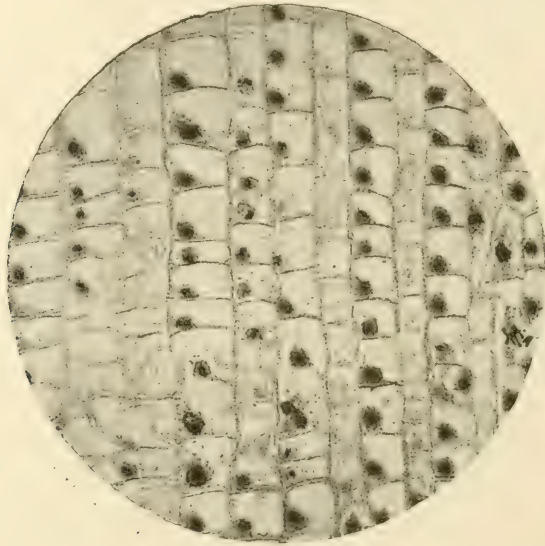


Fig. 7. Wie Fig. 5. In der vierten Reihe links oben eine ausgelegte Prophasis, in der mittleren Reihe unten eine schräge Metakinesis.

andere, ohne jedoch deformiert zu werden. Sie wurden also durch die Zentrifugalkraft wie einheitliche, starre Gebilde hin und her geworfen. Es gelang nicht irgend ein Chromosom aus der Figur herauszureißen, auch erschienen keine sonstigen Deformationen.

Da nun einige Gifte auf die achromatische Spindel so einwirken, daß die Fasern an fixierten Präparaten körnig aussehen, oder völlig verschwinden, obzwar die Zelle nicht getötet ist, im Gegenteil nach einiger Zeit wieder zu normalen Verhältnissen zurückkehrt, schien es mir interessant zu sein, Versuche anzustellen, wie sich in derartigen Zellen während der Zentrifugierung die Figuren verhalten werden. Es wurden daher Wurzeln von *Vicia faba* 1 Stunde lang mit  $\frac{3}{4}\%$  Chloralhydratlösung behandelt und hierauf 7 Minuten lang zentrifugiert.



Das Bild, welches Präparate aus derartigen Wurzeln bieten, weicht bedeutend von jenem der normalen Wurzeln ab. Wiederum sind zwar alle Kerne und Teilungsfiguren an die Zellwand zentrifugal geworfen, aber nur jene Figuren sind aus ihrer labilen Lage schräg geneigt oder parallel zur Wand angedrückt, deren achromatische Spindel noch erhalten ist. Hingegen sind in den Figuren, deren Spindelfasern körnig oder ganz verschwunden sind, die Chromosomen ganz an die Zellwand angedrückt (Fig. 10). Kernplatten sind mit ihrer ganzen Breite an die Wand angedrückt, in Metakinesen sind beide Chromosomengruppen aneinander gedrückt, Kernanlagen sind von der Zellwand abgerissen oder an dieselbe angepreßt. Überhaupt findet man zahlreiche Zellen,

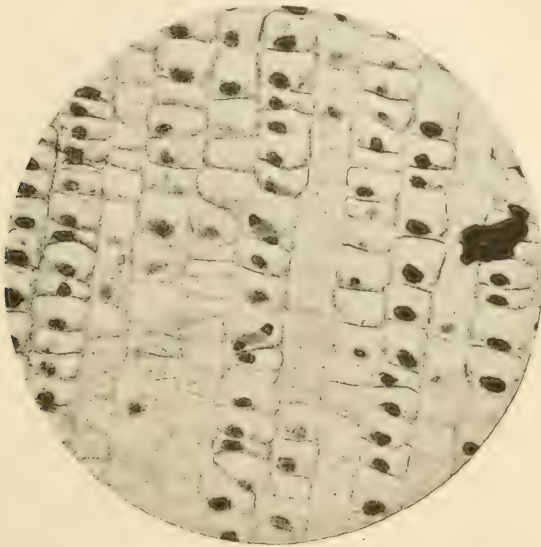


Fig. 8. Wie Fig. 5. In der mittleren Reihe zwei umgestürzte Metakinesen, die untere S-förmig deformiert.

in denen sich die Chromosomengruppen wie frei bewegliche spezifisch schwerere Körperchen verhalten. Die körnig gewordene Spindel leistet der Bewegung der Chromosomen keinen Widerstand mehr.

Dadurch wurde nur das bestätigt, was wir für die normalen Spindeln gefunden haben. Dieselben sind einheitliche, starre Systeme, in welche die Chromosomen eingefügt sind. Ist jedoch die Spindel aufgelöst, so verwandelt sich die Teilungsfigur in eine oder zwei Chromosomengruppen, die kein einheitliches starres System mehr vorstellen. Davon kann man sich gut überzeugen, wenn man in kurzen Intervallen die Angriffsrichtung der Zentrifugalkraft ändert. Immer nach fünf Minuten wurde die Richtung der auf die chloralisierten Wurzeln einwirkenden Zentrifugalkraft verändert und nach einigen Intervallen wurden die

Wurzeln fixiert. In einigen Zellen fanden sich dann einzelne Chromosomen unregelmäßig in der Zelle verteilt, so daß man annehmen muß, daß durch das Hin- und Herwerfen der Chromosomengruppe dieselbe in einzelne Chromosomen gelöst wurde. In normalen Zellen ist das nie geschehen.

Die eben beschriebene unregelmäßige Verteilung der Chromosomen läßt sich so erklären, daß sich beim Verschieben der Chromosomengruppe einzelne Chromosomen verspäten, vielleicht infolge eines größeren Reibungswiderstandes des Cytoplasmas, der durch ihre Gestalt und Lage bedingt ist. Oder aber es sind nicht alle Chromosomen gleich groß und

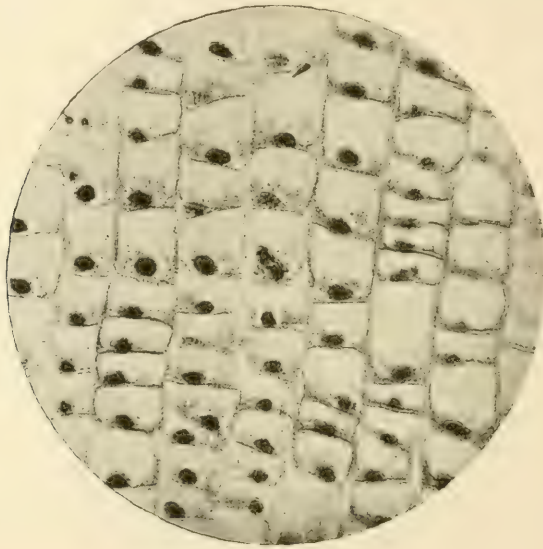


Fig. 9. Wie Fig. 5. In der mittleren Reihe eine schwach deformierte Metakinesis.

gleich spezifisch schwer. Von diesem Standpunkte aus gedenke ich Pflanzen zu untersuchen, deren Chromosomen ungleich groß sind.

Gleichzeitig mit der Zerstörung der achromatischen Spindel geht auch die Einheitlichkeit der ganzen Teilungsfigur verloren. Es ist zwar ein kausaler Zusammenhang beider Erscheinungen sehr wahrscheinlich, aber nicht notwendig anzunehmen, da sie ja auch parallel auftreten könnten.

Beim Zentrifugieren sammelt sich der Zellsaft in dem zentripetalen Zellraum zu einer großen Vakuole an. Die zentrifugal verschobene Teilungsfigur ragt häufig mit einer dicken Cytoplasmaumkleidung umgeben in dieselbe hinein. Die Oberflächenspannung der eingestülpten Vakuolenwand trägt ebenfalls dazu bei, die Teilungsfigur schräg und schließlich parallel zur Zellwand zu stellen. Sie wirkt in demselben

Sinne, wie die Zentrifugalkraft selbst. Dieser Umstand ändert natürlich nichts an unseren Ausführungen betreffend die Konsistenz der Teilungsfigur.

Wenn wir die zentrifugierten Wurzeln wieder in normalen Verhältnissen belassen, so kehren die Kerne und die Figuren, soweit sie frei beweglich sind, in die normale Lage zurück. Am frühesten kehren Kerne in ihre normale (d. h. meist zentrale) Lage zurück, welche sich eben zur Teilung vorbereiten, gleichzeitig mit ihnen die Teilungsfiguren. Dann die Kerne in meristematischen Zellen, zuletzt auch Kerne in jenen Zellen, welche schon ihre Teilungsfähigkeit eingebüßt haben, wie wenn

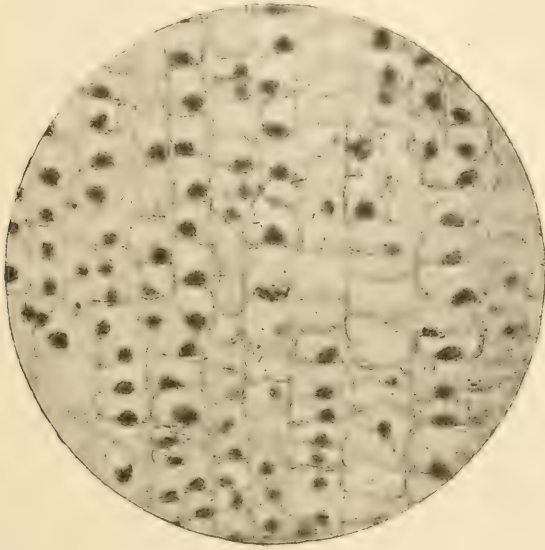


Fig. 10. Aus einer 1 Stunde lang mit  $\frac{3}{4}\%$  Chlorallösung behandelten und 7 Min. lang zentrifugierten Wurzel von *Vicia faba*. In der Mittelreihe eine Äquatorialplatte, die bis an die zentrifugale Zellwand angedrückt ist.

es da auf die zentrale Lage der Zellkerne nicht ankäme. Bei *Vicia* und *Pisum* sind in dem meristematischen Wurzelteile schon nach zwei Stunden normale Verhältnisse hergestellt. Bei *Ricinus* sind in sich nicht mehr teilenden Zellen noch 14 Stunden nach dem Zentrifugieren die Kerne zentrifugal gelegen. Irgend welche Abnormitäten — die schrägen Scheidewände ausgenommen — als Folgen des Zentrifugierens wurden in den Wurzeln nicht beobachtet. Nur bei der Erbse wurden in einigen Wurzeln 4 Stunden nach dem Zentrifugieren abnorm große Zellen mit diploiden Kernen beobachtet. Allmählich verschwinden auch die Größenunterschiede der während des Zentrifugierens entstandenen ungleich großen Schwesterzellen. Vielleicht geschieht das durch eine häufigere Teilung der größeren Zelle, vielleicht aber auch durch ein stärkeres

Wachstum der kleineren Zelle. Es ist daher nicht zu hoffen, daß das Zentrifugieren zu auffallenderen anatomischen Abnormitäten in den Wurzeln führen könnte. Denn die Regulation ist in ihnen ziemlich einfach, interessanter wäre es in dieser Beziehung die Stammscheitel zu untersuchen.

---



# Die Chistolithschiefer in der Umgebung von Rožmitál.

Résumé des böhmischen Textes.

Von

FRANTIŠEK SLAVÍK.

Mit 2 Textfiguren.

Vorgelegt am 29. Oktober 1915.

Die Gegend zwischen Rožmitál und Padrt wurde im J. 1865 von F. Ambróž beschrieben,<sup>1)</sup> dreißig Jahre nachher im posthumen Werke von F. Pošepný<sup>2)</sup> kartiert und mehrfach erwähnt. Von späteren Arbeiten über die Nachbargebiete greifen teilweise diejenigen von J. V. Želízko,<sup>3)</sup> dem Verfasser<sup>4)</sup> und R. Kettner<sup>5)</sup> in dieselbe ein.

Die Umgebung von Rožmitál, wo verschiedenartige Gesteinskomplexe auftreten: algonkische Schiefer, Lydite, Spilite, kambrische Sedimente des Žitecer, Třemošnáer und vielleicht noch weiterer Horizonte, Granodiorit, Porphyry, intrusive Diabase — zeigt einen gewiss komplizierten geologischen Aufbau, doch ist das Studium desselben durch die dichte Bewaldung im N und W von der Stadt sowie durch mächtige Quartärablagerungen sehr erschwert.

Die *silurischen* Sedimente, und zwar Osek-Kváňer Schiefer ( $d_1\gamma$ ), sind aus der Umgebung von Rožmitál, E von der Côte 590 SE von Voltuš

---

<sup>1)</sup> Ambróž, Geologische Studie aus der Umgebung von Padert, Jahr. geolog. Reichsanstalt, XV. Bd. (1865), 215—228.

<sup>2)</sup> Pošepný, Beitrag zur Kenntnis der montangeologischen Verhältnisse von Příbram, Archiv für praktische Geologie, Bd. II. (1895), 609—752, bes. 656—9, 665—6 u. 680—1.

<sup>3)</sup> Želízko, Geologicko-palaeontologické poměry nejbližšího okolí Rožmitálu, Rozpravy České Akademie 1906, č. 42.

<sup>4)</sup> Slavík, O spilitech v algonkiu příbramském, Slavnostní spis k sedmdesátým naroz. K. Vrby, č. 3. Praha 1915, Résumé in diesem Bulletin.

<sup>5)</sup> Kettner, O slepencích žiteckých — nejstarším horizontu českého kambria, Rozpravy České Akademie 1915, č. 34. Résumé in diesem Bulletin.

zuerst von F. K a t z e r<sup>6)</sup> erwähnt und von F. P o š e p n ý (l. c. S. 665—6) zitiert, später von J. V. Ž e l í z k o<sup>3)</sup> eingehender beschrieben worden.

Die vorliegende Mitteilung hat zwei neue Vorkommen zum Gegenstand, deren silurisches Alter zwar nicht wie bei Voltuš durch Fossilien sichergestellt ist, aber nach der Analogie mit den Produkten der Kontaktmetamorphose in der Umgebung von Ř í č a n y für verbürgt gehalten werden kann. In dem letzteren Gebiete haben K r e j č í und H e l m h a c k e r<sup>7)</sup> die Zugehörigkeit einiger kontaktmetamorpher Schiefer zur Etage  $d_1$  konstatiert, später hat F. K a t z e r<sup>8)</sup> die metamorphen Schiefer im Liegenden der  $d_2$ -Quarzite als zur Étage  $d_{1\gamma}$  gehörige „*Pseudochiastolithschiefer*“ bezeichnet und in einer weiteren Mitteilung<sup>9)</sup> dieselben auch aus der Zvánovicer Silurinsel angeführt. Unter den sehr mannigfaltigen Produkten der Kontaktmetamorphose von *algonkischen* Sedimenten werden die Chiastolithschiefer weder in diesen Arbeiten, noch in den späteren von F. K a t z e r<sup>10)</sup> und A. P e l i k a n<sup>11)</sup> erwähnt.

In der Gegend von Rožmitál tritt der Granit des mittelböhmischen Massivs an zahlreichen Stellen inselartig zwischen algonkischen und kambrischen Sedimenten auf. Bei der Stadt selbst ist er von *granodioritischer* Natur, wie ich vor Jahren für die Arbeit von Ž e l í z k o (l. c. 3, S. 4—5) bestimmt habe; desgleichen W vom oberen Padrfer Teiche, an einer schon A m b r o ž und P o š e p n ý bekannten Lokalität.<sup>12)</sup> Zwischen diesen beiden größeren Granitvorkommen sind einige kleinere, von P o š e p n ý kartierte zerstreut; aber wie der ganze Rožmitáler Abschnitt seiner geologischen Karte, erfordern auch diese Angaben eine systematische Revision, was schon aus der großen Zahl der von Ž e l í z k o, dem Verfasser und K e t t n e r a. a. O. gegebenen Einzelkorrekturen zu ersehen ist.

So tritt NE vom Nový rybník (= Neuer Teich) an der als Granit kartierten Stelle Třemošnáer Kambrium auf, die Granitinsel im Walde von Záběhlá zwischen der „Panská louka“ und der Einsicht „V chalupách“ ist viel kleiner als sie dargestellt ist, dafür finden wir zerstreute Granitblöcke am Waldwege SW von der C6 712 zwischen dem ersten und

<sup>6)</sup> K a t z e r, Geologie von Böhmen, 1473—4 (1890).

<sup>7)</sup> K r e j č í u. H e l m h a c k e r, Erläuterungen zur geologischen Karte der Umgebungen von Prag, Archiv etc. IV., 2. 1879, S. 52—4 und 230—2.

<sup>8)</sup> K a t z e r, Geologische Beschreibung der Umgebung von Ř í č a n, Jahrbuch geol. Reichsanst. Wien 1888 (XXXVIII.), 355—416.

<sup>9)</sup> D e r s e l b e, Die Silurinsel zwischen Zvánovic und Voděrad in Böhmen, Verhandl. geol. Reichsanst. 1888, S. 285—8.

<sup>10)</sup> D e r s e l b e, Nachträge zur Kenntnis des Granitkontakthofes von Ř í č a n, ebenda, 1904, 225—236.

<sup>11)</sup> P e l i k a n, Cordierithornfels aus dem Kontakthofe von Ř í č a n, Tschermak's Min.-petr. Mitt. 1903 (XXIV.), 187—190.

<sup>12)</sup> S l a v í k, Die splitischen Ergußgesteine etc., Archiv naturwiss. Durchforschung von Böhmen, XIV. 2, S. 13.

zweiten quer gehenden Waldschlag, ferner am Waldschlage zwischen der „Lomská bouda“ und dem Červený vrch (= Roter Berg), und zwar im Abschnitt zwischen der Padrt-Rožmitáler Chaussee und dem nächsten Waldschlag von NW-Richtung und noch etwas weiter über den letzteren hinaus, endlich S vom oberen Padrter Teiche, von wo schon A m b r o ž einen grobkörnigen Pegmatit erwähnt. Im ganzen kann man überall zwischen Rožmitál und Padrt in nicht allzu großer Tiefe den Granit resp. Granodiorit voraussetzen.

Die Kontaktgesteine im Algonkium zeigen, besonders typisch bei Zalány, Sedlice und Hájek, den Charakter von *Hornfelsen*,<sup>13)</sup> doch *nie* einen solchen von *Chiasolithschiefern*.

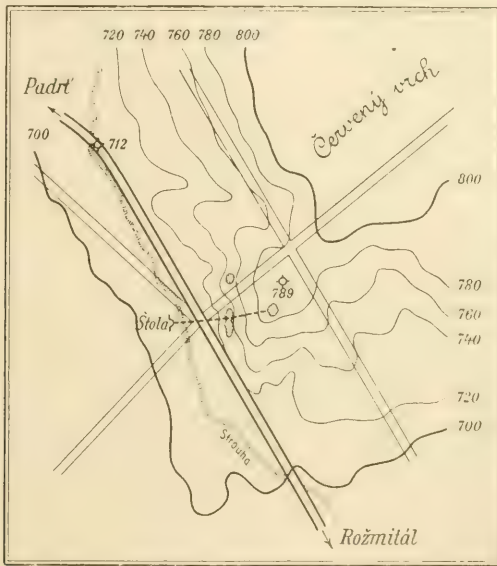


Fig. 1. Die Lage des Chiasolithschieferorkommens unter dem Červený vrch. Maßstab 1 : 25.000. Die punktierten Partien E vom Stollenmundloch („štola“ auf dem Kärtchen) sind die im Texte erwähnten Pingen resp. Pingengruppen.

Herr J. S y r o v á t k a, Verwalter der Eisenwerke in Rožmitál, fand die hier beschriebenen zwei Verkommen von Chiasolithschiefern und machte mich freundlichst auf dieselben aufmerksam; ihm sei auch für seine liebenswürdige Begleitung an den Exkursionen sowie für alle mir gegebenen Informationen wärmstens gedankt. Das größere Verkommen der Chiasolithschiefer bei Rožmitál liegt im Kataster der Gemeinde Z á b ě h l á, SE von derselben; unter dem SW-Abhang des Červený vrch; es ist eine Halde am Stollenmundloch, dessen Lage in Fig. 1 verzeichnet ist.

<sup>13)</sup> Vergl. F. Pošepný l. c. 2, S. 627.

Auf Pošepnýs Karte finden wir unweit E vom Stollenmundloch einen fast genau N streichenden Pingenzug verzeichnet. Der südlich von der Straße liegende Teil desselben ist heutzutage schon ganz undeutlich, nördlich von der Straße finden wir unten eine Gruppe von drei Pingen, weiter nördlich und höher im Abhang eine vierte Pinge, die größte und besterhaltene von allen; schließlich fand ich eine kleine Pinge oben an der in Fig. 1 bezeichneten Stelle, fast genau E vom Stollenmundloch und der erwähnten Gruppe von drei Pingen.

Historische Belege über den Bergbau am Červený vrch („Hl. Dreifaltigkeitsstollen“), die ich dem Herrn Verwalter Syrovátka und meinem Vater verdanke, da deren von den J. 1740, 1833 und 1849 und lassen erkennen, daß man es mit rot- und brauneisensteinreichen Lagen in den kambrischen Sandsteinen zu tun hat, die ein Streichen gegen N und Einfallen W haben. Die Übergänge von kompakterem Erz in Sandsteine mit eisenschüssigem Zement, die ich in der oberen Pinge fand, bestätigen dies.

Die *Chiastolithschiefer* würden zwischen Kambrium und Granit zu liegen kommen, d. h. ins Hangende des ersteren. Mit ihnen findet man beim Stollenmundloch verwitterten Granitgrus, Stücke von grau-rotem Quarzporphyr, kambrischem Quarzsandstein und schalige konkretionäre Brauneisensteinmassen.

Die zweite, kleinere Lokalität der *Chiastolithschiefer* in der Umgebung von Rožmitál liegt W vom Dorfe *Buková* im Walde, fast 300 m S vom Jägerhaus „Na vartě“; es sind undeutliche Überreste einer Grube, mit welcher hier vor Jahren auf Kohle geschürft wurde. Die Umgebung ist algonkisch, gegen E tritt nicht weit entfernt ein zum Teile brekzienartiger Kieselschiefer, noch weiter östlich metamorpher, von Aplitadern durchsetzter Spilit der *Dubová hora* auf, den ich im Vorjahre beschrieben habe.

\*       \*       \*

Die *Chiastolithschiefer* von *Červený vrch* sind makroskopisch dunkelgrau bis schwarz, weich, nicht allzu deutlich geschiefert; die graulichweißen dünnen *Chiastolithnadeln* pflegen die Länge von 2—4, seltener bis 4 mm zu haben und sind bisweilen sehr dicht in der Grundmasse zerstreut. Die meisten liegen in den Schichtflächen, aber ohne jede Spur eines linearen Parallelismus, und nicht wenige setzen auch die Schichtung schräg bis fast senkrecht durch. Ihre Gestalt ist das angenähert quadratische Andalusitprisma mit unregelmäßiger Terminalendigung und oft mit einspringenden Kanten. Bisweilen ist der dunkle Kern der *Chiastolithe* ausgewittert, an einigen Stellen sind sogar alle *Chiastolithnadeln* hohl.

Die *Chiastolithschiefer* von *Buková* sind ein wenig härter, von zahlreichen Quarzaderchen durchsetzt, und enthalten stellenweise viel Pyrit in Würfeln, Körnchen und dünnen Lagen. Die *Chiastolithe* sind



hier reicher an Graphit und stechen nicht so scharf von der Grundmasse ab wie beim vorigen Vorkommen; neben ihnen beobachtet man auch Pseudomorphosen nach Cordierit, die sich von ihnen durch kürzere Form mit allotriomorphem oder grob sechseckigem Querschnitte sowie durch das viel massenhafter auftretende und im ganzen Kristall gleichmäßig verteilte Graphitpigment unterscheiden.

Alle Chiasstolithe der beiden Gesteine sind Pseudomorphosen von Muskovit nach Andalusit. Schon Bl u m,<sup>14)</sup> der bloß die Pseudomorphosensubstanz irrtümlich für Talk hält, sagt ausdrücklich, diese Umwandlungen seien so zahlreich, daß man nur selten ganz normale Chiasstolithe finde. Es ist also die K a t z e r s c h e<sup>15)</sup> Bezeichnung „Pseudochiasstolithschiefer“ für analoge Gebilde aus der Umgebung von Říčany vollkommen überflüssig, desto mehr als gerade jenes Vorkommen (bei Světica) auch Chiasstolithe mit erhaltener rosafarbiger Andalusitsubstanz geliefert hat (ein Belegstück habe ich den Sammlungen des Museums des Königreichs Böhmen übergeben).

Die Muskovitnatur der Pseudomorphosensubstanz stellte ich durch qualitative Probe auf Al (Kobaltsolution) und K (B o ř i c k ý s c h e Reaktion) fest.

\* \* \*

Mikroskopische Untersuchung wird durch das Graphitpigment gehindert, welches nur wenige Stellen der Grundmasse im Dünnschliffe durchsichtig läßt. Die feinkörnige Grundmasse besteht aus allotriomorphen Quarzkörnern und ebensolchem Aggregate feinsten Schüppchen von farblosem Glimmer, deren Muttermineral teils Orthoklas, teils Cordierit gewesen ist. In den Adern bemerkt man neben Quarz auch Epidot, der besonders im Gestein von Buková ziemlich häufig sich auch an den Glimmerpseudomorphosen nach Cordierit beteiligt. Sonst gewahrt man noch hier und da Blättchen von primärem Muskovit, etwas Pyrit und ziemlich viel Rutil in winzigen Säulchen und Nadeln.

Der Unterschied beider Fundorte besteht darin, daß die Schiefer von Buková eine dichtere und graphitreichere Grundmasse zeigen und große Cordieriteinsprenglinge sowie ziemlich viel Epidot enthalten.

Die Umwandlung von Andalusit in Muskovit erweist sich auch u. d. M. als vollständig. Die Verteilung des Graphitpigmentes ist in weitaus den meisten Fällen die altbekannte normale, die Becke durch die Erscheinung der Anwachspyramiden erklärt hat.<sup>16)</sup> Selten kommt die abweichende Struktur, wie sie

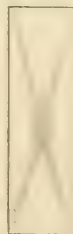


Fig. 2.

<sup>14)</sup> Bl u m, Nachtrag zu den Pseudomorphosen des Mineralreiches, Stuttgart 1847, S. 64 u. 70.

<sup>15)</sup> K a t z e r, l. c. (8) S. 397—8.

<sup>16)</sup> Tscherm. Min.-petr. Mitteil. 1892. (XIII.), S. 256—7.

auf der Fig. 2 schematisiert abgebildet ist: vom dunklen Kern verbreiten sich die pigmentierten Partien hauptsächlich *an den Grenzen* zwischen den Basis- und Prismenanwachspyramiden.

Die *Cordieriteinsprenglinge* im Gestein vom Červený vrch sind in Längsschnitten ein wenig idiomorph, in den Querschnitten unregelmäßig begrenzt, vollständig zu Muskovit umgewandelt und braun getrübt. In größerer Zahl und besserer Entwicklung findet man sie im Gestein von Buková, wo sie auch makroskopisch sichtbar werden und annähernd idiomorphe sechsseitige Querschnitte aufweisen.

Analogie zu unseren Gesteinen bietet der von *V. M. Goldschmidt* in seiner inhaltsreichen Monographie<sup>17)</sup> beschriebene Hornfels von Gunildrud in Südnorwegen. Auch dort finden wir dieselben Unterschiede zwischen Cordierit und Chiastolith in der Form und der Pigmentverteilung, die Grundmasse enthält auch dort viel Quarz, Orthoklas und Rutil. Der Unterschied besteht in der teilweisen Erhaltung von Andalusit und Cordierit sowie Anwesenheit von Biotit und Albit im norwegischen Gesteine, im teilweise primären Muskovit und im sekundären Epidot in unseren Chiastolithschiefern.

Goldschmidt führt weitere Beispiele analoger Gesteine von Südnorwegen sowie der Barr-Andlauer Gegend an. Nach all diesen Analogien erklärt sich ganz natürlich als Cordierit oder vielleicht an Einschlüssen reicherer Chiastolith, was *K a t z e r*<sup>18)</sup> mit solcher Naivität aus dem Tehover „Pseudochiastolithschiefer“ beschreibt: „Weil sich jedoch auch (d. h. außer den deutlichen Pseudomorphosen nach Chiastolith) gewisse Bildungen vorfinden, die von der übrigen Grundmasse zwar nicht scharf geschieden sind, aber immerhin eine Tendenz zur Prismengestalt, respektive zu quadratischen Figuren zeigen, so könnte vielleicht angenommen werden *daß die Chiastolithkrystalle eigentlich erst im Entstehen begriffen sind*. Hiernach dürfte die Bezeichnung des Schiefers von Tehov als Pseudochiastolithschiefer erklärlich und begründet erscheinen.“

\* \* \*

**Die chemische Analyse des Chiastolithschiefers von Buková** wurde freundlichst vom H. Kollegen *J o s. H a n u š* ausgeführt. Die Daten derselben bestätigen im ganzen die Übereinstimmung unseres Gesteins mit dem von *M. D i t t r i c h* analysierten Hornfels von Gunildrud:

	Buková (Hanuš)	Gunildrud (Dittrich)
SiO <sub>2</sub>	66·34 %	62·80 %
TiO <sub>2</sub>	0·45	1·36

<sup>17)</sup> Die Kontaktmetamorphose im Kristianiagebiet, Kr. 1911, S. 146—151.

<sup>18)</sup> l. c. (8) und Taf. IV. Fig. 2 daselbst.

	Buková (Hanuš)	Gunildrud (Dittrich)
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	17·06	19·74
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	—	—
FeO	1·09	1·98
MnO	—	0·02
MgO	1·69	1·34
CaO	0·30	0·87
Na <sub>2</sub> O	0·58	1·22
K <sub>2</sub> O	6·98	6·56
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	—	0·60
S	—	0·52
C	(2·00)	1·58
H <sub>2</sub> O konstit.	(3·07)	0·86
H <sub>2</sub> O hygrosk.	0·30	0·27
Sa.....	99·86%	99·72%
— O für S	—	0·23
		99·49%

Zu bemerken ist, daß die Grenze zwischen hygroskopischem und konstitutionellem Wasser bei Hanuš 120°, bei Dittrich 110° entspricht und daß der erstere den Graphit nur approximativ — darum ist die betreffende Ziffer eingeklammert —, der letztere aus der Differenz bestimmt hat.

Die Graphitnatur des Kohlenstoffs wurde von Hanuš durch die Graphitsäurereaktion nachgewiesen.

Zum Vergleich mit dem Chiastolithschiefer analysierte Hanuš auch den nicht umgewandelten  $d_1\gamma$ -Schiefer von Voltuš. Derselbe entstammte dem Originalmaterial von J. V. Želízko aus dem Barrandium im Museum des Königreiches Böhmen und enthielt ein Bruchstück des Trilobiten *Trinucleus Alfredi* (O. Novák) Želízko. Da an den beiden Fundorten von Chiastolithschiefern das Muttergestein derselben nicht erhalten worden ist, so ist natürlich der Vergleich mit dem Gestein aus einer 5 km entfernten Lokalität nur als eine grobe Approximation anzusehen.

Die Resultate der Analyse Hanuš's sind:

SiO <sub>2</sub>	58·30%
TiO <sub>2</sub>	1·11
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	21·76
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3·55
FeO	2·01
MnO	0·13
MgO	1·65
CaO	0·68

Na <sub>2</sub> O .....	0·98
K <sub>2</sub> O .....	4·22
Glühverlust <sup>19)</sup> .....	5·01
Hygrosk. Wasser ...	0·75
	100·15%

Diese Zusammensetzung kann man als diejenige eines an Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> und K<sub>2</sub>O reichen, an CaO, FeO und Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> armen Tonschiefers charakterisieren; etwas ungewöhnlich ist auch der wahrscheinlich durch örtliche Anhäufung von Rutil bedingte hohe Gehalt an TiO<sub>2</sub>.

Falls, wie wahrscheinlich, die chemische Zusammensetzung des Muttergesteins der Chistolithschiefer dem Gestein von Voltuš nahestand, dann zeigt sich der Unterschied des Kontaktprodukts vom ursprünglichen Gestein in der Erhöhung der Zahlen für SiO<sub>2</sub> und K<sub>2</sub>O bei mäßigen Veränderungen in den relativen Mengen der übrigen Gemengteile. Die Kalizufuhr ist gewiß erst bei der Verwitterung zustande gekommen, welche die Umwandlung von Andalusit (und Cordierit) zu Muskovit verursachte; dann muß man an den benachbarten Granit als die Quelle des Kali denken, welches von Tageswässern aus seinen Feldspäten ausgelaugt wurde. Da der Muskovit gegenüber den 36·8% SiO<sub>2</sub> im Andalusit 45·2% aufweist, so hat auch wenigstens ein Teil der zugeführten Kieselsäure denselben Ursprung.

Auf die Kontaktmetamorphose selbst erübrigt also in diesem Falle höchstens eine nicht allzu starke Zufuhr von Kieselsäure, ohne eine wesentliche Veränderung in den übrigen Bestandteilen.

*Mineralogisches Institut  
der böhmischen Universität.*

<sup>19)</sup> Wasser und etwas Kohlenstoff.



# Zur Konstruktion einer Fläche 2. Ordnung aus neun Punkten.

Von  
J. SOBOTKA.

Vorgelegt am 13. Oktober 1916.

1. Die Konstruktionen, welche wir hier ermitteln wollen, beruhen auf einem bekannten, zu diesem Zwecke wiederholt schon benutzten Prinzip. Wir setzen voraus, daß die neun Punkte im Raume beliebig, also in allgemeiner gegenseitiger Lage gegeben sind; alsdann bestimmen beliebige acht von ihnen einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, und eine allen gemeinschaftliche Raumkurve 4. Ordnung 1. Art; die gesuchte Fläche  $A$  ist dann diejenige Fläche des Büschels, welche durch den neunten gegebenen Punkt geht. Dieses Prinzip hat bereits Steiner im J. 1836 für die Konstruktion der Fläche  $A$  aufgestellt und benützt. Geiser hat dieselbe in eine brauchbare Form gebracht und veröffentlicht; er sagt diesbezüglich, daß es ihm gelungen ist, mit einigen Abänderungen und Vervollständigungen dieselbe in eine Form zu bringen, welche, trotzdem die gesuchte Fläche *nicht linear* hergestellt wird, doch mit so geringen Mitteln zum Ziele führt, als man überhaupt bei der komplizierten Aufgabe erwarten darf.<sup>1)</sup>

Tatsächlich aber ist diese Konstruktion nicht einfach genug, und es wurden seither auf anderen Prinzipien beruhende Konstruktionen ersonnen, welche viel einfacher zum Ziele führen. Unsere Absicht ist zu zeigen, daß auch das an die Spitze gesetzte Prinzip ebenso einfach zum Ziele führen kann und daß wir uns hiebei auf *lineare* Konstruktionen beschränken können. Es handelt sich hier durchweg darum, die Konstruktionen auf die von Pascalschen Sechsecken zu beschränken und die Zahl derselben tunlichst klein zu gestalten.

2. Es seien die gegebenen Punkte in beliebiger Reihenfolge mit 1 bis 9 bezeichnet. Wir ordnen sie zu Tripeln 1 2 3, 4 5 6, 7 8 9, durch

<sup>1)</sup> Jacob Steiners Gesammelte Werke, II. Bd., S. 719.

welche wir die Ebenen (1 2 3), (4 5 6), (7 8 9) legen. Es sei  $x$  die Schnittgerade der ersten zwei von ihnen,  $y$  die der ersten und dritten und schließlich  $z$  die der zweiten und dritten;  $O$  sei ihr Schnittpunkt. Wir wollen den in der Ebene (7 8 9) gelegenen Kegelschnitt  $k_1$  von  $A$  konstruieren. Zu dem Zwecke betrachten wir den Büschel von Flächen 2. Ordnung durch die Punkte 1 bis 8. Dieser schneidet die Ebene (7 8 9) in einem Kegelschnittbüschel  $\Sigma$ , dessen Kegelschnitte durch 7 und 8 gehen werden; alsdann ist  $k_1$  derjenige von ihnen, welcher durch den Punkt 9 geht.

Um eine möglichst einfache Durchführung der Konstruktion zu erhalten, legen wir durch die Punkte 1 bis 8 zwei Regelflächen 2. Ordnung  $B, C$  und ermitteln ihre Schnitte  $b, c$  mit der Ebene (7 8 9), die wir dann zur Konstruktion von  $k_1$  benützen. Es handelt sich vor allem um eine vorteilhafte Wahl der beiden Flächen  $B, C$  in dem Flächenbüschel.

3. Wir verbinden (Fig. 1) die Punkte 7, 8 durch die Gerade  $b_1$  und wählen als  $B$  die durch die Punkte 1 bis 8 gehende Fläche, auf welcher die Gerade  $b_1$  liegt. Trifft  $b_1$  die Geraden  $y, z$  in den Punkten,  $Y_1$  und  $Z_1$ , so ist in (1 2 3) durch die Punkte  $Y_1, 1, 2, 3$  ein Kegelschnittbüschel  $\Pi_1$  und in (4 5 6) durch die Punkte  $Z_1, 4, 5, 6$  ein Kegelschnittbüschel  $\Pi_2$  festgelegt; jeder von diesen Büscheln schneidet  $x$  in einer Punktinvolution. Bezeichnen wir diese Involutionen ( $\Pi_1$ ), resp. ( $\Pi_2$ ). Sie haben ein Elementenpaar gemein; durch dieses Paar geht also in  $\Pi_1$  ein Kegelschnitt  $g_1$  und in  $\Pi_2$  ein Kegelschnitt  $g_2$ , welche beide Kegelschnitte bereits der Fläche  $B$  angehören. Schneidet  $g_1$  die Gerade  $y$  noch im Punkte  $Y_2$  und  $g_2$  die Gerade  $z$  noch im Punkte  $Z_2$ , so gehört die Gerade  $b_2 \equiv Y_2 Z_2$  gleichfalls der Fläche  $B$  an und bildet mit  $b_1$  den hier ausartenden Kegelschnitt  $b \equiv (b_1 b_2)$ .

Hier ist zunächst der Umstand erschwerend, daß die Konstruktion des erwähnten Punktepaars quadratisch ist und daß überdies dieses Paar imaginär sein kann, wodurch die Darstellung der Konstruktion noch verwickelter wird.

Diese quadratische Konstruktion kann man aber leicht umgehen. Alle Kegelschnitte, welche durch die Paare der Involution ( $\Pi_1$ ) und die Punkte 4, 5, 6 gehen, bilden selbst einen Büschel  $\Pi_2'$ , schneiden sich also noch in einem reellen Punkte  $I$ ; folglich ist  $g_2$  der durch die Punkte 4, 5, 6,  $I$  und  $Z_1$  gehende Kegelschnitt. Den Punkt  $I$  können wir linear konstruieren, etwa so, daß wir durch den Schnittpunkt der Geraden 4 5 mit  $x$  den Kegelschnitt in  $\Pi_1$  legen und seinen zweiten Schnitt  $\xi$  mit  $x$  ermitteln, wozu wir die Anwendung eines Pascalschen Sechsecks benötigen; alsdann bilden die Geraden 4 5,  $\xi$  6 ein Element von  $\Pi_2'$ . Nehmen wir weiter den Kegelschnitt in  $\Pi_1$ , welcher durch den Schnitt der Geraden 4 6 mit  $x$  geht, und ermitteln wieder mit Hilfe eines Pascalschen Sechsecks seinen zweiten Schnitt  $\xi_1$  mit  $x$ , so bilden 4 6 und  $\xi_1$  5 gleichfalls ein Element von  $\Pi_2'$ . Daraus folgt, daß  $I$  der Schnittpunkt von  $\xi$  6 mit  $\xi_1$  5 ist.

Wir sehen, daß die Konstruktion von  $I$  mannigfaltig durchgeführt werden kann, indem wir aus  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  je einen Kegelschnitt so wählen, daß sich beide in zwei Punkten auf  $x$  schneiden und daß einer von ihnen entartet. Analog könnten wir den Punkt  $II$  linear konstruieren, in welchem sich alle dem Dreieck  $1\ 2\ 3$  umschriebenen Kegelschnitte schneiden, welche durch die Paare der auf  $x$  durch  $\Pi_2$  festgelegten Involution gehen. Dadurch ist auch  $g_1$  linear durch  $1, 2, 3, Y_1, II$  bestimmt, und wir können nun auch die Punkte  $Z_2, Y_2$ , also die Gerade  $b_2$  linear konstruieren.

Hier läßt sich also die erwähnte quadratische Konstruktion vermeiden; die Konstruktion von  $b_2$  erheischt dabei die sechsmalige Anwendung

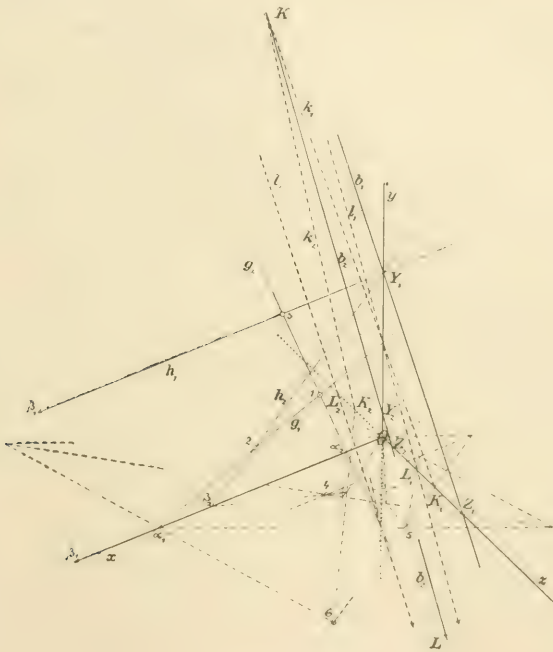


Fig. 1.

des Pascalschen Satzes. Wir wollen aber eine andere Konstruktion erläutern, welche diese Zahl auf vier herabdrückt.

4. Die Fläche  $B$ , welche durch die Gerade  $b_1 \equiv 7\ 8$  und die Punkte  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  geht und hiedurch bestimmt ist, können wir nämlich wieder nach dem eingangs hervorgehobenen Prinzip konstruieren. Wir legen (Fig. 1) durch  $b_1$  und durch die Punkte  $1, 2, 3, 4, 5$  zwei Flächen zweiter Ordnung  $H_1, H_2$ , deren Konstruktion sich einfach durchführen läßt; in dem durch sie festgelegten Büschel liegt auch die Fläche  $B$  selbst, die wir dann als solche ermitteln; sie geht nämlich durch die Schnittkurve der Flächen  $H_1, H_2$  und durch den Punkt  $6$ .

Wählen wir für die Fläche  $H_1$  die Gerade  $g_1 = 1\ 2$  als Erzeugende, so ist sie dann bestimmt. Wir haben also  $H_1$  durch die windschiefen Geraden  $b_1, g_1$  und durch die Punkte 3, 4, 5 festgelegt. Wir könnten sie etwa durch die projektiven Ebenenbüschel  $b_1(3, 4, 5, \dots), g_1(3, 4, 5, \dots)$  erzeugen; sie enthält tatsächlich die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und die Gerade  $b_1$ .

Wählen wir weiter etwa die Gerade  $g_2 = 1\ 3$  als Erzeugende für  $H_2$ , so ist auch diese Fläche durch die windschiefen Geraden  $b_1, g_2$  und durch die Punkte 2, 4, 5 festgelegt; wir könnten sie ebenso durch die projektiven Ebenenbüschel  $b_1(2, 4, 5, \dots), g_2(2, 4, 5, \dots)$  erzeugen; sie enthält ebenfalls die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und die Gerade  $b_1$ .

Die Ebene  $1\ 2\ 3$  schneidet  $H_1$  außer in  $g_1 = 1\ 2$  noch in der Geraden  $h_1$ , welche den Punkt  $Y_1 = (b_1\ y)$  mit 3 verbindet. Schneiden  $g_1, h_1$  die Gerade  $x$  in den Punkten  $\alpha_1, \beta_1$ , so wird  $H_1$  von der Ebene  $x\ z$  in einem Kegelschnitt geschnitten, der durch  $\alpha_1, \beta_1, 4, 5$  und  $Z_1 = (b_1\ z)$  geht und somit bestimmt ist. Wir konstruieren für diesen Kegelschnitt den zweiten Schnittpunkt  $L_1$  mit  $z$ , etwa mit Hilfe des Pascalschen Sechsecks  $5\ \beta_1\ \alpha_1\ 4\ Z_1\ L$  oder  $5\ \alpha_1\ \beta_1\ 4\ Z_1\ L_1$ . (In der Fig. 1 haben wir das zweite von ihnen verwendet.) Dann gehört die Gerade  $l_1$ , welche den Punkt  $L_1$  mit dem Punkte  $(g_1\ y)$  verbindet, der Fläche  $H_1$  an.

Analog verfahren wir für die Fläche  $H_2$ . Die Ebene  $1\ 2\ 3$  schneidet sie außer in  $g_2 = 1\ 3$  noch in der Geraden  $h_2$ , welche  $Y_1$  mit 2 verbindet. Schneiden  $g_2, h_2$  die Gerade  $x$  in den Punkten  $\alpha_2, \beta_2$ , so hat  $H_2$  mit der Ebene  $x\ z$  einen Kegelschnitt gemein, welcher durch  $\alpha_2, \beta_2, 4, 5$  und  $Z_1$  geht und hierdurch festgelegt ist. Wir konstruieren für ihn den zweiten Schnittpunkt  $L_2$  mit  $z$ , im Einklang mit Vorangehendem mit Hilfe des Pascalschen Sechsecks  $5\ \alpha_2\ \beta_2\ 4\ Z_1\ L_2$  oder  $5\ \alpha_2\ \beta_2\ 4\ Z_1\ L_2$ . (In Fig. 1 mit Hilfe des zweiten.) Dabei hat das hier benützte Sechseck mit dem für  $H_1$  zuvor angegebenen die Seiten  $4\ Z_1, x, z$  gemein und ihre Pascalgeraden gehen durch  $O$ . Die Gerade  $l_2$ , welche den Punkt  $L_2$  mit dem Schnittpunkt von  $g_2$  mit  $y$  verbindet, gehört alsdann der Fläche  $H_2$  an, indem sie mit  $b_1$  den vollständigen Schnitt von  $H_2$  mit der Ebene  $y\ z$  bildet.

Der Schnittpunkt  $L = (l_1\ l_2)$  gehört beiden Flächen  $H_1, H_2$  an, er ist also allen Flächen gemeinschaftlich, welche durch die Gerade  $b_1$  und durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 gehen, also gehört er auch der Fläche  $B$  an.

5. Nun wiederholen wir den Vorgang, indem wir durch die Gerade  $b_1$  und die Punkte 1, 2, 3, 4, 6 zwei Flächen zweiter Ordnung  $K_1, K_2$  legen und ihre von  $b_1$  verschiedenen Schnittgeraden  $k_1$  bzw.  $k_2$  mit der Ebene  $y\ z$  ermitteln. Für die Fläche  $K_1$  wählen wir wieder  $g_1$ , für  $K_2$  wieder  $g_2$  als Erzeugende, so daß der ersten von ihnen  $h_1$ , der zweiten  $h_2$  angehört. Also haben wir wieder mit Hilfe des Pascalschen Sechsecks  $6\ \beta_1\ \alpha_1\ 4\ Z_1\ K_1$  oder  $6\ \alpha_1\ \beta_1\ 4\ Z_1\ K_1$  (in der Fig. 1 mit Hilfe des zweiten) den Punkt  $K_1$  zu ermitteln, in welchem  $K_1$  die Gerade  $z$  noch trifft, um dann  $k_1$  als die



Verbindungsgerade von  $K_1$  mit dem Punkte  $(g_1 y)$  zu erhalten. Analog liefert das Pascalsche Sechseck  $6 \beta_2 \alpha_2 4 Z_1 K_2$  oder  $6 \alpha_2 \beta_2 4 Z_1 K_2$  (in der Fig. 1 das zweite) den zweiten Schnittpunkt von  $K_2$  mit  $z$  und die Gerade  $k_2$  ist die Verbindung von  $K_2$  mit dem Punkte  $(g_2 y)$ . Dabei haben die jetzt benutzten Sechsecke mit den früheren die Seiten  $4 Z_1, x, y$  gemein, so daß ihre Pascalgeraden gleichfalls durch  $O$  gehen.

Der Schnittpunkt  $K = (k_1, k_2)$  gehört beiden Flächen  $K_1, K_2$  an, er ist also allen Flächen gemeinschaftlich, welche durch die Gerade  $b_1$  und die Punkte 1, 2, 3, 4, 6 gehen, also gehört er auch der Fläche B an. Deshalb liegt auch die Gerade  $LK$  auf B; sie ist die von  $b_1$  verschiedene Gerade  $b_2$ , in welcher diese Fläche die Ebene  $yz$  schneidet.

Wir bemerken hiezu noch Folgendes. Alle Flächen, welche durch fünf Punkte und eine Gerade  $b_1$  gehen, schneiden sich im allgemeinen noch in einer kubischen Raumkurve, für welche  $b_1$  eine Sehne ist. Jede Ebene durch  $b_1$  schneidet diese Raumkurve außerhalb  $b_1$  in einem einzigen Punkte. Wir haben also die Aufgabe gelöst: Es ist der außerhalb  $b_1$  liegende Schnittpunkt  $L$  resp.  $K$  der Ebene  $yz$  mit der kubischen Raumkurve zu ermitteln, welche  $b_1$  zur Sehne hat und außerdem durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 resp. 1, 2, 3, 4, 6, geht. Wir konnten also für die Konstruktion der Punkte  $L$  und  $K$  auch das Prinzip aussprechen, daß wir durch  $b_1$  als Sehne und je durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 resp. 1, 2, 3, 4, 6 die eindeutig bestimmte kubische Raumkurve  $l_3$  resp.  $k_3$  legen und ihren Schnitt  $L$  resp.  $K$  mit  $yz$  konstruieren. Alle Flächen 2. Ordnung durch  $b_1$  und  $l_3$  bilden einen Büschel und ebenso alle solche Flächen durch  $b_1$  und  $k_3$  und schneiden  $yz$  außer in  $b_1$  noch in Geraden des Strahlenbüschels um  $L$  resp.  $K$ ; die Fläche des einen Büschels, welche durch  $LK$  geht, gehört auch dem zweiten an; sie ist somit die Fläche B.

Wir ersehen hieraus, daß uns die viermalige Anwendung des Pascalschen Satzes die Gerade  $b_2$  liefert, wobei die zugehörigen Pascalschen Sechsecke in besonderer Lage sich befinden, durch welche die Darstellung wesentlich vereinfacht wird.

6. Zu demselben Ergebnis führt die folgende Betrachtung. Die Fläche B werde von der Ebene  $xy$  im Kegelschnitte  $(b)$ , von  $xz$  im Kegelschnitte  $[b]$  und von  $yz$  im Geradenpaare  $b_1 b_2$  geschnitten. Dabei haben  $(b)$ ,  $[b]$ , weiter  $(b)$ ,  $b_1 b_2$  und schließlich  $[b]$ ,  $b_1 b_2$  auf  $x, y$ , resp.  $z$  je zwei Punkte gemein. Um also B zu erhalten, hat man durch  $Y_1, 1, 2, 3$  und durch  $Z_1, 4, 5, 6$  die Kegelschnitte  $(b)$ ,  $[b]$  so zu legen, daß sie sich in zwei Punkten auf  $x$  schneiden; die Verbindungsgerade ihrer zweiten Schnittpunkte mit  $y$  und  $z$  ist dann  $b_2$ . Alle Kegelschnitte durch  $Y_1, 1, 2, 3$  bilden einen Büschel, welcher  $y$  in einer Punktreihe und  $x$  in einer zu ihr projektiven Punktinvolution schneidet. Alle Kegelschnitte, welche durch die Punktepaare dieser Involution und durch 4, 5,  $Z_1$  gehen, bilden gleichfalls einen Büschel, welcher  $z$  in einer zu dieser Involution projektiven Punktreihe schneidet. Es sind also die so auf  $y$  und  $z$  entstehenden



bindungsgerade  $m$  gehört nun der Fläche  $C$  an; sie muß also auch durch den Punkt 3 gehen, so daß  $m$  sich als die Verbindungsgerade der Punkte  $H, 3$  ergibt.

Dies führt zur folgenden Konstruktion. Wir verbinden  $\alpha_1$  mit einem der Punkte 4, 5, 6, etwa mit 4, durch eine Gerade. Diese Gerade  $\alpha_1 4$  bildet mit der Geraden 5 6 einen Kegelschnitt von  $\Sigma_1$ . Trifft  $z$  diese Geraden in den Punkten  $E, F$ , so ist der zugehörige Kegelschnitt von  $\Sigma_2$  durch die Punkte  $E, F, 7, 8, \bar{Y}_2$  festgelegt und man kann nach dem Pascalschen Satze seinen zweiten Schnittpunkt  $C_1'$  mit  $y$  ermitteln. Verbinden wir  $C_1'$  mit dem Punkte  $C' = (5 6. x)$ , so erhalten wir eine durch  $H$  gehende Gerade  $C_1' C'$ .

Die Verbindungsgerade  $\alpha_1 5$  bildet mit der Geraden 4 6 einen zweiten Kegelschnitt von  $\Sigma_1$ . Diese Geraden mögen  $z$  in den Punkten  $E', F'$  treffen. Alsdann ist der zugehörige Kegelschnitt von  $\Sigma_2$  durch die Punkte  $E', F', 7, 8, \bar{Y}_2$  festgelegt. Ermitteln wir mit Hilfe des Pascalschen Satzes den zweiten Schnittpunkt  $C_1''$  dieses Kegelschnittes mit  $y$ ; seine Verbindungsgerade mit dem Punkte  $C'' = (4 6. x)$  geht gleichfalls durch  $H$ .

Wir verwenden zur Konstruktion von  $C_1'$  etwa das Sechseck 7 8  $E F \bar{Y}_2 C_1'$  und zur Konstruktion von  $C_1''$  das Sechseck 7 8  $E' F' \bar{Y}_2 C_1''$ , so daß wir dabei zur Konstruktion von  $C_1'$  vier und zur Konstruktion von  $C_1''$  nur noch drei Geraden zu ziehen haben. Alsdann ergibt sich  $H$  als Schnitt der Geraden  $C' C_1', C'' C_1''$  und die Gerade  $m$  von  $C$  ist die Verbindung der Punkte  $H$  und 3; sie legt auf  $y$  den Punkt  $C_1$  fest. Wir könnten dieser Konstruktion auch eine der früheren analoge Auslegung geben.

Die Fläche  $C$  schneidet die Ebene  $yz$  im Kegelschnitte  $c$ , von welchem wir jetzt schon die vier Punkte  $\bar{Y}_2, C_1, 7, 8$  kennen.

Legen wir weiter durch einen der Punkte 7, 8 und zwei der Punkte 4, 5, 6 eine Ebene, etwa die Ebene 4 5 7. Sie schneidet  $C$  in einem Kegelschnitte  $r$ , auf dem nebst den drei gewählten Punkten auch noch die Schnittpunkte mit  $g_1$  und  $m$  liegen und der somit dadurch bestimmt ist, so daß man nach dem Pascalschen Satze auch noch seinen zweiten Schnittpunkt  $R$  mit der Ebene  $yz$  konstruieren kann. Dieser Punkt gehört also auch dem Kegelschnitte  $c$  an. Damit ist  $c$  durch die Punkte  $\bar{Y}_2, C_1, 7, 8, R$  hinreichend festgelegt.

Bei unserer speziellen Wahl ist also 4 5 die Spur der Ebene 4 5 7 in  $xz$ , ihre Spur  $e$  in  $yz$  verbindet den Punkt (4 5.  $z$ ) mit 7 und ihre Spur in  $xy$  verbindet die Punkte ( $e. y$ ), (4 5.  $x$ ) und trifft  $m$  und  $g_1$  in den Punkten  $M$  und  $G_1$  von  $r$ . Verwenden wir zur Konstruktion von  $R$  etwa das Sechseck  $M G_1 4 5 7 R$ , so hat man drei neue Gerade zu ziehen, um den Punkt  $R$  zu erhalten.

Aus unserer Konstruktion ersehen wir, daß wir die dreimalige Anwendung des Pascalschen Satzes benötigt haben, um den Kegelschnitt  $c$  durch die Punkte  $\bar{Y}_2, C_1, 7, 8, R$  festzulegen.



Durch  $c$  und  $b = b_1 b_2$  ist in der Ebene  $yz$  der Kegelschnittbüschel  $\Sigma$  gegeben. Unsere Aufgabe wird es jetzt sein, denjenigen Kegelschnitt  $k_1$  desselben zu konstruieren, welcher durch den Punkt 9 geht. Hiemit haben wir die Konstruktion von  $k_1$  auf ein bekanntes Problem zurückgeführt und könnten sie als erledigt betrachten. Indes streben wir hier eine einfache Konstruktion an, welche auf den Satz von Pascal zurückzuführen wäre.

8. Wir wollen von der allgemeinen Aufgabe ausgehen: Gegeben sind (Fig. 3) in einer Ebene zwei Kegelschnitte  $b, c$  und ein auf keinem von ihnen gelegener Punkt  $R$ ; man soll den durch  $R$  und die Schnittpunkte von  $b$  und  $c$  bestimmten Kegelschnitt  $k$  konstruieren. Dabei setzen wir voraus, daß die Schnittpunkte von  $b$  und  $c$  nicht direkt gegeben sein müssen und also auch imaginär sein können.

Wir führen durch  $R$  eine Gerade, welche  $b$  in den Punkten  $B_1, B_2$  und eine andere, welche  $c$  in den Punkten  $C_1, C_2$  reell schneidet und ziehen die Geraden  $B_1 C_1, B_2 C_2$ . Die erste von ihnen möge  $b$  noch in  $B_3$  und  $c$  noch in  $C_3$ , die zweite möge  $b$  noch in  $B_4$  und  $c$  noch in  $C_4$  schneiden. Wir haben so zu den Sehnen  $B_1 B_2, C_1 C_2$  dieser Kegelschnitte die neuen Sehnen  $B_3 B_4, C_3 C_4$  erhalten und es schneiden sich die Geraden dieser neuen Sehnen im Punkte  $I$ , während die Gerade der Sehne  $C_3 C_4$  die ursprünglich geführte Gerade  $B_1 B_2$  im Punkte  $II$  schneidet und die Gerade  $B_3 B_4$  mit  $C_1 C_2$  den Schnittpunkt  $III$  gibt.

Man erkennt nun, daß die Punkte  $I, II, III$  auf dem durch  $R$  geführten Kegelschnitte  $k$  des durch  $b$  und  $c$  festgelegten Kegelschnittbüschels  $\Sigma$  liegen.

Dazu betrachten wir das Viereck  $B_1 B_2 B_4 B_3$ , dessen Ecken einen Kegelschnittbüschel festlegen. Dieser Büschel wird von der Geraden  $R III$  in einer Involution geschnitten. Ein Paar dieser Involution wird durch  $b$ , ein zweites Paar durch  $B_1 B_3$  und  $B_2 B_4$  ausgeschnitten; dieses Paar sind nun die Schnittpunkte  $C_1, C_2$  von  $R III$  mit  $c$ . Und ein drittes Paar wird durch die Schnittpunkte  $R, III$  dieser Geraden mit  $B_1 B_2$  und  $B_3 B_4$  gebildet. Es gehört also  $III$  mit  $R$  zu einem Paar der durch  $b$  und  $c$  auf  $R III$  festgelegten Involution; deshalb gehört  $III$  dem Kegelschnitt  $k$  an. Analog schließen wir mit Hilfe der Vierecke  $C_1 C_2 C_4 C_3, B_1 B_2 B_4 B_3$  daß die Punkte  $II$  und  $I$  dem Kegelschnitt  $k$  angehören.

Die Geraden  $B_1 C_2, B_2 C_1$  schneiden  $b$  noch in den Punkten  $B_5, B_6$  und  $c$  in den Punkten  $C_5, C_6$ . Nach der soeben erkannten Beziehung schneiden sich die Geraden  $B_5 B_6, C_5 C_6$  in einem weiteren Punkte  $IV$  von  $k$ , während die Geraden  $B_1 B_2, C_5 C_6$  sich wieder im Punkte  $II$  und die Geraden  $C_1 C_2, B_5 B_6$  sich wieder im Punkte  $III$  treffen. Hiedurch ist  $k$  durch die 5 Punkte  $R, I, II, III, IV$  festgelegt.

Sind die Kegelschnitte  $b, c$  durch je 5 Punkte beliebig gegeben, so kann man einen von ihnen auf  $b$  als den Punkt  $B_1$  und einen von ihnen auf  $c$  als  $C_1$  wählen; dann kann man nach einander die Punkte  $B_2$ , als



Schnitt der Geraden  $RB_1$  mit  $b$ , und  $C_2$  als Schnitt der Geraden  $RC_1$  mit  $c$ , hierauf die Punkte  $B_3$  und  $C_3$  als Schnitte der Geraden  $B_1C_1$ , ferner die Punkte  $B_4$  und  $C_4$  als Schnitte der Geraden  $B_2C_2$  und schließlich die Punkte  $B_5, C_5$  als Schnitte der Geraden  $B_1C_2$ , oder statt  $B_5, C_5$  die Punkte  $B_6, C_6$  als Schnitte der Geraden  $B_2C_1$  mit  $b$  bzw.  $c$  konstruieren, um dann in der zuvor ausgeführten Weise die Punkte  $I$  bis  $IV$  zu erhalten, nämlich  $I = (B_3 B_4 \cdot C_3 C_4)$ ,  $II = (R B_1 \cdot C_3 C_4)$ ,  $III = (R C_1 \cdot B_3 B_4)$  und  $IV = (III B_5 \cdot II C_5)$ , resp.  $IV = (III B_6 \cdot II C_6)$ .

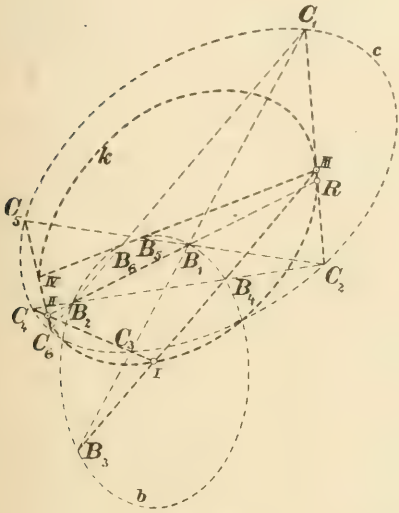


Fig. 3.

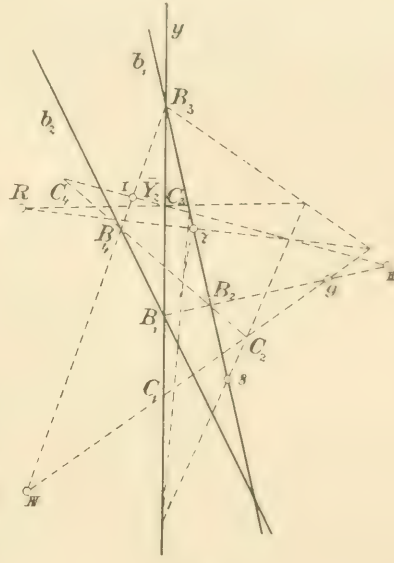


Fig. 4.

Wir haben also im ganzen achtmal, nämlich für jeden der Kegelschnitte  $b, c$  viermal den Pascalsatz anzuwenden, wobei aber die zugehörigen Pascalsechsecke eine Anzahl Seiten gemein haben, wodurch sich die Durchführung der Konstruktionen vereinfacht.

9. Wir kehren nun zur Konstruktion des Kegelschnittes  $k_1$  in  $yz$  für die gesuchte Fläche 2. Ordnung zurück (Fig. 4) und wenden das soeben Erläuterte hier an. Zu dem Zwecke verbinden wir 9 mit  $C_1$  und ermitteln den zweiten Schnittpunkt  $C_2$  dieser Geraden mit  $c$ , etwa mit Hilfe des Pascalsechsecks  $C_1 \bar{Y}_2 R 7 8 C_2$ , für welches die Verbindungsgerade der Punkte  $b_1, y$  und  $R 7 \cdot 9 C_1$  die Pascalgerade ist; die Sekante  $9 B_1$  zu  $b$  führen wir etwa durch den Punkt  $B_1 = (b_2, y)$ , so daß  $9 B_1$  die Gerade  $b_1$  im Punkte  $B_2$  schneidet. Die Gerade  $y = C_1 B_1$  schneidet  $c$  noch im Punkte  $C_3$ , welcher mit  $\bar{Y}_2$ , und  $b$  noch im Punkte  $B_3$ , welcher mit  $(b_1, y)$  zusammenfällt; die Gerade  $C_2 B_2$  schneidet  $c$  im Punkte  $C_4$ , den wir etwa mit Hilfe des Pascalsechsecks  $\bar{Y}_2 C_1 7 8 C_2 C_4$  konstruieren, und  $b$  schneidet sie im Punkte  $B_1$  auf  $b_2$ . Es gehören also die Punkte  $I = (B_3 B_4 \cdot \bar{Y}_2 C_1)$ ,  $II = (9 B_1 \cdot \bar{Y}_2 C_4)$ ,  $III = (9 C_1 \cdot B_3 B_4)$  dem Kegelschnitte  $k_1$  an, welcher

außerdem durch die Punkte 9, 8, 7 geht und somit mehr als notwendig bestimmt ist.

Bemerkt sei, daß wir den Pascalsatz zur Konstruktion von  $b_2$  viermal, zur Konstruktion von  $c$  dreimal und zur Endkonstruktion von  $k_1$  zweimal angewendet haben. Dabei hätten wir noch die Ermittlung von  $k_1$  aus  $b_1 b_2$  und  $c$  auf mannigfache Weise durch zweimalige Anwendung des Pascalsatzes vornehmen können.

Die Konstruktion von  $k_1$  können wir auch auf den Sturmschen Satz gründen. Legen wir nämlich durch zwei Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels irgend einen Kegelschnitt, so schneiden auf diesem die Elemente des Büschels eine Involution ein, deren Pol  $P$  auf der

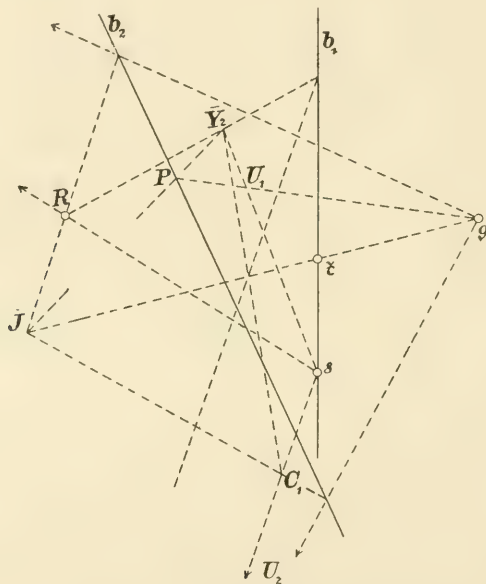


Fig. 5.

Verbindungsgerade der übrigen zwei Grundpunkte liegt, oder mit anderen Worten gesagt, für welche diese zwei Grundpunkte gleichfalls ein Paar bilden.

Legen wir also hier (Fig. 5) durch die Punkte 7, 8 irgend einen Kegelschnitt  $h$ , so werden, da  $k_1$ ,  $c$  und  $b = b_1 b_2$  einem Büschel angehören, die Verbindungsgeraden der Schnittpunktepaare von  $h$  mit  $c$  und  $k_1$  sich in einem Punkte  $P$  von  $b_2$  schneiden. Wählen wir als  $h$  einmal das Geradenpaar 7 9, 8  $\bar{Y}_2$ , so haben wir den Schnittpunkt  $J$  von 9 7 mit  $c$  mit Hilfe eines Pascalsechsecks zu ermitteln und es schneidet dann  $J \bar{Y}_2$  die Gerade  $b_2$  in dem zugehörigen Pol  $P$ ; die Gerade  $P 9$  schneidet 8  $\bar{Y}_2$  in einem Punkte  $U_1$ , welcher dem Kegelschnitt  $k_1$  angehört. Wählen wir die Geraden 9 7 und 8  $C_1$  als  $h$ , so haben wir analog den Schnittpunkt von  $C_1 J$  und

$b_2$  mit 9 zu verbinden und die Verbindungsgerade trifft  $8C_1$  in einem weiteren Punkte  $U_2$  von  $k_1$ . Ebenso könnten wir den Schnittpunkt von  $RJ$  und  $b_2$  mit 9 verbinden, und es würde diese Verbindungsgerade von  $R8$  gleichfalls in einem Punkte von  $k_1$  getroffen.

Obzwar die vorhergehende Konstruktion von  $k_1$  in der Durchführung ebenso einfach ist, sind wir hier mit einem Pascalsechseck ausgekommen.

Wir sehen hieraus, daß wir zur punktweisen Ermittlung von  $k_1$  mit achtmaliger Anwendung des Satzes von Pascal auskommen.

Hätten wir die Aufgabe: „Eine Fläche 2. Ordnung ist durch 9 Punkte 1 bis 9 gegeben, man soll den zweiten Schnittpunkt  $G$  derselben mit einer durch einen von ihnen — (9) — gehenden Geraden  $g$ , die sich auf die Verbindungsgerade zweier anderen von ihnen (8 und 7) stützt, konstruieren“,

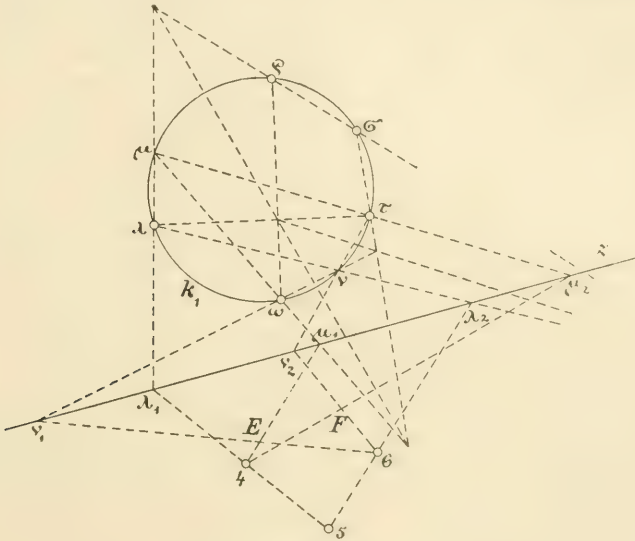


Fig. 6.

so würden wir  $b_1$   $b_2$  und  $c$  in der angeführten Weise bestimmen (Fig. 4.) und dann die Gerade  $g$  mit  $b_2$  in  $B_2$  schneiden. Verbinden wir dann 7 mit 9, ermitteln den Schnitt  $J$  von  $c$  mit dieser Verbindungsgeraden und hierauf den Schnitt  $C_3$  mit der Geraden  $J B_2$ , so schneiden sich, unserer Konstruktion gemäß, die Geraden  $C_3$  8 und  $g$  in dem fraglichen Punkte  $G$ .

Man sieht, daß wir hiezu im ganzen neunmal den Pascalsatz angewendet haben. Hätten wir  $k_1$  in der zweiten hier erläuterten Weise mit Hilfe der Punkte 7, 8, 9,  $U_1$ ,  $U_2$  konstruiert, so wäre  $G$  dann auch mit Hilfe eines Pascalsechsecks zu konstruieren, was wieder die Anzahl neun ergeben würde.

10. Im Vorangehenden haben wir aus den gegebenen 9 Punkten der Fläche  $A$  den auf ihr liegenden durch 7, 8 und 9 gehenden Kegelschnitt  $k_1$  ermittelt. Es soll jetzt noch ein zweiter Kegelschnitt derselben dargestellt werden, etwa der durch die Punkte 4, 5, 6 gehende  $k_2$ .

Zu dem Zwecke verbinden wir (Fig. 6) durch Gerade einen der bekannten Punkte auf  $k_1$ , nennen wir ihn  $\lambda$ , und die Schnittpunkte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $z$  mit den Geraden 4 5 und 5 6, bestimmen dann die zweiten Schnittpunkte  $\mu, \nu$  der Geraden  $\lambda \lambda_1, \lambda \lambda_2$  mit dem Kegelschnitte  $k_1$ , verbinden weiter die Punkte  $\mu, \nu$  durch Gerade mit einem zweiten von den bekannten Punkten auf  $k_1$ , nennen wir ihn  $\omega$ , und bringen die Geraden  $\mu \omega, \nu \omega$  mit  $z$  in  $\mu_1, \nu_1$  zum Schnitt. Diese Geraden erhalten wir mit Hilfe der Pascalsechsecke  $\omega \varrho \sigma \tau \lambda \mu, \omega \varrho \sigma \tau \lambda \nu$ , wobei  $\varrho, \sigma, \tau$  drei weitere bekannte Punkte von  $k_1$  bezeichnen. Alsdann schneiden sich die Geraden 4  $\mu_1, 6 \nu_1$  in einem Punkte  $E$  von  $k_2$ .

Denn alle Kegelschnitte durch  $\lambda, \omega, \mu, \nu$  bilden einen Büschel und schneiden auf  $z$  eine Punktinvolution ein. Die Kegelschnitte, welche durch 4, 5, 6 und die einzelnen Paare dieser Involution gelegt werden, bilden gleichfalls einen Büschel; zwei Kegelschnitte dieses Büschels werden durch die Geradenpaare 4 5, 6  $\nu_1$ ; 5 6, 4  $\mu_1$  gebildet. Es sind also 4, 5, 6,  $E$  seine Grundpunkte; der Kegelschnitt  $k_2$ , welcher durch das Schnittpunktepaar von  $k_1$  mit  $z$  und durch 4, 5, 6 geht, gehört auch diesem Büschel an; es ist somit  $E$  ein Punkt desselben. Verbinden wir nun  $\mu$  und  $\nu$  mit einem der übrigen gegebenen Punkte von  $k_1$ , etwa mit  $\tau$  und bringen die Verbindungsgeraden mit  $z$  in  $\mu_2$  und  $\nu_2$  zum Schnitt, so schneiden sich aus denselben Gründen die Geraden  $\nu_2 6, \mu_2 4$  in einem weiteren Punkte  $F$  von  $k_2$ . So würde uns jeder der bekannten Punkte auf  $k_1$  sofort zu einem Punkte von  $k_2$  führen.

Wir ersehen daraus, daß zur punktweisen Bestimmung von  $k_2$  noch die zweimalige Anwendung des Pascalsatzes notwendig war, wobei jedoch die zugehörigen Sechsecke eine Anzahl von Ecken gemeinsam haben. Ebenso hätten wir den durch 1, 2, 3 gehenden Kegelschnitt  $k_3$  von  $A$  ermitteln können.

Betrachten wir die Fläche  $A$  durch  $k_1, k_2$  und einen Punkt hinreichend dargestellt, dann erkennen wir, daß zu dieser Darstellung nach der hier entwickelten Konstruktion die zehnmalige (beziehungsweise elfmalige) Anwendung des Pascalsatzes erforderlich ist; wollen wir aber noch den Kegelschnitt  $k_3$  von  $A$ , der durch die Punkte 1, 2, 3 geht, punktweise festlegen, so haben wir den Pascalsatz noch zweimal anzuwenden, was im ganzen die Anzahl der Pascalsechsecke auf zwölf erhöht.

11. Versuchen wir auf Grund der bisherigen Betrachtungen die Aufgabe zu lösen, für eine durch die Punkte 1 bis 9 gegebene Fläche 2. Ordnung  $A$  den zweiten Schnittpunkt  $G$  derselben mit irgend einer durch einen von ihnen, etwa 9, gezogenen Geraden  $g$  möglichst direkt zu konstruieren.

Wir legen (Fig. 7) wieder durch die Punkte 1 bis 8 zwei Flächen 2. Ordnung  $B, C$ , und nehmen die folgende Anordnung zu Grunde. Die Ebene 1 2 3 möge von der Ebene 4 5 6 wieder in der Geraden  $x$ , von der Ebene 6 7 8 aber in der Geraden  $y$  geschnitten werden; alsdann ist die



Verbindungsgerade  $z$  des Punktes  $O = (x, y)$  mit 6 die Schnittgerade der Ebenen 4 5 6, 6 7 8. Die Fläche  $B$  soll die Gerade  $g_1 = 1\ 2$  enthalten, wodurch sie vollständig bestimmt ist. Sie schneide die Ebene  $yz$  im Kegelschnitte  $b$ , die Ebene  $xz$  im Kegelschnitte  $b_0$ , und es soll sich in erster Reihe um diese Kegelschnitte handeln, die wir zunächst punktweise festlegen wollen. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von  $g_1$  mit  $x$  durch  $X_1$ , mit  $y$  durch  $Y_1$ . Irgend ein Kegelschnitt  $(b_0)$  durch  $X_1, 4, 5, 6$  schneidet  $z$  außer in 6 im Punkte  $(Z)$  und  $x$  außer in  $X_1$  im Punkte  $(X)$ ; der Kegelschnitt  $(b)$  durch  $(Z), 6, 7, 8, Y_1$  treffe  $y$  noch im Punkte  $(Y)$ . Verändert sich  $(b_0)$  in dem durch seine Grundpunkte  $X_1, 4, 5, 6$  festgelegten Kegelschnittbüschel, so beschreiben  $(X)$  und  $(Z)$  zwei projektive Punktreihen.

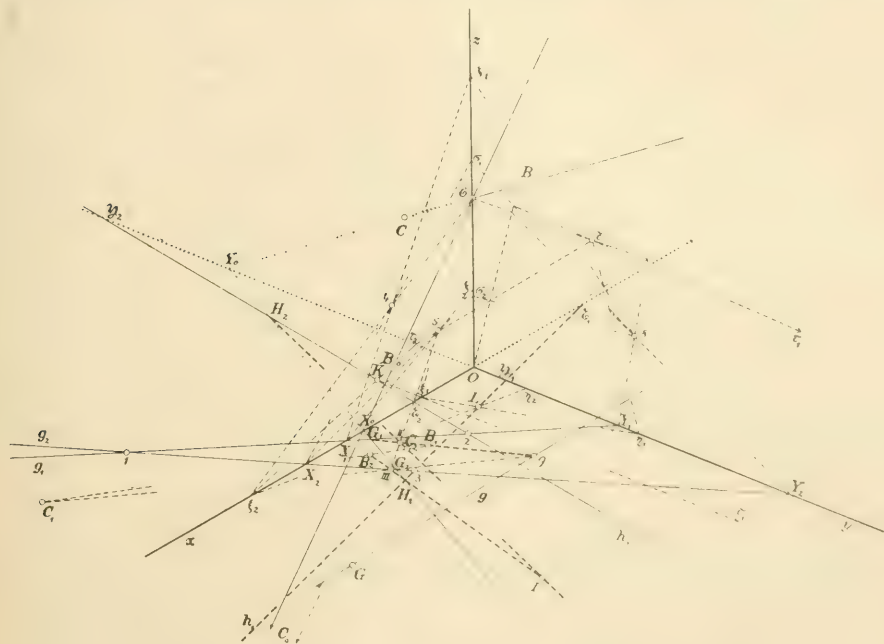


Fig. 7.

Es verändert sich dann  $(b)$  in dem durch die Grundpunkte 6, 7, 8,  $Y_1$  festgelegten Kegelschnittbüschel und es beschreiben  $(Z)$  und  $(Y)$  gleichfalls zwei projektive Punktreihen. Somit sind die Reihen der Punkte  $(X)$  und  $(Y)$  auch projektiv; da der Punkt  $O$  in ihnen sich selbst entspricht, was wir wieder erkennen, wenn wir den Punkt  $(Z)$  in  $O$  annehmen, so sind sie überdies perspektiv und es werden sich die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte  $(X)$  und  $(Y)$  in einem Punkte  $L$  schneiden

Um also den Punkt  $L$  zu bestimmen, nehmen wir in dem Büschel der Kegelschnitte  $(b_0)$  zwei Geradenpaare an, etwa 6 5,  $X_1$  4 und 6 4,  $X_1$  5. Trifft dann  $X_1$  4 die Gerade  $z$  im Punkte  $\xi_1$ , so ermitteln wir den Schnitt-

punkt  $\eta_1$  von  $y$  mit dem durch die Punkte  $\xi_1, 6, 7, 8, Y_1$  festgelegten Kegelschnitte, etwa mit Hilfe des Pascalsechsecks  $7\ 6\ \xi_1\ 8\ Y_1\ \eta_1$ . Bezeichnen wir mit  $\xi_1$  den Schnitt von  $6\ 5$  mit  $x$ , so ist  $\xi_1\ \eta_1$  eine solche Gerade, welche durch  $L$  geht. Analog schneiden wir  $X_1\ 5$  mit  $z$  im Punkte  $\xi_2$  und  $4\ 6$  mit  $x$  im Punkte  $\xi_2$  und ermitteln mit Hilfe des Pascalsechsecks  $7\ 6\ \xi_2\ 8\ Y_1\ \eta_2$  den zweiten Schnittpunkt  $\eta_2$  von  $y$  mit dem durch  $7, 6, \xi_2, 8$  und  $Y_1$  gehenden Kegelschnitte. Die Gerade  $\xi_2\ \eta_2$  geht gleichfalls durch  $L$ , so daß dieser Punkt sich als Schnitt von  $\xi_1\ \eta_1$  mit  $\xi_2\ \eta_2$  ergibt. Ziehen wir nun die Gerade  $h_1 = L\ 3$ , welche  $x$  in  $\mathfrak{X}_1$ ,  $y$  in  $\mathfrak{Y}_1$  schneiden möge. Die Kegelschnitte  $b_0$  durch die Punkte  $X_1, \mathfrak{X}_1, 4, 5, 6$  und  $b$  durch die Punkte  $Y_1, \mathfrak{Y}_1, 6, 7, 8$  schneiden sich also außer  $6$  noch in einem Punkte auf  $z$  und gehören der Fläche  $B$  an, welche auch die Geraden  $g_1, h_1$  enthält.

Die Fläche  $C$  wählen wir so, daß sie die Gerade  $g_2 = 13$  enthält, wodurch sie gleichfalls vollkommen bestimmt ist. Hier verfahren wir ganz analog wie bei der Konstruktion der Fläche  $B$ . Sind  $X_2, Y_2$  die Schnitte von  $g_2$  mit  $x$  und  $y$ , so heben wir wieder etwa die Geradenpaare  $6\ 5, X_2\ 4$  und  $6\ 4, X_2\ 5$  hervor und bezeichnen mit  $\sigma_1, \sigma_2$  die Schnittpunkte von  $X_2\ 4$  und  $X_2\ 5$  mit  $z$ . Ferner konstruieren wir mit Hilfe der Pascalsechsecke  $7\ 6\ \sigma_1\ 8\ Y_2\ \tau_1, 7\ 6\ \sigma_2\ 8\ Y_2\ \tau_2$  die neuen Schnittpunkte  $\tau_1, \tau_2$  der durch  $\sigma_1, 6, 7, 8, Y_2$  resp.  $\sigma_2, 6, 7, 8, Y_2$  festgelegten Kegelschnitte mit  $y$  und bringen die Geraden  $\tau_1\ \xi_1, \tau_2\ \xi_2$  im Punkte  $K$  zum Schnitt, hierauf verbinden wir  $K$  mit  $2$  durch die Gerade  $h_2$ , welche wir mit  $x$  und  $y$  in den Punkten  $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2$  zum Schnitte bringen. Die Fläche  $C$  enthält die Geraden  $g_2, h_2$ , den Kegelschnitt  $c$ , welcher durch die Punkte  $Y_2, \mathfrak{Y}_2, 6, 7, 8$  und den Kegelschnitt  $c_0$ , welcher durch die Punkte  $X_2, \mathfrak{X}_2, 4, 5, 6$  geht.

Unsere Konstruktionen von  $B$  und  $C$  haben somit im ganzen die Darstellung von vier Pascalsechsecken verlangt, die jedoch durch ihre besondere Lage gegeneinander das Ziehen von nur wenigen Geraden erforderten.

12. Haben wir die Flächen  $B$  und  $C$  in dieser Weise bestimmt, so legen wir (Fig. 7.) die Ebene ( $g\ 6$ ), welche die Geraden  $x$  und  $y$  in den Punkten  $X_0, Y_0$  schneiden möge. Nun konstruieren wir die Schnittpunkte  $B, C$  der Kegelschnitte  $b$  und  $c$  mit der Geraden  $6\ Y_0$ , etwa mit Hilfe der Pascalsechsecke  $6\ 7\ 8\ Y_1\ \mathfrak{Y}_1\ B$  und  $6\ 7\ 8\ Y_2\ \mathfrak{Y}_2\ C$ , weiter die Schnittpunkte  $B_0, C_0$  dieser Kegelschnitte mit der Geraden  $6\ X_0$  etwa mit Hilfe der Pascalsechsecke  $6\ 4\ 5\ X_1\ \mathfrak{X}_1\ B_0, 6\ 4\ 5\ X_2\ \mathfrak{X}_2\ C_0$  und bezeichnen mit  $G_1, H_1, G_2, H_2$  die Schnittpunkte der Geraden  $X_0\ Y_0$  beziehentlich mit den Geraden  $g_1, h_1, g_2, h_2$ .

Die Ebene ( $g\ 6$ ) schneidet die Fläche  $B$  in dem durch die Punkte  $6, B, B_0, G_1, H_1$  bestimmten Kegelschnitte  $r_1$  und die Fläche  $C$  in dem durch die Punkte  $6, C, C_0, G_2, H_2$  bestimmten Kegelschnitte  $r_2$ . Aus den Kegelschnitten  $r_1, r_2$  erhalten wir nach Früherem den Kegelschnitt  $r$ , in welchem die fragliche Fläche  $A$  von ( $g\ 6$ ) geschnitten wird, etwa so, daß

wir den zweiten Schnittpunkt  $B_1$  der Geraden  $G_1 9$  mit  $r_1$  mit Hilfe des Pascalsechsecks  $G_1 H_1 B 6 B_0 B_1$  und den zweiten Schnittpunkt  $C_1$  der Geraden  $G_2 9$  mit  $r_2$  mit Hilfe des Pascalsechsecks  $G_2 H_2 C 6 C_0 C_1$  ermitteln, worauf wir die weiteren Schnittpunkte  $B_2, C_2$  der Kegelschnitte  $r_1, r_2$  mit der Geraden  $B_1 C_1$  suchen, was mit Hilfe der Pascalsechsecke  $6 B H_1 G_1 B_1 B_2, 6 C H_2 G_2 C_1 C_2$  leicht geschehen kann. Es schneiden sich dann die Geraden  $H_1 B_2, H_2 C_2$  im Punkte  $I$ , die Geraden  $G_1 9, H_2 C_2$  im Punkte  $II$  und  $G_2 9, H_1 B_2$  im Punkte  $III$  von  $r$ , wodurch dieser Kegelschnitt, der ja noch die Punkte 9 und 6 enthält, festgelegt ist, und es kann nun der Schnittpunkt  $G$  desselben mit  $g$  nach dem Pascalsatze, etwa mit Hilfe des Sechsecks  $9 III I III 6 G$  gefunden werden.

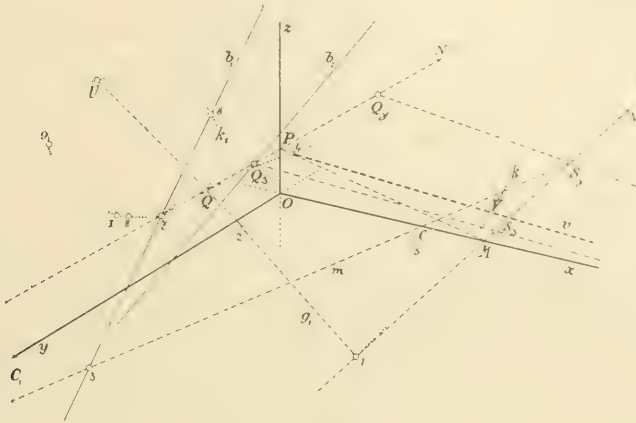


Fig. 8.

Die Konstruktion des Punktes  $G$  erfolgt also durch die Darstellung von dreizehn, zum Teil in besonderer gegenseitiger Lage befindlichen Pascalsechsecken.

Es muß nicht bemerkt werden, wie man einzelne von ihnen modifizieren könnte, ohne die Konstruktion umständlicher zu gestalten.

13. Ist die Fläche 2. Ordnung  $A$  durch die 9 Punkte 1 bis 9 gegeben und soll sie linear durch zwei korrelative Bündel erzeugt werden, so können wir (Fig. 8) wie folgt verfahren. Wir stellen zuerst den Kegelschnitt  $k_1$  in der früher auseinandergesetzten Weise durch 7, 8, 9 und zwei weitere Punkte dar, legen durch einen von ihnen und durch je einen der Punkte 1, 2, 3 und 4, 5, 6 eine Ebene, etwa die Ebene 1 4 7 und stellen ihre Schnittgeraden mit den Ebenen 1 2 5, 4 5 6, 7 8 9 dar. Diese Ebene schneide  $x, y, z$  beziehungsweise in den Punkten  $M, N, P$ . Durch vorteilhaft angeordnete Pascalsechsecke konstruieren wir dann die von 7 verschiedenen Schnittpunkte  $Q_\gamma, Q$  der Geraden  $NP$  mit  $c$  und  $k_1$ , sowie den von 1 verschiedenen Schnittpunkt  $S_\beta$  von  $NM$  mit dem Kegelschnitt, welcher durch die Punkte 1, 2, 3,  $(b_1, y), (b_2, y)$  geht; ferner sei  $Q_\beta$  der Schnitt

von  $NP$  mit  $b_2$  und  $S_\gamma$  der Schnitt von  $NM$  mit der Geraden, die wir früher mit  $m$  bezeichnet haben.

Unsere Ebene  $147$  schneidet die Flächen  $B, C$  in den durch die Punkte  $1, 4, 7, Q_\beta, S_\beta$  beziehungsweise  $1, 4, 7, Q_\gamma, S_\gamma$  festgelegten Kegelschnitten  $b^*, c^*$  und die gesuchte Fläche  $A$  in einem Kegelschnitte  $k$ , welcher durch  $Q$  geht und dem durch  $b^*$  und  $c^*$  festgelegten Büschel angehört. Dieser Büschel hat die Punkte  $1, 4, 7$  zu Grundpunkten. Verbinden wir den Schnittpunkt der Geraden  $Q_\beta S_\beta, Q_\gamma S_\gamma$  mit dem Punkte  $4$  durch eine Gerade  $v$ ; diese geht nach dem auch zuvor angewendeten Satze von Ch. Sturm durch den vierten Grundpunkt  $V$  des Büschels; wir ermitteln ihn etwa mit Hilfe des Pascalsechsecks  $47Q_\beta S_\beta 1V$ . Hiemit ist  $k$  durch die Punkte  $1, 4, 7, Q, V$  bestimmt.

Wählen wir den Punkt  $7$  als Mittelpunkt eines Strahlenbündels  $\Gamma_1$  und  $2$  als Mittelpunkt eines zu ihm korrelativen Ebenenbündels  $\Gamma_2$ . Dem Strahle  $7Q$  ordnen wir in  $\Gamma_2$  eine durch  $Q$  gehende Ebene, etwa  $21Q$  zu; diese schneidet  $k_1$  in einem Punkte  $U$  auf der Geraden, welche den Schnitt  $\bar{Y}_2$  der Geraden  $12, \gamma$  mit  $Q$  verbindet; diesen Punkt erhält man mit Hilfe eines Pascalsechsecks, für das wir die in  $k_1$  bereits gezogenen geeigneten Geraden mitbenützen.

Die Korrelation zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  ist hergestellt, wenn man den Strahlen, welche  $7$  mit zwei der festgelegten Punkte auf  $k_1$  verbinden, die nach diesen Punkten durch die Gerade  $2U$  gehenden Ebenen und den Strahlen  $74, 7V$  die Ebenen  $214, 21V$  zuordnet. Denn dann ist dem Strahle  $7Q$  von  $\Gamma_1$  die Ebene  $Q2U1$  von  $\Gamma_2$  zugeordnet und die Bündel  $\Gamma_1, \Gamma_2$  erzeugen eine Fläche  $2$ . Ordnung, welche durch  $k_1, k$  und  $2$  geht, also die gesuchte Fläche  $A$  ist, weil ja der in der Ebene von  $k_1$  liegende Strahlenbüschel um den Punkt  $7$  mit dem ihm korrelativen Ebenenbüschel durch  $2U$  den Kegelschnitt  $k_1$  und der in der Ebene von  $k$  liegende Strahlenbüschel um  $7$  mit dem ihm korrelativen Ebenenbüschel um  $21$  den Kegelschnitt  $k$  erzeugt.

Die Konstruktion von  $k_1$  wurde durch 8 Pascalsechsecke erzielt und zur Festlegung von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  haben wir dann die Punkte  $Q, Q_\gamma, S_\beta, V$  und  $U$  mit Hilfe je eines solchen Sechsecks ermittelt. Daraus ergibt sich insgesamt die Anzahl 13 von vermittelnden Sechsecken, welche jedoch untereinander gemeinschaftliche Ecken aufweisen, was zur Vereinfachung der Konstruktion nicht unwesentlich beiträgt.

Zur konstruktiven Vervollständigung der Bündel  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  empfiehlt sich hier ihre Schnittbildung etwa mit der Ebene  $456$ , in der wir so zwei korrelative Felder erhalten, mit denen wir dann weiter operieren können.

Es ist klar, daß wir von den 9 gegebenen Punkten der Fläche jeden beliebigen als den Punkt  $7$  und irgend einen zweiten als den Punkt  $2$  annehmen können.



# Zur Konstruktion von Kegelschnitten aus imaginären Punkten.

Von  
J. SOBOTKA.

Vorgelegt am 13. Oktober 1916.

1. Im Anschluß an Art. 8 der vorangehenden Arbeit<sup>1)</sup> wollen wir hier einige Bemerkungen bezüglich der Konstruktion von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Punkten beifügen. Dort haben wir erkannt, wie ein Kegelschnitt  $r$  punktweise konstruiert werden kann, wenn er durch einen reellen Punkt  $R$  und durch die vier Schnittpunkte von zwei gegebenen reellen Kegelschnitten  $b, c$  gehen soll, auch dann, wenn zwei von diesen Schnittpunkten oder alle vier imaginär sind, oder allgemeiner gesagt, wenn die Schnittpunkte von  $b$  und  $c$  nicht bekannt sind oder zur Konstruktion nicht verwendet werden können.

Zerfällt  $b$  in ein Geradenpaar  $b_1 b_2$ , dann vereinfacht sich die Konstruktion insofern, als wir irgend zwei gegebene Punkte auf  $c$  etwa als die dort mit  $C_1$  und  $C_3$  bezeichneten Punkte annehmen können und den Schnitt von  $C_1 C_3$  mit  $b_1$  etwa als  $B_1$ , mit  $b_2$  dann als  $B_3$  wählen; alsdann hat man, um für  $r$  außer  $R$  noch vier weitere reelle Punkte zu erhalten, für den Kegelschnitt  $c$  nur drei besondere Pascalsechsecke zu ermitteln, etwa diejenigen, welche die Punkte  $C_2, C_4, C_5$  liefern.

Hat man hier den Schnittpunkt  $G$  einer durch  $R$  gezogenen Geraden  $g$  mit  $r$  zu ermitteln, so verbinden wir, dieser Konstruktion zufolge, irgend einen Punkt  $C_1$  von  $c$  mit  $R$  und mit dem Schnittpunkt  $B_1$  der Geraden  $g$  und  $b_1$ , ermitteln nach dem Satze von Pascal die Schnitte  $C_2, C_3$  dieser Verbindungsgeraden mit  $c$  und schließlich den Schnitt  $C_4$  von  $c$  mit der Geraden, welche  $C_2$  mit dem Punkte  $B_2 = (g \cdot b_2)$  verbindet; alsdann schneidet die Gerade  $C_3 C_4$  auf  $g$  den gesuchten Punkt  $G$  ein.

2. Übertragen wir diese Konstruktionen auf den Fall, wenn der

---

<sup>1)</sup> Zur Konstruktion einer Fläche 2. Ordnung aus neun Punkten.

Kegelschnitt  $\gamma$  durch einen reellen Punkt  $R$  und zweimal zwei konjugiert imaginäre Punkte  $A_1, A_2$  beziehungsweise  $B_1, B_2$  gegeben ist.

Die Punkte  $A_1 A_2$  seien (Fig. 1) als die Doppelpunkte einer Punktinvolution  $J_a$  auf dem Träger  $a$  und die Punkte  $B_1 B_2$  als die Doppelpunkte einer Punktinvolution  $J_b$  auf dem Träger  $b$  gegeben.

Es sei  $P_1$  der in  $J_a$  und  $P_2$  der in  $J_b$  dem gemeinsamen Punkte  $P$  von  $a, b$  entsprechende Punkt, weiter sei  $A' A''$  irgend ein Paar von  $J_a$  und  $B' B''$  irgend ein Paar von  $J_b$ , und es werde  $P_1 P_2$  von  $A' B'$  in  $D$ , von  $A'' B''$  in  $E$  geschnitten. Schneiden sich die Geraden  $A' B', A'' B''$  selbst im Punkte  $F$ , so schneidet bekanntlich der dem Dreiecke  $DEF$  umgeschriebene Kegelschnitt  $c$ , welcher die Geraden  $PD$  und  $PE$  berührt, die Träger  $a$  und  $b$  in den Punktepaaren  $A_1 A_2, B_1 B_2$ . Der gesuchte Kegelschnitt  $\gamma$  geht also durch  $R$  und durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte  $(a b)$

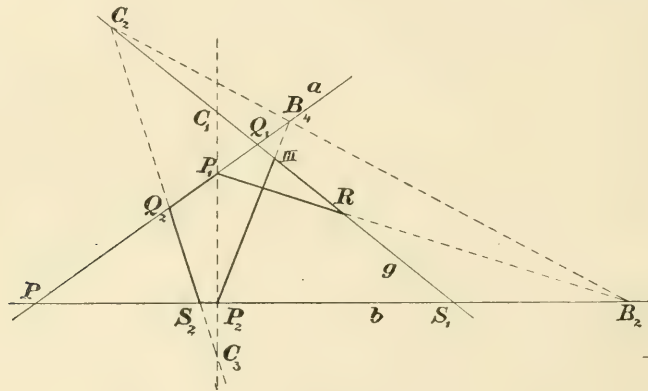


Fig. 1.

und  $c$ . Hiedurch ist die weitere Konstruktion auf den vorigen Fall zurückgeführt.

Es möge hier nur die Konstruktion des zweiten Schnittpunktes  $III$  irgend einer durch  $R$  gezogenen Geraden  $g$  mit  $\gamma$  durchgeführt werden, da sie zu einem bekannten Ergebnis führt.

Wir heben zu dem Zwecke wieder zunächst die Punkte  $P_1, P_2$  hervor; die Gerade  $g$  möge  $a$  in  $Q_1$ ,  $b$  in  $S_1$  treffen. Der mit  $Q_1$  in  $J_a$  ein Paar bildende Punkt werde mit  $Q_2$  und der zu  $S_1$  in  $J_b$  gehörige Punkt mit  $S_2$  bezeichnet. Die Geraden  $Q_1 S_1, Q_2 S_2$  mögen sich in  $C_2$  und die Gerade  $P_1 P_2$  in den Punkten  $C_1, C_3$  schneiden. Der dem Dreiecke  $C_1 C_2 C_3$  umgeschriebene Kegelschnitt  $c_0$ , welcher  $P C_1, P C_3$  zu Tangenten hat, bestimmt wie zuvor mit dem Geradenpaar  $a b$  einen Kegelschnittbüschel, dem der fragliche Kegelschnitt  $\gamma$  gleichfalls angehört. Durch  $R$  geht die Gerade  $g$ , welche  $c_0$  in  $C_1, C_2$  schneidet, und weiter ziehen wir die Gerade  $R P_1$ , welche  $b$  in  $B_2$  treffen möge, während der früher mit  $B_1$  bezeichnete Punkt mit  $P_1$  zusammenfällt.

Dann fällt  $B_3$  mit  $P_2$  zusammen und  $B_4$  ist der Schnitt von  $B_2C_2$  mit  $a$ . Die Gerade  $B_3B_4 = P_2B_4$  schneidet also  $RC_1$  in dem gesuchten Punkte  $III$ . Nun sehen wir, daß  $RP_1Q_2S_2P_2III$  ein Pascalsechseck ist, welches die Gerade  $B_2C_2B_4$  zur Pascalgeraden hat.

Daraus folgt, daß der Punkt  $III$  der von  $R$  verschiedene Schnittpunkt der Geraden  $g$  mit dem durch die Punkte  $R, P_1, P_2, Q_2, S_2$  gelegten Kegelschnitte ist.

3. Schließlich sei (Fig. 2) der Kegelschnitt  $r$  durch drei reelle Punkte  $A, B, R$  und zwei konjugiert imaginäre Punkte  $H_1, H_2$  auf dem Träger  $h$  als Doppelpunkte einer elliptischen Involution  $J$  gegeben; man soll den von  $R$  verschiedenen Punkt  $III$  irgend einer durch  $R$  gehenden Geraden  $g$  mit  $r$  konstruieren.

Dem Schnittpunkte  $P_1$  von  $h$  mit  $AB$  möge in der Involution  $J$  der Punkt  $P_2$  und dem Schnittpunkte  $Q_1$  mit  $g$  der Punkt  $Q_2$  entsprechen.

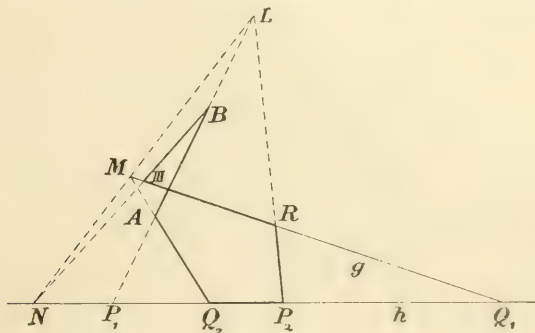


Fig. 2.

Wir wissen, daß, wenn wir die Punkte  $A, R$  mit den Punkten der Paare in  $J$  durch Geraden verbinden, die Wechselschnitte dieser Verbindungsgeraden einen Kegelschnitt  $c$  erzeugen, welcher durch  $A, R, H_1$  und  $H_2$  geht. Es bilden somit  $c, r$  mit dem Geradenpaar  $AR, h$  einen Kegelschnittbüschel. Schneiden wir nun diese Büschel durch das Geradenpaar  $AB, g$ . Die Gerade  $AB$  trifft  $c$  im Punkte  $L$ , der sich als Schnitt von  $AB = P_1A$  mit  $RP_2$  ergibt und  $g$  trifft  $c$  noch im Punkte  $M$  als Schnitt von  $AQ_2$  mit  $RQ_1$ . Dieselben Geraden  $AB$  und  $g$  schneiden  $r$  in den Punkten  $B$  und  $III$ ; folglich müssen sich die Geraden  $LM$  und  $BIII$  in einem Punkte  $N$  auf  $h$  schneiden.

Wenn man also  $LM$  mit  $h$  in  $N$  schneidet, so trifft  $NB$  die Gerade  $g$  in  $III$ . Die Konstruktion lehrt, daß das Sechseck  $BAQ_2P_2RIII$  ein Pascalsechseck ist mit der Pascalgeraden  $LMN$ . Daraus folgt, daß  $III$  der von  $R$  verschiedene Schnittpunkt der Geraden  $g$  mit dem durch die Punkte  $A, B, R, P_2, Q_2$  festgelegten Kegelschnitte ist.

4. Wenn einer von den Kegelschnitten  $b, c$  geometrisch imaginär ist oder wenn es beide sind, dann versagen unsere Konstruktionen. Es

würde sich also um solche Konstruktionen handeln, welche allgemeiner sind und auch in den soeben erwähnten Fällen zum Ziele führen. Ich habe mich mit diesem Gegenstande in meinen Vorlesungen im Jahre 1909 eingehender beschäftigt und komme nun in etwas anderer Fassung darauf zurück. Zunächst führen wir den dort benützten Zusammenhang von drei Paaren einer Involution an. Es seien (Fig. 3) also  $A_1 A_2, B_1 B_2, P_1 P_2$  drei Paare einer Involution auf irgend einem Kegelschnitt  $k$ , wobei wir annehmen, daß wenigstens das Paar  $P_1 P_2$  reell ist. Ferner seien  $P$  und  $p$  Pol und Achse dieser Involution;  $\alpha, \beta, \pi$  seien die auf  $p$  liegenden Pole der Geraden  $A_1 A_2, B_1 B_2, P_1 P_2$  in bezug auf  $k$ . Die Gerade  $P_1 \alpha$  schneide  $k$  noch im Punkte  $P_\alpha$  und die Gerade  $P_\alpha \beta$  schneide  $k$  noch in  $A$ . Analog werde der Kegelschnitt  $k$  von der Geraden  $P_1 \beta$  noch im Punkte  $P_\beta$  und von  $P_\beta \alpha$  im Punkte  $B$  geschnitten. Bezeichnen wir den zu  $P_1$  auf  $k$  unendlich

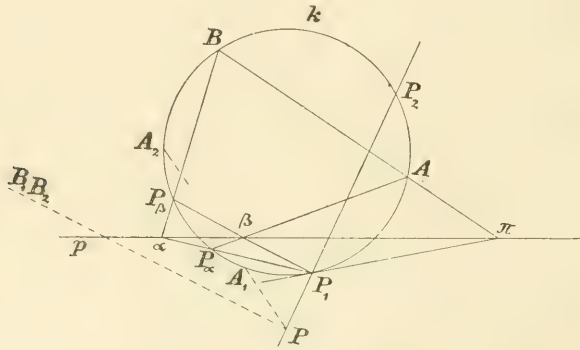


Fig. 3.

benachbarten Punkt mit  $P_1'$ , so hat das Pascalsechseck  $P_1 P_\alpha A B P_\beta P_1'$  die Achse  $p$  zur Pascalgeraden, folglich geht die Gerade  $AB$  durch den Punkt  $\pi$ .

Der Punkt  $P_\alpha$  ist nun harmonisch zu  $P_1$  in bezug auf  $A_1 A_2$  und der Punkt  $A$  ist wieder harmonisch zu  $P_\alpha$  in bezug auf  $B_1 B_2$ . Umgekehrt ist  $P_\beta$  harmonisch zu  $P_1$  in bezug auf  $B_1 B_2$  und  $B$  harmonisch zu  $P_\beta$  in bezug auf  $A_1 A_2$ , schließlich ist das Paar  $AB$  harmonisch zu  $P_1 P_2$ . Hat man also die Punkte  $A$  und  $B$  in der angegebenen Weise ermittelt, so kann man den zu  $P_1$  in der Involution gehörigen Punkt  $P_2$  als den zu  $P_1$  in bezug auf das Punktepaar  $AB$  harmonischen Punkt konstruieren.

Diese Beziehung verknüpft also drei Paare einer jeden quadratischen Involution.

Ist also (Fig. 4) ein Kegelschnitt  $r$  durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte  $a, b$  und durch irgend einen Punkt  $P_1$  gegeben und soll man den von  $P_1$  verschiedenen Schnittpunkt  $P_2$  irgend einer durch  $P_1$  gezogenen Geraden  $q$  mit  $r$  ermitteln, so suchen wir die Polaren  $\bar{a}, \bar{b}$  von  $P_1$  in bezug auf die Kegelschnitte  $a$  resp.  $b$ . Diese Polaren mögen  $q$  in den Punkten



$P_\alpha, P_\beta$  treffen. Weiter suchen wir die Polare von  $P_\alpha$  in bezug auf  $b$  und von  $P_\beta$  in bezug auf  $a$ ; schneidet die erste von ihnen  $q$  in  $A$ , die zweite in  $B$ , so erhält man schließlich  $P_2$  als den zu  $P_1$  in bezug auf das Paar  $A B$  harmonischen Punkt.

Denn schneidet  $q$  den Kegelschnitt  $a$  in den Punkten  $A_1 A_2$ , den Kegelschnitt  $b$  in den Punkten  $B_1 B_2$ , so ist  $P_\alpha$  zu  $P_1$  harmonisch in bezug auf

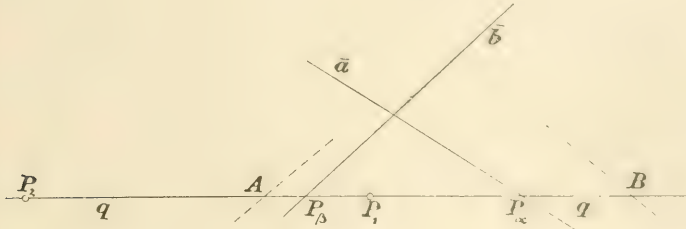


Fig. 4.

$A_1 A_2$  und  $A$  ist zu  $P_\alpha$  harmonisch in bezug auf  $B_1 B_2$ ; ebenso ist  $P_\beta$  zu  $P_1$  harmonisch in bezug auf  $B_1 B_2$  und  $B$  zu  $P_\beta$  in bezug auf  $A_1 A_2$ . Daraus folgt, daß der zu  $P_1$  in bezug auf das Paar  $A B$  harmonische Punkt  $P_2$  mit  $P_1$  ein Paar der durch  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  festgelegten Involution bildet, also gehört er dem Kegelschnitte  $r$  an

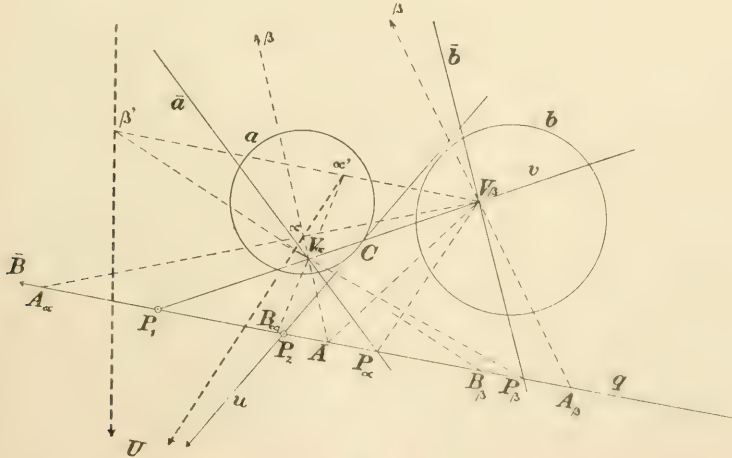


Fig. 5.

Wir sehen, daß die Konstruktion immer durchführbar, also unabhängig davon ist, ob  $A_1 A_2, B_1 B_2$  reell sind oder nicht und sogar auch unabhängig davon, ob  $a$  oder  $b$  geometrisch reell sind oder nicht und bemerken, daß sie linear ist.

5. Zu einem etwas allgemeineren Ergebnis führt die folgende Betrachtung. Wir wählen (Fig. 5) wieder die Kegelschnitte  $a, b$ , den Punkt  $P_1$  und die durch ihn gehende Gerade  $q$  beliebig. Irgend eine andere in der

Ebene durch  $P_1$  gezogene Gerade  $v$  schneide die Polaren  $\bar{a}, \bar{b}$  von  $P_1$  in bezug auf  $a$  und  $b$  in den Punkten  $V_\alpha, V_\beta$ . Projizieren wir die Involution der auf  $q$  liegenden zu  $a$  konjugierten Punkte von  $V_\alpha$  und  $V_\beta$  aus, so erzeugen die Wechselschnitte der Verbindungsgeraden einen Kegelschnitt  $a_1$ , welcher  $q$  in denselben zwei Punkten schneidet wie  $a$ . Desgleichen erzeugen die Wechselschnitte der Verbindungsgeraden von  $V_\alpha, V_\beta$  mit den auf  $q$  liegenden zu  $b$  konjugierten Punkten einen Kegelschnitt  $b_1$ , welcher  $q$  in denselben Punkten schneidet wie  $b$ . Sind wieder  $P_\alpha, P_\beta$  die Schnitte von  $q$  mit  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$ , so sind  $\bar{a}$  und  $P_\alpha V_\beta$  die Tangenten von  $a_1$  in den Punkten  $V_\alpha$  und  $V_\beta$  und ebenso sind  $\bar{b}$  und  $P_\beta V_\alpha$  die Tangenten von  $b_1$  in den Punkten  $V_\beta$  und  $V_\alpha$ .

Der durch  $a_1$  und  $b_1$  festgelegte Kegelschnittbüschel schneidet  $q$  in derselben Involution wie der Kegelschnittbüschel, welcher durch  $a$  und  $b$  festgelegt ist, weil ja  $a$  und  $a_1$  und ebenso  $b$  und  $b_1$  die Gerade  $q$  je in demselben Punktepaar schneiden. Die durch  $P_1$  gehende Gerade  $v$  verbindet zwei Grundpunkte des Büschels ( $a_1 b_1$ ); daraus folgt, daß die Gerade  $u$ , welche die übrigen zwei Grundpunkte desselben verbindet, die Gerade  $q$  in dem Punkte  $P_2$  schneiden wird, welcher mit  $P_1$  ein Paar der erwähnten Involution bildet, also dem Kegelschnitt  $r$  angehört.

Die Konstruktion von  $u$ , also auch von  $P_2$ , kann demnach allgemein, wie folgt, gegeben werden.

$P_\alpha$  ist der Pol von  $V_\alpha V_\beta$  in bezug auf  $a_1$  und  $P_\beta$  in bezug auf  $b_1$ ; folglich ist  $q$  eine Seite des gemeinsamen Polardreiecks von  $a_1$  und  $b_1$  und deshalb ist der zu  $P_1$  in bezug auf  $V_\alpha V_\beta$  harmonische Punkt  $C$  eine Ecke desselben. Die Gerade  $u$  geht durch diese Ecke.

Ist auf  $q$  irgend einem Punkte  $\bar{A}$  in bezug auf  $a_1$ , also auch  $a$ , der Punkt  $A_\alpha$ , in bezug auf  $b_1$ , und also auch  $b$ , der Punkt  $A_\beta$  konjugiert und einem anderen Punkte  $\bar{B}$  ebenso die Punkte  $B_\alpha, B_\beta$ , so schneiden die Geraden  $V_\beta A_\alpha, V_\beta A_\beta$  die Gerade  $V_\alpha \bar{A}$  in den Punkten  $\alpha, \beta$ , von denen der erste dem Kegelschnitte  $a_1$ , der zweite dem Kegelschnitte  $b_1$  angehört. Analog schneiden die Geraden  $V_\alpha B_\alpha, V_\alpha B_\beta$  die Gerade  $V_\beta \bar{B}$  in den Punkten  $\alpha', \beta'$  von  $a_1$  beziehungsweise  $b_1$ . Nach dem bekannten Satze von Ch. Sturm schneiden sich die Geraden  $\alpha \alpha', \beta \beta'$  in einem Punkte  $U$  auf  $u$ , so daß  $u = UC$  die Gerade  $q$  in dem gesuchten Punkte  $P_2$  trifft.

Nehmen wir insbesondere  $\bar{A}$  in  $P_\alpha$  an, so fällt  $A_\alpha$  mit  $P_1$  zusammen, und der zu  $P_\alpha$  in bezug auf  $b$  konjugierte Punkt auf  $q$  heiße  $A$ ; nehmen wir zugleich  $\bar{B}$  in  $P_\beta$  an, der zu  $P_\beta$  in bezug auf  $a$  konjugierte Punkt heiße  $B$ , während der Punkt  $B_\alpha$  jetzt mit  $P_1$  zusammenfällt. Alsdann ist  $\alpha \equiv V_\alpha$  und  $\beta = (V_\beta A \cdot \bar{a})$ ; analog  $\alpha' = (V_\alpha B \cdot \bar{b})$  und  $\beta' \equiv V_\beta$ . Somit ist  $U = (B V_\alpha \cdot A V_\beta)$ . Da die Punkte  $C$  und  $P_1$  zu  $V_\alpha, V_\beta$  harmonisch liegen und die Gerade  $u$  die Punkte  $U, C$  verbindet, so gelangt man zu dem früher abgeleiteten Ergebnis, daß  $P_2$  harmonisch zu  $P_1$  in bezug auf  $A B$  ist.

Sollten wir nun  $r$  hinreichend bestimmen, so könnten wir nach diesem Prinzip seinen auf  $v$  liegenden, von  $P_1$  verschiedenen Punkt  $Q$  leicht ermitteln; die Tangente von  $r$  in  $P_1$  geht nach dem Punkte  $\bar{a} \cdot \bar{b}$  und ebenso erhalten wir die Tangente in  $Q$ , die nach dem Schnittpunkte der Polaren von  $Q$  in bezug auf  $a$  und  $b$  geht.

6. Insbesondere wollen wir noch die folgende Aufgabe lösen. „In der Ebene sind zweimal zwei konjugiert imaginäre Geraden  $u, v$  und  $s, t$  durch zwei elliptische Strahleninvolutionen  $J_1, J_2$  und außerdem ein Punkt  $P_1$  gegeben; man soll durch  $P_1$  und durch die Punkte  $u \cdot s, u \cdot t, v \cdot s, v \cdot t$  den Kegelschnitt  $r$  legen.“

Wir wissen, daß die Gerade  $g$ , welche  $u \cdot s$  mit  $v \cdot t$  verbindet, reell ist, ebenso wie die Gerade  $h$ , welche  $u \cdot t$  mit  $v \cdot s$  verbindet; durch die Konstruktion dieser Geraden wird unsere Aufgabe auf den Fall zurückgeführt, in welchem der Kegelschnitt  $r$  durch zweimal zwei konjugiert imaginäre Punkte  $G_1, G_2, H_1, H_2$  auf  $g$  resp.  $h$  und durch einen reellen Punkt gegeben ist. Diese Punkte sind die Schnittpunkte der Doppelstrahlen von  $J_1$  oder  $J_2$  mit  $g$  und  $h$ . Die Geraden  $g, h$  selbst gehen durch den Schnittpunkt der Strahlen  $j_1, j_2$ , welche dem gemeinschaftlichen Strahl  $j$  der Büschel von  $J_1$  und  $J_2$  in beiden Involutionen entsprechen. Ferner gehen sie durch die Schnittpunkte der Strahlenpaare  $m_1 m_2, n_1 n_2$ , von denen das erste zu  $J_1$  gehört und  $j_1 j$  harmonisch trennt, während das zweite zu  $J_2$  gehört und  $j_2 j$  harmonisch trennt.

Die Konstruktionen von  $m_1 m_2, n_1 n_2$  sind jedoch quadratisch, während unsere soeben erläuterte lineare Konstruktion, welche uns den zweiten auf irgend einer Geraden  $q$  durch  $P_1$  gehenden Schnittpunkt  $P_2$  mit  $r$  zu ermitteln lehrt, auch hier für unseren besonderen Fall unmittelbar angewendet werden kann, wobei zu bemerken ist, daß hier  $a \equiv (u v), b \equiv (s t)$ , und daß die Polare irgend eines Punktes  $L$  der Ebene in bezug auf das Geradenpaar  $u v$  oder  $s t$  derjenige Strahl in der Involution, für welche es die Doppelstrahlen darstellt, ist, welcher mit dem durch  $L$  gehenden Strahl derselben ein Paar bildet.

7. Kehren wir noch zur Konstruktion des Punktes  $P_2$  im allgemeinen Falle mit Zuziehung der Kegelschnitte  $a_1$  und  $b_1$  zurück. Die Involutionen auf  $q$  der konjugierten Punktepaare in bezug auf  $a$  und  $b$  haben ein Elementenpaar  $E_1 E_2$  gemeinschaftlich. Folglich sind die Wechselschnitte  $F_1, F_2$  der Geraden, welche  $V_\alpha$  und  $V_\beta$  mit  $E_1$  und  $E_2$  verbinden, die weiteren zwei gemeinschaftlichen Punkte von  $a_1$  und  $b_1$ . Es trifft also  $u = (F_1 F_2)$  die Gerade  $q$  in dem gesuchten Punkte  $P_2$ . Hiemit sind wir zu der bekannten Konstruktion von  $P_2$  gelangt die jedoch quadratisch ist.

*Bemerkung.* In unseren linearen Konstruktionen des sechsten Punktes  $P_2$  von  $r$  zu den auf ihm gegebenen fünf Punkten wurde hier teils der Satz von Sturm, teils auch der Satz von Desargues bezüglich eines Kegelschnittbüschels herangezogen. Der Satz von Pascal für ein einem Kegelschnitte  $r$  eingeschriebenes Sechseck  $A B C D E F$  ist gleichfalls

eine Folge des Satzes von Sturm, was wir sofort erkennen, wenn wir etwa den durch die Geradenpaare  $AB.CD$ ,  $AF.DE$  festgelegten Kegelschnittbüschel mit dem Kegelschnitt  $\gamma$ , welcher durch die Grundpunkte  $A, D$  des Büschels geht, zum Schnitte bringen. Wir haben also denselben Ursprung der Konstruktionen, ob die gegebenen Punkte alle reell sind oder nicht. Der Satz von Sturm ist eine unmittelbare Folge des Satzes von Desargues. Es hängen also diese drei Sätze aufs innigste zusammen in der Weise, daß immer zwei von ihnen sich sofort aus dem dritten ergeben.

Dies scheint mir historisch deshalb von Interesse zu sein, weil Pascal unter Berufung auf Desargues den Satz tatsächlich in der hier angeführten Weise zum Ausdrucke bringt.

Ich berufe mich da auf die Fußnote in R. Mehmke: Vorlesungen über Punkt- und Vektorrechnung (Leipzig 1913) auf S. 183, worin diesbezüglich auf „Oeuvres de Blaise Pascal, t. 4, La Haye 1779, p. 3“ verwiesen wird.

---



# Über Spilite in Příbramer Algonkium.

(Résumé des böhmischen Textes.)

Von

FRANTIŠEK SLAVÍK.

Mit Subvention aus dem Barrande-Fond ausgeführte Arbeit.

(Mit 4 Textfiguren und 2 Tafeln.)

Vorgelegt am 18. Juni 1915.

Als *Spilitkomplex* oder *Spilitformation* bezeichnete ich vor einigen Jahren die diabatischen Gesteine algonkischen Alters, die in der sogen. Barrandeschen Étage B („Příbramer Schiefer“) zwischen Kladno und Klattau auftreten;<sup>1)</sup> später hat sie R. K e t t n e r<sup>2)</sup> auch in Algonkium des Moldaugebiets oberhalb und unterhalb Prags nachgewiesen und zum ersten Versuch einer stratigraphischen Einteilung des böhmischen Algonkiums überhaupt verwertet.

Im Frühling d. J. durchquerte ich gemeinsam mit meinem Freunde Dr. K e t t n e r das Algonkium und das benachbarte Kambrium von Mníšek und Dobříš über Příbram bis hinter Rožmitál; in dieser Arbeit teile ich die Resultate mit, soweit sie die spilitischen Eruptiva betreffen, während die Untersuchungen über den untersten, durch die massenhafte Anwesenheit der Spilite im klastischen Materiale charakterisierten Horizont des böhmischen Kambriums, die *Žitceer Konglomerate* P o š e p n ý's,<sup>3)</sup> in der Arbeit K e t t n e r's niedergelegt sind, die ich gleichzeitig mit der vorliegenden der Böhmisches Akademie vorlege.<sup>4)</sup>

1) S l a v í k, Spilitische Ergussgesteine im Praekambrium zwischen Kladno und Klattau, Archiv naturw. Durchf. Böhm. XIV. 2., 1908.

2) K e t t n e r, a) dies. Bulletin 1912; b) Věstník V. sjezdu českých přírodopytců a lékařů 1914, S. 317—8; c) Verh. geol. R.-A. Wien 1914, 178—189; d) Sborník České společnosti zeměvědné 1914, 196—200.

3) P o š e p n ý a) Über die Adinolen etc., Tscherm. Mitt. X (1888), 175—202; b) Beitr. z. Kenntn. d. mont.-geol. Verh. von Příbram, Archiv für prakt. Geol., II. Bd. (1895), 609—752.

4) K e t t n e r, dies. Bull. 1915.

### Das Profil „v Lipízi“ NW von Dobříš.

In seiner vorjährigen Arbeit erwähnt E. N o w a k<sup>5)</sup> das Vorkommen diabasischen Gesteins an dieser Stelle, das in kambrischen Sedimenten aufsetzen soll. Nach seiner Karte kann von der Identität seines Diabases mit dem hier beschriebenen Vorkommen kein Zweifel sein, die Angabe N o w a k s über das geologische Auftreten des Eruptivums bedarf einer wesentlichen Korrektur, wie aus den beigegebenen Profilen Fig. 1 u. 2 zu ersehen ist. Des näheren werden dieselben in K e t t n e r s Arbeit über die Žitecer Konglomerate beschrieben, hier sei nur auf die Wichtigkeit des Lipízer Profils in mehr als einer Richtung hingewiesen: erstens sind hier im Spilitkomplexe zum ersten Male unzweifelhafte *Tuffe* nachgewiesen worden, weiter zeigt es sich hier in einem einzigen Profile, daß die durch

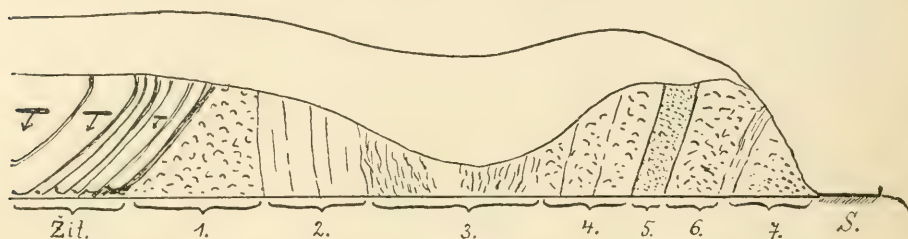


Fig. 1. Profil in dem in die Lipízi mündenden Tale: links NO, rechts SW.

Žit. = Žitecer kambrische Stufe: S = Lipízer Straße. 1—7. Gesteine des Spilitkomplexes:

1. feinkörniger Spilit
2. Augitporphyr
3. zersetzte Partien
- 4—7. körnige Diabase.

Wie auch die nachfolgenden, ist das Profil von uns gemeinsam aufgenommen und von K e t t n e r gezeichnet worden.

die Spilite und Kieselschiefer charakterisierte Abteilung des böhmischen Algonkiums, der zweiten Schieferzone der Příbramer Autoren entsprechend, älter ist als diejenige, welche die algonkischen Grauwackenkonglomerate enthält und die erste Příbramer Schieferzone mit einbegreift, und es wird somit ein augenscheinlicher Beweis für die Richtigkeit der K e t t n e r s Auffassung des böhmischen Algonkiums geliefert; die im Profil zutage tretende Dislokation (s. Fig. 2) zeigt sich als eine Fortsetzung der Příbramer Lettenkluft, und das algonkische Alter der Spiliteruptionen wird von neuem durch das Vorhandensein von Spilit- und Tuffgeröllen in den *tuffitischen Brekzien* bewiesen; was das *Kambrium* betrifft, zeigt das Lipízer Profil gut die Diskordanz gegenüber dem unterlagernden Algonkium, das Auftreten der (hier feinkörnig entwickelten) Žitecer Schichten an der Basis des Kambriums und erscheint selbst durch eine Querverwerfung bedingt,

<sup>5)</sup> N o w a k, Jahrb. geol. R.-A. 64 (1914), 236.

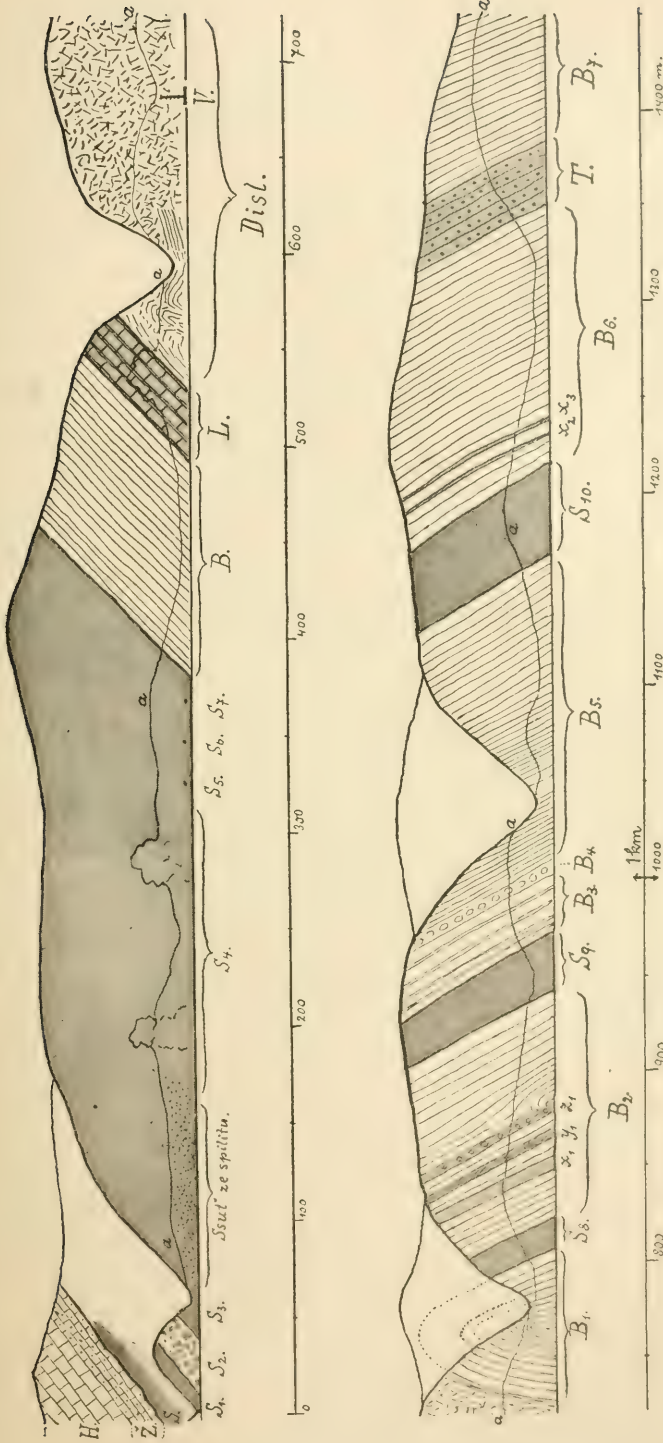


Fig. 2. Lipitz Hauptprofil: NW links, SO rechts.

H = Hlubošer } Konglomerate im Hintergrund gegen NO;  
 Ž = Žitceř }  
 S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>, S<sub>4</sub>, S<sub>6</sub>, S<sub>8</sub>, S<sub>10</sub>, S<sub>8</sub>, S<sub>10</sub>, körnige, z. T. uralitisierte Diabase;  
 S<sub>2</sub> Plagioklasporphyrit und Tuff;  
 S<sub>6</sub>, S<sub>7</sub>, Plagioklasporphyrite;  
 B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>—B<sub>3</sub> algonkische Schiefer

T tuftitische Brekzie;  
 L Kieselschiefer,  
 Ssuf ze spilritu = Spilitschutt.  
 Disl. = Dislokation in der Fortsetzung der Pyrammer Lettenkluff.  
 a—a = obere Grenze des tatsächlich aufgeschlossenen Profils.  
 V = Törllein auf der Straße.



welche hier die erste kambrische (Birkenberger) Grauwackenzone abschneidet.

Im Querprofile, der das Hangende des Hauptprofils beinahe im Streichen trifft und durch den Waldweg im in die Lipíř von NO einmündenden Tale aufgeschlossen ist, beobachten wir zuerst (Fig. 1) im NO Žitecer Grauwacken, die NO streichen und NW einfallen, in ihrem unmittelbaren Liegenden feinkörnigen bis dichten Spilit (1), darunter einen Augitporphyrit (2) und jenseits der zerrütteten und verwitterten Partien Felsen von feinkörnigen Diabasen bis zur Vereinigung mit dem Haupttale (4—7). Hier (Fig. 2) folgt im Steinbruche ein mit Tuff verbundener Plagioklasporphyrit (S<sub>2</sub>), dann eine sehr mächtige Eruptivmasse, die zumeist (S<sub>3</sub>, S<sub>4</sub>, S<sub>6</sub>) die Beschaffenheit von körnigen, z. T. uralitisierten Diabasen, teils auch von Plagioklasporphyriten (S<sub>5</sub>, S<sub>7</sub>) zeigt. Es folgen dann algonkische Schiefer mit einem Streichen nach O und Einfallen nach N, mit einem Kiesel-schieferlager (B), jenseits dessen auf etwa 200 m Länge die zerrüttete Zone folgt (*Disl.* in Fig. 2); hinter dieser bilden die Schiefer eine Antiklinale und enthalten dann in dem, jetzt gegen S ins Hangende gehende Profile, noch drei Lager von körnigen Diabasen (S<sub>8</sub>, S<sub>9</sub>, S<sub>10</sub>), ziemlich weit über dem letzten von denselben die Einlagerung von tuffitischen Brekzien (T); nach einer nochmaligen Schichtenfolge von gewöhnlichen algonkischen Tonschiefern stellen sich im Hangenden, schon außerhalb der Fig. 2, die algonkischen Grauwackenkonglomerate des Větrný vrch ein.

*Alle Diabasgesteine des Lipířer Profils halte ich für algonkische Effusivgesteine, d. h. für Facies des Spilitkomplexes*, obwohl die körnigen Diabase eine große Ähnlichkeit mit manchen viel jüngeren Gangdiabasen des Birkenberger Gebiets u. a. O. zeigen; denn erstens beobachtet man zwischen einzelnen Facies allmähliche Übergänge, und dann haben wir körnige, z. T. auch uralitisierte Diabase im klastischen Materiale der Žitecer Schichten im Profile gegenüber dem Mundloch des Erbstollens (s. unter Fig. 4) konstatiert. Somit halte ich zwei für den Spilitkomplex neue Tatsachen aus dem Lipířer Profil für sichergestellt: das Vorkommen von *Tuffen* und die Teilnahme der körnigen *Uralitdiabase* an dem Facieswechsel des Spilitkomplexes.

Ob die Strukturabarten im Lipířer Profil selbständige Lavaströme oder Teile eines oder weniger Ergüsse darstellen, läßt sich nicht mit Sicherheit sagen. Die Grenze der durch das Tuffvorkommen charakterisierten Partie S<sub>2</sub> ist etwas deutlicher und scheint konkordant mit den liegenden algonkischen Schiefen O zu streichen und N einzufallen. Sonst hindert die vielfach schon sehr fortgeschrittene Verwitterung und zahlreiche Diaklasen, einzelne Eruptionsphasen auseinanderzuhalten.

Die Strukturabarten der Lipířer Spilite seien im folgenden kurz charakterisiert:

a) *Spilit im unmittelbaren Liegenden der Žitecer Grauwacken* (1 in d. Fig. 1 und Taf. I. 1).



Makroskopisch fast dicht, mit leistenförmigem Plagioklas, chloritisiertem Augit und viel Leukoxen in Körnchen. Etwas dunklere Einschlüsse sind *randlich umgeschmolzen*, weiter ins Innere zu jedoch werden sie allmählich der Gesteinshauptmasse gleich.

b) *Augitporphyrit* (2 i. d. Fig. 1).

Ziemlich viel Augit I. Generation, u. d. M. fast farblos, nur in der Vertikalzone idiomorph; Augit der Grundmasse chloritisiert; in derselben auch Plagioklasleisten, viel Magnetit und etwas Quarz, wahrscheinlich sekundär.

c) *Der mit dem Tuff vergesellschaftete Plagioklasporphyrit* (S<sub>2</sub> i. d. Fig. 2).

Makroskopisch etwas lichter als die übrigen Gesteine, von schalenförmiger Absonderung. Die Verwitterung sehr vorgeschritten; u. a. auch Verdrängungspseudomorphosen von Chlorit nach Plagioklaseinsprenglingen. Die Struktur der Grundmasse stellt einen Übergang von der spilitartigen strahligen zur fluidalen trachytischen vor. Spärliche Mandelräume enthalten Chlorit und jüngeren Kalcit.

Auch jenseits des Lipíztales gegen W tritt ein Plagioklasporphyrit im Walde auf, doch mit weniger Feldspateinsprenglingen und mit fluidal struierter Grundmasse.

d) *Leukokrater Porphyrit* S<sub>5</sub>.

Den weiter unten beschriebenen Gesteinen aus dem Zuge N von der Aglaiahöhe nahestehend; die Feldspäte beider Generationen (I. nicht zahlreich) gehören dem Oligoklas an, die Grundmasse hat eine leptomorphe Struktur und erscheint von unregelmäßigen Anhäufungen des sekundären Chlorits gefleckt; akzessorisch kommt auch Quarz vor, der Leukoxen und uralitische Hornblende sind spärlich.

e) *Plagioklasporphyrit* S<sub>7</sub>.

Z. T. durch magmatische Korrosion gerundete Plagioklase I. Generation massenhaft vorhanden, die Grundmasse trachytisch struiert, leukokrat mit wenig Chlorit und Leukoxen. Den *Geröllen* im *algonkischen* Konglomerat von Jíloviště ähnlich.

f) *Körnige Diabase* (4—7 i. d. Fig. 1, S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>, S<sub>4</sub>, S<sub>6</sub>, S<sub>8</sub>, S<sub>9</sub>, S<sub>10</sub> Fig. 2.)

Korngröße wechselt bedeutend, einige Partien, z. B. in S<sub>1</sub> nahe der Ecke beider Profilé, sind fast grobkörnig. An dieser Stelle findet man auch Proben mit wenig bis fehlendem Uralit. Sonst ist dieser massenhaft vorhanden; es ist zumeist die gewöhnliche, helle, zwischen bläulichgrün, bräunlichgrün und bräunlichgelb pleochroitische „schilfige Hornblende“, daneben kommt in S<sub>9</sub> auch *primäre braune Hornblende* vor. Durch die Umwandlung des *Uralits* entsteht Chlorit, einmal (der satter grüne Uralit in S<sub>8</sub>) auch Biotit. Der Augit, soweit erhalten, ist der gewöhnliche rötliche Diabasaugit oder fast farblos, die Plagioklase reichen vom basischeren Oligoklas bis zum sauren Labradorit und sind bisweilen nicht lamelliert,

die Erze gehören dem Ilmenit an. Sekundär kommen noch vor: Kalcit, farbloser Glimmer, Epidot, Pyrit, Quarz, einmal ( $S_9$ ) auch fächerförmige Aggregate von neugebildetem Plagioklas, annähernd Andesin. Die Struktur ist ophitisch, z. T. in die hypidiomorphkörnige übergehend. Unter den spärlichen Mandelräumen kommen auch solche vor, die mit Pyrit erfüllt sind (= etwa Nowaks „Pyriteinschlüsse“).

g) *Spilituff in  $S_2$ .*

Makroskopisch feinkörnig, mit zahlreichen großen, bisweilen deformierten Vakuolen, die mit *Palygorskit* und Kalcit erfüllt sind (wo beide zusammen, *Palygorskit* älter). U. d. M. besteht die Hauptmasse des Gesteins aus sehr feinkörnigem Aggregat, in welchem Feldspatkörnchen und der z. T. etwas parallel geordnete Chlorit überwiegen. Darin sind Bruchstücke eines ziemlich grobkörnigen Diabasgesteins (Taf. I. Fig. 2), eckige Quarzkörner und einzelne Fragmente von Plagioklas- und Augitkristallen zerstreut. Sekundärer Chlorit und Kalcit verdrängen vielfach die primären Gemengteile.

Anstehenden Tuff kenne ich bis jetzt von keiner anderen Stelle des böhmischen algonkischen Spilitkomplexes, aber die einstige Anwesenheit von Tuffen in demselben bezeugen einerseits Tuffgerölle in den Brekzien des Lipížer Profils und vereinzelt auch im algonkischen Konglomerat von Jiloviště, andererseits das massenhafte Vorkommen von *losen* Ilmeniten, Leukoxenen und Plagioklasen im klastischen Materiale verschiedener algonkischer Grauwacken (Lipíž, Litavkaprofil u. a. O.) und Žitecer Konglomerate. S. auch weiter unten S. 12—14.

Wegen der großen Wichtigkeit des Lipížer Profils sei hier auch noch einiges zur petrographischen Charakteristik seiner *Sedimente* gesagt.

h) *Grauwacken zwischen  $S_8$  und  $S_9$ .*

Einige von diesen Gesteinen sind feinkörnig, relativ wenig polymikt, den gewöhnlichen algonkischen Grauwacken ähnlich; ihr klastisches Material besteht aus Quarz, Schiefen und etwas Feldspat (Plagioklas, Orthoklas, Mikroklin). In anderen Proben werden die Bruchstücke scharfkantig und die Grauwacke geht in eine Brekzie über; da kommen auch *Fragmente von feinkörnigen Spiliten und ziemlich grobkörnigen Diabasen* vor, sowie einzelne Kriställchen von Bestandteilen derselben (Leukoxen, Plagioklas). Der sekundäre, wahrscheinlich den Plagioklasen entstammende Kalcit ist unregelmäßig verteilt.

i) *Grauwacken zwischen  $S_9$  und  $S_{10}$*

sind ebenfalls z. T. brekzienartig und enthalten viel lamellierten und nicht lam. Feldspat, allothigenen Biotit und Muskovit, sekundären Kalcit und Epidot.

j) *Die zwischengelagerten Tonschiefer beider Parteien*

zeigen u. d. M. nichts Besonderes; an zwei Stellen enthalten sie eigentümliche Konkretionsgebilde.

k) *Tuffitische Brekzien* (T in der Fig. 2).

Schon makroskopisch fallen diese Gesteine durch zentimetergroße scharfkantige Schiefer- und Grauwackenbruchstücke auf und ähneln einigen algonkischen Grauwackenkonglomeraten, z. B. vom Kocábaufer zwischen Dubno und Dubenec. U. d. M. können wir — bis auf das hier gröbere Korn — eine fast vollständige Übereinstimmung mit den eben angeführten brekzienartigen Grauwacken konstatieren, die auch selbst unter den Bruchstücken der tuffitischen Brekzien vertreten sind. Über Spilite und Spilituffe im klastischen Materiale der letzteren s. unten S. 13.

### **Spilite in der Schwarzgrubner Abteilung des Příbramer Gangdistrikts.**

Die offizielle Publikation von J. Schmid, W. Göbl und Mitarbeitern<sup>6)</sup> unterscheidet von den gewöhnlichen (Gang-) Diabasen „Kalkdiabase“ des Lill-, Strachen- und Ferdinandschachtes — also der Schwarzgrubner Abteilung in der II. Schieferzone — und ein ähnliches Gestein im Kambrium der I. Sandsteinzone des Augustschachtes bei Drkolnov. Die von Ambrož gegebene mikroskopische Charakteristik dieser Gesteine, sowie die Angaben über ihr geologisches Auftreten sind wie die ganze offizielle Publikation sehr dürftig und nichtssagend. Das Gestein vom Augustschacht habe ich in Příbram nicht sehen können, halte aber angesichts der Tatsache, daß auch unter den Příbramer Gangdiabasen fast dichte hellere Gesteine vorkommen,<sup>7)</sup> seine Zugehörigkeit zum Spilitkomplex für ausgeschlossen.

Nach den Aufzeichnungen der Grubenkarten, die mir durch die Freundlichkeit des Herrn Bergrats J. L o d l zugänglich wurden, setzen einige „Kalkdiabase“ und „Kalkaphanite“ des Lill- und Strachenschachtes *diskordant* im algonkischen „schwarzen Schiefer“ auf; dies ändert freilich nichts an ihrem algonkischen Alter, sondern beweist nur, daß die II. Schieferzone älter ist als gewisse Spilite und desto mehr als die konglomeratführende I. Zone.

Die „Kalkdiabase“ und „-aphanite“ der II. Schieferzone sind, wie ich festgestellt, tatsächlich Spilite. Ich war in der Lage, folgende von ihnen zu untersuchen:

a) *Dichter Spilit, Halde des Lillschachtes.*

Makroskopisch dicht, lichtgrau. U. d. M. ein gewöhnlicher Spilit mit etwas strahlig gruppierten Plagioklasen und *farblosem* Augit; beide kommen auch als spärliche Einsprenglinge vor. Sonst nur sekundäre Produkte vorhanden (Kalcit, Chlorit, Leukoxen).

b) *Die Brekzien vom Lillschacht.*

<sup>6)</sup> Montangeologische Beschreibung des Příbramer Bergbau-Terrains und der Verhältnisse in der Grube etc., Wien 1892.

<sup>7)</sup> A. H o f m a n n, Guide des excursions du IX Congrès géologique international, Vienne 193, S. 6.



Erwähnt von Pošepný,<sup>8)</sup> kurz mikroskopisch beschrieben von F. v. Sandberger,<sup>9)</sup> der in ihnen richtig Diabasgesteine erkannt hat; in der verpfuschten offiziellen Publikation Schmid und Göbls sind diese Brekzien unter ausdrücklicher Berufung auf v. Sandberger als „schiefrige Grundmassen mit Einschlüssen von Kalknatron-Feldspath“ angeführt!

Mein Material weicht in der mikroskopischen Beschaffenheit vom Sandberger'schen ab, ist jedoch — wie andere algonkische Spilitbrekzien — selbst in verschiedenen Proben variabel, was Zusammensetzung und Struktur anbelangt. Es sind tektonische Brekzien, deren Zement aus Kalkspat, Chlorit, Pyrit und Quarz besteht und scharfkantige Bruchstücke umschließt, die zumeist aus feinkörnigem bis dichtem holokristallinem Spilit bestehen; seine ziemlich häufige Mandelräume sind teils mit Chlorit, teils mit grünlichem *Diabasglas* ausgefüllt. Einmal traf ich ein Bruchstück von glasiger Zwischenmasse einer Spilitbrekzie im Zement eingeschlossen an. — Von anderer Beschaffenheit ist das Handstück von der Sammlung der Bergdirektion, Nr. 820. Hier bestehen die Bruchstücke fast gänzlich aus bräunlichem Diabasglas, hatten also vor der Bildung der tektonischen Brekzie die Zwischenmasse einer vulkanischen Brekzie gebildet.<sup>10)</sup> Als Entglasungsprodukte treten fluidal geordnete braune Augitkörnchen und winzige Variolen auf. Das Zement besteht aus Quarz, Kalkspat, Pyrit und feinem Zerreibsel der Spilitglasmasse.

c) *Halden des Ferdinandschachtes.*

Ziemlich verwitterte *Mandelsteine* mit Kalkspat- und Chloritvakuolen und typisch spilitischer strahliger Struktur.

d) *Brekzien aus dem Hügel zwischen dem Ferdinandschacht und dem gewesenen Pulvermagazin.*

Die Hauptmasse ist ein typischer Spilit, der stellenweise massenhaft Mandelräume enthält; diese sind mit schönen Quarzin- und Chloritphärolithen erfüllt, die sich sarcinenartig häufen. Die Zwischenmasse der Brekzie ist stark zersetzt und unterscheidet sich nur wenig von der Hauptmasse.

Eine andere Probe, die leider nicht anstehendem Gestein entstammt, zeigt eine glasige, blaß-bräunlich durchscheinende Grundmasse, in welcher zersetzte Bruchstücke eines anderen, dunkleren Diabasglases, dann getrübte Plagioklaseinsprenglinge, Bruchstücke eines Spilits und einzelne Quarzkörner eingebettet sind. Es scheint mir, daß wir hier einen *umgeschmolzenen Diabastuff* vor uns haben.

<sup>8)</sup> Pošepný l. c. 3a), S. 703 u. 709.

<sup>9)</sup> Sandberger, Jahrb. k. k. Bergakademien Leoben u. Pöfibrum 1887, (Bd. 35), 311—2.

<sup>10)</sup> Vergl. Slavík, l. c. I, S. 140—145; Kettner, l. c. 2a.



### Variolit gegenüber Podlesí.

J. Grimm<sup>11)</sup> kannte bereits dieses Vorkommen, zählte es aber den Schiefen zu, Schmid verwechselte es mit dem nahen oolithischen *Kalkstein* (!), erst Pošepný<sup>12)</sup> hat das Gestein richtig unter die Diabase eingereiht. Der Variolit geht allmählich in dichten Spilit über und variiert sehr in der Menge und Größe der Variolen; er stimmt vollkommen mit den von mir beschriebenen Varioliten aus Weißgrün bei Radnic u. a. O. des nördlicheren böhm. Algonkiums überein. Die Variolen werden von nadelförmigem Plagioklas gebildet und zeigen eine sphärolithische oder „divergent-strahlige“ Struktur. Interessant sind die in ihnen vereinzelt eingeschlossenen, zum Teil skelettartigen Einsprenglinge eines zersetzten Feldspats. Die Grundmasse des Variolits ist jetzt chloritisch zersetzt und scheint glasig gewesen zu sein. Unter den sekundären Mineralien sind neugebildete Plagioklase ziemlich häufig.

### Spilit vom Kozičiner Versuchsschacht.

Ein typischer *Variolitaphanit*, dessen Plagioklassphärokristalle fast die ganze Gesteinsmasse einnehmen; zwischen ihnen sind Erzkörnchen, z. T. skelettartige Ilmenite, eingeklemmt, während der Augit durch nadelförmigen sekundären grünen Amphibol ersetzt ist. Neugebildete Plagioklase sind auch hier vorhanden.

### Dubová hora bei Věšín, NW Rožmitál.

Makroskopisch einem feinkörnigen Amphibolite gleich, von schmalen Aplitadern durchdrungen. U. d. M. bezeugen einige Strukturrelikte, namentlich deutlich ophitisch struierte Partien, die Abstammung aus einem Spilitgestein. Die Bestandteile sind: umkristallisierte mittelbasische Plagioklase, fast farbloser oder schwach grünlicher, spärlicher Pyroxen, eine grünlichbraune, eine grüne und eine fast farblose schilfige Hornblende, von denen die erstere mitunter mit dem Pyroxen parallel verwächst, sowie etwas Zoisit. Die mitunter starke Kataklase verwischt natürlich die primäre Struktur. Ähnliche metamorphosierte Spilite beschrieb ich aus der Gegend zwischen Přeštic und Klattau.

### Das Litavkaprofil unterhalb Trhové Dušníky.

Die beigelegte Fig. 3 illustriert die schon von Grimm und Lipold untersuchten Verhältnisse und die Diskordanz zwischen dem Algonkium und Kambrium; näheres darüber vergl. in Kettner's Arbeit über die Žitecer Konglomerate. Die Eruptivlager des Profils bestehen aus körnigen Diabasen, welche zwar Piibramer Gangdiabasen zum Verwechseln ähnlich sind, aber nach dem Funde von gleichen Geröllen im Žitecer Konglomerat von der Škrtilka (s. weiter unten) und nach ihrem

<sup>11)</sup> Grimm, Jahrb. k. k. Mont.-Lehranst. Leoben u. Pfl. 1855.

<sup>12)</sup> Pošepný, l. c. 3b), 632.

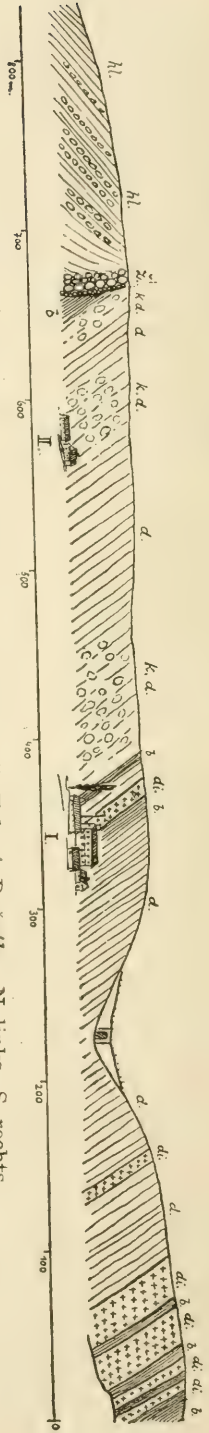


Fig. 3. Profil des rechten Linaukaus unterhalb Tyhoú Dušný, N links, S rechts.

Algonkium: *di* Diabase, *b* Schiefer, *d* Grauwacken, *k. d.* kugelig-schalig abgesonderte Grauwacken.

Kambrium:

*Z.* Žitcecr, *hl.* Hilbošer Konglomerate.

I. II. = Mühlen an der Litavka.

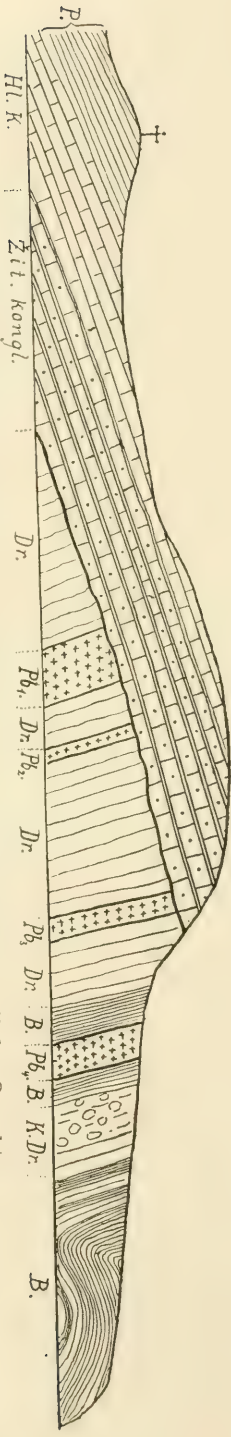


Fig. 4. Profil bei der Štrtitka, gegenüber dem Erbstollenmundloch. W links, O rechts.

Algonkium:

*B.* Schiefer, *Dr.* Grauwacken, *K. Dr.* kugelige Grauwacken. *Pb<sub>1</sub>—Pb<sub>4</sub>* Proterobasgänge.

Kambrium:

*Zit. kongl.* Žitcecr, *Hl. k.* Hilbošer Konglomerate, *P.* Sandsteine.

geologischen Auftreten doch wie die analogen Gesteine von Lipíz dem Spilitkomplexe zuzuzählen sind. Es sind gewöhnliche Diabase, deren ophitische Struktur einerseits bei Verfeinerung des Korns in beinahe trachytisch-fluidale, andererseits bei Vergrößerung in hypidiomorph-körnige übergeht. Quarz scheint sekundär zu sein, Uralit habe ich in meinen Proben nicht konstatiert.

#### **Das Profil bei der Škrtilka (gegenüber dem Mundloch des Erbstollens).**

Auch dieses Profil, auf Fig. 4 dargestellt, wird in der gleichzeitigen Arbeit K e t t n e r s näher erörtert und die Diskordanz zwischen dem Algonkium und Kambrium beschrieben. Die hiesigen Eruptivgesteine führe ich nur mit der Reserve in dieser Spilitarbeit an; es sind Proterobase bis fast Diorite mit brauner Hornblende neben farblosem Pyroxen, von ophitischer, in hypidiomorph-körnige übergehender Struktur. Es sind möglicherweise gangförmige Glieder der Spilitformation, denn sie reichen nicht über die Grenze ins Kambrium hinüber.

#### **Feinkörniger Uralitdiabas von Pičín**

tritt O vom Tiergartenrande am NO-Abhang der Kôte 509 auf und erinnert an die feinkörnigeren Partien der Lipízer Diabase. Mangels besserer Aufschlüsse ist seine Zugehörigkeit zum Spilitkomplexe zweifelhaft, ebenso wie die der folgenden Gesteine:

**Feinkörniger Diabas vom Gipfel cõ. 508 NW von Skorotín,**

**Proterobas vom südlichen Abhange desselben Hügels,**

**Diabasporphyrat im Walde NNW von Rosovic, S cõ. 467 („Dráhy“).**

Trotz ihrer abweichenden Beschaffenheit halte ich eine andere Zone von Eruptivgesteinen für Glieder des Spilitkomplexes, nämlich den

#### **Porphyrit- und Mandelsteinstreifen NO von Lipíz.**

Ernest Nowak hält, wie aus seiner Karte ersichtlich, diese Gesteine für algonkische Schiefer. Es sind zum großen Teile dichte, graue und bräunliche Gesteine, welche NO streichend in der Länge von etwa zwei Kilometern von der cõ. 485 NW von der Aglajahöhe über die zum Fürstenbrunnjägerhause führende Straße bis fast zu dem Waldschlage zwischen den Kôten 442 und 402 ziehen und an und beiderseits der erwähnten Straße in Schotterbrüchen aufgeschlossen sind. Näheres über ihr geologisches Auftreten bringt K e t t n e r s Aufsatz und Karte im „Sborník České společnosti zeměvědné“ 1915.

Die Eruptivgesteine des in Rede stehenden Streifens sind im NO vorwiegend *Mandelsteine*, deren zumeist trachytisch-fluidal strierte Grundmassen aus nadelförmigem Oligoklas, etwas Quarz und den gewöhnlichen sekundären Mineralien bestehen; die Mandelraumfüllungen bestehen aus Chaledon, sphärolithischem Chlorit oder auch eigentümlichen



*Pseudomorphosen von Quarz nach Chalcedon*, mit oder ohne späteren gewöhnlichen Quarz; auch Brauneisenstein und Kalcit kommen als jüngerer Teil der Mandelraumfüllung vor, schließlich hie und da auch Oligoklas mit Quarz. Plagioklase I. Generation sind nur spärlich vorhanden.

Im SW, zwischen der Straße und der Cö. 485, findet man stark verwitterte, dichte Gesteine ohne Mandelräume, die stellenweise auch Feldspate erster Generation führen und in der Grundmasse fast ausschließlich aus Oligoklas und vielleicht auch etwas Orthoklas bestehen; der Chlorit ist unregelmäßig verteilt. Die Struktur ist teils trachytisch, teils allotriomorph-körnig.

\* \* \*

Mitsamt den abweichenden und nicht ganz sichergestellten Vorkommen hätten wir somit im Südflügel des böhmischen Algonkiums folgende Gruppen von spilitischen Ergußgesteinen (vergl. die schematische Karte Taf. II):

1. Die Gegend von *Rožmitál* (Dubová hora): zu feinkörnigem Amphibolit umgewandelter Spilit nahe der Granitgrenze.

2. Die *Kozičín-Schwarzgrubner* Gruppe, reich differenziert und den Spiliten des nördlichen Algonkiums am ähnlichsten: Variolite, Variolitaphanite, dichte Spilite, Mandelsteine, glasige Brekzien.

3. Die *Litavka-Pičiner* Gruppe: ophitische Diabase, ? Proterobase;

4. *Lipíž*: ophitische Diabase, Mandelsteine, Porphyrite, *Tuffe*.

5. *Die Zone N von der Aglajahöhe*: saurere Porphyrite und Mandelsteine.

6. *Závist* und das gegenüberliegende neue, von Kettner aufgefundene Vorkommen am linken Moldauufer bei *Záběhlic*: Spilitbrekzien.

Zwischen 5. und 6. fällt *Chouzava* bei Kytín, wo wir WNW vom Orte, S vom Jägerhause in den Feldern einen Diabas mit farblosem Pyroxen und in der benachbarten algonkischen Grauwacke massenhaft abgerollte Bruchstücke ähnlichen farblosen Pyroxens gefunden haben. Vielleicht stammte aus dieser Stelle eine Probe zu **Ernest Nowaks** mikroskopischer Untersuchung, da derselbe die Anwesenheit eines „diopsidartigen Augits“ für häufiger in den algonkischen Grauwacken zu halten scheint, als es nach unserer Erfahrung tatsächlich der Fall ist.

### **Klastisches Spilitmaterial in algonkischen und kambrischen Sedimenten.**

Der südliche Flügel des böhmischen Algonkiums, von *Říčany* über *Dobříš* bis *Rožmitál*, liefert massenhaft Belege für das *algonkische Alter der spilitischen Ergußgesteine*. Es hängt dies mit dem mächtigen



Vorkommen von *Konglomeraten* zusammen, von denen K e t t n e r nachgewiesen hat, daß sie jünger sind als die Spilit.

Ich habe spilitisches klastisches Material aus folgenden algonkischen Sedimenten untersucht:

### 1. *Grauwacken und Brekzien des Lipižer Profils.*

In den Grauwacken  $B_2$  in Fig. 2 fand ich vereinzelt Gerölle von gewöhnlichem Spilit, von grobkörnigeren Gesteinen mit breit lamellaren Plagioklasen, von einzelnen Kristallen der letzteren sowie leukoxenisierten Ilmenits.

Viel mehr spilitischen Materials enthalten die gröberen *tuffitischen Brekzien*. Ich konstatierte in denselben ein Gerölle von Porphyrittuff (s. Taf. I., Fig. 3), zahlreiche Gerölle von gewöhnlichem Spilit, von Porphyritmandelstein und Leukoxengeröllchen.

### 2. *Grauwacken des Litavka Profils.*

In den Grauwacken am rechten Litavkaufer unterhalb Trhové Dušníky, besonders in den Schichten mit schaliger Absonderung (*k. d.* auf Fig. 3) fanden sich Gerölle und Bruchstücke von Spilit mit fluidal geordneten Plagioklasnadeln, von Variolitaphanit und Diabasglas.

### 3. *Algonkisches Konglomerat vom Zelený bei Kytín.*

Dieser über 2 km lange Hügelrücken besteht auf der Rückenhöhe ganz aus algonkischen Konglomeraten, die ziemlich große Felsen bilden und an der Dobříšer Straße, im Abhänge des Tälchens zwischen der Točka und Voznice u. a. O. gut entblößt sind. Auf E. N o w a k s Detailkarte ist dies alles als Schiefer kartiert.

Das klastische Material des Konglomerates vom Zelený bilden größtenteils Grauwacken und Schiefer, doch enthält es auch viele Gerölle von einem schönen Plagioklasporphyrit mit feinkörnig-allotriomorpher Grundmasse.

4. *Algonkisches Konglomerat von Jíloviště bei Königsaal* (Taf. I. Fig. 4 u. 5) wurde von K e t t n e r W vom Jílovištěr Jägerhaus, an der Straße S von der Kôte 381 gefunden. Dasselbe enthält von allen mir bekannten die zahlreichsten Gerölle von folgenden Spilitvarietäten: makroskopisch dichter, u. d. M. strahlig struierter Spilit; Plagioklasporphyrit mit glasiger Grundmasse; Porphyrit, der neben Plagioklas auch Augit erster Generation enthält; Spilitmandelstein; Gesteine, die strukturell den gewöhnlichen Spiliten ähneln, aber fast ausschließlich aus leistenförmigem Feldspat bestehen. Die zahlreichen losen Plagioklaskristalle, die im Grauwackenzement des Konglomerats zerstreut sind, leite ich aus zerstörten spilitischen Tuffgesteinen her.

*Gepreßter Spilitporphyrit aus dem algonkischen Konglomerate von Říčany* (Taf. I. Fig. 6).

An einer von K a t z e r in seiner geologischen Beschreibung der Říčaner Umgebung nicht erwähnten Stelle, hart an der Stadt gegen

N im linken Bachufer fand ich im nördlichen Teile des großen Steinbruchs eine Konglomeratschicht, in welcher ein etwa dezimetergroßes Gerölle aus einem ganz abweichenden Gestein bestand: dasselbe ist makroskopisch feinkörnigen Augengneißes mit viel Chlorit ähnlich, mikroskopisch zeigt es sich als gepreßter Porphyrit, dessen Augen teils einheitliche Plagioklaszwillinge, teils Gruppen derselben sind, während die Grundmasse aus Plagioklasen und Chlorit besteht und teils ophitisch, teils mehr radialstrahlig struiert ist. Die intensiven Druckwirkungen äußern sich durch das schon makroskopisch sichtbare parallele Gefüge, durch undulöse Auslöschung, Biegung der Plagioklase sowie durch eine intensive Kataklase.

Man hat hier einen Beleg für eine schon im Algonkium stattgefundenen Druckmetamorphose; weitere werden in Kettners Arbeit über algonkische Konglomerate angeführt werden.

**Spilitisches klastisches Material in den Sedimenten des Kambriums** charakterisiert vor allem die unterste, *Žitecer Stufe*,<sup>13)</sup> deren Gesteine von Spilitbruchstücken und -geröllen strotzen und verschiedenartigste Abarten und Fazies des Spilitkomplexes enthalten. Am häufigsten sind Plagioklasporphyrite, Variolitaphanite und gewöhnliche Spilite, ferner Diabasgläser, typische Variolite, sowohl mit Plagioklas als auch mit Augit als variolbildendem Minerale; ophitisch struierte phanomere Diabase sind im Profil gegenüber dem Mundloch des Erbstollens vorgekommen. Gegen SW in die Gegend von Rožmitál und ins Hangende zu nehmen die Spilite ab und machen Quarz- und Kieselschiefergeröllen Platz.

In den der Žitecer Stufe auflagernden Hlubošer Konglomeraten finden wir nur vereinzelt NO von Dubno und ONO von Orlov Gerölle von Spiliten, Plagioklasporphyriten und Diabasglas; sonst weisen auf einen Ursprung aus den Spiliten zahlreiche kleine Gerölle von mehr oder minder leukoxenisiertem Ilmenit hin, die wir außer den beiden angeführten Lokalitäten auch anderwärts beobachten können, z. B. an der Côte 547 zwischen Příbram und der Silberhütte.

\* \* \*

Aus unserer Untersuchung der Spilite im Algonkium der „zweiten Schieferzone“ ergibt sich:

1. Identische fazielle Verhältnisse wie im Algonkium zwischen Klattau und Kralupy; zu den körnigen Diabasen, Varioliten, Variolitaphaniten, Mandelsteinen, Porphyriten und dichten Spiliten treten

<sup>13)</sup> Siehe Kettners Arbeit im diesjährigen Bulletin.

neu Uralitdiabase, leukokrate acidere Porphyrite und Mandelsteine, vielleicht auch Proterobase hinzu.

2. Wahrscheinlich diskordantes Aufsetzen eines Teils dieser Eruptivgesteine in den Schiefern der zweiten Zone.

3. Zum erstenmale konstatierte Gegenwart von *Tuffen* in der Spilitformation.

4. Neue Beweise für das *algonkische Alter* des Spilitkomplexes.

5. Abwesenheit der Spilite in der jüngeren, durch Konglomerate charakterisierten ersten Schieferzone (Střebsko-Brod).

Prag, Juni 1915.

*Mineralogisches Institut  
der böhmischen Universität.*

---

## TAFEL I.

Vergrößerung: 1—5 circa 30, 6 : 10.

1. *Spilit* aus dem Liegenden der Žitecer Grauwacken, *Lipižer Profil*. Umgeschmolzene Randpartie des Einschlusses.
2. *Spilituff*, *Lipiž* ( $S_2$  in Fig. 2). Bruchstück eines feinkörnigen Diabases und einzelne Plagioklase in feinkörniger Grundmasse.
3. *Porphyrittuff*, Gerölle in tuffitischer Brekzie, *ebendahev*. Plagioklase und ein Aschenteilchen sehr feinkörnigen Spilits in zersetzter Tuffmasse.
4. und 5. *Gerölle von Spilitporphyriten im algonkischen Grauwackenkonglomerat, Jiloviště*.
6. *Gepreßter Porphyrit aus dem algonkischen Konglomerate von Říčany*, mit gerundeten Feldspatäugen und fluidal struierter Grundmasse.

Für die Mikrophotographien danke ich herzlich den Kollegen R. K e t t n e r und V. V o j t ě c h.

## TAFEL II.

Übersetzung der Legende.

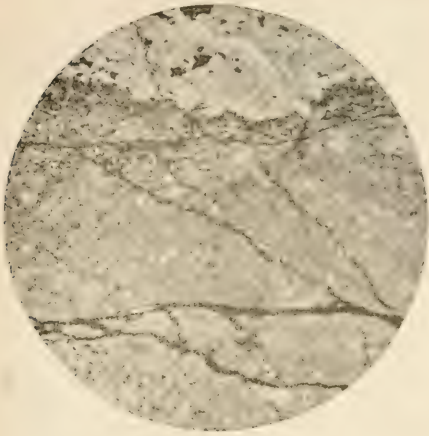
Měřítko = Maßstab.	Buližníky = Kieselschiefer.
Přesmyky = Überschiebungen.	Slepence = Konglomerate.
Podélné zlomy = Längsbrüche.	Žitecké slepence kambrické = Kambrische Žitecer Konglomerate.
Příčné zlomy = Querbrüche.	Ostatní kambrium = Sonstiges K.
Obce = Gemeinden.	Středočeská žula = Mittelböhmischer Granit.
Břidlice a droby = Schiefer und Grauwacken.	
Spility v dolech = Spilite in den Gruben.	

In der Karte selbst, W Příbram:

L. K. = Dorf Liščí Kamna (= „Fuchsofen“).	rb = rybník (Teich),
L = Lillschacht,	Fr. b. = Františkova bouda (= Franzensbaude).
F = Ferdinandschacht,	Vr. m. = Vranovská myslivna (= Vranovicer Jägerhaus).
K = Kozičiner Schacht.	
H = Horní (Ober-), D = Dolní (Unter-),	



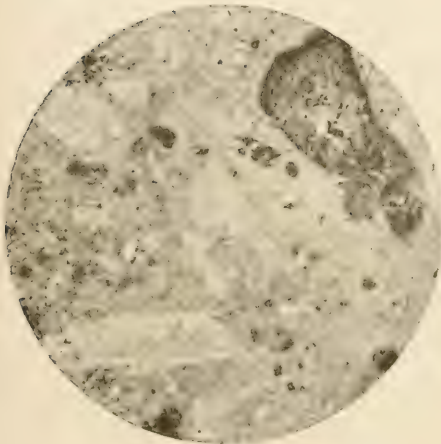
FRANT. SLAVÍK: ÜBER SPILITE IN PŘÍBRAMER ALGONKIUM.



1



2



3



4



5



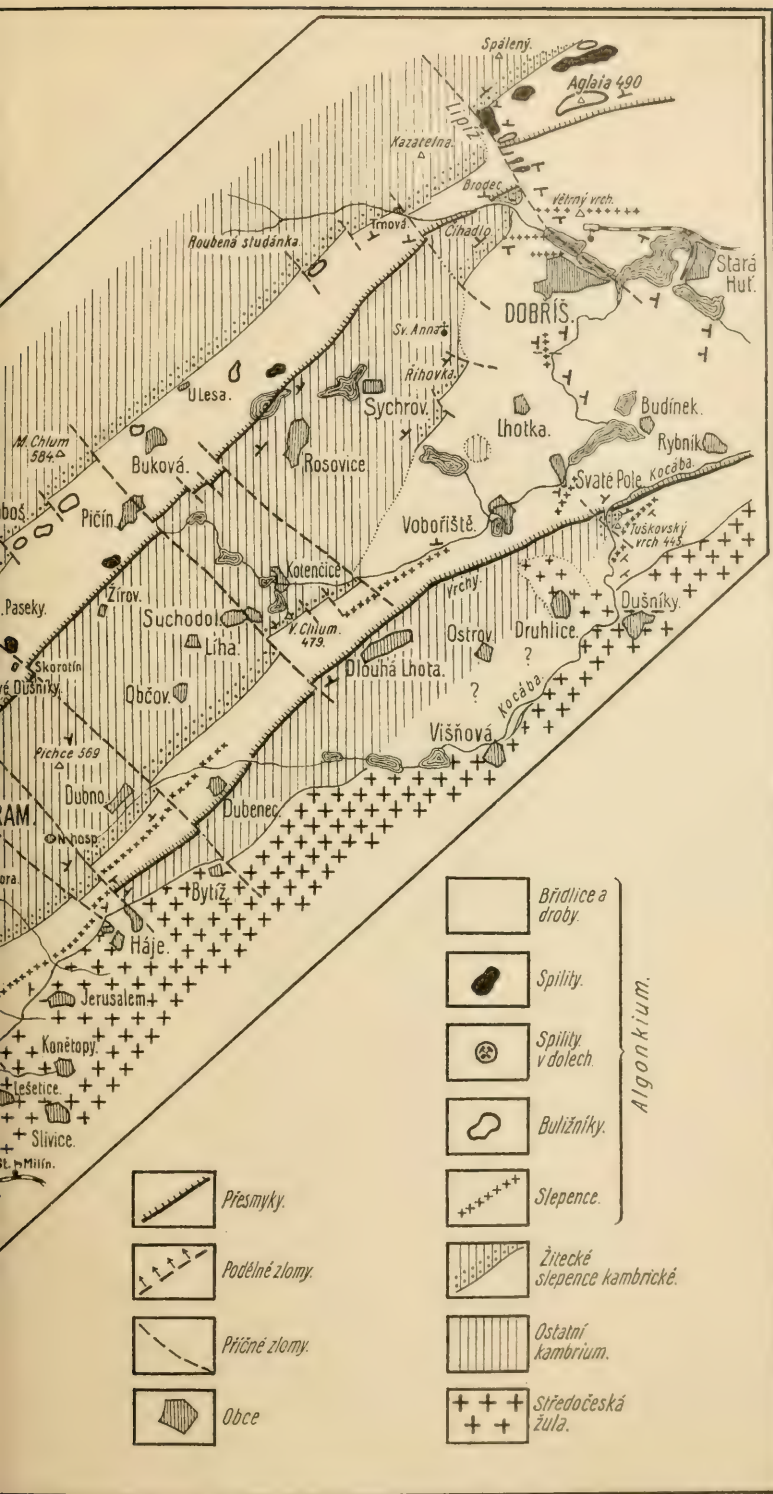
6



















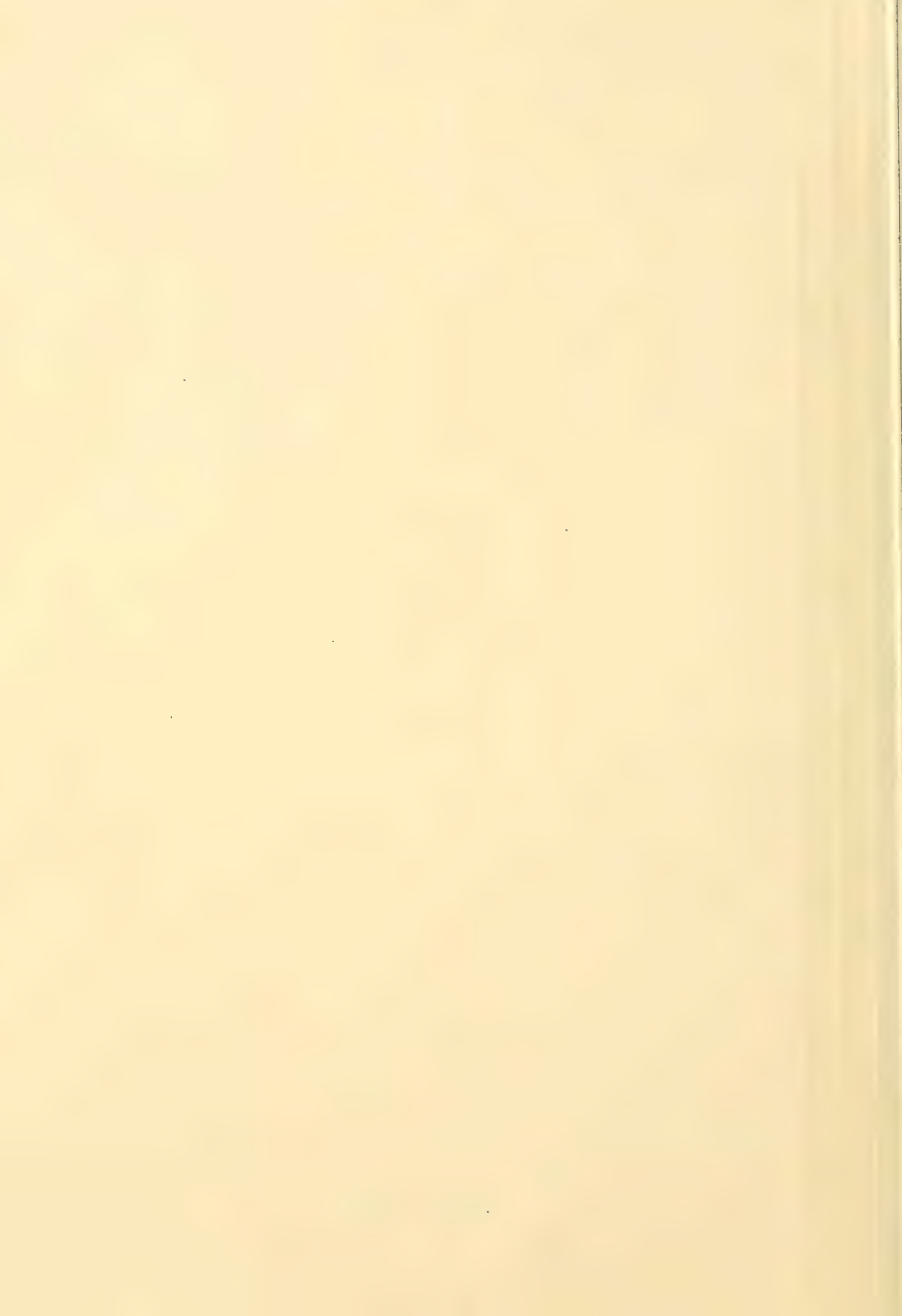




-  *Břidlice a droby.*
-  *Spility.*
-  *Spility v dolech.*
-  *Bulžňníky.*
-  *Slepence.*
-  *Žitcké slepence kambriické.*
-  *Ostatní kambrium.*
-  *Středočeská žula.*

Algonkium.

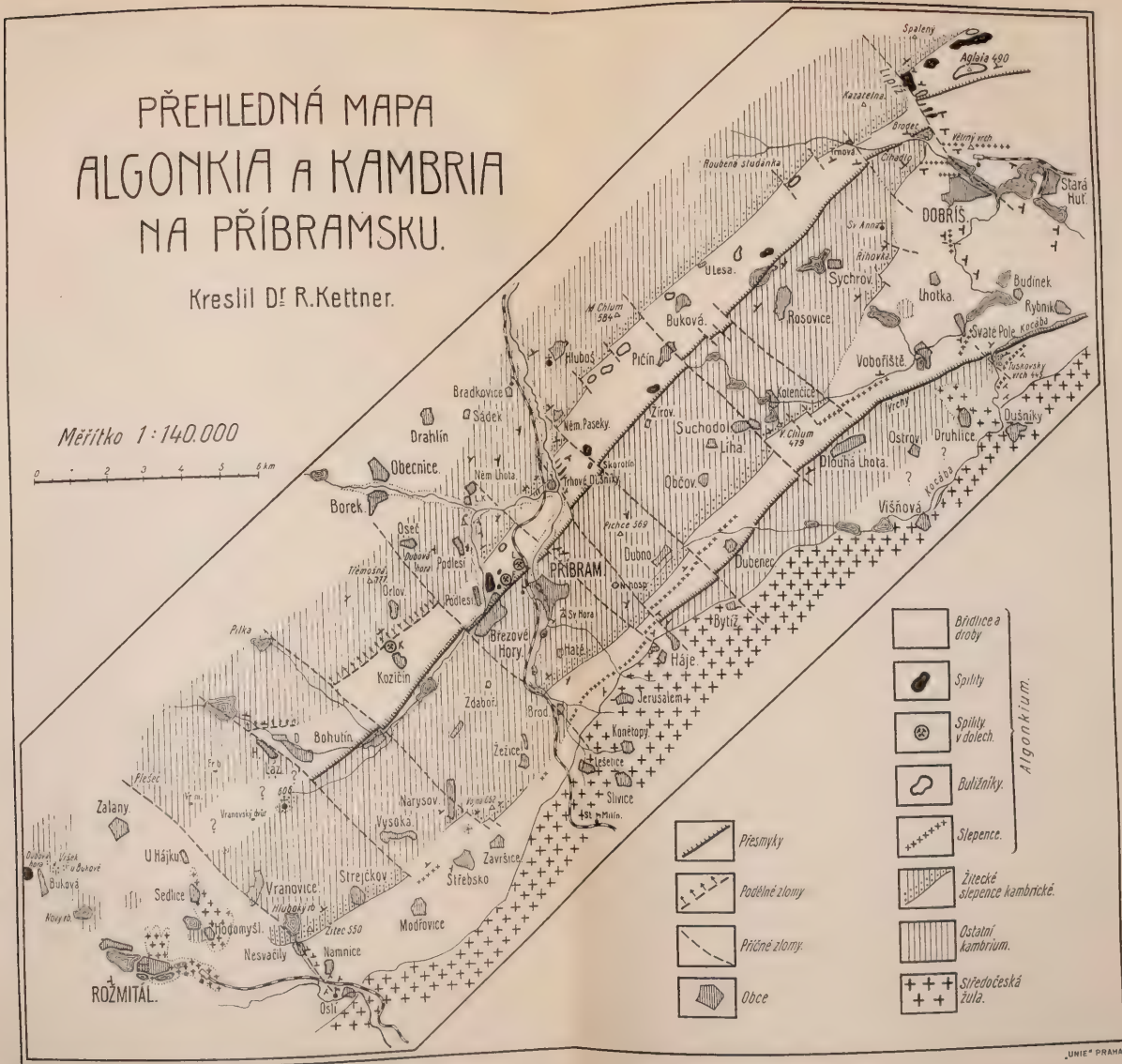
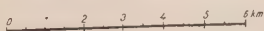
-  *Présmyky.*
-  *Podélné zlomy.*
-  *Příčné zlomy.*
-  *Obce*



# PŘEHLEDNÁ MAPA ALGONKIA A KAMBRIA NA PŘÍBRAMSKU.

Kreslil D<sup>r</sup> R. Kettner.

Měřítko 1:140.000



- |  |                            |                     |  |
|--|----------------------------|---------------------|--|
|  | Břidlice a droby           | } <i>Algonkium.</i> |  |
|  | Spilky                     |                     |  |
|  | Spilky v dolech            |                     |  |
|  | Bulžňníky.                 |                     |  |
|  | Slence.                    |                     |  |
|  | Zittauké slence kambričné. |                     |  |
|  | Ostatní kambrium.          |                     |  |
|  | Sílečočeská žula.          |                     |  |
|  | Přesmyky                   |                     |  |
|  | Podélné zlomy              |                     |  |
|  | Příčné zlomy.              |                     |  |
|  | Obce                       |                     |  |





# Über die Stärkescheide in den Blattpolstern.

Von

Dr. OT. VODRÁŽKA.

Mit 3 Tafeln und 2 Figuren im Text.

Vorgelegt am 22. Februar 1916.

Die Einwirkung der Schwerkraft auf die periodischen Bewegungen der Blattorgane hat schon die Aufmerksamkeit mehrerer Autoren erregt.

Versuche, welche Pfeffer<sup>1)</sup> mit *Phaseolus* ausgeführt hat, haben gezeigt, daß nach der Umkehrung der Pflanze das in der Tagestellung befindliche Blatt in einigen Stunden in die der Nachtstellung ähnliche Lage überführt wird. Die Pflanze setzte dann unter Einwirkung der Schwerkraft die Schlafbewegungen fort, aber in umgekehrter Weise. Es wurde also dadurch der Einfluß der Schwerkraft auf die Ausübung der nyktitropischen Bewegungen sichtbar gemacht.

Eine weitere Arbeit auf diesem Gebiete hat A. Fischer<sup>2)</sup> veröffentlicht und kommt zum Resultate, daß es in dieser Beziehung zwei Arten von Pflanzen gibt. Es gibt nämlich einige nyktitropische Pflanzen, bei welchen die Einwirkung der Schwerkraft auf die Bewegungen nicht nachweisbar ist, und andere, deren Bewegungen unter der Wirkung der Schwerkraft stehen. Fischer nennt die erste Gruppe autonyktitropische Pflanzen, die zweite geonyktitropische Pflanzen. Meine Revision dieser Versuche<sup>3)</sup> hat gezeigt, daß auch bei den sogenannten autonyktitropischen Pflanzen leicht die Einwirkung der Schwerkraft sichtbar gemacht werden kann. Es gibt also wahrscheinlich in der Natur keine nyktitropischen Bewegungen der Laubblätter, die der Einwirkung der Schwerkraft nicht unterworfen wären. Die meiner Arbeit beigelegten Diagramme zeigen den wesentlichen Unterschied zwischen den Bewegungen der normal gestellten, sowie der invers oder horizontal gelegten Pflanze. Nachdem also auf diese Weise die Einwirkung der Schwerkraft auf die periodischen Bewegungen der Pflanzen festgestellt wurde, blieb mir eine weitere Arbeit übrig, und zwar diese

Resultate in Einklang mit der Statolithentheorie zu bringen, welche, in den des geotropischen Reizes fähigen Organen, die Anwesenheit der sogenannten Statolithen voraussetzt.<sup>4) 5) 6) 11)</sup>

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Feststellung des Umstandes, ob in den sogenannten Blattpolstern, denen die Ausführung der periodischen Bewegungen zukommt, Organe zur Perzeption der Schwerkraft anwesend sind, und in welcher Form.

Die Resultate dieser anatomischen Studien sind in dieser Arbeit zusammengestellt.

Ich kann diese Einleitung nicht abschließen, ohne meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. B. Němec, Direktor des Pflanzenphysiologischen Instituts der böhm. Universität in Prag, meinen herzlichsten Dank für das wohlwollende Interesse auszudrücken, dessen ich mich während des Fortganges obiger Untersuchungen zu erfreuen hatte.

### **Anatomie des Gelenkpolsters.**

Schon bei makroskopischer Betrachtung des Blattstieles der Pflanzen, welche nyktitropische Bewegungen ausführen, ist ein Teil desselben durch dunklere Farbe auffallend, und er unterscheidet sich auch anatomisch vom übrigen Blattstiel.

Das ist das Gelenkpolster — welches seiner anatomischen Struktur nach zur Ausführung der periodischen Bewegungen der Blätter bestimmt ist. Im allgemeinen ist in diesen Blattgelenken der Leguminosen und der anderen Pflanzen die ansehnliche Krümmungsfähigkeit dadurch erzielt, daß die verholzten, nur wenig dehnbaren Gefäßbündel zu einem axilen Strang zusammenrücken und von einem aktiven Gewebe umgeben sind, das durch die Elastizität der Wandungen und die Formänderung der Zellen eine ansehnliche Verlängerung oder Verkürzung gestattet. Die Membranen dieses Parenchyms sind sehr elastisch und tatsächlich durch den Turgor ganz bedeutend gegen das kaum dehnbare Gefäßbündel gespannt.<sup>1)</sup> Durch verschiedene mechanische oder andere Reize wird die Turgoränderung in den antagonistischen Hälften des Gelenkpolsters herbeigeführt, was die Krümmung desselben zur Folge hat.

Die Epidermis der Polster ist mächtig, aus dickwandigen Zellen zusammengesetzt und dadurch charakteristisch, daß sie einer welligen Verbiegung fähig ist, welche ihr nötigenfalls eine enorme Verkürzung eventuell Verlängerung gestattet, ohne einen erheblichen Widerstand den Bewegungen zu bieten. Das Parenchym, welches sich einerseits an die Haut, andererseits an das Gefäßbündel anschließt, besteht aus Zellen von verschiedener Größe. Jene, welche dem Gefäßbündel näher liegen, und jene, die sich an das Hautgewebe anschließen, sind kleiner

und einseitig gestreckt, diejenigen, welche sich befinden mitten, sind größer und isodiametrisch. Abbildung 1 (im Text) veranschaulicht die Verhältnisse der Zellenzonen in Bezug auf ihre Größe und Form. Es ist dies eine Mikrophotographie des Längsschnitts durch das Gelenkpolster von *Oxalis Ortogesii*. Die Zellen des Parenchyms, die sich der Haut anschließen, sind quer zur Längsachse des Gelenkes gestreckt. Die Parenchymzellen dagegen, welche in der Nähe des Gefäßbündels liegen, sind parallel zum Bündel gestreckt, und unterliegen bei der Krümmung des Gelenkes keiner wesentlichen Veränderung ihrer Größe.



Fig. 1.

Von diesen parenchymatischen Zellreihen sind jene interessant, welche sich direkt knapp an das Gefäßbündel anschließen. Sie bilden eine ein- bis dreizellige Schicht und besitzen in ihrem Inhalte Stärkekörner, die sich statolithenartig umlagern.

Diese Zellschichten bilden also eine Stärkescheide, die zur Perzeption der Schwerkraft dienen dürfte. Eine Stärkescheide kann also nicht nur in den Stengeln und Stengelknoten, <sup>7)</sup> sondern auch in den Blattgelenken vorkommen und zwar fungiert sie auch da als ein Statolithengewebe.

Die Zellen der Stärkescheide sind parenchymatisch und selten isodiametrisch. (Tafel I., Abb. 5.) Gewöhnlich ist die Stärkescheide aus Zellen gebildet, die in einer Richtung gestreckt sind (Tafel I., Abb. 2). Sie grenzt direkt an das Gefäßbündel, entweder aus einer oder aus zwei,



selten auch aus drei Reihen von stärkeführenden Zellen bestehend. (Tafel I., Abb. 5, Taf. I., Abb. 1). Auch bei einer und derselben Pflanze kann die Zahl der Reihen variieren. So sind z. B. bei *Amicia zygomeris* in der unteren Hälfte der jungen Gelenkpolster drei Zellreihen der Stärkescheide ausgebildet, in der oberen Hälfte dagegen wird die Stärkescheide nur durch eine Reihe gebildet. (Tafel I., Abb. 1.) Auch das Alter der untersuchten Blattstiele bedingt die Zahl dieser Zellschichten. In den Gelenkpolstern der jungen Blattstiele findet man überall eine zwei- oder dreischichtige Stärkescheide, in alten Blattstielen ist nur eine Schicht von stärkeführenden Zellen vorhanden. (Tafel I., Abb. 3.)

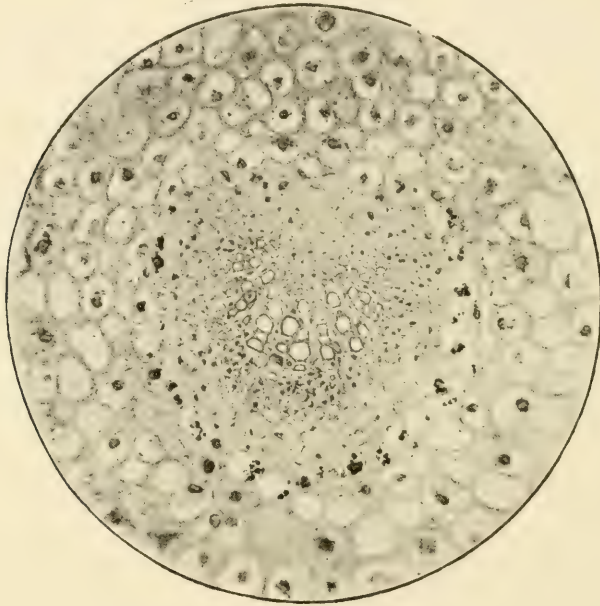


Fig. 2.

Es nehmen fast bei allen Pflanzen die Zellen der Scheide in der unteren Hälfte des Gelenkes an Größe zu. (Abb. 2 im Text.)

Die Zahl sowie die Größe der beweglichen Stärkekörner ist selbstverständlich bei verschiedenen Pflanzen verschieden. Es gibt Pflanzen, deren Stärkescheide viele Stärkekörner in den Zellen enthält, und andere, deren Stärkescheide ziemlich arm an Stärke ist. Bei derselben Pflanze ist die Zahl der Statolithen durch das Alter des Gelenkes, durch die Jahreszeit und durch die Lage der betreffenden Zelle im Gelenkpolster bedingt.

In jungen Blattstielen findet man überall große und zahlreiche Stärkekörner, in den Scheiden der älteren Gelenke dagegen kommen nur spärliche und auch korrodierte Stärkekörner vor. (Tafel I., Abb. 3.)



Was die Jahreszeit anbelangt, so ist zu bemerken, daß im Sommer fixiertes Material besser entwickelte Stärkescheiden mit reichem Stärkeinhalt aufweist, wogegen im Herbst, Frühjahr und im Winter fixierte Gelenke spärlichere bewegliche Stärke besitzen. Bemerkenswert ist noch, daß die Zellen der unteren Hälfte des Gelenkes fast immer mehr Stärkekörner im Vergleiche mit denjenigen der oberen Hälfte enthalten (Abb. 2. im Text). Die Größe der Stärkekörner ist für dieselbe Pflanze fast konstant, die kleinsten Stärkekörner wurden bei *Robinia pseudacacia*, die größten bei *Maranta Lietzei* gefunden.

Schließlich sollen die Familien und Arten, bei denen die bewegliche Stärke führende Scheide von mir beobachtet wurde, aufgezählt werden.

*Papilionaceae*: *Amicia Zygomeris* (Taf. I. Abb. 1, 2, 3), *Amorpha canescens* und *Amorpha elata* (Taf. I. Abb. 4), *Astragalus mexicanus* (Taf. I., Abb. 5, 6), *Coronilla varia* (Taf. I., Abb. 1), *Laburnum vulgare* (Taf. II., Abb. 2), *Desmodium gyrans* (Taf. II., Abb. 3), *Galega* (Taf. II., Abb. 4), *Glycyrrhiza glabra* (Taf. II., Abb. 5, 6), *Phaseolus multiflorus* (Taf. III., Abb. 1), *Robinia pseudacacia* (Taf. III., Abb. 2), *Trifolium pratense* (Taf. III., Abb. 3). *Oxalideae*: *Oxalis Ortogesii* (Taf. III., Abb. 4), *Oxalis acetosa*. *Euphorbiaceae*: *Phyllanthus pulcher* (Taf. III., Abb. 5). *Marantaceae*: *Maranta Lietzei* (Taf. III., Abb. 6).

### Methoden der mikroskopischen Technik.

Ich will hier noch kurz auf die Methoden der mikroskopischen Technik hinweisen, die ich zur Kontrastfärbung der Stärkescheide benutzte.

Zur ersten Orientierung ist die Jodreaktion unentbehrlich. Diese Reaktion ist ja für die Stärke ungemein charakteristisch, da wir keine weiteren *geformten* Zelleninhalte kennen, die in gleicher Weise reagieren. Um eine rein blaue Färbung zu erzielen, ist es nötig, die Jodreagentien (Jodkalium, Jodalkohol) nicht in konz. Lösung anzuwenden. Die beste Blaufärbung geben nach Tunmann<sup>8)</sup> kleine Jodsplitterchen. Hierzu dient eine Jodverreibung (1 T. Jod, 5 Tle Bimsstein).

Die Bestrebungen, diese spezifische blaue Jodfärbung der Stärke „haltbar“ für Dauerpräparate zu machen, waren noch nicht ganz erfolgreich. Den Dauerpräparaten fehlt u. A. der für die Blaufärbung nötige Wassergehalt.

Man benützt daher zur Herstellung von Dauerpräparaten die Eigenschaft des Stärkekornes, daß es bestimmte Farbstoffe (Fuchsin, Safranin, Gentianaviolett etc.) in sich aufnimmt.<sup>10)</sup> Vor der Färbung werden die Stärkekörner gebeizt. Als Beize dient Tannin oder Brechweinstein und Tannin.

Bei meinen mikroskopischen Studien der Stärkescheide benutzte ich die von Némec vorgeschlagene Modifikation des Rawitzschen Tannin-Brechweinstein-Verfahrens.<sup>9)</sup>

Die entweder mit Pikrin-Eisessig-Schwefelsäure oder Chrom-Osmium-Essigsäure fixierten Objekte, welche im letzten Falle zur Beseitigung der Osmiumschwärzung mit Wassertoffsuperoxyd zu behandeln notwendig ist, wurden 10—60 Minuten in einer 5% wässrigen Tanninlösung gelassen. Nach 5 Minuten dauerndem Abspülen mit Wasser legt man sie auf 5—15 Minuten in 1½% wässer. Brechweinsteinlösung. Nach einer einige Minuten dauernden Auswaschung folgt Gentianaviolett, worin die Schnitte mindestens eine halbe Stunde verbleiben. Dann Auswaschen in fließendem Wasser, Alkohole von steigender Konzentration, Xylol und Einschließen in Kanadabalsam.

Das gründliche Auswaschen nach der Brechweinsteinbehandlung ist unbedingt nötig, da sonst im Präparat Niederschläge entstehen, die kaum mehr zu entfernen sind. In den auf diese Weise hergestellten Präparaten erscheint der Zellinhalt nur ganz schwach grau, oder violett. Die Stärkekörner sind stark violett, und es läßt sich bequem ihre Verteilung in der Zelle studieren.

Die zweite Methode, die ich am meisten zur Anwendung brachte, geschieht ohne Beizung in Brechweinstein. — Da verbleiben die Schnitte 30—60 Minuten und je nach Bedarf noch länger in einer 5% wässer. Tanninlösung. Nach kurzem Auswaschen in fließendem Wasser legt man sie auf 6—12 Stunden in Gentianaviolett (1 : 10) oder in Safraninamin von derselben Konzentration, wie bei der Dreifachfärbung nach Flemming.

Nach dem Färben folgt ein Auswaschen in Wasser und vorsichtige Differenzierung in Alkoholen von steigender Konzentration. Am besten wechselt man die schwächeren Alkohole rasch und läßt die eigentliche Entfärbung in Alkohol absol. sich vollziehen. Bei vorsichtiger Durchführung dieser Methode werden nur die Stärkekörner und Zellwände gefärbt, das Andere bleibt ungefärbt.

Was die der Arbeit beigelegten Abbildungen betrifft, so sind dieselben Mikrophotographien. Die Optik stammte aus Reicherts optischer Anstalt in Wien und als Negativmaterial wurden die orthochromatisch-lichthoffreien Platten Hauff-Feuerbach benützt. Positive Kopien sind auf Ridax-Chlorbromsilber-Papier der Gäwert-Firma — Paris — hergestellt.

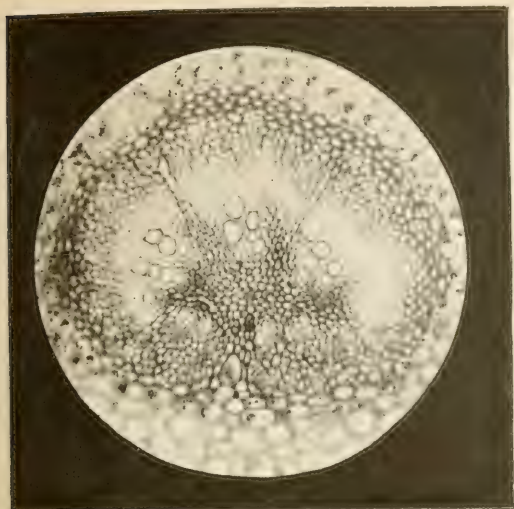
## LITTERATUR.

1. Pfeiffer: Die periodischen Bewegungen der Blattorgane 1875.
  2. A. Fischer: Botanische Zeitung 1890.
  3. O. Vodrážka: O významu tíže při pohybech nyktitropických. Rozpr. Č. Akademie 1907.
  4. Němec B.: Über die Art der Wahrnehmung des Schwerkraftreizes bei den Pflanzen (Ber. d. D. bot. Ges. 1900).
  5. Němec B.: Über die Wahrnehmung des Schwerkraftreizes bei den Pflanzen, Jahrb. wiss. Bot. 1901.
  6. Haberlandt: Über die Perzeption des geotr. Reizes. (Ber. d. d. bot. Ges. 1900).
  7. Němec: O škrobové pochvě Cucurbitaceí. Rozpr. Č. Akademie 1904.
  8. Tunmann: Pflanzenmikrochemie. Berlin 1913.
  9. Němec: Inverse Tinkt. Ber. d. D. bot. Ges. 1902.
  10. A. Fischer: Über die kolloidiale Natur d. Stärkekörner und ihr Verhalten gegen Farbstoffe. Bot Zbl. 1905.
  11. H. Fitting: Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. XLI. 1906.
-

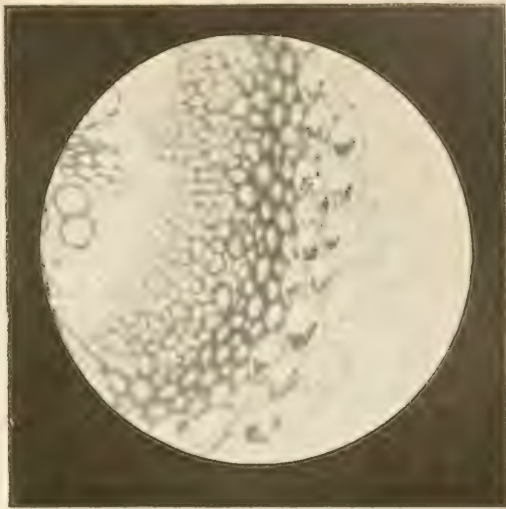
## ERKLÄRUNG DER TAFELN UND ABBILDUNGEN.

- Abb. 1. im Text* ist Längsschnitt durch den Blattstiel und das Gelenk von *Oxalis Ortegessii*. Obj. 1. Okular IV. Vergr. 50.
- Abb. 2. im Text* ist Querschnitt durch das Gelenkpolster von *Astragalus mexicanus*. Obj. 3. Ok. IV. Vergr. 120.
- Tafel I. *Abb. 1.* Querschnitt durch das Gelenkpolster der jungen *Amicia zygomeris*. Obj. 5. Ok. IV. Vergr. 380.
- Tafel I. *Abb. 2.* Dasselbe stärker vergrößert Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel I. *Abb. 3.* Querschnitt durch das Gelenkpolster einer alten *Amicia zygom.* Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel I. *Abb. 4.* Längsschnitt durch das Polster von *Amorpha canescens*. Obj. 7. Ok. II. Vergr. 400.
- Tafel I. *Abb. 5.* Längsschnitt durch das Gelenk von *Astragalus mexicanus*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel I. *Abb. 6.* Querschnitt durch das Gelenk derselben Pflanze. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel II. *Abb. 1.* Querschnitt durch das Polster von *Coronilla varia*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel II. *Abb. 2.* Querschnitt durch das Gelenk von *Laburnum vulgare*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel II. *Abb. 3.* Querschnitt durch das Gelenk von *Desmodium gyrans*. Obj. 7. Ok. komp. XII. Vergr. ca 800.
- Tafel II. *Abb. 4.* Querschnitt durch das Gelenk von *Galega officinalis*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel II. *Abb. 5.* Querschnitt durch das Gelenk von *Glycyrrhiza glabra*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel II. *Abb. 6.* Längsschnitt durch das Gelenk derselben Pflanze. Obj. 7. Ok. II. Vergr. 400.
- Tafel III. *Abb. 1.* Querschnitt durch das Gelenk von *Phaseolus multiflorus*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel III. *Abb. 2.* Längsschnitt durch das Blattgelenk von *Robinia pseudacacia*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel III. *Abb. 3.* Querschnitt durch das Polster von *Trifolium pratense*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel III. *Abb. 4.* Längsschnitt durch das Polster von *Oxalis Ortegessii*. Obj. 5. Ok. II. Vergr. 230.
- Tafel III. *Abb. 5.* Querschnitt durch das Polster von *Phyllanthus pulcher*. Obj. 7. Ok. IV. Vergr. 620.
- Tafel III. *Abb. 6.* Längsschnitt durch das Polster von *Maranta Litezei*. Obj. 3. Ok. IV. Vergr. 120.

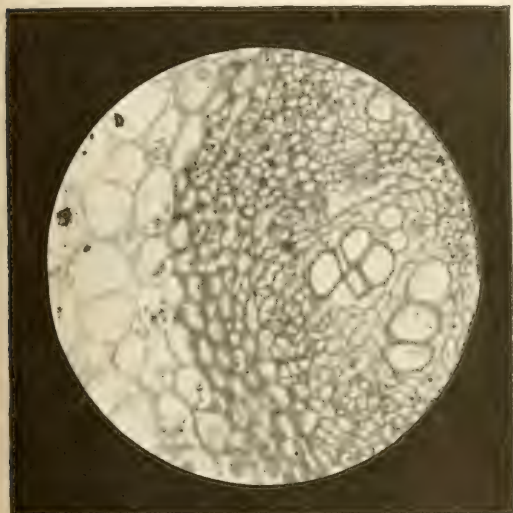




1



2



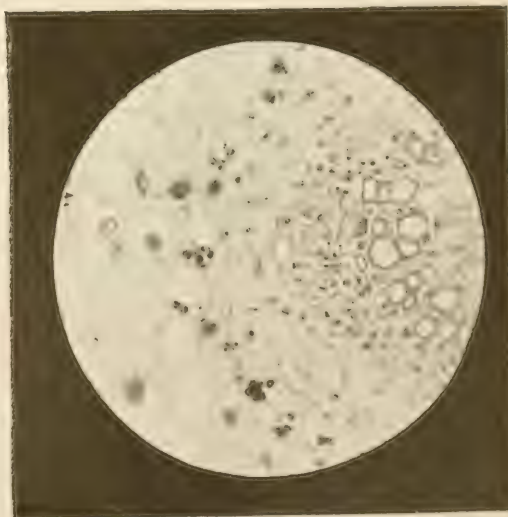
3



4



5

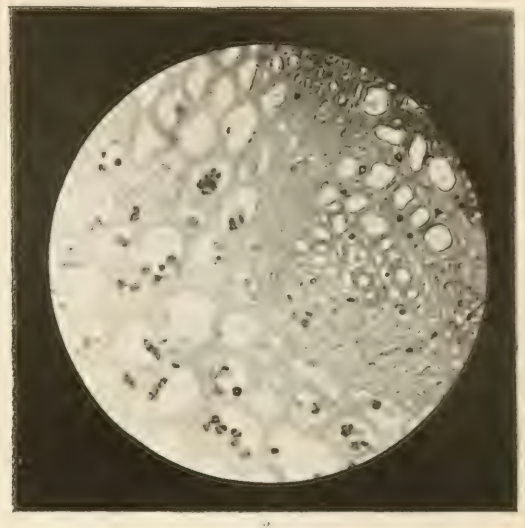


6





1



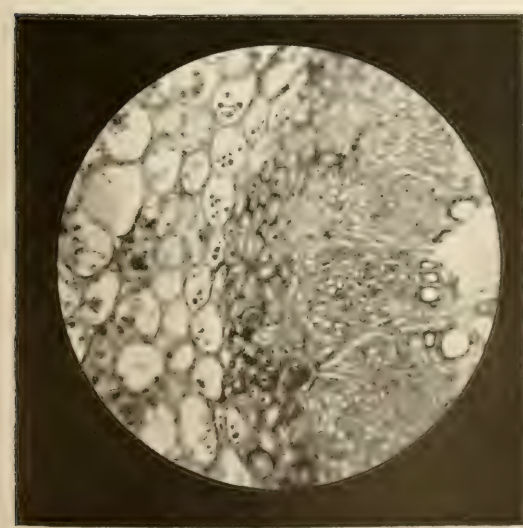
2



3



4



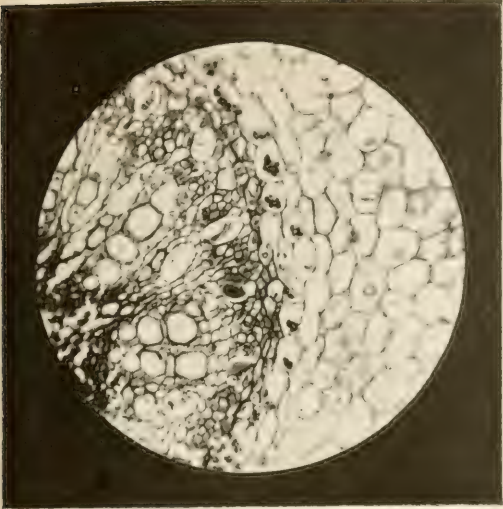
5



6



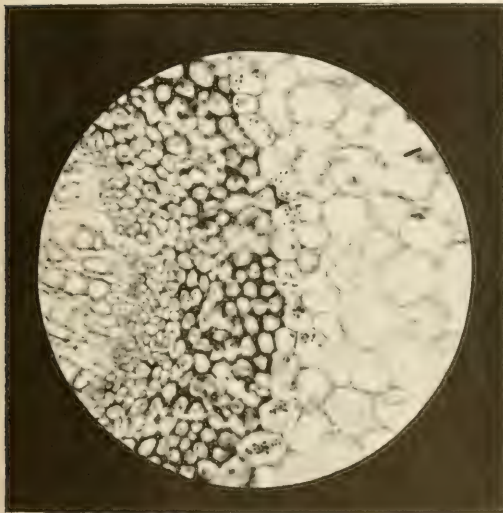




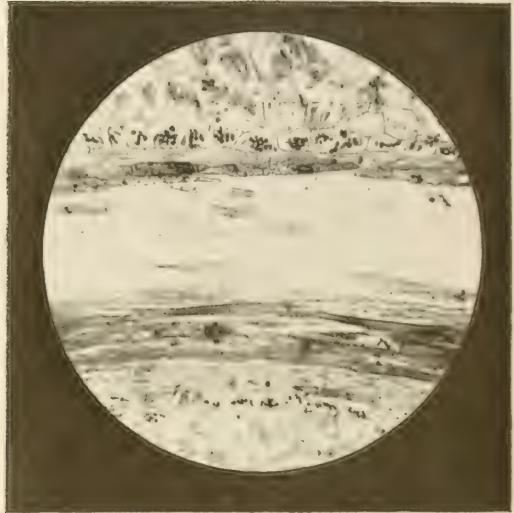
1



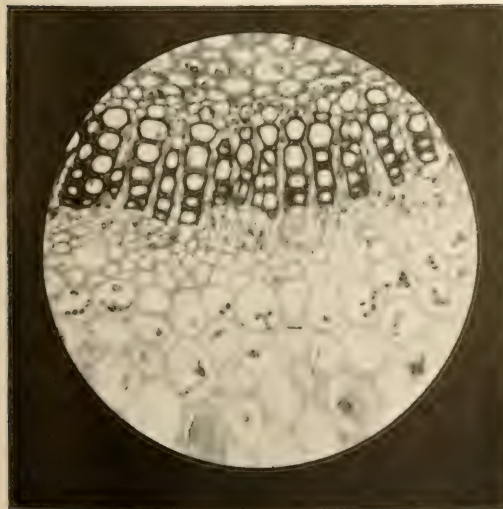
2



3



4



5



6



# Beitrag zur Messung von Selbstinduktionen.

Von

Dr. VÁCLAV ŠEBESTA.

(Auszug aus dem böhmischen Originale.)

(Vorgelegt am 28. Januar 1916.)

Zur Messung von Selbstinduktionen im Bereiche von  $10^9 \text{ cm}$  bis  $10^{12} \text{ cm}$  empfehlen sich die beiden Dolezalek'schen Apparate, die im Prinzip auf der Maxwell'schen Vergleichsmethode beruhen. Die Meßresultate sind sehr befriedigend, das Aufsuchen der Nulleinstellung dagegen oft zeitraubend, insbesondere bei kleinen Selbstinduktionen. Daher erscheint es empfehlenswert, bei Bestimmung von Selbstinduktionen, diese zuerst zu berechnen, und dem erhaltenen Werte gemäß die Brücke wenigstens angenähert einzustellen. Zu diesem Zwecke kann man sich einer der vielen existierenden Formeln bedienen, welche in der Literatur enthalten sind. Doch lassen sich diese Formeln nicht für alle beliebigen Versuchsobjekte anwenden, da jede nur einen gewissen Bereich besitzt, innerhalb welchem sie genügend genaue Resultate gibt. Zweck der vorliegenden Arbeit war, das Anwendungsgebiet der wichtigsten Formeln durch ausgeführte Messungen festzustellen.

Zu diesem Zwecke wurden im böhmischen Originale die wichtigsten Formeln zusammengestellt, in einigen Fällen auch berichtigt und sodann mit den enthaltenen Meßresultaten verglichen. Die in Betracht gezogenen Formeln sind jene von M. Wien,<sup>1)</sup> Koláček,<sup>2)</sup> Maxwell,<sup>3)</sup> Strasser<sup>4)</sup>, Sumec,<sup>5)</sup> und Esau.<sup>6)</sup>

---

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 53, p. 929.

<sup>2)</sup> Elektrina a magnetismus (Sborník Jednoty čes. mathem. č. 11), p. 475 und 460.

<sup>3)</sup> Elektr. u. Magnet. p. 391, II.

<sup>4)</sup> Ann. d. Phys. 17, p. 763.

<sup>5)</sup> Eltechn. Zeitschr. 1906, p. 1175.

<sup>6)</sup> Jahrb. d. drahtl. Telegr. V., 1912, p. 214.

Die Messungen wurden an folgenden Objekten vorgenommen:

1. Kreisring aus Draht mit kreisförmigem Querschnitt.
2. Zwei lange, dicht parallel aneinander liegende gerade Drähte.
3. Einlagige Spulen verschiedener Länge.
4. Flachspulen.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:  $n$  die Frequenz des angewendeten Wechselstromes,  $M$  die Brückeneinstellung am Dolezalekschen Apparat für kleinere Selbstinduktionen,  $J$  die Kerneinstellung daselbst,  $L$  den hierfür aus der Apparatentabelle berechneten Wert der gesuchten Selbstinduktion, nächste Kolonne das arithmetische Mittel zugehöriger Werte von  $L$ ,  $L_{\text{korr.}}$  den korrigierten Mittelwert von  $L$  mit Rücksicht auf die Zuleitungsdrähte; schließlich  $L_{\text{theor.}}$  den theoretischen Wert der Selbstinduktion.

1. Kreisring aus Draht von kreisförmigem Querschnitt. Der Durchmesser des Kreises  $2a = 50.50 \text{ cm}$ ; der Halbmesser des Querschnittes  $r = 0.150 \text{ cm}$ . Nach der Formel von Koláček<sup>1)</sup> oder nach der korrigierten Formel von M. Wien<sup>2)</sup> ergibt sich:  $L = 1731 \text{ cm}$ .

$n$	$M$	$J$	$L$	$\sum_{1}^k L : k$	$L_{\text{korr.}}$	$L_{\text{theor.}}$
800 $\sim$ /sek	26.0	33.4	1750 <i>cm</i>	1760 <i>cm</i>	1744 <i>cm</i>	1731 <i>cm</i>
	27.0	28.8	1766 „			
	28.0	23.0	1761 „			
	29.0	17.0	1765 „			
1080 $\sim$ /sek	26.0	33.4	1750 <i>cm</i>	1755 <i>cm</i>	1739 <i>cm</i>	
	27.0	28.0	1753 „			
	28.0	22.5	1753 „			
	29.0	17.5	1765 „			
1920 $\sim$ /sek	26.0	33.4	1750 <i>cm</i>	1757 <i>cm</i>	1741 <i>cm</i>	
	27.0	28.0	1753 „			
	28.0	23.0	1761 „			
	29.0	17.5	1765 „			
2340 $\sim$ /sek	26.0	33.4	1750 <i>cm</i>	1757 <i>cm</i>	1741 <i>cm</i>	
	27.0	28.0	1753 „			
	28.0	23.0	1761 „			
	29.0	17.5	1765 „			

Die Korrektur der Zuleitungsdrähte von der Länge 6 *cm* betrug rund 16 *cm*. Die Übereinstimmung mit dem theoretischen Werte geht

<sup>1)</sup> Elektr. a magnetismus p. 475.

<sup>2)</sup> W. Ann. 53, p. 529 (Konstante 0,329 statt 0,333).



rund auf 6‰. Gleichzeitig sieht man, daß der Einfluß der Frequenz in dem obigen Bereiche praktisch nicht bemerkbar ist, obzwar die Dicke des Drahtes ziemlich groß war. Die Formel von Bláthy<sup>1)</sup> gibt  $L = 1814 \text{ cm}$ , diejenige von Minchin<sup>2)</sup>  $L = 1659 \text{ cm}$ ; die Abweichungen betragen einige Prozente.

2. Zwei parallele, dicht aneinander geführte Dráhte. Die Isolationsschicht zwischen denselben im Mittel  $0,02 \text{ cm}$ , die Gesamtlänge  $820 \text{ cm}$ . Drahtdicke  $2r = 0,3 \text{ cm}$ . Die Formel von Maxwell<sup>3)</sup> liefert den Wert  $L = 1652,3 \text{ cm}$  für niedrige Frequenzen und  $L = 1546,7 \text{ cm}$  für sehr schnelle Oscillationen.

$n$	M	J	L	$n$	M	J	L
800 $\sim$ /sek	28·0	19·5	1707·3 cm	800 $\sim$ /sek	25·0	35·5	1693·3 cm
1080 „	28·0	19·0	1700·3 „	1080 „	25·0	35·2	1688·6 „
1920 „	28·0	18·0	1685·9 „	1920 „	25·0	34·5	1678·0 „
2340 „	28·0	17·0	1672·3 „	2340 „	25·0	33·5	1662·6 „
800 $\sim$ /sek	27·0	25·0	1705·2 cm	800 $\sim$ /sek	24·0	41·5	1697·4 cm
1080 „	27·0	24·5	1697·5 „	1080 „	24·0	41·0	1688·9 „
1920 „	27·0	23·5	1680·9 „	1920 „	24·0	40·0	1673·7 „
2340 „	27·0	23·0	1674·2 „	2340 „	24·0	39·3	1661·1 „
800 $\sim$ /sek	26·0	30·2	1699·4 cm	800 $\sim$ /sek	23·0	47·2	1699·0 cm
1080 „	26·0	29·7	1691·6 „	1080 „	23·0	47·0	1695·7 „
1920 „	26·0	28·5	1673·0 „	1920 „	23·0	46·0	1679·3 „
2340 „	26·0	28·0	1665·6 „	2340 „	23·0	45·2	1666·2 „

Nimmt man die arithmetischen Mittel für gleiche Frequenzen, so folgt:

$n$	L	Diff <sub>L</sub>	Diff <sub>n</sub>
800 $\sim$ /sek	1700·3 cm		
1080 „	1693·8 „	6·5 cm	280 $\sim$ /sek
1920 „	1676·3 „	17·5 „	840 „
2340 „	1667·0 „	9·3 „	420 „

<sup>1)</sup> *Elt. Z.* 1891.

<sup>2)</sup> *Phil. Mag.* 37.

<sup>3)</sup> *Elektr. und Magn.* II., p. 391.

Der Skineneffekt ist hier merklich; mit steigender Frequenz sinkt  $\epsilon_a L$ ; zugleich sieht man, daß im angeführten Bereiche die Differenzen von  $n$  und  $L$  praktisch proportional sind.

Die Messung wurde so ausgeführt, daß bei unveränderter Brückeneinstellung die Frequenz variiert und demgemäß die Kerneinstellung reguliert wurde.

3. Gerade Spule mit 30 Windungen. Durchmesser der Windungen:  $2a = 2,193 \text{ cm}$ , die Länge der Spule  $5,30 \text{ cm}$ , daher die Ganghöhe  $h = 0,18276 \text{ cm}$ , die Drahtdicke  $2r = 0,050 \text{ cm}$ . Nach der Formel von Strasser<sup>1)</sup> folgt:  $L = 6738 \text{ cm}$ , nach derjenigen von Koláček<sup>2)</sup> — wenn für  $\lambda$  der Mittelwert beider Grenzwerte genommen wird —  $L = 6810 \text{ cm}$ .

$n$	M	J	L	$\sum_1^k L : k$	$L_{\text{korrr}}$	$L_{(\text{Koláček})}$	$L_{(\text{Strasser})}$
800 $\sim$ /sek	57·0	40·0	7026 cm	7016 cm	6826 cm	6810 cm	6738 cm
	58·0	35·5	7016 „				
	59·0	31·0	7008 „				
	60·0	26·5	7013 „				

Die Zuleitungsdrähte waren zusammen  $15 \text{ cm}$  lang, was eine Korrektur von  $190 \text{ cm}$  bedingt. Die Übereinstimmung mit der Koláček'schen Formel ist eine viel bessere, als mit der Strasserschen. Mit wachsender Frequenz zeigte sich keine Änderung der untersuchten Selbstinduktion.

4. Gerade, kurze Spule mit 12 Windungen. Der Halbmesser der Windungen  $a = 2.035 \text{ cm}$ , die Spulenlänge  $l = 3.70 \text{ cm}$ . Drahtdicke  $0.050 \text{ cm}$ .

$n$	M	J	L	$\sum_1^k L : k$	$L_{\text{korrr}}$	$L_{(\text{Koláček})}$	$L_{(\text{Strasser})}$
800 $\sim$ /sek	46·0	36·5	4370 cm	4375 cm	4215 cm	4165 cm	4268 cm
	47·0	32·2	4371 „				
	48·0	28·3	4384 „				
	49·0	24·0	4385 „				
	50·0	19·0	4375 „				

Die Korrektur der Zuleitungsdrähte betrug rund  $160 \text{ cm}$ . Die Übereinstimmung mit den theor. Werten geht etwas über  $1\%$ . Mit wachsender Frequenz zeigte sich keine Änderung der Selbstinduktion.

5. Ähnlicher Fall. Gerade Spule mit 33 Windungen. Der Halbmesser der Windungen  $a = 2.04 \text{ cm}$ , Spulenlänge  $l = 3.88 \text{ cm}$ . Die Koláček'sche

<sup>1)</sup> Strasser: Ann. d. Phys. 17, p. 763. Statt der Konstante 0,333 soll 0,329 stehen.

<sup>2)</sup> Koláček: Elektř. a magnetismus p. 460.

Formel liefert  $L = 30690 \text{ cm}$ . Die Formel von Strasser wird nicht angewendet, da in seiner Arbeit die Werte für  $A_5$  und  $B_5$  nicht angegeben sind.

$n$	M	J	L	$\sum_{1}^k L:k$	$L_{\text{korr}}$	$L_{\text{(Koláček)}}$
800 $\sim$ /sek	83·0	57·6	30610 cm	30638 cm	30478 cm	30690 cm
	84·0	49·8	30610 „			
	85·0	42·3	30720 „			
	86·0	33·5	30630 „			

Die Übereinstimmung mit dem Werte nach Koláček geht auf 7<sup>0</sup>/<sub>100</sub>.

Die letzten zwei Fälle zeigen, daß die Koláčeksche Formel auch noch für so kurze Spulen anwendbar ist, wo die Spulenlänge  $l$  gleich dem Spulendurchmesser  $2a$  ist, gleichviel, ob die Windungen eng aneinander geführt sind, oder nicht. Da die Länge  $l$  selbst oft nicht genug genau bestimmbar ist, so ist auch die präzise Bestimmung von  $l$  nicht notwendig, die überdies erst in zweitem Korrektionsgliede vorkommt.

6. Kurze Spule mit 13 Windungen. Der Halbmesser der Windungen  $a = 4,05 \text{ cm}$ , Spulenlänge  $l = 1,85 \text{ cm}$ . Ganghöhe  $h = 0,1542 \text{ cm}$ . Drahtdicke  $2r = 0,05 \text{ cm}$ . Die Formel von Strasser gibt hier  $L = 20091 \text{ cm}$ . Nach der Formel von Sumeč folgt, wenn man  $b = 1,85$  und  $c = 0$  setzt,  $L = 20310 \text{ cm}$ .

$n$	M	J	L	$\sum_{1}^k L:k$	$L_{\text{korr}}$	$L_{\text{(Sumeč)}}$	$L_{\text{(Strasser)}}$
800 $\sim$ /sek	77·0	56·5	20725 cm	20727 cm	20537 cm	20310 cm	20091 cm
	78·0	50·0	20680 „				
	79·0	44·0	20703 „				
	80·0	37·0	20800 „				

Die Korrektion der Zuleitungsdrähte betrug rund 190 cm. Die Übereinstimmung mit der Formel von Sumeč geht auf 1<sup>0</sup>/<sub>100</sub>, mit derjenigen von Strasser auf 2<sup>0</sup>/<sub>100</sub>. Allerdings sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Sumečschen Formel nur angenähert, als ob anstatt der Drähte dünne Streifen auf die Spule aufgewickelt sein würden; nichtsdestoweniger zeigen die Resultate, daß für die Orientation die Formel von Sumeč<sup>1)</sup> vorteilhaft anwendbar ist wegen ihrer Einfachheit.

<sup>1)</sup> Elt. Zeitschr. 1906, p. 1175. Die dort angeführte Beziehung für mittleren geom. Abstand liefert für Spulen von  $\xi$  Windungen die Formel:

$$L = 4 \pi a \xi^2 \left( \log \frac{8 a}{0,2235 (b + c)} - 2 \right).$$

7. Gerade Spule mit 42 Windungen. Der Durchmesser der Windungen  $2a = 8,01 \text{ cm}$ , Spulenlänge  $l = 2,85 \text{ cm}$ . Drahtdicke  $2r = 0,050 \text{ cm}$ . Hier kann man weder die Strasser'sche noch die Koláček'sche Formel anwenden. Bei ersterer fehlen die Größen  $A_\xi$  und  $B_\xi$ ; für die Koláček'sche Formel ist die Spule zu kurz. Setzt man aber in der Formel von Sumec  $b = 2,85 \text{ cm} = l$  und  $c = 0,05 \text{ cm}$ , folgt:  $L = 168700 \text{ cm}$ .

Die Messung am Apparate für größere Selbstinduktionen ergab:

$L = 170000 \text{ cm}$  mit Vergleich mit dem Normale  $0,001 \text{ Henry}$

$L = 168000$  „ „ „ „ „ „  $0,0001$  „

daher das Mittel  $169000 \text{ cm}$ , was eine Übereinstimmung auf einige Promille mit dem theoret. Werte bedeutet. Kein Einfluß der Frequenz auf die Selbstinduktion.

8. Flachspule mit 5 Windungen. Der Durchmesser der fünften Windung  $32,97 \text{ cm}$ , der ersten (inneren)  $30,35 \text{ cm}$ . Drahtdicke  $0,10 \text{ cm}$ . Die Drähte wurden bis auf die Isolationsschicht dicht aneinander gefügt. Wird angenähert angenommen, daß die Drähte eine ringförmige Scheibe von der Differenz der Durchmesser  $2,62 \text{ cm}$  bilden, d. h. setzt man in der Formel von Sumec  $b = 1,31 \text{ cm}$  und vernachlässigt das  $c$ , so folgt:  $L = 19420$ . Nach der Formel von Esau<sup>1)</sup> folgt  $L = 19543 \text{ cm}$ .

$n$	M	J	L	$\sum_{1}^k L : k$	$L_{\text{kor}}$	$L_{\text{(Sumec)}}$	$L_{\text{(Esau)}}$
800 $\sim$ /sek	76,0	56,8	19663 cm	19679 cm	19519 cm	19420 cm	19543 cm
	77,0	50,8	19686 „				
	78,0	44,8	19710 „				
	79,0	38,5	19657 „				

Korrektion der Zuleitungsdrähte betrug rund  $160 \text{ cm}$ . Mit der Formel von Sumec stimmt der erhaltene Wert auf  $5\%$  überein. Der Einfluß der Frequenz auf das  $L$  konnte nicht konstatiert werden.

Auf Grund dieser Resultate kann man dafürhalten, daß für einlagige Spulen der Längen von  $2a$  bis  $\infty$  die Formel von Koláček, für Spulen der Längen von  $0$  bis  $2a$  die Formel von Sumec angewendet werden kann.

<sup>1)</sup> Jahrb. d. drahtl. Telegr. V., 1912, p. 214.



# Die geologischen Verhältnisse im Talgebiete des Kačákaches zwischen Unhošť und Nenačovic.

Von Privatdozent Dr. JOSEF WOLDŘICH.

(Mit 2 Tafeln und 7 Profilen im Texte.)

Vorgelegt am 26. Mai 1916. \*)

## Einleitung.

Das behandelte Gebiet liegt südlich von *Unhošť* und ist im *W* durch die Linie *Nouzov-Klein Kyšic-Libečov-Železná* begrenzt; die südl. Grenze verläuft von *Železná* über *Klein Příleč* gegen *Nenačovic* und in das Tal von *Hořelice*; die östl. Grenze von hier gegen *Ůhonic-Ober Ptíč* und *Svárov*. Es gehört zum Kartenblatte *Kladno-Schlan* und liegt im nördl. Flügel des älteren mittelböhmisches Paläozoikums; seine geologischen und montanistischen Verhältnisse behandelten insbesondere *Krejčí, Lipold, Bořický, K. Feistmantel, Vála-Helmhacker* und teilweise auch *Jahn*. Von den unser Gebiet betreffenden geologischen Karten führe ich die Karte der Umgebung von Prag von *Krejčí-Helmhacker*,<sup>1)</sup> *Počtaš*<sup>2)</sup> Karte der weiteren Umgebung von Prag und *Vála-Helmhacker's*<sup>3)</sup> Karte der Umgebung von *Svárov* und *Nučic* an.

Für die Unterstützungen, welche mir bei meinen Arbeiten im älteren mittelböhmisches Paläozoikum aus dem *Barrandeschen Fonds* und von der *II. Kl. der Böhm. Akademie der Wissenschaften* zuteil wurden, spreche ich an dieser Stelle meinen Dank aus.

Unser ganzes Terrain gehört dem Flußgebiete des *Kačák* oder *Lodenitzer Baches* zwischen *Klein Kyšic* und *Nenačovic* an und wird von ihm und seinen Zuflüssen entwässert. Der *Kačák* entspringt am südl. Abhänge des *Žbán* und durchfließt zunächst des Permo-Karbon bis gegen

---

\*) Ein ausführlicher Auszug aus der gleichnamigen in den „Rozpravy České Akademie“ in böhmischer Sprache erschienenen Arbeit.

*Družec*, hierauf das Algonkium bis südöstl. von *Podkoží* und schließlich das Silur und Devon bis zu seiner Mündung bei *Srbsko*. Er durchfließt unser Gebiet von *NW* gegen *SO* und teilt dasselbe in einen nordöstl. (bezw. östlichen) und einen südwestl. (bezw. westlichen) Abschnitt. Den nordöstlichen Teil durchfurcht abermals die *Švarcava* (*Černý potok*), der *Rymáňer-* und *Svárover Bach*, ein bei *Podkoží* mündender Zufluß und der *Ůhonicer-Bach*, schließlich ein von der Kote 395 am *Modrý vrch* herabfließender kleiner Zufluß und der *Hořelitzer-Bach*. Bloß der *Švarcava-Bach* fließt in nordsüdl. Richtung ab, während die anderen Zuflüsse fast insgesamt eine *NO—SW-* oder *O—W-*Richtung haben. Dem südwestl. Teile gehört zunächst ein kleiner, bei der *Dědek-Mühle* mündender Zufluß, ferner der *Chyňava-Bach*, ein den *Toten-Grund* durchfließendes Bächlein, der *Příleper-Bach* mit seinen knieförmig umgebogenen Zuflüssen und schließlich ein in der östl. Fortsetzung des *Hořelitzer-Tales* fließender Bach an.

Unser Gebiet ist ein Teil einer alten Fastebene, welche vom *Kačák-Bache* und seinen Zuflüssen durchschnitten ist. Die absol. Höhen bewegen sich zwischen 265 *m* (*Kačáktal* bei *Nenačovic*) und 460 *m* (*Drabover Quarzite* östl. von *Libečov*).

Insbesondere der silurische Teil des Gebietes ist in eine Reihe von Rücken und Höhen zerlegt, denn es wechseln hier vielfach Gesteine von wesentlich verschiedener mechanischer und teilweise auch chemischer Widerstandsfähigkeit ab. Hingegen ist die Oberfläche des algonkischen Teiles infolge seiner petrographisch weniger wechselreichen Zusammensetzung bei weitem einförmiger.

## I. Stratigraphie.

In unserem Gebiete sind *algonkische* und *silurische Schichten*, *Tertiär*, *Diluvium* und *Alluvium*, jenseits der östl. Grenze *Kreideschichten* vertreten. Das *Algonkium* besteht aus Schiefen, Grauwacken und Kieselschiefen; dem *Silur* gehören die *Kruschmahora-*, *Komorauer-*, *Osek-Kwáněv-* und *Zahořanerschichten* an. Dem *Tertiär* rechne ich die Schotter von *Přílepe*, dem *Diluvium* die Flußterrassen und manche Gehänge- und Eluvialablagerungen, dem *Alluvium* hauptsächlich die jüngsten Flußablagerungen und teilweise auch den Gehängeschutt zu. Die *Kreideschichten* begleiten die östl. Grenze unseres Gebietes.

### A. Algonkium.

Das linke *Kačák-Ufer*. Das Algonkium besteht hier aus braunen, grünlich-grauen bis schwarzen Tonschiefen und aus schwarzen, harten quarzitäen Schiefen. Den Schiefen sind zwei mächtigere Zonen,

welche vorherrschend aus Grauwacken und -schiefern bestehen, eingelagert. Die eine verläuft von *Klein-Kyšic* gegen *Unhošt*, die zweite von den Mühlen bei *Podkozí* nach *NO*.

**Das rechte Kačák-Ufer.** Hier herrschen Tonschiefer vor. Grauwacken und Grauwackenschiefer treten insbesondere nordwestl. von *Podkozí* bei Kote 389 auf, bilden eine zusammenhängende Zone, welche sich aus dem Tale des Kačákbaches über die Kote 377 südl. von *Podkozí* hinzieht, und bilden größtenteils das Liegende unseres Silurs.

Kieselschiefer fand ich westl. von *Podkozí*, ferner nördl. von *Chyňava* bei Kote 410, wo auf unseren Karten irrtümlich die Bezeichnung „Kalksteinbruch“ steht.

Das Algonkium unseres Gebietes gehört nach der Stratigraphie von *Kettner-Slavík*<sup>4)</sup> einem höheren, jüngeren Horizonte an, als die Stufe, welche durch die spilitischen Ergußgesteine charakterisiert ist. Man findet in unserem Terrain zwar keine Spilite, jedoch Kieselschiefer, deren Entstehung postvulkanischen Prozessen der Spiliteruptionen zugeschrieben wird.

*Man kann im Algonkium des behandelten Gebietes ganz gut neben vorwiegend schieferigen Zonen auch solche, welche fast ausschließlich grauwackenartig sind, verfolgen und auf der Karte ausscheiden. Da hier Spilit- oder andere für die Stratigraphie bezeichnende Horizonte fehlen, tragen die Grauwacken wesentlich zur Erkenntnis der Tektonik unseres Algonkiums bei. Von ähnlicher Beschaffenheit ist das von mir unlängst kartierte Algonkium des Šárkatal.*

Die bunten Schiefer, welche z. B. auf der *Chrbina*, bei *Libečov*, im *Šárkatal* und anderwärts sich unmittelbar im Liegenden des Silurs befinden, wurden in der älteren Literatur bald zur Etage *D*, bald zu *C* oder *B* gerechnet. Nach meinen Beobachtungen gehören sie dem Algonkium an.

## B. Silur.

Die Grenze zwischen Algonkium und Silur verläuft westl. von *Libečov* über den *Chyňavabach*, weiter über den nördl. Abhang der *Chrbina* in das *Kačáktal*, wo sie südwestl. von Kote 279 entblößt ist. Sie setzt sich dann über den *Karabinský vrch* nach *NO* gegen *Svárov* fort. Wenn wir sie von *SW* nach *NO* verfolgen, so beobachten wir, wie sie stufenweise durch Querbrüche gegen *N* verschoben wird. Die Diskordanz zwischen Algonkium und Silur äußert sich in etwas abweichender Richtung und verschiedenem Einfallswinkel. Während die algonkischen Schichten nahe der Grenze steil gestellt zu sein pflegen, beträgt das Einfallen der Silurschichten durchschnittlich nur 45°.

### 1. *Kruschnahoraschichten* ( $d_{r\alpha}$ ).

Dem Algonkium sind überall in unserem Gebiete zunächst diskordant die *Kruschnahoraschichten* aufgelagert. Sie bestehen aus Konglomeraten,



Quarziten, Quarzitsandsteinen, grauen und roten, oft grauackentartigen Sandsteinen, feinkörnigen, fleckigen oder gestreiften sandigen Schiefern mit Einlagerungen von grünlichen und rötlichen feinen Schiefen, ferner aus roten schieferigen Grauackent und Grauackentschiefen. Die Kruschnahoraschichten sind durch zahlreiche Steinbrüche aufgeschlossen, in welchen insbesondere die Basalkonglomerate und Quarzite ausgebeutet werden. So z. B. nahe der Kote 416 östl. von *Libečov* im Tale des *Chyňavabaches* unweit der Lokalität, „*na Močidle*“, westl. von *Libečov*, westl. von *Ober-Ptíč* u. s. w.

NW.

SO.



Fig. 1. Schematisches Profil durch die Kruschnahoraschichten ( $d_{1\alpha}$ ) westl. von *Libečov*. 1. Konglomerate. 2. Quarzitischer Sandstein. 3. Roter Sandstein. 4. Grauer, quarzitischer Sandstein, 5. Dunkelrote Schiefer. 6. Graue quarzitisches Sandsteine. 7. Rötliche und grünliche Schiefer. 8. Fleckige Sandsteine. 9. Feinkörnige rote Grauackent.

NW.

SO.



Fig. 2. Schemat. Profil durch die Kruschnahoraschichten ( $d_{1\alpha}$ ) „*Na Močidle*“ bei *Libečov*. 1. Algonkische Grauackent. 2. Schutt. 3. Konglomerate. 4. Quarzitischer Sandstein. 5. Graue oder bunte Sandsteine und sandige Grauackent-schiefer. 6. Rote, feine Schiefer, 7.  $d_{1\beta}$ .

NW.

SO.

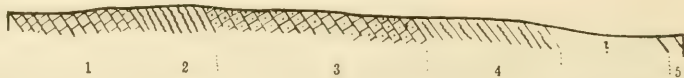


Fig. 3. Schemat. Profil durch die Kruschnahoraschichten westl. von *Ober-Ptíč*. 1. Konglomerat. 2. Grauer Quarzit. 3. Feinkörniges Konglomerat. 4. Quarzit. 5. Roter Sandstein (Horizont unbestimmt).

**Stratigraphische Übersicht.** Auf Grund eines Vergleiches der Profile, welche uns die Kruschnahoraschichten unseres Terrains bieten, konnte ich in petrographischer Hinsicht 4 Horizonte unterscheiden, welche ich mit I.—IV. bezeichne. (Siehe Fig. 1.—3.)

I. An der Basis der Kruschnahoraschichten beobachten wir überall mehr oder weniger grobe Konglomerate, welche hauptsächlich weiße Quarze und Kieselschiefer enthalten. Die Konglomerate gehen allmählich in Quarzite und quarzitisches Sandsteine über, oder wechsellagern mit denselben z. B. bei *Ptíč*. Die Quarzite sind oft den Drabover-Quarziten



übereaus ähnlich. In dem Profile Fig. 1 gehören zu diesem Horizonte die Schichten 1—3, in Fig. 2 Schichte 3, in Fig. 3 die Schichten 1—4.

II. Zu diesem höheren Horizonte der Kruschnahoraschichten zähle ich westl. von *Libečov* Fig. 1 die Schichten 4—7, „*Na Močidle*“ die Schichte 4, westl. von *Ptíč* die Schichte 5.

III. Die Sandsteine der Zone II, werden von rot und gelb gestreiften Sandsteinen und bunten sandigen Schiefen überlagert. Die Sandsteine und sandigen Schiefer dieser Zone sind lokal als grobförmige bis konglomeratartige Grauwacken ausgebildet. Zum Horizonte III, gehören westl. von *Libečov* Schichte 8, „*Na močidle*“ Schichte 5 mit *Lingula lamellosa*.

IV. Die jüngsten Schichten der Stufe  $d_{1a}$  bilden in unserem Gebiete röte, feine oder grauwarenartige Schiefer. An der Lokalität „*Na močidle*“ treten sie am Felde am linken Ufer des Chyňava-Baches (Fig. 2, Schichte 6) auf; westl. von *Libečov* erscheinen sie ganz oben im Steinbruche (Fig. 1, Schichte 9). Demselben Horizonte gehören wohl auch die roten, bisweilen grauwarenartigen Schiefer an, in welchen wir in der Nähe des Chrbinastollens zahlreiche Brachiopodenreste auffanden.

Die angeführten Konglomerate wurden von Lipold (6) als Příbramer Grauwacken, von Vála-Helmhacker (l. c. 3) als Liegendes der erzführenden Stufe betrachtet. Auf der Karte von Krejčí-Helmhacker (l. c. 1) sind sie als C, also Kambrium bezeichnet, in Počta's Karte (l. c. 2) sind sie richtig zu  $d_1$  einbezogen. Jahn<sup>7)</sup> hält sie für Třemošná-Konglomerate. *Meiner Ansicht nach sind es Basalkonglomerate der Stufe  $d_{1a}$ , wie wir sie ja auch an zahlreichen anderen Lokalitäten im Liegendteile der Kruschnahoraschichten vorfinden.* Ganz richtig zeichnen Krejčí-Feistmantel<sup>8)</sup> in den Profilen 28 und 32 im Hangenden des Algonkiums bei Chyňava und am Karabinský vrch direkt die Schichtenstufe  $d_{1a}$ . Ähnlicher Ansicht ist auch K. Feistmantel<sup>9)</sup> betreffs der an der Basis von  $d_{1a}$  auf der Kruschna Hora liegenden Konglomerate.

**Paläontologische Notizen.** Versteinerungen fand ich in den Zonen III. und IV. der Kruschnahoraschichten. In Zone III. findet man etwas unterhalb der Schichten mit *Lingula lamellosa* Barr. eine Lingulaart von dreieckigem Umriss, die an *Obolella Feistmanteli* Barr. erinnert. In demselben Horizonte konnte ich in einigen Exemplaren eine völlig neue, unten breite, nach oben stark sich verschmälernde Lingulaart feststellen. Sie ist in großem *Barrandeschen* (9 a) Werke nicht angeführt. *Lingula (Obolella?) lamellosa* Barr. ist überaus häufig insbesondere unten hart am Chyňaver Bache aufzufinden. In der Nähe des Chrbinastollens kommen in einer konglomeratartigen Grauwacke ebenfalls der *Obolella Feistmanteli* ähnliche Linguliden vor; sie gehören gleichfalls einem tieferen Horizonte als *Lingula lamellosa* an. In den roten Schiefen der Zone IV. fand ich am Abhange des Chrbinarückens *Lingula miranda* Barr., *Lingula ancilla?* Barr., *Barroisella insons* Barr., *Obolella complexa* Barr. und *Obolus n. sp.* Ich ver-

weise hier auf die reichhaltige von J a h n (l. c. 7) hier aufgesammelte Brachiopodenfauna.

## 2. Die Komorauer Schichten ( $d_{1\beta}$ ) und Erzlagerstätten.

Die Stufe  $d_{1\beta}$  enthält hauptsächlich Ergußgesteine eines Diabasmagmas, Schiefer und Eisenerz. Die diabasischen Ergußgesteine sind mandelstein- oder tuffartige, körnige oder dichte grünlichgraue Gesteine. Ich habe einige Proben mikroskopisch untersucht und will hier vorläufig nur kurz über meine Beobachtungen berichten.

Die bereits makroskopisch tuffartigen Gesteine sind aus schlackigen bis aschenartigen Bruchstücken zusammengesetzt, welche unter dem Mikroskope eine blasige Struktur aufweisen, außer den Blasenausfüllungen hauptsächlich aus umgewandelter glasiger Masse, leistenförmigen Labradoriten und stellenweise auch Augiten bestehen. Die Bruchstücke sind durch  $CaCO_3$  verkittet. Mikroskopisch erinnern diese Gesteine vielfach an manche Basaltaschentuffe (Palagonite). Ich fand solche Tuffe z. B. westl. und östl. von *Libečov* am Abhange des *Chrbinar*rückens, oberhalb des *Kačák-Tales* u. s. w. Andere Diabasgesteine zeigen die Beschaffenheit körniger, magnetitreicher Diabase; andere wiederum machen den Eindruck einer ursprünglich glasreichen, blasigen Lava. In den eigentlichen Mandelsteinen treten leistenförmige Labradorite und Augite, die durch eine glasige Mesostasis verkittet sind, auf. Die Ausfüllung der Mandelräume besteht insbesondere aus  $CaCO_3$ . Nach Verwitterung und Auslaugung derselben haben die Mandelsteine ein poröses Aussehen.

Unweit der Lokalität „*Na močidle*“ findet man alte Haldenreste mit oolithischen Eisenerzen und schwarzen glimmerigen Schiefen ( $d_{1\beta}$ ), in denen sich nicht gut erhaltene Reste von *Didymograptus* vorfinden.

**Eisenerzlagerstätten.** — Die Eisenerze wurden in unserem Gebiete insbesondere in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts abgebaut. Die Lagerstätten wurden aufgeschlossen bei *Chyňava*, nordöstlich von *Libečov*, am *Chrbina*-Rücken, wo sich über dem *Kačák-Tale* der Erbstollen und weiter westlich der *Chrbina*stollen befindet. Am *Karabinský vrch* wurden oberhalb des *Chyňava*-Baches ebenfalls zwei Stollen angelegt. Der unten am Abhange gelegene Stollen ist bis heute noch teilweise zugänglich; weiter gegen *NO* liegt der höhere *Adalbert*stollen. Von da gegen *Ober-Plíč* findet man noch 4 Schächte.

Betreffs der Erzlagerstätten verweise ich auf die eingehende Arbeit von *Vála-Helmhacker* (l. c. 3).

## 3. Osek-Kváněř Schichten ( $d_{1\gamma}$ ).

Die leicht verwitternden Schiefer sind meist durch Vegetation und Schutt verdeckt. Nur an einigen wenigen Stellen treten sie zu Tage. So z. B. am Wege des westl. Abhanges der *Hárka* bei *Libečov*, am nördl.

Abhänge der *Chrbina*, am neuen Wege, der von der Rejnover-Mühle auf den Berg *Ůdersko* führt.

Ihre Mächtigkeit ist unbedeutend, entschieden bei weitem geringer als in ihrer nord-östl. Fortsetzung im *Šárka-Tale*.

#### 4. *Drabover Quarzite* ( $d_2$ ).

Dieselben verlaufen in morphologisch markanter Weise von der *Hůrka bei Libečov* über Kote 461 auf den *Chrbina*-Rücken; am linken *Kačák*-Ufer bilden sie die bedeutendsten Erhebungen am Berge *Ůdersko*, sowie den nördl. Teil des *Rýmaňský vrch*. Auf ihnen liegt auch der trigonometrische Punkt 437 des *Karabinský vrch*; ihre nordöstl. Fortsetzung ist östl. von *Ober-Ptíč* gegen *N* verschoben. Auf der *Hůrka*, dem *Chrbina*-Rücken und *Karabinský vrch* sind in ihnen größere Steinbrüche angelegt.

#### 5. *Diabas im Hangenden der Drabover Quarzite*.

Am besten ist dieser an beiden Ufern des *Kačák*-Baches in der Nähe der Rejnover Mühle aufgeschlossen. Wie ich feststellen konnte, reicht er jedoch nicht weit nach *NO* und *SW* (siehe die geol. Karte!). Das Diabaslager besteht hauptsächlich aus Tuffen, die bereits makroskopisch deutlich geschichtet erscheinen; stellenweise hat es das Aussehen eines deckenförmigen Ergusses mit zwiebelförmig-schaliger Absonderung. Der Tuff besteht aus Aschenteilchen und Lapilli von glasiger und poröser Beschaffenheit, welche durch  $Ca CO_3$  verkittet sind. Petrographisch ist er überaus ähnlich manchen Diabastuffen der Komorauer-Schichten ( $d_{1b}$ ), wie sie oben beschrieben wurden.

Die Diabaseruption begann bereits vor Ende der Stufe  $d_2$  und dauerte hauptsächlich zur Zeit zwischen der Beendigung der Ablagerung der Drabover Quarzite und dem Beginne der *Zahořaner-Schichten*  $d_4$  an.

#### 6. *Zahořaner-Schichten* $d_4$ .

Ton- und Grauwackenschiefer, Grauwacken und Quarzite dieser Stufe setzen den südl. Teil unseres Gebietes zusammen. Südöstl. von *Libečov* bei Kote 449 treten im Kerne einer teilweise denudierten Antiklinale der *Zahořaner-Schichten*  $d_4$  Drabover Quarzite  $d_2$  auf. Nördl. und westl. von *Nenačovic* bestehen die größten Erhebungen aus harten  $d_4$ -Quarziten.

Hierher gehört der Hügel mit Kote 426, bei *Klein-Příleč* die Koten 381 und 360, ferner Kote 347 südl. von *Nenačovic*. Die genannten Hügel pflegen voneinander durch kleine Täler getrennt zu sein, die einerseits längs weicher Schieferstreifen verlaufen, andererseits aber längs Querdислоkationen knieförmig umbiegen. (Vergl. die geol. Karte.)



## C. Tertiär.

1. *Terrassenschotter.*

Östl. von *Klein-Příleř* findet man auf den Feldern eine reichhaltige Schotterdecke. Der Schotter besteht hauptsächlich aus Quarz-, Quarzit-, Kieselschiefer-, spärlichen Gneis- und Granitgeröllen. Seltener beobachtet man Schotterspuren westl. von *Klein-Příleř* am Wege nach *Železná*, ja selbst südl. von *Železná*, ferner südl. des Berges *Višňová* in einer Höhe von 380 m.

Diese Schotter liegen bei *Příleř* 360—380 m ü. d. M., während der *Kačák* bei *Nenačovic* eine Höhe von 265 m erreicht. Es liegen also die Schotter etwa um 95—115 m höher als das heutige *Kačák*tal. Vergleichen wir weiter die Höhenlage der *Příleřer* Schotterterrasse mit der Terrasse des *Beraunflusses* bei *Nenačovic*, welche ich für analog der Oberterrasse des *Beraunflusses* halte! Die Oberterrasse von *Nenačovic* liegt 300—320 m ü. d. M., also 35—55 m über dem heutigen *Kačák*tale. Die *Příleřer* Terrasse liegt also wenigstens um 60 m höher; allerdings gelangten diese Schotter in östl. Richtung teilweise auch durch sekundäre Umlagerung in eine geringere Höhenlage.

Ich halte die *Příleřer* Schotter, welche demnach höher liegen und älter sind als die diluviale Oberterrasse bei *Nenačovic*, für tertiär (vielleicht pliozän). Sie gehören wohl in die Reihe der Schotter in Mittelböhmen, welche in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren für Tertiär gehalten werden. Ich erinnere an die Schotter von *Kornö* und auf der *Sulava*, bei *Tobolka*,<sup>10)</sup> bei *Litten* und *Krupná*,<sup>11)</sup> bei *Slouř*, *Klinec* und *Závist*,<sup>12)</sup> bei *Rakonitz* <sup>13)</sup> u. s. w.

Unweit der Terrasse von *Příleř* liegt eine kleine Insel karbonischer Ablagerungen, in welchen auch mehr oder weniger grobe Konglomerate auftreten. Es könnte vielleicht die Meinung ausgesprochen werden, daß der *Příleřer* Schotter einen Überrest der zerstörten Karbonkonglomerate vorstelle. Ich bin nicht dieser Ansicht, und zwar wegen der Mächtigkeit dieses Schotters, des absoluten Fehlens jeglicher Überreste eines karbonischen Bindemittels, wegen seiner petrographischen Beschaffenheit und seiner Beziehungen zur Morphologie der Umgegend. Mein Freund Universitätsprofessor Dr. J. V. *Daneř* stimmte ebenfalls bei Gelegenheit einer gemeinschaftlichen Exkursion mit meiner Auffassung des Schotters überein.

2. *Basaltgang.*

*Bořický* <sup>14)</sup> berichtet S. 144 in seinen petrologischen Studien über die Basaltgesteine Böhmens, dass „Prof. *Šafařík* auf dem *Karabinský vrch* bei *Svárov* (in untersilurischen Schichten) Basaltblöcke von derselben Art auffand, wie der von *J. Barrande* bei *Sct. Ivan* entdeckte Basalt ist, sie sollen entweder einem verdeckten Basaltgange ange



hören oder in Diluvialzeit als erratische Blöcke hierher verschleppt worden sein“. Bořický gibt einen kurzen Bericht über die mikroskopische Beschaffenheit des Gesteines. K a t z e r<sup>15)</sup> meint in seiner Geologie Böhmens S. 984, daß die angeführte Lokalität *Karabinský vrch* bei *Svárov* auf einem Irrtum beruhe.

Bei meiner Kartierung auf dem Berge *Údersko* fand ich nördl. von Kote 418 inmitten der Drabower Quarzite ein schwarzes, hartes und dichtes Eruptivgestein in Form eines Lagerganges, welches morphologisch als ein deutlicher Längsrücken hervortritt. Seine Fortsetzung nach SW ist gegen S verschoben. (Siehe geol. Kartel) *Makroskopisch* treten hauptsächlich nur Olivineinsprenglinge auf. *Unter dem Mikroskope* weist das Gestein eine deutliche Intersertalstruktur mit bräunlicher, glasiger, trichitenreicher Mesostasis auf. Die basischen Plagioklase der Grundmasse sind schmal und leistenförmig, die Augite braun oder rötlich. Die Feldspate sind älter als die Augite, pflegen in denselben eingeschlossen zu sein oder ragen in diese hinein. Die grünen Olivineinsprenglinge sind stark zersetzt. Nach der Anwesenheit des Olivins und den zahlreichen Feldspaten kann man das Gestein als echten *Feldspatbasalt* ansprechen. *Es unterliegt keinem Zweifel, daß diesem von mir entdeckten Gange die von Bořický erwähnten Basaltblöcke entstammen.*

#### D. Diluvium—Alluvium.

**Die Terrassen des Kačák** (*Lodenitzer Baches*). Wenn wir das Tal des *Kačákbaches* von der *Kyšicer Mühle* bis nach *Nenačovic* verfolgen, so finden wir daselbst zahlreiche Reste diluvialer Terrassen. Auf dem Umlaufberge südlich von der *Dědekmlühle* liegt eine Schotterterrasse etwa 340 m ü. d. M. Am südl. Abhange des Berges tritt außerdem noch eine niedrige Terrasse auf. Der höheren Terrasse entspricht ein Schotterfeld auf dem gegenüberliegenden Ufer des *Kačákbaches*. Oberhalb des *Červený mlýn* liegen zu beiden Ufern Terrassen in absol. Höhe 320—340 m, ebenso nördlich der *Marekmühle*. Zwischen der *Unter-Podkoží-Mühle* und Kote 279 fand ich am linken Ufer des *Lodenitzer Baches* eine Terrasse in absol. Höhe 310—330 m, am rechten Ufer in der Höhe von etwa 320 m. Terrassenablagerungen (300—320 m) werden ferner vom Wege westlich der *Kalousmühle* durchschnitten; man findet hier Gerölle von Kiesel-schiefern, Quarzen, Quarziten, Konglomeraten ( $d_{10}$ ), algonkischen Schiefern und Grauwacken. Unterhalb der Terrasse liegen mächtige, lößartige Lehme, darunter dann *Zahořaner Schiefer* ( $d_4$ ); stellenweise scheinen hier auch Spuren einer tieferen Terrasse aufzutreten.

Von der *Kalousmühle* zieht sich die höhere Terrasse in gleicher Höhe einerseits gegen N, andererseits gegen S bis zur Schlucht, welche vom rechten Kačákufer zur Kote 341 führt. Weiter südlich bis *Nenačovic* nimmt sie bedeutend an Breite zu. Ihre südliche Fortsetzung fand ich

dann weiter am Felsenvorsprunge östl. von Kote 381 und südl. von *Nenačovic* am östl. Abhange der Anhöhe Kote 347. Östlich von *Nenačovic* am linken Kačakufer liegt die höhere Terrasse in abs. Höhe über 300 m, die niedrigere Terrasse bei etwa 280 m. Unter den Zuflüssen des Lodenitzer Baches fand ich bloß im Tale des Chyňaver Baches Terrassenspuren.

Nach Ritt. v. Purkyně (l. c. 10) liegt der Beraunspiegel bei *Tetín* westlich der Mündung des Lodenitzer Baches 210 m ü. d. M., die Oberterrasse des Beraunflusses etwa 288 m ü. d. M., also circa 78 m höher. In einer beiläufig gleichen Höhe liegt auch die Oberterrasse des Beraunflusses bei der Mündung des Kačakbaches. Ich verfolgte vorläufig die Terrassen des Lodenitzer Baches auch außerhalb unseres Gebietes von seiner Mündung bis *Lodenitz* und halte sämtliche Terrassen, welche in unserem Gebiete in abs. Höhe über 300 m liegen, als äquivalent der Oberterrasse des Beraunflusses, die spärlichen Überreste der tieferen Terrasse als analog der Mittelterrasse desselben. Die obere Grenze der Oberterrasse liegt in unserem Gebiete zwischen der *Dědkmühle* und Kote 279 im Kačaktale südlöstl. von *Podkozí* etwa 40 m, zwischen der *Kalousmühle* und *Nenačovic* beiläufig 45—55 m über dem Kačákflusse (gemessen nach den Höhenlinien auf der topographischen Karte 1:25.000). Die tiefere Terrasse östl. der *Kalousmühle* erreicht eine relat. Höhe von etwa 25 m und entspricht offenbar *Purkyně's* Mittelterrasse des Beraunflusses, welche bei *Tetín* 45 m über dem heutigen Beraunflußspiegel liegt. Reste der Unterterrasse fand ich in unserem Gebiete nicht vor.

Interessant sind mächtige Lehmaglagerungen, die auch kleinere Geschiebe enthalten; man findet sie abseits der Straße, welche von der *Dědkmühle* nach *Chyňava* führt. Sie verdanken ihre Entstehung wohl auch einem diluvialen Zuflusse des Kačák.

Mächtigere **Gehängelehme** diluvialen Alters befinden sich westl. von der *Kalousmühle*, nordöstl. von *Klein-Práleč* am Abhange unterhalb der Kote 449, wo eben eine Ziegelei gegründet wird, ferner bei *Práleč* selbst.

Stellenweise findet man im Tale Anhäufungen von **Gehängeschutt** vermischt mit Gehängelehm, so unterhalb des südl. Abhanges des *Rymáňský vrch*, unter dem westl. Abhange des *Modrý vrch* nördl. von *Nenačovic*.

Während die Gehängeablagerungen vielfach die Talabhänge unseres Gebietes bedecken, trifft man oben auf der eingeebnete Oberfläche des Gebietes öfters mächtiges **Eluvium** an, so bei *Libčev*, südlich von *Podkozí*, insbesondere aber längs der östl. Grenze unseres Gebietes, wo nebst eluvialen Lehmen auch Spuren von zerfallenen Kreideschichten auftreten. letztere bedecken gegen *NO* die Silurschichten. Bei *Ůhonic* sind in der Karte 1:25.000 Kalköfen (*K. O.*) eingezeichnet. Ehemalige Kalkbrennereien sollen den Kalkstein von *Tachlovic* bezogen haben, sie sind seit langer Zeit bereits aufgelassen. Ebenso findet sich kleine Spur mehr nach dem großen Ziegelofen, der einst im mächtigen Lehme westl. von *Ůhonic* angelegt wurde.

Heute ist diese Stelle völlig eingeebnet und in Felder umgewandelt, die Ziegel der älteren Thoniger Gebäude sollen jedoch von hierher stammen.

## II. Tektonik.

**Streichen und Fallen der Schichten.** Das Streichen der Schichten ist in unserem Gebiete vorherrschend ein nordost-südwestliches; im Algonkium beobachten wir öfters eine *NNO—SSW*- oder fast *N—S*-Richtung der Schichten, während die Silurschichten häufig fast *O—W* streichen; ausnahmsweise findet man wohl auch ein Streichen nach *NNW*, insbesondere in der Nähe von Dislokationen, wie z. B. am nördl. Abhange des *Modrý vrch* und am südlichen Abhange des *Kbel*.

In der Regel fallen die Schichten gegen *SO*, bzw. gegen *OSO* oder *S* ein. Selten beobachtet man ein Algonkium und im Bereiche der Drabover Quarzite (*d<sub>2</sub>*), öfters bei den Zahoräner Schieferen (*d<sub>4</sub>*) ein Einfallen nach *NW* als Beweis einer Faltung. Auffallend ist die Umbiegung der Streichrichtung im mittleren Teile unseres Algonkiums, z. B. im *Schwarzawatalc*. Hier herrscht ein nord-nordöstliches bis nördliches Streichen vor, während gegen *W* und *O* die Schichten vorherrschend von *SW* nach *NO* streichen.

**Diskordanz zwischen Algonkium und Silur.** Dieselbe ist an zahlreichen Stellen nahe der Grenze beider Formationen erkennbar. Sie äußert sich hauptsächlich *in etwas abweichender Streichrichtung und verschiedenem Einfallswinkel der Schichten*. Das Algonkium weist an der Grenze mit *d<sub>1a</sub>* ein *NO—SW*-Streichen auf, während die Krušnahoraschichten mehr *ONO—WSW*, oder fast *O—W* streichen. Die algonkischen Schichten sind an der Grenze steil gestellt, ihr Einfallen gegen *SO* beträgt 70—80° oder noch mehr; dagegen fallen die Schichten *d<sub>1a</sub>* höchstens unter 35—55° gegen *SSO*, bzw. *S* ein.

Nach *Katzers* (l. c. Taf. III.) übersichtlicher geologischer Karte des älteren mittelböh. Paläozoikums verläuft längs der Grenze beider Formationen eine Längsdislokation. Obwohl die Grenze verschiedentlich entblöbt ist, konnte ich eine solche Dislokation hier nicht feststellen. *Die Basalkonglomerate der Schichtenstufe d<sub>1a</sub> liegen ungestört über dem Algonkium*, obwohl die Lagerungsverhältnisse doch im Falle des Vorhandenseins der vermeintlichen Dislokation gestört sein müßten.

**Sekundäre Fältelung im Algonkium.** Nordwestl. vom *Červený mlýn*, im Tale des *Rymánov* Baches bei Kote 354, nördl. von *Podkoží* und an der Straße nördl. von der oberen *Podkožimühle* fand ich algonkische Schiefer, die auf ihren Schichtflächen eine sekundäre scharfe Fältelung aufweisen. Die genannten vier Lokalitäten liegen in 2 Zonen im Streichen der Schichten. Unser Algonkium wurde, wie bekannt, zunächst in jung-algonkischer Zeit gefaltet. Wohl dürften diese Falten eine etwas andere Richtung besessen haben, als die spätere variszische Faltung, der von neuem das Algonkium



unterlag. Hiemit ließe sich wohl auch die teilweise Diskordanz zwischen Algonkium und Kambrium-Silur erklären; diesem Umstande könnte man ebenfalls die sekundäre Fältelung auf den Schichtflächen der algonkischen Schiefer, wie wir sie in unserem Gebiete gefunden haben, zuschreiben. (Taf. II., Fig. 1.)

**Längs- und Querdisklokationen.** Vom tektonischen Standpunkte weist unser Gebiet keine große Mannigfaltigkeit auf. Ich stellte hier spärliche Längsdislokationen, hingegen zahlreiche Querdisklokationen fest.

Eine *Längsdislokation*, welche meiner Ansicht nach den Charakter einer Faltenüberschiebung besitzt, verläuft vom *Kačáktale* östl. der *Rejnovver Mühle* längs der südl. Grenze des Diabaslagers durch die *Čížekschlucht*, welche zwischen *Údersko* und dem *Rymáňský vrch* gegen *NO* sich hinzieht. (Vergl. unser Profil III. S. 14, Fig. 6.) Die Quarzite  $d_2$  wurden hier über das jüngere Diabaslager und stellenweise über die *Zahořaner* Schichten ( $d_4$ ) überschoben. Längs der Überschiebung sind die Quarzite überall stark gestört.

Eine *zweite* große *Längsdislokation* liegt nahe der südl. Grenze des kartierten Gebietes. Sie war bereits *Lipold* und *Vála-Helmhacker* bekannt, nach welchen sie durch das Tal von *Drahelčic* nach *Nenačovic* und von hier gegen *Klein-Prápeř* verläuft; längs derselben stoßen *Zahořaner* Schichten ( $d_4$ ) und *Osek-Kváněř* Schichten  $d_1\gamma$  aneinander; letztere liegen über ersteren. Die Dislokation gehört zu *Krejčí-Helmhacker*s (l. c. 18) *Hýskov—Prager* Bruchlinie oder nach *Krejčí-Feistmantel* (l. c. 8) zur *Prager* Bruchlinie, welche von *Hýskov* über den *Plešivec* bei *Beraun* in das *Kačáktal* und von hier über *Drahelčic* ins *Motoltal* und über *Prag* nach *Hloupětín* verläuft. Nach *Katzer* (l. c. 15, S. 969) beginnt sie bereits bei *Zbivov* oder noch weiter südlich.

Größer ist die Anzahl der *Querdisklokationen* unseres Gebietes. Von ihnen wird die *Hůrka* bei *Libečov* in *W* und *O* begrenzt, ein weiterer Querbruch durchsetzt das *Chyňavatal* nahe der Lokalität „*Na močidle*“, wo der Bach sich plötzlich gegen *N* wendet; drei weitere Bruchlinien verschieben die Schichten stufenweise immer etwas gegen *N*.

Eine einzige *Querwerfung*, welche von der unteren *Podkožimühle* über Kote 279 im *Kačáktale*, von hier über den östlichen Abhang der *Chrbina* zur *Rejnovver Mühle* verläuft, verursachte eine Schollenverschiebung gegen *S*. Sie trennt die *Chrbinascholle* im *SW* von der nordöstlichen Scholle (Scholle des *Karabinský vrch*), welcher außer dem östlichsten Abhange des *Chrbinarückens* der *Karabinský vrch*, *Údersko* und *Rymáňský vrch* angehört. Beide Schollen unterscheiden sich voneinander durch ihren tektonischen Aufbau. In der *Chrbinascholle* folgen im Hangenden der *Drabover* Quarzite Diabaslager, über diesen in ungestörter Lagerung schwarze Schiefer der Schichtenstufe  $d_4$ ; man kann dies gut am linken Ufer des *Lodenitzer Baches* beobachten. In der Scholle des *Karabinský vrch* findet man zwar gleichfalls im Hangenden der Quarzite  $d_2$  das Diabaslager, darüber liegt jedoch



ein zweiter, überschobener Quarzitstreifen, dem erst die Schiefer  $d_4$  aufgelagert sind. Es verläuft hier eben die oben beschriebene Längsdislokation.

Einige weitere Querbrüche, von welchen einer durch das Kačákatal zwischen der *Chrbina* und dem *Karabinský vrch* verläuft, die anderen letzteren Berg, *Údersko* und den *Rymáňský vrch* durchqueren, verursachen abermals Schichtenverschiebungen gegen *N*. Westlich von *Ober-Plíř* bewirkt ein Querbruch, daß Drabover Quarzite in die Nachbarschaft der Konglomerate  $d_{1\alpha}$  gelangen. Wenn wir also die Querdislokationen unseres Gebietes von *W* gegen *O* verfolgen, finden wir, daß sie mit Ausnahme der Chrbinaverwerfung stufenweise Schollenverschiebungen gegen *N* verursachten.

*Die Querbrüche könnte man schwerlich in dem mehr einförmigen algonkischen Gebiete ohne Verfolgung und Kartierung der Grauwackenzone feststellen; deshalb trachtete ich in unserem Gebiete auch die mächtigeren, hauptsächlich aus Grauwacken und -schiefern bestehenden Zonen auf der Karte auszuscheiden. Es wäre angezeigt, dies auch in anderen ähnlichen algonkischen Gebieten gelegentlich ihrer Kartierung zu tun.*

**Das Alter der Dislokationen.** In den einzelnen Phasen der *variszischen* Faltung, welche bei uns wohl schon im *Oberdevon* begann, wurden die algonkischen und silurischen Schichten unseres Gebietes gefaltet und entstanden die Längs- und Querdislokationen. Gewöhnlich sind im älteren mittelböhmischem Palaeozoikum die Querdislokationen *jünger* als die Längsdislokationen, was bereits *Krejčí* erkannte. Auf S. 386 schreibt er: „Die Verwerfung von *NW—SO*-richtung sind etwas jünger als die *NO—SW* streichenden Verwerfungen; letztere werden häufig durch erstere verschoben. Sie entstanden vor Ablagerung des Karbon.“ Nach *Krejčí-Feistmantel* (l. c. 8) sollen die Querdislokationen wenigstens teilweise gleichaltrig sein mit den Längsdislokationen.

Ähnliche Beziehungen zwischen Quer- und Längsbruchlinien, wie sie *Krejčí* feststellte, fand ich in verschiedenen von mir kartierten Gebieten unseres älteren mittelböhmischem Paläozoikums. Anderer Ansicht bin ich jedoch betreffs des gegenseitigen Altersverhältnisses zwischen der Querverwerfung am östl. Abhange der *Chrbina* und der Längsdislokation zwischen *Údersko* und dem *Rymáňský vrch*. Letztere bricht plötzlich an der Chrbinaverwerfung ab und man findet am rechten Kačákufer keine Spur mehr von ihr, denn es liegen daselbst im Hangenden des Diabaslagers ungestört  $d_4$ -Schiefer. *Ich bin also der Ansicht, daß zur Zeit, als die Längsdislokation entstand, die Chrbinascholle bereits von der Scholle des Karabinský vrch durch die Querverwerfung getrennt sein mußte.* Nur dann kann ich mir erklären, warum die Faltenüberschiebung nicht von einer Scholle auf die andere hinübersetzt. *Ich halte also die Überschiebung (Längsdislokation) zwischen Údersko und dem Rymáňský vrch für jünger als die Querverwerfung am östlichen Chrbinarücken.*

**Einfluß von Eruptionen auf die Tektonik.** Lipold (l. c. 6) sucht die Ursache der Dislozierung der Erzlagerstätten unseres Gebietes in der Eruption der *Pürglitz-Rokitzaner* Porphyryzone. Seine Ansichten über die Eruptionszeit der Porphyre, Diabase und des mittelböhmischen Granites sind, wie wir heute bestimmt wissen, nicht richtig. Daß die Diabas-eruptionen keinen wesentlichen Einfluß auf die Faltung und Dislozie-

NW.

SO.

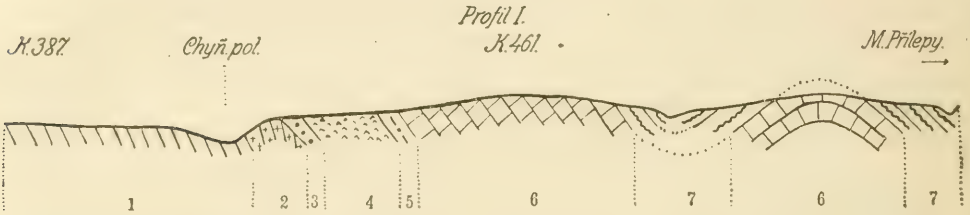


Fig. 4. Profil zwischen Kote 387 an der Straße Podkozi-Chyňava und KleinPřilep. Maßstab 1 : 22.000. 1. Algonk. Schiefer. 2. Algonk. Grauwacken. 3. Krusna horashichten ( $d_{1\alpha}$ ). 4. Komorauer Schichten ( $d_{1\beta}$ ). 5. Osek-Kváněr Schichten ( $d_{1\gamma}$ ). 6. Drabover Quarzite ( $d_2$ ). 7. Zahořaner Schichten ( $d_4$ ).

NW.

SO.

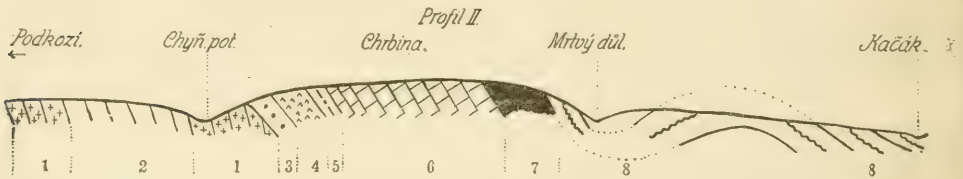


Fig. 5. Profil zwischen Podkozi und dem Kačáktate bei der Kalousmühle. Maßstab 1 : 22.000. 1. Algonk. Grauwacken. 2. Algonk. Schiefer. 3. Krusnahoraschichten ( $d_{1\alpha}$ ). 4. Komorauer Schichten ( $d_{1\beta}$ ). 5. Osek-Kváněr Schichten ( $d_{1\gamma}$ ). 6. Drabover Quarzite ( $d_2$ ). 7. Diabaslager, 8. Zahořaner Schichten ( $d_4$ ).

NW.

SO.

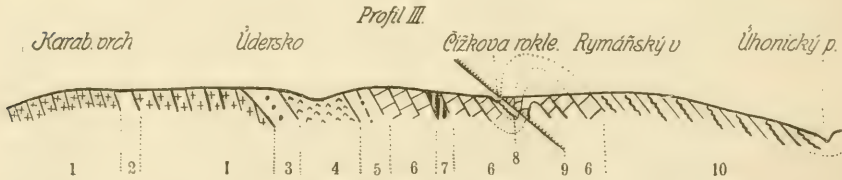


Fig. 6. Profil zwischen dem Karabinský vrch und dem Úhonitzer Bache. Maßstab 1 : 22.000. 1. Algonk. Grauwacken. 2. Algonk. Schiefer. 3. Krusnahoraschichten ( $d_{1\alpha}$ ). 4. Komorauer Schichten ( $d_{1\beta}$ ). 5. Osek-Kváněr Schichten ( $d_{1\gamma}$ ). 6. Drabover Quarzite ( $d_2$ ). 7. Basalt. 8. Schieferscholle  $d_4$ . 9. Überschiebung, 10. Zahořaner Schichten ( $d_4$ ).

rung der Silurschichten hatten, habe ich in meiner Arbeit über das Silurgebiet zwischen Litten und Budňan zu beweisen gesucht (l. c. 11). Auch in unserem Gebiete kann von einer genetischen Beziehung zwischen den Eruptionen der *Pürglitz-Rokitzaner* Zone und der Dislozierung der Erzlager-

stätten keine Rede sein, da diese zur Zeit der variszischen Faltung entstand und demnach viel jünger ist als die genannte Eruption.

**Beschreibung unserer Profile I.—III. und Vergleich mit diesbezüglichen Profilen der älteren Literatur.** Unser Profil I. Fig. 4 S. 14. verläuft von Kote 387 an der Straße *Podkozí—Chyňava* über den Chyňavabach zu Kote 461 und von da etwa über Kote 449 nach *Klein-Práleř*. Zunächst finden wir im Profile algonkische Schiefer, welchen unweit der Silurgrenze ein Streifen von Grauwacken aufgelagert ist; ihr Einfallen beträgt etwa  $70^\circ$  nach *SO*. Im Hangenden des Algonkiums folgen dann diskordant die Kruschnahoraschichten ( $d_1\alpha$ ), die gegen *SO* etwa unter  $45^\circ$  einfallen; sie sind gut an der Lokalität „*Na močidle*“ in Chyňavatal aufgeschlossen. Dann folgen die Komorauer Schichten ( $d_1\beta$ ), in deren Liegendteile etwas weiter gegen *NO* von unserem Profile ein öolithisches Eisenerzlager zu Tage tritt. Weiter folgen die Schiefer der Schichtenstufe  $d_1\gamma$ , dann mächtige Drabover Quarzite ( $d_2$ ), hierauf die Stufe  $d_4$ , zwischen welcher bei Kote 449 abermals die Quarzite  $d_2$  emportauchen. Zwischen Kote 461 und 449 liegt wohl eine Synklinale weicher Zahořaner Schiefer  $d_4$ , die gegen *SO* in eine teilweise abgetragene Antiklinale übergehen, in deren Kerne die älteren  $d_2$ -Quarzite zu Tage treten.

K a t z e r<sup>18)</sup> veröffentlichte ein Profil durch das ganze ältere Paläozoikum Mittelböhmens. Der nordwestl. Teil des Profils verläuft von *Chyňava* nach *Klein-Práleř*, also westlich von unserem Profile I. Das Profil beginnt bei *Chyňava* mit Urschiefern (= Algonkium), die gegen *SO* einfallen, hierauf folgen die Stufen  $d_1\gamma$ ,  $d_2$ , Diabas und  $d_4$ ; die Schichten  $d_1\gamma$  bis  $d_4$  sind mit *nordwestl.* Einfallen eingezeichnet. Soweit ich das bereits außerhalb unseres Terrains liegende Profil begangen habe, scheinen mir jedoch hier ganz ähnliche Lagerungsverhältnisse zu herrschen wie in unserem Gebiete (Profil I.). Die Diskordanz zwischen Algonkium und Silur besteht nicht in einem widersinnigen Einfallen, wie dies K a t z e r in seinem Profile angibt; die algonkischen und silurischen Schichten fallen insgesamt nach *SO* bzw. fast *S* ein, wie dies auch richtig in K r e j č í - F e i s t m a n t e l s Profil zwischen *Chyňava* und *Klein-Práleř* (l. c. 8, S. 40, Fig. 28) angedeutet erscheint.

Unser Profil II. beginnt bei *Podkozí*, verläuft über das *Chyňavatal* unweit seiner Mündung auf den *Chrbínarücken*, von da über den „*Toten Grund*“ in das *Kačáktal* südlich von der *Kalousmühle*. Das Profil durchquert zunächst eine algonkische Grauwackenzone, welcher algonkische Schiefer aufgelagert sind; diesen folgen dann abermals an beiden Ufern des Chyňavabaches Grauwackengesteine. Sie fallen steil ( $70—80^\circ$ ) nach *SO* ein. Im Hangenden befinden sich dann in diskordanter Lagerung Kruschnahoraschichten mit geringerem Einfallswinkel, hierauf Komorauer Schichten und Drabover Quarzite. Im Gegensatze zum vorhergehenden Profile I. folgt nun ein meist aus geschichteten Diabastuffen bestehendes Diabaslager, über diesem schließlich konkordant die Schichten der Stufe



$d_4$ . Letztere bilden zunächst eine Synklinale, in welcher der „Tote Grund“ verläuft: dieselbe geht dann in eine Antiklinale über, deren Südflügel bei der *Kalousmühle* etwa  $10-26^\circ$  gegen *SO* einfällt.

In Lipolds Profil (l. c. 6, Seite 358) zwischen dem *Chyňava-bache* und *Nenačovic* ist die Diskordanz zwischen Algonkium und Silur nicht eingezeichnet, auch fehlt hier völlig das mächtige Diabaslager zwischen  $d_2$  und  $d_4$ ; die  $d_4$ -Schichten zwischen der *Rejnover Mühle* und der Längsdislokation bei *Nenačovic* werden bis auf zwei seigere Antiklinalen bei *Nenačovic* und der *Kalousmühle* irrtümlich als  $d_2$  gedeutet.

Krejčí (l. c. 17, S. 398, Fig. 164) veröffentlichte ein Profil bei *Nenačovic*. Es liegt wohl ein Irrtum vor, wenn die auf Zahořaner Schichten im Tale liegende Ortschaft im Profile auf einer Anhöhe der Drabover Quarzite eingezeichnet ist. Auch liegt das Diabaslager nicht zwischen Drabover Quarziten, sondern im Hangenden derselben.

Unser Profil III. beginnt an der Straße, die von *Podkoží* nach *Svárov* führt, verläuft über den *Karabinský vrch*, *Údersko*, die *Čížekschlucht* und den *Rymaňský vrch* in das Tal des *Ůhonitzer Baches*. Soweit es das Algonkium durchquert, besteht dasselbe vorwiegend aus Grauwacken und -schiefern, bloß am *Karabinský vrch* liegt zwischen diesen eine mächtigere Tonschieferzone. Sie fallen ziemlich steil gegen *SO* ein. In diskordanter Lagerung folgen dann die Kruschnahoraschichten, Komorauer Schichten, in welchen knapp östlich von unserem Profile der Adalbertsstollen getrieben wurde. Im Hangenden liegen die weichen Osek-Kvaněř Schiefer, über diesen die harten Drabover Quarzite, zwischen welchen ich auf dem Berge *Údersko* einen Basaltlagergang entdeckte. In der *Čížekschlucht* treten nebst  $d_2$ -Quarziten dislozierte, typische Grauwacken und Tonschiefer der Stufe  $d_4$  auf. Durch die Schlucht verläuft die Faltenüberschiebung, längs welcher Drabover Quarzite  $d_2$  über eine abgerissene Scholle von  $d_4$ -Schichten (weiter gegen *SW* über das jüngere Diabaslager) überschoben wurden. Die genannte Überschiebung konnte man weder im Profil I. noch im Profil II. beobachten; sie ist eben charakteristisch für die Scholle des *Karabinský vrch*. Im Hangenden der Quarzite folgen dann Zahořaner Schichten ( $d_4$ ).

Vála-Helmhacker (l. c. 3, Taf. II., Fig. 1) geben ein eingehendes Profil zwischen dem *Karabinský vrch* und dem *Ůhonitzer Bache*; das Profil verläuft in derselben Richtung wie unser Profil III. Die Autoren, welche Krejčí-Lipolds Trennung der Schichtenstufe  $d_1$  in  $d_{1\alpha}$ ,  $d_{1\beta}$ ,  $d_{1\gamma}$  nicht anerkannten, identifizieren irrtümlich die schwarzen Grauwackenschiefer und Diabastuffe in der *Čížekschlucht* mit  $d_1$ . In Wirklichkeit gehört der in der Schlucht auftretende Diabas einem Ausläufer des Diabaslagers von der *Rejnover Mühle* an, während die Grauwackenschiefer der Schichtenstufe  $d_4$  zuzuzählen sind. *Es blieb eben die Längsdislokation, welche durch die Schlucht verläuft, unerkannt.* Die Diabastuffe, welche nach den genannten Autoren im Liegendteile der Drabover Quarzite sich



vorfinden sollen, konnte ich nicht feststellen, dafür fand ich hier einen Basaltgang.

Krejčí - Helmhacker (l. c. Taf. I., Fig. 4) geben das Profil Vála - Helmhackers wieder. Krejčí - Feistmantel (l. c. S. 43, Profil 32) veröffentlichten ein Profil zwischen dem *Karabinský vrch* und *Nenačovic*. Es fehlt hier zwar das Diabaslager im Hangenden der Quarzite  $d_2$ , die Längsdislokation ist jedoch im ganzen richtig eingezeichnet. Die schwarzen Schiefer der *Čížekschlucht* sind jedoch fälschlich als  $d_{1\gamma}$  bezeichnet.

### III. Morphologie.

Nach unserer heutigen Ansicht war Mittelböhmen, also auch unser Gebiet, zur *Oligozänzeit* in eine Festebene eingeebnet worden, deren Oberfläche aus Kreideschichten bestand. In nacholigozäner Zeit wurde das ursprünglich einheitliche Kreideplateau durch die an der Oberfläche der Festebene entstehenden Flüsse in eine Reihe von Hügeln und Bergen zerlegt; mit der Zeit blieben von ihm bloß Überreste meist in Gestalt von Zeugenbergen erhalten. Selbst diese wurden später vielfach zerstört und abgetragen.

Im Gebiete der Wasserscheide zwischen dem Kačákbahe und der Moldau blieben Zeugenberge bei *Unhošt* und bei *Kladno* erhalten. Bei *Kladno* verschmälert sich plötzlich der Unhošter Zeugenberg; der *Tejnicher Bach*, welcher bei *Kralup* in die *Moldau* mündet, hat sich hier durch Rückerosion weit nach SW eingeschnitten und trachtet dem Kačákbahe einen Teil seines Flußgebietes zu entreißen. Zweifellos wird er in verhältnismäßig kurzer Zeit den *Unhošter Zeugen* vom *Kladnoer Zeugenberg* mit dem *Žbán* vollständig abtrennen. Eine ähnliche Tendenz wie der *Tejnicher Bach* haben weiter gegen NW der *Zakolaner*, *Třebichovicer Bach* und der *Červený potok*, welche den *Žbán* in der Richtung zur Moldau entwässern. Das asymmetrische Tal des Kačákbaches empfängt hier bloß am rechten Ufer Zuflüsse, welche den Kreidezeugenberg von *Štrašecí* entwässern. Auf diese sonderbare Erscheinung sowie auf die Raubtätigkeit der genannten Moldauzuflüsse machte zum ersten Male *Daneš*<sup>19)</sup> in seiner inhaltsreichen Abhandlung über die morphologische Entwicklung von Mittelböhmen aufmerksam.

Das *Unhošter Kreideplateau* erreicht in seinem südl. Teile an der Wasserscheide zwischen Kačák und Moldau, z. B. bei *Unhošt* und *Roth-Újezd* eine absolute Höhe von ca 400 m, während es gegen N bedeutend sinkt. Auch hier scheinen die mächtigeren Zuflüsse der Moldau, welche das Plateau nach N entwässern, mit der Zeit sich des Kačáktalgebietes bemächtigen zu wollen, der von hier mit Ausnahme der *Schwarzawa* bloß unbedeutende Zuflüsse erhält.

In *nacholigozäner* Zeit büßte natürlich die oligozäne Festebene,

bezw. ihre Zeugenberge durch Denudation und Erosion bedeutend an Höhe ein. Daneš (l. c. 19) setzt eine Abtragung von mindestens 50 m, wahrscheinlich noch mehr voraus.

Das Tal des Kačákabaches ist, wie wir später sehen werden, ein typisches, auf Kreideschichten angelegtes *epigenetisches* Tal. Das von ihm durchflossene Gebiet erreicht in unserem Falle stellenweise eine Höhe über 450 m. Die Kreidedecke dürfte also hier zur Oligozänzeit noch höher gelegen sein, denn nach ihrer Abtragung und nach der Entblößung des algonkisch-silurischen Untergrundes wurde dieser jedenfalls auch noch bedeutend erniedrigt. Wenn wir also hier die Abtragung der oligozänen Fastebene bis auf die heutige Zeit auf wenigstens 100 m schätzen, dürften wir nicht übertrieben haben.

Überblicken wir von Libečov gegen N unser *algonkisches* Gebiet, so sehen wir vor uns eine einförmige, nur mäßig wellige Hochebene. Die eingeebnete Oberfläche des Algonkiums erreicht hier eine absol. Höhe von 360—390 m, diese wird bloß von den Kieselschiefern nördl. von Chyňava (400 m) und stellenweise von algonkischen Grauwacken, z. B. am Mittelberge (Střední hřbet Rymáňský, 397 m) überragt.

Im *silurischen* Gebiete unseres Terrains gibt es bei weitem mannigfaltigere Oberflächenformen als im Algonkium; es ist dies die Folge der verschiedenartigen Beschaffenheit und der verschiedenen Verwitterungsfähigkeit der hier auftretenden Gesteine. Vom morphologischen Standpunkte sind daselbst am meisten die Drabover Quarzite ( $d_2$ ) charakteristisch, indem sie auch die bedeutendsten Höhen erreichen. Ich erwähne die Hůrka bei Libečov (455 m), Kote 449 östlich von hier, den Längsrücken der Chrbina mit den Koten 461 m, 451 m, den Berg Ůdersko (418 m), Karabinský vrch (437 m) u. s. w. Eine bedeutendere Höhe erreichen auch die teilweise aus harten Quarziten und Grauwacken der Stufe  $d_4$  aufgebauten Hügel, so z. B. die Hügel westlich von Nenačovic, der Bergrücken Kbel, der Modrý vrch. Von den übrigen Silurschichten bilden insbesondere die Konglomerate und Grauwacken  $d_4\alpha$  stellenweise eine deutlichere Felsenstufe, wie z. B. westl. von Libečov, am nördl. Abhange der Chrbina, westl. von Ober-Plíč und anderwärts.

Von der Oberterrasse des Kačákabaches führt zu der eingeebneten Oberfläche des Algonkiums oft eine auffallende Stufe, so daß man unmittelbar auf eine *vordiluviale*, etwa *pliozäne* Oberfläche erinnert wird. In beiläufig gleicher Höhe liegt auch das Schotterfeld von Klein—Příleč, welches ich — wie früher erwähnt — gleichfalls für tertiär (pliozän?) halte.

Der Hauptfluß unseres Gebietes ist der Kačák oder *Lodenitzer Bach*, welcher am rechten Ufer Nebenflüsse aus dem Algonkium — Silur erhält, während die zahlreicheren Zuflüsse des linken Ufers das *Unhošter* Kreideplateau entwässern.

**Das Kačáktal und seine Entstehung.** Der Kačák wurde ursprünglich als *konsequenter* Abfluß auf der Oberfläche der *oligozänen Fastebene*

angelegt. Er floß ihrer Neigung gemäß nach *SO* ab und vertiefte sein Bett zunächst in den Kreideschichten. Offenbar begann er infolge seines geringen Gefälles auf der Kreideoberfläche zu mäandrieren. Im Laufe seiner Vertiefung stieß er unter der Kreidedecke zunächst auf die harten, am höchsten in die Sedimente des Kreidemeeres emporragenden Drabover Quarzite und Diabase. Frühzeitig benutzte er dann wohl manche Querdislokationen zur weiteren Vertiefung seines Bettes. An ein *pliozänes* (?) Stadium erinnert die oben angeführte Stufe, zwischen seiner Oberterrasse und der Oberfläche des Algonkiums. Zur Zeit seiner *diluvialen Oberterrasse* war sein Gefälle noch unbedeutend, wie wir aus den Höhen, in welchen ich Überreste dieser Terrasse auffand, schließen können. Seine noch auf der Kreidedecke angelegten Mäander begannen sich allmählich auch in den härteren Untergrund einzusenken.



Fig. 7. Profil zwischen Klein-Přílepy und dem Modrý vrch. 1. Überrest der durch Denudation erniedrigten oligozänen Fastebene. 2. Tertiäre Terrasse bei Přílepy. 3. Diluviale Oberterrasse des Kačákbaehes. 4. Diluviale Mittelterrasse desselben. Maßstab 1 : 25.000.

In einem weiteren Erosionszyklus entstand dann die *Mittelterrasse*, deren spärliche Reste ich gleichfalls auffand. Zur Entwicklung einer weiteren tieferen Terrasse, welche etwa der *Unterterrasse* des Beraunflusses entsprechen würde, kam es meiner Ansicht nach nicht. Der mächtigere Beraunfluß konnte nämlich bei weitem schneller sein Flußbett vertiefen, als seine schwächeren Zuflüsse, so daß durch Tieferlegung ihrer unteren Erosionsbasis auch ihre Erosionstätigkeit neubelebt wurde. Indem sie sich so hinter dem Hauptflusse etwas verspäteten, gelangten sie nicht zur Bildung der Unterterrasse.

Da die alten Mäander des Kačák von einem Erosionszyklus in den anderen übernommen wurden, begegnen wir in seinem heutigen Tale prächtigen, tief eingesenkten Mäandern. Malerische Amphitheater von halbkreis- bis kreisförmigem Umrisse sind insbesondere im algonkischen Teile unseres Gebietes häufig. Ihnen gegenüber am anderen Ufer verlaufen oft langgezogene Sporne. Wo die Mäander mit der Zeit durchschnitten wurden, entstanden Inselberge, die ringsherum vom Bache umflossen werden. Ein schönes Beispiel hierfür beobachtete ich bei der *Dedckmühle* (Taf. II., Fig. 2), ferner bei Kote 279 südöstl von *Podkoží*. Ohne Voraussetzung und Kenntnis des epigenetischen Ursprungs des Lodenitzer Baches könnte man sich gar nicht das rücksichtslose Einschneiden der Mäander in den harten Untergrund erklären.



Die Höhenbeziehungen des *heutigen Kačáktales* zu seinen *diluvialen* Terrassen und zur *tertiären* Oberfläche klärt folgendes Profil (Fig. 7) auf. Das Tal erhebt sich zunächst zur Mittelterrasse (4), von hier geht ein Steilhang zur Oberterrasse (3). In noch bedeutenderer Höhe liegt weiter westlich die Píleper Terrasse (2), die vielleicht pliozänen Alters sein könnte, während wir im Osten Reste der durch Denudation allerdings bedeutend erniedrigten, oligozänen Fastebene (1) sehen.

**Nebentäler des Kačákbaehes.** Zu den ältesten Zuflüssen des Lodenitzer Baches gehört die offenbar noch gleichfalls auf der Kreidedecke angelegte, schwach mäandrierende *Schwarzawa* und vielleicht auch der *Chyňavabach*. Die übrigen Zuflüsse sind wesentlich jünger; sie mäandrieren nicht, ihre schmalen Täler entstanden hauptsächlich nur durch Vertikalerosion. Einige von ihnen, z. B. westl. von *Nenačovic*, sind *subsequente*, in weichen Schiefem angelegte Zuflüsse. Durch die Nebentäler des Kačák wird unser Gebiet in eine Reihe von Rücken und Hügeln zerlegt.

**Einfluß der Tektonik auf den Verlauf der Täler.** Was den Lodenitzer Bach anbelangt, so wurde in der älteren Literatur stets die innige Beziehung zwischen seinem Tale und den Querdislokationen betont. Nach *Vála-Helmhacker* (l. c. 3) durchläuft das Kačákatal von *Podkozí* nach *Lodenitz* eine Querbruchspalte; ähnlich schreibt *Krejčí* in seiner Geologie. Meiner Ansicht nach steht zwar das Kačákatal zwischen *Podkozí* und der *Kalouzmühle* in Beziehung zu den in gleicher Richtung verlaufenden Querdislokationen; sonst besteht jedoch wohl in unserem Gebiete kein Zusammenhang zwischen dem auf der ehemaligen Kreidedecke angelegten Kačákatal und den Dislokationen. Die Dislokationsspalten zwischen Kote 279 und der *Rejnover Mühle* benützte der Lodenitzer Bach wahrscheinlich schon recht frühzeitig, denn hier stieß er zunächst auf den harten silurischen Untergrund.

*Ich stimme mit der Ansicht Vála-Helmhacker's, als ob auch die Nebentäler längs Bruchspalten angelegt worden wären, nicht überein.* Ich habe für dieselbe keinerlei Beweise vorgefunden. Bloß der kleine Bach der *Čížekschlucht* verläuft in der Richtung einer Längsdislokation, ebenso bewirkten Querdislokationen die knieförmigen Umbiegungen der kleinen Täler westlich von *Nenačovic* (siehe die geol. Kartel).

**Die morphologischen Elemente unseres Gebietes.** Einige morphologische Grundelemente (im Sinne von *Davis*<sup>20</sup>) unserer Gegend kann man gut von der *Hůrka* bei *Libečov* überblicken. Gegen *N* in der Richtung nach *Unhošt* sehen wir vor uns in einer absol. Höhe von 350—400 *m* die durch Denudation erniedrigte *tertiäre Fastebene*. In nordöstl. Richtung von *Libečov* beobachten wir ein anderes morphologisches Element unseres Gebietes in Form eines aus *harten Drabover Quarziten* bestehenden *Längsrückens*, dem die Koten 461 und 451 auf der *Chrbina*, 418 auf *Údersko*, 437 auf dem *Karabinský vrch* angehören. Hinter diesem Quarzitücken der Stufe *d*<sub>2</sub> bleiben manche *Quarzhügel der Zone d*<sub>4</sub> nicht viel zurück;



so z. B. Kote 429 auf der *Višňová*, Kote 402 auf dem *Kbel*, Kote 413 auf dem *Modrý vrch*. Ein weiteres Element bildet die *tertiäre Terrasse bei Přílep*, welche bis zu einer Höhe von 360—380 *m* reicht. Noch treten die morphologisch so charakteristischen *älteren Terrassenreste* des Lodenitzer Baches hinzu, die wir gut von der Oberterrasse aus, am Abhange des *Modrý vrch* östlich von *Nenačovic* überblicken können. Vor uns liegt in westl. Richtung über dem linken Ufer des *Kačák* die *Mittelterrasse*; unterhalb dieser sehen wir das jüngste morphologische Element unserer Gegend, nämlich das *heutige Kačáktal*, in welches am rechten Ufer die Seitentäler jüngerer Zuflüsse münden. Über dem heutigen Tale erhebt sich dann bei *Nenačovic* eine schön erhaltene Terrassenstufe in relat. Höhe 40—50 *m* über dem Lodenitzer Bache, als Überrest eines Erosionszyklus aus der Zeit der *Oberterrasse*. Im westlichen Hintergrunde erblickt man schließlich noch das Niveau der *Příleper Tertiärterrasse*.

**Bodenbeschaffenheit.** In größerer Mächtigkeit findet man Tonböden in unserem Gebiete insbesondere an der Oberfläche der Hochebene und dort, wo das Terrain aus Tonschiefern besteht. Auch im Bereiche der Diluvialterrassen pflegt der Boden tonig oder tonig-sandig zu sein. Steinigen Boden trifft man überall, wo algonkische Grauwackengesteine auftreten, so insbesondere am *Mittelberge*, bei *Podkozí*, *Klein-Kyšic* u. s. w., am Talabhange pflegen daselbst typische Felsenmeere aufzutreten, so südöstl. von *Podkozí* am linken Ufer des *Kačák*baches. Noch steiniger ist der Boden in der Umgebung der Kieselschiefer. Im waldreichen Terrain verdeckt humöser, schwarzer Boden oft völlig den geologischen Untergrund. Lößartige Lehme fand ich am Talabhange bei der *Kaloušmühle*.

## RESUMÉ.

1. Das *Algonkium* unseres Gebietes besteht insbesondere aus Tonschiefern und aus selbständigen Grauwackenzone. Es ist jünger als der durch Spiliteruptionen charakterisierte Horizont unseres Algonkiums. An zwei Stellen wurde Kieselschiefer vorgefunden. Die bunten Schiefer im Liegenden von  $d_1\alpha$ , welche in der Literatur bald als *Étage B*, bald als *C* oder *D* angeführt wurden, sind algonkischen Alters.

2. In der *Schichtenstufe*  $d_1\alpha$  unterscheidet sich vom petrographischen Standpunkte auf Grund der im Gebiete zu beobachtenden Profile vier Horizonte. Die Konglomerate, welche unmittelbar das Algonkium überlagern, zähle ich den Kruschnahoraschichten zu. Im 3. Horizonte fand ich eine neue, typische Lingulaart. Sonst wurden Brachiopodenerste im 3. und 4. Horizonte aufgefunden.

3. In der *Komorauer Schichtenstufe* ( $d_1\beta$ ) treten nebst Schiefen und Eisenerzen insbesondere diabatische Effusivgesteine und Tuffe auf. Die Tuffe pflegen aus schlacken- bis aschenartigen Bruchstücken zusammengesetzt zu sein, welche letztere aus umgewandelter Glasmasse, Plagioklasen und Augiten bestehen. Das Bindemittel ist gewöhnlich  $CaCO_3$ . Anderwärts machen die Effusionen den Eindruck einer blasigen, glasreichen Lava. In den Mandelsteinen pflegen die Labradorite und Augite durch eine glasige Mesostasis verkittet zu sein.

4. Südöstl. von *Libečov* treten *Drabover Quarzite* ( $d_2$ ) inmitten von *Zahořancr* Schichten auf. Sie liegen im Kerne einer teilweise denudierten Antiklinale. Am linken Ufer des *Kačák*baches fand ich zwei Quarzitreifen ( $d_2$ ), die voneinander durch eine Längsdislokation getrennt sind.

5. Zwischen den Stufen  $d_2$  und  $d_4$  liegt ein *Diabaslager*, das hauptsächlich aus geschichteten Tuffen besteht. Die Tuffe sind aus Asche und Lapilli zusammengesetzt, welche durch  $CaCO_3$  verkittet sind. Die Eruption des Diabasmagmas begann hier bereits vor Beendigung der  $d_2$ -Stufe. Das Diabaslager keilt bald gegen *SW* und *NO* aus. Die schwarzen Grauwackenschiefer in der *Čížekschlucht*, die bisher als  $d_1\gamma$  angesprochen wurden, gehören der Stufe  $d_4$  an.

6. Im liegenden Streifen der *Drabover Quarzite* ( $d_2$ ) entdeckte ich auf dem Berge *Údersko* einen bisher unbekanntem *Feldspatbasaltgang*.

7. Bei *Nenačovic* fand ich in Schiefen der  $d_4$ - bzw.  $d_5$ -Stufe zum ersten Male einige Versteinerungen, wie *Ilaenus* sp., *Trinucleus* u. a.

8. Die in einer Höhe von 95—115 *m* über dem Kačák-bache liegenden *Schotter bei Přeběp* halte ich für tertiär (pliozän?); sie befinden sich 60 *m* über der Oberterrasse des Kačák-baches.

9. Ich halte alle *Terrassen des Kačák-baches*, welche in abs. Höhe über 300 *m* liegen, für äquivalent der Oberterrasse des Beraunflusses, die spärlichen Reste einer niedrigeren Terrasse für analog der Mittelterrasse des genannten Flusses.

10. Die *Diskordanz zwischen Algonkium und Silur* äußert sich in etwas abweichender Streichrichtung und in steilerem Einfallen der algonkischen Schichten. Ich bin nicht der Ansicht, daß zwischen Algonkium und Silur hier eine Dislokation verläuft.

11. Unerkannt blieb bisher die *Längsdislokation* zwischen *Údersko* und dem *Rymáňský vrch*, längs welcher der zweite, hangende Quarzitstreifen (*d<sub>2</sub>*) emporgehoben wurde. Überaus zahlreich sind die *Querdislokationen* unseres Gebietes, welche von *W* nach *O* in der Regel die Schichten gegen *N* verschieben. Bloß die *Chrbina-verwerfung* bewirkt eine Verschiebung nach *S*; sie trennt die Chrbinascholle von der Scholle des *Karabinský vrch*. Die oben genannte *Längsdislokation* ist *jünger* als die Chrbina-Querwerfung.

12. Im Gebiete der Wasserscheide zwischen dem Kačák-bache und dem Moldaunflusse blieben unter anderen die *Kreidetafelzeugen* bei *Unhošt* und *Kladno* erhalten. Die Zuflüsse der Moldau bestreben sich den Kačák-bach eines Teils seines Zuflußgebietes zu berauben.

13. Der Kačák-bach entstand als *konsequenter* Fluß auf der oligozänen Festebene, welche seit dem jüngeren Tertiär bedeutend (wohl bei weitem über 50 *m*) abgetragen und erniedrigt wurde. Der Kačák ist an der Oberfläche der Festebene ursprünglich auf Kreideschichten angelegt worden; sein Tal ist *epigenetisch*. Seine alten Mäander haben sich in den Untergrund vertieft, wie dies insbesondere in algonkischen Teile unseres Gebietes schön zu ersehen ist.

Die Neubelebung der Erosionstätigkeit des Kačák-baches zur *Diluvialzeit* entstand einerseits durch schnellere Vertiefung des Hauptflusses, nämlich der Beraunflusses, also durch Tieferlegung der unteren Erosionsbasis, andererseits erhob sich vielleicht die obere Erosionsbasis, der *Žbán*. Wo die vertieften Mäander mit der Zeit durchschnitten wurden, entstanden Inselberge.

Ein Einfluß der Tektonik auf den Verlauf des Kačák äußert sich hauptsächlich nur in dem aus harten Silurschichten zusammengesetzten Gebiete. Bei kleineren Zuflüssen entstanden westl. von *Nenačovic* durch Anzapfung knieförmige Talumbiegungen längs Querdislokationen.

## LITERATURVERZEICHNIS.

1. J. Krejčí - R. Helmhacker. — Geolog. Karte der Umgebung von Prag 1868—1877.

2. Ph. Počta. — Geolog. Karte von Böhmen. Die weitere Umgebung von Prag. Archiv der naturw. Landesdurchforschung Böhmens. Bd. XII., Nr. 6. 1902.

3. J. Vála und R. Helmhacker. — Die Eisenerze in der Gegend zwischen Prag und Beraun. Archiv der naturw. Landesdurchforschung von Böhmen. II. Teil 1877.

4. R. Kettner. — Několik poznámek k otázce stratigrafického rozčlenění českého algonkia. Věstník sjezdu čes. přírodopyců a lékařů. 1914. Seite 317.

F. Slavík. — Spilitische Ergußgesteine im Präkambrium zwischen Kladno und Klattau. Archiv. d. naturw. Landesdurchforschung v. Böhmen. Bd. XII. Nr. 2. 1909.

Derselbe. — O spilitech v algonkiu příbramském. Slavnostní spis k 70. narozeninám dvor. rady Dra K. Vrby. II. tř. Č. Akad. 1915.

5. J. Woldřich. — Průvodce do údolí šáreckého u Prahy. Sborník klubu přírodov. v Praze. 1914. S. 14.

Derselbe. — Geologická procházka Šárkou. Časopis společn. přátel starozitností česk. v Praze. Jahrg. XXII.

6. M. V. Lipold. — Die Eisensteinlager der silur. Grauwackenformation in Böhmen. Jahrbuch der k. k. geol. Reichsanstalt. Wien 1863, S. 339.

7. J. J. Jahn. — O krušnohorských vrstvách ( $d_{1a}$ ). Rozpravy Čes. Akademie Jahrg. XIII., Nr. 30, Prag 1904.

8. J. Krejčí - F. Feistmantel. — Orographisch-geotekton. Übersicht des silur. Gebietes in Mittelböhmen. Archiv der naturw. Landesdurchforsch. von Böhmen. Bd. V., 1885.

9. K. Feistmantel. — Zwei Profile durch die Basis der böhm. Silur-Etage D. Sitzber. d. kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 1879. S. 4.

Derselbe. — Spongien-Reste aus silurischen Schichten von Böhmen Ibidem. 1884. S. 2.

9. a) J. Barrande. — Systéme silurien du centre de la Bohême. Brachiopodes.

10. Cyr. Ritt. v. Purkyně. — Terasy Mže a Vltavy mezi Touškovem u Plzně a Prahou. Sborník zeměvěd. spol. 1912.

11. J. Woldřich. — Die geol. Verhältnisse der Gegend zwischen Litten, H. Třebáň und Poučnik bei Budňan. Sitzungsber. d. kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften. Prag 1914.

12. R. Kettner. — Die tertiären Schotter und Tonablagerungen bei Sloup und Klíneck. Sitzungsber. d. kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag 1911.

Derselbe. — O terasách vltavských mezi Svatojansk. proudy a Zbraslaví. Sborník zeměvěd. spol. 1913.

13. V. Smetana. — Příspěvek k seznání třetihor. útvaru na Rakovnicku. Věstník král. čes. společ. nauk. 1915.



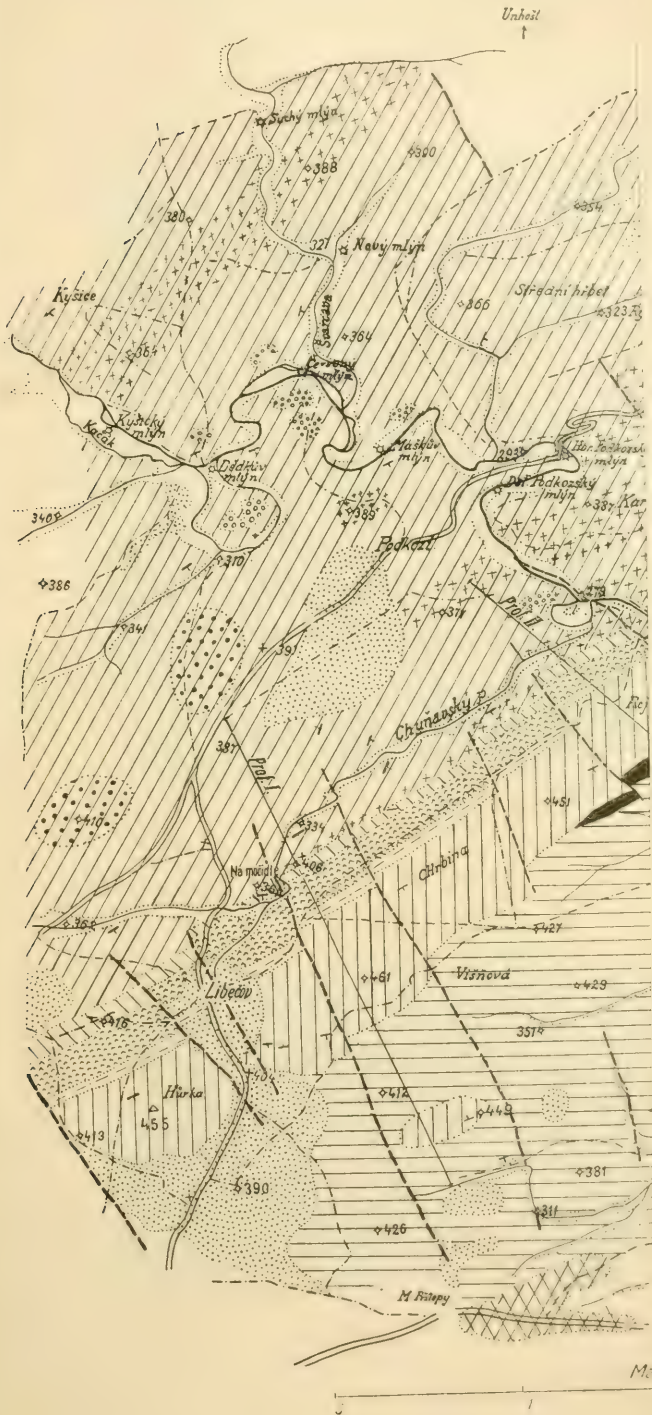
14. E. Bořický. — Petrograph. Studien an den Basaltgest. Böhmens. Arch. d. naturw. Landesdurchf. Böhm. Bd. II. Teil II.
  15. F. Katzer. — Geologie v. Böhmen. Prag 1902.
  16. J. Krejčí—R. Helmacker. — Erläuterungen zur geol. Karte der Umgebung v. Prag. Arch. d. naturw. Landesdurchforschung v. Böhmen. Bd. IV. Nr. 2. Prag 1879.
  17. J. Krejčí. — Geologie. Prag 1877.
  18. F. Katzer. — Das ältere Paläozoikum in Mittelböhmen. Prag 1888. Profil 6.
  19. J. V. Daneš. — Morfolog. vývoj střed. Čech. Sborník č. zeměv. společn. XIX. Praha 1913.
  20. W. M. Davis. — Die erklärende Beschreibung der Landformen. Deutsch bearbeitet von A. Rühl. Leipzig-Berlin. 1912.
-

## INHALT.

	Seite
Einleitung . . . . .	167
I. Stratigraphie . . . . .	168
A. Algonkium . . . . .	168
B. Silur . . . . .	169
1. Kruschnahoraschichten ( $d_{1\alpha}$ ) . . . . .	169
2. Komorauer Schichten und Erzlagerstätten ( $d_{1\beta}$ ) . . . . .	172
3. Osek-Kvaňer Schichten ( $d_{1\gamma}$ ) . . . . .	172
4. Drabover Quarzite ( $d_2$ ) . . . . .	173
5. Diabas im Hangenden der Drabover Quarzite . . . . .	173
6. Zahořaner Schichten ( $d_4$ ) . . . . .	173
C. Tertiär . . . . .	174
1. Terrassenschotter . . . . .	174
2. Basaltgang . . . . .	174
D. Diluvium-Alluvium . . . . .	175
II. Tektonik . . . . .	177
III. Morphologie . . . . .	183
Resumé . . . . .	188
Literaturverzeichnis . . . . .	190

---

Geologische Karte des Kačák-Wassergebietes zwischen Kysice u







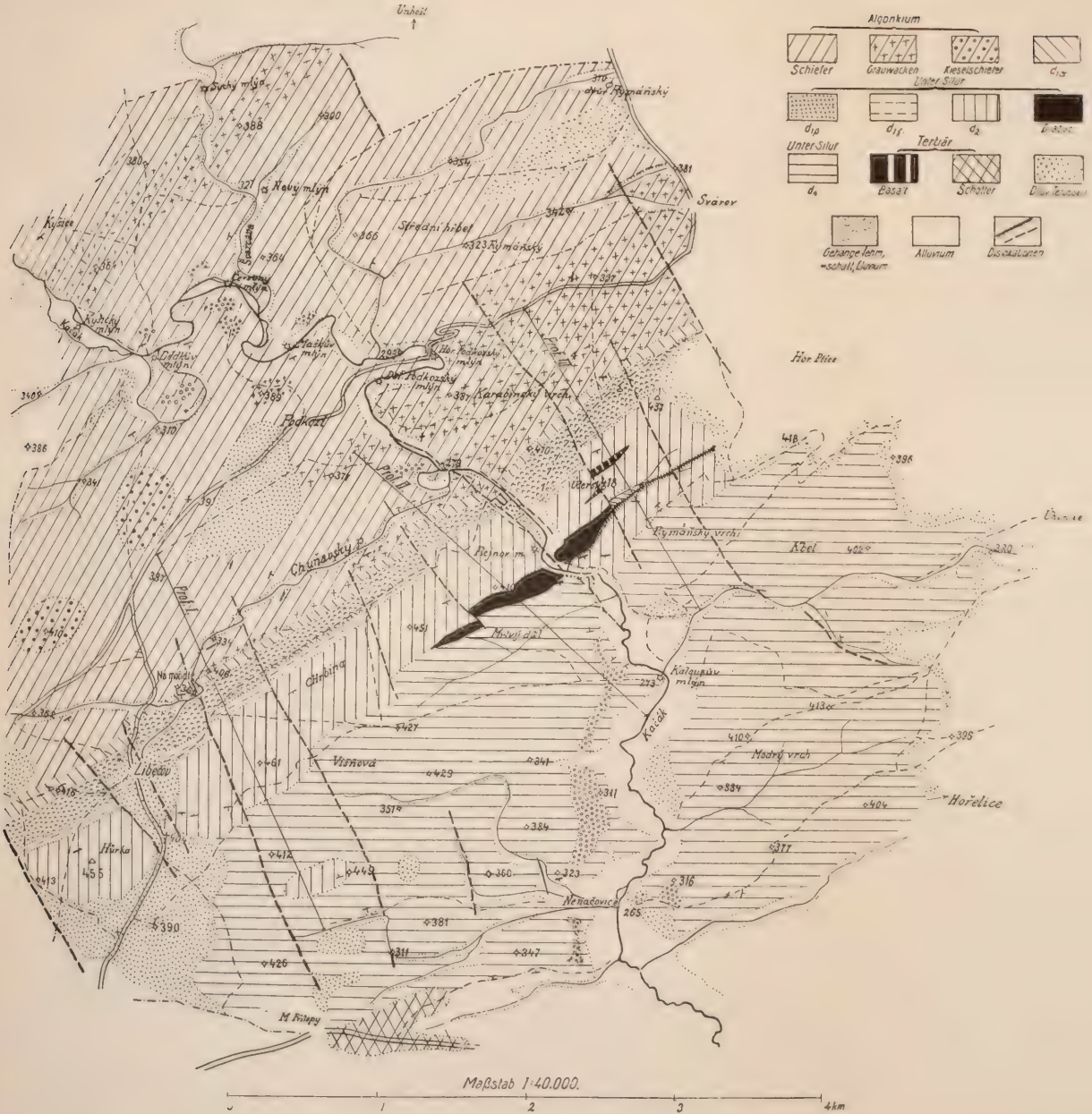






Fig. 1.



Fig. 2.





## ERKLÄRUNGEN ZU TAFEL II.

Fig. 1. Sekundäre scharfe Fältelung auf den Schichtflächen der algonkischen Schiefer an der Straße nördl. von der oberen Podkozí-mühle. (Phot. d. Autors.)

Fig. 2. Vertiefter Mäander des Kačákbaehes bei der Dědekmlühle. Der Bach fließt von *NW* von der Kyšicer Mühle zu der Dědekmlühle, umfließt den Inselberg (Kote 341), auf welchem im Vordergrunde eine deutliche Terrasse zu sehen ist. Er kehrt zur Dědekmlühle zurück, um dann gegen *OSO* abzufließen. Die Pfeile geben die Stromrichtung an. Links ein schönes Amphitheater. (Photogr. d. Autors.)

---

# Neue untersilurische Fauna von Rožmitál in Böhmen.

Von

J. V. ŽELÍZKO.

Mit 1 Tafel.

(Vorgelegt am 10. März 1916.)

Die sonderbare untersilurische Fauna von Voltuš bei Rožmitál, welche wir seinerzeit provisorisch in die Bande  $d_1$  ( $\gamma^1$ ) mehr aus stratigraphischen als paläontologischen Rücksichten einreiheten, trotzdem einige Umstände bezüglich der Zugehörigkeit einiger Arten auch den höheren Horizonten der Schichtenfolge  $D_1$  zu entsprechen scheinen, hat nachträglich weitere Versteinerungen, über welche wir nachstehend berichten, geliefert.

Es sind dies drei Bivalven, ein Brachiopode und zwei Pygidien von Trilobiten.

Wie wir schon in dem ersten Bericht erwähnten, waren die Schiefer von Voltuš einem gewaltigen allmählichen Drucke ausgesetzt, dessen Einfluß auch auf die Tierreste nicht ohne Wirkung geblieben ist, denn es gibt fast keine einzige Versteinerung, welche nicht mehr oder weniger gepreßt oder sonst deformiert wäre. Verhältnismäßig besser erhaltene, also eine nähere Bestimmung zulassende Arten sind sehr selten. Trotzalldem, obwohl dieses mühsam und kostspielig gewonnene Material insgesamt nicht die am besten erhaltenen Arten enthält, weist es doch manche bemerkenswerte, im böhmischen Silur früher überhaupt unbekannte Formen auf.

Auch jene Arten, welche wir heute beschreiben, bilden eine interessante Ergänzung zu der bisherigen Fauna von Rožmitál.

---

<sup>1</sup>) *Geologicko-palaeontologické poměry nejbližšího okolí Rožmitálu.* (Rozpravy České Akademie r. XV., č. 42. Praha 1906. Mit deutschem Resumé im Bulletin international dortselbst.) — *Die silurischen Ablagerungen im südwestlichen Teile Mittelböhmens und in den Ostalpen.* (Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt in Wien, N. 16. 1909.)

**Modiolopsis? problematica Žel. (n. sp.)**

(Fig. 1.)

Es wurde ein Abdruck und ein Gegenabdruck des Steinkernes mit beiden Schalen gefunden. Das beiliegende Bild zeigt teilweise den Umriß der bedeutend gedrückten 47 mm langen und etwa 20 mm hohen Oberschale.

Die Oberfläche ist glatt und nur auf dem unteren Rande des negativen Abdruckes kann man Spuren einiger konzentrischer Rippen beobachten. Der ursprünglich gewölbte Oberrand hat sich infolge des starken Schichten-druckes oben bedeutend verschoben und ist vollkommen mit der Schale vorflossen, deren ursprüngliche Form ganz anders aussah, als sie jetzt angedeutet ist. Nach dem Umriß ist zu sehen, daß die Schale auch in der Länge verändert war, so daß die Versteinerung genau zu bestimmen unmöglich ist.

Von der Ventralschale ist nur der untere Rand bemerkbar.

Im ganzen handelt es sich um ein größeres Exemplar einer Art, die in normaler Form den *Barrandeschen*, aus der Stufe  $d_2—e_2^2)$  des Unter- und Obersilurs angeführten, sowie einigen von *Hall*<sup>3)</sup> beschriebenen amerikanischen Arten von *Modiolopsis*, deren Form wie bekannt so variiert, am meisten zu ähneln scheint. Unser Exemplar erinnert teilweise auch an einige gleichfalls von *Hall* erwähnte Formen der *Cypricardinien*.

**Modiolopsis deformis Žel.**

(Fig. 7.)

Gleichfalls ein gedrückter Steinkern 30 mm langer und 17 mm hoher Schale ohne jedwede Spuren der konzentrischen Rippen auf der Oberfläche.

Gegen den Oberrand zu normal gewölbte, hinten abgerundete Schale wurde zur linken Seite sowie auch vorne gepreßt, infolgedessen erscheint der Umriß auf beiden Seiten regelmäßig abgerundet. Das Fossil korrespondiert am meisten mit *Modiolopsis Draboviensis*, welche Form *Barrande* aus den verschiedenen Lokalitäten der Bande  $d_2$  und  $d_5$  beschreibt.<sup>4)</sup>

Eine andere kleinere Form *Modiolopsis sp.* haben wir schon früher angeführt.<sup>5)</sup>

**Leda primula Žel.**

(Fig. 6.)

Eine stark gepreßte, dünne, 29·5 mm lange und 1·35 mm hohe Schale. Die früher glatte Oberfläche ist jetzt rissig.

Die nach hinten und nach vorne eng verlängerte Schale erinnert nur teilweise an einige aus der Etage D stammende *Barrandesche* Arten.

<sup>2)</sup> *Système Silurien*. Vol. VI.

<sup>3)</sup> *Natural History of New-York*. Part. VI. *Palaeontology*. Vol. 1 und 3, Albany 1843 a 1861.

<sup>4)</sup> *Système Silurien*, Vol. VI., Pl. 264, III.

<sup>5)</sup> *Geologicko-palaeontologické poměry nejbližšího okolí Rožmitálu*.

Der Form nach ähnelt sie am meisten der *Leda coercita* von Kosov (*d*<sub>5</sub>),<sup>6)</sup> die aber viel kleiner ist.

Wie bekannt, reiht Neumayr<sup>7)</sup> einige untersilurische Arten von *Leda* und *Nucula* auf Grund bestimmter morphologischer Merkmale zu einer selbständigen Gattung von *Myophusia* ein.

### **Lingulella? grandis Žel. (n. sp.)**

(Fig. 2 und 3.)

Auf einem Schieferbruchstücke wurden knapp nebeneinander gepreßte Abdrücke des Inneren von zwei ungleichen, mäßig gewölbten Schalen, wahrscheinlich ein und derselben Art angehörend, gefunden. Die ursprünglich ovallängliche, jetzt deformierte Ventralschale ist 35 mm lang und etwa 33·5 mm breit. Der Schloßrand ist ungenügend erhalten.

Zwei schwach angedeutete, senkrechte, unregelmäßig lange, vom Oberrand parallel auslaufende Linien sind wahrscheinlich Spuren der Wirbelleisten. Die Schalenoberfläche ist in der höheren Partie glatt; nur am Unterrande kann man eine Reihe konzentrischer Anwachsstreifen beobachten.

Auf der zweiten 29 mm langen und 32·5 mm breiten Klappe sind teilweise Spuren feiner, konzentrischer Rippen sichtbar.

Die genaue Bestimmung des Fossils ist mangels charakteristischer Merkmale unmöglich. Wahrscheinlich handelt es sich um eine ungemein große, zur Ordnung der *Inarticulata* angehörende Brachiopode. Die Unregelmäßigkeit sowie die breite, zum Oberrand sich verengende Schale erinnert am meisten an die *Lingulella*. Da von dieser Gattung keine einzige, bisher beschriebene Art unserem abgebildeten Exemplare entspricht, bestimmte ich sie als eine neue Art. (Übrigens ist es auch nicht ausgeschlossen, daß die betreffenden Klappen zwei verschiedenen Brachiopoden angehören.)

Eine andere, auffallend große, 42 mm breite und 34 mm lange Brachiopode *Orthis Nováki* haben wir bereits von Voltuš in der vorherigen Arbeit angeführt.

### **Aeglina cf. rediviva Barr.**

(Fig. 4.)

Ein positiver und ein negativer Abdruck eines zur linken Seite gedrückten flachen Pygidiums, ursprünglich halbkreisförmiger Form, dessen wirkliche Breite 11 mm und die Höhe 6·5 mm betrug.

<sup>6)</sup> *Système Silurien*. Vol. VI. Pl. 264, VII.

<sup>7)</sup> *Zur Morphologie des Bivalvenschlosses*. (Sitzungsber. der mathem.-naturwiss. Klasse d. kaiserl. Akademie der Wissenschaften. B. d. LXXXVIII., I. Abt., Jg. 1883, Heft I. bis V. Wien 1884.)



Der Gesamtcharakter ist durch eine halbkreisförmige Achse, die bei dem Rumpfrande etwa ein Fünftel der Gesamtbreite desselben einnimmt, nur schwach angedeutet. Die Achse reicht etwa ein Drittel in die Gesamtlänge des Pygidiums.

Spuren der Querteilung derselben, sowie die nebenseitigen, schrägen, zum Oberrand des Pygidiums sich verbreitenden Rippen sind wenig deutlich.

Der Unterrand des Pygidiums ist mit einem engen Saum versehen.

Das vorliegende Stück ähnelt am meisten der *Aeglina rediviva*, welche BARRANDE aus verschiedenen Fundorten der Bande  $d_1$ ,  $d_2$ — $d_5$  erwähnt, die aber viel kleiner ist als das Exemplar von Voltuš, dessen Form an die vergrößerte, von BARRANDE von Trubín beschriebene *Aeglina rediviva* besonders erinnert.<sup>8)</sup>

### Aeglina sp.

(Fig. 5.)

Gleichfalls ein zur linken Seite gedrücktes, halbkreisförmiges, schwach gewölbtes und am Außenrande mit einem engen Saum versehenes Pygidium, dessen wirkliche Breite etwa 10·5 mm und die Höhe 7 mm betrug.

Die nach unten sich verengende Achse nahm etwa ein Drittel der Gesamtbreite des Rumpfrandes ein und reichte kaum in die Hälfte des Schwanzschildes. Die Querteilung sowie die nebenseitigen Rippen der Achse sind schwach angedeutet.

Sonst ist die ganze Oberfläche völlig glatt.

\* \* \*

Die Fauna von Rožmitál zählt heute zusammen 34 Arten, von welchen 8 auf Trilobiten, 2 auf *Cephalopoden*, 8 auf Brachiopoden, 3 auf Gastropoden, 5 auf Pteropoden und 8 auf Lamellibranchiaten entfallen.

Diese Fauna gibt uns auch mit dem neuen Zuwachs keine Möglichkeit zur präzisen Einreihung in eine entsprechende Stufe der Etage D, so daß sie vorläufig bis auf weiteres Relikt der isolierten, im böhmischen Silur eine besondere Stelle einnehmenden „Fauna von Rožmitál“ bilden wird.

<sup>8)</sup> *Système Silurien*. Vol. I. Pl. 34. Fig. 7.

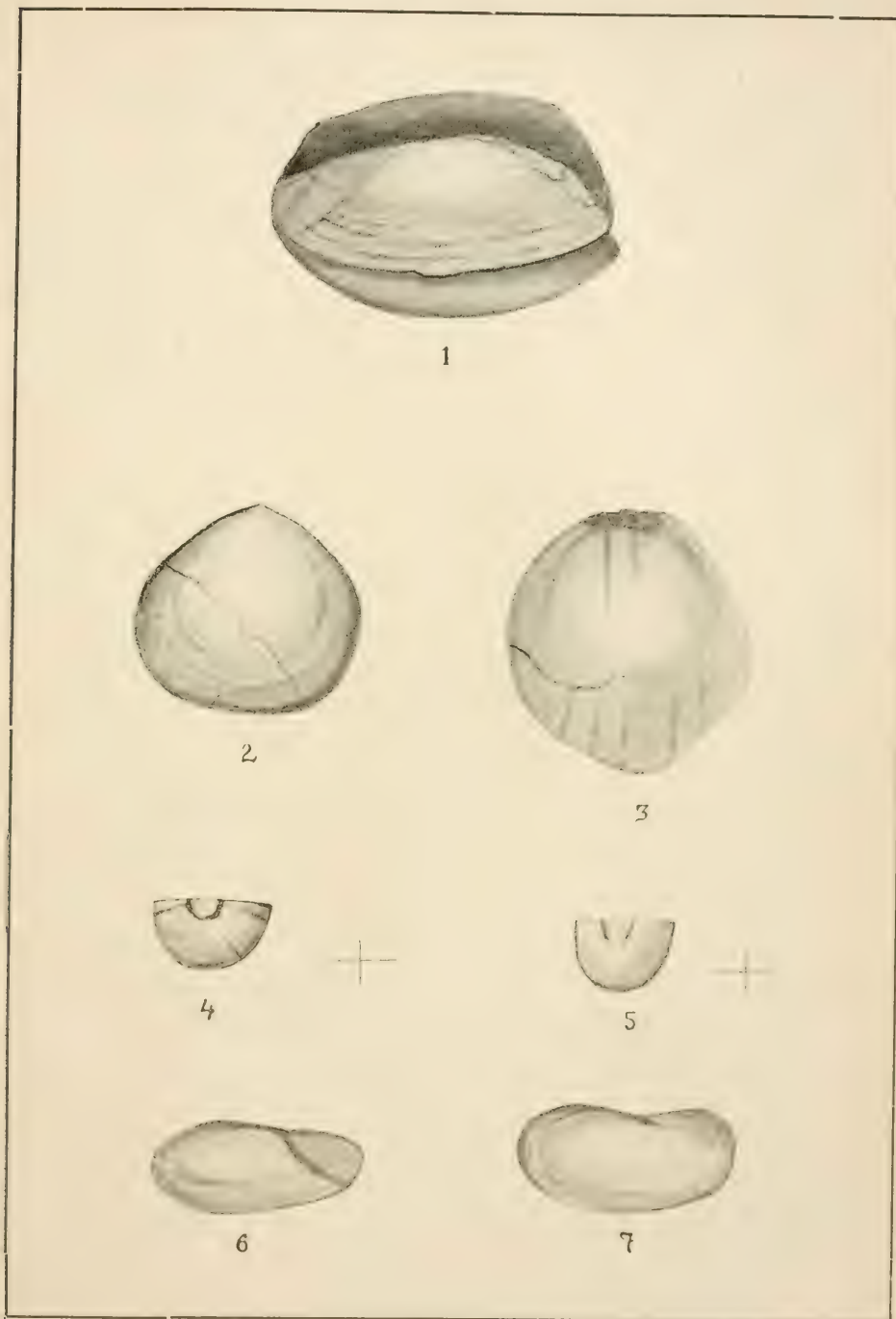
## TAFELERKLÄRUNG.

- Fig. 1. *Modiolopsis? problematica* Žel.  
Fig. 2. *Lingulella? grandis* Žel. (Gipsabdruck des Inneren der Schale.)  
Fig. 3. *Lingulella? grandis* Žel. (Das Innere der Ventralschale.)  
Fig. 4. *Aeglina cf. rediviva* Barr.  
Fig. 5. *Aeglina* sp.  
Fig. 6. *Leda primula* Žel.  
Fig. 7. *Modiolopsis deformis* Žel.

*Bemerkung:* Alle in der natürlichen Größe (mit Ausnahme der Fig. 4 und 5) abgebildeten Stücke sind Eigentum des Museums des Königreiches Böhmen.

---

J. V. ŽELÍZKO: NEUE UNTERSILURISCHE FAUNA VON ROŽMITÁL IN BÖHMEN.







# Nachträge zur diluvialen Fauna von Wolin.

Von J. V. ŽELÍZKO.

Mit 1 Textabbildung und 1 Beilage.

(Vorgelegt am 14. Jänner 1916.)

## DĚKANSKÝ VRCH.

Im Jahre 1914 und 1915 konnte ich dank der Unterstützung der II. Klasse der Böhmisches Akademie der Wissenschaften mit Erfolg die Forschung auf dem *Děkanský vrch* bei Wolin in Südböhmen, welcher Fundort im Jahre 1913 fünfzehn Arten gemischter *Glazial- und Steppenfauna* lieferte,<sup>1)</sup> fortsetzen. Durch die neuen Forschungen wurde die betreffende Anzahl mehr als verdoppelt, so daß sich die angeführte Lokalität zu dem benachbarten, von mir früher gleichfalls eingehend durchforschten Fundorte bei *Zechovic* stellt.<sup>2)</sup>

Die vorteilhafte Lage des fast bei der Stadt Wolin liegenden *Děkanský vrch* hat meine andererseits langwierige und viel Geduld erfordernde Arbeit gewiß bedeutend ermöglicht.

Die Arbeit wurde im ersten Profil bei der Felswand und zwar der ganzen Länge nach gegen Osten fortgesetzt.

Auf diese Weise wurde ein Teil der Ablagerung in Form eines ungleichen Dreieckes in der Ausdehnung von 11 m<sup>2</sup>, und von unregelmäßiger Mächtigkeit, die im höchsten Punkte etwa über 2 m betrug, durchgegraben.

Das Abräumen der Erde, des Schotters und der großen Blöcke, welche die diluvialen Lehmschichten bedeckten, die gegen Osten gleichfalls eine Menge kleinerer und größerer kantiger Steine enthielten, nahm besonders viel Zeit in Anspruch.

Die unteren, diluviale Fauna enthaltenden Ablagerungen waren immer nach der Entfernung der oberen Decke von mir mit einem Messer

<sup>1)</sup> *Diluviale Fauna von Wolin in Südböhmen.* (Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, Prag 1909.)

<sup>2)</sup> Ein neuer Fundort diluvialer Fauna bei Wolin. (Ibid. 1914.)

Stück nach Stück untersucht, so daß sämtliche Knochen durch meine Hand gingen. Infolgedessen ist jeder Irrtum hinsichtlich der Provenienz sowie der stratigraphischen Lage der betreffenden Funde völlig ausgeschlossen.<sup>3)</sup>

Über die täglichen Resultate habe ich dann die nötigen Notizen geführt.

In einer Entfernung von 3 m 40 cm längs der Felswand gegen Osten, wo die Nachgrabung wegen vorgeschrittener Herbstzeit vorläufig beendet wurde, waren die geologischen Verhältnisse der Ablagerung viel abweichender als bei dem, im Anfang sich zeigenden Durchschnitt, wie unsere in der ersten Publikation abgebildete Situation darstellt.



*Durchschnitt der diluvialen Ablagerung auf dem Děkanský vrch im Jahre 1915.*

I. Walderde mit kleineren, kantigen Steinen. — II. Schwarze, mit Schotter vermengte, Schnecken und Spätfauna enthaltende Schicht. — III. Dunkelbrauner diluvialer Lehm. — IV. Gelblichbraune untere diluviale Schicht.

Wie der heutige neue Durchschnitt zeigt, maß die oberste, mit kleineren Steinbruchstücken vermengte Walderde 25 bis 30 cm (I.).

Unterhalb dieser ruhte unregelmäßig gelagerte, ebenfalls mit Schotter

<sup>3)</sup> Aus eigener Erfahrung weiß ich, daß zu vieles Vertrauen den Arbeitern gegenüber nur zu den größten Irrtümern und Unannehmlichkeiten führt, namentlich wenn ihnen eine besondere Belohnung für bestimmte Anzahl der Knochen versprochen wird. Es kommt dann oft vor, daß in das fossile Material auch rezente Reste geschmugelt werden. Der erfahrene Forscher erkennt natürlich diesen Betrug auf den ersten Blick, nimmt aber dann die weiteren Funde mit Mißtrauen an.

vermischte auffallend schwarze Erde (II.) in der Mächtigkeit von 50 cm. Der Schotter der gegen Norden streichenden Schicht war mit kleineren Holzkohlensplittern vermennt, die jedenfalls erst später hinein durchdrangen.

Diese schwarze Erde ist dadurch von Bedeutung, daß sie eine Unzahl von Schnecken sowie auch eine charakteristische *Spätfauna* lieferte. Die hier vorkommenden Tierreste weisen eine dunklere Farbe auf als die früher bei Zechovic und auf dem Děkanský vrch gefundenen diluvialen Knochen.

Darauf folgte brauner diluvialer, infolge der höher liegenden schwarzen Erde dunkel gefärbter Lehm. Seine Mächtigkeit betrug 45 cm (III.). Derselbe war gleichfalls mit Schotter und Blöcken vermischt; die letzten hatten besonders in der Nähe der Felswand riesige Dimensionen.

Die Tierreste wurden in diesem Lehm erst auf dem Grund, an der Grenze des gelblichbraunen diluvialen Lehms (IV.) und zwar in der lehmig-sandigen lößartigen Schicht, gefunden.

Es sind dies Zähne und Knochen von *Wildpferd*, *Renntier* und *Wisent*; von dem letzten wurde knapp bei der Felswand ein mittlerer Teil des Femurs gefunden. Der früher beschriebene Teil einer Tibia, sowie das aus dem Jahre 1915 stammende Unterkieferfragment mit gut erhaltenen Milchzähnen fand man etwas tiefer in der IV. Schicht, aus welcher die meisten Funde stammen, unter welchen auch die in der letzten Publikation beschriebenen fünfzehn Arten inbegriffen sind. In die bereits besprochenen Ablagerungen verlief die Kalksteinwand mit einigen scharfen Ausläufern.

Die untere Diluvialschicht (IV.), jetzt in der durchschnittlichen Mächtigkeit über 50 cm, enthielt im Jahre 1915 viel mehr scharfkantige Bruchstücke, Steine und Blöcke, als beim Anfang der Forschung. Jeder der Blöcke mußte gleichfalls mit einem Messer allmählich aus der Ablagerung befreit werden, denn gerade in dem an der Oberfläche der Steine fest angeklebten Lehm, sowie im Lehm der Spalten zwischen diesen Blöcken, meistens interessante Tierreste, besonders der Mikrofauna vorkamen. Diese langwierige Art und Weise der schon ohnehin infolge des zeitweisen Regens, oft auf einige Tage unterbrochenen Arbeit hatte den Vorteil, daß es mir zwar nicht zu viel ausgedehnten Erdkomplex zu durchgraben, dafür aber zahlreiches und wertvollstes Material zu gewinnen gelang.

Die scharfkantigen, meistens Kalkstein- und Aplitbruchstücke, sowie zerschlagene Renntier- und Wildpferdknochen, von denen in der letzten Schicht eine unzählige Menge gefunden wurde, wiesen oft eine auffallende Form verschiedener Messer, Spitzen, Schaber u. a. auf, so daß ein phantasievoller Finder in diesen Pseudoartefakten kostbare, von Urmenschen verfertigte Werkzeuge vermuten könnte.

In dem vorhandenen Material gibt es fast keinen größeren Knochen, der nicht Spuren der Abnagung hätte. Die Beute wurde von Raubtieren entweder in die Verstecke zwischen angehäuften Blöcken, oder ins Freie



zur Felswand verschleppt und hier verzehrt. Die an Ort und Stelle gelassenen Knochen wurden dann später von Erde und Blöcken verschüttet.

Es ist bemerkenswert, daß einige Knochen, z. B. ein vorderer Unterkieferteil und eine Phalanx eines Wildpferdes, die man unter einem Blocke fest eingeklemmt fand, wurden infolge des gewaltigen Druckes nicht zerquetscht, sondern nur im kompakten Lehm gepreßt und deformiert. Dort, wo die großen Knochen frei lagen, d. i. wo sie vor größerem Druck geschützt waren, war der Lehm ringsherum feinsandig und mürbe. Dafür war aber der einige Arvicolidennester enthaltende Lehm gröber. Wie das Schlemmen einiger Proben zeigte, bestand das überbliebene Material aus scharfkantigen Körnern von Kalkstein, Aplit, Quarzit und spärlich von weißem Quarz, von den kleinsten mikroskopischen Dimensionen bis zu den über 1 cm großen Bruchstücken, also insgesamt ein aus der Nähe angeschwemmtes oder angeschüttetes Material. Außer diesen Bestandteilen enthielt das Schlemmen auch eine Menge kleinerer Zähne von Arvicoliden.

Im Laufe der letzten zwei Jahre wurde von Děkanský vrch nicht nur die Anzahl für diese Lokalität neuer Formen vermehrt, sondern auch die Anzahl der Knochen fast aller, in unserem ersten Bericht bereits angeführten Arten. So haben wir von dort Reste z. B. des *Wildpferdes*, die wenigstens zehn Individuen angehören (nur die Zahl der Backenzähne beträgt 219), ferner einige Kiefer, Zähne und ein schönes Stirnbeinfragment des *Renntiers*, über 50 Unterkiefer von *Halbsbandlemming*, über 120 von der *gemeinen Feldmaus* und über 50 von der *sibirischen Zwiebelmaus* u. s. w.

Alle diese Zuwachse, die sich zu der schon früher vertretenen Fauna beziehen, werden nicht in der vorliegenden Arbeit ausführlich beschrieben, sondern nur weitere neue Formen erwähnt.

Bei der Beschreibung einzelner Arten halte ich mich der klareren Übersicht wegen, an die bisherige Nomenklatur, obwohl mir das neueste Werk Trouessarts „*Faune des mammifères d'Europe*“ bekannt ist.

Eine Bemerkung über die geographische Verbreitung einzelner Tiere lege ich nur in dem Falle bei, wenn es sich zu einer entweder in dem Berichte über die Fauna von Zechovic oder aus dem Děkanský vrch noch nicht angeführten Art bezieht.

Die im Jahre 1914 und 1915 auf dem Děkanský vrch gemachten Funde bestimmte ich, insofern mir mein Vergleichsmaterial genügte, selbst und bei den fraglichen Resten halfen mir wiederum die umfangreichen Sammlungen und langjährigen Erfahrungen bekannter mährischer Forscher aus. Es waren folgende Herren, denen ich für ihre freundliche Mithilfe herzlichst danke: V. Čapek, Oberlehrer in Oslavan, J. Knies, Oberlehrer in Sloup, Dr. M. Kříž in Steinitz und Regierungsrat K. J. Maška in Brünn.

Auch die Sammlungen des Museums des Königreiches Böhmen in Prag, des Mährischen Landesmuseums in Brünn, ferner einiger Museen und



wissenschaftlicher Institutionen in Wien, Berlin, Stockholm, Christiania und Bergen, haben mich bei meinen Studien in mancher Hinsicht belehrt.

Die auf dem Děkanský vrch letztfestgestellte unten beschriebene Fauna stammt insgesamt aus der unteren IV. Schicht.

## A. MAMMALIA. — SÄUGETIERE.

### I. Carnivora. — Raubtiere.

#### a) Felidae. — Katzen.

*Felis (Lynchus) lynx* L.

(Der Luchs.)

Von dieser zweitgrößten Katze wurde die zweite Phalanx gefunden.

Früher hat nur eine einzige Lokalität in Böhmen und zwar Srbská sluj bei Beroun von Luchs einen schön erhaltenen Unterkiefer, mehrere Phalange und einige Extremitätknochen, die sich im böhmischen Landesmuseum befinden, geliefert.<sup>4)</sup>

Obwohl der Luchs in Böhmen, namentlich im Böhmerwald bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts so häufig war, in welcher Zeit auf der Winterberger Herrschaft noch über hundert Stück erschossen wurden, so kamen seine Reste im Diluvium doch sehr selten vor. Es scheint eher, daß manche Reste dieser Katze in den verschiedenen Museen bisher unbeachtet aufbewahrt sind.

N e h r i n g<sup>5)</sup> zählt den Luchs unter diejenigen Säuger, welche zwar keine charakteristischen Tiere der Steppenlandschaften sind, obwohl dieselben da als zeitweise Gäste auftreten und zwar teils in den zugehörigen Waldkomplexen und Gebirgen, teils auch in den eigentlichen Steppendistrikten.

Ein solcher zeitweiser Gast war eben der Luchs bei Wolin. Da die Diluvialschicht auf dem Děkanský vrch meistens *Glazial-* und *Steppenfauna* enthält, war damals der Luchs viel seltener als zu Ende der Diluvialzeit, in welcher das Vorgebirge des Böhmerwaldes sich dicht zu bewalden begann und in den felsigen Wäldern der Luchs, der Wolf und der braune Bär bis zur historischen Zeit ihre ununterbrochene Zuflucht hatten.

Der Luchs lebt heute in den Alpen, Karpaten, Rußland, Sibirien und in Schweden bis zum Lappland hinein. In Amerika leben einige Abarten dieses Tieres.

<sup>4)</sup> K a f k a J. *Fossile und recente Raubtiere Böhmens*. (Archiv der naturwissensch. Landesdurchforschung von Böhmen, Bd. X. Nr. 3, Prag 1903.)

<sup>5)</sup> *Ueber Tundren und Steppen der Jetzt- und Vorzeit*. Pag. 68. Berlin 1890.

Nach K n i e s<sup>6)</sup> kam derselbe in den letzten Jahren besonders häufig auf der Babia Gora bei Žiwiec vor. Von den Karpaten verläuft er sich auch in das Gebirge des östlichen Mährens, wo im Jahre 1888 ein Stück bei Pitín und im Jahre 1891 ein anderes zwischen Frankstadt und Lysá hora erschossen wurde.

b) Canidae — Hunde.

*Vulpes vulgaris* Briss.

(Der gemeine Fuchs.)

Es wurde gefunden 1 Ulna, 1 Atlas, 1 Diaphysis ohne Ober- und Unterschenkel, 2 Halswirbel von einem starken Tiere, 1 Eckzahn, 1 Schneidezahn und 2 Prämolare I. u. IV.

Kommt im böhmischen Diluvium ziemlich häufig vor; unter anderen Lokalitäten auch bei Zechovic.

*Vulpes lagopus* L. sp.

(Der Eisfuchs.)

Ein schön erhaltener Metatarsus von einem jüngeren Tiere, 1 Radius und 1 Schneidezahn.

In Böhmen ist der Eisfuchs von Zuzlawitz, Beroun und Zechovic bekannt.

*Lupus vulgaris* Gr.

(Der Wolf.)

Vorhanden ist 1 Radius, 1 Ulna, 3 Metatarsi, 1 Humerus, I. und II. Phalanx, 1 Rückenwirbel N. 4. und ein abgewetzter Schneidezahn.

In Böhmen ist der Wolf aus den diluvialen Ablagerungen der Gegend von Beroun und Prag bekannt.

Heute ist derselbe in verschiedenen Varietäten in Europa, Asien Nordamerika und Nordpolargebieten gemeinsam mit dem Eisfuchs, Moschusochs, Renttier, Schneehasen und anderen Säugern sehr häufig verbreitet.<sup>7)</sup> Nathorst vermutet, daß der Wolf, der noch bis vor kurzem in Ostgrönland vollkommen unbekannt war, hieher vom Norden kam und hier damals zahlreiche Renttierherden ausgerottet hat.<sup>8)</sup> Etwas Ähnliches war auch in Rußland, wo der Wolf die Elchherden bedrohte und aus den

<sup>6)</sup> *Stopy diluviálního člověka a fosilní zvířena jeskyň Ludmírovských.* (Časopis moravského musea zemského. Jg. V. Brünn 1905.)

<sup>7)</sup> Ausführlichere Daten sind in den Reisewerken neuerer Forscher zu finden wie bei: Eduard Toll, Rob. Peary, Einvind Astrup, Achton Friis, Otto Sverdrup, Fr. Nansen, Sven Hedin u. a.

<sup>8)</sup> Otto Nordenskjöld. Die Polarwelt und ihre Nachbarländer, S. 12. Leipzig und Berlin 1909.

Walddistrikten verdrängte. Durch energische Verfolgung wurde aber das Raubtier ausgerottet und begannen sich die Elche wieder allmählich zu vermehren.

Der Wolf ging in Böhmen wie bekannt in verhältnismäßig kurzer Zeit ein. Im März des Jahres 1679 haben die Wölfe während eines großen Schneesturmes auf der Frauenberger Herrschaft 18 Hirsche zerrissen. Das letzte Tier wurde hier im J. 1706 erlegt. In der Gegend von Wittingau wurden im J. 1740 noch 6 Stück und auf der Winterberger Herrschaft vom J. 1721 bis zum J. 1756 zusammen 15 Stück erlegt.<sup>9)</sup> Auch in der Gegend von Rožmitál kamen die Wölfe noch in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts vor. Der letzte zeigte sich im J. 1750 bei Rožclov.<sup>10)</sup> Der angeblich letzte Irrläufer wurde in Böhmen überhaupt im J. 1850 bei Leitomischl erschossen.

Nach Mähren überlief der Wolf während des strengen Winters auf der zugefrorenen Waag über die ungarischen Pässe. Das Schlachtgewühl der letzten Zeit hat ihn wahrscheinlich öfters nach Mähren vertrieben.

### c) Mustelidae. — Marderartige Raubtiere.

*Mustela martes* Briss?

(Der Baummarder.)

Von diesem Raubtier fand man einen Tibiateil und ein Beckchen, welches der Form nach dem Beckchen des erwähnten Tieres am meisten ähnelt. Dasselbe ist groß und da es nicht vollkommen erhalten ist, ist es unmöglich die diesbezügliche Art genau zu bestimmen.

Der Baummarder ist aus den diluvialen Ablagerungen der Gegend von Prag bekannt; ein Zahn wurde nachträglich bei Zechovic gefunden. Bei Zuzlawitz ist das Vorkommen dieses Tieres gleichfalls fraglich.<sup>11)</sup>

## II. Glires. — Nagetiere.

### a) Sciuridae. — Eichhörnchen.

*Spermophilus citillus* Bl.

(Der gemeine Ziesel.)

Es liegt eine einzige Ulna vor.

Kommt in den diluvialen Ablagerungen der Gegend von Prag vor. Rezent erscheint er im nordöstlichen und mittleren Böhmen. In den

<sup>9)</sup> A. E. Brehm. *Život zvířat* I. S. 439.

<sup>10)</sup> *Blatensko a Březnicko. Práci učitelstva*, S. 72. Blatná 1915.

<sup>11)</sup> J. N. und Jos. Woldřich. *Geologische Studien aus Südböhmen. II. Wolyinkathal im Böhmerwalde* (Archiv der naturwissenschaftl. Landesdurchforsch. von Böhmen. Bd. XII. Nr. 4. Prag 1904).

südlichen Teilen ist unbekannt, dafür in Mähren häufig. Sonst bewohnt derselbe Südrußland um das Schwarze Meer herum.

*Sciurus vulgaris* L.

(Das Eichhörnchen.)

Ein Humerus, ein Beckchen und ein unteres Femurende.

Wurde in Böhmen bei Zuzlawitz, in der Srbská sluj und St. Prokophöhle festgestellt.

b) *Muridae*. — Mäuse.

*Cricetus vulgaris* (*fossilis*) *Kaup*.

(Der gemeine Hamster.)

Einige Schneidezähne und ein oberes Femurende.

Von Böhmen ist er aus mehreren Lokalitäten bekannt. Bei Zechovic fand ich seine Reste sehr häufig.

Rezert zeigte er sich in der Gegend von Wolin in den letzten drei Jahren besonders in größerer Menge.

*Cricetus phaeus* (*fossilis*) *Nehr*.

(Der Reißhamster.)

Ein rechter, ausgezeichnet erhaltener Unterkiefer.

Von Zechoyic besitze ich einen linken Unterkiefer.

c) *Arvicolidae*. — Feldmäuse.

*Arvicola nivalis* *Mart*.

(Die Alpenratte.)

Eine linke und eine rechte Unterkieferhälfte.

In Böhmen wurde sie nur bei Zuzlawitz und Zechovic gefunden.

*Arvicola campestris* *Blas*.

(Die braune Feldmaus.)

Eine rechte Unterkieferhälfte.

Gleichfalls nur von Zuzlawitz und Zechovic bekannt.

### III. *Artiodactyla ruminantia*. — Paarhufer.

*Cervus elaphus* L.

(Der Edelhirsch.)

Vorhanden ist ein oberes Ende des linken Metatarsus, einer kleineren Art.



Der Edelhirsch ist in den diluvialen Ablagerungen Böhmens sehr verbreitet. Derselbe wurde auch von Zuzlawitz angeführt. Auch bei Zechovic wurde er nachträglich konstatiert.

*Cervus capreolus* L.

(Das Reh.)

Zwei Halswirbel von einem starken Exemplar.

Dieselben waren in der Mitte der Schicht gemeinsam mit den Resten von *Renntier*, *Pferd*, *Wolf* und *Wasserratte* gefunden.

Das Reh gehört nach N e h r i n g zu denjenigen Tieren, die zwar nicht an die Steppe gebunden sind, welche aber nach den Beobachtungen verschiedener Forscher in Sibirien im Herbst regelmäßige Züge vom Gebirge in die Steppe und im Frühjahr wiederum ins Gebirge unternehmen. Auch der Edelhirsch steigt zeitweise aus seinen Walddickichten zum Rande der Steppe herunter, um sich hier anzuweiden.

Das Reh führt man aus dem böhmischen Diluvium von Koněprus, aus der Srbská sluj und Turská maštal an. Auch bei Zechovic wurde es von mir in der letzten Zeit gefunden.

*Capella rupicapra* Keys. & Blas.?

(Die Gemse.)

Es liegt ein Metacarpus ohne Oberschenkel und ein unteres Humerusende ohne Epiphysis vor. Deswegen ist es unmöglich mit absoluter Sicherheit zu behaupten, daß es sich tatsächlich um das angeführte Tier handelt. Dafür aber besitze ich von Zechovic ein distales, der Gemse bestimmt angehörendes Humerusende.

Von Böhmen sind ihre Reste von Lubná und aus der Srbská sluj bekannt.

Die Gemse lebt heutzutage in den schwer zugänglichen Gehängen der Alpen, Pyrenäen, Abruzzen, Karpaten, Balkan und Kaukasus. Wenn sie nicht verfolgt ist, steigt sie zeitweise zum Tiefland herunter.

**B. AVES. — VÖGEL.**

**I. Rasores. — Hühnervögel.**

*Lagopus alpinus* Nilss.

(Das Alpenschneehuhn.)

Neben den im ersten Bericht angeführten Knochen von Moorschneehuhn wurde in der tieferen Lage unter den Kiefern und Knochen von Arvicoliden ein einziger, 31.5 mm langer Tarsometatarsus gefunden.

Nehring<sup>12)</sup> führt die durchschnittliche Länge des Tarsometatarsus beim Alpenschneehuhn zwischen 32—33 mm und beim Moorschneehuhn 38 mm an.

Die Länge des Tarsometatarsus von Zuzlawitz gibt Woldřich<sup>13)</sup> 32·2 mm an.

Einige rezente, in den Sammlungen Nehrings befindliche Knochen der besprochenen Art, weisen die gleiche Länge wie unser Tarsometatarsus vom Děkanský vrch auf (von Island 31·5 mm, von Norwegen 31 mm).

Der auf dem Děkanský vrch nachträglich gefundene Tarsometatarsus des Moorschneehuhns (*Lagopus albus*) ist 35·5 mm lang.

Das Alpenschneehuhn ist heimisch im Hochgebirge oberhalb der Waldregion, in der Nähe der Schnee- und Eisgrenze in den Alpen, im Norden Skandinaviens, in Asien und Amerika. Während des strengen Winters fliegt es zur Niederung herunter.

Im Jahre 1914 sah ich im Museum in Bergen in Norwegen mehrere Bastarde, die durch Kreuzung zwischen einem Moorschneehuhn und einer Henne von Auerhuhn entstanden sind, die unter dem Namen *Felsenschneehuhn* (*Lagopus lagopus*) bekannt sind. Diese Mischlinge haben im erwähnten Museum wieder ihre weiteren, durch Kreuzung zwischen dem Moorschneehuhn und dem Auerhuhn entstandenen Sprößlinge u. s. w.

Das Alpenschneehuhn war im böhmischen Diluvium bisher nur von Zuzlawitz bekannt.

*Tetrao bonasia* L.?

(Das Haselhuhn.)

Ein distales Ende des Humerus, der *am meisten* diesem Hühnervogel ähnelt.

Das Haselhuhn lebt hauptsächlich in den Mischwäldern Nord- und Mitteleuropas. In Ungarn, Galizien, Rußland und Sibirien kommt es häufiger als in Böhmen vor.

Fossil von Zuzlawitz ist es fraglich.

*Perdix cinerea* Lath.

(Das Rebhuhn.)

Eine linke Ulna aus der tieferen Lage der Diluvialschicht.

Dasselbe ist heute in Mitteleuropa und Asien in den Feldern, Steppen und am Rande der Wälder sehr häufig.

<sup>12)</sup> Die kleineren Wirbeltiere vom Schweizerbild bei Schaffhausen. (Denkschrift. d. Schweiz. Naturfor. Ges. Bd. XXV. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.) Basel 1901.

<sup>13)</sup> Diluviale Fauna von Žuzlawitz. (Sitzungsber. d. k. Akademie der Wiss. I. Abt., Bd. LXXXIV., II. Th.) Wien 1881.

Aus dem Diluvium Böhmens ist es nur von Zuzlawitz und in der neueren Zeit auch von Zechovic bekannt.

## II. Raptatores. — Raubvögel.

### a) Strigidae. — Eulen.

*Otus vulgaris* Flem.

(Die Walddohreule.)

Von dieser wurde gleichfalls in der tieferen Lage ein schön erhaltener Metatarsus gefunden.

In Böhmen ist sie ein stätiger Gast der Nadel- und Laubwälder. Sie ernährt sich meistens von Feld-, Wald- und Spitzmäusen, hier und da auch von kleineren Vögeln.

Im böhmischen Diluvium ist das der erste Fund.

## III. Oscines. — Singvögel.

### b) Fringillidae. — Sperlinge.

*Passer domesticus* Bp.

(Der Haussperling.)

Eine einzige, *wahrscheinlich* diesem Vogel gehörende Tibia.

## Jüngere Fauna der schwarzen (II.) Schicht.

### A. MAMMALIA. — SÄUGETIERE.

#### I. Carnivora. — Raubtiere.

##### Canidae. — Hunde.

*Canis familiaris* var. *palustris* Rüm.

(Der Torfhund.)

Vorhanden ist ein Fragment des linken Unterkiefers und zwei Reißzähne.

Von Böhmen führt man Schädel aus den neolithischen Stationen von Hrádek bei Čáslav und Hradiště bei Kuttenberg, ferner von Stradonic und aus der Kalvariehöhle bei Řeporyj an.

## II. Insectivora. — Insektenfresser.

*Sorex vulgaris* L.

(Die gemeine Spitzmaus.)

Eine vollkommen erhaltene linke Unterkieferhälfte.

In Böhmen wurde sie in einigen Lokalitäten, unter anderem auch bei Zuzlawitz und Zechovic festgestellt.

## III. Glires. — Nagetiere.

### a) Sciuridae. — Eichhörnchen.

*Myoxus glis* Blas.

(Der Siebenschläfer.)

Eine rechte Unterkieferhälfte und ein Bruchstück derselben.

Sichere diluviale Reste sind in Böhmen nur von Zuzlawitz und Kotlářka bei Prag bekannt.

Derselbe lebt in den Laubwäldern Süd- und Mitteleuropas.

Nach Pallas zeigt er sich zeitweise in den felsigen Regionen der russischen Steppen. In Böhmen wurde er in der Gegend von Prag von Závist bis zum Karlstein, ferner in der böhmischen Schweiz, bei Pürglitz, Turnau, Königgrätz u. a. festgestellt.

### b) Arvicolidae. — Feldmäuse.

*Hypudaeus glareolus* Wagn.

(Die Waldwühlmaus.)

Zwei linke und eine rechte Unterkieferhälfte.

Im böhmischen Diluvium wurde sie nur bei Zuzlawitz und Zechovic gefunden.

*Arvicola arvalis* Sélys.

(Die gemeine Feldmaus.)

Eine rechte Unterkieferhälfte.

Aus dem böhmischen Diluvium ist sie aus einigen Lokalitäten bekannt. Auch bei Zechovic und in der IV. Schicht auf dem Děkanský vrch kam sie häufig vor.

*Arvicola amphibius* Desm.

(Die Wasserratte.)

Eine linke Unterkieferhälfte und einige Knochen eines starken Exemplares.



Über ihre Verbreitung im böhmischen Diluvium gilt dasselbe, was über die gemeine Feldmaus angeführt wurde.

*Arvicola subterraneus* Sélys.

(Die kurzohrige Erdmaus.)

Eine rechte Unterkieferhälfte.

In Böhmen wurde sie bei Zuzlawitz, Podbaba, Zechovic und in der IV. Schicht auf dem Děkanský vrch gefunden.

c) *Muridae*. Mäuse.

*Mus rattus* L.

(Die Ratte.)

Ein einziger Wirbel.

Von Böhmen ist sie von Zuzlawitz und Zechovic, wo erst nachträglich einige Knochen gefunden wurden, bekannt.

*Mus sylvaticus* L.

(Die Waldmaus.)

Zwei linke, vollkommen erhaltene Unterkieferhälften und drei andere zahnlose.

Die Waldmaus lebt in ganz Europa am Rande der Wälder und in den Gärten, sowie in den Steppen Ost- und Südrußlands und Sibirien. Aus dem böhmischen Diluvium wurde sie von Zuzlawitz angeführt. Zuletzt wurde dieselbe bei Zechovic konstatiert.

#### IV. *Artiodactyla ruminantia*. — Paarhufer.

*Cervus capreolus* L.

(Das Reh.)

Von diesem ist nur die II. Phalanx vorhanden.

Wie schon oben angeführt, kam es auch in der IV. Schicht vor.

#### B. AMPHIBIA. — AMPHIBIEN.

*Rana temporaria* L.

(Der gemeine Frosch.)

Einige Femora und Humeri, Tibia, 1 Os coccygis, mehrere Phalange und andere Knochen.

*Rana esculenta* L.  
(Der Wasserfrosch.)

Ein Fragment des mit der Ulna verbundenen Radius und andere Knochen.

*Bufo vulgaris* L.  
(Die gemeine Kröte.)

Einige Phalange, 1 Os innominatum, 1 Femur und andere Knochen.

Zwei oben angeführte Arten und *Bufo* sp. sind auch von Zuzlawitz bekannt. Alle drei sind auf Grund des nachträglichen Materiales auch bei Zechovic vertreten. Die Froschreste von dort weisen aber mehr diluviales Aussehen als die Reste vom Děkanský vrch auf, welche schwärzlich gefärbt sind und auch sonst ein jüngeres Alter verraten.

### Weichtiere der zweiten und vierten Schicht.

Wie bereits oben angeführt wurde, enthält die zweite Schicht außer den hier beschriebenen Wirbeltieren auch eine Menge von Schnecken, für deren Bestimmung ich wieder Herrn Z d. Frank en b e r g e r in Prag zu großem Dank verbunden bin.

Dieselben wurden teilweise in der schwarzen Erde, teilweise in dem übergehenden dunkelbraunen Lehm gefunden. In dieser Menge fand man auch eine Unzahl von gut erhaltenen Schalen, die aber bei der geringsten Berührung ins Staub und kleinere Splitter zerfielen. Es waren dies entweder längere Zeit der Luft ausgesetzte oder durchnäßte Exemplare.

Die Zahl der aus der IV. Schicht stammenden Schnecken ist sehr gering.

In diesem Abschnitte werden wir vorläufig ein Verzeichnis aller zuletzt gefundenen Arten bringen und das Gesamtergebnis dann erst, später behandeln.

Zu den vom Děkanský vrch im früheren Berichte angeführten fünf Arten sind noch folgende zugekommen:

*Hyalinia (Euhyalina) glabra* (Stud.) Fér. Sehr häufig.

*Hyalinia (Polita) nitens* Mich. Selten.

*Hyalinia (Polita) nitidula* Drap. Häufig.

*Patula (Discus) rotundata* var. *globosa* Friedl. Einige Exemplare.

*Fruticicola (Perforatella) unidentata* Drap. Selten.

*Fruticicola (Monacha) incarnata* Müll. Häufig.

*Helix (Eulota) fruticum* Müll. Häufig.

*Helix (Gonostoma) holosericea* Stud. Selten. In unterem Material ist auch die Form *tridentata* Uličný vertreten.

*Helix (Tachea) hortensis* Müll. Ziemlich häufig.

*Buliminus (Napaesus) montanus* Drap. Selten.

*Pupa (Pupilla) muscorum* L. f. *edentula* Slavík. Ein Exemplar.

*Clausilia (Clausiliastra) laminata* Mtg. Selten.

Die Molluskenfauna vom Děkanský vrch weist also zusammen 17 Arten auf.

Es sei bemerkt, daß die rezente Art *Xerophila (Helicella) obvia* Hm., die auf der Oberfläche des kalkigen Bodens auf dem Děkanský vrch in stauender Menge vorkommt, unter den obenangeführten Mollusken durch kein einziges Exemplar vertreten ist.

## ZECHOVIC.

Nach Veröffentlichung meiner Publikation über die diluviale Fauna von Zechovic im *Bulletin* der Böhmisches Akademie 1909, gelang es mir wieder einige nachträgliche Zuwachse zu gewinnen, so daß die angeführte, im Jahre 1909 33 Arten zählende Fauna um weitere für die betreffende Lokalität neue Arten bereichert ist.

Heute ist der Fundort vollständig ausgebeutet und die einst für uns so bedeutende Stelle mit dem Boden gleichmäßig gemacht.

Daß aber bei Zechovic noch weitere Funde zu erwarten sind, dafür spricht mein vorläufiger Bericht,<sup>14)</sup> in dem ich über einige, an der Ostseite der Kalksteinbrüche „Ve vopuce“ unlängst gefundene Reste des *Nashorns*, *Renntiers* und des *Wildpferdes* schreibe.

Im folgenden füge ich ein nachträgliches Verzeichnis der nach dem Jahre 1909 von Zechovic stammenden Fauna bei.

### A. MAMMALIA. — SÄUGETIERE.

#### I. Carnivora. — Raubtiere.

##### Mustelidae. — Marderartige Raubtiere.

*Mustela martes* Briss.

(Der Baummarder.)

Im Verzeichnisse der vorherigen Fauna von Zechovic befindet sich ein linker Unterkiefer und ein Reißzahn von einem jüngeren Individuum, das ich als *Mustela?* (Marder), bezeichnete. In den nachträglichen Funden wurde noch ein, bestimmt dem *Baummarder (Mustela martes)* gehörender oberer Schneidezahn festgestellt. Deswegen fehlen wir nicht, wenn wir auch die vorhergehenden Reste dieser Art zurechnen.

<sup>14)</sup> Einige Bemerkungen zu dem neuesten Funde diluvialer Tierreste bei Zechovic in Südböhmen (Verhandl. d. k. k. geolog. R.-A. in Wien, Nr. 2. 1916).

## II. Glires. — Nagetiere.

### a) Sciuridae. — Eichhörnchen.

*Spermophilus citillus* Bl.

(Der gemeine Ziesel.)

Zwei Humeri.

Rezent in Südböhmen unbekannt.

*Myoxus glis* Blas.

(Der Siebenschläfer.)

Eine rechte Unterkieferhälfte und ein Fragment des Femurs.

*Myoxus avellanarius* L.

(Der Haselschläfer.)

Zwei Unterkiefer.

Dieser kleine Schläfer kam bisher im böhmischen Diluvium nicht vor. Er hält sich am liebsten in den höheren buschigen und bewaldeten Lagen auf. Seine Verbreitung läßt sich in Südeuropa und im Norden bis gegen Schweden verfolgen. Von Böhmen wurde er aus der Gegend von Roztok, Chuchle, Závist und Karlstein angeführt. In Mähren ist er sehr häufig verbreitet; auch aus dem dortigen Diluvium und Alluvium ist der Haselschläfer bekannt.<sup>15)</sup>

### b) Muridae. — Mäuse.

*Mus rattus* L.

(Die Ratte.)

Zwei Femora und 1 Os innominatum.

*Mus sylvaticus* L.

(Die Waldmaus.)

Ein rechter Unterkiefer eines alten Individuums.

## III. Artiodactyla ruminantia. — Paarhufer.

*Cervus claphus* L.

(Der Edelhirsch.)

Ein unteres Metacarpusende von einem jungen Exemplare und 1 Os sesamoideum.

<sup>15)</sup> J. K n i e s. *Pravěké nálezy jeskynní Balcarovy skály u Ostrova na vysočině Dražanské*. (Věstník Klubu přírodovědeckého v Prostějově 1909.)



*Cervus capreolus* L.

(Das Reh.)

Ein unteres Metacarpusende, 1 Scapulafragment und 1 Carpale 3 sin.

*Capella rupicapra* Keys. & Blas.

(Die Gemse.)

Vorhanden ein distales Humerusende.

**B. AVES. — VÖGEL.**

Von diesen bestimmte Herr V. Č a p e k folgende Arten:

**I. Raptatores. — Raubvögel.***a) Falconidae. — Falken.**Falco tinnunculus* L.

(Der Turmfalk.)

Ein rechtes Schulterblatt ohne Spitze und ein rechter Femur eines starken Exemplares.

Im böhmischen Diluvium wurde er bis jetzt nicht gefunden.

Dieser kleine Falk hält sich auf dem Reutland, am Rande der Wälder, auf den felsigen Gehängen, Türmen und Ruinen in ganz Europa von Lappland bis nach Südspanien hinein, sowie in Asien und Nordafrika auf. M i d d e n d o r f erschöß den Turmfalk in Sibirien noch hinter dem 71° n. B. und C o l l e t bezeichnet 69° 40' n. B. als den nördlichsten Punkt, wo der Vogel bisher in Skandinavien beobachtet wurde.

**II. Scansores. — Klettervögel.***Picidae. — Spechte.**Picus major* L.

(Der große Buntspecht.)

Ein gut erhaltener Metacarpus und ein proximaler Teil des rechten Kieferastes.

Aus dem böhmischen Diluvium wurde der fragliche *Mittelbuntspecht* (*Picus medius* L.) angeführt.

Der große Buntspecht haust in ganz Europa und Sibirien bis zum Kamtschatka sowie Japan hinein, wo er sich gern am Rande und innerhalb der Kiefer- und Pappelwälder aufhält.

### III. Oscines. — Singvögel.

#### a) Turdidae. — Drosseln.

*Turdus musicus* L.

(Die Singamsel.)

Ein rechtes Coracoideum.

In den diluvialen Ablagerungen der Gegend von Prag ist dieser Vogel fraglich. Von Zuzlawitz ist eine ähnliche, gleichfalls fragliche Art *Turdus pilaris* L. (*Wacholderdrossel*) bekannt.

Die Singamsel bewohnt bei uns Wälder, Gärten und Parke. Sie ist im größten Teile Europas, sowie in Nord- und Mittelasien, in nordwestlichen, seltener nordöstlichen Afrika verbreitet.

*Turdus viscivorus* L.

(Die Brachlerche.)

Ein linker Metatarsus.

Aus dem böhmischen Diluvium ist sie unbekannt.

Geographische Verbreitung: in ganz Europa und Asien bis zum Himalaya. Bei uns hält sie sich in den Nadelwäldern auf.

#### b) Corvidae. — Raben.

*Corvus monedula* L.

(Die Dohle.)

Ein distales Metacarpusende.

Im böhmischen Diluvium wurde diese Art noch nicht festgestellt. Aus den diluvialen Ablagerungen zwischen Karlstein und Beroun, sowie von Zuzlawitz, wurde der *Kolkrabe* (*Corvus corax*) angeführt. In der letzten Lokalität sollte auch die fragliche Art *Corvus pica* (*Elster*) gefunden worden sein.

Die Dohle nistet auf hohen Bauten, Türmen und in Laubwäldern im größten Teile Europas und in manchen Gegenden Asiens. In Rußland und Sibirien ist sie am meisten verbreitet.

*Garrulus glandarius* Vieill.

(Der Waldhäher.)

Es wurde ein unvollständiger Tarsus und ein Metacarpus gefunden.

Im böhmischen Diluvium wurde er noch nicht festgestellt.

Derselbe haust in den Wäldern ganz Europas, ausschließlich die nördlichsten Gegenden.

c) *Fringillidae*. — Sperlinge*Pyrrhula vulgaris* Pall.

(Der Gimpel.)

Ein linkes Schulterblatt und ein rechter Humerus.

Im böhmischen Diluvium fehlte er bis jetzt.

Geographische Verbreitung: Ganz Europa, die östlichen und nördlichen Gegenden ausgenommen. Bei uns nistet er in Gebirgswäldern.

*Fringilla spinus* L.

(Der Zeisig.)

Es liegt ein rechter Humerus vor.

Im böhmischen Diluvium unbekannt. Der von Woldřich angeführte<sup>16)</sup> Vertreter der Sperlinge *Fringilla sp.* ist fraglich.

Der Zeisig ist in ganz Europa, inwieweit es bewaldet ist, gegen Norden bis zu der Breite Mittelnorwegens verbreitet. Bei uns hält er sich während des Sommers in Nadelwäldern der Gebirgsgegenden auf.

*Emberiza miliaria* L.?

(Die Grauammer.)

Ein unvollständiger Humerus eines kleineren, dem angeführten Singvogel *am meisten* ähnelnden Vogels.

Im böhmischen Diluvium wurde sie noch nicht gefunden.

Geographische Verbreitung: in ganz Europa von Südnorwegen angefangen, sowie in Westasien, wo sie während des Sommers ausgedehnte Kornfelder bewohnt. In Böhmen hält sich dieselbe gerne auf feuchten Wiesen in den fruchtbaren Gegenden des mittleren Teiles auf.

IV. *Rasores*. — Hühnervögel.*Tetrao medius* Meyer.

(Der Rackelhahn.)

Unter den vielen Knochen des *Auerhuhnes* und *Birkhuhnes* von Zechovic, die aber bis jetzt auf dem Děkanský vrch fehlen, finden sich entweder schon von früher oder aus der letzten Zeit stammende Knochen, welche wahrscheinlich diesem, zwischen beiden oberwähnten Arten oft entstandenen Mischlinge angehören. Es ist: 1 Tarsus, 1 Sternum, 1 Oberende des Femurs, 1 Ulna und andere Knochen.

<sup>16)</sup> *Přehled fauny obratlovců z. českého massivu' za éry anthropozoické.* (Věstník král. České spol. nauk 1897.)

Der Rackelhahn wurde im böhmischen Diluvium bei Habichau und in der Höhle von Koněprus gefunden.

Derselbe hält sich überall dort auf, wo auch das Auerhahn und Birkhuhn lebt, besonders in Skandinavien.

*Perdix cinerca* Lath.

(Das Rebhuhn.)

Vorhanden ist 1 Femur, 1 Humerus und 1 Sternbruchstück.

*Coturnis communis* Bonn.

(Die Wachtel.)

Ein Humerus und ein Femur bestimmt dem betreffenden Vogel angehörend.

Die aus dem böhmischen Diluvium früher nur von Zuzlawitz angegebene ist fraglich.

Es gibt wenige Gegenden in Europa, Asien und Afrika, wo sie nicht bekannt wäre.

#### V. Natatores. — Wasservögel.

Anatidae. — Enten.

*Anser segetum* Naum.

(Die Saatgans.)

Es wurde die II. Phalanx gefunden.

Aus dem böhmischen Diluvium wurde nur die *Wildgans* (*Anser cinereus*) von Zuzlawitz angeführt.

Die Saatgans nistet auf der Insel Island, in Lappland und im hohen Norden überhaupt. Unsere Gegenden durchfliegt sie im Herbst und Frühjahr, wenn sie fortzieht, oder vom Süden zurückkehrt. Sie läßt sich gerne auf mit seichtem Wasser umsäumten Flußinseln nieder, um von dort zur bestimmten Zeit ihre Nahrung zu suchen.

#### C. AMPHIBIA. — AMPHIBIEN.

*Rana esculenta* L.

(Der Wasserfrosch.)

Ein Os innominatum und andere Knochen.

Im böhmischen Diluvium wurde er nur bei Zuzlawitz gefunden.



*Bufo vulgaris* L.

(Die gemeine Kröte.)

Es liegen zwei Humeri vor.

Von Zuzlawitz wurde *Bufo* sp. angeführt.

## D. MOLLUSCA. — WEICHTIERE.

Zu den von Zechovic bisher bekannten Arten sind noch folgende von Herrn Frank en b e r g e r sorgsam bestimmte zugekommen.

*Patula* (*Discus*) *rotundata* Müll. Einige Exemplare.*Fruticicola* (*Monacha*) *incarnata* Müll. Häufig.*Helix* (*pomatia*) *pomatia* L. juv. Selten.

Es sind uns daher von Zechovic zusammen 14 Arten bekannt.

Auf Grund dieser Anzahl, sowie auf Grund des Materiales vom Děkanský vrch füge ich nachstehende Übersicht über die Verbreitung einzelner Arten (Varietäten, Formen) teilweise nach dem systematischen Ausweis Babors bei.<sup>17)</sup>

Es sind daher von Zechovic und vom Děkanský vrch bisher zusammen 24 Schnecken bekannt, von denen 14 auf die erste und 18 auf die zweite Lokalität entfallen. Für beide Lokalitäten gemeinsame Arten sind 8.

Woldřich führt in deutscher Übersetzung seiner *Geologischen Studien aus Südböhmen II.* folgende 9 Schnecken an (gegenüber den 6 früher in böhmischer Originalarbeit angegebenen), von denen die mit \* bezeichneten auch in unseren beiden Lokalitäten gefunden wurden.

*Hyalinia hydatina* Rossm.*Hyalinia pseudohydatina* Bgt.\* *Buliminus montanus* Drap.\* *Helix personata* Lam.\* *Helix fruticum* Müll.\* *Helix lapicida* L.\* *Helix* (*Patula*) *rotundata* Müll.\* *Helix holosericea* Stud.*Helix strigella* Drap.

Woldřich zählt alle diese Schnecken zu der Fauna der *Steppenperiode*.

Es wäre zu gewagt, alle oben angeführten Schnecken von Zechovic und vom Děkanský vrch zu den rein diluvialen Typen zu rechnen. Namentlich in der Lokalität bei Zechovic kamen oft einige, jüngeres Aussehen aufweisende Mollusken neben anderen weißen, verkalkten vor, die unzwei-

<sup>17)</sup> Die Weichtiere des böhmischen Pleistocaen und Holocaen. (Archiv für naturwissenschaftl. Durchforsch. von Böhmen, Bd. XI., Nr. 5. Prag 1904.)

Fortl. Nummer	Species, varietas, forma	Zechovice				Bemerkung
		Děkanický vrch	Pleistozän	Holozän	In Böhmen bisher	
			Rezent			
1	<i>Hyalina glabra</i> Fer.....	+	+	+	+	Lebt in Mittel- und Westeuropa.
2	<i>Hyalina nitens</i> Mich.....	—	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des Paläarkt. Gebietes.
3	<i>Hyalina nitidula</i> Drap.....	—	+	+	+	Lebt in der germ. und mittelländ. Provinz des paläarkt. Gebietes.
4	<i>Patula rotundata</i> Müll.....	+	+	+	+	Eine paläarkt. Art (mit Ausnahme der mittelasatischen Provinz).
5	<i>Patula rotundata</i> Müll. var. <i>globosa</i> Friedel	—	+	+	+	Lebt am meisten in Nordeuropa.
6	<i>Patula rudrata</i> Stud.....	+	+	+	+	Eine arkt. und paläarkt. Art (in der germ. und mediterr. Provinz).
7	<i>Helix undulata</i> Drap.....	—	+	+	+	Lebt in der germ. und Mittelmeer-Provinz des paläarkt. Gebietes.
8	<i>Helix fruticum</i> Müll.....	+	+	+	+	Eine arktische und paläarktische Art (mit Ausnahme der Provinz der atlantischen Inseln).
9	<i>Helix fruticum</i> Müll. var. <i>tufica</i> Slav.....	+	—	+	+	Eine in Böhmen ausgestorbene Form; lebt selten in Deutschland, aber nur auf Moorboden.
10	<i>Helix holosericea</i> Stud.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mittelländ. Provinz des paläarkt. Gebietes.
11	<i>Helix holosericea</i> Stud. f. <i>tridentata</i> Uthéný	—	+	+	—	Lebt wahrscheinlich in derselben Provinz mit der typischen Form.
12	<i>Helix personata</i> Lam.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
13	<i>Helix lapicida</i> L.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und Mittelmeer-Provinz des paläarkt. Gebietes.
14	<i>Helix hortensis</i> Müll.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
15	<i>Helix hortensis</i> Müll. f. <i>minor</i> W.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
16	<i>Helix incarnata</i> Müll.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
17	<i>Helix pomata</i> L.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
18	<i>Bulininus montanus</i> Dr.....	+	+	+	+	Lebt selten in Mitteleuropa.
19	<i>Cionella lubrica</i> Müll. var. <i>columna</i> Cless.....	+	—	+	+	Hie und da mit der typischen Form.
20	<i>Pupa muscorum</i> L. f. <i>edentula</i> Slav.....	—	+	+	+	Lebt in der germ. und Mittelmeer-Provinz des paläarkt. Gebietes.
21	<i>Clausilia ventricosa</i> Dr.....	+	+	+	—	Lebt in der germ. und Mitteleuropa.
22	<i>Clausilia lineolata</i> Held.....	+	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
23	<i>Clausilia dubia</i> Drap.....	—	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
24	<i>Clausilia laminata</i> Mig.....	—	+	+	+	Lebt in der germ. und mediterr. Provinz des paläarkt. Gebietes.
Zusammen .....		14	18			

felhaft diluvialen Alters sind, da sie meistens in Gesellschaft charakteristischer Arvicoliden gefunden wurden. Nach alldem handelt es sich um eine diluviale Fauna mit holozäner Beimischung, da nur *Xerophila (Helicella) obvia*, insofern mir bekannt ist, eine rezente, auch bei Zechovic und auf dem Děkanský vrch massenhaft lebende Art repräsentiert.

Daß übrigens in den beiden Lokalitäten fast alle aus den anderen Teilen Böhmens als rezent bekannten Arten vertreten sind, ist aus unserer Übersicht ersichtlich.

Schon etwas besser konnte ich die Molluskenfauna auf dem Děkanský vrch kontrollieren. Dazu sei aber gleich bemerkt, daß ich auch hier trotz der aufmerksamen Beobachtung keinen präzisen Zusammenhang in der Aufeinanderfolge der Mollusken- und Wirbeltierfauna wahrnehmen konnte. Eine *einzig*e, im unteren Horizont gemeinschaftlich mit der Tundren- und Steppenfauna in situ bisher gefundene Schnecke ist *Pupa (Pupilla) muscorum* L. f. *edentula*, die in Gesellschaft des *rötlichen Ziesels*, *Schneehasen* und *Zwerg-Pfeifhasen* festgestellt wurde.

Die übrigen, im ersten Bericht angeführten Arten stammen entweder aus den dunkleren diluvialen Ablagerungen des zweiten Durchschnittes mit Pferde- und Renntierresten, oder aus den analogen Ablagerungen des ersten Durchschnittes, und zwar von der Grenze zwischen der dritten und zweiten Schicht.

Aus dieser letzten, welche durch die jüngste Fauna charakterisiert ist, stammt der *größte* Teil der Schnecken.

Alles, was hier über die südböhmischen Funde der interessanten Molluskenfauna gesagt wurde, bestärkt wiederum die Deduktion Babors, daß *weder paläontologisch noch faunistisch ein wesentlicher Unterschied zwischen Weichtieren der holozänen und pleistozänen Schichten besteht, so daß es unmöglich ist sie streng stratigraphisch auseinander zu halten.*

### Schlußwort.

Zu den Funden von Zechovic, die hinsichtlich der Anzahl der Arten neben den von Woldřich gemachten Funden bei Zuzlawitz die *zweite* Stelle einnehmen, gesellt sich jetzt auch der Děkanský vrch, welche Lokalität der Mehrzahl und Mannigfaltigkeit der Fauna nach, heute der *dritte* Fundort in Böhmen ist.

Wie aus der beiliegenden Übersicht ersichtlich ist, kennen wir von Zechovic und vom Děkanský vrch im ganzen 65 Wirbeltiere. Auf die erste Lokalität entfallen 56 Arten, auf die zweite 43 (insgesamt der aus den jüngsten Ablagerungen stammenden 9 Arten). Gemeinsame Arten sind in den beiden Lokalitäten 34. Im Fundorte bei Zuzlawitz sind 42 gemeinsame Arten, welche auf die Gesamtzahl unserer beiden Lokalitäten entfallen.



Die *Glazial-* oder *Tundrenfauna* enthält die charakteristischsten, in allen drei Lokalitäten durch fast gleiche Anzahl vertretenen Arten, so daß auf Zechovic acht, auf den Děkanský vrch und Zuzlawitz je neun entfallen.

Diese sind: *Vulpes lagopus*, *Putorius (Ictis) Erminaeus*, *Myodes torquatus*, *Arvicola nivalis*, *Arv. gregalis*, *Lepus variabilis*, *Rangifer tarandus*, *Lagopus albus* und *Lagopus alpinus*.

Die überwiegende Mehrzahl in allen drei Fundorten des Böhmerwaldgebietes bildet die *Steppenfauna*, welche unten mit den glazialen und oben mit denjenigen Arten vermischt ist, welche zwar nicht ausschließlich Steppenarten sind, die aber zeitweise entweder in den eigentlichen Steppendistrikten, oder mit diesen zusammenhängenden Waldkomplexen und Gebirgen vorkommen. Es ist dies insgesamt eine Fauna, die sich vielleicht bis heute stellenweise in russischen und sibirischen Steppen verfolgen läßt<sup>18)</sup> und welche Woldřich auf Grund der Forschungen der beiden Spalten bei Zuzlawitz als Weiden- und Waldfauna unterscheidet.

Zu den bedeutendsten und bedeutenden Steppenvertretern gehört: *Alactaga saliens*, *Spermophilus rufescens*, *Sperm. citillus*, *Cricetus phaeus*, *Hypudacus glareolus*,<sup>19)</sup> *Arvicola agrestis*, *Arv. arvalis* u. a., *Lagomys pusillus*, *Antilope Saiga?*, *Equus ferus*<sup>20)</sup> und zahlreiche Vögel.

Die in den Funden von Zechovic vertretene Steppenfauna überwiegt rechnermäßig die Fauna von Zuzlawitz und diese wiederum die Fauna vom Děkanský vrch.

Das *Wildpferd* ist auf dem Děkanský vrch ein steter Begleiter des Renntiers schon vom Grunde der auf der Felsunterlage ruhenden Ablagerungen, in denen seine zahlreichen Reste in Gesellschaft der Tundrenfauna gefunden wurden und von da erscheint es mit dem Renntier bis zur Grenze der IV. Schicht.

Daraus geht hervor, daß das Pferd in der Glazialperiode bei Wolin sehr verbreitet war und hier bis zum Ende der Diluvialepoche geblieben ist. Von der Existenz des Pferdes in der Glazialperiode zeugt nicht nur die gleichaltrige charakteristische Fauna, sondern auch die unberührten, die Pferde- reste beherbergenden Ablagerungen. Der Umstand, daß das Wildpferd im Böhmerwaldgebiete schon in der Glazialzeit auftrat, ist gar nicht überraschend, da wir auch von wo anders Pferde- reste die nicht nur in glazialen, sondern auch in präglazialen Schichten vorkommen, kennen.

<sup>18)</sup> A. Nehring. *Ueber Tundren und Steppen*. S. 68.

<sup>19)</sup> Es ist interessant, daß sie auf dem Děkanský vrch erst in der jüngsten sogen. schwarzen Schicht erscheint, wogegen dieselbe bei Zechovic und Zuzlawitz schon unter der Steppenfauna nachgewiesen wurde. Dafür sind aber andere Arten wie *Arvicola arvalis*, *Arv. amphibius* und *Arv. subterraneus*, auf dem Děkanský vrch in der Steppen — sowie auch in der jüngsten Fauna vertreten. Solch ähnliche Fälle sind übrigens auch aus anderen Fundstellen bekannt.

<sup>20)</sup> Ob es sich bei Wolin auch um eine *Lokalrasse* im Sinne Nehrings handelt (*Fossile Pferde aus deutschen Diluvial-Ablagerungen*), wird das spätere Studium des osteologischen Materiales, von dem eine hübsche Menge vorhanden ist, zeigen.



In der Glazialperiode treffen wir das Pferd in denjenigen Ablagerungen, welche in einiger Entfernung von den Gletschern entstanden sind, d. h. nach N e h r i n g <sup>21)</sup> in solchen Distrikten, in denen während jener für das Pferd ungünstigen Epoche seine Existenz überhaupt möglich war.

Etwas ähnliches war wahrscheinlich auch mit dem im Vorgebirge des Böhmerwaldes lebenden Pferde, als die höchsten Gipfel der Grenzgebirge noch mit Eis und Schnee bedeckt waren, während in den Niederungen weiter gegen Süden um den unteren Wolinkalauf herum und im Wotawagebiete ein spärlicher Graswuchs dem Pferde und anderen Grasfressern eine bescheidene Existenz bot.

Daß das Landschaftsbild der diluvialen Tundra ganz anders aussah, als nur ein eintöniges, eisiges, allen Wuchs überhaupt entbehrendes Gefilde, wie man früher allgemein vermutete, davon überzeugt uns am trefflichsten N e h r i n g.

Wie schon oben bemerkt, wurden besonders auf dem Děkanský vrch keine Pferde-, Renntier- oder andere Knochen gefunden, welche nicht von einem Raubtier abgenagt wären. Die Raubtiere verschleppten nur die einzelnen Teile der gejagten Beute und der Kadavern größerer Säuger in ihre Verstecke. In der Gegend von Wolin war es vor allem der *Wolf*, ferner der *Eis- und gemeine Fuchs*, der *Löwe und Luchs*. Ein Schrecken kleinerer Tiere war wieder der *Marder* und das *Hermelin*.

Die in den Nestern angehäuften Arvicolidenreste hat wahrscheinlich die *Schneecule* (*Nictea nivea*) hinterlassen. Dieselbe kam bisher zwar weder bei Zechovic noch auf dem Děkanský vrch vor, konnte aber auch in der Gegend von Wolin leben, da sie auch in nahen Zuzlawitz konstatiert wurde. Auch können die Reste einiger Nagetiere und Vögel ganz leicht von den Mahlzeiten eines anderen Raubvogels oder Säugetieres stammen.

Die Mischfaunen aus den neuen südböhmischen Lokalitäten führen uns ein getreues Bild der längstvergangenen Tundren und Steppen vor, ein Bild, welches sich nur in einem Vorgebirge, wie das Böhmerwaldgebiet ist entwickeln konnte, dessen Landschaften während der Tundra einen ähnlichen Charakter der arktischen Tundren aufwiesen, wie z. B. in Ostrußland, Nordost- und Nordwestsibirien und nach den neuesten Forschungen der Tundren der eisfreien Regionen in Nordostgrönland, wo wir derselben typischen Fauna, welche auch die diluvialen Ablagerungen bei Wolin beherbergen, bis zum heutigen Tage begegnen.

Die Tundrenfauna, welche namentlich durch den Halsbandlemming charakterisiert ist, lebte noch lange Zeit im Böhmerwaldgebiete, als in den Niederungen die Steppenfauna sich zu verbreiten begann, wie die Forschungen W o l d ř i c h s bei Zuzlawitz und meine bei Wolin bestätigen.

<sup>21)</sup> Bericht über neue bei Westeregeln gemachte Funde, nebst Bemerkungen über die Vorgeschichte des Pferdes in Europa. (Sitzungsber. der Ges. naturforsch. Freunde zu Berlin vom 17. April 1883.)

Zu dieser Zeit fing an auch der Landschaftscharakter freundlicher zu werden als früher, da die nahen kahlen Bergrücken mit ihrer langandauernden Schneedecke, mit den mit grauem Moos und Flechten bewachsenen Felsen sowie feuchten Gehängen wechselten und als das Schnee- und Steingefilde mit halbzugefrorenen Wasserläufen und Lachen, in deren Nähe niedriges Gestrüpp und Gräser ihre Wurzeln faßten, das Landschaftsbild dieser arktischen Szenerie, in die nur der kurze Sommer ein wenig Abwechslung brachte, erhöhten.

Diese Gegenden waren damals eine beliebte Zufluchtstätte der Tundrenfauna.

Die günstigeren klimatischen Verhältnisse der sich im Laufe der Zeit allmählich entwickelten Steppenperiode subarktischen Charakters, blieben auch nicht ohne Einfluß auf die weitere Entwicklung der Pflanzen und Tiere.

Im Böhmerwaldgebiete war aber nicht überall die echte typische Steppe, welche sich allmählich im Norden in Inneren des Landes, z. B. im Elbegebiete entwickelte. Eine große Grassteppe verbreitete sich erst im Wotawagebiete östlich von Strakonice gegen Ražic und Pisek, ferner gegen Protivín, Vodňan, Netolic und von da bis hinter Budweis. Ausgedehnte, aus der Tertiärzeit stammende Tümpel und Seen, heute in vorzügliche Teiche umgewandelt, beherbergten während der Steppenperiode eine Menge verschiedener Vögel.

Dafür aber hatte das Vorgebirge des Böhmerwaldes günstigere Bedingungen zur Entwicklung der späteren Busch- und Waldkomplexen und Weiden, in denen neue Tiere in der Nachbarschaft der bis heute existierenden Steppenfauna ihre Zuflucht suchten.

Diesen hier geschilderten Landschaftscharakter hat sich das Böhmerwaldgebiet im großen und ganzen bis heute bewahrt, trotzdem es durch Agrikultur und andere Kunstmittel modifiziert ist.

Die diluvialen Funde von Wolin bestätigen neuerdings die Ansicht verschiedener Forscher, daß während der Glazialperiode in Mitteleuropa teilweise arktische Steppen oder Tundren, teilweise auch subarktische Steppen oder steppenähnliche Distrikte mit einem subarktischen Klima existierten.

In welcher Glazial- resp. Interglazialperiode die oben beschriebene Fauna von Zechovic und vom Děkanský vrch zu uns gekommen ist, läßt sich erst nach Beendigung meiner unlängst in diesen Gegenden begonnenen morphologischen Studien sagen.

# Über neue Phyllocariden aus der Bande $F-f_1$ .

Von J. PERNER.

Mit 1 Tafel.

(Vorgelegt am 23. Juni 1916.)

(Resumé des böhmischen Textes.)

Vor mehreren Jahren ist es mir gelungen vom Herrn Postmeister A. Schubert in Radotín aus seiner umfangreichen Sammlung manche neue Fossilien aus der Bande  $F-f_1$  für das Museum des Königr. Böhmen in Prag zu erwerben; es waren darunter besonders schön erhaltene Fischreste und verschiedene Crustaceen, wovon eine kleine Auswahl im Barrandeum unter provisorischen (Manuskript-) Namen ausgestellt wurde. Nach dem im vorigen Jahre erfolgten Tode des Inhabers jener Sammlung, als die Möglichkeit entstand, daß einige, wenn auch minder gut erhaltene Duplikate der obenerwähnten Versteinerungen ins Ausland gelangen, entschloß ich mich, wenigstens die interessantesten Novitäten aus  $F-f_1$  zu veröffentlichen, wodurch das Bild der Fauna unserer jüngsten Silurschichten wesentlich ergänzt wird.

Bisher waren nur 3 Phyllocariden aus der Bande  $F-f_1$  bekannt, welche O. Novák<sup>1)</sup> in seiner bekannten Abhandlung angeführt resp. abgebildet hatte, nämlich:

*Aristozoe solitaria* Novák (nur Telson bekannt),

*Ceratiocaris modesta* „

„ *Damesi* „

Außerdem hatte J. V. Želízko<sup>2)</sup> aus demselben Horizont angeführt (ohne nähere Beschreibung):

*Ceratiocaris*, *Mâchoires isolées*, und

*Ceratiocaris n. sp.*

<sup>1)</sup> Zur Kenntniß der Fauna der Etage  $F-f_1$  etc. Sitzungsber. d. Kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 1888.

<sup>2)</sup> Über die Fauna der Bande  $f_1$ . Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanst. 1898. Nro. 9, 10.



In der vorliegenden Abhandlung werden 3 weitere neue Phyllocariden aus dieser Bande beschrieben.

**Pygocaris Schuberti** *n. g. n. sp.*

Taf. I. Fig. 1—5.

Von dieser Phyllocaride sind nur die Panzerschalen einer einzigen Art bekannt, weshalb die Gattungsmerkmale mit der Artbeschreibung zusammenfallen.

Die Schalen sind flach, dünnwandig, nach vorne gestreckt und erreichen ihre größte Breite schon im ersten Drittel ihrer Länge. Ihr Vorder- rand ist schief abgestutzt und läuft in einen schnabelartigen, stumpf abgerundeten, schief nach abwärts gerichteten Fortsatz. Der unterhalb dieses Fortsatzes befindliche Teil des Vorderrandes hat einen konkaven Umriß. Der Unterrand ist stark bogenförmig und an der Stelle, wo er in den Hinterrand übergeht, ein wenig abgestutzt. Der Hinterrand ist unmittelbar unterhalb des Rückenrandes konkav ausgeschnitten. Der Rückenrand der mäßig abgeplatteten Stücke ist wellig verbogen, was wohl teilweise durch die Aufpressung der Höckerbasis über den Rückenrand verursacht wurde. Bei einem ganz wenig deformierten Exemplar, welches aus einer kalkigen Einlage stammt, ist der Rückenrand viel weniger verbogen, wie es die Fig. 5 zeigt. Bei allen Exemplaren läuft das mäßig konkave Ende des Rückenrandes in eine kurze, nach aufwärts gerichtete Spitze aus.

Mit Ausnahme des Rückenrandes ist der ganze Schalenrand mit einer massiven, stark gewölbten, bis 4 mm breiten Leiste versehen, welche durch eine ziemlich tiefe und breite Furche von der übrigen Schalenoberfläche getrennt ist.

Hinter dem Schalenfortsatz sind deutlich 4 fast rundliche Höcker hintereinander entwickelt, deren Größe und Entfernung voneinander gegen die Schalenmitte hin zunimmt. Unterhalb dieser Höckerreihe sind 2—3 flache größere Höcker vorhanden; ihre genaue Anzahl konnte wegen der oft vorkommenden Deformationen der Oberfläche nicht ermittelt werden.

Welcher von diesen Höckern als sogenannter „Augenhöcker“<sup>1)</sup> anzusehen wäre, bleibt auch zweifelhaft.

Fast die ganze Oberfläche ist mit zahlreichen schmalen runzelartigen scharfen Rippen verziert; dieselben treten manchmal nur als schuppenartige

1) Manche von jenen Höckern, welche Jones und Woodward (British paleoz. phyllopoda Pt. 1) bei Ceratiocariden (s. l.) als „ocular tubercules“ bezeichnen, dürften eher als Stellen der Muskelinsertionen aufzufassen sein; Beecher (Revision of Phyllocarida Quart. Journ. Geol. Soc. 1902. Aug.) betrachtet bei den Rhinoariden als „optical nodes“ nur solche Höcker, welche mit einem Grübchen („optical pit“), versehen sind und nach Clarke (N. York State Mus. 54<sup>th</sup>, annual Report. 1901) ist das Vorhandensein und Lage der Augenmäkel („eyespot“) ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal für ähnliche Gattungen.



Furchen hervor. Einige kann man fast über die ganze Schale hindurch verfolgen, einige dagegen sind kurz und hören plötzlich auf, um ein Stück weiter wieder aufzutauchen. Ihr Verlauf ist wellig, und manchmal fließen 2—3 Runzeln zusammen; gegen den Rückenrand hin treten sie dichter auf als im unteren Teile der Schale; auch sind sie dort mehr wellig.

Die auf dem abgebildeten Exemplar (Positiv und Negativ, Fig. 1, 2), sichtbaren schiefen Falten sind wohl infolge des Seitendruckes entstandene Deformationen.

Nach der Art der Erhaltung ist ersichtlich, daß die dünnwandigen Schalen leicht miteinander verbunden waren, und sich voneinander bis zu gewisser Grenze entfernen konnten. Die besonders starke Randleiste diente wohl zur Verfestigung der Schalen, die im Gegensatz zu den in diesen Schichten vorkommenden massiven, fast immer mit ursprünglicher, starker Wölbung erhaltenen Aristozen immer flach sind.

Die Gattung *Pygocaris* steht der Gattung *Aristozoe* Barr. aus der Familie der *Echinocariden* Clarke am nächsten. Von der Gattung *Aristozoe* unterscheidet sich *Pygocaris* durch stark hervortretenden Fortsatz am oberen Vorderrand, durch tiefen Ausschnitt am Vorderteil, ferner durch die Flachheit und auffallende Dünnwandigkeit der Schalen, und zuletzt durch die eigenartige Skulptur.

Durch die Größe und Skulptur der Schalen erinnert *Pygocaris* an die Untergattung *Linnocaris* Clarke<sup>1)</sup> aus der Familie der echten Ceratiocariden, welche lang gestreckte Schalen mit einem kleinen „Augenhöcker“ und nebstdem noch einige kleine vorne zerstreute Höcker besitzt. Jedoch bei *Linnocaris* entbehren die Schalen des schnabelartigen Vorsprungs und sind mit kontinuierlichen, geraden scharfen Rippen versehen; auch fehlen ihnen die großen Höcker nahe dem Rückenrande.

*Pygocaris* dürfte wohl in die Familie der Echinocariden eingereiht werden, ebenso wie die ihm nächststehende Gattung *Aristozoe* Barr., die zwar schon vor mehr als 30 Jahren O t. N o v á k<sup>2)</sup> zu den Ceratiocariden (s. l.) gestellt hatte, aber dessen geniale, durch das Material belegte Rekonstruktion des ganzen, an *Nebalia* so lebhaft erinnernden Körpers von *Aristozoe* leider in unverdiente Vergessenheit geraten ist. Es ist nicht ausgeschlossen, daß einige von den in der Literatur aus  $F-f_1$  angeführten Ceratiocaris-Reste (Telson und verschiedene Abdominalsegmente mit Stachel) zu *Pygocaris* gehören.<sup>3)</sup>

1) New York State Museum. 54<sup>th</sup> annual Report. 1901. p. 92.

2) Remarques sur le genre *Aristozoe*. Sitzungsber. d. Kgl. böhm. Gesell. d. Wissensch. 1885.

3) *Ceratiocaris modesta* Nov., *Cer. Damesi* Nov; vielleicht auch *Aristozoe solitaria* Nov. Vergleiche O. N o v á k: Zur Kenntniß der Fauna der Etage  $F-f_1$  etc. Sitzber. d. Kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 1886. — J. Ž e l í z k o (Über die Fauna der Bande  $f_1$ . Verh. d. k. k. geol. Reichsanst. 1898. No. 9, 10) führt noch isolierte Kiefer von *Ceratiocaris* (nach Barrande) und eine nicht näher beschriebene *Ceratiocaris n. sp.* aus  $F-f$  an.

**Aristozoe parabolica** *n. sp.*

Taf. I. Fig. 9—11.

Der Umriß der Schale gleicht einer Parabel, die durch einen flachen Bogen abgeschnitten ist. Der Vorderrand der Schale besitzt oben einen ganz schwach hervortretenden abgerundeten Vorsprung; der unmittelbar darunter befindliche Theil des Randes ist schwach konkav, um gleich darauf in einen konvexen Bogen zu übergehen. Der untere Rand ist parabolisch gekrümmt. Der ebenfalls stark konvexe, ein wenig schief abgestutzte Hinterrand übergeht ziemlich rasch in den schwach bogenförmigen Rückenrand.

Die kaum 1 *mm* breite Randleiste tritt an den plattgedrückten Exemplaren undeutlich hervor.

Die Schale erreicht den Gipfelpunkt ihrer Wölbung etwa im vorderen Drittel der Schale; der Hinterteil ist abgeflacht, und es zieht sich sogar eine Depression entlang des Unterrandes gegen den Hintertheil hin.

An der Oberfläche kann man mit Sicherheit 2 große Höcker konstatieren, welche einen subquadratischen Umriß besitzen und durch ziemlich tiefe Furchen von der übrigen Oberfläche geschieden sind. Ob noch ein dritter flacher Höcker hinter ihnen entwickelt war, läßt sich infolge der meist immer etwas deformierten Oberfläche nicht sicherstellen. Dagegen zeigen 2 besterhaltene Exemplare, daß jeder von den erwähnten 2 großen Höckern durch eine furchenartige Einsenkung in 2 kleinere Höcker geteilt ist, was kaum auf eine zufällige Deformation zurückzuführen wäre.

Durch den Schalenumriß nähert sich diese Art am meisten der viel kleineren Art *Arist. inclyta* Barr.<sup>1)</sup> aus  $E-e_2$ ; die letztere besitzt aber nur einen großen Höcker; auch die im Umriß ähnliche, ebenfalls kleine *Ar. amica* aus  $F-f_2$  ist einhöckerig. Die Anordnung der Höcker bei *Arist. parabolica* ähnelt derjenigen bei *Arist. memoranda* Barr. Jedoch besitzt die letztere, aus Unterdevon ( $F/f_2$ ) stammende Art anders geformte Höcker und außerdem ist ihr unterer Schalenrand schwächer gekrümmt.

Dimensionen: Die größten Exemplare erreichen eine Länge von 47 *mm*.

Fundort: Kosoř,  $Ff_1$  (11 Exemplare bekannt).

**Aristozoe Clarkei** *n. sp.*

Taf. I. Fig. 6—8.

Die Schale hat einen halbkreisförmigen Umriß. Dort, wo der Vorderand mit dem Rückenrand zusammenstößt, bildet die Schale einen abgerundeten, schwach hervortretenden Vorsprung; der unter diesem Vorsprunge befindliche vertikale Vorderrand ist schwach wellig und ohne Randleiste. Dieselbe wird erst an der Grenze zwischen dem Vorder- und Unterrand deutlich. Der Unterrand ist mit einer starken, etwa  $2\frac{1}{2}$  *mm* breite Leiste versehen, welche

<sup>1)</sup> Barrande l. c. Pl. 24. fig. 40—41. p. 478.

durch eine fast ebenso breite seichte Furche von der übrigen Oberfläche getrennt ist.

Der Hinterrand ist ein wenig schief abgestutzt. Der Rückenrand erscheint vielfach gewellt, was wohl mit den zahlreichen Warzen, mit denen diese Partie besetzt ist, zusammenhängen dürfte. Besonders große Konvexität zeigt jene Stelle des Vorderrandes, wo der große Höcker entwickelt ist.

Im oberen Drittel der Schale sind zwei große Höcker entwickelt, wovon der erste kleiner, mehr gegen den Vorderrand gerückt und von länglich eiförmiger Gestalt ist. Der zweite, größere, dicht an den Dorsalrand hinabreichende, und tief nach unten bis zur Spitze des ersten Höckers sich erstreckende Höcker, hat einen sphärisch dreieckigen Umriß. Beide Höcker sind durch ziemlich tiefe Furchen voneinander geschieden und treten deutlich hervor.

Außer diesen 2 Höckern ist der größere Teil der Oberfläche mit zahlreichen, flach gewölbten kreisförmigen Wärzchen besetzt. Ihre Anordnung scheint den Umrissen des Rücken- und Hinterrandes zu folgen.

Unter der Lupe gewahrt man nebstdem viele haarförmige, kurze Runzeln, welche sich zwischen den Höckern und Wärzchen und sogar über dieselben in verschiedener Richtung hinwegziehen. Es bleibt unentschieden, ob dieselben zur Ornamentation der Schale gehören, oder eines anderen, vielleicht pathologischen (durch Parasiten hervorgerufenen?) Ursprungs seien, was eher anzunehmen ist.

Durch die Form des Schalenumrisses nähert sich die vorliegende Art zu *Aristozoe perlonga* Barr.<sup>1)</sup>, jedoch macht die sehr charakteristische wazige Skulptur der Oberfläche bei *Ar. Clarkei* etwaige Verwechslung bei der Arten unmöglich. Eine entfernt ähnliche Skulptur der Oberfläche fanden wir nur bei einem Exemplar von *Aristozoe* aus *F*—*f*<sub>2</sub>, welches Barrande<sup>2)</sup> als zu *Arist. memoranda* gehörig abgebildet hatte. Jedoch zeigt dieses Stück viel kleinere, sehr zahlreiche, kegelförmige Erhebungen und nebstdem ganz feine punktförmige Grübchen, welche der *Ar. Clarkei* fehlen.

Dimensionen: Länge bis 40 mm; Breite 24 mm.

Fundort: Kosoř — *F*<sub>1</sub>.

1) Barrande, Syst. silur. Vol. I. Suppl. Pl. 23. fig. 26—30.

2) l. c. Pl 32 fig. 16—17; wahrscheinlich ist es eine neue Art.



## TAFELERKLÄRUNG.

Fig.

1, 2. *Pygocaris Schuberti* n. sp.

Abdruck mit Gegenabdruck, an denen die hintere Rückenpartie fehlt. Natürl. Größe.

3. *Idem*. Vertikalschnitt durch die Schale, geführt hinter dem letzten Höcker.4. *Id.* Idealer Längsschnitt, beiläufig in der Mitte der Breite geführt.5. *Id.* Halberwachsenes Exemplar, aus einer kalkigen Einlage stammend, dessen Umriß ein wenig deformiert ist (vorne), welches aber einen wohl erhaltenen Rückenrand aufweist. Kombiniert nach dem Positiv und Negativ, welche stellenweise die charakteristische Skulptur zeigen.6. *Aristozoe Clarkei* n. sp.Positiv mit erhaltener Skulptur. Vergr.  $\frac{2}{1}$ .

Die kurzen, in verschiedener Richtung sich ziehenden strichförmigen Runzeln rühren wahrscheinlich von Parasiten her.

7. *Id.* Optischer Längsschnitt.8. *Id.* Optischer Querschnitt.9. *Aristozoe parabolica* n. sp.

Ganz wenig deformiertes Stück, dessen Hinterrand nach anderen Exemplaren ergänzt wurde. Natürl. Größe.

10. *Id.* Optischer Vertikalschnitt.11. *Id.* Optischer Längsschnitt (schwach vergr.).Alle Originale stammen aus Kosoř, F—f<sub>1</sub>, und sind im Museum des Königr. Böhmen aufbewahrt.

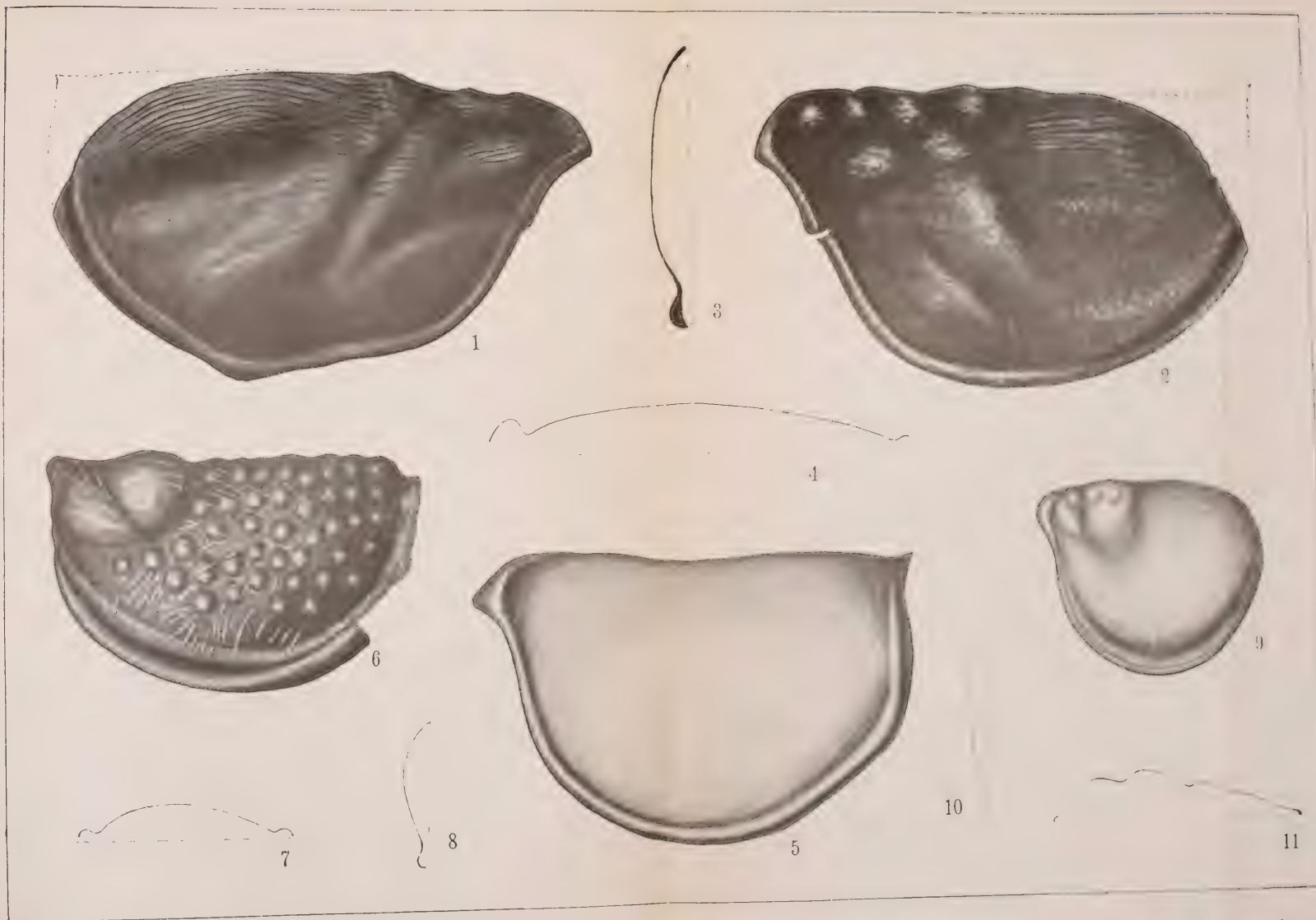


J. P.



Aug 1916.





Autor ad nat. del.





# Über die $d_{1\gamma}$ -Schichten und ihre Trilobitenfauna.

Von C. KLOUČEK.

Resumé des böhm. Textes.

Vorgelegt am 27. Juni 1916.

In den letzten 10 Jahren wurde in der untersilurischen Bande  $D_1$  besonders fleißig nachgeforscht und eine Menge von neuen Petrefakten zusammengebracht.

Dadurch wurde nicht nur die Fauna von  $D_1$  bedeutend vermehrt, sondern auch die stratigraphische Stellung dieser Stufe und ihre Beziehungen zu den analogen fremden Ablagerungen mehr aufgeklärt.

K. Holub's Entdeckung der jüngeren *Euloma-Niobe-Fauna* in  $d_{1\beta}$  bei Klaba va (Rokycany) 1907<sup>1)</sup> hat überrascht, obzwar die früher schon bekannten Typen wie *Amphion Lindaueri* Barr., *Harpides Grimmii* Barr. und *Cheirurus Hofmanni* Perner die Existenz dieses Horizontes in Böhmen vermuten ließen.

Noch überraschender, weil gar nicht vorausgesehen, war die Entdeckung von Trilobiten in  $d_{1\alpha}$  (Krušnáhora-Schichten), die dem Autor 1914 bei Olešná, unweit St. Benigna, geglückt ist.<sup>2)</sup> Aus diesen Schichten waren bisher außer Brachiopoden und Spongien überhaupt keine anderen Fossilien bekannt. Die darin gefundene Trilobitenfauna ist von *kambrischsilurischem* Charakter — etwa des Lower-Tremadoc, wodurch die stratigraphische Stellung der  $d_{1\alpha}$ -Schichten als des *untersten Gliedes* des böhmischen *Untersilur* schlagend bewiesen wird.

Die  $d_{1\gamma}$ -Schichten, obzwar schon früher besser durchgeforscht, erfuhren auch eine namhafte faunistische Bereicherung und somit auch eine weitere stratigraphische Klärung, worüber hier, mit besonderer Berücksichtigung der Trilobiten, berichtet werden soll.

1) K. Holub „Nová fauna spod. siluru v okolí Rokycan“, „Über eine neue Fauna des Untersilurs in der Umgebung von Rokycan“ und „Nachträge“, Bull. internat. d. l'Acad. d. sc. de l. Boheme, 1911—12.

2) C. Klouček „Nález trilobitů v  $d_{1\alpha}$ “, „Trilobitenfund in  $d_{1\alpha}$ “, Sitzb. d. k. böhm. Ges. d. Wiss., Prag 1914.

Die  $d_{1\gamma}$ -Schichten bestehen bekanntlich aus dunklen Schiefen mit stellenweise auftretendem Eruptivgestein — seltener mit wenig mächtigen Eisenerzablagerungen — und sind sehr trilobitenreich.

Ihre stratigraphische Stellung hat W. C. Brøgger hauptsächlich auf Grund der von J. Perner beschriebenen Graptolithen festgestellt und  $d_{1\gamma}$  in Middle-Arenig bis Lower-Llandeilo placiert.<sup>3)</sup> Zugleich wies er auf die sonderbare Mischung von älteren und jüngeren faunistischen Formen in  $d_{1\gamma}$  hin, mit der Bemerkung, daß eine weitere Teilung der Bände  $d_{1\gamma}$  wünschenswert und vielleicht bereits möglich wäre.

Diese Voraussage Brøggers ist 1908 in Erfüllung gegangen. Eine Menge von neuem selbstgesammeltem Material aus *Vokovice-Šárka* bei Prag und aus *Malé Přílepy* (nw. von Beroun), sowie die älteren Trilobitenfunde aus dem *Kozojeder* Stollen (bei St. Benigna), die zuerst von Lipold-Fritsch (Frič) 1861 publiziert wurden, haben mich — unter teilweiser Mitwirkung von K. Holub — von der Existenz zweier faunistisch abweichender, somit selbständiger Zonen in  $d_{1\gamma}$  überzeugt, worüber in den Sitzungsber. d. K. böhm. Ges. d. Wiss. 1908 „O 2 horizontech v  $d_{1\gamma}$ “, *Über 2 Horizonte in  $d_{1\gamma}$* “ in Kürze berichtet wurde.<sup>4)</sup>

Seitdem hat sich das beweisführende Petrefaktenmaterial stark vermehrt, wovon die nachfolgenden 2 Verzeichnisse der Trilobitenfauna aus den beiden Zonen eine Vorstellung geben sollen.

Die da verzeichneten Trilobiten sind, nur einige der oberen Zone ausgenommen, aus den Konkretionen bekannt. Die Konkretionen sind in  $d_{1\gamma a}$  hart, meist schwarz, seltener braun; in  $d_{1\gamma b}$  dagegen oft weich, grau oder gelblich — seltener auch dunkel und hart.

### Trilobiten in $d_{1\gamma a}$ .

s. = selten, s. s. = sehr selten, h. = häufig, s. h. = sehr häufig.

		Erlischt in $d_{1\gamma a}$	Osek	Šárka
1.	<i>Acidaspis Buchi</i> Barr. ....		s. s.	s.
2.	<i>Acidaspis Buchi</i> var. <i>macrophthalma</i> Klou.		s.	s. s.
3.	<i>Aeglina prisca</i> Barr. ....	?	s.	h.
4.	<i>Aeglina prisca</i> var. <i>synophthalma</i> Klou. ...	+		s.

<sup>3)</sup> Dr. Jaroslav Perner „Études sur les Graptolites de Bohême“ II. p., 1895.

J. W. Brøgger „Über die Verbreitung der Euloma-Niobe-Fauna“, *Nyt. Magazin f. Naturvid.*, 1897—8.

<sup>4)</sup> Die von mir angewandte Bezeichnung,  $d_{1\gamma a}$  für die untere und  $d_{1\gamma b}$  für die obere Zone, halte ich nur für provisorisch, bis eine den heutigen Verhältnissen entsprechende Benennung im böhm. Silur eingeführt sein wird.

		Erlischt in d1ya	Osek	Šárka
5.	<i>Aeglina speciosa</i> Corda .....		s. s.	s. s.
6.	<i>Aeglina princeps</i> mut. praec. Klou. ....	+		s. s.
7.	<i>Aeglina Kossleri</i> Holub n. sp. ....	+	s. s.	s.
8.	<i>Aeglina Bergeroni</i> Nov. ....	+		ε.
9.	<i>Aeglina sulcata</i> Barr. ....		s. s.	ε. s.
10.	<i>Aeglina mitrata</i> Nov. ....	+	s. s.	
11.	<i>Amphion senilis</i> Barr. ....	+	s. s.	s. s.
12.	<i>Areia Barrandei</i> Nov. ....	+	s. s.	s. s.
13.	<i>Cheirurus pater</i> Barr. ....	?	s. s.	s. s.
14.	<i>Cheirurus comes</i> Barr. ....	+	s. s.	
15.	<i>Dindymene bohemica</i> Barr. ....	+	ε. s.	s. s.
16.	<i>Placoparia Zippei</i> Boeck. ....	?	s. h.	s. h.
17.	<i>Bathycheilus perplexus</i> Barr. (emend. Holub).	+	s. s.	
18.	<i>Bohemilla stupenda</i> mut. praecedens. Klou.			s. s.
19.	<i>Calymene Arago</i> Rou. ....	?	s. h.	s. h.
20.	<i>Calymene inopinata</i> Nov. ....	+	s. ε.	s.
21.	<i>Pharostoma pulchrum</i> Barr. (emend. Pompeckj) .....		h.	s.
22.	<i>Dalmanites atavus</i> Barr. ....	+	h.	h.
23.	<i>Dalmanites atavus</i> var. <i>intermedia</i> Nov. ...	+	s.	s.
24.	<i>Dalmanites atavus</i> var. <i>transiens</i> Nov. ....	+	s.	s.
25.	<i>Dalmanites atavus</i> var. <i>microphthalma</i> Nov.	+	s. s.	s.
26.	<i>Dalmanites Barroisi</i> Nov. ....	+		s.
27.	<i>Dicelocephalina bohemica</i> Nov. ....	+		s. s.
28.	<i>Dionide prima</i> Klou. n. sp. ....	+	s. s.	s. s.
29.	<i>Harpes primus</i> Barr. ....	+	s. s.	s. s.
30.	<i>Trinucleus Reussi</i> Barr. ....	?	s. h.	h.
31.	<i>Holometopus?</i> (Illaenus) <i>bohemicus</i> Barr. ...	+	s. s.	s. s.
32.	<i>Asaphellus</i> (Ogygia) <i>desideratus</i> Barr. (em. Brøgger). ....	?	h.	h.
33.	<i>Ptychocheilus</i> (Niobe) <i>discretus</i> Barr. (em. Nov.) .....	+	s.	s.
34.	<i>Megalaspides alienus</i> Barr. (emend. Brøgger)	?	h.	h.
35.	<i>Platypeltis</i> (Nileus) <i>puer</i> Barr. (emend. Brøgger) .....		s. s.	s. s.
36.	<i>Symphysurus</i> (Illaenus) <i>calvus</i> Barr. (emend. Brøgger). ....	+	s. s.	
37.	<i>Barrandia bohemica</i> Nov. ....	+		h.
38.	<i>Illaenus Katzeri</i> Barr. ....	?	s. h.	s.
39.	<i>Illaenus Šárkaensis</i> Nov. ....	?	s. s.	s. h.

		Erlischt in <i>d<sub>1γa</sub></i>	Osek	Šárka
40.	<i>Iliaenus parabolinus</i> Nov. ....	+		h.
41.	<i>Iliaenus advena</i> Barr. ....	+	s.	s.
42.	<i>Bumastus avus?</i> Holub. ....	+	s. s.	s. s.
43.	<i>Bumastus pragensis</i> Klou. n. sp. ....	+		s. s.
44.	<i>Iliaenus c. f. advena</i> Barr. ....	+		s. s.
45.	<i>Lichas avus</i> Barr. ....	+	s. s.	s.
46.	<i>Lichas incola</i> Barr. ....	?	s. s.	s. s.
47.	<i>Lichas giganteus</i> Holub. n. sp. ....	+	s. s.	
48.	<i>Agnostus Tullbergi</i> Nov. ....		s. s.	s. s.
49.	<i>Agnostus similis</i> Barr. ....			s. s.
50.	<i>Agnostus perrugatus</i> var. <i>caducus</i> Barr. (em. Klou.). ....		s. s.	s. s.
51.	<i>Agnostus perrugatus</i> Barr. ....		s. s.	s. s.
52.	<i>Agnostus Dusli</i> Nov. ....	+	s. s.	
53.	<i>Agnostus Friči</i> Holub. ....	+	s. s.	
54.	<i>Agnostus bohemicus</i> Barr. ....			s. s.

Trilobiten in *d<sub>1γb</sub>*.

		Erlischt in <i>d<sub>1γb</sub></i>	Šárka— Vokovice
1.	<i>Acidaspis Buchi</i> var. <i>macrophthalma</i> Klou. ....		s. s.
2.	<i>Aeglina speciosa</i> Corda ....		s. s.
3.	<i>Aeglina speciosa</i> var. <i>brachycephala</i> Klou. ....		s.
4.	<i>Aeglina speciosa</i> var. <i>synophthalma</i> Klou. ....	+	s. s.
5.	<i>Aeglina princeps</i> Barr. ....	+	h.
6.	<i>Aeglina prisca</i> var. <i>longicephala</i> Klou. ....	+	h.
7.	<i>Aeglina planicephala</i> Nov. ....	+	s. s.
8.	<i>Aeglina rediviva</i> Barr. ....		s. s.
9.	<i>Aeglina monophthalma</i> Klou. n. sp. ....	+	s. s.
10.	<i>Ampyx</i> n. sp. ....	?	s. s.
11.	<i>Areia Friči</i> Barr. ....	+	s.
12.	<i>Cheirurus vinculum</i> Barr. ....	+	
13.	<i>Cheirurus</i> n. sp.? ....	?	
14.	<i>Dindymene Haidingeri</i> Barr. ....		s.
15.	<i>Placoparia Zippei</i> var. <i>tumida</i> Klou. ....	?	s. h.
16.	<i>Asaphus nobilis</i> Barr. ....		s.
17.	<i>Barrandia crassa</i> Barr. ....	+	h.



		Erlischt in $d_{1\gamma b}$	Šárka- Voko- vice
18.	<i>Platypeltis</i> (Nileus) <i>puer</i> Barr. sp.....	+	
19.	<i>Platypeltis</i> (?) <i>longicaudus</i> Klou. n. sp. ....	+	S. S.
20.	<i>Bohemilla stupenda</i> Barr.....	+	S. S.
21.	<i>Calymene Arago</i> var. <i>macrophthalma</i> Klou.....	+	S.
22.	<i>Carmon primus</i> Barr. ....	?	
23.	<i>Dionide formosa</i> Barr. ....		S.
24.	<i>Trinucleus Bucklandi</i> mut. praec. Klou. ....	+	S. S.
25.	<i>Harpes Benignensis</i> Barr. ....	+	S.
26.	<i>Dalmanites oriens</i> Barr. ....		h.
27.	<i>Dalmanites oriens</i> var. <i>mytoensis</i> Klou. ....	+	
28.	<i>Dalmanites atavus</i> var. <i>Nováki</i> Klou.....	+	S.
29.	<i>Holometopus?</i> n. sp. ....	+	S. S.
30.	<i>Illaenus Benignensis</i> Nov. ....	+	h.
31.	<i>Illaenus aratus</i> Barr.....		
32.	<i>Illaenus Perneri</i> Klou. ....		
33.	<i>Illaenus Perneri?</i> var. <i>glabra</i> Klou. ....	+	S. S.
34.	<i>Proetus?</i> <i>primulus</i> Barr.....	?	
35.	<i>Šárkia bohémica</i> Klou. n. g. n. sp.....	+	S. S.
36.	<i>Agnostus similaris</i> Barr. ....		
37.	<i>Agnostus perrugatus</i> Barr. sp. ....	+	S. S.
38.	<i>Agnostus perrugatus</i> var. <i>caducus</i> Barr. (emerd. Klouček) .....	+	S. S.
39.	<i>Agnostus Tullbergi</i> Nov. ....		S. S.
40.	<i>Agnostus</i> sp. ....	+	
41.	<i>Agnostus fortis</i> Nov. ....		
42.	<i>Agnostus bohemicus</i> Nov.....	+	S. S.

Ganz vereinzelt, wahrscheinlich aus den Übergangschichten<sup>5)</sup> stammend, wurden bis jetzt folgende der Zone  $d_{1\gamma a}$  zugehörige Trilobiten auch in der Zone  $d_{1\gamma b}$  gefunden:

1. *Asaphellus desideratus* Barr.
2. *Calimene Arago* Rou.
3. *Cheirurus pater?* Barr.
4. *Illaenus Katzeri* Barr.
5. *Illaenus šárkaensis* Nov.
6. *Lichas incola* Barr.

<sup>5)</sup> Dem ähnlichen petrographischen Charakter nach zu urteilen ist mit  $d_{1\gamma}$  keine wesentliche Veränderung der Lebensbedingungen eingetreten, weshalb auch die Fauna in  $d_{1\gamma b}$  keine plötzliche Umgestaltung zu erfahren hatte.

7. *Placoparia Zippei* Boeck.
8. *Megalaspides alienus?* Barr.
9. *Trinucleus Reussi* Barr.

Diese Verzeichnisse besagen folgendes:

1. Die Trilobiten der Zone  $d_{1\gamma a}$  zählen heute 54 Arten und Varietäten; in der Zone  $d_{1\gamma b}$  42 Arten und Var. (die erwähnten vereinzelt gefundenen 9 Arten nicht mitgerechnet).

2. Gemeinschaftlich den beiden Zonen sind nur 6 Trilobiten: *Acidaspis Buchi* var. *macrophthalma* Klou., *Aeglina speciosa* Corda, *Agnostus bohemicus* Nov., *Agnostus Tullbergi* Nov., *Agnostus similaris* Barr. und *Agnostus ferrugatus* var. *caducus* Barr.

Die gesamten Trilobitenarten (und Varietäten) im ganzen  $d_{1\gamma}$  erreichen also bereits die hohe und gewiß unerwartete Zahl 90.

3. In höhere Banden ( $D_2$ — $D_5$ ) steigen:

<i>Asaphus nobilis</i> Barr.	<i>Aeglina sulcata</i> Barr.
<i>Dionide formosa</i> Barr.	<i>Pharostoma pulchrum</i> Barr.
<i>Aeglina speciosa</i> Corda.	<i>Acidaspis Buchi</i> Barr.
<i>Aeglina rediviva</i> Barr.	<i>Acidaspis Buchi</i> var. <i>macrophthalma</i>
<i>Aeglina speciosa</i> var. <i>brachycephala</i>	Klou.
Klou.	<i>Iliaenus Perneri</i> Klou.

und

*Dalmanites oriens* Barr. (wenig verändert als *D. Hawlei* und *D. Deshayesi* Barr.).

4. Die meisten bisjetzt beschriebenen Arten aus  $d_{1\gamma}$  — Schichten<sup>6)</sup> gehören der unteren Zone  $d_{1\gamma a}$  an.<sup>7)</sup>

<sup>6)</sup> J. B a r r a n d e „Syst. silur.“ Vol. I. u. Suppl. O. N o v á k „Zur Kenntniss der böhm. Trilobiten“ in Beiträge zur Palaeontologie Österreich-Ungarns und d. Orients B. III, H. I.—II., 1883. K. H o l u b „Příspěvek ku poznání fauny pásma  $d_{1\gamma}$ “, „Beitrag zur Kenntniss der Bande  $d_{1\gamma}$ “, Bull. internat. d. l'Acad. d. sc. de Bohême, 1908. C. K l o u č e k „O geol. horizontu rudního ložiska na Karýzku“, „Über den geolog. Horizont des Erzlagers bei Karýžek“, ebenda 1913. J. V. Ž e l í z k o „Geologisch-palaeontol. Verhältnisse der nächsten Umgebung von Rožmital in Böhmen“, ebenda 1906, ist hier nicht berücksichtigt, da der Horizont von Rožmital noch nicht sichergestellt ist und wegen seiner typischen *Dionide formosa* Barr. und einer *Strophomena* in  $d_{1\gamma a}$  wenigstens nicht gehört.

<sup>7)</sup> In den „Erläuterungen zur geol. Karte der Umgebung von Prag“ von J. K r e j č í und R. H e l m h a c k e r im Archiv f. naturwiss. Durchforschung Böhmens, 1879, Bd. 4, S. 24 heißt es: „Im Hangenden dieser Schiefer ( $d_{1\gamma}$ ) erscheinen an einigen Orten spärliche Koncretionen.“

Diese Angabe K r e j č í s gilt nur für einige Lokalitäten z. B. bei Malé Přílepy, trifft aber für das ganze  $d_{1\gamma}$  durchaus nicht zu, wie das große (erst nach K r e j č í entblöbte) Schieferprofil der unteren Zone  $d_{1\gamma}$  bei Vokovice (Šárka) w. bei Prag, wo die Koncretionen stellenweise häufig und petrefaktenreich sind, handgreiflich beweist. F r. K a t z e r nahm augenscheinlich die unzutreffende Angabe K r e j č í s in seine „Geologie von Böhmen“ S. 860 auf, wodurch im Auslande die irrige Ansicht

Ähnlich wie die Trilobiten verhält sich auch die übrige Fauna der Zone  $d_1 \gamma a$  zu der entsprechenden Fauna in  $d_1 \gamma b$ . Die meisten Arten der Zone  $d_1 \gamma a$  erscheinen nicht mehr in der oberen Zone  $d_1 \gamma b$  (*Orthis moesta* Barr., *Orthis socialis*, *Babinka* (*Anuscula*) *prima* Barr., einige Varietäten der *Redonia bohemica* Barr., die meisten Arten der Gattung *Orthoceras* und *Didymograptus*, einige Gastropoden etc.), oder treten dort in abweichender Gestalt als Mutationen auf.

Dagegen erscheinen in  $d_1 \gamma b$  meist zum ersten Male: die Chitonidenart *Helmithochiton acquivoca* Robson n. sp., *Strophomena*, einige Lingula-Arten (*L. trimeria* Barr.), *Paterula bohemica* Barr., *Syneke* (*Filius*) *antiquus* und *Dceruška* (*Filiola*) *primula* Barr., neue Pteropoden, Crinoiden, Ostracoden, Gastropoden und Graptolithen (*Diplograptus* sp., *Cryptograptus* (*Idiograptus*) *tricornis* Carr. etc.

Alle diese Tatsachen beweisen wohl zweifellos, daß die  $d_1 \gamma$ -Schichten faunistisch nicht einheitlich sind, sondern aus 2 (annähernd gleich mächtigen) faunistisch abweichenden Zonen bestehen.

### Besondere faunistische Erscheinungen in $d_1 \gamma$ .

Alle silurischen Trilobitgattungen der Fauna von  $d_1 \beta$  erscheinen, mehr oder weniger verändert, in  $d_1 \gamma$  wieder: *Nileus*, *Barrandia*, *Megalaspis*, *Niobe*, *Amphion*, *Cheirus* und *Aeglina*.

entstehen konnte, die Fauna der Konkretionen in  $d_{1\gamma}$  gehöre in das Hangende resp. in die obere Zone  $d_{1\gamma b}$ . So wurde wohl J. Pompeckj („Über *Calymene Brogniartii*“, Neues Jahrb. f. Min., Geol. u. Pal. B. I., 1898) irregeleitet, denn *Calymene Arago* Rou., *Calymene inopinata* Nov. *Pharostoma pulchrum* Barr. erscheinen in der unteren Zone von  $d_{1\gamma}$ , wo *C. inopinata* Nov. auch erlischt. Die Ausführungen Pompeckjs auf Seite 225—6, 232—4 werden natürlich dadurch tangiert.

Dabei ist in dieser Abhandlung Pompeckjs noch die Stelle auf Seite 226 zu berühren: „es ist bei den Trilobiten mit Sicherheit zu behaupten, daß Wangenstacheln bei jüngeren Formenreihen derselben Gattung oder Familie nicht erworben werden, sondern daß in der Regel Wangenstacheln ein Kriterium altertümlicher und älterer Familien und Gattungen sind. Diese Regel...“ Dementgegen führe ich an, daß in Böhmen die älteren Arten der Gattungen *Barrandia* in  $d_{1\gamma a}$  und in  $d_{1\beta}$  (*Holub*), *Dalmanites* in  $d_{1\gamma}$  und *Illaenus* in  $d_{1\gamma} - d_4$  keine Wangenstacheln besitzen, die jüngeren Arten dieser Gattungen jedoch in  $d_{1\gamma b}$  (*Barrandia crassa* Barr.),  $D_4$  (*Dalmanites socialis* Barr.) und  $D_4$  (*Illaenus Zeidlerii* und *Ill. Wahlenbergianus* Barr.) die Wangenstacheln aufweisen. Ebenso wird der wangenstachellose *Nileus* aus  $d_{1\alpha}$  (Autor) und  $d_{1\beta}$  (*Holub*) — beide freilich erst unlängst entdeckt — in  $d_{1\gamma}$  wangenstachelig.

Rücksichtlich der Angabe E. Dagués (Grundlagen u. Methoden der Paläogeographie, 1915), „es fehlt im Untersilur in Böhmen *Aeglina*, *Chasmops*, *Nileus* —“ genügt wohl die Bemerkung, daß *Barrande* bereits im Jahre 1852 in „Syst. silur.“ Vol. I. und im Suppl. Vol. I. 1872, 6 *Aeglina*-Arten aus dem Untersilur Böhmens in Wort und Bild vorgeführt hatte.

Die Gattung *Nileus* hat Brøgger schon 1897 („Über die Verbreitung der Euloma-Niobe-Fauna“) in der Art *Illaenus puer* Barr. erkannt, was ja übrigens O. Novák schon 1883 in „Zur Kenntniß der böhm. Trilobiten“ angedeutet hat,



Mit ihnen treten jedoch weitere neue Trilobiten auf, darunter 3 außerhalb Böhmens bereits im Tremadoc vorkommende Gattungen: *Dicelocephalina*, *Holometopus?* und *Ampyx* ( $d_1\gamma b$ ).

Von diesen überrascht besonders *Dicelocephalina* (*Dicelocephalus*) *bohemica* Novák, die bei Vokovice (Šárka) von O. Novák<sup>8)</sup> entdeckt wurde und das letzte faunistische Ausklingen des Kambrium in Böhmen bildet. Zugleich stellt auch *Dicelocephalina bohemica* mit *Holometopus?* (*Iliaenus*) *bohemicus* Barr. und *Ampyx* sp. (gefunden von Ing. F. Hanuš) ein gutes Beispiel von späterer Einwanderung in Böhmen vor.

Zum Vergleich mit außerböhmischem Horizonten als besonders geeignet erscheint *Trinucleus Bucklandi* mut. *praecedens* Klou., der in  $d_1\gamma b$  entdeckt wurde und der englischen Art *Trinucleus Murchisoni* Salt. (Shropshire, Lower Llandeilo) wohl nahverwandt ist.

Besonders interessant sind 2 weitere im Vokovicer  $d\gamma b$  vom Autor gefundene neue Trilobiten: *Aeglina monophthalma* Klou. n. sp. und *Šárkia bohemica* Klou. n. g. n. sp., derer Eigenartigkeit weiter besprochen werden soll.

Aus den Funden der übrigen Fauna sticht besonders eine vom Autor in  $d_1\gamma b$  gefundene Chitonidenart *Helminthochiton aequivoca* Robson n. sp. (Geol. Magazine 1913, Vol. X. Nr. 589 pp. 302—4, Guy Robson: „*Helminthochiton aequivoca* n. sp., lower Ordovician, Bohemia“) hervor, denn sie repräsentiert bis jetzt das erste Auftreten der Polyplacophora überhaupt.

Über Graptolithenfunde in  $d_1\gamma$  wäre zu erwähnen, daß Graptolithenhorizonte in  $d_1\gamma$ , mit einer einzigen vom Autor konstatierten Ausnahme (Šárka, Horizont mit *Didymograptus V fractus* Salt. var. *volucer* Nich und einigen anderen *Didymograptus*-Arten), aus den Liegendschichten des  $d_1\gamma a$ , bis jetzt nicht festgestellt wurden.

### Bemerkungen zu den einzelnen Trilobiten des $d_1\gamma$ .<sup>9)</sup>

Numeriert nach den Verzeichnissen.

#### *Trilobiten in $d_1\gamma a$ .*

2. *Acidaspis Buchi* var. *macrophthalma* Klou. Unterscheidet sich durch große Augen und nach rückwärts gebogene Rippenstacheln vom typischen *A. Buchi* Barr., der gerade Stacheln und kleine Augen besitzt.

<sup>8)</sup> Die Fauna des  $d_1\gamma$  von Šárka studierte unser ausgezeichneter, leider zu früh verstorbener O. Novák (†1892) als erster, wovon die Reihe von ihm aufgestellter neuer Species (meist in Manuskript) und ein diesbezügliches, mit schönen, von O. Novák selbstgezeichneten Tafeln versehenes nachgelassenes Manuskript zeugt.

Mit der Herausgabe dieser Arbeit wurde Dr. Jaroslav Perner betraut.

<sup>9)</sup> Solange das neue Trilobitenmaterial aus  $d_1\gamma$  nicht publiziert sein wird, sollen diese Bemerkungen als Notbehelf bei Unterscheidung der betreffenden Arten dienen.



Die Wangenstacheln gehen beim typischen *A. Buchi* plötzlich, beim *A. Buchi* var. *macrophthalmia* jedoch allmählich in die Wange über.

Vorkommen: Das ganze  $d_1\gamma a$ .

### 3. *Aeglina prisca* Barr.

Bekannter Trilobit, dessen Hypostom aber erst unlängst vom Autor bei Vokovice (Šárka) gefunden wurde. Das Hypostom ist winzig, kurz und breit.

Sein aufgetriebenes Mittelfeld ist in der Mitte etwas vertieft und an den Seitenenden gerundet. Das zwei *cm* langes Individuum hat 3.5 *mm* breites Hypostom.

Vorkommen: Das ganze  $d_1\gamma a$ .

### 4. *Aeglina prisca* var. *synophthalma* Klou.

Seltene Varietät mit vorn verengter Glabella. Große Augen sind unter der Stirn ganz nahe beieinander und nur durch schmalen Streifen getrennt, im Gegensatz zur typischen *A. prisca* Barr., die außerdem auch größer ist.

Vorkommen: Šárka.

### 6. *Aeglina princeps* mut. *praecedens* Kloü.

Hat auf der Glabella 6 schwach eingedrückte Furchen, dort wo die typische *A. princeps* Barr. ( $d_1\gamma b$ ) 6 von der Achse nach dem Glabellarand rückwärts gebogene, oft undeutliche Linien zeigt. Augen kürzer als bei typischer *A. princeps*, Hypostom jedoch fast identisch.

Vorkommen: Šárka, 1 Ex.

### 7. *Aeglina Kossleri* Holub (in lit.) n. sp.

Ähneln in Form und Größe der bekannten *A. rediviva* Barr. ( $d_1\gamma b$ ). Zwei im Bogen eingedrückte Seitenfurchen auf der Glabella entsprechen den hintersten 2 Linien bei *A. princeps* Barr. Pygidium nur mit einer Segmentfurchen beiderseits nahe unter der Halbrippe. Pygidiumspindel, etwas länger als bei *A. rediviva*, verengt sich rückwärts und endet nicht so rundlich und stumpf wie bei *A. rediviva*.

Vorkommen: Das ganze  $d_1\gamma b$ .

### 8. *Aeglina Bergeroni* Novák (in lit.) n. sp.

Glabella länglich, vorn stark zugespitzt, mit 3 Linien beiderseits etwa wie *A. princeps* Barr., welche bei größeren Individuen als schwach vertiefte Furchen erscheinen. Augen groß, jedoch schmaler als bei *A. prisca* Barr., reichen, wie bei dieser Art, vorn unter die Glabella. Hypostom

winzig wie bei *A. prisca*. Sein aufgetriebenes Mittelfeld ist jedoch an den Seitenenden zugespitzt und ohne Vertiefung in der Mitte. Die Thoraxspindel, mäßig gewölbt und breit, verengt sich stark rückwärts. Pygidium kurz und breit, etwa Übergang zwischen Pygidium von *A. prisca* und *A. speciosa* Corda.

Vorkommen: Nördlicher Streifen des  $d_1\gamma a$ .

### 18. *Bohemilla stupenda* mut. *praecedens* Klou.

Äußerst seltener Vorgänger der typischen und ebenso seltener *B. stupenda* Barr. ( $d_1\gamma b$ ), von der er wahrscheinlich (man kennt von ihm bis jetzt nur Glabella und 2 Pleuren) nur durch seine vorn breitere Glabella abweicht. Diese Abweichung war schon O. Novák bekannt, der die im Barrandeum befindliche Glabella mit *B. cf. stupenda* Barr. bezeichnete.

Vorkommen: Šárka.

### 22. *Dalmanites atavus* Barr.

Bekannte und häufige Art, die von allen Trilobiten in  $d_1\gamma$  (Illaeniden ausgenommen) die zahlreichsten Varietäten aufweist, die O. Novák im vorerwähnten Manuskript nach Größe der Augen unterscheidet.

Vorkommen: Das ganze  $d_1\gamma a$ .

### *Dalmanites Barroisi* Novák (in lit.) n. sp.

Glabella vorn breit und hinten verengt, etwa wie bei *Phacops Volborthi* Barr., mit den kleinsten Augen unter den Dalmaniten (15—20 Linsen), welche ganz ohne vorstehende Ränder und ganz flach sind. Wangen glatt. Pygidium sehr breit und ziemlich kurz, mit scharf eingeschnittenen Segmenten. Länge des Individuums bis 10 cm. Seine Varietät in Úvaly und Osek hat eine schmale Glabella.

Vorkommen: Šárka.

### 27. *Dicelocephalina* (*Dicelocephalus*) *bohemica*, Novák (in lit.).

Glabella und Mittelteil des Pygidiums ähnelt stark der *D. dicreura* Ang. (J. C. Moberg, Geol. förh. bd. 2 2, h. 7). Das Pygidium hat 4 flache Stacheln, also nicht bloß 2, wie die außerböhmisches Species der Untergattung *Dicelocephalina* Brøgger.

Vorkommen: Šárka.

### 28. *Dionide prima* Klou. n. sp.

Vorgänger der typischen *D. formosa* Barr. ( $d_1\gamma b$  und höher), von der er durch die Glabella verschieden ist, die gegen den Hinterrand zu

nicht so ausgesprochen in 3 Loben geteilt ist, sondern ähulich wie *Trinuclens Reussi* Barr. hinten beiderseits 1 Höckerchen besitzt.

Vorkommen: Das ganze  $d_1\gamma. a$

### 31. *Holomctopus* (*Illaeus*) *bohemicus* Barr.

Sehr seltene Art mit 9 flachen Pleuren. Glabella flach, rundlich, mit erhöhtem Saum ringsum. Mittelglabella hinten fast gleich breit wie die festen Wangen. Wangenstacheln breit, nach hinten divergierend. Augen klein und stark rückwärts gelegen. Thoraxspindel ziemlich schmal und mäßig gewölbt. Pygidium breit und gerundet, seine Spindel schmal, un- deutlich segmentiert. (Vergl. C. W i m a n in Palaeontolog. Notizen 7—12, 1906.)

Vorkommen: Šárka und Osek.

### 37. *Barrandia bohemica* Nov. (in lit.)

Wangenstachelloser Vorgänger von *B. crassa* Barr. ( $d_1\gamma b$ ). Bis un- längst nur im nördlichen  $d_1\gamma a$  bekannt, wurde von mir und meinem Sobne bei Cekov und Sirá (zwischen Zbiroh und Mýto) gefunden.

### 42. *Bumastus avuus?* Holub.

K. H o l u b hat in seiner bereits zitierten Arbeit ein Pygidium des *B. avuus* abgebildet, das unserem Šárkaer Pygidium recht nahe steht, obzwar dieses etwas länger ist und seine Spindel merklicher ange- deutet erscheint. Die Glabella hat H o l u b nicht abgebildet. Diese ist bei unserem Exemplar breit, mäßig gewölbt und nur ganz schwach — in Übereinstimmung mit dem Pygidium — vom Wangenfeld getrennt, demnach im schroffen Gegensatz zu *B. pragensis* Klou. Augen wahrscheinlich (das Exemplar ist teils beschädigt) kleiner als bei *Bumastus pragensis*.

Vorkommen: Šárka.

### 43. *Bumastus pragensis* Klou. n. sp.

Glabella breit, mäßig hoch wie bei *B. avuus?* Holub, jedoch durch 2 lange zur Achse eingebogene Furchen sehr deutlich geteilt. Augen groß, etwa bei *Illaeus advena* Barr.

Thoraxspindel noch breiter als bei *B. avuus?* Holub,  $\frac{3}{5}$  der Thorax- breite einnehmend.

Vorkommen: Šárka.

### 44. *Illaeus* cf. *advena* Barr.

Übergangsform von Illaeiden des Typus *Ill. advena* Barr. zum Bu- mastus. Glabella flächer und Augen etwas kleiner als bei *Ill. advena*; die

Abgrenzung der Glabella von den festen Wangen ähnlich wie bei *Bumastus pragensis* Klou.

Thoraxspindel, kaum breiter als bei *Ill. advena*, verbreitet sich etwas gegen das Pygidium, welches keine bemerkbare Spindel zeigt.

Vorkommen: Šárka, 1 Ex.

#### 45. *Lichas avus* Barr.

Bekannte seltene Spezies aus *Barrandes* Syst. silur, wo ihr jedoch ein Pygidium von *Lichas incola* Barr. zugeteilt wurde. K. Holub hat das richtige Pygidium abgebildet, jedoch mit unvollständigem großem Stachel. Dieser ist ebenso lang wie Cephalothorax und ist im mäßigen Bogen aufgewölbt, etwa wie bei *Dalmanites socialis* Barr. Das Pygidium des Oseker *L. avus* hat 6, des Šárkaer 8 Seitendornen.

Vorkommen: Das ganze  $d_{17a}$ .

#### 47. *Lichas giganteus* Holub (in lit.).

Steht zwischen *L. avus* Barr. und *L. incola* Barr. Ist mindestens so groß wie *L. avus*. Die Oberfläche hat Wärzchen wie *L. incola*, unter denen größere Wärzchen schütter auftreten. Die Glabella ähnelt mehr *L. avus* und ist hochgewölbt ebenso wie das Hypostom, welches *L. incola* näher steht. Pygidium ohne großen Mitteldorn, wie bei *L. incola*.

Vorkommen: Rokycany—Osek.

#### 48. *Agnostus Tullbergi* Nov.

Die Negativabdrücke des Pygidiums zeigen die Skulptur oft sehr undeutlich und veranlaßten wohl O. Novák zur Gründung der Spezies *Agnostus accedens* Nov. Durch Vergleich von zahlreichem später gesammeltem Material stellte der Autor die Identität des *A. Tullbergi* mit *A. accedens* fest, so daß man höchstens die Bezeichnung *A. Tullbergi* var. *accedens* Nov. für gewisse Form, die in  $d_{17b}$  vorkommt, zulassen kann.

Vorkommen: Šárka besonders.

#### *Agnostus perrugatus* var. *caducus* Barr.

Ähnlicher Fall wie bei *A. Tullbergi* Nov.

*Agnostus perrugatus* Barr. ist öfters glatt, ungerunzelt. Diese Glätte tritt zwischen dem skulptierten Stirnlappen (auch der Pygidiumspindel) und dem Außensaum auf, wo sonst die bekannte Runzelung vorkommt. Diese Runzelung erscheint noch deutlicher bei dem in  $d_{17b}$  auftretenden *A. perrugatus* Barr., der außerdem dort merklich größer ist.<sup>10)</sup>

Vorkommen: Šárka besonders.

<sup>10)</sup> Agnosten, die in  $d_{17a}$  häufiger vorkommen als in  $d_{17b}$ , erscheinen in den Konkretionen oft allein resp. ohne Beimengung von anderen Gattungen, jedoch nicht



### Trilobiten in $d_{17b}$ .

#### 3. *Aeglina speciosa* var. *brachycephala* Klou.

Glabella breit wie lang, vorn stumpf abgerundet; auf dem Hinterteil 2 flache Quergrübchen wie bei der typischen *A. speciosa* Corda. Pygidiumspindel gut hervortretend, mit wenig deutlicher Segmentierung. Diese Varietät ist kleiner als *A. speciosa* Corda.

Vorkommen: Šárka (Vokovice) u. M. Přilepy.

#### 4. *Aeglina speciosa* var. *synophthalma* Klou.

Glabella wie bei voriger Form, vorn jedoch mäßig zugespitzt. Augen vorn ganz nahe beisammen, nur durch schmalen Streifen getrennt — wie bei *A. prisca* var. *synophthalma* Klou. Pygidium mit undeutlicher Spindel.

Vorkommen: Wie vorher.

#### 5. *Aeglina princeps* Barr.

Bekannte für  $d_{17b}$  charakteristische Art, deren Hypostom erst unlängst vom Autor gefunden wurde. Dasselbe ist 3mal so groß als bei *A. prisca* Barr. Sein Mittelfeld hat zugespitzte Seitenenden und ist in der Mitte mäßig vertieft.

Vorkommen: Das ganze  $d_{17b}$ .

#### 6. *Aeglina prisca* var. *longicephala* Klou.

Glabella schmaler resp. länger als bei der typischen *A. prisca* Barr., mit undeutlichen Grübchen und Verzierungen neben dem Mittelwärtchen. Augen noch größer als bei *A. prisca* Barr.

Vorkommen: Das ganze  $d_{17b}$ .

#### 9. *Aeglina monophthalma* Klou. n. sp.

Das Cranium erinnert eher an Bohemilla als an Aeglina. Hat 3 Paar Seitenfurchen, von denen 2 hintere in der Achse zusammenfließen. Hat nur ein großes Auge, das etwa in der Hälfte der Glabella beiderseits anfängt, vorn die größte Breite erreicht und etwas schräg aufwärts gerichtet ist. Ein extremes Beispiel vom Zusammenschließen der Augen.

Verwandt mit *A. monophthalma* ist wohl *Trilobites infaustus* Barr. (Syst. silur. Vol. I., pl. 34) aus Trubín,  $D_3$ .

Vorkommen: Šárka.

„in der Regel“, wie O. Jaekel meint (in „Über die Agnostiden“, Zeitschr. d. Deutschen geol. Ges. Bd. 61, S. 386, 1909). Öfters sind mit den Agnosten (besonders in Šárka) kleine Individuen von *Placoparia Zippei* Boeck, *Calymene Arago* Rou., oder *Orthis moesta* Barr. beisammen.

10. *Ampyx* n. sp.

Erstes Auftreten dieser Gattung in der Bande  $D_1$ , über welche ich jedoch, ebenso wie über 13. *Cheirurus* n. sp.? und 29. *Holometopus?* n. sp. nicht näher referieren kann, da sie mir d. z. nicht zugänglich sind.

*Ampyx* n. sp. und *Holometopus?* n. sp. stammt aus Šárka, *Cheirurus* n. sp.? aus M. Přílepy.

15. *Placoparia Zippei* var. *tumida* Klou.

Eine Übergangsform zu *Pl. grandis* Corda aus  $D_2$ . Der Vorderrand der Glabella ist nach unten gezähnt, wie bei *Pl. grandis*. Die festen Wangen rundlicher und aufgetriebener als bei *Pl. Zippei* Boeck. Pleuralleisten des Pygidiums neigen sich plötzlich nach rückwärts als bei der typischen *Pl. Zippei* Boeck.

Vorkommen: Das ganze  $d_1 \gamma b$ .

18. *Platyptelis* (?) *longicauda* Klou. n. sp.

Pygidium im Gegensatz zu *Platyptelis puer* sp. Barr. schmal und länglich, rückwärts zugespitzt und an der Innenseite von der Achse schräg nach hinten zugeschnitten. Pygidiumspindel hochgewölbt, unter der Halbrippe nicht mehr segmentiert, reicht in die Hälfte der Pygidiumlänge. Pleuren stark rückwärts gebogen.

Vorkommen: M. Přílepy.

20. *Bohemilla stupenda* Barr.

In *Barrandes* Syst. silur. ist sie nach verdrücktem Schieferexemplar gezeichnet, darum stellenweise (Glabella und feste Wange) nicht ganz richtig, wie meine aus den Konkretionen stammenden Exemplare beweisen. Glabella länglich, stark gewölbt und vorn ziemlich breitgerundet. Augen groß, knapp an dem Glabellarand placiert. Der Hinterrand der festen Wange verläuft im Winkel von etwa  $60^\circ$  nach vorn. Hypostom, unlängst von mir entdeckt, besitzt ein aufgetriebenes, rundlich fünfseitiges, nach hinten mäßig zugespitztes und von dem flachen verbogenen Saum ringsum durch Furche getrenntes Mittelfeld. Der hintere flache Saum läuft in 2 schräg rückwärts divergierende, stark nach unten gebogene Lappen aus. An ihrem äußeren oberen Rand sitzt je 1 hohes Wärzchen.

Vorkommen: Wohl im ganzen  $d_1 \gamma b$ .

24. *Trinucleus Bucklandi* mut. *praecedens* Klou.

Der schmale hufeisenförmige Außensaum der Glabella hat im Negativabdruck der unteren Fläche 2 Reihen von hohen Warzen dicht nebeneinander.

Pygidium, dessen Unterseite dreieckig ist, kürzer als bei *Tr. Bucklandi* Barr. und ist samt der Spindel nach abwärts umgebogen. Die Bugkante verläuft im Bogen.

Vorkommen: Nördliches  $d_1 \gamma b$ .

27. *Dalmanites oriens* var. *mytoensis* Klou.

Glabella, in scharfeingeschnittene Seitenlappen geteilt, ist ebenfalls durch scharfe Furchen von den mit Grübchen versehenen festen Wangen getrennt und bildet mit denselben eine gewölbte Fläche. Augen groß mit niedrigem Rand ringsum.

Vorkommen: Mýto.

28. *Dalmanites atavus* var. *Nováki* Klou.

Die Augen mit ganz unbedeutenden Rändern oder überhaupt ohne Ränder, wie etwa *Dalmanites Barroisi* Nov., jedoch größer als bei dieser Form und sind an den Längsenden gerundet. Pygidium gewölbt wie bei *D. Barroisi*, aber länglicher.

Vorkommen: Das ganze  $d_1 \gamma b$ .

33. *Illiaenus Pernerii?* var. *glabra* Klou.

Seltene Varietät, die *Ill. Pernerii* Klou. nahesteht, jedoch nicht dessen 6 warzenartige Erhöhungen der Glabellaachse entlang besitzt.

Vorkommen: Šárka.

35. *Šárkia bohemica* Klou. n. g. n. sp.

Neue Gattung, die am nächsten Harpes verwandt ist. Glabella mit hufeisenförmigem Saum, der schmaler ist als bei Harpes und reicht etwa bis zur 7. Pleura. Stirnlappen hinten und vorn gleich breit, vorn verflacht und stumpf gerundet; hat seitlich je 4 Einschnitte, welche gewölbte Loben bilden — annähernd wie bei Calymene. Oberfläche fein gekörnt. Augenleisten verlaufen vom vorderen Drittel der Glabella schräg nach rückwärts. Augen undeutlich.

10 flach gerundete Pleuren, deren Enden stark nach unten umgebogen sind. Pygidium sehr kurz und breit, bogenförmig, mit deutlich segmentierter Spindel. Seitwärts von der Spindel je 3 Segmentfurchen im Pygidium, dessen Außensaum im Einklang mit den Pleuren, stark nach unten umgebogen ist.

Vorkommen: Šárka (Vokovice).

Zum Schluß die Angabe der häufigsten Leitfossilien (Trilobiten) in beiden Zonen der  $d_1\gamma$ —Schichten.

Zone  $d_1\gamma a$ :

*Placoparia Zippei* Boeck.  
*Calymene Arago* Rou.  
*Illacenus Katzeri* Barr. (Süd-West).  
*Illacenus Šárkaensis* Nov. (Šárka).  
*Aeglina prisca* Barr. (Šárka).  
*Trinucleus Reussi* Barr. (Süd-West).  
*Barrandia bohémica* Nov. (Šárka).  
*Asaphellus (Ogygia) desideratus* Barr.

Zone  $d_1\gamma b$ :

*Placoparia Zippei* var. *tumida* Klou.  
*Aeglina prisca* var. *longicephala* Klou.  
*Aeglina princeps* Barr.  
*Aeglina rediviva* Barr. (Süd-West).  
*Illacenus benignensis* Nov.  
*Barrandia crassa* Barr.

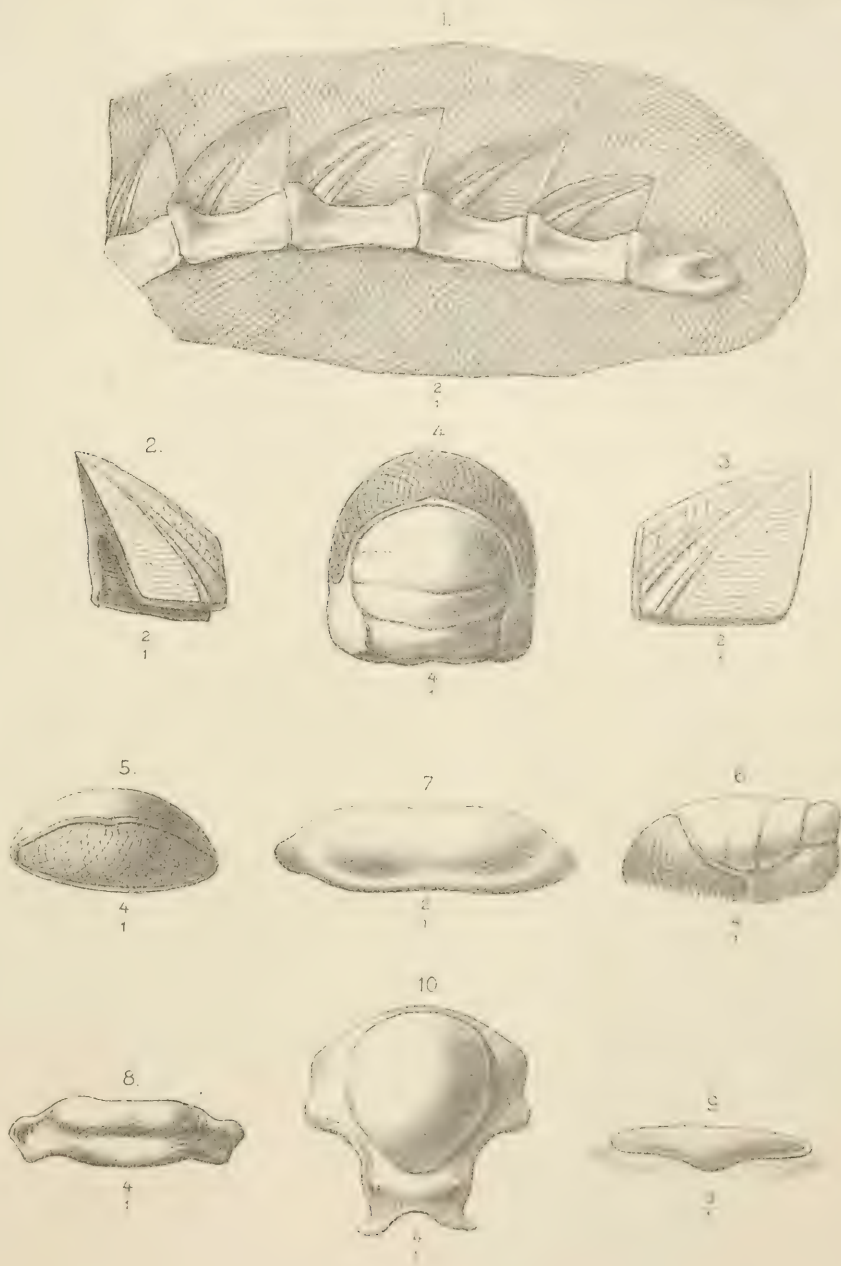
Prag, im Mai 1916.

### TAFELERKLÄRUNG.

1. *Helminthochiton aequivoca* Robson n. sp. 1914 (Chiton? sp. Klouček 1910).  
 Negativabdrücke einzelner Glieder mit ihren sattelartigen Hohlräumen.  $2/1$ .
2. Item. Ein vollständiges Glied von der Seite.  $2/1$ .
3. Item. Außenseite der Gliedes.  $2/1$ .
4. *Aeglina monophthalma* Klou. n. sp. Glabella von oben.  $4/1$ .
5. Item. Vorderansicht.  $4/1$ .
6. Item. Seitenansicht.  $4/1$ .
7. *Aeglina princeps* Barr. Hypostom.  $2/1$ .
8. *Aeglina prisca* Barr. Hypostom.  $4/1$ .
9. *Aeglina Bergeroni* Novák. Hypostom, unvollständig.  $3/1$ .
10. *Bohemilla stupenda* Barr. Hypostom.  $4/1$ .



C. KLOUČEK ÜBER die -SCHICHTEN UND IHRE TRILOBITEN.



Autor delin.



# Die Mundteile der Tanypinen-Larven.

Dr. JAN ZAVŘEL.

Vorgelegt am 12 Mai 1916.

Bei den Vorarbeiten zu einer monographischen Bearbeitung der Chironomiden\*)-Metamorphose habe ich erkannt, daß die Mundteile der Chironomidenlarven nicht nur für die systematische Gruppierung dieser Larven wichtige Anhaltspunkte bieten, sondern daß sie sich auch vom Standpunkte der allgemeinen Morphologie als nicht zu vernachlässigbare Untersuchungs- und Demonstrationsobjekte erweisen. Darum habe ich die Mundteile der Chironomidenlarven einer gründlichen Untersuchung unterzogen. Ehe ich dazu kam, meine diesbezüglichen Resultate zu veröffentlichen, sind die Arbeiten von Bause und Goetghebuer erschienen, worin die Mundteile der Tanytarsus- und Chironomuslarven mit einer großen Sorgfalt und Genauigkeit behandelt werden. Die Mundteile der Orthoclaadien- und Ceratopogoninenlarven werden neu in den Arbeiten von Potthast (1914) und Rieth (1915) geschildert, aber diese Arbeiten bedürfen in mancher Hinsicht noch Nachuntersuchung und Ergänzung. Die Mundteile der Tanypinen sind von denen anderer Chironomidenlarven so abweichend gebaut, daß in der Deutung mancher ihrer Bestandteile in der bisherigen Literatur eine völlige Unklarheit herrscht. Darum habe ich mich entschlossen, Resultate meiner diesbezüglichen Untersuchungen sogleich zu veröffentlichen, noch bevor ich Gelegenheit haben werde, meine Monographie über Tanypinenmetamorphose der Öffentlichkeit zu übergeben. Ich bemerke hier noch, daß die hier ver-

---

\*) Ich benütze in dieser Arbeit eine andere Nomenklatur als in der böhmischen Originalabhandlung. Es herrscht eine Unsicherheit in der Nomenklatur der Chironomiden, da bei den fortschreitenden Kenntnissen auch neue Namen gebildet wurden. Diese neuen Namen habe ich auch in meine Originalabhandlung übernommen, habe aber auch immer die älteren Synonyma beigelegt. Unterdessen hat mir Dr. A. Thienemann mitgeteilt, er habe jetzt gerade eine Arbeit in Druck gegeben, wo er die Synonymie der Chironomiden klar legt. Darnach wende ich jetzt die Namen Tanypinae (statt Pelopiinae), Chironomus und Chironomidae (statt Tendipes und Tendipedidae) an.

öffentlichten Tatsachen und Ansichten schon längst fertig waren, bevor ich die Gelegenheit gefunden hatte, die Richtigkeit meiner Befunde an dem reichen Metamorphosen-Material zu prüfen, welches mir Herr Dr. Aug. Thienemann aus Münster i/W. gütigst zur Verfügung stellte. Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich ihm dafür an dieser Stelle meinen innigsten Dank ausspreche.

Ein ausführlicher Bericht über den Bau, die Entwicklung und Funktion der Mundteile der Tanypinenlarven wurde am 24. März 1916 in der Sitzung der II. Klasse der Böhmisches Akademie der Wissenschaften vorgelegt und erscheint in deren Sitzungsberichten. Die vorliegende Arbeit enthält einen kurzen Auszug der wichtigsten Tatsachen und Ergebnisse.

Die Mundteile der Tanypinenlarven sind:

1. Das *Labrum*, an dessen Unterseite nur winzige Spuren der bei Chironomus-, Tanytarsus- und Orthocladiuslarven vorhandenen, reichen *Epipharynxarmatur* zu finden sind.

2. Die „Prämandibularbläschen“.

3. Die sichelförmigen *Mandibeln*, welche sich in der Horizontalebene gegeneinander bewegen, während sich die Mandibeln anderer Chironomidenlarven in einer schiefen Ebene, an den Zähnen des Labiums vorbei, bewegen.

4. Die *Maxillen* mit je einem verhältnismäßig langen Palpus maxillaris.

5. Ein weichhäutiges *Labium*, welches basal mit Chitinkämmen oder Chitinleisten versehen ist.

6. Der *Hypopharynx* mit einem überaus komplizierten Chitingerüst.

Das *Labrum* erscheint als eine weichhäutige, mit Chitinleisten verstärkte, ventralwärts unklappbare Platte von etwa trapezoidischem Umriß, welche sich mit ihrer breiteren Basis an den vorderen Rand des Clypeus anknüpft. Nach der Form und Verteilung der Sinnesborsten, die am vorderen Rande des Labrums stehen, kann man zwei Typen der Tanypinen-Larven unterscheiden.

Typus I. („Micropelopia“-Typus):

Der mäßig konkave Vorderrand trägt jederseits: ein 2-gliedriges Stäbchen (*a*), zwei steife, auf zylindrischen Sockeln stehende Borsten (*b*), eine blasse Schlauchborste mit einer terminalen, gebogenen Spitze (*c*) und medianwärts davon ein tiefes Chitingrübchen (Borstenmal) mit einer steifen Borste (*d*); der ganze Vorderrand ist mit dichten, blassen, keilförmigen Borsten besetzt. (Fig. 1, 2 A.) Die Schlauchborste *c* scheint bei einigen Arten zu fehlen.

Typus II. („Tanypus“-Typus):

Der Vorderrand des Labrums ist durch eine ziemlich tiefe Einkerbung, welche von einer V-förmigen Chitinspange umsäumt wird, in zwei Hälften geteilt. Jede Hälfte trägt: ein zweigliedriges Stäbchen (*a*),



eine blasse Schlauchborste mit einer endständigen, gebogenen Spitze (b), eine blasse, keilförmige Borste, an deren Basis eine blasse Schuppe steht (c), drei birn- oder ovalförmige Bläschen, welche distal je ein kurzes Chitindröhrchen mit einer steifen Borste tragen (d). Durch die Schlauchborste (b) sowie durch die Bläschen (d) zieht sich ein deutlicher Nerv zu der Spitze, respektive zu den Borsten. (Fig. 3 A, B.)

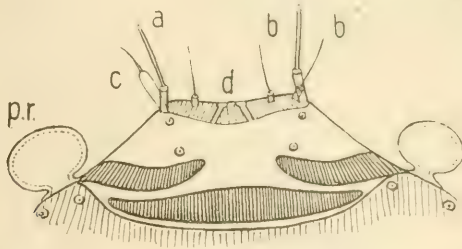


Fig. 1. Labrum von *Pelopia fulva* Kief.

**Epipharynx.** Johannsen (1905) und Kraatz (1911) behaupten, daß die Ventralfläche des Labrums fein behaart sei („delicately haired“). Vom Epipharynx sagt Johannsen ausdrücklich: "I have discovered no part, which is comparable to the epipharynx in *Chironomus*". Die feine Behaarung der ventralen Labralfläche konnte ich nirgends entdecken;

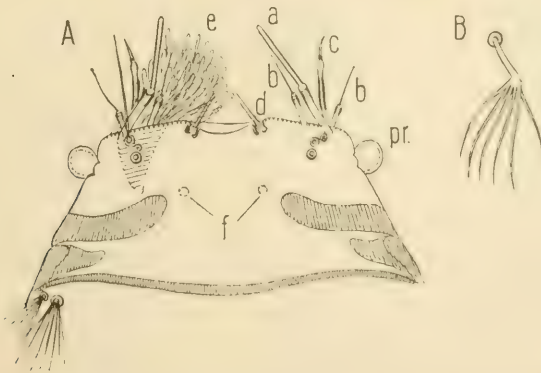


Fig. 2. A. Labrum von *Pelopia fasciigera* Kief (Costalis-Gruppe).  
2. B. Büschelborste von der Ventralfläche des Labrums.

ich glaube, daß damit die blassen, keilförmigen Borsten am Vorderrande des Labrums (I. Typus) gemeint sind. Dagegen habe ich bisher fast bei allen Larven an der Ventralfläche des Labrums ein Paar ziemlich großer, blasser Büschelborsten entdeckt, oder wenigstens zwei große Borstenmale an ihrer Stelle. Diese Borsten halte ich für den letzten Rest der Epipharynxarmatur (Fig. 2 B).

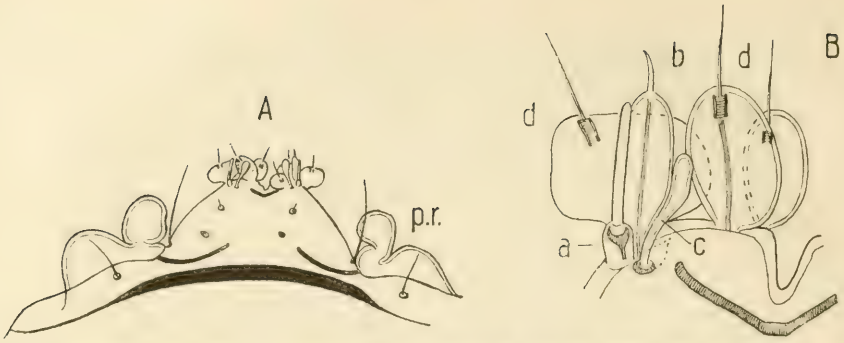


Fig. 3. Labrum von *Psectrotanypus brevicar* Kief; *A* bei Obj. 4, Oc. 4; *B* bei Obj. 8, Oc. 4.

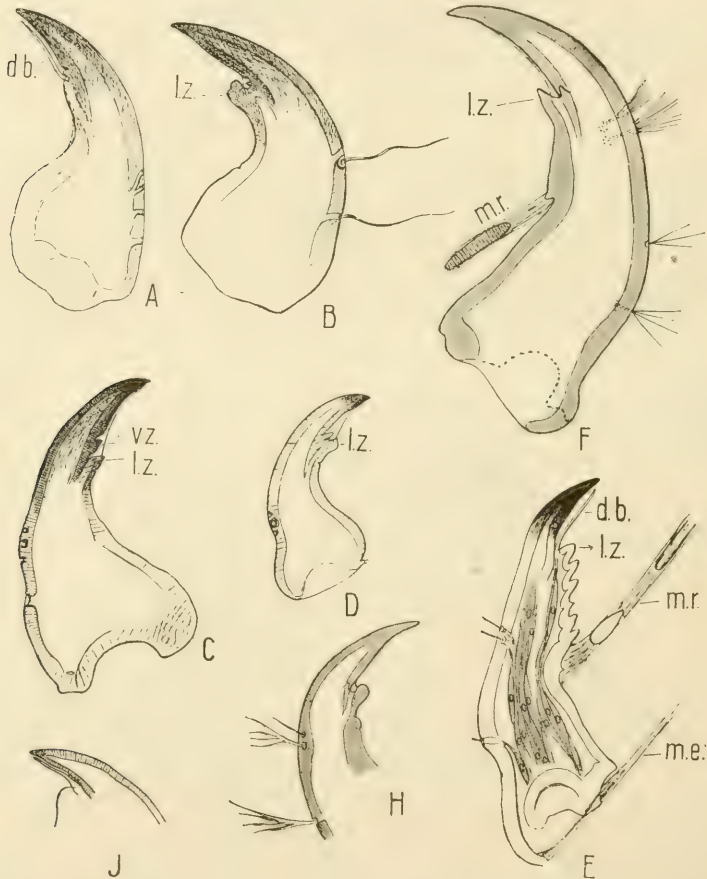


Fig. 4. Mandibeln verschiedener Tanypinidenlarven; *lz* Lateralzahn, *vz* Nebenzahn, *db* Zahnborste, *me* Musculus extensor, *mr* Musculus retractor mandibulae; Obj. 8, Oc. 2. *A*. *Pelopia fasciigera* Kief; *B*. *Pel. fulva* Kief, *C*. *Pel. discolor* Kief. (*Nigropunctata*-Gruppe); *D*. *Pel. minima* Kief; *E*. *Psectrotanypus brevicar* Kief. (Längsschnitt); *F*. *Macropelopia* (*bimaculata*-Gruppe); *H*. *Trichetanypus* sp. (*Culiciformis*-Gruppe). *I*. *Protenthes (Tanypus) bifurcatus* Kief.

*Prämandibeln.* Mit diesem Namen bezeichnet bekannterweise Goetghebuer (1912) zwei starke, bewegliche, am freien Ende gezähnte Chitingebilde, welche lateral aus der Ventralfläche des Labrums auswachsen ("lateral arms" bei Johannsen, „Greifer“ bei Potthast und Grippekoven). Solche Organe sind bisher bei Chironomus-, Tanytarsus- und Orthocladius-Larven festgestellt worden. Ich betone noch, daß ihr Basalteil auf der Innenseite eine blasse, aufgeblasene Membran trägt, die mit einem Polster feiner Haare versehen ist. Solche mandibelähnliche, chitinige und gezähnte Prämandibeln sind bei keiner Tanypinen-Larve vorhanden. Dafür erwachsen lateral aus der Ventralfläche des Labrums (also an derselben Stelle) bei allen Tanypinen-Larven zwei birn- oder kugelförmige (Typus I.), oder sogar kompliziert gefaltete Bläschen (Typus II.), die als Homologen der oben erwähnten Prämandibeln, respektive nur ihres weichen Basalteiles aufzufassen sind. Ich werde sie „Prämandibularbläschen“ nennen. (Fig. 1., 2. A, 3. A.)

An der sichelförmigen *Mandibel* erkennt man: einen großen, dunklen, an der Spitze fast schwarz gefärbten „Endzahn“, einen „Lateralzahn“ und zwischen beiden noch einen „Nebenzahn“. Im Lateralzahne findet man immer ein helleres Chitinröhrchen, aus welchem eine lange, blasse, nach vorn gerichtete „Zahnborste“ hervorwächst. Diese, für alle larvalen Chironomidenmandibeln typische Zahnborste kann man hier aber nur in günstigen Fällen erkennen; sie drückt sich nämlich ihrer ganzen Länge nach an den inneren, konkaven Rand des dunklen Endzahnes und wird teilweise oder ganz von ihm verdeckt. Sie erscheint dann nur als ein heller Saum des Endzahnes, oder nur als eine Membran, welche die Spitze des Lateralzahnes mit der Basis des Endzahnes verbindet. Der Nebenzahn steht entweder in dem Winkel zwischen dem Lateral- und Endzahne — also vor dem Lateralzahne (Typus I., Fig. 4 A, B, C, D), oder an der Dorsalfläche der Mandibel, neben dem Lateralzahne (Typus III., Fig. 4, F, H).

Von diesem allgemeinen Typus weichen beträchtlich die Mandibeln von *Psectrotanypus brevicar* und *Tanypus bifurcatus* ab. Die Mandibel von *Psectrotanypus brevicar* trägt unter dem Lateralzahne noch eine Reihe (etwa 5) blasser Zähne, sie ist also sägeförmig (Fig. 4 E). Bei *Tanypus bifurcatus* (Fig. 4 J) ist der Basalteil der Mandibel sehr breit, der Endzahn besitzt an der konkaven, inneren Kante proximal 3—4 stumpfe Einkerbungen; dadurch nähert sich die Mandibel dieser Larve am meisten dem allgemeinen Bautypus der Chironomidenmandibeln. Darnach entspricht der Endzahn einer Tanypinenmandibel der ganzen, dunkel gefärbten Zahnpartie einer Chironomus- oder Tanytarsusmandibel; der Nebenzahn entspricht dann wahrscheinlich dem dorsalen, blassen Zahn einer Chironomusmandibel (= „une dent mousse, en forme de mamelon“ nach Goetghebuer). Der Lateralzahn entspricht demjenigen Höcker des Basalteiles, aus dem die Zahnborste hervorwächst, nur ist er bei



Tanypinen-Larven stärker chitiniert als bei anderen Chironomidenlarven (bei *Tanypus bifurcatus* fehlt noch diese stärkere Chitinisierung!).

Im Innern der Mandibel erblickt man einen Nervenstrang, der aus bipolaren, spindelförmigen Nervenzellen besteht; er entsendet einen Ast



Fig. 5. Maxille und Labium von *Pel. fasciigera* Kief 5 A. Lacinia von *Pel. fulva* mit einer eigentümlichen Sinnesborste.

in den Endzahn hinein und einen anderen zu der blassen Zahnborste. (Fig. 4 E).

Die Maxille trägt einen auffallend langen Palpus maxillaris, welcher in mancher Hinsicht an die Antenne erinnert. Sein stark chitiniertes Basalglied ist mit einem großen „Ringorgan“ versehen. An der blassen Kappe des Basalgliedes steht die 2—3gliedrige Geißel und daneben



mehrere blasse Borsten, Zapfen und Stiftchen. Am größten davon sind die Schlauchborsten mit einer terminalen, gebogenen Spitze, die vollkommen mit ähnlichen Borsten des Labrums übereinstimmen. Es sind meistens zwei solche Schlauchborsten vorhanden, eine längere und eine kürzere. (Fig. 5, 6, 7.) Bei dem „*Micropelopia*“-Typus ist Palpus maxillaris retraktil!

Medianwärts steht neben dem Palpus ein blasser, zweiteiliger, auf der Außenseite stark chitinisierter Lappen — die Lacinia. Die Ränder

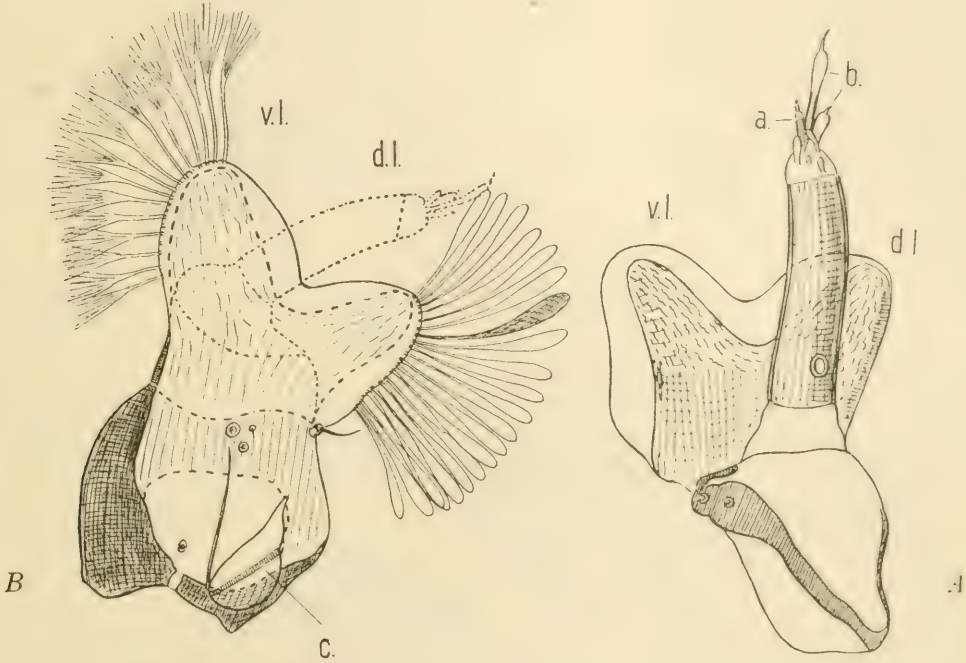


Fig. 6. Maxille von *Macropelopia* (*bimaculata*-Gruppe): *A*, von der Außen-, *B*, von der Innenseite gesehen; *v.l.*, *d.l.* Ventral- und Dorsallappen der Lacinia; *a* die Geißel, *b* Schlauchborsten am Palpus, *c* Schuppenborste.

der Lacinia tragen entweder nur blasse Keilborsten (*Micropelopia*-Typus) (Fig. 5) oder Keil- und Haarborsten (Büschelborsten) (*Tanyptus*-Typus). (Fig. 6 B.)

Der in die Mundöffnung hineinragende Basalteil der Maxille trägt entweder ein ziemlich großes, blasses Bläschen und daneben eine blasse, keilförmige Borste (I. Typus, Fig. 5) oder eine lanzettförmige Blattborste mit einer inneren Chitinleiste und neben ihr eine steife, einfache Borste (II. Typus Fig. 6 B.).

Da bei den meisten Chironomidenlarven das *Labium* in der Form einer am Vorderrande gezähnten Chitinplatte ausgebildet ist, so ist es begreiflich, daß man bisher fast allgemein die zwei gezähnten „Para-

labialkämme“ für das eigentliche Labium der Tanypinenlarven hielt. So schreibt z. B. Kraatz (1911, S. 3): „Labium aus 2 in der Mitte durch eine dünne Chitinhaut verbundenen Kämmen bestehend, von denen jeder mit 5—8 Zähnen besetzt ist“. Da aber diese Kämmen nur bei einigen

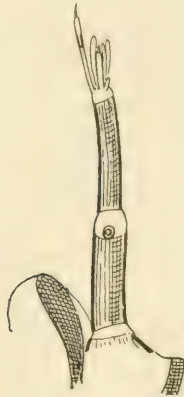


Fig. 7. Maxillarpalpus von *Pel. monilis* L.

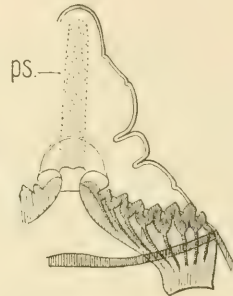


Fig. 8. Labium und Paralabialkamm von *Psectrotanypus brevicar* Kief.

Larven vorhanden sind (Typus II.) und da man sie trotzdem überall sehen wollte, so ist einigen Autoren ein begrifflicher Fehler unterlaufen: sie haben die hypopharyngeale Zahnleiste und die Paralabialkämme miteinander verwechselt (so z. B. Johannsen bei *Procladius adumbratus*, und Rhode bei *Pelopia nigropunctata*).

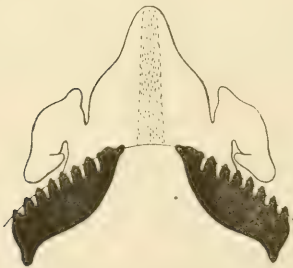


Fig. 9. Labium und Paralabialkämme einer *Macropelopia*-Larve.

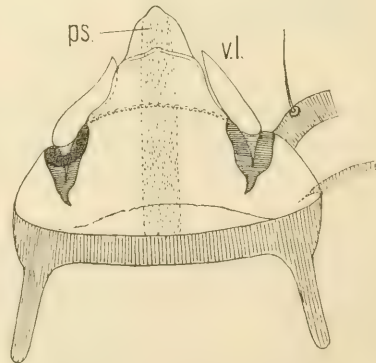


Fig. 10. Labium und Labialbläschen (vl.) von *Pel. fulva* Kief.

Das eigentliche Labium der Tanypinenlarven besteht aus einer weichen, blassen, etwa dreieckigen Platte, welche direkt dem ventralen Kopftintegumente aufsitzt. An der Dorsalfläche dieser Platte zieht sich von der Spitze bis zur Basis ein ziemlich breites Band rauhen Chitins,

das ich mit dem Namen „Pseudoradula“ bezeichnet habe. Die Seitenränder der Labialplatte sind manchmal kompliziert gefaltet oder gekiebt. Wie ich mich durch mühevollen Untersuchungen überzeugen konnte, kommt

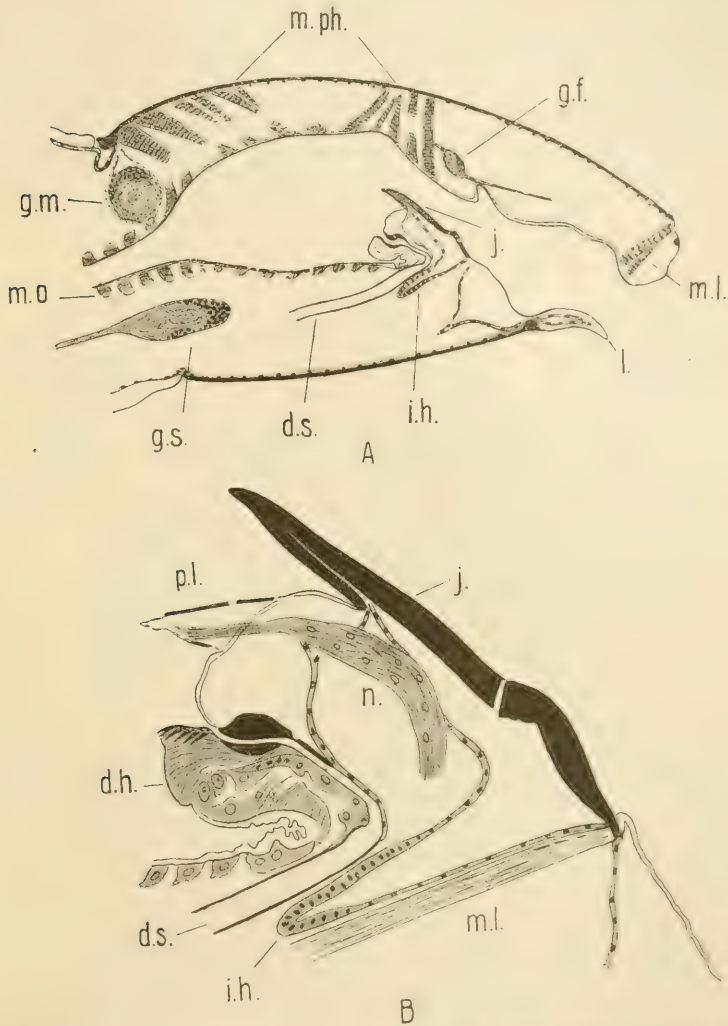


Fig. 11. A. Medianer Sagittalschnitt durch den Kopf von *Psectrotanypus brevicar* Kief; B. ein etwas mehr seitlicher Schnitt durch den Hypopharynx aus derselben Serie; *dh* dorsale Falte des Hypopharynx, *ds* Ausführungsgang der Speicheldrüsen, *gf* Ganglionfrontale, *gm* Gehirn *gs* Subösophagealganglion, *ih* Imaginalscheibe, *j* Glossa, *l* Labium, *m.l.*, *m.ph.*, *m.o* Labial-, Pharyngeal- und Ösophagealmuskulatur, *pl* Palpus hypopharyngealis mit dem zugehörigen Nerven (*n*) A. bei Obj. 4, Oc. 2, B. bei Obj. 8, Oc. 2.

diese Labialplatte bei allen Tanypinenlarven vor, obzwar sie bisher bei den meisten Arten überschen worden ist. Die erste klare Abbildung



dieser Platte findet man bei Meinert (1886, Fig. 94; „Tanypus varius“); er bezeichnet sie falsch als „Spindeworte“ (Spinnwarzel). Eine zweite Abbildung dieser Platte fand ich bei Johannsen (1905, Pl. 19, Fig. 1, *Ab. labesmia flavifrons*). Kraatz (1911) zeichnet die Labialplatte ziemlich genau (zuerst auch die Pseudoradula eingezeichnet!) bei der Larve von *Psectrotanypus brevicar*, doch hält er sie falsch für „ein hypopharyngeales Gebilde“. In den mir gütigst zur Verfügung gestellten Notizen des H. Dr. A. Thienemann fand ich gute Zeichnungen der Labialplatte von *Psectrotanypus longicalcar* und von *Pelopia bimaculata*.

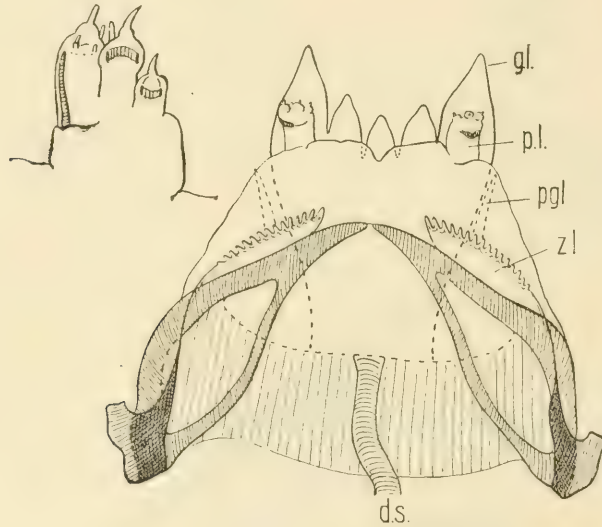


Fig. 12. Hypopharynx einer *Macropelopia*-Larve Obj. 8, Oc. 2 *gl* Glossa, *p gl* Paraglossa, *p l* Palpus hypopharyngealis, *z l* Zahnleiste 12 B. Palpus hypopharyngealis derselben Larve; Obj. 8, Oc. 4.

In den analen Ecken der Labialplatte stehen bei den Larven des II. Typus zwei bogenförmige, am Vorderrande gezähnte Chitinplatten, die in der Mitte durch eine dünne Chitinnaut verbunden sind — es sind die schon erwähnten Paralabialkämme (Fig. 8, 9); bei den Larven des I. Typus stehen an derselben Stelle einfachere, ungezähnte Chitinleisten, von welchen blasse, birn-, oval- oder lanzettförmige Bläschen („Labialbläschen“) hervorstehen. (Fig. 5, 10, 17.) Solche Labialbläschen habe ich bisher bei den Larven des zweiten Typus nirgends gefunden, dafür sind hier aber die analen Ecken der Labialplatte gelappt oder pfeilartig ausgezogen.

*Hypopharynx.* An Sagittalschnitten durch den Kopf einer Larve (Fig. 11) sieht man, daß der Mundboden über dem Labium zwei Querfalten bildet, eine ventrale und eine dorsale; in der Rinne zwischen beiden Falten mündet der Ausführungsgang der Speicheldrüsen. Beide Falten



sind durch ein kompliziertes Chitingerüst („Hypopharyngealgerüst“) unterstützt. Die ventrale Falte trägt ventral: eine starke, längliche Chitinplatte, welche oralwärts gewöhnlich in 5 Zähne ausläuft (Psectrotanypus brevicar besitzt da nur 4 Zähne.) (Fig. 12, 13, 15, 16.) Diese Platte, die von Meinert als „lame pharyngée“, von Johansen als „Labium“, von Kraatz als „Epilabialplatte“ bezeichnet wird, nenne ich „Glossa.“ Neben ihr steht jederseits eine starke Chitinspitze (Larven des I. Typus und Macropelopia), oder eine gezähnte Chitinschuppe (Larven des II. Typus mit Ausnahme der Macropelopia). Diese Chitinspitzen oder Schuppen werde ich „Paraglossae“ nennen. (Fig. 14, 15.) Es ist sehr schwer das übrige Hypopharyngealgerüst zu beschreiben und ich verweise darum

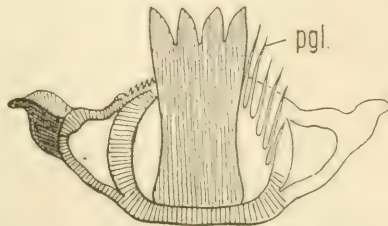
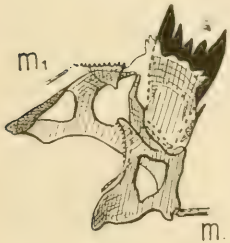


Fig. 14. Paraglossa

Fig. 13. Hypopharynx einer Pelopia-Larve von Macropelopia Fehlmanni; Obj. 4, Oc. 4. Fig. 15. Hypopharynx von Psectrotanypus brevicar Kief.; Obj. 8, Oc. 2.

an die betreffenden Abbildungen (Fig. 12, 13, 15, 16). Es besteht gewöhnlich aus einer Ventralplatte, die seitlich und dorsal in Chitinleisten und Spangen ausläuft. Das Gerüst der dorsalen Falte besteht aus zwei bogenförmigen, gezähnten Chitinleisten (= „Zahnleisten“). (Fig. 11 u. f.) Die ventrale Falte des Hypopharynx trägt oral und lateral ein Paar zylindrischer Palpen mit je drei konischen, gegliederten Endpapillen („Palpi hypopharyngeales“, Fig. 12, A, B).

Der ganze Hypopharynx ist ein äußerst bewegliches Organ, indem er durch 3 Muskelpaare vorgestreckt, zurückgezogen oder auch umgeklappt werden kann, so daß dann der gezähnte Rand der Glossa analwärts liegt. Von diesen Muskeln, die sich an das Hypopharyngealgerüst anknüpfen (Fig. 16), sind diejenigen des ventralen Paares am stärksten und gehören überhaupt zu den stärksten Muskeln des Kopfes. Sie ziehen sich von der ventralen Chitinplatte des Hypopharyngealgerüsts parallel der Mittellinie des Kopfes bis zu seinem verstärkten analen Chitinrande.

Man kann also nach dem feineren Baue der Mundteile zwei scharf umschriebene Typen der Tanyptinenlarven unterscheiden:

I. *Typus* (= „Micropelopia“-Typus; Fig. 1, 2, 4, A, B, C, D, 5, 7, 10, 14, 16). Das am Vorderrande nur mäßig konkave *Labrum* trägt keine

Sinnesbläschen, dafür aber einen dichten Saum von blassen, keilförmigen Borsten.

*Prämandibularbläschen* klein, kugel- oder ovalförmig.

*Mandibeln*: Der Nebenzahn steht vor dem Lateralzahne.

*Maxillen*: Palpus retraktil (!), sehr lang und schlank, bei *Pelopia monilis* mit einem 2-gliedrigen Basalstück. (Fig. 7.) Lacinia am Rande mit blassen Keilborsten besetzt. Im Mundinnern erwächst aus dem

Basalteile der Maxille ein blasses Maxillarbläschen und daneben eine blasse Keilborste.

*Labium*. Ohne Zahnkämme. An ihrer Stelle stehen einfachere Chitinplatten oder Leisten mit je einem blassen Labialbläschen.

*Paraglossae* stilettförmig mit je einer größeren und einer kleineren (inneren) Spitze. Hypopharyngeale Zahnleisten mit schlanken, scharfen Zähnen.

Schon Thienemann faßt in seinem Manuskript die zu diesem Typus gehörenden Larven unter dem Namen „*Micropelopia*“ zusammen.

*II. Typus* („*Tanypus*“-Typus) (Fig. 3, 4 E, F, H, 6, 8; 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19). *Labrum* vorne durch eine tiefe Einkerbung in zwei Hälften geteilt. Jede Hälfte trägt außer anderen Sinnesborsten 3 auffallende Sinnesbläschen mit je einer kurzen Borste.

*Prämandibularbläschen*: ziemlich groß, gelappt.

*Mandibeln*: Der Nebenzahn, wenn überhaupt vorhanden, steht niemals vor, sondern immer neben dem Lateralzahne auf der Dorsalfläche der Mandibel.

*Maxillen*. Palpus kürzer und breiter als beim I. Typus. Lacinia mit haar-(büschel-)förmigen Randborsten, oder es sind neben solchen auch keilförmige Randborsten vorhanden. \*Im Mundinnern steht an der Maxille eine Blattborste mit einer inneren Chitinleiste und eine einfache Nebenborste.

*Labium* immer mit paralabialen Zahnkämmen, aber ohne labiale Bläschen.

*Hypopharynx*: Glossa 5- oder 4-zählig (*Psectrotanypus brevicealcar*); der Mittelzahn gewöhnlich am kleinsten. Paraglossae entweder wie beim ersten Typus stilettförmig (*Macropelopia*), oder öfters breit blattförmig, am Rande gezähnt.

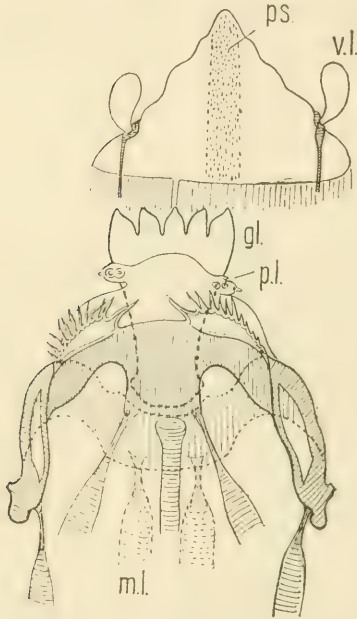


Fig. 16. Labium und Hypopharynx einer *Pelopia*-Larve (*Nigropunctata*-Gruppe); Obj. 7, Oc. 2.

Beim II. Typus kann man also nach der Form der Paraglossae (und auch nach anderen Körpermerkmalen) zwei Untertypen unterscheiden.

A. Larven mit einer stilettförmigen Paraglossa (nach Thienemann „Macropelopia“; *Pelopia bimaculata*, *enhydra*, Fehlmäni).

B. Larven mit einer blattförmigen Paraglossa (*Tanypus*, *Psectrotanypus*, *Trichotanypus*).

Es ist wohl merkwürdig, daß man diese, bloß nach der Morphologie der Mundteile aufgestellten Typen, auch nach anderen, konstanten Körper-

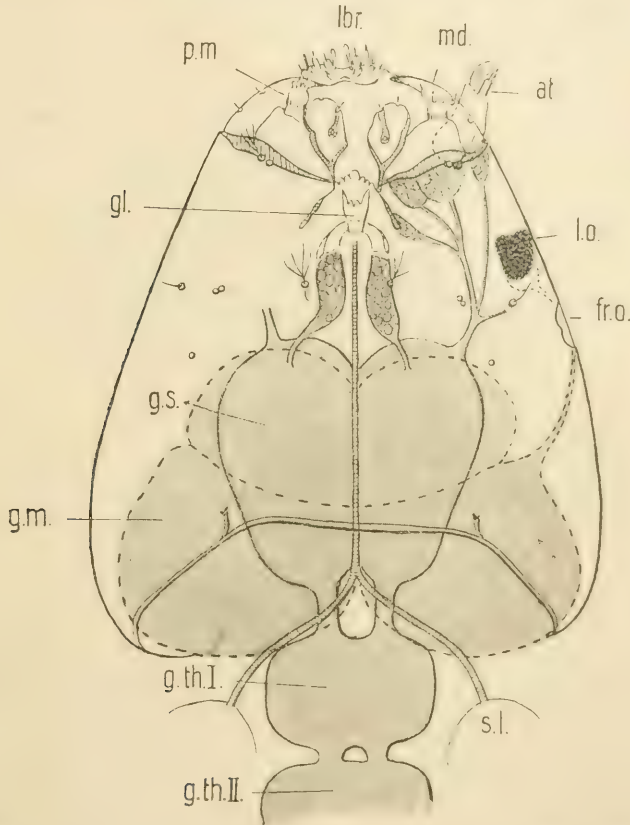


Fig. 17. Kopf einer aus dem Ei ausgeschlüpften Larve von *Psectrotanypus brevicar* (?); Ventralansicht *lbr* Labrum, *md* Mandibel, *pm* Palpus maxillaris, *at* Antenne, *gl* Glossa, *lo* Larvenauge, *fr.o* „Frontalorgan“, *gm* Gehirn, *gs* Subesophagealganglion, *g.th I., II.* Thorakalganglien, *sl* Speicheldrüsen. Obj. 8, Oc. 4.

merkmalen leicht unterscheiden kann, und daß sie ganz gut auch an den Puppen wiederzuerkennen sind. Die Kieffersche Systematik der Imagines zeigt aber eine etwas andere Einteilung. Unsere Kenntnisse der Tanypinen-Metamorphose sind bisher noch sehr lückenhaft; soviel darf man doch schon jetzt sagen, daß nach der Larven- und Puppen-



morphologie die Genera: *Diamesa*, *Prodiamesa* und *Corynoneura* eher zu der *Orthocladius*-Gruppe als zur Subfamilie der *Tanypinae* gehören.

Da die Mundteile der *Tanypinen*larven auch Sinnesorgane tragen, so ist es wohl begreiflich, daß sie durch Nerven mit den Kopfganglien verbunden sind, und daß man entweder an ihrer Basis oder im Innern der Mundteile selbst Anhäufungen von Ganglienzellen findet. Bei gerade ausgeschlüpften Larven (sowie bei größeren kurz nach der Häutung) erblickt man an der Basis der Mandibeln, Maxillen und des Hypopharynx ganglionartige Anhäufungen kugeligter Zellen, die durch Nerven mit dem Subösophagealganglion in Verbindung stehen (Fig. 17). Nur das Labrum

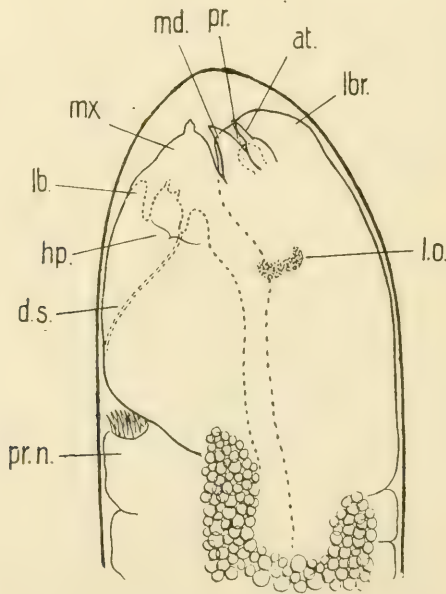


Fig. 18. Kopf eines *Tanypinen*-Embryo; Obj. 8, Oc. 4 *pr* Prämandibel, *mx* Maxille, *hp* Hypopharynx, *pr.n* Vorderfüßchen.

wird aus einem selbständigen Ganglion frontale innerviert (Fig. 11 A). Nachdem die Chitinhülle des Kopfes und der Mundteile erhärtet, sucht man vergeblich diese Ganglien an lebenden Objekten. Dafür aber erblickt man an Schnittserien im Innern der Mandibeln, des Palpus maxillaris und des Hypopharynx starke, aus bipolaren, spindelförmigen Ganglienzellen zusammengesetzte Nervenstränge (Fig. 4 E, 11 B). Es ist zu betonen, daß in dieser Hinsicht der innere Bau der Mandibeln, des Palpus maxillaris und der Palpi hypopharyngeales mit dem inneren Bau der larvalen Antenne vollkommen übereinstimmt!

Die ersten Anlagen der Mundteile entstehen an sehr jungen Embryonen als höckerförmige Erhebungen im Umkreise der Mundöffnung. Noch bevor sich das Pigment in den Larvenangen entwickelt, sind sie



fast fertig und man kann an ihnen schon Einzelheiten erkennen (z. B. Palpus maxillaris, beide Falten des Hypopharynx, die Mündung der Speicheldrüsen u. s. w., Fig. 18). Die Mundteile einer ausgeschlüpften Larve (Fig. 17) unterscheiden sich von denjenigen einer erwachsenen Larve durch etwa folgende Merkmale: Die Chitinhülle der Mundteile ist noch nicht gefärbt, nur die Spitze der Mandibel und die Zähne der Glossa haben einen leichten, schwarzgrauen Anflug. Die Mandibel ist ziemlich kurz, ihr Basalteil auffallend breit; Palpus maxillaris noch auffallend kurz und breit; Labialkämme sind noch nicht vorhanden, die Labialplatte besitzt am Rande mehrere Einkerbungen. Im ganzen erinnern solche Mundteile mehr an die Mundteile anderer Chironomidenlarven, als wenn sie erwachsen sind.

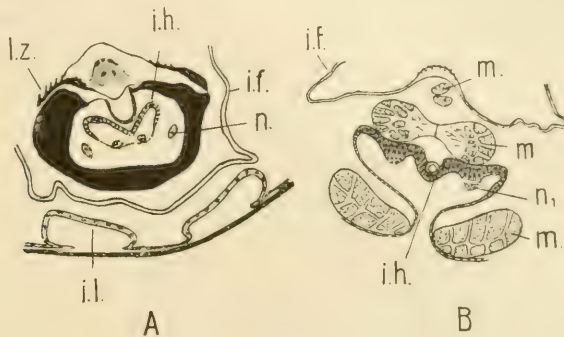


Fig. 19. Zwei Querschnitte durch Hypopharynx einer *Macropelopia*-Larve, Obj. 8; Oc. 2; *ih*, *il* Imaginalscheiben im Hypopharynx und Labium; *if* Pharynxintima, *lz* Zahnleiste, *n* Nerv, *m* Muskeln.

Die Entwicklung der larvalen Mundteile während des Puppenstadiums und ihre Verwandlung in imaginale Organe habe ich nicht verfolgt. Nur das habe ich an lebenden Objekten, sowie an einigen Schnittserien sicherstellen können, daß sich an der Basis der larvalen Mundteile schon bei einer etwa mittelgroßen Larve Imaginalscheiben bilden, das ist Einstülpungen der verdickten, larvalen Hypodermis, aus deren Boden durch sekundäre Faltungen die imaginalen Mundteile hervorstechen; an der Basis der Mandibeln entsteht eine einfache, an der Basis der Maxillen und unter dem Hypopharynx eine doppelte Imaginalscheibe. (Fig. 19.)

Die Abweichungen im Baue der larvalen Mundteile der Tanyptinen vom allgemeinen Chironomidentypus sind wohl durch die Ernährungsweise erklärlich. Während sich andere Chironomiden durch pflanzliche Nahrung ernähren, sind die Tanyptinenlarven hauptsächlich karnivor. Man findet in ihrem Ösophagus zwar auch Algen (Diatomeen, Desmidiaceen), aber das Groß des Inhaltes besteht aus Resten tierischer Organismen (*Centropyxis* und *Arcella*, leere Häute von Kopepoden, Cladoceren, Ostracoden

und Dipterenlarven). Während kleinere Beute unversehrt verschluckt wird, spielt sich beim Verschlucken größerer Beute (z. B. einer Dipterenlarve) ein komplizierter Prozeß ab, an dem alle Mundteile beteiligt werden. Die Beute wird durch die sichelförmigen Mandibeln erfaßt und durchstoßen; sie sucht sich freilich durch heftige Bewegungen zu befreien, aber sie wird mit einer großen Kraft festgehalten. Überrascht wurde ich dadurch, daß die Bewegungen der Beute rasch an Intensität abnehmen und ziemlich bald aufhören. Die durch Mandibeln bewirkten Wunden können doch nicht einen so raschen Tod herbeiführen! Es macht den Eindruck, als ob es sich um eine Vergiftung handle. Wo liegt aber die Giftdrüse? Ich habe in der Originalabhandlung die Vermutung ausgesprochen, daß das Sekret der stark entwickelten Speicheldrüsen die Vergiftung bewirken könnte. Die Speicheldrüsen anderer Chironomidenlarven dienen bekannterweise zum Spinnen der Larvengehäuse; Tanypinenlarven spinnen aber nicht und doch sind die Speicheldrüsen nicht verkümmert. Freilich ist das noch kein Beweis für die Giftwirkung des Speicheldrüsensekretes, und ich halte die ausgesprochene Ansicht für nichts mehr, als für eine wahrscheinliche Vermutung.

Die gefangene Beute wird dann durch Bewegungen aller Mundteile langsam in den Mund hineingeschoben, wobei wahrscheinlich auch die Pseudoradula des Labiums mithilft. Dabei wird der Inhalt der gefangenen Beute durch heftige Bewegungen der Glossa ausgepreßt. Durch ungewöhnlich starke Pharyngealmuskulatur wird die Pharynxhöhle abwechselnd erweitert und verjüngt, wodurch eine mächtige Saugwirkung entstehen muß. So wird der ausgepreßte Inhalt rasch verschluckt. Zuletzt kommt in den Ösophagus fast leere Exuvie.

# Über die stoffliche Inhomogenität des Magma im Erdinnern.

Ein Beitrag zur Klassifikation der Gesteine.

Von R. SOKOL.

(Mit 2 Abbildungen.)

Vorgelegt am 5. Mai 1917.

Die Verschiedenheiten in der chemischen Zusammensetzung der Eruptivgesteine erklärt man gewöhnlich durch Spaltung eines einheitlichen Stammagma in chemisch differente Teilmagmen. Als Ursachen der Magmadifferenzierung nimmt man hauptsächlich folgende an: eine durch Diffusion und Abkühlung bewirkte Anreicherung von femischen (an *Fe*, *Mg* und *Ca* reichen) Silikaten an den Grenzflächen, Assimilation des Nebengesteins, Sonderung nach dem spezifischen Gewichte, Liquefaction oder Saigerung (gemischte Teilmagmen erstarren nämlich stets bei einer Temperatur, die niedriger ist als der Schmelzpunkt jedes einzelnen Teilmagma, keineswegs aber zugleich in der ganzen Menge, ausgenommen, daß das Gesamtagma in einem bestimmten „eutektischen“ Mischungsverhältnis darliegt; das überschüssige Magma kristallisiert früher aus).

Für die Wahrscheinlichkeit dieser Homogenitätshypothese werden angeführt: Die basischen und sauren Schlieren in Gesteinen (Graniten, Dioriten, Syeniten), basische Randpartien von Granitmassiven, Salzbänder der gemischten Gänge, verschiedenes Gangfolge bei den drei Hauptreihen der Gesteine, verschiedene Produkte eines und desselben Eruptivherdes, die Möglichkeit durch künstliches Schmelzen aus einer und derselben Materie verschiedene Produkte zu erzielen. Rosenbusch<sup>1)</sup> meint endlich, daß aus der Tatsache, in der Gewichtseinheit jedes wasserfrei gedachten Tiefengesteins sei die gleiche Anzahl von 184

---

<sup>1)</sup> Rosenbusch: Elemente der Gesteinslehre. III. Aufl. 1910. S. 234.



Metallatomen vorhanden, die Notwendigkeit einer einzigen Stammaterie folgen müsse.

Einer Kritik hat die Gründe der Homogenitätshypothese besonders *Bergeat*<sup>1)</sup> unterworfen. Er nimmt gegen die Hypothese *Stübels* (von den peripherisch getrennten, mit verschiedenen differenzierten Teilmagmen gefüllten Herden) eine zusammenhängende irdische Magmazone von wechselnder stofflichen Ungleichartigkeit an.

Ich möchte zuerst auf die Unhaltbarkeit der *Rosenbusch'schen* Folgerung eingehen. *Rosenbusch*<sup>2)</sup> führt eine große Anzahl (52) Analysen von Gesteinen der foyaitisch-theralitischen, granito-dioritischen und gabbroperidotitischen Magmen an, dividiert die reduzierte Analyse durch 1% des Molekulargewichtes und erhält durch Summation der gewonnenen Molekularquotienten deren Gesamtzahl („Zahl“), die sich zwischen 140 (N. 11 der foyaitisch-theralitischen Magmen) und 204 (N. 26 der gabbroperidotitischen Magmen) bewegt. Aus den Molekularquotienten folgen gleich große ev. verdoppelte (bei Molekülen mit verdoppelten Metallatomen) Metallatomquotienten, deren Gesamtzahl („Metallatomzahl“) zwischen 175 und 204 (N. 18 und 26 der gabbroperidotitischen Magmen) liegt. Zur Orientierung sei noch bemerkt, daß *Rosenbusch* an betreffender Stelle seines Werkes weder die Analysen noch Molekularquotienten und Metallatomquotienten, sondern nur Prozente der beiden letzteren Werte, dann die „Zahlen“ und „Metallatomzahlen“, wohl auch ihre aus 242 Analysen gewonnenen Durchschnitte 152.5 resp. 184.0 anführt (l. c. S. 232). Die Tatsache, daß es von der ersten Zahl nur wenig Abweichungen gibt, findet er wichtig und belangreich.

*Rosenbusch* gibt selbst zu (S. 233), daß die „Zahl“ 166 des reinen Quarzgesteins (berechnet in der oben angeführten Weise als 100 : 0.6) niemals stark verschleiert werden kann, da die Molekulargewichte der übrigen sieben Bestandteile teils unter teils über dem der Kieselsäure liegen und die Kieselsäure immer den Hauptbestandteil bildet. Die Erklärung betrachtet er aber nicht für genügend, vielmehr hält er an der Konstanz der Molekularzahl fest und sagt, daß sie einer der Faktoren sei, welche die Konstitution der Eruptivgesteine bedingen. Er führt theoretische Beispiele von Gesteinen an und zwar von einem mit dem Durchschnittsmolekulargewichte der acht Hauptoxyde („Zahl“ 124) — welche also im Gewichtsverhältnis ihrer Molekulargewichte vorhanden sind — und von anderen mit acht Hauptoxyden in gleicher Gewichtsmenge („Zahl“ 145). Er sieht in der Zahl 166 die obere, in der

<sup>1)</sup> *Bergeat*: Betrachtungen über die Inhomogenität des Magma im Erdinnern. Mit. d. Geogr. Ges. München, Bd. III., H. 2, S. 152 ff. Siehe auch *Ampferer*: Über das Bewegungsbild von Faltegebirgen. Jahrb. d. k. k. geol. R. A. 56, 1906, S. 537 ff.

<sup>2)</sup> l. c. S. 228 u. f.



Zahl 124 die untere Grenze, zwischen welchen die Molekularzahl liegen und um die dritte 145 sich nach oben und unten bewegen müßte, wenn es keine tiefere Gesetzmäßigkeit in der Stammaterie geben würde.

Dagegen möchte ich bemerken, daß wenn man als eine Grenze 100%  $\text{SiO}_2$  annimmt, man folgerichtig als andere Grenze resp. Grenzen nicht aliquote Mengen von 8 Oxyden, sondern 100% jedes einzelnen oder Kombinationen von sieben übrigen annehmen müsse. Deswegen habe ich, dem theoretischen Beispiele Rosenbusch' folgend, außer tatsächlich in der Natur vorkommenden Verbindungen auch die nicht selbständig existierenden Oxyde (Zahlen der letzteren kursiv gedruckt) berechnet.

	Molekularzahl		Molekularzahl
$\text{Fe}_2\text{O}_3$ (Haematit) .....	62	$\text{Na}_2\text{O}$ .....	161
$\text{Fe}_3\text{O}_4$ (Magnetit) .....	86	$\text{Na}_2\text{SiO}_3$ (in alkalischen Amphibolen und Pyroxenen) .....	164
$\text{Al}_2\text{O}_3$ (Korund) .....	98	[Missourit, Rosenbusch	
$\text{K}_2\text{O}$ .....	106	l. c. S. 229, N. 26.....	165]
$\text{Al}_2\text{SiO}_5$ (Andalusitgruppe) ..	123	$\text{SiO}_2$ (Quarz) .....	167
$\text{NaFeSi}_2\text{O}_6$ (Aegirin) .....	130	$\text{Ca}(\text{Mg}, \text{Fe})\text{Si}_2\text{O}_6$ (Diopsid) ..	172
$\text{KAlSi}_2\text{O}_6$ (Leucit) .....	137	$\text{CaSiO}_3$ (Wollastonit) ....	172
$\text{FeO}$ .....	139	$\text{HK}_2\text{Al}_3\text{Si}_3\text{O}_{12} + 3\text{Mg}_2\text{SiO}_4$	
[Lujaurit, Rosenbusch		(Biotit) .....	175
l. c. S. 140, N. 11) .....	140	$\text{CaO}$ .....	179
$\text{NaAlSiO}_4$ (Nephelin) .....	141	$\text{MgSiO}_3$ (in Amphibolen und	
$(\text{Mg}, \text{Ca})\text{Al}_2\text{SiO}_6$ (im Augit) ..	142	Pyroxenen) .....	200
$\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ (Anorthit).....	144	[Dunit, Rosenbusch l. c.	
$\text{KAlSi}_3\text{O}_8$ (Orthoklas) ....	144	N. 26, S. 204 .....	204]
$\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$ (Albit) .....	147	$\text{Mg}_2\text{SiO}_4$ (in Olivin) .....	214
$\text{Fe}_2\text{SiO}_4$ (in Olivin) ..	147	$\text{MgO}$ .....	250
$\text{H}_2\text{KAl}_3\text{Si}_3\text{O}_{12}$ (Muskovit) ..	151	$(\text{H}_2\text{O})$ .....	555)
[Gesteins-Analysenmittel ...	152]		

Aus der Zusammenstellung, der auch das Wasser und zwei am meisten vom Mittelpunkte abweichende Gesteine und auch das demselben nächste Gestein (in Klammern []) zugefügt sind, ist ersichtlich, daß die Oszillation der Molekularzahlen um die Zahl 152 (Analysenmittel) nur in der Kieselsäure ihren Grund hat. Die möglichen Kombinationen der Oxyde sind nämlich im allgemeinen die, in welchen  $\text{SiO}_2$  als Bindemittel fungiert. Man sieht im folgenden, wie die Oxyde in gesteinsbildenden Mineralien dadurch und durch Verbindung mit anderen Oxyden ihre „Zahl“ der Durchschnittszahl nahe bringen:

$\text{Al}_2\text{O}_3$  98 —  $\text{Al}_2\text{SiO}_5$  123 — Leucit 137 — Nephelin 141,  
 $\text{K}_2\text{O}$  106 — Leucit ( $\text{KAlSi}_2\text{O}_6$ ) 137 — Muskovit 138 — Orthoklas 144,  
 $\text{CaO}$  179 —  $\text{CaSiO}_3$  172 — Anorthit 147,  
 $\text{MgO}$  250 —  $\text{Mg}_2\text{SiO}_4$  214 —  $\text{MgSiO}_3$  200 — Diopsid 172.

Die Oxyde bilden ein Gestein immer mit einer großen Masse (35·2 bis 84·6 Mol.-Proz.)  $SiO_2$ , wodurch eben die Molekularzahlen zwischen 140 und 165 (204) entstehen. Diese „Zahlen“ weichen keineswegs um einen geringen Betrag von der Mittelzahl 152 ab, weil sich aus den 52 Analysen *Rosenbusch*' hinsichtlich der „Zahl“ eine fast kontinuierliche und nur wenig zu 152 ansteigende Reihe zusammenstellen läßt, besonders wenn man einen Ausgleich vornimmt (anstatt 4 Analysen mit der „Zahl“ 146 und 2 Analysen mit der „Zahl“ 147 in beiden Fällen je 3 setzt u. s. w.): 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4<sup>1)</sup>, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1. Es läßt sich kaum von einer Oszillation um einen Punkt sprechen, höchstens vom Verbleiben in einem Intervall 140—165, hauptsächlich zwischen 146 bis 154. Aus diesem Umstande läßt sich schließen, daß die Oxyde im Magma in solchen relativen Mengen vorhanden sind, daß die Molekularzahlen zwischen 140 bis 165 sich ergeben. Keineswegs aber läßt sich ein Schluß ziehen, daß im Magma eine Kombination von 8 Hauptoxyden mit der Molekularzahl 152 existiere, aus welcher sich andere durch Spaltung entwickeln. Ebensowenig darf man schließen, daß im Magma die Oxyde in einem Gewichtsverhältnis zu je 12·5%  $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$ ,  $Fe_2O_3$ ,  $FeO$ ,  $MgO$ ,  $CaO$ ,  $Na_2O$ ,  $K_2O$  (Molekularzahl 145) enthalten seien, und daß daraus durch Kombination die Teilmagmen entstehen.

Die Annäherung beiderlei Molekularzahlen (152 und 145) wird durch den Umstand bewirkt, daß der  $FeO$ -Quotient in der Nähe von 145 und die der anderen Oxyde in fast gleichen Abständen von dieser Mitte liegen; in wirklichen Analysen steckt der Grund in der großen Masse von  $SiO_2$  und in der Verbindung von  $SiO_2$  mit Metalloxyden von kleineren Molekularzahlen zu Mineralmolekülen. Die Molekularzahlen sagen uns folglich nichts mehr, als was uns bereits die Analysenresultate gesagt haben.

Die Annahme *Rosenbusch*'s, daß 124 eine Grenze für die Molekularzahl bildet, beruht auf der Vorstellung gleicher Molekularmengen von 8 Oxyden im Stammagma:

$$\frac{60 \times 100}{S \times 0.6} + \frac{102 \times 100}{S \times 1.2} + \frac{160 \times 100}{S \times 1.6} + \frac{72 \times 100}{S \times 0.72} + \frac{40 \times 100}{S \times 0.4} +$$

$$+ \frac{56 \times 100}{S \times 0.56} + \frac{62 \times 100}{S \times 0.62} + \frac{94 \times 100}{S \times 0.94} = \frac{80.000}{S} = 124,$$

wo  $S$  die Summe der Molekulargewichte von 8 Oxyden = 646 bedeutet. Diese „Zahl“ 124 entspricht keiner realen mineralischen Verbindung (siehe oben), sie ist daher rein willkürlich; infolgedessen stellt sie keine Grenze dar, da eine solche nach unten von  $Fe_2O_3$  gebildet wird.

<sup>1)</sup> Die Anzahl der die Durchschnittszahl 152 zeigenden Analysen.

Die Molekularzahl 145 habe ich hinsichtlich der realen Zusammensetzung des Magma abgelehnt. Da aber die Gesteine im allgemeinen aus 8 Oxyden in verschiedener relativen Menge bestehen, so ist es klar, daß aus der Verbindung im Gewichtsverhältnis 1 : 1 : 1 u. s. f. alle Gesteine durch Verminderung der Komponenten bis zum Ausfall und zugleich durch Vergrößerung der anderen sich *theoretisch* ableiten lassen, wodurch die Grenzen in 100%  $Fe_2O_3$  („Zahl“ 63) und 100%  $MgO$  („Zahl“ 250) ev. 100%  $Mg_2SiO_4$  („Zahl“ 214) entstehen. Wäre diese Annahme dennoch in der Natur verwirklicht, so müßte man erwarten, die Wahrscheinlichkeitsrechnung werde zeigen, wie aus der Annahme die speziellen Fälle entstehen. Setzen wir diese Annahme als wirklich existierend für einen Augenblick voraus.

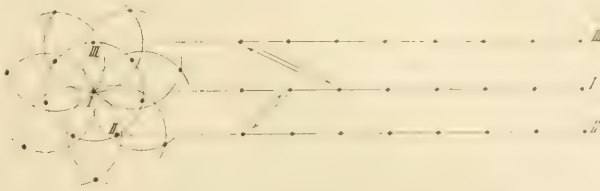


Fig. 1. Eine hypothetische Raumverteilung von acht Hauptoxyden in Quer- und Längsschnitt.

Denken wir uns gleiche Gewichtsmengen der 8 Oxyde als Punkte nebeneinander in einer Reihe. Setzen wir weiter voraus, daß eine ebensolche Reihe parallel liegt und eine Möglichkeit des Austausches eines Oxydes der ersten Reihe für ein Oxyd der zweiten Reihe vorhanden ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Oxyd der zweiten Reihe z. B.  $SiO_2$  seine Stelle mit einem ungleichen Oxyd der ersten Reihe (es gibt sieben solche unter acht) vertauschen wird, gleich  $\frac{7}{8}$  und die Wahrscheinlichkeit, daß es gerade  $SiO_2$  sein wird, gleich  $\frac{7}{8 \times 8}$ . Die Gewichtszusammensetzung der ersten Reihe wäre dann: 2 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 die der zweiten Reihe 0 : 2 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 Dieser ideale Fall hilft aber wenig. Man muß zu einer Raumvorstellung übergehen (Fig. 1). Zur größeren Anreicherung mit irgend einem Oxyd müssen aus mehreren Reihen aus der Umgebung gleichbenannte Mengen hereintreten. Für den Grenzfall muß man sieben solche Reihen im Raume voraussetzen, welche zylinderartig die erste Reihe umhüllen und jede von ihnen wieder in einem eben solchen Verhältnis zu ihrer Umgebung steht. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß aus der dritten Reihe wieder  $SiO_2$  heraustritt und für ein ungleiches eintritt (deren jetzt nur sechs vorhanden sind), gleich  $\frac{6}{8 \times 8}$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß  $SiO_2$  dann unter den sieben



diese dritte Reihe umhüllenden Parallelreihen gerade die mit I bezeichnete Reihe auswählt, ist siebenmal kleiner, also  $\frac{6}{8 \times 8 \times 7}$ . Dasselbe muß sich bei jedem Austausch von  $SiO_2$  wiederholen, es gilt folglich für die Wahrscheinlichkeit des n-ten Austausches der Wert

$$\frac{8 - n}{8 \times 8 \times 7}$$

Diese sinkende Wahrscheinlichkeit, die sich analog für jedes andere Oxyd und auch für jede andere als oben vorausgesetzte Zusammensetzung berechnen läßt, steht nicht im Einklang mit der Wirklichkeit. In der Natur gibt es nur Gesteine, die rund 3 bis 6  $SiO_2$  (40 bis 80%) besitzen.

Rosenbusch<sup>1)</sup> bemerkt richtig, daß keineswegs alle theoretisch möglichen Oxyden-Mischungen in der Natur auftreten, welche der Anforderung der Konstanz von der Molekularzahl genügen würden. Den Grund dieser Tatsache gibt er nicht an, wohl aber die Folgerung, daß in der gesagten Konstanz nicht die letzte Ursache aller Gesetzmäßigkeiten steckt. Ich sehe den Grund darin, daß das „Gesetz“ von der Konstanz der Molekularzahl in der Gewichtseinheit eines Gesteins überhaupt kein Gesetz ist, sondern nur ein mathematischer Zufall, der übrigens keine Schärfe besitzt, welche ihm zugesprochen wurde.

Was Rosenbusch von der Molekularzahl behauptet und was von mir zu widerlegen versucht wird, das bezieht sich auch auf die Metallatomzahl. Rosenbusch leitet aus der Konstanz dieser Metallatomzahl (= 184) die Existenz nur einer Materie der Gesteine (eines Stammagma) ab. Er will die Tatsache feststellen, daß in der Gewichtseinheit jedes wasserfrei gedachten Tiefengesteines die gleiche Anzahl von 184 Metallatomen vorhanden ist. Betrachten wir näher! Die Tiefengesteine haben eine variable chemische Zusammensetzung, die Metallatome sind verschieden schwer, doch soll ihre Anzahl nach Rosenbusch in der Gewichtseinheit stets dieselbe sein. Verändert sich die Zusammensetzung, müssen wegen der Erhaltung desselben Gewichtes schwere Atome für viele leichte Atome ausgetauscht werden. Wie kann dabei die Anzahl der Metallatome beständig 184 bleiben? Es ist dies nur möglich, wenn zwei oder mehrere Atome  $A, B, C$  u. s. w., deren Gesamtgewicht gleich  $s$  ist, für von ihnen verschiedene Atome  $\alpha, \beta, \gamma$  u. s. w. mit demselben Gesamtgewichte  $s$  ausgetauscht werden. In Wirklichkeit ist die Aufgabe noch verwickelter, da nicht die Metallatome allein, sondern ihre Oxyde das Gesamtgewicht bestimmen. Es sind folglich zwei Gleichungen mit acht Unbekannten zu lösen:

<sup>1)</sup> l. c. S. 233.



$$a + b + c + d + e + f + g + h = 184,$$

$$0.6a + 1.02 \frac{b}{2} + 1.6 \frac{c}{2} + 0.72d + 0.4e + 0.56f + 0.62g + 0.94h = 100,$$

wo die Buchstaben die Metallatomzahl von  $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$ ,  $Fe_2O_3$ ,  $FeO$  u. s. w. bedeuten. Ist dieser rechnerische Vorgang in der Natur wahrscheinlich? Steht überhaupt die Konstanz von Metallatomzahlen fest?

Bevor ich darangehe, dies zu beantworten, will ich noch einer Behauptung *Rosenbusch'* erwähnen. Er berechnet nämlich (l. c. S. 234), welches Atomgewicht  $g$  ein Stoff haben müßte, von welchem 184 Atome dasselbe Gewicht hätten, wie die Summe von  $x$ -Atomen  $Si$ ,  $y$ -Atomen  $Al$ ,  $z$ -Atomen  $Fe$ ,  $u$ -Atomen  $Mg$ ,  $v$ -Atomen  $Ca$ ,  $w$ -Atomen  $Na$ ,  $t$ -Atomen  $K$ . Er meint, das Atomgewicht dieses Stoffes durch die Gleichung

$$\frac{28x + 27y + 36z + 24u + 40v + 23w + 39t}{184} = g$$

festzustellen, indem er die Zahl der Atome mit ihren Atomgewichten multipliziert, die Produkte addiert und die Summe durch 184 dividiert. Er führt die Rechnung für 52 Gesteine durch und erhält als Gesamtmittel rund

$$g = 16,$$

nahezu das Atomgewicht des Sauerstoffs.

Zuerst sei bemerkt, daß *Rosenbusch* bei der Berechnung für  $x$ ,  $y$ ,  $z$  u. s. w. keineswegs die Metallatomzahlen, sondern Metallatomprocente substituiert. Die Metallatomprocente sind aber durch Multiplikation mit  $\frac{100}{184}$  aus den Metallatomzahlen hervorgegangen und infolgedessen resultierte  $g = 16$  anstatt der richtigen

$$g = 16 \times \frac{184}{100} = 29.$$

Um dies zu erläutern, führe ich die Analyse von *Hautzenberggranit*<sup>1)</sup> an:

	<i>Si</i>	<i>Fe</i>	<i>Al</i>	<i>Ca</i>	<i>K</i>	<i>Na</i>	Summe
Gewichtsprocente der Oxyde red.	72.99	3.76	12.16	0.93	6.46	2.19	98.49
Metallatomzahlen	121.7	5.2	23.8	1.7	13.8	7.0	173.2

<sup>1)</sup> *Rosenbusch* *ibid.* S. 228, N. 1 der granito-dioritischen Reihe, wo aber nur Metallatomprocente (nebst Molekularprozenten) angegeben sind (Bauschanalyse S. 88).

	<i>Si</i>	<i>Fe</i>	<i>Al</i>	<i>Ca</i>	<i>K</i>	<i>Na</i>	Summe
Metallatomprozent	70·4	2·9	13·8	1·0	7·9	4·0	100·0
Dividend der Rosenb. Gleichung (erhalten durch Multiplikation mit Metallatomzahl)	28×121·7	56×5·2	27×23·8	40×1·7	39×13·8	23×7·0	5108·6
Dividend der Rosenbuschschen Gleichung (erhalten durch Multiplikation mit Metallatomprozenten)	28×70·4	56×2·9	27×13·8	40×1·0	39×7·9	23×4·0	2946·7

Dividiert man den ersten Dividend durch die Summe der Metallatomzahlen 173·2, erhält man 29·5; dieselbe Zahl erhält man bei der Division des zweiten Dividends durch die Summe der Metallatomprozenté 100. Das ist das Atomgewicht des gesuchten Stoffes, welcher keineswegs in der Nähe desjenigen des Sauerstoffs, sondern in der Nähe von *Si* liegt, wie man schon voraussagen konnte. *Si* nimmt unter den Atomen nicht nur, was das Atomgewicht, sondern auch was die relative Atommenge betrifft, eine ähnliche Stellung ein, wie *Si O<sub>2</sub>* unter den Molekülen (Oxyden). Dies ergibt sich schon aus der Abhängigkeit der Metallatomzahl von der Molekularzahl.

Wie bei der Berechnung der Molekularzahl, so ist auch bei der Berechnung der Metallatomzahl das Resultat von den Molekulargewichten (*Mg O* 40, *Ca O* 56, *Si O<sub>2</sub>* 60, *Na<sub>2</sub> O* 62, *Fe O* 72, *K<sub>2</sub> O* 94, *Al<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 102, *Fe<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 160, Durchschnittszahl 81) abhängig. Die Molekularzahl  $\left( = \frac{10000}{\text{Molek.-Gewicht}} \right)$  steht mit dem Molekulargewichte im umgekehrten Verhältnis, so daß die Reihe der Molekularzahlen umgekehrt ist (*Fe<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 62, *Al<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 98, *K<sub>2</sub> O* 106, *Fe O* 139, *Na<sub>2</sub> O* 161, *Si O<sub>2</sub>* 167, *Ca O* 179, *Mg O* 250, Durchschnittszahl 145).

Die Metallatomzahl  $\left( = \frac{10000}{\text{Molek.-Gewicht}} \times \text{Anzahl der Metallatome im}$

Molekül) ist umgekehrt proportional dem Molekulargewicht und direkt proportional der Anzahl der Metallatome im Molekül. Infolgedessen weisen die mit einem Metallatom versehenen Moleküle den Molekularzahlen gleichende Metallatomzahlen (*Fe O* 139, *Si O<sub>2</sub>* 167, *Ca O* 179, *Mg O* 250), diejenigen mit zwei Metallatomen aber verdoppelte Metallatomzahl (*Fe<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 125, *Al<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 196, *K<sub>2</sub> O* 213, *Na<sub>2</sub> O* 322) auf, so daß eine gegenüber der Molekularzahlenreihe veränderte Metallatomzahlenreihe (*Fe<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 125, *Fe O* 139, *Si O<sub>2</sub>* 167, *Ca O* 179, *Al<sub>2</sub> O<sub>3</sub>* 196, *K<sub>2</sub> O* 213, *Mg O* 250, *Na<sub>2</sub> O* 322, Durchschnittszahl 199) entsteht.

Aus den 52 Analysen Rosenbusch' folgen für Metallatomzahlen hauptsächlich Werte zwischen 173 und 188 (nur 5 reichen bis 204).

Sie weichen bedeutend von dem von Rosenbusch aus 242 Analysen berechneten Mittel 184 ab und lassen eine Stetigkeit durchblicken, wie es bei den Molekularzahlen der Fall war, jedoch mit viermaligem Ansteigen der Analysenanzahl:

1, 0, 2, 2, 5, 3, 3, 4, 6, 4, 0, 2,<sup>1)</sup> 6, 2, 2, 5.

Dieses Ergebnis darf kaum den Satz von der Konstanz der Metallatomzahl als gültig erkennen lassen, sondern höchstens den von der Konstanz eines breiten Intervalls derselben. In der Gewichtseinheit eines jeden Tiefengesteins ist nicht die gleiche Anzahl von 184 Metallatomen vorhanden.

Die am meisten in Gesteinen auftretenden Silikate besitzen eine 184 nahe liegende Metallatomzahl (Feldspate 179—184, Leucit 183) oder sie sind mit anderen, eine eventuelle Differenz ausgleichenden Mineralien verbunden (Quarz 167 mit Muskovit 226 und Biotit 210 in Graniten, Amphibol 191 und Augit 190 mit Olivin 175 und Magnetit 129 in gabbro-peridotitischen Gesteinen, Nephelin 212 mit Ägirin 173 in Phonolithen, mit Diopsid 172 in Theralithen u. s. f.).

Man könnte einwenden, daß ich die aus der Regelmäßigkeit der Oxyden-Verhältnisse der Analysen entstehende Frage nur in die regelmäßige Bildung immer derselben Mineralien verlegte, daß aber eben diese Bildung von denselben und in einem bestimmten Verhältnis stehenden Mineralien die Existenz von nur einer Materie beweise. Es ist wahr und ist eine altbekannte Tatsache, die ich nicht zu bestreiten gedenke, daß es in der Erdkruste nur eine Materie mit acht Hauptoxyden gibt. Aber der Kern der geologischen Auffassung der Frage liegt in dem Verhältnis dieser Oxyde. Man behauptet, daß ein Stammagma von nur einem bestimmten Oxydenverhältnis existiere und daß aus diesem Stammagma der Tiefe durch Spaltung Teilmagmen von verschiedenen anderen Oxydenverhältnissen entstehen.

Wenn es wirklich nur ein einziges solches Stammagma gäbe, dann müßte die Durchschnittsanalyse aller Gesteine seine Zusammensetzung darstellen. In der Tat wurden solche Versuche von Clark e<sup>2)</sup> gemacht und von Anhängern der Homogenitätshypothese völlig gewürdigt. Eine Hauptbedingung für einen solchen Versuch ist aber die Kenntnis der Menge der an der Bildung der Erdkruste teilnehmenden Gesteine. Nicht nur die Daten der Analysen, sondern auch die Mengen muß man in die Rechnung ziehen, was aber kaum ausführbar ist. Wäre die Berechnung richtig und existierte auch dieses „homogene“ Gesteinsmagma, so dürfte man erwarten, daß das Gestein, dessen Analyse mit der berechneten Mittel-

<sup>1)</sup> Mit durchschnittlicher Metallatomzahl 184. Metallatomzahl 173 hat Hautzenberger Granit. Es gibt aber Analysen mit einer noch niedrigeren Metallatomzahl z. B. Peridotit (Ricoletta, Predazzo) mit 166.

<sup>2)</sup> Näheres in Rosenbusch l. c. S. 12 ff., auch die Literatur.



analyse übereinstimmt, auch reichlich in der Erdkruste vorhanden ist, da die üblichen Differentiationsbedingungen doch nicht überall genug intensiv wirken können. Die Monzonite und Essexite, deren Analysen mit den Clarkeschen Resultaten übereinstimmen, sind leider sehr sporadisch. Durch diese Tatsache wird die Homogenitätshypothese wohl nicht gefördert, aber auch nicht widerlegt, da die Resultate nicht logisch einwandfrei sind. Man kann zu keinem richtigen Ergebnis gelangen, wenn man z. B. die Analysenresultate einer Rarität (eines seltenen Tiefengesteins) neben die Analysenresultate eines in enormen Massen vorhandenen Gesteins (Granits) stellt und daraus (durch Summation und Division durch 2) Schlüsse betreffend das gemeinsame Magma zieht. Folglich erst aus einer mit Rücksicht auf die Gesteinsmassen gewonnenen Mittelanalyse können die richtigen Resultate (Molekularzahl und Metallatomzahl) gefolgert werden.

Auch Rosenbusch hat zur Berechnung der Durchschnittsmolekularzahl und -metallatomzahl tatsächlich wie Clarke eine gleiche Masse der an den Tag kommenden Gesteine vorausgesetzt und deswegen kann er zu keinem einwandfreien Ergebnis kommen, selbst wenn es wirklich nur ein Magma gäbe.

Ich mache noch auf eine Sache aufmerksam. Wenn wirklich die Molekularzahl 152 und die Metallatomzahl 184 eine Eigenschaft des Stammagma vorstellten, müßten auch die mit der Molekularzahl 152 versehenen Gesteine dem Stammagma am nächsten sein und dabei die andere Eigentümlichkeit desselben, d. h. die Metallatomzahl 184, besitzen. Die Molekularzahl 152 gehört (l. c. S. 228 u. 229) den Analysen N. 3 und 22 der foyaitisch-theralitischen Magmen, N. 4, 6, 12, 15, 23 der granito-dioritischen und gabbro-peridotitischen Magmen an, welche aber keineswegs die Metallatomzahl 184, sondern der Reihe nach Metallatomzahlen 181, 185, 177, 179, 176, 179, 181 aufweisen. Die Metallatomzahl 184 liefern Analysen N. 4 und 6 der foyaitisch-theralitischen Magmen, welche aber nicht die Molekularzahl 154, sondern 149 und 147 ergeben.

Rosenbusch will noch andere gemeinsame Merkmale (S. 233) der Analysenresultate feststellen, welche er in Verbindung mit der „Konstanz“ der Molekularzahl und Metallatomzahl bringt. Er spricht nämlich von zwei „Tatsachen“. Die erste: Wo in den Alkaligesteinen  $CaO$  (mit dem niedrigen Molekulargewicht 56) reichlicher auftritt, zeigt sich ein Anwachsen des  $K_2O$  (mit dem höheren Molekulargewicht 94) gegenüber dem  $Na_2O$  (mit dem niedrigeren Molekulargewicht 62), wie in den Leucit-syeniten, Borolaniten und Leucitophyren. Die zweite: In den an  $MgO$  reichen Endgliedern der gabbro-peridotitischen Magmen, wenn ein Alkali überhaupt in nennenswerter Menge vorhanden ist, findet man zur Ausgleichung des niedrigen Molekulargewichtes 40 des  $MgO$  das schwerere  $K_2O$ .

Wenn die erste Tatsache wirklich existierte, müßte man sie nicht anders als durch das Streben nach der Konstanz der Molekularzahl in der



Gewichtseinheit erklären. Wenn sich leichte Moleküle ( $CaO$ ) anhäufen, müssen unbedingt, falls dasselbe Einheitsgewicht und dieselbe Molekularzahl wie früher bleiben soll, andere leichte Moleküle ( $Na_2O$ ) in größerer Menge austreten und statt der letzteren schwere  $K_2O$ -Moleküle in einem ganz bestimmten Verhältnis eintreten. Bezeichnen  $a, b, c, x$  die ursprünglichen Molekularzahlen von  $CaO, K_2O, Na_2O$  und den übrigen Oxyden, welche in der Gewichtseinheit enthalten sind, so gilt die Gleichung

$$56 a + 94 b + 62 c + z x = 1.$$

Wenn weiter  $\alpha, \beta$  die Zuwachse von  $a$  und  $b, \gamma$  die Abnahme von  $c$  bedeuten, dann folgt

$$56 (a + \alpha) + 94 (b + \beta) + 62 (c - \gamma) + z x = 1.$$

Durch Subtraktion erhält man aus beiden Gleichungen

$$\gamma = \frac{56}{62} \alpha + \frac{94}{62} \beta.$$

Da aber die Gewichtseinheit stets dieselbe Anzahl der Moleküle enthalten soll, muß die Abnahme dem Zuwächse gleichen:

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Aus den beiden Werten für  $\gamma$  läßt sich berechnen

$$\beta = \frac{3}{16} a, \quad \gamma = \frac{19}{16} \alpha.$$

Wenn  $\alpha$  Moleküle zu  $CaO$  hinzukämen, müßte  $K_2O$  um  $\frac{3}{16} \alpha$  Moleküle zu- und  $Na_2O$  um  $\frac{19}{16} \alpha$  Moleküle abnehmen.

Die Analysen zeigen aber, daß diese Verhältnisse nicht eingehalten werden. Leucitsyenit (Rosenbusch l. c. S. 229, N. 15) hat um 4  $CaO$  mehr als beide vorangehenden Gesteine, so daß man bei  $K_2O$  eine Zunahme rund 1 Molekül (in Molekularzahlprozenten) und bei  $Na_2O$  eine Abnahme von 5 Molekülen erwarten sollte; statt dessen ist die Zunahme von  $K_2O$  2 bis 3, die Abnahme von  $Na_2O$  8 bis 11 Moleküle. Bei dem Borolanite (S. 151, N. 14) vermehrt sich  $CaO$  gegenüber dem Leucitsyenit (ib. N. 13) um 1.85 (berechnet in Molekularzahl),  $K_2O$  steigt nur um 0.35 anstatt um 3.5,  $Na_2O$  sinkt um 3.5 anstatt um 2.2. Beim Borolanite N. 15 ib. wächst  $CaO$  gegenüber dem vorhergehenden um 15.36 an,  $K_2O$  aber sinkt um 0.21 anstatt um 2.2 zuzunehmen;  $Na_2O$  vermindert sich nur um 6.18 anstatt um 18.24.

Es sei noch zugefügt, daß beim Durchsehen anderer Analysen sich die erste Deduktion Rosenbusch' keineswegs als durchgreifend zu

erkennen gibt. In der Analyse Laurvikits (ib. S. 228, N. 5 der foyait-theral. Magmen) ist  $CaO$  gegenüber allen vorangehenden foyaitischen Gesteinen merklich angewachsen, kaum aber  $K_2O$ , welches sogar gegenüber der zweiten und vierten Analyse daselbst abgenommen hat. Ähnliches gilt von den Analysen 7 und 8, 11 und 12, 13 und 14, 15—16—17, 22—23—24 derselben Reihe. Ein Parallelismus zwischen  $CaO$  und  $K_2O$  läßt sich auch nicht in der Reihe der granitodioritischen und gabbroperidotitischen Magmen zwischen den Analysen N. 1—2—3, 4—5—6—7—8, 11—12, 14—15—16—17, 20—21, 22—23—24 feststellen.

Was die zweite Behauptung Rosenbusch' betrifft, so lese ich in fast allen von N. 17 bis N. 23 reichenden Analysen der gabbroperidotitischen Magmen eine größere Molekularzahl für  $Na_2O$  (1.0 bis 6.9%), für  $K_2O$  nicht einmal 1% (0.1 bis 0.9%). Eine Ausgleichung des Molekulargewichtes  $MgO$  (vorhanden bis zu 18.9 Mol.-Z. %) kann somit  $K_2O$  nicht übernehmen. Wohl ist es möglich bei Glimmerperidotit von Kaltem Tal bei Harzburg (ib. S. 216, N. 1), auch bei Kimberliten (ib. N. 2 und 3), aber im allgemeinen gilt dies nicht. In Amphibolperidotiten sind nur Spuren von Alkalien vorhanden und im Wehrlit mit 23 Gewichtsprozenten  $MgO$  (ib. N. 8) ist das Verhältnis der Alkalien sogar umgekehrt.<sup>1)</sup>

Fassen wir jetzt noch alles zusammen. Es gibt zwei Aufgaben. Die erste: Unter der Voraussetzung, daß stoffliche Homogenität des Magma existiere, soll man die prozentuelle Zusammensetzung desselben ausfindig machen. Dazu sind zuerst chemische Analysen aller Gesteinstypen der Lithosphäre nötig, die aus dem Magma hervorgingen, und zweitens die Kenntnis ihrer Verbreitung auf der Erde. Zur Beantwortung dieser Frage fehlt hauptsächlich die zweite Bedingung (geologische Beschaffenheit des ozeanischen Bodens kennen wir nicht!), infolgedessen ist dieselbe unlösbar. Die zweite Aufgabe lautet: Es ist die Frage zu beantworten, ob es nur eine Stammaterie der Tiefengesteine gibt (ob das Magma stofflich homogen ist.) Da sich die mittlere Zusammensetzung derselben nicht präzise erschließen läßt, ist auch diese zweite Aufgabe unlösbar.

Es gibt aber doch Fälle, wo wir einen induktiven Schluß bei ähnlicher Gelegenheit anwenden können. Wenn z. B. alle Analysen, besonders alle jene, deren Richtigkeit sich nicht anzweifeln läßt, ein und dasselbe Merkmal zeigen würden, dürfte man mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit sagen, daß dasselbe auch für die vorausgesetzte Stammaterie gültig ist. Und in der Tat läßt sich bei den meisten Analysen ein *Überschuß an  $SiO_2$  über dem bunten Durcheinander der übrigen Oxyde* feststellen. Es zeigt sich weiter, daß *die Menge von Al mit Fe mindestens Gleichgewicht mit der Summe  $K + Na + Ca$  zu halten strebt. Wenn viel  $K + Na$  vor-*

<sup>1)</sup> Wegen der großen analytischen Fehler bei der Bestimmung der Alkalien sind alle solche Folgerungen zweifelhaft. Cfr. Doelter C. T. M. p. M. XXI., 1902, S. 196.

handen ist, ist Na im Überschusse, und wenn sich Na + K vermindern, hat Mg zugenommen. Endlich läßt sich ein Antagonismus zwischen Mg und Al, auch zwischen Mg und Si erkennen. Darin dürfte man die Hauptmerkmale der hypothetischen Urmaterie erblicken.<sup>1)</sup> Der Inhalt der Sätze deutet kaum auf eine Homogenität der Materie hin.

Dieselbe war anfänglich und ist noch jetzt mit SiO<sub>2</sub> so durchsetzt, daß sie eine die Hydro- und Atmosphäre gemahnende Silicosphäre darstellt. Die übrigen Oxyde kommen darin wie eine Art von Verunreinigung vor, die sich ändert und aus dem hypothetischen Urmagma in Wirklichkeit eine Menge von Magmen hervorbringt. Nach Rosenbusch sollte noch die Konstanz der Molekularzahl und Metallatomzahl ein gemeinsames Merkmal sein. Ich habe gezeigt, daß diese Konstanz (die überdies nicht korrekt ist) kein aus den Analysen allein folgendes Ergebnis ist, sondern daß sie als Konstanz der Atomgewichte vor den Analysen bestand und in dem Verhältnis des Molekulargewichtes SiO<sub>2</sub> zu den übrigen Oxyden ihren Grund hat.

Obgleich sich die Molekularzahl und die Metallatomzahl für die Spekulation wertlos und wegen des Schwankens innerhalb der Magmenreihen für die Klassifikation als unfruchtbar erwiesen haben, gelang es mir doch an der Hand der Metallatomzahl für das letztere Ziel ein wichtiges Mittel zu entdecken. Das ist auch der positive Erfolg meiner Arbeit.

<sup>1)</sup> Ähnlich stellt Rosenbusch (l. c. S. 225) Parallelismus zwischen Tonerde und Alkalien + Kalk, Antagonismus zwischen Tonerde und Magnesia, aber auch zwischen Kieselsäure und zunehmender Magnesia fest. Loewinson-Lessing (Compt. rend. de la VII session du Congrès Géol. Internat. Russie 1897. Pétersbourg 1899) hebt hervor: 1. Antagonismus zwischen Alkalien und alkalischen Erden, wodurch eine Einteilung der Gesteine in alkalische und erdalkalische als berechtigt erscheint; 2. Parallelismus zwischen der Tonerde und den Alkalien. Andere Beziehungen gelten nach Loewinson-Lessing nur für größere oder kleinere Magmengruppen, infolgedessen legt er denselben keine allgemeine Bedeutung bei.

Aus Osann's (Versuch einer chemischen Klassifikation der Gesteine, T. M. p. M., XXII., 1903, S. 342 ff.) allgemeinen Resultaten will ich folgende Eigenschaften herausnehmen: Es gibt Übergangsglieder zwischen den durch bestimmte Werte von  $s, a, c, f, n, m, k$  ( $s$  = die molekulare Menge SiO<sub>2</sub>;  $a = 20A : \omega$ ,  $c = 20C : \omega$ ,  $f = 20F : \omega$ , wo  $A = (Na, K)_2O$ ,  $C = Al_2O_3 - A$ ,  $F = (Fe, Mg, Ca)O - C$ ;  $\omega = A + C + F$ ;  $n = \frac{10 Na_2O}{(Na, K)_2O}$ ;  $\frac{m}{10 - m} = \frac{(Mg, Fe, Mn, Co, Ni)O}{(Ca, Ba, Sr)O}$ ;

$k = \frac{s}{6A + 2C + F}$ ) charakterisierten Familien, welche folglich nicht scharf ge-

trennt sind und sich im allgemeinen mit den Rosenbuschschen decken. Die Zahl  $s$  schwankt zwischen 82% und 39% und ist ganz wesentlich von  $a$  abhängig (nimmt mit ihm gleichzeitig und im allgemeinen gleichmäßig ab), die Zahl  $a$  schwankt zwischen 17 und 0,  $c$  zwischen 15 und 0,  $f$  zwischen 20 und 1,  $k$  zwischen 1·8 und 0·5. Gesteine mit hohem Werte von  $n$  d. h.  $> 5\cdot5$  herrschen gegen die der Kalivormacht vor, der Wert  $m$  wechselt stark, aber auch der Wert  $n$  ist bei sauren Gesteinen einem starken Wechsel unterworfen.



Rosenbusch abstrahierte von der Anzahl der Sauerstoffatome und fand eben dadurch, daß die Anzahl der sowohl in den sauersten als auch in den basischen Magmen enthaltenen Metallatome „konstant“ ist. Die Gesteine beherbergen daneben aber keine konstante, sondern eine variable Anzahl von Sauerstoffatomen. Wenn Rosenbusch nur Metallatomzahlen der Gesteine nebeneinanderstellt und bei der graphischen Darstellung auf *dieselbe* Distanz d. h. auf 100 umgerechnet einträgt, wird das Bild der Gesteine wegen des Sauerstoffausfalles sozusagen verzerrt. Die Sauerstoffatomzahlen sind auch darzustellen. Die Sauerstoffatomzahl ist hauptsächlich wegen des Überschusses von *Si* immer größer als die Metallatomzahl. In den 52 Analysen Rosenbusch' (l. c. S. 228 und 229) macht sie 265 bis 310 aus.

Loewinson-Lessing<sup>1)</sup> benutzte bereits das Verhältnis des *O* der *Si O<sub>2</sub>* zu dem *O* sämtlicher Basen zur Klassifikation der Gesteine. Er nennt es Aciditätskoeffizient  $\alpha$ . Schon früher bediente sich Justus Roth<sup>2)</sup> zur Diskussion einer Gesteinsanalyse der sogenannten Sauerstoffproportionen und des Sauerstoffquotienten. Als Sauerstoffquotienten bezeichnete er das Verhältnis des Sauerstoffs sämtlicher Basen zu demjenigen der Kieselsäure *Si O<sub>2</sub>*, zu welchem Verhältnis der Loewinson-Lessing's Aciditätskoeffizient  $\alpha$  den reciproken Wert darstellt. Sauerstoffproportionen sind Verhältnisse der in einzelnen Oxyden vorhandenen Sauerstoffgewichte z. B.  $\frac{b \times 3 \times 16}{102} : \frac{a \times 2 \times 16}{60}$ , wo *b* das prozentige Gewicht von *Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>*, *a* das der *Si O<sub>2</sub>* bedeutet.

In  $\overset{''''}{R}$  Molekülen *Si O<sub>2</sub>* einer Analyse sind  $\overset{''''}{R}$  Atome *Si* und  $2 \overset{''''}{R}$  Atome *O*, in  $\overset{''}{R}$  Molekülen der dreiwertigen Basen (*Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>*, *Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>*)  $2 \overset{''}{R}$  Atome *Al* + *Fe* und  $3 \overset{''}{R}$  Atome *O*, in  $\overset{''}{R}$  Molekülen der zweiwertigen Basen (*Fe O*, *Mg O*, *Ca O*)  $\overset{''}{R}$  Atome *Fe* + *Mg* + *Ca* und  $\overset{''}{R}$  Atome *O*, in  $\overset{'}{R}$  Molekülen der einwertigen Basen (*K<sub>2</sub>O*, *Na<sub>2</sub>O*)  $2 \overset{'}{R}$  Atome *K* + *Na* und  $\overset{'}{R}$  Atome *O* enthalten. Es läßt sich folglich der Aciditätskoeffizient  $\alpha$  als

$$\alpha = 2 \overset{''''}{R} : (3 \overset{''}{R} + \overset{''}{R} + \overset{'}{R})$$

ausdrücken, wodurch er in ein Verhältnis der Molekularzahlen überführt ist. Falls aber  $\overset{''''}{R}$ ,  $\overset{''}{R}$ ,  $\overset{''}{R}$ ,  $\overset{'}{R}$  Metallatomzahlen bezeichnen, folgt für  $\alpha$  der Ausdruck

$$\alpha = 2 \overset{''''}{R} : \left( \frac{3}{2} \overset{''}{R} + \overset{''}{R} + \frac{1}{2} \overset{'}{R} \right) = 4 \overset{''''}{R} : (3 \overset{''}{R} + 2 \overset{''}{R} + \overset{'}{R}).$$

<sup>1)</sup> Loewinson-Lessing: l. c. S. 193 ff. Unter  $\beta$  versteht er die Zahl der Basenmoleküle auf 100 Moleküle der Kieselsäure.

<sup>2)</sup> Justus Roth: Die Gesteinsanalysen ec. 1861.



Aus beiden Ausdrücken für  $\alpha$  ist zu sehen, daß sie nur ein verändertes Verhältnis von Molekular- resp. Metallatomzahlen darstellen. Von dem eigentlichen Verhältnis des Sauerstoffs zu der Metallatomzahl ev. Molekularzahl sagt  $\alpha$  nichts aus.<sup>1)</sup> In J. Roth's Sauerstoffproportionen sind ähnliche Werte enthalten.

Im Osann'schen Kieselsäurekoeffizienten  $k = \frac{s}{6A + 2C + F}$

ist das Verhältnis der gesamten Molekularmenge von  $SiO_2$  ( $s$ ) zu der in den Alkalifeldspaten  $[(K_2, Na_2)O \cdot Al_2O_3 \cdot 6SiO_2]$  an A-Alkalien gebundenen (also  $6A$ ), zu der in dem Kalifeldspate  $(CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2)$  an C-Kalkmoleküle gebundenen (also  $2C$ ), und endlich zu der in Metasilikaten  $[(Mg, Fe)O \cdot SiO_2]$  an F-färbende Oxyde ( $MgO, FeO$ ) gebundenen Kieselsäure (also  $F$ ) ausgedrückt. Wenn  $R$  Molekularzahl bezeichnet, ist

$$k = s : (6A + 2C + F) = \overset{''''}{R} : (6 \overset{\cdot}{R} + 2 \overset{''}{R}_2 + \overset{''}{R}_1) = \overset{''''}{R} : (\overset{''}{R}_1 + 2 \overset{''}{R}_2 + 6 \overset{\cdot}{R});$$

wenn aber  $R$  Metallatomzahl bedeutet, ist

$$k = \overset{''''}{R} : (3 \overset{\cdot}{R} + 2 \overset{''}{R}_2 + \overset{''}{R}_1) = \overset{''''}{R} : (\overset{''}{R}_1 + 2 \overset{''}{R}_2 + 3 \overset{\cdot}{R}).$$

Falls  $k \leq 1$ , so sind andere Silikate oder freier Quarz vorhanden.<sup>2)</sup> Es ist klar, daß der Koeffizient  $k$  nur zur Beantwortung dieser speziellen Frage taugen will, da in demselben keine Rücksicht auf dreiwertige Metalle genommen ist. Wie weit diese Beantwortung mit dem Koeffizienten  $k$  gelingt, zeigt die folgende Betrachtung. Wenn alle Alkalien, Kalk und färbende Oxyde feldspatartig ev. metasilikatisch gebunden wären, dann müßte wohl  $k > 1$  freie Kieselsäure bedeuten. Falls aber Gesteine mit anderen Silikaten durch diese Berechnung in einen feldspatartigen ev. metasilikatischen Zustand gebracht werden, kann  $k$  keineswegs dieselbe Bedeutung behalten. Setzt man in den Nenner der obigen Bruchzahl  $6A$  anstatt  $4A$  (bei dem Vorhandensein von Leucit), oder anstatt  $3A$  (bei dem Vorhandensein von Biotit), oder anstatt  $2A$  (b. d. V. v. Nephelin), setzt man  $2C$  anstatt  $1C$  (b. d. V. v. Pyroxen und Amphibol),  $F$  anstatt  $\frac{1}{2}F$  (b. d. V. v. Orthosilikaten) und ist nur die zur Bildung der in Klammern genannten Silikate nötige Kieselsäure vorhanden, dann muß der

<sup>1)</sup> Es läßt sich ähnlich zeigen, daß

$$\beta = \frac{100 (\overset{''''}{R} + \overset{''}{R} + \overset{\cdot}{R})}{\overset{''''}{R}}, \text{ wo } R \text{ die Molekularzahlen bedeutet, oder}$$

$$\beta = \frac{50 (\overset{''''}{R} + 2 \overset{''}{R} + \overset{\cdot}{R})}{\overset{''''}{R}}, \text{ wo } R \text{ die Metallatomzahlen bedeutet.}$$

<sup>2)</sup> A. Osann (l. c. S. 345) sagt: Mit Eintritt des Quarzes steigt der Wert  $k$ , bei Anwesenheit von Olivin und Feldspatvertretern sinkt er unter 1 herab.

Wert  $k < 1$  sein. Nur bei der Abwesenheit der den Wert  $k$  herabdrückenden Silikate bedeutet der Wert  $k > 1$ , daß freier Quarz im frischen Gestein zugegen ist. Wenn der Wert  $k$  auf die genannte Weise herabgedrückt ist, kann auch bei  $k < 1$  der Quarz anwesend sein z. B. beim Åkerit (Rosensbusch l. c. S. 132, N. 4), welcher quarzführend ist und doch  $k = 0.9$  aufweist. Daß bei  $k = 1$  nicht notwendig nur die feldspatigen Silikate und Metasilikate, sondern auch die Nephelin-Leucitsilikate mit Olivin-Gruppe oder Pyroxenamphibol-Gruppe anstatt des Anorthits gesteinsbildend auftreten können, ergibt sich von selbst. Die Eventualitäten sprechen gegen die Eindeutigkeit des Kieselsäurekoeffizienten  $k$ .

Der Loewinson-Lessingsche Wert  $\alpha$  bietet bei der Klassifikation für die an Si reichen Gesteine (Hauptgruppe D) genügend Raum (2.3 bis 4.76), für die basischen (Hauptgruppe B) wenig (1.4 bis 2.2), für ultrabasische (Hauptgruppe A) wieder mehr Raum (0.35 bis 1.4). Falls  $2\overset{''''}{R} = 3\overset{'''}{R} + \overset{''}{R} + \overset{'}{R}$  ( $R =$  Metallatomzahl), dann ist  $\alpha = 2$ ; man befindet sich in der Nähe der neutralen Gesteine (Hauptgruppe C, wo  $\alpha = 2$  bis 2.5). Durch die Benützung der Metallatomzahlen, die der Klassifikation Loewinson-Lessings zu Grunde gelegt sind, erklären sich sowohl die Vorteile als auch die Nachteile seines Systems. Ein Vorteil ist, daß die Gesteine eine einzige Reihe bilden, ein Nachteil, daß verwandte Eruptive in verschiedene Hauptgruppen gelangen (z. B. Diorit in H.-g. B, Andesit in H.-g. C, Granodiorit und Dacit in H.-g. D)<sup>1)</sup>. Die Hauptgruppen müssen in Untergruppen nach dem Verhältnis  $\overset{'}{R}_2O : \overset{''}{R}O$  (in Molekularzahlen) in erdalkalische ( $\overset{'}{R}_2O < \overset{''}{R}O$ ), intermediäre ( $\overset{'}{R}_2O = \overset{''}{R}O$ ) und alkalische Magmen ( $\overset{'}{R}_2O > \overset{''}{R}O$ ) geteilt (in der Hauptgruppe A kommt noch eine Untergruppe „Tonerdemagmen“, in der Hauptgruppe B eine solche von fast oder ganz tonerdefreien Magmen vor) und in denselben natürliche Familien aufgestellt werden. Dabei verliert sich der klassifikatorische Wert der Zahl  $\alpha$ , da sie infolge der Einführung der Untergruppen innerhalb der Hauptgruppen verschiedenartig oszilliert. Es ist klar, daß denselben Dienst wie  $\alpha$  die Metallatomzahl von Si oder die Molekularzahl von  $SiO_2$  verrichten würde. Man würde dann die Arbeit des Berechnens von  $\alpha$  ersparen.

Ich will hervorheben, daß das Verhältnis der Anzahl von Sauerstoffatomen zu der Anzahl der Metallatome (die für 100 Sauerstoffatome vorhandene Anzahl der Metallatome) eine für die Klassifikation verwendbare Größe ist. Es ist nämlich durch dieselbe ausgedrückt, auf welche Weise vier-, drei-, zwei- und einwertige Metallatome an der Zusammensetzung eines Gesteines teilnehmen. Die Sauerstoffatomzahl wächst am schnellsten mit der Si-Atomzahl, am langsamsten mit der K-Na-Atomzahl und zwar

<sup>1)</sup> Bereits in der Rezension Milchs (C. f. M. G. P. 1900, S. 184) ausgesprochen.

proportional mit  $2 \overset{''''}{R}, \frac{3}{2} \overset{'''}{R}, \overset{''}{R}, \frac{1}{2} \overset{'}{R}$ , wo  $R$  die Metallatomzahl der verschiedenwertigen Metalle vertritt. Das Verhältnis der Summe dieser mit Metallen verbundenen Sauerstoffe zu der Summe der Metallatome

$$\frac{2 \overset{''''}{R} + \frac{3}{2} \overset{'''}{R} + \overset{''}{R} + \frac{1}{2} \overset{'}{R}}{\overset{''''}{R} + \overset{'''}{R} + \overset{''}{R} + \overset{'}{R}} = \frac{4 \overset{''''}{R} + 3 \overset{'''}{R} + 2 \overset{''}{R} + \overset{'}{R}}{2 (\overset{''''}{R} + \overset{'''}{R} + \overset{''}{R} + \overset{'}{R})} = \frac{100}{\gamma}$$

und daraus folgendes

$$\gamma = \frac{200 (\overset{''''}{R} + \overset{'''}{R} + \overset{''}{R} + \overset{'}{R})}{4 \overset{''''}{R} + 3 \overset{'''}{R} + 2 \overset{''}{R} + \overset{'}{R}}$$

ist eine in den Magmenreihen (Rosenbusch' oft regelmäßig ansteigende Größe. Theoretische Grenzen derselben werden durch die Annahme gefunden, daß eine Atomenart die maximale Anzahl erreiche (an 100 Sauerstoffatome entfällt in  $SiO_2$  50  $Si$ , folglich  $\gamma = 50\%$  u. s. f.) : 50 für  $SiO_2$ , 66.7 für  $\overset{''}{R}_2O_3$ , 100 für  $\overset{'''}{R}O$ , 200 für  $\overset{''''}{R}_2O$ .

In der Reihe der foyaitischen Magmen (Rosenbusch l. c. S. 228, 229) gelangt das Verhältnis  $\gamma$  zu folgenden Werten (in Klammern Nummer der Analyse): 57.1 (1), 58.0 (2) u. s. w., in der Reihe der theralitischen Magmen : 65.4 (20), 65.7 (18) u. s. w., in der Reihe der granitodioritischen Magmen : 57.9 (1), 58.6 (2), 58.8 (4) u. s. w., in der Reihe der gabbroperidotitischen Magmen : 63.9 (18), 65.4 (19) u. s. w. Fast genau stimmt die  $\gamma$ -Folge mit der Rosenbuschschen Ordnung der Analysen in der Reihe der gabbroperidotitischen Magmen ( $\gamma = 63.9$  bis 74.7) überein, eine gute Übereinstimmung hat sie auch mit der der foyaitischen ( $\gamma = 57.1$  bis 73.2) und theralitischen ( $\gamma = 65.4$  bis 69.6) Sippe, ganz verändert ist sie aber hinsichtlich der granitodioritischen Reihe ( $\gamma = 57.9$  bis 64.4)<sup>2)</sup>. Die letztere Erscheinung ist das Ergebnis der unregelmäßigen Oszillation einzelner Metallatomzahlen in dem Verzeichnisse von Rosenbusch, wo  $Si$ -Atomzahl 5mal,  $Al$  5mal,  $Fe$  5mal,  $Mg$  4mal,  $Ca$  5mal,  $Na$  6mal,  $K$  4mal ansteigt und diese „Wellen“ keineswegs parallel laufen.

Es ist klar, daß man mit dem Koeffizienten  $\gamma$ , ohne vorherige umständliche Erforschung des Verhältnisses einer Analyse zu anderen Analysen, sofort bestimmen kann, wie weit diese Analyse vom Anfange

<sup>1)</sup> Falls  $R$  Metallatomprozent bezeichnet, dann ist

$$\gamma = 20.000 : (4 \overset{''''}{R} + 3 \overset{'''}{R} + 2 \overset{''}{R} + \overset{'}{R}).$$

<sup>2)</sup> Metallatomzahl des Hautzenberger Granits (Nr. 1) ist richtiger 173 (nicht 178).



der Reihe entfernt ist. Der Koeffizient  $\gamma$  stellt eine Abszisse dar; als Ordinate, wenn man die Zuständigkeit zu den *Rosenbusch*' Sippen erkennen will, kann am besten die Differenz  $Na-K$  (in Metallatomzahlen) dienen (positive Zahlen nach oben). Die foyaitisch-thermalitischen Magmen sind nämlich nach *Rosenbusch*' Kerntheorie diejenigen, in welchen  $Na$  und  $K$ , besonders  $Na$ , vorherrschen. Diese Ordinate hilft aber kaum bei den Gliedern, in welchen die Reihen zusammenfließen, dann muß doch eine ausführlichere Untersuchung Platz greifen.

Mit der *Loewinson-Lessings* Klassifikation läßt sich  $\gamma$  in keine direkte Verbindung bringen, da in  $\gamma$  die Summe der Sauerstoffatomzahlen, in  $\alpha$  ein Verhältnis zwischen zwei Teilen derselben Summe enthalten ist. Weil aber *Si* am meisten über die Anzahl der Sauerstoffatome entscheidet, ist doch zwischen  $\gamma$  und  $\frac{1}{\alpha}$  ein angenäherter Parallelismus vorhanden.

Endlich sei noch zum Koeffizienten  $\gamma$  eine spekulative Betrachtung zugefügt. Denken wir uns den Vorgang, wie die Oxydation der Metallatome im Erdinnern stattfindet.<sup>1)</sup> Der Umstand, ob dabei die Sauerstoffatome unter den Metallatomen vorhanden sind oder erst von der Oberfläche herkommen, scheint dabei belanglos zu sein. Falls weniger Sauerstoff als nötig, zur Verfügung stände, dann bleiben einige Metallatome unoxydiert. Die Frage, welche von den Metallatomen den Vorteil der Oxydation haben werden, läßt sich nicht in dem Sinne beantworten, daß es diejenigen sein werden, welche mehr Affinität<sup>2)</sup> besitzen. Es ist wohl wahrscheinlich, daß in der unterirdischen Glut alle Metallatome in dieser Hinsicht einander gleich sind. Sonst müßte bei einer ungenügenden Sauerstoffszufuhr — von dem Mangel an Sauerstoff zeugt der metallische Erdkern<sup>3)</sup> — ein 100% des prävalenten Oxyds enthaltendes Gestein entstehen. Dasselbe müßte auch in der Erdkruste öfters vorkommen, was aber, von dem winzigen *SiO<sub>2</sub>*-Vorkommen und Erzgängen absehend, keinswegs zutrifft. Es folgt, daß bei der ungenügenden *O*-Zufuhr nur physikalische Bedingungen entscheiden. Die nächsten (an der Oberfläche befindlichen) Metallatome werden der Oxydation anheimfallen. Es wird eine wenig mächtige Schicht oxydiert, deren Verhältnis der Oxyde genau das Verhältnis der Metallatome der glutigen Unterlage (*Si* : *Al<sub>2</sub>* : *Fe<sub>2</sub>* : *Fe* : *Ca* : *Na<sub>2</sub>* : *K<sub>2</sub>*) wiedergibt.

<sup>1)</sup> Der Vereinfachung wegen ist der intermediären Verbindungen (Chloride, Silizide, Carbide, Phosphide, Sulphide etc.) nicht gedacht.

<sup>2)</sup> *W. A. Wahl* (Beiträge zur Chemie der Meteoriten. *Z. f. anorg. Chemie* 69, 1911, S. 52 ff.) hat folgende absteigende Reihenfolge der Affinität an der Hand der Bildungswärme der Oxyde festgestellt: *Mg, Ca, Al, Na, K, Si, C, Fe, Ni, Cu*.

<sup>3)</sup> Auch die Lava, die heute noch gefördert wird, besitzt reduzierende Eigenschaften. Freier Sauerstoff kommt nicht im Magma vor. (Cfr. *F. v. Wolff*: *Der Vulkanismus*. 1914, S. 98 u. f.)



Mag also die *O*-Zufuhr genügend oder ungenügend sein, so kommen doch Oxydengemische heraus, die dieselbe metallatomische Zusammensetzung wie die Metallegierung des Erdinnern aufweisen. Wenn diese Metallegierung homogen wäre, müßten auch die aus dem Oxydengemische entstandenen Gesteine dem Analytiker stets dieselben Resultate liefern, was aber keineswegs zutrifft. Die Wanderung der Oxyde und mineralischen Kombinationen derselben dürfte Rand- und Schlierenbildungen erklären, keineswegs aber die chemische Verschiedenheit ganzer enormer, hunderte *km* breiter Komplexe. Es scheint, daß diese chemische Verschiedenheit in der glutigen Metallatombathosphäre ihren Grund hat und daß folglich das Urmagma inhomogen ist. Es gibt verschiedene Teilmagmen, die aus differenten Metallegierungen hervorgegangen sind. Die Metallegierungen liefern auf *jedes* 100 eindringender Sauerstoffatome  $\gamma$  Metallatome zur Oxydation. Aus den Oxyden werden dann Mineralien gebildet.

Die alte Auffassung, daß die verschiedensten Eruptivgesteine eine ziemlich ununterbrochene Reihe zwischen zwei Endgliedern darstellen (Bunsen 1851, Durocher 1857), ließ man fallen, als man erkannte, daß sich durch Mischung dieser zwei Endglieder nicht die wirklichen Massenverhältnisse der Analysen oder umgekehrt, aus diesen Analysen zwei der Bedingung entsprechende Endglieder rechnermäßig ableiten lassen.<sup>1)</sup> Zu demselben negativen Ergebnis führte auch die Annahme von 3 oder 4 Endgliedern. Man meinte dann, daß es nur zwei Auswege gäbe: entweder für jedes Eruptivgestein eine besondere Quelle in der Bathosphäre oder aber nur ein einheitliches sich spaltendes Urmagma für alle Eruptivgesteine voraussetzen zu müssen, und entschied sich für die letztere Möglichkeit. Dazu sei zuerst bemerkt, daß zu den beiden noch eine dritte Möglichkeit sich logisch zugesellt: Es gibt mehrere spaltbare Urmagmen.

Die alte Idee wurde wegen der Unmöglichkeit einer rechnermäßigen Ableitung der Zwischenglieder aus den Endgliedern aufgegeben. Lassen sich aber aus einem sich spaltenden Urmagma rechnermäßig zwei wirklich existierende „Spaltungsprodukte“ ableiten? Ist nicht dabei ein zwar umgekehrter aber wesentlich derselbe Prozeß im Spiele? Im ersten Falle sollen zwei Summanden durch eine Summe, im zweiten eine Summe durch zwei Summanden erklärt werden, was aber nicht gelingt.

Tatsächlich also ist nicht bei der Homogenitätshypothese der Umstand wichtig, daß von nur einem Magma und infolgedessen von der Spaltung anstatt Mischung gesprochen wird, als vielmehr daß eine Wanderung bestimmter Oxyde und deren Anhäufung an einzelnen Orten angenommen wird. Wenn man aber einmal diese Wanderung grundsätzlich zugibt, so ist zugleich auch die Einheitlichkeit des Magma preisgegeben. Wollte man den Anfang des Wanderns erst in das Stadium der Bildung von Oxydenkombinationen oder sogar der Kristallisation verlegen, was

<sup>1)</sup> Cfr. A. Harker: The Natural History of igneous Rocks. 1909, S. 309 ff.

schon in der Nähe der Oberfläche sich abspielt, dürfte man die Differenziation innerhalb der einzelnen Bassins erklären, keineswegs aber diejenige der Bassins selbst.

\* \* \*

Mit Rücksicht auf die gewiß enorm hohe Temperatur des Erdinnern dürfen wir mit Günther und Lukašević<sup>1)</sup> annehmen, daß sich dort alle Stoffe im überkritischen Zustande befinden und daher eine gasförmige Phase bilden. Diese müßte homogen<sup>2)</sup> sein, da den Gasen eine unbegrenzte Mischbarkeit zukommt. Dieser gasförmige Kern ist von einer flüssigen Schicht umgeben, welche ihrerseits von der festen Erdrinde umschlossen wird.

Die Gase des Erdinnern werden sich nun in der flüssigen Schicht auflösen, und zwar jedes in einer Menge, die seinem Partialdruck<sup>3)</sup> in der gasförmigen Phase und seiner Lösungsfähigkeit entspricht. Das bedingt zum Teil auch eine andere Zusammensetzung der flüssigen Schicht der gasförmigen gegenüber, stört aber keinesfalls die Homogenität der ersteren nahe der Grenzfläche. Wäre die Temperatur der flüssigen Schicht in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmäßig, so müßten die Konzentrationen der erwähnten Gase in beiden Phasen unabhängig vom Druck in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen (Absorptionsgesetz von Henry). Die Temperatur der flüssigen Zone nimmt aber nach oben allmählich ab, und da der Löslichkeitskoeffizient von der Temperatur abhängig ist, so wird sich auch die Gaskonzentration mit der Höhe kontinuierlich ändern.

Im Laufe der geologischen Entwicklung wird allem Anscheine nach nicht nur die feste Phase, sondern auch die flüssige Phase des Erdkörpers mächtiger, wodurch sich die innere Abgrenzung der festen Phase von der gasförmigen Phase relativ mehr und mehr entfernt. Dadurch läßt sich erklären, warum der Gasgehalt der rezenten Laven klein, der der terziären Eruptivgesteine dreimal, der paläozoischen und präkambrischen siebenmal, der archaischen zwanzigmal größer ist (absolute Daten der Chamberlins Analysen siehe in Wolff: Vulkanismus S. 73 ff.). Wolff<sup>4)</sup> ist der Ansicht, daß im Laufe der Zeit zu den primären

1) Лукашевичъ, I. Д.: Механика земной коры. Verh. d. kaiserl. russ. miner. Ges. St. Petersburg, 1907, S. 521 ff.

2) Da dieses homogene System eine im Vergleich zum Erdradius bedeutende Mächtigkeit wohl besitzen muß, wird eine wenn auch unbedeutende Trennung nach Dichte (Prinzip von Gouy und Chaperon) auftreten. Diese Wirkung wird durch die Zentrifugalkraft ein wenig gehemmt.

3) Streng gilt es von einatomigen Gasen und geschmolzenen Metallen (A. Sieverts und H. Oehme, Ber. d. D. chem. Ges. 46 [1913] 1238). Zweiatomige Gase werden einatomig (mit  $\sqrt{p}$  proportional) absorbiert.

4) l. c. S. 80. Auch H. E. Boeke (Grundlagen der phys.-chemischen Petrographie, 1915, S. 226) meint, daß die Zunahme des Gasgehaltes mit dem Alter der

Gasen — deren Menge setzt er wohl der der rezenten Laven gleich. — von außen neue Gasmengen hinzukommen, nachdem der Gestaltungsprozeß der Gesteine bereits zum Abschluß gekommen ist. Den Ursprung der Gase sucht er keineswegs im gasförmigen Erdinnern, sondern „unter anderem in den Gasemanationen beim Zerfall radioaktiver Elemente“. Seine Ansicht ist im konsequenten Zusammenhange mit seiner Theorie über den zum Teil radioaktiven Ursprung der innerirdischen Wärme. Man muß aber bedenken, daß sowohl die bereits verfestigten Gesteine, als auch die als rezente Laven herausgeführten Magmen eine gleiche Zeit unter der radioaktiven Wirkung standen. Nur wenn man annimmt, daß bei Intrusion und Extrusion des Magma eine gänzliche Entgasung stattfindet, wäre die Annahme Wolffs einwandfrei, dies läßt sich aber bei diesen erst bei einer hohen ( $400^{\circ}$ — $800^{\circ}$ ) Temperatur entweichenden Gasen kaum behaupten. Es zeugen davon schon die Versuche A. Brun<sup>1)</sup>; junge Eruptive („Roches actives“) explodieren fast in der Nähe ihres Schmelzpunktes, Granit, Gabbro und andere „tote Gesteine“ weisen keine lebhaften Erscheinungen auf, trotzdem sie eine größere Menge der gasförmigen Phase (mechanisch eingeschlossen oder okkludiert) enthalten. Es ist vielmehr anzunehmen, daß die explodierenden Gase (hauptsächlich *HCl*) der jungen Eruptivgesteine einen Rest des im Magma ursprünglich anwesenden Gasehaltes darstellen — die Gase lösen sich doch im Magma ihrem Drucke proportional auf und werden beim Aufsteigen der Lava während der Druckentlastung nur teilweise frei —, durch Vollkristallisation der Laven und Verwitterung derselben und auch der alten Eruptivgesteine verlieren sich allmählich die explodierenden Gase.<sup>2)</sup>

Die von mir chemisch begründete Verschiedenheit der aufeinander folgenden Zonen der flüssigen Schicht läßt sich nicht mit einer primären Differentiation der Autoren identifizieren, unter welcher man einen innerhalb der schmelzflüssigen Phase (also vor dem Beginne der Kristallisation) sich abspielenden Trennungsvorgang ohne Substanzzufuhr von außen und ohne Änderung der Phase versteht. Diese primäre Differentiation halte ich für unmöglich, insofern sie nur auf der Diffusion basiert. Das Ziel der Diffusion ist nämlich eine gleichmäßige Verteilung der Komponenten, keineswegs also eine Differenzierung. Der primären Differentiation wird übrigens wegen der Viskosität des Magma von Autoren<sup>3)</sup> eine geringe Bedeutung zugeschrieben. Ähnliches gilt von dem Soré-

---

Gesteine auf einen Nachschub oder vielleicht z. T. auf die Wirkung radioaktiver Elemente deute.

<sup>1)</sup> A. Brun: Recherches sur l'Exhalation volcanique. Genf. 1911.

<sup>2)</sup> Von einem enormen Reichtum der Gase zeugt z. B. die junge flüssige Oberfläche der Sonne.

<sup>3)</sup> Cfr. G. F. Becker: Some queries on rock differentiation. Am. Journ. of Science. 1897. S. 21 ff.



Ludwigschen<sup>1)</sup> Prinzip, welches besagt, daß eine Wanderung des gelösten Stoffes längs des Temperaturgefälles (auch Druckgefälles) stattfindet, wenn die Lösung in ihren Teilen verschiedene Temperaturen (Drucke) aufweist. Damit wollte man die Anhäufung der schwerer löslichen Verbindungen an den Abkühlungsflächen erklären; aber der Effekt der Diffusion längs des Temperatur-(Druck-)Gefälles kann nicht groß sein, da sie durch zu hohe Viskosität verhindert wird, und wenn nicht, dann heben wieder Konvektionsströmungen die Diffusion auf. Im Einklange damit ist die Beobachtung, daß die Abscheidung der basischen Fazies an der Abkühlungsfläche keine allgemeine ist. Doelter<sup>2)</sup> ordnete die Gesteine nach der Viskosität und hat nicht einmal bei dünnflüssigen (basischen) Schmelzen eine Differenzierung beobachtet, was er ähnlich wie Michel Lévy, Sollas und Becker mit dem Fehlen der inneren Beweglichkeit erklärt. Er meint aber, daß unter hohem Druck und bei Gegenwart der Mineralisatoren doch die nötigen Bewegungen möglich wären. Nach meiner Ansicht läßt sich die Möglichkeit der Bewegungen wohl nicht bestreiten, aber eine andere Frage ist es, ob es dabei wirklich zu einer Anhäufung bestimmter Stoffe und nicht eher zu einer angenähert gleichmäßigen Verteilung derselben — die Randzonen etwa ausgenommen — kommen würde. Die spezifisch schweren Stoffe konnten sich bei Versuchen Doelters erst beim Beginn des Erstarrens am Boden des Tiegels oder (vom Gas getragen) an der Oberfläche absetzen.

In dem von mir angenommenen flüssigen Schichtsystem können bei tektonischen Vorgängen untere Schichten teilweise in die oberen hineingepreßt werden, wie man es bei der Eruptionstätigkeit an der Oberfläche beobachtet. Die strömende Bewegung kann durch Dichteänderung (stärkere Abkühlung, lokale Gaszufuhr oder Aufsteigen juveniler Gase nach Sueß) veranlaßt werden. Die vertikale (radiale) chemische Inhomogenität wird dadurch zur horizontalen (tangentialen). Kann aber diese horizontale Inhomogenität dauernd erhalten bleiben? Wird nicht der in die obere Schicht hineingedrungene Teil der unteren Schicht von jener aufgelöst werden? Ich meine, daß es keineswegs im vollen Maße geschehen kann, weil das Magma im allgemeinen nicht dünnflüssig ist, ausgenommen basische (an  $FeO$  und  $MnO$  reiche) Partien desselben. Saure (an  $K_2O$ ,  $Na_2O$ ,  $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$  reiche) Silikatschmelzen sind nämlich zähflüssig (die  $Al_2O_3$ -Schmelzen wie Teer<sup>3)</sup>), damit stimmt die Beobachtung der saueren Laven überein. Der osmotische Druck d. h. die Kraft, welche den gelösten Stoff vom Orte höherer Konzentration zu solchem niederer treibt, ist dem Druck in Gasen analog. Im Gase stellt sich Gleichgewicht der Dichte bald her, in den Flüssigkeiten träge und langsam, da die Rei-

<sup>1)</sup> Wien. Akad. Ber. 20, 539.

<sup>2)</sup> C. Doelter: Die chemische Zusammensetzung und die Genesis der Monzonitgesteine T. M. p. M. XXI., 1902, S. 217.

<sup>3)</sup> F. v. Wolflf l. c. S. 65.



bungswiderstände in den letzteren groß sind. Die innere Reibung ist eine der Bewegung der Masseteilchen entgegenwirkende Kraft. Sie ist dem Diffusionskoeffizienten umgekehrt proportional. Da der Diffusionskoeffizient mit der Temperatur wächst, muß die innere Reibung sinken und umgekehrt mit der sinkenden Temperatur anwachsen. Das letztere ist aber der Fall in äußeren Schichten der Bathosphäre. Von der Diffusion im Magma gilt wohl fast dasselbe wie von der Kristallisation, von welcher F. v. Wolff<sup>1)</sup> trefflich sagt, daß sie in einer Ordnung der regellos verteilten Moleküle zum Kristallbaustein und zum Kristallgebäude besteht. „Es ist klar, daß dieser Ordnungsvorgang eine Funktion der Zeit ist. Je kleiner die innere Reibung einer Flüssigkeit ist, desto größer wird die Beweglichkeit der Moleküle sein, desto schneller muß sich der Ordnungsprozeß zum Kristall vollziehen können; mit anderen Worten, in einer dünnflüssigen Schmelze wird sich die Kristallisation viel schneller abspielen als in einer zähflüssigen. Ja im äußersten Grenzfalle, wenn die Zähflüssigkeit einen derartigen Grad angenommen hat, daß die entsprechend gesteigerte innere Reibung die Bewegung der Moleküle nahezu aufhebt, kann die Kristallisation erst nach sehr langer Zeit oder überhaupt nicht eintreten.“

Aber auch im Falle, daß die Diffusion kräftig obwalten kann, und dies muß man in unteren Schichten annehmen, dürfte noch ein Umstand hemmend wirken. In der Chemie sind wohl Flüssigkeiten bekannt, die sich nur teilweise gegenseitig lösen. Jeder Temperatur entspricht eine ganz bestimmte Löslichkeit der einen in der andern und umgekehrt. Die gegenseitigen Löslichkeiten steigen meistens mit der Temperatur. Dann nähert sich die Zusammensetzung beider Lösungen immer mehr, bis sie gleich wird. Es tritt dann vollkommene Mischbarkeit ein. Oft verhalten sich aber beide Löslichkeiten gerade umgekehrt oder es sinkt eine mit zunehmender Temperatur, während die andere steigt.

Auf diesem Principe baute Bäckström<sup>2)</sup> seine Differentiationstheorie auf. F. v. Wolff<sup>3)</sup> will auch die Rosenbuschsche Kerntheorie auf dieselbe Weise deuten. Rosenbusch<sup>4)</sup> selbst geht nicht so weit. Er sagt nur, daß sich die Spaltungen schon im Zustande der Metallgierung des tellurischen Urmasa entwickeln müssen und daß sich erst beim Aufsteigen in höhere Regionen des Erdinnern die Oxydation und die Wasseraufnahme vollzieht. Alle späteren Spaltungsvorgänge in diesem Silikatschmelzfluß seien durch die den Metallatomen innewohnenden Verwandtschaftskräfte bedingt. Die Gesetzmäßigkeiten desselben Vorgangs

<sup>1)</sup> F. v. Wolff l. c. S. 52.

<sup>2)</sup> Bäckström: Causes of Magmatic Differentiation. Journ. of Geol. 1893, S. 773 ff.

<sup>3)</sup> l. c. S. 163.

<sup>4)</sup> l. c. S. 225.

werden nach R o s e n b u s c h hervortreten, wenn wir die metallischen Kerne „herausschälen.“

Wenn einmal im Magma bestimmte chemische Verbindungen entstehen, könnten sie wohl einander unvollkommen<sup>1)</sup> und erst bei bestimmter Temperaturstufe vollkommen mischbare Lösungen bilden. Auf diese Weise müßte aus den vollkommen mischbaren Lösungen ein Hauptgestein von einer mittleren Zusammensetzung und aus den unvollkommen mischbaren Lösungen solche von einer ergänzenden Zusammensetzung entstehen, die die Zusammensetzung des Hauptgesteines ergeben sollten. Einen solchen einfachen Fall gibt es aber keineswegs in petrographischen Provinzen. Was die R o s e n b u s c h s c h e Kerntheorie speziell anbelangt, so sind die Kerne  $(Na, K) Al Si_2$ ,  $Ca Al_2 Si_4$ ,  $\ddot{R} Si$ ,  $\ddot{R}_2 Si$ ,  $\ddot{R}$  und die von Br ö g g e r (Das Gangfolge des Laurdalits) zugegebenen  $(Na, K) Al Si$ ,  $(Na, K) Al Si_3$ ,  $Ca Al_2 Si_2$  (in Urtilen, Umptekiten, Lestiwariten) im sauerstofffreien Magma nur wenig existenzfähig, da sie den Chloriden, Karbiden, Nitriden, Sulphiden, Phosphiden etc. ganz gewiß Platz räumen müssen, wie schon die Meteorite lehren.

\* \* \*

Aus dem Bilde, welches die chemischen Betrachtungen darbieten, mußten wir die Homogenität des Magma betreffende Frage negativ beantworten.

Das geologische Bild läßt die Frage offen. Man hat zwar festgestellt, daß verschiedene Gesteine gleichzeitig und geologisch gemeinsam aus dem Magma entstanden sind, aber anstatt des an der Hand liegenden Schlusses, daß das Magma inhomogen ist, hat man in Anbetracht der basischen und sauern Schlieren in einem und demselben Gesteinskörper die Spaltungs- und Homogenitätshypothese ausgebaut.

Es bleibt noch für die Lösung der Frage das petrographische Bild (die mineralogische Zusammensetzung der Gesteine) übrig. Zweifellos hängt die mineralogische Zusammensetzung von der chemischen ab und könnte uns vielleicht auch über die Urmaterie Bescheid geben. Auf solche Weise wagte man es z. B. auf eine Spaltungsfähigkeit des hypothetischen Urmagma aus der großen Spaltungsfähigkeit der Monzonite und Essexite zu schließen. Analysen derselben Gesteine stimmen nämlich, wie schon oben gesagt, mit den C l a r k e s c h e n, die Zusammensetzung des intratellurischen Magma vermutlich anzeigenden Durchschnittszahlen überein. Bei solchen Schlüssen wird oft vorausgesetzt, daß das petrographische Bild der Tiefengesteine nicht von anderen außerhalb des Magma liegenden Faktoren beeinflusst werde. Um das zu prüfen, müssen wir uns die Gewißheit verschaffen, wie weit die mineralogischen Eigenschaften der Tiefengesteine von den chemischen abhängig seien.

<sup>1)</sup> Cfr. B o e k e l. c. S. 111.

E. R e y e r<sup>1)</sup> sagt: „Die Mengenverhältnisse der meisten Elemente (Oxyde) können (im Bereiche der R e y e r s c h e n Typen) innerhalb weiter Grenzen schwanken; es tritt dann nur je nach der elementaren Mischung bald der Feldspat, bald Hornblende und Augit vor, ohne daß der mineralische Charakter des Gesteins sich ändert. Ein Magma von der Zusammensetzung des Typus I (Granit-Liparit) kann ebensowohl wie ein Magma von der Zusammensetzung des Typus II (Syenit-Granitit-Trachyt) oder III (Diabas-Gabbro-augitischer Andesit) als Syenit ausgebildet erscheinen; der Kieselgehalt kann zwischen 70% und 50% schwanken und doch bildet sich nur Feldspat und Hornblende aus. Sobald aber in einem Magma nur wenige % mehr Alkalien oder *Mg* auftreten, als das normale Magma enthält, bilden sich Nephelin, Leucit und Olivin und es wird durch diese kleine chemische Variation mit einem Schlage der ganze mineralische Charakter des Magma geändert.“ Darin will R e y e r nach meiner Meinung aussprechen, daß der petrographische Charakter Feldspat — Hornblende sich nicht nur aus syenitischen, sondern auch aus granitischen und gabbroiden Magmen ausbilden könne, d. h. nicht von einer bestimmten chemischen Zusammensetzung (stets gleicher  $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$ ,  $Fe_2O_3$  u. s. w. Menge), wohl aber von dem stets gleichen Verhältnis bestimmter Oxyde ( $Na_2O$ ,  $K_2O$ ,  $MgO$ ) abhängig sei. Eine und dieselbe Analyse könnte nach R e y e r keineswegs von einem Granit (einer basischen Schliere desselben), einem Syenit oder einem Gabbro geliefert werden. In Wirklichkeit kommt aber der Fall vor (vergl. R o s e n b u s c h l. c. S. 95, N. 2 und 6; S. 121, N. 10; S. 180, N. 1). Im weiteren bringt R e y e r die Bildung von Leucit — Nephelin — Olivin in Verbindung mit der Menge von Alkalien und Magnesia. Er spricht die Vermutung aus (l. c. S. 221), daß ein verhältnismäßig geringer Überschuß eines Elementes die Bildung neuer Minerale verursache z. B. daß beim Hinzutreten von 4% Kali (3% Natron) Leucit (Nephelin) gebildet werde. Seine Vermutung läßt sich aber durch den Vergleich einer Analyse des orthoklasführenden Shonkinits (R o s e n b u s c h l. c. S. 204, N. 2 mit 5.61 Gewichtsprozenten  $K_2O$ ) mit einer Analyse des leucitführenden Missouriits (ib. S. 208, N. 1. mit 5.14%  $K_2O$ ), durch den Vergleich eines Anorthosits (ib. S. 186, N. 6, mit 3.68%  $Na_2O$ ) mit einem Nephelinijolith (ib. S. 210, N. 6, mit 2.60%  $Na_2O$ ) und durch den Vergleich eines olivinfreien Diorits (ib. S. 167, N. 15a, mit 6.24%  $MgO$ ) mit einem Olivingabbro (ib. S. 180, N. 14, mit 4.62%  $MgO$ ) widerlegen. Demzufolge scheint die Bildung eines bestimmten Minerals nicht zum chemischen Begriff der Gesteine zuzugehören, ausgenommen etwa die nicht weiter „spaltbaren“ Magmen und magmatischen Reste, welche die Zusammensetzung eines Eruptivgesteine bildenden Minerals aufweisen.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> E. R e y e r: Theoretische Geologie. 1888, S. 221 u. f.

<sup>2)</sup> Aber auch in einem solchen Falle, falls z. B. ein sauerstoffreiches Magma die Zusammensetzung eines Albitkerns  $Na_2 Al_2 Si_4$  besitzt, dürfte wohl — wenn die



In dem Kapitel „Existenzbedingungen der Minerale — Genetische Beziehungen“ (l. c. S. 222) spricht schon R e y e r ganz ausdrücklich aus, daß die Existenz bestimmter Minerale nicht bloß von dem chemischen Bestande, sondern auch wesentlich von den genetischen Verhältnissen abhängt. Er hebt Druck und Durchtränkung hervor. Aber die Beispiele, die er anführt (Verschiedenheiten in der feineren chemischen Zusammensetzung und Habitus eines und desselben Minerals z. B. Orthoklas — Sanidin, oder einer und derselben oder ähnlichen chemischen Verbindung z. B. Quarz — Tridymit — amorphe Kieselsäure, Augit der Tiefe — Hornblende der Oberfläche) verengen seinen Standpunkt auf die Gegensätze des mineralischen Bildes, welche sich als Funktion des Niveaus (Schnelligkeit des Erstarrens) äußern. Ich will vielmehr im folgenden zeigen, daß unter den genetischen die physikalischen Bedingungen auch in der Tiefe Oberhand haben. Der Beweis wird an der Hand des in R o s e n b u s c h: „Elemente der Gesteinslehre“ enthaltenen Analysenmaterials betreffend die Bildung von Leucit, Nephelin, Anorthit, Olivin und Hornblende geführt.

In Graniten werden Alkalifeldspate und saure Plagioklase gebildet, in Leucit- und Elaeolithsyeniten, wo keine freie  $SiO_2$  übrigbleibt, sind neben Kalifeldspat (Orthoklas, Mikroklin, Anorthoklas) und Albit oft Leucit, Nephelin, wohl aber keine Plagioklase (außer Albit) entstanden. In normalen Syeniten werden Plagioklase gebildet, aber der Quarz fehlt kaum jemals. Die genannten Gesteinsgruppen sind sehr verwandt und durch Übergänge verbunden, der Hauptunterschied ist der Mangel an Quarz bei den Leucit- und Elaeolithsyeniten. Untersuchen wir, ob von diesem Mangel die Bildung von Leucit und Nephelin abhängig ist.<sup>2)</sup>

Massenverhältnisse allein im Spiele wären — ein Gestein aus 50% (Albit  $Na_2Al_2Si_6O_{16}$ ), 30% Nephelin ( $NaAlSi_3O_8$ ) und 20% Quarz ( $SiO_2$ ) entstehen. Daraus erklären sich die Schwierigkeiten der Berechnung von Analysen, von welchen O s a n n (Versuch einer chemischen Klassifikation der Eruptivgesteine. T. M. p. M. XXI., S. 409) spricht, indem er die diesbezügliche Äußerung L i n c k s zitiert. Dieselben sind auch jedem Geologen ziemlich bekannt. O s a n n selbst führt in derselben Arbeit für die Natronminette von Hao wesentlich andere Prozente der Mineralien als Br ö g g e r an.

<sup>2)</sup> Vergl. auch die Versuche L a g o r i o s (Über die Natur der Glasbasis sowie die Kristallisationsvorgänge im erupt. Magma. T. M. p. M. VIII., 1887). Auch F. B e c k e (Die Eruptivgebiete des böhm. Mittelgebirges und der amerikanischen Andes. Atlantische und pazifische Sippe der Eruptivgesteine. T. M. p. M. XXII., 1903, S. 216) will als Tatsache feststellen, daß je nach dem  $SiO_2$  — Gehalte (der

Höhe der  $Si$ -Ordinate) aus  $A = (Na, K)_2O$  die Feldspatmolekel  $R_2Al_2Si_6O_{16}$ , bei geringerem Gehalt die Leucitmolekel  $R_2Al_2Si_4O_{12}$  oder die Nephelinmolekel  $R_2Al_2Si_2O_8$  entstehen kann. Ist der Gehalt an  $Si$  größer als die  $Si$ -reichsten Verbindungen erfordern, so führt das notwendig zur Bildung von Quarz, Tridymit oder  $Si$ -reichem Glas. Das Sinken des  $Si$ -Gehaltes unter die Sättigungsgrenze bedeutet nach B e c k e Bildung von Feldspatvertretern ev. Olivinsilikat [aus  $F = (Mg, Fe, Ca)O - Al_2O_3 - A$ ] oder Ausscheidung freier Oxyde.



Die Alkalifeldspate ( $K Al Si_3 O_8$ ,  $Na Al Si_3 O_8$ ) brauchen zur Bildung eines Moleküls 3  $Si O_2$ -Oxyde, Leucit ( $K Al Si_2 O_6$ ) nur 2  $Si O_2$ , Nephelin ( $Na Al Si O_4$ ) endlich nur 1  $Si O_2$ . Es ist wahrscheinlich, daß bei einer geringeren Menge von  $Si O_2$  sich entweder zuerst aus Alkalien die Leucit- und Nephelinmoleküle bilden und dann erst aus der übrigbleibenden Menge von  $Si O_2$  durch Zunahme von 1 resp. 2  $Si O_2$  in Feldspat umgewandelt werden, oder aber die Feldspate zuerst gebildet werden und dann die noch freien Alkalien den Feldspatmolekülen die Kieselsäure abnehmen.

Was den Bedarf an  $Si O_2$  betrifft, lassen sich die gesteinsbildenden Mineralien ev. einige charakteristische Moleküle derselben in folgende ansteigende Reihe (der eine  $Al_2 O_3$ -Bedarfsreihe zugefügt wurde) zusammenstellen:

Relative  $Si$ -Menge in Mineralien:

Olivin  $(Mg, Fe)_2 Si O_4 \dots \overset{''}{R}_2 (= 4 \text{ Valenzen}) : Si$

Nephelin  $Na Al Si O_4 \dots \overset{'}{R} \overset{''}{R} (= 4 \text{ Valenzen}) : Si$

Anorthit  $Ca Al_2 Si_2 O_8 \dots \overset{''}{R} \overset{''}{R}_2 (= 8 \text{ Valenzen}) : 2 Si = 4 V. : Si$

Biotit  $H_2 O . 2 K_2 O_3 . 3 Al_2 O_3 . 6 Si O_2 + 6 Mg_2 Si O_4 \dots \overset{'}{R}_6 \overset{''}{R}_{12} \overset{''}{R}_6 (= 48 \text{ Valenzen}) : 12 Si = 4 V. : Si$

Muskovit  $2 H_2 O . K_2 O . 3 Al_2 O_3 . 6 Si O_2 \dots \overset{'}{R}_6 \overset{''}{R}_6 (= 24 \text{ Valenzen}) : 6 Si = 4 V. : Si$

Leucit  $(K, Na) Al Si_2 O_6 \dots \overset{'}{R} \overset{''}{R} (= 4 \text{ Valenzen}) : 2 Si$

Pyroxen	{	$Ca (Mg, Fe) Si_2 O_6$ $(Ca, Mg, Fe) (Al, Fe)_2 Si O_6^1$	}	$\dots 4 V. : 2 Si$
Aegirin		$Na Fe Si_2 O_6$		
Arfvedsonit		$Na_2 Fe_2 Si_4 O_{12}$		

Albit  $Na Al Si_3 O_8 \dots \overset{'}{R} \overset{''}{R} (= 4 \text{ Valenzen}) : 3 Si$

Orthoklas  $K Al Si_3 O_8 \dots \text{,, ,, ,, ,,}$

Relative  $Al$ -Menge in Mineralien:

Pyroxen <sup>2)</sup>  $\dots (Ca, Mg) O : Al_2 O_3 = \overset{''}{R} : 2 Al = 2 \overset{'}{R} : 2 Al = R : Al$

Anorthit  $\dots Ca O : Al_2 O_3 = \overset{''}{R} : 2 Al = \dots \dots$

Orthoklas  $\dots K_2 O : Al_2 O_3 = \dots \dots$

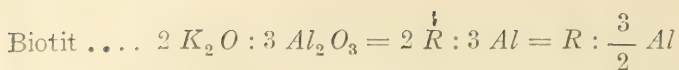
Leucit  $\dots K_2 O : Al_2 O_3 = \dots \dots$

Albit  $\dots Na_2 O : Al_2 O_3 = \dots \dots$

Nephelin  $\dots \text{,, ,,} = \dots \dots$

1)  $\frac{4}{3} (Al, Fe) = Si$ .

2) Nur **Al**-haltige alkalifreie Moleküle angeführt, nur dieselben werden auch weiter unten in Erwägung genommen.



Durch die obige Beobachtung ermuntert, dürfte man einen induktiven Schluß ziehen, daß die Bildung der Feldspate und der im ersten Verzeichnis unten angeführten Mineralien überhaupt nur an die mit  $SiO_2$  angeereicherten, die der oberen daselbst an die mehr basischen Analysen zu fallen müsse. Es stimmt auch oft. Der Quarz ist nicht vorhanden z. B. in leucit- und pseudoleucitführenden Missouriiten, Fergusiten, Leucitshonkiniten, ebensowenig in nephelinführenden Essexiten, Shonkiniten, Therolithen, Maligniten und Ijolithen. Es existieren aber auch Ausnahmen. In Alkalisyeniten — Nordmarkite und Pulaskit (Rosenbusch l. c. S. 128, N. 5) ausgenommen — fehlt der Quarz, doch die Leucit- und Nephelinbildung bleibt aus. In Monzonit ist kein Quarz oder nur in sehr geringer Menge vorhanden (die Quarzmonzonite ausgenommen), trotzdem entsteht Leucit nur in Sommaiten und Nephelin in Nephelin-Monzoniten. Was diese Ausnahmen betrifft, so haben Shonkinitfazies von Monzoniten (l. c. S. 123, N. 1c, 2c, 3c), Nephelinmonzonite (4a, 4b, 4c) und Sommaite (5a, 5b, 5c) in ihren Analysen stets weniger als 52%  $SiO_2$ ; wo die  $SiO_2$ -Menge anwächst, bleibt die Leucit- und Nephelinbildung aus. In Alkalisyeniten findet man im Einklange damit 52.34% bis 63.76%  $SiO_2$ . Doch darf man in der angeführten Zahl keine allgemein gültige Grenze sehen, da im Ijolith (S. 210, N. 7) bei 63.76%  $SiO_2$  (Übergangsgestein in Granit) noch Nephelin entstanden ist.<sup>1)</sup>

Auch in anderen Richtungen gibt das obige Verzeichnis keinen Bescheid. Gleich beim Granit könnte man fragen, warum bildet sich Biotit anstatt des Orthoklases, warum entsteht aus seinem  $MgO$  nicht ein Mineral aus der Pyroxen-Amphibolgruppe? Dürfte das vorhandene Wasser die Bildung Biotits veranlassen? In dem Falle aber konnte anstatt des Biotits wasserhaltiger Muskovit entstehen und aus  $MgO$  ein an  $SiO_2$  reicherer Amphibol. Vielleicht ist dabei im Spiele der  $Al_2O_3$ -Gehalt? Stimmt es aber mit der Wirklichkeit? Zeigen Analysen, daß bei einem gleichprozentigen  $MgO$ -Gehalte mehr  $Al_2O_3$  in Amphibolgranititen, bei einem gleichen  $Al_2O_3$ -Gehalte mehr  $MgO$  in Granititen vorhanden ist? Eine positive Antwort findet man zweimal (S. 88, N. 5 und 13, 4 und 10), eine negative auch zweimal (ib. N. 7 und 12, 5 und 11).

In der Familie der Leucit- und Elaeolithsyenite sind keine kalkhaltigen Feldspate vorhanden, die Bildung Anorthits  $CaAl_2Si_2O_8$  kommt nicht zu stande.  $CaO$  ist enthalten in Pyroxen oder Amphibol. Da in dem Molekül des Anorthits zu  $Ca$  zwei  $Al$  und zwei  $Si$  gehören, in dem

<sup>1)</sup> Nicht nur in diesem Ijolith, sondern auch in anderen oben genannten Analysen mit weniger als 52%  $SiO_2$  ist genug  $SiO_2$  zur Bildung der Feldspate.

Tonerde - Molekül des Pyroxens zwei *Al* und ein *Si*, in dem Tonerde-Molekül des alkalifreien Amphibols  $\frac{2}{3}$  *Al* und ein *Si*, dürfte man erwarten, daß der Überschuß an  $Al_2O_3$  und  $SiO_2$  die Bildung des Anorthits fördert. Aber ein plagioklasführender Glimmersyenit (S. 121, N. 3a) mit 1.24% *CaO* hat um 8.94%  $Al_2O_3$  weniger als Elaeolithsyenit (S. 146, N. 5) mit einer fast gleichen Menge  $SiO_2$  und 1.15% *CaO*. Obwohl das Beispiel dagegen spricht, muß man noch bedenken, daß in Elaeolithsyeniten nur soviel  $Al_2O_3$  vorhanden ist, daß die Alkalien genügen (in N. 5 ein Überschuß 0.9 M.-Z., in N. 6 ein Mangel 0.8 M.-Z. Alkalien) sie feldspatartig zu binden. In den Glimmersyeniten im Gegenteil bleibt ein Überschuß an  $Al_2O_3$  (in N. 3a + 2.5 M.-Z., in N. 3b + 2.3 M.-Z.) nach der Bindung der Alkalien übrig, und das dürfte der Grund sein, weshalb in den letzteren der Anorthit gebildet werden kann. Wenn diese Regel richtig wäre, müßte bei normalen Graniten, Dioriten, Gabbros, Noriten, Essexiten und Theralithen ähnlich wie bei den normalen Syeniten nach der Bildung von Alkalifeldspaten noch freies  $Al_2O_3$ -Oxyd übrigbleiben, aber bei alkalischen Graniten, alkalischen Syeniten und Shonkiniten ähnlich wie bei den Elaeolithsyeniten müßte seine Menge knapp sein. Nichtsdestoweniger zeigt Laurvikit (S. 228, N. 5) ein 4.1 Mol. % Überschuß an  $Al_2O_3$  und dabei keinen Plagioklas. *CaO* (3.03%) findet in Augit, Diopsid, Hypersthen, barkevitischer Hornblende und spurenweise in Orthoklas ihr Unterkommen. Ähnlich sieht man einen Tonerdeüberschuß von 2.2 M.% in Sodalithsyenit (S. 228, N. 6), 2.4 M.% in Litchfieldit (ib. N. 7), 1.4 M.% in Lujaurit (ib. N. 8), 1.0 M.% in Ditroit (ib. N. 9), 2.5 M.% in Laurdalit (ib. N. 12) und dabei keinen Plagioklas. Es ist interessant, daß bei Äkeriten (N. 4 bis 7) dieser Überschuß rund 1.2 bis 7.5 M.% ausmacht und zugleich zur Bildung des Plagioklases führt. Bei augitführendem Glimmersyenit von Hedrum (S. 132, N. 9) kommt nur ein 0.2 M.%  $Al_2O_3$ -Überschuß und trotzdem bilden sich Plagioklase. Bei Nordmarkiten, Hedrumiten, Pulaskiten, Umptekiten, Pyroxen- und Aegirinsyeniten ist die Molekularzahl der Alkalien derjenigen der Tonerde gleich.<sup>1)</sup> Plagioklase werden nicht gebildet. Die Gültigkeit der Regel findet man bei Essexiten (3.5 bis 4.9 M.% Tonerdeüberschuß), Graniten und anderen Gesteinen der granitodioritischen Reihe, auch bei Gabbros (1.2 bis 11.0 M.% Tonerdeüberschuß). Bei Monzoniten, Nephelimonzoniten, Sommatiten und Kentalleniten begleitet ein Tonerdeüberschuß von 2 bis 7 M.% die Bildung Anorthits in Plagioklasen.

Aber bei plagioklasfreien alkalischen Graniten findet sich erst bei Riebeckit- und Riebeckitakmit-Graniten (S. 86, N. 8 bis 11) ein kleines Defizit an Tonerde (höchstens rund 1 M.%, bei Aegiringranit rund 4 M.%), sonst bei Alkaligranititen ein Tonerdeüberschuß von rund 1 M.% (bei

<sup>1)</sup> Ausnahme: Pulaskit von Kyschtym-Ural mit 34 M.%  $Al_2O_3$  gegenüber 14.7 M.% Alkalien.



Alkaligranitit mit Turmalin 3·7 M.%, der Eisenwert desselben ist klein und zwar 0·77%  $Fe_2O_3$ , sonst 1 bis 2 M.%). In den plagioklasfreien Elaeolithsyeniten, Pyroxen-, Glimmer- und Amphibolfoyaiten schwankt sich die Molekulardifferenz  $Al_2O_3$ —Alkalien um  $\pm 2$  M.%. Bei Mariupolit, Chibinit, aegirinreichem Lujaurit, Eudialytsyenit, Katapleitsyenit, Sodalithsyenit, Tawit, Urtit, Cancrinitaegirinsyenit, Cancrinitysyenit und Leucitysyenit ist stets ein Deficit an Tonerde erkennbar und dabei kein Plagioklas. Bei Monmouthit und Borolanit ist  $Al_2O_3$ -Überschuß vorhanden (bei Monmouthit rund 3 M.%, bei Borolanit rund 2 bis 4·5 M.%), doch nur der erste beherbergt Plagioklase in einer kleinen Menge. Dabei enthält Monmouthit 5·75%  $CaO$ , 0·44%  $Fe_2O_3$ , 2·19%  $FeO$ , Borolanit 5·4 bis 14·6%  $CaO$ , 6·7 bis 10·06%  $Fe_2O_3$ , 0·8 bis 2·71%  $FeO$ . Es wäre die Vermutung möglich, daß die größere Eisenmenge in Borolanit die Bildung der Plagioklase hemme. Die Vermutung bewährt sich aber keineswegs bei plagioklasführenden Theralithen, die einen ebensogroßen Eisengehalt als plagioklasfreie Shonkinite von paralleler chemischer Zusammensetzung aufweisen.

Die letztgenannten Familien sind noch in einer anderen Hinsicht interessant.  $CaO$ -Gehalt sucht bei Shonkiniten in Pyroxen und Amphibol sein Unterkommen. In Shonkinit S. 205, N. 14 ist sogar zweimal soviel  $CaO$  (14%) als in Theralith ib. N. 20 und dabei weist Theralith mehr  $Al_2O_3$  auf. Theralith N. 21 daselbst ist sowohl an  $CaO$  als  $Al_2O_3$  reicher als Shonkinit N. 5. In den Analysen N. 15 u. 16 daselbst besitzt Theralith mehr  $CaO$  aber weniger  $Al_2O_3$  als Shonkinit N. 10. Die in den drei letzten Sätzen angegebenen Verhältnisse gelten auch hinsichtlich der Molekularzahl von  $Al_2O_3 + Fe_2O_3$ . Es läßt sich folglich keine Beständigkeit darin feststellen.

Dabei zeigen aber Theralithe (auch Teschenite und Augitteschenite) weniger  $K_2O$  als Shonkinite mit einem fast gleichen Gehalt an  $SiO_2$  (vergl. N. 18 und 1, 19 und 13, 20 und 14, 10 und 15 und 16, 22 und 6, 23 und 3, 24 und 1, 25 und 17, 26 und 16) und nur in einem Falle sind sie hinsichtlich  $K_2O$  einander gleich. Es scheint, daß auch molekulare Menge von  $Al_2O_3 + Fe_2O_3$  bei Theralithen stets größer sein sollte, da nur in zwei Fällen (N. 19 und 13, 22 und 6) ein kleiner Gegensatz vorkommt. Die  $Al_2O_3$ -Menge ist dabei einmal kleiner, ein andermal größer als in Shonkinit. In den Analysen, wo  $Al_2O_3$  reicher in Theralith als in Shonkinit vorkommt, läßt sich nichts Ähnliches bei anderen Oxyden feststellen. Die Theralith- (Teschenit-) und Shonkinitanalysen, welche eine fast gleiche Gewichtsmenge von  $CaO$  zeigen (N. 10 und 14, 19 und 13 und 15, 20 und 3, 21 und 15 und 13, 22 und 12, 23 und 3, 25 und 13 und 15, 26 und 3) lassen zwei Gesetzmäßigkeiten erkennen und zwar eine Anreicherung mit  $K_2O$  in Shonkiniten, eine Anreicherung mit der Molekularsumme  $Al_2O_3 + Fe_2O_3$  in Theralithen. Es folgt daraus, daß aus zwei sonst gleichen shonkinitischen Magmen sich plagioklasführender Theralith (Teschenit)



nur aus demjenigen entwickelt, welches bei gleicher  $SiO_2$ -Menge weniger  $K_2O$  und bei gleicher  $CaO$ -Menge mehr  $Al_2O_3 + Fe_2O_3$ -Moleküle besitzt.

Dieses Ergebnis ist aber nicht im Einklang mit der Zusammensetzung der Plagioklase (des Anorthits). Zur Bildung des Anorthits ist doch soviel  $Al_2O_3$  nötig als zur Bildung von tonerdchaltigen Molekülen der Pyroxene, in welchen bei Shonkinit  $CaO$  sein Unterkommen sucht.

Warum sollte bei Theralithen mehr  $Al_2O_3 + Fe_2O_3$  zu demselben Zwecke vorhanden sein? Es ist wahr, daß auch ein wenig  $Fe_2O_3$  in Anorthit eintreten kann, besonders aber gilt es von Pyroxenen, und infolgedessen dürfte man eine gerade gegensätzliche Erscheinung erwarten. Ebenso wenig läßt sich eine kausale, genetische Verbindung der Plagioklase mit der Menge an  $K_2O$  begreifen. Der  $K_2O$  führende Orthoklas kommt sowohl in Shonkiniten als auch in Theralithen vor, er gehört sogar zum Begriffe dieser Familien und seine große Menge vermag kaum die Bildung des Plagioklases hindern, umsoweniger als in anderen Gesteinen sich große Orthoklasmengen mit Plagioklasen gut vertragen.

Åkerit (S. 132, N. 3 bis 8) und Laurvikit (ibid. N. 1 und 2) lieferten sehr ähnliche Analysen (vergl. besonders N. 1 und 4), aber Plagioklas bildete sich nur in Åkerit. Die um 2% größere Menge an  $CaO$  bei Åkerit konnte dabei nicht entscheiden, da in Laurvikit N. 2 noch mehr  $CaO$  vorkommt als in Åkerit, während die Molekularzahlen von  $Al_2O_3$  einander gleichen.

In Fergusit ist kein Plagioklas. Seine Analyse (S. 208, N. 2) und die Analyse eines plagioklasführenden Essexits (S. 196, N. 6) geben folgende Molekularprozent:

	$SiO_2$	$Al_2O_3$	$Fe_2O_3$	$FeO$	$MgO$	$CaO$	$Na_2O$	$K_2O$
Fergusit	58.4	9.7	2.1	1.5	7.7	11.9	3.2	5.5
Essexit	57.6	9.7	2.8	1.5	9.8	12.5	4.5	1.6

Es zeigt sich, daß in Essexit für eine etwa gleiche Menge von  $CaO$  nur dasselbe Quantum  $Al_2O_3$  und annähernd auch  $SiO_2$  zur Verfügung steht. Da wir die Wirkung des Kali bereits ausgeschlossen haben, wo sollen wir dann den Grund suchen? —

Für die Bildung des Olivins  $(Mg, Fe)_2SiO_4$  scheint in Fergusit mehr Gelegenheit zu sein als in Essexit. Es ist wohl in Essexit mehr  $(Mg, Fe)O$  und zwar um 2.1 M.%, aber nach Bildung von Alkalifeldspat und Nephelin (aus 1.6 M.%  $K_2O$  und 4.5 M.%  $Na_2O$ ) bleibt in demselben 48.3 M.%  $SiO_2$ , in Fergusit nach Bildung von Pseudoleucit nur 38.7 M.%  $SiO_2$  übrig. Olivin verbraucht am wenigsten  $SiO_2$ . Da sich in Pseudo-

leucit 8·7 M. % Alkalien und ebensoviel  $Al_2O_3$  vorfinden, bleibt für zweiwertige Oxyde in Fergusit nur 1·0 M. %  $Al_2O_3$  (mit  $Fe_2O_3$  zusammen 3·1 M. %). Man sollte demzufolge Amphibol erwarten, der sich mit wenig  $Al_2O_3$  vergnügt. Trotzdem wird Diopsid und sogar Biotit gebildet, welcher letzterer von allen genannten am meisten  $Al_2O_3$  benötigt. Wenn auf solche Weise  $Al_2O_3$  rasch absorbiert wird, muß sich selbstverständlich für die Bildung eines tonerdefreien Olivins viel Gelegenheit bieten.

Ijolithe sind mit Shonkiniten chemisch sehr verwandt, weshalb sie als feldspatfreie Shonkinite bezeichnet werden. Warum wird aber in jenen nicht Orthoklas gebildet? Im Ijolith von Jivaara (S. 210, N. 2) ist fast ebensoviel  $K_2O$  als im Shonkinit (S. 204, N. 6) und an  $Al_2O_3$  ist keine Not, da im Ijolith weit mehr derselben vorhanden ist und nach der Nephelinbildung eine gleich große Molekularmenge von  $Al_2O_3$  wie bei Shonkinit übrigbleibt.

Fassen wir nun die Ergebnisse zusammen! Die Bildung von Orthoklas und Leucit, von Albit und Nephelin, auch von Anorthit, Hornblende, Orthoklas, Muskovit einerseits und von den übrigen dieselben Oxyde enthaltenden Mineralien andererseits ist nicht chemisch eindeutig bestimmt, d. h. es läßt sich, vorausgesetzt, daß die nötigen Oxyde vorhanden sind, aus den Massenverhältnissen der Analysen im allgemeinen nicht herauslesen, was für ein Glied aus den zugehörigen Paaren das Tiefengestein beherbergt.

Da sich die Mineralienbildung nicht allein aus den chemischen Massenverhältnissen erklären läßt, so ist es klar, daß dabei auch physikalische Verhältnisse eine Rolle spielen müssen. Die Mineralienbildung ist somit eine Funktion nicht nur der chemischen, sondern auch der physikalischen Agentien. Das wurde bereits mehrfach experimentell bewiesen. Die Löslichkeit im Magma, die mit der Viskosität steigende Fähigkeit im Magma unterkühlt zu werden, Kristallisationsvermögen und Kristallisationsgeschwindigkeit (= Wachstumsgeschwindigkeit gesteinsbildender Mineralien), beide von Übersättigung und Unterkühlung abhängig, beeinflussen nicht nur die Ausscheidungsfolge, sondern teilweise auch den Mineralbestand. Die ausgeschiedenen Kristalle können durch Wirkung der Schwere nach ihrem spezifischen Gewichte abtransportiert werden, wodurch eine lokale Differenziation zustande kommt.

Feinere Veränderungen der genannten Faktoren verursachen z. B. die Zonenstruktur.<sup>1)</sup> Eine wichtige Rolle spielen auch die Mineralisatoren (agents minéralisateurs) z. B. Verbindungen von *Cl*, *F*, *B*, *W*, *P*, *C*. Vom chemischen Standpunkte aus sind sie als Katalysatoren aufzufassen. Bedeutend ist aber auch ihre physikalische Wirkung, die hauptsächlich in der Herabsetzung der Viskosität der Schmelze und aus dieser folgenden

<sup>1)</sup> Cfr. Becke F.: Über Zonenstruktur der Krystalle in Erstarrungsgesteinen. T. M. XVIII., 1898.

Erhöhung der Kristallisationsfähigkeit besteht. Außerdem erniedrigen sie auch den Schmelzpunkt und ermöglichen dadurch die Bildung von Mineralien, welche sonst aus dem Schmelzfluß nicht hätten entstehen können.

Außer durch den wichtigsten aller physikalischen Einflüsse, die Temperatur, werden auch durch den Druck den Existenzgebieten einzelner Gesteinsmineralien Grenzen gelegt. Der Einfluß des Druckes offenbart sich am deutlichsten in der Schmelzpunktsverschiebung, die gemäß der aus der Thermodynamik bekannten Gleichung von Clausius-Clapeyron

$$\frac{dT}{d\phi} = \frac{T(V_f - V_k)}{Q}$$

erfolgt, in welcher  $T$  die absolute Schmelztemperatur,  $\phi$  den Druck,  $Q$  die Schmelzwärme,  $V_f$  das spezifische Volum der flüssigen und  $V_k$  dasjenige der kristallisierten Phase bedeuten. Die Differenz  $V_f - V_k$  hat bis auf seltene Ausnahmen (Wasser, Wismut) einen positiven Wert, somit wird im allgemeinen der Schmelzpunkt durch den Druck erhöht.<sup>1)</sup> Auf den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die chemischen Vorgänge im Magma werden wir bei Besprechung des chemischen Gleichgewichtes noch näher eingehen.

Während die Gesteinsanalysen eine enorme Anzahl verschiedenster Oxydverhältnisse liefern, ist diejenige der gesteinsbildenden Hauptmineralien eine recht geringe. Die Gesteinsfamilien werden aber von den Petrographen nach ihrer mineralischen Zusammensetzung charakterisiert, was eine künstliche Vereinfachung der Gesteinswelt bedeutet.<sup>2)</sup> In der Tat gibt es zahlreiche Übergänge in den Gesteinsfamilien, hauptsächlich bei Essexiten, Monzoniten, Dioriten, Gabbros etc.

Es ist wohl ein Bedürfnis der Menschen, nach dem Muster der organischen auch in die anorganische Welt den Gedanken einer Vereinfachung, nämlich den Begriff einer Art und Familie, hineinzutragen. Da dieser Gedanke durch die mineralische Vereinfachung der Gesteinsentwicklung gefördert wurde, wagt der sinnende Geist zur weiteren Deduktion der Homogenität des Stammagma und hofft durch dessen

<sup>1)</sup> Nach Tammann verringert sich der Unterschied zwischen den spezifischen Volumina der flüssigen und der festen Phase mit steigendem Druck, kann Null und schließlich auch negativ werden. Dementsprechend vermindert sich auch der Einfluß des Druckes auf den Schmelzpunkt, welcher in der Nullage von  $V_f - V_k$  sein Maximum erreicht, um bei weiter steigendem Druck zu sinken, wenn  $V_f - V_k$  negativ geworden ist.

<sup>2)</sup> Man könnte einwenden, daß sich die Anzahl der Gesteine keineswegs vermindert, sondern vergrößert, wenn durch verschiedene physikalische Einflüsse aus einer und derselben Materie verschiedene Mineralien und folglich auch verschiedene Gesteine gebildet werden können. Diese Vergrößerung erscheint aber gegenüber der durch Mineralienbildung verursachten Vereinfachung sehr unbedeutend.



Spaltung die schon verkleinerte Anzahl der Gesteine aus demselben erklären zu können. Wie man aber in der Zoologie den Gedanken Lamarcks von einer einzigen aufsteigenden Linie in der Entwicklung der Organismen fallen ließ und einen polyphyletischen Ursprung annahm, so wird es höchst wahrscheinlich auch in der Geologie mit der Homogenität des Magma sein müssen.

Die bemerkenswerte petrographische Gleichartigkeit eines und desselben petrographischen Vorkommens (Erguß- oder Tiefen-Gesteins) erklärt sich auch bei der angenommenen Inhomogenität eben aus den großen Dimensionen der Bathosphäre; auch wenn sie inhomogen ist, dürfen große Partien derselben eine ziemlich konstante Zusammensetzung aufweisen. Umgekehrt sprechen deutlich für die Inhomogenität: Bildung der basischeren und dunkleren „älteren Ausscheidungen“, Schlierenbildung der Essexite, Diorite und Gabbros, essexitische Konkretionen in Foyaite, das geologische Treffen der verschiedenen Typen von alkalischen Syeniten (Nordmarkit, Åkerit, Laurvikit, Laurdalit) und alkalischen Graniten, schlieriger Ausbau der Monzonite aus Teilen von angenähert granitischer, dioritischer, gabbroider, pyroxenitischer, peridotitischer und shonkinitischer Zusammensetzung, der allmähliche Übergang der Leucitsyenite in Foyaite, gemeinsames geologisches Auftreten der Nephelin- und Leucitsyenite mit Alkali-Syeniten und -Graniten, der Peridotite und Pyroxenite mit Dioriten, Gabbros und theralitischen Gesteinen (Essexiten, Shonkiniten, Theralithen, Missouriiten und Ijolithen), der Gabbrotypen mit Graniiten, Syeniten und Dioriten.

Mit der Inhomogenitätshypothese steht in keinem Widerspruch, daß Kalkalkaligesteinsreihe (Granite, Diorite, Gabbros, Peridotite, Pyroxenite) und Alkaligesteinsreihe (Alkali-Granite, -Syenite, Elaeolith-Syenite, Essexite, gewisse Peridotite und Pyroxenite) eine geologische Selbständigkeit besitzen und daß eine solche für die Charnokit-Anorthosit-Reihe vermutet wird. Wenn aber nur ein Stammagma angenommen wird, muß man zuerst diese „Spaltung“ in drei sekundäre Stammagmen und dann erst eine ausführlichere „Spaltung“ eines jeden erklären, was wieder neue Schwierigkeiten mit sich bringt.

Durch Eintritt von etwas basischem Plagioklas oder Feldspatoiden gehen Peridotite und Pyroxenite allmählich in diorito-gabbroide ev. theralitische oder anorthositische Gesteine über, mithin wird eine sichere Unterscheidung der Pyroxenite und Peridotite der Alkaligesteinsreihe von denjenigen der Kalkalkaligesteinsreihe und von denjenigen der Charnokit-Anorthosit-Reihe nicht immer möglich, falls der örtliche Verband mit verwandten Gesteinstypen fehlt. Wenn die Homogenitätshypothese richtig wäre, müßte man nicht dann in diesen gemeinsamen Endgliedern gerade den Ausdruck der Zusammensetzung des Stammagma erblicken? Doch wie weit sind diesbezügliche Analysen von den Clarkeschen



Durchschnittszahlen entfernt? Und weiter, wie könnten sich aus einem mit  $\bar{R}O$  vollgepfropften und an  $SiO_2$  relativ armen Magma durch Spaltung dreierlei selbständige Magmenreihen entwickeln, deren Glieder je weiter vom gemeinsamen Punkte desto mehr  $SiO_2$  besitzen? Woher sollte dieses  $SiO_2$  herkommen, wenn nur ein und dazu an  $SiO_2$  armes Stammagma existierte?

Ein zur Spaltung geneigtes Magma müßte der Homogenitätshypothese gemäß immer Spaltungsprodukte abgeben, da die Bedingungen dazu (Abkühlungsflächen, Nebengestein zur Assimilation, überaus kleine Wahrscheinlichkeit einer gerade eutektischen Mischung, Wirkung der Schwere) überall vorhanden sind; trotzdem treten z. B. Monzonitformen, zumal die quarzmonzonitischen und pyroxenitischen, in Tirol selbständig auf, während sie in Nord-Amerika einen einzigen Gesteinskörper bilden.

Es ist wahr, daß die „Magmaspaltungen“ bei Ergußgesteinen viel seltener sind, was die Homogenitätshypothese durch die rasch sinkende Temperatur einfach erklären kann. Die Inhomogenitätshypothese muß zu Erscheinungen des vulkanischen Ausbruchs Zuflucht nehmen. In engen Ausbruchskanälen werden die mit Gasen erfüllten Magmen genügend gemischt.

Auch das ist zu bemerken, daß in einzelnen Familien der Gesteine sich keine natürliche Durchschnittsanalyse finden läßt, welche sich wirklich als solche durch ihre häufige Wiederholung und die Tatsache auszeichnete, daß andere Analysen derselben Familie sich desto häufiger zeigen, je näher sie zu derselben stehen. Durchschnittsanalysen, welche künstlich berechnet werden, haben für die Charakteristik der Familie oft wenig Wert. Aus einer und derselben Analyse lassen sich verschiedene Mineralien und im allgemeinen verschiedene (mineralogisch definierte) Gesteine ableiten. Zu dem, was oben davon gesagt wurde, sei noch folgendes zugefügt.

Es gibt etwa 15 Mineralien, die als Hauptbestandteile die Gesteine zusammensetzen und aus einer verschiedenen Menge von acht Oxydarten bestehen. Bezeichnet man die Menge der im Mineral  $M$  anwesenden, aus Oxyden zusammengesetzten Moleküle  $m$ , die der im Mineral  $N$  anwesenden  $n$ , die der im dritten Mineral  $O$  anwesenden  $o$  u. s. w., stecken weiter

in jedem Mol. des Min.	$M$	$a_m$ -	Mol. von $SiO_2$ ,	$b_m$ -	Mol. von $Al_2O_3$ ,	$c_m$ -	Mol. von $Fe_2O_3$ usw.
„ „ „ „ „	$N$	$a_n$ -	„ „ „	$b_n$ -	„ „ „	$c_n$ -	„ „ „ „ „
„ „ „ „ „	$O$	$a_o$ -	„ „ „	$b_o$ -	„ „ „	$c_o$ -	„ „ „ „ „
„ „ „ „ „	$P$	$a_p$ -	„ „ „	$b_p$ -	„ „ „	$c_p$ -	„ „ „ „ „

und ähnlich bei den übrigen Hauptmineralien, so muß die Anzahl von  $SiO_2$ -Molekülen zusammengenommen den Wert  $s$  der in Molekularprozentzahlen ausgedrückten Analyse geben, die  $Al_2O_3$ -Anzahl den Wert  $at$ , die

$Fe_2O_3$ -Anzahl den Wert  $fe_2$  u. s. w., falls man von einer aus 100 Molekülen bestehenden Gesteinsmenge ausgeht. Da hauptsächlich 8 Oxyde in Gesteinen vorkommen, hat man folgendes System von 8 Gleichungen:<sup>1)</sup>

$$\begin{array}{r} a_m \cdot m + a_n \cdot n + a_o \cdot o + a_p \cdot p + \dots = s \\ b_m \cdot m + b_n \cdot n + b_o \cdot o + b_p \cdot p + \dots = al \\ c_m \cdot m + c_n \cdot n + c_o \cdot o + c_p \cdot p + \dots = fe_2 \\ \vdots \\ h_m \cdot m + h_n \cdot n + h_o \cdot o + h_p \cdot p + \dots = k. \end{array}$$

Das System hat für  $m, n, o, p$  u. s. w. eine Lösung, wenn nicht mehr als 8 Mineralien im Gestein vorhanden sind und wenn es vorher bekannt ist, aus welchen von 15 Mineralien das Gestein sich zusammensetzt. Wenn dies nicht bekannt ist oder mehr als 8 Mineralien vorhanden sind, gibt es für  $m, n, o, p$  u. s. w. mehrere Lösungen, folglich dürften aus einem und demselben Oxydgemisch auch im allgemeinen verschiedene Mineralien (Gesteine) entstehen. Die ausführliche Kenntnis der diese Mineralausscheidung regelnden chemischen Gleichgewichte fehlt uns noch.<sup>2)</sup>

Die mineralische Zusammensetzung erlaubt folglich keinen eindeutigen Hinweis auf die Eigenschaften des Magma. Aus der petrographischen Gruppierung der Gesteine und deduzierten Magmaspaltung läßt sich kein zwingender Schluß über das Urmagma ziehen. Bei der Entstehung der durch Mineralien charakterisierten Gesteinsfamilien sind zur Zeit wenig bekannte physikalische Bedingungen im Spiele, welche aus einem und demselben Magma verschiedene Gesteine, aus verschiedenen Magmen oft nur ein Gestein entstehen lassen. Das wurde auch experimentell bewiesen. Werden Gesteine geschmolzen und nach Fouqué's Methode zur Kristallisation gebracht, so bilden sich oft andere Mineralien z. B. aus dem aus Diallag, Bronzit, Hornblende, Spinell, Granat und Olivin zusammengesetzten Ariëgit entsteht ein Gemenge von Augitmikrolithen und Bytownit. Aus Granat bildet sich Anorthit und Melilith.<sup>3)</sup>

Unter gewöhnlichen physikalischen Bedingungen des Experimentes dürfen wohl lediglich Massenwirkung und chemische Affinität der Basen

<sup>1)</sup> Cfr. Rosenbusch l. c. S. 8.

<sup>2)</sup> Die Phasenregel enthält keine Anhaltspunkte, welche Stoffe auftreten werden, wohl aber bestimmt sie die maximale Zahl der festen Mineralien, die gleichzeitig nebeneinander existieren können. Nach V. M. Goldschmidt (Die Gesetze der Mineralassoziation vom Standpunkte der Phasenlehre, Z. f. anorg. Chemie 1911, S. 313) ist diese maximale Zahl derjenigen der Einzelkomponenten gleich. Näheres siehe auch bei B. Gossner: Neuere Ergebnisse der Anwendung phys.-chemischer Methoden auf Probleme der Geologie, Geol. Rundschau, 7 (1915) 228.

<sup>3)</sup> Beispiele der Gleichungen, welche einerseits die Gemengteile eines Erstarrungsgesteins, andererseits die eines kristallinen Schiefers von verschiedener mineralischer aber gleicher chemischer Zusammensetzung aufführen, siehe bei F. Becke: Mineralbestand und Struktur der kristal. Schiefer. Denk. Wiener Ak. 75 (1903) S.-Abdr. S. 27 ff.

oder besser das Massenverhältnis (verglichen mit dem eutektischen Verhältnis) bei der Ausscheidungsfolge von Mineralien bestimmend wirken. Vogt<sup>1)</sup> will die Art der Mineralien in Zusammenhang damit bringen. Von dem Verhältnisse  $Ca : Al_2$  soll abhängen, ob sich aus  $CaO$ -reichen und  $Al_2O_3$ -haltigen Schmelzen Akermanit (beim Verhältnis 100 %  $CaO : 0\% Al_2O_3$ ), Melilith ( $7 CaO : 1 Al_2O_3$ ), Gehlenit ( $3 CaO : 1 Al_2O_3$ ) oder Anorthit ( $1 CaO : 1 Al_2O_3$ ) bildet. Von dem Verhältnis  $2 K_2O : 1 Na_2O$  hängt nach Lagorio die Auskristallisierung des Sanidin ab; Orthoklas wird aus  $SiO_2$ -reichem Magma bei ausreichender Anwesenheit von  $K_2O$  und  $Al_2O_3$  gebildet, aus  $SiO_2$ -armen aber Leucit. Diese im Laboratorium erzielten Angaben besitzen wohl ihre theoretische Gültigkeit, aber für die wirklichen Magmenverhältnisse unter obwaltenden veränderlichen physikalischen Verhältnissen taugen sie kaum durchgreifend, wie ich oben für Anorthit, Leucit und Orthoklas gezeigt habe.

Die Schwankung der mineralogischen Zusammensetzung haben Cross, Iddings, Pirsson, Washington<sup>2)</sup> am meisten akzentuiert, indem sie an der Hand von Bauschanalysen und willkürlich gewählten „Standardmineralien“ ein quantitatives petrographisches System erbauten. Sie bemerken richtig, daß die „normativen“ Gesteine, deren „Modus“ (= tatsächliche mineralogische Zusammensetzung) mit der „Norm“ (= in „Standardmineralien“ ausgedrückte Zusammensetzung) übereinstimmt, weniger häufig sind als die „abnormativen“.

Ich will nicht behaupten, daß sich nirgends eine durchgreifende Abhängigkeit des Mineralbestandes von dem Verhältnisse der Bauschanalyse vorfinden könne. F. Becke<sup>3)</sup> konnte feststellen, daß im böhm. Mittelgebirge die karge Menge an  $Si$  mit der Entstehung der Feldspatoide im ursächlichen Zusammenhange steht; oft finden die Alkalien nicht genügend  $Al$  zur Bildung der Feldspate oder Feldspatoide und werden genötigt, andere Stoffe wie  $Cl$ ,  $SO_3$  zu binden, wodurch Sodalithminerale entstehen.

\* \* \*

Die Entstehung von Mineralien im Magma, die Bildung von zu ihrem Aufbau nötigen Atom- und Molekülkomplexen ist eine chemische Reaktion und muß also auch den Gesetzen der chemischen Gleichgewichtslehre im allgemeinen unterstehen.<sup>4)</sup>

<sup>1)</sup> J. H. L. Vogt: Die Silikatschmelzlösungen mit besonderer Rücksicht auf die Mineralbildung und die Schmelzpunkterniedrigung. 1903.

<sup>2)</sup> Cross-Iddings-Pirsson-Washington: Quantitative Classification of Igneous Rocks based on chemical and mineral Characters, with a systematical nomenclature. 1903.

<sup>3)</sup> F. Becke: T. M. p. M. XXII., 1903, S. 227.

<sup>4)</sup> Oft kann die Verwandlung nicht spontan vor sich gehen, z. B. wenn das



Als chemisches Gleichgewicht bezeichnen wir den Zustand, in dem eine umkehrbare Reaktion in beiden Richtungen der Reaktionsgleichung mit gleicher Geschwindigkeit vor sich geht, so daß durch die in einem Sinne verlaufende Umsetzung gleiche Mengen derselben Stoffe verbraucht, wie durch die im entgegengesetzten Sinne sich abspielende gebildet werden. Dieses Gleichgewicht ist außer von der Konzentration der beteiligten Stoffe im gegebenen System (Massenwirkungsgesetz) auch von der Temperatur und dem herrschenden Druck abhängig.

Laut dem v a n't H o f f s c h e n Prinzip des beweglichen Gleichgewichtes und im Sinne des allgemeineren Prinzips von L e C h a t e l i e r - B r a u n (wornach jedes System auf eine auf dasselbe ausgeübte Wirkung derart reagiert, daß es sich ihr zu entziehen trachtet) werden durch steigende Temperatur endotherme, durch sinkende exotherme Reaktionen bevorzugt, während der steigende Druck diejenigen Reaktionen, welche unter Volumkontraktion verlaufen und der sinkende die mit Volumzunahme verbundenen fördern wird. Es wird also je nach der Tiefe der in Betracht kommenden Magmaschicht die eine oder die andere Art Reaktionen überwiegen.

Da die Umsetzungen, die zu einer Volumvergrößerung führen, in der Regel Wärme verbrauchen, hebt sich die Wirkung der steigenden Temperatur zum Teil, jedoch nicht ganz, durch den wachsenden Druck auf, wenn wir in der Richtung gegen das Erdinnere zu gehen.

Als Beispiel der obenerwähnten Volumregel, welche in der Petrogenese unter dem Namen des Volumgesetzes von L e p s i u s bekannt ist, führt L o e w i n s o n - L e s s i n g die Bevorzugung von Eisenmagnesiumsilikaten vor der Feldspatbildung in einer entsprechenden Schmelze durch Druck an, was dadurch erklärt wird, daß das Molekularvolum der ersteren Silikate kleiner, dasjenige der Feldspate aber größer ist als die Summe der Molekularvolumina der die erwähnten Mineralien zusammensetzenden Oxyde.<sup>1)</sup>

Es ist demnach der Massenwirkung, der Temperatur und dem Drucke zuzuschreiben, warum diese und nicht andere Mineralien gebildet werden, warum in einem in große Tiefe abgesunkenen Magma andere Mineralien entstehen als in der Nähe der Oberfläche, warum endlich in bereits ver-

---

molekulare Gleichgewicht nicht erreicht ist („Hysteresis“ in Pseudosystemen) oder wenn die Verwandlung des molekularen Raumbitters eine Vermehrung der Energie erfordert. Vergl. H. E. Boeke l. c. S. 55 f.

1) Kritische Bemerkungen zu den zu weitgehenden Folgerungen aus den eben besprochenen Regeln über den Einfluß des Druckes und der Temperatur auf die Reaktionen im Magma siehe: H. E. Boeke l. c. S. 76 f. u. 399 f. J. H. L. Vogt (Phys.-chem. Gesetze der Krystallisationsfolge in Eruptivgesteinen, T. M. p. M. 27 [1908] 124) macht darauf aufmerksam, daß 80% der Mineralien der Eruptivgesteine sowohl in den Silikatschmelzen als auch in den Decken-, Gang- und Tiefengesteinen vorkommen und sich infolgedessen ziemlich unabhängig von Zeit und Druck ausscheiden.



festigten Gesteinen die Kristallisationsdifferenziation sich ohne Zutun neuer Reagentien gründlich verändern kann (Bildung wärm-beständiger Mineralgattungen wie Biotit, Labradorit, Orthoklas bei der katogenen Metamorphose Beckes, statischen Metamorphose Milchs).

Wo die feste Gesteinskruste an die flüssige Magmenschicht grenzt, herrscht auch Gleichgewicht, sobald die Lösungstension des sich lösenden Stoffes dem osmotischen Druck der gelösten Moleküle gleich wird. Die feste Gesteinskruste wird nicht von allen Magmen gleichmäßig aufgelöst, sondern in dem Verhältnis, wie die Gesteine sich in diesen Magmen auflösen. Wenn unter zwei Magmen in dieser Hinsicht ein bedeutender Unterschied vorhanden ist und dieselben ihren Ort und ihr hangendes, aus ihnen durch Verfestigung hervorgegangenes Gestein infolge tektonischer Bewegungen oder infolge einer durch Dichtenunterschiede verursachten Strömung verlassen, werden sie wohl jenes Gestein auflösen können, dessen Liegendes sie jetzt bilden, und werden dadurch ihre Zusammensetzung ändern können (Assimilation des Nebengesteins). Die gelöste Substanz verändert dabei den Erstarrungspunkt der Schmelze. Wenn das Magma infolge der Lösung fremder Stoffe bei anderer Temperatur auskristallisiert, muß auch in der Struktur und im Mineralbestand des entstehenden Gesteins eine Veränderung stattfinden.

Die Förderer der magmatischen Homogenitätshypothese strebten, die magmatische Differenziation an der Hand der Gesetze von den eutektischen Mischungen<sup>1)</sup> begreiflich zu machen. Wenn aus dem Gemische nur eine Komponente teilweise auskristallisiert ist, so liegt der Erstarrungspunkt eines solchen Gemisches stets niedriger als der Erstarrungspunkt der auskristallisierten Substanz im reinen Zustande, da der Schmelzpunkt einer Substanz durch Beimengungen in der Regel (insoweit sich keine feste Lösung bildet) erniedrigt wird. Die Zusammensetzung der Schmelze verändert sich bei fortschreitender Ausscheidung einer Komponente und ihr Gefrierpunkt sinkt. Endlich kommt man zum niedrigsten Temperaturpunkte, bei welchem die übrigbleibende Lösung ähnlich einer reinen Substanz bei konstanter Temperatur als s. g. eutektische Mischung erstarren kann. Dann wird sich ein mechanisches Gemisch von allen in der Lösung befindlichen Stoffen absondern, und zwar in dem Verhältnis, in dem sie in der Lösung vorhanden sind. Beispiele: schriftgranitische Verwachsung von Orthoklas und Quarz, mikroperthitische Feldspate, Antiperthite, Granophyre, sphärolithische und mikrofelsitische Strukturformen. Die Seltenheit derselben erklärt sich dadurch, daß das Zustandekommen typischer Eutektstrukturen durch die verschieden große Wachstumsgeschwindigkeit und das verschieden große Kristallisationsvermögen verhindert wird.

<sup>1)</sup> Cfr. J. H. L. Vogt: Physik.-chemische Gesetze der Krystallisationsfolge in Eruptivgesteinen. T. M. p. M. XXIV. (1905), XXV. (1906), XXVII. (1908).

J. H. L. Vogt<sup>1)</sup> führt noch einen anderen die vorzeitige Ausscheidung aus der Schmelze begünstigenden Umstand an. Die Silikatschmelzen sind nämlich Elektrolyte und ihre Bestandteile sind teilweise in Ionen dissoziiert. Auch F. v. Wolff<sup>2)</sup> will auf dieselben das Nernstsche Gesetz anwenden. Er sagt: „Die physikalische Chemie lehrt, daß wenn in einer Lösung oder einer Schmelze sich zwei Komponenten im teilweise dissoziierten Zustande befinden und ein gemeinsames Ion besitzen, die Löslichkeit dieser Substanz herabgesetzt und ihre Ausscheidung aus der Schmelze begünstigt wird. In den Gesteinen sind fast immer Mineralien anwesend, die gemeinsame Ionen besitzen, ist doch die Zahl der Elemente, die man in größerer Menge im Eruptivgestein antrifft, eine verhältnismäßig beschränkte. Demnach lernen wir in der Dissoziation eine Erscheinung kennen, welche besonders in den verwickelten Gemischen der Eruptivgesteine die frühzeitige Ausscheidung gewisser Komponenten, die gemeinschaftliche Ionen besitzen, begünstigt und das Kristallisationspatium derselben bis zur Erreichung des Eutektikums verlängert.“ Nernst<sup>3)</sup> selbst spricht aus, daß die Löslichkeit eines Salzes (z. B. Kaliumchlorates) nach Zufügung eines zweiten mit einem gemeinschaftlichen Ion (Chlorkalium oder Natriumchlorat) sinkt und folglich im Vorhandensein einer gesättigten Lösung des ersten Salzes ein weißer Niederschlag desselben entstehen muß. Das zweite Salz ev. seine Lösung muß von außen zugegeben werden und seine Wirkung zeigt sich eben bei einer gesättigten Lösung des anderen Salzes. Dieses zweite Salz konnte wohl auch vom Anfang an in der Lösung enthalten sein, seine Wirkung zeigt sich eben in der frühzeitigen Sättigung der Lösung. Das ist eben der Fall, den F. v. Wolff meint und der bei Silikatschmelzen vorkommen könnte. Doch hat das Gesetz seine Ausnahmen im Falle der Bildung komplexer Ionen, wobei die Löslichkeit in der Gegenwart eines gleichionigen Salzes keineswegs erniedrigt, sondern erhöht wird. Im allgemeinen hat das Gesetz nur die Bedeutung, daß es die vorzeitige Ausscheidung<sup>4)</sup> der Minerale aus der Silikatschmelze bedingt, was aber keineswegs „das Kristallisationspatium verlängern muß“, wie F. v. Wolff es will. Der eutektische Schmelzpunkt ist nämlich von den Schmelzpunkten einzelner Komponenten abhängig. Falls diese Schmelzpunkte sich verändern (dem Nernstschen Gesetze gemäß sich einer von denselben erhöht), muß der eutektische Schmelzpunkt auch verschoben werden. Daraus folgt aber nicht, daß sich das Kristallisationspatium immer verlängern muß.

<sup>1)</sup> I. c. XXV. (1906), 155.

<sup>2)</sup> I. c. S. 59.

<sup>3)</sup> I. c. S. 566 ff.

<sup>4)</sup> Nach C. Doelter (Die Schmelzbarkeit der Mineralien und ihre Löslichkeit im Magma. T. M. p. M. XXII., 1903, S. 327 ff.) sind die Bedingungen des Auflösens: Druck, chemische Zusammensetzung des Magma, Temperatur des Magma, Eigenschmelzbarkeit (Schmelzpunkt) der Mineralien außerhalb des Magma.

In den früher erstarrten Kristallen sieht die Homogenitätshypothese ein Zeichen der magmatischen Differenziation. Aber die Kristalle erfüllen den Raum ziemlich gleichmäßig, da infolge der Diffusion die diesbezüglichen Moleküle allseitig zerstreut wurden. Wenn wir eine nicht eutektische Schmelze, die allmählich bis unter ihren niedrigsten Gefrierpunkt abgekühlt wurde, mikroskopisch untersuchen, so sehen wir in einer sehr feinkörnigen und das eutektische Gemisch darstellenden Grundmasse größere Kristalle des Stoffes, der im Überschuß vorhanden war. Es ist derselbe Eindruck, den die Präparate von porphyrischen Gesteinen darbieten.

Bei der Abkühlung eines Eruptivkörpers sinkt die Temperatur an der Wand am ehesten. Hier wird das Magma zuerst verfestigt und enthält auch die früher ausgeschiedenen Kristalle, insofern sie nicht von der Schwerkraft abtransportiert worden sind. Diese Teile des Magma können auch durch Konvektionsströmungen anderswohin gelangen, ebenso kann das erstarrende Magma durch Auspressung (gerichteten Druck) von dem noch flüssigen Magmareste befreit werden.<sup>1)</sup>

In tiefer gelegenen Niveaux sinken ev. steigen (je nach ihrem spezifischen Gewicht) die Erstlinge der Kristallisation (hydrostatische Hypothese <sup>2)</sup>). Das ideale Stadium kann aber wegen der im Magma platzgreifenden Strömung nicht erreicht werden. Auf solche Weise lassen sich die sogenannten Assoziationssphären R e y e r s <sup>3)</sup> und die Entmischungen der Metallurgen erklären. In dem Augenblicke, wo repulsive Diffusionskräfte zwischen den Molekülen zu wirken aufhörten und attraktive kristallbildende Kräfte obwalten, lassen sich keine unter den gebildeten und in der Lösung schwebenden Kristallen herrschenden Molekularwirkungen, die Schwerkraft und ev. Zentrifugalkraft ausgenommen, annehmen.

Insofern die ersten ausgeschiedenen Kristalle <sup>4)</sup> schwerer sind als das Eutektikum, sinken sie und gelangen in tiefere Schichten. Umgekehrt gilt es von spezifisch leichteren Kristallen. Dadurch müßten aus jeder magmatischen Schmelze, wenn nur genug Zeit dazu vorhanden ist, drei differente Schichten entstehen und zwar in der Mitte diejenige mit den dem Eutektikum <sup>5)</sup> — was das spezifische Gewicht betrifft — gleichenden

<sup>1)</sup> C f r. A. H a r k e r: The natural History of Igneous Rocks. 1909. S. 309 ff.

<sup>2)</sup> C f r. R. A. D a l y: The Differentiation of a secondary Magma trough gravitive Adjustment. Festschrift H. Rosenbusch, 1906, S. 203 ff.

<sup>3)</sup> l. c. S. 237 u. f.

<sup>4)</sup> Nach A. H a r k e r (The Natural History of Igneous Rocks 1909) kristallisieren folgende Minerale zuerst, also bei hoher Temperatur und sogar ohne Einwirkung der Mineralisatoren: Olivin, Pyroxen, Melanit, anorthitreiche Plagioklase, Leuzit, Nephelin, Sillimanit, Kordierit, Korund, Rutil, Spinell, Magnetit, Hämatit u. a. m., bei wenig hoher Temperatur und am besten (Quarz nur) bei Gegenwart von Kristallisatoren: Alkalifeldspate, Amphibol, Zirkon, Titanit, Sodalith u. a. m.

<sup>5)</sup> Eine nahezu eutektische Zusammensetzung wird den beiden häufigsten Magmen (dem granitischen und gabbrobasaltischen) von H. E. B o e k e (l. c. S. 93) zugeschrieben, beide zeigen eine körnige Struktur ohne Einsprenglinge und



Erstlingen der Kristallisation. Auf diese Weise lassen sich wohl saure und basische Schlieren der Gesteine erklären, auch können durch Strömung saure und basische Partien in andere Orte (als Schlieren) gebracht werden.

Genügt diese „Saigerungshypothese“ die allgemeine Differenzierung des sämtlichen Urmagmas klar zu legen? Die aus der abgekühlten (dem Eutektikum nahen) Schmelze ausgeschiedenen Kristalle müßten durchaus dieselbe verlassen, damit ein Gestein von einer Grundmasse, welche von der obigen verschieden ist, entstehen könnte. Unterhalb des bereits differenzierten liegt ein Magma von einer höheren Temperatur. Die gesunkenen Kristalle lösen sich in demselben und streben durch Diffusion sich überall zu zerstreuen. Da mit der Temperatur die Geschwindigkeit wächst, mit welcher sich die entstandenen Ionen durch das Gemisch bewegen, darf im Gebiete der abgesunkenen Kristalle ein fast homogener Zustand bald entstehen.<sup>1)</sup> Es ist klar, daß spezifisch schwere Kristalle auf solche Weise in der Tiefe sich anhäufen und umgekehrt in der Nähe der Peripherie solche sich ansammeln, die spezifisch leichter sind. Darin scheint der Grund zu liegen, warum die Kruste hauptsächlich aus kieseligen, die tiefsten Zonen aus schweren metallischen Massen bestehen. Induktiv ist A. O s a n n<sup>2)</sup> zur Annahme solcher Differenzierungsvorgänge dem spezifischen Gewichte nach im aufsteigenden Magma gekommen. Er fand in Ergußgesteinen (Lipariten, Trachyten, Phonolithen, Daciten, Andesiten, Plagioklasbasalten) höhere Werte von  $s$  und  $a$  aber niedere von  $f$  als in den entsprechenden Tiefengesteinen.

Man muß sich also vorstellen, daß die mit schweren Metallatomen beladenen Kristalle wie ein dichter Regen tiefer sinken, und es entsteht wohl die Frage, warum schon längst alle schweren Metalle aus der oberen magmatischen Schicht nicht entfernt wurden? Diese obere Schicht verändert ihre Zusammensetzung, sie verfestigt sich oben und wird unten aus den tieferen Zonen wieder ergänzt, in welcher tieferen Zonen die Saigerung und Kristallbildung überhaupt wegen der zu hohen Temperatur nicht stattfinden kann. In diesen tieferen Zonen sammeln sich an und zerstreuen sich wieder spezifisch schwere Stoffe. Man darf voraussagen, daß die Magmen, je länger sie als solche bestehen, desto mehr spezifisch schwere Stoffe enthalten werden.

Aber auch darin gibt es eine Grenze, welche wohl durch den Kontakt der flüssigen magmatischen und der im Erdinnern anwesenden gasförmigen Phase gegeben ist. Das Gleichgewicht beider Phasen ist von der Qualität der flüssigen Phase abhängig. Verändert sich die Zusammensetzung dieser

---

stellen „Schmelzreste eines großen ursprünglichen Magma“ dar. Aber wie erklärt man dann die Verschiedenheit im Bereiche jedes einzelnen sekundären Magma?

<sup>1)</sup> Nach dem Prinzipie von G o u y und C h a p e r o n wird auch hier die Konzentration der schwereren gelösten Substanzen mit der Tiefe zunehmen.

<sup>2)</sup> A. O s a n n: Versuch einer chemischen Klassifikation der Eruptivgesteine. T. M. p. M. XXII., 1903. S. 345 f.



flüssigen Phase in der gerade angegebenen Richtung, d. h. wächst die Konzentration eines bestimmten Urstoffes in der flüssigen Phase, bis sie den Wert

$$k = \frac{c_1}{c_2} \text{ (Gesetz von H e n r y,}$$

$c_1$  = die Konzentration des Stoffes in der gasförmigen Phase,  $c_2$  = die Konzentration desselben in der flüssigen Phase), der nur von der Temperatur abhängig ist, übersteigt, dann geht der Stoff in das gasförmige Erdinnere über und vermehrt infolgedessen dort seine prozentuelle Menge. Auf solche Weise wird der Überschuß an der spezifisch schweren Masse im Erdinnern angesammelt. Das Erdinnere muß viel solche Stoffe, namentlich Eisen, enthalten.

Die geschilderte Zusammensetzung der magmatischen Zonen entspricht der Annahme E. Sueß<sup>1)</sup> von einer salischen (an *Si* und *Al* reichen) und einer tiefer liegenden spezifisch schwereren simischen (an *Si* und *Mg* reichen) Schicht, auch derjenigen D a l y's<sup>2)</sup> von einer feuerflüssigen überall verbreiteten und eine salische Hülle tragenden Unterlage. Durch die eutektische Theorie kann die geschilderte magmatische Differenziation begreiflich gemacht werden, keineswegs aber zugleich die Entwicklung von Teilmagmen aus einem universalen Stammagma, wie es die magmatische Homogenitätshypothese braucht.

Die Homogenitätshypothese muß zu anderen Hypothesen greifen, um „Spaltung“ zu erklären (Akkumulations-, Assimilations-, Saigerungs- und hydrostatischer Hypothese). Demgegenüber geht die Inhomogenitätshypothese von der Verschiedenheit der Gesteine und Magmen aus, sie muß folglich dieselbe nicht erklären und bildet einen freien Weg zur Erforschung der in dieser Verschiedenheit obwaltenden Gesetze. Für die Untersuchung des Magma taugen nur chemische Analysen. Zur Zeit lassen sich einfache Gesetze der örtlichen Verteilung von Elementen im Magma nicht einwandfrei feststellen. Um sie zu entdecken, ist es aber nötig, sich von der mineral-petrographischen Anschauung radikal zu befreien. Es ist wahr, was F. v. W o l f<sup>3)</sup> in seiner Kritik der rein quantitativen petrographischen Systeme bemerkt, daß die mineralogische Zusammensetzung neben der chemischen auch noch die anderen Gestaltungsbedingungen zum Ausdruck bringt und daß folglich das Gestein nicht allein durch seine chemische Zusammensetzung bestimmt werden kann; aber die Gesteine eben gehen uns jetzt nicht an, sondern die Erforschung des Magma. Aus dem Grunde muß man den quantitativen Systemen

<sup>1)</sup> E. S u e ß: Antlitz der Erde. III. 2. S. 625.

<sup>2)</sup> R. A. D a l y: Mechanics of Igneous Intrusion. Am. Journ. of Science, 1903 und 1908.

Derselbe: The Nature of Volcanic Action. Proceedings Am. Acad. Arts and Sciences, 1911, 47.

<sup>3)</sup> l. c. S. 130.

Vorzug geben.<sup>1</sup> Und dabei wird die Inhomogenitätshypothese mehr Nutzen bringen, wenigstens wird sie nicht hemmend wirken.

Einen wichtigen Schritt hat F. Becke<sup>2</sup>) gemacht, da er gefunden hat, daß die an leichtere Elemente (*Si*, *Al*, *Mg*, *Na*) reicheren Gesteine der pazifischen (andesitischen, auch foyaitisch-thermalitischen) Gruppe vorzugsweise (seit dem Terziär) in Geosynklinalen von gefalteten Kettengebirgen (der große Vulkanring, der den stillen Ozean umgibt, Vulkanreihe der großen Sundainseln, persische und kaukasische Vulkane, Vulkangebiete der Karpaten in Ungarn und Siebenbürgen) auftreten, aber die an *K*, *Ca*, *Fe* reicheren atlantischen (tephritischen, auch granito-dioritischen und gabbro-peridotitischen) Gesteine an die Gebiete der vertikalen Dislokationen (das böhmische Mittelgebirge, das Duppauer Gebirge, Rhön und Vogelsberg, Hegau, der Kaiserstuhl, die Eifel, das rheinische Siebengebirge, die jungvulkanischen Gesteine des Zentralplateaus in Frankreich, die mittelitalienischen Vulkane bis zum Vesuv und den phlegräischen Feldern, Azoren, Capverden, die vom Kamerungebirge ausstrahlende Vulkanreihe, Texas u. a. m.) gebunden sind.<sup>3</sup>)

Vom Standpunkte der Assimilationstheorie wird die Erscheinung auf die Weise erklärt, daß sich bei der Faltung die obersten Schichten der Erdkruste (Kompressionsschale — v. Wolff) heben und auflockern, so daß in dieselben lakkolith- und lagergangartige Intrusionen eindringen können, die die an  $SiO_2$  und  $Al_2O_3$  reiche Umgebung assimilieren und dadurch einen salischen Charakter annehmen.<sup>3</sup>) Nur ausnahmsweise entstehen in diesem Falle klaffende Spalten, durch welche dann das Magma an den Tag kommt. Wo aber die seitlich nicht gepreßten Schichten bersten — wohl infolge des seitlichen Zuges beim Sinken oder des Druckes von unten beim Heben — kann durch die in gewaltige Tiefe bis unter die Tensionsschale reichenden Spalten das femische (an *Fe* und *Ca* reiche) Magma bis an die Oberfläche gelangen. Dieses Magma dringt nicht in Schichtungsflächen der Nebengesteine, da ihr Schichtungsverband nicht gelockert (die Schwerkraftwirkung in denselben im Momente der Intrusion nicht aufgehoben) ist. Eine größere Assimilation kann nicht stattfinden, folglich müssen diese Eruptiva einen relativ basischen Charakter aufweisen.

F. Becke<sup>4</sup>) selbst ist von einem gemeinsamen Ursprunge beider Sippen überzeugt, indem er annimmt, daß zu einer Zeit, als die Elemente

<sup>1</sup>) T. M. p. M. XXII., 1903. S. 209 ff.

<sup>2</sup>) Nach F. v. Wolff (l. c. S. 132 ff.) haben die bisherigen Forschungen ergeben, daß die atlantische Sippe über die ganze Erde verbreitet ist und daß die pazifischen Gesteine die atlantischen Provinzen umrahmen. Man kennt zwei gewaltige pazifische Zonen: die zirkumpazifische und die mediterrane (im Gebiete der Tethys Sueß'). Zu denselben fügt v. Wolff noch eine dritte „arktische“ Sippe von Basalten in nördlichen Circumpolarländern und Gondana.

<sup>3</sup>) Cfr. R. A. Daly: Origin of the Alkaline Rocks. Bull. Geol. of America. 1910, S. 87 ff.

<sup>4</sup>) l. c. S. 247.

noch im Gaszustand den Erdball zusammensetzten, eine Differenzierung nach der Gasdichte (dem Atomgewicht) erfolgte. Die oberen Schichten sind reicher an den leichteren Elementen (das pazifische Magma), die tieferen an den schwereren (das atlantische Magma).

Ich will auf die Tatsache aufmerksam machen, daß die Faltungserscheinungen doch hauptsächlich, was ihre vertikale Dimension anbelangt, an die Oberfläche gebunden sind, während die Spalten der vertikalen Dislokationen in unabsehbare Tiefen reichen. Schon in manchem Steinbruche lassen sich kleine Faltungserscheinungen beobachten, die im Liegenden und Hangenden von unberührt geraden Schichten begrenzt sind, während die Diaklasen die Felsenwände von oben bis unten schneiden. Die Hunderte *km* langen meridionalen Bruchlinien der Erde müssen wohl bis zur magmatischen Schicht reichen. Demzufolge wage ich, obzwar ich der allgemeinen Folgerung F. Beckes nicht zustimme, doch den Schluß zu ziehen, daß die Zusammensetzung des Magma einem vertikalen Gesetze: oben salisch, unten femisch folgt, weil eben die Faltungen und vertikalen Dislokationen verschieden tief, die letzteren enorm tiefer reichen. Die atlantischen Magmen sind im allgemeinen tiefer, die pazifischen Magmen weniger tief in der Bathosphäre lokalisiert, wohl können sie aber infolge Konvektionsströmungen nebeneinander geraten. Bei dieser Annahme läßt sich leicht begreifen, warum saure Gesteine im Anfange der eruptiven Tätigkeit auch in dem Gebiete der atlantischen Sippe sich bilden können z. B. Feldspatbasalte im böhm. Mittelgebirge. Durch die dem Magma freien Weg bietende Spalte muß zuerst das oft nur in einer relativ winzigen Mächtigkeit vorhandene sauerere Magma emporsteigen. Auch erklärt sich damit die diverse Eruptionsfolge, welche von Richthofen und Iddings einerseits und von Brögger andererseits angegeben wird. Für die älteren Magmenprovinzen bestand nach v. Wolf<sup>1)</sup> eine derartige Beziehung zu Verwerfungen und Faltungserscheinungen noch nicht. Der Grund dürfte in einer nicht genug vorgeschrittenen Differenzierung stecken. Es läßt sich auf obige Weise die Beobachtung Schwantke<sup>2)</sup> erklären, daß keine scharfe Trennung der Alkalimagmen und Alkalikalkmagmen in hessischen Basalten stattfindet. Schwantke will diese Erscheinung damit begründlich machen, daß alkalische (theralitische) Magmen solche sind, die nicht so viel Spaltungsprodukte (die juvenilen Wässer Sueß' und ihr Mineral-

<sup>1)</sup> l. c. S. 154. Es sei bemerkt, daß in dem Werke (S. 132) die Merkmale beider Sippen Beckes anders angegeben sind. Rosenbusch' foyaitisch-theralitische Reihe und Iddings alkalische Gruppe entsprechen wohl der Gruppe der pazifischen Gauverwandtschaft. Dieselben Gesteine sind bei ähnlichem Basverhältnis reicher an Si und Al, der Überschuß an Na und Mg ist verschwindend gering gegenüber den Differenzen innerhalb jeder Gesteinsreihe. Vergl. auch die Besprechung Beckes in T. M. p. M. 1915., XXXIII. S. 370 ff.

<sup>2)</sup> A. Schwantke: Das chemische System der Eruptivgesteine und die Theorie ihrer Genesis. C. f. M. G. P. 1910. S. 169 ff.



gehalt) abgegeben haben als die granodioritischen. Man muß aber bedenken, daß sich solche Spaltungsprodukte erst als Nachklänge der eruptiven Tätigkeit melden und für den chemischen Bestand der bereits ausgestoßenen Gesteine belanglos sind.

Bei den großen Dimensionen der Erdkruste (Litho- und Bathosphäre), welche wir als ein Produkt der Entgasung des unbekanntes Erdinnern ansehen, ist nicht zu glauben, daß überall dieselben Verhältnisse in der Zusammensetzung des Magma öbwalten sollten. Zu der gegensätzlichen Ansicht (der Homogenitätshypothese) verleiht die Beobachtung der Atmo- und der Hydrosphäre, deren allerorten gleiche Zusammensetzung sich wohl durch ihre Beweglichkeit erklärt, obgleich trotzdem in denselben keine strenge Gleichheit in der Zusammensetzung herrscht. Der Hauptfaktor ist die Insolation, welche durch Wind und Strömungen die Unterschiede aufhebt. Ein ähnlicher Faktor fehlt aber in der Bathosphäre und im Erdinnern überhaupt. Mit der Feststellung der Dichte des Erdkörpers wurde zugleich die von der Erdkruste abweichende Zusammensetzung des Erdinnern bewiesen. Dazu können noch die Gründe zugefügt werden, welche zur Aufstellung von 3 verschiedenen Magmenreihen in der Petrographie führten. Das alles spricht gegen die Einheitlichkeit des Magma im geologischen Sinne. Der homogene Zustand des Magma scheint nicht der Gesteinsentwicklung anzugehören, sondern ist älter als die Erde. Die qualitativen der Homogenitätshypothese entspringenden petrographischen Systeme sollen demzufolge den quantitativen Platz machen, zu denen Loewinson-Lessing, Osann, Cross etc. die erste Grundlage gelegt haben.<sup>1)</sup>

Die bildliche, so sehr die geistige Arbeit erleichternde Darstellung A. Osanns, welche tatsächlich von der mineralogischen Anschauungsweise der Kerntheorie Rosenbusch' ausgeht, muß bei dieser Forschung durch einfachere und mehr allgemeine ersetzt werden. Dasselbe Streben läßt sich in der von A. Osann<sup>2)</sup> selbst unternommenen Abänderung seiner ursprünglichen Projektionsweise erkennen. Am zweckmäßigsten wird man in der Hauptsache die alte Projektion Rosenbusch, (l. c. S. 693) benützen können.

Ich bin der Ansicht, daß ähnlich wie die Chemie auch die petrographische Projektion von dem chemischen Inhalte einer Gewichtseinheit des Gesteins ausgehen soll. Trotzdem benützen die Autoren (Rosenbusch, Osann u. a.) fast durchgehends prozentige Molekularzahlen oder prozentige Metallatomzahlen. Sie gründen infolgedessen die graphische Darstellung auf ungleiche Gewichtsmengen der Gesteine. In der Ge-

<sup>1)</sup> Den Gedanken, in dem Eutektikum die Grundlage einer natürlichen Systematik zu suchen, hat G. F. Becker (21, Ann. Rep. U. S. Geol. Surv. III., 1901, 519) ausgesprochen.

<sup>2)</sup> A. Osann: Petrochemische Untersuchungen. I. C. f. M. G. P. 1913. S. 481 ff. Orig. Abh. d. Heidelb. Ak. d. Wiss., m.-nat. Kl. 2. Abh. 1913.



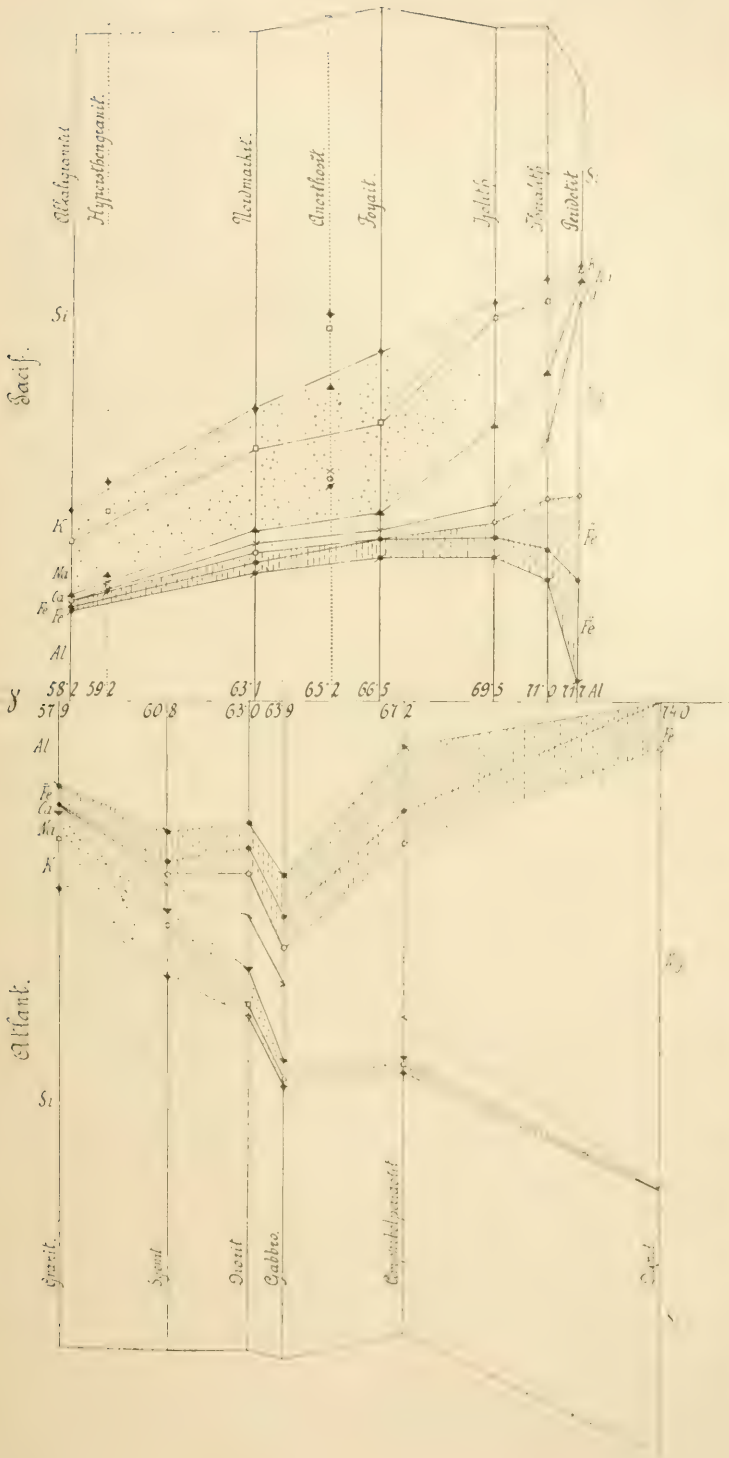


Fig. 2. An der Hand des Koeffizienten  $\gamma$  und der Metallatomzahlen wurden folgende Gesteine abgebildet: aus der toyaitisch-theralitischen (pazitischen) Reihe Alkaligranit (Florissant-Plate River, Pikes Peak-Distrikt Col.), Nordmarkt (Brome Mountain, Kanada), Foyait (Serra de Tingüá, Rio de Janeiro), Jolith (Jivaara, Finnland), Theralith (St. Vincent) und Peridotit (N. O. - Fuß der Ricolletta bei Predazzo, aus der charnockit-amorthositischen Reihe Hypersithengranit (Birkrom Ekersund, Norwegen) und Anorthosit (Encampment, Minnesota, U. S. A.), aus der granitoiditischen und gabbroperidotitischen (atlantischen) Reihe Granit (Hautzenberg, Bayern), Amphibolsyenit (Biella, Piemont), Diorit (Schwarzenberg bei Barr, Unter-Elsass), Gabbro (Mount Hop, Baltimore), Amphibolperidotit (Schiersheim, Odenwald) und Dumit (Dun-Mountains, Neu Seeland).

wichtseinheit des Gabbro aus Radautal (Harz) sind 175 Metallatome vorhanden, in demselben Gewichte des Dunits von Dun-Mountains (Neuseeland) aber 204 Metallatome. Durch Umrechnen auf 100 vermindert sich die Metallatomzahl des Dunits weit mehr ( $\frac{100}{204}$  mal) als diejenige des

Gabbro ( $\frac{100}{175}$  mal). Die auf solche Weise veränderten Metallatomquotienten eines und desselben Metalles von zwei oder mehreren Analysen lassen sich nicht gut miteinander vergleichen, falls der Gedanke einer gleichen ursprünglichen Gewichtsmenge mit denselben verbunden ist.

Folglich will ich von Metallatomquotienten ausgehen. Zu dem Zwecke werden die prozentigen Zahlen einer Bauschanalyse durch 1% des Molekulargewichtes der Oxyde dividiert, aus den gewonnenen Molekularquotienten folgen dann Metallatomquotienten. Nach dem Beispiele Bröggers<sup>1)</sup>, der alle Oxyde für sich allein abgebildet hat, trage ich alle Metallatome (also auch  $\overset{'''}{Fe}$  und  $\overset{''}{Fe}$ ) ab. Ich folge aber nicht der Ansicht Mügges,<sup>2)</sup> welcher gegenüber Rosenbusch verlangte, daß die Zahlen für Si anders abgebildet werden, da Si in den Gesteinsanalysen eine wesentlich andere Rolle spielt als die Basen. Dagegen will ich betonen, daß Si auch durch Al und Fe vertreten werden kann und daß in einem richtigen Bilde Si keineswegs weggelassen oder untergeordnet abgebildet werden darf.

Ich benütze ein gewöhnliches Koordinatensystem, dessen Abszisse (Fig. 2) den Wert  $\gamma$  (Zehntel z. B. in mm), und dessen Ordinate reihenweise acht Hauptmetalle in einer stets gleichen Ordnung (Al,  $\overset{'''}{Fe}$ ,  $\overset{''}{Fe}$ , Mg, Ca, Na, K, Si) im passenden Maßstabe (etwa in mm) und mit verschiedenen Abzeichen versehen angibt. Die pazifischen Gesteine (in Fig. 2 Alkali-granitit [Analyse in Rosenbusch l. c. S. 86 N. 2], Nordmarkit [dasselbst S. 128 N. 3], Foyait [S. 146 N. 10], Ijolith [S. 210 N. 1], Theralith [S. 205 N. 21] und Peridotit [S. 222 N. 18]) sind oben, die atlantischen (in Fig. 2 Granit [S. 88 N. 1], Hornblendesyenit [S. 121 N. 6], Diorit [S. 167 N. 15], Gabbro [S. 180 N. 4], Amphibolperidotit [S. 216 N. 4] und Dunit [S. 216 N. 17]) sind unten abgebildet. Die Charnockitanorthositgruppe<sup>3)</sup> ist der pazifischen zugegeben (in Fig. 2 Hypersthengranit [S. 184 N. 3a] und Anorthosit [S. 184 N. 3d]).

Bei der Verwendung der Metallatomquotienten wird durch die Endpunkte (der Ordinaten), welche bisher bedeutungslos waren, die veränderliche Metallatomzahl d. h. der Umstand abgebildet, wie verschiedene Metallatome die Gewichtseinheit eines Gesteins zu bilden helfen. Zugleich erspart man sich das Berechnen von Metallatomprozenten. Durch den

<sup>1)</sup> Brögger: Das Ganggefölge des Laurdalits. 1897.

<sup>2)</sup> Mügge Zur graphischen Darstellung der Zusammensetzung der Gesteine. N. J. f. M. 1900. I. S. 100 ff.

<sup>3)</sup> = die arktische Sippe F. v. Wolffs.

Koeffizienten  $\gamma$  ist der Ort jeder Analyse streng bestimmt, was bei R o s e n b u s c h nicht der Fall war.

Beim Vergleiche der gleichwertigen Punkte von zwei Nachbarordinaten muß man sich vergegenwärtigen, daß dieselben tatsächlich einfache oder verdoppelte Molekularquotienten abbilden, welche durch Division der Gewichtsprocente mit einer gleichen Zahl (1% des Molekulargewichts) gewonnen wurden. Die Differenzen der Gewichtsprocente von zwei Analysen kommen folglich in den Differenzen der Metallatomzahlen wieder zum Vorschein und zwar in demselben Maße verkleinert, was wohl auf die Orientation, die das Ziel der graphischen Darstellung ist, keineswegs störend wirken kann. Die graphischen Differenzen sind selbstverständlich nicht in Metallatomprocenten angegeben, wie es bei R o s e n b u s c h der Fall ist. Die prozentige Differenz läßt sich erst aus  $\frac{100 a}{z_1} - \frac{100 a'}{z_2}$  berechnen ( $a, a' =$  Metallatomquotienten desselben Metalls in 2 Analysen, die verglichen werden,  $z_1, z_2 =$  Metallatomzahlen derselben Analysen).

# Studien über das Bohutíner Erzrevier.

I. Teil.

## Quarzbiotithornblendediorit von Bohutín.

Von

Dr. Ing. BOHUSLAV STOČES,  
Příbram.

(Mit 1 Abb. im Texte.)

Vorgelegt am 9. März 1917.

Im geologischen Aufbaue der Příbramer Umgebung spielen die vulkanischen Erscheinungen eine wichtige Rolle; es gehören hierher die Eruptionen verschiedener Gesteine, sowie auch die Příbramer Erzgänge, von denen schon Pošepný behauptet, daß sie eruptiven Ursprungs sind. Für die Erkenntnis der Genesis der Příbramer Erzgänge — welche zweifellos auf einen größeren magmatischen Herd gebunden zu sein scheinen, ist eine systematische Durchforschung der Příbramer Eruptivgesteine von großer Wichtigkeit. Da es aber sicher ist, daß alle Eruptivgesteine der Příbramer Gegend nicht von demselben Charakter sind und daß sie eigentlich mehreren Komplexen angehören — welche Annahme in der letzten Zeit besonders von Slavík bekräftigt wurde — so wird es nötig sein, die Eruptivgesteine systematisch durchzuforschen und zu entscheiden, welche von ihnen und inwieweit sie an der Bildung von Erzgängen teilgenommen haben, wie sie sich gegenseitig zueinander verhalten und was für eine Rolle sie in der tektonischen Entwicklung der Příbramer Gegend gespielt haben. In der vorliegenden Arbeit möchten wir zur Lösung dieser Fragen beitragen.

*Die Příbramer Erzgänge pflegen gemeinschaftlich mit den Diabasen vorzukommen.* Diese Tatsache hat dazu beigetragen, daß die älteren Forscher die Erzgänge als Begleiterscheinungen der Diabaseruptionen betrachtet haben.

Es gibt aber keinen so engen Zusammenhang zwischen den Diabasen und den Erzgängen.



Bei den Příbramer Erzgängen handelt es sich um eine nachträgliche Ausfüllung der schon vorher bestehenden Spalten. Will man solche Lagerstätten beurteilen, so muß man die beiden Fragen beantworten: 1. Welches war denn die Ursache der Spaltenbildung und was für eine Beschaffenheit weisen diese Spalten auf? 2. Welches war die Ursache der Ausfüllung dieser Spalten, und wie mag die Gangstruktur entwickelt sein?

Die Ursache von der Bildung der Spalten und der späteren Ausfüllung derselben braucht nicht eine und dieselbe zu sein, obwohl es bei den meisten Lagerstätten der Fall ist. Die Entstehung der Spalten hängt gewöhnlich mit den Vorgängen der Gebirgsbildung zusammen; die vulkanischen Ausbrüche pflegen dann Hand in Hand mit den tektonischen Prozessen aufzutreten. Die Art und Weise der Bildung von den Spalten der Příbramer Gegend ist bisher noch nicht gelöst worden. Zwar haben die zwei hervorragendsten Příbramer Forscher, Grimm und Pošepný, manche wertvolle Beobachtungen gemacht, und viele interessante Tatsachen festgestellt, es bleibt aber trotzdem das ganze Problem der Spaltenbildung in genetischer Hinsicht fast gänzlich ungelöst und wartet auf seine Beantwortung. Es blieben sogar die Grundzüge der Stratigraphie der Příbramer Gegend bis in die letzte Zeit unbekannt, und die Entdeckungen, welche Pošepný seinerzeit über die Stratigraphie des Příbramer Kambriums gemacht hat, sind leider bisher beinahe unberücksichtigt und unbekannt geblieben. Erst in den letzteren Jahren hat man den stratigraphischen Fragen wieder mehr Aufmerksamkeit gewidmet und besonders durch die Arbeiten Kettners ist eine feste Grundlage für die weitere Forschung gegeben worden. Auf Grund der neuen Stratigraphie muß man nun die Tektonik der Příbramer Gegend zu erklären versuchen, und erst nach der Erforschung des tektonischen Aufbaues wird man im Stande sein, die ganze geologische Entwicklung der Příbramer Gegend befriedigend darzustellen. Dann wird uns vielleicht auch die Ursache und die Bildungsart der die Erzgänge bedingenden Spalten einleuchten. Gegenwärtig läßt sich über die Kluffbildung folgendes sagen:

*Aus einer uns heute unbekanntem Ursache ist in einer dem Emportreten des Granites kurz vorangehenden Zeit ein System von Klüften zustande gekommen, auf denen bald nach ihrer Entstehung das diabatische Magma aufstieg.*

Daß die Klüfte vorgranitischen Alters sind, bezeugt uns die Tatsache, daß Diabase von der Beschaffenheit wie diejenigen der Příbramer Gegend nirgends den Granit durchbrechend aufgefunden worden sind. Daß sie sich kurz vor dem Aufsteigen des Granites gebildet haben, ersehen wir daraus, daß sie die schon gefalteten Schichten des Barrandiens durchdringen.\*)

\*) Vergl.: Schmid, Bilder von den Lagerstätten etc. zu Příbram, Wien 1887, S. 16.

Sollte es im Laufe der Zeit einst gelingen, das Verhältnis der Diabase zu den vor- und postgranitischen Querstörungen zu enträtseln, und sollte man irgendwo in der Nähe des Granites eventuell auch eine kontaktmetamorphe Umwandlung der Diabase finden, so würde uns das Alter der Diabase verhältnismäßig verlässlich bekannt werden.

*Daß die Klüfte nicht lange klaffend waren*, beweist uns der Umstand, daß die Diabasgrenze glatt ist, und daß die Diabase nur selten Einschlüsse des Nebengesteins enthalten.

*Daß das Magma in offene Spalten eingedrungen ist*, zeigt auch die Struktur der Diabase, welche gewöhnlich keine Merkmale eines während der Kristallisation wirkenden Druckes, sowie desjenigen nach der Erstarrung erkennen lassen. Gerade dieser Umstand spricht dafür, daß die Diabase kurz vor der Graniteruption, oder vielleicht gleichzeitig mit derselben, also in der Zeit, in welcher schon der Gebirgsdruck nachgelassen hatte, aufgestiegen sind. Es ist nämlich bekannt, daß der orogenetische Vorgang sich mit dem Aufsteigen des größten Teiles der Magmamassen vollzieht, welcher Umstand dann eine Abnahme des Druckes zur Folge hat. Die Gesteine dieser Periode pflegen sowohl kein paralleles Gefüge als auch keine anderen Druckerscheinungen zu zeigen.\*)

Die Entstehung der Spalten der Příbramer Gegend kann kaum der Wirkung des Druckes zugeschrieben werden. Eher *ein Zug und die ihm begleitende Zerrung der Kruste* mögen hier eine Rolle gespielt haben. Das bezeugt übrigens schon der Umstand, daß *die Gänge häufig anastomosieren* und daß keine größere Bewegung auf ihnen stattgefunden hat, was sicher unter der Wirkung eines Druckes geschehen wäre.

Die Zerrung, welche die Spalten für Diabasgänge erzeugte, dauerte aber noch lange Zeit. *Es bildeten sich neue Spalten von derselben Richtung, und zwar sehr oft auch auf den alten Stellen*; vielleicht deswegen, weil die Verwachsung des Diabases mit dem Nebengestein eine zu feste war. Auch konnten die kleinen, bei der Abkühlung des Diabases entstandenen Kontraktionsrisse die Spaltung erleichtern.\*\*)

Die offenen Spalten zeigten den aus der Tiefe aufsteigenden erzbringenden Dämpfen und Wässern eine bestimmte Bahn. *Die Spalten wurden sehr bald nach ihrer Entstehung ausgefüllt.*

Die spaltenbildende Kraft wirkte aber auch nach der Ausfüllung der Spalten durch das erzige Material fort, wie es die zahlreichen Lettenbestege und Harnische im Bereiche der Erzgänge bezeugen.

Eingehender ist die zweite Frage durchforscht, *welche die Ursache*

\*) Zu denselben Resultaten gelangte auch K e t t n e r. Siehe seinen Bericht: O povltavských vyvěřelinách mezi Svatojanskými proudy a ústím Berounky. Sborník české spol. zeměvědné. XX. 1914. str. 196.

\*\*) Vergleiche: S c h m i d: „Bilder etc.“ S. 16, und S c h m i d: „Montangeologische Beschreibung etc.“ Wien 1892. Ebenso: P o š e p n ý: „Montangeologische etc.“

betrifft, die das Aufsteigen der heißen erzführenden Lösungen zur Folge gehabt hatte und auf welche Art die Ausfüllung der Spalten durch das Erzmaterial vor sich gegangen sein mag. Besonders die Art und Weise der Füllung ist durch die Arbeiten Reuß, Babánek's und anderer, in den letzten Jahren namentlich durch diejenigen Hofmann's und Slavík's bekannt geworden.

Als Ursache der Erzbildung werden einhellig, wenn wir Lateralsekretion unberücksichtigt lassen, die Nachklänge der eruptiven Tätigkeit angegeben. Weil aber die Příbramer Eruptivgesteine keinesfalls einheitlich sind und mehrere selbständige Gruppen bilden, wird es nötig sein, an deren Durchforschung systematisch weiter zu arbeiten und zu entscheiden, welche von den Eruptiven es sind und was für einen Anteil sie an der Gangbildung haben und wie sie sich zueinander verhalten.

Schon Vrbá führt an, daß neben den Gesteinen der Diabasgruppe auch Diorite, (Sádek, Zdobov) und augitische Minette (Augustschacht) an dem Bau der Příbramer Gegend beteiligt sind. Auch der von uns hier zu beschreibende Bohutiner Quarzdiorit war damals bekannt und hat auch so viele Diskussionen verursacht (Pošepný's Beweis von dem archaischen Alter des Granites) und wurde deswegen von Grimm, Ambrož, Sandberger und Foulon beschrieben und auch von der k. k. geol. Reichsanstalt untersucht. Vor diesen Untersuchungen hat man dieses Gestein für einen Granit gehalten, wie es zahlreiche Benennungen der Grubenbauten bezeugen (Granitschlag, Granitort etc.).

In der neueren Zeit wurden dann in der Příbramer Gegend durch Slavík auch die Eruptivgesteine des algonkischen Spilitkomplexes nachgewiesen.

*Also bilden die Eruptivgesteine der Příbramer Umgegend 3 selbständige Gruppen.*

1. Die ältesten von ihnen, die Gesteine des spilitischen Komplexes, können für die Entwicklung der Gänge gar keine Bedeutung gehabt haben, da ihre Eruptionszeit in das Algonkium fällt. Sie beschränken sich sonst nur auf die zweite Schieferzone, und haben deswegen eine große Bedeutung für die stratigraphische Zugehörigkeit der einzelnen Schichtenkomplexe der Příbramer Umgebung.

2. Eine größere Bedeutung und einen größeren Einfluß auf die Füllung der Erzgänge schrieb man immer den jüngeren, intrusiven Diabasen zu, welche nicht nur das Algonkium, sondern auch das Kambrium durchsetzen. Es wäre aber gewagt, solch basischen Gesteinen solche gewaltigen posteruptiven Wirkungen zuzuschreiben. Ist ihr Magma arm an agents minéralisateurs, wie es die nur geringfügige Kontaktmetamorphose in ihrer Umgebung zeigt. Und die Gangformation „silberhaltige Blei- und Zinkerze“ sind kaum irgendwo an ein so basisches Magma gebunden, sondern sie hängen eher von den schwach- bis mittelsäuren Gesteinen ab.



Sonst sind bei uns viele Diabasgänge in den ganzen Bezirken ohne irgendwelche Erzführung, und wie schon Pošepný bemerkt, ist die Füllung des Erzganges, was die Menge der Erze betrifft, in keinem Verhältnis zu der Menge der in der Umgebung auftretenden Diabase.

*Wenn die Diabase einem selbständigen Magmaherde entstammen sollten, dann hätte die Füllung der Erzgänge gar nichts Gemeinsames mit den Diabasen; nur die Ursache der Entstehung von den Spalten ist den Diabasen und den Erzgängen gemeinsam. Wenn aber die Diabase von dem Magmaherde des mittelböhmischen Granites abstammen, dann sind sie mit den Erzgängen nur indirekt genetisch verknüpft u. zw. soweit sie beide von demselben gemeinsamen Magmaherde abstammen. Die Diabase stellen uns dann die Einleitung, respektive basische Begleiterscheinung, die Erzgänge die thermalen Nachklänge der granitischen Eruption.\*)*

Ähnliche Diabase, wie es die Příbramer sind, sind auch überall in der Richtung gegen NO, das ist gegen Dobříš, verbreitet, aber sie werden nirgends durch die Erzgänge begleitet.

3. Es erübrigt noch eine Gruppe der Eruptivgesteine, was die Erklärung der Füllung der Erzgänge betrifft, und zwar die Gesteine, welche dem magmatischen Herde des mittelböhmischen Granites angehören.

Die Einreihung der Příbramer Erzgänge unter die Erzaureole des mittelböhmischen Granites ist naheliegend; liegt doch Příbram nahe an der Granitgrenze, nur 4.75 km von ihr entfernt. Die Erzgänge von ähnlichem Typus sind gewöhnlich an die granodioritischen Magmen verknüpft.

Den besten Beweis für die Abhängigkeit der Erzgänge vom granitischen Magma liefert aber das *Auftreten von solchen Mineralien an den Erzgängen, deren Zugehörigkeit und Herkunft vom granitischen Magma eine evidente ist*. Es sind folgende Mineralien: Apatit, Uranin, Zinnstein, Scheelit, Stannin, von denen die beiden letzteren von Hofmann und Slavík\*\*) entdeckt wurden, welche auch die Wichtigkeit und Bedeutung dieser Mineralien gewürdigt haben.

*Ein anderer Beweis für die Abhängigkeit der Erzgänge mit dem mittel-*

---

\*) Die Frage, ob es möglich wäre, die Příbramer Diabase zu den Gesteinen der granitischen Gruppe anzureihen, ist noch nicht entschieden. Wenn aber die Behauptung Grimms, welche auch Vrbazitiert, eine Tatsache sein sollte, daß nämlich ein Teil der Diabasgänge die Erzgänge durchsetzt, dann wäre die Verknüpfung der Diabase mit dem Granite eine evidente: Die Diabase werden durch Erzgänge durchsetzt, diese durchsetzen aber auch die Gesteine der granitischen Familie und ein Teil der Diabase ist sogar jünger als die Erzgänge. Anders gesagt, die Entstehung der Erzgänge fällt mit der eruptiven Tätigkeit des diabasischen Magmas zusammen und ist gleichzeitig jünger als die granitischen Gesteine, das heißt: Die Eruption der Diabase, der granitischen Gesteine und die Entstehung der Erzgänge sind zeitlich und räumlich eng miteinander verknüpft.

\*\*) Neues über das Příbramer Erzvorkommen; Ö. z. f. B. u. H. 1906, Nr. 10; Hofmann a Slavík: O rudonosném křemeni příbramském, R. Č. A. XIX., Nr. 27.



böhmischen Granite ist das häufige Auftreten von Antimonit auf den Erzgängen, besonders im Bohutíner Reviere. Antimonit kommt bei uns im Granite ziemlich häufig vor. Auch in der Nähe von Příbram findet er sich im Granit bei der ärarischen Straße bei der Kreuzstelle zwischen Háje und Bytíz vor (Pošepný und Grimm).

Für die Herkunft der Příbramer Erzgänge vom granitischen Magma spricht aber auch der gewichtige Umstand, daß auch im eigentlichen Bereiche der Erzgänge solche Gesteine auftreten, welche dem Magmaherde des mittelböhmischen Granites angehören, und daß diese Gesteine durch die Erzgänge durchsetzt werden. Für die Zugehörigkeit dieser Gesteine zu dem Granite spricht schon ihr Habitus und ihre Struktur, die mit den Gesteinen, welche bei Milín und Rožmitál weit verbreitet sind, vollkommen identisch ist.

Außer dem Bohutíner Diorit werden auch die von V r b a beschriebenen Diorite vom Sádék-Schaf und Zdaboř dieser Gruppe angehören, sowie die augitische Minette aus dem Kaiser-Stollen vom August-Schacht und der Pegmatit aus dem Stephan-Schacht. Die Anzahl dieser Gesteine wird gewiß durch systematisches Verarbeiten des Materials noch vergrößert werden. Die Erzgänge durchsetzen diese Gesteine, sind also jünger.

Die Gesteine vom granitischen Typus sind am meisten im Bohutíner Erzreviere und in der südwestlich angrenzenden Gegend verbreitet. Es wird in der vorliegenden Arbeit auf Grund der chemischen und mikroskopischen Untersuchung die stoffliche Verwandtschaft des am meisten verbreiteten Gesteines — des Bohutíner Quarzdiorites mit dem Magma des mittelböhmischen Granites nachgewiesen.

Die Geologie dieses Gesteines soll erst in der Arbeit besprochen werden, welche die Geologie des ganzen Bohutíner Revieres umfassen soll. Nur das möchte ich noch kurz bemerken, was für eine wichtige Rolle dieses Gestein in der Tektonik der Příbramer Umgegend gespielt hat.

Grimm hält dieses Gestein für Granit. Nach ihm stellt uns dieses Gestein nur eine Apophyse des mittelböhmischen Granites. Pošepný erwähnt dieses Gestein mehrmals in seinen Arbeiten und nennt es ebenso Granit. Sein Auftreten sollte ihm den Beweis für das archaische Alter des mittelböhmischen Granites liefern; er hielt dafür, daß die Příbramer Schiefer auf dem Granite aufgelagert sind. Gestützt auf diese Ansicht, benützte Pošepný das Auftreten des „Granites“ in Bohutín dazu, um auch die Tektonik von der Příbramer Umgegend zu erklären. Der Bohutíner Diorit ist hier nach seiner Ansicht in die Schichten eingefaltet.

Aber später haben die in die Tiefe fortschreitenden Grubenbauten auf dem 9. Horizonte gezeigt, daß die Příbramer Lettenkluft auch dieses Gestein durchsetzt, weiter, daß dieses nicht nur die Schichten des Algonkiums, sondern auch die des Kambriums durchbricht; Pošepný gibt zu, daß diese neuen Aufschlüsse seiner früheren Annahme nicht entsprechen, weil sie das postkambrische Alter des Diorites beweisen.

(Pošepný: Beitrag zur Kenntnis der montan-geologischen Verhältnisse von Příbram, S. 180).

Mehr Aktivität schreibt Babánek dem Bohutíner Quarzdiorit zu, weil er dafür hält, daß dieses Gestein die letzten tektonischen Störungen der Příbramer Gegend verursacht und daß es die ganze zweite Schieferzone samt den Erzgängen in der NO-Richtung verschoben hat. Diese Ansicht soll hauptsächlich das Auftreten des Diorites in der Richtung der Hauptstörung, das heißt, in der Richtung der Lettenkluft, bekräftigen. Das hat auch schon Grimm bemerkt, und verfolgte ähnliche Gesteine bis nach der Rožmitaler Gegend hin. Seiner Ansicht nach gehört der Bohutíner Diorit den Gesteinen der Granitgruppe an.

Auf Grund folgender Tatsachen:

1. daß die Gesteine von ähnlichem Habitus, wie es bei dem Bohutíner Diorit der Fall ist, in der Richtung der Lettenkluft von *Bohutín* über *Vranovic* bis *Rožmitál* auftreten, und

2. daß die Lettenkluft auch den Bohutíner Diorit durchsetzt, halte ich dafür, daß der Bohutíner Diorit und die ihm verwandten Gesteine aus der Umgebung von *Vranovic* als eine Apophyse des mitteltöhmischen Granitmassives zu seinem Empordringen die Lettenkluft benützt haben, durch welche sie jedoch noch später betroffen und disloziert wurden.\*)

Sandberger und Foulon analysierten auch den Bohutíner Quarzdiorit und nennen ihn Quarzporphyr, Quarzporphyrit und glimmerreichen Granit.

### Der Bohutíner Quarzdiorit.

Der Bohutíner Quarzdiorit ist ein Gestein von mittlerem Korn. In der Korngröße gibt es weder bei den Probestücken aus den Gängen, noch bei solchen aus dem Hauptstocke keine großen Variationen. Auch gegen die Grenzen ist keine merkliche Änderung wahrzunehmen.

Mit der Schwarzschen und der analytischen Wage wurde das spezifische Gewicht 2.76 bis 2.82 bestimmt.

Der Bohutíner Quarzdiorit ist eher ein melanokrates als leukokrates Gestein, von dunkelgrauer Farbe mit einem ins Grünliche übergehenden Stich. Örtlich weist er lichtere Partien auf und nähert sich so den feinkörnigeren Graniten.

Mit dem unbewaffneten Auge bemerken wir die fettglänzenden Feldspatkörner, deren Größe zwischen 3—5 mm schwankt, und welche nur unvollkommen begrenzt sind. Mit der Lupe sehen wir ihre Zwillingsstreifung. Örtlich sind die Feldspate rötlich gefärbt und häufen sich in der Form von Schlieren an. Der Biotit bildet bis 1.5 mm große Blättchen, der Amphibol unregelmäßige Körner von beinahe 6 mm Größe. Mit dem unbe-

\*) Vergleiche: R. Kettner: Die Žitceer Konglomerate. S. B. d. b. A. d. W. XXIV. Nr. 34, S. 30 u. 45.

waffneten Auge unterscheiden wir sonst noch den graulichen bis klaren Quarz und hie und da ein Pyritkorn eingesprengt. Bei manchen Probestücken tritt der Biotit ganz zurück, ist in ganz kleinen Blättchen entwickelt und kann bei flüchtiger Untersuchung leicht übersehen werden. Die Gesteinsrisse sind durch Kalkspat, Chlorit und Quarz ausgefüllt; der letztgenannte füllt die Risse entweder in der Form von ison etrischen Körnern aus; oder bildet auf die Art des Gangquarzes zahlreiche pyramidale Kristalle, welche von den Wänden gegen die Mitte des Risses zu gerichtet sind.

Die Struktur des Diorites ist überall holokristallinisch, körnig plancroner und weist nicht die geringsten Andeutungen einer porphyrischen Entwicklung auf.

Viele von den Probestücken des Bohutiner Diorites zeigen die Tendenz sich grobkörnig zu entwickeln. Solche Partien bilden Nester im normalen mittelkörnigen Diorit und bestehen aus Körnern eines gelblich weißen grobkörnigen Feldspates (mehrere *mm* große Körner), welche durch einen strahligblättrigen, schwarzgrünlichen Amphibol (die Länge der Stengel über 1.5 *cm*, Breite ca 0.5 *cm*) begleitet sind.

Die Feldspate dieser grobkörnigen Partien gehören den Plagioklasen der Reihe Oligoklas bis Andesin an. Auf dem Kontakte des Quarzdiorites und der metamorphosierten Grauwacke sind quarzige Partien in der Form von beinahe 2—2½ *cm* großen Linsen gefunden worden. Sie bestehen aus zahlreichen, über 1 *mm* großen Quarzkörnern von rundlicher Begrenzung, seltener sind sie lappenartig.

*Mittels des Mikroskopes kann man unterscheiden:*

1. *Hauptbestandteile:* Feldspate, Quarz, Biotit, Amphibol.
2. *Nebenbestandteile:* Apatit, Zirkon, Ilmenit, Pyrit.
3. *Sekundäre Mineralien:* Kalkspat, lichten Glimmer, Chlorit, Leukoxen, Eisenerze.

*Die Struktur ist hypidiomorphkörnig.*

Von den *Feldspaten* kommen in dem eigentlichen Gestein nur die Glieder der triklinen Reihe vor. Orthoklase kommen nur bei aplitischen Gängen, welche das Gestein durchsetzen, vor, und nur selten bilden sie auch im Gesteine selbst rötliche Schlieren.

Die gewöhnlich stark zersetzten Feldspatkörner sind gegen Quarz idiomorph, gegen Biotit und Amphibol teilweise allotriomorph begrenzt. In manchen Partien des Gesteins ist aber auch eine ältere Generation von Feldspaten enthalten. Ihre Körner sind idiomorph gegen Amphibol und Biotit, häufig auch im Amphibol selbst eingewachsen. Die Feldspate haben sich ziemlich lange ausscheiden müssen; ein Teil von ihnen wurde schon vor den dunklen Bestandteilen, resp. mit ihnen gleichzeitig gebildet, die anderen dagegen haben sich vor der Auskristallisation des Quarzes, und die letzten schließlich gleichzeitig mit dem Quarz ausgeschieden, wie



die hier und da konstatierte pegmatitartige Verwachsung der beiden Bestandteile bezeugt.

Die Plagioklase sind schön zonar gebaut. Die Zonen sind schon in gewöhnlichem Lichte nach den schmälern und breiteren Streifen der submikroskopischen Einschlüsse merklich, die die idiomorphe Begrenzung der Körner andeuten. Bei den meisten Querschnitten sind die inneren Zonen basischer als die äußeren, also nimmt die Acidität von der Mitte gegen die Oberfläche zu; mit ihr sinkt auch die Lichtbrechung und es tritt auch eine Änderung der Auslöschungsschiefe ein. In manchen Fällen aber löscht der ganze Plagioklas-Querschnitt trotz seines zonaren Baues gleichzeitig aus, und dieser Umstand beweist uns, daß die Unterbrechung des Wachstums des Feldspates nicht in allen Fällen eine Änderung des chemischen Bestandes des Feldspates zur Folge haben müßte; in solchen Fällen ist dann die zonare Struktur nur durch die erwähnten Streifen des Trübungsmittels angedeutet. Manche von den Zonen sind gewöhnlich stark zersetzt, manchmal sind die frischen und zersetzten Zonen abwechselnd gelagert. Diese Alternation stimmt auch mit der Auslöschung mancher zonarer Körner überein, bei welchen die geraden Zonen gleichzeitig und die ungeraden ebenso gleichzeitig auslöschten. Bei der Zersetzung bildet sich der feinschuppige Muskovit und Kalkspat. In seltenen Fällen schließlich war das allotriomorphe basischere Korn überkrustet durch eine Zone des frischeren, säuereren Feldspates.

Die Größe der Feldspatkörner beträgt bis 4—5 mm; am häufigsten kommen aber kaum solche von 0,3, 0,5, 1,00, 1,5 mm Länge und 0,3, 0,6, 0,7 mm Breite vor.

Die Plagioklase sind am häufigsten nach dem Albitgesetz, seltener nach dem Periklingesetz verzwillingt; außerdem sind aber die lamellierten Körner nochmals verzwillingt und zwar nach dem Karlsbadergesetz, seltener auch nach dem Bavenoergesetz.

Der Brechungsindex aller untersuchten Körner der Plagioklase liegt zwischen 1,536 (Brechungsindex des Zimtöles) und 1,564 (Brechungsindex einer Mischung von Badian und Cassiaöl); sie gehören dem *Oligoklas-Albit*, *Oligoklas*, *Andesin bis Labradorit* an (in den Kernen). Nur ausnahmsweise sind auch Körner von niedrigerem Brechungsvermögen als 1,536 gefunden worden, und diese gehören dem *Orthoklas* an. Im unbedeckten Schlicke ist kein Korn vom niedrigeren Brechungsvermögen als 1,531 (Mischung von Zimmt und Lewandelöl) gefunden worden; darnach ist der Orthoklas im Gesteine äußerst spärlich vertreten. In einigen Fällen grenzen die Feldspatkörner im Schlicke an Quarze; hier konnte man sicherstellen, daß der Brechungsindex des Feldspates zwischen  $\omega$  und  $\epsilon$  des Quarzes liegt. (*Oligoklas-Andesin*).

Die Richtigkeit der Bestimmung der Feldspate nach dem Brechungsvermögen bestätigen auch die Auslöschungsschiefen auf den Flächen der Spaltungsstücke und zwar auf der Basis und dem Klinopinakoide. Auf



demselben wurden folgende Werte konstatiert: beim Oligoklas ungefähr  $0^\circ$ , resp.  $3.5^\circ$ — $5^\circ$  (häufiger rund  $4^\circ$ ), beim Oligoklas-Andesin  $6^\circ$ — $8^\circ$ , beim Andesin  $8^\circ$ — $12\frac{1}{4}^\circ$ , beim Labradorit  $15^\circ$ — $19^\circ$ , seltener über  $20^\circ$ . Auf der Basis des Labradorites wurde eine Auslöschungsschiefe rund  $3^\circ$ — $5^\circ$  konstatiert, bei den basischeren Gliedern bis  $9^\circ$ . Oligoklas-Albit wurde an niedrigerem Brechungsvermögen als jenes des Kanadabalsams und nach dem + opt. Charakter erkannt (auf dem zur optischen Achse  $\perp$  Schnitte). Die Winkel des rhombischen Schnittes auf M bei der Zwillingsbildung nach Periklingesetz betragen: beim Oligoklas  $7^\circ$ — $3^\circ$ , bei dem basischeren Oligoklas-Andesin ca  $2^\circ$ , beim Andesin  $1\frac{1}{2}^\circ$ — $0\frac{1}{2}^\circ$ , beim sauren Labradorit  $2\frac{1}{2}^\circ$ — $4^\circ$ , bei den basischeren Gliedern bis  $9^\circ$ .

Die Feldspate sind stark zersetzt und getrübt. Stellenweise ist das Produkt der Zersetzung ein blätteriges glimmerartiges Mineral, stellenweise der Kalkstein, welcher im Schliff mittels der Salzsäure bestimmt wurde.

*Biotit* bildet einzeln und spärlich verstreute, bis über 1 mm große allotriomorph begrenzte Blättchen. Ihre Ränder sind größtenteils fransig und nur selten haben wir eine unvollkommene 6 seitige Begrenzung konstatieren können.

Die basischen Schnitte sind im Schliff im gewöhnlichen Lichte dunkelbraun bis beinahe schwarz mit einem rostartigen Stich; die Querschnitte sind licht braun. *Biotit* ist stark pleochroitisch und stark lichtabsorbierend. Die zur Basis schwingenden Strahlen sind schwach gellichbraun, bis dunkelbraun.

Der Winkel der optischen Achsen ist sehr gering und taugt wegen der Unvollkommenheit des Interferenzbildes nicht für die Messung. Die *Biotit*blättchen sind nur hier und da verbogen; auf den Querschnitten sind gelenkartige Umbiegungen wahrzunehmen; das sind die Zwillingsverwachsungen nach den Gleitflächen {102} resp. {133}, wie sie M. Bauer\*) beschrieben hat.

Im *Biotit* sind zahlreiche idiomorphe Körner von Apatit und Zirkon eingeschlossen, welche gut entwickelte pleochroitische Höfe\*\*) umgeben. Außerdem sind von den opaken Mineralien Ilmenit und Pyrit eingeschlossen.

Nach einer schwarzen Farbe, einem starken Glasglanze und in erster Linie nach der starken Absorption können wir auf den an *Fe* und *Ti* reichen Glimmer schließen und zwar allen Charakterzügen nach ist es *Lepidomelan*.

\*) M. Bauer, Z. d. d. g. G. 26, 1874, 159; siehe auch V. Rosický, Věst. kr. č. sp. N. (Sitzb. d. k. b. G. d. W.) 1901, Nr. 30. 6.

\*\*) Die Anwesenheit von pleochroitischen Höfen im *Biotit* um die Apatit-Einsprenglinge wurde auch durch Kettner auf den Luditzer Gneisen bestimmt (S. B. d. b. A. d. W. 1913, No. 43, S. 18) und durch Rosický im *Biotit*pyroxensyenit von Tábor. (S. B. d. b. A. d. W. XXIV. Nr. 4, S. 5).

Biotit findet sich häufig in *Chlorit* umgewandelt. Diese Änderung fängt bei den Grenzen und Spaltungsrisen, stellenweise sind nur die mittleren Partien der Biotitblättchen erhalten; das übrige ist in Chlorit umgewandelt. Bei dieser Änderung werden kleine opake Erzkörnchen ausgeschieden, welche die Substanz des Chlorites durchsetzen.

Chlorit ist im gewöhnlichen Lichte lichtgrün, im polarisierten deutlich pleochroitisch; für das  $\perp$  zur  $\{001\}$  schwingende Licht zeigt er eine sehr schwach grün-gelbe Farbe, für das  $\parallel$  mit  $\{001\}$  eine schwach aquamarin-grüne (Absorption ist stärker). Die Doppelbrechung der nach der Basis geschnittenen Blättchen ist fast gleich 0, die übrigen Schnitte zeigen anormale indigoblaue Interferenzfarben. Das Interferenzbild ist beinahe einachsige, optischer Charakter +. Wegen dieser Eigenschaften gehört der sekundäre Chlorit dem *Pennin* an.

Die pleochroitischen Höfe sind auch im Chlorit erhalten und treten in diesem vorzugsweise deutlich hervor, vor allem in der Lage der stärkeren Absorption des Lichtes, wobei der Hof dunkler als seine Umgebung ist.

In manchen Partien des Gesteins tritt Biotit ganz in den Hintergrund und an seine Stelle tritt Amphibol.

Der zweite dunkle Bestandteil des Gesteins ist *Amphibol*. In manchen Partien ist er überhaupt nicht vertreten, in anderen Partien vertritt er den Biotit vollständig und ist neben den Feldspäten der häufigste Bestandteil des Gesteines. Er ist teilweise vollkommen idiomorph; besonders auf der vertikalen Zone weist er die Formen  $\{110\}$ ,  $\{010\}$  auf. Die nach dem Prisma für Amphibol charakteristischen Spaltrisse sind vorzüglich entwickelt.

Die Einzelindividuen sind häufig nach  $\{100\}$  verzwillingt, wie es im Schliff schon nach der verschiedenen Absorption des Lichtes bei beiden Individuen zu erkennen ist. Makroskopisch haben die Körner des Amphibols eine schwarzgrüne Farbe; sein Schliff aber zeigt im gewöhnlichen Lichte eine braune, braungelbe und grünbraune Farbe. Die Lichtbrechung ist größer als die des Acetylentetrabromides ( $n = 1.641$ ); gehört also dem gemeinen Al-Amphibole an.

Die Amphibolkörner erreichen eine Länge von 0.3 mm und eine Breite von 0.1 mm bis 1.8 mm Länge und bis 0.5 mm Breite.

Die Spaltlättchen nach  $\{110\}$  löschen durchschnittlich  $c : \gamma = 13^\circ$ . Auf den Längsschnitten, welche beinahe nach  $\{010\}$  geführt worden sind, und auf den Querschnitten wurden oberhalb des unteren Nikols folgende Achsenfarben bestimmt:

$\alpha$  ..... licht-gelbbraun  
 $\beta$  ..... dunkelrostbraun mit dem Stich ins Grünliche.  
 $\gamma$  ..... blaugrün (in der Mitte des Kornes häufig rostgrün).

Absorption:  $\beta > \gamma > \alpha$ .

Die Doppelbrechung ist ziemlich hoch; durch Vergleich der Interferenzfarben des Amphiboles mit denen des Feldspates wurde mit 0.020 bestimmt. Optischer Charakter ist —.

In einem von den Schlifften wurde auch ein Amphibol gefunden, welcher von einem abweichenden Charakter ist. Er ist eher strahlschuppig, nur schwach pleochroitisch zwischen der grünlichen und gelblichen Farbe mit einer ganz geringen Absorption. Bildet Aggregate, welche durch ihre Ungrenzung verraten, daß sie Pseudomorphosen nach einem vollkommen idiomorphen stengelartig entwickelten Minerale sind; sie sind bis 1 *mm* lang und  $\frac{1}{2}$  *mm* breit. Der Brechungsindex dieses Amphibols ist teilweise höher, teilweise niedriger als der von Acetylentetrabromid; gehört also der Gruppe der an Al reicheren Aktinolithen, und ist mit dem Aktinolith von Kragerö in Norwegen verwandt.\*)

Sekundär wandelt sich dieser Aktinolith in ein chloritisches Mineral um. Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Amphibol-Pseudomorphosen aus einem Pyroxen entstanden sind, welcher lokal in der betreffenden Partie des Gesteins Amphibol vertritt und erst später magmatisch in Amphibol umgewandelt wurde.

Amphibole ändern sich sekundär einestheils in einen mit dem Pennin verwandten Chlorit, andernteils in ein dem blätterigen *Antigorit* ähnliches Mineral; dasselbe ist graugrün, zeigt einen schwachen Pleochroismus, der durch eine dunkle und lichtgraugrüne Farbe gekennzeichnet wird.  $\gamma - \alpha$  liegt sehr nahe der Doppelbrechung des Quarzes,  $\gamma - \beta$  ist beinahe gleich 0; dieses Mineral ist deutlich zweiachsig und sein opt. Charakter ist —.

Der jüngste Hauptbestandteil ist *Quarz*, welcher allotriomorphe Körner bildet, und die Zwischenräume zwischen den übrigen Bestandteilen ausfüllt. Er enthält häufig ganz kleine Poren, welche sich in Reihen ordnen. An einigen Stellen ist die gleichzeitige Auslöschung der verschiedenen Quarzpartien zu beobachten, welche, obzwar getrennt, einem Individuum angehören.

Neben diesem Quarze, dem jüngsten Bestandteile des Gesteins, finden wir auch den älteren Quarz, welcher in der Form von 0.05 — 0.2 *mm* großen Körnern im Biotit, Amphibolit und Feldspaten eingeschlossen ist. Dieser Charakter ist der ganzen Reihe der Gesteine vom Rande des mittelböhmischen Granitmassives eigen.

Unter die zuerst ausgeschiedenen Mineralien unseres Gesteins gehören die Nebenbestandteile: *Apatit* und *Zirkon*, beide schön idiomorph begrenzt. Diese Mineralien sind in den übrigen Bestandteilen ziemlich zahlreich eingeschlossen, und durchsetzen besonders in einigen Partien die übrigen Bestandteile. Um den Zirkon herum sind schöne pleochroitische Höfe, besonders im Chlorit, schwächer im Biotit und Amphibol, ausgebildet.

\*) Siehe W. E. Ford, Z. f. Kryst. 64. 1915. 1.



Von den opaken primären Bestandteilen ist noch *Ilmenit* und *Pyrit* vertreten. *Ilmenit* ändert sich von den Rändern aus in *Leukoxen*; dies ist besonders im einfallenden Lichte deutlich. *Pyrit* ist nur sporadisch eingesprengt. Bei der Umwandlung des *Biotites* in *Chlorit* scheiden sich feine schwarze, im *Chlorit* pigmentartig verstreute Körnchen aus; es sind *Eisenerze*.

Von den sekundären Bestandteilen neben dem schon oben angeführten *Chlorit*, welcher in den stärker zersetzten Partien des Gesteins fächerartige Aggregate bildet, ist *Kalkstein* der häufigste. Er füllt auch alle Risse und Spalten des Gesteines aus und trübt alle *Feldspate*. Der *Kalkstein* ist nach  $-\frac{1}{2}$  R verzwillingt und zeigt an den Zwillingsflächen Autopolarisation. *Kalkstein* stammt aus den zersetzten *Feldspaten*, welche er trübt; von denselben stammen auch die feinen blätterigen Aggregate des *Muskovites*. In der Nähe von Erzgängen sind die *Feldspate* besonders stark zersetzt und in *Serizit* umgewandelt.

Manche von den Partien des Gesteins zeigen die Wirkung eines starken äußeren Druckes; wir finden in ihnen eine stark undulöse Auslöschung des *Quarzes*, verbogene Blättchen des *Biotites*, hie und da auch Systeme von schmalen mehr oder weniger parallelen Rissen, welche mit Zersetzungsprodukten, *Kalkspat*, *Chlorit* als auch *Quarz* gefüllt sind. Diese Risse durchsetzen alle Gesteinsteile ohne Unterbrechung, und beweisen somit, daß sie erst nach der vollständigen Erstarrung des Gesteins zu Stande gekommen sein müssen. Diese schmalen Risse überqueren schiefe die spärlicheren, aber breiteren Spalten, welche durch ähnliches Material ausgefüllt sind. Die Merkmale des starken Druckes im *Bohutiner Quarzdiorit* bekräftigen die schon früher ausgesprochene Ansicht, daß die Gesteine (auch die *Eruptivgesteine*) in der Nachbarschaft der *Lettenkluft* durch diese noch nachträglich betroffen wurden.

### Chemische Beschaffenheit des Bohutiner Quarzdiorites.

Die chemische Analyse des *Bohutiner Quarzdiorites* hat sehr sorgfältig Herr *Josef Hanuš*, ord. Professor der anal. Chemie an der *Prager böhm. technischen Hochschule*, ausgeführt. Die Analyse hat folgende Werte geliefert:

	I.	II.	III.	IV.	
<i>SiO<sub>2</sub></i>	59.75%	61.18	1.0197	65.82	} 66.40
<i>TiO<sub>2</sub></i>	0.70	0.72	0.0090	0.58	
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	15.52	15.89	0.1558	10.06	
<i>Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	1.46	1.49	0.0093	—	
<i>FeO</i>	5.65	5.78	0.0803	6.38	
<i>MnO</i>	0.11	0.11	0.0015	0.10	
<i>CaO</i>	5.41	5.54	0.0989	6.38	



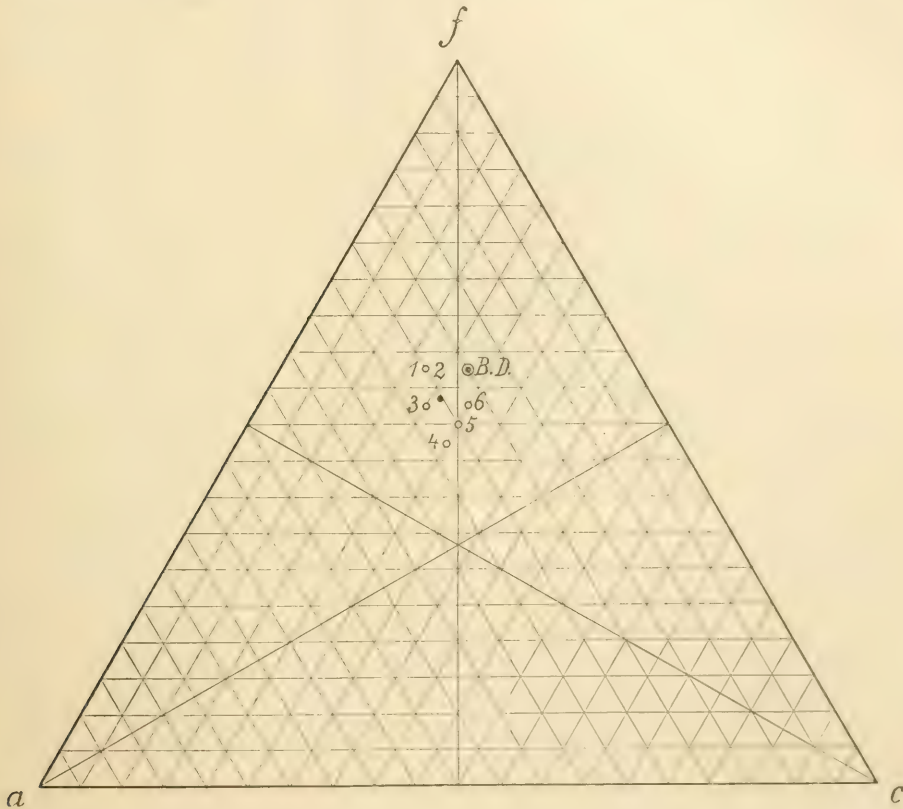
<i>MgO</i>	3.59	3.68	0.0920	5.94
<i>K<sub>2</sub>O</i>	3.05	3.12	0.0332	2.14
<i>Na<sub>2</sub>O</i>	2.43	2.49	0.0402	2.60
Glühverlust	2.51	—	—	—
<i>H<sub>2</sub>O</i> bei 130°	0.17	—	—	—
	100.35%	100.00	1.5399	100.00

I. Analyse des Gesteins.

II. Dieselbe, übergeführt nach der Subtraktion des Glühverlustes und des hygroskopischen Wassers auf 100%.

III. Molekularquotienten.

IV. Dieselben, übergeführt auf 100; der Betrag von  $Fe_2O_3$  umgerechnet auf  $FeO$ .



Die Analyse liefert folgende Osannsche Werte:  $s = 66.4$ ;  $A = 4.74$ ;  $C = 5.32$ ;  $F = 13.48$ .

Formel des Gesteines:

$$s_{66.4} a_4 c_{4.5} f_{11.5}; n = 5.5$$

$$S A I F = 21.3.6; A I C A l k = 14.9.7; N K = 5.5; M C = 4.8$$

Nach den Werten:  $s, a, c, f$  der Osannschen Berechnung kann man das Gestein am besten mit dem Biotit — Hypersthen — Quarz — Diorit von Visdarthal bei Klausen vergleichen, dessen:

$$s = 65.74, A = 5.03, C = 5.89, F = 12.43, a = 4.5,$$

$$c = 5, f = 10.5, n = 8.2; SiO_2 = 59.97\%$$

Unser Gestein entspricht also den dioritischen Gesteinen Osanns Typus Butte (Formel:  $s_{67}, a_5 c_{4.5} f_{10.5}$  \*), welchem angehören:

1. Granodiorit von Butte *Co., Cal.*,
2. Quarzführender Pyroxen — Amphibol — Biotit — Diorit vom Electric Peak ( $61.22 SiO_2$ ),
3. Augitglimmerdiorit von Robinson Castle *Mts. Mont.*,
4. Hornblende — Augit — Biotit — Diorit von Brush Creek, Elk *Mts., Col.*,
5. Quarzführender Hypersthen — Biotit — Diorit (Quarznorit) von Klausen,  $SiO_2 = 64.12\%$ .
6. Quarzführender Hypersthen — Biotit — Diorit aus dem Vildarthal bei Klausen ( $59.97\% SiO_2$ ).

Nummer	S	A	C	F	a	c	f	n
1	69.88	5.22	3.90	11.85	5	3.5	11.5	7.1
2	66.00	5.91	4.25	13.60	5	3.5	11.5	7.9
3	62.62	6.92	4.88	13.78	5.5	4	10.5	6.7
4	68.35	5.79	5.15	9.77	5.5	5	9.5	6.4
5	65.92	5.40	5.03	10.22	5	5	10	7.6
6	66.74	5.93	5.8	12.43	4.5	5	10.5	8.2
Durchschnitt	66.92	5.71	4.85	11.94	5.1	4.3	10.6	—

Auch nach den Werten von  $SAIF, AIC, Alk$  gehört der Bohutiner Diorit den Quarzdioriten an; denselben ist der Granodiorit von Gold Creek ( $SAIF = 21.3.5.5.5, AIC Alk = 14.5.9.5.6$ ) und der schon früher erwähnte Quarzdiorit von Electric Peak ( $SAIF = 21.3.5.5.5, AIC Alk = 13.5.8.5.8$ ) sehr verwandt. Bei diesen Gesteinen hat aber  $Na$  von den Alkalien ein entschiedenes Übergewicht.\*\*)

Es ist interessant, daß die durchschnittliche Zusammensetzung der Erdkruste Werte besitzt, die denen des Bohutiner Quarzdiorites gleich kommen:  $SAIF = 21.3.5.5.5, AIC Alk = 14.8.8, NK = 6.4, MC = 5.3$ .

Die Verwandtschaft des Bohutiner Diorites mit der Gruppe der Dio-

\*) A. Osann: Tsch. M. p. M. 19 1900, 413.

\*\*\*) A. Osann: Petrochemische Untersuchungen I. 1913, 78.

rite ist auch aus der Stellung seines Poles in der Dreieckprojektion (siehe *Abb. 1.*) zu ersehen. In der Projektion sind neben dem Bohutíner Quarzdiorit (*D. B.*) auch die oben erwähnten Gesteine Typus Butte (1.—6.) dargestellt, zu denen der Pol des Bohutíner Diorites gut paßt. Der schwarze Punkt in der Projektion bezeichnet die Position der Typenformel.

Die Berechnung der Analyse nach Loewinson-Lessing führt zu den Werten:

$$\text{Formel: } 2 \overline{RO} : R_2O_3 : 6 SiO_2$$

$$R_2O : RO = 1 : 3.7$$

$$\beta = 51.5$$

$$\alpha = 2.4$$

Es bildet also der Bohutíner Quarzdiorit die Grenzscheide zwischen den „Mesiten“ und den „Aciditen“ nach Loewinson-Lessings Terminologie; ist aber ein bischen basischer und ärmer an Alkalien, als der typische Quarz-Diorit-Typ dieses Autors ( $\alpha = 2.8$ ;  $R_2O : RO = 1 : 2.4$ ).

### Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Das bei *Bohutín* unweit von *Příbram* auftretende und die algonkischen und kambrischen Schichten durchbrechende Gestein ist quarzführender Biotit-Amfibol-Diorit. Derselbe weist durch seine Zusammensetzung und Struktur als auch seinen Zusammenhang mit dem Rožmital-Granite auf einen mit dem mittelböhmischem Granitmassive gemeinschaftlichen Ursprung, dessen Spaltungsprodukt er bildet.

2. Höchst wahrscheinlich benützte der Diorit zu seinem Empordringen die Příbramer Lettenkluft, durch welche er aber später noch getroffen und disloziert wurde. Diese gewaltigen Störungen haben auch in ihm selbst deutliche Spuren hinterlassen (Systeme von Rissen, Deformation von Bestandteilen).

3. Diorit ist von Erzgängen durchsetzt, deren Ursprung in post-eruptiven Prozessen des mittelböhmischem Granitmassives zu suchen ist.

4. Auch die chemische Zusammensetzung des Bohutíner Quarzdiorites beweist die Verwandtschaft des Gesteins zu der Familie der Quarzdiorite (Granodiorite) im Sinne Osann's; die Quarzdiorite Loewinson-Lessing's sind ein bischen saurer und reicher an Alkalien.

\* \* \*

Der petrographische Teil dieser Arbeit wurde im mineralogisch-petrographischen Institute der k. k. böhmischen Universität in Prag ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Herrn Doz. Dr. V. Rošický für all seine Mühe und außergewöhnliche Bereitwilligkeit, mit der er mir entgegengekommen ist, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Příbram, im Jänner 1917.

# Beiträge zur Petrographie des mittelböhmischen Granitmassives.

Von VOJTĚCH ROSICKÝ in Prag.

(Mit 1 Tafel und 2 Figuren im Text.)

Vorgelegt am 12. Feber 1916.

## I.

### Über den Biotit-Pyroxensyenit von Tábor.

Das mittelböhmische Granitmassiv läuft auf seiner südöstlichen Grenze in eine gewaltige Bucht aus, deren Achse die Richtung *NW—SO* hat. Sie reicht bis zu Tábor und Slap, indem sie an dieser Stelle von allen Seiten vom Gneis umgegrenzt ist. Das Gestein, das in der Umgebung von Tábor herrscht, weicht in manchen Richtungen vom mittelböhmischen Granit ab, deshalb wurde es von den früheren Geologen öfters unter verschiedenen Namen beschrieben.

So bezeichnet es F. X. M. Zippe<sup>1)</sup> als einen „merkwürdigen Stock von Granit“; D. Stur<sup>2)</sup> nennt es „Táborer Granit“ im Gegensatze zum gewöhnlichen, das nördlich von der Grenze Řevnov—Vlášnice—Drahonice herrscht. Die Gemengteile des Táborer Granites sind nach Stur: Orthoklas, etwas Quarz, Phlogopit; er erwähnt auch die durch dunkles Glimmer bedingte porphyrische Struktur. Ähnlich schreibt auch F. R. v. Hauer.<sup>3)</sup>

F. Šafránek hat in seiner ersten Publikation über diesen Gegenstand<sup>4)</sup> das Gestein nach Stur als eine Granitfazies bezeichnet. Erst später, nach einer gründlichen mikroskopischen Untersuchung,<sup>5)</sup> konnte

<sup>1)</sup> Sommer J. G., Königreich Böhmen X. Táborer Kreis 1842, pag. XIII.

<sup>2)</sup> Jhb. g. R.-A. VIII. 1857. Sitz. pag. 784; IX. 1858, pag. 661—688.

<sup>3)</sup> Geol. Übersichtskarte d. öst. Mon. Jhb. g. R.-A. XIX.

<sup>4)</sup> Výt. Zpráva c. k. v. r. gymn. v Táboře 1878.

<sup>5)</sup> Sitzungsber. d. b. königl. Ges. d. W. 1883.



er eine neue und in manchen Richtungen sehr gute Beschreibung geben; in dieser zweiten Arbeit wählt er für das Gestein den Namen „Kersanton“.

F. S i t e n s k ý<sup>6)</sup> beschreibt das Gestein nur makroskopisch. Die Feldspate sind seiner Meinung nach größtenteils Plagioklase, deswegen bezeichnet er das Gestein als Diorit. Ähnlich erwähnt auch A. J e l í n e k<sup>7)</sup> das Gestein unter dem Namen glimmerreicher Augit-Quarzdiorit“.

J. B e r n a r d<sup>8)</sup> benutzt in seiner Übersicht der geologischen Verhältnisse von Tábor den von Š a f r á n e k eingeführten Namen Kersanton.

Beim Studium der Umgebung von Tábor fand ich, daß die mikroskopischen sowie die chemischen Eigenschaften dieses interessanten Gesteines zum Namen „Biotit-Pyroxensyenit“ führen.

\* \* \*

Die Grenzen des Syenites gegenüber anderen Gesteinen bedürfen einer Revision, denn die Angaben von S t u r, Š a f r á n e k und S i t e n s k ý stehen an einigen Stellen nicht im Einklange. Das gilt namentlich von der Grenze am *N* und am *W* von Tábor. Am nächsten der Wahrheit ist die von S t u r festgestellte; sie muß jedoch (*N* von Tábor) südlich von den Gemeinden Radimovice und Nasavrky geführt werden, da diese Orte schon am Gneis stehen, und im Lužnice-Tale (*W* von Tábor) etwas weiter westlich verschoben werden, damit sie den Fluß beim Hegerhause übergehe, das sich am r. Ufer östlich von Přiběnice befindet.

Der Táborer Syenit, von der Ferne beobachtet, ist blaugrau, mit schwachem Stich ins Grüne. Seine Korngröße ist recht wechselnd; manche Stücke sind kleinkörnig, andere mittel- bis grobkörnig. Die Struktur ist größtenteils richtungslos körnig, mit Anlauf in die porphyrische, hie und da bemerkt man aber eine mehr oder minder deutlich ausgebildete Parallelstruktur. Dichte (hydrostatisch) = 2·77—2·78 beim mittelkörnigen, 2·84 beim grobkörnigen Gesteine. Makroskopisch kann man feststellen: Biotit in größeren, oft lappigen, bis 1 cm großen Blättern, welche den porphyrtigen Charakter der Struktur bedingen, sowie in kleineren, 1—2 mm großen Blättern: 2 E = ca 15°. Orthoklas, dicktafelig bis lamellartig nach *M* (010) ausgebildet, ist sehr oft nach dem Karlsbader Gesetz verzwillingt ( $P : P' = 51^{\circ} 51'$  gem.,  $52^{\circ} 06'$  ber.). Pyroxen in bräunlich grünen Körnern, die in kleine Aggregate zusammengelagert sind. Etwas Quarz ist vorhanden.

Das Mengenverhältnis der Gemengteile ist recht schwankend; ich konnte in den Dünnschliffen mit dem Hirschwalds Okular<sup>9)</sup> folgende Zahlen messen (am Syenit von der Papiermühle):

<sup>6)</sup> Sitzungsber. d. b. königl. Ges. d. W. 1893. Nr. 35.

<sup>7)</sup> Sitzungsber. d. b. königl. Ges. d. W. 1899. Nr. 28.

<sup>8)</sup> V ý r. z p r á v a c. k. v. r. gymn. v Táboře 1909.

<sup>9)</sup> Centralblatt f. M. etc. 1904. 630.

13·5% Pyroxen : 21·7% Biotit : 64·8 Feldsp. u. a.

14·7% „ : 28·7% „ : 56·6 „ „ „

In beiden Fällen sind die hellen Gemengteile in Mehrzahl (65 : 35 resp. 57 : 43).

Mikroskopisch kann man feststellen: *Hauptgemengteile*: Biotit, Pyroxen, (Diallag und Hypersthen), Orthoklas. Minder häufig bis selten ist Plagioklas. *Nebengemengteile* und *Übergemengteile*: Quarz, Apatit, Rutil (Magnetit), Ilmenit, Pyrit.

*Sekundär sind*: (außer gewöhnlichen Zersetzungsprodukten): Titani und Amphibol.

Mikroskopische Charakteristik der Bestandteile:

*Biotit* bildet 1—2 mm große, bis 0·6 mm dicke Blättchen, die oft in größere lappige Aggregate zusammengedrängt sind. Sie sind meist allotriomorph, nur hie und da kann man Spuren von idiomorpher Ausbildung beobachten. Charakteristisch sind die tief eindringenden Buchten von der Basis in das Innere der Blättchen, welche bei basalen Schnitten die Gestalt rundlicher Löcher haben. Man sieht die Tendenz des Biotits, diese, durch magmatische Korrosion verursachten Löcher und Buchte auszuheilen: dadurch entstehen die skelettartigen Wachstumsgebilde, wie sie die Fig. 1 und 2 der Tafel im Quer- und Längsschnitte vorstellen.

Die Farbe ist auf (001) dunkel bräunlichrot, in Querschnitten gelbbraun. Pleochroismus sehr stark:

|| *c'* blaß braungelb

⊥ *c'* schwarzbraun, fast undurchsichtig, mit Stich ins Rötliche.

Es scheint, daß dieser Biotit an *Ti* reich ist.

Einschlüsse: Ilmenit, (Magnetit?), rhombischer und monokline Pyroxen (oft idiomorph ausgebildet), nadeliger Rutil, rundliche, etwa idiomorphe Quarzkörner und 0·1—0·2 mm lange, 0·02—0·06 mm breite Apatitsäulchen. Um dieselben kann man manchmal gut ausgebildete pleochroitische Höfe, mit stärkerer Absorption, als die Umgebung (|| *c'* blaßgelb, ⊥ *c'* schwarz) beobachten.<sup>10)</sup> Wenn wir mit M ü g g e<sup>11)</sup> annehmen, daß die pleochroitischen Höfe durch radioaktive Emanationen der Einschlüsse entstehen, so müssen wir dem Syenite von Tábor ein recht hohes geologisches Alter zuschreiben, da um ein so schwach radioaktives Mineral,

<sup>10)</sup> Nach E. Weinschenk (Gesteinsbild. Min. pag. 117) bilden sich um Apatit die pleochroitischen Höfe nicht. Cohen (N. Jhb. f. Min. 1888, I. pag. 166) führt sie als undeutliche und unsichere Erscheinung an. Menzel (Ref. Z. f. Kr. 52 pag. 416) beschreibt sie um Apatiteinschlüsse; er meint, sie sind durch sehr winzige, radioaktive Einschlüsse im Apatit verursacht. Damit aber kann ich nicht einverstanden sein, da solche in unserem Falle nicht zu sehen sind. R. Kettner hat diese Höfe im Biotit um Apatitsäulchen im Orthogneis von Luditz in Böhmen beobachtet. (Rozpravy České Akademie XXII. 1913. Nr. 43. pag. 8.)

<sup>11)</sup> Centralblatt f. Min. etc. 1907. pag. 397.

wie Apatit, deutliche Höfe entstanden sind. Selten findet man im Biotit kleine Zirkonkörner mit starken pleochroitischen Höfen.

Der Biotit kommt in zwei Generationen vor; außer den eben beschriebenen, magmatisch resorbierten Blättern finden wir noch jüngere, dünn- tafelige, fächerartig sich gruppierende Blättchen, welche, wie es scheint, gleichzeitig mit den skelettartigen Wachstumsformen entstanden sind (Tafel Fig. 3). Dieser jüngere Biotit ist niemals magmatisch resorbiert; die Blättchen sind 0.2—0.4 *mm* lang, 0.025—0.05 *mm* stark. Die fächerförmigen Aggregate sitzen oft auf den älteren Bestandteilen, z. B. auf Pyroxenkristallen, oder sie sind in jüngeren Bestandteilen eingeschlossen



Fig. 1.

(z. B. in Feldspaten). Sehr merkwürdig ist die genetische Beziehung des jüngeren Biotites zum Pyroxen; wo nämlich die Biotitblättchen beim Wachstum die Pyroxenkörner (Diallag so wie Hypersthen) berührten, begannen sie in dieselben einzudringen. Dadurch entstanden im Pyroxen zuerst breite und seichte, später schmale und tiefe Löcher, die gewöhnlich breiter sind als die eindringenden Biotitblättchen. Der Raum zwischen diesen und dem Pyroxen ist von Quarz ausgefüllt. Am schönsten sieht man die Erscheinung, wenn ein fächerförmiges Aggregat in ein Pyroxenkorn eindringt (Textfigur 1, Tafel Fig. 5).

Es ist kein Zweifel daran, daß hier der jüngere Biotit auf Kosten des Pyroxens gewachsen ist.<sup>12)</sup> Der Quarz, welcher den Raum zwischen den Biotitblättchen und dem Pyroxenkorn ausfüllt, ist ein Produkt dieses Resorptionsprozesses, da der Pyroxen reicher an  $SiO_2$  ist als der Biotit. Auf dieselbe Weise kann man auch das Hineinwachsen der skelettartigen Biotitwachstumsformen in die Pyroxenkörner erklären. Manchmal finden wir die letzten Reste des Pyroxens in Form kleiner, rund geätzter, gleichzeitig auslöschender Körner, die in den skelettartigen Biotitwachstumsformen eingeschlossen sind. Die letzteren bilden auch nach den Pyroxenkristallen vollkommene Pseudomorphosen.

*Hypersthen* bildet langsäulige, in der vertikalen Zone idiomorph

<sup>12)</sup> Ähnliche Verhältnisse fand auch J. de Lapparent in den gabro-dioritischen Gesteinen von Saint-Quay-Portrieux (Bul. soc. fr. de min. XXXIII. 1910. pag. 286).



begrenzte Kristalle; die Kanten und Ecken sowie die beiden Enden sind durch magmatische Resorption gerundet.

Die Kristalle sind meistens ca. 0.8 mm lang und etwa 0.25 mm breit; seltener erreichen sie bis 2½ mm Länge oder eine bedeutendere Breite (1.3 mm). Die Kristalle sind einzeln oder in Gruppen zusammengehäuft; dabei ist ihre Begrenzung hypidiomorph.

Außer der Spaltbarkeit nach (110) bemerkt man einzelne Risse nach (010) und (100).

Die Hypersthene besitzen in manchen Durchschnitten typische dünnblättrige bräunlich rosafarbige Einschlüsse, die senkrecht zur Achse  $c'$  geordnet sind. Man trifft jedoch mehrere Durchschnitte, welche diese Einschlüsse vollkommen entbehren.

Makroskopisch ist die Farbe gelblich braun, im Dünnschliffe sind die Durchschnitte fast farblos, gelblich bis grünlich.

Die Auslöschung ist parallel. Zwischen den gekreuzten Nikolen zeigt der Hypersthen eine faserige Zusammensetzung.<sup>13)</sup>

Zwischen den einzelnen Fasern findet man eine farblose Substanz, die wahrscheinlich dem Quarze angehört.

Pleochroismus (im Dünnschliff):

$$\begin{aligned}\alpha (= \delta) & \text{ gelblichrosa} \\ \beta (= \alpha) & \text{ rötlich} \\ \gamma (= c') & \text{ blaßgrünlich.}\end{aligned}$$

Lichtbrechung hoch, Doppelbrechung niedrig, negativ. Durch Vergleich der Interferenzfarben mit denen des Orthoklases wurden folgende Werte gemessen:

$$\begin{aligned}\gamma - \alpha \text{ (annähernd)} & = 0.011, \\ \gamma - \beta & = 0.003 - 0.004.\end{aligned}$$

Das Achsenbild ist recht verschwommen, deswegen konnte  $2E$  nur annähernd zu  $75^{\circ}$ — $90^{\circ}$  bestimmt werden. Aus allen diesen Daten folgt daß in diesem Hypersthen  $FeO + MnO > 10\%$  sei.<sup>14)</sup>

Ein Blättchen nach (010) wurde 1 Minute lang vor dem Gebläse geglüht.<sup>15)</sup> Die Farbe wird dunkler, die Absorption stärker. Der Pleochroismus war:

$$\begin{aligned}\gamma & = \text{dunkel rotbraun} \\ \beta & = \text{lichter rotbraun.}\end{aligned}$$

Hie und da sind die Hypersthenindividuen vom Diallag umgesäumt; in einem Falle bildete dieser im Hypersthen parallel untereinander orientierte Einschlüsse.

<sup>13)</sup> H. Rosenbusch, Mikr. Phys. 1905. I. 2. pag. 149.

<sup>14)</sup> C. Hintze, Handbuch d. Min. II. 1897, pag. 963.

<sup>15)</sup> E. Bořický, Archiv d. naturw. Landesdurchforsch. v. Böhmen, T. III. Abt. 5. 1877. pag. 44.



Im Hypersthen findet man kleine schwarze Erzkörner, sowie sehr dünne bis 0.4 mm lange, jedoch nur 0.001 mm breite Nadelchen eingewachsen. Bei starker Vergrößerung und aufgehobenem Kondensator zeigen dieselben eine gelblich braune Farbe; sie sind immer senkrecht zu  $c'$  orientiert, während andere, kürzere (0.1 mm lange), sonst aber ähnlich erscheinende Stäbchen  $\parallel c'$  liegen. Es scheint, daß diese Einschlüsse dem Rutil angehören.

Der *Diallag* bildet makroskopisch schmutzig gelblich grüne Körner; einmal wurde ein fächerförmiges Aggregat von stengeligen, 3—4 mm langen Diallagindividuen vorgefunden. Dieselben waren in der Prismenzone von herrschenden  $a$  (100) und  $b$  (010) und untergeordnetem  $m$  (110) begrenzt.

$$\begin{aligned} a : m &= 46^{\circ} 42' \text{ gem.}, 46^{\circ} 30' \text{ ber.} \\ &: b = 89^{\circ} 52' \quad \text{,,} \quad 90^{\circ} \text{ — } \quad \text{,,} \\ m : b &= 43^{\circ} 10' \quad \text{,,} \quad 43^{\circ} 30' \quad \text{,,} \end{aligned}$$

Die Polausbildung war unkristallonomisch.

Die Absonderung nach  $a$  ist besser als die Spaltbarkeit nach  $m$ ; die Blättchen nach  $a$  lö. chen parallel aus und zeigen einen schiefen Achsenaustritt, während diejenigen nach  $m$   $38^{\circ}$ — $40^{\circ}$  schief auslö. chen. Manche Blätter waren von zahlreichen Zwillinglanellen durchgesetzt.

Der *Diallag* bildet meist allotriomorphe bis lappig begrenzte, fast isometrische Körner. Hie und da beobachten wir in der vertikalen Zone die Formen  $a$ ,  $b$ ,  $m$ . In den Querschnitten sieht man Risse nach der prismatischen Spaltbarkeit, sowie feinere und vollkommen scharfe und geradlinige Risse nach  $a$ . Die Dimensionen sind 0.3—0.5 mm  $\times$  0.16—0.25 mm.

Tiefe und gerundete Buchten zeugen, daß auch der *Diallag* resorbiert wurde.

Die Farbe ist schwach grünlich, Pleochroismus fehlt. Manche Durchschnitte besitzen ähnliche blätterige Einschlüsse, wie der Hypersthen; dieselben sind in schiefe Reihen gegen die Vertikalachse geordnet.

Die Licht- sowie Doppelbrechung sind recht hoch. Auf den Schnitten  $\parallel b$  (010)  $\gamma - \alpha = 0.026$  (im Vergleich mit Quarz); die Auslöschungschiefe auf  $b$  (010) =  $42^{\circ}$ .

Ein *Diallag*blättchen ( $\parallel 010$ ), stark geglä. h. t, wird dunkler (bräunlich grün), ohne jedoch pleochroisch zu werden.

Einschlüsse im *Diallag* sind: Erzkörner (Ilmenit und etwas Magnetit), Apatitsäulchen, zarte Rutilnadeln, hie und da Biotitschüppchen.

Wie der Hypersthen, bildet auch der *Diallag* große Menge von kleinen, teils idiomorphen Individuen, welche hauptsächlich in den Feldspäten eingeschlossen sind.

Es handelt sich um Kristallisationskerne, die aber nicht weiter wuchsen.

*Plagioklas* bildet hypidiomorphe Körner, die gegenüber dem Orthoklas kristallonomisch, gegenüber dem Biotit und Pyroxen unkristallo-

nomisch begrenzt sind. Dieselben sind im Dünnschliffe farblos und haben auch dann ein frisches Aussehen, wenn die zahlreicheren Orthoklase recht starke Spuren von Verwitterung zeigen. Die Korngröße schwankt von 0.2 bis zu 0.6 *mm* Länge und von 0.1 zu 0.2 *mm* Breite. Seltener sind größere Individuen.

Die Plagioklase gehören meist der Andesinreihe, mit der Lichtbrechung  $> 1.547$ ,  $< 1.550$ . Einige Körner gehören den saueren Gliedern der Reihe (sie nähern sich der Oligoklasreihe)  $Ab_{65} An_{35}$  (Ausl. auf  $M 4^0$ , Schiefe des rhomb. Schn.  $1.5^0$ , sp. Gew. =  $2.67$ ), andere den basischeren Andesiten  $Ab_{40} An_{40}$  (Ausl. auf  $M 7.5^0$ , die Schiefe des rh. Schn.  $1^0$ ),  $Ab_{35} An_{45}$ . Minder häufig sind Körner, welche der Labradoritreihe angehören (nahe der Mischung  $Ab_{45} An_{55}$ , mit Ausl. auf  $M 21^0$  und mit der Schiefe des rh. Schn.  $6.5^0$ ) sowie die Glieder der Oligoklasreihe.

Die Zwillingsbildung nach dem Albitgesetze ist häufig; die Lamellen sind bei einigen Durchschnitten zahlreicher und dünner, bei anderen minder zahlreich und breiter. Die Lamellen nach dem Periklingesetze sind oft anwesend, nimmer aber zahlreich. Auf einigen Durchschnitten nach  $P$  trifft man unter den Lamellen nach dem Albit- auch solche nach dem Karlsbader Gesetze. Der Auslöschung derselben ( $2^0$  des Blättchens,  $10^0$  der Lamelle) sowie der Lichtbrechung nach gehört der Feldspat dem Andesin  $Ab_{42} An_{37}$ .

Auch der Plagioklas bildet kleine, idiomorphe Kriställchen, die im Orthoklas eingeschlossen sind; sie sind (wie es bei den Pyroxenen der Fall war) Kristallkerne, welche mit dem Wachstum bald aufgehört haben.

Der Plagioklas schließt in sich den Pyroxen und Biotit ein, seltener die Rutilnadeln. Er bildet mit dem Quarze zierliche Myrmekite, welche sich am Ende der Plagioklaskristallisation und vor dem Orthoklas gebildet haben. In einigen Fällen ist nur ein Teil des Kornes myrmekitisch entwickelt, in anderen ist das ganze Korn von wurmähnlichen, im Querschnitt rundlichen Quarzstreifen durchgewachsen. Oft ist die äußere Begrenzung der Myrmekite halbkugelig bis traubig; sie sitzen gern als Kruste auf den älteren Bestandteilen, oder sind im jüngeren Orthoklas eingeschlossen.<sup>16)</sup>

Der *Orthoklas* bildet mehrere *mm* große, nach  $M$  dick tafelige Individuen; an der Grenze mit anderen Orthoklaskörnern oder mit Quarz hat er recht idiomorphe Begrenzung nach  $M$ , anders krumme. Die Zwillingsbildung nach dem Karlsbader Gesetze ist sehr häufig. Unter den Spaltungsblättchen fand ich auch ein mit paralleler Auslöschung zu den Spaltrissen nach  $M$ , sehr niedriger Doppelbrechung und im konvergenten Lichte mit schiefer Bissektrixaustritt ( $\alpha$ ). Die Achsenebene steht senkrecht zu den Spaltrissen nach  $M$ . Es handelt sich ohne Zweifel um eine bei Orthoklas seltene Spaltung nach  $k$  (100).

<sup>16)</sup> Analoge Gebilde beschrieb in neuerer Zeit Schwenkel (T. M. p. M. 31, 205.)

Charakteristisch für diesen Orthoklas ist seine mikroperthitische Natur. Er enthält nämlich eine Menge von winzigen Albiteinschlüssen, welche die Form dünner, gegen die Ränder zugeschärfter Lamellen haben. Sie liegen den Flächen  $k$  (100) resp.  $M$  (010), eventuell der Ebene der Murchisonitspaltung parallel.<sup>17)</sup> Die Querschnitte dieser Einschlüsse haben deswegen eine scharf spindelartige Form; ihre Länge erreicht 0.02—0.05 mm, die Breite 0.002—0.003 mm.

Die Licht- sowie die Doppelbrechung der Einschlüsse ist etwas höher als beim Orthoklas; die mikrochemische Reaktion nach Bořický bewies die Anwesenheit von  $Na$ .

In manchen Durchschnitten sind die Albitkörperchen gleichmäßig zerstreut; in anderen aber sind sie an einigen Stellen angehäuft, während sie den anderen Partien desselben Kornes vollkommen fehlen.

Bei der Verwitterung erscheint in den Orthoklaskörnern eine bräunliche Trübung, welche in manchen Fällen die zonare Struktur des Kornes verrät.

Sehr verbreitete Einschlüsse macht im Orthoklas der nadelförmige Rutil. Seine Orientation ist in manchen Fällen unregelmäßig, oft aber kann man erkennen, daß die Nadeln gesetzmäßig im Orthoklas, untereinander parallel eingelagert sind: ein System derselben geht auf den Spaltungsblättchen nach  $M$  parallel den Spaltrissen  $P : M$ , ein anderer schließt mit denselben etwa  $32^\circ$  im stumpfen Winkel  $\beta$ <sup>18)</sup>, der dritte folgt der Richtung der Zonenachse  $\hat{M}x = (100) : (\bar{1}01)$ , indem er mit  $\hat{a}$  etwa  $51^\circ$  ( $50^\circ 16'$  ber.) schließt.

Außer den früher erwähnten zahlreichen winzigen Kriställchen von Biotit, Pyroxen und Plagioklas enthalten die Orthoklasindividuen auch idiomorphe Quarzkörnchen und Apatitsäulchen. Diese zahlreichen Einschlüsse des Orthoklases verursachen zwischen gekr. Nik. den Eindruck einer siebartigen Struktur.

Die größeren Individuen der älteren Bestandteile, des Pyroxens, Biotits und Plagioklases greifen in den Orthoklas ein, sie sind aber selten von denselben eingeschlossen. Die Zusammenhäufung der genannten Mineralien zwischen den großen, jüngeren Orthoklaskörnern macht den Eindruck, als ob sie von den wachsenden Orthoklasen zur Seite in Nester und Streifen zusammengeschoben wären, wo wir sie jetzt auch finden.

Der Quarz ist spärlich; er ist der jüngste Gemengteil des Gesteines, indem er die letzten Räume zwischen den älteren Mineralien ausfüllt. Wie schon früher erwähnt wurde, hat etwas Quarz schon vor dem Biotit resp. gleichzeitig mit ihm auskristallisiert, ebenfalls gleichzeitig mit dem Plagioklas (Myrmekit) und in kleinen idiomorphen Individuen vor dem Ortho-

<sup>17)</sup> Ähnliche Orientierung beschreibt auch F. Becke aus dem niederöst. Waldviertel (T. M. p. M. 4. 1882. pag. 197).

<sup>18)</sup> Diese Richtung entspricht ungefähr der Kante  $M\hat{q} = (010) : (\bar{2}03) = 33^\circ 51'$  ber.



klas, welchen er auch pegmatitisch durchwächst. Diese wiederholte Kristallisation des Quarzes ist, wie es scheint, eine recht allgemeine Eigenschaft mancher Gesteine am Rande des mittelböhmischen Granitmassives. So beschrieb sie F. K a t z e r<sup>19)</sup> aus der Granitgrenze gegen Schiefer von Říčan und hielt sie für endogene Metamorphose; J. F i š e r<sup>20)</sup> fand sie bei den Gesteinen aus der Umgebung von Štěchovic; nach ihm kristallisierte der Quarz gleichzeitig mit dem Amphibol. F i š e r sieht die Ursache dieser Abnormität im starken äußeren Drucke, welcher auf das kristallisierende Magra gewirkt hat.

Der *Apatit* bildet schmale, gewöhnlich 1—2 mm lange und 0.2—0.6 mm breite Säulchen, die oft mit queren Sprüngen und Rissen durchgesetzt sind. Hie und da trifft man auch kurze und breite Apatitkristalle. Die Polausbildung derselben ist immer unvollkommen, gerundet, während die vertikale Zone gut kristallonomisch ausgebildet ist. Der Apatit gehört zu den ältesten Gemengteilen.

Das *Erz* erscheint in drei Formen. Ein Teil derselben gehört zu den ältesten Ausscheidungen des Magras; es sind kleine (0.01—0.04 mm große), vollkommen opake, im auffallenden Lichte gräulich schwarze, metallisch glänzende Körner. Ihre Umrisse sind gerundet, undeutlich sechseckig bis stabförmig verlängert. Diese Erze sind in allen Gemengteilen (auch im Apatit) eingewachsen; sie gehören teilweise dem Magnetit (leicht löslich in HCl), teilweise dem Ilmenit an (unlöslich in HCl). Magnetit ist sehr spärlich, wie auch die Gesteinsanalyse verrät (alles Eisen konnte nur als Eisenoxydul bestimmt werden).

Außer diesen Erzkörnern trifft man stellenweise 0.1—0.4 mm große, allotriomorph begrenzte Körner eines schwarzgrauen metallisch glänzenden opaken Erzes; ihre lappigen Ränder besitzen hie und da teilweise kristallonomische Begrenzung, welche an Rhomboederdurchschnitte erinnert. Es wurde auch beobachtet, daß vom solchen Kerne krumme Äderchen zwischen die Blätter des jüngeren Biotites hineingedrungen sind. Dieses Erz ist nicht magratisch, sein Strich ist schwarzgrau; in HCl löst es sich nicht auf. Die Phosphorsalzperle im Reduktionsfeuer färbt es blaß, jedoch deutlich violett. Daraus kann man auf Ilmenit schließen, welcher gleichzeitig mit dem jüngeren Biotit aus dem Fe- und Ti-Gehalte des resorbierten älteren Biotites entstand.

Endlich finden wir im Gesteine noch Pyrit- und Pyrrhotinkörnchen, die allotriomorph und älter als die zweite Biotitgeneration sind; sie bilden das Strukturzentrum, um welches sich manche fächerförmige Biotitaggregate gebildet haben.

Einmal wurde im Syenit (von der K v ě c h's Mühle<sup>21)</sup> bei Tábor)

<sup>19)</sup> Jhb. g. R. A. XXXVIII. 1888. pag. 408.

<sup>20)</sup> Sitzungsber. d. b. königl. Ges. d. W. 1900. Nr. 17, pag. 50.

<sup>21)</sup> Auf der Karte des Generalstabes ist dieselbe als Papiermühle bezeichnet.



ein fremdes Korn mit dem Kelyphitkranze angetroffen. Das Korn ist ungefähr oval (Tab. Fig. 4),  $0.6 \times 0.4$  mm groß, schwer durchsichtig mit einer dunkel bouteillegrüner Farbe und von unregelmäßigen Sprüngen durchgesetzt. Von einer Seite ist es mit einem Erzkorne (Ilmenit?) zusammengewachsen, welches in dasselbe schmale Äderchen aussendet. Das grüne Mineral ist sehr stark lichtbrechend und einfachbrechend. demzufolge muß man es dem Pleonast zurechnen. Der kelyphitisch; Kranz umhüllt das Pleonast- sowie das Erzkorn; er ist etwa  $0.1$  mm breit und besteht aus farblosem, blätterigem Minerale, dessen Blätter meist regellos, seltener (ungefähr) radial geordnet sind. Dem mittleren Brechungsexponent und sehr hoher Doppelbrechung nach handelt es sich vielleicht um Talk.

Die Herkunft des Pleonastes kann man schwer bestimmen, vielleicht gehört er zu den ältesten Magnaausscheidungen,<sup>22)</sup> welche später resorbiert wurden, vielleicht ist er aber dem Syenitmagma vollkommen fremd. Bei der Resorption entstand das Erzkorn aus dem Fe-Gehalte, der Talk aus dem Mg-Gehalte des Spinells. Das Magma lieferte dazu das Si und H.

Die Ausscheidungsfolge wäre also etwa folgende:

Ein Teil des Erzes, der Apatit, der Rutil.

Hypersthen, Diallag.

Älterer Biotit;<sup>23)</sup> (etwas Quarz).

Die Resorption des Pyroxens und des Biotites; die für diese Mineralien ungünstige Periode verwandelte sich in eine für Biotit günstige Periode.

Die Bildung des jüngeren Biotites, welcher auf Kosten des Pyroxens wuchs.

Plagioklase; Quarz (hauptsächlich in Myrmekiten).

Orthoklas.

Quarz.

Der Druck, welcher auf das Syenitmagma während der Krystallisation gewirkt hat, verrät sich durch mehrere Wirkungen. Er verursachte die parallele Textur des Gesteines an vielen Orten (die Biotitblätter und die Orthoklastäfelchen wurden ungefähr in eine Ebene geordnet) und auch die Existenz der früher erwähnten, sehr zahlreichen, kleinen idiomorphen Kriställchen von Biotit, Pyroxen und Plagioklas muß man mit dem Drucke in Verbindung stellen. Diese rudimentären Krystallisationskerne konnten sich nämlich neben den großen Individuen der bezüglichen Mineralien nur bei sehr viskosem Magma erhalten, in welchem schon jede intensivere Wirkung der Konzentrationsströmung aufgehört hat; die Viskosität hat wahrscheinlich der Druck verursacht. Auch die anomale wiederholte Krystallisation des Quarzes hat sicher ihren Grund im gewaltigen Drucke.

<sup>22)</sup> Siehe H. Rosenbusch, Physiographie etc. I. 2. 14.

<sup>23)</sup> Ungeachtet lassen wir dabei die spärlichen, vor den Pyroxenen ausgeschiedenen Biotitschüppchen.

Den kräftigsten Beweis des auf das noch flüssige Magma wirkenden Druckes muß man in den protoklastischen Erscheinungen betrachten, welche sich hauptsächlich an den Feldspaten deutlich machen. Wir finden an verschiedenen Stellen des Gesteines viele Orthoklasdurchschnitte, die mehr oder minder gebogen sind, ohne jedoch gebrochen zu werden. Die Biegung ist im gewöhnlichen Lichte durch Störung der Reihen der Albit-einschlüsse auffallend, zwischen den gekr. Nik. durch undulöse Auslöschung in der Biegungszone. Den Untersuchungen von A. Day und E. Allen<sup>24)</sup> zufolge wird der Orthoklas in der Nähe des Schmelzpunktes<sup>25)</sup> plastisch, so daß man ihn leicht (schon durch einen geringen Druck) deformieren kann. Daraus kann man wohl mit Recht schließen, daß auch die Orthoklase des Táborer Syenits noch bei hoher Temperatur deformiert wurden, als sie noch einen bedeutenderen Grad der Plastizität besaßen.

Der Druck wirkte aber auch *nach dem Erkalten des Gesteines*, wie die verschieden starke Kataklyse beehrt. Stellenweise sehen wir die ersten Merkmale der Kataklyse: undulöse Auslöschung, Sprünge und Risse, die die Körner durchsetzen und zertrümmerte Ränder der Bestandteile.<sup>26)</sup> Bei stärkerem Drucke entstand eine Augenstruktur; die lichten Bestandteile bilden (auf dem Querbruche) linsenförmige Augen, welche von den dunklen Streifen umgefaßt sind.<sup>27)</sup> Der Biotit ist dabei in kleine Schüppchen zerfallen, ebenfalls die größeren Körner anderer Bestandteile.

Die stärkste Kataklyse finden wir aber in der Nachbarschaft von aplitischen und pegmatitischen Gängen; der Syenit hat an der Grenze mit denselben eine ausgesprochen parallele Textur, indem in ihm dunkle, aus Biotit und (sekundären) Amphibol zusammengesetzte Streifen mit weißlichen bis gelblich gefärbten, aus Feldspat zusammengesetzten Streifen alternieren. Der Dünnschliff zeigt u. d. Mikroskope eine typische Mörtelstruktur.

Aus diesen Verhältnissen kann man schließen, daß die jüngere aplitpegmatitische Injektion eben in den durch Druck und Kataklyse schwächer gewordenen Stellen stattfand. Daß aber auch nach der Injektion ein gewaltiger Druck weiter gewirkt hat, beweisen die Kataklysephänomene im Innern der Aplite und Pegmatite, sowie die vielfältige Krümmung mancher Aplitgänge.

Im Syenite finden wir an mehreren Stellen (so z. B. im Lužnice-Tale unterhalb des Klosters Klokoty), daß sich der Pyroxen in den

<sup>24)</sup> Z. f. phys. Chemie 1906. 54. 33.

<sup>25)</sup> Die Autoren arbeiteten mit den Temperaturen 1200°—1300° C. C. Dölter sagt (T. M. p. M. 22. 1903, pag. 298): „Es scheint, daß der Übergang aus dem kristallinen Zustand in den amorphen zumeist im viskösen Zustande vor sich geht.“

<sup>26)</sup> Z. B. der Syenit im Steinbruche gegenüber der Matouš's Mühle am l. Lužnice-Ufer.

<sup>27)</sup> Sehr hübsche Stufen findet man bei der Vendulák's Mühle am r. Lužnice-Ufer.

Amphibol umgeändert hat. In einigen Fällen ist die Umwandlung im Anfangsstadium; die Pyroxenkörner sind nur von den Rändern in den Amphibol umgewandelt. Derselbe ist faserig, blaßgrün, deutlich pleochroitisch zwischen Gelbgrün und Blaugrün. Die Lichtbrechung ist in allen Positionen niedriger als 1.641;<sup>28)</sup> es ist also ein aktinolitischer Amphibol. Er bildet um die Pyroxenkörner einen Saum und dringt in dieselben ein; die Vertikalachsen beider Mineralien sind oft untereinander parallel.

Die Umwandlung ist intensiver namentlich bei den durch die Kataklase stärker beeinflussten Pyroxenkörnern; bei solchen finden wir nur einen kleinen Pyroxenrest, während der ganze übrige Teil des Kornes in Amphibol umgewandelt wurde. Endlich gibt es vollkommene Pseudomorphosen des Amphibols nach Pyroxen, wobei der letztere entweder durch einen Aggregat von Amphibolkörnern, oder durch ein einheitliches Amphibolindividuum pseudomorphosiert wurde. Die Amphibolpseudomorphosen besitzen oft die idiomorphe Form der Pyroxenkrystalle.

Nicht selten überlangen die Amphibolfasern über den Rand der Pseudomorphosen und zerfasern sich pinselartig.

Die Amphibolisierung des Pyroxens wurde von manchen Petrographen zum Produkt der Dynamometamorphose erklärt;<sup>29)</sup> diese Erklärungsweise paßt jedoch auf den Syenit von Tábor nicht. Wir finden nämlich oft eine intensive Pyroxenumwandlung in Gesteinpartien, die von der Kataklase fast unberührt geblieben sind. Dem gegenüber konnte in vielen Fällen eine Abhängigkeit der Umwandlung von den Spalten und Rissen im Gesteine beobachtet werden. Auf beiden Seiten von denselben sehen wir nämlich die Feldspate stark getrübt und die Pyroxene vollkommen uralitisiert. Demzufolge kann man sicher dafürhalten, daß die Ursache der Uralitisierung wenigstens zum Teil in den postvulkanischen Thermien und Gasemanationen steckt. Ähnlich äußert sich auch E. Weinschenk;<sup>30)</sup> J. de Lapparent bewies dasselbe für die gabbrodioritischen Gesteine von Saint-Quay-Portrieux.<sup>31)</sup> Manche Gründe sprechen jedoch für die Ansicht, daß auch das Magna bei der Umwandlung mitgewirkt hatte, so daß ein Teil der Pseudomorphosen *magmatischen Ursprungs* wäre.<sup>32)</sup> So könnte man die braungrünlichen bis rostiggrünlichen Biotitblättchen erklären, welche die Amphibolpseudomorphosen oft zu begleiten

<sup>28)</sup> Acetylentetrbromid. Siehe die Lichtbrechungsexponenten verschiedener Amphibolvarietäten in Z. f. Kryst. LIV. 1914. I.

<sup>29)</sup> H. Rosenbusch (l. c. I. 2 1905, pag. 151, 206); U. Grubenmann (Die kristallinen Schiefer I. 1904, pag. 43).

<sup>30)</sup> Allgemeine Gesteinskunde 1902. I. 118—119.

<sup>31)</sup> l. c. (Siehe die Fußnote 12).

<sup>32)</sup> Siehe auch: M. Slavíková, Sitzungsber. d. b. königl. Ges. 1904, Nr. 27. pag. 11; V. Rosický, ibidem 1901. IV. 30. pag. 21.; T. G. Hornung, Bul. soc. fr. de min. 1907 (Sep.), pag. 77.



pflegen, als Produkt der magmatischen Einwirkung auf die sich umwandelnden Pyroxene.<sup>33)</sup>

Es scheint, daß die Hypersthene leichter uralitisieren, als die Diallage.

Aus dem *Ti*-Gehalte der Hypersthene entstand der sekundäre Titanit in Körnern, deren Dimensionen etwa  $0.3 \times 0.2 \text{ mm}$  sind.

Durch Verwitterung des Amphibols und des Biotits entsteht Chlorit. Seine Farbe ist grün, der Pleochroismus zwischen hellen gelbgrünen Tönen. Die Doppelbrechung ist sehr gering, die Interferenzfarben sind meist anomal. Der Pyroxen ändert sich durch Verwitterung auch zu Chlorit, jedoch ohne Pleochroismus. Durch seine Maschenstruktur erinnert er an Serpentin.

An mehreren Stellen des Syenites finden wir dunkle basische Ausscheidungen, welche mit dem sie umgebenden Syenite mineralogisch ganz analog sind; der Unterschied besteht nur in dem Mengenverhältnis der Bestandteile, indem diese Partien mehr melanokratisch sind, als der eigentliche Syenit. Aller Pyroxen ist in Amphibol umgewandelt. Es scheint, daß diese basischen Ausscheidungen auch den Kordierit enthalten (oblonge bis sechsseitige Durchschnitte, jene mit negativem Charakter der Länge; auf den passenden Durchschnitten tritt zweiachsiges Achsenbild mit negativem Charakter auf. Die Licht- sowie die Doppelbrechung sind denjenigen des Quarzes sehr ähnlich).

Andere Einschlüsse gehören wahrscheinlich den assimilierten fremden Gesteinsbruchstücken an. Sie sind gräulich bis bräunlich grün, und bestehen vorwiegend aus dem gemeinen Amphibole. Außerdem finden wir in diesen Einschlüssen stark korrodierte Biotitblättchen, an deren Rändern viele kleine, durch Resorption des Biotites entstandene Titanitkriställchen sitzen, den Quarz, den Feldspat, den Apatit und den Titanit. Der Amphibol bildet verschieden große, allotriomorphe Körner (von  $0.04$  bis  $0.5 \text{ mm}$ ), die im gewöhnlichen Lichte verschiedenartig gefärbt sind (bläulichgrün, gelblichgrün, bräunlichgelb). Der Pleochroismus der Querschnitte ist:

||  $\bar{b}$  rostigrün bis grünlichbraun.

⊥ zu  $\bar{b}$  blaß gelblich bis gelblichgrün.

Auf dem Schnitte ungefähr (010) ist  $\gamma$  rostig bis bläulichgrün.

Die Lichtbrechung ist nahe dem Werte  $1.641$  (Acetylentetrabromid); in einigen Schnitten etwas höher, in anderen niedriger.

Der Amphibol schließt die Biotitblättchen sowie die Titanitkörner ein, er ist also erst nach der Biotitresorption entstanden. Die Titanit- sowie die Apatiteinschlüsse im Amphibol sind von sehr gut ausgebildeten pleochroitischen Höfen umgeben (Pleochroismus derselben ist zwischen blaß gelblichbrauner und dunkel bis schwarz grünlichbrauner Farbe). Interessant sind auch kleine, wie es scheint, mikropegmatitisch mit Amphibol zusammengewachsene Quarzkörner, deren wir stellenweise große Menge

<sup>33)</sup> Namentlich *Al* der Biotite wäre magmatischen Ursprungs.



in den Durchschnitten beobachten können. Der Quarz bildet auch idiomorphe Individuen, sowie allotriomorphe Ausfüllungen; die Apatit-säulchen erreichen die Länge 0.4 mm, die Breite 0.2 mm. Selten sind die Feldspatkörner.

Vermutlich entstanden diese Einschlüsse durch Assimilation fremder Gesteinsbruchstücke, die vielleicht einem mergeligen Sediment angehört haben. Manche Gemengteile jedoch (namentlich der resorbierte Biotit) stammen wahrscheinlich aus dem Syenitmagma her.

\* \* \*

Der Syenit von verschiedenen Orten der Táborer Umgebung zeigt wenige Unterschiede; es sind: verschiedene Korngröße, verschiedenes Verhältnis der Gemengteile, richtungsloskörnige oder parallele Textur u. s. w.

Der Syenit von „Dobrá Voda“ stammt aus kleinen Felsen ab, die in den Feldern W. von Dobrá Voda bei Klokoty an den Tag treten.

Das Gestein ist ziemlich dunkel grau, mit Stich ins Grüne. Der Biotit ist spärlich und bildet meist die porphyrisch eingewachsenen Blätter. Mit Hilfe des *Hirschwalds* Okulars wurde folgendes Mengeverhältnis festgestellt:

30.5 Pyroxen : 8.0 Biotit : 61.5 Orth. + Plag. + Quarz.

Das Verhältnis der hellen zu den dunklen Gemengteilen ist also beiläufig gleich demjenigen des normalen Syenites (61.5 : 38.5).

Der Pyroxen ist größtenteils Hypersthen, neben ihm aber kommt auch der Diallag vor.

Rutil bildet im Gesteine nicht nur dünne Nadeln, sondern auch Körner sowie säulenförmige Kristalle. Im durchfallenden Lichte ist der Rutil ziemlich schwer durchsichtig, deutlich, obschon schwach pleochroitisch ( $\epsilon$  = rotbraun bis dunkel rostigbraun,  $\omega$  = gelblich rotbraun bis gelblich rostigbraun). Im einfallenden Lichte sind die Kristalle und Körner halbmatt glänzend.

Die Kristalle sind nach der Hauptachse lang gestreckt, in der vertikalen Zone durch  $m$  (110) und  $a$  (100) begrenzt; am Pole finden wir eine Pyramide.<sup>31)</sup> Ihre Länge ist 0.3—0.6, ihre Breite 0.04—0.1 mm.

Auch in dieser Syenitfazies erscheint der jüngere Biotit, welcher auf Kosten des Pyroxens wächst.

Am Wege von *Makov* nach *Třemešná* wurde ein ziemlich grobkörniger Syenit gefunden; in einem Biotitblättchen desselben wurde ein radial strahliges Pyroxenaggregat als Einschluß sichergestellt. Als Kristallisationszentrum desselben diente ein Apatitkristall.

Etwas quarzreicher, als der Syenit von Tábor ist derjenige, welcher

<sup>31)</sup> An einem Durchschnitte konnte der Winkel der Spitze zu ca 49° gemessen werden, was an die Deuteropyramide  $e$  (011) hinweist (49° 58' ber.).

größere Blöcke im *Vláseniccr Bachtale* zwischen *Třemešná* und *Mezdříč* bildet. Man kann das Gestein als quarzreichen Biotit-Pyroxensyenit bezeichnen.<sup>35)</sup>

Im grobkörnigen Syenite von *Bálkova Lhota* wurde ein sechsseitiger Durchschnitt (etwa 0·24—0·17 mm breit) gefunden, welcher wahrscheinlich dem Ilmenitglimmer angehört. Er ist nur in der Mitte dunkel rotbraun durchscheinend, sehr stark lichtbrechend.

### Das Übergangsgestein von Radkov.

*NW* von *Radkov*, *S* von der cõ 599 befinden sich seichte Steinbrüche auf ein bläulich graues Gestein, dessen Kennzeichen in manchem vom *Táborer Syenit* abweichen, während sie sich dem *Granodiorit* von *Dchetník* nähern. Deswegen wurde das Gestein als ein Übergangstypus bezeichnet.

Makroskopisch können wir folgende Gemengteile unterscheiden: Biotit, Pyroxen, Amphibol, Feldspat, Quarz.

Die Textur ist ziemlich deutlich parallel, indem die lichten und die dunklen Gemengteile beiläufig parallele Streifen bilden. Die Biotitblättchen haben auf den Schieferflächen die Form von lappigen, untereinander anastomosierenden Fetzen, welche die unregelmäßig begrenzten hellen Partien umarmen.

Der *Biotit* hat nur ausnahmsweise skelettartige Wachstumsgebilde an den Rändern; die fächerförmigen Aggregate des jüngeren Biotites fehlen in diesem Gesteine vollständig. Die Apatiteinschlüsse mit den pleochroitischen Höfen sind seltener.

Der *Pyroxen* ist größtenteils *Diallag*; der *Hypersthen* ist minder häufig, als im *Táborer Syenite*.

Der *Amphibol* ist, wie es scheint, sekundär; er entstand wahrscheinlich hauptsächlich aus dem *Hypersthen*, welcher, wie der *Táborer Syenit* belehrt sich leichter ändert als der *Diallag*. Manche *Amphibolaggregate* behaltend noch die Kristallform der ursprünglichen *Pyroxenindividuen*, oder sie enthalten hie und da noch in der Mitte die Reste derselben.<sup>36)</sup> Die Farbe der *Amphibolkörner* ist im Innern lichtgrün, an den Rändern dunkler grün, mit dem Pleochroismus zwischen grünlichblauer und gelblichgrüner bis grünlichgelber Farbe. Die Lichtbrechung des lichtereren sowie des dunkleren *Amphiboles* ist höher als 1·641 (*Acetylentetrabromid*); dieser *Amphibol* gehört also zu den „gemeinen“, sesquioxidhaltigen Varietäten. Aus diesen Verhältnissen kann man schließen, daß die Umwandlung der

<sup>35)</sup> Die *Pyroxenresorption*, die auf der Tafel Fig. 5. abgebildet ist, gehört diesem Gesteine an.

<sup>36)</sup> Ähnlich, wie die *Amphibolaggregate* mancher Granite des mittelböhmischen Granitmassives (z. B. von *Žampach* bei *Eule*; s. V. R o s i c k ý, Sitzungsber. d. b. königl. Ges. d. W. 1901. Nr. 30, pag. 21).

Pyroxene in Amphibol magmatisch war; die dunkleren, wahrscheinlich sesquioxidgeicheren Ränder beweisen, daß sich die Zusammensetzung des Magmas im Laufe der Umwandlung beträchtlich verändert hat.

Der *Plagioklas* ist häufiger als im Táborer Syenit. Seine Lamellierung geht in manchen Fällen nicht durch das ganze Korn, sondern sie keilt sich aus oder ist an das eine Ende desselben beschränkt; diese Erscheinung wurde beim Táborer Syenit niemals beobachtet, demgegenüber ist sie häufig bei dem Granodiorit von Dehetník.

Den optischen Eigenschaften nach gehört der Plagioklas der Reihe Oligoklas-Andesin an. Mit dem Quarze bildet er häufig myrmekitische Verwachsungen.

Der *Orthoklas* bildet bis mehrere *mm* große Individuen. Sie enthalten auch albitische spindelförmige Einschlüsse sowie dünne Rutilnadeln, jedoch beide in einer beträchtlich kleineren Menge, als das beim Táborer Syenit der Fall war. Die kleinen idiomorphen Pyroxenkörner, welche im jetzteren so häufig im Orthoklase eingewachsen sind, finden wir im Gesteine von Radkov nicht.

Der *Quarz* ist in diesem Gesteine in größerer Menge vorhanden, als im Táborer Syenit, jedoch in kleinerer, als im Granodiorit von Dehetník. Er gehört größtenteils der letzten Kristallisationsepoche an, nebstdem finden wir jedoch auch einzelne idiomorphe, im Orthoklas, Plagioklas, ja sogar im Pyroxen eingewachsene Körner.

Die Kristallisationsfolge weicht von derjenigen des Táborer Syenites etwas ab, indem im besprochenen Gesteine der Biotit der älteste Gemengteil ist; seine Blätter finden wir in großen Diagonaldurchschnitten eingeschlossen.

Den Druck, welcher wahrscheinlich in der Zeit der Kristallisation des Gesteines herrschte, verrät die parallele Textur, die Krümmung der Feldspatkörner, das undulöse Auslöschens derselben sowie des Quarzes, endlich auch die deutliche Kataklaste.

### Der Granodiorit von Dehetník.

Das Gestein stammt aus kleinen Felsen, welche sich nördlich vom Berge *Dehetník* (cô 676. SW. von *Borotín*) beim Wege von *Pykov* nach *Kamenná Lhota* befinden.

Der Granodiorit hat mittlere Korngröße und eine graue Farbe mit grünlichem Stiche; die hellen Gemengteile (Quarz und Feldspat) bilden lappige bis fast rundliche Aggregate, welche von den dunklen, aus Pyroxen, Biotit und Amphibol zusammengesetzten Streifen umgeben sind; dadurch entsteht ein der Augenstruktur ähnlicher Gesteinsbau.

Wesentliche Gemengteile sind: Biotit, Diopsid (und Amphibol), Plagioklas, Orthoklas, Quarz. Die Nebengemengteile sind: Erz und Apatit;



sekundär entstehen die Titanitkörner und die Chloritschüppchen. Die Struktur ist holokristallin-hypidiomorph. Das Mengenverhältnis ist: 5 Pyrox. + Amphib.: 19.8 Biotit: 75.2 Feldsp. + Quarz (die lichten zu den dunklen Gemengteilen sind fast im Verhältnisse 3 : 1). Sp. Gew. = 2.76.

Im Gesteine trifft man häufig dunklere basische Partien an, die faust- bis kopfgroß sind und schon von weitaus sich vom Gesteine abheben. Sie sind aus denselben Mineralien wie das Hauptgestein zusammengesetzt, nur herrschen die dunklen Gemengteile vor; das Mengenverhältnis ist: 26 Pyroxen + Amphibol: 28.5 Biotit : 45.1 Feldsp. + Quarz (die dunklen zu den lichten Gemengteilen wie 54.9 : 45.1). Sp. Gew. = 2.94.

*Der Biotit* bildet 0.5 — 1 mm große und etwa 0.5 mm dicke Blättchen.

Im Dünnschliffe ist er an den basalen Schnitten rotbraun gefärbt; die Querschnitte sind stark pleochroitisch zwischen rotbrauner ( $\perp c'$ ) und licht gelbbrauner ( $\parallel c'$ ) Farbe. Die Umgrenzung ist hypidiomorph. Manchmal machen sich die Druckphänomene durch Biegung der Blättchen geltend. Niemals ist die Resorption und die Bildung der jüngeren, fächerförmigen Aggregate beobachtet worden. Die Apatitsäulchen, die im Biotit eingewachsen sind, sind von deutlichen pleochroitischen Höfen umgeben. Dieselben verlieren sich auch im sekundär entstandenen Chlorit nicht (ihr Pleochroismus ist zwischen licht gelblichgrüner und fast schwarzer Farbe). Bei dieser Umwandlung entstehen aus dem *Ti*-Gehalte des Biotites zahlreiche, in Aggregate dicht zusammengedrückte Titanitkörnerchen, die zwischen den Chloritblättchen angestaut sind. Sie fehlen den frischen Biotitblättchen vollkommen.

*Der Pyroxen* ist ein sehr blaß gefärbter Diopsid (gelbbraunlich mit Stich ins Grünliche). Die Ausbildung ist hypidiomorph (in der vertikalen Zone ziemlich gut idiomorph), säulenförmig nach  $c'$ , bis 1 mm lang und 0.5 mm breit. Der größte Auslöschungswinkel der prismatischen Zone beträgt  $39\frac{1}{2}^{\circ}$ .

Die Umwandlung des Pyroxenes in den Amphibol ist allgemein. Derselbe gehört zu dem „gemeinen Amphibole“ ( $n > 1.641$ ) und ist deutlich pleochroitisch:  $\parallel \alpha$  gelblichgrün ins Bräunliche,  $\parallel \beta$  bräunlichgrün,  $\parallel \gamma$  bläulichgrün. Vielleicht handelt es sich um eine magmatische Umwandlung.

*Der Plagioklas* bildet nach *M* tafelförmige Individuen, die gegen Orthoklas und Quarz oft idiomorph, gegen Pyroxen allotriomorph begrenzt sind. Die Zwillinglamellierung ist nach dem Albit- sowie Periklingesetze ausgebildet; dabei beobachtet man verschiedene Anomalien in der Ausbildung. In einigen Körnern sieht man die Lamellen nur auf einem Ende entwickelt, während sie sich zu dem gegenüberliegenden auskeilen. In anderen Fällen sind die Körner von beiden gegenüberliegenden Rändern lamelliert, die Lamellen aber verengen sich gegen die Mitte bis sie sich ganz auskeilen. Die mittlere Partie des Kornes ist nicht lamelliert. Die Zwillinglamellen mancher Körner verengen sich plötzlich, ehe sie sich



auskeilen. Auch die Umbiegung der Lamellen wurde beobachtet. Alle diese anomale Lamellierung zeigenden Plagioklaskörner löschen undulös aus.

Die folgenden zwei Beispiele überzeugen uns, daß die Zwillinglamellierung der Plagioklaskörner im kausalen Zusammenhange mit den mechanischen Störungen sein kann.

Das erste Korn ( $1.3 \times 1.2 \text{ mm}$ ) ist polysynthetisch lamelliert und von einem zu den Lamellen fast senkrechten Sprunge durchgesetzt. Einige der Lamellen gehen ungestört das ganze Korn durch; es sind diejenigen, welche im Korne existierten, ehe der Sprung entstanden ist. Die anderen Lamellen aber hören beim Sprunge plötzlich auf, oder sie fahren in die



Fig. 2.

zweite Hälfte des Kornes mit anderer Breite fort. Die Auslöschung ist undulös.

Das zweite Korn ( $1.2 \times 0.9 \text{ mm}$ ) ist fast senkrecht zu einer Achse geschnitten; seine Auslöschung ist undulös. Etwa in der Mitte des Kornes sehen wir einen ziemlich geradlinigen Sprung (Fig. 2), welcher beiläufig senkrecht zu den nicht zahlreichen, ziemlich breiten Lamellen das Korn durchsetzt. Wie die Figur lehrt, passen die Lamellen der einen Hälfte nicht zu den Lamellen der anderen; sie sind in beiden Hälften ganz selbständig.

Ganz analoge Verhältnisse bezüglich der Zwillinglamellierung der Plagioklase beschreibt *L. v. Werveke*<sup>37)</sup> aus dem Olivinnorit von Labrador und aus dem Olivinabbro von Store Belskafjord in Norwegen. *Werveke* glaubt, daß es sich in diesen Fällen um sekundäre, durch den Druck hervorgerufene Lamellierung handelt.<sup>38)</sup> Im gleichen Sinne

<sup>37)</sup> N. Jhb. f. M. etc. 1883. II. pag. 97—101.

<sup>38)</sup> Dieser Autor läßt die Frage offen, ob es sich um neue, erst durch den Druck neugebildete Lamellen, oder um ursprüngliche, jedoch umgeformte Lamellen handelt. Meiner Meinung nach wäre die erstere Eventualität die wahrscheinlichere.

ändert sich auch J u d d.<sup>39)</sup> Durch die beschriebenen Beispiele aus dem Detnicker Granodiorit ist die Erklärung beider Autoren gut gestützt.

Die Lichtbrechung des Plagioklases ist höher als diejenige des Kanadabalsams, manchmal jedoch niedriger als  $E$  des Quarzes. Die Spaltblättchen haben etwas niedrigere Lichtbrechung (in allen Positionen) als 1.552; die Lamellen nach dem Albitgesetze löschen unter dem Winkel  $1\frac{3}{4}^{\circ}$  aus. Diese Eigenschaften führen zum Andesin von der Zusammensetzung  $Ab_{80} An_{20}$ .

Andere Körner haben höhere Lichtbrechung als 1.552, wenn die Lamellen (nach dem Albitgesetze) senkrecht zum Polarisator stehen, dagegen niedrigere, wenn dieselben parallel mit dem Polarisator sind. Die Auslöschungsschiefe beträgt  $2\frac{1}{2}^{\circ}$ ; solche Körner kann man also als Andesin  $Ab_{60} An_{40}$  bestimmen.

Hier und da trifft man endlich ein Körnchen an, dessen Spaltungslamellen in allen Lagen höher lichtbrechend sind als 1.552; die Zwillinglamellen löschen unter dem Winkel  $4\frac{1}{2}$ — $5^{\circ}$  aus. Solche Körner gehören den basischeren Gliedern der Andesinreihe an, welche schon näher der Labradorreihe sind und der Mischung  $Ab_{50} An_{50}$  entsprechen.

Die Größe der Plagioklaskörner ist verschieden; sie erreicht 0.75 bis 2.5 mm. Sie wandeln sich an manchen Stellen in den kleinschuppigen Muskovit um.

Im Plagioklas sind die Biotitblättchen, die Amphibol- und Quarzkörner eingeschlossen. Seltener, als im Taborer Syenit, findet man die myrmekitischen Verwachsungen.

Der Orthoklas bildet recht große, isometrische bis nach  $M$  tafelförmige Individuen, die nach dem Karlsbader Gesetze verzwillingt sind. Sie erreichen 1 bis 5 mm Länge und bis 2 mm Breite und schließen idiomorphe ( $0.5 \times 0.25 m$ ) Plagioklaskörner ein. Die spindelförmigen Albiteinschlüsse sind, wie im Gesteine von Radkov, ungleichmäßig verteilt und spärlicher, als im Syenit von Tábor.

Durch Ätzen mit  $HF$  und Färbung mit Anilinblau wurden die Plagioklasdurchschnitte bläulich gefärbt; dadurch wurde ersichtlich, daß der Plagioklas und der Orthoklas etwa in gleicher Menge im Gesteine vorhanden sind.

Der Quarz ist größtenteils der jüngste, allotriomorphe Gemengteil; er ist in größerer Menge vorhanden, als es im Taborer Syenite der Fall war.

Der Titanit bildet allotriomorphe ca 0.1 mm (seltener 0.2 mm) große Körnchen, die deutlich pleochroitisch zwischen rosagelber und rosabrauner Farbe sind.

Der Apatit ist ganz ähnlich demjenigen aus dem Syenit von Tábor. Das Erz ist durch idiomorphe Pyritkörnchen vertreten.

<sup>39)</sup> Ref. N. Jhb. f. M. etc. 1886. I. pag. 67.

Mehreremals wurde gefunden, daß die Pyroxenindividuen gegenüber den Biotitblättchen idiomorph begrenzt waren, obschon sie in anderen Fällen die letzteren einschließen. Diese Erscheinung kann man begreifen, wenn man annimmt, daß der Pyroxen noch am Ende der Kristallisation des älteren Biotites zu kristallisieren begann.

Der Druck, welcher während der Kristallisation sowie nach derselben gewirkt hatte, ließ manche Spuren im Gesteine zurück: mehr oder minder ausgeprägte parallele Textur, Deformationen der Bestandteile (undulöse Auslöschung, gebogene Plagioklaskörner, sekundäre Zwillingslamellen der Plagioklase) und die Katakklase.

\* \* \*

Während den Südabhang des Berges *Bukovec* (cô 657 SW. von *Borotín*) der porphyrtartige, mittelkörnige Granit bildet (Bestandteile: Biotit; Orthoklas, saurer Plagioklas, Quarz, Apatit, Granat), trifft man am Gipfel desselben Berges den Granodiorit an, der ganz analog demjenigen vom Fuße des *Dehetník* ist. In demselben wurde ein Feldspatkorn gefunden (Taf. Fig. 6), welches sehr deutlich die bruchlose, plastische Deformation zeigt. Seine Lamellen sind zweimal gebogen, ihre Auslöschung ist kontinuierlich undulös. Es scheint, daß die Deformation durch die Gruppe der Quarzkörner verursacht wurde, welche wir am unteren Rande des Feldspatkornes sehen. Aus den früher erwähnten Gründen können wir dafürhalten, daß diese Deformation des Feldspatkornes bei hoher Temperatur stattgefunden hat.

### Über die chemische Natur des Syenites von Tábor und des Granodiorites von Dehetník.

Die Analysen beider Gesteine hat gefällig H. Professor der böhmischen technischen Hochschule J o s. H a n u š durchgeführt.

#### a) Syenit von Tábor.

Es bedeutet:

- I. Analyse des Gesteines.
- II. Dieselbe nach Abzug von  $H_2O$  und  $P_2O_5$ , auf 100% umgerechnet.
- III. Molekularvolumen.
- IV. Dieselbe, auf 100 umgerechnet.
- V. Metallische Elemente.
- VI. Dieselbe, auf 100 umgerechnet.



	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
$TiO_2$	58.87%	59.29%	0.9882	63.31	<i>Si</i>	98.82	53.98%
$SiO_2$	0.83	0.84	0.0105	0.67	<i>Ti</i>	1.05	0.57
$Al_2O_3$	14.81	14.92	0.1463	9.37	<i>Al</i>	29.26	15.99
$Fe_2O_3$	0.00	0.00	—	—	<i>Fe</i>	6.54	3.57
$FeO$	4.68	4.71	0.0654	4.19	<i>Mn</i>	0.30	0.17
$MnO$	0.21	0.21	0.0030	0.19	<i>Ca</i>	7.86	4.29
$CaO$	4.37	4.40	0.0786	5.04	<i>Mg</i>	14.57	7.96
$MgO$	5.79	5.83	0.1457	9.33	<i>K</i>	13.46	7.35
$K_2O$	6.29	6.33	0.0673	4.31	<i>Na</i>	11.20	6.12
$Na_2O$	3.45	3.47	0.0560	3.59			
						183.06	100.00%
$H_2O$ } hydr.	0.25	—	—	—			
$H_2O$ } chem.	0.62	—	—	—			
$P_2O_5$	0.15	—	—	—			
	100.32%	100.00%	1.5610	100.00%			

In der Diskussion wurde  $TiO_2$  zu  $SiO_2$  ( $Ti$  zu  $Si$ ) und  $MnO$  zu  $FeO$  zugerechnet.

Aus den angeführten Zahlen folgen:

Rosenbusch's Kerne:

I. ( $Na K$ ) $Al Si_2$	.....	53.88%
II. $Ca Al_2 Si_4$	.....	8.82
III. $R'' Si$	.....	29.46
V. $Si$	.....	7.84
		<u>100.00%</u>

$$\text{Zahl} = 156, \quad M-A\text{-Zahl} = 183.06.$$

Loevinson-Lessings Gesteinsformel lautet:

$$2.8 \overline{RO} . R_2O_3 . 6.6 SiO_2$$

$$\alpha = 2.28, \quad \beta = 57.1$$

$$R_2O : RO = 1 : 2.4$$

Osanns Werte sind:

$$A = 7.90, \quad C = 1.47, \quad F = 17.28$$

$$s_{64.0} a_{5.9} c_{1.1} f_{13.0} n_{4.5} ; x_{0.95}$$

$$S AIF^{40)} = 20.84 : 3.05 : 6.11$$

$$AlC Alk = 12.60 : 6.78 : 10.62$$

$$NK = 4.54, \quad MC = 6.49$$

<sup>40)</sup> A. Osann, Petrochemische Untersuchungen. Heidelberg 1913. 6.

Auf Grund aller dieser Berechnungen können wir (vom chemischen Standpunkte aus) die Erfolge der mikroskopischen Forschung bestätigen. Es handelt sich um ein quarzarmes, jedoch orthoklasreiches, ziemlich melanokrates Gestein, welches dem Glimmersyenit von Frchnau in Schwarzwald recht nahe kommt.<sup>41)</sup>

Aus dieser Diskussion ergibt sich auch von sich selbst der richtige Name für das Gestein; es ist „Syenit“. Š a f r á n e k s Bezeichnung „Kersanton“, also Lamprophyr, erweckt vom geologischen Standpunkte aus Bedenken, indem wir uns unter diesem Namen ein Ganggestein vorstellen, welches sich scharf von dem Nebengesteine abhebt. Übrigens, wie O s a n n s Tabelle III. belehrt<sup>42)</sup>, besitzen die Kersantite fast allgemein niedrigere Zahlen für *S* und *Alk*, und höhere, für *C*, *F* und *NK* als der Syenit von Tábor. Die Namen „Granit“ und „Diorit“ der älteren Autoren sind evident unrichtig; für Granit hat unser Gestein zu wenig *Si*, für Diorit einen zu niedrigen Wert  $Ca Al_2 Si_4$ ; auch O s a n n s Wert *a* ist gewöhnlich bei den Dioriten niedriger als im Syenit von Tábor, umgekehrt *n* und *c* höher.<sup>43)</sup>

Man kann nicht einige Beziehungen unseres Syenites zu den Lamprophyren leugnen. Es ist die Andeutung einer porphyrischen Struktur, die sich durch zwei Biotitgenerationen verrät,<sup>44)</sup> nebst dem auch die nahen Werte *SALF* und *AlC Alk* des Táborer Syenites und der Minette von Wehrtal im Schwarzwalde.

b) Granodiorit von Dchetník.

Die Bedeutung der Ziffern ist dieselbe, wie bei der Syenitanalyse.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$SiO_2$	63.47%	63.90%	1.0650	69.21%	<i>Si</i> 106.50	59.19%
$TiO_2$	0.63	0.63	0.0079	0.51	<i>Ti</i> 0.79	0.44
$Al_2O_3$	15.67	15.78	0.1547	10.05	<i>Al</i> 30.94	17.19
$Fe_2O_3$	0.00	0.00	—	—	<i>Fe</i> 5.69	3.17
$FeO$	4.07	4.10	0.0569	3.70		
$MnO$	0.54	0.54	0.0076	0.49	<i>Ca</i> 6.55	3.64
$CaO$	3.65	3.67	0.0655	4.26	<i>Mg</i> 7.55	4.20
$MgO$	3.00	3.02	0.0755	4.91	<i>K</i> 11.30	6.28
$K_2O$	5.27	5.31	0.0565	3.67	<i>Na</i> 9.84	5.47
$Na_2O$	3.03	3.05	0.0492	3.20	179.92 100.00	
$H_2O$	} hydr.	0.06	—	—		
		} chem.	0.63	—	—	
$P_2O_5$	0.09		—	—		
		99.33%	100.00%	1.5388	100.00%	

<sup>41)</sup> Siehe H. Rosenbusch, Elemente der Gesteinslehre 1901, pag. 190, 191; A. Osann, l. c. pag. 121, Nr. 142.

<sup>42)</sup> l. c. pag. 158, 159.

<sup>43)</sup> Tsch. M. p. M. XXII. 1903. pag. 412.

<sup>44)</sup> Eine Tendenz, skelettartige Kristalle zu bilden, zeigt auch der Biotit der Minette von Žampach (V. Rosický, l. c. pag. 7).

Daraus folgen:

Rosenbusch's Kerne:

I. (Na K) Al Si <sub>2</sub> .....	47.00%
II. Ca Al <sub>2</sub> Si <sub>4</sub> .....	19.04
III. R'' Si .....	17.42
V. Si .....	16.54

$$\text{Zahl} = 153.88, M - A - \text{Zahl} = 179.92.$$

Loevinson-Lessings Gesteinsformel lautet:



$$\alpha = 2.78, \beta = 43.66, R_2 O : RO = 1 : 1.9.$$

O s a n n s Werte sind:

$$A = 6.87, C = 3.18, F = 10.18$$

$$s_{69.2} a_{6.8} c_{3.1} f_{10.1} n_{4.7} ; \alpha = 1.20$$

$$S A l F = 22.46 : 3.24 : 4.30$$

$$A l C A l k = 14.24 : 6.03 : 9.73$$

$$N K = 4.66, M C = 5.35$$

Alle diese Zahlen beweisen, daß das Gestein vom Berge Dehetník an der Grenze zwischen Granit und Diorit steht. Den Granit erwähnt der recht hohe Wert des 1. Kernes Rosenbusch's resp.  $a$  der Gesteinsformel Osann's. Dem gegenüber sind die Kerne Nr. 2 und 3 bei dem Dehetníker Gesteine höher, als es bei den Graniten der Fall ist.

Die nach Osann berechnete Gesteinsformel zeigt recht starke Analogien mit dem Granodiorit von Butte, für welchen gilt:

$$s_{69.9} a_5 c_{3.5} f_{11.5} n_{7.1} m_{7.8} ;$$

die Werte  $S A l F$ ,  $A l C A l k$  und  $M C$  unseres Gesteines kommen recht nahe dem Quarzglimmerdiorit von Hurricaneridge,<sup>45)</sup> bei dem wir finden:

$$S A l F = 22.5 : 3.5 : 4 ; A l C A l k = 14 : 6 : 10 ; N K = 6.2, M C = 5.2.$$

Das Gestein von Hurricaneridge ist also etwas reicher an albitisches Molekül als der Granodiorit von Dehetník; derselbe verrät also durch den hohen Kaliurgehalt deutlich seine granitische Natur.

Beide Gesteine, den Syenit von Tábor sowie den Granodiorit von Dehetník müssen wir als Teilmagmen des mittelböhmischen Granitmassives betrachten. Beide sind reich an das alkalische Kern (der Syenit reicher als der Granodiorit), sonst aber stellt der Syenit ein femisches, an Metasilikate

<sup>45)</sup> A. Osann, l. c. pag. 124. Nr. 211.



reiches, jedoch quarzarmes Spaltungsprodukt vor bei welchem auch das Anorthitmolekül in den Hintergrund tritt; dem gegenüber finden wir bei dem Granodiorit alle drei Kerne (II., III., V.) fast im Gleichgewichte:

I. $Na K Al Si_2$ . . . . .	53·88 (Syenit) . . . . .	47·00 (Granodiorit)
II. $Ca Al_2 Si_4$ . . . . .	8·82 . . . . .	19·04
III. $R' Si$ . . . . .	29·46 . . . . .	17·42
V. $Si$ . . . . .	7·84 . . . . .	16·54

Die dunkleren Schlieren im Syenite von Tábor sowie im Granodiorite von Dehetník einerseits und die aplitisch-pegmatitischen Ganggesteine andererseits beweisen, daß die Differentiation des granitischen Magmas noch weiter gegangen ist; sie häuft in den ersteren Spaltungsprodukten die basischen, in den letzteren die sauren Kerne.

### Schluß und Übersicht.

Die Resultate dieser Arbeit sind:

1. Das Gestein, welches die nächste Umgebung von Tábor in Böhmen aufbaut, ist ein Biotit-Pyroxensyenit. Die älteren Namen: Granit, Kerantit, Diorit sind unrichtig; ebenfalls die in der Literatur angegebenen Grenzen gegenüber den benachbarten Gesteinen sind nicht an allen Stellen richtig bestimmt und bedürfen einer Korrektur.

2. Die Hauptgemengteile sind: Biotit, Pyroxen (Diallag und Hypersthen), Orthoklas; minder häufig ist Plagioklas. Nebengemengteile sind: Quarz, Apatit, Rutil, Magnetit, Ilmenit, Pyrit. Sekundär ist Titanit und Amphibol (außerdem die gewöhnlichen Zersetzungsprodukte). Die Korngröße und das Mengeverhältnis der Gemengteile variieren stark. Die Struktur ist holokristallin hypidiomorph.

3. Der Biotit ist in zwei Generationen anwesend. Die ältere (große Blättchen) zeigt deutliche Spuren einer Resorption und des späteren skelettartigen Wachstums. Die jüngere hat die Blättchen in fächerförmige Aggregate geordnet. Der jüngere Biotit wächst auf Kosten des Pyroxens. Der Plagioklas ist größtenteils ein Andesin; er bildet mit dem Quarze myrmekitische Verwachsungen. Der Orthoklas enthält zahlreiche winzige, kristallonomisch orientierte Albiteinschlüsse (Mikroperthit). Der Quarz bildet den jüngsten Bestandteil, man trifft jedoch auch einzelne Körner an, die älter als Orthoklas, Plagioklas, ja auch als Biotit sind. Die Literatur lehrt, daß diese Erscheinung nicht selten im mittelböhmischen Granitmassive vorkommt. Interessant ist ein (fremdes?) Pleonastkorn mit kelyphitischem Kranze. Die im Biotit eingeschlossenen Apatite sind von pleochroitischen Höfen umgeben.

4. Die Kristallisationsfolge ist: Erze, Apatit, Rutilnadeln; Pyroxen. Biotit. Dann kam eine Periode, in welcher beide diese Bestandteile gelöst

und resorbiert wurden; nach dieser bildete sich die zweite (fächerförmige) Generation des Biotites. Jünger ist der Plagioklas, dann kristallisierte der Orthoklas, zuletzt der Quarz.

5. Verschiedene Merkmale beweisen die Existenz eines gewaltigen Druckes, welcher während der Kristallisation sowie nach derselben gewirkt hat: mehr oder minder deutliche Paralleltextur, anormale Ausscheidungsfolge des Quarzes, Biegung und Zertrümmerung verschiedener Gemengteile, Entstehung zahlreicher kleiner Kriställchen von Pyroxen, Biotit, Plagioklas. Sehr starke Kataklase wurde in der Nähe der Aplitgänge beobachtet.

6. Sehr verbreitet ist die Uralitisierung des Pyroxens; der entstehende Amphibol ist ein Aktinolith. Die mikroskopische Untersuchung macht es wahrscheinlich, daß die Ursache der Uralitisierung die postvulkanischen Prozesse sind, bei denen aber teilweise auch das Magma mitgewirkt hat.

7. Im Syenite finden wir mehrere Einschlüsse; es sind teils die basischeren Spaltungsprodukte, teils aber auch assimilierte Bruchstücke der durchgebrochenen Sedimente. In den letzteren sind merkwürdig deutliche pleochroitische Höfe um Titanitkörnchen im Amphibole.

Die Syenite aus anderen Lokalitäten der Umgebung von Tábor sind dem Hauptgesteine ganz ähnlich; sie unterscheiden sich durch die Proportionen der Bestandteile (das Gestein von *Dobrá Voda* ist biotitarm, dasjenige aus dem Tale des *Vlásenicer* Baches quarzreicher, das von *Drahmětic* fast hypersthenfrei u. s. w.).

9. Das Gestein von *Radkov* ist ein Verbindungsglied zwischen dem Syenite von *Tábor* und dem Granodiorite von *Dehetník*; dem letzteren ist es auch makroskopisch ähnlicher. In demselben finden wir keine fächerförmigen Biotitaggregate, Hypersthen ist spärlich. Durch die Uralitisierung bildete sich der gewöhnliche, sesquioxydhaltige Amphibol. Das Gestein von *Radkov* ist plagioklas- sowie quarzreicher als der Syenit von *Tábor*. Die Albiteinschlüsse im Orthoklas und die Rutilnadeln sind spärlicher als im Syenite. Der älteste Bestandteil ist der Biotit.

10. Der Granodiorit von *Dehetník* (sw. von *Borotín*) besteht aus Biotti, Diopsid, Amphibol, Plagioklas, Orthoklas, Quarz. Nebengemengteile sind: Apatit, Erz; sekundär entsteht der Chlorit und Titanit. Basische Schlieren besitzen mehrere farbige Gemengteile als das herrschende Gestein. Der Biotit zeigt keine Spuren von Resorption und vom skelettartigen Wachstum an den Rändern; auch die fächerförmigen Aggregate des jüngeren Biotites fehlen vollkommen. Der durch die Uralitisierung des Pyroxens entstehende Amphibol gehört zu den sesquioxydhaltigen. Der Plagioklas ist Oligoklas und Andesin; seine Körner zeigen manche Störungen in der Lamellierung. Besonders interessant ist aber die Abhängigkeit der Lamellen von den Klüften (und dadurch auch vom dieselben erzeugenden Drucke). Der Orthoklas enthält etwas von Albiteinschlüssen, die Rutilnadelchen aber fehlen vollkommen. Die Kristallisationsfolge ist ganz



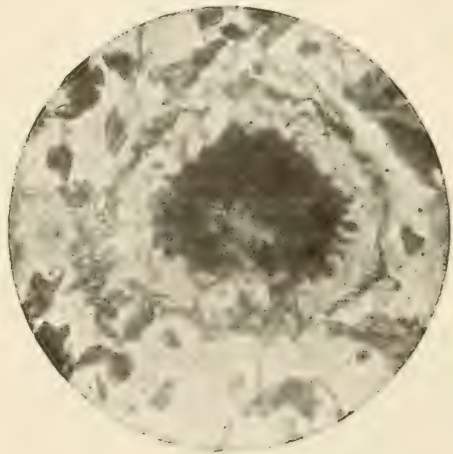
1



2



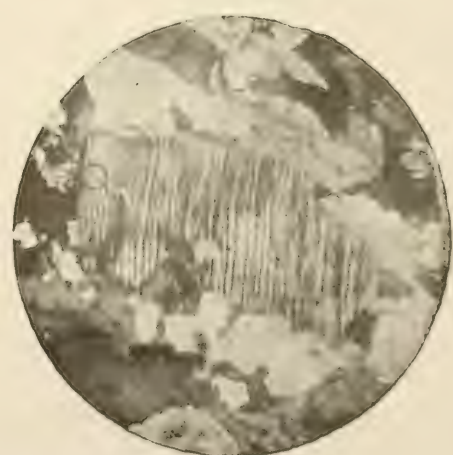
3



4



5



6

(Phot. Rosický.)





ähnlich, wie im Gesteine von *Radkov*. Der Granodiorit wurde auch am Gipfel des Berges Bukovec (cô 657) vorgefunden.

11. Die Analysen des Syenits von *Tábor* und des Granodiorites von *Dehetník* beweisen die Zugehörigkeit dieser Gesteine zu den granodioritischen Magmen. Man muß sie als basischere Spaltungsprodukte des mittelböhmischen Granitmassives betrachten, die zu den zahlreichen jüngeren Apliten und Pegmatiten komplementär sind. Charakteristisches, sehr vielen Gesteinen des mittelböhmischen Massives gemeinsames Merkmal ist der uralitisierte Pyroxen, wie wir ihn in den Gesteinen der Umgebung von *Tábor* sahen; wir treffen ihn oft auch in manchen Amphibolgraniten des erwähnten Massives an.

*Mineralogisch-petrographisches Institut  
der böhmischen Universität in Prag.*

## TAFELERKLÄRUNG.

Fig. 1. Ein schiefgeschnittenes Biotitblättchen aus dem Syenite von *Tábor*; die durch Resorption entstandenen Löcher wurden durch nachträgliches Wachstum wieder teilweise ausgeheilt. Vergr. 39×.

Fig. 2. Ein Querschnitt durch das skelettartig gewachsene Biotitblättchen desselben Syenites. Vergr. 45×.

Fig. 3. Fächerförmiges Aggregat des jüngeren Biotites (Syenit von *Tábor*). Vergr. 47×.

Fig. 4. Spinellkorn mit einem Kelyphitkranze (Syenit von *Tábor*). Vergr. 44×.

Fig. 5. Ein Hypersthenkristall, auf dessen Kosten ein Biotitaggregat wächst (Syenit vom Tale des *Vlásenicer* Baches). Vergr. 91×.

Fig. 6. Plastische Deformation eines Plagioklaskornes (Granodiorit vom *Dehetník*). Zwischen × Nik. Vergr. 17×.

# Ein Beitrag zur Morphologie und Systematik des Geschlechtsapparates der Gattung *Leucochroa* Beck.

Von ZDENKO FRANKENBERGER, Prag.

Mit zwei Tafeln.

(Vorgelegt am 23. Februar 1917.)

Anatomische Verhältnisse der Vertreter der Gattung *Leucochroa* Beck sind schon mehrererorts Gegenstand des Studiums verschiedener Autoren gewesen, hauptsächlich freilich zwecks Feststellung der systematischen Verwandtschaft dieser Formen; aber je nach dem, worauf der betreffende Autor bei seinen Forschungen Gewicht gelegt hat, ist auch die systematische Einreihung der ganzen Gattung sehr verschieden ausgefallen, die noch immer ziemlich zweifelhaft erscheint. Vor einiger Zeit sind mir durch die Freundlichkeit meines lieben Freundes, † Ph. Dr. Heinrich Veselý, einige Stücke von *Leucochroa candidissima* Drap. von Nervi in Norditalien in die Hände gelangt, bei deren anatomischem Studium ich einige interessante Einzelheiten gefunden habe, die einerseits von morphologischer Seite, einerseits auch in systematischer Hinsicht mir ziemlich wichtig erscheinen, so daß ich die folgende Mitteilung nicht für überflüssig halte.

Es sind mir drei Beschreibungen und Abbildungen von Genitalien dieser Art bekannt, und zwar von Moquin-Tandon (15), A. Schmidt (18) und H. A. Pilsbry (17), aber alle drei sind, wie ich mich überzeugt habe, ungenügend und mehr oder weniger unvollkommen, weshalb ich zuerst eine makroskopische Beschreibung nach meinen Erfahrungen anführe (Taf. I., Fig. 1.). Hernaphroditische Drüse — bis auf die bedeutende Größe — und die Ausführorgane bis zur vollständigen Trennung (also hernaphroditischer Gang, Eiweißdrüse und Ductus ovoseminalis) weisen keine Besonderheiten auf. Vas deferens ist lang, dünn, und mündet plötzlich in einen langen, ziemlich starken Epiphallus, der am proximalen Ende mit einem nicht allzu langen Flagellum versehen ist. Auf dem distalen Ende bildet der Epiphallus eine Schlinge und übergeht unmerklich in den kurzen Penis; die Grenze wird eigentlich nur durch die Insertion des



Musculus retractor gebildet. Penis ist mit einem kleinen Anhang von beiläufig herzförmiger Gestalt versehen und mündet in das gemeinsame Atrium genitale, welches schlank und ziemlich lang ist. Der freie Ovidukt (oder „Vagina“) ist lang und schlank; kurz vor dem Eintritt in das Atrium genitale mündet in denselben der sehr lange, dünne, etwa in der Hälfte seiner Länge mit einem kurzen Diverticulum versehene Stiel des Receptaculum seminis, dessen Ampel klein; kugelförmig ist. Nahe unterhalb der Mündung des Receptaculum sitz auf derselben Seite dem freien Ovidukte ein kleines, kaum 1 mm langes Organ an von walzförmiger oder keulenförmiger Gestalt, auf dessen obere Seite sich mittels eines dünnen, etwa 2 mm langen Ausführungsganges ein sonderbares drüsiges, ei- oder nierenförmiges Organ anheftet.

Bei den angeführten Autoren finden wir gerade hinsichtlich einiger dieser kleinen Anhangsorgane geradezu unbegreifliche Mängel. So fehlt jener Anhang am Penis in den Abbildungen von Moquin-Tandon<sup>1)</sup> und Pilsbry, während A. Schmidt ihn ganz richtig gezeichnet hat (l. c. Taf. VIII., Fig. 56) und auch im Texte seiner Erwähnung tut („auch befindet sich hier nicht weit von der Einmündung in den gemeinschaftlichen Geschlechtsgang ein kleines bei *H. baetica* und *H. cariosa* fehlendes Knötchen,“ l. c. pag. 34). Aber das erwähnte walzenförmige Organ am freien Ovidukt fehlt bei allen drei genannten Autoren, alle zeichnen die Verhältnisse so, als wenn jene ei- oder nierenförmige Drüse mit ihrem dünnen, kurzen Ausführungsgange direkt in den Ovidukt einmünde, was mir besonders bei Moquin-Tandon auffällig ist, weil dieser Autor das untere Ende des Oviduktes mit dieser Drüse noch bei größter Vergrößerung abbildet (l. c. Taf. VIII., Fig. 7); und daß Pilsbry dieses Gebilde überschen hat, ist mir gerade unbegreiflich, ebenso wie das Unterlassen des Penisanhanges.

Es handelt sich nun zuerst darum, zu entscheiden: welche ist die morphologische Bedeutung einzelner dieser Organe, und dann um die Würdigung ihrer Bedeutung für die systematische Einreihung der Gattung *Leucochroa*. Was den herzförmigen Anhang am Penis anbelangt, so fällt natürlich der Gedanke ein, denselben für ein Homologon jenes auch von anderen Gruppen schon bekannten Anhangsbildes zu halten, für welches der Name *Appendix* in Verwendung ist. Dieses Organ ist schon von einer ganzen Reihe von *Stylommatophoren* beschrieben worden; allzu große Wichtigkeit für die Systematik ist ihm wohl nicht anzuerkennen, denn es ist namentlich bei einander ganz nahen Gruppen (selbst Arten) teils entwickelt, teils fehlend. In der Mehrzahl der Fälle ist es zwar als ein länglicher,

<sup>1)</sup> Freilich bemerkt dieser Autor in der Tafelerklärung (Taf. VIII., Fig. 6) von der nahe am Penisende befindlichen, mit *e* bezeichneten Stelle: „e, petite dilatation inférieure de ce fourreau. Il y a ordinairement, dans cet endroit, deux renflements irréguliers obovés placés l'un au-dessus de l'autre“, was freilich eine nicht genug genaue Beschreibung des erwähnten Anhangs ist.

walzförmiger Anhang beschrieben, was aber der Homologisation mit unserem kleinen Anhang bei *Leucochroa* gar nicht im Wege steht. Um seine wahre morphologische Beschaffenheit zu erkennen, habe ich Serienschritte hergestellt, aus deren Studium folgendes sich ergibt (Taf. I., Fig. 2): Penis selbst hat eine muskulöse Wand, die von Muskelfasern von vorwiegend zirkulärem Verlaufe zusammengesetzt ist. Das Innere ist mit einem einschichtigen zylindrischen Epithel mit ovalen, mehr weniger in der Mitte der Zellhöhe gelegenen Kernen ausgekleidet; Protoplasma ist hauptsächlich auf den Rändern granuliert, in engster Umgebung des Kernes heller und mehr homogen (Taf. I., Fig. 3). Vor der Abtrittsstelle der Appendix wird das Lumen des Penis, das sich bis jetzt ganz in der Mitte befand und in drei Falten zusammengelegt war, näher an die Appendix disloziert und nimmt einen mehr spaltenförmigen Durchschnitt an. Die Muskulatur des Penis hängt direkt mit jener der Appendix zusammen, und zwar so, daß zuerst die äußeren Schichten direkt ineinander übergehen, während um das Penislumen eine selbständige zirkuläre Schicht erhalten bleibt. Erst wenn das Lumen der Appendix mit jenem des Penis sich verbunden hat, übergelien auch die innersten Muskelschichten direkt ineinander über. Das Epithel an der inneren Wand der Appendix ist ganz von demselben Charakter wie im Penis; das Lumen der Appendix ist durch einige Falten und Einbiegungen kompliziert. Im ganzen erscheint die Appendix als eine blosse seitliche Erweiterung des Penis, deren Wände und Epithel von demselben morphologischen Charakter sind wie beim Penis selbst; es handelt sich also wohl nicht um ein selbständiges Organ, sondern nur um eine sekundäre Ausstülpung des ursprünglich einheitlichen Lumen.

Bchufs Vergleichung mit einer anderen systematischen Gruppe, bei welcher solcher Anhang für eine wahre Appendix gehalten wird, habe ich die Genitalien von *Clausilia (Herilla) dacica* (Friw.) Pfr. herauspräpariert, wo eine typische walzenförmige Appendix entwickelt ist, und habe ich auch von denselben Serienschritte gen acht (Taf. I., Fig. 4). Ihr Studium hat einen mit *Leucochroa* vollkommen gleichen Erfolg geliefert. Die Muskelwand ist hier bedeutend dünner, die Muskelfasern sind nicht so dicht zusammengelegt wie bei der vorigen, Epithel (Taf. I., Fig. 5) ist kubisch, Protoplasma im inneren (in das Lumen g wendeten) Bezirke in ziemlich starker Schicht zwischen einzelnen Kernen und an der Zellenbasis in dünner Schicht granuliert; um die Kerne, die von kugelförmiger Form sind, ist je eine große Vakuole entwickelt, so daß der Kern eigentlich in derselben gelagert erscheint. Hier und da wird das Protoplasma durch diese Vakuolen fast vollkommen verdrückt und zwischen zwei Vakuolen bleibt dann nur eine ganz dünne Protoplasrawand übrig. Auch hier geht die Muskulatur der Peniswand ganz allmählich in jene der Appendix über, und auch beide Tumina kommunizieren; auch hier ist das Penislumen in der Gegend ear Appendix abgeflächt, und das Lumen der Appendix in zahlreiche Faltungen von vielerlei (bis drei) Ordnungen zusammengelegt, also noch

komplizierter als bei *Leucochroa*. Ihr Epithel ist wiederum vollkommen mit jenem des Penis übereinstimmend; auch hier sind kubische Zellen mit in großen hellen Vakuolen gelagerten Kernen, so daß man auch hier die Appendix bloß für eine sekundäre Ausstülpung des Penis halten kann, nicht für ein morphologisch selbständiges Organ; deshalb kann man sowohl bei *Leucochroa* als bei *Clausilia dacica* mit demselben Rechte von der Anwesenheit einer Appendix sprechen, und beide diese Organe sind morphologisch für ganz gleichwertig zu halten.

Schwieriger ist die morphologische Beurteilung des oben beschriebenen akzessorischen Organs am freien Ovidukt. Es scheint freilich auch hier auf den ersten Blick ersichtlich, daß es sich wahrscheinlich um einen rudimentären Pfeilsack handelt, denn die Form dieses Anhangs entspricht vollkommen der, wie wir sie bei den Pfeilsäcken einiger niederer *Heliciden*, vorwiegend *Helicellen* und *Fruticicolen*, kennen. Von einem Pfeile ist in diesem Gebilde natürlich keine Spur mehr, aber in den bekannten rudimentären Pfeilsäcken einiger *Helicellen* kommt es auch nicht mehr zur Pfeilbildung, so daß dieser Umstand nicht so schwerwiegend wäre. Am wichtigsten für die Entscheidung dieser Frage erschien mir eine gründliche Untersuchung des Baues dieses winzigen Organs und seines Verhältnisses zum freien Ovidukt.

Auf Serienschnitten, die quer durch das gemeinsame Atrium und den Ovidukt geführt sind, sehen wir zuerst — in den distalsten, noch dem Atrium angehörigen Partien — ein vielfach gefältetes Lumen, in welches von jener Seite, wo wir höher eben jenen Anhang mit der eiförmigen Drüse — und höher auch das Receptaculum seminis — sehen, ein kegelförmiger Zapfen hineinragt, der mit eigenem, in niederen Partien mit dem Ovidukt-lumen kommunizierendem Lumen versehen ist. Dieses eigentliche spaltenförmige Lumen des Zapfens obliteriert höher, dagegen erscheint aber in demselben ein neues Lumen, das sich gleich in zwei Schenkel teilt — richtiger gesagt, es handelt sich um einen einheitlichen Kanal, der in dieser Partie eine Schlinge bildet, deren ein Schenkel schräg nach außen führt — dieser wird dann das Lumen des eigentlichen „Pfeilsacks“<sup>1)</sup> — der andere in der Mitte des erwähnten Zapfens, dessen oberes Ende ebenfalls frei und kegelförmig verjüngt ist, hinaufführt, sich dann dem dem „Pfeilsack“ zugekehrten Rande nähert und in das Lumen des eigentlichen Ovidukts einmündet. Der Zapfen, der an der dem „Pfeilsacke“ zugekehrten Seite im kleinen Umfang mit der Wand des Oviduktes zusammenhängt, erscheint also als ein Doppelkegel, dessen eine Spitze hinunter gegen das Atrium gerichtet ist — hier ist er mit einer blinden Einstülpung des Atriums versehen — die andere hinauf in den Ovidukt; dieses Ende nimmt in sich das schlingenförmig gebogene Lumen des „Pfeilsacks“ auf.

<sup>1)</sup> Ich benütze bisweilen, solange wir die wahre Beschaffenheit und Bedeutung dieses Anhangs nicht geklärt haben, die Bezeichnung „Pfeilsack“ in Gänsefüßchen.



Dieses Lumen verläuft dann schräg auf die Außenseite mit einer eigenen zirkulären Muskelfaserschicht versehen, durchbohrt die Ovidukt wand und wird zum selbständigen Anhang. Der innere im oberen Teile des Doppelkegels verlaufende Schenkel hat eine Länge von  $0.7\text{ mm}$  (nach  $10\ \mu$  dicken Schnitten gemessen); der äußere Schenkel bis zur Einmündung der eiförmigen Drüse (s. u.)  $0.98\text{ mm}$ . Das Lumen dieses äußeren Schenkels hat im Querschnitt eine etwa nierenförmige Form mit der Konvexität nach außen, Konkavität nach innen zum Ovidukt; das Epithel ist in ganzem Umfange zylindrisch, einschichtig, nicht allzu hoch, dessen Kerne auf der äußeren (konvexen) Seite klein, eiförmig, auf der inneren (konkaven) mehr länglich. An dieser konkaven Seite sind in einem longitudinalen Streifen unter dem Epithel einige Zellen von drüsiger Beschaffenheit gelagert; die Muskulatur verläuft in zirkulärer Richtung, unter den Fasern sind plasmatische Zellen mit großen ovalen Kernen zerstreut.

Wie schon gesagt, spaltet sich etwa  $1\text{ mm}$  oberhalb der unteren Umbiegung von dem äußeren Schenkel der Ausführung eines drüsigen Gebildes ab (Taf. II., Fig. 1), von dem wir noch später eingehender berichten werden. Die konkave Wand des „Pfeilsacklumens“ tritt mehr in die Höhle des letzteren hervor, erscheint dann wie gespalten und schließlich schließt sich die so gebildete Rinne in einen engen Ausführung von dreikantigem Durchschnitt (Taf. II., Fig. 2), der zuerst keine eigene Muskelwand besitzt, in den höheren Partien jedoch sich vom „Pfeilsack“ entfernt und eine selbständige Wand von zirkulär verlaufenden Muskelfasern bekommt (Taf. II., Fig. 3). Das Lumen des „Pfeilsacks“ behält anfangs auch oberhalb der Mündung dieses Ausführungsganges seine Form bei, seine Wand ist gegen den Ausführungsgang konvex, nach außen konkav (Taf. II., Fig. 2), in der Konvexität kann man noch immer spärliche Drüsenzellen feststellen. Das Epithel ist in dieser ganzen Partie und auch noch ein Stück höher ziemlich hoch, zylindrisch, einschichtig, mit runden, an der Zellenbasis gelegenen Kernen. Das Epithel des Ausführungsganges der eiförmigen Drüse ist noch etwas höher, mit mehr ovalen Kernen.

Etwa  $0.3\text{ mm}$  oberhalb der Mündung des Ausführungsganges vergrößert sich das Lumen des „Pfeilsacks“, legt sich ineinige längliche Einbuchtungen zusammen, die voneinander durch ziemlich hohe Falten getrennt sind (Taf. II., Fig. 3). An der Basis dieser Falten liegen wieder Gruppen von drüsigen und plasmatischen Zellen; das Epithel wird in dieser Partie viel höher, die Kerne sind noch immer an der Basis gelegt, jedoch hier mehr von kurz ovaler Form. Die Muskelwand ist kaum dicker, ja hie und da vielleicht selbst dünner als in der unteren Partie. Diesen Charakter behält das Epithel bis in die obersten Partien bei, wo freilich zuletzt die Falten verschwinden, das Lumen wird schmaler und endet zum Schluß blind.

Wenn wir auf weiteren Schnitten den Ausführungsgang der eiförmigen Drüse verfolgen, so sehen wir, daß auch hier das Epithel höher und das Lumen etwas breiter wird. Die Muskelwand ist ziemlich mächtig und

bleibt so auch am Anfang des Eintritts in die Drüse; sie wird aber bald dünner und bleibt zuletzt in der Mitte der Drüse nur als eine ganz einfache Schicht von zirkulären Muskelfasern erhalten. Zugleich wird der Ausführungsgang in diesen höchsten, bereits innerhalb der Drüse gelegenen Partien flacher, und schließlich übergeht sein Lumen vollkommen, aber ganz abgegrenzt, in das eigentliche Drüsenlumen.

Die Drüse selbst (Taf. II., Fig. 4) ist histologisch gewiß eines der interessantesten Gebilde bei *Stylommatophoren* überhaupt. Sie ist eine tubulöse Drüse, die am Schnitte den Eindruck einer ungeweinen Kompliziertheit macht, in der Tat handelt es sich aber um einen einzigen, vielfach geschlängelten Tubulus mit spärlichen sekundären Tubuli, deren blinde Endigungen hie und da in Schnitten zu finden sind. Das ganze Organ ist mit einer dünnen Muskelschicht umhüllt, ähnlich hat auch jede Schlinge, wie sie am Schnitte getroffen sind, eine eigene Muskelwand von einer einfachen oder doppelten Muskelfaserschicht. Zwischen den einzelnen Tubuli befinden sich ziemlich zahlreiche, größere oder kleinere Blutlakunen. Das Epithel dieser Drüse (Taf. I., Fig. 6) ist von jenem des Ausführungsganges vollkommen verschieden. Es ist aus sehr hohen, zylindrischen Zellen mit reichlichem granuliertem Protoplasma zusammengesetzt. Das Protoplasma hat meistens gegen das Lumen einen scharfen Saum, jedoch ist der Rand an vielen Stellen, wo wahrscheinlich die Zelle sich in Tätigkeit befindet, undeutlich, gekerbt und oberhalb des Niveau der übrigen Zellen hervorragend. Die Kerne sind groß, kugel- oder eiförmig, meistens von einer mehr homogenen Protoplasmaschicht umgeben, oder direkt in einer Vakuole liegend. In sehr zahlreichen Zellen finden wir außer dem Kerne ein oder zwei (selten auch mehrere) kugelförmige Körperchen, kleiner als der Kern, mit Hämatoxylin weniger intensiv als der Kern gefärbt. Ob es Sekretkörner — resp. Prosekretkörner, denn die im Innern der Tubuli befindlichen Sekretmassen sind sauer, mit Eosin gefärbt, so daß es sich nicht um Körper von derselben chemischen Beschaffenheit handeln kann — sind, kann ich wegen der ungenügenden Konservierung meines Materials (mit Formol) nicht entscheiden, auch hat es übrigens für unsere Zwecke keine Bedeutung.

Dadurch hätten wir eine eingehende Beschreibung der Ausführwege der Genitalien von *Leucochroa candidissima* fertig, und es handelt sich darum, zu entscheiden, welche Bedeutung ihnen in vergleichend-anatomischer Hinsicht zuzuteilen ist. Wenn wir die Verhältnisse bei unserer Art mit anderen *Leucochroa*-Arten — sofern uns solche von A. Schmidt's Untersuchungen bekannt sind — vergleichen, sehen wir folgendes:

Alle drei übrigen Arten, deren Anatomie A. Schmidt untersucht hatte, haben an der Stelle, wo sich bei *L. candidissima* das eben beschriebene Organ befindet, einen viel längeren Anhang, der bei *L. cariosa* Mich. an der Basis aufgetrieben, gegen das Ende verjüngt ist, bei *L. baetica* Rm. walzenförmig, bei *L. cariosa* Oliv. dünn, ziemlich lang. Bei allen diesen



drei Arten zeichnet Schmidt das Ende dieses Anhangs zugespitzt. Kurz vor diesem spitzen Ende spaltet sich von ihm auf der oberen Seite ein neues Organ ab, welches bei *L. cariosa* eine länglich eiförmige, mit dem schmaleren Ende nach oben gewendete Form hat und mittels eines dünnen Ausführganges mit dem ersteren verbunden ist, bei *L. cariosula* und *baetica* ist er von walzig-keulenförmiger Gestalt und sitzt dem ersten Anhang des Oviduktes mit ziemlich breiter Basis an. Es steht also, wie schon Schmidt selbst bemerkt, in dieser Hinsicht *L. cariosa* der *candidissima* näher, während die anderen zwei Arten wieder einander sehr ähnlich sind; dagegen ist konchologisch *L. baetica* der *candidissima* sehr ähnlich. Über die morphologische Bedeutung dieser Organe äußert sich Schmidt natürlich nicht viel, jedoch dachte er schon an eine Homologisation dieser Organe mit einem ähnlichen Anhang bei *Theba*, dem später der Name Appendicula gegeben wurde. Von dieser sagt er aber ausdrücklich, daß sie nicht für einen Pfeilsack gehalten werden kann („Derselbe kann füglich nicht für einen Ersatz des Pfeilsacks genommen werden,“ l. c. pag. 33), teils weil sie bei einigen Arten (*cantiana*) bis dem Atrium ansitzt, teils wegen der länglichen Form und des langen dünnen Anhangs am Ende. Pilsbry sagt dagegen ausdrücklich, daß der erwähnte blinde Anhang (nach unserer Beschreibung also das zugespitzte Ende hinter der Mündung der Drüse) vielleicht ein rudimentärer Pfeilsack ist („Probably the spur mentioned is a remnant of the dart sack,“ l. c. pag. 10), freilich ohne die Verhältnisse bei *L. candidissima* — wie schon oben erwähnt — richtig zu kennen; die angeführten Worte bezieht er nur auf die übrigen drei von Schmidt untersuchten Arten.

Es ist also ersichtlich, daß die Frage der Homologisation dieses akzesessorischen Organs bei der Gattung *Leucochroa* in zwei Teile zerfällt: 1. ob man dieses Organ für ein Homologon der sog. Appendicula verschiedener anderer Heliciden halten kann, 2. welche ist die morphologische Bedeutung dieser Appendicula, bzw. direkt, ob man dieselbe für einen Pfeilsack halten kann. Wir werden noch gegen Ende dieser Abhandlung sehen, daß die Entscheidung dieser Fragen von ungemeiner Wichtigkeit für die ganze Systematik der Heliciden ist, die gerade jetzt eine möglichst kritische Bearbeitung braucht. Die in neuerer Zeit mit großem Eifer geführte anatomische Erforschung verschiedener Vertreter von *Stylommatophoren* und vorwiegend Heliciden hat gewiß unsere Kenntnisse von den natürlichen Verwandtschaften einzelner Gruppen nicht unbedeutend bereichert, jedoch läuft sie jetzt schon die Gefahr in denselben Irrtum zu verfallen, welchem sie Stirn bieten wollte und den sie der älteren konchyliologischen Richtung vorwirft: die Überschätzung verschiedener geringer, sekundärer Merkmale und Erheben derselben zu Unterschieden von Gattungen und selbst höheren systematischen Einheiten. Es ist deshalb nötig, das bereits vorhandene anatomische Material wieder einer wirklich wissenschaftlich kritischen Kontrolle zu unterwerfen und dasselbe vom vergleichend-anatomischen



Gesichtspunkte zu beurteilen, und dann erst die so erhaltenen Erfolge für die systematische Einteilung der ganzen Gruppe zu benützen.

Doch kehren wir zu unserem Thema zurück. Die sog. Appendicula (d. h. ein blinder Anhang auf dem weiblichen Teile der Genitalien von unbekannter Bedeutung) ist schon von einer ganzen Reihe von *Heliciden* bekannt, hauptsächlich freilich bei der Gruppe der *Helicellinen*; die Gattungen *Cochlicella* Risso, *Monilearia* Mas., *Theba* Risso (bis auf kleine, unten zu erwähnende Ausnahmen) sind eben durch die Anwesenheit dieses Organs charakterisiert. Seine Form ist verschieden, manchmal ist es ein Anhang von bedeutender Größe, ein anderesmal ganz gering; in einigen Fällen sind auch zwei solche Anhänge vorhanden. Fast immer tragen sie am Ende oder nahe demselben noch ein akzessorisches, entweder langes, peitschenförmiges, oder kürzeres, dickeres, oder auch gespaltenes oder verästeltes Organ. Die Hauptcharakteristik dem Pfeilsack gegenüber besteht selbstverständlich darin, daß es keinen Pfeil bildet, ferner in dem Vorhandensein des letztgenannten Anhangsgebildes, sowie darin, daß Arten bekannt sind, wo ein ähnliches (am Atrium lokalisiertes) Organ neben dem normalen Pfeilsack existiert (*Helicella pyramidata* Drap. und *elegans* Drap.); nichtsdestoweniger ist schon hier anzuführen, daß gerade bei diesen zwei Arten Schmidt die Appendicula ganz anders zeichnet als sonst wo, als einen ganz kurzen Anhang am Atrium nämlich ohne jede komplizierenden Nebenorgane. Es ist also nicht sicher, daß es sich hier um dasselbe handelt wie bei der Appendicula aller anderen, des Pfeils und seines Sackes entbehrenden Formen — geschweige denn, daß wir bis jetzt keine eingehendere anatomische Untersuchung dieses Organs besitzen. Es ist mir bis jetzt die einzige Mitteilung von Overton (16) bekannt, der die Appendicula von *Cochlicella barbara* L.<sup>1)</sup> auch an Schnitten histologisch untersuchte, weshalb ich mich bei seiner Arbeit länger aufhalten will.

Die Beschreibung dieses Organs lautet: „It is 4.5 millim. in length, with a maximum diameter of 0.5 millim. and minimum diameter of 0.2 millim., and lies coiled upon the vestibule and vagina. Near to the distal end of this organ there is a small muscle, which attaches it to the common

1) Overton nennt die von ihm untersuchte Art *Helicella barbara* L. = *Helix acuta*, er hält also beide Namen (gemeint ist selbstverständlich *acuta* Müll.) für Synonyme, wie überhaupt eine ganze Reihe von Autoren. Dagegen unterscheidet die französische Schule beide Arten als verschiedene, ähnlich auch Westerland. Caziot (6) versucht es z. B. zu beweisen, daß es sich tatsächlich um zwei verschiedene Arten handelt, und stützt sich dabei auf die (mir leider unbekannt) Studien von Coutagne. Das von uns besprochene Organ wird von Overton als einfach zugespitzt abgebildet, während ich unter dem Namen *acuta* Müll. auf den Abbildungen von Schmidt (l. c. Fig. 78), Moss und Paulden (Kopie bei Pilsbry l. c. Taf. 69, Fig. 19) und Wagner (19, Taf. 13, Fig. 71) das Ende in 2—3 kurze Ausläufer gespalten finde. Ob es sich hier um einen spezifischen anatomischen Unterschied handelt, kann man natürlich von vornherein ohne wiederholte Studien nicht entscheiden.

duct, opposite and just above the point where the vas deferens is given off.“ Und höher sagt er: „There is no true dart gland in this mollusc, but a small, glandular diverticulum, which has been very differently interpreted by various authors.“ Die histologische Beschreibung ist dann wie folgt: „In a transverse section through the proximal end (Fig. 2), the external wall is seen to be made up of a connective tissue sheath and a series of circular muscle fibres, which constitute the greater portion of the organ. Within this, at intervals, are groups of small gland cells and a lining layer of columnar epithelial cells. The lumen in this region has a somewhat stellate appearance, owing to the wall being thrown into a series of large and small longitudinal ridges. Towards the middle of the gland these ridges become less pronounced (Fig. 3); otherwise a transverse section through this region differs very little from the condition observed in Fig. 2. In a section through the distal end the gland cells appear to be absent, as also any indication of the longitudinal ridges, and the lumen contains a mass of mucus (Fig. 4).

After comparing the histological structure of this gland with that of other dart-glands, and, taking into consideration its position in relation to the other terminal ducts of the generative organs, I am inclined to regard it as a degenerate dart-gland rather than an appendix or mucous gland.“

Wenn wir diese Beschreibung und die Abbildungen von Overton damit vergleichen, was wir oben über den Bau des Anhanges am Ovidukte von *Leucochroa candidissima* gesagt haben, so sehen wir, daß es sich ganz entschieden um Organe von vollkommen derselben morphologischen Bedeutung handelt. Es ist hier derselbe Bau der Wand von zirkulären Muskelfasern, dieselbe Form des hohen zylindrischen Epithels mit basalgelegenen Kernen, ganz ähnliche Form des gefälteten Lumens, dieselben Einlagerungen von Drüsenzellen an der Basis einzelner Falten. Ein Unterschied ist nur im Faltenreichtum, der bei *Cochlicella* größer ist (auf der Fig. 2 bei Overton sind deren 11, davon kann man jedoch 4 als Hauptfalten unterscheiden — diese tragen auch an ihrer Basis die Drüsenzellen, und an deren Aufbau nimmt auch die Muskulatur teil — die übrigen sind nur vom Epithel gebildet) als bei unserer *Leucochroa*, was aber selbstverständlich ein ganz untergeordneter Umstand ist, der für die Homologisation beider Organe nicht die geringste Bedeutung hat. Wenn also der Anhang bei *Cochlicella* als *Appendicula* bezeichnet wird, so gehört dieser Name auch unserem Organe von *Leucochroa*.

Der zweite Teil unserer Frage ist nach der morphologischen Bedeutung dieser auch von anderen *Helicellinen* bekannten *Appendicula*. A. Schmidt führt sie von *Helicella pyramidata* Drap. (Taf. VII., Fig. 46) und *H. elegans* Gm. (Taf. VII., Fig. 48) an (bei diesen Arten als einen kleinen, dicken, kurzen Anhang, außerdem am Ovidukt zwei typische Pfeilsäcke und *Glandulae mucosae*); in ähnlichen Verhältnissen noch Moquin-Tandon bei *H. trochoides* Poir. (Taf. XX., Fig. 15) und



schließlich v. Ihering (11) bei *H. clata* Faure (Taf. XIX., Fig. 17), alles Arten, die zur Sektion *Trochula* Schlüt. (= *Turricula* Beck) angehören. Ferner kommt ein den Pfeil nicht bildender Anhang am Ovidukte verschiedener zu *Helicellinen* gezählten Gruppen vor, die aber *keinen Pfeilsack besitzen*; jetzt wird dieser Anhang auch bei diesen Formen als *Appendicula* bezeichnet. Hierher gehören die Gattungen *Cochlicella* Risso (es wurde mehreremal *C. acuta* Müll. untersucht, z. B. von Schmidt Taf. X., Fig. 78 als *Buliminus acutus*; Moquin-Tandon Taf. XX., Fig. 29, ferner auch Ashford, Moss und Paulden (Kopie auch bei Pilsbry) und Taylor, in neuester Zeit Wagner, l. c.); die Arten *C. conoidea* Drap. und *ventricosa* Drap. beschreibt und zeichnet Moquin-Tandon, ihre Verhältnisse scheinen bedeutend abweichend und werden wahrscheinlich noch eine Revision brauchen; am auffallendsten ist der Umstand, daß er bei der ersten einen Pfeilsack angibt und beide einige Schleimdrüsen haben, während *C. acuta* keine besitzt. Eine weitere mit diesem Organ versehene Gruppe ist nach der neuesten Arbeit von Hesse (10) *Monilearia* Mas., wo es in der Form eines walzig-spindelförmigen Körpers entwickelt ist, welcher am Ende einen langen, in drei Äste gespaltenen Anhang trägt. Schließlich gehört hierher die Gattung *Theba*, von welcher einige Arten Schmidt, Moquin-Tandon, Wagner, ferner eine ganze Reihe von Arten in einigen Publikationen (auch aus neuester Zeit) Hesse (7, 8, 9) beschreiben. In dieser Gattung halte ich für einen besonders wichtigen Umstand, daß von einer ihrer Art (*Thebavergeri* Fér.) Hesse (9) *zwei Appendiculae* angibt; leider gibt Hesse nichts Näheres über ihre Gestalt und Position an, so daß wir seine künftige eingehendere Bearbeitung und Veröffentlichung dieses Befundes abwarten müssen.

Obgleich er so wertvolle Belege über die Verbreitung dieses Organs bei den *Helicellinen* gebracht hat, so hat sich doch Schmidt zu keinen Vermutungen über seine morphologische Bedeutung entschlossen; im Gegenteil, er sagt auf S. 9 ausdrücklich: „Was für Funktionen die Glandulae mucosae haben, wozu der Blasenstiel in vielen Fällen mit einem Divertikel versehen ist, *was es mit den Anhängseln an der Vagina unterhalb der Glandulae mucosae für eine Bewandnis hat, welche oft als Stellvertreter des Pfeilsacks betrachtet werden,*<sup>1)</sup> wozu der peitschenförmige Anhang dient, der bei mehreren Bulimusarten, unterhalb des Musculus retractor sich an die Rute heftet und gleich dieser einen besonderen Arm des Musculus retractor erhalten hat, darüber wage ich keine Vermutungen auszusprechen.“

Die erste — und bis jetzt eigentlich auch die einzige ganz originelle — vergleichend-anatomische Würdigung dieser Verhältnisse hat v. Ihering (11) durchgeführt. Er hält *die Appendix am Penis und die Appen-*

<sup>1)</sup> Von mir gesperrt.



*dicula am Ovidukte, bzw. am Atrium für homologische Organe*, und spricht sich in dieser Weise mehreremal ganz entschieden aus. So sagt er S. 402: „Von besonderer Wichtigkeit ist die Beachtung des Appendix, also jenes Blindsackes am Penis, welcher distal vom Retraktor sich befindet, bald näher an der Genitalkloake, bald weiter davon. Es scheint nun, daß dieses Organ in manchen Fällen auf die Genitalkloake oder auf die Vagina übertritt. Instruktiv scheinen mir in dieser Hinsicht die bei manchen Xerophilen beobachteten Verhältnisse zu sein. So haben *Helix joppensis* Roth und *tuberculosa* Conr. einen Appendix am Penis, während bei den nahe verwandten Arten *H. pyramidata* Drp. und *H. elegans* Gm. ein ähnlicher Blindsack am Penis fehlt, aber an der Vagina angetroffen wird. Da alle diese Formen doppelte und sehr kleine Pfeilsäcke besitzen, so kann es sich in diesem unpaaren sehr langen zuweilen in zwei Abschnitte gegliederten Anhang nicht um eine Umbildung des Pfeilsackes handeln, zumal beide Gebilde in den meisten Fällen nebeneinander existieren. . .“ Und ein Stück weiter: „Ich halte danach den Appendix des Penis für homolog mit dem wohl drüsigen Blindsacke der genannten Xerophilen, welcher am weiblichen Leitungswege ansitzt und als *Appendicula* bezeichnet werden mag.“ Er führt jedoch diese Homologie noch weiter und zwar mit jenem Organ, das als Pfeilsack bei verschiedenen Vertretern der *Zonitiden* (*Nanina*, *Zonitoides*, einige *Vitrinen* usw.) bezeichnet wird, das jedoch mit dem Pfeilsack der Heliciden nichts zu tun hat und welches im Unterschied zu diesem, den er *hasta amatoria* (Liebespfeil) nennt, v. Ihering als *pugio amatorius* (Liebesdolch) bezeichnet. „Appendix, Appendicula sind danach homologe Gebilde und auch der Liebesdolchapparat gehört hierher. Ist das richtig, so wird man nie Appendicula, Appendix und Liebesdolchsack oder zwei von beiden gleichzeitig antreffen, was tatsächlich nie der Fall ist. Wenn der Liebesdolchapparat sich zur Appendicula rückbildete, so darf sich also bei den damit ausgerüsteten Gattungen weder Appendicula noch Appendix vorfinden und das geht ja auch aus den Tatsachen hervor. — Wenn die Appendicula an der Vagina oder im Winkel zwischen ihr und Penis mündet, ist ihre Deutung klar, tritt sie ganz auf den Penis über, so nennen wir sie Appendix.“ (S. 411.)

Ich habe diese ganzen Sätze aus Iherings Arbeit angeführt, weil ich sie für das wichtigste halte, was bis jetzt von der morphologischen Beschaffenheit dieser Organe gesagt wurde, obgleich ich gleich bemerke, daß ich mich denselben nicht ausnahmslos anschließen kann. Derselbe Autor hält den blinden Anhang am Atrium von *Cochlicella acuta* Müll. für eine Appendicula („Ich dagegen halte das dem Penis gegenüber an der Genitalkloake sitzende Anhangsgebilde für Appendix resp. für die Appendicula,“ S. 440). Dagegen spricht er sich von dem ähnlichen akzessorischen Organe der *Carthusiana*- (= *Theba*-) Arten ganz anders aus. Auf der Mitteilung von Hesse fußend, daß Dietz in diesem Anhang bei *Helix cantiana* einen 10 mm langen Pfeil gefunden hat, sagt er: „Wenn

die Beobachtung, wie wohl kaum zu bezweifeln, richtig war, so ist also dieser Anhang von *Carthusiana* ein rudimentärer modifizierter Pfeilsack und nicht mit der sehr ähnlichen *Appendicula* mancher Xerophilen zu verwechseln.“ Das ist ein sehr wichtiger Satz, welcher eine größere Beachtung späterer Autoren verdient hätte, als er gefunden hat, und der die tatsächlichen Verhältnisse gewiß ganz richtig ergründet — freilich mit dem Nachtrage, daß er nicht bloß für die Gattung *Theba* gültig ist.

Den oben erwähnten Ansichten von *Ihering* über die Homologie des Appendix und der *Appendicula* hat sich vollständig *F. Wiegmann* (22) angeschlossen, der ebenfalls die Ausnahme von *Theba* gelten läßt, wo er die Möglichkeit einer Homologisierung mit dem Pfeilapparat zuläßt; überhaupt sind seine Ausführungen eigentlich nur eine Wiederholung jener von *Ihering* mit einer geringen Applikation auf die Gattung *Buliminus* Ehrbg. Eine etwas andere Richtung hat *Pilsbry* (17) eingeschlagen; er stimmt zwar mit *Ihering* darin überein, daß die Appendix des Penis mit der *Appendicula* einiger *Helicellinen* homolog ist (so sagt er auf S. XV.: „The gland or sack upon the penis, called the appendix, is probably a very ancient character, and is homologous with that sometimes developed upon the atrium,“ und S. 262 von der Sektion *Trochula* Schlüt.: „At base of vagina or on the atrium a large sack-like appendicula“), aber den Anhang am Ovidukte von *Cochlicella* hält er nicht so entschieden für eine *Appendicula* wie *Ihering*, denn er sagt davon (S. 263): „a long organ of unknown function, either a degenerate dart sack or an appendix“. Dagegen hält er die sog. *Appendicula* bei *Theba* ganz entschieden für einen rudimentären Pfeilsack; auf S. 265 lesen wir bei der Beschreibung der Genitalien dieser Gattung: „Far below them (gemeint sind die *Glandulae mucosae*) is a long blind sack with plicate internal walls, but containing no dart, evidently a degenerate dart sack.“

*Overtons* Ansicht über die Beschaffenheit der sog. *Appendicula* bei *Cochlicella barbara* haben wir schon oben (S. 12) angeführt, und wir haben erwähnt, daß er dieses Organ eher für einen degenerierten Pfeilsack als für Appendix oder *Glandula mucosa* halten will. Nichtsdestoweniger wendet *Hesse* in seinen neuen Publikationen von der Gattung *Theba* immer den Namen *Appendicula* — freilich ohne sich bis jetzt in Betrachtungen über ihre vergleichend-anatomische Beschaffenheit einzulassen — an und ähnlich auch *Wagner* (19), indem er über *Theba* und *Cochlicella* handelt; sie halten also wahrscheinlich dieses Organ für homolog mit der *Appendicula* am Atrium einiger *Helicellen* aus der Verwandtschaft von *H. elegans* (= *Trochula* Schlüt.). Ganz ähnlich betrachtet wohl *Hesse* auch den ähnlichen Anhang bei *Monilecaria*, den er ebenfalls *Appendicula* nennt.

Um in diesen schwierigen Fragen Sicherheit zu gewinnen, wäre es zuerst selbstverständlich nötig, die betreffenden Organe in ihrer embryologischen Entwicklung bei zahlreichen Vertretern zu untersuchen und

dann nach den Grundsätzen der strengen vergleichenden Anatomie und Embryologie die Homologisation dieser verschiedenen akzessorischen Organe durchzuführen. Dieses Ziel wird wohl noch lange ein *pium desiderium* bleiben; jedoch müssen wir dennoch heute nicht nur immer bei der oberflächlichen Vergleichung der Form und Lage dieser Organe verbleiben, sondern wir können wenigstens eine einigermaßen eingehendere Analyse durch die Untersuchung des histologischen Aufbaues durchführen und auf diesem Wege die Lösung der betreffenden Probleme versuchen. Dieser Weg ist in der vergleichenden Anatomie der Stylommatophoren schon höchst nötig; denn ich bin überzeugt, daß bei der Art und Weise der anatomischen Untersuchung, wie sie heute getrieben wird, sehr oft geringe Unterschiede der äußeren Form einzelner Organe überschätzt, oder andererseits wieder Sachen, deren morphologische Bedeutung ganz verschieden ist, durcheinander geworfen werden. Auf einen solchen Fall aufmerksam zu machen, habe ich zusammen mit Dr. J. F. B a b o r (3) Gelegenheit gehabt bei der Beschreibung einer neuen Art der Gattung *Agriolimax* Mörch aus den Ostkarpathen (*Agriolimax huculorum*), welche sich von allen anderen Arten ihrer Gattung dadurch unterscheidet, daß ihr jene verschieden ausgebildete akzessorische Drüse am Penisende fehlt, so daß die äußere Form der Genitalien keineswegs als der Gattung *Agriolimax* gehörig imponieren konnte; durch mikroskopische Untersuchung haben wir jedoch eine Menge Drüsenzellen in der distalen Partie des Penis festgestellt, die — sowohl vergleichend-anatomisch als höchstwahrscheinlich auch funktionell — der akzessorischen Drüse anderer *Agriolimax*-Arten entsprechen.

Zu demselben Zwecke habe ich also Serienschnitte durch die sog. „Appendicula“ von *Theba carthusiana* und den Pfeilsack von *Helicella obvia* Htm. hergestellt. Bei der ersteren (Taf. II. Fig. 5) sehen wir folgenden histologischen Bau: Unter einem zarten bindgewebigen Überzuge („Peritoneum“) finden wir zuerst eine ganz dünne Schicht von longitudinalen Muskelfasern, unter welcher sich eine ziemlich mächtige Schicht von Fasern von vorwiegend zirkulärem Verlaufe befindet. Diese Schicht bildet gegen das Lumen zahlreiche längliche Falten (auf unserem Schnitt gibt es 11 größere und etwa 5—6 kleinere), die mit einem einschichtigen zylindrischen Epithel mit länglich-ovalen Kernen bedeckt sind. Am distalen Ende dieses Organs sitzt ein langer dünner Anhang, der am Schnitt fast nur von zirkulären Muskelfasern gebildet erscheint; das Epithel ist hier bedeutend höher als in der unteren Partie, das Lumen ziemlich einfach, auf der Bildung dieses vierlappigen Lumens nimmt keine Muskelschicht, sondern nur das Epithel teil.

Wenn wir mit diesem Befund den Bau des Pfeilsacks bei der genannten *Helicella*-Art vergleichen, so sehen wir ganz ähnliche Verhältnisse. Auch hier finden wir eine äußere Schicht von longitudinaler Muskulatur, nur ist sie bedeutend mächtiger als bei dem erstgenannten Organe;



während dieselbe dort nur die Dicke einer bis zwei Muskelfasern enthalten hat, ist sie hier als eine mächtige, etwa ein Drittel bis hie und da fast eine Hälfte der Dicke der ganzen Wand einnehmende Schicht. Mittels einer schräg verlaufenden Übergangsschicht geht dann diese äußere Schicht in die mittlere von zirkulären Fasern über, auf welche dann als innerste eine direkt unter dem Epithel liegende Schicht folgt, wo außer zirkulären Fasern stark auch solche von radiärem Verlaufe hervortreten. Das Epithel selbst ist wieder hoch, zylindrisch, mit basal gelagerten, ovalen Kernen. Das Lumen ist hier nicht von einem so komplizierten Bau wie bei der vorigen, jedoch bei anderen *Heliciden* ist das Lumen des Pfeilsacks von sehr kompliziertem Durchschnitt. In der höchsten Partie wird das Lumen enger, sein Epithel wird höher, die longitudinale und innere radiale Muskelschicht wird dünner, bis diese letztere schließlich ganz verschwindet.

Wir sehen also, daß es absolut keinen prinzipiellen Unterschied im Bau der sog. Appendicula bei *Theba* und eines echten Pfeilsacks bei *Helicella* gibt: Unterschiede, die wir gefunden haben, betreffen die Mächtigkeit der Schicht der longitudinalen Muskelfasern, den Bau der innersten (radiären) Muskelschicht bei *Helicella* und die Kompliziertheit des Durchschnitts. Die ersten zwei Umstände sind ganz gewiß dem Verluste der ursprünglichen Funktion: Bildung des Pfeiles, zuzuzählen. Wie bekannt, wird bei der Paarung dieses Gebilde von dem als Weibchen fungierenden Tiere mit bedeutender Kraft nach außen vorgeschleudert und in den Leib des anderen Tieres eingestossen. Zu dieser Bewegung, wenn sie von genügender Schnelligkeit und Kraft sein soll, ist die Mitwirkung eben jener drei Muskelschichten nötig, die wir bei *Helicella* in sehr proportioneller Zusammenstellung festgestellt haben; während die radiären und zirkulären Muskeln den Pfeil wie ein Schraubstock zusammendrücken, können die longitudinalen Fasern durch eine plötzliche Kontraktion den Pfeil mit bedeutender Schnelligkeit hervorschnellen — so etwa, wie die Gewehrpatrone eine größere Durchschlagskraft dadurch bekommt, daß sie sich durch die ihr einen bedeutenden Widerstand bietende Laufbohrung durcharbeiten muß. Daß die Anordnung der Muskulatur diesen dynamischen Verhältnissen entspricht, dafür zeugt auch der Umstand, daß die innerste — radiäre — Schicht verhältnismäßig am losesten ist, die Lücken zwischen den Fasern größer sind, so daß bei dem starken Druck der zirkulären Schicht diese inneren Fasern nicht rücksichtslos gegen den harten Pfeil gedrückt werden, sondern seitwärts ausweichen können. Nun verschwindet selbstverständlich bei *Theba* mit dem Verluste der Pfeilbildung auch das Bedürfnis dieses komplizierten Baues der Wände; deshalb sehen wir die äußere longitudinale Schicht nur ganz dünn, die radiäre als selbständige Schicht verschwindet vollkommen, und es ist eigentlich als einzige bei eventueller Kontraktion in Betracht zu ziehende Schicht die zirkuläre übriggeblieben. Über die Funktion des in dieser Weise degenerierten Pfeilsackes wissen wir freilich vorläufig nichts; sollte sie von drüsiger Natur

sein (was jedoch nach seinem Epithel kaum wahrscheinlich erscheint), dann würde wohl zur Entleerung seines Sekrets die zirkuläre Muskulatur völlig hinreichen. Jedoch sind solche Verrutungen bisweilen bei unseren rein morphologischen Betrachtungen überflüssig.

Durch diese eben ausgeführte Analyse betrachte ich die Frage nach der morphologischen Bedeutung der sog. Appendicula, die bis jetzt bei *Cochlicella*, *Theba* und *Monilearia* festgestellt wurde, für erledigt in dem Sinne, daß es sich um *einen echten Pfeilsack handelt, der die Funktion der Pfeilbildung eingebüßt* und eine andere, bis jetzt unbekannte Funktion angenommen hat; durch diese Funktionsänderung sind zwar einige sekundäre Bauveränderungen entstanden, der Grundplan jedoch gleich geblieben und die gleiche morphologische Beschaffenheit ersichtlich ist. Wenn wir aber das, was wir oben schon von dem akzessorischen Organ am Ovidukte von *Leucochroa candidissima* gesagt haben, mit den bisjetzigen Betrachtungen vergleichen, so sehen wir, daß wir auch hier ein Organ von derselben vergleichend-anatomischen Bedeutung haben. Was uns hier als das einzige gewisse Verlegenheit bereiten kann, ist die Anwesenheit der sonderbaren komplizierten Drüse mit dem langen dünnen Ausführgang. Aber der Bau dieses Ausführganges erinnert auffallend auf den Bau des dünnen Anhangs am Pfeilsacke — denn so können wir schon das Organ nennen — von *Theba*; auch Overtons Abbildung der distalen Partie desselben Organs bei *Cochlicella* paßt hieher ganz gut, und ich bin sicher, daß auch der dreifach gespaltene lange Anhang bei *Monilearia* von ganz gleichem Bau ist, so daß es sich hier wohl um homologische, auf verschiedenen Reduktionsgraden befindliche Organe handelt. Einen gewissen Beleg für diese Ansicht bildet auch der Urstand, daß Hesse bei *Theba ravergeri* zwei solche Anhänge festgestellt hat, die höchstwahrscheinlich den doppelten Pfeilsäcken einiger *Helicellen* und *Fruticicolen* entsprechen.

Nun bleibt noch das Verhältnis dieser als degenerierter Pfeilsack begriffenen „Appendicula“ zu der Appendicula jener *Helicellen* der Sektion *Trochula* zu lösen übrig, wo sie als ein Anhang am Atrium bei Anwesenheit von echten — wenn auch kleinen — Pfeilsäcken am Ovidukte vorkommt. Leider wissen wir noch nichts von der genaueren morphologischen Zusammensetzung dieser Anhänge, jedoch erscheinen sie schon äußerlich als Organe, die mit den eben besprochenen nicht viel Gemeinsames haben. Es sind das am wahrscheinlichsten unbedeutende Ausstülpungen des Atriums, und diesen kann man bisweilen den Namen Appendicula lassen; auch kann man höchstens nur von ihnen die v. Ihering'schen Ansicht von der Homologie mit der Appendix am Penis vielleicht gelten lassen. Daß die übrigen, am Ovidukte als Appendicula beschriebenen Organe keine Homologa der Appendix sind, beweist am besten eben unsere *Leucochroa*, von der wir oben gezeigt haben, daß sie eine typische Appendix am Penis und daneben am Ovidukt ein Organ hat, welches mit der früher sog. „Appendicula“ von *Cochlicella* indentisch ist. Wir haben hier also



jenen Fall verwirklicht, welchen I h e r i n g für nicht existierend gehalten und dessen Nichtexistenz er als eine der stärksten Stützen für seine Homologisierung der Appendix und der Appendicula geführt hat: die Gleichzeitigkeit beider, d. h. die gleichzeitige Entwicklung eines Anhangs am Penis und am Ovidukt. Schon daraus ist es ersichtlich, daß es sich bei dem letzteren nicht bloß um ein Homologon der Appendix handeln kann, sondern um ein ganz anderes Organ; und da muß man gestehen, daß es am richtigsten — wenn auch freilich mit gewisser Beschränkung, denn bei *L. candidissima* hat er es nicht gekannt, sondern hat nur nach Schmidts Abbildungen von anderen *Leucochroa* geschlossen — Pilsbry begriffen hat, der — wie wir schon oben bemerkt haben — es für einen degenerierten Pfeilsack hält.

Versuchen wir nun nach diesen vergleichend-anatomischen Betrachtungen ihre Resultate hinsichtlich der systematischen Stellung der Gattung *Leucochroa* zu würdigen. Vielleicht ist es auch hier ratsam, einige Daten aus der ziemlich bunten Historie anzuführen. Ursprünglich wurden die hieher gehörigen Arten von Beck (1837) in die große Gattung *Helix* L. gereiht, und zwar in die Nähe der *Helicellen* wegen der ähnlichen Lebensweise und gewisser Schalenähnlichkeit. Auch Albers (1) stellt sie in seine Untergattung *Crenca*, die freilich sehr heterogene Elemente umfaßt (z. B. auch *Iberus gualtierianus* L.). Aber Moquin-Tandon und Bourguignat, die gefunden haben, daß *Leucochroa candidissima* einen glatten, in der Mitte mit einem Zahn versehenen Kiefer besitzt, haben eine Verwandtschaft zu den *Zonitiden* vorausgesetzt, ja Moquin-Tandon stellt sie direkt als Untergattung *Calcarina* zur Gattung *Zonites*, eine Ansicht, die trotz ihrer Sonderbarkeit Nachfolger gefunden hat. Unter ihnen ist zuerst E. v. Martens (2) anzuführen, der in der zweiten Ausgabe der Albersschen *Heliceen* *Leucochroa* als eine selbständige Gattung vor die Gattung *Helix* legt; er sagt ausdrücklich, daß er es wegen der Verhältnisse der Genitalien macht — was freilich mehr gegen die direkte Einreihung zu *Zonites* als zur Gattung *Helix* gerichtet ist („Der Mangel aller Ähnlichkeit in Habitus und Lebensweise mit *Hyalina* und *Zonites* veranlassen mich, auf die Differenzen im Geschlechtssystem generischen Wert zu legen,“ S. 79); nichtsdestoweniger ist er wahrscheinlich dem Eindrucke unterlegen, den der Befund eines glatten Kiefers bei einer sonst so ausgesprochen helix-ähnlichen Form genacht hat. Ähnlich hat auch Westerland in seiner Fauna (20) und im Methodus (21) für die Gattung *Leucochroa* eine besondere Familie *Leucochroidae* errichtet, die er in der ersten Publikation direkt hinter die Familie der *Vitrinidae* stellt, in der zweiten zwischen beide noch die *Allognathidae* einschleibt. Ferner hat auch Kobelt in seinem Kataloge (13) die Gattung *Leucochroa* in die Familie *Vitrinidae* eingereiht.

Es ist wirklich sonderbar, daß sich eine solche Ansicht so lange tradieren konnte, obgleich A. Schmidt schon 1855 gezeigt hat, daß



die hier gerechneten Arten wegen der Lage des rechten Tentakelretraktors, der nach innen von den Genitalien und nicht oberhalb derselben zwischen Penis und Ovidukt liegt, ihre Verwandtschaft zu den *Helicellinen* kundgeben. Ähnlich glaubt auch Binney (5) nach der Beschaffenheit der Radula von *L. boissieri* Ch., daß diese Gattung entschieden zu *Heliciden* und nicht *Vitriniden* gehört. v. Ihering (11) widmet der *Leucochroa* nur wenig Aufmerksamkeit; doch ist es aus der Bemerkung von der Anordnung der Muskulatur auf S. 428 ersichtlich, daß er wohl schon damals von der Zugehörigkeit zu den *Helicellinen* überzeugt war, die er ganz entschieden in der neueren Arbeit (12) vertritt. Hier hält er den glatten Kiefer von *Leucochroa* für sekundär aus dem gerippten Kiefer der übrigen *Heliciden* entstanden, und er denkt wohl auch schon auf eine Homologisation des Anhangs am Oviduktes mit dem Pfeilsack („Erstere Gattung [d. h. *Leucochroa*] hat einen durch Rückbildung der feinen Rippen glatt gewordenen Kiefer und am Genitalapparat Pfeilsack und glandulae mucosae stark degeneriert,“ S. 431).

Äußerst sonderbar hat *Leucochroa* Pilsbry (17) eingereiht. Aus der Voraussetzung ausgehend, daß der Unterschied in der Form der akzessorischen mukosen Drüsen bei ostasiatischen und europäischen *Heliciden*<sup>4)</sup> von prinzipieller Bedeutung für die Verwandtschaft der belogonen (d. h. dauernd oder wenigstens in phylogenetischer Vergangenheit mit Pfeil versehenen) *Heliciden* ist, hat er dieselben in *Belogona Euadenia* und *Belogona Siphonadenia* geteilt. Während er aber alle europäischen *Heliciden* (*Eulota fruticum* ausgenommen, die in die erste Gruppe gehört) in *Siphonadenia* eingereiht hat, hat er die Gattung *Leucochroa* daraus herausgerissen und reiht sie in *Belogona Euadenia* ein, die ovale Drüse von *L. candidissima* für die Glandula mucosa der *Heliciden* haltend: Freilich tut er das nicht ohne Vorbehalt, denn S. 176 sagt er ausdrücklich, daß es eine in Genitalien und Kiefer degenerierte Gruppe ist und daß es sich vielleicht zeigen wird, daß sie unter *Siphonadenia*, in die Nachbarschaft von *Helicella* gehört.

Pilsbrys Einteilung der *Heliciden* in Gruppen mit sackförmigen und walzenförmigen mukosen Drüsen hat in neuerer Zeit auch Kobelt (14) aufgenommen, der aber Pilsbrys Namen durch die Begriffe selbständiger Familien *Eulotidae* und *Helicidae* ersetzt hat. *Leucochroa* stellt er selbstverständlich in diese zweite Familie in die Verwandtschaft der *Xerophilen* (= *Helicellen*); darin hat sich ihm vollends auch C. R. Boettger (4) angeschlossen.

Wenn wir nun auf Grund unserer vorausgehenden morphologischen Auseinandersetzungen über die systematische Stellung der Gattung *Leuco-*

<sup>4)</sup> Deren erstere knäuel- oder sackförmige, in den Pfeilsack einmündende, letztere röhrenförmige, einfache oder gespaltene, am Ovidukt oberhalb des Pfeilsacks sitzende Drüsen haben.

*chroa* entscheiden wollen, so müssen wir zuerst gewiß mit derjenigen übereinstimmen, die dieselbe in die Gruppe der *Helicellinen* eingereiht haben. Dem glatten Kiefer kann man keine solche Bedeutung zuerkennen, wie es einige Autoren nach Moquin-Tandon gemacht haben, und durch alle anderen Merkmale imponiert sie ersichtlich als eine *Helicide*. Der einzige wichtigere Unterschied den übrigen *Helicellinen* gegenüber liegt vielleicht in der Anwesenheit des Diverticulum am Stiel des Receptaculum seminis; erwägen wir jedoch, daß es selbst in einer so natürlichen Gruppe wie die Sektion *Helicogena* Risso Arten ohne (*pomatia* L.) und mit Diverticulum gibt, werden wir auch diesem Merkmale nicht das Gewicht zusprechen, wie es vielleicht anfangs erscheinen möchte. In der Unterfamilie der *Helicellinen* ist dieselbe in die nähere verwandtschaftliche Gruppe der Gattungen *Theba*, *Monilecaria* und *Cochlicella* einzureihen, die durch einen degenerierten, keinen Pfeil mehr bildenden Pfeilsack ausgezeichnet sind. Wenn die Angaben von Moquin-Tandon über *C. conoidea* und *ventricosa* sich als richtig erweisen sollten, dann wären wohl diese Arten der *acuta* nicht so nahe verwandt, wie man bis jetzt gedacht hat. Den typischen *Helicellinen* am nächsten würde *Theba* stehen, bei welcher noch typische Glandulae mucosae am Ovidukte erhalten sind; gleich danach kommt *Monilecaria*, die keine akzessorischen Glandulae mucosae am Ovidukte mehr besitzt, den Pfeilsack jedoch von bedeutender Größe, mit einem langen gespaltenen Anhang versehen. Dann könnte man vielleicht *Cochlicella* einreihen, und erst zuletzt würde die *Leucochroa* kommen, die in der Degeneration am weitesten vorgeschritten ist und zugleich in der Entwicklung des Kiefers abgewichen ist.

Wenn wir zum Schlusse die Ergebnisse dieser Arbeit kurz zusammenfassen wollen, so können wir es in folgenden vier Thesen machen:

1. Appendix des Penis verschiedener *Stylommatophoren* ist kein selbständiges akzessorisches Organ, sondern bloß eine sekundäre Ausstülpung des Penis.

2. Die sog. Appendicula einiger *Helicellinengattungen* (*Theba*, *Cochlicella*, *Monilecaria* und *Leucochroa*) ist nicht mit dem Appendix des Penis homolog, sondern bloß ein auf verschiedenen Stufen der Degeneration befindlicher Pfeilsack.

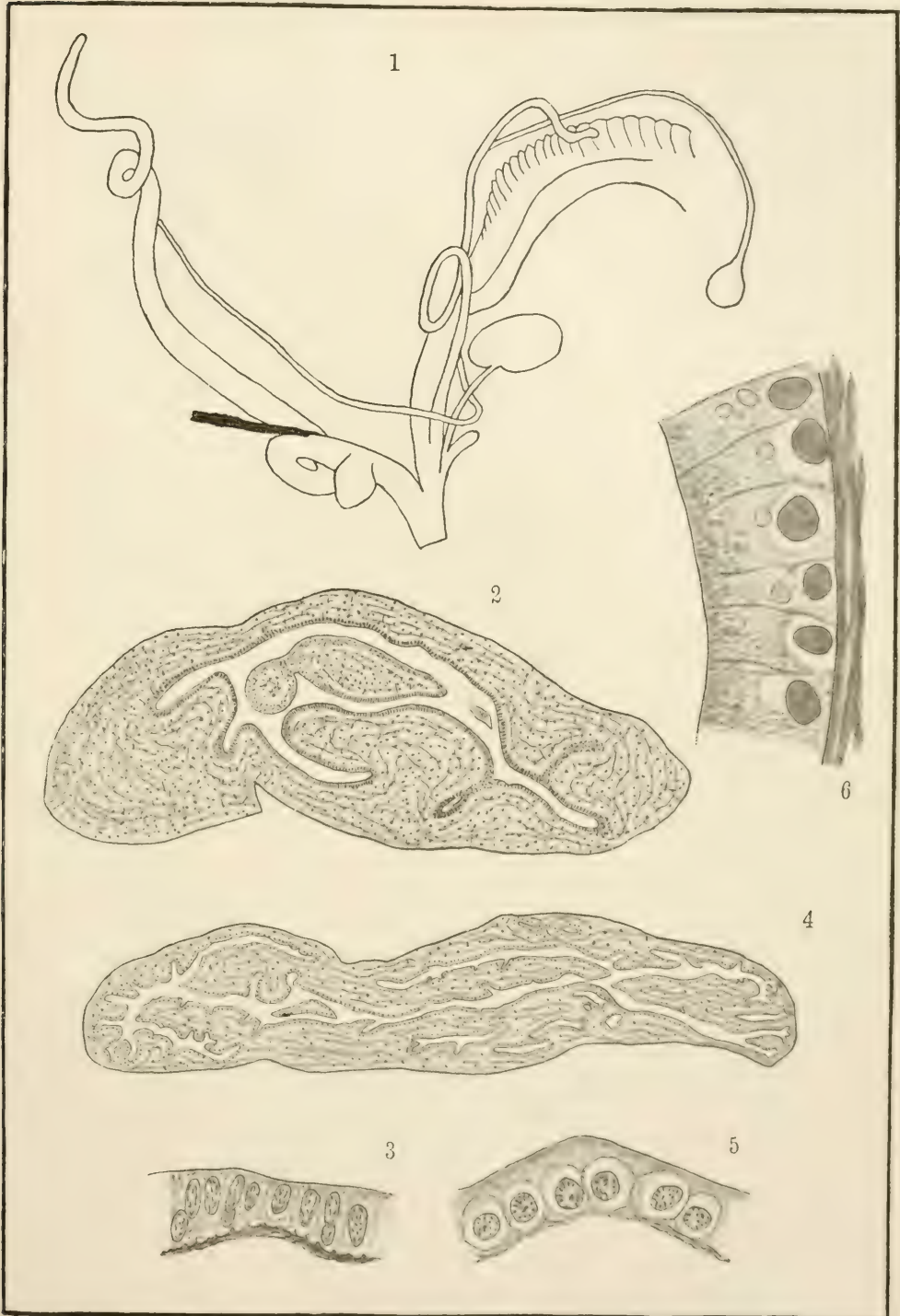
3. Für ein Homologon der Appendix kann man höchstens die Appendicula am Atrium der *Helicellinen* aus der Gruppe *Trochula* halten, und man kann nur für dieses Organ diesen Namen belassen.

4. *Leucochroa* ist eine echte *Helicelline*, die sich von ihren nächsten Verwandten nur sekundär durch den glatten Kiefer, was ein ganz nebensächliches Merkmal ist, und durch das Diverticulum am Receptaculum seminis unterscheidet.

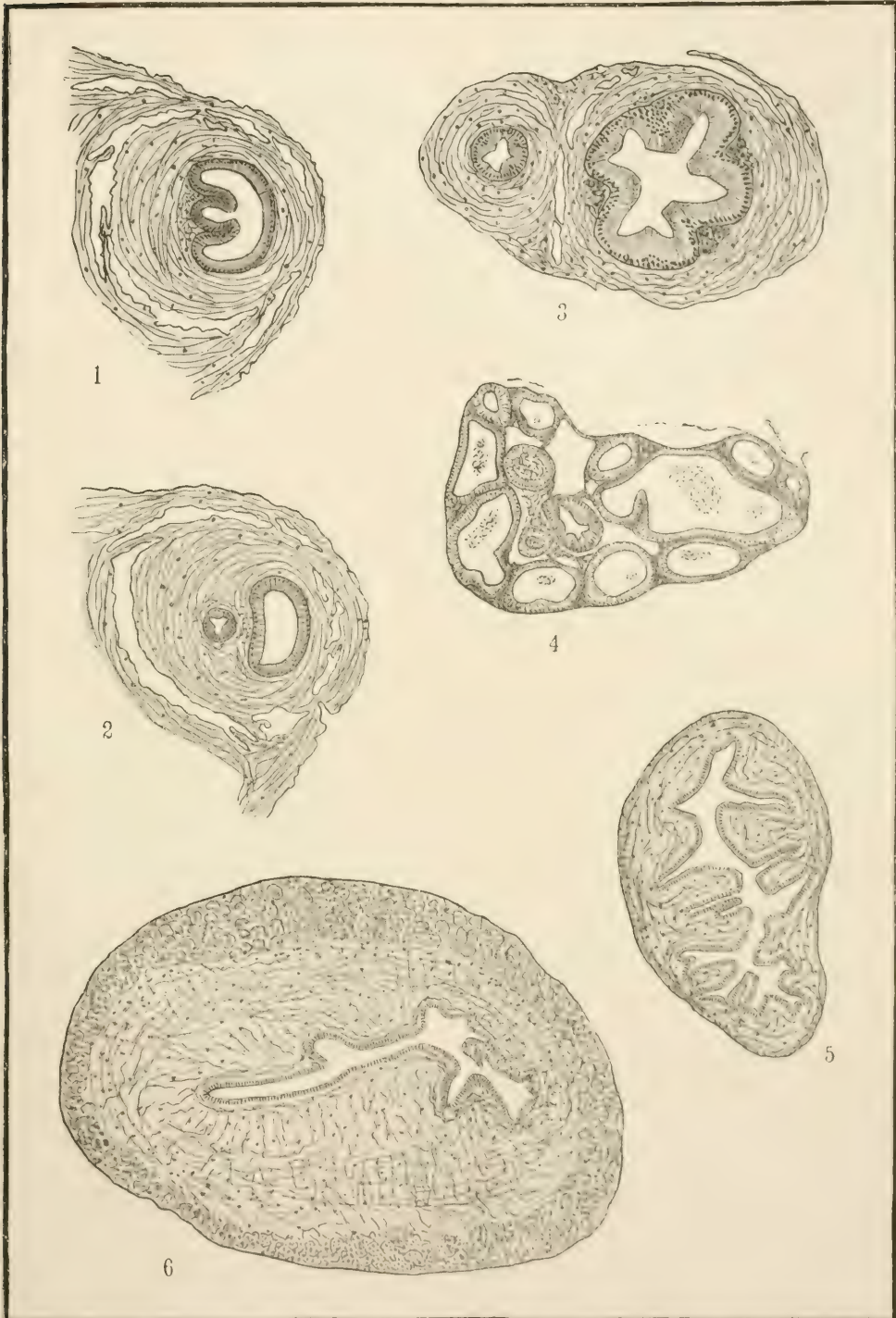
## VERZEICHNIS DER ZITIERTEN LITERATUR.

1. Albers, J. Ch.: Die Heliceen nach natürlicher Verwandtschaft systematisch geordnet. Berlin 1850.
2. Albers, J. Ch.-Martens E.: Die Heliceen nach natürlicher Verwandtschaft systematisch geordnet. II. Ausg. Leipzig 1860.
3. Babor, J. F. u. Frankenberger Z.: Zur Kenntnis der karpatischen Weichtiere. Verh. d. k. k. zool.-bot. Ges. in Wien. Jahrg. 1914.
4. Boettger, C. R.: Ein Beitrag zur Erforschung der europäischen Heliciden. Nachrbl. d. Deutsch. Malakozool. Ges., XLI. 1909.
5. Binney, W. G.: On the Anatomy and Lingual Dentition of Ariolimax, and other Pulmonata. Proceed. of the Acad. of Nat. Sciences of Philadelphia. 1874.
6. Caziot: A propos des Helix acuta, barbara, crenulata et conoica. Feuille de Jeunes Naturalistes.
7. Hesse, P.: Beiträge zur Molluskenfauna Griechenlands III. Jahrb. d. Deutsch. Malak. Ges. 1884.
8. —, Kritische Fragmente V. Bemerkungen über das Genus Theba Risso (Carthusiana Kob.) Nachrbl. d. D. Mal. Ges. XL., 1908.
9. —, Über einige vorderasiatische Schnecken. Nachrbl. d. D. Mal. Ges. XLII. 1910.
10. —, Zur Kenntnis der Anatomie von Monilearia phalerata W. B. Nachrbl. d. D. Mal. Ges. XLIII. 1911.
11. Ihering, H. v., Morphologie und Systematik des Genitalapparates von Helix. Ztschr. f. wiss. Zool. Bd. LIV. 1892.
12. —, System und Verbreitung der Heliciden. Verh. d. k. k. zool.-bot. Ges. in Wien. 1909.
13. Kobelt, W. Catalog der europäischen Binnenconchylien. Cassel 1871.
14. —, Iconographie der Land- und Süßwassermollusken, N. F. Registerband. Wiesbaden 1904.
15. Moquin-Tandon, A., Histoire naturelle des mollusques terrestres et fluviatiles de France. Paris 1855.
16. Overton, H., Some Notes on the so-called Appendix of Helicella barbara (L.). Journ. of Malacol., vol. X. 1903.
17. Pilsbry, H. A. Manual of Conchology, vol. IX.: Guide to the Study of Helices. Philadelphia 1894.
18. Schmidt, A., Der Geschlechtsapparat der Stylomatophoren in taxonomischer Hinsicht. Berlin 1855.
19. Sturany, R. und Wagner, A., Über schalentragende Landmollusken aus Albanien und Nachbargebieten. Denkschr. d. math.-naturw. Kl. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien 1914.
20. Westerlund, C. A., Fauna der in der palaearktischen Region lebenden Binnenconchylien. I. Lund 1886.
21. W., Methodus dispositionis conchyliorum extramarinorum in regione palaeartica viventium. Acta Acad. scient. et art. Slav. merid. vol. 151. Zagrabiae 1902.
22. Wiegmann, F., Die Genera Helicella Fér. und Buliminus Ehrbg. Nachrbl. d. D. Mal. Ges. XXXVII. 1905.

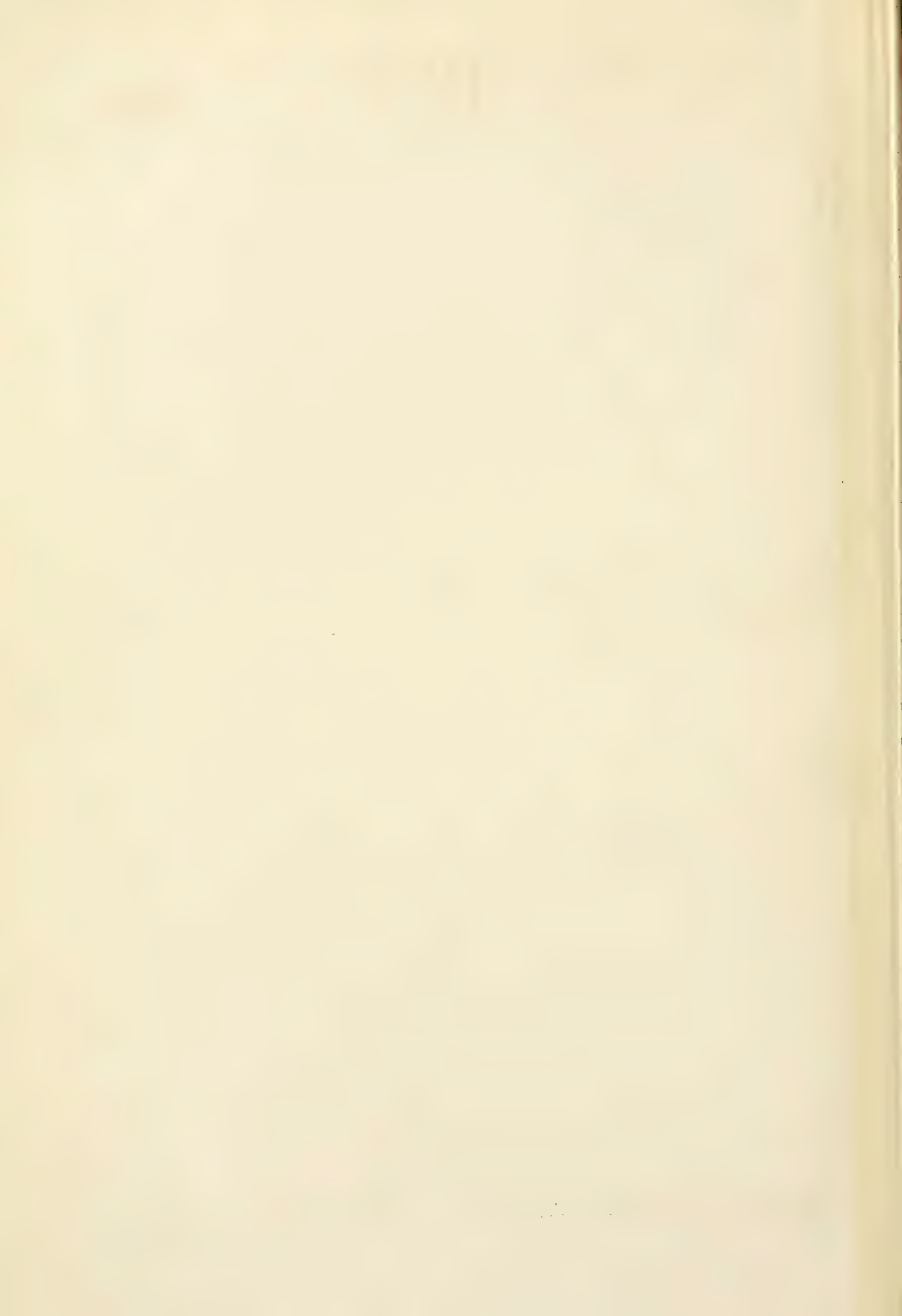












## TAFELERKLÄRUNG.

## Tafel I.

Fig. 1. Ausführgänge der Genitalien von *Leucochroa candidissima*.

Fig. 2. Querschnitt durch den Penis von *L. candidissima* mit Appendix. Links Penis, rechts Appendix. Vergr. 40×.

Fig. 3. Ein Teil des Epithels aus dem Penis von *L. candidissima*. Reichert, Obj. 8, Oc. 4.

Fig. 4. Querschnitt durch den Penis von *Clausilia dacica* mit Appendix. Links Penis, rechts Appendix. Vergr. 40×.

Fig. 5. Ein Teil des Epithels aus dem Penis von *Cl. dacica*. Reichert, Obj. 8, Oc. 4.

Fig. 6. Ein Teil des Epithels aus der akzessorischen Drüse des Pfeilsackes von *L. candidissima*. Reichert, Obj. 8, Oc. 4.

## Tafel II.

Fig. 1. Querschnitt durch den Pfeilsack von *L. candidissima* an der Stelle der Abspaltung des Ausführganges der akzessorischen Drüse. Vergr. 72×.

Fig. 2. Querschnitt durch dasselbe Organ, 0.14 mm oberhalb des vorigen Schnittes. Vergr. 72×.

Fig. 3. Querschnitt durch dasselbe Organ, 0.61 mm oberhalb des ersten Schnittes. Vergr. 72×.

Fig. 4. Querschnitt durch die akzessorische Drüse von *L. candidissima*. Vergr. 30×.

Fig. 5. Querschnitt durch den Pfeilsack von *Theba carthusiana*. Vergr. 72×.

Fig. 6. Querschnitt durch den Pfeilsack von *Helicella obuia*. Vergr. 72×.

# Beitrag zum Büschel von Flächen zweiter Ordnung.

VON DR. VÁCLAV SIMANDL,  
Privatdozenten an der böhmischen Technik in Brünn.

(Vorgelegt am 23. Juni 1917.)

Weil jeder Fläche 2. Ordnung zwei Regelscharen angehören, so können wir den Inbegriff aller Regelscharen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung als ein gewisses System von  $\infty^1$  Regelscharen betrachten. Wie wir im folgenden zeigen werden, können wir ein derartiges System von Regelscharen eineindeutig auf den Inbegriff aller Punkte einer doppel-punktlosen ebenen Kurve dritter Ordnung zuordnen. Diese Zuordnung wird uns zu einigen Zusammengehörigkeiten der Flächen 2. Ordnung und der linearen Komplexe führen. Insbesondere werden uns die linearen Komplexe drei ausgezeichnete Involutionen in den Flächen des Büschels zeigen, nämlich diejenigen drei Involutionen, welche immer durch zwei Flächenpaare, in welche man auf die dreifache Weise die vier singulären Flächen des Büschels zuordnen kann, bestimmt sind.

## **1. Über eineindeutige Zuordnung der Regelscharen der Flächen zweiter Ordnung eines gegebenen Büschels auf die Punkte der doppelpunktlosen ebenen Kurve dritter Ordnung.**

Auf der Raumkurve 4. Ordnung erster Art  $r^4$ , welche wir als die Grundkurve eines Flächenbüschels 2. Ordnung  $\mathcal{S}$  betrachten wollen, denken wir uns einen beliebigen Punkt  $P$ , von welchem wir diese Raumkurve auf eine gegebene Ebene  $\pi$  projizieren. Die Projektion unserer Raumkurve ist eine ebene Kurve 3. Ordnung  $c^3$  vom Geschlechte 1. Der Gesamtheit aller  $\infty^1$  Regelscharen der  $\infty^1$  Flächen unseres Büschels wird dann durch unsere Projektion die Gesamtheit aller  $\infty^1$  Strahlenbüschel erster Ordnung, welche ihre Scheitel in den Punkten der Kurve  $c^3$  haben, korrespondieren. Es sei  $Q$  der Schnittpunkt der im Punkte  $P$  zu der Raumkurve  $r^4$  geführten Tangente mit der Ebene  $\pi$ . Dieser Punkt muß selbstverständlich auf der Kurve  $c^3$  liegen. Wir werden dann durch unsere Projektion folgende eineindeutige Zuordnung haben:



Eine Regelschar des Flächenbüschels  $\Sigma$ .

Zwei Regelscharen eines Hyperboloides des Flächenbüschels  $\Sigma$ .

Die vier singulären Regelscharen (Kegel) des Flächenbüschels  $\Sigma$ .

Ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf  $c^3$  liegt.

Zwei Strahlenbüschel, bei denen die Verbindungslinie ihrer Scheitel durch den Punkt  $Q$  hindurchgeht.

Die vier Strahlenbüschel, deren vier Scheitel auf  $c^3$  zum gemeinsamen Tangentialpunkte den Punkt  $Q$  haben.

Fragen wir uns jetzt, was in den Regelscharen des Flächenbüschels  $\Sigma$  den Strahlenbüschelpaaren, deren zwei Scheitel immer ein Paar von konjugierten Punkten der Kurve  $c^3$  bilden, entspricht. Es ist aber aus der Theorie der doppelpunktlosen ebenen Kurven 3. Ordnung bekannt, daß zwei konjugierte Punkte auf diesen Kurven immer zu den  $\infty^1$  sogenannten Steinerschen Vierecken führen. Je zwei Gegenseiten dieser Vierecke sind dann die Strahlenpaare zweier Involutionen in den Strahlenbüscheln, deren Scheitel die zwei erwähnten konjugierten Punkte sind.<sup>1)</sup> Es entsprechen also unseren beiden Strahlenbüscheln im Flächenbüschel  $\Sigma$  zwei Regelscharen von der Eigenschaft, daß in den Geraden dieser Regelscharen zwei derartige Involutionen existieren, daß die Paare der einen Involution mit den entsprechenden Paaren der anderen immer ein windschiefes Viereck bilden. Jede von diesen Involutionen können wir als Involution von konjugierten Polaren eines linearen Komplexes betrachten. Dieser lineare Komplex enthält die Leitschar der Regelschar, in welcher wir die Involution betrachten. Es ist aber auch ersichtlich, daß dieser lineare Komplex die andere von unseren beiden Regelscharen enthält. Wir sind hier also zu einer besonderen Lage von zwei Regelscharen gekommen, mit welcher wir uns auf einer anderen Stelle<sup>2)</sup> beschäftigen, wo wir derartige zwei Regelscharen, als zwei Regelscharen in Involution bezeichnet haben.

Wir haben also weiter bei unserer Projektion der Raumkurve  $r^1$  auf die Ebene  $\pi$  folgende Zuordnung:

Zwei Regelscharen des Flächenbüschels  $\Sigma$ , von denen die eine mit der Leitschar der anderen in demselben linearen Komplexen enthalten ist.

Zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel ein Paar von konjugierten Punkten auf der Kurve  $c^3$  bilden.

Weil aber zu jedem Punkte auf  $c^3$  drei konjugierte Punkte auf  $c^3$  an-

<sup>1)</sup> R. Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. IV. Band pag. 174. § 837.

<sup>2)</sup> Siehe meine Arbeit: „Über die windschiefen Hyperboloide in ihrem Zusammenhange mit den linearen Komplexen.“ Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême. 1915.

gehören, so können wir von den Regelscharen eines gegebenen Flächenbüschels 2. Ordnung folgenden Satz aussprechen:

*Im Flächenbüschel 2. Ordnung existieren zu jeder beliebigen Regelschar drei andere Regelscharen, welche mit der ersteren immer in einem linearen Komplex enthalten sind.<sup>1)</sup>*

## 2. Über lineare Komplexe in ihrem Zusammenhange mit den Flächen des Büschels der Flächen zweiter Ordnung.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die erwähnten drei linearen Komplexe, welche durch jede Regelschar  $\alpha^2$  des gegebenen Flächenbüschels hindurchgehen, in Involution sind. Dazu brauchen wir zu zeigen, daß die drei Involutionen:  $J(\alpha_1, \beta)$ ,  $J(\alpha_1, \gamma)$ ,  $J(\alpha_1, \delta)$  von konjugierten Polaren, welche unsere drei linearen Komplexe in den Geraden der Leitschar  $\alpha_1^2$  der gegebenen Regelschar  $\alpha^2$  hervorrufen, ein Tripel von drei sich gegenseitig stützenden Involutionen bilden. Wenn das der Fall sein soll, so müssen sich die drei Involutionen  $J(\alpha_1, \beta)$ ,  $J(\alpha_1, \gamma)$ ,  $J(\alpha_1, \delta)$  auf der Regelschar  $\alpha_1^2$  vom Punkte  $P$  der Grundkurve  $r^4$  durch drei sich gegenseitig stützende Strahleninvolutionen in einem Punkte  $A_1$  der ebenen Kurve  $c^3$  projizieren. Es seien  $\beta^2, \gamma^2, \delta^2$  die drei Regelscharen des Flächenbüschels  $\Sigma$ , welche mit der Regelschar  $\alpha^2$  immer in einem linearen Komplex liegen, und es seien  $B, C, D$  die Scheitel der drei Strahlenbüschel, welche die Projektionen dieser Regelscharen vom Punkte  $P$  auf die Ebene  $\pi$  sind. Nach der letzteren durch die Projektion der Grundkurve  $r^4$  gewonnenen Anordnung sehen wir, daß die vier Punkte  $A_1, B, C, D$  ein Quadrupel von konjugierten Punkten auf der ebenen Kurve  $c^3$  bilden. Der Punkt  $A_1$  bestimmt je mit einem Punkte von den drei Punkten  $B, C, D$  immer ein System  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  von  $\infty^1$  Vierecken, welche sich der Kurve  $c^3$  einschreiben lassen, und welche die Punktepaare  $A_1, B, A_1, C, A_1, D$ , immer zu zwei gemeinsamen Gegenecken haben. Diese Punktepaare bestimmen dann die drei eindeutigen involutorischen Korrespondenzen  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  auf der Kurve  $c^3$ .

Es ist aus der Theorie dieser Kurven bekannt,<sup>2)</sup> daß wenn die Ecken eines vollständigen Vierseits auf der  $c^3$  liegen, die Gegenecken in einer  $\Gamma$  gepaart sind. Daraus geht aber sofort hervor, daß durch die Seitenpaare der Vierecke der Systeme  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , welche durch den Punkt  $A_1$  hindurchgehen, die drei involutorischen Korrespondenzen von diesem Punkte  $A_1$  projiziert werden. Es bilden dann die drei Systeme von den betrachteten Seitenpaaren drei Strahleninvolutionen, welche

<sup>1)</sup> Vergl.: A Harnack: „Über die Darstellung der Raumkurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystemes durch doppelt periodische Funktionen.“ Math. Annalen Bd. 12. Siehe den Satz auf Seite 73.

<sup>2)</sup> R. Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften IV. pag. 159.

sich gegenseitig stützen.<sup>1)</sup> Damit ist also auch die gegenseitige Involution der drei Involutionen  $J(\alpha, \beta)$ ,  $J(\alpha, \gamma)$ ,  $J(\alpha, \delta)$  und somit auch unserer drei linearen Komplexe, bewiesen worden. Wenn wir für den linearen Komplex, der zwei Regelscharen  $\mu^2$ ,  $\nu^2$  enthält, die symbolische Bezeichnung

$$\{\mu^2, \nu^2\}$$

eingeführen, so werden wir für unsere drei gegenseitig sich in Involution befindlichen linearen Komplexe folgende Symbolik haben:

$$\{\alpha^2, \beta^2\}, \{\alpha^2, \gamma^2\}, \{\alpha^2, \delta^2\}.$$

Es seien  $A^2, B^2, C^2, D^2$  die Flächen 2. Ordnung, die Träger von den Regelscharen  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$  sind, und es seien weiter  $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2, \delta_1^2$  die Leitscharen dieser Regelscharen. In Bezug auf die Existenz der drei angeführten linearen Komplexe und in Bezug auf die Tatsache, daß wenn zwei Regelscharen in einem linearen Komplex enthalten sind, auch ihre Leitscharen in einem gewissen linearen Komplex enthalten sind, geht die Existenz der drei linearen Komplexe:

$$\{\alpha_1^2, \beta_1^2\}, \{\alpha_1^2, \gamma_1^2\}, \{\alpha_1^2, \delta_1^2\}$$

hervor.

Es läßt sich leicht ersehen, daß wir auf ganz dieselbe Weise, auf welche wir von der Regelschar  $\alpha^2$  zu den drei linearen Komplexen:  $\{\alpha^2, \beta^2\}$ ,  $\{\alpha^2, \gamma^2\}$ ,  $\{\alpha^2, \delta^2\}$  gelangt sind, von der Regelschar  $\alpha_1^2$  zu den drei Komplexen  $\{\alpha_1^2, \beta_1^2\}$ ,  $\{\alpha_1^2, \gamma_1^2\}$ ,  $\{\alpha_1^2, \delta_1^2\}$  gelangen können. Es befinden sich also auch diese letzteren drei Komplexe in gegenseitig involutorischer Lage.

Weil aber zwei lineare Komplexe schon in Involution sind, wenn einer von ihnen die Leitschar einer Regelschar, welche sich im ersteren befindet, enthält, so sehen wir, daß die beiden hier betrachteten Tripel von linearen Komplexen eine Gruppe von sechs linearen Komplexen in Involution bilden.

Weil die beiden Regelscharen  $\alpha^2$  und  $\alpha_1^2$  derselben Fläche 2. Ordnung  $A^2$  angehören, die beliebig in unserem Flächenbüschel gewählt werden kann, können wir unsere letzten Resultate in folgenden Satz zusammenfassen:

*Mit jeder Fläche 2. Ordnung eines gegebenen Flächenbüschels ist eine Gruppe von 6 in gegenseitig involutorischer Lage sich befindlichen linearen Komplexen verbunden. Diese sechs linearen Komplexe enthalten zu je drei je eine Regelschar der betrachteten Flächen des Büschels und haben die Eigenschaft, daß in jedem von ihnen noch eine Regelschar enthalten ist, die einer von weiteren drei Flächen des Büschels angehört.*

Wir sehen daraus, daß jede beliebige Fläche  $A^2$  des Flächenbüschels 2. Ordnung  $\Sigma$  uns noch drei weitere Flächen dieses Büschels, nämlich die Flächen  $B^2, C^2, D^2$  definiert.

<sup>1)</sup> ibidem pag. 158.



Bei unserer Projektion der Grundkurve  $r^4$  unseres Büschels von dem Punkte  $P$  auf die Ebene  $\pi$  projizieren sich die Regelscharen unserer Flächen, nämlich die Regelscharen:

$$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2; \alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2, \delta_1^2$$

in die Strahlenbüschel, deren Scheitel immer vier folgende Punkte auf der Kurve  $c^3$  bilden:

$$A, B, C, D; A_1, B_1, C_1, D_1,$$

so daß immer die vier Punkte:

$$A, B_1, C_1, D_1; A_1, B, C, D,$$

ein Quadrupel von 4 konj. Punkten bilden und so, daß die Verbindungslinien:

$$AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$$

durch den Punkt  $Q$  hindurchgehen, den schon betrachteten Schnittpunkt der zu der Grundkurve  $r^4$  im Punkte  $P$  geführten Tangente mit der Ebene  $\pi$ . Weil jeder Punkt von einem Quadrupel konjugierter Punkte auf  $c^3$  immer auf dieselbe Weise die weiteren vier Punkte des Quadrupels definiert, so sehen wir, daß wir von jeder der vier Flächen  $A^2, B^2, C^2, D^2$  immer zu den übrigen drei auf dieselbe Weise gelangen.

Es bilden also die Quadrupel  $A^2, B^2, C^2, D^2$  eine Involution 4. Grades  $J^4$  in unserem Flächenbüschel. Ein Quadrupel dieser Involution  $J^4$  bilden auch die 4 singulären Flächen, die 4 Kegel des Büschels. Die linearen Komplexe, die dieses Quadrupel definiert, sind sämtlich spezielle lineare Komplexe. Es existieren insgesamt 6 derartige spezielle Komplexe oder Strahlengebüsche, ihre 6 Leitgeraden sind die 6 Kanten des Polartetraeders des gegebenen Flächenbüschels. Im allgemeinen Falle bei dem Flächenquadrupel  $A^2, B^2, C^2, D^2$  bekommen wir 12 lin. Komplexe, welche auf vierfache Weise zu je sechs eine Gruppe von 6 lin. Komplexen in Involution bilden. Diese 4 Gruppen von linearen Komplexen sind ersichtlich die folgenden:

$$\begin{aligned} & \{\alpha^2 \beta^2\}, \{\alpha^2 \gamma^2\}, \{\alpha^2 \delta^2\}, \{\alpha_1^2 \beta_1^2\}, \{\alpha_1^2 \gamma_1^2\}, \{\alpha_1^2 \delta_1^2\}, \\ & \{\alpha^2 \beta^2\}, \{\beta_1^2 \gamma^2\}, \{\beta_1^2 \delta^2\}, \{\alpha_1^2 \beta_1^2\}, \{\beta^2 \gamma_1^2\}, \{\beta^2 \delta_1^2\}, \\ & \{\alpha^2 \gamma^2\}, \{\beta_1^2 \gamma^2\}, \{\gamma_1^2 \delta^2\}, \{\alpha_1^2 \gamma_1^2\}, \{\beta^2 \gamma_1^2\}, \{\gamma^2 \delta_1^2\}, \\ & \{\alpha^2 \delta^2\}, \{\beta_1^2 \delta^2\}, \{\gamma_1^2 \delta^2\}, \{\alpha_1^2 \delta_1^2\}, \{\beta^2 \delta_1^2\}, \{\gamma^2 \delta_1^2\}. \end{aligned}$$

### 3. Über drei besondere Involutionen im Flächenbüschel 2. Ordnung.

Bei der Projektion der Grundkurve  $r^4$  des Flächenbüschels  $\Sigma$  von einem ihrer Punkte  $P$ , projizieren sich, wie wir oben in dieser Arbeit schon gezeigt haben, zwei Regelscharen  $\mu^2, \mu_1^2$  einer Fläche  $M^2$  des Büschels in zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel  $M, M_1$  auf der Projektionskurve  $c^3$  liegen und durch den festen Punkt  $Q$  auf der  $c^3$  hindurchgehen. Oder wir

können kürzer sagen, daß bei unserer Projektion jeder Fläche  $M^2$  des Büschels  $\Sigma$  eine Gerade  $m$  des Strahlenbüschels mit dem Scheitel  $Q$  eindeutig zugehört. Die Gerade  $m$  ist die Verbindungsgerade der Punkte  $M, M'$ . Es wird dann unserer Involution  $J^4$  der Flächenquadrupel  $A^2, B^2, C^2, D^2$  im Flächenbüschel  $\Sigma$  eine Involution 4. Grades der Strahlenquadrupel  $a, b, c, d$  im Strahlenbüschel mit dem Scheitel  $Q$  eindeutig zugeordnet. Wir können aber leicht ersehen, daß die Involution 4. Grades in dem Strahlenbüschel ( $Q$ ) diejenige Involution in diesem Strahlenbüschel ist, durch welche sich vom Punkte  $Q$  die Quadrupeln von konjugierten Punkten auf  $c^3$  projizieren. Es ist aber aus der Theorie der doppel punktlosen ebenen Kurven 3. Ordnung bekannt,<sup>1)</sup> daß derartige Involution 4. Grades in drei gewöhnliche Involutionen, welche sich gegenseitig stützen, zerfällt. Wenn  $k_1, k_2, k_3, k_4$  die vier Tangenten vom Punkte  $Q$  zu der Kurve  $c^3$  sind, so sind diese drei sich gegenseitig stützenden Strahleninvolutionen immer durch folgende zwei Paare bestimmt:

$$k_1 k_2, k_3 k_4; k_1 k_3, k_2 k_4; k_1 k_4, k_2 k_3.$$

Bei unserer Projektion der Grundkurve  $r^4$  auf die Ebene  $\pi$  sind aber wie wir oben gezeigt haben, den 4 Tangenten vom Punkte  $P$  zu der Kurve  $c^3$  vier Kegel des Büschels  $\Sigma$  zugeordnet. Bezeichnen wir uns diese Kegel  $K_1^2, K_2^2, K_3^2, K_4^2$ . Es zerfällt also unsere Involutionen 4. Grades  $J^4$  im Flächenbüschel  $\Sigma$  in drei gewöhnliche Involutionen, welche immer durch folgende zwei Flächenpaare bestimmt sind:

$$K_1^2 K_2^2, K_3^2 K_4^2; K_1^2 K_3^2, K_2^2 K_4^2; K_1^2 K_4^2, K_2^2 K_3^2.$$

Wir wollen im Folgenden diese drei Involutionen als drei *besondere Involutionen*  $J_1, J_2, J_3$  des Flächenbüschels  $\Sigma$  bezeichnen.

Diese drei Involutionen haben drei Paare von Doppелеlementen, wir bekommen also in jedem Büschel von Flächen 2. Ordnung sechs besondere Flächen, welche sich dreimal zu je zwei paaren. Zu diesen sechs besonderen Flächen 2. Ordnung des gegebenen Flächenbüschels sind schon mehrere Autoren auf verschiedenen Wegen gelangt.<sup>2)</sup> Insbesondere ausführlich hat sich mit ihnen *H. Schröter* in seinem bekannten Buche über die Raumkurven 4. Ordnung erster Species beschäftigt. *H. Schröter* definiert diese 6 besonderen Flächen als Hyperboloide, welche unendlich viele

<sup>1)</sup> Siehe R. Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Bd. IV. pag. 158.

<sup>2)</sup> Laguerre: Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre. Journal de mathématiques. II serie, tome XV, pag. 193. — A. Voss: Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades Mathematische Annalen. X. Band. pag. 177. A. Harnack: a. a. O. siehe die Seite 74 der zitierten Abhandlung. — A. Amese der: Über Konfigurationen auf der Raumkurve vierter Ordnung erster Species. Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Bd. 87. II. Abtheilung pag. 1194.

windschiefe Vierseite besitzen, welche gleichzeitig der Grundkurve des Flächenbüschels eingeschrieben sind.<sup>2)</sup>

Daß wirklich unsere sechs besonderen Flächen mit diesen sechs Hyperboloiden identisch sind, läßt sich leicht aus der Projektion der Grundkurve  $r^4$  auf die Ebene  $\pi$  ersehen. Bei dieser Projektion haben wir ersichtlich folgende Zuordnung:

Die 6 Paare von Regelscharen der 6 besonderen Flächen des Flächenbüschels  $\Sigma$ .

Die 6 Paare von Strahlenbüscheln, deren Scheitelpaare auf 6 Geraden liegen, welche zu je zwei Doppelpunkte der drei hier erwähnten sich stützenden Strahleninvolutionen im Punkte  $Q$  der Kurve  $c^3$  sind.

Die Scheitel jedes beliebigen Strahlenbüschelpaares von unseren sechs Strahlenbüschelpaaren bilden immer ein Paar von konjugierten Punkten der Kurve  $c^3$ . Es bestimmt also jedes von diesen 6 Punktepaaren auf die bekannte Weise ein System von  $\infty^1$  Vierseiten, welche der Kurve  $c^3$  eingeschrieben sind. Diese sechs Mannigfaltigkeiten immer von  $\infty^1$  Vierseiten sind dann die Projektionen der Mannigfaltigkeiten der  $\infty^1$  windschiefen Vierseite, welche auf unserem besonderen Hyperboloide liegen und der Grundkurve  $r^4$  unseres Flächenbüschels eingeschrieben sind.

Es seien

$$H_1^2, H_2^2; H_3^2, H_4^2; H_5^2, H_6^2$$

die drei Paare von unseren besonderen Flächen des Büschels und  $\chi_{11}^2, \chi_{22}^2$  die beiden Regelscharen des Hyperboloides  $H_1^2$ . Weiter seien  $H_{11}, H_{22}$  die Scheitel der Strahlenbüschel, in welche sich diese Regelscharen vom Punkte  $P$  der Raumkurve  $r^4$  auf die Ebene  $\pi$  projizieren. Wenn wir die zwei Punktepaare  $H_{11}, H_{22}, H_{12}, H_{21}$  in Betracht nehmen, so sehen wir daß sie ein Quadrupel von konjugierten Punkten auf der Kurve  $c^3$  bilden. Es führt also nach den Betrachtungen am Anfange dieser Arbeit die Existenz der vier Paare:

$$H_{11}, H_{12}, H_{11}, H_{22}, H_{21}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$$

von konjugierten Punkten auf der Kurve  $c^3$  zu der Existenz folgender vier linearen Komplexe:

$$\{\chi_{11}^2, \chi_{22}^2\}, \{\chi_{11}^2, \chi_{12}^2\}, \{\chi_{21}^2, \chi_{12}^2\}, \{\chi_{21}^2, \chi_{22}^2\}.$$

Wir sehen also, daß das Flächenpaar  $H_1^2, H_2^2$  derartige Eigenschaft besitzt, daß durch jede Regelschar der einen Fläche zwei lineare Komplexe gehen, welche die Regelscharen der anderen Fläche enthalten. Die vier so gewonnenen linearen Komplexe sind in gegenseitiger Involution, weil sie zur Gruppe von 6 in gegenseitiger Involution sich befindlichen linearen

<sup>2)</sup> H. Schrötter: Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species. Leipzig 1890. Pag. 68, § 10, insbesondere siehe den Satz auf der Seite 81.



Komplexen, welche sowohl mit der Fläche  $H_1^2$  als auch mit der Fläche  $H_2^2$  im Flächenbüschel  $\Sigma$  verbunden ist, angehören. Es ist ja klar, daß ebenso, wie das Flächenpaar  $H_1^2 H_2^2$  zu vier linearen Komplexen führt, auch die zwei anderen Flächenpaare auf ganz dieselbe Weise zu je vier linearen Komplexen führen. Aus der Projektion vom Punkte  $P$  auf die Ebene  $\pi$  kann man dann erschen, daß weitere Flächenpaare im Büschel  $\Sigma$  von der Eigenschaft der drei eben besprochenen Flächenpaare nicht existieren können.

Wir können jetzt folgenden Satz aussprechen:

*In jedem Büschel von Flächen 2. Ordnung existieren drei Flächenpaare von der Eigenschaft, daß durch jede Regelschar der einen Fläche zwei lineare Komplexe hindurchgehen, welche je eine Regelschar der anderen Fläche enthalten. Die vier so gewonnenen linearen Komplexe befinden sich in gegenseitig involutorischer Lage.*

Weil die drei erwähnten Flächenpaare, welche wir jetzt als drei besondere Flächenpaare des Büschels  $\Sigma$  bezeichnen wollen, die Doppелеlemente der drei sich gegenseitig stützenden Involutionen  $J_1, J_2, J_3$  sind so sehen wir, daß je zwei von diesen drei besonderen Flächenpaaren sich harmonisch teilen müssen.

Von zwei Flächen unseres besonderen Flächenpaares läßt sich leicht beweisen, daß auf jeder von ihnen ein windschiefes Vierseit liegt, welches mit seinen Diagonalseiten das Polartetraeder der anderen Fläche bildet.<sup>1)</sup> Daraus geht aber weiter hervor, daß die Flächen unseres besonderen Flächenpaares eine derartige spezielle gegenseitige Lage haben, daß sie auf den Kanten eines Paares ihres gemeinsamen Polartetraeders immer zwei Punktepaare schneiden, welche sich harmonisch teilen. Auf demjenigen Gegenkantenpaare nämlich, das das gemeinsame Diagonalseitenpaar der beiden erwähnten windschiefen Vierecke auf den beiden Flächen ist. Von zwei Flächen 2. Ordnung in dieser Lage haben C. Segre und G. Loria gezeigt, daß der harmonische Battaglinische Strahlenkomplex, welchen sie definieren, ein quadratischer Komplex von der Kategorie [(11) 1111] ist. Nämlich ein Komplex, dessen singuläre Fläche nicht ein allgemeines Tetraedroid ist, sondern eine Regelfläche 4. Grades mit zwei doppelten windschiefen Leitgeraden.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Siehe pag. 5 meiner hier schon zitierten Arbeit: „Über die windschiefen Hyperboloide etc.“

A. Voss, a. a. O. pag. 174.

<sup>2)</sup> C. Segre et G. Loria: „Sur les différentes espèces de complexes du 2<sup>e</sup> degré des droites, qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre.“ Mathematische Annalen Bd. 23, pag. 223 und 224.

Vergl. auch meine Arbeit: „Über die  $P^4$  Flächen in ihrem Zusammenhange mit den Raumkurven 4. Grades erster Species und den harmonischen quadratischen Strahlenkomplexen.“ (Bulletin de l'Académie des Sciences de Bohême 1915), wo in § 2 und 3 die hier erwähnte spezielle Lage von zwei Flächen 2. Ordnung behandelt und als „harmonische Lage“ zweier Flächen 2. Ordnung bezeichnet wird.

# Die Entwicklung der Milz.

J. JANOŠÍK.

(Vorgelegt am 26. Mai 1916.)

Bei meinen entwicklungsgeschichtlichen Arbeiten bin ich zu der Überzeugung gekommen, daß es nötig ist will man die Entwicklung eines Organes studieren, von weit jüngeren Stadien auszugehen, als jene sind, in denen man bereits die Anlage des Organes erkennen kann. Denn es sind gerade die vorangehenden Veränderungen, die die Entwicklung irgendeines Organes einleiten, die lehrreichsten, indem sie den Weg der Entwicklung geradezu vorzeichnen. Zu dieser Zeit sind die Beziehungen irgendeiner Anlage zu der Umgebung die einfachsten und können deshalb leicht begriffen werden.

Nochmals habe ich mich entschlossen die Entwicklung des Milz zu studieren, da bisher in dieser Sache keine Einigung erzielt worden ist. Wera Dantschakoff<sup>1)</sup> gibt zwar an, daß sich die Milz ohne jede Beteiligung des Pankreas oder des Darmepithels entwickelt, sie führt aber aus, daß auch das Cölomepithel nicht den Ausgangspunkt bildet, denn die Milzanlage wird nur durch Verdichtung der Mesenchymzellen gebildet, indem die Mesenchymzellen dicht beieinander bleiben.

Ich will hier nicht die in der Literatur befindlichen Angaben über die Entwicklung der Milz näher anführen, es ist dies in der Arbeit von B. Choronschitzky,<sup>2)</sup> Dantschakoff u. a. geschehen, hier will ich nur der Hauptfragen gedenken, nachdem ich mich bereits in einer meiner früheren Arbeiten<sup>3)</sup> damit befaßt hatte.

Nach dem Vorgange von v. Kupffer haben viele Forscher die Milz als ein Derivat des Hypoblastes oder des Darmepithels betrachtet

---

<sup>1)</sup> W. Dantschakoff: Über d. Entw. d. Blutes u. der Blutbildungsorgane etc. Arch. f. mik. Anat. Vol. 87. 1916.

<sup>2)</sup> B. Choronschitzky: Die Entstr. d. Milz. etc. Anat. Hefte. Vol. 13. 1900.

<sup>3)</sup> J. Janošík: Slezina a pankreas. Rozpravy Č. Akademie cis. Fr. Jos. roč. 4. 1895 a v Ballet. daselbst und Le pancrées et la rate. Bibliogr. anat. Vol. 3. 1895.

und zwar so, daß sie dieselbe direkt vom Darmepithel ableiteten oder durch Vermittelung des Pankreas. Glas<sup>4)</sup> spricht direkt von einer Splenisation eines Teiles von Pankreas. Maurer<sup>5)</sup> hat einen anderen Weg angegeben: es soll die Milz von Zellen, die im Mesenchym sich befinden, aber von dem Darmepithel abstammen, den Ursprung nehmen.

Radford<sup>6)</sup> tritt dieser Angabe Maurers entgegen und zwar deshalb, weil "Cells identical with the intestinal epithelium were to be seen here and there in the mesentery, but were few in number, and easily to be distinguished from the mesenchyme cells among which they lay (Fig. [4]a). In no case were there such cells in the spleen-anlage itself, nor was there any transition . . ." „. . . the spleen in Rana arises from the mesenchyme tissue of the dorsal mesentery, in close connection with the mesenteric artery, as a thickening of the lymphoid tissue which surrounds the wall of the artery at an early stage." Doch ist die Abbildung des jüngsten Stadiums (Fig. 2 l. c.) gänzlich unbeweisend und scheint eher die Herkunft vom Mesothel zu beweisen, indem man keine Verbindung mit „the lymphoid tissue“ sehen kann. Die Abbildungen von älteren Stadien sind für die Milzanlage von keiner Bedeutung mehr.

Bemerkenswert ist die Angabeder Autorin, daß "The coelomic epithelium appears to form the capsule, and perhaps enters into the formation of the reticular network." Für diese Angabe bringt die Autorin nichts Beweisendes.

Andere Autoren betrachten die Milz nur als einen Abkömmling des Mesenchyms und machen keinen Unterschied zwischen Mesenchym und Mesothel und andere sehen die Milzanlage gerade im Mesothel.

Einen vermittelnden Standpunkt vertritt Pinto.<sup>7)</sup> Er hatte zwar nicht die Gelegenheit gehabt eine zusammenhängende Reihe von Säugetierembryonen zu untersuchen und hat eigentlich von verschiedenen Säugern nur einige ältere Stadien gesehen, doch kommt er zu dem Schlusse: „Che la milza nei vertebrati è un organo di origine mesenchimale. — Che l'epitelio coelomatico nella maggioranza di essi partecipa alla sua formazione.“ Ich will hier nicht weiter darauf eingehen, warum Pinto dem Epithel auf der Oberfläche des Milzhüges keine Bedeutung zuschreibt, nur darauf sei hier hingewiesen, dass Pinto angibt, daß die Milz „in tutti i vertebrati sia un derivato del foglietto medio . . . nel senso più lato.“

In meiner angeführten Arbeit habe ich zu beweisen getrachtet, daß die Milz vom Mesothel den Ursprung nimmt, wie es Toldt angegeben

<sup>4)</sup> Glas: Über d. Entw. d. Milz bei Tropidonotus ant. Sitzber. d. k. Akad. Wien. Vol. 109, 1900.

<sup>5)</sup> Maurer: Die erste Anl. d. Milz. etc. Morphol. Jahrb. Vol. 16, 1890.

<sup>6)</sup> Miss M. Radford: Developm. of the spleen. Journ. of Anat. and Physiol. Vol. 42, 1908.

<sup>7)</sup> C. Pinto: Sullo svillupe della milza etc. Arch. ital. di Anat. e di embryol. Vol. III, 1904.



hat. Ich befaßte mich damals mit Embryonen von der Eidechse und fügte hinzu Beobachtungen beim Huhn, Schaf und Menschen.

Nach den bisher erlebten Erfahrungen bin ich jetzt, wie bereits angeführt, bei dem Studium der Milzentwicklung zu weit jüngeren Stadien hinuntergestiegen und gerade dieser Weg scheint mir ein besonderes Licht auf die Milzentwicklung zu werfen und zwar besonders, was die Beziehung zum Mesothel anbelangt. Zum Studium griff ich zu Zieselembryonen, die ich von freilebenden Tieren erhalten habe. Dieses ist wichtig, weil darin die Garantie für die ganz normalmäßige Entwicklung gegeben ist. Ferner besitze ich gerade von diesem Tiere eine ganze Reihe nahe aneinander liegender oder ganz gleicher Stadien und das ermöglicht auch die individuellen Verschiedenheiten und Abweichungen zu erkennen.

Bei diesem Tiere findet man bereits bei Embryonen von 3 mm Länge besondere Verhältnisse des Mesothels, die man in dem ganzen Umfange im Auge halten muß, um die Milzentwicklung dem Verständnis näher zu bringen.

Bei einem der 3 mm langen Embryonen (bezeichnet mit *u*) finde ich, daß das Mesothel zu beiden Seiten des Mesenteriums, wo es nur etwas länger ist und dann an der Oberfläche der Darmwand, eine auffallende Mächtigkeit aufweist. Proximal kann die Verdickung des Mesothels bis zu jener Stelle verfolgt werden, an der die Herzwand der Darmwand anliegt und da schreitet eine kleine Strecke weit das verdickte Mesothel auch auf den Peritonealüberzug des Herzens. Auch noch weiter proximal kann diese Verdickung bis auf den Pharyngealabschnitt zwischen die Viszeralbogen verfolgt werden.

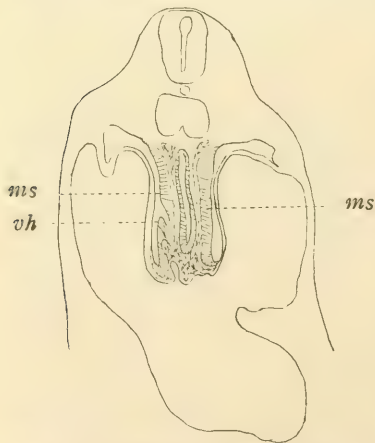


Fig. 1. Embryo etwa 3 mm lang;  
*ms* = Mesothel; *vh* = ventr. Kante.

An der Stelle, an der die beiden Venae omphalomesentericae mit einander verbunden sind, findet man auf der rechten Seite des Mesenteriums eine kleine Rinne (Tab. I. Fig. 1.), die durch das wuchernde Mesothel bedingt ist. Diese Rinne zieht an der dorsalen Seite etwa von der Mitte des freien Mesenteriums ventral bis zu jener Stelle, an der das Herz der Darmwand anliegt. (Textfig. 1.)

Die Rinne zieht etwa über sechs Schnitte und endet mit einer Erhöhung an jener Stelle, an der das Mesothel vom Mesenterium an die anliegende Darmwand übergeht. In dieser Erhöhung (*vh*) ist ein kleiner Venenstamm zu sehen.

Betrachtet man näher die Wucherung des Mesothels im ganzen, so findet man, daß die Proliferation an der linken Seite mächtiger ist

Besonders auffallend ist dieser Unterschied in der Gegend der sich entwickelnden Leber. Hier ist das Mesothel so mächtig, daß es fast das Mesenchym ganz verdrängt und sich bis an das Epithel des Darmrohres anlegt. Man kann aber noch bei diesem Stadium doch eine Spur des zwischen Darmepithel und Mesothel eingeschobenen Mesenchyms beobachten.

Die Leberanlage besteht bei diesem Stadium nur aus zwei hohlen Epithelkanälen, die von der Darmhöhle ausgehen, einander gegenüberliegend. Von dem rechten Kanälchen laufen noch einige solide Sprossen aus. (Fig. 2.)

Auch noch an jener Stelle, an der sich das Darmrohr in die Nabelblase öffnet und nur sozusagen eine Rinne bildet, ist das erhöhte Mesothel an der linken Seite zu sehen, wo es sich noch eine Strecke weit auf der Splanchnopleura weiter zieht, es ist aber in dieser Gegend bereits ziemlich schwach und die Proliferation ist beschränkt. An der rechten Seite ist das Mesothel bereits ganz flach und einschichtig geworden.

Distal von jener Stelle, an der man den Abgang der Leberanlage vom Darne sehen kann, gehen von der linken Vena omphalomesenterica Äste ab, die zwischen das Mesothel und das Darmepithel eindringen in dorsaler Richtung verlaufend; es sind das nur schwache Äste. Auch von der rechten V. omphalomesenterica gehen in dieser Richtung Ästchen ab, die aber bedeutend schwächer sind als jene der linken Seite. An der dorsalen Seite des Darmrohres anastomosieren diese Äste nicht untereinander. Diese Astabgabe von den Vv. omphalomesentericae ist auch noch in jener Gegend zu sehen, in der sich das Darmrohr mit der Nabelblase verbindet. (Fig. 3.)

Die Arteriae omphalomesentericae sind stark und von der rechten geht ein starker Ast in die Wand der Nabelblase.

Bei einem um ein wenig in der Entwicklung vorgeschritteren Embryo (*z*) reicht die Mesothelproliferation proximal soweit als das Cölo-

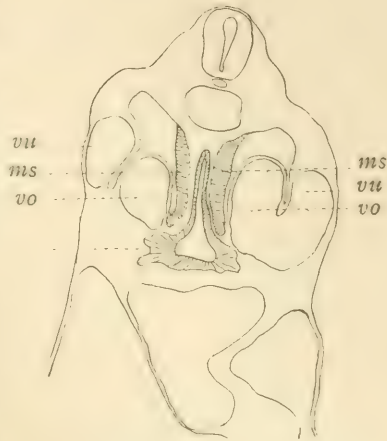


Fig. 2. Vom selben Embryo in der Gegend der sich entwickelnden Leber (*y*). Ungleichheit des Mesothels an beiden Seiten (*ms*); *vo* = Vena omphalomesenterica.

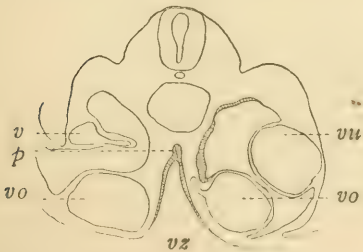


Fig. 3. Von demselben Embryo; der Schnitt ist in der Gegend der Verbindung des Darmrohres mit der Nabelblase *vz* geführt. *vu* = V. umbilicalis; *vo* = V. omphalomesenterica; *p* = die Pankreasanlage.

(Fig. 4.) Auch hier übergeht die Mesothelverdickung eine Strecke weit an das Mesothel der Herzwand dort, wo dieselbe dem Darmrohre anliegt.

Schon in dieser Gegend kann beobachtet werden, daß die Verdickung des Mesothels an der linken Seite eine mächtigere ist, als an der rechten.

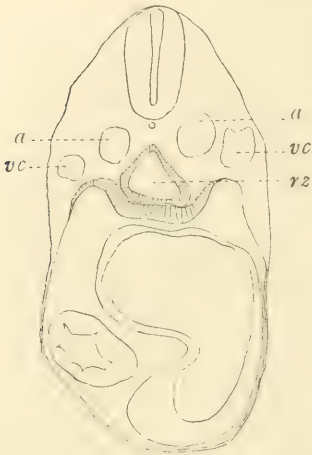


Fig. 4. Etwas weiter entwickelt als der Embryo der Fig. 1.—3. *a* = Aorta; *vc* = Vena cardinalis; *rz* = Verdauungsröhre; *v* = venöser Herzsinus.

Jene Rinne, von der bei dem vorangehenden Embryo (*u*) an der rechten Seite des Mesenteriums gesprochen wurde, ist weiter entwickelt: sie ist tiefer und breiter. Am Schnitte ist sie mit einer dorsalen und ventralen Kante begrenzt.

Bei dem jüngeren Stadium (*u*) ist eigentlich nur die ventrale Kante mehr ausgebildet, an der dorsalen Abgrenzung der Rinne geht dieselbe nur durch eine leichte Hervorwölbung in die Umgebung über. In diesem Stadium ist die ventrale Kante weniger hervorstechend, obwohl in derselben ein Venenast zu sehen ist.

(Fig. 5), (Taf. I. Fig. 2.) Unter die dorsale Kante dieser Rinne zieht eine Einstülpung proximal und man kann dieselbe über drei hintereinander gehende Schnitte verfolgen. Sie zieht zwischen dem Mesothel und dem Darmepithel. Über die ventrale Kante setzt sich das verstärkte Mesothel auch auf die Herzwand fort, wie bei dem jüngeren Stadium angeführt wurde.

Die Vv. omphalomesentericae sind weit, so daß sie das proximal von der Leberanlage gelegene Cölon fast ganz ausfüllen. Das Mesothel ist, wie angeführt, hoch und zwar auf beiden Seiten des Mesenteriums und des Darmrohres und bleibt hoch auch bis über jene Erhabenheiten, die durch die Entwicklung der Lunge bedingt sind.

Zwischen dem Mesothel und dem Darmepithel befindet sich in den proximalen Partien etwas Mesenchym, je weiter man aber distal fortschreitet, umso mehr ist das Mesenchym durch das wuchernde Mesothel verdrängt, so daß in der Gegend der sich entwickelnden Leber nur hie und da zwischen

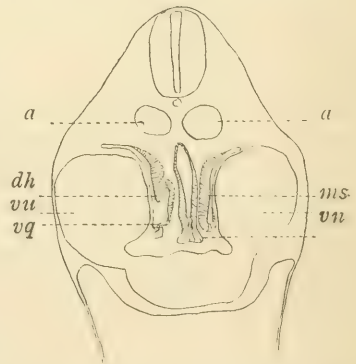


Fig. 5. Ein Schnitt in der sich entwickelnden Herzgegend von demselben Embryo; *a* = Aorta; *vu* = V. umbilicalis; *ms* = Mesothel; *vh* = ventrale Kante; *dh* = dorsale Kante.

Mesothel und Darmepithel eine Mesenchymzelle zu treffen ist. Erst dann, wo sich das Darmrohr in die Nabelblase öffnet und das Mesothel niedriger



geworden ist, drängt sich zwischen beide mit den Ästen der *V. omphalomesenterica sinistra* und weiter auch mit den Ästen der *V. omphalomes. dextra* etwas Mesenchym hinein.

In diesem Stadium verbinden sich beide Venenäste dorsal vom Darmrohre durch schwache Anastamosen untereinander und zwar an jener Stelle, an der die erste Wucherung des Darmepithels als Pankreasanlage zu finden ist.

Diesem Stadium (*z*) steht sehr nahe jenes vom Embryo *bn*. Alle bisher angeführten Embryonen sind etwa 3 mm lang, doch ist der Grad der Entwicklung nicht ganz gleich, aber gerade deshalb kann eine zusammenhängende Reihe der Entwicklungsphasen zusammengestellt werden.

Auch bei diesem Embryo *bn* reicht das hohe Mesothel proximal so weit, als das Cölom reicht und zwar wieder nur dort, wo das Mesothel die Darmwand und ihr Mesenterium bedeckt. Man kann in dem Mesothel hier keine besondere Anordnung finden. Weiter distal, wo ein längeres Mesenterium sich vorfindet, ist das Mesothel stark, kompakt, so daß dasselbe einen starken Mesothelstreifen vorstellt, der bis zum Darmepithel reicht und das hier früher befindliche Mesenchym fast ganz verdrängt. Es bleibt hier vom Mesenchym nur hie und da eine Zelle übrig und ein schwaches Blutgefäßchen. Diese starke Wucherung des Mesothels, das das Mesenchym verdrängt und bis zum Darmepithel reicht, ist kaum ohne jede weitere Bedeutung. Man muß gerade aus diesem Verhalten des Mesothels darauf schließen, daß sich wichtige Entwicklungsvorgänge vorbereiten, bei denen dem Mesothel die größte Wichtigkeit zufallen wird. Es zeigt aber das Verhalten des Mesothels zum Mesenchym ganz klar, daß man beide nach der genetischen Seite nicht für gleichwertig betrachten und sich der Benennungen promiscue bedienen darf. Es wird auf diese Beziehungen weiter noch eingegangen werden.

Die bei jüngeren Stadien an der rechten Seite des Mesenteriums im Mesothel und auch das Mesenchym eindruckende Rinne ist breiter und tiefer geworden. Der von dieser Rinne proximal ausgehende Fortsatz kann auf sechs Schnitten verfolgt werden und endet ebenfalls blind. Die Rinne und die von ihr ausgehende Ausstülpung üben einen Druck an das Darmrohr aus, das infolgedessen etwas plattgedrückt und gegen die linke Seite verdrängt wird. (Fig. 6.)

Bei dem jüngeren Stadium trat die dorsale Kante der Rinne mehr hervor als die ventrale, die bei dem Stadium *x* kaum zu bemerken war. Distal verschwinden beide Kanten und es öffnet sich die proximal in eine blinde Ausstülpung auslaufende Rinne in die gemeinsame Cölohmöhle noch proximal von der Leberanlage.

Bei diesem Embryo ist zu sehen, daß auch an der linken Seite ein Anlauf zur Bildung einer Rinne besteht, obwohl hier nur die ventrale Kante etwas vorspringt. Aber es verhält sich mit dieser ventralen Kante bei jüngeren Stadien ebenfalls so auch auf der rechten Seite. (Fig. 1.)

In der Gegend der Leberanlage ist das Mesothel mächtig, reicht aber nur an der linken Seite bis zum Darmepithel. An der rechten Seite ist das Mesothel niedriger und es befinden sich zwischen demselben und dem Darmepithel einige Mesenchymzellen. Dieser Unterschied ist auch weiter distal zu sehen, wie bei jüngeren Stadien angeführt wurde und zwar bis in jene Gegend, wo sich das Darmrohr in die Nabelblase öffnet.

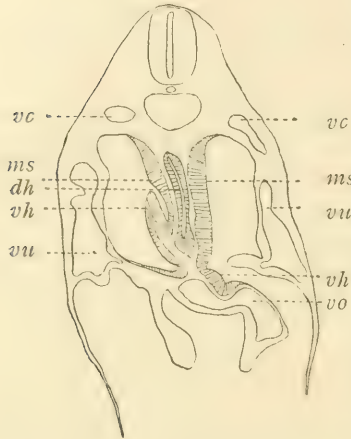


Fig. 6. Von einem etwas in der Entwicklung vorgeschrittenen Stadium als Fig. 5. *vc* = V. cardinalis; *vu* = V. umbilicalis; *vo* = V. omphalomesenterica; *vh* = ventrale — *dh* = dorsale Kante der Bursa omentalis.

Die venösen Äste dringen von der linken V. omphalomesenterica bereits Geflechte bildend zwischen das hohe Mesothel und das Darmepithel und zwar dicht hinter der Leberanlage. Auch von der rechten V. omphalomes. gehen zwischen das dünne Mesothel und das Darmepithel Äste ab, die mit jenen der linken Seite anastomosieren und zwar dorsal vom Darne, eigentlich dorsal von der in die Nabelblase sich fortsetzenden Darmrinne.

An keiner Stelle kann bisher von einer Milzanlage gesprochen werden, obwohl der Anstoß dazu bereits durch das Auftreten der Venengeflechte gegeben ist. Von der Aorta aus geht hier ein Stämmchen ventral gegen die Darmrinne, es ist aber unmöglich die kleinen Äste weiter zu verfolgen. Es ist das höchstwahrscheinlich die A. coeliaca. Man kann bisher noch nicht von einer A. lienalis, gastrica etc. sprechen, weil diese Gefäße nicht nur in ihren Anfängen, sondern auch durch ihr Verhalten dazu gar nicht den Anlaß geben. Doch ist das in dorso-ventraler Richtung erweiterte Darmrohr proximal von der Leberanlage als die Anlage des Magens anzusehen.

Ein etwas älterer Embryo ist mit *t* bezeichnet. Proximal dehnt sich bei diesem das wuchernde Mesothel wieder bis in die Gegend, in der der Sinus venosus dem Darmrohre anliegt und kann als erhöht auch noch auf den Überzug des Sinus verfolgt werden. Es ist an der linken Seite eine stärkere Wucherung des Mesothels zu verzeichnen als an der rechten Seite; es ist das auffallender als bei jüngeren Stadien. In der Herzgegend ist durch das Mesothel das Mesenchym ganz verdrängt und in dieser Gegend ist der Unterschied auf beiden Seiten am auffälligsten.

Distal von der Leberanlage ist die Pankreasanlage als eine Verdickung des Darmepithels zu sehen, die von jener Stelle ausgeht, an der sich wie in einer Kante die beiden Seiten des Darmrohres vereinigen. Zwei Schnitte weiter distal öffnet sich das Darmrohr in die Nabelblase.

In der Gegend der Pankreasanlage ist das Eindringen der Äste von der V. omphalomesent. zwischen das hohe und wuchernde Mesothel und das Epithel der Darmwand am auffälligsten und es ist wieder an der linken Seite bedeutender als auf der rechten. Beide Äste vereinigen sich dorsal von der Darmwand und es zieht in dieses Geflecht, das sie bilden, ein arterielles Stämmchen von der Aorta, wie bei dem vorangehenden Embryo.

Jene bei jüngeren Stadien an der rechten Seite des Mesenteriums beschriebene Rinne ist tiefer geworden und die von ihr proximal ausgehende Ausbuchtung ist länger: man kann dieselbe an zehn Schnitten zwischen dem Mesothel und dem Darmepithel verfolgen. Diese Ausbuchtung ist von den Seiten her abgeplattet und stellt somit am Querschnitte einen Schlitz mit dorsaler und ventraler Rinne dar. Um die dorsale Rinne ist das Mesothel höher. Dort, wo sich die Ausbuchtung in das Cölo-

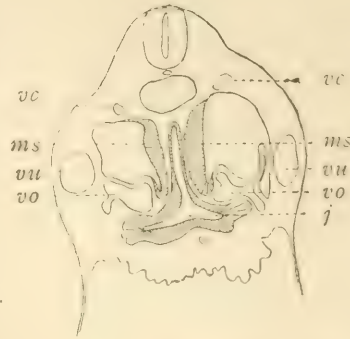


Fig. 7. Von einem weiter vorgeschrittenen Embryo als die Fig. 6. *vc* = V. cardinalis; *vu* = V. umbilicalis; *vo* = V. omphalomesenterica; *ms* = Mesothel; *j* = Leberanlage.

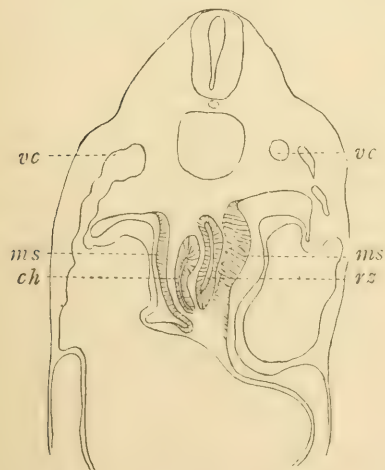


Fig. 8. Ein etwas längerer Embryo als 3 mm. Der Schnitt ist dicht proximal von der Vereinigungsstelle der beiden Kanten geführt. *ch* = die proximale Cölo- ausstülpung; *vc* = V. cardinalis; *ms* = Mesothel; *rz* = Darm.

om die dorsale Rinne ist das Mesothel höher. Dort, wo sich die Ausbuchtung in das Cölo- m öffnet, tritt wieder die dorsale Kante stärker hervor, die ventrale ist fast ganz flach. An der linken Seite kann man keine Anzeichen einer Rinne sehen, nicht einmal so, wie bei dem früher beschriebenen Embryo. Es ist möglich, daß dieses durch das Wachstum des Mesenteriums in ventraler Richtung bedingt ist, oder es handelt sich nur um individuelle Verschiedenheiten, die nicht immer zu weiteren Abweichungen führen.

Der Embryo *v* ist um etwas länger als 3 mm und ist auch weiter entwickelt. Die Verhältnisse des Mesothels sind im proximalen Abschnitte dieselben geblieben. Die Cölo- ausstülpung, die sich entlang der rechten Seite des Darmes zieht, kann auf 12 Schnitten getroffen werden. Im distalen Abschnitte ist diese Ausstülpung groß und verdrängt deshalb das Darmrohr noch mehr gegen die linke Seite zu, als es bei jüngem Stadium der Fall war. Die Beziehungen der Ausstülpung und ihres

Mesothels sind in der Fig. 8 zu sehen. Das Mesothel ist in dieser Coelom-



ausstülpung höher am Mesenterium und an der Darmwand und zieht in dieser Beschaffenheit über die proximale Rinne auch auf das Septum,

das in dieser Gegend die Cölomausstülpung von der übrigen Cölomhöhle abgrenzt. Weiter distal, wo diese Ausstülpung in die Rinne übergeht und wo also das Septum nicht vorhanden ist, kann man kein Verdrängen des Darmes nach der linken Seite zu beobachten. (Fig. 9.)

Am Übergange in die Rinne ragt die dorsale Kante dieser Rinne mehr hervor.

Schreitet man etwas weiter distal, so gelangt man in die Gegend der sich entwickelnden Leber. Dieselbe besteht in diesem Stadium aus zwei in entgegengesetzter Richtung von dem Darne abgehenden hohlen Sprossen. Von diesen Sprossen fangen aber weitere Zellbälkchen sich zu bilden an.

Nachdem in distaler Richtung die Leberanlage geschwunden ist, erscheint die Pankreasanlage. Dieselbe ist nur

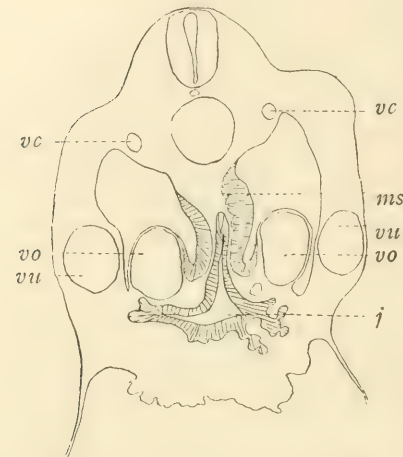


Fig. 9. Ein Schnitt aus der Lebergegend desselben Embryo wie Fig. 8. *vc* = V. cardinalis; *vu* = V. umbilicalis; *vo* = V. omphalomesenterica; *ms* = Mesothel; *j* = die Leber.

durch eine Verdickung des Epithels in der dorsalen Rinne des erweiterten Darmes gebildet. Diese Verdickung ist etwas gegen die rechte Seite gebogen (Fig. 10) und reicht bis zu dem Mesothel der rechten Seite, das hier ein wenig erhöht erscheint. In der Fig. 10 ist an dieser Stelle das Mesothel infolge der Form der Rinne schiefgetroffen.

Das Mesothel der linken Seite ist bedeutend hoch und zwar schon in dem proximal von der Leberanlage gelegenen Abschnitte, wie in der Fig. 8 zu sehen ist. Diese Verdickung ist in der Gegend der Leber- und Pankreasanlage besonders stark. Auf den ersten Blick scheint es, daß zwischen das Mesothel und das Darmepithel etwas Mesenchym eingeschoben ist und zwar von der ventralen Seite her. Verfolgt man aber die Verhältnisse des Mesothels und des vermeintlichen eingeschobenen Mesenchyms, so kann man sich

überzeugen, daß das verdickte Mesothel bis zu dem Darmepithel reicht

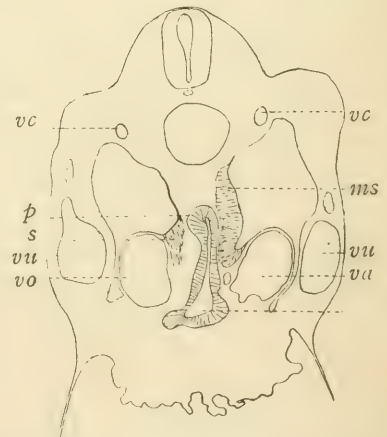


Fig. 10. Ein etwas weiter distal geführter Schnitt desselben Embryo; *vc* = V. cardinalis, *vu* = V. umbilicalis; *vo* = V. omphalomesent.; *p* = Pankreasanlage; *s* = Schiefchnitt durch das Mesothel.

daß nur das Aussehen und Gefüge desselben in der Tiefe ein anderes ist, als in den mehr oberflächlich gelegenen Schichten. An der Oberfläche haben die Zellen die Zylinderform beibehalten und proliferieren stark in die Tiefe, was man aus der Lage der mitotischen Figuren erschließen und sicherstellen kann. In der Tiefe haben die Mesothelzellen eine rundlichere Form, an einzelnen Stellen sind sie zu Nestern gruppiert und sind nicht so dicht aneinander gelagert, wie an der Oberfläche und in dem unter der Oberfläche gelegenen Abschnitte. Dadurch wird die scheinbare Mesenchymeinlagerung verursacht, obwohl diese Zellen direkt von den Mesothelzellen abstammen und sie übergehen in die oberflächlicheren Lagen ganz ohne Grenze.

Dieses ganze vom Mesothel abstammende Gewebe ändert sich besonders in jenen Entwicklungsstadien und an der Stelle, in denen jene erwähnten Venengeflechte mächtiger geworden sind.

Diese Venengeflechte sind in diesem Stadium etwas mehr entwickelt, sie sind aber in denselben Beziehungen zu den Vv. omphalomesentericae geblieben. In der Gegend der Pankreasanlage sind die Geflechte etwas schwächer als etwas distal von dieser Stelle.

In diesem Abschnitte ist das Mesothel auf der linken Seite niedriger und hier kann man ganz gut sehen, daß zwischen das Mesothel und das Darmepithel mit den kleinen Venenstämmchen auch etwas Mesenchym eindringt. Aber auch von der dorsalen Seite her kann das Eindringen des Mesenchyms beobachtet werden.

An der Textfigur 11 von diesem Embryo kann man sehen, wie sich die zwischen beiden Venen ausgespannten Ästchen verhalten. Es ist in diesem Stadium fast bereits dazu gekommen, was man bei älteren Stadien vorfindet, nämlich daß es außer den in die Darmwand eindringenden Netzen, besonders an der linken Seite, zu einer direkten Verbindung zwischen den Vv. omphalomesentericae gekommen ist. Man kann auch sehen, daß bis in diese Gegend das an der linken Seite wuchernde Mesothel herreicht, obwohl es bereits niedriger geworden ist. An der rechten Seite ist es mehr proximal bereits ganz flach geworden.

Bei einem etwas älteren Embryo (*bb*) (Fig. 12) kann man ein Stärkerwerden des Mesothels proximal erst in jener Gegend wahrnehmen, in der ventral dem Darms das Herz anliegt, wo es denselben Charakter behaltend auch auf den Überzug der Herzwand eine kurze

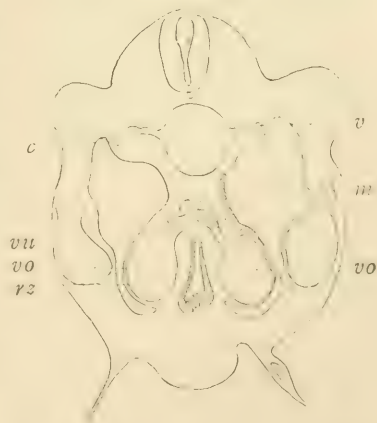


Fig. 11. Ein Schnitt desselben Embryo. Der Anfang der Bildung von Venengeflechten zwischen beiden Vv. omphalomesentericae (*v0*); *vu* = V. umbilic.; *vc* = V. cardinalis; *vz* = der Darm.

Strecke weit übergeht. Erst distal von dieser Gegend wird das Mesothel besonders an der linken Seite höher; auch an der rechten Seite wird es etwas höher, aber weit weniger als an des linken.

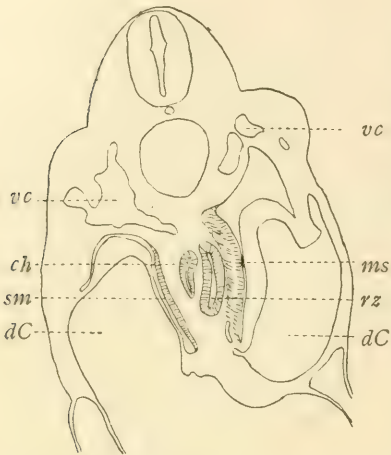


Fig. 12. Von etwas weiter entwickeltem Embryo (3.3 mm); *vc* = V. cardinalis; *ch* = proximale Ausbuchtung der Bursa omentalis; *ms* = Mesothel; *dC* = Ductus Cuvieri.

Bei diesem Embryo, obwohl derselbe makroskopisch kaum größer erscheint (etwa 3.3 mm,) als die bisher angeführten Embryonen, deren Länge etwa 3 mm beträgt, ist bereits die Lungenanlage zu finden. Bis in diese Gegend reicht die erwähnte Cölomausstülpung und zwar als ein schmaler Spalt, der durch niedriges Mesothel ausgekleidet ist. Dieser Spalt ist entsprechend der Biegung der Speiseröhre abgelenkt und liegt dorsal von der rechten Lungenanlage. Weiter distal ist in dieser Cölomausbuchtung das Mesothel etwas erhöht in derselben Art, wie bei jüngerem Embryo erwähnt wurde. Nirgends erreicht das Mesothel an der rechten Seite jene Stärke, wie an der linken.

Wenn proximal von der Leberanlage sich die Cölomeinstülpung in die Rinne geöffnet hat, so geht das erhöhte Mesothel eine kleine Strecke weit über die proximale Kante und zwar bis zur Basis derselben.

Weiter distal bedingt diese Rinne eine bedeutende Hervorwölbung des Mesenteriums und des Darmes gegen die linke Seite. Dort, wo die Verbindung der Leberanlage mit dem Darms und auch die Pankreasanlage getroffen ist, schwindet die Rinne und zwar durch die mächtig vorspringende V. omphalomesent. dextra; sie wird auch durch die von dieser Vene abgehenden Äste verdrängt. (Fig. 13.) Dadurch ist auch das Mesothel, soweit es das Mesenterium bedeckt, verdrängt.

An der linken Seite bleibt das Mesenterium, das durch die Einstülpung und durch die Rinne nach der linken Seite zu verdrängt wurde, in dieser Lage auch dort, wo die Rinne durch die V. omphalomesent. verdrängt war.

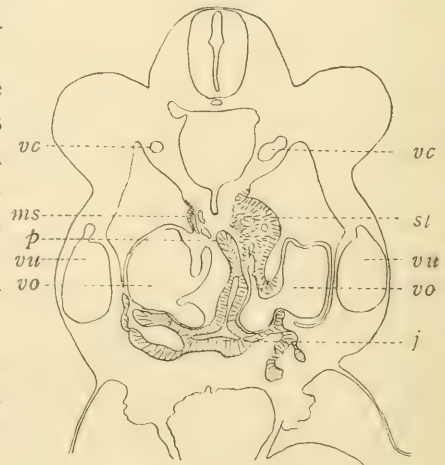


Fig. 13. Etwas weiter entwickelter Embryo als jener der Fig. 12. *vc* = V. cardinalis; *sl* = Milz; *ms* = Mesothel; *vu* = V. umbilicalis. *vo* = V. omphalomesent.; *j* = Leber *p* = Pankreasanlage.



In dieser Gegend kann man auf der linken Seite der Mesenteriums eine bedeutende Erhöhung beobachten, die durch das wuchernde Mesothel gebildet wird. Das Mesothel und seine Derivate reichen bis zu dem Darmepithel und der Pankreasanlage. In dieses vom Mesothel abstammende Gewebe wachsen Äste von der linken V. omphalomesent. Diese Gefäße bilden ein ziemlich dichtes Netz und reichen fast dicht unter die oberflächlichsten Lagen des Mesothels. (Vergl. Taf. III. Fig. 8.) Dadurch kommt es zustande, daß man den Eindruck bekommt, daß die Gefäße zwischen das Mesothel und das Mesenchym gelagert erscheinen. Vergleicht man aber die ganze Reihe jüngerer Embryonen, so sieht man, daß die Gefäße in das wuchernde Mesothel und seine Abkömmlinge gelagert sind. Auch noch jetzt hängt das tiefer gelegene Gewebe überall mit den oberflächlichen Schichten des Mesothels zusammen.

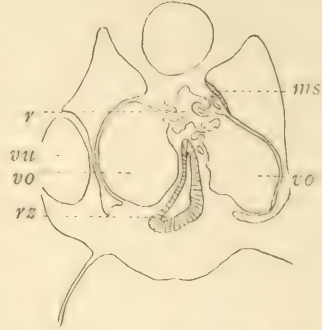


Fig. 14. Von demselben Embryo. Einschnitt aus der Gegend der vereinigten beiden Vv. omphalomesentericae (v).

Etwas weiter distal, wenn in den Schnitten die Pankreasanlage geschwunden ist, verschwindet auch diese durch das wuchernde Mesothel gebildete Erhöhung ziemlich rasch, es bleibt aber das erhöhte Mesothel eine kurze Strecke weit bestehen und wird schließlich platt. Das Gewebe, das vom Mesothel den Ursprung genommen hat, schwindet fast zugleich mit der Erhöhung. Dieser Vorgang wird eigentlich noch dadurch unterstützt, daß die Venengeflechte der linken Seite mächtiger werden und sich schließlich mit dem Venengeflechte der rechten Seite, das ebenfalls an Stärke zugenommen hat, verbinden. Diese Verbindung wird weiter distal durch ein mächtiges Gefäß zum Teil ersetzt (Fig. 14 und 15).

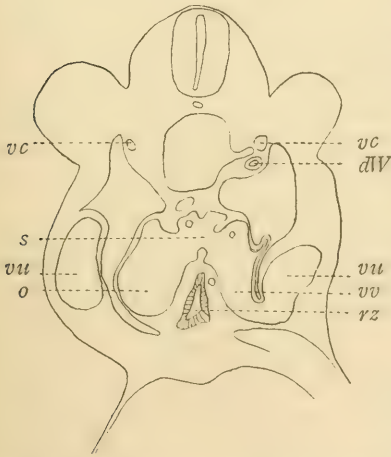


Fig. 15. Ein Schnitt von demselben Embryo; *s* = die Verbindung der beiden Vv. omphalomesent. (*vo*); *vu* = V. umbilicalis; *vc* = V. cardinalis; *d. W.* = Wolfscher Gang.

Überraschend ist eine Verbindung dieser Venengeflechte durch einen Ast mit der V. cardinalis, wovon man sich bei dem Durchsuchen aller Schnitte zwischen den Fig. 12 und 14 überzeugen kann.

In diese proximal gelegenen Venengeflechte mündet auch ein Ast von der Aorta. Auch weiter distal von der mächtigen Verbindung beider Vv. omphalomesent. kann mehr dorsal gelegen das Venenge-

flecht verfolgt werden und hier mündet in dasselbe noch ein Ast von der Aorta.

Diese mächtige Verbindung der starken Vv. omphalomesentericae unterliegt, obwohl sie immer von den Venengeflechten ausgeht, ziemlich großen individuellen Schwankungen. Bei dem Embryo *bz* (3·5 mm) liegt an der Stelle der mächtigen Verbindung nur ein relativ schwacher Ast, nur wenig stärker als bei dem Embryo *v* (Fig. 11), obwohl die Pankreas- und Leberentwicklung weiter vorgeschritten erscheint als bei dem Embryo *bb*; andere Verhältnisse weichen nicht auffallend bei diesem Embryo gegenüber dem Embryo *bb* ab.

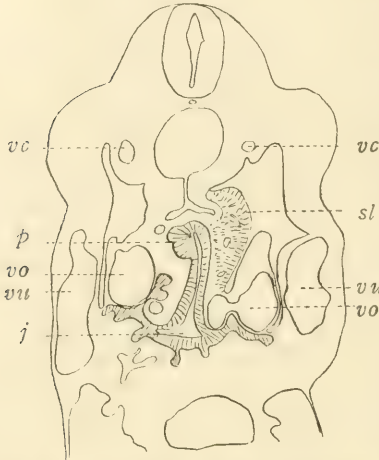


Fig. 16. Embryo 3·6 mm lang. *vc* = V. cardin.; *vu* = V. umbilic.; *vo* = V. omphalomesent.; *p* = Pankreas; *j* = Leber; *sl* = Milz.

Auch noch bei einem Embryo von 3·6 mm (*bm*) hat sich nicht viel verändert. Der Hügel an der linken Seite des Mesenteriums ragt stärker in das Cölom hinein besonders in der Gegend der Pankreasanlage und auch das Wuchern des Mesothels ist hier am stärksten. (Fig. 16.) Das Gewebe des Hügel ist von Venennetzen durchsetzt. (Taf. I. Fig. 4 und Taf. III. Fig. 8.) Diese Venennetze sind auch an

der rechten Seite zu sehen aber viel schwächer. Das Mesothel ist an dieser Stelle bereits ganz flach, wiewohl es in der Rinne des Mesenteriums, von der die proximale Ausbuchtung ausgeht, noch fast zylindrisch ist.

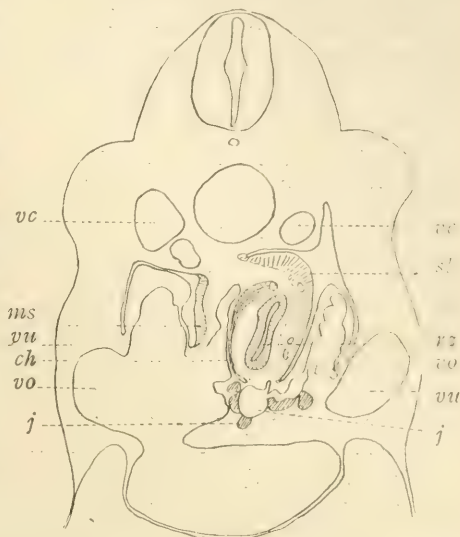
Bei diesem Embryo ist auch die auffallende Veränderung in den gegenseitigen Beziehungen des Leberausführungsganges und des sich bildenden Pankreasausführungsganges zu bemerken. Die Mündung des Pankreasausführungsganges ist bedeutend proximal verschoben. Dieses Verhältnis ist, wie ich gezeigt habe,<sup>8)</sup> durch das ungleichmäßige Wachstum der Darmwand bedingt. Das Pankreas kann man an 10 Schnitten verfolgen. Die Leber besteht bereits aus verschieden verästelten Zellbalken, die dicht den Wänden der beiden Vv. omphalomesent. anliegen.

In das venöse Netz mündet hier ein von der Aorta ausgehender Ast, der sich gleichmäßig in dem Mesothelhügel und auch gegen die Leberanlage zu verästelt. Die Venennetze werden distal von der Pankreasanlage stärker und es kommt hier zu so einer Verbindung, wie bei dem Embryo *bb*

<sup>8)</sup> Janošík: Poměr vývodu jatern. a pankr. u člověka. Rozpravy und Bulletin České Akad. 1908, Sur les rapports du cond. choléd. et des cond pancréatiques chez l'homme. Archives de Biol. Vol. 24. 1908.

(Fig. 14). Zu einer so mächtigen Verbindung, wie man bei diesem Embryo *bb* weiter distal vorfindet (Fig. 15), kommt es bei dem Embryo *bm* nicht. Es zieht sich bei dem Embryo *bb* weiter distal das venöse Netz eine Strecke weit auf beiden Seiten der Darmwand, aber das Mesothelgewebe hat aufgehört und die oberflächlichen Mesothelschichten sind zu einem einschichtigen, flachen Mesothel geworden.

Die proximal ziehende Cölo-  
ausbuchtung reicht auch bis zu  
der Lungenanlage. Sie ist schlitz-  
förmig und ist dorsal von der linken  
Lungenanlage gelegen. In das Sep-  
tum, das diese Ausbuchtung von  
der übrigen Cölohmöhle trennt,  
wächst ein starker Ast der V. om-  
phalomesent. dextra und zwar an  
jener Stelle, an der distal diese Coelo-  
mausbuchtung sich in die Rinne  
fortsetzt; das ist proximal von der  
Leberanlage.



Nach dem Studium dieser Fig. 17. Embryo 4.5 mm lang. *vc* = V. car-  
dinalis; *vo* = V. omphalomesent.; *ch* = Cölo-  
wicklung folgenden Stadien kann ausbuchtung; *j* = Leber; *ms* = Mesothel.  
man zu älteren Stadien übergehen.

Bei dem Embryo *bg* von 4.5 mm Länge (Fig. 17) ist die Entwicklung  
schon ziemlich vorgeschritten und es hat sich bereits eine ansehnliche Bursa  
omentalis ausgebildet, als deren Ausgang jene bei jüngeren Embryonen  
angegebene Rinne anzusehen ist. Es ist nötig hier von diesem Vorgange  
etwas weiter zu berichten.

Es ist schon bei dem Embryo *u* darauf aufmerksam gemacht worden,  
daß sich eine Rinne an der rechten Seite des Mesogastriums zu bilden  
anfängt, die sich besonders dadurch bemerkbar macht, daß bei der  
Vereinigung der beiden Vv. omphalomesentericae zum Venensinus des  
Herzens ventral eine höhere Kante vorragt, die durch erhöhtes Mesothel  
gedeckt ist. In dieser Kante ist ein kleines venöses Gefäß zu beobachten.  
Diese Rinne wird bei älteren Embryonen immer tiefer, es erhebt sich  
nämlich gegen die ventrale Kante später eine Kante von der dorsalen  
Seite, die bald stärker wird (Fig. 5), bis schließlich sich diese beiden Kanten  
vereinigen. So entsteht eine Scheidewand (vergl. Fig. 8), die einen Teil  
des Cöloms abschneidet. Dadurch ist eine proximal von der Rinne aus-  
laufende Ausbuchtung entstanden, die bis in die Gegend der Lungenanlage  
verfolgt werden kann.

Schon durch die Bildung der Rinne, aber noch mehr durch das Zu-



standekommen der Ausstülpung ist der Darm und später auch sein Mesenterium nach der linken Seite zu gedrängt. (Fig. 18.) Weiter distal ist in dieser ventralen Kante, die die Rinne begrenzt, der starke Stamm der *V. omphalomesent. dextra* gelagert von Leberzellbalken umgeben. Es ist eigentlich der ventrale Teil der Rinne stark vertieft und verdrängt weit das Mesogastrium und mit demselben den auf seiner linken Seite befindlichen Hügel stark nach der linken Seite zu. Dieser Hügel ist, wie bereits angeführt, durch Abkömmlinge des Mesothels gebildet und in dieses Mesothelgewebe sind Venennetze eingelagert. Das Darmrohr ist nicht nur nach links, sondern auch ventral verdrängt. Diese Rinne mit der Ausbuchtung ist die *Bursa omentalis*.

Die proximal verlaufende Ausbuchtung der *Bursa omentalis* reicht auch hier bis in die Lungengegend, legt sich wie ein Spalt um den Ösophagus bis an seine ventrale Seite reichend herum und liegt immer noch dorsal von der Anlage des rechten Bronchus.

Die Verhältnisse des Mesothels sind bei diesem Stadium kurz folgende:

Proximal kann man ein stärkeres Mesothel wieder in der Gegend, in der das Herz der Darmwand anliegt, vorfinden und es zieht sich eine Strecke weit auf die Herzwand, doch ist diese Erhöhung nur auf die linke Seite beschränkt. Auf der rechten Seite ist hier das Mesothel ganz flach, erst weiter distal wird es etwas höher und das erstreckt sich über die Scheidewand bis in die Rinne der *Bursa omentalis*.



Fig. 18. Von demselben Embryo wie Fig. 17. *vc* = *V. cardinalis*; *vu* = *V. umbilicalis*; *vo* = *V. omphalomesent.*; *sl* = Milz; *rz* = Darm; *j* = Leber.

An der linken Seite erhöht sich das Mesothel in distaler Richtung viel schneller und erreicht die größte Mächtigkeit in jenem Streifen, der am Schnitte als ein Hügel erscheint. (Fig. 18.)

In diesem Mesothelstreifen sind die venösen Geflechte in den oberflächlichen Schichten des Mesothels gelagert, so daß das vom Mesothel gelieferte, weiter in der Tiefe gelegene Gewebe das Mesenchym vortäuscht. Die Zellen dieses vom Mesothel abstammenden Gewebes fangen bei diesem Stadium sich um die Gefäße zu ord-

nen an, so daß sie um dieselben ganze Scheiden bilden.

Die Leber ist, wie in den Fig. 17 und 18 zu sehen ist, schon ziemlich weit entwickelt und es sind die Leberzellbalken um die Gefäße so gelagert, daß sie ganz an ihr Endothel reichen und bilden so ähnliche Scheiden um die Gefäße, wie die Zellen des vom Mesothel abstammenden Gewebes.

Die Pankreasanlage bildet immer noch einen soliden Zellzapfen, der nach der rechten Seite zu abgebogen ist. Auch hier geht von der Aorta ein Gefäß ab, das einen Ast in den Mesothelhügel, und einen zweiten in die venösen Netze der Leberanlage aussendet.

Distal von der Pankreasanlage wird das Mesothel schnell dünner, doch die oberflächlichste Schichte wuchert noch eine Strecke weit, wird aber schließlich auch ganz flach und einschichtig. Die venösen Netze des Hügel werden immer weiter dorsal und nach der linken Seite zu verschoben, bis endlich die starke Verbindung der beiden Vv. omphalomesent. auftritt.

Nach dem, was angeführt, kann man die älteren Stadien schon schneller überblicken. Bei den Embryonen *ad* (4·5 mm), *cc* (etwa 4·5 mm), *c* (4·83 mm) hat sich wenig vom wesentlichen geändert. Erst bei dem Embryo *ag* (4·98 mm) kann man wichtigere Veränderungen antreffen.

Die proximal gerichtete Ausbuchtung der Bursa omentalis hat eine Veränderung dadurch erfahren, daß sich der dor-ale spaltförmige Abschnitt durch eine Scheidewand von dem ventralen Abschnitte getrennt hat. Der am meisten proximal reichende Teil dieser Ausbuchtung, der dorsal von der rechten Lungenanlage gelegen war, liegt nun ventral. Man kann bei den Embryonen diese Veränderung Schritt für Schritt verfolgen und sie ist bei diesem Embryo schon fast ganz vollendet, man kann aber dennoch den Rest der dorsalen Spalte sehen.

In distaler Richtung ist am auffälligsten das Auswachsen der Äste der V. omphalomesenterica dextra und der Leberzellbalken in die Scheidewand, die das Cölon und die proximale Ausbuchtung der Bursa omentalis trennt. Dadurch wird der bei der Leberanlage liegende Teil dieser Ausbuchtung bedeutend verengt und es ist das Mesogastrium und der Magen stark nach der linken Seite zu verdrängt. Dieses Verdrängen fällt besonders in jene Gegend des Mesogastriums, in der an der linken Seite des Mesogastriums die mesotheliale Erhöhung sich befindet. Gegen dieselbe wächst auch die Pankreasanlage.

Hier ist auch der Magen stark distal verdrängt. (Fig. 19.)

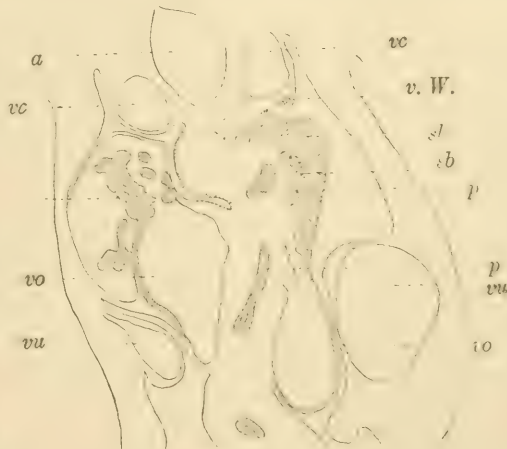


Fig. 19. Embryo 4·98 mm lang. *a* = Aorta; *vc* = V. cardin.; *vu* = V. umbilic.; *vo* = V. omphalomesent.; *vW* = ductus Wolffii; *sl* = Milz; *p* = Pankreas; *j* = Leber; *rz* = Darm; *sb* = ein Nest von Mesothelzellen.

Aus dem venösen Netze der *V. omphalomesent. dextra* gehen auch Äste in die Magenwand und in das Mesogastrium hinein.

Das verdickte Mesothel reicht nicht so weit proximal, nicht einmal auf der linken Seite, wie bei jüngeren Embryonen. Erst weiter distal von jener Gegend, in der sich die Lungenanlage befindet, fängt sich das flache einschichtige Mesothel in kubisches umzuwandeln an und wird erst noch weiter distal zylindrisch. Hier findet man auch das erste Zeichen einer Wucherung, die dann rasch zunimmt und wird in der Pankreasgegend am mächtigsten. Das hochgewordene Mesothel ist auch eine Strecke weit an der Magenwand zu finden, es wuchert hier aber weniger und erreicht nicht die größte Konvexität der Magenwand.

Auf der rechten Seite des Mesenteriums und auch in der Ausbuchtung bleibt es weiter distal niedrig, so wie auf der linken Seite, wird aber dann auch etwas höher, doch nur in einer kleinen Ausdehnung, so daß es bereits dort, wo sich die Bursa omentalis in das Cölom öffnet, kubisch wird. Aber gerade dieser Gegend entsprechend wuchert das Mesothel der linken Seite am stärksten. Es geht aber die Wucherung (Proliferation) nicht gleichmäßig vor sich, sondern es wuchern die oberflächlichen Mesothelzellen sozusagen gruppenweise.

Die in das Mesothelgewebe eindringenden venösen Netze sind von Abkömmlingen des Mesothels scheidenartig umgeben. Die Zellen, die die Gefäße umschließen, hängen stellenweise noch mit dem oberflächlichen Mesothel zusammen. Wie angeführt, liegen diese Zellen dem Endothel der venösen Netze so dicht an, wie die Leberzellen auch der Gefäßwand so dicht anliegen, daß man zwischen beiden kein Mesenchym vorfindet. Es liegen aber, auch ohne direkt Gefäße einzuschließen, in dem Mesothelgewebe Herde von Mesothelzellen, wie in der Fig. 19 schematisch angedeutet. In dieser Fig. handelt es sich um eine größere Zellinsel, die am Schnitte walzenförmig aussieht.

Das Pankreas ist bei diesem Embryo schon weit in der Entwicklung vorgeschritten. Von jenem nach der rechten Seite gerichteten Zellzapfen wächst eine Zellplatte gegen den Mesothelhügel und wendet sich mit seinem Ende etwas distal, so daß dasselbe an mehr distal geführten Schnitten nur als eine Zellinsel aussieht. (Fig. 19.)

Die Venennetze sind stark, dringen in den Hügel nur von der linken *V. omphalomesent. sin.* Die rechte *V. omphalomesent.* ist gänzlich von den Leberzellbalken umgeben. Weiter distal erscheint die starke Verbindung der beiden *Vv. omphalomesentericae*, die Venengeflechte hören auch in dem Hügel auf und bald hernach schwindet auch der Mesothelhügel selbst.

Dieselben Verhältnisse finde ich bei den Embryonen *bv*, *ca*, *az*, die etwa 5 mm lang sind.

Bei einem Embryo von 5.04 mm Länge (*ba*) hat sich auch noch nichts Bemerkenswertes verändert. Dasselbe gilt für den Embryo *c* und eine ganze Reihe von in der Entwicklung nahe aneinander stehenden Embryonen



von 5·18, 5·24, 5·3, 5·4, 5·44, 5·5, 5·51 und 5·7 *mm* Länge. In dieser ganzen Reihe kann man nur feststellen, daß die Wucherung des Mesothels sich immer mehr und mehr nur auf den Hügel und seine nächste Umgebung beschränkt und daß das hohe Mesothel an der rechten Seite immer auf kleinere Strecke beschränkt bleibt und daß da die Wucherung immer mehr aufhört. Die Proliferation am Hügel ist äußerst groß und die reichlichen Venenstämme sind immer mehr von den Mesothelzellen eingeschlossen.

In dieser Zeit wächst die Leber stark, besonders in ihrem rechten Lappen. Dadurch wird die Bursa omentalis tiefer und das Mesogastrium wird immer mehr nach der linken Seite verdrängt.

Auch das Pankreas ist in der Entwicklung vorgeschritten, besonders jener distal abgehende Lappen. Der Teil, der zuerst gegen die rechte Seite zu gerichtet war, kommt immer mehr in die mediane Lage.

Die stark entwickelten Venengeflechte können auch in das Mesogastrium hinein verfolgt werden.

Bei älteren Embryonen schreiten alle diese Gebilde in der Entwicklung weiter vor und es soll hier nur das hauptsächlichste des näheren angeführt werden. Bei einem Embryo von 5·7 *mm* (*bl*) bleibt die Mesothelwucherung auf dem Hügel immer stark und das findet man auch bei den Embryonen *bd* (5·8 *mm*) und *ah* (5·85 *mm*). Bei diesem Embryo sei nur noch angeführt, daß sich die Nebenniere zu bilden anfängt und daß die rechte V. omphalomesent. immer mehr von der linken eingenommen wird.

Bei den Embryonen *aq* (6·12 *mm*) und *k* (6·87 *mm*) schreitet die Entwicklung der angeführten Gebilde weiter fort. Jener Teil der Leber und der Äste der V. omphalomesent. dextra, soweit beides in der Scheidewand zwischen der proximalen Ausbuchtung und der übrigen Cölohmöhle gelegen ist, werden immer stärker und dadurch wird immer mehr die Verbindung der Bursa omentalis mit der übrigen Cölohmöhle ventral und distal verschoben.

Die Ausdehnung des wuchernden Mesothels ist schon fast nur auf den Hügel beschränkt. Die Venengeflechte in dem Hügel sind bedeutend.

Bei dem Embryo *bu* (7·6 *mm*) ist die rechte V. omphalomesenterica ganz in die linke eingenommen und die Verbindung der Bursa omentalis ist noch mehr ventral und distal verdrängt.

Beim Embryo *f* (7·66 *mm*) reicht die Ausbuchtung der Bursa omentalis bis zwischen den Ösophagus und der Leberlappen ist hier aber überall durch feine Duplikaturen der feinen Cölohwand abgeschlossen. Distal verläuft diese Ausbuchtung in eine Spalte aus, die sich entlang der Magenwand hinzieht. Diese Spalte läuft in eine dorsale und eine ventrale Rinne aus. Der dorsale Teil dieser Spalte schwindet bald und der ventrale setzt sich stark verengt in die Bursa omentalis fort.

Die proximal verlaufende Ausbuchtung der Bursa omentalis wird bei einem Embryo von 7·7 *mm* (*l*) (Fig. 20.) in jener Gegend, bevor sich die Magenerweiterung zu zeigen beginnt, sehr dünn und verschwindet bald,

so daß die Verbindung dieser Ausstülpung mit der Bursa omentalis nicht mehr nachgewiesen werden kann. Der Verschuß dieser Verbindung ist

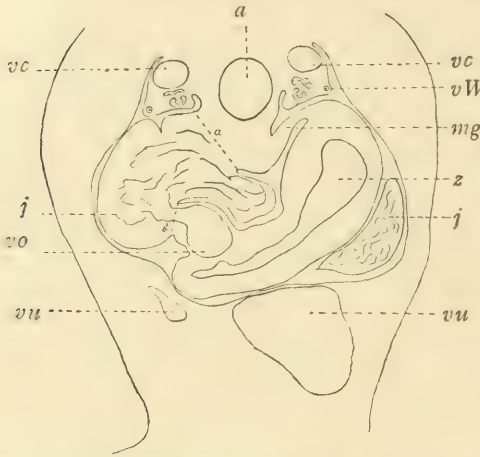


Fig. 20. Embryo von 7.7 mm. *a* = Aorta; *vc.* = V. cardin.; *vu* = V. umbilic; *vo* = V. omphalomesent.; *mg* = Mesogastrium; *z* = Magen; *vW* = ductus Wolffii; *j* = Leber.

durch das eben angeführte Wachstum der Leber in der Zwischenwand verursacht. Bei dieser Abschnürung der Ausbuchtung von der Bursa omentalis vergeht bei diesem Embryo zuerst die ventrale Rinne und dann die dorsale. Es ist also anders wie bei dem Embryo *f*, bei dem gerade die ventrale Rinne die Verbindung aufrecht erhält.

Hier muß noch angeführt werden, daß die ursprüngliche Rinne selbst, die zu der Verschiebung des Mesenteriums und des Darmrohres nach der linken Seite zu führte, durch die raschere Entwicklung der Leber in der Zwischenwand relativ proximal ver-

schoben wird, obwohl sie in der proximo-distalen Ausdehnung de facto auch immer länger wird, aber nicht in demselben Maße als das Darmrohr. In der Fig. 20 ist durch eine punktierte Linie *a* angedeutet, bis wohin die Verbindung der Bursa omentalis mit dem Cöloin gereicht hat und die punktierte Linie *b* gibt an, bis wohin diese Verbindung durch das Wachstum der Leber in dem Septum verschoben wurde. Nach zwei weiter distal geführten Schnitten ist die Verbindung der Linie *b* entsprechend zu sehen. Für die Fig. 20 ist absichtlich jene Stelle gewählt worden, an der man noch gut das Anzeichen der Verbindung entlang der Linie *a* sehen kann.

Die Verhältnisse des Mesothels sind bei dem Embryo *f* (7.66 mm) die folgenden: Das wuchernde Mesothel ist nunmehr nur auf den Hügel beschränkt, der besonders in der Pankreasgegend hervorragt. (Fig. 21.)

Wenn man die Fig. 19 und 21 vergleicht, so entgeht uns nicht, daß der Mesothelhügel im Vergleich zu dem ganzen Embryo eigentlich in der Entwicklung zurückgeblieben ist, aber er tritt schärfer hervor und hebt sich mehr von der Umgebung ab. Das Mesothel ist an der Oberfläche nicht besonders hoch: es ist einschichtig, zylindrisch und die Proliferation, wiewohl sie besteht, ist ganz unbedeutend im Vergleich mit jüngeren Stadien. In die Umgebung gehen die Mesothelzellen schnell in kubische und dann in flache Zellen über.

Die Mesothelderivate sind um die Venennetze dicht angehäuft, sie

sind in regen Teilungen, wie man nach den zahlreichen Mitosen urteilen kann. Die reichen Venengeflechte ziehen bis in das Mesogastrium.

Bei der weiteren Entwicklung ändert sich an diesen Verhältnissen fast nichts. So besteht bei einem Embryo von 8·31 mm noch eine rege Proliferation des Mesothels und die Venengeflechte bleiben reich. Das ist auch noch bei den Embryonen von 8·4, 8·6 und 9·06 mm.

Auch noch bei einem Embryo von 9·4 mm besteht eine abgeschwächte Proliferation (Taf. II, Fig. 5). Die Zellnester um die Gefäße und zwischen ihnen werden deutlicher und die Lagerung der Mesenchymzellen in der Tiefe beginnt immer deutlicher und deutlicher das Milzgewebe von der Umgebung abzugrenzen.

Bei dem Embryo von 9·5 mm wächst die Milzanlage gegen die Radix mesenterii und zwar durch Proliferation des eigenen Gewebes, ohne benachbartes Gewebe in sich einzuschließen. Dadurch gelangt dieser am meisten medial gelegene Teil der Milzanlage direkt gegen die Geschlechtsdrüsenanlage. In distaler Richtung verlängert sich die Milzanlage mehr lateral und ragt hier am stärksten hervor. Sie ist also schräg gelagert: der proximale Abschnitt medial, der distale lateral. In jüngeren Stadien ragte der Hügel so vor, daß er zwischen die Geschlechtsdrüsenanlage und den Mesonephros zu liegen kam.

Das Mesothel proliferiert immer schwächer und wird kubisch. An einzelnen Stellen ist es gegen das Milzgewebe scharf begrenzt. Das Milzgewebe hebt sich von der Umgebung durch das Aussehen und das Gefüge der Zellen sowie durch die Färbefähigkeit z. B. nach Eosin ab. Auch die Abgrenzung durch das Mesenchym besonders gegen das Pankreas ist immer schärfer.

Diese Abgrenzung ist bei einem Embryo von 9·5 mm schon fast vollständig, obwohl die anderen Beziehungen sich kaum merklich geändert haben. Dasselbe ist bei den Embryonen von 9·58, 9·89 und 10·18 mm, bei

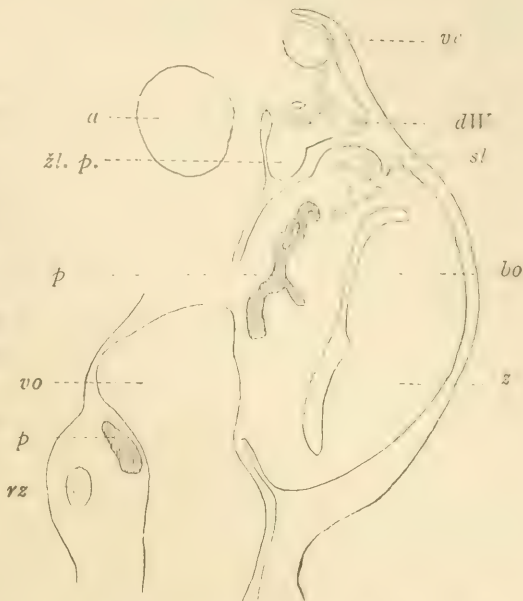


Fig. 21. Embryo von 7·66 mm. *a* = Aorta; *vc* = V. cardin.; *vu* = V. umbilic.; *p* = Pankreas; *dW* = ductus Wolffi; *bo* = Bursa omentalis; *z* = Magenwand; *zp* = Geschlechtsdrüse; *rz* = Darm; *st.* = Milz.



denen die weitere Entwicklung vorschreitet so, daß bei einem Embryo von 10·5 *mm* die Milz stark in das Cölom hervorragte. Das Oberflächenmesothel ist niedrig kubisch geworden, es proliferiert zwar noch hie und da und die Abgrenzung des Milzgewebes gegen die Umgebung wird immer bestimmter.

Auf einem Stiel am Schnitte aufsitzend ist die Milzanlage bei einem Embryo von 11·04 *mm*. Die venösen Geflechte in der Milzanlage, die auch in die Umgebung des Pankreas stark entwickelt waren, sind langsam geringer geworden und sind in diesem Stadium bereits ganz schwach. Ähnliche Verhältnisse finde ich noch bei dem Embryo von 13·33 *mm* (Taf. II. Fig. 6 und Taf. III. Fig. 9) und auch noch bei einem Embryo von 13·9 *mm*. Bei diesem Embryo ist die Milz bereits so gewachsen, daß sie sich gegen die Geschlechtsdrüsenanlage, die ebenfalls mächtiger geworden ist, drängt, so daß an ihrer Oberfläche eine Vertiefung entsteht. (Taf. III. Fig. 7.) Die Abgrenzung der Milz gegen die Umgebung ist eine vollständige.

Schließlich wird das Oberflächenmesothel der Milz ganz flach, so wie an anderen Stellen des Cöloms. (Taf. III. Fig. 10.)

Dadurch sind wir zu jenem Stadium gelangt, in dem die Milz bereits als ein selbständiges Organ auftritt und man kann von ihrer Entwicklung in Kürze folgendes Bild geben:

Bei jungen Embryonen kann man sehen, daß das Mesothel an beiden Seiten des Verdauungsrohres bedeutend hoch ist, so daß es an der linken Seite die zwischen ihm und dem Darmepithel gelegenen Mesenchymzellen schließlich ganz verdrängt. Die Ausbildung des Mesothels ist an der linken Seite bedeutend größer als an der rechten Seite. Besonders auffallend ist es in der Gegend der Leberanlage. Das Mesothel proliferiert, ist hoch auch auf dem bisher kurzen Mesenterium und geht schließlich an der Radix des Mesenteriums auf beiden Seiten in ein flaches Mesothel über.

In distaler Richtung erstreckt sich das hohe Mesothel bis in die Gegend der Pankreasanlage (Fig. 3), aber nur auf der linken Seite. An der rechten Seite ist das Mesothel schon früher niedrig geworden.

Das Mesothel der linken Seite proliferiert bei älteren Embryonen derart, daß der Unterschied gegen die rechte Seite mehr auffällt. Das Mesothel verdrängt völlig das Mesenchym und reicht bis zu dem Darmepithel. Am mächtigsten ist das immer in der Gegend der Leber- und dann der Pankreasanlage (Fig. 10) und zwar immer auf der linken Seite.

Bei noch älteren Embryonen bildet das proliferierende Mesothel auf der linken Seite einen Hügel und zwar in der Gegend der Pankreasanlage. Der Hügel reicht proximal bis in die Gegend der Leberanlage, distal aber hört er sehr bald auf. (Fig. 13, 16, 18, 19.) Der ganze Hügel ist von den Abkömmlingen des Mesothels gebildet.

In dieses vom Mesothel stammende Gewebe dringen bald Äste von der V. omphalomesenterica sinistra (Fig. 13 und weitere). Weiter distal verbinden sich bei älteren Stadien diese Äste mit jenen der rechten Seite und

zwar dorsal vom Darne. Diese in das Mesothelgewebe des Hügels eintretenden Äste verhalten sich wie *Venae adhaerentes* und *recherentes* der Leberanlage. Je stärker der Hügel entwickelt ist, umso stärker sind auch die Venengeflechte in demselben. Diese Venengeflechte fangen später an sich zu verkleinern und spärlich zu werden und zwar in der Zeit, in der die Milzanlage durch das Mesenchym gegen die Umgebung sich abgrenzt. Die definitiven Venen der Milz sind Abkömmlinge dieser Netze.

Die arteriellen Gefäße sind klein, das hauptsächlichste ist die venöse Zirkulation ähnlich jener der Leber.

Je deutlicher sich der Mesothelhügel ausbildet, umso mehr verschwindet das hohe Mesothel und zwar vom proximalen Ende anfangend und schneller auf der rechten Seite.

Als sich endlich ein bestimmter in der Gegend des Pankreas liegender Abschnitt des wuchernden Mesothels zur Milzanlage herausgebildet hat, da hört die Mesothelproliferation auch auf der Oberfläche der Milzanlage auf und es wird das Mesothel hier flach, ohne ein Zeichen einer Proliferation aufzuweisen.

*Es handelt sich also bei der Entwicklung der Milz um eine besonders differenzierte Proliferation des Mesothels auf beiden Seiten des Darmes, aus der nur ein Teil der ursprünglichen Proliferation als Milzanlage auf der linken Seite des Mesogastriums erhalten bleibt.*

Das sind kurz die objektiven Befunde und es erübrigt nur ganz wenig zu ihrer Bedeutung, soweit es die Anlage der Milz anbelangt, hinzufügen. Es stehen aber die Sachen ganz anders, wenn man sich über die Bedeutung *der ganzen Proliferation des Mesothels* aussprechen sollte.

Eines ist sicher, nämlich das, daß man sich kaum denken kann, daß ein so regelmäßig verlaufender Gang der Entwicklung ganz ohne jede Bedeutung wäre, oder daß es nur auf die Produktion der Mesothelzellen ankäme. Überall, wo man im Laufe der Entwicklung weit weniger auffällige Vorgänge beobachtet als diese hier beschriebenen Veränderungen im Mesothel und zwar an bestimmten Stellen und im bestimmten Zeitpunkte, kann es im weiteren Verlaufe zu bestimmteren oder weniger bestimmten Veränderungen kommen, die die Bedeutung dieser entwicklungsgeschichtlichen Vorgänge beleuchten.

Die Bedeutung des Mesothels zu der Milzanlage ist ganz klar: das ganze embryonale Milzgewebe hat den Ursprung aus dem Mesothel genommen und in dieses Gewebe sind die Venennetze mit dem Mesenchym hineingewachsen. In meiner Arbeit (l. c. sub 3) habe ich angegeben, daß ich mich damit nicht einverstanden erklären kann, was Laguesse<sup>9)</sup> angibt, der das Mesothel vom Mesenchym gar nicht getrennt wissen will.

<sup>9)</sup> Laguesse: *La rate est-elle d'orig. entoderm. ou mesodermique.* *Bibliograph. anatom.* 1894.

Nach meiner Ansicht ist es nötig beides streng auseinanderzuhalten und zwar in dem Sinne, daß das Mesothel verschiedenen Zellen den Ursprung geben kann und ihn auch gibt, aber keine Mesenchymzelle kann eine Mesothelzelle ersetzen. Es ist das etwas Ähnliches wie mit anderen embryonalen Epithelien z. B. den epiblastischen. Was alles von diesen Zellen den Ursprung nimmt, ohne daß irgendein Derivat dieser epiblastischen Zellen eine dieser Zellen ersetzen könnte. Auch die differenzierten hypoblastischen Zellen können einander nicht ersetzen, nicht einmal eine hypoblastische Zelle eine hypoblastische Zelle eines anderen Abschnittes. Ich habe damals angeführt: „Si nous disons qu'une formation a pris son origine aux dépens du mésenchyme ou du mésothélium, nous exprimons deux choses différentes . . .“ Daran kann nichts auch durch die Kompromißstellung, die P i n t o (l. c.) einzuführen trachtet, geändert werden.

Es ist ganz falsch, was dieser Autor anführt, daß: „L'epitelio celomático non presenta in genere sul cumulo splenico particolari aspetti da qualche altro punto di rivestimento del mesenchima.“

Umgekehrt ist das der Fall, denn auf jedem Präparate kann diese auffallende Verschiedenheit beobachtet werden. Damit aber, wie P i n t o selbst anführt, daß auf dem Milzhügel „solo per un tempo più lungo esso rimane ispessito“, ist bewiesen, daß ein Unterschied besteht.

Wenn das Mesothel in der ganzen Ausdehnung der Darmwand vom gleichen Charakter wäre, dann könnte man dafürhalten, daß das deshalb sich so verhält, weil das Mesothel schneller die Mesenchymzellen produziert. Aber auch dieses kann man nicht annehmen, wenn sich das parietale Mesothel anders verhält.

Dadurch aber, daß das Mesothel nur an der Darmwand und dem zu ihr gehörenden Mesenterium und zwar nur in einer bestimmten Ausdehnung proliferiert und daß das proliferierende Mesothel sich an beiden Seiten verschieden verhält, ist schon gegeben, daß hier verschiedene funktionelle Vorgänge vorliegen, wenn man auch geneigt wäre, nur auf die quantitativen Verhältnisse der gelieferten Derivate zu denken.

Wenn man aber sieht, daß nur auf der linken Seite und im bestimmten Bezirke die Proliferation die mächtigste wird und das gerade an jener Stelle, wo die Milzanlage erscheint, so kann man sich dem Gedanken nicht erwehren, daß gerade das wuchernde Mesothel es ist, dem bei der Milzentwicklung die wichtigste Aufgabe zukommt. Diese Aufgabe besteht, soweit man sie morphologisch verfolgen kann, in der Produktion der Elemente des Milzparenchyms.

Dazu kommt noch der Umstand, daß in diesen Mesothelhügel in einer bestimmten Zeit Blutgefäße eindringen in derselben Weise, wie man es bei der Leberentwicklung vorfindet. Dieses Verhalten der Blutgefäße deutet sicher darauf hin, daß es sich hier um einen wichtigen Vorgang handelt.



Anders verhält sich die Sache, wenn man fragt, *wie der ganze Proliferationsprozess des Mesothels zu deuten wäre*, aus dessen distaler Partie die Milz den Ursprung nimmt. Es ist nicht möglich weder nach der funktionellen, noch nach der histogenetischen Seite anzugeben, von was für einer Bedeutung der ganze Vorgang ist. Es ist höchst auffallend, daß dieser ganze Vorgang an den proximalen Abschnitt des Verdauungsrohres gebunden ist und daß er nur auf eine bestimmte Zeit gebunden ist. Es kann nicht übersehen werden, daß je mehr die Milz, eigentlich schon ihr Vorgänger, die Bildung des Mesothelgewebes in der Entwicklung fortschreitet, umso mehr die übrige Wucherung rückgängig wird.

*Es ist höchst wahrscheinlich, daß es sich in jenem wuchernden Mesothel um ein embryonales Organ handelt, dessen am meisten distal gelegener Abschnitt auf der linken Seite normal zur Bildung der Milz führt.*

Es bleibt noch zu erwägen, wie sich die Milz bei dem *Situs inversus* verhält. Man hat gegen die Entwicklung der Milz aus einem bestimmten Bezirke an der linken Seite der mesogastriums folgenden Einwand erhoben: Wenn die Entwicklung der Milz an eine bestimmte Stelle des Mesothels gebunden ist und zwar an jene, die bei der Bildung der Bursa omentalis nach links frei vorliegt, dann müßte bei *Situs inversus* die Milz in die Bursa omentalis verlegt werden, wohin der betreffende Mesothelbezirk verdrängt wurde. Nach dem, was angeführt wurde, fällt dieser Einwand weg, denn die Entwicklung der Milz ist nicht an eine bestimmte Stelle, wenigstens was das Mesothel anbelangt, gebunden, denn es kann die Milz an jeder Stelle des gewucherten Mesothels entstehen. Daß sich aber die Milz gerade an der linken Seite am distalen Ende des Mesothelstreifens entwickelt, ist bedingt durch die Entwicklung der venösen Netze von der linken V. omphalomesent. sinistra. Auf die Entwicklung dieser Netze macht bereits bei *Amia calva* Piper<sup>10)</sup> aufmerksam, indem er anführt, daß die Vena subintestinalis „... löst sich im Gebiete der Milz in varicöse Einzelgefäße auf und steht durch feine Zweige mit den lakunären Bluträumen des Organes in Verbindung.“ Die erste Milzanlage erscheint hier „als verdichteter eigentümlich differenzierter Mesenchymherd in der Wandung der Vena subintestinalis“. Etwas von den Venengeflechten mochte schon Pinto gesehen haben, wie aus seinen Abbildungen hervorzugehen scheint.

Es ist ganz gut möglich, daß sich die Milz bei veränderten Zirkulationsbedingungen auch an einem anderen Orte im Bereiche des gewucherten Mesothels entwickeln kann und man kann von diesem Standpunkte aus das Vorkommen von verlagerten oder akzessorischen Milzen ganz gut verstehen.

Hier möchte ich noch auf eine besonders abweichende Lage der Milz aufmerksam machen und zwar am proximalen Pole des Hodens im Scrotum.

<sup>10)</sup> Piper: Die Entw. d. Leber, Pankreas etc. bei *Amia calva*. Arch. f. Anat. u. Entwgesch. d. Supplb. 1902.

wie es Sneath<sup>11)</sup> beschrieben hat. Dieser Autor führt an, daß die akzessorische Milz "almost completely ensheathed in the tunica vaginalis" war. Es ist hier wahrscheinlich die Tunica vagin. communis gemeint. Was die histologische Seite dieses Befundes anbelangt, so ist nur angegeben: "it was found to consist of quite normal splenic tissue." Von dem distalen Ende der Milz konnte ein Strang bis zu diesem am Hoden befindlichen Körper verfolgt werden. Von der Entstehung dieser Abnormität gibt Sneath an "... slight inflammation of the peritoneum" könnte in der Entwicklungsperiode eine Verbindung zwischen die-er akzessorischen Milz und der Geschlechtesdrüsenanlage veranlaßt haben und bei dem Descensus sei so die Milz in das Scrotum gekommen.

Indem keine weiteren eingehenderen histologischen Angaben über das Gewebe dieser Milz vorliegen, ist es möglich anzunehmen, daß hier dieser Körper vielleicht gar keine Milz war, sondern nur ein verlagerter Teil der Glandula suprarenalis, wie seinerzeit Dagonet beschrieben hat. Doch die Anmerkung, daß dieser Körper mit der Milz durch einen Strang verbunden war, läßt annehmen, daß es sich doch um eine akzessorische Milz handeln konnte. Doch die Erklärung, die Sneath für die Entstehung gibt, ist ganz willkürlich, auf Tatsachen nicht gestützt. Viel leichter wäre dieser Fall dadurch erklärlich, daß das wuchernde Mesothel über die Radix mesenterii bis zur Geschlechtesdrüsenanlage geschritten ist und so sich mit dieser in Verbindung gesetzt hat.

Es ist auch nötig hier auf die *Entwicklung der Bursa omentalis* mit einigen Worten einzugehen. Den ersten Anfang kann man bei dem Embryo *u* (3 mm) sehen. Hier kann man an der rechten Seite des Darmes eine kleine Kante sehen und zwar in der Rinne, in der das Mesothel der Darmwand in das Mesothel über dem Ductus Cuvieri, der hier in die V. omphalomesenterica einmündet, übergeht. Diese Kante ist durch einen Venenast verursacht. (Fig. 1.) Gegen diese ventrale Kante erhebt sich fast nur aus Mesothel bestehend eine dorsale Kante (Fig. 5). Die ventrale Kante kann, wie in diesem Falle, ganz klein sein, immer ist aber in ihr ein Ast der V. omphalomesenterica dextra enthalten. Eine ähnliche, obwohl kleinere Kante kommt auch auf der linken Seite zustande. (Fig. 6.) In dieser Zeit beginnt schon die an der rechten Seite zur weiteren Entwicklung gelangende Rinne den Darm mit seinem Mesenterium auf die linke Seite zu verdrängen.

Aus der Beschreibung und aus den beigegebenen Figuren ist zu sehen, daß die Bildung der ventralen Kante gewöhnlich an die rechte V. omphalomesent. gebunden ist und wenn dann die dorsale und ventrale Kante sich berühren und verschmelzen, so wachsen die Äste von der rechten V. omphalomesent. in diese so entstandene Scheidewand oder Septum hinein und diese Venenäste folgen auch die Leberzellbalken. Von der linken V. omphalo-

<sup>11)</sup> Sneath: An apparent third testicl cons. of a scrotal spleen. Journ. of Anat. and Physiol. Vol. 47, 1913.

mesenterica wachsen die venösen Äste in den Mesothelhügel und diese geben den Ursprung den Milzvenen. Es ist die Entwicklung der Leber besonders auf die Äste der V. omphalomesent. dextra gebunden und die Entwicklung der Milz an jene der V. omphalomesent. sinistra. Die Ausbildung dieser Venen und ihrer Verbindung mit dem Sinus venosus des Herzens sind sicher von hohem Einflusse auf die Lage des Herzens.

*Man sieht also, daß durch eine Verschiebung oder eine Umwachsung der venösen Äste die Lage des Herzens und des ganzen proximalen Abschnittes des Verdauungsrohres verändert werden kann und es wird bei dieser Umlagerung auch die Milzanlage auf die rechte Seite gelangen und nicht in die Bursa omentalis. Es ist aber, wie es die Ausbildung der beiderseits gelegenen Mesothelstreifen nahelegt, auch möglich, daß gelegentlich, ohne daß es zum Situs inversus kommen müßte, eine Milz an der gegen die Bursa omentalis gelegenen Seite des Mesogastriums entstehen könnte.*

Auffallend ist es, daß sich die an der rechten Seite gebildete Rinne, die den Anfang für die Entstehung der Bursa omentalis abgibt, proximal in der Form einer Ausbuchtung bis in die Lungengegend erweitert und daß sich dieser ganze Abschnitt besonders durch die Entwicklung der Leber von der eigentlichen Bursa omentalis abtrennt. Diese ist also nur der am meisten distal gelegene Abschnitt dieser ursprünglichen Rinne.

---



## TAFELERKLÄRUNG.

## T a f e l I.

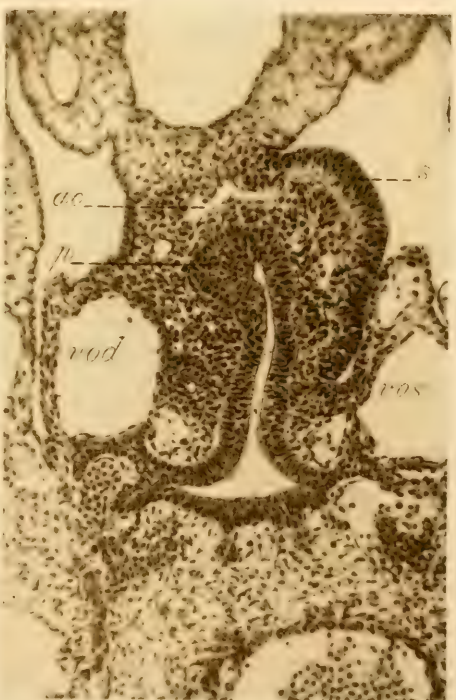
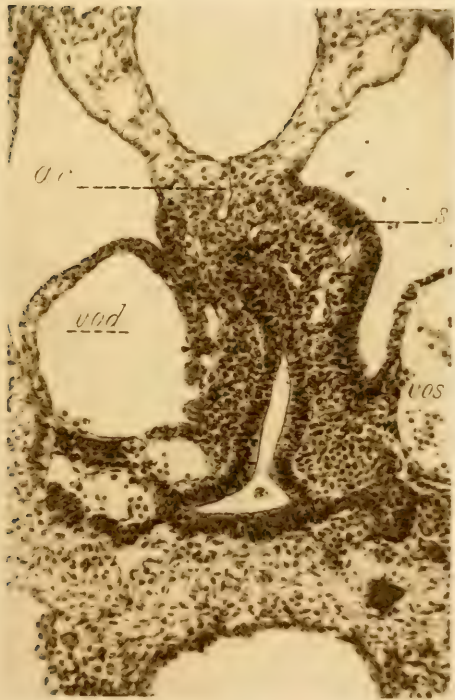
- Fig. 1. Von einem 3 mm langen Embryo. Die Mesothelverdickung ist an beiden Seiten fast ganz gleich. An der rechten Seite ist der Anfang der ventralen Kante (*v h*); *C* = Ductus Cuvieri.
- Fig. 2. Von einem Embryo derselben Größe, der aber in der Entwicklung weiter fortgeschritten war. *dh* = dorsale Kante; *vh* = ventrale Kante der Rinne, die den Anfang der Bursa omentalis bildet.
- Fig. 3. Von einem Embryo von 3.3 mm. Der Milzhügel (*S*) mit dem wuchernden Mesothel; *ac* = Arteria caeliaca; *vod* = V. omphalomesent. dextra; *vos* = V. omphalomes. sinistra. Von dem Darmepithel aus dorsal entwickelt sich das Pankreas.
- Fig. 4. Von einem Embryo von 3.6 mm. Die Mesothelwucherung an der Oberfläche des Milzhügels (*S*); *ac* = Äste der Arteria coeliaca; *p* = Pankreasanlage. Die übrigen Bezeichnungen wie bei Fig. 3. Von dem ventralen Abschnitte der Darmwand gehen Leberzellbalken besonders gegen die rechte V. omphalomesent. dextra.

## T a f e l II.

- Fig. 5. Von einem Embryo von 9.4 mm. Die Venennetze grenzen scheinbar das oberflächliche Mesothel von dem darunter und vom Mesothel entstandenen Gewebe ab.
- Fig. 6. Von einem Embryo von 13.33 mm. Das oberflächliche Mesothel beginnt niedriger zu werden an. Die Abgrenzung der Milzanlage durch das Mesenchym ist deutlicher.

## T a f e l III.

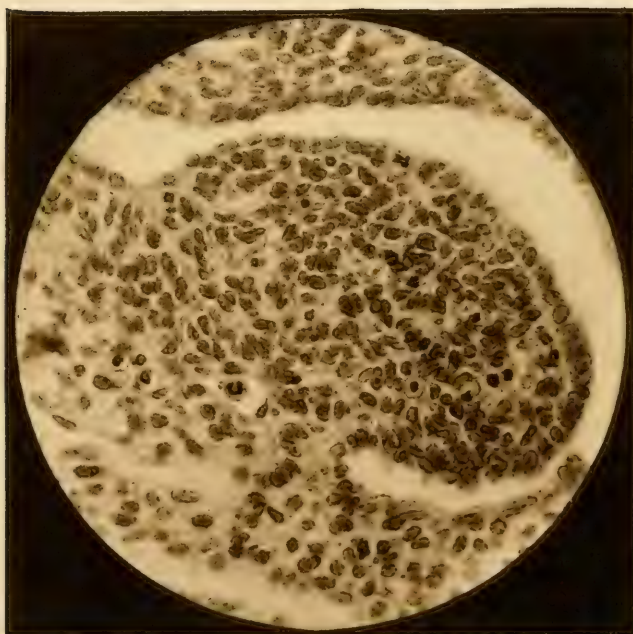
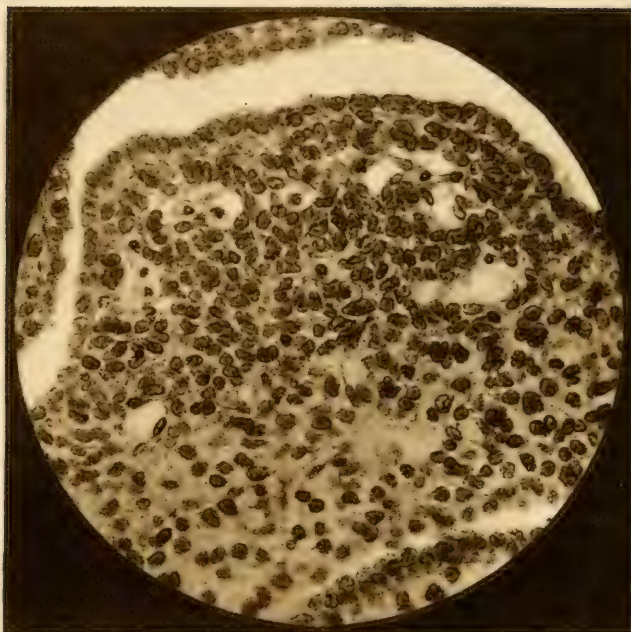
- Fig. 7. Von einem Embryo von 13.9 mm. Die Milz ist so gewachsen, daß sie von der Geschlechtsdrüsenanlage (*p*) eingedrückt wird. Das Mesothel ist noch niedriger geworden als in Fig. 6. Bei *a* befindet sich das Mesothel scheinbar noch in Proliferation, doch das ist eine infolge der Form der Milz schräg getroffene Stelle.
- Fig. 8. Ist bei einer stärkeren Vergrößerung das Präparat von Fig. 4 photographiert. Die scheinbare Abgrenzung des Oberflächenmesothels durch einen Venenast ist zu sehen.
- Fig. 9. ist bei schwächerer Vergrößerung die Übersicht des Präparates von Fig. 6. Die Milzanlage (*S*) liegt zwischen der Geschlechtsdrüsenanlage und der Uriere (*p*); *l* = Niere; *ps* = Pankreas; *bo* = Bursa omentalis; *v* = Magen.
- Fig. 10. Ein Abschnitt der Milzoberfläche von einem Embryo von 15.53 mm. Das Oberflächenmesothel ist bereits überall flach als anderwärts in der Cölohmöhle.







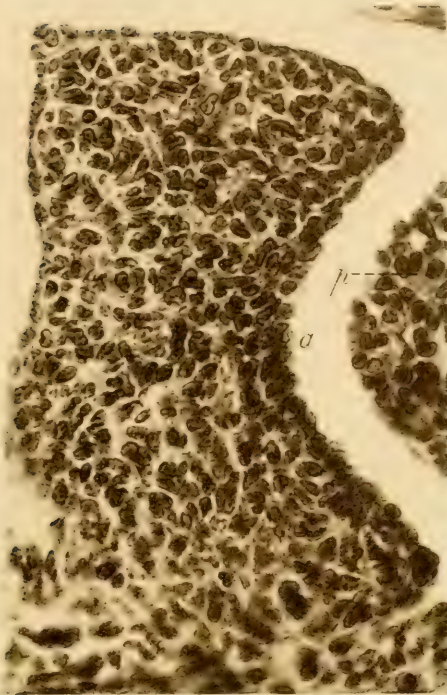
5



6



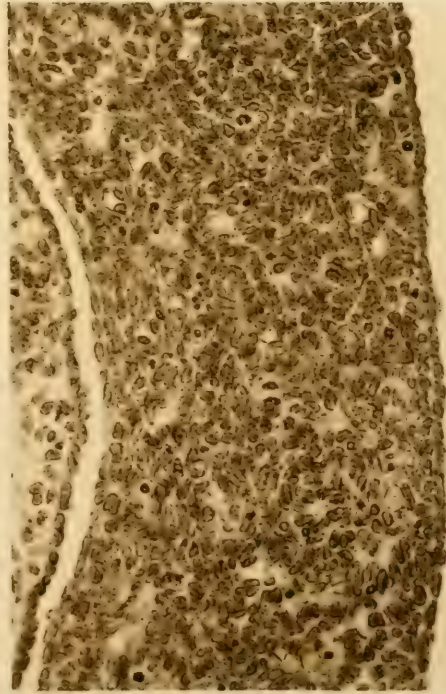
7



8



9



10







LOUIS WIESNER, PRAGUE.



ACADÉMIE DES SCIENCES  
(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXII<sup>e</sup> ANNÉE.

(1920.)

U.S. BUREAU  
OF  
STANDARDS  
LIBRARY

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

1920.

LIBRARY  
OF THE  
BOSTON PUBLIC LIBRARY

ACADÉMIE DES SCIENCES  
(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXII<sup>e</sup> ANNÉE.

(1920.)

TABLE DES MATIÈRES

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

1920.



ČESKÁ  
AKADEMIE VĚD  
A UMNÍ  
V PRAZE

TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,  
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMNÍ A ČESKEHO VYSOKEHO UČENÍ  
TECHNICKEHO V PRAZE.

## Table des Auteurs:

	Pag.
<i>Ludm. Slavíková et Frant. Slavík</i> : Études sur les minerais de fer du silurien inférieur de la Bohême .....	1
Prof. Dr. <i>Jar. Milbauer</i> : Über die Reduktion der Schwefelsäure durch Kohlenoxyd .....	25
<i>Fr. Slavík</i> : Données optiques sur quelques minéraux.....	32
<i>J. V. Želízko</i> : Der Steppeniltis (Foetorius Eversmanni Less.) im Diluvium bei Wolin .....	39
<i>F. Slavík</i> : Über einige Pířbramer Gesteine .....	49
Dr. <i>Václav Hruška</i> : Sur les relations parmi les périodes des intégrales abéliennes dégénérées de genre 3 .....	60
Dr. <i>Václav Simandl</i> : Über eine Gruppe von 8 Flächen 2. Grades und über die damit zusammenhängende Transformationsgruppe ..	64
<i>Miloš Kössler</i> : Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers .....	75
<i>M. V. Posejpal</i> : Sur la variation de la réfraction des gaz avec la pression au-dessous d'une atmosphère. — I. ....	78
<i>F. Slavík</i> : Über Tellurwismut aus den böhmischen Goldgängen ....	100
<i>J. Milbauer et J. Šellík</i> : Méthode pour separer le plomb du chrome par l'électrolyse et analyse du chromate de plomb et des couleurs qui en contiennent .....	103
Dr. <i>Radim Kettner</i> : Ein Profil durch das Pířbram-Jinecer Kambrium	115
Dr. <i>Jan Zavřel</i> : Über Atmung und Atmungsorgane der Chironomidenlarven .....	120
<i>J. Sobotka</i> : Über einen Steinerschen Satz, die Krümmungskreise eines Kegelschnittes betreffend und einige Beziehungen desselben zum Normalenproblem .....	130
Prof. Dr. <i>Jaroslav Milbauer</i> : Über die Bestimmung des aktiven Sauerstoff im Natriumperoxyd .....	150
Dr. <i>Václav Hruška</i> : Sur les racines rationnelles du polynôme $\frac{J}{27} + \frac{I}{3} \mu - \mu^3$ qui figure dans la théorie des fonctions abéliennes singulières de trois variables .....	156
<i>J. Sobotka</i> : Über den Zusammenhang der Krümmung einer Kurve mit ihrer Projektion und einige damit verwandte Beziehungen ....	160

	Pag.
MUDr. <i>Bohumír Rejsek</i> : Annotation concernant l'étiologie des sarcoïdes Boeck-Darier .....	175
<i>J. Sobotka</i> : Zur Krümmung zentrisch kollinearer Kurven in der Ebene	177
<i>J. Sobotka</i> : Betrachtungen zur Krümmung der Kegelschnitte .....	189
<i>J. Sobotka</i> : Einige spezielle Beziehungen der Krümmungsmittelpunkte eines Kegelschnittes .....	200
<i>J. Sobotka</i> : Kegelschnitte und Kreise, welche einen gegebenen Kegel- schnitt oskulieren .....	206
<i>J. Sobotka</i> : Zur Krümmung algebraischer Kurven .....	217

---



# Études sur les minerais de fer du silurien inférieur de la Bohême.

Par LUDM. SLAVÍKOVÁ et FRANT. SLAVÍK.

Résumé du texte tchèque.

Présenté dans les séances du 27 avr., 8 juin et 23 nov. 1917.

Les minerais de fer oolithiques dans le silurien inférieur du centre et de l'ouest de la Bohême font partie de trois étages stratigraphiques: du  $d_{1\beta}$ , couches de Komárov (= trémadoc supérieur), du  $d_{1\gamma}$ , couches de Osek—Kvůň (arenig s. et inf.) et du  $d_{3+4}$ , couches de Zahořany (= caradoc inférieur). A présent on ne les exploite que dans la zone de Nučice et N de Zdice ( $d_{3+4}$ ), sur le mont Krušná hora ( $d_{1\beta}$ ) et dans les environs de Klavava et Ejpovice ( $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ ). Les nombreuses localités, mentionnées il y a plus de cinquante ans dans le mémoire de M. V. L i p o l d (24 a)\*) sont aujourd'hui abandonnées ou ont été dans les ans derniers objet des travaux d'exploration. —

Par conséquence, la plupart de ces localités n'offre q'un matériel assez peu favorable aux recherches microscopiques, à cause d'une altération avancée. Toutefois ayant étudié des minerais et leurs transitions aux roches environnantes, ramassées dans presque toutes les localités, de même que des échantillons provenant de plusieurs collections de Prague, Plzeň et Příbram, nous croyons pouvoir baser nos conclusions sur l'origine et le mode de formation des minerais en question sur une base assez large et solide.

Les minerais de fer oolithiques de la Bohême ont été l'objet des nombreux travaux scientifiques; la nature minéralogique du minéral primaire très répandu et son identité avec la chamosite a été reconnue pour la première fois par J a n K r e j č í (16)\*) en 1854, les roches diabasiques tuffoïdes, qui accompagnent le minéral à de nombreuses localités, identifia A. E. R e u s s (30) avec les „schalsteins“ du dévonien

\*) Voir la liste de la littérature, pp. 22—23 du mémoire présent.

rhéna en 1857; M. V. Lipold (24a) a décrit en 1863 les profils géologiques de la plupart des gîtes ferrifères, K. Balling (1) en 1867 publia un grand nombre d'analyses chimiques, K. Feistmantel (10) en 1876 ses recherches microscopiques, très intéressantes et importantes encore aujourd'hui; par des investigations spéciales ont contribué à nos connaissances sur les minerais: J. Vála et R. Helmhaecker (32), K. Feistmantel (11), J. Krejčí et K. Feistmantel (17), E. Bäumlér (2), B. Katzer (12), C. de Purkyně (26—29), A. Liebus (21—24), C. Klouček (15), R. Kettner (14), J. Woldřich (34—35) etc. Les oeuvres synthétiques sur la métallurgie basent leur descriptions de nos gîtes ferrifères sur les résultats de ces auteurs, plus ou moins incomplètement; il n'y a que dans l'ouvrage de M. K. I. Bogdanović (5) qu'on trouve des recherches microscopiques originales sur le minerai de Nučice, faites par M. A. N. Zavarickij. Parmi les travaux sur des gîtes analogues étrangers, ce sont ceux de M. L. Cayeux (8) en France et de M. R. E. Zaliński (36) en Thuringe, qui ont pour nous la plus grande importance.

\* \* \*

Nos minerais de fer renferment un nombre assez considérable de minéraux. Ce sont:

1. Dans les oolites: *chamosite* (et peut-être autres minéraux chloritiques), „*myéline*“ (v. plus bas), *hématite*, *limonite*, *sidérose*, *quartz*, localement aussi *phosphorite*, *pyrite*, *kaolinite* et *magnétite*.

2. Dans la *substance interstitielle*: entre les minéraux authigènes prévale notamment la *sidérose*, assez répandues sont aussi les *chlorites* ferrugineuses, le *quartz*, l'*hématite* et la *limonite*, accessoirement le *pyrite*, l'*arséno-pyrite*, la *magnétite* et la *phosphorite*; les éléments allothigènes sont le *quartz*, le *mica blanc*, des *substances chloriteuses et terreuses*.

3. Dans les *rognons* et *concrétions*, on trouve le *pyrite*, la *phosphorite* et la *sidérose*.

4. Comme *minéraux secondaires des fissures* il y a des *sulphures* (*pyrite*, *cinnabre* etc.), des *carbonates* (*calcite*, *ankerite*, *sidérose*), du *quartz*, des *phosphates* (*wavellite*, *kakoxène*, *dufrénite*, *picite*), de la *barytine*, *sélénite* et *kaolinite*.

*Les caractères macroscopiques et microscopiques des minéraux respectifs.*

#### *Chamosite.*

La *chamosite* de nos minerais est transparente en couleur vert de diverses nuances, tantôt distinctement bleuâtre, tantôt presque purement vert; dans le premier cas l'absorption et la nuance bleuâtre est plus forte dans l'orientation  $\parallel$  (001). Nos *chamosites* n'ont pas toujours une couleur moins intense que la *thuringite*, comme le trouva M. Zaliński (36) pour les minerais de Schmiedefeld. L'indice de réfraction moyenne est

approximativement 1.64, de même pour les variétés plus pâles que pour celles d'une couleur plus foncée; pour la thuringite de Chabičov (Moravie), nous avons trouvé la réfringence 1.62, pour la moravite originale de M. K r e t s c h m e r (18) de la même localité (identique avec la „thuringite incolore“ de M. Z a l i n s k i) — 1.615. La biréfringence est faible, négative, les couleurs d'interférence souvent anormales. La dureté de la chamosite absolument fraîche dépasse 5, mais diminue vite par l'altération, laquelle change successivement ses couleurs vertes en jaunâtres et brunâtres.

La structure de la chamosite est typiquement oolitique, mais elle se borne en quelques cas (Ohrazenice) aux parties extérieures de l'oolite, tandis que le centre est compact.

#### *La chlorite non-oolitique*

forme en plusieurs minerais de la bande  $d_{1,3}$  (Skelná Huť, Chýňava) et surtout du  $d_{1,7}$  (Klabava, Horní Kráň, Plískov) un élément constitutif du ciment; elle est d'une structure très fine lamellaire, presque compacte et dans ses propriétés optiques elle ne se distingue pas essentiellement de la chamosite.

#### *„Myéline“ et kaolinite.*

Dans de très nombreux minerais de tous les trois étages stratigraphiques, les oolites sont constituées par une substance grise verdâtre, grise brunâtre ou presque blanche, d'un aspect stéatitique; au microscope elle présente une structure oolitique normale, est presque incolore ou faiblement jaunâtre ou brunâtre, d'une biréfringence négative, considérablement supérieure que celle de la chamosite; les indices de réfraction sont de 1.58 à 1.59 ou un peu plus. Densité 2.714. Dureté 2—2½.

Le minéral fond difficilement en colorant la flamme d'un violet faible et devient brun rougeâtre clair; l'acide chlorhydrique n'agit presque pas sur lui.

M. le prof. J. H a n u š, de l'École polytechnique tchèque, a eu la bienveillance de faire un examen chimique de ces oolites (de Březina); elles n'ont malheureusement pû être totalement dépourvu de la sidérose, qui les pénètre en petits grains et minces veinettes. Les résultats de l'analyse, qui a ainsi dû rester incomplète, sont les suivants:

#### I. portion

SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + FeO	MnO	CaO	MgO
44.29	0.28	31.31	6.08*)	trace	0.60	0.75

#### II. portion

CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O constitutive	H <sub>2</sub> O hygroscopique
3.02	4.82	1.37

\*) En une autre épreuve, FeO 1.95.



Le reste se compose principalement des alcalis (plus de potasse que de soude).

La substance de ces oolites est donc un silicate d'alumine avec seulement une petite portion de fer et nous l'appellons dans ce mémoire provisoirement „myéline“ à cause de son aspect macroscopiquement compact et presque terreux, sans toutefois vouloir affirmer son identité avec les substances — d'ailleurs souvent pas plus caractérisées — qui ont été décrites sous ce nom.

Dans un minérai de Klabava nous avons trouvé un silicate semblable, dans lequel nous voyons une transition de cette „myéline“ à la kaolinite typique; elle possède une couleur presque blanche, sa biréfringence est plus faible, l'indice moyen de réfraction 1.56.

Nous regardons ces oolites comme un produit d'une altération diagénétique de la chamosite, ce processus chimique étant analogue à la „bauérisation“ des biotites.

#### *Hématite.*

L'hématite cristalline est assez rare dans nos minerais, où elle forme avec le quartz des concrétions à structure concentrique (Libečov) ou plus souvent des roches siliceuses, des quartz ferrugineux; dans ce dernier cas, la forme de l'oligiste est pour la plupart squeletteuse et la structure microscopique de la roche rappelle celle des agats mousseux. Tout autre minérai de fer rouge très répandu dans les oolites comme dans la substance interstitielle est compact et il reste incertain, s'il appartient entièrement à l'hématite ou, pour une part du moins, à la turjite.

#### *Magnétite (voir pl. III. fig. 1.)*

Déjà Krejčí, Zippe et Reuss ont constaté, que plusieurs minerais chamositiques de Nučice et d'autres localités sont magnétiques; Vála et Helmhacker (32) de même que Feistmantel (10) ont reconnu, que cela est dû aux cristaux et grains microscopiques de la magnétite, disséminés dans les oolites de la chamosite. Dans le quartz ferrugineux de Ouzaly, la magnétite accompagne en quantité assez notable l'hématite prévaillante.

#### *La goethite*

n'a été observé que dans le quartz ferrugineux de l'ancienne mine Ouzký près de Holoubkov, où elle forme une bordure fine autour des squelettes cristallins de l'hématite.

#### *L'hydroxyde de fer brun*

est toujours le produit d'une altération superficielle des minerais et apparaît dans ses formes les plus communes.

#### *Sidérose.*

La sidérose apparaît dans nos minerais de fer: 1) comme le ciment primaire, authigène et syngénétique, d'une structure compacte, mêlé

d'éléments clastiques (quartz, mica blanc, substances argilleuses): une grande part des minerais des étages  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ ; 2) comme ciment cristallin, granulaire, plus pur: presque tous les minerais de l'étage  $d_{3+4}$ , des autres seulement ceux de Plískov et quelques localités analogues; 3) comme aggrégat granulaire, au premier aspect presque congruent au précédent, mais d'une formation postérieure, pénétrant tout le minéral et oblitérant la structure oolitique: c'est le cas des minerais métasomatiques de la Dědova hora appelés „flinz“ (v. pl. II. fig. 3.), partiellement aussi des minerais de Nučice, Zdice, Karýzek, Kyšice; 4) comme un minéral de fissures et imprégnations secondaires, accompagné de sulphures métalliques, de tarytine, d'ankérite etc.

Les minerais totalement ou presque non oolitiques ce composent en majeure partie de la sidérose compacte (1) et forment des petites inclusions et couches minces interstratifiées dans les masses du minéral oolitique, principalement aux localités de l'étage  $d_{1\gamma}$ : Zdejčina, Klabava, Mníšek. Les minerais oolitiques les plus riches en sidérose sont ceux du mont Radeč et de ses environs, de Karýzek en  $d_{1\gamma}$ , quelques de Nučice (la variété dite „pískovice“ = minéral sableux) et de Zdice en  $d_{3+4}$ , qui appartiennent au groupe 3.

#### *Pyrite.*

Dans les localités de l'étage  $d_{3+4}$ , le pyrite est assez abondant, forme des concrétions ellipsoïdiques qui atteignent parfois les dimensions d'un décimètre, voire même davantage (Nučice), des cristaux cubiques et pentagon-dodécaédriques disséminés dans le minéral (dto), des couches alternant avec le minéral et renfermant de phosphorite colloïde (Zdice). Dans les deux étages plus anciens, le pyrite est également assez répandu, mais seulement en petites quantités, comme imprégnations, grains et cristaux. Les concrétions pyritiques de Nučice possèdent une structure oolitique, les oolites consistant en pyrite ou myéline; dans les schistes pyriteux de Zdice, on peut observer deux générations de pyrite, l'antérieure compacte, alternant avec des couches de phosphorite, et la postérieure cristalline, granuleuse. La première paraît s'être formée originairement en état colloïde (la melnikovite de M. B. D o s s, 9). En général il y a une analogie très marquée entre l'occurrence du pyrite et celle de la phosphorite colloïde dans nos minerais.

#### *Phosphorite.* (Pl. I. fig. 3, pl. III. fig. 5.)

Jusqu'à présent inconnue, la phosphorite colloïde est très répandue dans nos minerais à l'état microscopique; en concentrations macroscopiques elle se borne à un petit nombre de localités: en  $d_{3+4}$ , ce sont *Trubín* et *Zahořany* près de Beroun et *Zdice*; en  $d_{1\gamma}$  *Hřebeny Hostomické* et *Kyšice*, en  $d_{1\beta}$  *Březina*. Partout la phosphorite apparaît comme un élément *primaire* du minéral. Au microscope, la phosphorite est translucide ou transparente en couleur jaune ou brun de diverses nuances, sa couleur macroscopique

pique est un gris foncé, parfois brunâtre ou rougeâtre par les oxydes de fer secondaires. Entre nicols croisés, toutes les phosphorites sont absolument isotropes. L'indice de réfraction 1.60 (rognons presque blancs de Březina), 1.615 (couches alternantes microscopiques dans les oolites au minéral de Karýzek), 1.620—1.625 (concrétions des Hostomické Hřebený, translucides en couleur brun). Le minéral incolore isotrope, qui se trouve aux oolites de Karýzek plus rarement que la phosphorite, a l'indice de 1.58 et paraît être une collophanite pure. La dureté varie autour de 4.

L'analyse chimique de la phosphorite de Hostomické Hřebený, faite par M. le Dr. J a r o s l a v Š p l í c h a l, a donné les résultats reproduits ici dans la colonne *a*; dans *b*, la partie soluble dans les acides est calculée sur 100.00%.

	<i>a</i>	<i>b</i>
Insoluble en acides	20.70*)	—
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	26.63	33.87
SO <sub>3</sub>	1.41	1.79
CO <sub>2</sub>	1.02	1.30
Cl	0.02	0.02
F	trace	—
SiO <sub>2</sub> soluble	0.20	—
CaO	37.20	47.32
MgO	0.60	0.76
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	8.01	10.19
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2.09	2.66
H <sub>2</sub> O constit. et matières organiques	1.64	2.17
H <sub>2</sub> O hygroscopique	0.36	—
	99.88	100.00

Cette substance colloïde nous offre évidemment un exemple d'un mélange d'adsorption, dans la composition duquel l'acide sulphurique entre selon toute probabilité sous forme d'un phosphate diadochitique, l'alumine comme hydroxyde bauxitique; ceci est témoigné par les indices de réfraction, trop hauts pour un mélange de phosphorite avec un des phosphates amorphes d'alumine (evansite etc.).

Le concrétions de Trubín et Zahořany se composent d'un mélange de phosphorite avec la sidérose et les oxydes de fer secondaires.

L'examen microscopique prouve que dans tous ces cas la phosphorite est d'une origine simultanée avec les minéraux ferrifères, la chamosite ou la sidérose, de même qu'avec la myéline. La nature primaire est surtout documentée par des morceaux clastiques de la phosphorite, trouvés dans quelques minerais de Karýzek, Březina, Klabava, et formant parfois un noyau central des oolites.

\*) 19.36 SiO<sub>2</sub>, le rest est principalement Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.



Sans aucun doute, la phosphorite de nos minerais est *organogène* et provient principalement des coquilles phosphatiques des Lingulides et peut-être d'autres brachiopodes, dont les débris se trouvent en masse dans certaines roches sédimentaires polymictes, mêlées des oolites hématitiques (Březina, Ouzký près de Holoubkov, Janovky près de Cheznovice), assez fréquemment aussi dans certains minerais eux-mêmes (chamosites de Osek, Pláskov, Ohrazenice). La substance des coquilles apparaît au microscope incolore ou brunâtre, avec l'indice de refraction = 1.61; elle est presque toujours isotrope et ne montre que rarement des traces de biréfringence par tension. Les coquilles sont parfois silifiées.

#### Quartz.

Les minerais de l'étage  $d_{3+4}$  sont presque exempts de quartz, ceux des deux étages plus anciens parfois très riches en quartz clastique, mêlé à leur substance interstitielle et formant souvent le noyau central des oolites (en ce dernier cas, il ne renferme pas d'inclusions de chlorites, sidérose ou oxydes de fer et se montre donc tout à fait différent du quartz pseudoclastique, trouvé par M. L. C a y e u x (8) dans les minerais oolitiques français). Cf. les fig. 1 et 4 de la pl. II.

Le quartz authigène a été observé en forme syngénétique, dans les quartz ferrugineux, mentionnés plus haut. Comme élément épigénétique, silifiant les oolites et parfois aussi certaines parties du ciment et une part des coquilles de brachiopodes, nous le trouvons dans plusieurs minerais: de Zdice en  $d_{3+4}$ , de Zdejčína, Cheznovice, Brdo en  $d_{1\gamma}$ , de Svatá, Březina etc. en  $d_{1\beta}$ . (Voir les fig. 2 et 3 dans le texte et fig. 2 et 4 pl. II.)

Les carbonates (*ankérite, dolomite*) de même que la *barytine* sont de minéraux épigénétiques des fissures et des imprégnations;

la *muscovite*

un élément clastique très fréquent.

La *calcite*

provient des débris organiques (cystoïdes, céphalopodes au minéral de Nučice) ou d'une décomposition des tuffes diabasiques, disséminés dans plusieurs minerais de l'étage  $d_{1\beta}$ .

*Les minerais de fer comme roches.*

Les minerais de fer sont des *roches mixtes*, caractérisées par les minéraux qui forment les oolites et le ciment; selon la composition, on peut distinguer seize catégories:

Oolites:  
A. *chamosite*

ciment:  
1. *sidérose*  
2. un mélange *clastique*  
3. un minéral *chloritique*  
4. un *tuffe* diabasique

- |  |   |
|--|---|
| B. myéline   | 5. sidérose   |
|  | 6. un mélange <i>clastique</i>  |
|  | 7. un <i>tuffe</i> diabasique mêlé du matériel <i>clastique</i> („ <i>schalstein</i> “) |
| C. sidérose prévalement  | 8. sidérose prévalement   |
| D. fer rouge   | 9. sidérose   |
|  | 10. un mélange <i>clastique</i>   |
|  | 11. un „ <i>schalstein</i> “  |
| E. limonite  | 12. sidérose  |
|  | 13. un mélange <i>clastique</i>   |
| F. silifiées   | 14. sidérose  |
|  | 15. un mélange <i>clastique</i>   |
| G. 16 quartz ferrugineux et leurs transitions au minéral de fer rouge. |   |

Dans l'étage  $d_{1\beta}$ , on trouve aux horizons inférieurs principalement des minerais rouges (9, 10, 11, 16), qui font complètement défaut dans les étages  $d_{1\gamma}$  et  $d_{3+4}$ . Les quartz ferrugineux forment un horizon distinct à la base du  $d_{1\beta}$ . D'autre part, l'étage  $d_{1\beta}$  est caractérisé par une association fréquente des minerais avec les tuffes diabasiques; dans ce cas, le minéral ferrifère est presque toujours l'hématite, les catégories 7 (Dědova hora = Giftberg pro parte) et 4 (Ohrazenice) n'étant représentées que par une seule localité chacune. Certaines variétés, qui se bornent aussi à l'étage  $d_{1\beta}$ , ont un caractère plus local: 1) les minerais métasomatiques, constitués principalement par la sidérose: la Dědova hora et l'Ostrý; 2) les transitions du minéral de fer rouge aux sédiments riches en fragments de porphyres décomposés (Březina, Cheznovice); 3) les conglomérats de l'Ouzký et 4) les minerais non-oolitiques de Oувалы.

Au  $d_{1\gamma}$ , on peut distinguer trois types de minerais: a) minerais avec des oolites chamositiques au ciment sidéritique ou chloritique (1, 3), lesquels forment un horizon à la base de l'étage (Klabava, Osek, très probablement aussi Plískov, Horní Kváň, Mníšek pro parte); b) minerais presque entièrement sidéritiques ou qui renferment partiellement des oolites myéliniques (5, 8): Karýzek, Radeč; c) minerais avec les oolites silifiées (Zdejčína, Šárka, la mine abandonnée Prokop près de Cheznovice, Hostomické Hřebený, Ptákov, probablement aussi Písky près de Čenkov, la mine Josef au Brdo, la mine Ignác près de Kváň). Ce qui caractérise tous ces minerais, ce sont les transitions graduelles aux roches sédimentaires.

La silification ne se borne pas à l'étage  $d_{1\gamma}$ , mais apparaît souvent aussi en  $d_{1\beta}$  (Březina, Dědova hora, Kleštěnice, Ostrý, Zaječov), parfois (Zdice) même en  $d_{3+4}$ .

Les minerais du  $d_{3+4}$  sont caractérisés par leur ciment sidéritique plus ou moins pur, les éléments *clastiques* ne se trouvent que dans les tran-

sitions aux roches sédimentaires voisines; les oolites sont constituées de la chamosite, myéline, sidérose ou quartz secondaire, et leur composition minéralogique varie même dans une même localité (Zdice: 5, 8, 14, Nučice 1, 5, 8).

*Question de la forme primaire du phosphore dans les minerais.*

Dans un mémoire sur les minerais de fer oolitiques de la Lorraine, M. F. Villain (33) a discuté un grand nombre d'analyses chimiques et croyait en pouvoir conclure, que la forme normale primaire du phosphore dans les minerais est le phosphate de fer, non celui de chaux. M. L. de Launay (20), dans son oeuvre admirable sur la métallogénie, a montré, qu'en général les minerais de fer non métamorphiques sont riches en phosphore, tandis que ceux, qui se sont développés par la substitution métasomatique des calcaires, en renferment d'ordinaire très peu. L'origine du phosphore dans les minerais sédimentaires est attribuée par lui à la décomposition des coquilles et d'autres débris organiques.

Cette explication est sans doute juste et nos recherches microscopiques la confirment de nouveau pour les minerais du silurien bohème en ce qui concerne la part géologique du problème. Le côté minéralogique de la question n'a point été considéré jusqu'ici — voilà pourquoi M. Villain a pu tenter de soutenir sa conclusion par le fait observé par lui, que la teneur en phosphore ne diminue pas même dans le cas, où il y a absence totale de débris organiques visibles. La présence du colloïde minéral, presque généralement répandu dans nos minerais et capable — comme les colloïdes en général — d'absorber d'autres substances colloïdes en quantités notables et très variables, ne permet pas d'appliquer ces déductions à nos minerais et rabaisse essentiellement la valeur des analyses en bloc lors de solution de pareils problèmes.

*Les quartz ferrugineux.*

L'examen microscopique des quartz ferrugineux, provenant de nombreuses localités, prouva, qu'ils sont constitués par le quartz granulaire, en quelques cas par la calcédoine et par des squelettes cristallins d'hématite; la finesse de ces beaux groupements de cristaux et leur ramification multipliée leur donnent une ressemblance structurelle aux agats mousseux; sans doute, la formation de la silice a eu lieu à l'état colloïde et contemporanément avec la cristallisation du sesquioxyde de fer, d'une manière analogue à l'expérience de D. Gergens sur la diffusion du sulphate de fer dans le verre soluble, cité récemment dans le travail intéressant de M. R. E. Liesegang (25); plus tard, la silice a passé successivement de l'état colloïde au cryptocristallin (calcédoine) et de là à l'état cristallin-granulaire. Nous espérons pouvoir publier en peu de temps une note spéciale sur la nature de ces quartz ferrugineux.



*La structure des minerais et la paragenèse de leurs éléments minéralogiques.*

Seule la localité d'Ouvaly renferme dans ses parties restées accessibles exclusivement des minerais non oolitiques; dans toutes les autres, nous ne trouvons que de petites couches interstratifiées et de noyaux d'une sidérose compacte, mêlée de matériel clastique, le plus fréquemment dans la plupart des localités en  $d_{1\gamma}$ : Zdejčina, Mníšek, mine Josef à Brdo, Pisky près de Čenkov; mais elles se trouvent aussi aux autres étages (Klabava en  $d_{1\beta}$ , Nučice en  $d_{3+4}$ ).

Dans d'autres cas, la structure oolitique primaire a été détruite secondairement par des processus métasomatiques (les „flinz“ de la Dědova hora et de l'Ostrý) ou par une cataclase (le groupe du Radeč).

Tous les autres minerais sont des oolites typiques. L'élément constitutif primaire de la structure est avant tout la *chamosite*. Ses oolites montrent entre nicols croisés la croix noire normale, parfois disloquée; la structure concentrique embrasse la masse entière de l'oolite ou seulement ses parties extérieures, le centre étant occupé par un aggrégat du minéral chloritique compact ou par un noyau étranger: quartz clastique, fragment d'une coquille, tuffe diabasique, porphyre vitreux décomposé, schiste ou phosphorite.

Les *déformations* des oolites sont fréquentes et on peut observer très souvent, que la structure concentrique intérieure de l'oolite s'accommode à ses contours déformés; déjà en 1876, K. Feistmantel (10) en tira une conclusion en faveur de la formation authigène des oolites, analogue à celle des concrétions, et de leur nature originairement plastique et — comme nous le dirions aujourd'hui — coriogènes. Les analogies structurelles des concrétions constituées par la sidérose et la phosphorite (Trubín, Zahořany) avec les oolites sont un témoignage de plus en faveur de cette opinion.

Les *fissures de contraction*, formées pendant le dessèchement du sédiment, tant radiales que concentriques, sont très typiques dans quelques minerais de Ždice, Nučice, Karýzek (pl. III. fig. 2).

Ce n'est que dans un nombre restreint de localités (Hudlice, Neřežín), qu'on trouve dans les sédiments tuffogènes („schalsteine“) des oolites hématitiques roulées, selon toute la probabilité allothigènes.

Dans les oolites chamositiques ou myéliniques non altérées, ainsi que dans ceux dont le silicate a été substitué par la sidérose, on ne trouve point de couches alternantes de la silice, soit cristallisée ou colloïde: les annelets de silice, obtenus par Bleicher (4) dans les minerais lorrains et déjà par Feistmantel dans ceux du silurien bohême en faisant agir l'acide chlorhydrique et nitrique sur les oolites, paraissent être un phénomène secondaire (la même opinion a été prononcée par M. A. Lacroix, 19, tome I, p. 402, t. III, p. 381—3).

Nous pouvons toutefois citer un très bel exemple d'oolites constituées par un colloïde et un cristalloïde alternants — ce que M. H. S c h a d e regarde comme le cas normal des oolites — savoir les oolites et les concrétions d'une constitution et structure conforme aux derniers (Trubín et Zahorány), composées de la phosphorite et de la sidérose. (Pl. III. 5.)

#### *Les structures du ciment.*

Chez la plupart des minerais du  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ , le ciment reliant les oolites est analogue aux roches entourantes sédimentaires (schistes, grès, grauwackes) ou tuffiques mêlées de sidérose et passe à ceux-ci par la disparition des oolites et de la sidérose. Dans les minerais chamositiques au  $d_{1\gamma}$  ou aux horizons plus récents du  $d_{1\beta}$  une grande part de la sidérose du ciment est parfois substituée par une chlorite, qui forme des écailles très minces ou est presque compacte; quant à ses propriétés optiques, elle ressemble complètement à la chamosite (Plískov, Osek, Klabava).

Les minerais du  $d_{3+4}$  ont au contraire un ciment sidéritique cristallin qui ne doit cependant être regardé comme produit d'une épigénèse postérieure à la formation des dépôts ferrifères. On observe sans doute souvent deux générations de sidérose, la première plus troublée et d'un grain plus fin, la seconde plus pure et cristalline, mais toutes les deux appartiennent à la période diagénétique des minerais.

La sidérose distinctement métasomatique, assez fréquente dans quelques localités du  $d_{1\beta}$  (Dědova hora, Ostrý, Svatá) est accompagnée — dans les imprégnations aux minerais mêmes aussi bien que dans les fissures traversantes les dernières — de barytine, ankerite et de sulfures divers (cinnabre, pyrite etc.).

#### *Les effets de la pression*

se manifestent parfois en une cataclase intense microscopique (les minerais sidéritiques aux oolites minces du Radeč), en des brèches macroscopiques (minerais hématitiques de Zaječův, passant aux quartz ferrugineux, les mêmes de Záhořek près de Hředly, associés aux tuffes diabasiques, les grès passant aux minerais limonitiques, riches en phosphorite, du  $d_{1\gamma}$  à Kyšice). Au  $d_{3+4}$ , seulement le gisement de Zdice, dont les couches sont très disloquées, montre des phénomènes de pression.

#### *La succession des éléments dans les minerais.*

Krejčí et Bořický (6, 7) regardent la chamosite, Feistmantel (10) la sidérose comme le minéral primaire des oolites; Zavarickij et Bogdanovič (5) ont constaté, que dans les oolites du minéral de Nučice la sidérose et le quartz sont plus récents que la chamosite. M. A. Benck e (3) applique à nos minerais — sans toutefois

donner des propres observations — la série génétique de Cayeux: calcite — sidérose — chamosite — magnétite — quartz — hématite et limonite. Par nos investigations vient s'ajouter une autre question, celle de la relation de la myéline, phosphorite et du pyrite aux autres minéraux.

Dans tous les minerais étudiés par nous, *la chamosite montre un caractère décidément primaire*; partout, où elle est voisine à la sidérose, *celle-ci est l'élément plus récent*, qui détruit la structure normale oolitique. Il y a la même relation entre la sidérose et la myéline. La succession des silicatés oolitiques et de la sidérose est donc contraire à celle observée par M. L. Cayeux dans les minerais français. Le quartz est postérieur aux deux silicates oolitiques et les remplace souvent, parfois jusqu'à la silification complète; quant'à la sidérose, nous observons dans quelques minerais du  $d_{3+4}$  (la „pískovice“ = minéral sableux de Nučice, une partie des minerais de Zdice) sa contemporanéité avec le quartz, en d'autres cas celui-ci est l'élément le plus récent. Dans les localités caractérisées par les processus filoniens et métasomatiques (Dědova hora, Březina) c'est le cas inverse qui a été constaté, la sidérose se répandant au dépens du quartz granulaire du ciment.

L'hématite est partout produit d'oxydation des autres minéraux ferri-fères; dans certains cas elle provient directement de la chamosite, dans d'autres, de la sidérose. Parfois on observe une silification des oolites hématitiques (Svatá).

La phosphorite est d'une part l'équivalent de la chamosite, formant des oolites constituées exclusivement par elle, d'autre part de la sidérose et du pyrite. Ce dernier est dans les oolites postérieur aux autres éléments.

La myéline n'est pas un produit de l'altération récente superficielle de la chamosite, ce qui est témoigné par les enclaves des minerais de Zdice dans une brèche diabasique contemporaine, lesquels renferment déjà des oolites myéliniques. Les phénomènes de transition entre les deux silicates, observés p. e. dans quelques minerais de Nučice et Mníšek, montrent pourtant, que la myéline s'est formée de la chamosite par une perte du fer presque totale; ce processus a dû être terminé déjà dans la période diagénétique.

Dans le ciment on observe souvent deux générations de la sidérose; la chlorite non-oolitique des minerais de Klabava, Plískov, Horní Kváň est contemporaine avec la première génération. Une silification du ciment n'est pas rare. La phosphorite et une partie du pyrite sont les équivalents de la première génération de la sidérose, tandis que l'autre partie du pyrite est plus récente.

En général, nous pouvons distinguer la succession:

1. chamosite, myéline et magnétite dans les oolites, chlorite et sidérose presque compacte dans le ciment; 2. sidérose granulaire; 3. quartz p. p.; 4. oxyde de fer rouge et brun, une autre part du quartz. La phosphorite appartient aux groupes 1 et 2, le pyrite à 3 et 2.



*Le phénomène métasomatiques* sont les mêmes dans le ciment que dans les oolites.

Les localités caractérisées par les métasomatoses: Dědova hora, Ostrý, Březina, Svatá, Krušná hora, Svárov, toutes de  $d_{1\beta}$ , montrent un développement notable des tuffes diabasiques; évidemment, les métasomatoses sont liées aux lieux d'une manifestation plus intense du vulcanisme. Tous les filons et imprégnations sont des phénomènes postvulcaniques des diabases infrasiluriens mêmes et bien antérieures aux gîtes filoniens de Příbram et d'autres localités en connexe avec le grand massif granitique du centre de la Bohême.

*Les rapports des gîtes ferrifères aux roches voisines.*

Les minerais sont séparés de leurs roches voisines, dans la plupart assez distinctement; les seules transitions sont celles aux schistes argilleux et tuffogènes, aussi qu'aux tuffes diabasiques du  $d_{1\beta}$ , à quelques schistes du  $d_{1\gamma}$  et aux grès du  $d_{3+4}$ ; les diabases grenus, porphyriques et amygdaloïdes et les tuffes diabasiques communs, nommés „žalák“ (pierre de grenouilles), sont toujours séparés des minerais d'une manière très distincte.

*Le niveau stratigraphique des minerais* dans les étages respectifs n'est pas précisément constant. Dans les parties inférieures du  $d_{1\beta}$  il y a des minerais hématitiques; ils sont souvent associés, comme observa déjà Lipold, aux „schalsteins“; dans les horizons de passage entre  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ , on peut constater des minerais chamositiques, intimement liés aux schistes sédimentaires.

Comme horizons locaux, on peut distinguer d'après nos investigations les suivants (en succession des plus anciens aux plus récents):

- conglomérats ferrifères (Ouzký, Svojkovice);
- quartz ferrugineux (Libečov, Točník, Eugenov, Ouhaly etc.);
- minerais de fer rouge avec fragments du porphyre (Cheznovice, Svárov);
- minerais associés aux tuffes (Zaječov, Dědova hora, Ostrý, Ohrazenice, Svárov);
- grauwackes avec des coquilles et des oolites hématitiques (Březina, Ouzký, Cheznovice);
- minerais chamositiques appartenant d'une part sûrement au  $d_{1\gamma}$ , de l'autre indécis entre  $d_{1\gamma}$  et les parties supérieures du  $d_{1\beta}$  (Klabava et Osek au toit immédiat de l'horizon Eulomaniobe, Plískov, Baba etc.);
- minerais passant aux grès quartzitiques dans  $d_{1\gamma}$  (Klabava p., Kyšice p.).

Malheureusement les découvertures de nos gîtes ferrifères dans le  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$  sont si rares et si imparfaites, qu'il n'est pas possible de

résoudre définitivement la question, si ces horizons forment une série successive ou si quelques-uns d'eux se remplacent réciproquement.

Dans l'étage  $d_{3+4}$  les minerais appartiennent à un niveau stratigraphique assez bien déterminé; dans le mur de ce dernier les schistes sont riches en grès quartzitiques interstratifiés, dans le toit elles en sont pauvres. Les éruptions diabasiques du même étage apparaissent aussi bien au mur qu'au toit des minerais, mais ne sont nullepart liées plus intimement avec eux. Dans les brèches tuffiques de Zdice et de Krahulov nous avons constaté, que la roche éruptive et les sédiments mêlés du minéral s'incluent mutuellement, ce qui est un témoignage important pour l'origine primaire des minerais.

#### *La génèse des minerais.*

L'explication de la génèse du minéral de fer par un remplacement m tasmotique des calcaires oolitiques n'est pas applicable à nos gîtes ferrifères. Nous ne connaissons dans toute l'extension de notre silurien inférieur aucun lieu, ou il y aurait des calcaires oolitiques; ce que Lipold (24a) et Liebus (24) ont mentionné comme calcaires du  $d_{1\beta}$ , ne sont que des tuffes diabasiques décomposés et riches en calcite secondaire; les calcaires impurs, interstratifiés au  $d_{3+4}$  en quelques localités, n'ont pas une trace de structure oolitique et font partie d'un niveau supérieur que celui des minerais, déjà au passage à la bande  $d_5$ . Nous n'observons ni failles nourricières ni accumulations des minerais dans les diabases mêmes. Au microscope, nous constatons avec certitude une succession génétique tout à fait différente de celle trouvée par M. L. Cayeux dans les minerais m tasmotiques de la France. Les processus de silification ne dépendent pas du niveau de l'altération superficielle actuelle.

Pour ces raisons, nous devons attribuer à nos gîtes ferrifères une origine syngénétique; restera la question, d'où provient le fer et à quel degré les phénomènes volcaniques participent à la formation des minerais. Comme nous avons déjà mentionné plus haut, les roches éruptives sont séparées des gîtes ferrifères partout par une limite très distincte, sauf les tuffes mêlés de matériel sédimentaire (schalsteins) au  $d_{1\beta}$ ; contrairement, les minerais passent aux roches sédimentaires du  $d_{3+4}$  et surtout du  $d_{1\gamma}$ , graduellement et leur ciment correspond, quant'à la composition minéralogique et la structure, aux sédiments voisins. Les analogies paragénétiques et structurelles de la chamosite et sidérose avec la phosphorite et le pyrite, minéraux organogènes, ne sont pas d'accord avec l'origine des minerais par l'action thermique des eaux postvulcaniques. La nature cristalline du ciment sidéritique aux minerais de Nu ice et autres localités n'exclut pas nécessairement sa formation sédimentaire et non-métamorphique, sp ciellement depuis que les investigations de M. F. Tu an (31) ont montré la fréquence extraordinaire des structures cristallines dans les roches carbo-

natiques, même quand ces dernières se trouvent loin de toute possibilité d'une métamorphose.

Les oolites hématitiques dans quelques tuffes du  $d_{1\beta}$  paraissent être allothigènes, apportées des roches ferrifères plus anciennes, dans lesquelles la formation des oolites et leur transformation en hématite s'est produite plutôt que la sédimentation du tuffe. Dans un autre cas, représenté principalement par le minéral de Ohrazenice (v. p. 18, 24), la genèse des oolites est sûrement contemporaine avec la sédimentation des cendres volcaniques et antérieure à leur cimentation par la calcite secondaire. Dans les brèches volcaniques du  $d_{3+4}$  (Zdice, Krahulov) on peut enfin observer, comme nous l'avons déjà mentionné dans un des chapitres précédents, des inclusions de minéraux, dans lesquelles des transformations secondaires eurent déjà lieu (genèse de la myéline, silification des oolites).

Tous ces phénomènes conduisent à la conclusion, que non seulement la première genèse des minéraux et la formation des oolites a été contemporaine avec la sédimentation des roches entourantes, mais que même *les éléments minéralogiques, lesquels au microscope se montrent comme plus récents, ont fini leur processus de formation dans cette même époque.* Autrement dit, l'image actuelle minéralogique et structurelle de nos minéraux date de la période diagenétique des sédiments ferrifères. Il n'y a que les phénomènes locaux d'une métagénèse et d'un remplissage filonien (voir p. 13), qui soient postérieurs à la diagenèse; ils appartiennent cependant encore à l'époque d'activité volcanique infrasilurienne. Nous ne pouvons fixer avec une précision suffisante la date géologique de la transformation des minéraux originairement chamositiques en hématite; cependant la genèse des grandes couches de l'hématite oolitique dans les parties inférieures du  $d_{1\beta}$  (Krušná hora, Kyšice-Ejpvovice etc.) n'est pas due à l'altération superficielle récente et s'effectua certainement dans des époques géologiques très anciennes, antérieures au plissement varisien.

Pour un autre processus secondaire, pour la silification des oolites, nous possédons des preuves directes de ce qu'elle s'est produite, pour une grande part du moins, déjà pendant la diagenèse. Nous avons mentionné plus haut sa présence dans les inclusions des brèches tuffiques au  $d_{3+4}$  (p. 7) et dans les coquilles de brachiopodes, qui forment le noyau central des oolites dans les minéraux de Plískov et d'autres localités (p. 7, 24). De même, dans l'étage  $d_{1\beta}$ , auquel appartient la plupart des minéraux renfermant des oolites silifiées (Zdejčína, Cheznovice, Šárka), la silification concrétionnaire est un phénomène très commun (les „globules de Rokycany“ ou „gl. d'Osek“). M. B. K a t z e r (13) a montré par ses études microscopiques, que l'agrégat du quartz au grain très fin est congruent dans ces concrétions et dans les schistes environnants, qui ne se distinguent des globules que par leur pauvreté relative en quartz; il n'y a aucun doute, que cette silification ne soit aussi un phénomène diagenétique.



Cependant, le quartz étant un des minéraux les plus récents dans la paragenèse de nos gîtes, on doit regarder la formation de la chamosite, myéline, sidérose, phosphorite et au moins de la plus grande part du pyrite également comme *un processus géochimique, terminé avant la solidification des sédiments ferrifères*.

Dans les périodes diverses du silurien inférieur, les schistes en sédimentation se sont enrichis de combinaisons de fer; la décomposition des plus fines cendres volcaniques, mêlées aux sédiments, a contribué essentiellement à cet enrichissement, qui a déterminé une précipitation rythmique du silicate chamositique à la forme des oolites. Par ces phénomènes de diffusion, les oolites se sont différenciées du ciment, qui par lui même est analogue aux sidéroses marines et a la même origine sédimentaire que ces dernières. Les transformations chimiques dans les sédiments pas encors endurcis consistaient en la formation de myéline par l'extraction du fer de la chamosite, en une cristallisation partielle de la sidérose et sa pénétration dans les oolites, en une formation de la phosphorite au dépens de la substance phosphatique des coquilles et finalement en une précipitation du plus fin agrégat quartzeux et une transformation des minéraux primaires de fer en oligiste.

*Notes sur les gisements ferrifères dans  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ .*

Dans les deux étages plus anciens de notre silurien,  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ , les gîtes ferrifères s'étendent des environs de Prague (la Šárka) au sud-ouest par Svárov et Libečov près de Unhošt aux environs septentrionaux de Beroun, Zdice et Zbiroh (les localités: Zdejčína, Krušná hora, Hředly, Plískov, le mont Radeč) jusqu'au district ferrifère de Rokycany (Březina, Osek, Klabava, Kyšice). De là, une autre série de gisements se dirige, au S du rayon des couches siluriennes plus récentes, à Cheznovice, Kařýzek, Zaječov, Svatá Dobrotivá (Sta Benigna), Horní Kváň, Dědova hora („Giftberg“ des auteurs allemands), environs de Jince (Ostrý, Ohrazenice), Hostomice (Baba, Hřebeny) et Mníšek. Une localité isolée est celle de Ouvaly E de Prague.

De tous ses gisements, on n'exploite à présent que ceux de Krušná hora et de Klabava-Kyšice, les autres étant abandonnées depuis 30—60 ans. Ce que nous avons pu ramasser sur les terrils et trouver dans les collections du Musée du Royaume de la Bohême, de l'École montanistique supérieure de Příbram et du Musée municipale de Plzeň, suffit pour caractériser globalement les localités respectives, mais pour une monographie définitive de nos gîtes ferrifères il faut encore attendre des découvertes plus nombreuses, qui offriraient du matériel moins altéré.

Suivant l'ordre géographique indiqué plus haut, les localités principales du  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ , étudiées par nous, sont les suivantes:

- la Šárka*: tuffes ferrifères (schalsteins), hématite oolitique, schistes  $d_{1\gamma}$ , avec oolites silifiées.
- Svárov—Libečov*: minerais et roches analogues à ceux de la Šárka, schistes avec des oolites de myéline.
- Chýňava*: les mêmes et minéral chamositique.
- Zdejšína*: minerais au ciment sidéritique et oolites silifiées dans le  $d_{1\gamma}$ , pas de tuffes.
- Svatá*: dans le  $d_{1\beta}$ , minéral hématitique, tuffes ferrifères, produits des processus épigénétiques: sidérose cristalline, barytine, ankérite.
- Krušná hora*: dans la couche principale (inférieure) hématite oolitique avec tuffes et diabases amygdaloïdes, au toit, déjà au  $d_{1\gamma}$ , schistes avec sidérose et oolites myéliniques.
- Točník*: quartz ferrugineux.
- Dlouhá skála près de Kublov*: limonites ochreuses et scoriacées.
- Hřebeny près de Lišná*: oolites de myéline en un ciment schisteuse.
- Plískov près de Zbiroh*: dans le  $d_{1\gamma}$ , très beau minéral chamositique avec ciment constitué pour une part par la sidérose, pour l'autre par une chlorite. (Pl. II. fig. 1.)
- Sebešice, Bechlov, Radeč*: minerais très riches en sidérose, appartenant vraisemblablement au  $d_{1\gamma}$  supérieur; oolites petites, constituées par la myéline et sidérose secondaire; cataclase intense.
- Skelná Huť*: minéral chamositique avec ciment chloritique, riche en magnétite;  $d_{1\gamma}$  inférieur?
- Březina*: hématite oolitique, minéral schisteux avec oolites de myéline, grauwackes mêlées d'oolites hématitiques et de lumachelles de *Obolella complexa*. (Pl. I. fig. 1.)
- Osek*: oolites chamositiques dans le schiste  $d_{1\gamma}$ .
- Klabava*, rivage droit de la rivière Klabavka: minéral hématitique en  $d_{1\beta}$ , sans tuffes.
- Klabava*, rivage gauche: à la galerie Kristián, couche de minéral en  $d_{1\gamma}$  inférieur, au toit immédiat des tuffes diabasiques schisteux, qui appartiennent au niveau Euloma-Niobe. Le minéral se compose d'oolites chamositiques et de ciment de sidérose, chlorite et éléments clastiques. (Pl. I. fig. 2, II. fig. 2.)
- Kyšice*: hématite oolitique en  $d_{1\beta}$ ; en  $d_{1\gamma}$ , les grès quartzeux interstratifiés passent à un minéral limonitique avec de gros oolites, riche en phosphorite.
- De Klabava à Plzenec*: schistes à oolites chamositiques, minerais aux oolites de myéline et transitions aux schistes argilleux et aux grès quartzitiques.
- L'Ouzký près de Holoubkov*: hématite compacte, conglomérat quartzeux avec ciment hématitique, quartz ferrugineux avec squelettes cristallins d'oligiste.

- Cheznovice*, mine abandonnée *Prokop*: minéral au  $d_{1\gamma}$ , pour la plupart limonitique; silification intense des oolites.
- Cheznovice*, m. a. *Janovky*: minéral hématitique, passant aux grauwackes avec fragments de porphyre altéré.
- Karýzek*: minéral avec oolites myéliniques; minéral presque totalement sidéritisé; beaucoup de phosphorite dans les oolites et les concrétions; transitions aux sédiments schisteux et psammitiques, fossiles dans les derniers comme dans le minéral lui-même. Le gît appartient au  $d_{1\gamma}$  supérieur. (Pl. I. fig. 3.)
- Zajčev*: tuffes ferrifères, hématites oolitiques, quartz ferrugineux passant au minéral.
- Kleštěnice*: hématite oolitique, silification des oolites chamositiques. (Pl. II. fig. 4.)
- Ptákov*: schiste du  $d_{1\gamma}$  avec oolites de myéline.
- Hrbek* près de *Sv. Dobrotivá* (localité originelle du cacoxène, de la picite et berounite, qui se trouvaient ici comme minéraux secondaires aux fissures): limonites scoriacées et indistinctement oolitiques.
- Horní Kváň*: hématites oolitiques, minéraux constitués par la chamosite et par un ciment schisteux avec beaucoup de chlorite et sidérose.
- Hlava* près de *Malá Víska*: hématites oolitiques, tuffes ferrifères, minéraux avec des oolites myéliniques, passant à des grès schisteux.
- Zuzana*, mine abandonnée, près de *Neřežín*: hématites oolitiques, tuffes ferrifères très variés.
- La Dědova hora* (Giftberg) près de *Komárov*: minéraux chamositiques et hématitiques, tuffes ferrifères, minéraux sidéritiques nommés „flinz“, dont les oolites myéliniques sont partiellement remplacées par la sidérose, partiellement silifiées; aussi dans le ciment de la sidérose métasomatique se répand et de nombreux petits filons et imprégnations se trouvent dans le gisement avec la sidérose, barytine, ankérite, le cinatre etc. (Pl. I. fig. 4, II. fig. 3.)
- L'Ostrý* près de *Felbabka*: hématites oolitiques, „flinz“, tuffes ferrifères.
- Eugenov* près de *Jince*: quartz ferrugineux.
- Ohrazenice*: tuffes ferrifères avec des oolites chamositiques et des lapilli diabasiques chloritisés; tuffes ferrifères communs avec hématite oolitique. (Pl. II. fig. 5.)
- Písky* près de *Čenkov*: minéral du  $d_{1\gamma}$  avec oolites silifiées.
- Baba* près de *Hostomice*: minéraux chamositiques et mixtes de l'hématite et limonite, au passage du  $d_{1\gamma}$ , tuffes ferrifères, pour la part très fins. (Pl. I. fig. 5.)
- Hřebeny hostomické*: schistes du  $d_{1\gamma}$  avec des oolites de la myéline, concrétions de la phosphorite.
- Mine abandonnée *Josef* à *Brdo*: oolites myéliniques notamment silifiées en un ciment schisteux, riche en sidérose; le gisement paraît appartenir au  $d_{1\gamma}$ .





*bleu*“ contient peu de magnétite et ses oolites sont pour la plupart myéliniques; la *pískovice*“ (= minéral de sable) renferme des oolites transformées en sidérose cristalline, mêlée de beaucoup de quartz secondaire; la „*bělka*“ (= minéral blanc) est un minéral appartenant aux deux variétés précédentes, dans lequel les oolites ont été blanchies par l'extraction secondaire du fer et la formation de la kaolinite terreuse. Les concrétions pyriteuses, à structure oolitique, formées par le pyrite et la myéline, ne sont pas rares. La phosphorite ne se trouve qu'à l'état microscopique, tant aux oolites, que — plus fréquemment encore — dans le ciment, associée en règle au pyrite. (Pl. III. fig. 1.)

A la *Hrouda*, au N de *Zdice*, les minerais de  $d_{3+4}$  sont exploités sur une échelle plus restreinte; ils correspondent essentiellement au „minéral bleu“ et à la „*pískovice*“ et „*bělka*“ de Nučice, mais en différent en quelques détails (silification intense des oolites etc.). Les schistes pyriteux interstratifiés contiennent beaucoup de phosphorite et ont en ce cas

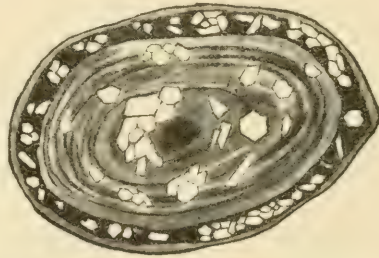


Fig. 2. Une oolite du minéral de *Zdice*, composée de la limonite qui a remplacé la sidérose et la myéline, et des cristaux de quartz (Aggr. 26×).

une structure concrétionnée avec des couches alternantes des deux minéraux; leur pyrite paraît s'être formé par une cristallisation du  $\text{FeS}_2$  primairement colloïde (melnikovite). La phosphorite se trouve en outre dans les schistes du toit et y forme de concrétions macroscopiques d'une structure compacte. (Pl. III. fig. 2—4 et fig. 2—3 du texte.)



Fig. 3. Une oolite de *Zdice* composée du quartz secondaire (blanc), de la sidérose (un individu cristallin au centre et un agrégat grénu, gris) et de la limonite (noir). Dessiné entre des nicols croisés. (Aggr. 38×.)

Entre Zdice et Beroun (fig. 1.), on fit dans les derniers ans des travaux de recherche. A *Zahořany*, *Trubín* et *Černín* on a trouvé des schistes argilleux et des grès quartzitiques passant au minéral oolitique. Dans le premier cas, les oolites se composent de myéline, dans le deuxième de sidérose, alternant avec la phosphorite et la limonite; les concrétions de phosphorite sont très fréquentes, et leur structure intérieure est analogue à celle des oolites: les couches alternantes se composent de phosphorite et de sidérose. (Pl. III. fig. 5.)

Les minerais de l'étage  $d_{3+4}$  ne sont pas liés aux tuffes ferrifères, ni aux quartz ferrugineux comme ceux du  $d_{1\beta}$ . Leur ciment est généralement presque exempt d'éléments clastiques, leur quartz ne constituant qu'une imprégnation secondaire. Au point de vue chimique, les minerais du  $d_{3+4}$  sont d'une composition plus constante que ceux du  $d_{1\beta}$  et  $d_{1\gamma}$ , et contiennent moins de silice et plus de fer et de phosphore: par un grand nombre d'analyses chimiques publiées jusqu'ici, on a put constater dans les minerais chamositiques

	du $d_{3+4}$			du $d_{1\beta}$ et $d_{1\gamma}$		
	max.	min.	moy.	max.	min.	moy.
SiO <sub>2</sub>	22%	11½%	16%	36%	20%	30%
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	16⅓	7⅜	11	21	7½	14
Fe	36¼	31½	33¾	36	15	27¼
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	2.4	1.3	1.8	1.1	trace	0.6

(Les hématites oolitiques, caractérisant le niveau ferrifère inférieur de l'étage  $d_{1\beta}$ , ne se trouvent pas aux gisements du  $d_{3+4}$ .)

Novembre 1917.

*Cabinet minéralogique de l'Université tchèque.*



## Liste de la littérature.

1. *Balling K.*, Die Eisensteine der k. k. Montanherrschaft Zbirow, Oesterr. Zeitschr. für Berg- und Hüttenwesen 1867 (15), 250—258, 263—266.
2. *Bäumler E.*, Ueber das Nutschitzer Erzlager bei Kladno in Böhmen, Oesterr. Zeitschr. f. Berg- und Hüttenwesen 1887 (35).
3. *Bencke A.*, Neue Anschauungen über die Entstehung des oolithischen Eisenerzes, Oesterr. Zeitschr. f. Berg- und Hüttenwesen 1914 (62), 297 à 299.
4. *Bleicher*, Le minéral de fer de Meurthe-et-Moselle, extr. du Bulletin de La Société industrielle de l'Est, Nancy 1894.
5. *Bogdanovič K. I.*, Rudnyja městorožďenija, Petrograd I. 1912, II. 1913; sur les minerais de fer oolitiques voir tome II, 269—293 (en collaboration avec *A. N. Zavarickij*).
6. *Bořický Em.*, O nerostech v pásnu železných rud silurských se objevujících. Živa II, 1869.
7. — Zur Entwicklungsgeschichte der in dem Schichtenkomplex der silurischen Eisensteinlager Böhmens vorkommenden Minerale. Sitzb. k. k. Akad. d. Wiss. Wien, 1869 (59).
8. *Cayeux L.*, Les minerais de fer oolitiques primaires de la France. Revue de Métallurgie 1911 (8), 117—126. Le grand ouvrage du même auteur de l'année 1909 ne nous était pas accessible; (citations chez *Bogdanovič, De Launay et Lacroix*).
9. *Doss B.*, Melnikovit, ein neues Eisensulfid und seine Bedeutung für die Genesis der Kieslagerstätten, Z. prakt. Geol. 1912 (20), 453—483.
10. *Feistmantel K.*, Die Eisensteine in der Etage D des böhmischen Silurgebietes, Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. VI (8) 1876.
11. — Zwei Profile durch die Basis der böhmischen Silur-Etage D an den entgegengesetzten Beckenrändern, Sitzb. k. böhm. Ges. d. Wiss. 1879.
12. *Katzer B.*, Ueber die Grenze zwischen Kambrium und Silur in Mittelböhmen, Sitzb. k. böhm. Ges. d. Wiss. 1900, Nro 18.
13. — Notizen zur Geologie von Böhmen X. Beiträge zur petrologischen Kenntnis des älteren Palaeozoikums in Mittelböhmen. Verh. k. k. geol. Reichsanst. 1905, 37—61.
14. *Kettner R.*, Příspěvek k petrografii vrstev krušnohorských ( $d_{1\alpha}$ ), Rozpr. České Akad. 1916, I. Nro 16, II. Nro 34.
15. *Klouček C.*, O geologickém horizontu rudního ložiska na Karýzku, Rozpr. Č. Akad. 1913 Nro 9.
16. *Krejčí J.*, O železných rudách, zvláště v Čechách, Živa II (1854), 383—4.
17. *Krejčí-Feistmantel*, Orografický a geotektonický přehled silurského území ve středních Čechách. Arch. pro přírod. výzkum Čech. V. 5, 1890.
18. *Kvetschmer F.*, Neue Mineralien vom Eisenerzbergbau Gobitschau nächst Sternberg (Mähren). Centralbl. für Min., Geol. und Palaeontologie, 1905, 195—204.

19. *Lacroix A.*, Minéralogie de la France et ses colonies. Tome I 1893—5, 397 sq. (chamosite); tome IV 1900, 561 sq. (collophanite); 597 sq. (diadochite) etc.
20. *De Launay L.*, Traité de métallogénie. Gîtes minéraux et métallifères. Tome I—III. Paris 1913. Sur les minerais de fer t. II, 266—520.
21. *Liebus Ad.*, Die Z-förmige Umbiegung der Quarzite bei Lochowitz und deren Umgebung, Verh. geol. R.-A. 1904, 323—326.
22. — Das Gebiet des Roten und Jalový Baches um Komorau und das Schieferterrain um Lochowitz, Verh. geol. R.-A. 1904, 62—66.
23. — Die Bruchlinie des Vostrý im Bereiche der SW-Sektion des Kartenblattes Zone 6, Kol. X und ihre Umgebung, Jahrb. geol. R.-A. 1910 99—114.
24. — Geologische Studien am Südostrande des Altpalaeozoikums in Mittelböhmen. Jahrb. geol. R.-A. 1913, 743—776.
- 24.a) *Lipold M. V.*, Die Eisensteinlager der silurischen Grauwackenformation in Böhmen, Jahrbuch geolog. Reichsanst. Wien 1863, 339—448.
25. *Liesegang R. E.*, Die Achate, Dresden 1915.
26. *Purkyně C. de*, Nástin geologických poměrů okolí Klabavy, Brdský kraj 1909.
27. — Geologie okresu plzeňského. Plzeň 1913, la carte géologique 1910.
28. — Kambrium mezi Plzencem a Žďárem u Rokycan, Sborník měst. histor. musea v Plzni 1914.
29. — Zpráva o geologickém mapování Rokycanska, Věstník V. sjezdu čes. přír. a lék. 1914, 316.
30. *Reuss A. E.*, Ueber silurische Schalsteine und das Eisenerzlager von Auwal bei Prag, Sitzb. k. k. Ak. Wien 1857 (25), 563—578.
31. *Tučan F.*, Die Kalksteine und Dolomite des kroatischen Karstgebietes, Annales géologiques de la Péninsule balcanique, VI, 2. 1911, 609—814, spéc. 775 sq.
32. *Vála-Helmhacker*, Die Eisenerzlager in der Gegend zwischen Prag und Beraun, Arch. ntw. L. Durchf. Böhm. 1874.
33. *Villain F.*, Le gisement de minéral de fer oolitique de la Lorraine, Annales des mines, X<sup>me</sup> série, Mém. I, 1902, 113—220 et 223—290.
34. *Woldřich J.*, Údolí Šárecké, Sborník Klubu přírodovědeckého v Praze 1913, I. 5, 14—24.
35. — Geologické poměry v údolí Kačáku mezi Unhoštěm a Nenačovicemi Rozpr. Čes. Akad. 1916 Nro 37.
36. *Zalinski E. R.*, Untersuchungen über Chamosit und Thuringit aus Thüringen und Umgebung, Neues Jahrbuch für Min., Geol. und Palaeont. 1904, Beil.-Bd. 19, 40—84.

## Explication des planches.

### Pl. I.

1. *Grauwacke avec des lumachelles des brachiopodes* (*Obolella complexa* Barr. sp.) de Březina. Le ciment est composé d'une sidérose fine-grénué, troublée par la décomposition. Aggr. 28×.

2. *Minéral chamositique de Klabava* ( $d_{17}$ ). Une section transversale des oolites déformées; le ciment est formé par un mélange d'une sidérose fine-grénué avec une chlorite ferrugineuse et un peu de quartz clastique. Aggr. 28×.

3. *Minéral de Karýzek*, photographié entre des nicols croisés, avec une couche concentrique de la phosphorite amorphe dans une oolite sideritique. Presque tout

le minéral est formé par la sidérose, dont les grains plus grands et plus clairs montrent évidemment leur origine postérieure. Aggr. 28 ×.

4. *Minéral chamositique de la Dědova hora* avec un ciment de sidérose cristalline. Débris des coquilles de brachiopodes forment parfois le noyau centrale des oolites. Aggr. 11 ×.

5. *Une oolite chamositique de la Baba*; au ciment: sidérose grêue, quartz clastique et substance argilleuse. Aggr. 28 ×.

#### Pl. II.

1. *Deux oolites de chamosite du minéral de Plíškov*, l'une avec un noyau central du quartz clastique, l'autre d'un fragment d'une coquille (brachiopode). Aggr. 22 ×.

2. *Minéral des environs de Klabava* avec un ciment cristallin de sidérose, une oolite silifiée et une petite fissure remplie de quartz épigénétique; la limonite secondaire (noir) sépare les rhomboèdres de la sidérose. Aggr. 21 ×.

3. *La métasomatose dans le „flinz” de la Dědova hora*: la sidérose grêue remplace les oolites myéliniques. Aggr. 25 ×.

4. *La silification irrégulière dans le minéral de Kleštěnice*; un grain clastique de quartz dans le centre d'une oolite, à droite. Aggr. 22 ×.

5. *Minéral de Ohrazenice*: dans le ciment troublé par la décomposition (noir) qui est formé prévalement par un minéral chloritique, se trouvent des oolites de chamosite, des morceaux de tuffe diabasique amygdaloïde et des grains de quartz clastique.

#### Pl. III.

1. *Minéral de Nučice*: ciment sidérose, oolites myéline avec des cristaux de magnétite et des grains de sidérose secondaire. Aggr. 13 ×.

2. *Minéral de Zdice*: fissures de contraction dans les oolites myéliniques, remplies de sidérose grêue; le ciment se compose de sidérose. Aggr. 24 ×.

3. *Un autre échantillon du même*: oolites de sidérose cristalline. Aggr. 30 ×.

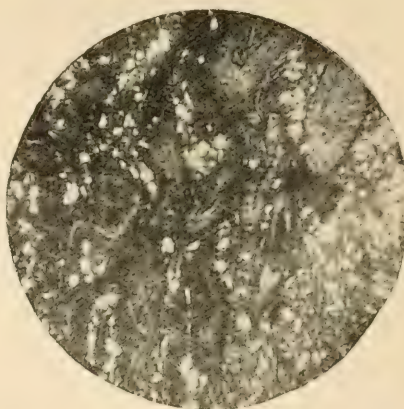
4. *Un autre échantillon du même*: oolites constituées par sidérose et quartz cristallisé, pour la grande partie détruites à la préparation de la plaque mince. Aggr. 30 ×.

5. *Une concrétion de Trubín avec une partie de la roche environnante*. Le noyau de la concrétion est formé prévalement par sidérose compacte avec une admixtion de phosphorite; à la périphérie de la concrétion et dans les oolites, des couches de sidérose grêue alternent avec celles de phosphorite. La petite partie, plus claire, est congruente avec le ciment sidéritique de la roche encaissante. La dernière (à droite) renferme des grains de quartz clastique avec contures aiguës, cimentés par sidérose grêue; les oolites en elle sont identiques à celles des concrétions. Une d'eux inclus des rhomboèdres purs de la sidérose secondaire; dans une autre (au dessous de la précédente) sidérose dans la périphérie, phosphorite au centre. Aggr. 20 ×.

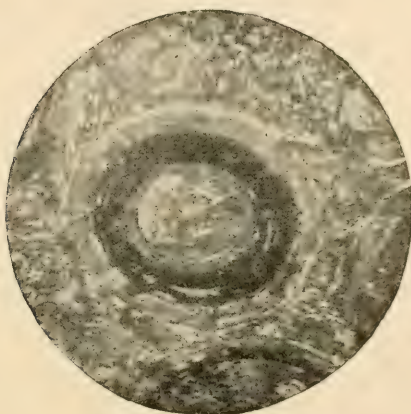




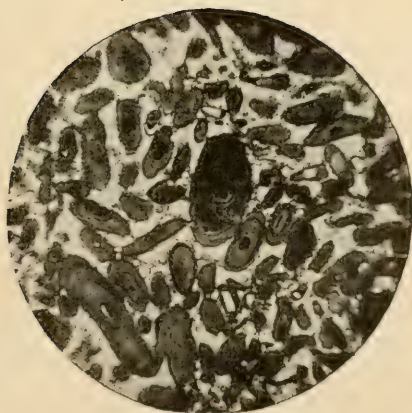
1.



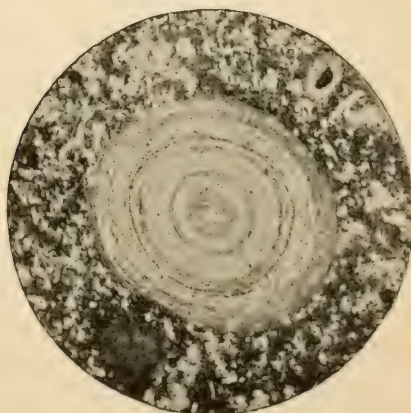
2.



3.



4.

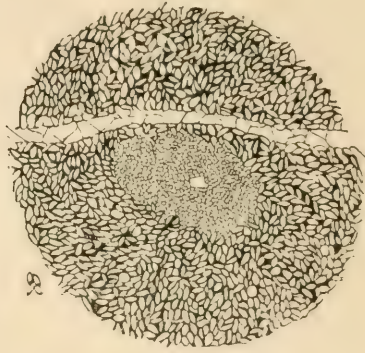


5.

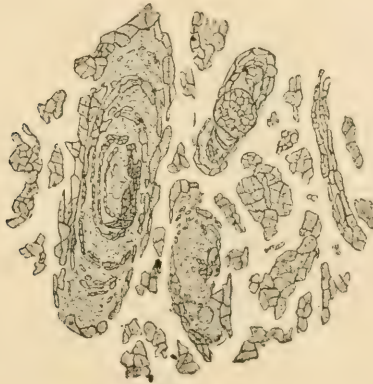




1.



2.



3.

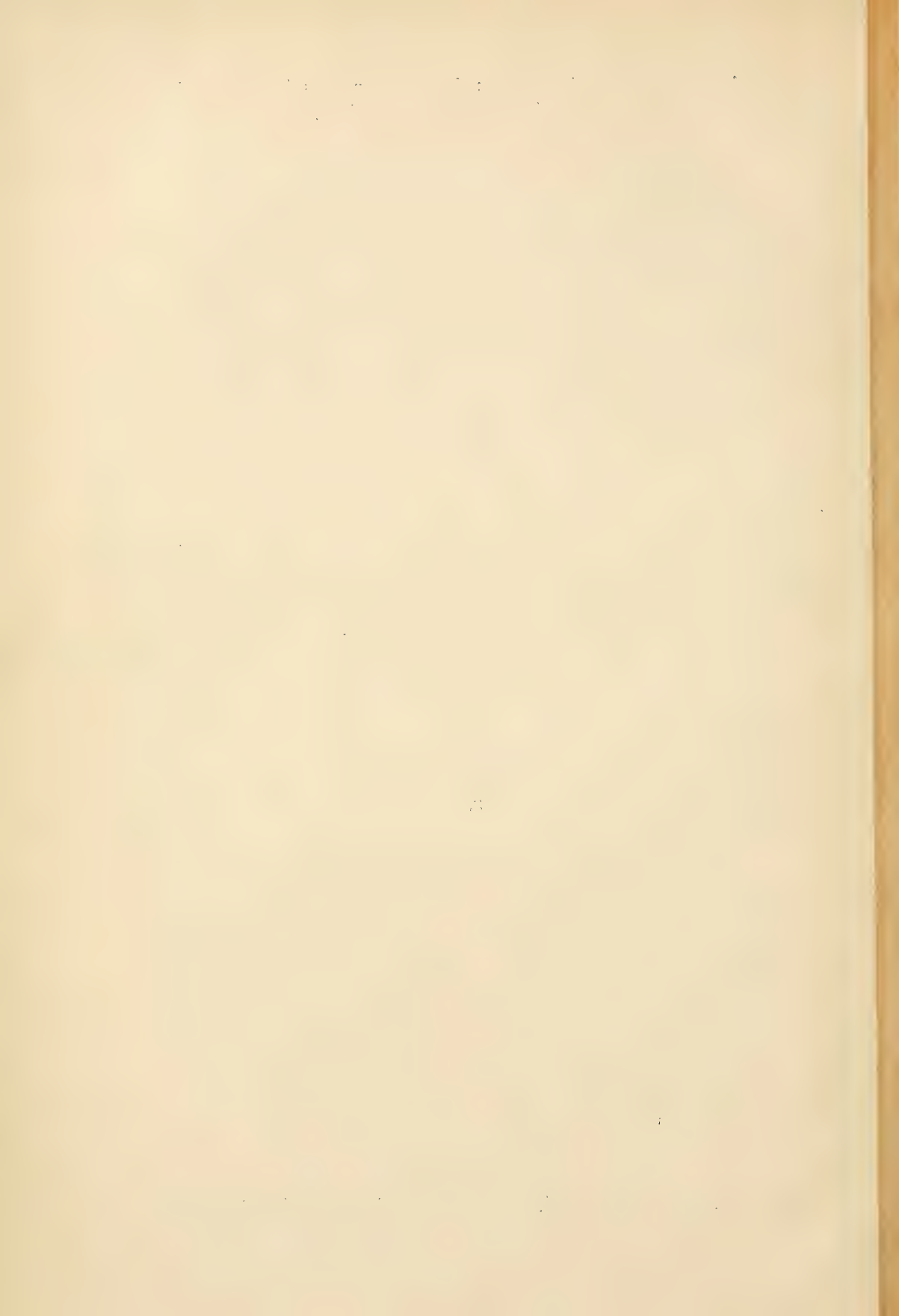


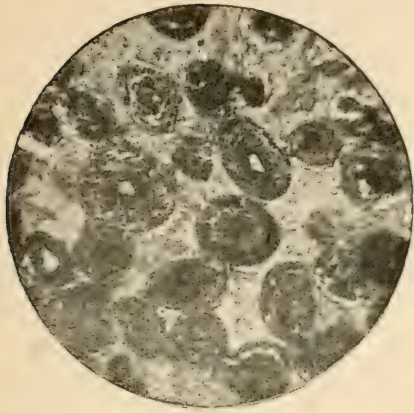
4.



5.







1.



2.



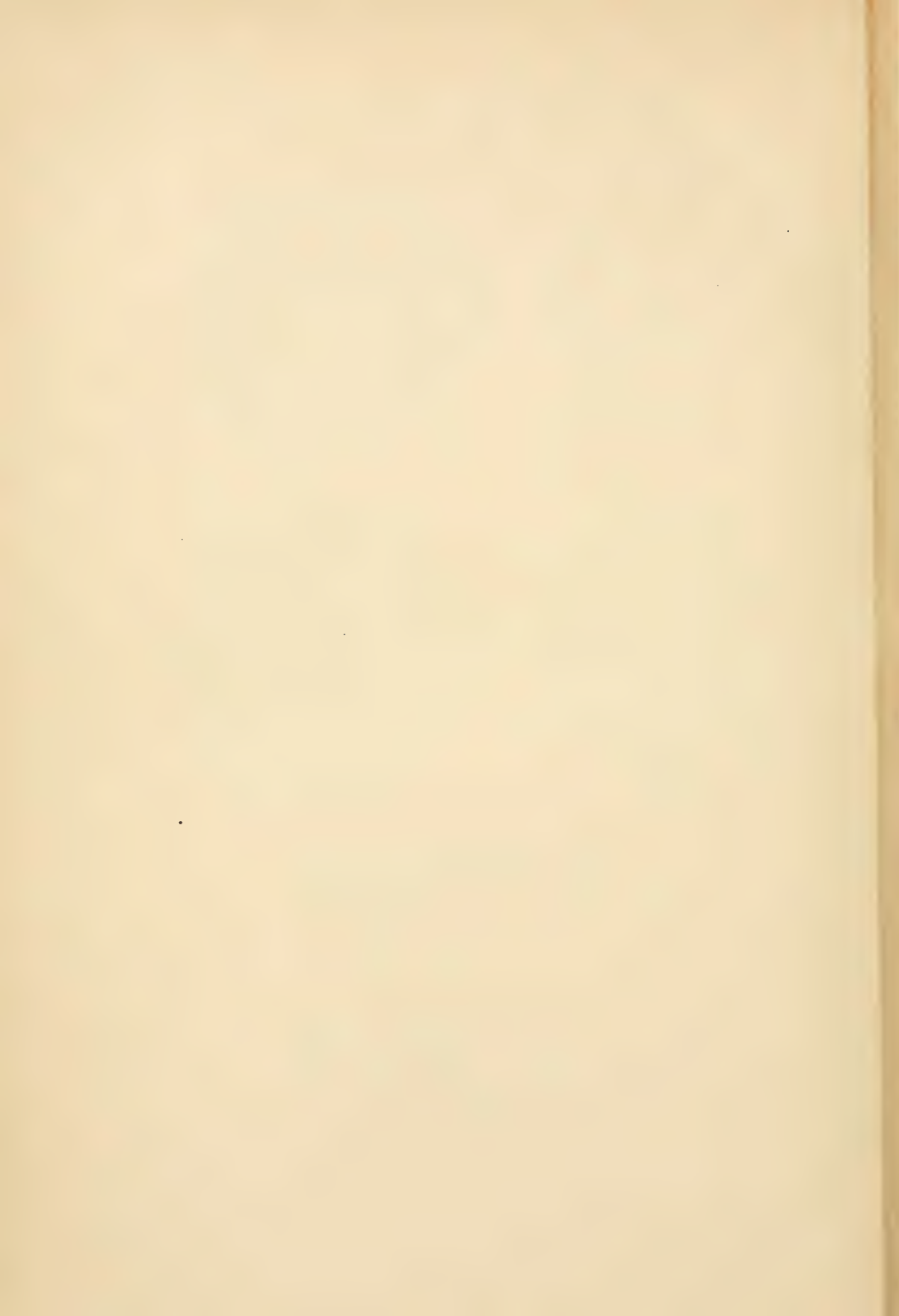
3.



4.



5.





# Über die Reduktion der Schwefelsäure durch Kohlenoxyd.

Von Prof. Dr. JAR. MILBAUER, Prag.

[Mitteilung aus dem Laboratorium der anorganischen Technologie  
der böhm. techn. Hochschule in Prag.]

Vorgelegt am 23. Juli 1916.

Zur Klarmachung der Reaktionen, die bei der Kjeldahlschen Stickstoffbestimmung verlaufen, ist es sehr von Belang, sicherzustellen, wie sich einige der einfachsten Stoffe, besonders Gase, zur konzentrierten Schwefelsäure in der Hitze verhalten. Seinerzeit veröffentlichte ich in der Zeit. f. phys. Chemie 1907, S. 649 eine Studie über Oxydation von Wasserstoff durch Schwefelsäure. An dieser Stelle referiere ich ganz kurz<sup>1)</sup> über eine weitere Reaktion, welche bisher weder beobachtet, noch durchforscht wurde, und zwar über die Reduktion der Schwefelsäure durch Kohlenoxyd. Zu ihrem Studium bediente ich mich derselben Apparatur, welche sich bei der zitierten Arbeit bewährt hat.

In einen Gasometer von konstantem Druck wurde chemisch reines Kohlenoxyd gesammelt, welches, wie durch eine Reihe von Experimenten bewiesen wurde, sich aller Unreinheiten, wie auch aller Spuren von Wasserstoff ledig darstellen läßt, wenn man reine konz. Schwefelsäure in eine konz. Lösung von ameisensaurem Natron zutropfen läßt bei gleichzeitigem Erwärmen im Wasserbade. Aus dem Gasometer wurde das Kohlenoxyd von konstanter Durchflußgeschwindigkeit durch ein Chlorcalciumrohr in das Reaktionsgefäß geführt, welches sich in einem elektrischen Ofen, der auf konstante Temperatur erwärmt wurde, befand. Die Reaktionsprodukte entstehen nach der Gleichung:



<sup>1)</sup> Einzelheiten sind in Rozpravě Čes. Akademie XXV., N. 46 publiziert.

Um die Reaktionsgeschwindigkeit zu bestimmen, wurde gewöhnlich das entstehende Schwefeldioxyd durch jodometrische Titration bestimmt. Von Zeit zu Zeit wurden zur Kontrolle die Reaktionsprodukte in eine Natronlaugelösung gefangen und das Kohlendioxyd gravimetrisch nach Messinger und in einem anderen Teile nach Oxydation des  $\text{SO}_3''$ -Ions das  $\text{BaSO}_4$  gewogen. Die Reaktion verläuft in nachweisbarem Maße erst bei  $200^\circ$ . Bei einer Durchflußgeschwindigkeit von  $0.6 \text{ l}$  in der Stunde ergab das Kohlenoxyd bei Durchstreifen einer Säule von Schwefelsäure (E. Merck,  $94.6\%$ )  $9.5 \text{ cm}$  hoch bei  $250^\circ \text{C}$  durchschnittlich  $24.8 \text{ mg SO}_2$  pro Stunde. Bei der Reaktion entsteht zwar eine kleine Menge Wasser, das aber, wie später gezeigt wird, ohne Einfluß ist, solange die Konzentration der Schwefelsäure nicht unter  $91\%$  sinkt. Die Werte der Reaktionsgeschwindigkeit sanken selbst nach langem, vielstündigem Durchleiten des Kohlenoxyds nicht, obzwar die Schwefelsäure durch das Reaktionswasser verdünnt wurde. Außerdem fand man, daß das Trocknen durch Calciumchlorid völlig genügte; die Resultate waren gleich wie beim absoluten Trocknen mittels Phosphorpentoxyd. Was die Einflüsse der Durchflußgeschwindigkeitsveränderungen betrifft, zeigt die folgende Übersichtstabelle, daß sie beträchtlich sind:

Bei Durchflußgeschwindigkeit:	Durchschnittliche Geschwindigkeit in einer Minute ( $\text{mg SO}_2$ ):	Es entstand in einer Stunde durchschnittlich:
$0.2 \text{ l}$ pro Stunde	0.233	$14.0 \text{ mg SO}_2$ [Mittel von drei nacheinanderfolgenden stündlichen Beobachtungen]
0.3 „ „	0.333	19.9 „ [Mittel von 6 Beobacht.]
0.6 „ „	0.413	24.8 „ [ „ „ 6 „ „ ]
1.0 „ „	0.688	40.1 „ [ „ „ 6 „ „ ]
1.2 „ „	1.015	60.9 „ [ „ „ 5 „ „ ]

Manche Stoffe beeinflussen die Reaktionsgeschwindigkeit beträchtlich als positive Katalysatoren. Sie wurden in einer Menge von  $0.001 \text{ mol}$  des betreffenden Elements passender Form in absolut reinem Zustande für  $25 \text{ cm}$  Schwefelsäure ( $94.6\%$ ) verwendet. Die Ergebnisse, welche bei der Durchflußgeschwindigkeit von  $0.6 \text{ l}$  pro Stunde, einer Säule Schwefelsäure  $9.5 \text{ cm}$  hoch und bei der Temperatur von  $250^\circ$  gefunden wurden, führe ich in folgender Übersicht an und bemerke behufs Vergleichung, daß der mittlere Wert der Geschwindigkeit ( $a/l$ ) ohne Katalysator  $0.413$  (d. h.  $\text{mg SO}_2$  in der Minute) beträgt.

Element		Zahl der Beobachtungen	Mittelwert:	Anmerkung:
Kupfer	$\text{CuSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ In der Schwefelsäure in der Hitze gelöst	4	0·228	—
Silber	$\text{Ag}_2\text{SO}_4$	6	0·802	—
Gold	Goldschwamm	5	0·756	Die Schwefelsäure enthält ausgeschiedenen Goldschwamm.
Kadmium	$3\text{CdSO}_4 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	3	0·207	—
	$\text{CdSO}_4$	3	0·205	—
Quecksilber	$\text{HgSO}_4$ gelöst	27	2·630 (für den konstanten Teil)	Zuerst wird das Quecksilbersulfat teilweise (bis 20%) in Quecksilberoxydsulfat reduziert.
	$\text{Hg}_2\text{SO}_4$	17	2·7 (für den konstanten Teil)	Es erfolgte zuerst die Oxydation bis der Gleichgewichtszustand von 20% erreicht wurde.
Lanthan	Das Oxyd wurde in der Hitze gelöst	2	0·273	—
Thorium	Als Sulfat verwendet	6	0·333	—
Zinn	Der Zinnschwamm wurde in Schwefelsäure gelöst u. die Lösung ausgekocht	3	0·747	—
Cer	Das Sulfat wurde gelöst u. ausgekocht	4	0·250	Nach den Versuchen enthielt die Schwefelsäure eine weiße kristallinische Suspension.
Blei	Es wurde Sulfat verwendet.	5	0·345	—
Thallium	dto	6	0·275	Nach den Versuchen ist in der Schwefelsäure ein weißer Niederschlag ausgeschieden worden.
Vanad	Das Vanadiumpentoxyd wurde in der Hitze gelöst u. ausgekocht.	10	0·353 (für den konstanten Teil)	Zuerst erfolgte eine Reduktion. Nach den Versuchen war die Lösung von grüner Farbe.
Arsen	Das Arsen trioxyd wurde 3 St. in der Schwefelsäure erhitzt u. die gewonnene Flüssigkeit verwendet.	5	0·240	—
Antimon	Als Antimonsulfat verwendet.	6	0·340	—



Element		Zahl der Beobachtungen	Mittelwert:	Anmerkung:
Tantal	Es wurde $Ta_2O_5$ verwendet.	6	0.343	Nach den Versuchen wurde nicht alles gelöst.
Wismut	Wismutsulfat	4	0.297	—
Chrom	Gewogen $CrO_3$	6	0.245	Am Anfang erfolgte die Reduktion. Nach den Versuchen war die Lösung klar von grüner Farbe.
Selen	Als solcher.	5	1.105	Die Lösung war grün.
Molybdaen	$MoO_3$ .	7	0.210	Zuerst erfolgt die Reduktion. Die Lösung grün.
Wolfram	$WO_3$ .	5	0.338	Nach den Versuchen war die Säure gelbbraun und enthielt einen grünen Niederschlag.
Uran	Uranylsulfát.	4	0.270	Alles gelöst, das Uranylsalz unverändert.
Chlorwasserstoff	Vor das Reaktionsgefäß wurde ein U-Rohr mit granuliertem Natriumchlorid und konz. Schwefelsäure eingereiht.	3	0.418	—
Mangan	$MnSO_4$	4	0.183	—
Eisen	Es wurde $FeSO_4 \cdot 7 aq$ verwendet.	5	0.270	Zuerst geschah eine Oxydation in Ferri-Form. Nach dem Versuche fand man ausgeschiedenes $Fe_2(SO_4)_3$ .
Kobalt	$CoSO_4$	5	0.200	—
Nickel	$NiSO_4 \cdot H_2O$	3	0.327	—
Ruthenium	Rutheniumchlorid wurde $1\frac{1}{2}$ Stunde mit konz. Schwefelsäure erhitzt und die braune Lösung verwendet.	7	1.030	—
Rhodium	Dto. Die braune Lösung enthält eine schwarze Suspension.	12	3.909	In der braunen Lösung eine schwarze Suspension.
Palladium	Es wurde Palladiumchlorid 4 St. mit konz. Schwefelsäure gekocht und gleichzeitig das Kohlenoxyd durchgeleitet. Die zu den Versuchen verwendete Lösung enthielt eine schwarze Suspension.	4	8.095	—

Element		Zahl der Beobachtungen	Mittelwert:	Anmerkung:
Osmium	Das Osmiumtetroxyd wurde durch Schwefeldioxyd reduziert getrocknet, konz. Schwefelsäure zugefügt und in der Hitze Wasserstoff durchgeleitet, dann 1 Stunde das Kohlenoxyd bei 250° ohne Absorption und erst nachher wurden die Versuche angestellt	12	0·185	Nach den Versuchen enthielt die Schwefelsäure eine schwarze Suspension.
Iridium	Als Oxyd.	7	0·555	Dto. Rotbraune Lösung.
	Als Sulfat. Die Lösung war von brauner Farbe.	14	0·770	
	Dieselbe Lösung wurde zwei Tage erhitzt, bis sie blau geworden war, dann hat man Sauerstoff durchgeleitet, bis sie die Farbe von lichthem Weine annahm, und erst nachher erfolgte die Absorption.	10	3·000	Rotbraune Lösung.
Platin	Die Chloroplatinsäure wurde mit Schwefelsäure gekocht, bis der Chlorwasserstoff ganz vertrieben wurde und dann wurden die Versuche angestellt.	18	Die Werte, welche während 6 Stunden immerfort sanken aus dem ursprünglichen $a/t = 2·661$ , sind bis auf $a/t = 1·551$ gesunken. Es fand eine Vergiftung des Katalysators statt und die Konstante ist nicht erreicht worden. Die Lösung war nach den Versuchen rotbraun, enthielt ausgeschiedene Platin.	

Von den geprüften Stoffen, welche in passender Form verwendet wurden, erwiesen sich als positive Katalysatoren meistens Pd, weiter Rd, Ir, Hg, Se, Ru, Ag, Au und Sn, wo konstante Resultate erzielt wurden; bei Platina, welche zwar ein positiver Katalysator ist, wurde eine „Vergiftung“ des katalytischen Einflusses beobachtet. Osmium, welches einzige Oxydationen (z. B. des Wasserstoffs durch Schwefelsäure) stark

beeinflußt, zeigte sich in unserem Falle gänzlich unaktiv. Dasselbe wurde bei Kupfersulfat beobachtet, welches die Kjeldahlisationen der organischen Stoffe beschleunigt.

Die Geschwindigkeit ist von der Konzentration des Katalysators abhängig. So wurde bei der Verwendung des Merkurisulfats bei sonst gleichen Bedingungen gefunden

wenn 0.01	Mol verwendet wird, die Konstante $a/t = 4.075$
„ 0.001	„ „ „ „ „ „ = 2.646
„ 0.0001	„ „ „ „ „ „ = 1.332
„ 0.00001	„ „ „ „ „ „ = 0.766

Es ist weiter festgestellt worden, daß durch erhöhte Konzentration des Kupfersulfats sich dasselbe nicht als positiver Katalysator erwies, dafür aber wirkte das Ceriumsulfat bei höheren Konzentrationen positiv (bei 0.001 Mol  $a/t = 0.242$ , bei 0.0025 Mol schon 0.450).

Von den Mischungen der Katalysatoren wurde die Kombination  $Ag + V$  geprüft à 0.0005 Mols und man fand im Einklang mit dem Patent der F<sup>a</sup> Bayer (D. R. P. 280. 960), welche dadurch die Kontakterzeugung der Schwefelsäure beschleunigt, daß bei der von uns studierten Reaktion sich der Wert  $a/t = 0.9444$  ergibt, welcher jene der einzelnen Komponenten übersteigt. Bei Quecksilber + Zinn (à 0.0005 Mols) ist keine Beschädigung eines Katalysators durch den anderen zu bemerken,  $a/t$  wurde 1.672 gefunden. Quecksilber und Selen, beide positive Katalysatoren, ergeben Resultate, die rasch sinken, denn es wird ein Niederschlag gebildet, in welchem sowohl Quecksilber als auch Selen enthalten ist; die Konzentration der Katalysatoren sinkt, der Wert  $a/t$  im Laufe von sieben fünfzehnminütigen Versuchen sank von 1.058 auf 0.564.

Einen besonders bemerkenswerten Einfluß der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit bei sonst unveränderten Bedingungen kann man aus folgender Übersicht entnehmen:

Temperatur	{Ohne Katalysator	0.001 Mol Pd	0.001 Mol Se	0.001 Mol HgSO <sub>4</sub>
130°	—	—	—	0.100 ( $a/t$ )
150°	—	0.275	0.066	—
155°	(0.2 in der Stunde)	—	—	0.255
190°	—	—	—	0.558
200°	0.047	1.656	0.337	—
215°	0.138	—	—	1.367
235°	0.254	—	—	2.037
250°	0.413	8.095	1.105	2.630
260°	—	—	—	3.078
280°	1.467	—	—	4.057



Wird Kohlenoxyd mit Stickstoff verdünnt, so sinkt die Reaktionsgeschwindigkeit bei dem Gemisch von 50% N + 50% CO fast Null. Dasselbe wurde bei Mischungen mit Sauerstoff beobachtet und gleichzeitig festgestellt, daß die Reaktion  $\text{CO} + \text{O} = \text{CO}_2$  nicht verläuft.

Sehr interessant und die Arbeit ermöglichend ist das Faktum, welches seinerzeit bei der Studie über die Oxydation von Wasserstoff durch Schwefelsäure beobachtet wurde, nämlich, daß geringe Spuren von Wasser, die bei der Reaktion entstehen, die Geschwindigkeit nicht verringern (Vergleiche auch *Bredig u. Brown* analoge Beobachtung beim Studium der Kjeldahlisatoin: *Z. it. f. phys. Chem.* 1903. Bd 46, S. 512). Dies bestätigen am besten die Ergebnisse, welche im Laufe eines sechsständigen Durchleitens des Kohlenoxyds, nicht sanken ( $a/t$  war konstant) und weiter die Versuche über den Einfluß der Konzentration der Schwefelsäure auf die Reaktionsgeschwindigkeit. Damit die Reaktion, welche durch eine sehr kleine Reaktionsgeschwindigkeit sich charakterisiert, meßbar wird, wurde ohne Katalysator bei 25<sup>0</sup> gearbeitet; als es sich aber zeigte, daß bei verdünnteren Säuren das Wasser destillierte, wurde Quecksilbersulfat als Katalysator zugegeben und der Einfluß wurde bei niedrigerer Temperatur (19<sup>0</sup>) verfolgt, wo der hervorgehobene Mangel nicht in Erscheinung trat.

Die Resultate führe ich in folgender Tabelle an:

Konzentration der Schwefelsäure	Die Anzahl der aufeinander- folgenden einstündigen Versuche	Mittelwert von $a/t \times 60$
74.3%	3	8.0
76.0%	3	8.6
80.3%	2	12.2
83.6%	3	15.7
85.0%	4	18.5
85.9%	3	22.4
88.2%	3	25.4
89.7%	3	28.8
90.7%	3	30.5
93.3%	4	33.2
94.6%	3	33.5
96.0%	3	40.3
96.9%	3	44.9
98.3%	3	48.0

Es ist ersichtlich, daß in den Grenzen 94.6—91% die Reaktionsgeschwindigkeit fast konstant ist und daß also kleine Wassermengen, die sich bilden oder mit dem Katalysator zugeführt werden, sich nicht durch schädliche Wirkung geltend machen.

Zum Schlusse sei es erlaubt zu bemerken, daß durch die hier studierte Reaktion sich die Bildung von Kohlendioxyd bei der Darstellung des

Kohlenoxyds nach *Fownes* und *Rayleigh* (Proc. Royal. Soc. 62. 204) aus Ferrocyankalium durch konzentrierte Schwefelsäure erklären läßt, denn sie findet bei höherer Temperatur statt, wo das entstehende Kohlenoxyd durch Schwefelsäure zu Kohlendioxyd oxydiert wird. Aus demselben Grunde bei Zerlegung der sekundären u. primären Karbonsäuren durch Schwefelsäure in der Hitze (*Bystricki* u. *Siemiradski*: Ber. d. d. chem. Ges. 39. S. 63 u. Bd. 41 S. 1665) wird das sich abspaltende Kohlenoxyd durch Schwefelsäure verunreinigt.

Bei dieser Arbeit wurde ich ausgiebig von meinen Assistenten Herren Ing. Ot. Hanuš und Dr. A. Němec unterstützt. Ich statue ihnen hier meinen aufrichtigen Dank ab.

---

# Données optiques sur quelques minéraux.

Par FR. SLAVÍK.

(Présenté le 26<sup>me</sup> novembre 1917.)

Dans cette petite communication je résume les résultats des investigations optiques sur quelques minéraux, dans lesquelles je poursuis pour la plupart des buts comparatifs et diagnostiques. Sauf quelques douzaines de minéraux des roches, nos connaissances des constantes optiques des minéraux sont encore très incomplètes. Le plus grand nombre des déterminations optiques, exécutées sur d'autres minéraux, est donné par deux savants: par *J. L. C. Schroeder van der Kolk* dans son livret déterminatif<sup>1)</sup> et par *Ab. Lacroix*<sup>2)</sup> dans sa grande oeuvre sur la minéralogie de la France et ses colonies.

Dans cette contribution à l'étude diagnostique des minéraux je donne en première ligne des déterminations des indices réfractifs, obtenus par la méthode comparative de *Becke*; je me suis servi d'une série de liquides à haute réfraction, dont les indices ont été déterminés sur l'appareil d'*Abbe-Zeiss*. M. le Dr. *Jaroslav Šplíchal*, qui a étudié la réfraction des mélanges colloïdes de silice et d'alumine lors de son travail sur leur nature et leurs propriétés physico-chimiques, a préparé pour l'institut minéralogique de l'Université tchèque une série de liquides à haute réfraction et fait de nombreuses expériences sur leur applicabilité, dont les résultats j'espère de pouvoir présenter en peu de temps à l'Académie dans un travail spécial de M. Šplíchal.

Voici les résultats de mes déterminations suivant l'ordre systématique des minéraux.

## *Bauxite.*

*Schroeder van der Kolk* donne pour la bauxite l'indice 1.57, en accentuant l'inconstance de cette valeur selon les variations de la composition chimique. J'ai obtenue deux valeurs plus élevées:

<sup>1)</sup> Tabellen zur mikroskopischen Bestimmung der Mineralien nach ihrem Brechungsindex, 11<sup>me</sup> édition, Wiesbaden 1906.

<sup>2)</sup> Minéralogie de la France et ses colonies, tome I—V, Paris 1893—1903.



bauxite de Bohinje (=Wochein), Carniolie	$n = 1.60$
de Aquila, Abbruzzi	$n = 1.61$

*Zippéite.*

Ce beau minéral, sulfate double d'uranium et de calcium, n'a pas été étudié au point de vue optique. Les échantillons de Jáchymov (Joachimstal), localité originale de la zippéite, et de Seifen près de cette ville, sont composés de petites aiguilles, transparentes en couleur jaune avec un faible pléochroïsme: dans la direction longitudinale l'absorption est plus forte et la couleur jaune est sans la nuance verdâtre qui caractérise la direction perpendiculaire à l'allongement. L'extinction est parallèle, la double refraction faible, les couleurs d'interférence anormales, le signe optique de l'allongement négatif, les indices de réfraction:

à l'axe verticale	1.635
⊥ „ „ „	1.645 env.

*Szajbélyite.*

Le borate de magnésie de Rezbánya au Banate, d'où il a été décrit par *K. F. Peters*, consiste des aiguilles qui forment un tissu irrégulier; leur extinction est parallèle à l'allongement, le signe de la direction longitudinale est négatif; les indices

à l'allongement	1.60,
⊥ „ „ „	1.575 env.

*Wavellite.*

L'indice de réfraction, appartenant à l'axe verticale, a été déterminé dans les échantillons de la localité très connue, Třenice près de Zbiroh (Bohême):

$$n_g = 1.545;$$

pour les autres indices, on a obtenu:

$$n_m = 1.526,$$

$$n_p = 1.520.$$

(Comp. *Lacroix* l. c. tome IV, p. 525 et *Schroeder van der Kolk* l. c. p. 30—31.)

*Sphérite.*

La sphérite de la localité originale, Zaječov près de Zbiroh, diffère des autres phosphates d'alumine (wavellite, variscite, barrandeite, richmondite) par le signe *négatif* de l'allongement de ses individus aciculaires. L'extinction est parallèle à l'allongement; on peut observer de très beaux enroule-

ments hélicoïdaux. La réfringence moyenne est plus forte que celle de la wavellite et atteint à peu près celle de la variscite d'après M. W. T. Schaller. La double réfraction dans les sections verticales ou presque verticales est plus faible que celle de ces deux minéraux.

J'ai déterminé

à l'axe verticale	1.563
⊥ à „ „ „	1.575 env.

#### *Zepharovichite.*

Ce minéral, décrit de Třenice par *Em. Bořický*, a l'aspect macroscopique compact; au microscope, il se compose de courtes aiguilles orientées sans aucune règle, troublées parfois par une substance terreuse. L'extinction est parallèle à l'allongement, le signe de la direction longitudinale est positif. A cause des dimensions trop petites des individus, il n'a pas été possible de déterminer les indices singles; la réfraction moyenne est 1.55.

#### *Richmondite (gibbsite).*

La richmondite de Richmond, en Massachussets, a la structure de l'aragonite thermale, en se composant des individus fibreux, orientés parallèlement entre eux et perpendiculairement à la surface des croûtes; les couches sont alternativement pures et troublées par une substance terreuse. L'extinction est parallèle, avec le caractère positif de l'allongement; la double réfraction est plus forte que dans la sphérite, mais n'atteint pas celle de la variscite. Les indices de réfraction sont

à l'allongement des fibres	1.573
⊥ „ „ „ „	1.56—1.565.

#### *Fischerite colloïde (uhligite de Cornu).*

Ce phosphate amorphe, plus pauvre en eau que l'évansite, est caractérisé par une réfraction notamment plus haute,

$$n = 1.533 ;$$

cette valeur a été déterminée sur un échantillon de la localité originale de Roman Gladna en Transsylvanie, tandis que pour l'évansite M. Schaller a trouvé

$$n = 1.485.$$

L'uhligite n'est pas absolument colloïde; en quelque lames on peut observer le commencement d'une cristallisation fibreuse, avec le caractère positif de l'allongement des individus.

*Les phosphates de fer.*

La *fouchérite* (synon. *bořickyte*, v. *Lacroix*, l. c. tome IV, p. 535—6), de Trubín près Beroun en Bohême, entièrement isotrope, a la réfraction de

$$1.64 \dots 1.65,$$

de même la *picite* de Svatá Dobrotivá (Sta. Benigna)

$$n = 1.64.$$

Ces résultats sont en plein accord avec la détermination de M. *Lacroix* pour la *cguéiite*, également amorphe et d'une composition chimique voisine à la fouchérite ( $n = 1.65$ ).

La fouchérite et la picite apparaissent au microscope translucides en couleur brun or brun rougeâtre, les fragments plus minces brun jaunâtre.

Les „*diadochites*“, décrites sous ce nom de Nučice, Zdice, Chvaletice, Vysočany, Vinoř, Ouvaly forment des rognons d'une couleur jaunâtre à la surface, plus foncée à l'intérieur, jusqu'au rouge-brique. Au microscope, elles se montrent cryptocristallines, formées d'individus lamellaires ou presque aciculaires, translucides en couleur jaunâtre avec une teinte brunâtre ou faiblement verdâtre; la double réfraction est assez haute, l'extinction oblique en divers angles. Ces concrétions appartiennent donc à la *destinézite* et ont en accord avec leur état cryptocristalline une réfraction plus forte que celle de la diadochite amorphe.

J'ai déterminé la réfraction moyenne approximativement à

$$1.64,$$

tandis que la diadochite colloïde selon M. *Lacroix* a l'indice de seulement 1.606, la destinézite de 1.64 à 1.66 (l. c. tome IV, pp. 598, 599).

*Phosphorite (collophanite).*

Dans un mémoire sur les minerais de fer du silurien inférieur de la Bohême, présenté récemment à l'Académie et publié dans ce même tome du Bulletin, nous avons, ma femme et moi, montré que la phosphorite amorphe est très répandue dans nos minerais de fer et leurs roches voisines, formant des couches microscopiques dans les oolithes de la chamosite, sidérite ou hématite, à quelques localités aussi des rognons macroscopiques, mêlés avec de la sidérite, des oxydes de fer secondaires et des éléments clastiques. La phosphorite des rognons provenant des Hřebený près de Hostomice a été analysée par M. le Dr. *Šplíchal*; les résultats de l'analyse (après la soustraction du reste insoluble) sont les suivants:



P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	33.87
SO <sub>3</sub>	1.79
CC <sub>2</sub>	1.30
Cl	0.02
F	trace
CaO	47.32
MgO	0.76
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10.19
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2.66
H <sub>2</sub> O	2.17
	100.00.

Au microscope, cette phosphorite est translucide, brune, entièrement isotrope ;

$$n = 1.620 \text{ à } 1.625.$$

La phosphorite formante des minces couches microscopiques au minéral de Karýzek, transparente en couleur brun jaunâtre, a donné

$$n = 1.615,$$

un minéral amorphe de la même apparence, mais incolore,

$$n = 1.58.$$

Les concrétions blanchâtres du minéral hématitique de Březina près de Radnice, composées des couches alternantes de la sidérite et d'un phosphat de chaux amorphe, donnent pour le dernier la valeur

$$n = 1.60.$$

La phosphorite des minerais de fer en question provient, comme nous avons montré, de la décomposition des débris organiques, en première ligne des Lingulides et autres brachiopodes avec des coquilles phosphatiques. La substance des coquilles de *Obolella complexa*, formantes des lumachelles dans un sédiment, riche en hématite, de Březina, est homogène et isotrope, avec la réfringence

$$n = 1.61.$$

Toutes ces valeurs sont comprises entre les limites, trouvées par M. Lacroix (l. c. IV. p. 561) pour les collophanites :

collophanite de Pouzillac	1.569,
de l'île Rurutu	1.612.

Les substances adsorbées évidemment élèvent la réfraction des mélanges colloïdes. Les données de l'analyse chimique exécutée par M. Šplíchal et la comparaison avec les constantes optiques d'autres minéraux colloïdes montrent que *l'alumine est adsorbée dans l'état du hydrate amorphe AlO*

(OH), la *sporogélite* de M. Tucan, qui est la composante principale des bauxites ; l'uhligite et l'évansite auraient dû abaisser en un degré considérable la réfringence du mélange colloïde (v. p. 3 de cette communication), tandis que les indices des bauxites ne dépassent pas les valeurs des collophanites (p. 1—2).

*Institut minéralogique  
de l'Université tchèque.*

---

# Der Steppeniltis (Foetorius Eversmanni Less.) im Diluvium bei Wolin.

Von

J. V. ŽELÍZKO.

(Mit 1 Tafel.)

Vorgelegt am 12. Oktober 1917.

Im südöstlichen Teile des Kalksteinbruches bei *Zechovic*, südwestlich von Wolin, unweit von der Stelle, von wo ich im Jahre 1909 und 1916 im Bulletin der böhmischen Akademie eine reiche diluviale Fauna beschrieb, wurde dank dem jetzigen Eigentümer des Steinbruches, Herrn K. Turek, im Jahre 1913 ein neuer von mir bis jetzt nur teilweise durchforschter Fundort gemischter *Tundren-* und *Steppenfauna* gefunden.

Die unregelmäßig mächtigen, zur Westseite sich verengenden Ablagerungen, die diese Fauna enthalten, ruhen auf dem geschichteten, von einer Bank des Biotitgranit durchtretenden Kalkstein, welcher im westlichen Teile einen scharfen, ca 2·5 *m* hohen Vorsprung bildet. Diese Ablagerungen bestehen aus einer Menge scharfkantiger Schotter und Blöcke, mit lichtbraunem, kompaktem, stellenweise gewissermaßen grobkörnigem Gehängelehm. Die bis jetzt bloßgelegte, gegen Norden gewendete Wand der Diluvialablagerung mißt ca 4 *m* in der Länge und 1·5 *m* im höchsten Punkte.<sup>1)</sup>

Auf der westlichen Seite, wo sich die Ablagerung infolge der schief aufgehobenen Kalkschichten einigermaßen auskeilt, überwiegt oberhalb des Schotters ein feinerer, dunkler gefärbter Lehm, als der, der zwischen dem Schotter und den Blöcken eingelagert ist.

Darauf folgt eine gleichfalls unregelmäßig mächtige, bisher aber sehr wenig bloßgelegte Holocänschicht einer schwarzbraunen Erde, in welcher einige Mollusken gefunden wurden.

---

<sup>1)</sup> Im Berichte *Einige Bemerkungen zu dem neuesten Funde diluvialer Tierreste bei Zechovic in Südböhmen* (Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanst. 1916) habe ich nach dem Stande der Abgrabung aus dem Jahre 1915 die größte Schichtenmächtigkeit 1 *m* angeführt, welche aber nach dem weiteren Abräumen im Jahre 1916 noch um einen halben Meter höher festgestellt wurde.



Die genannte Schicht mit Schotter und Erde der jüngsten Periode bildet dann die oberste ca 3 m mächtige Decke. Es sind hier also beinahe dieselben Lagerungsverhältnisse vorhanden, die wir schon früher bei Zechovic und auf dem Děkanský vrch kennen gelernt haben, nur daß die neue Fundstelle viel weniger Lehm enthält als die beiden vorhergehenden Lokalitäten.

Der diluviale Lehm, welcher die Zwischenräume zwischen den Blöcken und Schotter ausfüllt, zeichnet sich in der niedrigen Lage durch eine gänzlich arme Fauna aus, dafür aber hat die obere Schicht bis heute Reste folgender für die Tundra und Steppe entschieden typischen Arten geliefert:

- Atelodus (Rhinoceros) antiquitatis* Pom. — Das Nashorn.  
*Equus ferus (foss.)* Pall. — Das Wildpferd.  
*Rangifer tarandus* Jard. — Das Renttier.  
*Cricetus phaeus (foss.)* Nehr. — Der Reißhamster.  
*Myodes torquatus* Pall. — Der Halsbandlemming.  
*Arvicola gregalis* Desm. — Die sibirische Zwiebelmaus.  
*Arvicola arvalis* Sélys. — Die gemeine Feldmaus.  
*Arvicola subterraneus* Sélys. — Die kurzohrige Erdmaus.  
*Arvicola amphibius* Desm. — Die Wasserratte.  
*Lepus variabilis* Pall. — Der Schneehase.  
*Lagomys pusillus* Pall. — Der Zwergpfeifhase.

Ende August 1916, als ich fast nach vierzehntägigem Regenwetter meine Forschung bei Zechovic fortsetzen konnte, gelang es mir in dem westlichen Zipfel des Fundortes einen schön erhaltenen Schädel eines marderartigen, an den Iltis erinnernden Raubtieres mit einem Messer aus diesem feuchten Lehm herauszuschälen.

Denselben Tag und auch früher habe ich in der Nähe des Schädels Reste noch folgender Säugetiere gefunden: acht Unterkiefer des *Halsbandlemmings*, mehrere Unterkiefer und Knochen verschiedener *Arvicoliden*, einige Zähne des *Schneehasen*, einen Halswirbel des *Nashorns*, einen Astragalus des *Renntiers*, einige Backenzähne des *Wildpferdes* und einen Kiefer des *Zwergpfeifhasen*.

Nach der Reinigung des Schädels, welcher sich durch eine gelblichbraune Farbe wie die übrigen Tierreste kennzeichnet, fand ich, daß demselben die Schneidezähne und auf der rechten Seite der Prämolare ( $p_2$ ) sowie die Krone des letzten Höckerzahnes ( $m_1$ ) fehlen. Dafür aber war das Gebiß der linken Seite vollständig. Der Unterkiefer wurde trotz weiteren eifrigen Nachsuchens nicht gefunden.

Der verhältnismäßig nicht zu große Schädel, dessen Basilarlänge 58 mm beträgt, ist entwickelter gegenüber dem robusten Schädel des gemeinen fossilen Iltisses (*Foetorius putorius*). Am auffallendsten ist bei demselben die ungemein starke Einschnürung der Stirngegend im Ausmaße

von 11 mm. Der letzte Höckerzahn ist gleichfalls kleiner als beim gemeinen Iltis.

Durch eine auffallende Übereinstimmung des von mir gefundenen Exemplares mit dem rezenten, von K a f k a <sup>2)</sup> abgebildeten Schädel des Steppeniltises von S a r e p t a an der Wolga, welcher laut Mitteilung des Herrn K a f k a Eigentum der wirtschaftlichen Hochschule in Berlin ist, sowie durch die allseitige Vergleichung meines Fundes namentlich mit dem Material H e n s e l s, <sup>3)</sup> wie weiter angeführt ist, bin ich zu der Überzeugung gelangt, daß der Schädel aus dem neuen Fundort von Zechovic ebenfalls dem Steppeniltis angehört, wofür die ungemein starke Einschnürung der Frontalia, welche als charakteristischestes Zeichen bei der Bestimmung des erwähnten Tieres gilt, der beste Beweis ist.

*Es ist dies also zum erstenmal, daß wir in der diluvialen Steppenzeit dieses typische marderartige Raubtier bei Wolin begegnen.*

Der Steppeniltis wurde zuerst von P a l l a s als eine sibirische Varietät des gemeinen Iltisses betrachtet, die später L i c h t e n s t e i n als *var. Eversmanni* bezeichnete. L e s s o n war dann der erste, welcher das Tier als eine selbständige Art unter dem Namen *M u s t e l a E v e r s m a n n i* <sup>4)</sup> in die Naturgeschichte einführte.

Seit dieser Zeit betrachteten die Zoologen den Steppeniltis einmal als eine Varietät, das anderemal wiederum als eine selbständige Art, ohne daß ihnen einfiel, sich mit einem ausführlichen Studium des Tieres zu befassen.

In den sechziger Jahren v. J. hat R a d d e <sup>5)</sup> auf Grund einer Vergleichung zahlreicher Felle einen Übergang vom Steppeniltis zum gemeinen Iltis zu finden geglaubt und daher beide Arten wieder vereinigt. Die Beobachtungen betreffs der Schädelverhältnisse sind nirgends angeführt bis auf die Bemerkung über die starke Einschnürung der Stirnbeine.

Erst R. H e n s e l, welcher 14 Schädel zur Disposition hatte, führte ihre eingehende Messung durch und stellte fest, daß neun männlich und fünf weiblich sind.

Alle Schädel stammten aus dem Gebiete der unteren Wolga von S a r e p t a gegen A s t r a c h a n <sup>6)</sup> zu, wo sich die Verbreitungsbezirke

<sup>2)</sup> *Fossile und recente Raubthiere Böhmens (Carnivora)*. (Archiv der naturwis. Landesdurchforsch. von Böhmen. Bd. X. Ab. 6. Prag 1903) p. 106.

<sup>3)</sup> *Craniologische Studien* (Nova Acta der Kais. Leopold-Carolin. deutsch. Akademie der Naturforscher. Bd. XLII. No. 4. Halle 1881).

<sup>4)</sup> E d u a r d F r i e d r i c h E v e r s m a n n, russischer Naturforscher (geboren 1794, gest. 1828) erwarb sich als Zoolog Verdienste um die Forschungen namentlich der russischen Fauna. Im J. 1823 wurde er Professor der Zoologie und Botanik in Kazañ und unternahm einige Forschungsreisen nach Astrachan, auf das Kaspische Meer, nach Saratov u. a.

<sup>5)</sup> *Reisen in Ost-Sibirien*. Bd. 1. Petersburg 1862, p. 39—42. Taf. 1. fig. 6.

<sup>6)</sup> N e h r i n g in seiner Arbeit *Die geographische Verbreitung der Säugetiere in dem Tschernosem-Gebiete des rechten Wolgaufers, sowie in den angrenzenden Ge-*

des gemeinen und des Steppeniltisses berühren und wo nach R a d d e der Übergang zwischen beiden Arten notwendig zu suchen ist.

Den lebenden Steppeniltis führt auch Brandt von Altaj im Werke Hofmanns: „*Der nördliche Ural und das Küstengebirge Pac-Choi*“, Bd. II. an, welches im Jahre 1856 in Petersburg erschienen ist.<sup>7)</sup>

Der genannte Forscher schloß daraus, daß auch die fossilen Reste des Iltisses aus den altajischen Höhlen wahrscheinlich der silirischen Varietät *Mustela Eversmanni* gehören.<sup>8)</sup>

Fast alle älteren Forscher stimmen überein, daß der Steppeniltis kleiner als der gemeine Iltis ist und daß seine Farbe sehr wechselt und von weißer, gelbbrauner und fuchsiger bis zur braunschwarzen und schwarzen übergeht.<sup>9)</sup> Die wesentlichen Unterschiede zwischen beiden erwähnten Arten lassen sich in der zoologischen Abteilung des böhmischen Landesmuseums, wo sich ein ausgestopftes, gleichfalls von Sarepta stammendes Exemplar des Steppeniltisses befindet, beobachten.

*bieten* (Zeitschr. der Ges. f. Erdkunde zu Berlin, Bd. XXVI. No. 4., 1891) führt ein Verzeichnis über 50 von Bogdanov festgestellte Säugetiere auf, den Steppeniltis aber darunter nicht erwähnend. Von Steppeniltissen führt er den überall vorkommenden *Foet. putorius* neben dem *Foet. sarmaticus* auf, der nur einmal in der Steppe bei Sarepta gesehen wurde. *F. Eversmanni* in dem betreffenden Gebiete nach alldem auch selten vorkommend, konnte leicht der Aufmerksamkeit Bogdanovs entgangen sein, namentlich wenn derselbe dem Forscher noch unbekannt war und von ihm mit dem gemeinen Iltis identifiziert wurde. — Nehring zählt auf einer anderen Stelle (*Ueber Tundren und Steppen*, p. 69.) den Steppen- und den gemeinen Iltis zu solchen Säugetieren, die zwar für subarktische Steppen Rußlands und Südwestsibiriens nicht charakterisch sind, die aber in denselben von Zeit zu Zeit erscheinen. Weiter schreibt der genannte Forscher: „Sehr häufig und weit verbreitet in den südrussischen und wolgo-uralischen Steppengebenden sind die *Iltisse* (*Foetorius putorius* bezw. *Foetorius Eversmanni*). Früher nahm man gewöhnlich an, daß der *Steppen-Iltis* nur eine hellere und etwas kleinere Varietät des gemeinen europäischen Iltisses sei; neuerdings wird dieser meistens als selbständige Art (*Foetorius Eversmanni* Lesson) neben diesem unterschieden, namentlich seitdem Hensel sich auf Grund genauerer Schädel-Untersuchungen dafür ausgesprochen hat. Immerhin sind die Unterschiede nicht sehr bedeutend, und es dürfte schwer halten, zwischen beiden Arten eine scharfe geographische Grenze festzustellen. Die älteren Autoren, wie Pallas, Eversmann, Kessler, Czernay, Nordmann, Brandt, unterscheiden sie nicht in ihren zoogeographischen Angaben, und ich muß deshalb hier davon absehen.“

<sup>7)</sup> *Bemerkungen über die Wirbelthiere des nördlichen europäischen Russlands, besonders des nördlichen Urals*, p. 27.

<sup>8)</sup> Brandt-Woldrich, *Diluviale europäisch-nordasiatische Säugethierfauna und ihre Beziehungen zum Menschen*. Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg. VII Sér. Tome XXXV., N. 10, pag. 54, 1887.

<sup>9)</sup> In der neuesten Auflage von *Brehms Tierleben* (1915. Bd. III.) findet man auf Seite 311 über den Steppeniltis folgende Bemerkung: „In Südrubland tritt eine andere Art, *M. Eversmanni* Less., für unseren Iltis ein, die sich von ihm hauptsächlich dadurch unterscheidet, daß sie im Winter weiß wird. Nur die Spitzen der langen Rückenhaare bleiben schwarz. Ihr Verbreitungsgebiet reicht bis nach Turkestan und Südsibirien.“



Hensel gelangte auf Grund des Studiums des oben angeführten Materiales zur festen Überzeugung, daß es notwendig ist, den Steppeniltis als eine selbständige Art zu betrachten. Den Hauptgrund dafür sieht Hensel vor allem in der starken Einschnürung der Stirnbeine, welche einen selbständigen, wenn auch nahe verwandten Typus verrät.

In dieser Hinsicht ist auch der fossile Schädel von Zechovic wie aus der beigelegten Abbildung (Taf. Fig. 2.) auf den ersten Blick zu sehen ist, ein neuer und besonders beredter Beweis.

Interessant ist, daß seinerzeit jenes eigentümliche marderartige Raubtier Nordamerikas, von Audubon und Bachman als *Putorius nigripes* beschrieben, nach Hensel mit Foetorius Eversmanni<sup>10)</sup> identisch ist. Als Heimat des Tieres wurde das Gebiet des Platte Rivers und die übrigen Teile des Zentralplateaus angegeben. Die bis jetzt bekannten Exemplare stammen von *Kansas, Nebraska, Wyoming, Montana* und *Colorado*. Wahrscheinlich ist dies nur die südliche Grenze seines Vorkommens, welches sich bis nach Norden Amerikas erstrecken wird.

Hensel sieht hier einen höchst interessanten Fall, daß ein sibirisches Tier sich wahrscheinlich noch unverändert erhalten hat.

Wie schon oben bemerkt wurde, ist nach Angaben bisheriger Forscher der Schädel des Steppeniltisses verhältnismäßig kleiner als der des gemeinen Iltises. Die Basilarlänge bei sechs männlichen, von Hensel gemessenen Individuen erreichte ein Maximum von 63 mm, welches Maß der normalen Länge des Schädels beim gemeinen Iltis entspricht. Die Basilarlänge der übrigen fünf männlichen Schädel zeigte 58·5, 58, 55·8, 53·8 und 53·6 mm. Deswegen gehört der fossile Schädel von Zechovic, dessen Basilarlänge 58 mm beträgt, gleichfalls einem ausgewachsenen Männchen an. Bei zwei weiblichen Schädeln konstatierte Hensel die Basilarlänge von 51·1 und 50·1 mm. Die minimale Einschnürung in der

<sup>10)</sup> In den neuerer Zeit noch Cerrit S. Miller (jr.) in *List of North American Land Mammals in the United States National Museum 1911* (Smithsonian Instit. U. S. N. M. Bulletin 79. Washington 1912) führt den Namen *Mustela nigripes* (Audubon and Bachman) an und zitiert auch die älteren Synonyma:

1851. *Putorius nigripes* Audubon and Bachman. *Quadr. N. Amer.*, vol. 2, p. 297.

1885. *Putorius nigripes* True, *Proc. U. S. Nat. Mus.*, vol 7 (1884), p. 609, 1885.

Als Hauptlokalitäten sind bezeichnet: Fort Laramie, Laramie County, Wyoming (Hayden, *Trans. Amer. Philos. Soc.*, n. s., vol. 12, p. 138, 1862.). —

E. L. Trouessart v <i>Catalogus Mammalium</i> (str.)	} Siberia, Turkestan, Rossia Orient, Reg. Astrakanet Cosac. Don. (Tanaïs).
275) <i>zaznamenává pod číslem 1642:</i>	
<i>P. Eversmanni</i> Lesson, <i>Man. de Mamm.</i> , 1827, p. 144;	
Gray, <i>P. Z. S.</i> 1865, p. 109.	
<i>putorius</i> , var. <i>sibirica</i> Pall. <i>Zoog. Ross.-As.</i> , 1808,	
p. 89; Blyth, <i>I. A. S. B.</i> XI., p. 281.	}
<i>putorius</i> Radde, <i>Reise, I.</i> , Säug., 1862, p. 39., pl. I.,	
fig. 6.	

Stirngegend beträgt nach demselben Autor beim Steppeniltis ♂ 10·6 mm, beim ♀ 11 mm, beim Nörz ♂ 12·4 mm, beim ♀ 11·4 mm; bei gemeinem Iltis ♂ 14·5 mm, beim ♀ 13·1 mm.

Etwaige Übergangszeichen zwischen den Schädeln beider Iltisse hat H e n s e l nicht gefunden. Dafür aber hat derselbe festgestellt, daß die Nasenöffnung beim Steppeniltis niedriger und nach oben zu mehr abgerundet als beim gemeinen Iltis ist, wogegen dieselbe bei letzterem sich in dieser Richtung hin etwas verengert. Eine ähnliche Abrundung der Nasenöffnung ist auch auf dem Schädel von Zechovic gut sichtbar.

Bei unserem Exemplare kann man auch die auf der linken Seite des Oberkiefers divergierende Lage des Prämolars (*p* 2) bemerken. Auf der rechten Seite ist dieser Zahn nicht erhalten. Die vordere kleinere und die hintere größere Alveole zeugt, daß der Zahn zwei ungleiche, von sich vollkommen getrennte Wurzeln besaß, wie auf unserem von unten abgebildeten Schädel ersichtlich ist.

Diesen Umstand betrachtete B l a i n v i l l e<sup>11)</sup> als charakteristisch für das Gebiß des amerikanischen Nörzes (*Foetorius vison*), welchen W o l d ř i c h irrtümlich mit der europäischen Art (*Foetorius Lutreola*) verwechselte, da er ihm einige Schädelbruchstücke von Zuzlawitz<sup>12)</sup> anrechnete. In Wirklichkeit aber hat der erste Lückenzahn (*p* 2) dieses Tieres nur eine Wurzel.

W i n t e r f e l d<sup>13)</sup> sah wiederum in dem Funde von Zuzlawitz Reste des *gemeinen Iltises* (*Foetorius Putorius*). Den zweiwurzeligen Lückenzahn hielt er für ein wichtiges Zeichen beim Iltisse aus dem ältesten Diluvium.<sup>14)</sup>

W o l d ř i c h hat übrigens später den Nörz aus dem Verzeichnis der Fauna von Zuzlawitz gestrichen.<sup>15)</sup>

W o l d ř i c h fügt zwar auf der Seite 54 der Publikation B r a n d t s (Diluviale europäisch-nordische Säugethierfauna) bei, daß möglicherweise die I. Spalte von Zuzlawitz Reste der sibirischen Form *M. Eversmanni* angehörend, liefern könnte, aber im letzten Faunenverzeichnis von Zuzlawitz führt er nur die vermutliche Art *Putorius sarmaticus* an. Meiner Ansicht nach könnte das von W o l d ř i c h im II. Teile seiner Fauna von Zuzlawitz abgebildete Bruchstück (Taf. II., Fig. 3—4) als *Foetorius*

<sup>11)</sup> *Osteographie*, Tom. II. *Mustela*, pag. 40.

<sup>12)</sup> *Diluviale Fauna von Zuzlawitz* II. (Sitzungsb. d. Ak. der Wiss. Wien 1881).

<sup>13)</sup> *Ueber quartäre Mustelidenreste Deutschlands*. (Zeitschr. der deutsch. geol. Gesellschaft, Bd. XXXVII. Berlin 1885.)

<sup>14)</sup> Derselbe bemerkt auf Seite 845 (i. c. 13) folgendes: „Wir dürfen demnach diese beiden Schädelstücke wohl für *F. Putorius* erklären und sie als weitere Belege dafür ansehen, daß der erste obere Lückenzahn bei dem gemeinen Iltis noch im ältesten Diluvium zumeist zweiwurzelig war.“

<sup>15)</sup> *Geologische Studien aus Südböhmen*. II. *Wolynkaihal im Böhmerwalde* (Archiv der naturwissenschaftl. Landesdurchforsch. von Böhmen, Bd. XII. Nr. 4. Prag 1904).

*Lutreola* bestimmt, eher dem *F. Eversmanni* angehören, da dasselbe eine auffallende Übereinstimmung mit dem Schädel von Zechovic zeigt, wie ich am Tage des Fundes gleich erkannte.

Nach der mir später zugesandten Abhandlung von Dr. A. Wurm „Über eine neuentdeckte Steppenfauna von Mauer an der Elsenz (bei Heidelberg)“<sup>16)</sup> wo auch ein Schädel von Steppeniltis beschrieben wird, fand ich, daß auch der genannte Forscher das Fragment Woldřichs für *F. Eversmanni* hielt.

Wurm betrachtete sogar auch andere von Woldřich als *F. putorius* bezeichnete Funde von Zuzlawitz als Reste von *F. Eversmanni*. Es sind dies die im I. Teile (Taf. II., Fig. 26 und Taf. III., Fig. 1—2) und im III. Teile (Taf. II. Fig. 1—2) abgebildete Schädel.

Das läßt sich allerdings mit Bestimmtheit erst durch eine neue Untersuchung des Materiales selbst, das heute Eigentum des böhmischen Landesmuseum ist, beweisen.

Mit der Frage der pleistocänen Iltisse Mitteleuropas, namentlich für die ungarischen Funde maßgebend, befaßte sich in der letzten Zeit eingehender F. Kormos.<sup>17)</sup>

Aus seinen an vier Schädeln der fossilen Art *Mustela robusta* durchgeführten Untersuchungen geht hervor, daß die ersten oberen Lückenzähne insgesamt zwei Wurzeln besaßen, worin Kormos einen der wichtigsten Unterschiede sieht, auf deren Grund er die Selbständigkeit der Art beweist. Offenbar handelt es sich hier um eine im Laufe der Zeit entstandene Reduktion, die nach Winterfeld mit der Verkürzung der frontonasalen Gegend verbunden ist, wodurch die Zähne aneinander gedrängt wurden. Die Reduktion scheint noch am Ende des Pleistozäns begonnen zu haben, da der obere  $p\ 2$  einiger ausländischer fossiler Schädel schon einwurzelig erschien.

Da Hensel in seiner Monographie nirgends angegeben hat, ob der obere Lückenzahn beim rezenten *Foet. Eversmanni* ein- oder zweiwurzelig ist, ersuchte ich das königl. zoologische Museum zu Berlin, wo sich einige von Hensel gemessene Schädel befinden, um die Untersuchung dieses Umstandes.

Musealdirektor Herr Prof. Matschie teilte mir dann freundlichst mit, daß die oberen  $p\ 2$  aller im Museum befindlichen Schädel *insgesamt einwurzelig sind*.<sup>18)</sup>

<sup>16)</sup> Jahresberichte und Mitteilungen des Oberrheinischen geologischen Vereines. Neue Folge, Bd. III., H. 1. Karlsruhe 1913.

<sup>17)</sup> *Die Felsnische Pillisszántó. Beiträge zur Geologie, Archäologie und Fauna der Postglazialzeit* (Mitteil. aus d. Jahrb. der kgl. ungar. geolog. Reichsanst. Bd. XXIII. H. 6. Budapest 1916).

<sup>18)</sup> Herr Direktor Matschie bemerkt noch dazu, daß die von Hensel in seiner tabellarischen Übersicht angeführten Exemplare nicht mit den in Musealkatalog laufenden Nummern bezeichnet sind, so daß der Schädel Nr. 5 auf der



Dieser gewiß sehr wichtige Umstand bestätigte also die Berechtigung der obigen Erörterung Winterfelds, nur wäre es nach dem bisherigen fossilen Einzelfunde natürlich vorzeitig, eine bestimmte Regel zu ziehen, daß der ursprüngliche mit zwei Wurzeln versehene  $p$  2 infolge der allmählichen Reduktion zu einem einwurzeligen Typus gelangte.

Der letzte quer liegende Höckerzahn ( $m_1$ ) ist beim rezenten sowie bei unserem fossilen Steppeniltis verhältnismäßig kleiner, enger und auf der vorderen sowie der hinteren Seite gleichmäßig breit, wogegen dieser Zahn beim gemeinen Iltis bedeutend größer und auf der hinteren Seite breiter ist.

Dieselben Verhältnisse wie bei *Foet. Eversmanni* fand Kormos auch beim großen Iltis *Mustela robusta* aus dem Pleistocän Ungarns.<sup>19)</sup>

Der Höckerzahn ( $m_1$ ) ist beim Exemplare von Zehovic 5.5 mm lang und bei den zwei ungarischen 5.5 mm und bei einem anderen 5.6 mm. Der sagittale Durchmesser des hinteren Zahnteiles zeigt wie bei unserem Funde so auch beim ungarischen Exemplare 2.7 mm. Beim rezenten Tiere beträgt dieser Durchmesser nach Hensel 2.5—3.95 (♀) und 2.9—3.90 (♂) mm. Die Maximallänge des Reißzahnes ( $p$  4) mißt beim Steppeniltis von Zehovic 8 mm, bei gemeinem Iltis von Zuzlawitz 8.5 mm.

Nähere Angaben betreffs der Schädelverhältnisse des Iltisses *Foet. Eversmanni* von Zehovic sind in der weiter beigelegten Vergleichsübersicht angeführt.

Es ist mekwürdig, daß im Laufe der jahrelangen Forschungen im Diluvium bei Wolin, von wo ich seit dem Jahre 1902 bis zum Jahre 1915 nicht weniger als 65 Wirbeltiere beschrieben habe, es mir nicht gelungen ist, irgendwelche Reste zu finden, die auf die Existenz des gemeinen Iltisses in der betreffenden Gegend hinweisen, wogegen aus den nahen Zuzlawitz, wie bekannt, Woldrich Reste mehreren Individuen angehörend, gefunden hat.

Von den übrigen Maßen betreffs des Schädels von Zehovic seien noch folgende angegeben:

Länge der Backenzahnreihe vom Vorderrande der Lückenzahnalveole ( $p$  2) bis zu dem Hinterrande des Fleischzahnes ( $p$  4) 14.8 mm.

Breite der Incisivreihe 6.7 mm.

Länge der Eckzahnkrone (vorn-hinten) 4 mm.

Länge von der mittleren Incisivalveole bis zum Hinterrande des Fleischzahnes 22.5 mm.

Breite des Gaumens zwischen dem Innenrande der Alveolen der vordersten Lückenzähne ( $p$  2) 10 mm.

Taf. E. als ♂ A. 2757 und Nr. 6. auf derselben Tafel als ♂ 2760 eingetragen ist. Beide Schädel sammelte v. Nordmann in der Umgebung von Odessa. Der von Sarepta stammende Schädel ♂ Nr. 2. trägt Nr. A. 2558. Der vierte im Musealkatalog unter der Nr. 4215 angeführte Schädel ist aus der Kirgisensteppe.

<sup>19)</sup> l. c. 17. p. 774. (144.).

Bezeichnung nach Hensel	Einzelne Maße	<i>Foctorius Eversmanni</i> foss. von Zechovic	<i>Foctorius Eversmanni</i> Hensel*)
a	Basilarlänge	58	58
b	Scheitellänge	57.5	57.5
c	Größte Breite des Schädels an den Jochbogen gemessen	36.5	—
d	Breite des Hirnteiles am Schädel hinter den Jochbogen und über der Gehöröffnung gemessen	28.2	28.1
e	Größte Breite des Hinterhauptes	34.5	34.1
f	Geringste Breite an den vereinigten Stirnbeinen (Die Einschnürung der Frontalia)	11	10.8
g	Entfernung der Spitzen der Processus postorbitalis	20.5	20.6
h	Geringste Breite der Stirn zwischen den Orbiten	16	16
i	Breite des Schädels an den Eckzähnen des Oberkiefers oder Abstand der Außenränder der Alveolen für die oberen Eckzähne von einander	15.5	15.2
k	Gaumenlänge	29.5	29
l	Die Entfernung vom Vorderrande der Alveole des oberen Eckzahnes bis zum Hinterrande der Alveole des Zahnes $m_1$ an der Stelle der hinteren Außenwurzel	19.4	19.3
u	Länge des Zahnes $p_4$ im Oberkiefer (Nach Hensel $p_1$ )	7.8	7.8

\*) Zur Vergleich wurde ein ♂ Exemplar von gleicher Basilarlänge genommen.

### Nachtrag.

Im Laufe der Korrektur sandte mir Herr Dr. W. Soergel in Tübingen eine ausführliche Abhandlung „*Der Steppeniltis Foetorius Eversmanni* Less. aus dem oberen Travertin des Travertingebietes von Weimar,“<sup>20)</sup> welche eine Reihe neuer Ergebnisse zur Charakteristik des fossilen sowie des rezenten Steppeniltisses enthält, sodaß die Angaben Hensels in mancher Hinsicht revidiert und ergänzt sind. Nichtsdestoweniger ist die Monographie Hensels, wie Soergel selbst bemerkt, als eine Grundlage für alle späteren Arbeiten auf dem Gebiet der Musteliden geworden.

Was den morphologischen Unterschied zwischen dem Schädel des Steppen- und des gemeinen Iltisses anbelangt, kommt Soergel zur folgenden Überzeugung:

Für *Foetorius Eversmanni* ist charakteristisch eine durchgehende beträchtlichere Einschnürung der Frontalia, der auf der Schädelunterseite im allgemeinen ein sehr schmales Palatinum entspricht, eine niedere Nasenöffnung; die relative Länge der Backenzahnalveolenreihe ist im Ober- wie im Unterkiefer im allgemeinen größer als bei *F. putorius*, die Oberkieferalveolenreihen divergieren stärker nach hinten; der Unterkiefer ist im allgemeinen länger und vor allem höher; der letzte mandibulare (*m* 1) und der letzte maximale (*m* 2) Molar sind stärker verkümmert.

In jedem Fall bei Artbestimmung entscheidend ist die stärkere Einschnürung der Frontalia, meist auch die Größe *m* 1 max. und die Unterkieferhöhe, vielfach die Größe des *m* 1 mand.

Die Schädelgröße entscheidet nach Soergel nicht für die Artzugehörigkeit beider Iltisse.

Außer den oben angeführten zwei Lokalitäten von Mauer und Weimar ist der Steppeniltis noch aus den schwäbischen Höhlen von Sirgenstein<sup>21)</sup> und Hohlefels,<sup>22)</sup> von Serackenberg bei Goslar<sup>23)</sup> und schließlich von Teyjat (Dordogne)<sup>24)</sup> bekannt.

<sup>20)</sup> Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft. Bd. 69, S. 139—181. Berlin.

<sup>21)</sup> E. Koken. *Die Geologie und Thierwelt der paläolithischen Kulturstätten Deutschlands* in R. R. Schmidts Monographie *Die diluviale Vorzeit Deutschlands*. Stuttgart 1912. (Schweizerbartscher Verlag.)

<sup>22)</sup> A. Nehring. Diluviale Wirbeltierreste aus einer Schlotte des Seveckenberges bei Questinburg. *Zeitschr. d. Deutschen Geolog. Ges.* Bd. 56, S. 290 bis 303. Berlin 1904.

<sup>23)</sup> V. Soergel l. c. p. 167.

<sup>24)</sup> Harlé. *Nombreux restes de Lemming dans la station préhistorique del Abri Mége à Teyjat (Dordogne)*. *Compte Rendu des séances de la Soc. Géol. de France* 1912.



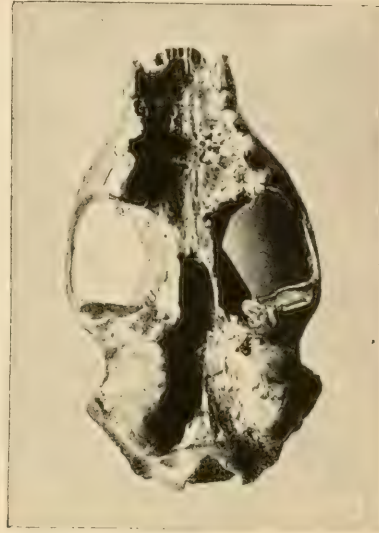
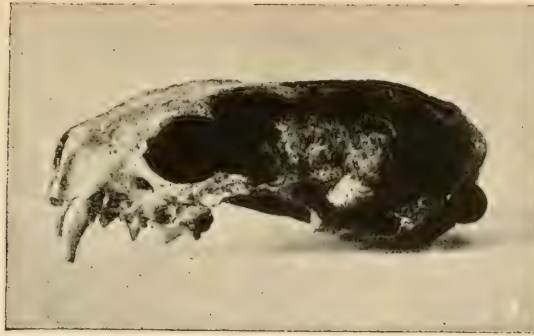


Fig. 1—3. *Foetorius Eversmanni* Less. — Diluvium bei Zechovic.

Fig. 4. *Foetorius Eversmanni* Less. — Rezenten Exemplar von Sarepta. (Photogr. Herr Dir. J. Kafka.)



# Über einige Příbramer Gesteine.

Von

**F. SLAVÍK.**

Mit 3 Textfiguren.

Vorgelegt am 12. Mai 1916.

(Résumé des böhmischen Textes.)

## I.

Vor einigen Jahren erhielt ich durch die Freundlichkeit des Herrn Bergrats J. L o d l in Příbram zwei größere Gesteinsserien vom 32. und 33. Horizonte in Birkenberg, deren Untersuchung und Vergleich mit anstehenden, von mir und dem Kollegen K e t t n e r in der weiteren Příbramer Umgebung gesammelten Gesteinen hier vorgelegt werden.

Die Lage der Stellen, denen die Proben entnommen worden sind, zeigen die beigelegten Kartenskizzen an.

## II.

### Die Diabase.

*Die Diabase* der neuen Proben unterscheiden sich keineswegs wesentlich von denen, die aus dem Příbramer Grubenbezirke V r b a<sup>1)</sup> und ich im H o f m a n n s c h e n Führer<sup>2)</sup> beschrieben. In dem großen Diabasgange vom 33. Horizonte (Nr. 19—12 der Proben) ist kein Strukturwechsel zu verzeichnen. Der schwächere Gang mit dem Gesteine Nr. 21 zeigt ein viel feinkörnigeres und ins Porphyrtartige übergehendes Gefüge (mit spärlichen Plagioklasen I. Generation). Der dritte Gang (I—c Fig. 2) zeigt eine Kornabnahme an einem Salband (*d* und *e*). Am 32. Horizont nimmt in dem vom Muttergottes-Gänge durchsetzten Diabasgange die

---

<sup>1)</sup> V r b a, Oest. Z. für Berg- u. Hüttenw. 1875, ausführlicher: Tschermaks Miner. Mitt. 1877, 223—242.

<sup>2)</sup> H o f m a n n im Guide des excursions du IX Congrès géologique international 1903.



Korngröße gegen die Salbänder zu sehr deutlich ab. Von den älteren, bei Hofmann beschriebenen Proben ist zu verzeichnen, daß drei von den vier porphyrtigen Gesteinen selbständige schmale Gänge bilden.



Fig. 1. Orientationsplan der Stellen, denen die Proben entnommen wurden.  
Maßstab. 1 : 5760.

Vollgezogen: 33. Lauf, Teufe am Adalbertschacht 1149 m  
Gestrichelt: 32. „ „ „ „ 1099'3, am  
Annaschacht 1094'5 m.

a — a die Stelle am 33. Lauf (Fig. 2), wo die Proben genommen wurden.  
b — b dto am 32. Lauf (Fig. 3).

9, 10—12, 15 Stellen am 30. Lauf, von denen ich im J. 1903 Grauwackengesteine für den Hofmannschen Führer untersucht habe. (Teufe am Adalbertschacht 999.2 m.)

Übersetzung der Bezeichnungen: Vojtěšský důl = Adalbertschacht, Anenský = Anna-; žíla = Gang, Vojtěšská hlavní Adalb. Haupt-, Matkobožská = Muttergottes-; Východní překop = Ost-Querschlag; Rozsedlina jílová = Lettenkluff. S = sever = Nord.

Im ganzen wiederholt sich also, wenn auch keineswegs als eine ausnahmslose Regel, die Erscheinung, daß die *schwächeren Diabasgänge in Příbram ein feinkörnigeres und bisweilen porphyrisches Gefüge zu haben*

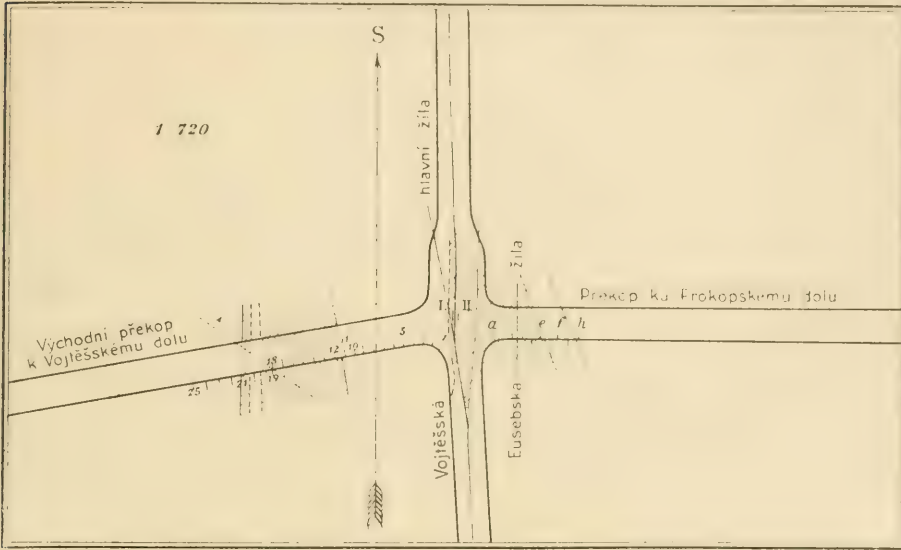


Fig. 2. Die Lage der untersuchten Gesteine am 33. Horizont, im Ostquerschlag des Adalbertschachtes.

Maßstab 1 : 720.

Punktirt die Diabasgänge. Bezeichnungen wie bei Fig. 1.

*pflegen, sowie daß in mächtigeren Gängen die Korngröße gegen die Salbänder zu abnimmt und die Struktur zu einer feinkörnig-ophitischen ohne Plagioklasse I. Generation wird.*

Die makroskopisch durch den Farbenwechsel (zu isabell- bis braun- gelb) sehr merklich ausgeprägte *Veränderung der Diabase an den Erz-*

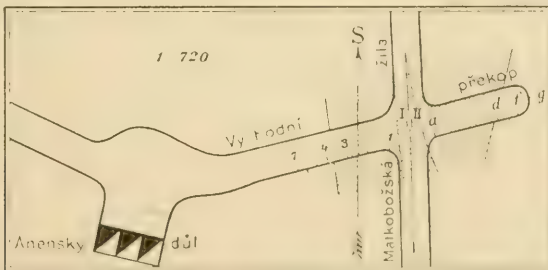


Fig. 3. Die Lage der untersuchten Gesteine am 32. Lauf, im Ostquerschlag des Annaschachtes.

Maßstab 1 : 720.

*gängen besteht im Eindringen des Eisenspates (und Kalkspates) und in der Zersetzung der ursprünglichen Diabasbestandteile sowie des sekundären*

*Chlorits*: die Feldspate sind zu trüben dichten Aggregaten eines hellen Glimmers, Ilmenit zu Leukoxen, Augit resp. aus ihm entstandener Chlorit zu erdigen, mit Brauneisenstein durchtränkten Substanzen umgewandelt. *Die Verquarzung ist in meinen Proben nur sehr gering.*

### III.

#### Die Grauwackengesteine aus der Grube.

In den Jahren 1887—95 sind über Příbram vier zusammenfassende Arbeiten erschienen. Von den zwei offiziellen Publikationen bringt die erste, von F. M. von Friese und J. Grafen Falkenhayn unterzeichnete<sup>3)</sup> sehr wenig Neues und reproduziert zumeist von den Gesteinen in gekürzter Fassung das, was schon dreißig Jahre zuvor J. Grimm gesagt hatte; die zweite, welche die Namen J. Schmid und W. Göbl trägt,<sup>4)</sup> bringt zwar leider sehr zahlreiche eigene, hier zum erstenmale veröffentlichte Daten, aber kaum wurde je eine so wertlose kostspielige Repräsentationspublikation herausgegeben. Ich hatte im Vorjahre<sup>5)</sup> die Gelegenheit, auf Belege von petrographischen Unrichtigkeiten dieser Publikation hinzuweisen, die geologischen wurden von Pošepný<sup>6)</sup> und Kettner<sup>7)</sup> dargelegt; aber vor allem genügt ein einziger Blick auf die Schmid'sche Karte, um das hier abgegebene Urteil von der Qualität dieser offiziellen Publikation noch allzu mild erscheinen zu lassen.

F. Pošepný hat in seiner Adinolenarbeit<sup>8)</sup> den Versuch gemacht, das böhmische, speziell das Příbramer Kambrium in vier Horizonte zu teilen: Žitecer, Bohutíner, Birkenberger und Jinecer (Paradoxides-)Stufe, hat sie aber nicht weiter charakterisiert als: die Žitecer Konglomerate mit tonigem Zement, Bohutíner dunkle, Birkenberger lichte Quarzsandsteine. Hier seien drei Bemerkungen zu Pošepný's Angaben gemacht.

1. Die Ansicht (l. c. S. 177), als hätten die kambrischen Gesteine im NW-Flügel der Birkenberger Synklinale ihren Grauwackencharakter sekundär durch Metamorphose und Verquarzung erworben, wurde durch die mikroskopische Untersuchung *nicht* bestätigt.

2. Die Bestimmung der in der Tiefe unter der Lettenkluft befindlichen Grauwackengesteine als Bohutíner Horizont, der hier am Tage nicht

<sup>3)</sup> Bilder von den Lagerstätten des Silber- und Bleibergbaues zu Příbram und des Braunkohlen-Bergbaues zu Brüx, Wien 1887.

<sup>4)</sup> Montangeologische Beschreibung des Příbramer Bergbau-Terrains und der Verhältnisse in der Grube, Wien 1892.

<sup>5)</sup> Slavík, O spilitech v algonkiu příbramském, Slavnostní spis České Akademie k 70. narozeninám K. Vrby, III. S. 15, 18, 22. Résumé in diesem Bulletin 1915 (Bd. XX).

<sup>6)</sup> Pošepný, Archiv für prakt. Geologie II. 609—752, 1895.

<sup>7)</sup> Kettner, Rozpravy České Akademie 1915 Nr. 34 u. dies. Bull.

<sup>8)</sup> Pošepný, Tscherm. Min.-petr. Mitth. 1888 (X. Bd.), 175—202.



ansteht, in der Tiefe jedoch gegen NO fortsetzt, l. c. S. 186, ist nach meinen diesjährigen sowie früheren, bei Hofmann veröffentlichten Untersuchungen ganz richtig.

3. S. 198—9 hebt Pošepný die Unterschiede zwischen Gesteinen aus der Grube und aus den Ausbissen hervor, welche die Identifikationen unsicher machen. Ich kann darauf hinweisen, daß lithogenetisch beiderlei Gesteine, trotz dem Unterschiede in der Farbe, wesentlich identisch sind.

*Die Bohutíner Stufe Pošepnýs ist ebensogut wie die Žitceer ein tatsächlich wohlcharakterisierter Horizont des böhmischen Kambriums, dessen Sedimente sich durch ihre petrographische Beschaffenheit als sowohl von liegenden als auch von hangenden Schichtenkomplexen lithogenetisch wesentlich verschiedene Bildungen zeigen.*

Der Vergleich mit anstehenden Sedimentgesteinen der weiteren Umgebung hat ergeben, daß die im Vorjahre von Kettner (l. c. 7) provisorisch und mit Reserve ausgeschiedenen „Säcker Schichten“ trotz ihrer helleren Farbe und abweichenden Habitus Produkte gleicher lithogenetischen Bedingungen wie die Bohutíner darstellen und folglich mit diesen zu vereinigen sind.

### Die Sedimentgesteine aus der Grube

sind makroskopisch feinkörnig bis fast dicht, oft quarzitähnlich, von splittrigem bis fast muschligem Bruch; die Farbe ist dunkel grünlichgrau, selten heller. Einige sind fast glimmerfrei, andere enthalten bisweilen ziemlich viel Muskovit und gehen in wohlgeschichtete Gesteine, bis in Schiefereinlagen über, wobei dann die Farbe in dunkel rotbraune oder rotgraue überzugehen pflegt.

In der Nähe der Erzgänge werden die Grauwackengesteine heller bis graulichgelb oder licht rostbraun durch Auslaugung der Eisens, teilweise auch durch die Eisenspatimprägung. Die Endprodukte dieser Umwandlung sind den ebenso umgewandelten Diabasen ziemlich ähnlich, aber wie schon Grimm, auch hierin ein vorzüglicher Beobachter, bemerkt, die im Sandstein immer wenigstens vereinzelt zerstreuten Glimmerschüppchen geben ein sicheres Unterscheidungsmerkmal ab.

Das klastische Material besteht vorwaltend aus Quarz und Feldspaten (Orthoklas, Oligoklas), aus bisweilen häufigem Muskovit sowie akzessorischen Bruchstücken von Ilmenit, Epidot und Chloritpseudomorphosen nach unbekanntem Minerale; spärlich treten Turmalin, Granat, Titanit und z. T. chloritisierter Biotit auf.

Die im Bindemittel und sekundär vorkommenden Bestandteile sind: Chlorit, Muskovit, Kalcit, Siderit, Epidot, Hämatit, Pyrit und trübe erdige Verwitterungsprodukte von Feldspaten. Von diesen tritt der Hämatit hauptsächlich in den schieferigen Einlagen.

*Die relative Menge der Bestandteile und die Struktur* ändern sich oft auch in derselben Probe von Stelle zur Stelle. Der Gesamthabitus des Gesteins ist beim Vorwalten des klastischen Materials über dem Bindemittel und bei kleiner Menge von Glimmer massig und quarzitisches; mit der Zunahme von Muskovit und minder kompaktem Bindemittel ragen einzelne Geröllchen deutlicher aus diesem hervor und der Gesteinscharakter wird mehr sandsteinartig, eine weitere Zunahme von Muskovit und vollkommener parallele Lagerung desselben bedingt Übergänge in schiefrige Gesteine, bei welchen gewöhnlich auch eine Verkleinerung des Kornes und Imprägnation mit sekundärem Roteisenstein eintritt.

Im klastischen Materiale überwiegt bisweilen der Quarz bedeutend, der Mehrzahl nach sind jedoch auch die Feldspate in bedeutender Menge vertreten; auch der Anteil der übrigen Bestandteile schwankt beträchtlich. Im Bindemittel der Gesteine vom quarzitisches Aussehen ist entweder wieder viel Quarz zu beobachten, der mit anderen Bestandteilen des Zements vermischt ist, oder es ist überhaupt das Bindemittel auf ein Minimum beschränkt, und in diesem Falle ist es der Chlorit allein, der nur allerdünnste Membranen zwischen den Quarzgeröllchen ausmacht und das Gestein dunkel färbt. Wo der Gesamthabitus des Gesteins mehr sandsteinähnlich ist, tritt auch das Bindemittel reichlicher auf und hat den Charakter eines Zerreibsels, das aus Quarz, feinstschuppigem Muskovit, erdigen Verwitterungsprodukten der Feldspate, rhomboëdrischen Karbonaten und Chlorit in mannigfaltigsten relativen Mengen besteht. In den schieferigen Partien nimmt das Bindemittel noch mehr überhand und wird in der Regel eisenschüssig.

Die Quarze sind in einigen quarzitähnlichen, besonders aber in den schieferigen Gesteinen ziemlich scharfkantig, sonst mehr oder weniger gerundet.

Die *Parallelstruktur* wird hauptsächlich durch Muskovit, bisweilen auch durch tafeligen Ilmenit bedingt. Auch kann man u. d. M. den Wechsel von Lagen mit mehr und weniger dunklen Mineralien, besonders Epidot und Ilmenit, beobachten, obwohl nicht so ausgesprochen wie in den typischen „Sädeker“ Sandsteinen. Bisweilen findet man in Grauwackengesteinen kleine Gerölle von den schieferigen Gesteinen.

In Adern und Imprägnationen treten Quarz, Chlorit, Siderit, Calcit und Pyrit auf.

Die Mineralkombination des Bindemittels im Vergleich mit dem klastischen Materiale weist auf die *Entstehung des Bindemittels durch Zersetzung der Feldspate und der untergeordneteren Bestandteile des klastischen Materiales hin*. Vielorts kann man diese Entstehung u. d. M. direkt in einem Übergangsstadium beobachten. Die trüben Feldspatverwitterungsprodukte bilden zum Teile noch vollkommene Pseudomorphosen mit erhaltenen Umrissen der ursprünglichen Feldspatkörner, teils kriechen sie aus

den zersetzten Feldspäten heraus und umgeben die Quarzgeröllchen; auch der Chlorit ist in den Geröllchen und im Zement identisch.

Die mineralogische Zusammensetzung des klastischen Materiales weist auf granitischen Ursprung hin, die ungewöhnliche Häufigkeit der dunklen schweren Mineralien zeugt für die Erklärung, daß es besonders basischere, dioritische Fazies waren, die in erster Linie von der Denudation betroffen worden sind, welche das klastische Material der Grauwackengesteine geliefert hat. (Vergl. die Angaben Kettners, l. c. 7, über granitische Gesteine im klastischen Materiale der Žitecer Konglomerate.)

Das granitische Material in den Bohutíner Sedimenten des Pířbramer Kambriums weist gerade wie dasjenige in den Žitecer und auch algonkischen Konglomeraten darauf hin, daß durch die vorkambrische Denudation besonders *Randfacies der granitischen Tiefengesteinskörper* zerstört worden sind.

Die von Hofmann gesammelten und von mir i. J. 1903 untersuchten Grauwackengesteine von der Adalbertabteilung des 30. Laufs sowie diejenigen von der Muttergottes-Abteilung des 32. L. sind mit den Gesteinen des 33. Horizonts, Adalb.-Abt., kongruent. Einige von den Grauwacken des 32. Laufs enthalten viel schon makroskopisch sichtbaren Epidot, der sowohl dem klastischen Materiale als auch den sekundären Bildungen des Bindemittels angehört; in einer Probe wurden Chloritpseudomorphosen nach Biotit gefunden.

Auf den Halden des *Augustschachtes bei Drkolnov* fand ich etwas hellere Grauwacken, bisweilen mit hübsch entwickelter diagonaler Schichtung, deren Bindemittel bedeutend reichlicher ist und aus Quarz und sehr feinschuppigem, durch Zersetzung der Feldspäte entstandenem hellem Glimmer besteht. Andere Proben sind ziemlich verwitterte *Konglomerate* mit kleinen Geröllchen von Quarz und algonkischen Gesteinen (Grauwacken, Kieselschiefern, Spiliten).

### **Grauwacken und Grauwackenschiefer des Bohutíner Horizonts aus anstehenden Fundorten.**

Nach den vorstehenden Daten über die petrographische Beschaffenheit der Grauwacken von den tiefsten Niveaus der Birkenberger Gruben kann man diesen Schichtenkomplex als makroskopisch feinkörnige, dunkel grünlich- bis schwarzgraue Grauwacken charakterisieren, die zum Teile fast glimmerfrei, zum Teile reicher an Muskovit und dann deutlicher geschichtet sind und mit schiefrigen, an Roteisenstein und Muskovit reichen Zwischenmitteln wechsellagern; mikroskopisch tritt die granitische resp. granodioritische Natur des klastischen Materiales zum Vorschein.

Diese Merkmale sind als gemeinsame habituelle und lithogenetische Charakteristik des Bohutíner Horizontes anzunehmen, denn Pořepný hat die untersuchten Abteilungen des Grubenreviers in denselben eingereiht



und die typischen Gesteine vom Anstehenden bei Bohutín und Dolní Láz stimmen wesentlich mit den beschriebenen überein.

R. K e t t n e r s provisorisch ausgeschiedene „*Sádeker Schichten*“ aus der nördlichen Umgebung von Příbram (Sádek-Bradkovice Gegend) sind makroskopisch heller als die Bohutíner Gesteine, oft (Steinbruch am N-Abhang der Cò. 521 S von Sádek) schön diagonal geschichtet, mikroskopisch zeigt sich ihre *lithogenetische Identität mit den Bohutíner Grauwacken*. Der Unterschied besteht hauptsächlich in der Beschaffenheit des Bindemittels, das reichlicher ist und mehr Kalcit enthält. Die schwereren Mineralien des klastischen Materiales (Ilmenit, Epidot, Titanit, Chlorit, weniger Granat und Turmalin) sind von Quarz und Feldspaten in abwechselnden **dünnen** Schichten gesondert.

Im ganzen konnte ich Bohutíner (und „Sádeker“) Gesteine sowie deren Übergänge zu den überlagernden Třemošná-Schichten aus folgenden anstehenden Lokalitäten untersuchen:

1. in der *Třemošiner* Gruppe: Roželov, NE vom erzbischöflichen Sommerhause ;

2. in der *Mitte der ersten Grauwackenzone*: Žežičky, E von der Segengottes-Gruppe, Heiliger Berg, Neues Wirtshaus ;

3. am *Nordwestrande derselben*: zwischen Bohutín und der Duchoňmühle, NE vom Stephanschacht, N und W von Tisová (Segengottesgrube), Svatojanský vršek bei Příbram (cò. 511), N W-Abhang des Čertův pahorek, Květná-Schacht, die Straße nach Občov NNE vom Hügel Pichce ;

4. in der *zweiten Grauwackenzone*: Profil von Dolní Láz zum Lázer Teiche, (Dubová hora), W-Ende des Dorfes Liščí kamna, Côte 547 zwischen Příbram und der Silberhütte, der Teil zwischen den Dörfern Sádek und Bradkovice im N W, Deutsch-Lhota und der Valcha-Mühle an der Litavka im SE.

5. *Weiter gegen Norden* wiederholen sich die „Sádeker“ Gesteine bei Dominikální Paseky und nochmals am Südende von Čenkov.

Von einzelnen Vorkommen sei nur folgendes hervorgehoben: *Roželov* Grauschwarzes, sehr festes Gestein, mit scharfkantigen klastischen Quarzen und Magnetit, im Bindemittel Feldspatverwitterungsprodukte, Chlorit und Hämatit.

*Žežičky*, N von der Schwarzenberggrube: feinkörniges sandsteinartiges Gestein mit viel Chlorit und dichtem Glimmer im Bindemittel und wenigen Feldspatgeröllchen neben vorwaltendem Quarz.

*E vom Teiche an der Segengottesgrube*: lichtgraues Gestein mit viel Muskovit, Feldspaten, Epidot und Ilmenit neben Quarz im klastischen Material, dichtem Glimmer, fast ohne Chlorit im Zement.

*Der Schacht am Heiligen Berge*: teils feinkörnige Gesteine vom Bohutíner Charakter, aber noch feinkörniger als das von Žežičky, teils Gesteine, die demjenigen vom Segengottesschacht ähnlich sind, aber durch das

bedeutende Vorwalten des Quarzes im Bindemittel einen Übergang zu den Třemošná-Sedimenten vermitteln; diese selbst kommen in chloritreicher grünlicher Abart vor.

*Neues Wirtshaus*: bräunlich graues bis fast rostbraunes feinkörniges Sediment, das den schiefrigen Einlagen der Bohutíner Grauwacken nahesteht.

*Zwischen Bohutín und Dolní Láz*: a) Eine ältere Probe aus der Barrandeum-sammlung des Böhmisches Museums entspricht im ganzen den beschriebenen Gesteinen aus der Grube mit sehr spärlichem Glimmer und ohne Epidot mit reichlicherem, aus feinschuppigem sericitischen Glimmer, Calcit, Chlorit und feinkörnigem Quarz bestehendem Bindemittel.

b) An Ort und Stelle, am Hügel N von der Rožmitáler Straße zwischen Bohutín und der Duchoňmühle gesammeltes, makroskopisch mit dem vorigen ganz kongruentes Gestein enthält in einigen Partien den Chlorit des Bindemittels teilweise oder ganz in Biotit umgewandelt, offenbar eine Kontaktwirkung des hier unterirdisch in geringer Tiefe von Bohutín gegen Rožmitál fortsetzenden Quarzdiorits. Sonst ist in den Bohutíner Gesteinen, entgegen der Behauptung der offiziellen Schmid-Göblschen Publikation, kein authigener Biotit gefunden worden; nur das Gestein

im Walde NE vom Stephanschacht gleicht dem soeben erwähnten.

*N von Tisová*: kongruent mit dem feinkörnig sandsteinartigen Gestein von Žežičky.

*W von Tisová*: Quarz- und muskovitreiche Übergänge zu den Sedimenten der Třemošná-Stufe.

*Sengottesgrube*: ähnliche Übergangsgesteine; gewöhnliche Bohutíner Grauwacken mit viel Feldspaten, Leukoxen und Epidot im klastischen Materiale; schiefrige Einlagen.

*Svatojanský vršek*: rötliche, glimmerreiche, den schiefrigen Einlagen der Bohutíner Grauwacken ähnliche Gesteine.

*NW-Abhang des Čertův pahorek*: graugrünliches Gestein mit chloritischem Bindemittel, eckigen Quarzkörnern, zersetzten Feldspaten, Chloritpseudomorphosen nach Biotit und ziemlich viel Leukoxen und Muskovit.

*NNE vom Hügel Pichoc*: dem vorigen ähnlich, weniger chloritisch und weit feinkörniger.

*Květnášchacht*: feinkörniges sandsteinähnliches Gestein mit viel Muskovit, ähnlich den Sádceť Grauwacken. Zersetzte Feldspate überwiegen selbst über den Quarz, auch viel Chlorit im allothigenen Material ist zugegen; im Bindemittel waltet dichter heller Glimmer vor.

*Profil zwischen Bohutín und Dolní Láz* (Pošepnýs Monographie S. 646): eine mit Bohutín a) (s. oben) übereinstimmende Grauwacke.

- Dubová hora*: helles sandsteinähnliches Gestein, fast nur Quarz und zersetzte Feldspate im klastischen Materiale, Quarz und dichten hellen Glimmer im Bindemittel führend.
- Côte 547 zwischen Příbram und der Hütte*: typische Bohutíner Grauwacke; klastisches Material besteht aus Quarz, Orthoklas, Oligoklas, einem kieselschieferartigen Gestein, Ilmenit, Leukoxen und wenig Muskovit; das Bindemittel sehr spärlich, vorwiegend nur als allerdünnste Chloritmembranen zwischen den Geröllchen entwickelt; wo es zunimmt, gesellen sich dem Chlorit der aus Ilmenit herausverwitternde Hämatit und erdige Feldspatverwitterungsprodukte zu.
- W-Ende von Liščí Kamna*: ähnlich dem Gesteine von der Dubová hora, durch reichlich beigemengten Kalkspat im Bindemittel einen Übergang zu den Sádcker Grauwacken vermittelnd.
- S und SW von Sádck (N-Abhänge der Côt. 521, 524)*: typische „Sádcker“ Grauwacken s. oben S. 8.
- Der Hügelrücken zwischen dem Sádcker Schacht und der Côte 524*: grau-grünliche Grauwacke, viel ärmer an Muskovit als die vorigen, mikroskopisch mit denjenigen typischen Bohutíner Grauwacken kongruent, bei denen das Bindemittel auf die dünnsten Chloritmembranen beschränkt ist. Im klastischen Materiale Quarz, viel Oligoklas, Orthoklas, Muskovit, Epidot, Leukoxen, Ilmenit, etwas Granat, feinkörniges Quarzgestein.
- Sádcker Schacht*: Rötlichgraues sandsteinartiges Gestein mit vielen Eisen-erzen im klastischen Anteil, aus denen durch Verwitterung Hämatit entsteht, außer ihnen Quarz, Orthoklas, Oligoklas, Muskovit, Epidot, Chlorit, Titanit, Zoisit.
- Côte 475 S von Bradkovice*: aus etwas höherem geologischen Niveau stammendes Gestein, in dessen klastischen Materiale dementsprechend der Quarz stark überwiegt; außer ihm vorhanden: Chlorit, Turmalin, Ilmenit, Leukoxen, Orthoklas, Oligoklas, Muskovit, sehr wenig Epidot. Bindemittel spärlich, aus Feldspatverwitterungsprodukten und sehr feinkörnigem Quarz bestehend.
- Rechtes Ufer der Litavka bei Dominikální Paseky*: sandsteinartige, ziemlich deutlich geschichtete Gesteine von graulicher oder bräunlicher Farbe, im ganzen den Sádcker Grauwacken entsprechend.
- Rechtes Ufer der Litavka am Südende von Čenkov*: sandsteinartiges, grünlich- oder gelblichgraues, ziemlich feinkörniges Gestein. Von allen hier beschriebenen durch die Gegenwart von vielen Geröllchen verschieden, die aus einem Quarzaggregate und aus trüben, wahrscheinlich den Feldspaten entstammenden Verwitterungsprodukten bestehen; auch ziemlich viele Kieselschiefergeröllchen. Außerdem sind im klastischen Materiale auch Epidot, dichte Chloritpseudomorphosen, größtenteils verwitterte Feldspate (Orthoklas und Oligoklas)



und spärliche Erze vorhanden. Das Bindemittel ist ein feinkörniges Gemenge von Quarz und dichtem hellen Glimmer ohne Kalkspat.

\* \* \*

*Im ganzen kann man die Grauwackengesteine der Bohutíner und der mit denselben identischen Sádcker Schichten lithogenetisch durch das häufige Vorhandensein von granitischem resp. granodioritischem klastischen Materiale charakterisieren; die Übergänge ins Hangende zu, in die Sedimente der Trčmošná-Stufe, äußern sich in der Zunahme des Quarzes und Abnahme übriger klastischen Bestandteile sowie in der Abnahme von Chlorit im Bindemittel.*

Prag, Anfang Mai 1916.

*Mineralogisches Institut der böhmischen Universität.*

# Sur les relations parmi les périodes des intégrales abéliennes dégénérées de genre 3.

Par Dr. Václav Hruška, assistant pour les mathématiques  
à l'École polytechnique tchèque à Prague.

1 Soient  $u_1, u_2, u_3$  les intégrales abéliennes de première espèce normales attachées à une courbe algébrique  $f(x, y) = \theta$  de genre 3. Pour que  $f = \theta$  se réduise par une substitution

$$(1) \quad \xi = \Phi(x, y) \quad \eta = \Psi(x, y)$$

à une courbe de genre 1, il faut et il suffit qu'il existe parmi les intégrales de 1<sup>ère</sup> espèce attachées à  $f = \theta$  une, disons  $u^{(1)} = a_1^{(1)} u_1 + a_2^{(1)} u_2 + a_3^{(1)} u_3$ , dont le nombre des périodes se réduise à 2. Or, si l'on désigne par

$$(2) \quad \begin{array}{c|ccc} u_1 & 1 & \emptyset & \emptyset & \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ u_2 & \emptyset & 1 & \emptyset & \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ u_3 & \emptyset & \emptyset & 1 & \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{array}$$

les 6 systèmes de périodes normales des intégrales  $u_1, u_2, u_3$ , les équations linéaires aux inconnues  $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \omega_1, \omega_4$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i^{(1)} = a_{i1} \omega_1 + a_{i4} \omega_4 \\ a_1^{(1)} \tau_{i1} + a_2^{(1)} \tau_{i2} + a_3^{(1)} \tau_{i3} = a_{i+3,1} \omega_1 + a_{i+3,4} \omega_4 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3,$$

où les  $a_{\mu 1} \overline{a_{\mu 4}}$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) sont des nombres entiers, doivent être résolubles,<sup>1)</sup> c'est-à-dire le rang du tableau formé par leurs coefficients ne doit pas dépasser 4. On vérifie, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est, que les  $\tau_{ik}$  satisfassent au système de relations singulières

<sup>1)</sup> Krazer, Lehrb. d. Thetafunktionen, p. 471, théorème I.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = A_{56}(\tau_{11}) + A_{61}(\tau_{12}) + A_{15}(\tau_{13}) + \sum_{i=1}^3 A_{2,i+3} \tau_{3,i} - \\ \quad - \sum_{i=1}^3 A_{3,i+3} \tau_{2,i} + A_{23} = \theta \\ E_2 = A_{56}(\tau_{21}) + A_{61}(\tau_{22}) + A_{45}(\tau_{23}) + \sum_{i=1}^3 A_{3,i+3} \tau_{1,i} - \\ \quad - \sum_{i=1}^3 A_{1,i+3} \tau_{3,i} + A_{31} = \theta \\ E_3 = A_{56}(\tau_{31}) + A_{61}(\tau_{32}) + A_{45}(\tau_{33}) + \sum_{i=1}^3 A_{1,i+3} \tau_{2,i} - \\ \quad - \sum_{i=1}^3 A_{2,i+3} \tau_{1,i} + A_{12} = \theta \end{array} \right.$$

où

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{ik} = (a_{i+3,1} a_{k+3,4}), \quad A_{i+3,} = - (a_{4,1} a_{k+3,4}) = - A_{k,i+3} \\ A_{i+3,k+3} = (a_{41} a_{k4}), \quad (i, k = 1, 2, 3) \end{array} \right.$$

et  $(\tau_{ik})$  désigne le mineur adjoint à  $\tau_{ik}$  dans le déterminant  $|\tau_{ik}|$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ).

Les équations (5) définissent les 36 nombres entiers  $A_{\mu,\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) qui, à cause de  $A_{\mu,\nu} = -A_{\nu,\mu}$ ,  $A_{\mu,\mu} = \theta$ , forment un tableau pseudosymétrique de rang 2.

Alors le système adjoint de relations singulières est identiquement nul, c'est-à-dire, le système (4) est exceptionnel.<sup>2)</sup> Inversement, étant donné un système exceptionnel de relations singulières, on peut parvenir à ce que le système adjoint soit identiquement nul.<sup>3)</sup> Or, le rang du tableau  $\|A_{\mu,\nu}\|$ , ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) étant 2, on peut déterminer 12 nombres entiers  $a_{\mu 1}, a_{\mu 4}$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) de sorte que les équations (5) soient satisfaites.<sup>4)</sup> En substituant ces nombres dans les équations (3) on trouvera que le rang du tableau de ces équations soit égale exactement à 4. Donc les équations (3) n'ont qu'une solution indépendante  $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, 1, T_{11}$ . Il en suit le

**Théorème:** *Pour que  $f = 0$  se réduise par une substitution (I) à une courbe de genre 1, il faut et il suffit que les périodes  $\tau_{ik}$  satisfassent à un système exceptionnel de relations singulières.*

Pour le calcul des  $a_{\mu 1}, a_{\mu 4}$ , on peut trouver 20 équations linéaires à 6 inconnues, dont il n'y a que 4 linéairement distinctes. On aura alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{\mu 1} = u_{11} \alpha_{1\mu} + u_{14} \alpha_{4\mu} \\ a_{\mu 4} = u_{41} \alpha_{1\mu} + u_{44} \alpha_{4\mu} \end{array} \right\} \mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

<sup>2)</sup> Humbert-Lévy, *Sur les fonctions abéliennes singulières de trois variables*, Comptes rendus, t. 153, p. 1609—1616. J'appelle le système adjoint celui désigné par Humbert-Lévy  $E_1 = \theta$ ,  $E_1' = \theta$ ,  $E_1'' = \theta$ . Ses coefficients sont les coefficients de  $A_{\mu,\nu}$  dans le développement du pfaffian (1 2 3 4 5 6) suivant les éléments d'une ligne du tableau pseudosymétrique  $\|A_{\mu,\nu}\|$ , ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

<sup>3)</sup> Humbert-Lévy, cit., art. 4. Nous le supposons toujours dans ce que va suivre.

<sup>4)</sup> Frobenius, *Journal für Mathematik (Crelle)*, t. 86, p. 154—155.



en désignant par  $\|a_{h\mu}\|$  ( $h = 1, 4$ ) le tableau des solutions fondamentales de ces équations.<sup>5)</sup> Les nombres entiers  $u_{h,l}$  ( $h, l = 1, 4$ ) ne sont liés que par la relation  $u_{11}u_{44} - u_{14}u_{41} = \pm d$ ;  $d$  est le p. g. c. d. de tous les nombres  $A_{\mu\nu}$ .

Le nombre entier

$$(a_{11} a_{44}) + (a_{21} a_{51}) + (a_{31} a_{61}) = A_{11} + A_{25} + A_{36} = M$$

est différent de zéro.<sup>6)</sup> On en déduit, qu'il est impossible, que les périodes des intégrales abéliennes de genre 3 satisfassent à un système exceptionnel de relations singulières, dont le système adjoint soit identiquement nul et  $M = 0$ . Si nous avons de telles intégrales abéliennes, tous les coefficients des relations singulières correspondantes devraient s'annuler.

On en conclut, en désignant par  $(i_1 i_2 \dots i_{2\nu})$  un pfaffian d'ordre  $\nu$  formé des éléments du tableau  $\|A_{\mu,\nu}\|$ , ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) et  $K = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ ,  $L = (1\ 2\ 4\ 5) + (2\ 3\ 5\ 6) + (3\ 1\ 6\ 4)$ , que dans le cas du système exceptionnel de relations singulières le polynôme  $K + Lx - Mx^2 - x^3$  a une racine double et vice versa.

2. Remarquons, que dans ce qui va suivre doit  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $r, s = 2, 3, 5, 6$ ;  $i, k = 1, 2, 3$ .

On peut trouver un tableau  $(\mathfrak{H}) \|a_{\mu s}\|$  de  $6 \times 4$  nombres entiers satisfaisant aux équations

$$(7) \quad (a_{1\mu} a_{4r}) + (a_{2\mu} a_{5r}) + (a_{3\mu} a_{6r}) = M \cdot \varepsilon_{\mu r}$$

où  $\varepsilon_{\mu r}$  désigne  $+1, -1$ , ou  $0$ , suivant que  $\nu - \mu$  est égal à  $+3, -3$  ou n'est pas divisible par 3.

Considérons la transformation des intégrales abéliennes

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^{(i)} = b_1^{(i)} u_1 + b_2^{(i)} u_2 + b_3^{(i)} u_3 \\ b_k^{(i)} = a_{ki} + a_{k4} B_{i1} + a_{k5} B_{i2} + a_{k6} B_{i3} \\ b_1^{(i)} \tau_{k1} + b_2^{(i)} \tau_{k2} + b_3^{(i)} \tau_{k3} = a_{k+3,i} + a_{k+3,4} B_{i1} + a_{k+3,5} B_{i2} + a_{k+3,6} B_{i3} \\ B_{ik} = B_{ki} \end{array} \right.$$

Les équations (8) n'ont qu'une solution indépendante. Après les avoir comparés aux équations (3), on trouve que cette solution est

$$\begin{aligned} b_k^{(1)} &= a_k^{(1)}, & B_{11} &= T_{11}, & B_{12} &= B_{13} = 0, \\ b_k^{(2)} &= a_k^{(2)}, & b_k^{(3)} &= a_k^{(3)}, & B_{22} &= T_{22}, & B_{23} &= T_{23}, & B_{33} &= T_{33}, \end{aligned}$$

où  $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, 1, T_{11}$  est la solution des équations (3). C'est-à-dire, chacune des intégrales

<sup>5)</sup> Le terme „solutions fondamentales“ est usé ici dans le sens défini par J. St. Smith, Coll. Math. Papers, vol. 1, p. 372.

<sup>6)</sup> Krazer, Lehrb. d. Thetafunktionen p. 470, (10). On peut même supposer  $M > 0$ . Dans le cas contraire on peut revenir sur ce cas, en multipliant les équations (4) par  $-1$ .

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= a_1^{(2)} u_1 + a_2^{(2)} u_2 + a_3^{(2)} u_3 \\ u^{(3)} &= a_1^{(3)} u_1 + a_2^{(3)} u_2 + a_3^{(3)} u_3 \end{aligned}$$

n'a que 4 périodes. D'où le théorème bien connu.<sup>6)</sup>

On vérifierait aisément, que les  $\binom{6}{4} = 15$  déterminants du tableau (9) sont égaux aux 15 nombres  $A_{\mu\nu}$  distincts. Donc, à cause de (4), le rang du tableau du système d'équations

$$(9) \quad \begin{cases} b_i = a_{i2} \omega_2 + a_{i3} \omega_3 + a_{i5} \omega_5 + a_{i6} \omega_6 \\ b_1 \tau_{i1} + b_2 \tau_{i2} + b_3 \tau_{i3} = a_{i+3,2} \omega_2 + a_{i+3,3} \omega_3 + a_{i+3,5} \omega_5 + a_{i+3,6} \omega_6 \end{cases}$$

est exactement 5. Ces équations n'ont que 2 solutions distinctes et l'on trouvera, en les comparant à (8), qu'elles sont égales à  $ak^{(2)} 1, 0, T_{22}, T_{32}$  et  $ak^{(3)}, 0, 1, T_{23}, T_{33}$ .

3. Les  $4 \times 6$  nombres entiers  $a_{\mu s}$  forment un système complet de solutions du système de 6 équations

$$(10) \quad A_{\mu 1} a_{1s} + A_{\mu 2} a_{2s} + A_{\mu 3} a_{3s} + A_{\mu 4} a_{4s} + A_{\mu 5} a_{5s} + A_{\mu 6} a_{6s} = 0$$

dont elles ne sont que deux indépendantes. En désignant par  $\| \alpha_{rs} \|$  le tableau des solutions fondamentales du système (10) on a

$$a_{\mu s} = u_{s2} \alpha_{2\mu} + u_{s3} \alpha_{3\mu} + u_{s5} \alpha_{5\mu} + u_{s6} \alpha_{6\mu}$$

où le déterminant  $(u_{22} u_{33} u_{55} u_{66}) = \pm M \cdot d$ . Outre cette relation, les 16 nombres entiers  $u_{rs}$  sont liés par les 6 équations

$$(11) \quad \sum_{\varrho, \sigma} Q_{\varrho, \sigma} u_{r\varrho} u_{\sigma s} = M \cdot \varepsilon_{rs}, \quad (\varrho, \sigma = 2, 3, 5, 6),$$

où

$$Q_{\varrho\sigma} = (\alpha_{\varrho 1} \alpha_{\sigma 4}) + (\alpha_{\varrho 2} \alpha_{\sigma 5}) + (\alpha_{\varrho 3} \alpha_{\sigma 6}).$$

On trouve, que les équations (11) sont toujours résolubles en nombres entiers et que le tableau  $\| u_{rs} \|$  peut être obtenu par la composition de certains trois tableaux.

<sup>6)</sup> Krazer, Lehrb. d. Thetafunktionen, p. 499, théorème XII.

# Über eine Gruppe von 8 Flächen 2. Grades und über die damit zusammenhängende Transformationsgruppe.

Von

Dr. VÁCLAV SIMANDL,

Privatdozenten an der böhmischen Technik in Brünn.

(Vorgelegt am 27. Juni 1916.)

Jede Fläche 2. Grades definiert uns in Bezug auf jedes von ihren Polartetraedern eine gewisse Gruppe von 8 Flächen 2. Grades. Wenn wir dieses Polartetraeder als das Fundamentaltetraeder eines homogenen Koordinatensystemes betrachten, so hat die Fläche 2. Grades die Gleichung:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

und die 8 Flächen 2. Grades der Flächengruppe, mit welcher wir uns beschäftigen wollen, werden die folgenden 8 Gleichungen haben:

$$\pm a_1 x_1^2 \pm a_2 x_2^2 \pm a_3 x_3^2 \pm a_4 x_4^2 = 0.$$

Diese Flächengruppe, welche wir als die Gruppe von 8 in Bezug auf ein Tetraeder assoziierten Flächen bezeichnen werden, können wir in zwei vierflächige Flächengruppen teilen, und zwar in die Flächengruppen, deren Gleichungen eine gerade oder ungerade Anzahl von positiven resp. negativen Gliedern haben. Diese Gruppen werden wir dann als die Gruppen von 4 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder harmonischen Flächen 2. Grades bezeichnen. Insbesondere werden wir auch auf den Zusammenhang dieser Flächengruppen mit den linearen Komplexen zeigen.

Wir werden auch die Gruppen von Transformationen studieren, in Bezug auf welche die Gruppe von 8 assoziierten und die Gruppe von 4 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder harmonischen Flächen invariant sind. Es werden das eine gewisse Gruppe  $G_8$  und ihre Subgruppe  $G_4$  sein. Diese Transformationsgruppen werden sich immer auf achtpunktige Gruppen beziehen, nämlich auf die Gruppen von acht assoziierten Punkten, die immer drei Flächen 2. Grades angehören, die das gegebene Polar-



tetraeder gemeinsam haben. Derartige Punktgruppen werden wir als die Gruppen von 8 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder assoziierten Gruppen bezeichnen.

### 1. Über die Gruppe von 8 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder assoziierten Punkten und über die damit zusammenhängende Transformationsgruppe.

Betrachten wir ein beliebiges Tetraeder  $\Delta$  und einen beliebigen Punkt  $P_1$ . Führen wir durch diesen Punkt drei Transversalen zu den drei Gegenkantenpaaren des Tetraeders und konstruieren wir auf diesen Transversalen die Punkte  $P_2, P_3, P_4$ , welche die Eigenschaft haben, daß sie vom Punkte  $P_1$  immer durch die zwei Schnittpunkte auf den Kanten des Tetraeders harmonisch geteilt sind. Wenn die homogenen Koordinaten des Punktes  $P_1$ :

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4$$

sind, und wenn das Tetraeder  $\Delta$  das Fundamentaltetraeder des Koordinatensystemes ist, so sind:

$$x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4$$

$$x_1 : -x_2 : x_3 : -x_4$$

$$x_1 : -x_2 : -x_3 : x_4$$

die Koordinaten der Punkte  $P_2, P_3$  und  $P_4$ .

Weiter konstruieren wir die Punkte  $P_5, P_6, P_7, P_8$  auf die Weise, daß wir den Punkt  $P_1$  immer mit einem Scheitel des Tetraeders  $\Delta$  verbinden und auf der so gewonnenen Verbindungsgeraden immer den Punkt konstruieren, der von dem Punkte  $P_1$  durch den Scheitel des Tetraeders und den Schnittpunkt der gegenüberliegenden Tetraederebene harmonisch geteilt ist. Es werden dann die Punkte  $P_5, P_6, P_7, P_8$  die folgenden Koordinaten haben:

$$x_1 : x_2 : x_3 : -x_4$$

$$x_1 : x_2 : -x_3 : x_4$$

$$x_1 : -x_2 : x_3 : x_4$$

$$-x_1 : x_2 : x_3 : x_4$$

Wir sehen also, daß wir auf dieselbe Weise, auf welche wir von dem Punkte  $P_1$  zu den übrigen sieben Punkten gekommen sind, auch von jedem beliebigen Punkte von diesen zu den übrigen gelangen können. Wir wollen dann die Gruppe von derartigen 8 Punkten als Gruppe von 8 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder assoziierten Punkten bezeichnen. Transformationen, welche von einem gegebenen Punkte zu der Gruppe von 8 assoziierten Punkten führen, sind dreigeschaltete Involutionen, deren Achsen immer zwei Gegenkanten des Tetraeders  $\Delta$  sind, und vier per-

spektivische Involutionen, deren Involutionen zentren und die zugehörigen Involutionsebenen immer eine Ecke und die gegenüberliegende Ebene des Tetraeders  $\mathcal{A}$  sind. Diese 7 Transformationen bilden dann mit der identischen Transformation eine Gruppe von 8 Transformationen, welche wir als Gruppe  $g_8$  bezeichnen werden.

*Es ist also die Gruppe von 8 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder assoziierten Punkten invariant gegen die Transformationen der Gruppe  $g_8$ .*

Die achtgliedrige Gruppe  $G_8$  besitzt eine viergliedrige Untergruppe  $G_4$ , welche die drei gescharten Involutionen und die identische Transformation bilden. In Bezug auf diese Untergruppe sind dann invariant die Punktquadrupeln:  $P_1, P_2, P_3, P_4$  und  $P_5, P_6, P_7, P_8$ . Es seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zwei Tetraeder, deren Scheitel die zwei letztgenannten Punktgruppen sind. Die vier perspektivischen Involutionen, die in der Transformationsgruppe  $g_8$  enthalten sind, zeigen uns, daß die zwei Tetraeder  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}_1$  ebenso wie die Tetraeder  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}_2$  auf vierfache Weise in perspektivischer Lage sich befinden, und daß die vier perspektivischen Zentren die Ecken der Tetraeder  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{A}_1$  sind. Es bilden also die drei Tetraeder  $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  das sogenannte desmische System, und wir können dann folgenden Satz aussprechen:

*Die Gruppe von 8 assoziierten Punkten in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder ist zusammengesetzt aus zwei vierpunktigen Gruppen, von denen jede gegen die Transformationen der Untergruppe  $g_4$  invariant ist. Die beiden vierpunktigen Gruppen bilden die Scheitel von zwei Tetraedern, welche mit dem gegebenen Tetraeder ein desmisches System bilden.*

Weil die Gleichungen von drei Flächen 2. Grades, deren gemeinsames Polartetraeder das Koordinatentetraeder  $\mathcal{A}$  ist, folgende Form haben:

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 &= 0 \\ b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 &= 0 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + c_4 x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

so ist ersichtlich, wenn diesen drei Flächen ein gewisser Punkt

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4$$

gemeinsam ist, daß ihnen auch die übrigen 7 Punkte der achtgliedrigen Punktgruppe:

$$\pm \xi_1 : \pm \xi_2 : \pm \xi_3 : \pm \xi_4$$

angehören. Das ist aber die Gruppe von 8 in Bezug auf unser Tetraeder  $\mathcal{A}$  assoziierten Punkten. Es gilt also der folgende Satz:

*Die Gruppe von 8 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder assoziierten Punkten ist gleichzeitig eine Gruppe von 8 assoziierten Punkten, die gemeinsame Punkt: von drei Flächen 2. Grades, deren gemeinsames Polartetraeder dieses Tetraeder ist, sind:*

## 2. Über die achtgliedrige Transformationsgruppe der 8 assoziierten Gruppen von assoziierten Punkten in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder.

Betrachten wir folgende acht eineindeutige Transformationen der Gruppe von acht in Bezug auf das Koordinatentetraeder assoziierten Punkten:

$$\pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : \pm x_4.$$

$$\pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_2 : \pm x_3 = \pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : \pm x_4 \quad (T_1)$$

$$= \pm x_1 : \pm x_2 : \pm ix_3 : \pm ix_4 \quad (T_2)$$

$$= \pm x_1 : \pm ix_2 : \pm x_3 : \pm ix_4 \quad (T_3)$$

$$= \pm x_1 : \pm ix_2 : \pm ix_3 : \pm x_4 \quad (T_4)$$

$$= \pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : \pm ix_4 \quad (T_5)$$

$$= \pm x_1 : \pm x_2 : \pm ix_3 : \pm x_4 \quad (T_6)$$

$$= \pm x_1 : \pm ix_2 : \pm x_3 : \pm x_4 \quad (T_7)$$

$$= \pm ix_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : \pm x_4 \quad (T_8)$$

Es ist klar, daß unsere 8 Transformationen  $T_1, T_2, \dots, T_8$  eine Transformationsgruppe bilden. Einheitselement dieser Gruppe ist die identische Transformation  $T_1$ . Bezeichnen wir uns diese Gruppe  $G_8$ . Wir sehen, daß die vier Transformationen  $T_1, T_2, T_3, T_4$  wieder eine Gruppe bilden, es sei das die Gruppe  $G_4$ . Es ist also die Gruppe  $G_4$  Untergruppe von der Gruppe  $G_8$ . Weiter sehen wir, daß die Gruppe  $G_8$  und die Gruppe  $g_8$  holoeidrisch isomorph sind.

Studieren wir jetzt die geometrische Bedeutung der Transformationsgruppen  $G_8$  und  $G_4$ .

Es sei  $S_1$  die Gruppe der acht in Bezug auf  $\Delta$  assoziierten Punkten:  $\pm x_1 : \pm x_2 : \pm x_3 : \pm x_4$  und es seien  $S_1, S_2, \dots, S_8$  die Punktgruppen, in welche die Gruppe  $S_1$  durch die Transformationen  $T_1, T_2, \dots, T_8$  übergeht. Die Transformationen  $T_2, T_3, T_4$  führen die Punktgruppe  $S_1$  in die Punktgruppen  $S_2, S_3, S_4$  auf folgende Weise über: Führen wir durch die Punkte der Punktgruppe  $S_1$  Transversalen zu einem Gegenkantenpaare des Tetraeders  $\Delta$ . Weil auf jeder derartigen Transversale immer zwei Punkte der Punktgruppe  $S_1$  liegen, so existieren insgesamt vier solche Transversalen. Wenn wir jetzt auf jeder von unseren vier Transversalen zwei Punkte konstruieren, welche gleichzeitig zwei Punkte der Gruppe  $S_1$  und zwei Punkte auf dem Gegenkantenpaare harmonisch teilen, so bekommen wir schon acht Punkte der Gruppe  $S_2, S_3$  oder  $S_4$ , je nach dem, zu welchem Gegenkantenpaare des Tetraeders  $\Delta$  wir die Transversalen geführt haben. Das ist die geometrische Bedeutung der Transformationen  $T_2, T_3, T_4$ .

Studieren wir jetzt die geometrische Bedeutung der Transformationen  $T_5, T_6, T_7, T_8$ . Verbinden wir eine Ecke des Tetraeders  $\Delta$  mit den Punkten der Punktgruppe  $S_1$ . Es existieren vier derartige Verbindungs-



geraden und es liegen auf jeder zwei Punkte der Gruppe. Wenn wir jetzt auf diesen vier geraden zwei Punkte, welche gleichzeitig die zwei Punkte der Gruppe  $S_1$  und die Ecke und den Punkt, welchen auf unserer Verbindungsgeraden die, der erwähnten Ecke gegenüberliegende Ebene ausschneidet, harmonisch teilen, konstruieren, so bekommen wir acht Punkte der Gruppe  $S_5, S_6, S_7, S_8$  je nach dem, welche Ecke des Tetraeders  $\Delta$  wir erwähnt haben.

Die Gruppe von den acht Punktgruppen  $S_1, S_2, \dots, S_8$  werden wir als „die Gruppe von acht in Bezug auf das Tetraeder  $\Delta$  assoziierten Punktgruppen  $S$ “ bezeichnen. Wir sehen also, daß diese Gruppe von acht assoziierten Punktgruppen invariant in Bezug auf die Transformationsgruppe  $G_8$  ist.

Wenn wir die beiden viergliedrigen Gruppen der Punktgruppen  $S_1, S_2, S_3, S_4$  und  $S_5, S_6, S_7, S_8$  näher betrachten, so sehen wir, daß die Gruppe von 8 assoziierten Punktgruppen aus zwei viergliedrigen Punktgruppen zusammengesetzt ist, und daß jede von diesen Punktgruppen gegen die Transformationen der Untergruppe  $G_4$  invariant ist.

### 3. Über die Gruppe von acht assoziierten und über die Konfiguration von vier in Bezug auf das gegebene Tetraeder harmonischen Flächen 2. Grades.

Betrachten wir eine beliebige Fläche 2. Ordnung, deren Polartetraeder das Koordinatentetraeder  $\Delta$  ist. Die Gleichung der derartigen Fläche ist:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0.$$

Diese Fläche definiert uns gleichzeitig folgende Gruppe von acht Flächen 2. Grades:

$$\pm a_1x_1^2 \pm a_2x_2^2 \pm a_3x_3^2 \pm a_4x_4^2 = 0.$$

Diese Flächengruppe werden wir als „die Gruppe von 8 in Bezug auf das Tetraeder  $\Delta$  assoziierten Flächen 2. Grades“ bezeichnen, und wir sehen gleich: daß die Gruppe von 8 in Bezug auf das gegebene Tetraeder assoziierten Flächen 2. Grades gegen die Transformationen der Gruppe  $G_8$  invariant ist.

Die Gruppe von unseren acht Flächen können wir in folgende zwei viergliedrige Flächengruppen teilen. Es sind das die Flächengruppe:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 - a_4x_4^2 = 0$$

$$a_1x_1^2 - a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - a_4x_4^2 = 0$$

$$a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$

und die Flächengruppe:

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - a_4x_4^2 &= 0 \\ a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 + a_4x_4^2 &= 0 \\ a_1x_1^2 - a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 &= 0 \\ -a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

Es ist sehr leicht einzusehen, daß jede von diesen beiden Flächengruppen gegen die Transformationen der Untergruppe  $G_4$  invariant ist. Zu derartiger viergliedriger Flächengruppe werden wir geometrisch auf folgende Weise gelangen. Betrachten wir eine beliebige Fläche 2. Grades  $A^2$  und ein von ihren Polartetraedern  $\mathcal{A}$ . Konstruieren wir jetzt auf allen  $\infty^2$  Transversalen eines Gegenkantenpaares des Tetraeders  $\mathcal{A}$  die Punktepaare, welche gleichzeitig die zwei Punkte auf der Fläche  $A^2$  und die beiden Punkte auf den Gegenkanten harmonisch teilen. Die so gewonnenen Punktepaare liegen dann auf einer Fläche 2. Grades  $B^2$ . Auf ganz dieselbe Weise führen die beiden anderen Gegenkantenpaare des Tetraeders  $\mathcal{A}$  zu den Flächen  $C^2$  und  $D^2$ . Die vier Flächen  $A^2, B^2, C^2, D^2$  bilden dann eine invariante Flächengruppe in Bezug auf die Transformationsgruppe  $G_4$ .

Wir wollen jetzt derartige Konfiguration von 4 Flächen 2. Grades als *die Konfiguration von 4 in Bezug auf das gegebene Tetraeder harmonischen Flächen 2. Grades* bezeichnen.

Es ist sehr leicht zu zeigen, daß je zwei Flächen von derartiger viergliedriger Flächengruppe sich bloß in den Geraden schneiden. Es seien:

$$\begin{aligned} m_\alpha x_\alpha^2 + m_\beta x_\beta^2 + m_\gamma x_\gamma^2 + m_\delta x_\delta^2 &= 0 \\ m_\alpha x_\alpha^2 + m_\beta x_\beta^2 - m_\gamma x_\gamma^2 - m_\delta x_\delta^2 &= 0 \end{aligned}$$

zwei Flächen von unserer Flächengruppe. Der Büschel  $\Sigma$  von Flächen 2. Grades, den diese zwei Flächen bestimmen, hat die Gleichung:

$$m_\alpha x_\alpha^2 + m_\beta x_\beta^2 + m_\gamma x_\gamma^2 + m_\delta x_\delta^2 + \lambda (m_\alpha x_\alpha^2 + m_\beta x_\beta^2 - m_\gamma x_\gamma^2 - m_\delta x_\delta^2) = 0.$$

Für die Werte:

$$\lambda = 1 \text{ und } \lambda = -1$$

bekommen wir zwei spezielle Flächen des Büschels:

$$\begin{aligned} m_\alpha x_\alpha^2 + m_\beta x_\beta^2 &= 0 \\ m_\gamma x_\gamma^2 + m_\delta x_\delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Das sind aber zwei Ebenenpaare, welche ihre Achsen in den Kanten eines Gegenkantenpaares des Tetraeders  $\mathcal{A}$  haben. Es ist damit also der folgende Satz bewiesen worden:

*Zwei beliebige Flächen der Konfiguration von 4 harmonischen Flächen 2. Grades schneiden sich bloß in den Geraden.*

Wenn wir in die Gleichung des Büschels  $\Sigma$  für  $\lambda$  die Werte 0 und  $\infty$  einsetzen, bekommen wir die beiden betrachteten Flächen unserer Konfiguration. Weil dann den vier Werten  $\lambda$ :

$$0, \infty, 1, -1$$

in dem Flächenbüschel zwei harmonisch sich teilende Flächenpaare entsprechen, so sehen wir, daß beliebige zwei Flächen der Konfiguration von 4 harmonischen Flächen 2. Grades in dem Büschel, den sie bestimmen, von zwei Ebenenpaaren des Büschels harmonisch geteilt sind.

Weil die Konfiguration von vier harmonischen Flächen 2. Grades invariant gegen die Transformationen der Gruppe  $G_4$  ist, und weil bei diesen Transformationen in der Gleichung:

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + c_4 x_4^2 = 0$$

immer zwei Koeffizienten  $c_x$  gleichzeitig ihr Zeichen ändern, so sehen wir, daß wir den folgenden Satz aussprechen können:

*Wir unterscheiden zwei Arten von Konfigurationen der vier in Bezug auf ein Tetraeder harmonischen Flächen 2. Grades. Zur Konfiguration der ersten Art gehören immer drei reelle Flächen 2. Grades mit reellen Geraden und eine imaginäre Fläche 2. Grades an. Die Konfiguration der anderen Art ist aus 4 reellen Flächen 2. Grades mit imaginären Geraden zusammengesetzt.*

#### 4. Über den Zusammenhang unserer Flächen 2. Grades mit der Liniengeometrie.

Mit der Konfiguration von 4 in Bezug auf ein Tetraeder harmonischen Flächen 2. Grades ist eng ein System von 6 in gegenseitiger Involution sich befindlichen linearen Komplexen verbunden. Teilen wir uns ein derartiges System von 6 lin. Komplexen in drei Paare von lin. Komplexen:

$$\Gamma_1 \Gamma_1', \Gamma_2 \Gamma_2', \Gamma_3 \Gamma_3'.$$

Es seien nun die Paare von gemeinsamen Polaren dieser drei Komplexpaare die Gegenkantenpaare des Koordinatentetraeders  $\mathcal{A}$ . Dann werden unsere lin. Komplexe in den Linienkoordinaten  $p_{ik}$  folgende Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_{12} + \lambda_2 p_{34} &= 0, & \lambda_1 p_{12} - \lambda_2 p_{34} &= 0 \\ \mu_1 p_{12} + \mu_2 p_{34} &= 0, & \mu_1 p_{13} - \mu_2 p_{24} &= 0 \\ \nu_1 p_{14} + \nu_2 p_{23} &= 0, & \nu_1 p_{14} - \nu_2 p_{23} &= 0 \end{aligned}$$

wo  $\lambda, \mu, \nu$  gewisse Konstanten bedeuten.



Suchen wir jetzt die Gleichungen von 4 Flächen 2. Grades, deren Regelscharen immer in den folgenden 3 lin. Komplexen enthalten sind:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_1' \Gamma_2' \Gamma_3', \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3' & \Gamma_1' \Gamma_2' \Gamma_3, \\ \Gamma_1 \Gamma_2' \Gamma_3, & \Gamma_1' \Gamma_2 \Gamma_3', \\ \Gamma_1 \Gamma_2' \Gamma_3', & \Gamma_1' \Gamma_2 \Gamma_3. \end{array}$$

Es seien

$$P_1^2, P_2^2, P_3^2, P_4^2$$

diese 4 Flächen.

Betrachten wir zuerst die Fläche  $P_1^2$ , deren Geraden den drei lin. Komplexen:

$$\lambda_1 \rho_{12} + \lambda_2 \rho_{34} = 0, \quad \mu_1 \rho_{13} + \mu_2 \rho_{24} = 0, \quad \nu_1 \rho_{14} + \nu_2 \rho_{23} = 0. \quad (1)$$

angehören.

Die Gleichung dieser Fläche werden wir ganz auf dieselbe Weise bestimmen, wie es O. Staudé im allgemeineren Falle in seinem bekannten Buche: „Analytische Geometrie etc.“, tut.\*) Wir werden in den Punkte koordinaten den geometrischen Ort derjenigen Geraden suchen, welche unseren drei lin. Komplexen angehören. Wenn  $\rho$  eine derartige Gerade und  $x_k$  ein auf ihr liegender Punkt ist, so gelten die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \rho_{34} x_2 - \rho_{24} x_3 + \rho_{23} x_4 = 0 \\ \rho_{14} x_3 - \rho_{34} x_1 + \rho_{13} x_4 = 0 \\ \rho_{24} x_1 - \rho_{14} x_2 + \rho_{12} x_4 = 0 \\ \rho_{23} x_1 + \rho_{13} x_2 + \rho_{12} x_3 = 0. \end{array} \quad (2)$$

Diese Gleichungen sind nichts anderes als die Gleichungen des Punktes  $x_k$  in den Punktkoordinaten.\*\*)

Wenn wir aus den Gleichungen (1) und aus den beliebigen drei Gleichungen von den vier Gleichungen (2) die sechs Koordinaten  $\rho_{ik}$  eliminieren, so bekommen wir als Resultat der Elimination eine Gleichung, welche die Gleichung der Fläche  $P_1^2$  ist. Diese Gleichung ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ \nu_1 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

\*) O. Staudé: Analytische Geometrie des Punktpaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. II. pag. 829—830.

\*\*) O. Staudé: Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene; pag. 329, § 60. 1.

Nach der einfachen Ausrechnung bekommen wir die Gleichung der Fläche  $P_1^2$  in der Form:

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 + \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 = 0. \quad (3)$$

Es ist klar, daß wir zu dieser Gleichung auch dann gelangen, wenn wir anstatt der Werte  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$  die Werte  $-\lambda_2, -\mu_2, -\nu_2$  setzen. Das ist die Folge der Tatsache, daß die gemeinsame Regelschar der lin. Komplexe  $\Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3'$  die Leitschar der gemeinsamen Regelschar der Komplexe  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  ist. Die Gleichungen der Flächen  $P_2^2, P_3^2$  und  $P_4^2$  bekommen wir, wenn wir in die Gleichung (3) anstatt der Werte

$$\lambda_2, \mu_2, \nu_2$$

sukzessiv die Werte:

$$\lambda_2, \mu_2, -\nu_2; \lambda_2, -\mu_2, \nu_2; \lambda_2, -\mu_2, -\nu_2;$$

oder die Werte:

$$-\lambda_2, -\mu_2, \nu_2; -\lambda_2, \mu_2, -\nu_2; -\lambda_2, \mu_2, \nu_2$$

setzen.

Wir haben dann für die Flächen  $P_2^2, P_3^2, P_4^2$  folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 - \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 - \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 + \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0 \\ \lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 - \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 - \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0 \\ \lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 - \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 - \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Wir sehen also, daß die vier Flächen  $P_1^2, P_2^2, P_3^2, P_4^2$  eine Konfiguration von vier in Bezug auf das Koordinatentetraeder harmonischen Flächen bilden.

Es sei nun eine beliebige Fläche 2. Grades und ein von ihren Polartetraedern  $\Delta$  gegeben. Diese Fläche 2. Grades und das Tetraeder  $\Delta$  definiert uns ein System von 6 lin. Komplexen, die in gegenseitig involutorischer Lage sich befinden. Jeder von diesen Komplexen ist durch ein Paar von Gegenkanten des Tetraeders  $\Delta$  als ein Paar von seinen konj. Polaren und eine Regelschar der Fläche als seine Regelschar bestimmt. Wie wir aber eben gezeigt haben, bestimmen uns derartige 6 lin. Komplexe eine Konfiguration von 4 Flächen 2. Grades in harmonischer Lage. Wir können also folgende Sätze aussprechen:

*Die Regelscharen der 4 Flächen 2. Grades, welche eine Konfiguration von 4 in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder harmonischen Flächen bilden, haben die Eigenschaft, daß beliebige 2 Regelscharen auf zwei verschiedenen Flächen immer in einem linearen Komplexen enthalten sind. In jedem auf diese Weise definierten linearen Komplexen sind dann 4 Regelscharen enthalten, welche sukzessiv allen 4 Flächen der Konfiguration angehören. Die sechs durch die Konfiguration definierten linearen Komplexe befinden sich in gegenseitig involutorischer Lage.*

Betrachten wir von der Konfiguration unserer 4 Flächen eine Fläche, z. B. die Fläche  $P_1^2$  und auf dieser Fläche eine Regelschar, z. B. die Regelschar, die in den lin. Komplexen  $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$  enthalten ist. Mit dieser Regelschar haben die Regelscharen die immer in den drei linearen Komplexen:  $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3'$ ;  $\Gamma_1 \Gamma_2' \Gamma_3$ ;  $\Gamma_1' \Gamma_2 \Gamma_3$  enthalten sind, je zwei Geraden gemeinsam. Diese drei Geradenpaare sind Teile der Durchschnittskurve der Fläche  $P_1^2$  mit den Flächen  $P_2^2, P_3^2, P_4^2$ . Wir sehen dann, daß wir diese drei Geradenpaare als Durchschnitte der Regelschar, die in den linearen Komplexen  $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$  enthalten ist, mit den lin. Komplexen,  $\Gamma_3', \Gamma_2'$  und  $\Gamma_1'$  definieren können. Weil die drei Komplexe  $\Gamma_1', \Gamma_2'$  und  $\Gamma_3'$  in gegenseitig involutorischer Lage sind, und weil sie die Leitschar der Regelschar der Komplexe  $\Gamma_1 \Gamma_2$  und  $\Gamma_3$  enthalten, so sehen wir, daß sich unsere drei Geradenpaare gegenseitig harmonisch teilen müssen. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

*In der Konfiguration von vier in Bezug auf ein gegebenes Tetraeder harmonischen Flächen schneidet jede von diesen Flächen die drei übrigen Flächen in drei windschiefen Vierseiten, welche die Eigenschaft haben, daß ihre drei Gegenseitenpaare sich immer harmonisch teilen.*

Das Tetraeder  $\mathcal{A}$  und die drei Komplexpaare:

$$\Gamma_1 \Gamma_1', \Gamma_2 \Gamma_2', \Gamma_3 \Gamma_3'$$

definieren uns noch drei neue Paare von lin. Komplexen in involutorischer Lage:

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1', \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2', \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_3'$$

nämlich auf die Weise, daß immer zwei Komplexpaare:

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \Gamma_1', \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1'; \\ \Gamma_2 \Gamma_2', \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2'; \\ \Gamma_3 \Gamma_3', \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_3'; \end{array} .$$

demselben Büschel von lin. Komplexen angehören und sich in diesem Büschel immer gegenseitig harmonisch teilen. Wir sehen, daß wir auf ganz dieselbe Weise, auf welche wir von den Komplexen  $\Gamma$  zu den Komplexen  $\mathcal{A}$  gelangten, auch von den Komplexen  $\mathcal{A}$  zu den Komplexen  $\Gamma$  gelangen können. In Bezug auf die Gleichungen der Komplexe  $\Gamma$  werden die Komplexe  $\mathcal{A}$  folgende Gleichungen haben:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 \rho_{12} + i \lambda_2 \rho_{34} = 0, & \lambda_1 \rho_{12} - i \lambda_2 \rho_{34} = 0 \\ \mu_1 \rho_{13} + i \mu_2 \rho_{24} = 0, & \mu_1 \rho_{13} - i \mu_2 \rho_{24} = 0 \\ \nu_1 \rho_{14} + i \nu_2 \rho_{23} = 0, & \nu_1 \rho_{14} - i \nu_2 \rho_{23} = 0. \end{array}$$

Die Gleichungen der 4 Flächen 2. Grades der harmonischen Konfiguration, welche diese 6 Komplexe bestimmen, werden wir dann bekommen, wenn wir in die Gleichung (3) und in die Gleichungen (4) statt der Werte:

$$\lambda_2, \mu_2, \nu_2$$



die imaginären Werte:

$$i \lambda_2, i \mu_2, i \nu_2$$

setzen. Wir bekommen also folgende 4 Flächen 2. Grades:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 - \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0 \\ -\lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 - \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0 \\ \lambda_1 \mu_1 \nu_2 x_1^2 - \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 + \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0 \\ \lambda_1 \mu_1 \nu_1 x_1^2 + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 x_2^2 - \lambda_2 \mu_1 \nu_1 x_3^2 + \lambda_2 \mu_2 \nu_2 x_4^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir sehen dann, daß die letzten 4 Gleichungen die Gleichungen von der invarianten Konfiguration in Bezug auf die Gruppe  $G_4$  sind, und wir sehen weiter, daß 8 Flächen 2. Grades, welche die Gleichungen (3), (4) und (5) haben, eine Gruppe von 8 in Bezug auf das Koordinatentetraeder  $\mathcal{A}$  assoziierten Flächen bilden. Es ist also mit einer derartigen Gruppe von 8 Flächen 2. Grades immer eine Gruppe von 12 linearen Komplexen verbunden, von denen 6 reell und 6 imaginär sind, wo die reellen sowohl, als auch die imaginären in gegenseitig involutorischer Lage sind. In jeder von diesen Gruppen existieren dann drei Paare, von welchen jedes die Eigenschaft hat, daß ihm ein Paar der anderen Gruppe entspricht, von welchem es harmonisch geteilt wird.

---

# Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers. \*)

Par MILOŠ KÖSSLER.

La fonction  $\xi(s)$  est définie par la formule d'Euler

$$\xi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}},$$

où  $p_1, p_2, \dots$  sont les nombres premiers  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$  et ainsi de suite. Posons

$$\Phi(s) + 1 = \xi(s) \cdot (1 - p_1^{-s}) (1 - p_2^{-s}) \dots (1 - p_{k-1}^{-s}).$$

Nous en déduirons facilement

$$\Phi(s) + 1 = 1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_{k+1}^s} + \dots \dots \dots (1.)$$

où chaque terme de la série est plus petit que le précédent.

On obtient à l'aide de la formule (1)

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} = p_k^2 \frac{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \dots}{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+2} + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^{s+2} \dots} \dots \dots (2.)$$

En posant

$$\varphi(s) = \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \dots,$$

on a

$$\varphi(s) < p_k^s \left[ \frac{1}{p_{k+1}^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 1)^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 2)^s} + \dots \right],$$

---

\*) O rekurentním vzorci pro prvočísla. Rozpravy České Akademie XXVI. 1917.

mais

$$\frac{1}{p_{k+1}^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 1)^s} + \frac{1}{(p_{k+1} + 2)^s} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(s-1) p_{k+1}^{s-1}} + \frac{1}{2 p_{k+1}^s} + \frac{\Theta \cdot s}{12 \cdot p_{k+1}^{s+1}},$$

$$0 < \Theta < 1;$$

donc

$$\varphi(s) < \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s \cdot \left[ \frac{p_{k+1}}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s \cdot \Theta}{12 p_{k+1}} \right] \dots \dots \dots (3.)$$

Si nous prenons

$$s - 1 > 8 p_{k+1}, \dots \dots \dots (3a)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{s}{12 p_{k+1}} > \frac{1}{2} + \frac{p_{k+1}}{s-1};$$

donc

$$\varphi(s) < \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s \cdot \frac{s}{6 p_{k+1}} \dots \dots \dots (4.)$$

Alors on aura d'après (2)

$$p_k^2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} \dots \dots \dots (5.)$$

Cette formule donne une solution du problème proposé. Mais on peut déduire de l'équation (2) une autre solution d'une forme beaucoup plus simple.

Or on a d'après (2) et (4)

$$p_k^2 < \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} < p_k^2 + \frac{p_k^2 s}{6 p_{k+1}} \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s.$$

Si l'on peut trouver un nombre entier  $\sigma$  de sorte que

$$\frac{p_k \cdot \sigma}{6} \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{\sigma+1} < 1, \dots \dots \dots (6a)$$

on a aussi

$$\frac{p_k s}{6} \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+1} < 1, \dots \dots \dots (6.)$$

$$s \geq \sigma;$$

donc

$$p_k^2 = E \left[ \frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} \right]; \dots \dots \dots (6b.)$$

$F(x)$  désigne le plus grand entier contenu dans  $x$ .



Considerons l'inégalité évidente

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p_k + 2}{p_k}$$

et l'inégalité de Čebyšev

$$p_k < 2 p_{k-1};$$

nous voyons que au lieu de (6a), on peut écrire

$$\frac{2 p_{k-1} \cdot \sigma}{6} < \left( \frac{p_{k-1} + 1}{p_{k-1}} \right)^{\sigma+1}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (3a) admettent la solution

$$\sigma = 7 p_{k-1} \log p_{k-1},$$

$$p_{k-1} > 11$$

pour la quelle a *fortiori* a lieu l'inégalité (6a).

En substituant

$$s = 2 m, \quad (m \text{ entier})$$

$$\xi(2 m) = \frac{2^{2m-1} B_m \pi^{2m}}{(2 m)!},$$

on obtient enfin l'équation (6b) sous la forme

$$p_k^2 = E \left[ (2 m + 1) (2 m + 2) \frac{2^{2m-1} B_m \pi^{2m} (1 - p_1^{-2m}) (1 - p_2^{-2m}) \dots}{2^{2m+1} B_{m+1} \pi^{2m+2} (1 - p_1^{-2m-2}) (1 - p_2^{-2m-2}) \dots} \dots \frac{\dots (1 - p_{k-1}^{-2m}) - (2 m)!}{\dots (1 - p_{k-1}^{-2m-2}) - (2 m - 2)!} \right] \dots \dots \dots (7.)$$

$$p_{k-1} > 11, \quad m > 3.5 p_{k-1} \log p_{k-1},$$

où  $B_m, B_{m+1}$  sont les nombres bien connus de Bernoulli.

Étant donnés les nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$  d'indice plus petit que  $k$ , on peut, au moye de la formule (7), calculer le nombre premier  $p_k$ .

# Sur la variation de la réfraction des gaz avec la pression au-dessous d'une atmosphère. — I.

Par M. V. POSEJPAL.

Présenté le 10 novembre 1917.

§ 1. On trouve un assez grand nombre de travaux recherchant expérimentalement la variation de la réfraction  $n - 1$  d'un gaz avec sa pression. Ce sont des raisons purement pratiques autant que théoriques qui mènent à de telles recherches. L'épreuve des formules de réfraction spécifique de Newton-Gladstone ou de Lorenz-Lorentz y tient la première place. Pour faire une telle épreuve il faut connaître hors de la fonction en question encore la variation de la densité absolue  $\rho$  avec la pression. Cette variation, elle aussi, a été l'objet de nombreuses études. C'était tout d'abord la région de hautes pressions qui a permis d'atteindre une connaissance suffisante de toutes les deux fonctions. Quant aux pressions au-dessous d'une atmosphère ce n'est au contraire que depuis quelques années que l'on connaît suffisamment bien pour la plus part des gaz la variation de la densité avec la pression grâce aux travaux récents de M. M. D. Berthelot et Lord Rayleigh, tandis que quant à la variation de la réfraction celle-ci restait jusqu'à présent pour tous les gaz aussi bien que inconnue. On ne trouve sur ce champ, si je ne me trompe pas, que un seul travail, celui-ci de M. W. Kaiser<sup>1)</sup> à qui je renvoie le lecteur en fait d'une liste complète de la littérature ancienne de cet objet, mais qui n'apporte pas d'assez bons résultats.

En possédant une nouvelle méthode d'observation dans l'emploi du refractomètre interférentiel de Jamin j'ai repris cette étude en espérant d'arriver par là à des résultats plus précis que ceux-là de mon prédécesseur.

§ 2. Soit  $L$  la longueur du parcours de la lumière de longueur d'onde  $\lambda$  (vacuum) dans un tube vide de la machine de Jamin et soit  $s$  le nombre de franges déplacées par l'introduction dans ce même tube d'un gaz de la pression  $p$  et d'indice de réfraction  $n$ . Il existe entre ces grandeurs, comme on le sais, la relation

---

<sup>1)</sup> W. Kaiser, *Annalen der Phys.* 13, 210, 1904.

$$(1) \quad n - 1 = \frac{\lambda}{L} s,$$

qui permet de calculer la valeur exacte de  $n$  pour chaque pression donnée  $p$ . En variant  $p$  on trouverait la lois cherchée de la variation de  $n$  ou de  $n - 1$  avec  $p$ . Ce procédé n'est pas cependant pratique en nous obligeant à mesurer très précisément des valeurs de  $p$  et de  $s$  tantôt relativement très petites, tantôt très grandes. Nous évitons cette difficulté en différenciant l'équation (1) d'après  $p$ , ce qui donne

$$(2) \quad \frac{dn}{dp} = \frac{\lambda}{L} \frac{ds}{dp},$$

et en étudiant la variation de la fonction  $\frac{ds}{dp}$  avec la pression, ce qui mène enfin aussi à la solution du problème donné. Tandis que  $n - 1$  est en première approximation proportionnel à  $p$ , augmente  $\frac{ds}{dp}$  avec la pression très doucement restant en première approximation constante. Il suffit donc dans ce second cas là à mesurer la pression  $p$  avec une précision médiocre, une précision exacte n'étant à demander que pour la mesure de la variation  $dp$  de la pression. On choisira avec avantage pour cette variation une différence constante de la pression ce qui donnera pour  $ds$  une valeur de même sensiblement constante. J'ai pris  $dp = 100 \text{ mm}$ , le déplacement correspondant des franges  $ds$  fait à-peu-près 32. Une précision de 0.1% dans l'évaluation de  $\frac{ds}{dp}$  doit être regardée comme indispensable ce qui exige pour  $dp$  une précision de quelques centièmes de  $mm$ , pour  $ds$  celle de 0.03 d'une frange au moins. La méthode interférentielle mentionnée plus haut permet sans peine d'atteindre pour  $ds$  la précision demandée, il ne reste donc que à satisfaire à la précision de  $dp$ . J'y suis arrivé par construction d'un manomètre approprié.

§ 3. C'est un manomètre à mercure, comparable à un baromètre à deux branches de Gay-Lussac. (Voir la figure No. 1.) Les pressions  $p$  y sont mesurées de la manière usuelle au moyen d'un cathétomètre. Mais quant à la différence constante  $dp$  de la pression, c'est le microscope qui sert à son évaluation. On observe à ce propos les déplacements de les deux lignes très fines qui partagent le mercure de la paroi du verre. La ligne dans la branche  $A$  du manomètre reste comprise pendant toutes les pressions  $p$  entre les deux marques fixes  $a_0, a_5$ , la ligne dans la branche  $B$  entre les deux marques  $b_0, b_5$ . A ce propos la branche ouverte  $B$  est fixe, tandis que la branche  $A$  renfermant le vacuum de Toricelli au-dessus de la surface libre du mercure peut être librement déplacée sur le support solide en bois  $P$  y étant supportée par une glissière  $S$ . Cette glissière est soutenue dans sa position par la règle glissante  $M$  et la manivelle  $K$ . Chacune des



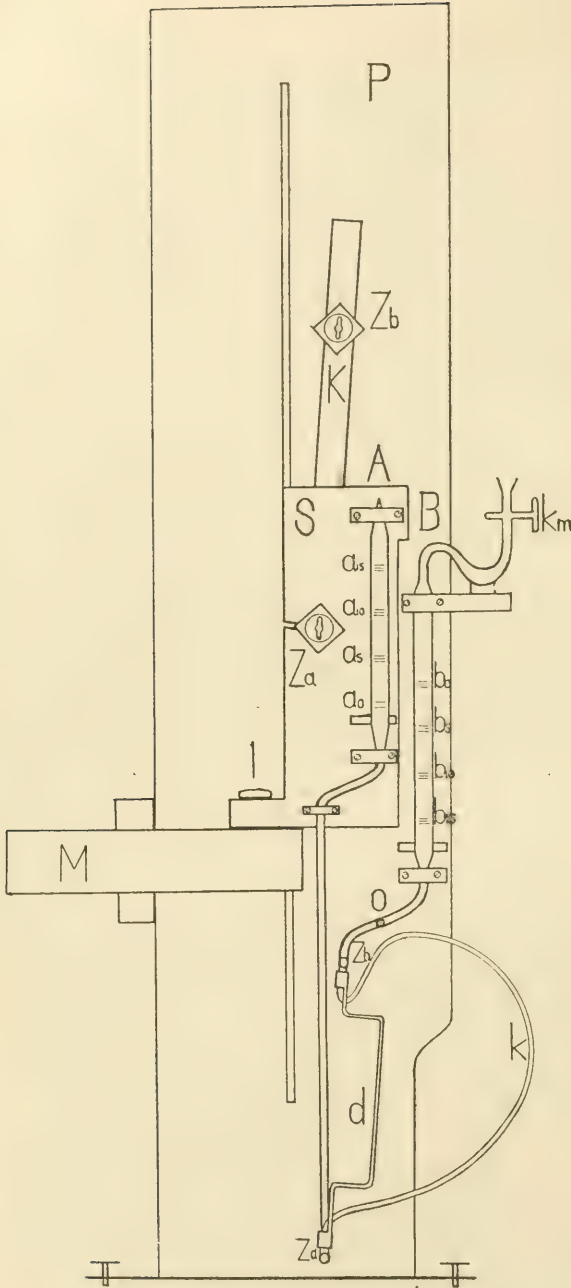


Figure No. 1.

marques fixes est faite par de trois traits très fins que on désigne par  $(a_{00}, a_{01}, a_{02})$ ,  $(a_{50}, a_{51}, a_{52})$ ,  $(b_{00}, b_{01}, b_{02})$ ,  $(b_{50}, b_{51}, b_{52})$ . La quantité du mercure manométrique doit être telle que les lignes du mercure se trouvent à la fois au voisinage le plus étroit des traits centraux  $a_{01}$  et  $b_{01}$ . Le calibre des tubes est à tel point constant, que en faisant parcourir la ligne du mercure dans la branche *B* le trajet de  $b_{01}$  à  $b_{51}$  de sorte que cette ligne vienne s'arrêter au voisinage immédiat du trait central  $b_{51}$ , la ligne dans la branche *A* va parcourir d'une manière analogue le trajet de  $a_{01}$  à  $a_{51}$ . Comme il a été déjà dit, on observe la ligne du mercure au moyen d'un microscope. L'épaisseur de la paroi des tubes *A* et *B* est si grande, que en pointant le microscope contre un trait tout proche de la ligne du mercure, on ne voit pas du tout à la fois cette ligne et vice versa. Pour éviter les inconvénients résultants de ce fait on a muni le microscope d'une petite fenêtre en verre planparallèle qui peut sans peine être introduite devant son objectif ou en être éloignée. L'é-

paisseur de cette fenêtre est telle que son introduction devant le microscope pointé contre le trait le fait immédiatement pointé contre la ligne et vice versa.

On travaillait toujours avec une variation négative  $d\phi$  de la pres-

sion. Son évaluation manométrique exige la connaissance de la longueur des trajets verticaux  $\overline{b_{01}b_{51}}$ ,  $\overline{a_{01}a_{51}}$ , qui sont des constantes du manomètre, ainsi que la connaissance de la valeur d'une division du micromètre oculaire du microscope. Le tableau No. I apporte les données obtenues au moyen d'un comparateur pour le trajet  $\overline{b_{01}b_{51}}$ . Il s'en suit pour la température de 0° C la valeur

$$(\overline{b_{01}b_{51}})_0 = 49.984 \pm 0.001 \text{ mm.}$$

Tableau I.

$t$	$\overline{b_{01}b_{51}}$ mm
15° 2	49.981
15° 5	49.978
15° 8	49.977
15° 9	49.976
	49.972
	49.970
16° 5	49.974
	49.979
	49.978
16° 9	49.970
Moyenne	16° 0
	49.975 $\pm$ 0.001

La comparaison de  $\overline{a_{01}a_{51}}$  avec  $\overline{b_{01}b_{51}}$  effectuée sur le même comparateur a donné

$$\overline{a_{01}a_{51}} = \overline{b_{01}b_{51}} + 0.025 \pm 0.001 \text{ mm,}$$

ce qui donne pour la température de 0° C

$$(\overline{a_{01}a_{51}})_0 = 50.009 \pm 0.002 \text{ mm.}$$

L'évaluation d'une division  $m$  du micromètre a donné

$$m = 0.01210 \pm 0.00002 \text{ mm.}$$

Nous posons

$$dp = x + y$$

en désignant par  $x$  le trajet vertical parcouru par la ligne du mercure dans le tube  $B$  et par  $y$  le trajet analogue dans le tube  $A$ . Le trajet  $x$  est à une petite fraction  $\xi$  près identique avec la distance  $\overline{b_{51}b_{01}}$ , on a alors

$$x = \overline{b_{51}b_{01}} + \xi.$$

C'est précisément cette fraction  $\xi$  ce que on mesure avec le microscope. Soit par exemple  $\mathcal{A}_5$  la petite distance entre le trait moyen  $b_{51}$  et la ligne du mercure, exprimée en divisions du micromètre oculaire et sup-

posée positive, si la ligne du mercure se trouve au-dessus de ce trait, et soit  $\Delta_0$  une distance analogue correspondante au trait  $b_{01}$ . On aura alors pour  $\xi$

$$\xi = (\Delta_0 - \Delta_5) m = (\Delta_0 - \Delta_5) 0.01210 \text{ mm.}$$

On obtient d'une manière analogue

$$y = \overline{a_{51}a_{01}} + \eta, \quad \eta = (\delta_5 - \delta_0) 0.01210 \text{ mm.}$$

L'évaluation de la différence  $d\phi$  de la pression exige alors en somme quatre lectures microscopiques. Le fait, que le rapport  $y : x$  doit rester constant dans les limites de précision avec laquelle on mesure ces grandeurs, permet de réduire les quatre lectures microscopiques à deux seules, celles-ci relatives à  $x$ , bien entendu. On n'a qu'à déterminer d'avance a valeur de ce rapport. Pour le faire on a effectué en somme 9 expériences consécutives qui ont

donné  $y : x = 1.00111 \pm 0.00020$ ,

d'où vient  $y = x (1.00111 \pm 0.00020)$ .

On voit que pour  $x$  d'ordre de grandeur de 50 mm la faute en  $y$  est d'ordre de 0.01 mm. En remarquant que les mesures directes de  $x$  et  $y$  atteignent une précision de 1 ou 2 millièmes de mm, on doit en conclure que cette précision-ci est plus grande que celle-là avec laquelle  $x$  et  $y$  sont garanties par le fonctionnement du manomètre lui même.

Pour l'évaluation de  $d\phi$  on obtient alors la formule

$$(3) \quad d\phi = x + y = x \cdot 2.00111.$$

§ 4. L'observation du déplacement  $ds$  des franges d'interférence s'effectuait d'après une méthode mentionnée déjà plus haut dans le § 1. Elle repose sur l'emploi d'un spectrophotomètre combiné avec le réfractomètre de Jamin. Cette combinaison permet tout d'abord et sans aucune restriction l'observation en lumière suffisamment monochromatique en se servant d'une source lumineuse blanche, et après, ce qui est son second avantage, elle fournit au moyen du compensateur de Jamin une précision surpassante celle de 0.01 d'une frange.<sup>1)</sup> On travaillait dans la radiation de longueur d'onde  $\lambda = 0.54623 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  correspondante à la raie verte de l'arc de mercure. Une ampoule à azote de 50 bougies et de 12 Volts servait de source lumineuse. Le reste d'équipage optique était le même que dans le travail cité là dessus.

Les tubes interférentiels du réfractomètre sont de verre. Leurs longueurs, mesurées également par le comparateur, sont pour 16°C les suivantes:

Le tube  $\rho$ , servant à la mesure,  $L_\rho = 494.650 \pm 0.008 \text{ mm}$ ,

„ „  $r$ , auxiliaire,  $L_r = 495.189 \pm 0.011 \text{ „}$ .

<sup>1)</sup> Voir Rozprávy XXIV., 17, 1915; Annalen der Phys. (IV.), 49, 419, 1916.



Quant à la température du gaz étudié on y avait soin de garantir les centièmes du degré. On se servait d'un vieux thermomètre normal de Baudin avec des corrections de  $+0.290^{\circ}$  pour le point de zéro et de  $+0.310^{\circ}$  pour celui-ci de  $100^{\circ}$  ayant une subdivision décimale des degrés et permettant au moyen d'une lunette l'estimation approchée même des millièmes. Ce thermomètre était placé directement en dedans du gaz étudié en se trouvant dans un tube vertical communiquant avec le tube  $\rho$ . Le réservoir du thermomètre ne pouvant pas naturellement être mis immédiatement au milieu du faisceau lumineux dans le tube  $\rho$ , on y a placé une de deux soudures d'un couple thermoélectrique cuivre-constantan (l'élément  $B$ ) l'autre soudure reposant sur le réservoir thermométrique lui même, ce qui permet de munir les lectures de température faites sur le thermomètre normale d'une correction appropriée. Un couple thermoélectrique analogue  $A$  placé d'autre coté dans les tubes  $r$  et  $\rho$  permet, au cas de besoin, mesurer la différence des températures dans ces deux tubes. Le circuit électrique de ces éléments, tout en cuivre, renferme un galvanomètre très sensible d'Edelmann (système d'Arsonval) et un interrupteur, également en cuivre, représenté dans la figure No. 2. Dans le travail actuel on ne se servait que de l'élément  $B$ . Son circuit électrique reste, excepté le moment de mesure, ouvert, tandis que celui du galvanomètre est fermé à courte voie par l'interrupteur. L'indication du galvanomètre soit dans ce cas là  $g_0$ . Au moment de mesure soit la lecture  $g$ . En désignant par  $t_n$  la lecture faite sur le thermomètre on a pour l'évaluation de la température du gaz la formule suivante:

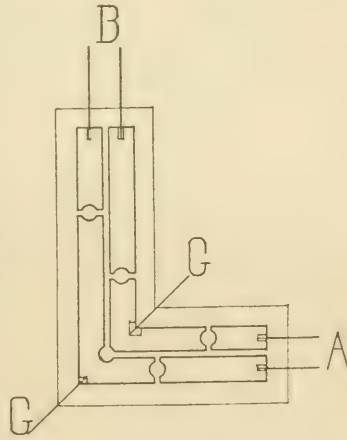


Figure No. 2.

$$t = t_n + 0.290 + 0.0002 t_n + 0.00224 (g - g_0).$$

Quant à la température du manomètre, on la mesurait également avec un thermomètre de Baudin. En désignant par  $t_b$  la lecture faite sur ce thermomètre on calcule la température actuelle d'après la formule  $t = t_b - 0.34$  donnée par la comparaison de ce thermomètre avec le thermomètre normal précédent.

§ 5. C'était l'air le gaz étudié. Il arrivait du dehors, a été soigneusement séché par  $CaCl_2$  et phosphore pentoxyde, privé du anhydride carbonique par  $KHO$  et des traces du poudre par la ouate stérilisée. La figure No. 3 donne une idée sommaire d'arrangement expérimental.

Il y est  $M_0$  un manomètre auxiliaire,  $E$  un petit tube de Geissler animé par la bobine de Ruhmkorff  $U$  et servant de vacuummètre,  $P$  la place de l'observateur,  $\theta$  celle du cathétomètre,  $S$  une axe flexible tour-

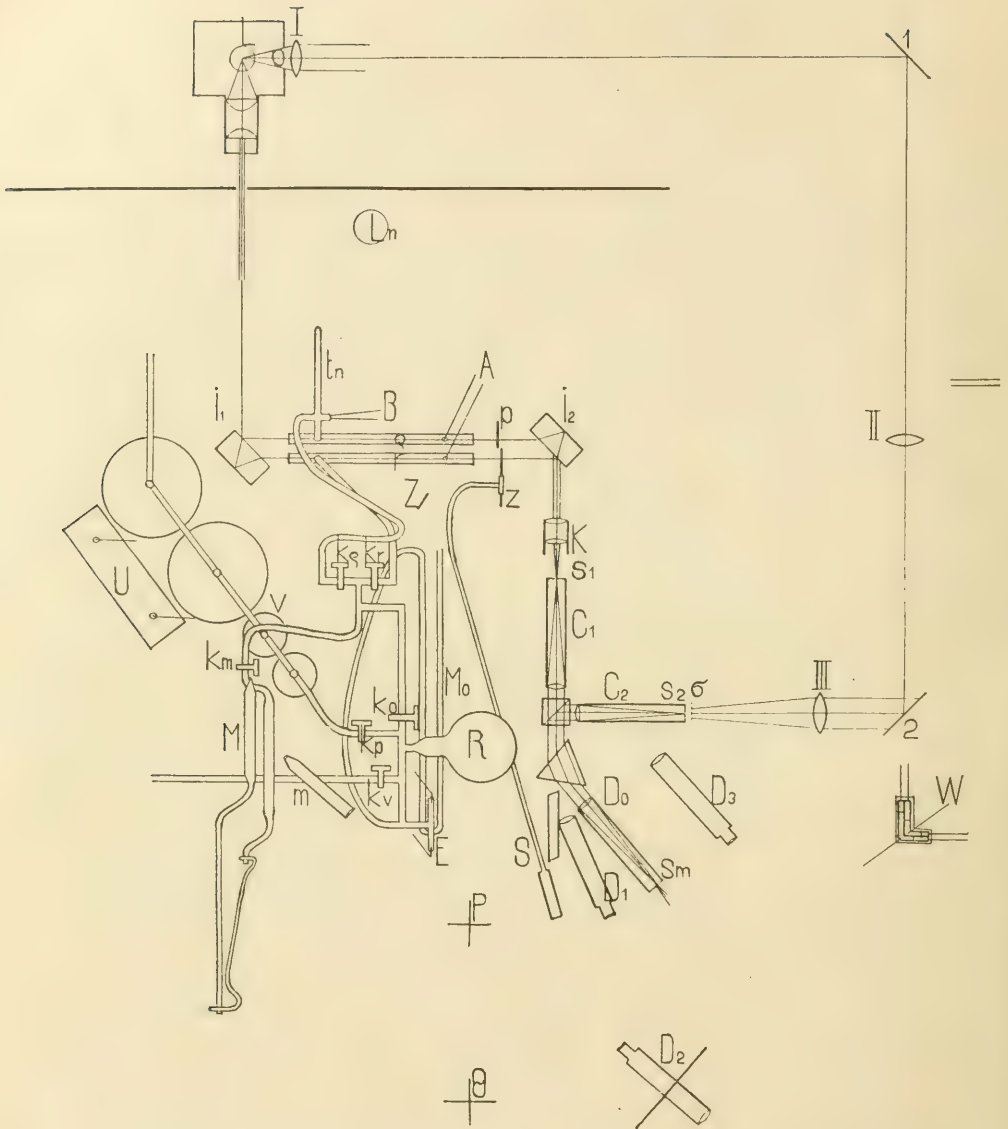


Figure No. 3.

nante le compensateur de Jamin  $p$ , dont le mouvement est observé à l'aide  
 des miroirs  $z$ ,  $Z$ , et la lunette à échelle  $D_1$ . Le robinet  $k_p$  fait entrer l'air  
 dans les tubes de mesure, le robinet  $k_v$  met ces tubes en communication  
 avec la pompe d'air à mercure de Gaede. La lunette  $D_3$  et la source  $L_n$

servent à la lecture du thermomètre  $t_n$ . Le reste de la figure se comprend par lui même. Les parois des tubes  $r$ ,  $\varrho$ ,  $t_n$  ainsi que des tubes de communication avec  $M$  sont enveloppées dans un manteau épais de la ouate s'étendant jusqu'au robinet  $k_0$  et la marque  $b_0$  sur la branche fixe du manomètre  $M$ .

§ 6. La marche d'une expérience est la suivante: Les tubes ayant été soigneusement vidés et les robinets  $k_r$ ,  $k_\varrho$ ,  $k_0$ ,  $k_m$  étant ouverts on fait doucement entrer par le robinet  $k_p$  l'air jusqu'à ce que sa pression vienne surpasser de 2—4 *cm* la pression initiale voulue que on désigne par  $p_5$ . Ceci fait, on ferme les robinets  $k_0$ ,  $k_p$  et en mettant pour peu de temps la pompe de Gaede en marche on abaisse en se servant du robinet  $k_s$  la pression dans le reservoir  $R$  de quelques *cm* au-dessous de la pression finale voulue que l'on désigne par  $p_0$ . On pointe le microscope contre la marque  $b_5$  de cette sorte que le trait central  $b_{51}$  vienne se trouver dans le voisinage immédiat de la division 35 du micromètre oculaire. On introduit la petite fenêtre, entreouvre le robinet  $k_0$  et diminue lentement la pression jusqu'à ce que la ligne de mercure contre laquelle le microscope se trouve maintenant pointé atteigne la division 40 du micromètre. En ce moment on ferme  $k_0$ . Il suit une pause de 15 minutes, pendant laquelle on pointe les lunettes respectives sur les thermomètres  $t_n$  et  $t_b$  et on s'assure au moyen du niveau de ce que la position verticale du manomètre  $M$  n'a pas changé. Le propre but de cette pause est de donner du temps suffisant à l'égalisation des températures en dedans du gaz étudié. Après ça on amène sur la fente  $s_1$  du spectrophotomètre la frange noire achromatique et on fait la lecture du compensateur,  $d_0'$ . On ferme le robinet  $k_r$  et note la température du baromètre,  $t_b'$ . On repète la mise au point de la frange achromatique, ce qui donne une seconde lecture,  $d_0''$ . On évalue la température  $t_5$  du gaz en dedans du tube  $\varrho$ , en consultant d'abord le couple thermo-électrique, ce qui livre trois lectures du galvanomètre,  $g_0$ ,  $g$ ,  $g_0$ , et après le thermomètre normal dont la lecture soit  $t_n$ . On note définitivement la position de la ligne de mercure ou simplement dit „le mercure“ et, après avoir déplacé la petite fenêtre, la position du trait central  $b_{51}$ . On renouvelle, tant que on travaille sous la pression  $p$  la plus basse, le vide dans le reservoir  $R$ ; il n'en est pas plus besoin sous les pressions  $p$  dépassantes 100 *mm*. On soulève de 50 *mm* au moyen d'une vis le tube de microscope en le pointant contre la marque  $b_0$  de la même manière que au cas précédant et ceci fait on introduit de nouveau la petite fenêtre devant l'objectif microscopique. On repète pour la dernière fois la mise au point de la frange noire achromatique, ce qui donne la lecture  $d_0'''$ . En entreouvrant maintenant le robinet  $k_0$  on commence à rarefier doucement l'air dans le tube  $\varrho$  et à compter les franges qui passent, jusqu'à ce que le mercure aie atteint la division 40 du micromètre oculaire. On a constaté ainsi le nombre entier  $\sigma$  des franges passées sur la fente  $s_1$ . Pour évaluer la fraction qui y reste encore on déplace les franges par le com-



pensateur en amenant sur la fente d'abord la plus proche frange noire consécutive, la lecture  $d_1'$ , d'après la dernière frange passée, la lecture  $d_2'$ . On répète ce procédé, des lectures  $d_1''$ ,  $d_2''$ . On répète la lecture de la température du baromètre,  $t_b''$ . On évalue de nouveau la température en dedans du tube  $\varrho$ ,  $t_0$ , en procédant de la même manière que là haut, ce qui donne les lectures  $g_0'$ ,  $g'$ ,  $g_0'$  et  $t_n'$ . On lit définitivement le mercure et après avoir déplacé la petite fenêtre, le trait central  $b_{01}$ . On répète pour la troisième fois la mise au point de tous les deux franges noires signalées plus haut, cette fois en ordre invers, les lectures  $d_2'''$ ,  $d_1'''$ . Enfin on évalue par le cathétomètre la pression finale  $p_0$  en notant les hauteurs de tous les deux ménisques,  $\Theta_A$ ,  $\Theta_B$ . Ceci fait l'expérience est finie et on prépare tout de suite l'expérience suivante en ouvrant les robinets  $k_0$  et  $k_p$ . Cette expérience est en somme identique avec la précédente, seulement le robinet  $k_r$  reste dès lors toujours fermé et, ce qui se conçoit par soi même, il n'est plus nécessaire de contrôler le nombre entier  $\sigma$  des franges, si sa première évaluation était suffisamment solide. De telles expériences consécutives et identiques entre elles, correspondantes à la même pression  $p_0$ , en sont toujours 10 et forment un groupe fermé. On a commencé par la pression  $p_0 = 14.74 \text{ mm}$  et finit par celle de  $p_0 = 611.25 \text{ mm}$  en conservant la différence entre deux valeurs voisines de ces pressions toujours sensiblement égale à 100 mm.

Pour déterminer des données expérimentales ainsi obtenues les valeurs cherchées de  $ds$ ,  $d\phi$  et  $\phi$ , on a procédé comme il suit.

Quant à  $ds$  nous posons  $ds = \sigma + \varepsilon$ , et pour évaluer la fraction  $\varepsilon$  nous écrivons

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{3} (d_0' + d_0'' + d_0''') &= d_0, \\ \frac{1}{3} (d_1' + d_1'' + d_1''') &= d_1, \\ \frac{1}{3} (d_2' + d_2'' + d_2''') &= d_2, \\ \Sigma \frac{d_1 - d_2}{n} &= d, \end{aligned}$$

en désignant par  $n$  le nombre sommaire de toutes les expériences effectuées. Le numérotage de l'échelle est de ce sens que on a

$$d_1 > d_0 > d_2,$$

ce qui donne à l'aide des équations (4) pour  $\varepsilon$  les deux valeurs

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{d} [(d_0''' - d_0) + (d_1 - d_0)], \\ \varepsilon_2 &= 1 + \frac{1}{d} [(d_0''' - d_0) + (d_2 - d_0)], \end{aligned}$$

dont il suit enfin

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

La formule  $d\phi = x + y$  donnée plus haut pour  $d\phi$  suppose que la température du gaz reste invariable pendant l'expérience. Ceci n'ayant

Tableau II.

$p = 162.0.$

Datum		12. V., 4 h 45 m	13. V., 9 h 50 m	13. V., 10 h 34 m	13. V., 3 h 00 m	13. V., 4 h 30 m
$t_s$	$g \} B$	151.3, 1.8	157.6, 7.9	164.4, 4.7	183.8, 4.3	191.5, 1.9
	$g$	107.2	121.5	121.4	141.6	150.1
	$t_n$	15.099	14.968	15.098	15.200	15.298
$t_0$	$g' \} B$	155.2, 5.4	161.0, 1.4	167.7, 8.0	187.7, 8.2	194.7, 4.9
	$g'$	110.6	119.4	121.4	141.7	153.5
	$t_n$	15.100	15.000	15.101	15.219	15.301
$d\pi$	$b_{s1}$	36.06	34.97	35.00	35.59	35.26
	Hg	50.95	47.76	42.72	45.72	50.75
	$b_{11}$	34.95	34.97	33.61	34.83	34.96
$ds$	Hg	54.83	51.02	53.00	53.39	52.00
	$\sigma$	32	53.45, 3.00, 1.92, 2.27	52.25, 3.10, 2.75	55.39, 5.30, 4.98	58.07, 7.00, 7.00
	$d_0$	756.26, 6.25, 4.0, 5.0	798.00, 8.80, 7.81	800.37, 0.63, 90.20	00.13, 0.77, 0.19	01.20, 0.30, 0.00
$p_0$	$\Theta A$	297.10	297.72	43.26, 3.05, 3.61	45.00, 6.00, 5.30	44.67, 4.89, 3.80
	$\Theta B$	184.95	185.10	15.923, 16.150	16.025, 16.298	16.126, 16.360
	$t_0$	15.997, 16.185	15.798, 16.003			

Datum		14. V., 8 h 15 m	14. V., 10 h 15 m	14. V., 11 h 40 m	14. V., 3 h 50 m
$t_s$	$g \} B$	197.5, 7.5	199.7, 9.8	202.7, 2.7	220.9, 1.6
	$g$	160.2	158.0	160.5	177.9
	$t_n$	15.198	15.299	15.338	15.439
$t_0$	$g' \} B$	196.7, 6.9	201.7, 2.0	204.7, 4.8	223.3, 5.9
	$g'$	161.6	159.9	161.3	179.7
	$t_n$	15.300	15.300	15.344	15.476
$d\pi$	$b_{s1}$	35.50	35.37	35.09	34.80
	Hg	47.48	47.97	48.10	48.28
	$b_{11}$	34.97	34.99	35.18	35.53
$ds$	Hg	52.10	54.90	50.00	51.68
	$\sigma$	54.52, 5.49, 4.00	55.09, 5.00, 5.00	54.37, 5.30, 4.00	55.79, 7.00, 5.25
	$d_0$	01.18, 0.92, 1.20	99.87, 9.03, 9.64	98.80, 9.95, 9.05	01.98, 2.12, 1.02
$p_0$	$\Theta A$	297.74	43.05, 3.3, 2.75	42.38, 3.05, 2.10	46.00, 6.33, 4.75
	$\Theta B$	185.36	16.093, 16.362	16.193, 16.452	16.271, 16.498
	$t_0$	16.162, 16.341	15.998, 16.250		

*Tableau III.*  
 $d = 56.222, 1 : d = 0.01779.$

$d_0'''$	755.00	752.27	752.75	754.98	757.00	754.00	754.70	755.00	754.00	755.25
$d_0$	755.38	752.66	752.70	755.22	757.36	754.67	754.47	755.03	754.56	756.01
$d_1$	801.28	798.20	800.07	800.36	800.57	801.10	801.01	799.51	7.9.27	801.72
$d_2$	745.90	742.79	743.31	745.43	744.45	745.28	744.63	743.06	742.51	745.69
$d_1 - d_2$	55.38	55.41	56.76	54.93	56.12	55.82	56.38	56.45	56.76	56.03
$d_0''' - d_0$	- 0.38	- 0.39	+ 0.05	+ 0.76	- 0.36	- 0.67	+ 0.23	- 0.03	- 0.56	- 0.76
$d_1 - d_0$	+ 45.90	+ 45.54	+ 47.37	+ 45.14	+ 43.21	+ 46.43	+ 46.54	+ 44.48	+ 44.71	+ 45.71
$d_2 - d_0$	- 9.48	- 9.87	- 9.39	- 9.79	- 12.91	- 9.39	- 9.84	- 11.97	- 12.05	- 10.32
$\varepsilon_1 = \frac{1}{d} [(d_0''' - d_0) + (d_1 - d_0)]$	0.823	0.803	0.844	0.817	0.762	0.814	0.832	0.791	0.785	0.800
$\varepsilon_2 = 1 + \frac{1}{d} [(d_0''' - d_0) + (d_2 - d_0)]$	0.825	0.817	0.834	0.840	0.764	0.821	0.829	0.787	0.776	0.803
$\varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	0.824	0.810	0.839	0.829	0.763	0.818	0.831	0.789	0.781	0.801
$d_s$	32.824	32.810	32.839	32.825	32.763	32.818	32.831	32.789	32.781	32.801



Tableau IV.

$g' - g_0'$	$\frac{(g' - g_0')}{(g - g_0)}$	$t_3$	$t_0 - t_3$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_5$	$x$	$x + t_3$	$t_3$	$d\pi$	$d\rho$
-44.7	-0.3	15.293	0.000	19.88	14.89	50.044	100.144	15.75	99.872	9.872
-41.8	-5.6	15.199	+0.019	16.05	12.79	50.023	100.102	16.24	99.821	99.837
-46.4	-3.2	15.290	-0.004	19.39	7.72	50.125	100.306	15.70	100.034	100.031
-46.3	-3.0	15.408	+0.010	18.56	10.13	50.086	100.228	15.82	99.954	99.962
-41.3	+0.3	15.501	+0.004	17.04	15.49	50.003	100.062	15.90	99.787	9.790
-35.2	+0.2	15.514	+0.001	17.13	11.98	50.046	100.148	15.91	99.873	99.874
-41.6	-4.3	15.400	-0.008	19.91	13.20	50.065	100.186	15.78	99.913	99.907
-41.9	-0.2	15.499	+0.001	17.68	12.23	50.050	100.156	15.89	99.881	99.882
-43.4	-1.2	15.540	+0.003	14.82	13.01	50.006	100.068	15.98	99.792	99.794
-45.9	-3.1	15.666	+0.030	16.15	13.48	50.016	100.088	16.04	99.811	99.834

$$t_0 = t_n' + 0.280 + 0.0002 t_n' + 0.00224 (g' - g_0)$$

$$t_0 - t_3 = t_n' - t_n + 0.00224 [(g' - g_0') - (g - g_0)]$$

$$x = 49.984 + (\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_5) 0.01210$$

$$x + y = z.2.00111$$

$$t_3 = \frac{[t_3']}{2} - 0.34, \quad \bar{t}_3 = \frac{[t_3]}{10},$$

$$d\pi = (x + y) \left( 1 - \frac{0.0001733 t_3}{1 + 0.0001818 t_3} \right)$$

$$\Theta_A - \Theta_B = \frac{[\Theta_A' - \Theta_B']}{3}$$

$$p_0 = (\Theta_A - \Theta_B) \left( 1 - \frac{0.0001634 \bar{t}_3}{1 + 0.0001818 t_3} \right)$$

$$\bar{d}\pi = \frac{[d\pi]}{10}$$

$$p_3 = p_0 + \bar{d}\pi$$

$$d\rho = d\pi + p_3 (t_3 - t_3)$$

$$\beta = 306.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\bar{t}_3 = 15.90$$

$$\Theta_A - \Theta_B = 112.38$$

$$p_0 = 112.09$$

$$\bar{d}\pi = 99.87$$

$$p_3 = 211.96$$

$$p_3 \beta = 0.777$$

Tableau V.  
 $p = 162.0 \text{ mm.}$

	$d p$	$1 + \beta (t_0 - 16^\circ)$	$\left(\frac{d s}{d p}\right)_{16^\circ} = \frac{d s}{d p} 1 + \beta (t_0 - 16^\circ)$
32·824	99·872	0·997409	0·32781
32·810	99·836	0·997064	0·32767
32·839	100·031	0·997398	0·32743
32·829	99·962	0·997830	0·32770
32·763	99·790	0·998171	0·32772
32·818	99·874	0·998219	0·32801
32·831	99·907	0·997801	0·32789
32·789	99·882	0·998164	0·32767
32·781	99·794	0·998314	0·32793
32·801	99·834	0·998776	0·32815

$$\text{Moyenne } \left(\frac{d s}{d p}\right)_{16^\circ} = 0.32780 \pm 0.00007.$$

pas lieu en réalité  $x + y$  représente la somme de toutes les variations de la pression durant une expérience. En la désignant par  $d\pi$  on a alors

$$(6) \quad x + y = d\pi.$$

En supposant que la variation  $d p$ , due au pur échappement du gaz a été effectuée pendant la température  $t_0$ , on a, comme il se voit bien facilement

$$d\pi = d p - p_5 \beta (t_0 - t_5),$$

et alors

$$(7) \quad d p = d\pi + p_5 \beta (t_0 - t_5).$$

$\beta$  est le coefficient moyen de dilatation à volume constant,  $\beta = 366.5 \cdot 10^{-5}$  (Regnault.)

Quant à la pression  $p$ , elle est la moyenne arithmétique de toutes les deux pressions extrêmes  $p_5$  et  $p_0$ . On mesure  $p_0$  directement avec le cathétomètre, pour  $p_5$  on a posé  $p_5 = p_0 + d\bar{\pi}$  en désignant par  $d\bar{\pi}$  la moyenne des valeurs  $d\pi$  d'un groupe donné de 10 expériences. Alors on a enfin

$$(8) \quad p = \frac{1}{2} (2 p_0 + d\bar{\pi}).$$

Pour faire bien voir la marche des expériences d'une part et celle des calculs d'autre part j'apporte dans les tableaux II—V tout ce qui se rapporte à la pression  $p = 162.0 \text{ mm.}$  Le tableau II est une copie exacte du protocole d'observation et, après tout ce qu'il a été dit, il n'a pas

Tableau VI.

$$\left(\frac{d_s}{d p_m^{16^\circ}}\right)$$

$p = 64.6 \text{ mm}$	$p = 162.0 \text{ mm}$	$p = 262.0 \text{ mm}$	$p = 362.5 \text{ mm}$	$p = 462.0 \text{ mm}$	$p = 561.5 \text{ mm}$	$p = 661.0 \text{ mm}$
0.32800	0.32781	0.32816	0.32825	0.32845	0.32738	0.32918
0.32740	0.32767	0.32716	0.32828	0.33077	0.32927	0.32926
0.32739	0.32743	0.32799	0.32794	0.32805	0.32864	0.32923
0.32777	0.32770	0.32762	0.33125	0.32838	0.32996	0.32897
0.32817	0.32772	0.32764	0.32813	0.32841	0.32869	0.32942
0.32756	0.32801	0.32784	0.32828	0.32817	0.32857	0.32904
0.32754	0.32789	0.32838	0.32779	0.32837	0.32899	0.32836
0.32756	0.32767	0.32791	0.32825	0.32841	0.32929	0.32965
0.32735	0.32793	0.32780	9.32823	0.32858	0.32875	0.32943
0.32818	0.32815	0.32822	0.32737	0.32805	0.32893	0.32886
0.32769 ± 10	0.32780 ± 7	0.32787 ± 11	0.32838 ± 33	0.32856 ± 25	0.32888 ± 20	0.32914 ± 12



pas besoin des remarques explicatives. Le tableau III reproduit les calculs donnant les valeurs de  $ds$ , le tableau IV ceux-là de  $d\phi$ . Sur le tableau V on trouve enfin calculées les valeurs de  $\frac{ds}{d\phi}$ . Chacune de ces valeurs correspond à une température donnée  $t_0$  variant d'une expérience à l'autre. La moyenne de toutes ces températures est sensiblement de  $16^\circ\text{C}$  et c'est donc à cette température qu'on a réduit les valeurs de  $\frac{ds}{d\phi}$ , d'après la formule

$$\left(\frac{ds}{d\phi}\right)_{16^\circ} = \frac{ds}{d\phi} (1 + \beta (t_0 - 16^\circ)).$$

D'une manière analogue comme pour  $\phi = 162.0\text{ cm}$  on a procédé pour les autres pressions  $\phi$ , à savoir

$$\phi = 64.6, 162.0, 262.0, 362.5, 462.0, 561.5, 661.0.$$

Le tableau VI apporte les résultats sommaires de toutes ces expériences. On y trouve à la fin de chaque colonne la moyenne de ses valeurs avec l'indication de la faute moyenne exprimée en unités du dernier ordre. En résumant ces moyennes on a le tableau suivant:

$$\begin{array}{cccccccc} \phi = & 64.6, & 162.0, & 262.0, & 362.5, & 462.0, & 561.5, & 661.0, \\ \frac{ds}{d\phi} = & 0.32769, & 0.32780, & 0.32787, & 0.32838, & 0.32856, & 0.32888, & 0.32914, \end{array}$$

et c'est le résultat expérimental définitif de tout le travail.

On remarque tout de suite que les valeurs de  $\frac{ds}{d\phi}$  forment une progression croissante avec le  $\phi$ .  $\frac{ds}{d\phi}$  est alors une fonction de la pression et en supposant dans la première approximation une relation linéaire nous posons

$$(9) \quad \frac{ds}{d\phi} = \alpha_1 + \beta_1 \phi.$$

C'est par la méthode des moindres carrés qu'on a calculé les valeurs des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ . Le résultat de ce calcul donne

$$(9') \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.32725 \pm 0.00009 \\ \beta_1 = 0.00000259 \pm 0.00000021. \end{array}$$

Ce sont les valeurs normales des pressions  $\phi$  et  $d\phi$  qui figurent dans les formules (9) et (9'), tandis que dans ce que précède, les pressions correspondent à la pesanteur de Prague. Le tableau VII apporte une comparaison des valeurs données par l'expérience et par le calcul. Il y est  $\phi$  la pression normale en  $mm$ ,  $\frac{ds}{d\phi}$  la valeur observée,  $\left(\frac{ds}{d\phi}\right)$  celle-là calculée

Tableau VII.

$p$	$\frac{ds}{dp}$	$\left(\frac{ds}{dp}\right)$	$\Delta = \left(\frac{ds}{dp}\right) - \frac{ds}{dp}$
64.6	0.32755	0.32742	-0.00013
162.1	0.32766	0.32767	+0.00001
262.1	0.32773	0.32793	+0.00020
362.6	0.32824	0.32819	-0.00005
462.2	0.32842	0.32845	+0.00003
561.7	0.32874	0.32870	-0.00004
661.3	0.32900	0.32896	-0.00004

d'après les formules (9) et (9'),  $\Delta$  la différence de ces deux valeurs. L'accord est bon, les différences  $\Delta$  restent rigoureusement comprises dans les limites de grandeur des fautes moyennes d'expériences, ce qui prouve que la formule linéaire (9) est bien suffisante.

§ 7. Il s'agit de savoir à quel degré de précision sont les valeurs des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  et avec eux toutes nos mesures assurées. Nous y parviendrons en calculant de la manière usuelle jusqu'à présent et en nous servant de ces valeurs là la réfraction de l'air pour la radiation verte du mercure et les valeurs normales de température et de pression, et en comparant ensuite la réfraction ainsi obtenue avec ses valeurs données par les autres travaux, qui sont très nombreux. On cherche d'abord par l'expérience le quotient  $\frac{ds}{dp}$  pour une pression  $p$  sensiblement voisine de 760 mm en se servant naturellement d'une variation  $dp$  de la pression beaucoup plus grande que la nôtre. Ceci fait on suppose ce quotient indépendant de la pression et en mettant sa valeur dans l'équation (2) on obtient tout simplement, en respectant encore le rôle de la température, la formule

$$(10) \quad (n_{760} - 1) = \frac{\lambda}{L} \left(\frac{ds}{dp}\right)_{760} \cdot 760 \cdot (1 + \alpha t).$$

Dans le notre cas il est

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dp}\right)_{760} &= 0.32922 \pm 0.00025 \text{ [d'après l'équation (9)],} \\ \lambda &= 0.54623 \cdot 10^{-3} \text{ mm,} \\ L &= 494.650 \text{ mm,} \\ t &= 16^\circ \text{ C,} \\ \alpha &= 367.28 \cdot 10^{-5} \text{ (Chappuis),} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 10^6 (n - 1) &= 292.54 \pm 0.20, \text{ pour la pression de } 760 \text{ mm normale,} \\ 10^6 (n - 1) &= 292.66 \pm 0.20, \text{ ,, ,, ,, ,, 760 ,, à Prague.} \end{aligned}$$

Le tableau suivant apporte les résultats des travaux antérieurs cités d'après la 4<sup>e</sup> éd. des tables bien connues de Landolt-Bernstein (sous l'ex-

ception de la valeur de M. St. Loria, qui se trouve dans les *Annalen der Physik* (4) 29, pg 619, 1909):

Auteur:	$(n - 1) \cdot 10^6$
L. Lorenz 1880 . . . . .	291·8
Kessler 1909 . . . . .	292·3
Scheel 1907 . . . . .	292·4
Ahrberg 1909 . . . . .	292·5
Chappuis et Rivière 1888 . . . . .	292·6
* <b>Posejpal 1917</b> . . . . .	<b>292·7</b>
Kayser et Runge 1893, St. Loria 1909 .	292·9
Benoît 1889, Rentschler 1908 . . . . .	293·0
Perreau 1896 . . . . .	293·3
Mascart 1877 . . . . .	293·4
Walker 1903 . . . . .	293·5
C. M. Cuthbertson (3) 1909 . . . . .	293·6
Koch 1909 . . . . .	293·7
Herrmann 1908, Gruschke 1910 . . . . .	294·6
Ketteler 1865 . . . . .	295·4

Ces résultats ont été rangés d'après leurs valeurs croissantes et on voit que la valeur donnée par nous ne se trouve pas, bien entendu, précisément au milieu de leur série, mais qu'elle y est très près. Notre résultat est donc bon, nos expériences sont suffisamment solides.

§ 8. Nous allons maintenant rechercher la relation entre la réfraction et la pression. Il suffit pour ce fait à mettre dans l'équation (2) pour  $\frac{d s}{d p}$  sa valeur d'après la formule (9) et à intégrer l'équation ainsi obtenue entre les limites de  $o - p$ . Cette intégration étant très facile à faire nous écrivons l'intégrale dans la forme adoptée déjà par Mascart, ce qui donne

$$(11) \quad n - 1 = K p (1 + \beta p).$$

Il y est comme on le voit sans peine

$$K = \frac{\lambda}{L} \alpha_1, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

d'où il s'ensuit enfin

$$(11') \quad \begin{aligned} K &= 0.36138 \cdot 10^{-6} \pm 0.00010 \cdot 10^{-6}, \\ \beta &= 396 \cdot 10^{-8} \pm 32 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Le paramètre  $K$  caractérise la dispersion et dépend alors de la longueur d'onde.



Le paramètre  $\beta$  est indépendant de la dispersion, est alors le même pour les radiations de toutes couleurs. C'est une conséquence immédiate du fait que les quotients  $\frac{n_\lambda - 1}{n_{\lambda'} - 1}$ , appelés constantes de dispersion, sont indépendants de la pression, comme il suit entre autres par exemple d'un travail récent des MM. Siertsema et De Haas.<sup>1)</sup>

Toutes les deux valeurs, celui de  $K$  comme celui-ci de  $\beta$ , sont assurées au même degré de précision comme celles-là de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ . Ça suffit largement pour le paramètre  $K$ , tandis que quant à celui-ci de  $\beta$ , nous voulons le soumettre à une nouvelle épreuve en comparant sa valeur avec celles d'autres, tantqu' il y en a, naturellement.

Comme on l'a dit déjà au commencement de cet article, on ne trouve jusqu'à présent dans la région des pressions au-dessous d'une atmosphère envisagée par nous que un seul travail, celui-ci de M. W. Kayser, qui donne pour l'air la valeur

$$\beta = 0.00000095 \pm 0.00000070.$$

Notre résultat

$$\beta = 0.00000396$$

est alors de plus que quatre fois plus grand. Alors un désaccord absolu. Néanmoins ce fait ne doit aucunement nous peiner vue la solidité insuffisante de la valeur de M. Kayser.

Tous les autres auteurs visent aux pressions plus élevées. Ce sont

Mascart, en 1877,	$\beta = 72 \cdot 10^{-8}$ ,
J. Chappuis et Rivière, en 1888,	$\beta = 65 \cdot 10^{-8}$ ,
Perreau, en 1896,	$\beta = 90 \cdot 10^{-8}$ .

Toutes ces valeurs sont plus petites que celle-là de M. Kayser. Elles se trouvent alors à première vue dans un désaccord encore plus profond que celle-là avec notre valeur et sont de 4—6 fois plus petites que celle-ci. Mais un coup d'oeil plus attentif montre que l'accord de ces valeurs entre elles mêmes n'est pas un très excellent non plus, au contraire, on peut voir que leurs différences surpassent considérablement les fautes admises par l'expérience. Ceci indique que  $\beta$  doit être variable avec la pression, ou autrement dit, que la simple formule linéaire (9), qui se montra complètement suffisante pour l'intervalle de pression envisagé par nous, ne sera pas pour des intervalles plus étendus. Le tableau VIII prouve qu'il y en est ainsi en effet. Il y est  $\Delta p$  l'intervalle de pression indiqué par l'auteur,  $\bar{p}$  la moyenne de cet intervalle. On voit immédiatement que les valeurs de  $\beta$ , rangées d'après les valeurs croissantes de  $\bar{p}$ , forment une progression décroissante. Alors  $\beta$  diminue avec la pression croissante. On peut toujours, quelque soit la lois de cette diminution, supposer en première approximation la proportionalité, ce qui donnerait pour le produit  $\bar{p} \beta$

<sup>1)</sup> Phys. Zsch. XIV., 568, 1913.

Tableau VIII.

$\Delta p$	$p$	$\beta$	$p\beta$	$t^\circ$
0—760 mm	380	0.00000396	0.00150	16°
0—3400 mm	1700	0.00000090	0.00153	16°
300—6000 mm	3150	0.00000072	0.00227	22°
0—15000 mm	7500	0.00000065	0.00488	21°

une valeur invariable. Et en effet la colonne 4 du même tableau montre qu'il y en est ainsi avec une grande approximation pour les deux premiers membres de cette colonne. D'ici là le produit  $p\beta$  augmente. La température  $t$  étant, comme on le voit dans la dernière colonne du même tableau à peu près la même pour toutes les pressions  $p$  on doit attribuer la variation ainsi constatée des valeurs de  $\beta$  à la variation de la pression  $p$  d'elle seule.

Voici alors le résultat important que nous venons d'obtenir,  $\beta$  est variable avec la pression. Au-dessous de 4 atmosphères ce paramètre diminue rapidement avec la pression croissante en lui restant sensiblement inversement proportionnel, d'ici-là la diminution de  $\beta$  devient de plus en plus lente.

L'autre résultat non moins important pour nous est ce que la valeur de  $\beta$  donnée par nous se trouve avec des valeurs semblables d'autres auteurs dans un très bon accord.

L'évaluation de la réfraction de l'air effectuée d'après la formule définitive (11) donne pour les conditions normales de la température et de la pression la valeur

$$10^6 (n - 1) = 291.67 \pm 0.14.$$

Cette valeur, qui d'après sa nature doit être regardée comme valeur corrigée de la réfraction, se confond à peu près avec celle de M. L. Lorenz (voir le tableau donnée page 17). Cet accord n'est pas fortuit, la manière dont M. Lorenz est parvenu à son résultat indique au contraire qu'il en doit être ainsi. M. Lorenz étudiait la réfraction de la radiation de la vapeur de sodium et a trouvé la valeur de  $291.08 \cdot 10^{-6}$ . Son travail<sup>1)</sup> était très soigneux, il a répété plusieurs fois ses expériences en vue du désaccord tranchant qui régnait entre son résultat et ceux d'autres auteurs, surtout ceux-là des MM. Mascart et Ketteler. Son procédé était au fond identique avec celui-ci mentionné en haut, pg. 2., équation (1). On y voyait que ce procédé livre pour  $n - 1$  un juste résultat indépendant de la variation de

<sup>1)</sup> Wied. Ann. 11, 70, 1880.

$n - 1$  avec la pression. La dispersion de la radiation verte de mercure étant donnée par  $(n - n_D)$ .  $10^7 = 7$  on trouve, en reportant le résultat de Lorenz à cette radiation, la valeur de  $291.78 \cdot 10^{-6}$ , ce qui est alors avec notre valeur donnée par  $291.67 \cdot 10^{-6}$  identique dans les limites de fautes d'expériences.

Ce fait donne d'une part un nouveau appui à la solidité de nos expériences, d'autre part une satisfaction au résultat de M. Lorenz, qui était injustement regardé jusqu'ici comme le moins bon.

D'après le même principe que M. Lorenz travaillait en 1907 M. Scheel, mais dans une voie tout à fait différent. Son résultat suit dans la même table immédiatement après celui de M. Lorenz en occupant sa place à la fois avec le résultat de M. Kessler. Il est clair que les travaux basés sur le quotient  $\frac{\Delta s}{\Delta p}$  doivent livrer pour  $n - 1$  une valeur d'autant plus grande que la pression moyenne  $p$  est plus haute, ce qui peut probablement être la cause de ces grandes valeurs là obtenues par quelques auteurs. Il sera intéressant de rechercher ce fait un peu de plus près.

§ 9. L'intérêt principal qui mène à l'étude de la variation de la réfraction avec la pression est fondé dans le besoin de vérifier l'invariabilité des constantes de réfraction spécifique. Il y en a deux formules bien importantes, celle de MM. Lorenz-Lorentz  $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho}$  et celle de MM.

Newton-Gladstone  $\frac{n - 1}{\rho}$ , liées par la relation approximative

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{2}{3} \frac{n - 1}{\rho}.$$

Cette relation nous permet de ne s'occuper en première approximation que de la formule de Newton-Gladstone.

On peut représenter dans la région des petites pressions la densité absolue  $\rho$  du gaz par une fonction de pression analogue à celle-là qui nous a servi au cas de la réfraction. On a alors les deux équations

$$(11) \quad n - 1 = K p (1 + \beta p),$$

$$(12) \quad \rho = K_\rho p (1 + \beta_\rho p),$$

d'où il suit par division

$$(13) \quad \frac{n - 1}{\rho} = C [1 + (\beta - \beta_\rho) p].$$

Pourvue que alors  $\frac{n - 1}{\rho}$  reste invariable avec la pression, il faut que on aie  $\beta = \beta_\rho$ . D'après les mesures de Lord Rayleigh effectuées en 1905 on a pour l'air dans la région au-dessous d'une atmosphère



tandis que il est  $\beta_e = 0.00000061$ ,  
 alors  $\beta = 0.00000396$ ,  
 $\beta - \beta_e = 0.00000335$ .

La différence  $\beta - \beta_e$  est alors bien loin d'être égale à zéro, d'où il s'en suit que dans la région au dessous d'une atmosphère  $\frac{n-1}{\rho}$  n'est pas invariable avec la pression.

Tableau IX.

$p$ mm	$\frac{n-1}{\rho}$	$\frac{3}{2} \frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{\rho}$
0	9974.6	9974.6
100	9977.9	9977.6
200	9981.3	9980.8
300	9984.6	9983.9
400	9988.0	9987.0
500	9991.3	9990.1
600	9994.6	9993.1
700	9998.0	9996.3
760	10000.0	9998.1

Le tableau IX montre la marche numérique de la formule  $\frac{n-1}{\rho}$ . On y a posé pour une atmosphère  $\frac{n-1}{\rho} = 10000$ . Ou trouve pour l'intervalle de 0—760 mm une augmentation de  $\frac{1}{4}\%$ . C'est peu, il est vrai, mais si les paramètres  $\beta$  et  $\beta_e$  restaient invariables avec la pression, on parviendrait bientôt à des augmentations assez considérables. Mais il n'en est pas ainsi,  $\beta$  et  $\beta_e$  varient avec la pression. Quant à  $\beta$ , nous l'avons déjà vu. La marche de  $\beta_e$  est d'après les travaux des MM. Rognault et Amagat une analogue comme le montre la table suivante:

$$p = 570, 2880, 7500, 12500, 17500, 22500, 27500, 32500 \text{ mm.}$$

$$\beta_e \cdot 10^8 = 61, 54, 52, 50, 51, 51, 43, 39.$$

$$\beta \cdot 10^8 = 396, 90, 72, 65.$$

Alors le paramètre  $\beta_e$  tombe, lui aussi, avec la pression croissante, et il tombe lui aussi plus vite tant que la pression reste petite, mais il ne tombe jamais si rapidement que l'on a constaté pour  $\beta$ , de sorte que leurs valeurs se rapprochent assez vite l'une à l'autre en s'égalisant à peu près dès la pression de 7.5 m environ. D'où il suit que la constante  $\frac{n-1}{\rho}$  qui augmentait au-dessous d'une atmosphère très considérablement avec la pression, augmentera sous des pressions plus élevées de plus en plus moins vite de sorte que dans la région des pressions dépassantes 3 atmosphères elle reste sensiblement invariable. Et c'était confirmé par l'expérience.

Quant à la constante de Lorenz sa marche est une analogue (voir la colonne 3 de la table IX), mais sa variation reste en somme plus douce que celle de la constante de Newton.

La grande différence numérique des paramètres  $\beta$  et  $\beta_e$  pour les pressions au-dessous d'une atmosphère ainsi que la variation rapide de  $\beta$  avec la pression font les résultats les plus importants de ce travail.

*Sommaire.* 1<sup>o</sup>. L'objet du travail présent était l'étude expérimentale de la variation de la réfraction de l'air avec la pression au-dessous d'une atmosphère. Pour l'exprimer on s'est servi de la formule de Mascart,  $n - 1 = K p (1 + \beta p)$ , et on a trouvé en exprimant la pression normale en *mm* de mercure pour  $\beta$  la valeur  $\beta = 0.00000396$ . On a travaillé dans la radiation verte de mercure, ce qui a donné pour  $K$  la valeur  $K = 0.36138 \cdot 10^{-6}$  et pour  $n - 1$  celle de  $n - 1 = 291.67 \cdot 10^{-6}$ . Le dernier résultat est d'accord parfait avec la valeur donnée par M. L. Lorenz.

2<sup>o</sup>. Le paramètre  $\beta$  varie largement avec la pression et lui reste dans l'intervalle de 0—3400 *mm* inversement proportionnel. Dès là  $\beta$  diminue avec la pression croissante de plus en plus vite.

3<sup>o</sup>. La réfraction  $n - 1$  augmente au-dessous d'une atmosphère beaucoup plus vite avec la pression que la densité absolue  $\rho$  du gaz. Ni la constante de réfraction spécifique de Lorenz-Lorentz ni celle de Newton-Gladstone n'est donc dans cet intervalle de pression invariable, au contraire toutes les deux augmentent avec la pression.

Prague, Juin 1917.

# Über Tellurwismut aus den böhmischen Goldgängen.

Von F. SLAVÍK.

Vorgelegt am 27. Oktober 1916.

(Résumé des böhmischen Textes.)

Vor zehn Jahren entdeckte A d o l f H o f m a n n<sup>1)</sup> das erste Tellurmineral in Böhmen am Goldquarzgang des Jakobschachtes bei *Kasejovic* und bestimmte es als *Nagyagit* oder ein demselben verwandtes Tellurid. In der mit mir gemeinschaftlich publizierten Arbeit<sup>2)</sup> konstatierte H o f m a n n Tellur, Gold, Blei, Antimon und Silber in diesem blättrigen, bleigrauen bis zinnweißen Mineral; *bisweilen* wurde darin auch etwas *Wismut* gefunden. (Die Proben sind teils von H o f m a n n selbst, teils von Dr. J. Friedrich und Dr. J. Š v é d a in Prag sowie Prof. R. V a m b e r a in Příbram ausgeführt worden.)

Außerdem stellten wir<sup>3)</sup> Spuren von Telluriden auch bei *Zduchovic* unweit Kamýk an der Moldau, H o f m a n n selbst<sup>4)</sup> bei Libčic S von Neuknín fest. Nachdem wir uns später beim Studium der Kasejovicer „grauen Erze“ überzeugt hatten, wie kompliziert die Zusammensetzung dieser Gemenge ist, konstatierten wir, daß die in jenen Arbeiten angeführte spezifische Bestimmung der Telluride nicht beizubehalten ist, sondern man sich bei der äußersten Spärlichkeit des Materiales mit dem bloßen Feststellen von Tellur begnügen muß.<sup>5)</sup>

Im J. 1915 eröffnete die fürstlich Colloredo-Mansfeldsche Herrschaftsverwaltung von Dobříš die Schürfungen nach Gold in den alten Bergbauen von *Bytís* E von Příbram, in der Waldstrecke „Na starých horách“

1) A. Hofmann, Stzb. kg. böhm. Ges. d. Wiss. 1906 Nr. 18.

2) Derselbe und F. Slavík, Rozpravy České Akademie 1912 u. 1913; dieses Bulletin XVII, 249—277 und XVIII, 94—140.

3) Dieselben, Stzb. kg. böhm. Ges. d. Wiss. 1909 Nr. 11.

4) A. Hofmann, dieses Bulletin 1912 (XVII), 208—219.

5) F. Slavík, Zeitsch. prakt. Geol. 1914, 343—373, bes. 359—360.



SSE von Dubenec, hart S an der Cö. 536. (Als Kuriosum sei hier angeführt, daß man das Mitglied der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien Herrn Dr. L u k a s W a a g e n berufen hat, um mit der *Wünschelrute* nach Gold zu suchen; er „fand“ es in der Nähe von alten Pingen.)

Über die geologischen und montanistischen Verhältnisse des Bytízer Goldvorkommens haben J. G r i m m<sup>6)</sup>, F. P o š e p n ý<sup>7)</sup> und J. L. B a r v í ř<sup>8)</sup> geschrieben; in allerletzter Zeit hat die Bearbeitung des Fundortes und seiner Umgebung Herr Dr. B. S t o č e s in Příbram in Angriff genommen.

In den Bytízer Gangquarzen, von denen ich einen größeren Vorrat durch die Liebenswürdigkeit des Herrn Koll. S t o č e s erhalten habe, ist nur spärlich Pyrit in winzigen Hexaëdern und Körnchen sowie Freigold eingesprengt, welches nur an einer Probe etwas reichlicher, doch nur in stecknadelkopfgroßen Stückchen zerstreut war. Der Farbe nach zu urteilen, ist das Freigold von einem hohen Feingehalt; damit stimmen die von P o š e p n ý publizierten Einlösungsdaten<sup>9)</sup> vom Bytízer Gold aus älterer Zeit, 0·930—0·998, gut überein.

An ziemlich vielen Gangquarzstückchen gewahrt man ein stark metallglänzendes Mineral eingesprengt, dessen Farbe an ganz frischem Bruche zinnweiß bis fast silberweiß, durch Anlauf graulich, bronzebis messinggelb erscheint; dasselbe bildet höchstens  $1\frac{1}{2}$  mm breite, gewöhnlich viel kleinere Schüppchen, die bisweilen deutlich hexagonale Begrenzung zeigen. Die Härte ist unter 2, die Spaltbarkeit nach der Tafelfläche vollkommen, die Spaltblättchen sind biegsam. Der Strich hat eine grauschwarze Farbe.

In diesem Minerale habe ich das *Tellur* durch die bekannte Rotfärbung des heißen konzentrierten Schwefelsäure, *Wismut* durch die Mikroreaktion mit der Arsensäure<sup>10)</sup> nachgewiesen, *Schwefel* hat sich bei der Zersetzung mit der Salpetersäure ausgeschieden. Parallelproben mit Spaltblättchen der Tetradymit von Župkov bei Schemnitz haben identische Resultate ergeben.

Das Mineral von Bytíz ist also vollkommen sicher ein *Tellurwismut*, und zwar eins von den schwefelhaltigen, nach der sehr hellen Farbe zu urteilen, am wahrscheinlichsten *Tetradymit*.

Einmal habe ich beim Auflösen eines Bytízer Tellurwismutblättchens einen Rest von gediegen Gold beobachtet, das jedoch mit demselben

<sup>6)</sup> J. G r i m m, Berg- u. Hüttenm. Jahrb. d. k. k. Mont.-Lehranst. 1855 (V. Bd.) 93—186, bes. 164.

<sup>7)</sup> F. P o š e p n ý, Archiv für prakt. Geol. II. (1895), 1-484, spez. S. 37 u. 155—160.

<sup>8)</sup> J. L. B a r v í ř, Věstník král. čes. spol. nauk 1896, Nr. 35, S. 53—56.

<sup>9)</sup> F. P o š e p n ý, l. c. (7) S. 156.

<sup>10)</sup> Vergl. H a u s h o f e r s Mikroskopische Reaktionen, S. 138—141 u. Fig. 123, 122.

mechanisch verwachsen war, wie einige Exemplare zeigen, an welchen das Tellurwismut zum Teile mit einem Anflug von gediegen Gold belegt oder mit einem Goldblättchen verwachsen erscheint.

Bei *Kasejovic*, im Jakob-Schurfschacht, wurden unter den schuppigen Telluriden auch solche von hellerer Farbe als Hofmanns Nagyagit gefunden, und auch die chemische Probe auf Wismut fiel in einigen Proben positiv aus. Mir scheint es jetzt, daß da eine Beimischung oder parallele Verwachsung von Tellurwismut mit Nagyagit vorliegt, wie wir auch eine Verwachsung des letzteren mit Molybdänit sichergestellt haben.

Bei *Libčic* konstatierte Hofmann (l. c. 4) zwei Telluride, bloß in untergeordneter Menge: das eine „*licht silberweiß mit einem Stich ins Bronzegelbe, sylvanitähnlich*“, das andere dunkler. Im Vorjahre erhielt ich in Libčic ein Stückchen des Gangquarzes mit anhaftendem Biotit-hornfels, welches nahe der Grenze ein hübsches Blättchen von gediegen Gold angewachsen enthält; dasselbe ist der Farbe nach von sehr hohem Feingehalt, und mit ihm parallel verwachsen ist ein Blättchen von zinnweißer Farbe mit schwach bronzegelbem Anflug, welches vollkommen einigen Tellurwismutindividuen von Bytíz gleicht. Hofmanns helles sylvanitähnliches Tellurid ist also wenigstens zum Teile Tellurwismut; leider habe ich die Identität bis jetzt wegen der Spärlichkeit des Materials nicht chemisch bekräftigen können.

\* \* \*

Der Fund von Tellurwismut bei Bytíz, Kasejovic und Libčic ist der erste in Böhmen und vermehrt die gemeinsamen paragenetischen Züge dieser beiderseits der Nordwestgrenze des großen mittelböhmischen Granitmassivs sich aneinanderreihenden Goldvorkommen. Wir haben mit Hofmann in unserer Arbeit über das goldführende Gebiet von Kasejovic (l. c. 2) auf die Analogie desselben mit den Golddistrikten des Appallachengebirges in den Staaten Georgia, N. Carolina und Virginia hingewiesen, die ebenfalls einen Zusammenhang von Goldquarzgängen mit vortertiären Granitintrusionen, einen mehr akzessorischen Charakter des Telluridenvorkommens sowie die Association des Goldes mit Wolfram- und Wismutverbindungen zeigen. Gerade die Tellurwismutmineralien wurden in den Appallachengoldgängen sehr häufig gefunden (Spottsylvania, Fluvanna, Davidson, Cabbarus, Lumpkin Co.'s). Die in vorliegender Notiz nachgewiesene Gegenwart von Tellurwismut an unseren Fundorten bestätigt in interessanter Weise die paragenetische Analogie zwischen den appalachischen und böhmischen Goldquarzgängen.

Prag, Oktober 1916.

*Mineralogisches Institut  
der böhmischen Universität.*

# Méthode pour separer le plomb du chrome par l'électrolyse et analyse du chromate de plomb et des couleurs qui en contiennent.

Par

J. Milbauer et I. Šetlík.

La détermination du plomb par l'électrolyse sous forme de peroxyde de plomb, a été dès les premiers essais, faits par Luckov (Zeit. f. anal. Chemie 8. 24.; 11. 9, 12; 19. 2. 15.) le sujet de nombreuses études.

On électrolyse une dissolution contenant plus que 10% d'acide nitrique libre de façon que la solution soit parcourue par un courant d'intensité donnée (Schucht: Zeit. f. anal. Chemie 22. 487.). Il est recommandable de faire l'électrolyse dans une capsule de Classen à surface mate (Zeit. f. anal. Chemie 42. 635) et de chauffer de 50° à 60° (Kreichgauer: Zeit. f. anorg. Chemie 9. 89; 42. 636.). Pour activer l'élimination, Rüdorff recommande (Zeit. f. angew. Chemie 1892, 197) d'ajouter à la solution un peu de nitrate de cuivre et de faire sécher PbO<sub>2</sub> obtenu à 110°. Une température plus élevée au cours de l'électrolyse accélère l'élimination du PbO<sub>2</sub>. Mais plus on augmente cette température, plus la pellicule risque de ne pas adhérer suffisamment. — D'autre part il est possible de diminuer la quantité d'acide nitrique que contient la solution, d'après les observations faites par Giese (Zeit. f. Elektroch. 2. 586.). Ce dernier conseille de faire sécher à 160°—180° la pellicule éliminée et de la faire refroidir lentement, afin qu'elle ne craquelle pas par un refroidissement trop rapide. Classen (l. c.) a soumis la détermination du plomb par l'électrolyse, en forme de peroxyde de plomb, à des études approfondies, et a donné des conditions précises touchant la concentration de la solution (pour 100 cc de solution, 20 cc d'acide nitrique  $d = 1.35—1.38$ ) température (50°—60°) et densité du courant ( $ND_{100} = 1.5—1.7$  Amp.). De cette façon on peut en précipiter en trois heures jusqu'à 1.5/gr PbO<sub>2</sub>. Il conseille enfin de laver à l'alcool et de faire sécher de 180°—190°. Cette dernière opération est indispensable, la matière précipitée ne correspondant pas à la composition normale du PbO<sub>2</sub>.



Hollard et Bertiaux (Analyse par l'Electrolyse, II<sup>e</sup>. edition, page 105) ont recommandé le facteur de calcul 0.853 au lieu du facteur théorique 0.866 pour calculer la quantité de plomb obtenu, si la pellicule a été séchée à une température de 100°. Smith (Journ. Amer. Chem. Soc. 27. 1287.) a conseillé de faire monter la température de 200° jusqu'à 280° et d'employer pour 0.5 g de plomb le facteur  $\frac{\text{Pb}}{\text{PbO}_2}$  égalant 0.8634, et pour des quantités moindres 0.05 g—0.11 g le facteur théorique. Il a accéléré l'électrolyse par la rotation de la cathode tournant 450 fois par minute. Cette intensité du courant pouvait être augmentée jusqu'à 11 ampères à la tension de 4 volts. Une capsule et une spirale de platine lui servaient d'électrodes. Exner a travaillé de la même façon (Journ. Amer. Chem. Soc. 25. 896).

Sand (Chem. News 100. 269) conseille de faire sécher la couche de peroxyde de plomb, à un brûleur de Bunsen et de la faire refroidir rapidement, car à son avis le  $\text{PbO}_2$  séché à 200° absorbe rapidement l'humidité. Il travaille à l'aide d'une électrode en forme de tamis tournant 800 fois par minute. Snowdon (Journ. of Phys. Chem. 10. 500.) a fait monter le nombre des rotations à 2000 par minute, et a reconnu que l'addition de gélatine est favorable. Fischer (Elektrol. Schnellmethoden, page 175) a électrolysé dans une capsule de platine à disque rotatif en guise d'anode, en faisant remarquer que l'augmentation du poids est causée par des traces d'eau et de nitrate de plomb. Il indique pour le peroxyde séché de 200°—230°, les facteurs suivants:

Pour 0 g 1 de plomb.....	0.8658
jusqu'à 0 g 3 „ „ .....	0.8652
„ „ 0 g 5 „ „ .....	0.8629
„ „ 1 g „ „ .....	0.8610

Le séchage à une température relativement élevée, qui seule peut faire disparaître les traces d'eau, risque aussi de causer la décomposition du peroxyde de plomb. Milbauer a pu constater que (Věstník král. české spol. nauk 1909, XVIII.) le peroxyde de plomb préparé de minium pur et chauffé longuement à 200°, commence à se décomposer visiblement en oxyde de plomb et en oxygène. En ces derniers temps Reinders et Hamburger (Zeit. f. anorg. Chemie 89, page 71 et suivantes) se sont livrés, sur la dissociation thermique du peroxyde de plomb, à des études détaillées et la méthode manométrique leur a prouvé que la dissociation se manifeste déjà à 100°. Cependant la vitesse de réaction est encore si minime sous 200°, qu'il n'est pas possible de la mesurer exactement.

Le peroxyde de plomb, obtenu par l'électrolyse, est encore moins réactif. Car ce n'est qu'après 7 heures de chauffage dans le vide à 250°, que se produit la pression de 5.4 mm. C'est l'incertitude où l'on se trouve de connaître l'état le plus convenable pour la substance éli-

minée avant la pesée, qui a conduit Treadwell (Lehrb. d. anal. Chemie II<sup>e</sup> édition, II<sup>e</sup> tome, page 120) à faire une proposition, faite auparavant déjà par May (Am. Journ. of Science and Arts (3.) 6. 255.) c'est-à-dire de transformer le peroxyde par calcination en oxyde de plomb. Il est vrai que ce procédé a l'inconvénient, que l'oxyde de plomb finement divisé, s'oxyde à une température élevée et se transforme en minium. Récemment Hac et Köhler ont démontré (Věstník sjezdu přirodozpytců a lékařů 1914, page 251) que les facteurs cités plus haut se rapprochent d'autant plus du chiffre théorique, que la couche précipitée du peroxyde est plus compacte. Ils recommandent expressément de calciner le produit et de peser l'oxyde de plomb. Enfin Ipiens (Zeit. f. anal. Chemie 1914, page 281,) contrôle par titration, d'après Lux, le peroxyde de plomb, séparé par l'électrolyse, Vortmann (Annalen d. Chem. 351. 283.) conseille de dissoudre de nouveau la pellicule du peroxyde de plomb par une addition d'acide oxalique se trouvant dans l'acide nitrique, et de renouveler l'électrolyse, qui débarrassera l'oxyde des impuretés qui s'y trouvent. —

Quant à la forme des électrodes, Classen, ainsi que nous l'avons déjà dit recommande une capsule de platine à surface mate. La plupart des auteurs s'en sont servis. Riche (Ann. Chim. Phys. (5.) 13. 508.) se servait comme anode d'un creuset plus petit, comme cathode d'un autre plus grand et mettait l'électrolyte entre eux, Goch et Bayer (Zeit. f. anorg. Chemie 61. 286.) se servaient d'un creuset perforé et d'un appareil assez compliqué, Marie Compt. rend. 130. 1032) séparait sans doute le peroxyde de plomb sur une tôle de platine.

Il est beaucoup plus rare de trouver dans la littérature des indications avec preuves à l'appui, sur la séparation des autres ions du plomb, par l'électrolyse en peroxyde de plomb, surtout lorsqu'il s'agit de l'acide chromique.

May (l. c.) a su séparer parfaitement le plomb du cuivre, de même Riche (Ann. Chim. Phys. (5.) 13. 508.) le plomb de l'argent. Selon Classen (Quantitative Analyse durch Electrolyse, IV<sup>ième</sup> édition, page 142) il est possible, en observant certaines conditions, de séparer le plomb du zinc, du fer, du nikel, du cobalt, du manganèse, du cuivre, du cadmium, de l'or, du mercure, de l'antimoine, de l'aluminium. Mais l'argent et le bismuth se mêlent au peroxyde. Vortmann (Liebig's Annalen: 351. 283.) a essayé de faire la séparation du peroxyde de plomb en présence  $Zn^{++}$ ,  $Ni^{++}$ ,  $Co^{++}$ ,  $Hg^{++}$ ,  $Ag^{+}$ ,  $Fe^{+++}$ ,  $Al^{+++}$ ,  $Ca^{++}$ ,  $K^{+}$ ,  $Na^{+}$  et  $H^{+}$  et il soutient que la séparation ne s'effectue, d'une manière exacte, qu'en l'absence des métaux, cités plus haut, sauf le cuivre. En présence de l'acide sulfurique, sélénique et chromique il n'a obtenu des résultats élevés, absolument justes qu'après la purification faite d'après la méthode décrite plus haut. La présence de l'acide phosphorique et de l'acide arsenique gênent de même l'élimination. Smith au contraire a démontré (Electrochemical Analysis 1907, III<sup>e</sup> édition, page 165) que l'on peut exactement séparer le plomb

comme peroxyde, des métaux alcalins, des métaux de terres alcalines, du beryllium, du magnesium, du mercure et de l'aluminium, et que même la présence du chrome ne peut pas nuire. Le bismuth au contraire se mêle toujours à la pellicule. Enfin pour compléter, nous ajoutons que Neumann (Chem. Ztg. 20. 382.) a constaté quant au manganèse que la quantité dépassant 0.03 pour 150cc commence à se mêler au dépôt de peroxyde et que par les méthodes d'électrolyse accélérée on peut séparer l'argent du plomb et rendre l'électrolyse possible même en présence des sulfates (Sand, l. c.).

D'après tout ce qui précède, (puisé dans la littérature sur la façon de séparer le plomb du chrome) ce n'est que Smith qui fait mention de la possibilité de séparer le peroxyde de plomb en présence de l'ion  $\text{Cr}^{+++}$ ; au contraire il est connu qu'à un courant de haute tension et de forte intensité  $\text{Cr}^{+++}$  s'oxyde en  $\text{Cr}_2\text{O}_7$  et qu'ainsi on peut le doser (Classen, l. c.). La présence de l'acide chromique rend la séparation du plomb difficile d'après les données de Vortmann (l. c.).

Connaissant ces différentes méthodes incompatibles voici les essais que nous avons entrepris:

a) Nous avons pris comme anode une capsule électrolytique Classen, à surface mate, de 250cc — une électrode double de Hildebrandt en forme de tamis (Journ. Amer. Chem. Soc. 29. 447.) fixée à un support, qui permet sa rotation, entre dans la capsule. Nous avons prélevé une certaine quantité de solution de nitrate de plomb et de nitrate de chrome correspondant à 0.2009 g Pb et 0.0506 g Cr, à laquelle nous avons ajouté 20 cc d'acide nitrique ( $d = 1.4$ ) puis de l'eau distillée jusqu'à 150 cc, ensuite avons soumis à l'électrolyse à l'intensité de 1.5 ampères et à tension de 2.5—2.7 voltes pendant  $2\frac{1}{4}$  h et à la température normale sans mouvement de cathode. Nous avons lavé le peroxyde séparé, puis recueilli le liquide que nous avons concentré, neutralisé par l'ammoniaque pour pouvoire précipiter l'hydroxyde de chrome et enfin pesé  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ .

Voici les résultats obtenus:

Peroxyde de plomb séché à 200° C... 0.2344 g  $\text{PbO}_2$  sans facteur 0.2030 g Pb  
Après la dissolution d'après Vortmann

(l. c.) et nouvelle électrolyse... 0.2335 g  $\text{PbO}_2$ .. sans facteur 0.2022 g Pb  
puis séché à 100° C (d'après Bertiaux

et Hollard l. c.)..... 0.2335 g  $\text{PbO}_2$ .. avec le facteur 0.2015 g Pb

séché à 110° C (d'après Rüdorff l. c.) 0.2334 g  $\text{PbO}_2$ .. sans facteur 0.2021 g Pb

séché à 160° C (d'après Giese l. c.).. 0.2329 g  $\text{PbO}_2$ ... sans facteur 0.2014 g Pb

séché à 190° C (d'après Classen l. c.) . 0.2323 g  $\text{PbO}_2$ ... sans facteur 0.2011 g Pb

séché à 210° C (d'après Smith l. c.) . 0.2321 g  $\text{PbO}_2$  .. avec le facteur 0.2004 g Pb

séché à 230° C (d'après Fischer l. c.) . 0.2316 g  $\text{PbO}_2$  .. avec le facteur 0.2009 g Pb

Après calcination à 600° C (d'après

May l. c.) !..... 0.2162 g PbO ..... 0.2007 g Pb

Trouvé: 0.2006 g Pb (May, Fischer)

Employé: 0.2009 g Pb ce qui correspond à 99.80%



Le sel chromique resté dans la solution a donné:

0.0735 g  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  ce qui correspond à 0.0504 g Cr c'est à dire 99.60%

b) L'essai répété à la tension de 2 volts et à l'intensité de 0.2 ampères.

Employé:	Trouvé:	Correspondant: <sup>1)</sup>	Différence en %:
0.2524 g Pb ··	0.2914 g $\text{PbO}_2$	0.2521 g Pb ··	— 0.10%
0.1023 g Cr ··	0.1506 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.1031 g Cr ··	+ 0.80%

c) Le même essai, mais fait à la tension de 1.5 volts et à l'intensité de 0.1 ampère:

Employé:	Trouvé:	Correspondant:	Différence en %
1. 0.2984 g Pb ··	0.3456 g $\text{PbO}_2$	0.2982 g Pb ··	— 0.08%
2. 0.5000 g Pb ··	0.5760 g $\text{PbO}_2$	0.4988 g Pb ··	— 0.22%
1. 0.1535 g Cr ··	0.2296 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.1572 g Cr ··	+ 2.40%
2. 0.2558 g Cr ··	0.3765 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.2578 g Cr ··	+ 0.80%

d) Quant à d'autres applications pour séparer le plomb du chrome dans les coulures minérales qu'on ne peut dissoudre que dans un mélange d'acide nitrique et d'acide perchlorique, il fallait d'abord constater si la présence de ce dernier ne pouvait pas nuire au courant de l'électrolyse.

Nous avons laissé la même concentration en remplaçant 20 cc d'eau par 20 cc d'acide perchlorique ( $d = 1.12$ , Merck. pro analysi), et nous avons chauffé la solution presque jusqu'à l'ébullition.<sup>2)</sup> Alors seulement nous l'avons diluée par l'eau, et étant refroidie nous l'avons soumise à l'électrolyse par un courant 1.5 ampère et 2.7—2.5 volts pendant 2½ heures.

Employé:	Trouvé:	Correspondant:	Différence:
0.5048 g Pb ··	0.5879 g $\text{PbO}_2$	0.5062 g Pb ··	+ 0.8%
0.1023 g Cr ··	0.1506 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.1031 g Cr ··	+ 0.80%

e) Le même essai mais fait à une intensité diminuée jusqu'à 0.2 ampère et  $E = 2$  volts, pendant 12 heures:

Trouvé:	Correspondant:	Employé:	Différence:
0.5830 g $\text{PbO}_2$	0.5020 g Pb ··	0.5048 g Pb ··	— 0.56%

f) Dans les essais suivants pareils aux précédents, nous nous sommes servis d'un courant encore plus faible, 0.1 ampère et 1.5 volte pendant 18 heures, et nous avons choisi la proportion Pb : Cr, telle qu'elle se trouve

<sup>1)</sup> Pour le  $\text{PbO}_2$ , corrigé d'après Fischer (l. c.) sans répéter la séparation d'après Vortmann (l. c.).

<sup>2)</sup> Pour décomposer des oxydes de chlore inférieurs. (Comparer: Věstník Král. Č. Spol. nauk 1911. XVII.)

dans le chromate de plomb,  $\text{PbO}_2$  obtenu fut dissout et précipité de nouveau par l'électrolyse.

	Trouvé:	Employé:	Correspondant:	Différence:
1.	0.2282 g $\text{PbO}_2$	0.1982 g Pb · ·	0.1975 g Pb · ·	— 0.38% Pb
	0.0726 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.0495 g Cr · ·	0.0497 g Cr · ·	+ 0.40% Cr
2.	0.4731 g $\text{PbO}_2$	0.4090 g Pb · ·	0.4083 g Pb · ·	— 0.18% Pb
	0.1502 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.1023 g Cr · ·	0.1028 g Cr · ·	+ 0.53% Cr

g) Il est possible de diminuer encore l'intensité du courant, si nous prolongeons la séparation jusqu'à 24 heures.

1. A 0.09 ampère et 1.5 voltes:

	Employé:	Trouvé:	Différence:
	0.1982 g Pb · ·	0.2286 g $\text{PbO}_2$ = 0.1978 g Pb	0.20% Pb · ·
	0.1023 g Cr · ·	0.1494 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$ = 0.1023 g Cr	0.0% Cr · ·

2. A 0.1 ampère et 1.7 voltes:

	Employé:	Obtenu:	Différence:
	0.1982 g Pb · ·	0.2282 g $\text{PbO}_2$ = 0.1975 g Pb · ·	— 0.35% Pb · ·
	0.1023 g Cr · ·	0.1498 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$ = 0.1025 g Cr · ·	+ 0.06% Cr · ·

Mais si nous diminuons davantage l'intensité du courant, les résultats obtenus sont trop inférieurs:

1. A 0.06 ampère et 0.15 volte pendant 26 heures nous avons trouvé 77.99% sur la quantité totale du plomb.
2. A 0.07 ampère et 0.3 volte pendant 14 heures nous avons trouvé 37.39% sur la quantité totale du plomb.

D'après les résultats obtenus il est possible de séparer le plomb en forme de peroxyde de plomb, du chrome présent sous forme  $\text{Cr} \cdot \cdot$ , si dans la solution de 150 cc, contenant 0.2 g Pb et 0.1 g Cr, se trouve 20 cc d'acide nitrique ( $d = 1.4$ ) et 15 cc d'acide perchlorique ( $d = 1.12$ , Merck).

Ce n'est qu'après avoir constaté ces circonstances, qu'il nous a été possible d'analyser le chromate de plomb et ensuite les couleurs en contenant en général, question qui est étroitement liée à une série de travaux faits dans notre Ecole Polytechnique (Ouvrage fait en collaboration avec ing. C. Kohn, sur le jaune de chrome, publié en partie dans „Věstník král. čes. spol. nauk 1915, XXVI, et le rouge de chrome entrepris avec le Dr. B. Pivnička). Au cours de ces travaux nous avons souvent été arrêtés par la nécessité d'une analyse prompte et complète des produits que nous avons obtenus et même des produits fabriqués en gros. Les détails donnés dans la littérature, sur la fabrication ne s'accordent pas avec la réalité, car on n'indique pas les petits détails de fabrication et c'est ce que nous avons voulu expliquer, surtout quant à la teinte foncée que prend, au bout d'un certain temps, le jaune de chrome; ce qui jusqu'à

ce jour n'a pas été suffisamment expliqué. Il a donc fallu analyser différents types de couleurs de fabriques connues.

On analyse habituellement selon la méthode employée pour le chromate simple c'est-à-dire de faire dissoudre la matière dans l'acide chlorhydrique en y ajoutant de l'alcool éthylique. De cette façon et à une température élevée la réduction se fait assez facilement, et la séparation du sulfate de plomb se fait bien, cependant la matière filtrée contenant du chrome et des matières organiques, ne se précipite ni par l'ammoniaque, ni par le sulphohydrate d'ammoniaque. C'est en vain que nous avons essayé de remplacer l'alcool éthylique par un autre agent organique réducteur, toujours les mêmes obstacles se sont présentés. Lorsqu'ensuite nous avons laissé évaporer la solution et enfin kjeldalisé par l'acide sulfurique, pour détruire les traces de matières organiques, le chrome se trouve alors sous formes complexes d'acides sulfochromiques.

Voici les prescriptions que nous trouvons dans la littérature chimique sur l'analyse du chromate de plomb et des couleurs le contenant:

M. Willenz (Bull. Assoc. 1898, p. 163) dissout 1 g de matière dans l'acide chlorhydrique dilué 1 : 20, et filtre et lave par l'eau. La solution filtrée contient du sulfate de calcium. Il lessive ce qui reste sur le filtre avec une solution chaude et neutre d'acétate d'ammonium, qui dissout le sulfate de plomb. Il y ajoute de l'acide sulfurique, évapore et pèse. Le résidu insoluble, contenant du chromate de plomb, de l'argile et du sulfate de barium est soumis à l'ébullition pendant dix minutes avec 75 cc de lessive de potasse à 4%. On filtre, et on obtient une solution, dans laquelle on détermine le chrome et le plomb comme d'habitude. Cette méthode ne donne pas de résultats justes, parce qu'une partie de  $Pb$  et  $CrO_4$  passe en solution par l'acide chlorhydrique dilué, ainsi que nous nous en sommes persuadés par des essais avec du chromate de plomb pur et du jaune de chrome technique.

Une autre méthode comparativement compliquée a été décrite par H. Amsel (Zeit. f. angew. Ch. 9. 613). Il mélange 0.5g de couleur avec 10—15 cc de potasse caustique à 10%, il ajoute 10 cc d'eau et fait bouillir, de sorte que tout, sauf le sulfate de barium et le carbonate de chaux, entre en dissolution. Ensuite il ajoute de l'acide (chlorhydrique ou nitrique) à l'excès. Il fait bouillir, filtre et détermine la quantité de sulfate de barium. Il neutralise, par le carbonate de soude, la solution filtrée et précipite le carbonate de plomb et le carbonate de calcium, par un excès de carbonate de soude; puis il ajoute de l'eau de brome et sépare le chromate et le sulfate alcalin par filtration. Alors il détermine, après la réduction, en présence de l'acide chlorhydrique et de l'alcool, le chrome et même  $SO_4$ . Ceci fait, il sépare, par les méthodes usuelles, le carbonate de plomb, le carbonate de calcium et le carbonate de zinc. En l'absence de zinc, il conseille de déterminer le plomb, après l'avoir transformé, par le brome en peroxyde de plomb, par la titration avec l'acide oxalique et le perman-



ganate de potasse. Cette méthode-là n'est pas sans défauts. La dissolution faite par la soude caustique, ne réussit qu'en partie, les carbonates sur le filtre sont d'un jaune intense et contiennent du chrome.

Dans le recueil de Rüdüsili (Nachweis, Bestimmung u. Trennung der chemischen Elemente vol. III., p. 560) on recommande de doser le plomb dans le jaune de chrome, de la même façon que pour la céruse: On dissout 0.1 g de matière dans un mélange de 10 cc d'acide nitrique et de 40 cc d'eau à 70° C, puis on soumet la solution à l'électrolyse. Cette méthode-là convient bien pour la céruse, mais non pas pour les jaunes de chrome, contenant du sulfate de plomb, ni pour ceux, séchés à une température un peu plus élevée; car la dissolution par l'acide dilué, comme il est dit plus haut, ne réussit pas.

La méthode de C. Marie (Compt. rend. vol. 130, p. 1032) serait plus avantageuse si elle était accommodée aux produits techniques. Il propose de dissoudre le chromate de plomb de la façon suivante: Il ajoute à 0.5 g de produit 2 g d'acétate d'ammonium, et assez d'acide nitrique pour que la solution ayant été chauffée de 60—70° C il y ait encore 10 % d'acide nitrique libre, après dissolution. Ensuite il sépare le plomb par l'électrolyse habituelle. Dans cet ouvrage on ne trouve pas de détails, de preuves à l'appui plus précis. —

Après une série d'essais, au cours desquels, nous avons tâché, de dissoudre le chromate de plomb et les couleurs en contenant, de façon à ce qu'aucune matière, pouvant gêner l'analyse, ne s'y introduise. Nous avons trouvé que le mélange à chaud de l'acide nitrique et perchlorique dissout tous les échantillons que nous avons soumis à l'analyse. Nous avons également trouvé, que par l'électrolyse on peut séparer le plomb de la solution obtenue, sous forme de peroxyde de plomb et aussi moyennant certaines conditions, réduire le ion  $\text{CrO}_4^{2-}$  à  $\text{Cr}^{3+}$ . — De toutes les concentrations de mélanges d'acide nitrique et perchlorique, voici celui qui convient le mieux:

20 cc d'acide nitrique  $h = 1.4$  et

15 cc d'acide perchlorique  $h = 1.12$  (Merck, pro analysi.),

parce qu'il dissout l'échantillon (pesé ordinairement) 0.3 g chauffé à l'ébullition dans un laps de temps comparativement court (20' m. au maximum). L'acidité de la solution est telle que la séparation du peroxyde de plomb par l'électrolyse se fait régulièrement. —

En premier lieu nous avons fait les essais suivants prouvant, que notre méthode est applicable:

i) Nous avons dissout dans le mélange sus-cité 0.3 g de chromate de plomb<sup>3)</sup> et enfin soumis à une ébullition modérée, puis rincé la solution dans une capsule électrolytique de platine. Nous avons fait passer

<sup>3)</sup> Contenant 0.19% d'humidité. —

un courant de 0.1 ampère et 1.75 volt pendant 15 heures, puis nous avons pesé le peroxyde de plomb, précipité l'hydroxyde de chrome qui se trouvait dans la solution et pesé à l'état d'oxyde de chrome.

k) Nous avons décomposé le même échantillon au bain-marie par l'acide chlorhydrique et enfin directement sur le feu dans un vase de porcelaine, et quand la solution eut une teinte verte pure, nous y avons ajouté de l'acide sulfurique en petit excès et nous avons concentré, pour que la majeure partie de l'acide chlorhydrique en soit chassé. De nouveau étendu d'eau il a été ensuite évaporé jusqu'à presque complète siccité, puis repris avec peu d'eau, nous avons filtré le sulfate de plomb, lavé ensuite par la quantité nécessaire d'acide sulfurique dilué. Le sulfate de plomb recueilli sur le filtre retient un peu de sel chromique ce qui le rend légèrement verdâtre. Nous avons constaté qu'on peut le purifier de la façon proposée par F. Mar (Sill. Americ. Journ. (3), 43. 525) pour le sulfate de barium, c'est-à-dire de le dissoudre dans l'acide sulfurique concentré, avec la seule différence qu'il est inutile d'évaporer jusqu'à siccité, et d'extraire par l'eau; mais de simplement l'éliminer à l'aide, d'une certaine quantité d'eau froide, filtrer de nouveau et laver. Les solutions filtrées étant réunies, on en a précipité Cr... sous forme de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ . Des procédés connus étant employés pour mettre le sulfate de plomb à l'état pondérable.

Voici les résultats obtenus par Par la voie habituelle de 0.998 g<sup>1)</sup>

l'électrolyse:

I. 0.2236 g $\text{PbO}_2$	I. 0.9370 g $\text{PbSO}_4$
— $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.2282 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$
II. 0.2217 g $\text{PbO}_2$	
— $\text{Cr}_2\text{O}_3$	
III. 0.2234 g $\text{PbO}_2$	II. 0.9390 g $\text{PbSO}_4$
— $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.2270 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$
IV. 0.2228 g $\text{PbO}_2$	
0.0680 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	
V. 0.2220 g $\text{PbO}_2$	III. 0.9356 g $\text{PbSO}_4$
0.0712 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.2275 g $\text{Cr}_2\text{O}_3$

Il en résulte les valeurs moyennes suivantes:

Par la méthode électrolytique .....	69.28% $\text{PbO}$
.....	30.55% $\text{Cr}_2\text{O}_3$
Par la méthode au sulfate .....	69.08% $\text{PbO}$
.....	30.56% $\text{Cr}_2\text{O}_3$
$\text{PbCrO}_4$ contient théorétiquement.....	69.01% $\text{PbO}$
.....	30.99% $\text{Cr}_2\text{O}_3$

Par les mêmes procédés nous avons analysé un autre produit contenant

<sup>1)</sup> Nous avons pesé 1 g de matière qui contenait 0.19% d'humidité.

du chromate de plomb et voici ce que nous avons trouvé de 0.3 g de matière :

- I. 0.1944 g  $\text{PbO}_2$
- II. 0.1948 g  $\text{PbO}_2$
- III. 0.1954 g  $\text{PbO}_2$
- IV. 0.1946 g  $\text{PbO}_2$

ce qui correspond à la moyenne de 60.58%  $\text{PbO}$  en opposition aux 60.30%  $\text{PbO}$  que nous avons trouvé sous forme de sulfate de plomb.

Même dans ce cas-là, nous avons fait des essais pour savoir s'il est possible d'abrégier le temps de durée de la séparation du peroxyde de plomb et nous avons trouvé que à 0.9 ampère et 0.6 voltes il s'est séparé au bout de 6 heures :

- I. 0.1943 g  $\text{PbO}_2$
- II. 0.1738 g  $\text{PbO}_2$

en opposition de 0.2227 (valeur moyenne citée plus haut) mais déjà 0.2220 g  $\text{PbO}_2$  après la durée de 7 heures.

Il est très avantageux même en présence d'acide perchlorique de mettre l'électrolyte en mouvement; car ainsi nous avons séparé en tout 0.2234 g  $\text{PbO}_2$  avec 800 rotations de la cathode par minute à la tension de 2.5 voltes et d'un courant 3.5 ampères, pendant le premier quart d'heure et celui de 2.5 ampères pendant le second.

Ces résultats favorables nous ont conduits à appliquer notre méthode à l'analyse des produits techniques par l'électrolyse. A cette occasion nous avons trouvé que l'électrolyse parcourt sûrement, que la séparation du peroxyde de plomb est quantitative, que la réduction de  $\text{CrO}_4^{--}$  en  $\text{Cr}^{+++}$ , quand nous nous y prenons de telle façon que dès le début de l'électrolyse, le courant que nous faisons passer, ait pendant les premières deux heures à peu près l'intensité de 0.2—0.5 ampères, et que pendant tout ce temps travaille un tamis cathode de Hildebrand, auquel nous imprimons un mouvement de 140 rotations par minute. Nous continuons alors l'électrolyse pendant la nuit, environ 12 heures, à 0.09—0.1 ampère et 1.5—1.6 voltes.

Voici la composition que nous avons trouvée en analysant des échantillons de fabriques connues :

Par voie d'électrolyse :	Par voie usuelle :
I. Echantillon n° 203 rougeâtre :	
68.99% $\text{PbO}$	68.89% $\text{PbO}$
22.36% $\text{CrO}_3$	22.74% $\text{CrO}_3$
37.6% $\text{Al}_2\text{O}_3$	6.27% $\text{Al}_2\text{O}_3$
1.39% $\text{Na}_2\text{SO}_4$	1.40% $\text{Na}_2\text{SO}_4$
0.58% d'humidité	0.58% d'humidité
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> 99.69%	<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> 99.88%



## II. Echantillon n° 403 jaune clair:

41.62% PbO	41.46%	41.51% PbO
17.63% CrO <sub>3</sub>	17.76%	17.97% CrO <sub>3</sub>
38.02% résidus insolubles (argile) dans l'acide	38.15%	38.10% d'argile
1.86% parties solubles dans l'eau	1.80%	1.79% parties solubles
0.26% pertes par le séchage	0.26%	0.26% pertes par le séchage
0.61% non déterminés	0.57%	0.38% non déterminés
<hr/> 100.00%	<hr/> 100.00%	<hr/> 100.00%

## III. Echantillon n° 351 jaune tirant sur le brun:

67.68% PbO	67.98% PbO
15.48% CrO <sub>3</sub>	15.48% CrO <sub>3</sub>
4.34% CO <sub>2</sub>	—
1.28% d'humidité	—
0.35% de parties insolubles	—
10.87% de parties solubles et de matière colorante organique	—
<hr/> 100.00%	

## IV. Echantillon de rouge de chrome:

79.96% PbO	79.74% PbO
19.34% CrO <sub>3</sub>	19.52% CrO <sub>3</sub>
— traces d'alcalis	—

## V. Echantillon Ia. jaune clair:

46.08% PbO	46.16% PbO
20.49% CrO <sub>3</sub>	19.52% CrO <sub>3</sub>
31.29% de parties insolubles (kaolin et sulfate de barium)	
1.78% de parties solubles	—
0.29% d'humidité	—
<hr/> 99.93%	

## VI. Echantillon 316 jaune citron:

69.07% PbO	69.01% PbO
29.12% CrO <sub>3</sub>	29.39% CrO <sub>3</sub>
1.42% SO <sub>3</sub>	1.41% SO <sub>3</sub>
0.26% d'humidité	0.26% d'humidité'
<hr/> 99.87%	<hr/> 100.07%

Voici ce que nous pouvons **conclure** de nos travaux:

1. Pour la décomposition du chromate de plomb et des couleurs qui en contiennent, on peut employer avec succès l'acide chlorhydrique (sans alcool).

2. Le sulfate de plomb obtenu au cours de l'analyse pondérale et souillé par le sel chromique, peut être purifié en le dissolvant par l'acide sulfurique concentré, puis précipité par l'eau.

3. Un mélange d'acide nitrique et d'acide perchlorique à une certaine concentration, rend possible la dissolution du chromate de plomb et des couleurs le contenant. Il permet aussi de séparer le plomb de cette solution par l'électrolyse, sous forme de peroxyde de plomb; le courant réduit en même temps le ion  $\text{CrO}_4''$  en  $\text{Cr}'''$ . — Les résultats sont très satisfaisants, si nous dissolvons le peroxyde de plomb séparé, par l'acide nitrique, en ajoutant de l'acide oxalique et en soumettant de nouveau à l'électrolyse (d'après Vortmann), enfin en chauffant le peroxyde lavé à  $230^\circ\text{C}$  (d'après Fischer). Ou bien nous le transformons (d'après May) par la calcination en oxyde de plomb. —

Notre ouvrage donne la description de la voie à suivre pour analyser sur la base électrolytique le jaune de chrome et aussi la composition de quelques couleurs typiques provenant de fabriques connues.

Prague, Juin 1915.

*Du laboratoire de la chimie technologique des matières inorganique  
à l'école Polytechnique tchèque de Prague.*

# Ein Profil durch das Příbram-Jinecer Kambrium.<sup>1)</sup>

Von

Dr. Radim Kettner.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Mai 1918.)

Das hier veröffentlichte Profil ist für das Příbram-Jinecer Kambrium *grundlegend* — es zeigt nicht nur die vollständige kambrische Schichtenfolge, sondern auch das vollständige stratigraphische und tektonische Verhältnis der einzelnen kambrischen Zonen einerseits zueinander, andererseits zu den algonkischen Zonen und zum mittelt öhmischen Granitmassive.

Unser Profil nimmt einen großen Teil des sö. Flügels des Barrandiens ein und bietet auf diese Weise einen guten Einblick in den inneren Bau des Brdygebirges. Es beginnt im untersilurischen Gebiete im Litavkatale oberhalb *Lochovice* (in den Zahořaner Schichten  $D d_{3+4}$ ) und geht über den quarzitischen *Plešivec* ( $D d_2$ ) zu *Běřín* oberhalb Jince und über die kambrischen Kämme des Brdygebirges (*Komorsko*, *Hořice*, *Malý Chlum* bei Hluboš) in die II. (d. i. algonkische) Schieferzone zwischen *Žirov* und *Pičín*. Auf dem splitischen Hügel 500 bei *Žirov* tritt es in die I. Příbramer (kambrische) Grauwackenzone ein, schneidet den Rücken *Hádov* bei *Liha* und dringt beim Meierhofe *Skalka* in die I. (algonk.) Schieferzone ein. Von hier setzt sich das Profil in der Umgebung der Ortschaft *Cihelna* in die kambrische Dubenec-Druhlicer Zone fort und dringt am Berge *Chlum*, im *Toker Tale* die Dubenec-Druhlicer Zone verlassend, in den Rand des mittelböhmisches Granitmassives (*G r.*) ein, welcher sich hier direkt an die Dubenec-Druhlicer Zone anlehnt.

Es schneidet also unser Profil alle kambrischen Zonen der Příbramer Umgebung: die *Dubenec-Druhlicer Zone* (*D. dr.*), die *I. Příbramer Grau-*

---

<sup>1)</sup> Die hier im Texte in Klammern angeführten Abkürzungen (z. B. *I. dr.*, *C c*,  $\delta$ , *R. svh.* u. s. w.) beziehen sich auf die in unserem Profile angewendeten Bezeichnungen; *s.* = Schutt und Lehm,  $\delta$  —  $\delta$  = Dislokationen in der Plešivec-Gruppe.



wackenzone (I. dr.) und die II. Příbramer Grauwackenzone (II. dr.). Die einzelnen kambrischen Zonen sind durch algonkische Schieferzonen voneinander getrennt. Von diesen ist die II. Příbramer Schieferzone (II. br.) älter als die erste (I. br.), denn sie enthält *spilitische Ergußgesteine* (Sp.) und *Lydite* (*Kieselschiefer*) (L.);<sup>2)</sup> den spilitischen Ergußgesteinen sind auch die *Proterobase* (Pt.), von denen einer auch in unser Profil fällt, genetisch anzugliedern. Die I. Schieferzone gehört zum jüngsten Abschnitte des böhm. Algonkiums; es fehlen hier Lydite und Spilite, dagegen ist hier der wichtige Horizont der *Grauwackenkonglomerate* (kongl.) typisch entwickelt. Desselben Alters, wie die I. Schieferzone ist auch das algonkische Liegende der Dubenec-Druhlicer Zone (Alg. im Profil).

In den kambrischen Zonen zeigt unser Profil nur in der II. Grauwackenzone die vollständige Schichtenfolge. Es schneidet hier auch die jüngsten kambrischen Schichten, nämlich: die *Jinecer Schichten* ( $C c_2$ ) und die im Hangenden der letzteren auftretenden *Birkenberger Sandsteine* ( $C c_3$ ). In den übrigen zwei kambrischen Zonen ist nur die untere kambrische Stufe :  $C c_1$  (*Příbramer Grauwacken*) vollständig entwickelt und zwar durch die üblichen vier Abteilungen.: durch die *Žitecer Konglomerate* ( $C c_1 \alpha$ ), die *Hlubošer Konglomerate* ( $C c_1 \beta$ ), die *Sádek-Bohulínier Schichten* ( $C c_1 \gamma$ ) und die *Třemošná-Konglomerate* ( $C c_1 \delta$ ). In der Dubenec-Druhlicer Zone sind die Konglomerate  $C c_1 \alpha$  und  $C c_1 \beta$  vom Granite intensiv *kontaktmetamorph* beeinflußt (im Profile durch vertikale Schraffen dargestellt).<sup>3)</sup>

Das direkte Hangende der Birkenberger Sandsteine ( $C c_3$ ) bildet gewöhnlich in der Jinecer Gegend die eisensteinführende *Komoráner Zone* ( $D d_1 \beta$ ); die *Krušná hora-Schichten* ( $D d_1 \alpha$ ) pflegen hier zu fehlen.

Unser Profil zeigt, daß die einzelnen Glieder der kambrischen Schichtenfolge sich einigemal wiederholen. Diese Wiederholung ist durch eine Reihe von streichenden Störungen hervorgerufen worden, von denen die Mehrzahl die Natur der *Überschiebungen* besitzen. Da sich diese Störungen im sö. Flügel des Barrandiens auf längere Distanzen verfolgen lassen, haben wir sie mit speziellen *lokalen Namen* versehen. Vom SO an folgen diese Längsstörungen (Überschiebungen) in unserem Profile hintereinander:

1. *Die Dubenecer Überschiebung* (R. d.). Sie beginnt auf der Kote 602 bei Háje und führt, die Grenze zwischen der Dubenec-Druhlicer Zone und der I. Schieferzone bildend, über Dubenec, Skalka, Dlouhá Lhota und den nördl. Abhang der Vrchy bei Vobořiště bis zur Tuškovter Mühle an der Kocába.

2. *Die Heiligberger Überschiebung* (R. svh.). Dieselbe zieht sich durch die Mitte der ganzen I. Grauwackenzone und zwar vom Hluboký-

<sup>2)</sup> Vergl. R. Kettner: Versuch einer stratigraphischen Einteilung des böhm. Algonkiums, Geol. Rundschau. 1917.

<sup>3)</sup> Vergl. die Arbeit von Mlada Kettnerová: O metamorfovaných slepencích kambrických od Dubence u Příbramě, Rozpravy Čes. Akad. 1918.



Teiche bei Nesvačily über Vysoká, Narysov, Vojna, den Heiligen Berg bei Příbram, Pichce, Hadov und Kamení bei Rosovice bis auf den Wolfsberg bei Dobříš; hier vereint sie sich mit der nächstfolgenden Überschiebung: der Příbramer Lettenkluft.

3. Die Příbramer Lettenkluft (R. j.) begrenzt die I. Grauwackenzone auf ihrer NW Seite gegen die II. Schieferzone. Am deutlichsten ist sie im Birkenberger Bergbaue entblößt.

4. Die Brdy-Überschiebung (R. b.). Die wichtigste Längsstörung für das Brdy-Gebirge. Sie verläuft in der II. Grauwackenzone vom Slo-novec nördl. von Příbram über Komorsko, Holý Vrch, Provazec, Malý Vrch und Kuchyňka auf den Hřeby-Rücken, wo sie am deutlichsten durch den steilen Abhang unterhalb Hradec, Vysoká Jedle, Jistebný und Boží vrážky gekennzeichnet ist.

Nördl. von der Brdy-Überschiebung folgen in der Jinecer Gegend westl. von der Litavka noch weitere wichtige Längsüberschiebungen; auf das rechte Litavkaufer und dabei in unser Profil reicht aber von ihnen nur die Čenkover Überschiebung (R. č.) in den Třemošná Konglomeraten.

Die weiteren, den NW Teil unseres Profils betreffenden Störungen sind nur lokaler Bedeutung, indem sie sich bloß auf die quarzitische Plešivec-Gruppe beschränken. Einige von ihnen sind durch radiale Kräfte hervorgerufene Dislokationen, also echte Senkungsbrüche, die, wie es scheint, jünger sind, als die Längsüberschiebungen. Der wichtigste und bekannteste dieser Brüche ist der Ostrý-Bruch (Z. O.), der sich vom Giftberge bei Komorau über den Ostrý bei Felbabka zieht, bei der Papierfabrik die Litavka überquert und sich gegen Lhotka fortsetzt.

Beachtenswert in unserem Profile ist die I. Grauwackenzone. Ihre Schichten bilden hier keine Synklinale, wie man früher annahm. Die synklinale Umbiegung der Schichten beschränkt sich nur auf die sw. Hälfte der I. Grauwackenzone bis zur Litavka bei Příbram;<sup>4)</sup> nö davon fallen die Schichten sämtlich unter die Lettenkluft nach NW.

Die isoklinale Zusammenlegung der kambrischen Schichten in liegende Falten, wie sie von Liebus<sup>5)</sup> vorausgesetzt wird, läßt sich nach der Erkenntnis der wahren Stratigraphie überhaupt nicht annehmen. Der Teil unseres Profils zwischen Běřín und der II. Schieferzone deckt sich beinahe mit dem Liebus'schen Profile Fig. 3. (S. 772) und beweist am besten die unrichtige Schichtenidentifizierung Liebus' und die daraus sich ergebende Unhaltbarkeit der Liebus'schen Ansicht über den tektonischen Aufbau des Brdygebirges.

<sup>4)</sup> Vergl. R. Kettner: Nový geologický profil příbramskými doly a příbramským okolím (Neues geol. Profil durch den Bergbau u. die Umgebung v. Příbram), Sborník čes. spol. zeměvědné, 1918.

<sup>5)</sup> Geolog. Studien am Südostrande des Altpaläozoikums in Mittelböhmen. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt 1913, S. 743—776.



Wie ersichtlich, fallen die den Überschiebungen entsprechenden Dislokationsflächen im sö. Flügel des Barrandiens durchgehends steil ( $60—70^{\circ}$ ) nach NW ein. Die Überschiebungen entstanden nicht durch die Reduktion der Mittelschenkel der überkippten Falten, sondern bloß durch einseitige Hebungen der Schollen.

Brünn, im April 1918.

# Über Atmung und Atmungsorgane der Chironomidenlarven.

(Auszug aus der böhm. Abhandlung, R. Č. Ak. č. 3.)

Von

Dr. JAN ZAVŘEL (Hradec Králové).

## A. Topographie des Tracheensystems:

*Chironomidenlarven* sind apneustisch; sie entbehren der offenen Stigmen. Nach der Ausbildung der Tracheen kann man zwei Larventypen unterscheiden (Miall):

a) Tracheen im ganzen Körper wohl ausgebildet und mit Luft erfüllt. (Unterfam.: *Orthocladinae*, *Tanyptinae*, *Ceratopogoninae*.)

b) Luffterfüllte Tracheen nur in einigen Körpersegmenten (besonders den thorakalen) vorhanden (Unterfam.: *Chironominae*).

Miall (11, pg. 82) hält die zweite Type für primitiv, die erste für abgeleitet; dagegen glaube ich, daß eine homonom-metamerische Anordnung der Tracheen in allen Körpersegmenten der primitiven Insekentype viel näher steht; darnach ist die erste Type als primitiv, die zweite als reduziert aufzufassen.

Als Beispiel einer *Chironomidenlarve* mit vollkommen entwickeltem Tracheensystem wähle ich die sehr durchsichtige Larve von *Pelopia fasciigera* Kieff. (Fig. 1.) Man erkennt an ihr:

1. Zwei laterale Hauptstämme, welche den ganzen Körper durchziehen und in der Ruhelage schöne, segmental geordnete Wellen bilden.

2. 9 Paare (je ein in den Körpersegmenten 2.—10.) seitlicher, kurzer Ästchen (Fig. 1), welche unter der Haut blind endigen. Diese Ästchen bezeichne ich (nach Vimmer) als „Trachea arcus stigmatis“ (= „initialbranch“ oder „initial tube“ nach Miall).

Es wäre aber verfehlt, in diesen Stigmenbögen (= „tr. arcus stigmatis“) nur sekundäre Abzweigungen der Hauptstämme zu erblicken. Vielmehr erscheinen bei näherer Betrachtung die Hauptstämme aus segmental geordneten Abschnitten zusammengesetzt zu sein; ein jeder Abschnitt

beginnt eben mit dem betreffenden Stigmenbogen, durchläuft dann das ganze vorherstehende Segment, wo er sich im oralen Teile des Segmentes an den vernachbarten Abschnitt anschließt. Diese Auffassung wird durch folgende Tatsachen begründet:

1. An der Stelle, wo sich zwei Abschnitte der Hauptstämme vereinigen, beobachtet man fast immer eine feine Einschnürung. (Bei manchen *Culex*-Arten sind die starken Hauptstämme fast rosenkranzartig eingeschnürt.)
2. Meinert konnte bei der *Mochlonyx*-Larve an solchen Stellen sogar schwache Scheidewände („septa“) beobachten.
3. Meistenteils sind an den Verbindungsstellen beide Abschnitte unter einem stumpfen Winkel zueinander geneigt.
4. Bei jeder Häutung zerfällt die Trachea-Intima in Abschnitte, welche den einzelnen Körpersegmenten entsprechen. (Dasselbe hat Hurst bei den *Culex*-Larven beobachtet.)

Wenn also das Tracheensystem der Tracheaten aus einer Serie segmental geordneter, röhrenartiger Hypodermiseinstülpungen entsteht (Bütschli nach Packard, pg. 442), so haben gerade die *Dipteren*larven in dieser Hinsicht eine recht primitive Type beibehalten, was übrigens auch Packard hervorhebt.

Die einzelnen Abschnitte der Hauptstämme bezeichne ich (mit Vimmer) als „Trachea anastomotica longitudinalis dorsalis stigmatis I.—II. II.—III. etc.“

Eine nähere Betrachtung des ganzen Tracheensystems der Larve von *Pelopia fasciigera* ergibt folgende Tatsachen (Fig. 1):

1. Beide Hauptstämme (*tr.*) bestehen aus 9 Abschnitten, welche aus 9 Stigmenbögen (a I—IX) entspringen; der I. Stigmenbogen liegt im II. thoracalen, der letzte im VII. abdominalen Segmente. Im 8.—10. Abdominalsegmente setzen sich die Hauptstämme als etwas dünnere, nicht segmentierte Röhren ohne Stigmenbögen fort.

2. Aus einem jeden Stigmenbogen entspringen folgende Ästchen (Fig. 2 u. 3):

- a) basal: Trachea dorsalis posterior (im Thorax auch „anterior“) (*d*),
- b) terminal:  $\alpha$ ) Trachea pleuralis anterior (*p*),  $\beta$ ) Trachea ventralis (*v*) mit zwei Ästchen: anterior und posterior; die letzte entsendet als Nebenast: Trachea pleuralis posterior.

3. Queranastomosen beider Hauptstämme (Tracheae anastomoticae transversales dorsales) sind nur im I. u. II. Thorakalsegmente und an der Grenze zwischen dem 7. u. 8. Abdominalsegmente entwickelt. (*a. tr.*)

4. Ventrale Längsanastomosen zwischen zwei benachbarten Stigmenbögen sind nur im Thorax zwischen dem I.—II. und II.—III. Stigmenbogen vorhanden. (Fig. 2, 3; *l. v.*) Diese „Tracheae anastomoticae longitudinales ventrales“ sind höchstwahrscheinlich durch Verwachsen der *Tr. ventralis posterior* mit einem Nebenästchen des nächstfolgenden Stigmenbogens entstanden.



5. In den Kopf dringen zwei starke, aus dem I. Stigmenbogen entspringende Tracheenäste hinein: Tr. cephalica dorsalis (*c. d.*) und ventralis (*c. v.*). Ein Nebenast der dorsalen Trachee bildet reichliche dendritische Verzweigungen im Gehirn (Tr. cerebralis, *cr.*), während die terminalen, dendritischen Verzweigungen des dorsalen Astes in das Subösophagealganglion hineindringen (Tr. suboesophagealis). Die ventrale Kopftrachee entsendet dünne Ästchen zu den verschiedenen Kopforganen (Augen, Mundteile, Muskeln, Kopfhypodermis etc.).

6. Jedes Segment trägt unter der Hypodermis (in der Muskulatur und dem Fettkörper) je zwei dorsale, zwei pleurale und zwei ventrale Geflechte von reich verzweigten Tracheenkapillaren (Plexus anterior und posterior: dorsalis, pleuralis, ventralis).

7. Jedes Bauchganglion wird durch einen Ast der betreffenden Tr. ventralis anterior mit Luft versorgt.

Ganz ähnliche Anordnung findet man auch bei allen übrigen *Tanyptinen*. Auffallendere Abweichungen von dieser Type sind nur diese:

a) Bei den Larven der *Nigropunctata*-Gruppe fehlen die Tracheen im 8.—10. Abdominalsegment.

b) Bei den schlammbewohnenden *Macropelopia*-Larven sind die hypodermalen Kapillarengflechte im Fettgewebe besonders schön ausgebildet und reichlich verzweigt.

*Orthocladinen*-Larven weisen folgende Besonderheiten auf (Fig. 5):

1. Tr. anastomoticae transversales dorsales sind in allen 3 Thorakalsegmenten vorhanden; es fehlt dagegen die Queranastomose an der Grenze des 7.—8. Abdominalsegmentes.

2. Tracheenepithel („Ektotrachea“) der Hauptstämme und der Seitenzweige ersten Ranges besteht gewöhnlich aus großen Zellen, welche bei manchen Arten mit violetten, grünen oder braunen Pigmentkörnchen erfüllt sind.

*Ceratopogoninen*-Larven (— untersucht wurden nur einige *Bezia*- und *Palpomyia*-Larven aus der Gruppe *C. vermiformes* und *Dasyhelea Zavřeli* Kieff aus der Gruppe *C. intermediae* —) besitzen ein etwas mehr kompliziertes Tracheensystem (Fig. 6):

1. Die Segmentation der Hauptstämme ist weniger deutlich.

2. Dorsale Queranastomosen sind nicht nur in allen thorakalen, sondern auch in den ersten 7 Abdominalsegmenten entwickelt.

3. Alle Stigmenlögen scheinen durch ventrale Längsanastomosen verbunden zu sein (— dies läßt sich freilich bei den meisten Arten wegen der dicken Chitinhülle nur schwer kontrollieren —).

4. Plexus dorsales posteriores entspringen aus den Queranastomosen.

5. Tr. cerebralis und suboesophagealis liegen im Pro- und Mesothorax.

Bei den Larven der *Chironominae* ist das thorakale Tracheensystem ziemlich ähnlich, wie bei den *Tanyptinen* entwickelt. Die Gattung *Chiro-*

*nonus* besitzt nur thorakale Tracheen. Dagegen fand ich bei den meisten *Tanytarsus*-Larven (— aus den Gruppen: *gregarius*, *inermipes*, *exiguus*, *agrayloides*\*), sowie bei den *Paratendipes*- und *Microtendipes*-Larven Luft enthaltende Tracheen auch im 8—10 Abdominalsegmente; diese dringen hier auch in die Analkiemer hinein. Man kann also nach der Entwicklung des Tracheensystems eine Bestimmungstafel der Unterfamilien der *Chironomiden*-Larven entwerfen:

1. a) Tracheen in allen Körpersegmenten vorhanden ..... 2.
- b) Tracheen nur in einigen Körpersegmenten vorhanden ..... Unterf.: *Chironominae* 4.
2. a) Dorsale Queranastomosen in allen thorakalen und in den ersten 7 Abdominalsegmenten entwickelt Unterf.: *Ceratopogoninae*
- b) Nur 3 Queranastomosen vorhanden ..... 3.
3. a) Queranastomosen im I. u. II. thorakalen und an der Grenze des 7.—8. Abdominalsegmentes .... Unterf.: *Tanyptinae*.
- b) Queranastomosen in allen 3 thorakalen Segmenten ..... Unterf.: *Orthoclaadiinae*.
4. a) Tracheen nur im Thorax entwickelt: ..... *Chironomi*.
- b) Tracheen im Thorax und in den letzten 3 Abdominalsegmenten entwickelt ..... *Tanytarsi* + *Paratendipes*-Gruppe.

Zuletzt noch eine kurze Bemerkung betreffend die Stigmenbögen. Als solche bezeichnet Miall („initial tube“) und Meinert („Sidestregene“) blasse, luftleere Stränge, welche sich in jedem Segmente von den Hauptstämmen abzweigen und seitlich im Chitin mit einer Narbe endigen, also etwas anderes als meine luftenthaltende *Tr. arcus stigmatis*. Solche blassen Stränge („Funiculi“) kommen auch bei den *Chironomiden*-Larven vor (Fig. 2, 5), besser noch kann man sie bei den *Culiciden*larven (Fig. 7, f) beobachten. Sie stehen immer in der Nachbarschaft der *Tr. arcus stigmatis* und es scheint ein gewisser Zusammenhang zwischen beiden Gebilden zu bestehen, nämlich der, daß die *Tr. arcus stigmatis* als momentan fungierende Stigmenbögen aufzufassen sind, während die *Funiculi* erst nach der nächstfolgenden Häutung ihre Funktion übernehmen werden.

Ein Vergleich des Tracheensystems der *Chironomiden*-Larven mit den übrigen *Dipteren*-Familien ergibt — soviel ich aus der Literatur ersuchen kann —, daß bei allen übrigen *Dipteren*-Larven das Tracheensystem komplizierter gebaut ist, als bei den *Chironomiden*. Es sind besonders

\*) *Tanytarsus flexilin* L. ausgenommen.

die ventralen Längskommissuren zwischen einzelnen Stigmenbögen, sowie die dorsalen Queranastomosen (manchmal auch die ventralen) viel besser und reichlicher entwickelt als bei den *Chironomiden*. Nur die Unterfamilie *Ceratopogoninae* besitzt hier eine größere Zahl der ventralen Längskommissuren und der dorsalen Queranastomosen.

### B. Atmungsanhängsel des Larvenkörpers.

Bei den apneustischen *Chironomiden*larven kann der Gasaustausch bloß mittels Diffusion durch die Haut stattfinden. Es ist sehr wahrscheinlich, daß dabei die ganze Körperoberfläche teilnimmt, wenigstens weisen darauf die feinen, hypodermalen Kapillarengeflechte in einzelnen Körpersegmenten hin. Es scheint aber, daß besondere Körperanhängsel speziell zu diesem Zwecke eingerichtet sind, indem einerseits die Körperoberfläche vergrößern, andererseits aber durch ihre Lage und ihren Bau besonders zum Gasaustausche geeignet zu sein scheinen. Zu solchen rechne ich:

1. Analkiemien — papillae anales (ak). Sie sind bei fast allen *Chironomiden*-Larven im Umkreise der Afteröffnung paarig entwickelt — übrigens aber auch bei den Larven mit offenen Stigmen vorhanden (*Culicidae*, *Simuliidae* etc.). Die meisten *Chironomiden*larven besitzen 4 Analkiemien; bei *Ceratopogoninen*-Larven sind 2 solche, fingerförmig geteilte und retraktile Analpapillen vorhanden (Fig. 8). Die Larven der Gattung *Protenthes* (= *Tanyptus bifurcatus*-Gruppe) besitzen 6 Analkiemien. *Corynoneura lemnae* und *Thalassomyia Frauenfeldi* sollen nur je 1 Paar Analkiemien besitzen, während andere *Corynoneura*-Larven und *Thalassomyia obscura* die normale Zahl (4) aufweisen, und die mit *Thalassomyia* identische Art *Scopelodromus isemerinus* Chevrel der Analkiemien überhaupt entbehrt! Auch die Gattung *Clunio* soll nach Goetghebuer der Analkiemien entbehren, während die verwandte (?) Gattung *Belgica* solche besitzt (Thienemann). Jedenfalls müssen diese einander widerstrebenden Angaben am frischen Materiale überprüft werden.

Die Form der Analkiemien ist verschieden: keilförmig, mäßig gebogen (*Chironomi*), cylindrisch bis stumpf kegelförmig, manchmal 1—2mal eingeschnürt (*Orthocladiinae*), lang lanzettförmig (*Micropelepieae*), dreieckig (*Tanypti*), hammerartig (*Tanyptarsus flexilis*, Fig. 11.); bei *Hydrobaenus* sollen sie terminal einen Borstenpinsel tragen. Ihr Chitin ist relativ dünner als am übrigen Körper, ihre Hypodermis durch auffallend große, großkernige Zellen gebildet.

Miall und Johannsen sehen in diesen Papillen echte Blutkiemien („blood-gills“). Ich fand dagegen schon zweimal Gelegenheit (Zavřel 24, 29) zu zeigen, daß bei Larven mit Luft enthaltenden Tracheen in den letzten Körpersegmenten feine Tracheenäste auch in die Analkiemien eindringen, daß dort also die Analpapillen als Tracheenkiemien gebaut sind.



2. Ventralkiemien sind am besten bei den großen, roten *Chironomus*-Larven (— aber nicht bei allen —) entwickelt; sie sitzen hier als 2 Paare langer, mit Blut erfüllten Schläuche am 8. Abdominalsegmente. Auch bei *Thalassomyia Frauenfeldi* und *Hydrobaenus lugubris* sollen solche Kiemien vorkommen. Es wurde bisher übersehen, daß einige, recht häufige *Chironomus*-Larven neben den erwähnten 4 Ventralkiemien noch 1 Paar ähnlicher, aber kürzerer Schläuche lateral am 7. Abdominalsegmente tragen. Von den echten Ventralkiemien unterscheiden sich diese Gebilde dadurch:

a) daß in sie auch der Fettkörper eindringt, welcher durch feine, protoplasmatische Fäden mit den Hypodermiszellen verbunden ist (Fig. 9, *t.*);

b) daß sie seitlich je eine kurze Borste tragen, an deren Basis eine spindelförmige Sinneszelle sitzt.

Ähnliche Lateralkiemien am 7. Abdominalsegmente tragen auch die Larven von *Tanytarsus flexilis* (Fig. 11) und *T. agrayloides* (Fig. 10).

3. Zu den Einrichtungen, welche die Körperoberfläche vergrößern und dadurch den Gasaustausch erleichtern, möchte ich noch den bekannten dorsalen Buckel am 8. Abdominalsegmente der *Tanytarsus*-Larven rechnen. Unter ihm liegt ein großer Blut-Sinus in der Nachbarschaft der ersten Herzkammer (Fig. 11, *h.*). Es scheint, daß auch der Dorsalbuckel der *Corethra*-Larve zu ähnlichen Gebilden gehört (vgl. Zavřel, 29).

Über ähnliche Atmungsanhängsel der Puppen erwähne ich nur, daß zu solchen die Prothorakalhörner und bei manchen Arten auch die Analflossen zuzuzählen sind. Die Prothorakalhörner sind entweder in der Form von fadenförmig verzweigten Tracheenkiemen oder als einfache Hörner entwickelt. De Meijere behauptet, daß die prothorakalen Tracheenkiemen der *Chironomus*-Puppen und die Prothorakalhörner anderer *Chironomiden* verschiedene, analogische aber nicht homologische Organe vorstellen. Dagegen muß man konstatieren, daß die prothorakalen Atmungsorgane der Puppen von *Tanytarsus agrayloides*, *T. flexilis*, *Paratendipes* und *Microtendipes*-Arten einen hübschen Übergang zwischen den einfachen Prothorakalhörnern und den reich verzweigten Tracheenkiemen bilden.

### C. Physiologisch-biologische Bemerkungen.

Die Empfindsamkeit der *Chironomiden*larven gegen den Oxygen-Gehalt des Wassers ist eine recht verschiedene. Während einige Formen nur im gut durchlüfteten und *O*-reichen Wasser leben können, gehören andere (z. B. die roten *Chironomus*-Larven) zu den polysabroten Organismen und können einen großen *O*-Mangel ertragen.

Die große Resistenzfähigkeit der roten *Chironomus*-Larven kann man wohl dadurch erklären, daß sie eine Einrichtung besitzen, die ihnen

erlaubt, eine gewisse Menge von Oxygen in ihrem Körper aufzuspeichern und für eine geraume Zeit zu erhalten; diese Fähigkeit besitzt eben das in ihrem Blute enthaltene Hämoglobin (Rollet, Lankester, Miall). Ich verweise hier nur noch darauf, daß damit die physiologische Bedeutung des Hämoglobins keineswegs erschöpfend erklärt ist; denn es besitzen Hämoglobin auch solche Larven, die in keinem oxygenarmen Medium leben (z. B. die in Blättern minierenden *Chironomus*-Larven), sowie auch Formen mit vollkommen entwickeltem Tracheensystem (z. B. *Macropelopia*-Larven).

Weiter gibt es Formen, welche in einem stark verunreinigten und oxygen-armen Wasser leben und dennoch kein Hämoglobin enthalten. Ich glaube auch bei solchen Larven einen Ersatz für das fehlende Hämoglobin gefunden zu haben. Wie ich schon oben erwähnt habe, besitzen manche *Orthocladius*-Larven große, mit Pigmentkörnchen gefüllte Epithelzellen an den Tracheen; wo solche fehlen, sind entweder die trachealen Hauptstämme von pigmenttragenden Fettgewebesträngen umgeben (z. B. *Metriocnemus hygropetricus*, *Bezia*-Larven), oder man findet Pigmentzellen in der Hypodermis und Pigmentanhäufungen im Fettgewebe unter der Haut, wo sich gewöhnlich auch reiche Kapillarengelächte der Tracheen verzweigen. Ich glaube, daß diese Pigmente eine ähnliche Rolle bei dem Gasaustausche der Larven spielen, wie das Hämoglobin im Blute der *Chironomus*-Larven. Vielleicht wären gerade diese Larven ein günstiges Objekt für das Studium der bisher noch nicht genügend durchforschten „Tätigkeit der Tracheenwände und des respiratorischen Epithels“ (Babák, 2).

#### D. Atmungsbewegungen.

Echte respiratorische Bewegungen, durch welche ein Luftstrom in den Tracheen erzeugt würde, gibt es bei den *Chironomiden*-Larven nicht. Als Atmungsbewegungen bezeichne ich solche, welche entweder eine ständige Wasserströmung im Umkreise des Larvenkörpers erzeugen, oder lokomotorische Bewegungen, welche die Larve in ein oxygenreiches Medium bringen.

##### a) Wasserstrom erzeugende Bewegungen:

Willem und Grippekoven haben solche Bewegungen bei den minierenden *Chironomiden*-Larven eingehend beschrieben; es sind:

1. Wellenbewegungen des ganzen Körpers, wobei sich die Larve mittels der Vorderfüßchen und Nachschieber festhält.
2. Pumpende Bewegungen, wobei die Larve nur mit den Nachschiebern angeheftet ist und ihren Körper periodisch zusammenzieht und streckt.

Diese zwei Bewegungsarten wiederholen sich periodisch, indem sich die Larve in ihrem Gehäuse zeitweise umdreht und in dieser neuen Lage (Kopf nach hinten) dieselben Bewegungen ausführt u. s. w.

Solche Bewegungen beobachtet man aber nicht nur an den minierenden, sondern auch an den in Schlaumgehäusen lebenden *Chironomus*- und *Tanytarsus*-Larven, auch die in freien Gehäusen lebenden Larven (*Agrayloides*-Gruppe, *Orthocladinae*), ja auch einige freilebenden Larven (*Prodiamesa*, *Macropelopia*, *Trichotanypus*) üben ähnliche Bewegungen aus.

3. Pendelbewegungen habe ich bei *Chironomus*- u. *Tanytarsus*-Larven beobachtet. Die Larve streckt etwa  $\frac{3}{4}$  ihres Körpers (Abdomen voran) aus dem Gehäuse vor und macht dann schnelle schwingende Bewegungen.

Es wäre gewiß sehr interessant die Intensität und Rhythmik aller dieser Bewegungen unter verschiedenen Bedingungen (Oxygengehalt, Temperatur des Wassers etc.) quantitativ zu studieren.

4. Lokomotorische Atmungsbewegungen. Die roten *Chironomus*-Larven verlassen nachts ihre Gehäuse und steigen durch schlangenartige Bewegungen zur Wasseroberfläche empor, um ihr Hämoglobin mit Oxygen zu sättigen (Miall). Ähnliche Bewegungen habe ich bei einigen *Tanytarsus*-, *Cricotopus*- und *Tanyptinen*-Larven beobachtet. Da ich solche Bewegungen auch am Tage, aber immer in einem trüben und wenig durchlichteten Wasser gesehen habe, so ist es sehr wahrscheinlich, daß diese Bewegungen nicht nur durch O-Mangel, sondern auch durch Lichtreize hervorgerufen werden (vgl. auch Grippekov, p. 13.)

Einen besonderen Drang, die Wasseroberfläche zu erreichen, zeigen einige, nicht näher bestimmte *Orthocladinen*-Larven (sicher sind dazwischen Angehörige der Gattung *Metriocnemus*). Bringt man solche Larven in eine ganz flache Schale, so kriechen sie gleich zur Wasseroberfläche und deckt man die Schale nicht gut zu, so kriechen sie sogar aus der Schale weg. In Zuchtgläsern verpuppen sie sich an der Glaswand gerade an der Grenze zwischen Luft und Wasser. In der Natur leben sie zwischen Algenklümpen oder an Pflanzenblättern, welche an der Wasseroberfläche flotieren. Willem sieht in dem eigentümlichen Benehmen dieser Larven einen „positiven Heliotropismus, der mit einem negativen Geotropismus gepaart ist“. (Zitiert nach Grippekov, 4, pg. 13.) Meiner Ansicht nach läßt sich dieses Benehmen eher durch eine große Empfindsamkeit der Larven gegen O-Mangel erklären; ich sehe also auch darin nur eine lokomotorische Atmungsbeziehung.

Eingegangen am 18. September 1917.



## Figurenerklärung.

Alle Figuren wurden mit Abbeschem Zeichenapparat bei der angegebenen Vergrößerung gezeichnet und bei der Reproduktion auf die Hälfte verkleinert.

*a I—IX* — Abdominalsegmente.

*ak* — Analkiemien.

*a. tr. 1, 2, etc.* — Trachea anastomotica transversalis dorsalis.

*b* — Sinnesborste an den Lateralkiemien.

*c. d* — Trachea cephalica dorsalis.

*c. v* — Tr. cephalica ventralis.

*cr* — Plexus cerebrialis.

*d. 1, 2 etc.* — Trachea dendritica dorsalis (anterior).

*d. 1a, 2a* — Tr. dendritica dorsalis (posterior).

*d. p.* — Dorsale Borstenträger des 9. Abdominalsegmentes.

*l. v. 1, 2* — Trachea anastomotica longitudinalis ventralis.

*n. f* — Nachschieber.

*p. 1, 2..* (oder: *pl*) — Trachea dendritica pleuralis (anterior).

*p. 1a, 2a..* — Tr. dendritica pleuralis (posterior).

*s* — Chitinnarbe am Ende des blassen Seitenstranges (*f*).

*sg* — Ganglion suboesophagale.

*t I.—III.* — Thorakalsegmente.

*tr* — Tracheale Hauptstämme.

*v. 1, 2* — Tr. dendritica ventralis.

*v. f* — Vorderfüßchen.

*I—IX* — Tr. arcus stigmatis.

Fig. 1. Tracheensystem der Larve von *Pelopia fasciigera* Kieff.; ventrale Äste sind punktiert, Reichert, Obj. 1, Oc. 2.

Fig. 2. *Pel. fasciigera*; linke Seite des Tracheensystems im Kopfe, Pro- und Mesothorax. Dorsalansicht. Reichert, Obj. 4, Oc. 2.

Fig. 3. *Pelopia nigropunctata* Staeg. Larve; linke Seite des thorakalen Tracheensystems; Seitenansicht; Reichert, Obj. 4, Oc. 2.

Fig. 4. *Pelopia nigropunctata* Staeg.; Puppe; linke Seite des thorakalen Tracheensystems; Seitenansicht; *K* — Schwinger, *Kf* — Flügel, *n. K* — Narbenfilzkammer (nach De Meijere), *p. h* — Prothorakalhorn; Reichert, Obj. 4, Oc. 2.

Fig. 5. *Prodiamesa praecox* Kief.; Larve; rechte Seite des Tracheensystems im Kopfe und Thorax; Seitenansicht; Leitz, Obj. 4, Oc. 2.

Fig. 6. *Bezia* sp., Larve; thorakales Tracheensystem; Dorsalansicht; Leitz, Obj. 4, Oc. 2.

Fig. 7. *Culex* sp., Larve; dritter Stigmenbogen mit zugehörigem Seitenstrange (*f*); Leitz, Obj. 6, Oc. 2.

Fig. 8. *Dasyhelea Zavřeli* Kieffer; Analkiemien; Reichert, Obj. 4, Oc. 2.

Fig. 9. *Chironomus* sp.; Lateralkiemie des 7. Abdominalsegmentes; *t* — Fettkörper; Leitz, Obj. 6, Oc. 2.

Fig. 10. *Tanytarsus agrayloides* Kieff; Lateralkiemie; Reichert, Obj. 8, Oc. 2.

Fig. 11. *Tanytarsus flexilis* L.; Körperende der Larve; *h* — Dorsalbuckel, *ch* — Chorditonalorgan, *sr* — Herz, Reichert, Obj. 4, Oc. 2.

## Literatur.

1. Bausse, E.: Die Metamorphose der Gattung *Tanytarsus*. Stuttgart 1913.
2. Babák, E.: Příspěvek k fyziologii tracheí a k dýchání vůbec u dvojkřídlých. *Biolog. Listy*, 1., 1912.
3. Goetghebuer, M.: Contribution á l'étude des Chironomides de Belgique. *Ann. Ann. de Biolog. Lac.* VII, 1914.
4. Grippekoen, H.: Minierende Tendipediden. Stuttgart, 1912.
5. Haller, G.: Über das Atmungsorgan der Stechmückenlarven. *Arch. f. Naturg.*, 44., 1878.
9. Hurst, H.: The pupal stage of *Culex*. Manchester 1890.
7. Chevrel, R.: *Scopelodromus isemerinus*. *Arch. Zool. exper.*, I—II, 1903—4.
8. Johannsen, O. A.: May flies and midges of York. Albany 1905.
9. De Meijere, J. C. H.: Über die Prothoracal<sup>s</sup> n der Diptercruppen. *Zool. Jahrb.*, 15, 1901.
10. Meinert, Fr.: De eucephale Myggelarver. *Vidensk. Selsk. 9 Raekke, naturvid. og math. Afd.* III. 1886.
11. Miall, L. and Hammond, A.: The structure and life-history of the Harlequin fly. Oxford 1900.
12. Neresheimer, Teichwirtschaftliche Streitfragen. *Österreichische Fischereizeitung*, 1611.
13. Packard, A. S.: A text-book of entomology. New York, 1903.
14. Potthast, A.: Über die Metamorphose der Orthocladius-Gruppe. Stuttgart 1914.
15. Raschke, E. W.: Die Larve von *Culex nemorosus*. *Arch. f. Naturg.*, 55., 1887.
19. Rhode, C.: Über Tendipediden und deren Beziehungen zum Chemismus des Wassers. Altenburg 1912.
17. Rieth, J. T.: Die Metamorphose der Culicoidinen. Stuttgart 1915.
18. Sack, P.: Aus dem Leben unserer Zuckmücken. Frankfurt a. M., 1910.
19. Thienemann, A.: Über die Chironomidengattung *Orthocladius*. *Zeit. f. wiss. Insektenbiol.*, II., 1906.
20. Thienemann, A.: Der Bergbach des Sauerlandes. *Inter. Rev. der ges. Hydrobiol. und Hydrograp.* 1912.
21. Thienemann, A.: Der Zusammenhang zwischen dem Sauerstoffgehalt des Tiefenwassers und der Zusammensetzung der Tiefenfauna unserer Seen. *Int. Rev. d. ges. Hydrobiol. und Hydrogr.* 1913.
22. Thienemann, A.: Physikalische und chemische Untersuchungen in den Maaren der Eifel, II., Bonn 1915.
23. Thienemann, A.: Zur Kenntnis der Salzwasser-Chironomiden. Stuttgart 1915.
24. Thienemann, A. u. Zavřel, J.: Die Metamorphose der Tanypinen, I. Teil, Stuttgart 1916.
25. Vimmer, A.: O tracheální soustavě larvy *Lycoria Thomae* L. *Čas. čes. spol. entom.* XII, 1915.
26. Vimmer, A.: Příspěvek k topografii tracheální soustavy larv hmyzu dvojkřídlého. *Biol. Listy*, V. 1916.
27. Willem: Larves de Chironomides vivant dans des feuilles. *Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1908.
28. Zavřel, J.: Příspěvky k poznání larv Dipter. *Čas. čes. spol. entom.*, III, 1916.
29. Zavřel, J.: Zur Morphologie der Tendipedidenlarven. *Zeit. f. wiss. Insektenbiol.*, 1915—16.

## Berichtigung:

Die Art „*Tanytarsus flexilis*“ soll nach dem neuen Vorschlage Kieffers' *Zavřeliella cribraria* Kieff. heißen.

# Über einen Steinerschen Satz, die Krümmungskreise eines Kegelschnittes betreffend und einige Beziehungen desselben zum Normalenproblem.

J. SOBOTKA.

(Mit 7 Figuren im Text.)

1. Es soll sich hier zuerst um den von Steiner in folgender Form aufgestellten Satz handeln:

„Durch jeden Punkt  $D$  einer Ellipse gehen drei Krümmungskreise der letzteren, welche in irgend drei anderen Punkten  $A, B, C$  oskulieren; und jedesmal liegen die vier Punkte  $A, B, C, D$  in einem Kreise.“

Diesen und andere damit zusammenhängende Sätze und Beziehungen hat Steiner ohne Beweis in Crelles Journal, im J. 1845 veröffentlicht. \*)

Den ersten Beweis dieses Satzes und seinen Zusammenhang mit dem Normalenproblem gab in einer kurzen, jedoch bemerkenswerten Arbeit F. Joachimsthal in demselben Journal im J. 1848. Wir wollen hier zunächst diesen Satz in Betracht nehmen und die bekannte Tatsache bemerken, daß er natürlich auch für Hyperbeln gilt, während er für Parabeln eine Ausartung erleidet.

Es ist bekannt, daß die Symmetralen der Winkel, die durch zwei Sehnen gebildet werden, welche die Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitt  $s$  verbinden, parallel den Achsen des Kegelschnittes sind. Oskuliert also ein Kreis  $m_1$  den Kegelschnitt  $s$  im Punkte  $M_1$  und schneidet ihn noch im Punkte  $M$ , so ist hiernach die Gerade  $M_1 M$  zu der Tangente  $t_1$  in  $M_1$  an  $s$  antiparallel inbezug auf die Achsen von  $s$ .

Auf  $s$  entsteht also eine einfache Punktverwandtschaft, in der jedem Punkte  $M_1$  derjenige Punkt  $M$  zugeordnet wird, in welchem die zu der Tangente  $t_1$  von  $s$  in  $M_1$  durch  $M_1$  gezogene Antiparallele inbezug auf die Kegelschnittachsen den Kegelschnitt noch einmal schneidet. Diese Verwandtschaft liefert uns einfach die Beziehungen des angeführten Satzes.

\*) Cf. Jakob Steiners Gesammelte Werke, II. Bd. S. 377.



Es sei  $s$  zunächst eine Parabel,  $t'$  sei ihre zu  $t_1$  in bezug auf die Parabelachse  $x$  symmetrisch liegende Tangente,  $M'$  deren Berührungspunkt. Die Parallele durch  $M'$  zu  $x$  schneidet  $t_1$  im Pole  $T$  der Geraden  $M_1 M$  und  $M_1 M$  selbst schneide sie im Punkte  $M_0$ . Es ist  $M_0 M = M_1 M_0$ ; trifft nun  $M_1 M$  die Achse  $x$  im Punkte  $M_s$ , so ist deshalb  $M_s M = 3 \cdot M_1 M_s$ .

Daraus folgt, daß auf  $s$  die Reihe der Punkte  $M$  zu der Reihe von Punkten  $M_1$  projektiv ist, wobei der Scheitel der Parabel und der unendlich ferne Punkt ihrer Achse die Doppelpunkte sind. Es geht also durch jeden Punkt  $M$  einer Parabel ein einziger Kreis, welcher dieselbe in einem anderen Punkte oskuliert.

2. Es sei (Fig. 1)  $s$  ein zentrischer Kegelschnitt. Wir betrachten das System der Kreise  $d$ , welche durch einen festen Punkt  $D$  dieses Kegelschnittes gehen und ihn berühren. Ist  $A_1$  der Berührungspunkt und  $D_0$  der noch vorkommende Schnittpunkt dieses Kreises mit  $s$ , so ist die Tangente  $a_1$  von  $s$  in  $A_1$  zu  $D D_0$  antiparallel bezüglich der Kegelschnittachsen. Ermitteln wir also zu  $D D_0$  den konjugierten Durchmesser  $l$  und zu diesem den in bezug auf die Kegelschnittachsen symmetrisch gelegenen Durchmesser  $l'$ , so schneidet dieser den Kegelschnitt  $s$  in den Punkten  $A_1, A_2$  von der Lage, daß die Tangenten in ihnen an  $s$  zu  $D D_0$  in bezug auf die Achsen von  $s$  antiparallel sind. Die Kreise durch  $D, D_0, A_1$  und  $D, D_0, A_2$  sind Berührungskreise von  $s$ . Wir sehen, daß in dieser Weise jedem Strahl  $D D_0$  durch  $D$  projektiv ein Durchmesser  $l'$  von  $s$  entspricht von der Eigenschaft, daß die durch den festen Punkt  $D$  gehenden Kreise, welche  $s$  in seinen Endpunkten berühren, sich in  $D_0$  auf  $s$  schneiden.

Bewegt sich  $D_0$  auf  $s$ , so beschreibt  $D D_0$  einen Strahlenbüschel ( $D$ ) und  $l'$  einen zu ihm projektiven Strahlenbüschel ( $l'$ ), während das Punktepaar  $A_1 A_2$  eine zu der Reihe der Punkte  $D_0$  projektive Involution beschreibt. Der Durchmesser  $l$  beschreibt einen zu beiden Büscheln projektiven Strahlenbüschel ( $l$ ):

Die Büschel ( $D$ ), ( $l$ ) erzeugen einen Kegelschnitt  $s_1$ , welcher  $s$  in  $D$  berührt, durch den Mittelpunkt  $O$  von  $s$  geht und zu  $s$  ähnlich liegt, also  $D O$  zum Durchmesser hat; er geht auch durch die Fußpunkte  $D', D''$  der Senkrechten, welche von  $D$  auf die Achsen  $x, y$  des Kegelschnittes  $s$  gefällt werden, so daß  $D O$  und  $D' D''$  sich in dem Mittelpunkte  $O_1$  von  $s_1$  schneiden.

Die Büschel ( $D$ ), ( $l'$ ) erzeugen gleichfalls einen Kegelschnitt  $s'$  welcher durch die Punkte  $D, O, D', D''$  geht und somit den Punkt  $O_1$  gleichfalls zum Mittelpunkte hat. Die Tangenten  $t', t''$  von  $s'$  in den Punkten  $D$  und  $O$  sind zur Tangente  $t$  in  $D$  an  $s$  in bezug auf die Achsen  $x, y$  antiparallel. Schneidet irgend ein Strahl von ( $D$ ) die Geraden  $x, y$  in  $X, Y$  und die Kegelschnitte  $s' s_1$  in  $P, S_1$ , so ist  $(X Y P S_1) = -1$ . Daraus folgt, daß die unendlich fernen Punkte von  $s'$  in bezug auf  $s_1$  und umgekehrt die von  $s_1$  in bezug auf  $s'$  konjugiert sind. Um dies einzusehen, braucht man, wenn  $s$  eine Ellipse ist, nur durch  $D$  die Parallele zu einem der in bezug auf  $x, y$

symmetrisch liegenden konjugierten Durchmesser von  $s$  zu ziehen; diese Parallele schneidet  $s'$  im Unendlichen. Ist  $s$  eine Hyperbel, so zieht man durch  $D$  die Parallele zu einer Asymptote derselben, welche  $s'$  noch in einem Punkte trifft, dessen Verbindungsgerade mit  $O$  zu ihr in bezug auf  $x$  und  $y$  antiparallel ist.

Verbindet man irgend einen Punkt  $P$  von  $s'$  mit  $D$  und  $O$ , so schneidet die erste Gerade  $s$  in einem Punkte  $D_0$ , die zweite in dem zugehörigen Punktepaar  $A_1 A_2$ . Ist  $P$  ein von  $D$  verschiedener Schnittpunkt  $P_1$  der Kegelschnitte  $s'$ ,  $s$ , so fällt  $D_0$  mit einem der Punkte  $A_1, A_2$  zusammen und der durch  $D$  gehende Berührungskreis in  $P_1$  oskuliert  $s$  in  $P_1$ .

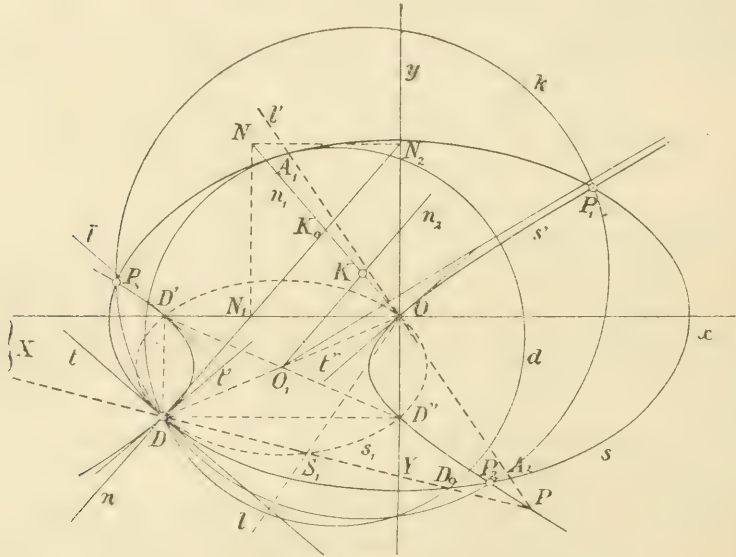


Fig. 1.

Es gibt also drei Kreise durch  $D$ , welche  $s$  anderwärts oskulieren. Die Oskulationspunkte sind die drei Schnittpunkte  $P_1, P_2, P_3$ , welche  $s'$  mit  $s$  außer  $D$  noch besitzt. Die Kegelschnitte  $s', s$  haben parallele Achsen; deshalb enthält der Kegelschnittbüschel, welchen sie festlegen, einen Kreis  $k$ . Es liegen also die Oskulationspunkte der drei Krümmungskreise durch  $D$  mit  $D$  auf einem Kreise. Dadurch ist der Steinersche Satz bewiesen.

Ist  $s$  eine gleichseitige Hyperbel, so ist  $s'$  selbst ein Kreis. Wir erschen also, daß die Oskulationspunkte der Krümmungskreise durch  $D$  die Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbel  $s$  mit dem über  $OD$  als Durchmesser gelegten Kreise sind. Aus anderen Betrachtungen\*) geht hervor, daß von diesen Schnittpunkten nur einer  $P_1$  reell ist und daß  $DP_1$  die kürzeste durch  $D$  gezogene Strecke zwischen den Asymptoten von  $s$  ist.

\*) Cf. Bulletin intern. de l'Académie des Sciences de Bohême 1913: Eine besondere Art von einem gegebenen Dreieck ein- oder umgeschriebenen extremen Dreiecken. S. 16 u. ff.

3. Wir wollen aber auch den Kreis  $k$  im allgemeinen Fall konstruieren. Der Punkt  $O$  ist konjugiert zu dem unendlich fernen Punkt von  $t'$  in bezug auf beide Kegelschnitte  $s, s'$ , also in bezug auf jeden Kegelschnitt des Büschels ( $s s'$ ), somit auch in bezug auf  $k$ . Daraus folgt, daß der durch  $O$  gehende Durchmesser  $n_1$  von  $k$  senkrecht steht auf der Tangente  $t'$  in  $D$  an den Kegelschnitt  $s'$ . Die Tangente  $\bar{t}$  in  $D''$  an  $s'$  ist zu der Tangente  $t$  von  $s$  in  $D$  parallel; daraus folgt, daß  $O_1$  konjugiert ist zu dem unendlich fernen Punkt von  $t$  sowohl in bezug auf  $s$  als auch in bezug auf  $s'$ , somit auch in bezug auf  $k$ . Deshalb ist die Senkrechte von  $O_1$  auf  $t$  ein zweiter Durchmesser  $n_2$  von  $k$ . Es ergibt sich also der Mittelpunkt  $K$  von  $k$  als Schnitt der Geraden  $n_1, n_2$ . Diese Geraden sind bezüglich der Achsen von  $s$  zu einander antiparallel.

Schneidet die Normale  $n$  von  $s$  in  $D$  die Hauptachse  $x$  von  $s$  in  $N_1$ , die Nebenachse  $y$  in  $N_2$ , die Parallele durch  $N_1$  zu  $y$  die Parallele durch  $N_2$  zu  $x$  auf  $n_1$  im Punkte  $N$ , und ist  $K_0$  der Schnittpunkt von  $n$  mit  $n_1$ , so ist  $OK = \frac{1}{2} OK_0 = \frac{1}{4} ON$ , welche Beziehung uns eine überaus einfache Konstruktion von  $K$  liefert.

4. Bezeichnen wir (Fig. 2) die Schnittpunkte der von  $O$  auf  $t$  gefälltten Senkrechten mit  $t$  durch  $D_\omega$ , mit  $NN_1$  durch  $N'$  und mit  $NN_2$  durch  $N''$ , weiter sei  $a^2$  das Quadrat der halben Hauptachse,  $b^2$  das der halben Nebenachse von  $s$  und setzen wir  $\epsilon = +1$ , wenn  $s$  eine Ellipse und  $\epsilon = -1$ , wenn  $s$  eine Hyperbel ist. Aus der Beziehung

$$\frac{DN_1}{DN_2} = \frac{\epsilon b^2}{a^2}$$

folgt

$$\frac{DN_1 + DN_2}{2} : (DN_2 - DN_1) = \frac{a^2 + \epsilon b^2}{2} : c^2,$$

wenn wir  $e^2 = a^2 - \epsilon b^2$  setzen.

Die letzte Proportion läßt sich auch schreiben

$$DK_0 : N_1N_2 = \frac{a^2 + \epsilon b^2}{2} : c^2. \quad (1)$$

Ebenso erhalten wir die Proportion

$$DN_1 : ON'' = \epsilon b^2 : c^2. \quad (2)$$

Nun ist, wenn  $x, y$  die Koordinaten von  $D$  in bezug auf die Achsen von  $s$  bedeuten,

$$ON_1 = \frac{c^2}{a^2} x, \quad ON_2 = -\frac{c^2}{\epsilon b^2} y. \quad (3)$$

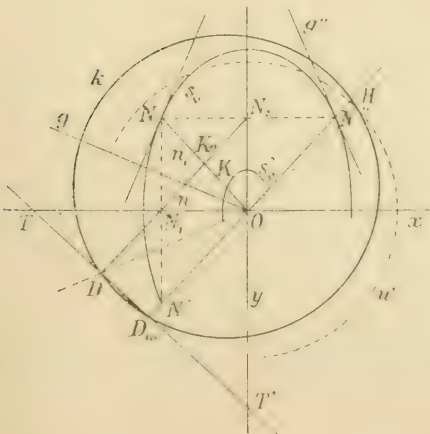


Fig. 2.



Demnach ist

$$\overline{N_1 D^2} = \left( \frac{c^2}{a^2} x - x \right)^2 + y^2 = b^4 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right).$$

Schneidet die Tangente  $t$  die Achsen  $x, y$  in  $T, T'$ , so ist

$$OT = \frac{a^2}{x}, \quad OT' = \frac{\varepsilon b^2}{y},$$

$$\frac{1}{OD_\omega^2} = \frac{1}{OT^2} + \frac{1}{OT'^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4},$$

so daß wir erhalten

$$N_1 D \cdot OD_\omega = \varepsilon b^2 \text{ und analog } N_2 D \cdot OD_\omega = a^2. \quad (4)$$

Vergleichen wir die letzte Beziehung mit (2), so kommt

$$ON'' \cdot OD_\omega = -e^2, \quad ON' \cdot OD_\omega = e^2. \quad (5)$$

Der Kreis  $k$  geht durch  $D_\omega$ ; er schneide  $D_\omega O$  noch im Punkte  $H$ .

Es ist  $OH = DK_0$ , also mit Rücksicht auf (1)

$$OD_\omega \cdot OH = OD_\omega \cdot DK_0 = OD_\omega \cdot ON'' \frac{a^2 + \varepsilon b^2}{2e^2},$$

und somit im Hinblick auf (5)

$$OD_\omega \cdot OH = - \frac{a^2 + \varepsilon b^2}{2}, \quad \text{d. h.}$$

„Der Kreis  $k$  schneidet den um  $O$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser  $\sqrt{-\frac{a^2 + \varepsilon b^2}{2}}$  beschriebenen Kreis  $u$  orthogonal, resp. den konzentrischen mit dem Halbmesser  $\sqrt{\frac{a^2 + \varepsilon b^2}{2}}$  beschriebenen Kreis  $u'$  diametral.“

Für eine gleichseitige Hyperbel ist  $OD_\omega \cdot OH = 0$ , also  $H \equiv O$ ; der Kreis  $k$  geht also durch  $O$ , wie wir schon erwähnt haben.

5. Bewegt sich  $D$  auf  $s$ , so beschreibt  $N$  einen zu  $s$  affinen Kegelschnitt  $s_N$ , und  $k$  gehört dem Orthogonalbündel des Kreises  $u$  an. Die Gesamtheit der Kreise  $k$  ergibt also ein System von Kreisen, welche  $u$  orthogonal schneiden und ihre Mittelpunkte auf dem Kegelschnitte  $s'_N$  haben, welcher mit  $s_N$  konzentrisch und ähnlich gelegen im Verhältnis 1:4 ist. Diese Kreise umhüllen also eine Zyklik, im besonderen Falle einer gleichseitigen Hyperbel  $s$  eine Lemniskate von Bernoulli.

Zwischen den Koordinaten  $(x, y)$  der Punkte  $D$  und den Koordinaten  $(X, Y)$  der zugehörigen Punkte  $N$  bestehen nämlich die Beziehungen

$$X = \frac{c^2}{a^2} x, \quad Y = -\frac{c^2}{\varepsilon b^2} y.$$

Die Scheitelpunkte von  $s$ , sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte von  $s$ . Der Punkt  $D_\omega$  beschreibt die Fußpunktkurve  $f$  des Kegelschnittes  $s$  für den Mittelpunkt  $O$  als Pol. Die Relationen (5) besagen, daß  $s$ , und  $f$  zueinander invers sind in bezug auf die mit  $s$  konzentrischen Kreise  $v$  und  $v'$  vom Halbmesser  $e$ , bzw.  $ie$ .

Dieses Ergebnis hätten wir auch auf einem mehr geometrischen Wege ableiten können. Es sei  $\bar{n}$  die zu  $n$  unendlich benachbarte Normale von  $s$  und  $\bar{D}$ ,  $\bar{D}_\omega$ ,  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}''$  die mit ihr zusammenhängenden Punkte, welche den früheren Punkten  $D$ ,  $D_\omega$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N$ ,  $N''$  analog sind. Die Geraden  $x$ ,  $y$ ,  $t$ ,  $n$  sind Tangenten einer Parabel, welche  $n$  in dem dem Punkte  $D$  zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ( $n$ ,  $\bar{n}$ ) von  $s$  berührt.  $OD$  ist die Leitgerade der Parabel und  $N\bar{N}$  ist die Polare von  $O$  in bezug auf sie als die Achse der Projektivität zwischen den ähnlichen Punktreihen  $N_1, \bar{N}_1, \dots$ ;  $N_2, \bar{N}_2, \dots$  auf  $x$  und  $y$ . Da  $O$  auf der Leitgerade der Parabel liegt, so ist der Fußpunkt der Senkrechten  $g$  von  $O$  auf  $N\bar{N}$  der Brennpunkt der Parabel und die Geraden  $g$ ,  $OD$  liegen zu einander symmetrisch bezüglich der zueinander senkrechten Tangenten  $x$ ,  $y$  der Parabel. Daraus folgt, daß  $OD \perp N''\bar{N}''$ . Es steht also die Tangente  $g''$  in  $N''$  an  $s$ , senkrecht auf  $OD$ . Die Normale in  $D_\omega$  an die Kurve  $f$  ist, wie bekannt,  $O_1D_\omega$ . Folglich bilden die Tangenten in  $N''$  an  $s$ , und in  $D_\omega$  an  $f$  ein gleichschenkeliges Dreieck über  $D_\omega N''$  als Grundlinie und die Punkte  $N''$ ,  $\bar{N}''$ ,  $D_\omega$ ,  $\bar{D}_\omega$  liegen auf einem Kreise. Es ist also  $ON''$ ,  $OD_\omega = O\bar{N}''$ ,  $O\bar{D}_\omega$ , und da dies für jede zwei unendlich benachbarten Strahlen  $ON''$ ,  $O\bar{N}''$  gilt, so sind  $s$ , und  $f$  invers. Fällt  $D$  in einen Hauptscheitel, so ist  $D_\omega \equiv D$  und  $N''$  ist ein Hauptkrümmungsmittelpunkt, so daß hier  $ON''$ ,  $OD_\omega = -e^2$ . Dies gibt also die vorher erwähnte Inversion beider Kurven.

6. Zwischen den Punkten  $D$  und den Oskulationspunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  der drei durch  $D$  gehenden Krümmungskreise besteht eine (1, 3)deutige Verwandtschaft, also eine Projektivität der Punktreihe ( $D$ ) mit einer kubischen Involution ( $ABC$ ). Es umhüllen also alle Dreiecke  $ABC$ , welche die Tripel dieser Involution verbinden, einen Kegelschnitt  $s^*$ . Wählen wir  $D$  unendlich fern auf  $s$ , dann ist  $OD \equiv r$  eine Asymptote von  $s$ ;  $r'$  sei die zweite; die Normale  $n$  in  $D$  fällt hier mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zusammen, während  $n_1$  in den zu  $r'$  senkrechten Durchmesser von  $s$  übergeht. Der Kreis  $k$ , welcher die Punkte  $D$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  verbindet, zerfällt, da sein Mittelpunkt  $K$  unendlich fern auf  $n_1$  liegt und da er  $u$  orthogonal schneidet, in die Asymptote  $r'$  und die unendlich ferne Gerade  $u_\infty$  der Ebene. Dieser degenerierte Kreis schneidet nun  $s$  außer im Punkte  $D$  in drei Punkten, die sich alle in dem unendlich fernen Punkte von  $r'$  vereinigen. In jedem unendlich fernen Punkte von  $s$  sind hiernach die Punkte je eines Tripels unserer Involution vereinigt. Diese ist also eine zyklische Projektivität, welche die unendlich fernen Punkte von  $s$  zu Doppelpunkten hat.

Die Tripeldreiecke  $ABC$  umhüllen den Involutionseggelschnitt  $s^*$ , welcher mit dem gegebenen Kegelschnitt  $s$  koaxial ist, welcher außerdem wegen der erwähnten Projektivität den Kegelschnitt  $s$  in den Doppelpunkten der Projektivität berührt, also mit  $s$  ähnlich und in ähnlicher Lage liegt. Eine Folge der zyklischen Projektivität ist bekanntlich, daß  $u_\infty$  die Harmonikale von  $O$  in bezug auf jedes Tripeldreieck  $ABC$  ist und daß die Seiten  $AB, BC, CA$  von  $s^*$  in deren Schnittpunkten  $C_1, A_1, B_1$  mit  $CO, AO, BO$  berührt werden. Es bilden nämlich  $A', B', C'$  als Projektionen der Punkte  $A, B, C$  von  $O$  auf  $s$ , gleichfalls ein Tripel der kubischen Involution. Die Tangente in  $A$  an  $s$  schneidet  $u_\infty$  im Punkte  $A_\infty$ , durch den auch die Seite  $BC$  geht und ist zu  $AO$  in bezug auf  $s^*$  konjugiert; die Tangente in  $A'$  an  $s$  geht gleichfalls durch  $A_\infty$  und ist zu  $A'O \equiv AO$

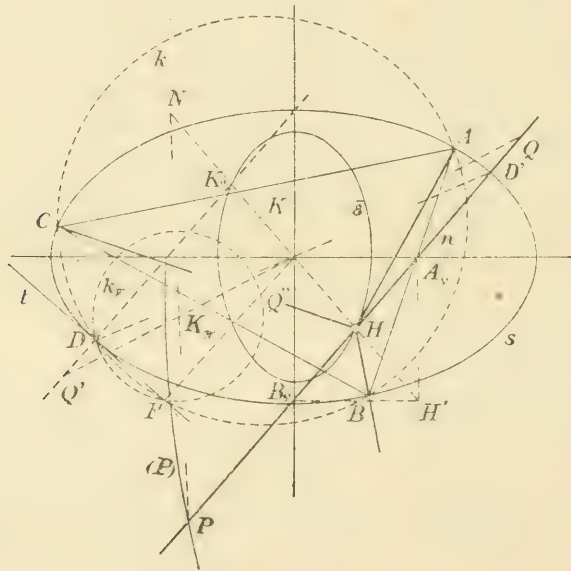


Fig. 3

konjugiert. Es ist also  $AO$  die Polare von  $A_\infty$  in bezug auf  $s^*$  und trifft die Gerade  $BC$  in deren Berührungspunkte  $A_1$  mit  $s^*$ . Da  $(BC A A_\infty) = -1$ , so folgt, daß  $O$  der Schwerpunkt des Dreieckes der drei zu  $D$  gehörigen Oskulationspunkte  $A, B, C$  ist.

Ist  $s$  eine Ellipse, so sind die Doppelpunkte der zyklischen Projektivität imaginär, also alle Dreiecke  $ABC$  sind reell; ist  $s$  eine Hyperbel, dann ist für jedes Dreieck  $ABC$  nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite reell, die übrigen Ecken und Seiten sind imaginär. Es geht also durch irgend einen Punkt  $D$  auf der Hyperbel  $s$  nur ein reeller Krümmungskreis, welcher sie an einer anderen Stelle oskuliert.

Wir sehen, daß die b.i Steiner enthaltene Beschränkung des Satzes auf eine Ellipse eine gewisse Berechtigung besitzt. Ferner erkennen wir,



daß das Ähnlichkeitsverhältnis zwischen  $s^*$  und  $s$  gleich 1:2 ist. Für eine Ellipse läßt sich das bequem auch wie folgt erkennen.

Wählen wir den Punkt  $D$  in einem Endpunkte eines der beiden konjugierten gleich langen Durchmesser. Dann zerfällt der Kegelschnitt  $s'$  in diesen Durchmesser  $DO$  und die durch  $O_1$  gezogene Parallele zu dem andern. Es treffe diese Parallele  $s$  in  $B$  und  $C$  und es sei  $A$  der zweite Endpunkt des Durchmessers  $DO$ . Alsdann ergeben  $A, B, C$  das zu  $D$  gehörige Oskulationstripel. Nehmen wir  $D$  in  $A$  an, so erhalten wir ein Oskulationstripel  $A' B' C'$ , das zu  $A B C$  inbezug auf  $O$  symmetrisch liegt. Die Tripeldreiecke hüllen einen Kegelschnitt  $s^*$  um. Ist  $(BC)^*$  die zu  $(BC)$  unendlich benachbarte Tangente desselben, so ergibt sich etwa aus dem Brianchonschen Sechseit  $\{(A C) (B' C') (B C) (B C)^* (A' C') (A B)\}$ , daß dieser Kegelschnitt die Strecke  $BC$  in ihrem Mittelpunkt berührt, woraus folgt, daß  $s^*$  aus  $s$  durch ähnliche Lage für  $O$  als Mittelpunkt und für das Verhältnis 1:2 abgeleitet werden kann. Es ist also  $O$  der Schwerpunkt eines jeden Tripeldreieckes  $A B C$ .

7. Es sei (Fig. 3.) wiederum  $A B C$  irgend ein Tripeldreieck,  $H$  der Schnittpunkt seiner Höhen. Dieser Punkt liegt mit dem Schwerpunkt  $O$  des Dreieckes und mit dem Mittelpunkt  $K$  des ihm umgeschriebenen Kreises auf einer Geraden und es ist  $OH = 2 KO$ . Weiter ist  $K_0 O = 2 KO = OH$ . Ist also  $D$  der zu dem Tripel  $A B C$  gehörige Punkt  $D$  und  $D'$  der zu  $D$  diametral gegenüberliegende Punkt von  $s$ , so geht die Normale in  $D'$  an  $s$  durch  $H$ . Die Seiten des Dreieckes sind zu den Geraden, welche  $O$  mit den gegenüberliegenden Ecken desselben verbinden, konjugiert inbezug auf beide Kegelschnitte  $s, s^*$ ; darum gehen die Normalen von  $s$  in den Punkten  $A, B, C$  gleichfalls durch  $H$ .

Wir kommen also zu dem Ergebnis:

„Für die Punkte des Kegelschnittes  $\bar{s}$ , dessen Scheitel die Entfernungen der Hauptkrümmungsmittelpunkte eines gegebenen Kegelschnittes  $s$  von seinem Mittelpunkte  $O$  halbieren, der also mit  $s$  coaxial und ähnlich ist und durch eine Vierteldrehung um  $O$  mit ihm in ähnliche Lage gelangt, zerfällt das Problem der Normalen in eine lineare und eine kubische Aufgabe. Um von irgend einem Punkte  $H$  von  $\bar{s}$  auf  $s$  die Normalen zu fällen, mache man  $OH' = 2 OH, OK = \frac{1}{2} HO''$ .

Die Verbindungsgerade der Fußpunkte der von  $H'$  auf die Achsen von  $s$  gefällten Senkrechten ist eine Normale durch  $H$ ; ermittelt man zu deren Fußpunkt  $D'$  den diametral gegenüberliegenden Punkt  $D$  auf  $s$ , so schneidet der durch  $D$  gehende Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkte  $K$  den Kegelschnitt  $s$  in den Fußpunkten der anderen drei durch  $H$  an  $s$  gezogenen Normalen.

Unabhängig von  $D$  konstruieren wir  $k$  als den Orthogonalkreis zu  $u$  mit gegebenem Mittelpunkt  $K$ .

8. Diese Zusammenhänge, welche zum großen Teil schon Joachimsthal auf originellem Wege gefunden hat, lassen sich aber auch leicht weiter-

führen und mit den Konstruktionen von Normalentripeln an einen zentrischen Kegelschnitt, die von den Punkten einer festgenommenen Normale desselben ausstrahlen, in Verbindung bringen.

Es sei also  $n$  irgend eine Normale von  $s$ ,  $D'$  ihr Fußpunkt,  $A_v$  ihr Schnitt mit der Hauptachse,  $B_v$  mit der Nebenachse,  $D$  der zu  $D'$  diametral gegenüberliegende Punkt von  $s$ . Soll man von irgend einem Punkte  $P$  auf  $n$  die weiteren Normalen an  $s$  legen, so errichtet man in  $A_v$  und  $B_v$  die Senkrechten zur Haupt- und Nebenachse von  $s$ , ermittelt zu ihrem Schnittpunkt  $H'$  den in bezug auf  $O$  symmetrisch liegenden Punkt  $N$  und halbiert  $NP$  in  $K_\pi$ , oder man ermittelt die Vektoren  $A_v Q = P B_v$ ,  $O K_\pi = \frac{1}{2} Q O$ . Alsdann schneidet der um  $K_\pi$  als Mittelpunkt beschriebene Kreis  $k_\pi$ , welcher durch  $D$  geht, den Kegelschnitt noch in den Fußpunkten der fraglichen Normalen.

Diese Konstruktionen rühren im Wesen gleichfalls von Joachimsthal (Crelles Journal 26. Bd.); auf rein geometrischem Wege hat dieselben in schöner Weise C. Pelz abgeleitet. (Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien 1882.) Wir werden im folgenden gleichfalls zu einer einfachen Herleitung der zuletzt angeführten Konstruktionen gelangen. (Art. 14.)

Ist  $F$  der Fußpunkt der Senkrechten von  $O$  auf die Tangente an  $s$  in  $D$  und  $Q'$  der zu  $Q$  in bezug auf  $O$  symmetrisch liegende Punkt, so ist  $DQ'$  die zu  $n$  parallele Normale von  $s$ ;  $H'N$  schneidet die Normale  $n$  im Punkte  $H$ , die Normale  $DQ'$  im Punkte  $K_0$ , und es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} OF \cdot DQ' &= OF \cdot QD' = OF(QH + HD') = OF(HP + HD') = \\ &= OF[HA_v + A_vP + HA_v + A_vD']. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{A_vP}{A_vD'} = \lambda$$

so wird

$$OF \cdot DQ' = OF \cdot A_vH \left[ -2 + \frac{(1 + \lambda) A_vD'}{A_vH} \right].$$

Da nun

$$\frac{D'A_v}{A_vB_v} = \frac{\varepsilon b^2}{c^2},$$

so folgt weiter

$$\frac{PA_v}{A_vB_v} = \frac{\varepsilon \lambda b^2}{c^2},$$

und

$$OF \cdot DQ' = OF \cdot A_vH \left[ -2 - 2(1 + \lambda) \frac{\varepsilon b^2}{c^2} \right].$$

Nach früherem, dem Ausdruck (5) zufolge, ist

$$FO \cdot B_vA_v = 2FO \cdot HA_v = c^2,$$

darum ist schließlich

$$OF \cdot DQ' = -(a^2 + \varepsilon \lambda b^2).$$

Da der Kreis  $k$  durch  $D$  und  $F$  geht und  $FO$  noch im Punkte  $Q''$  schneidet, so daß  $OQ'' = DQ'$ , so besitzt er in  $O$  die Potenz

$$\pi = -(a^2 + \varepsilon \lambda b^2).$$

Für die Abszissen  $x, X$  der Punkte  $D', P$  gilt die Proportion

$$\frac{X}{x} = \frac{PB_v}{D'B_v} = \frac{PA_v + A_v B_v}{D'A_v + A_v B_v} = \frac{\lambda \frac{\varepsilon b^2}{c^2} + 1}{\frac{\varepsilon b^2}{c^2} + 1};$$

für die Ordinaten  $y, Y$  die Proportion

$$\frac{Y}{y} = \frac{PA_v}{D'A_v}.$$

Es ist also

$$\frac{X}{x} = \frac{c^2 + \varepsilon \lambda b^2}{a^2}, \quad \frac{Y}{y} = \lambda. \quad (6)$$

Teilen wir somit die sämtlichen Normalen von  $s$  in der angegebenen Weise im Verhältnis  $\lambda$ , so beschreibt der Teilungspunkt  $P$  einen mit  $s$  koaxialen Kegelschnitt ( $P$ ).

9. Sei  $n_e$  eine gemeinsame Tangente von ( $P$ ) und der Evolute des Kegelschnittes  $s$ , welche ( $P$ ) in  $E$  berühren möge. Hier ist  $E$  der Teilungspunkt für die Normale  $n_e$  von  $s$  in dem gegebenen Verhältnis  $\lambda$ . Durch den zu  $E$  unendlich benachbarten Punkt  $E_1$  auf ( $P$ ) geht eine zu  $n_e$  unendlich benachbarte Normale an  $s$ , für welche  $E_1$  der Teilungspunkt für das gegebene Verhältnis  $\lambda$  ist. Es schneiden sich also in  $E_1$  zwei unendlich nahe Normalen von  $s$ . Deshalb ist  $E$  ein Krümmungsmittelpunkt von  $s$ . Der Kegelschnitt ( $P$ ) berührt somit die Evolute von  $s$  in vier Punkten.

Und umgekehrt jeder mit  $s$  koaxiale Kegelschnitt ( $P$ ), welcher die Evolute von  $s$  (in vier Punkten) berührt, ist mit  $s$  affin, wobei die Achsen sich selbst entsprechen; den Berührungspunkten von ( $P$ ) mit der Evolute entsprechen auf  $s$  die Fußpunkte der Normalen, welche ( $P$ ) in diesen Berührungspunkten berühren. Für die Punkte  $P$  eines solchen Kegelschnittes degeneriert das Normalenproblem, indem die Verbindungsgerade von  $P$  mit dem affin entsprechenden Punkt  $D'$  auf  $s$  die Normale  $PD'$  in  $D'$  an  $s$  ist, welche also linear konstruiert werden kann, und die weiteren drei Normalen durch  $P$  an  $s$  werden in der zuvor angegebenen Weise ermittelt und zwar mit Hilfe von Kreisen  $k$ , welche alle einen mit  $s$  konzentrischen Kreis  $u_\pi$  resp.  $u'_\pi$  diametral resp. orthogonal schneiden, je nachdem der Halbmesser dieses Kreises gleich ist  $\sqrt{a^2 + \varepsilon \lambda b^2}$  oder  $\sqrt{-(a^2 + \varepsilon \lambda b^2)}$ .

Für den Punkt  $Q$  sei

$$\frac{A_x Q}{A_x D'} = \lambda.$$



Es ist also

$$\lambda' = \frac{A_v B_v + P A_v}{A_v D'} = -\frac{c^2}{\varepsilon b^2} - \lambda \text{ oder}$$

$$\lambda + \lambda' = -\frac{c^2}{\varepsilon b^2}. \quad (7)$$

Es beschreibt also  $Q$  gleichfalls einen Kegelschnitt ( $Q$ ), der die Evolute von  $s$  berührt und der zu dem System der Kegelschnitte gehört, für deren Punkte das Normalenproblem degeneriert.

Der Mittelpunkt  $K_\pi$  von  $k_\pi$  beschreibt also einen Kegelschnitt ( $K_\pi$ ), welcher mit ( $Q$ ) ähnlich liegt für  $O$  als Ähnlichkeitsmittelpunkt im Verhältnis 1:2. Die zugeordneten Punkte der Kegelschnitte ( $P$ ), ( $Q$ ) liegen zueinander symmetrisch inbezug auf  $H$ . Die Potenz  $\pi$  von  $O$  inbezug auf die Kreise  $k_\pi$ , welche den Punkten von ( $P$ ) entsprechen, ist  $\pi = -(a^2 + \varepsilon \lambda b^2)$ ; die Potenz  $\pi'$  von  $O$  inbezug auf die Kreise  $k_\pi$ , welche den Punkten von ( $Q$ ) entsprechen, ist  $\pi' = -(a^2 + \varepsilon \lambda' b^2)$ , so daß wir mit Rücksicht auf (7) erhalten

$$\pi + \pi' = -(a^2 + \varepsilon b^2).$$

10. Für

$$\lambda = -\frac{c^2}{2\varepsilon b^2}$$

fallen beide Kegelschnitte ( $P$ ), ( $Q$ ) zusammen und wir haben den Fall vor uns, zu dem uns die Oskulationstripel geführt haben. Der Zusammenhang der Kegelschnitte ( $P$ ) und ( $Q$ ) ist ein gegenseitiger. Ist  $\lambda$  oder  $\lambda'$  gleich 1, dann ist  $\lambda'$  resp.  $\lambda$  gleich  $-\frac{a^2}{\varepsilon b^2}$ . Beschreibt also  $P$  oder  $Q$  den Kegelschnitt  $s$ , dann beschreibt  $Q$  resp.  $P$  einen Kegelschnitt, den wir mit ( $s$ ) bezeichnen wollen. Hier ist entweder  $\pi = -(a^2 + \varepsilon b^2)$  und  $\pi' = 0$  oder umgekehrt.

Ist also  $P$  irgend ein Punkt auf ( $s$ ) und  $D'$  der Fußpunkt der linear konstruierten Normale  $PD'$ , so ist  $k_\pi$  der über  $OD$  als Durchmesser geschlagene Kreis, wenn wieder  $D$  dem Punkte  $D'$  diametral gegenüber liegt. Wir bezeichnen mit  $R_1, R_2, R_3$  die weiteren Schnitte von  $k_\pi$  mit  $s$  und können den Satz aussprechen:

„Die Kreise, welche die Halbmesser  $OD$  eines Kegelschnittes  $s$  vom Mittelpunkte  $O$  zu Durchmessern haben, schneiden denselben in drei weiteren Punkten, für welche die Normalen an  $s$  in einem Punkte  $P$  zusammenlaufen; durch diesen Punkt  $P$  geht auch die Normale an  $s$  in dem zu  $D$  diametral gegenüberliegenden Punkte  $D'$ ; sämtliche Punkte  $P$  beschreiben einen mit  $s$  gleichartigen coaxialen Kegelschnitt.“

Ist  $s$  eine Hyperbel, so haben die Strecken, welche auf den Geraden  $DR_1, DR_2, DR_3$  durch die Asymptoten ausgeschnitten werden, extreme Längen unter allen endlichen Strecken, welche durch sie auf den Geraden durch  $D$  ausgeschnitten werden. \*)

\*) Cf. Bulletin de l'Académie des Sciences de Bohême a. a. O.

Die Fußpunkte der Normalen an die Hyperbel  $s$  von den Punkten  $P$  der Hyperbel ( $s$ ) haben also die Eigenschaft, daß auf den Geraden, welche den diametral gegenüberliegenden Punkt eines von ihnen mit den übrigen verbinden, durch die Asymptoten der Hyperbel  $s$  Strecken von extremen Längen ausgeschnitten werden.

Wir können diesen Zusammenhang auch, wie folgt, aussprechen:

„Zieht man in einer Ebene durch irgend einen Punkt  $D$  die drei möglichen Transversalen  $t_1, t_2, t_3$  zu irgend zwei Geraden  $a, b$  so, daß die Strecken, welche auf ihnen durch  $a$  und  $b$  ausgeschnitten werden, extreme Längen annehmen, so schneidet die Hyperbel, welche durch  $D$  geht und die Geraden  $a, b$  zu Asymptoten hat, die Geraden  $t_1, t_2, t_3$  in weiteren Punkten, deren Normalen an die Hyperbel in einem Punkte zusammenlaufen, durch den auch die Normale an die Hyperbel in dem zu  $D$  diametral gegenüberliegenden Punkte  $D'$  geht.“

Dabei können aber zwei von den Geraden  $t_1, t_2, t_3$  konjugiert imaginär sein.

11. Bezeichnen  $A^2, \varepsilon B^2$  die Halbachsenquadrate von  $(P)$ , so ist nach (6)

$$A a = c^2 + \varepsilon \lambda b^2, B = \lambda b$$

und somit

$$A a - \varepsilon B b = c^2.$$

Ferner ist

$$\pi = -(a^2 + \varepsilon B b) = -(\varepsilon b^2 + A a)$$

und

$$\pi' = \varepsilon b (B - b) = a (A - a).$$

Für  $(s)$  folgt daraus

$$A = -\frac{\varepsilon b^2}{a}, B = -\frac{\varepsilon a^2}{b}.$$

Daraus folgt die Konstruktion sämtlicher Kegelschnitte  $(P)$ . Wir

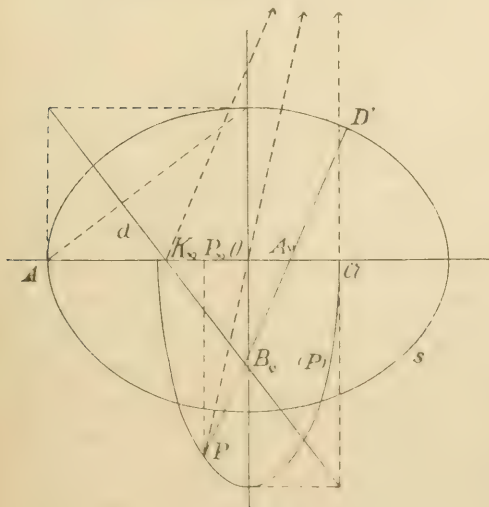


Fig. 4

verbinden (Fig. 4) bei einer Ellipse den Krümmungsmittelpunkt von  $s$ , welcher zu einem Hauptscheitel gehört, mit dem, welcher zu einem Nebenscheitel gehört, bei einer Hyperbel  $s$  den Krümmungsmittelpunkt für einen Scheitel derselben mit dem für einen Scheitel der zu  $s$  in bezug auf die Asymptoten konjugierten Hyperbel, durch eine Gerade  $d$ . Die Fußpunkte der von irgend einem Punkte der Geraden  $d$  auf die Achsen  $x, y$  gefällten Senkrechten sind Endpunkte der Achsen für einen Kegelschnitt  $(P)$ .





Die Kegelschnitte ( $P$ ) hat für  $s$  als Ellipse bereits Eckardt in einer analytischen Abhandlung (Schlömilchs Zeitschr. f. M. u. Ph. 1873) erkannt und die hier abgeleiteten Eigenschaften wurden teilweise neben den bereits angeführten auch noch von anderen Autoren in verschiedenen Zusammenhängen und Behandlungsformen betrachtet, so von Emil Weyr in Schlömilchs „Zeitschrift“, 16. Bd., insbesondere auch von K. Zahradník, über dessen diesbezügliche Arbeiten in dem kurz erschienenen Bulletin des travaux... pour les années 1867—1914 der Südslavischen Akademie d. Wissensch. näher berichtet wird.

12. Unsere Betrachtungen stehen in naher Beziehung mit der allgemeinen Lösung des Normalenproblems für einen vollkommen gegebenen Kegelschnitt  $s$ , welche ja auch von Joachimsthal herrührt und außer dem Kegelschnitt nur Gerade und Kreise verwendet.

Es sei in der Ebene von  $s$  eine beliebige Gerade  $g$  gegeben. Wir können eine Verwandtschaft der Punktreihen auf  $s$  und  $g$  in der Art herstellen, daß wir jedem Punkte  $N_i$  von  $s$  den Schnittpunkt  $N$  der Normale in  $N_i$  an  $s$  mit  $g$  zuordnen und umgekehrt ordnen wir irgend einem Punkte  $N$  von  $g$  die Fußpunkte  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) der von  $N$  an  $s$  ausstrahlenden Normalen. Dadurch gelangen wir zu einer Verwandtschaft (4, 1), also zu einer Punktinvolution 4. Grades auf  $s$ , welche zu der Punktreihe auf  $g$  projektiv ist. Die Involution auf  $s$  kann man auch durch einen Kegelschnittbüschel einschneiden, indem wir durch zwei Gruppen derselben zwei beliebige Kegelschnitte legen, welche einen Büschel  $\Sigma$  bestimmen. Alsdann liegt jede Gruppe der Involution auf einem Elemente dieses Büschels, welcher mit der Punktreihe auf  $g$  gleichfalls projektiv ist.

Durch die Gruppen, welche den Schnittpunkten von  $g$  mit den Achsen des Kegelschnittes  $s$  entsprechen, kann man Geradenpaare legen, deren je eine Gerade mit einer Achse von  $s$  zusammenfällt. Alsdann sind der Mittelpunkt  $O$  von  $s$  und der auf  $g$  liegende Pol  $Q$  für die zu  $g$  in bezug auf  $s$  normalkonjugierte Gerade, sowie die unendlich fernen Achsenpunkte von  $s$ , als die Schnittpunkte der Elemente des einen Geradenpaares mit den des anderen, die Grundpunkte des Büschels. Der dem unendlich fernen Punkt von  $g$  zugehörige Kegelschnitt des Büschels zerfällt in die unendlich ferne Gerade der Ebene und den Durchmesser  $QO$  von  $s$ , welcher zu der auf  $g$  senkrechten Richtung in bezug auf  $s$  konjugiert ist. Der jedem anderen Punkt  $G$  von  $g$  zugehörige Kegelschnitt des Büschels ist alsdann die zu  $G$  gehörige Apollonische Hyperbel. Daß dieselbe durch den Punkt  $G$  selbst geht, sehen wir aus der Projektivität des Büschels  $\Sigma$  mit der Reihe der Punkte  $G$  auf der durch den Grundpunkt  $Q$  des Büschels gehenden Geraden  $g$ . Es fallen auf ihr die von  $Q$  verschiedenen Schnittpunkte der drei degenerierenden Kegelschnitte in  $\Sigma$  mit den entsprechenden Punkten  $G$  zusammen; es gilt dies also für jeden Kegelschnitt von  $\Sigma$ . So gelangen wir zu der altberühmten Lösung des Normalenproblems, zu der auf analogem Wege auch schon Em. Weyr in einer Arbeit aus dem

J. 1871 (Schlömilchs Zeitschr. XVI Jhrg. S. 440 u. ff.) gelangt ist. Dreht sich die Gerade  $g$  um den Punkt  $G$ , so ändert sich die zugehörige Apollonische Hyperbel  $h$  nicht; der Punkt  $Q$  ändert sich und beschreibt sie; so erscheint die Apollonische Hyperbel als der Polarkegelschnitt der Pelz-Steinerschen Parabel des Punktes  $G$  inbezug auf den Kegelschnitt  $s$ .

13. Ist  $g$  ein Durchmesser von  $s$ , so berühren einander alle Kegelschnitte des erwähnten Büschels in  $O$ . Ist  $s$  eine Ellipse, so sind die Fußpunkte der von  $O$  ausgehenden Normalen alle reell und wir können durch dieselben zwei zueinander und zu einem der einander konjugierten gleichen Durchmesser  $l_1, l_2$  parallele Sehnen  $l'_1, l''_1$ , resp.  $l'_2, l''_2$  führen. Der Durchmesser  $m$ , welcher zu der auf  $OG$  senkrechten Richtung konjugiert ist, und die unendlich ferne Gerade  $m_\infty$  verbinden die vier Fußpunkte der Normalen, welche von dem unendlich fernen Punkte der Geraden  $OG$  an  $s$  gelegt werden. Es gehen somit durch die Fußpunkte der Normalen, welche man an die Ellipse  $s$  von irgend einem Punkte  $G$  ihrer Ebene legen kann, zwei Parabeln, deren Achsen zu den konjugiert gleichen Durchmessern  $l_1$  resp.  $l_2$  der Ellipse parallel sind.

Dieses Ergebnis hat Ed. Weyr auf einem anderen Wege abgeleitet (Sitzber. der k. böhm. Ges. d. Wissensch. in Prag 1902).

Den Punkten  $G$  eines Durchmessers  $g = OG$  von  $s$  entspricht projektiv ein Büschel von Parabeln mit der Achsenrichtung  $l_1$  und ein Büschel von Parabeln mit der Achsenrichtung  $l_2$ . Es sei nun (Fig. 6.)  $g$  ein Durchmesser von  $s$ , welcher zu einem der gleichen konjugierten Durchmesser  $l_1, l_2$  normal ist; also etwa  $g \perp l_1$ . Dann fällt  $m$  mit  $l_2$  zusammen und der Büschel der Parabel  $n$ , welcher durch die Geradenpaare  $l'_2, l''_2, m, m_\infty$  festgelegt ist, geht hier in eine Involution in einem Strahlenbüschel, dessen Geraden zu  $l_2$  parallel sind, über, welche Involution durch die soeben angegebenen zwei Paare festgelegt ist. Diese Strahleninvolution ist projektiv zu der Punktreihe auf  $g$ . Wir sehen, daß für  $g \perp l_1$  oder  $g \perp l_2$  das Normalenproblem in quadratische Konstruktionen degeneriert, wie schon Pelz auch bewiesen hat.

Schneiden wir beispielsweise die Strahleninvolution mit der Hauptachse  $x$  von  $s$ , so erhalten wir eine Punktinvolution und die Reihe der Punkte  $M$ , welche die Entfernungen der Punktepaare dieser Involution hälften, ist zu der Reihe der Punkte  $G$  auf  $g$  projektiv und zwar perspektiv ähnlich, es sind also alle Geraden  $MG$  zueinander parallel. Um ihre Richtung zu bestimmen, errichten wir in einem Endpunkte  $L_1$  von  $l_1$  die Normale an  $s$ , welche  $g$  in  $G_1$  schneiden möge. Der zu  $G_1$  gehörige Punkt  $M$  ist, wie leicht zu erkennen, der Mittelpunkt  $M_1$  der senkrechten Projektion von  $O L_1$  auf  $x$ .

Zu der so entstandenen Figur konstruieren wir eine ähnlich liegende für  $O$  als Ähnlichkeitspunkt und zwar eine solche, in der dem Mittelpunkte  $L_2$  von  $O L_1$  ein Punkt auf  $O L_1$  entspricht, in dem eine Hauptscheiteltangente  $t_1$  mit einer Nebenscheiteltangente  $t_2$  von  $s$  sich schneiden. Dann entspreche dem Punkt  $G_1$  der Punkt  $G'_1$ . Ist  $A_1$  der Scheitelpunkt auf  $t_1$

und trifft  $g$  die Tangenten  $t_1, t_2$  in den Punkten 1, 2, so sehen wir, daß  $1 G'_1 = O 2$  und  $G'_1 A_1 \parallel G_1 M_1$ . Dadurch ist die Richtung  $G'_1 A_1$  der Geraden  $M G$  bestimmt. Um sie zu ermitteln, braucht man also nur die Gerade  $g$  mit  $t_1$  und  $t_2$  zu schneiden, dann in angegebener Weise den Punkt  $G'_1$  zu ermitteln, wodurch  $G'_1 A_1$  bestimmt ist. Um also von  $G$  die Normalen zu ziehen, führen wir durch  $G$  die Parallele zu  $G'_1 A_1$ , welche  $x$  in Punkte  $M$  trifft, um welchen als Mittelpunkt wir den Kreis legen, welcher den Haupt-

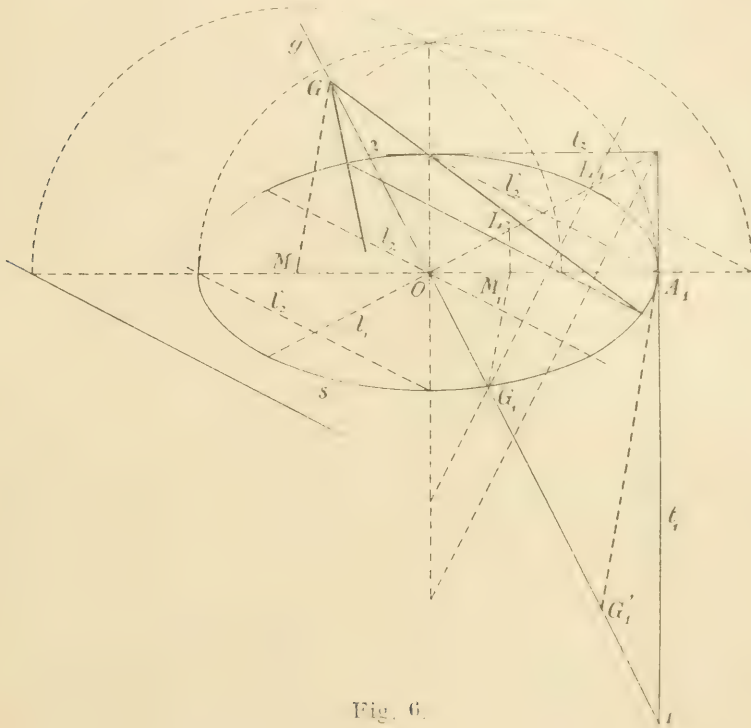


Fig. 6.

scheitelkreis von  $s$  diametral schneidet. Schließlich ziehen wir durch die auf  $x$  liegenden Punkte dieses Kreises die Parallelen zu  $L_2$ , welche  $s$  in den Fußpunkten der von  $G$  auf  $s$  gefällten Normalen treffen.

Wir gelangen so zu Konstruktionen, welche wir in einer früheren Arbeit (Sitzgsber. der k. böhm. Ges. d. Wissensch. 1903) auf anderem Wege gefunden haben.

14. Ist die Gerade  $g$  (im Art. 12.) eine Normale von  $s$  und  $Q$  ihr Fußpunkt, so haben in der zur Punktreihe  $G \dots$  auf  $g$  projektiven Involution 4. Grades alle Gruppen den Punkt  $Q$  gemein; die übrigen Punkte dieser Gruppen bilden also Gruppen einer Involution  $J_3$  dritten Grades, welche zu der Punktreihe  $G \dots$  gleichfalls projektiv ist. Legen wir durch irgend einen Punkt  $D$  auf  $s$  und durch die Tripel zweier Gruppen von  $J_3$  je einen Kegelschnitt, so legen diese beiden Kegelschnitte einen



Büschel  $\Sigma$  fest und jeder Kegelschnitt von  $\Sigma$  schneidet aus  $s$  eine Gruppe von  $J_3$  aus.

Wir wollen als  $D$  den zu  $Q$  diametral gegenüberliegenden Punkt annehmen. Die dem unendlich fernen Punkt von  $g$  entsprechende Gruppe in  $J_3$  besteht aus den unendlich fernen Punkten und aus dem mit  $D$  zusammenfallenden Punkte von  $s$ . Die Tangente  $t$  in  $D$  an  $s$  und die unendlich ferne Gerade  $u_\infty$  der Ebene repräsentieren also einen Kegelschnitt, welcher diese Gruppe mit  $D$  verbindet. Wir nehmen nun  $(t u_\infty)$  als einen Kegelschnitt von  $\Sigma$  an. Die Fußpunkte der Normalen, welche von dem Mittelpunkt  $H$  der aus  $g$  durch die Achsen  $x, y$  von  $s$  ausgeschnittenen Strecke ausstrahlen, liegen nach der früher hier abgeleiteten Beziehung von Joachimsthal auf einem durch  $D$  gehenden Kreise  $k$ , dessen Mittelpunkt  $K$  auf der Geraden liegt, welche  $H$  mit dem Mittelpunkt  $O$  von  $s$  verbindet und für den  $OK = \frac{1}{2}HO$  ist. Wir können nun  $k$  als einen zweiten Kegelschnitt von  $\Sigma$  annehmen, woraus wir  $\Sigma$  als einen Kreisbüschel erkennen, dessen Zentrale  $c$  die Senkrechte von  $K$  auf  $t$  ist. Aus der Projektivität zwischen  $G, \dots$  und  $\Sigma$  folgt auch, daß die Punktreihe  $G, \dots$  mit der Reihe der Mittelpunkte  $K, \dots$  der Kreise in  $\Sigma$  projektiv ist, und da die unendlich fernen Punkte der Punktreihen einander entsprechen, so liegen dieselben ähnlich. Ihr Ähnlichkeitspunkt ist  $N$  (Fig. 3), was daraus folgt, daß für Punkte  $G$  von  $g$ , welche auf den Achsen  $x$  und  $y$  liegen, die zugehörigen Punkte von  $c$  auf den Achsen  $y, x$  liegen. Hiedurch sind die früher angeführten Zusammenhänge der Betrachtungen von Pelz erwiesen.

15. Wir stellen noch folgende Betrachtung an. Wir ziehen irgend einen Durchmesser  $g$  von  $s$ . Den Punkten  $G$  der Reihe auf  $g$  ordnen wir die unendlich fernen Punkte der Normalen zu, die man von  $G$  auf  $s$  fällen kann. Dadurch wird eine Projektivität hergestellt zwischen einer biquadratischen Involution auf der unendlich fernen Geraden  $u_\infty$  und einer gewöhnlichen (quadratischen) Involution auf  $g$ . Nämlich zu jedem Punkte  $U_i$  von  $u_\infty$  gehören zwei Punkte  $G_1, G_2$  auf  $g$ ; das sind die Schnittpunkte der Normalen, welche man von  $U_i$  an  $s$  ziehen kann; jedem Punkte  $G_1$  entsprechen vier Punkte  $U_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) auf  $u_\infty$ , das sind die unendlich fernen Punkte der Normalen von  $G_1$  an  $s$ , und durch einen von den Punkten  $U_i$  sind die übrigen drei gegeben. Dieselben vier Punkte  $U_i$  entsprechen auch dem zu  $G_1$  in bezug auf  $O$  symmetrischen Punkte  $G_2$ . Man erkennt daraus, daß die (4, 2)deutige Verwandtschaft zwischen der Punktreihe auf  $u_\infty$  und der auf  $g$  eine Projektivität zweier Involutionen ist; einer quadratischen  $J_2$  auf  $g$ , welche  $O$  und den unendlich fernen Punkt von  $g$  zu Doppelpunkten hat, und einer biquadratischen  $J'_4$  auf  $u_\infty$ . Projizieren wir die Involution  $J'_4$  von irgend einem Punkte  $S$ , so erhalten wir eine zu  $J_2$  projektive Strahleninvolution  $J''_4$ ; lassen wir den Strahlenbüschel um  $S$  eine Vierteldrehung vollführen, so geht die Involution  $J''_4$  in eine andere gleichfalls mit  $J_2$  projektive Involution über. Die Strahlen der so erhaltenen Involution schneiden den Kegelschnitt  $s$ , wenn wir den

Punkt  $S$  auf ihm wählen, in einer Punktinvolution  $J_4$ , welche mit  $J_2$  gleichfalls projektiv ist.

Legen wir durch zwei Quadrupel von  $J_4$  zwei Kegelschnitte  $k_1, k_2$ , so legen diese einen Büschel  $(k)$  fest. Jedes Element von  $(k)$  schneidet alsdann  $s$  in den vier Punkten einer Gruppe von  $J_4$ , ihm entspricht ein Punktepaar  $G_1, G_2$  in  $J_2$  und diese Involution ist mit  $(k)$  wieder projektiv.

Nehmen wir als  $S$  einen Scheitel des gegebenen Kegelschnittes an, so entspricht dem Doppelpunkte  $O$  von  $J_2$  ein Quadrupel von  $J_4$ , dessen zwei Punkte in dem Scheitel  $S$ , die zwei übrigen Punkte in dem zu  $S$  diametral gegenüberliegenden Scheitel  $S_1$  vereinigt sind. Der über  $SS_1$  als Durchmesser gelegte Scheitelkreis enthält somit alle vier Punkte dieses Quadrupels; wir können ihn als den Kegelschnitt  $k_1$  annehmen. Dem unendlich fernen Punkte  $G_\infty$  von  $g$  entspricht in  $J_4$  ein Quadrupel, dessen zwei Punkte in dem Schnitte  $T$  von  $s$  mit der von  $S$  auf  $g$  errichteten Senkrechten zusammenfallen, während die übrigen zwei die unendlich fernen Punkte von  $s$  sind. Die Tangente  $t$  in  $T$  an  $s$  bildet mit der unendlich fernen Geraden  $u_\infty$  einen zerfallenden Kegelschnitt, welcher die Punkte des zweiten Quadrupels verbindet und den wir als  $k_2$  annehmen. Der durch  $k_1$  und  $k_2$  bestimmte Kegelschnittbüschel ist also ein Kreisbüschel, welcher  $t$  zur Potenzlinie hat. Es liegen also die Punkte irgend eines Quadrupels von  $J_4$  auf einem Kreise dieses Büschels. Dies gibt also den bekannten von Joachimsthal herrührenden Satz:

„Fällt man von einem Scheitel  $S$  eines Kegelschnittes  $s$  auf die vier Normalen desselben, die von irgend einem Punkte seiner Ebene gehen, die Senkrechten, so läßt sich durch deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt  $s$  ein Kreis legen.“

16. Wir wollen (Fig. 7) jetzt den Punkt  $S$  beliebig auf dem Kegelschnitt  $s$  annehmen. Dieser Punkt  $S$  führt wieder in gleicher Weise zu einer Involution  $J_4$  auf  $s$ . Die Punkte jeder Gruppe derselben sind Schnittpunkte mit  $s$  der Senkrechten zu den Normalen von  $s$ , die von einem Punkte  $g$  auf  $g$  ausgehen. Es sei  $S'$  der zu  $S$  symmetrisch liegende Punkt in bezug auf eine Achse von  $s$  und  $M$  sei ein Scheitelpunkt auf dieser Achse. Die Involution  $J_4$  projiziert sich in der Richtung  $S'M$  auf  $s$  wieder in eine biquadratische Involution  $J_4^*$ . Dem Punkte  $O$  von  $g$  entspricht ein Quadrupel in  $J_4$ , von dem zweimal zwei Punkte in den Endpunkten des Durchmessers  $S'O$  vereinigt sind und die sich in die Endpunkte der Achse  $MO$  projizieren. In diesen sind also zweimal zwei Punkte einer Gruppe von  $J_4^*$  vereinigt. Der zugehörige Scheitelkreis  $k_1^*$  von  $s$  enthält die letztgenannten Punkte, verbindet also das zu  $O$  gehörige Quadrupel von  $J_4^*$ . Dem unendlich fernen Punkte  $G_\infty$  von  $g$  entsprechen in  $J_4$  der Schnittpunkt  $\bar{T}$  von  $s$  mit dem von  $S$  auf  $g$  gefällten Lot, sein unendlich benachbarter Punkt und die unendlich fernen Punkte von  $s$ . In  $J_4^*$  entsprechen dem Punkte  $G_\infty$  der Schnitt  $T^*$  von  $s$  mit der durch  $\bar{T}$  zu  $S'M$  gezogenen Parallelen, sein unendlich benachbarter Punkt auf  $s$  und gleich-





Fällt man von  $S$  die Senkrechte auf  $\bar{n}$  und zieht durch ihren Schnittpunkt  $S_v$  mit  $s$  die Parallele zu  $l$ , so trifft diese  $s$  noch im Punkte 1 und der durch 1 gehende Kreis  $k^*$ , welcher dem durch  $m$  und  $(t^*, u_\infty)$  festgelegten Büschel angehört, schneidet  $s$  noch in den Punkten 2, 3, 4, deren Projektionen auf  $s$  in der Richtung  $l$  mit  $2', 3', 4'$  bezeichnet werden mögen. Alsdann folgt aus dem letzten Satze, daß die übrigen 3 Normalen durch  $\bar{G}$  an  $s$  senkrecht zu den Graden  $S2', S3', S4'$  sind. Nun sind die Sechsecke  $MS'S\bar{T}T^*T$  und  $1S_vSS'M\bar{1}$  Pascalsche Sechsecke, welche  $u_\infty$  zur Pascalgeraden haben. Folglich sind  $TT^*$  und  $\bar{1}1$  senkrecht auf  $MO$ . Daraus folgt, daß die Kreise  $k^*, k$  gleich sind und in bezug auf  $MO$  symmetrisch liegen.

Halten wir also  $M$  fest, so fallen die allen Punkten  $S$  und auf  $s$  zugehörigen Kreise  $k^*$  in einen einzigen zusammen, welcher das Spiegelbild von  $k$  in bezug auf  $MO$  ist.

Es ist also unsere Verallgemeinerung des Satzes von Joachimsthal eine einfache Folge desselben.

Durch gleiche Betrachtungen ergibt sich außerdem der spezielle Satz:

*Wählen wir auf einer gleichseitigen Hyperbel  $s$  mit dem Mittelpunkt  $O$  irgend einen Punkt  $S$ , ermitteln zu seiner Verbindungsgeraden mit einem Scheitel  $M$  derselben die in bezug auf  $MO$  symmetrisch liegende Gerade  $l$  und bringen die Parallelen durch  $S$  zu den vier von irgend einem Punkte der Ebene der Hyperbel ausgehenden Normalen derselben mit ihr zum Schnitt, so projizieren sich die Schnittpunkte in der Richtung  $l$  auf  $s$  in vier Punkte, die auf einem Kreise liegen.*

Insbesondere:

*Die Parallelen, welche man zu den von einem Punkte der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel an dieselbe ausgehenden Normalen durch einen Scheitel  $M$  der Hyperbel führt, schneiden diese in vier Punkten, welche einem Kreise angehören.*

Die Kreise, zu denen wir in diesen Spezialsätzen geführt werden und die zugehörigen Kreise, die wir hier auf Grund des vorangehenden Joachimsthalschen Satzes und seiner Verallgemeinerung erhalten, sind alle gleich und liegen zueinander paarweise symmetrisch in bezug auf die Nebenachse, beziehungsweise Hauptachse der gleichseitigen Hyperbel, wie sich leicht dartun läßt.

# Über die Bestimmung des aktiven Sauerstoff im Natriumperoxyd.

Von Prof. Dr. Ing. Jaroslav Milbauer, Prag.

Das Natriumperoxyd ist in der modernen Zeit ein sehr wichtiges Oxydationsmittel geworden, und es ist daher nicht zu verwundern, daß den Methoden seiner raschen Bewertung ein besonderes Augenmerk zugewendet wurde.

Diese beruhen auf

1. der Entwicklung des Wasserstoffperoxydes und dessen Bestimmung durch *Titration mit Permanganatlösung* (Rupp, Großmann, Niemayer u. a.). Dieses Verfahren ergab zu niedrige Resultate, welche dadurch verbessert worden sind, daß das Natriumperoxyd mit einem neutralen Stoff (Kochsalz!) gemischt und in angesäuertes, auf  $-5^{\circ}C$  überkühltes Wasser eingetragen wurde. Sehr niedrige Resultate ergeben sich nach dem Eintragen in eine angesäuerte Permanganatlösung und Rücktitration mit Ferrosulfatlösung;
2. der *Jodometric*, wo man aus Natriumperoxyd und einer Jodkaliumlösung Jod frei macht und dasselbe nach Zugabe von Kaliumbicarbonat (im Überschuß) durch eine titrierte Lösung von Natriumarsenit bestimmt. (Rupp.) Auch diese Methode ergibt zu niedrige, jedoch immerhin bessere Resultate als die früheren.
3. der *Volumetric*. Das Prinzip dieser Methode stammt von *Archbutt*. Hier wird der aus dem Natriumperoxyd durch Wasser unter Zusatz von Kobaltnitrat als Katalysator entwickelte Sauerstoff gemessen. Alle Autoren, die diese Methode geprüft haben, erhielten viel zu hohe Resultate (Großmann, Rupp, Hertig u. a.).

Das Ziel dieser Arbeit,\*) unter anderem, war die geeignetsten Be-

---

\*) Dies ist nur ein sehr kurzer Auszug aus der umfangreichen Dissertationsarbeit des H. Ing. Jiří Dimmer, die derselbe in meinem Laboratorium in den Jahren 1916—1918 ausgearbeitet hatte und die in „Rozpravy České Akademie“ unverkürzt erscheinen wird.

dingungen für die Sauerstoffbestimmung im Natriumperoxyd durch Titration und Volumetrie zu finden, die Verfahren zu vergleichen, ihre Fehler festzustellen und neue, einwandfreie Methoden auszuarbeiten.

Bei der *Permanganattitration* und zwar dann, wenn man das Gemisch von  $\text{Na}_2\text{O}_2$  mit  $\text{NaCl}$  in angesäuertes auf  $-5^\circ\text{C}$  überkühltes Wasser einträgt und das entstehende Wasserstoffperoxyd titriert, ergaben sich bei mehreren Versuchen mit demselben Präparat *verschiedene* Resultate, zu B.: 80.34%, 81.90%, 82.29%  $\text{Na}_2\text{O}_2$ . Vom analytischen Standpunkt wäre einzuwenden, daß die Titration unter Anwesenheit von Chlorwasserstoff vor sich geht, und also nicht fehlerlos ist; vom praktischen Standpunkt wäre die Unbequemlichkeit des Kühlens hervorzuheben. Wir bemühten uns also, vor allem festzustellen, ob es nicht möglich wäre, das aus Natriumperoxyd durch Behandlung mit Wasser entstehende Wasserstoffperoxyd an irgend welche Stoffe zu binden. Wir versuchten zunächst die Zugabe von Harnstoff und Phosphaten. Die Resultate waren jedoch nicht übereinstimmend, genau wie bei der gewöhnlichen Permanganattitration. Während der Arbeit gelang es uns zu zeigen, daß das rasche Eintragen des Peroxyds in gekühltes Wasser nicht vorteilhaft ist, denn es findet eine lokale Überhitzung statt, deren Folge Verluste an aktivem Sauerstoff sind, die oft über 2% betragen. Das Einwerfen muß sehr sorgfältig und sehr langsam geschehen. Es wurde ferner gefunden, daß es von besonderem Vorteile ist, das Natriumperoxyd durch mit Schwefel- und Borsäure angesäuertes Wasser zu zersetzen. In diesem Falle brauchte *keine* Kühlung stattzufinden und die Titration gab vollkommen übereinstimmende Resultate zwischen  $-5^\circ\text{C}$  bis  $+50^\circ\text{C}$ . Dieselben waren um 1.15% höher als diejenigen der gewöhnlichen Permanganattitration.

Den Einfluß der Menge der beiden erwähnten Säuren prüfend, gelang es uns, folgende neue, einfache und rasche Permanganatmethode zu finden:

100 ccm Wasser werden mit 5 ccm conc. Schwefelsäure und 5 g Borsäure (chemisch rein) versetzt. Man überzeuge sich durch einen blinden Versuch, daß sich die Lösung durch den ersten Tropfen der Permanganatlösung rosa färbt. Nun werden unter tüchtigem Rühren ca. 0.5 g Natriumperoxyd aus einem Wägefläschchen allmählich zugefügt und mit einer Permanganatlösung, wie gewöhnlich, titriert. Das Wägefläschchen muß mit einem äußerst gut geschliffenen Stopfen versetzt sein, da sonst infolge des Luftzutrittes große Verluste an aktivem Sauerstoff stattfinden. Dementsprechend muß auch das Aufbewahren des Präparates in Exsikatoren geschehen, sonst treten Verluste ein, welche an starker Gelbfärbung der Oberfläche des Präparates zu erkennen sind.

Es war von Wichtigkeit die Ursache aufzuklären, warum die bisherige Permanganattitration niedrigere Resultate ergibt, als die von uns aufgestellte. Der Grund liegt darin, daß das durch Zersetzung des Natriumperoxydes mit Wasser entstehende Wasserstoffperoxyd sich in statu



nascendi an die Borsäure bindet und das Additionsprodukt selbst bei  $+ 50^{\circ}C$  beständig ist.

Es gelang uns ferner während unserer weiteren Forschungen noch eine weitere Tatsache festzustellen, die gleichfalls nicht bedeutungslos sein dürfte. Bei Vornahme unserer Titration in Anwesenheit von verschiedenen Salzen der Schwermetalle stellte sich heraus, daß es von bedeutendem Unterschied ist, ob man das betreffende Salz dem mit Schwefelsäure und Borsäure angesäuerten Wasser *vor* dem Eintragen des Peroxyds zufügt, oder erst *nach* demselben, wo somit das Natriumperoxyd bereits zersetzt ist und das entstandene Wasserstoffperoxyd sich an die Borsäure gebunden hat. Die folgende Übersichtstafel klärt uns den Unterschied auf:

100 <i>ccm</i> Wasser, 5 g Borsäure, 5 <i>ccm</i> conc. Schwefelsäure und 2 g des betreffenden Salzes, dann erst $Na_2O_2$ eingetragen u. titriert. Gefunden:	100 <i>ccm</i> Wasser, 5 g Borsäure, 5 <i>ccm</i> conc. Schwefelsäure zu- gefügt, $Na_2O_2$ eingetragen, wonach erst das betreffende Salz zugefügt (2 g). Gefunden:	Zugefügtes Salz:
$Na_2O_2$ 60·84%	$Na_2O_2$ 93·60%	Cobaltsulfat
„ 62·40 „	„ 93·60 „	Mangansulfat
„ 82·29 „	„ 92·04 „	Kupfersulfat
„ 89·31 „	„ 92·04 „	Nickelsulfat
„ 93·06 „	„ 93·38 „	Zinksulfat
„ 93·06 „	„ 93·38 „	Magnesiumsulfat
„ 93·06 „	„ 93·06 „	Kein Salz.

Wie ersichtlich ist, wirkt hier das betreffende Salz ( $CoSO_4$  usw.) als positiver Katalysator der Zersetzung des Wasserstoffperoxydes in *statu nascendi*. Dadurch sind wir auch im stande zu erklären, warum alle anderen Permanganattitrationen zu niedrige Resultate ergeben, wenn kein negativer Katalysator der Zersetzung des Wasserstoffsperoxyds anwesend ist (in unserem Falle Borsäure, die gleichzeitig Wasserstoffperoxyd bindet). Während der Titration entsteht nämlich ein positiver Katalysator der erwähnten Zersetzung, das Mangansulfat. Dies ist auch der Grund, warum das Eintragen des Natriumperoxyds in eine Permanganatlösung und Rücktitration derselben nicht möglich war.

Die von E. Rupp stammende *jodometrische Bestimmung* ließ sich dadurch verbessern, als es nicht notwendig war, Kaliumbicarbonat der angesäuerten Jodkaliumlösung nach dem Eintragen des Peroxydes zuzufügen, vielmehr kann hier die Methode von K i n g z e t t, die für Wasserstoffperoxyd ausgearbeitet wurde, benützt werden. Wir arbeiten wie folgt: 2 g Jodkalium werden in 200 *ccm* verdünnter Schwefelsäure (1:20) gelöst und das Natriumperoxyd allmählich eingetragen. Das ausgeschiedene Jod wird durch eine titrierte Thiosulfatlösung bestimmt. Die Resultate dieser Titration (siehe unten) stimmen vollkommen mit denjenigen unserer Permanganattitration überein.

Wir prüften auch die *volumetrische Methode von Archbutt*, indem wir von einem Lunge schen Nitrometer mit Anhängefläschchen

Gebrauch machten. Das Natriumperoxyd wurde in ein kleines Glasröhrchen eingewogen und mit diesem in das Fläschchen, in das vorher 10 *ccm* Zersetzungsflüssigkeit gebracht worden, eingelegt. Wenn die Zersetzung in alkalischem Medium vor sich gehen sollte, gebrauchten wir Wasser, sollte sie aber in sauerem Medium vor sich gehen, benützten wir verdünnte Schwefelsäure (1 : 10). Nach Verschuß des Apparates und Ausgleich des Druckes wurde das Fläschchen geneigt, um das Peroxyd mit der Flüssigkeit in Berührung zu bringen. Nach vollendeter Zersetzung und Ausgleich der Temperatur wurde die Menge des entstandenen Gases gemessen. Wir prüften systematisch die Wirkung verschiedener Katalysatoren. Gleichzeitig mit jeder volumetrischen Bestimmung wurde eine Permanganattitration, nach unserer Modifikation ausgeführt und die Resultate zu Vergleichszwecken auf 19% des Resultates der Permanganattitration überrechnet.

Es wurden $2 \times 10^{-5}$ Mol. Katalysator zur Zersetzungsflüssigkeit zugefügt:	Im alkalischen Medium ge- funden % akt. Sauerstoff	In sauerem Medium %O	In sauerem, nach vollendeter Zerset- zung nachträglich durch 10 <i>ccm</i> 20%iger Natronlauge alkali- siertem Medium %O:
Mangansulfat	20.59	16.38	18.95
Cobaltsulfat	20.53	19.97	21.32
Nickelsulfat	19.88	14.45	18.50
Palladiumschwamm;	19.81	21.23	21.39
Silbersulfat	19.38	13.81	24.63
Quecksilbersulfat	19.07	4.45	13.34
Zuckerkohle	19.01	2.21	13.36
Kupfersulfat	19.00	19.28	19.19
Platinschwamm	18.86	19.52	22.90
Eisensulfat	18.80	5.23	18.51
Bleisulfat	18.74	13.16	19.71
Zinksulfat	18.54	3.37	18.71
Chlorplatinssäure	18.42	2.88	13.17
Arsensäure	16.48	1.60	10.21
Ohne Katalysator	19.00	1.65	9.76

Die erhaltenen Werte sind in dem Sinne zu berichtigen, daß das entstandene Gas nicht reiner Sauerstoff ist. Es ist wohl bekannt, daß Natriumperoxyd auch Natriumkarbonat und auch geringe Spuren von Natrium enthält. Infolgedessen entsteht bei der Zersetzung in sauerem Medium neben Wasserstoff auch Kohlendioxyd; wenn aber die Zersetzung in alkalischem Medium vor sich geht, ist der entbundene Sauerstoff nur mit Wasserstoff vermischt. Um die betreffenden Berichtigungen ausführen zu können, analysierten wir das entwickelte Gas. Es ergab sich, daß der Sauerstoff durchschnittlich 0.32%  $\text{CO}_2$  und 0.08% Wasserstoff enthält. Wir prüften ferner die katalytische Wirkung des von Archbutt benützten Kobaltnitrats. Es resultierten immer Werte von 22.1% O, also

höhere als theoretisch möglich (die Theorie für  $\text{Na}_2\text{O}_2$  verlangt 21.51% O). Wir neigen uns der Ansicht zu, daß Natriumperoxyd immer eine geringe Menge eines noch höheren Oxyds enthält. Die Versuche über die Einwirkung des Sauerstoffes auf alkalische Hydroxyde bei höherer Temperatur und hohem Drucke ergaben eine ganze Reihe von höheren Oxyden bei Rubidium und Caesium (Fischer und Plötze); nach unseren noch nicht veröffentlichten Versuchen ist die Möglichkeit der Existenz eines solchen bei Natrium auch nicht ausgeschlossen. Bei der Methode von Archbutt dauert die Zersetzung sehr lange (bis zur vollständigen Stabilität des Volumen *einige Stunden*) und wird, falls die Zersetzung in saurem Medium vor sich geht, auch Kohlendioxyd mitgemessen. Es gelang uns festzustellen, daß das käufliche Natriumperoxyd nur Spuren von Natrium enthält, denn es war im höchsten Fall nur 0.1% Wasserstoff im entwickelten Gas nachweisbar, und es stellte sich heraus, daß nach Zugabe eines verhältnismäßig billigen Katalysators — Kupfersulfat — die Zersetzung in alkalischem Medium in 1—2 Minuten vollendet ist. Wir empfehlen demzufolge nachstehende Modifikation der volumetrischen Bestimmung:

Es werden 0.2—0.3 g  $\text{Na}_2\text{O}_2$  in ein Wägeröhrchen eingewogen, das Röhrchen wird in das Zersetzungsfläschchen des Nitrometers, das ca 10 ccm einer 0.05%igen Kupfersulfatlösung enthält, eingelegt, der Apparat geschlossen und das Peroxyd mit der Flüssigkeit in Berührung gebracht. Nach einer Minute wird die Zersetzung durch Schütteln vollendet.

Bei diesem Analysengang und in den Grenzen von  $0.2 \times 10^{-5}$  bis  $20 \times 10^{-5}$  Mol des zugefügten  $\text{Cu SO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$  in 10 ccm Wasser bleibt die Flüssigkeit klar, wogegen dies bei der Zersetzung nach Archbutt nicht der Fall war.

Es sei gestattet, eine Übersichtstafel anzuführen, die die Vergleichung der Resultate im %aktiven Sauerstoffe der von uns ausgearbeiteten und der älteren jodometrischen Methode nach Rupp ermöglicht. \*)

Muster	Jodometrie nach Rupp	Unsere Permanganat-„Bor“titration.	Jodometrie, Rücktitration mit $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ .	Volumetrie 10 ccm Wasser mit 10 mg $\text{Cu SO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ .
A	17.88; 18.24; 18.63	18.96; 18.90 18.69	18.91; 18.82 18.86	18.88; 18.92 18.88
B	18.28; 17.36; 17.21	18.80; 18.80 18.25	19.01; 18.95 18.99	18.55; 18.72 18.70
C	16.90; 16.20; 15.92	17.20; 17.20 17.16	17.25; 17.18 17.35	17.35; 17.28 17.15
D	13.62; 13.41; 12.92	13.88; 13.80 13.88	13.82; 13.90 13.75	13.92; 13.78 13.86
E	3.62; 4.00; 3.79	4.00; 3.80 3.86	4.2; 3.92 3.98	4.15; 3.95 4.05

\*) Auf die Vergleichung mit der älteren Permanganatmethode haben wir verzichtet, da die Zahlen mit dieser Methode zu niedrig und schwankend sind.



Von diesen drei von uns ausgearbeiteten Methoden ziehen wir die Permanganattitration in Anwesenheit von Borsäure vor, da sie eine einfache, direkte und billigere ist als die jodometrische. Sie ist ohne jede besondere Apparatur durchführbar und übertrifft so die volumetrische.

Im Besitze eines schnellen und verlässlichen Verfahrens zur Bestimmung des aktiven Sauerstoffs im Natriumperoxyd bemühten wir uns die Angaben jener Veränderungen zu berichtigen, die von den Atmosphären auf das Natriumperoxyd ausgeübt werden. Den Einfluß klärt nachstehende Übersichtstafel auf:

Das 91.5%ige Präparat befand sich binnen 2 Stunden in mit $P_2O_5$ getrockneter, vollständig kohlenstoffreier Luft . . . . .	Abnahme in Prozenten $Na_2O_2$ (Durchschnitt zweier Versuche) keine
Dasselbe in mit Calciumchlorid getrockneter, vollständig $CO_2$ freier Luft . . . . .	0.97
In trockener, an $CO_2$ reicher Luft . . . . .	1.2
In feuchter, $CO_2$ freier Luft . . . . .	7.0
In nicht getrockneter $CO_2$ haltiger Luft . . . . .	15.3
Im reinem, getrockneten Kohlendioxyd . . . . .	3.0

Es ergibt sich also, daß es die Feuchtigkeit ist, die die schädlichste Wirkung auf die Natriumperoxyd-Präparate ausübt. Sie wirkt von der Oberfläche aus, gleichzeitig tritt eine Änderung der Farbe des Präparates ein, es wird gelb. So lieferte ein Muster, in einer mit schlecht schließenden Stopfen versehenen Flasche aufbewahrt:

An der Oberfläche (gelb) . . . . .	58.3% $Na_2O_2$
In der Mitte (gelblich) . . . . .	89.9% ..
In untersten Schichten (weiß) . . . . .	90.7% ..

*Aus dem Laboratorium für anorganische Technologie der böhmischen technischen Hochschule in Prag.*

## Sur les racines rationnelles du polynôme

$$\frac{J}{27} + \frac{I}{3}\mu - \mu^3$$

qui figure dans la théorie des fonctions abéliennes  
singulières de trois variables.<sup>1)</sup>

Par **Dr. VÁCLAV HRUŠKA,**

assistant pour les mathématiques à l'École polytechnique tchèque de Prague.

Entendons dans ce qui va suivre par  $\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  
 $r, s = 2, 3, 5, 6$ ;  $i, k = 1, 2, 3$ .

1. Soient données des fonctions abéliennes singulières, dont les périodes satisfont aux relations suivantes:

$$(1) \begin{cases} E_1 = A_{56}(\tau_{11}) + A_{64}(\tau_{12}) + A_{45}(\tau_{13}) + \sum_{i=1}^3 A_{2,i+3} \tau_{3,i} - \sum_{i=1}^3 A_{3,i+3} \tau_{2,i} + A_{23} = 0 \\ E_2 = A_{56}(\tau_{21}) + A_{64}(\tau_{22}) + A_{45}(\tau_{23}) + \sum_{i=1}^3 A_{3,i+3} \tau_{1,i} - \sum_{i=1}^3 A_{1,i+3} \tau_{3,i} + A_{31} = 0 \\ E_3 = A_{56}(\tau_{31}) + A_{64}(\tau_{32}) + A_{45}(\tau_{33}) + \sum_{i=1}^3 A_{1,i+3} \tau_{2,i} - \sum_{i=1}^3 A_{2,i+3} \tau_{1,i} + A_{12} = 0 \end{cases}$$

$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ ,  $A_{\mu\mu} = 0$  étant des nombres entiers. Soit  $(i_1 i_2 \dots i_2 k)$  un pfaffien<sup>2)</sup> d'ordre  $h$  formé des éléments de la matrice  $\|A_{\mu\nu}\|$  et  $K = (123456)$ ,  $L = (1245) + (2356) + (3164)$ ,  $M = (14) + (25) + (36)$ ,

$$I = 3L + M^2, \quad J = 27K - 9ML - 2M^3, \quad \lambda = \mu - \frac{M}{3}$$

$$P(\lambda) = K + L\lambda - M\lambda^2 - \lambda^3 = \frac{J}{27} + \frac{I}{3}\mu - \mu^3 = \Pi(\mu).$$

Toutes les racines de l'équation  $P(\lambda) = \Pi(\mu) = 0$  sont réelles.<sup>3)</sup> Si  $\Pi(\mu) = 0$  a une racine rationnelle, on peut parvenir à ce que la racine

<sup>1)</sup> Je conserve dans cette note la notation usée dans ma note „Sur les relations parmi les périodes des intégrales abéliennes dégénérées de genre 3.“ Bulletin international de l'Académie des Sciences de Prague, 1918.

<sup>2)</sup> G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie.

<sup>3)</sup> Voir mon mémoire „O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných“, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, t. 48, Praha 1919.

correspondante de l'équation  $P(\lambda) = 0$  soit égale à 0. Il faut distinguer les cas suivants:

2. Si  $\Pi(\mu) = 0$  a une racine triple (et alors rationnelle), on peut supposer que  $P(\lambda)$  ait la racine triple  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire  $K = L = M = 0$ . Dans ce cas le système (1) est exceptionnel, le rang de la matrice  $\|A_{\mu\nu}\|$  est 2 et  $M = 0$ . Il est connu<sup>4)</sup> que dans ce cas tous les coefficients dans les relations (1) sont identiquement nul et les fonctions abéliennes sont générales (non singulières).

3. Si  $\Pi(\mu) = 0$  a une racine double, on peut faire de façon que  $P(\lambda) = 0$  ait la racine double  $\lambda = 0$ . Le système (1) est exceptionnel et le rang de la matrice  $\|A_{\mu\nu}\|$  est 2 avec  $M \neq 0$ . On peut trouver un tableau des nombres entiers  $\|a_{\rho\sigma}\|$ , qui définissent une transformation non-singulière d'ordre  $M$  des périodes  $\tau_{ik}$  en les périodes  $T_{ik}$ , de manière que  $T_{12} = T_{21} = T_{13} = T_{31} = 0$  soit conséquence des équations

$$(2) \quad b_1^{(i)} \tau_{k1} + b_2^{(i)} \tau_{k2} + b_3^{(i)} \tau_{k3} = b_{k+3}^{(i)}$$

où

$$b_{\mu}^{(i)} = a_{\mu i} + a_{\mu 4} T_{i1} + a_{\mu 5} T_{i2} + a_{\mu 6} T_{i3}, \quad T_{ik} = T_{ki}.^{5)}$$

On en conclut que les fonctions abéliennes en question dégénèrent en fonctions elliptiques aux périodes 1,  $T_{11}$  et en fonctions abéliennes de deux variables aux périodes

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & T_{22} & T_{32} \\ 0 & 1 & T_{23} & T_{33} \end{array} T_{23} = T_{32}.$$

Si l'on substitue dans (1) à  $\tau_{ik}$  les valeurs calculées des équations (2) en fonction de  $T_{ik}$  ( $T_{12} = T_{13} = 0$ ), les équations (1) s'annulent identiquement (pour toutes les valeurs de  $T_{ik}$ ,  $T_{12} = T_{13} = 0$ ). Alors

*En cas de la racine double du polynôme  $\Pi(\mu)$  les fonctions abéliennes singulières dégénèrent en fonctions elliptiques et en fonctions abéliennes générales (non singulières) de deux variables.*

4. Plaçons-nous dans le cas où  $\Pi(\mu)$  a une racine rationnelle simple. On peut supposer  $K = 0$ ,  $L \neq 0$ . Soient  $e_1, e_1 \leq e_2, e_2$  les diviseurs élémentaires du tableau  $\|A_{\mu\nu}\|$ . On peut trouver une matrice primitive<sup>6)</sup> de nombres entiers  $\|u_{\rho\sigma}\|$  de manière qu'on ait<sup>7)</sup>

$$(3) \quad A_{\mu\nu} = e_1 (u_{\mu 2} u_{\nu 5} - u_{\mu 5} u_{\nu 2}) + e_2 (u_{\mu 3} u_{\nu 6} - u_{\mu 6} u_{\nu 3}).$$

Outre le système (1) les  $\tau_{ik}$  satisfont aussi au système adjoint<sup>8)</sup> de relations singulières.

<sup>4)</sup> Voir „Sur les relations . . .“ déjà cité.

<sup>5)</sup> Voir „Sur les relations . . .“

<sup>6)</sup> matrice primitive = prime matrix de J. St. Smith, Coll. math. papers, vol 1., p. 368.

<sup>7)</sup> Frobenius, Journal f. Math., t. 86. p. 165—168.

<sup>8)</sup> Voir „Sur les relations . . .“ déjà cité, note 2.



$$(4) \begin{cases} E_1' = K_{23}(\tau_{11}) + K_{31}(\tau_{12}) + K_{12}(\tau_{13}) + \sum_{i=1}^3 K_{i,5} \tau_{3,i} - \sum_{i=1}^3 K_{i,6} \tau_{2,i} + K_{5,6} = 0 \\ E_2' = K_{23}(\tau_{21}) + K_{31}(\tau_{22}) + K_{12}(\tau_{23}) + \sum_{i=1}^3 K_{i,6} \tau_{1,i} - \sum_{i=1}^3 K_{i,4} \tau_{3,i} + K_{6,4} = 0 \\ E_3' = K_{23}(\tau_{31}) + K_{31}(\tau_{32}) + K_{12}(\tau_{33}) + \sum_{i=1}^3 K_{i,4} \tau_{2,i} - \sum_{i=1}^3 K_{i,5} \tau_{1,i} + K_{4,5} = 0 \end{cases}$$

où l'on entend par  $K_{\mu\nu}$  pour  $\mu < \nu$  le pfaffien, qui suit du pfaffien  $K = (123456)$  en supprimant les indices  $\mu, \nu$  et en multipliant le résultat par  $(-1)^{\mu+\nu-1}$ ; on définit pour  $\mu \geq \nu$   $K_{\mu\nu} = -K_{\nu\mu}$ ,  $K_{\mu\mu} = 0$ .

La matrice  $\| K_{\mu\nu} \|$  est, à cause de  $K = 0$ , de rang  $2^9$ ; le système (4) est alors exceptionnel. On en conclut que dans ce cas les fonctions abéliennes dégénèrent en fonctions elliptiques et en fonctions abéliennes de deux variables. Or, on peut trouver une certaine transformation de périodes, non-singulière, d'ordre  $L$ , au tableau  $\| a_{\rho\sigma} \|^{10}$ .

On peut ensuite calculer les  $K_{\mu\nu}$  de deux façons différentes

$$K_{12} = \frac{1}{L} (a_{12} a_{23} a_{35} a_{66}) = e_1 e_2 (u_{32} u_{45} u_{53} u_{66})$$

$$K_{13} = -\frac{1}{L} (a_{12} a_{23} a_{35} a_{56}) = -e_1 e_2 (u_{22} u_{45} u_{53} u_{66})$$

$$K_{14} = \frac{1}{L} (a_{22} a_{33} a_{55} a_{66}) = e_1 e_2 (u_{22} u_{35} u_{53} u_{66})$$

etc.

dont on conclut qu'il existe 16 nombres entiers  $\| w_{rs} \|$  au déterminant  $-e_1 e_2 L$  tels, que

$$(5) \begin{cases} a_{is} = u_{i+3,2} w_{2s} + u_{i+3,3} w_{3s} + u_{i+3,5} w_{5s} + u_{i+3,6} w_{6s} \\ a_{i+3,s} = -u_{i,2} w_{2s} - u_{i,3} w_{3s} - u_{i,5} w_{5s} - u_{i,6} w_{6s} \end{cases}$$

Si l'on substitue dans les relations (1) aux  $A_{\mu\nu}$  les valeurs (3) et aux  $\tau_{ik}$  les valeurs obtenues des équations (2) où l'on a préalablement substitué aux  $a_{\mu s}$  les valeurs (5), on trouvera

$$E_1 = -\frac{L(a_{11} + T_{11} a_{14})}{\nabla \cdot e_2} \Psi = 0, \quad E_2 = +\frac{L(a_{21} + T_{11} a_{24})}{\nabla \cdot e_2} \Psi = 0, \\ E_3 = -\frac{L(a_{31} + T_{11} a_{34})}{\nabla \cdot e_2} \Psi = 0$$

où  $\nabla$  signifie le déterminant  $|b_k^{(h)}|$ . Or, il n'est pas possible que  $a_{11} + T_{11} a_{14} = a_{21} + T_{11} a_{24} = a_{31} + T_{11} a_{34} = 0$ , le cas contraire conduisant à  $L = 0$  ce qui est contre la supposition faite au commencement de l'art. 4. On trouve alors qu'il existe parmi les périodes  $T_h$  ( $h, j = 2, 3$ ) la relation

<sup>9)</sup> Voir E. v. Weber, Vorles. ü. das Pfaff'sche Problem, p. 28., formule (28).  
<sup>10)</sup> „Sur les relations . . .“ déjà cité et art. 3 de la note présente.

$$(6) \quad \Psi = B_{23} + T_{22} B_{53} + T_{23} (B_{25} - B_{36}) + T_{33} B_{26} + (T_{22} T_{33} - T_{23}^2) B_{56} = 0$$

où

$$B_{rs} = (w_{3r} w_{6s} - w_{6r} w_{3s}) + \frac{e_2}{e_1} (w_{2r} w_{5s} - w_{5r} w_{2s}).$$

La relation (6) est une relation singulière<sup>11)</sup> parmi les périodes  $T_h$ . Son invariant est  $\delta = e_2^2 (M^2 + 4L)$ .

Si  $\Pi(\mu)$  a une racine rationnelle simple les fonctions abéliennes singulières de trois variables dégèrent en fonctions elliptiques et en fonctions abéliennes **singulières** de deux variables.

5. Si l'équation  $\Pi(\mu) = 0$  a trois racines rationnelles distinctes, on se trouve dans le cas précédent avec la condition que  $(M^2 + 4L)$  soit le carré d'un nombre entiers. Or,  $\delta$  étant le carré d'un nombre entiers, les fonctions abéliennes singulières de deux variables dégèrent elles-mêmes en deux fonctions elliptiques.<sup>12)</sup>

Si  $\Pi(\mu) = 0$  a trois racines rationnelles distinctes les fonctions abéliennes singulières de trois variables dégèrent en trois fonctions elliptiques.

6. Si l'équation  $\Pi(\mu) = 0$  n'a aucune racine rationnelle, on trouvera que les fonctions abéliennes considérées ne dégèrent pas. On peut dire, en vue du théorème général, qu'elles dégèrent en fonctions abéliennes singulières, de trois variables et en fonctions abéliennes de 0 variables, entendu par cela une constante. Le résumé de la note présente est alors.

Si l'équation  $\Pi(\mu) = 0$  est réductible dans le corps des nombres rationnelles, les fonctions abéliennes singulières considérées dégèrent en fonctions abéliennes de moins variables de façon qu'à chaque facteur linéaire aux coefficients rationnels, de multiplicité  $m$ , correspondent des fonctions abéliennes générales (non singulières) de  $m$  variables ( $m = 1, 2, 3$ )<sup>13)</sup> et à chaque facteur simple, aux coefficients rationnels d'ordre  $n$  correspondent des fonctions abéliennes singulières de  $n$  variables.

**Remarque:** Il est probable que ce théorème ait lieu aussi dans le cas de plus que trois variables.

<sup>11)</sup> Humbert, Les fonctions abéliennes singulières, Journal de Mathématiques, sér. 5, t. 5, 6, 7.

<sup>12)</sup> Humbert, Les fonct. abél. sing. J. de Math., sér. 5, t. 5.

<sup>13)</sup> Sur la dégénération dans le cas  $m = 3$  a lieu une note analogue à celle faite au commencement de l'art. 5.

# Über den Zusammenhang der Krümmung einer Kurve mit ihrer Projektion und einige damit verwandte Beziehungen.

Von J. SOBOTKA.

(Mit 3 Figuren im Text.)

Vorgelegt am 8. November 1918.

## 1. Wir stellen uns die Aufgabe:

Gegeben ist für einen gewöhnlichen Punkt  $P$  einer Kurve  $k$  der Krümmungsmittelpunkt  $K$ ; es ist der Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  ihrer Zentralprojektion  $k'$  vom Punkte  $O$  in die Ebene  $\mathbf{M}$  für den Punkt  $P'$ , in den sich  $P$  projiziert, zu konstruieren.

Für  $k$  sei (Fig. 1) die Tangente  $TP$  und die Schmiegungeebene  $\mathbf{A}$  in  $P$  gegeben.  $T$  sei der Spurpunkt der Tangente und  $o$  die durch ihn gehende Spurgerade der Ebene  $\mathbf{A}$  in der Ebene  $\mathbf{M}$ . Wir setzen  $TP = t$ ,  $TP' = t'$ ,  $\sphericalangle TPO = \tau$ ,  $\sphericalangle TP'O = \tau'$  und für einen in  $o$  festgelegten positiven Sinn  $\sphericalangle(o, TP) = \omega$ ,  $\sphericalangle(o, TP') = \omega'$ ;  $PK = r$ ,  $P'K_1 = r'$ .  $TP'$  ist also die Tangente in  $P'$  an  $k'$ .

Schneidet die zu  $PT$  unendlich benachbarte Tangente von  $k$  die Spur  $o$  in  $\bar{T}$ , so fällt in der Grenze die zu  $TP'$  unendlich benachbarte Tangente von  $k'$  nach  $\bar{T}P'$  und  $\varphi = \sphericalangle(TP\bar{T})$ ,  $\varphi' = \sphericalangle(TP'\bar{T})$  sind die Kontingenzwinkel von  $k$  und  $k'$  in  $P$ , beziehungsweise  $P'$ . Für die Dreiecke  $T\bar{T}P$ ,  $T\bar{T}P'$  gilt

$$\frac{T\bar{T}P}{T\bar{T}P'} = \frac{t \sin \omega}{t' \sin \omega'} = \frac{TP \cdot \bar{T}P \cdot \sin TP\bar{T}}{TP' \cdot \bar{T}P' \cdot \sin TP'\bar{T}},$$

also beim Grenzübergang erhalten wir

$$\frac{t \sin \omega}{t' \sin \omega'} = \frac{t^2 \varphi}{t'^2 \varphi'}, \quad \text{somit } \lim \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{t' \sin \omega}{t \sin \omega'}.$$

Ferner sei  $P_1$  der zu  $P$  unendlich benachbarte Punkt von  $k$ ,  $P_1'$  seine Projektion, so ist



$$\frac{TP_1}{PP_1} = \frac{OT \cdot \sin TOP_1}{OP \cdot \sin POP_1}, \quad \frac{TP'_1}{P'P'_1} = \frac{OT \cdot \sin TOP'_1}{OP' \cdot \sin P'O P'_1},$$

weshalb

$$\frac{TP_1}{TP'_1} \cdot \frac{P'P'_1}{PP_1} = \frac{OP'}{OP}.$$

Bezeichnet  $s$  die von  $P$  gemessene Bogenlänge von  $k$ ,  $s'$  die von  $P'$  gemessene Bogenlänge von  $k'$ , so ist für die Grenzlage, in der  $P_1$  mit  $P$ ,  $P'_1$  mit  $P'$  zusammenfallen,  $\lim \frac{s}{s'} = \frac{PP_1}{P'P'_1}$ , also mit Rücksicht auf die letzte

Gleichung  $\lim \frac{s}{s'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{t}{t'}$ .

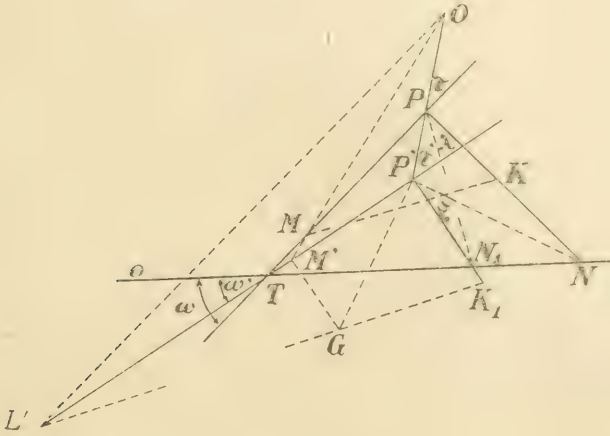


Fig. 1.

Da  $\frac{r'}{r} = \lim \frac{s'}{s} \cdot \frac{\varphi}{\varphi'}$ , so ist schließlich

$$\frac{r'}{r} = \frac{OP'}{OP} \cdot \frac{t'^2}{t^2} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \omega'}. \quad (1)$$

Unsere Ableitung ändert sich wesentlich nicht, wenn  $k$  und  $k'$  zwei in einer Ebene liegende zentrisch kollineare Kurven sind, für  $O$  und  $o$  als Zentrum und Achse der Kollineation. Schneidet da die Achse  $o$  die Gerade  $PP'$  in  $P_0$ , so ist  $\frac{PP_0}{P'P_0} = \frac{t \sin \omega}{t' \sin \omega'}$ ; somit führt (1) zu der bekannten

Beziehung  $\frac{r'}{r} = \frac{t'^3}{t^3} (OP_0 P' P)$ .

2. Die Anwendung der Steinerschen Parabel führt zu derselben Formel (1) und liefert überdies eine einfache Konstruktion von  $K_1$ .

Wir ersetzen (Fig. 1) die Kurve  $k$  durch ihren Krümmungskreis  $h$  in  $P$ ; dieser projiziert sich in die Ebene  $M$  in einen Kegelschnitt  $h'$ , welcher  $h'$  in  $P'$  oskuliert, und wir konstruieren  $K_1$  als Krümmungsmittel-

punkt von  $h'$  für den Punkt  $P'$ , zu welchem Zwecke wir die Steinersche Parabel  $\phi$  von  $h'$  in bezug auf den Punkt  $P'$  ermitteln, das heißt die Parabel, welche von den in bezug auf  $h'$  normalkonjugierten Geraden zu dem Strahlenbüschel in  $\mathbf{M}$  durch den Punkt  $P'$  eingeschüllt wird. Diese Parabel berührt die Normale  $P'K_1$  von  $k'$  im gesuchten Punkte  $K_1$ .

Wählen wir auf  $o$  irgend einen Punkt  $N_0$  und fallen von  $K$  die Normale auf  $PN_0$  bis zum Schnitt  $M_0$  mit  $PT$ . Dem Punkte  $M_0$  entspricht seine Projektion  $M'_0$  auf  $P'T$ . Da  $M_0$  der Pol von  $N_0P$  in bezug auf  $h$  ist, so ist  $M'_0$  der Pol von  $N_0P'$  in bezug auf  $h'$ ; somit ist die Senkrechte von  $M'_0$  auf  $N_0P'$  eine Tangente von  $\phi$ . Da die Parabel  $\phi$  die Geraden  $TP'$  und  $P'K_1$  berührt, so ist zu ihrer Festlegung die Kenntnis noch zweier Tangenten erforderlich, welche wir erhalten, wenn wir dem Punkte  $N_0$  irgend zwei Lagen auf  $o$  geben. Mit Vorteil verlegen wir diesen Punkt einmal in den Schnitt  $N$  der Normale  $PK$  von  $k$ , das anderemal in den Schnitt  $N_1$  der Normale  $P'K_1$  an  $k'$  mit  $o$ . Im ersten Falle wird  $M'_0$  zum Schnittpunkt  $L'$  der zu  $PT$  durch  $O$  gezogenen Parallelen mit  $P'T$ , so daß die Senkrechte  $6$  von  $L'$  auf  $P'N$  eine Tangente an  $\phi$  ist. Im zweiten Falle wird  $M_0$  zum Schnittpunkt  $M$  der Senkrechten von  $K$  auf  $PN_1$  mit  $PT$ ,  $OM$  trifft  $P'T$  in  $M'$  und die zugehörige Tangente  $2$  von  $\phi$  wird zu  $P'T$  unendlich benachbart. Bezeichnen wir  $TP'$  mit  $1$ ,  $P'N_1$  mit  $3$ , die zu  $P'N_1$  unendlich nahe Tangente von  $\phi$  mit  $4$  und die unendlich ferne Gerade der Ebene mit  $5$ , so folgt aus dem Sechseck von Brianchon 123456 die folgende Konstruktion von  $K_1$ .

Nachdem man  $L'$ ,  $M$  und  $M'$  ermittelt hat, errichte man in der Ebene  $\mathbf{M}$  die Senkrechte in  $M'$  auf  $P'T$ , in  $P'$  die Senkrechte auf  $NP'$  und verbinde den Schnittpunkt  $G$  beider mit  $L'$ ; alsdann trifft die Verbindungsgerade  $L'G$  die Normale  $P'N_1$  im Punkte  $K_1$ .

Diese Konstruktion führt uns gleichfalls zur Relation (1). Es ist zunächst

$$\frac{OP}{OM} = \frac{\sin OMP}{\sin \tau}, \quad \frac{P'L'}{M'L'} = \frac{OP' \cdot \sin \tau}{OM' \cdot \sin L'OM'}$$

woraus folgt

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'} \cdot \frac{M'L'}{P'L'} \quad (2)$$

Da

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OT} \cdot \frac{\sin POM}{\sin POT} \quad \text{und} \quad \frac{P'M'}{P'T} = \frac{OM'}{OT} \cdot \frac{\sin P'OM'}{\sin P'OT},$$

so ist

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{PM}{P'M'} \cdot \frac{t'}{t}.$$

Dadurch erhalten wir aus (2)

$$\frac{M'L'}{P'L'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{P'M'}{PM} \cdot \frac{t}{t'} \quad \text{oder} \quad \frac{M'G}{P'K_1} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{P'M'}{PM} \quad (3)$$

Setzen wir  $\sphericalangle N P N_1 = \lambda$ ,  $\sphericalangle N P' N_1 = \mu$ , so haben wir  $M' G = M' P' \operatorname{tg} \mu$ ,  $P K = M P \operatorname{tg} \lambda$ , wodurch wir aus (3) erhalten

$$\frac{r'}{r} = \frac{O P'}{O P} \cdot \frac{t'}{t} \cdot \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \lambda}. \quad (4)$$

Ferner ist

$$\frac{N N_1}{N_1 T} = \frac{N P \sin N P N_1}{T P \sin N_1 P T} = \frac{N P}{t} \operatorname{tg} \lambda,$$

$$\frac{N N_1}{N T} = \frac{N_1 P' \sin N P' N_1}{T P' \sin N P' T} = \frac{N_1 P'}{t'}$$

so daß

$$\frac{N T}{N_1 T} = \frac{N P}{N_1 P'} \cdot \frac{t'}{t} \cdot \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \mu} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \lambda} = \frac{t'}{t} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \omega'}.$$

Setzen wir dies in (4) ein, so kommt

$$\frac{r'}{r} = \frac{O P'}{O P} \cdot \frac{t'^2 \sin \omega}{t^2 \sin \omega'}, \quad (5)$$

also die Beziehung (1).

3. Schließt die Berührungsebene  $T = (P P' T)$  des Kegels, welcher  $k$  projiziert mit der Schmiegungeebene  $A$  von  $k$  für den Punkt  $P$  den Winkel  $\sigma$ , mit der Projektionsebene  $M$  den Winkel  $\sigma'$  ein, so ergibt das Dreikant  $(T P, T P', o)$  die Relation  $\sin \omega : \sin \omega' = \sin \sigma' : \sin \sigma$ , wodurch (1) in die Formel übergeht

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^2 \sin \sigma'}{t^2 \sin \sigma} \cdot \frac{O P'}{O P}, \quad \text{oder} \quad \frac{r' : \sin \sigma'}{r : \sin \sigma} = \frac{t'^2 \cdot O P'}{t^2 \cdot O P}. \quad (5)$$

Ist die Ebene  $T$  insbesondere senkrecht auf  $o$ , also senkrecht zu den beiden Ebenen  $A$  und  $M$ , so ist

$$\frac{r'}{r} = \frac{O P'}{O P} \cdot \frac{t'^2}{t^2}. \quad (6)$$

Legen wir zu  $T$  die Normalebenen  $N$  durch  $T P$  und  $N_1$  durch  $T P'$ , errichten in  $K$  die Normale zur Ebene  $A$  bis zum Schnitt  $K^{(v)}$  mit  $N$  und in  $K_1$  die Normale zur Projektionsebene  $M$  bis zum Schnitt  $K_1^{(v)}$  mit  $N_1$ .

Setzen wir  $P K^{(v)} = R$ ,  $P' K_1^{(v)} = R_1$ , so ist  $R = \frac{r}{\sin \sigma}$ ,  $R_1 = \frac{r'}{\sin \sigma'}$ ;

dadurch erhalten wir aus (5) die Beziehung

$$\frac{R_1}{R} = \frac{t'^2}{t^2} \cdot \frac{O P'}{O P} = \frac{O P' \sin^2 \sigma}{O P \sin^2 \sigma'}. \quad (7)$$

Dabei sind  $P K^{(v)}$ ,  $P' K_1^{(v)}$  zu einander und zur Schnittgeraden  $n$  der Ebenen  $N$ ,  $N_1$  parallel.

Dadurch werden wir zu der folgenden Konstruktion von  $K_1$  geführt, wenn  $\bar{K}$  gegeben ist.



In der Ebene  $T$  errichten wir in  $O$  die Senkrechte  $l$  zu  $PP'$ ; welche wir mit den Senkrechten zu  $TP$  und  $TP'$ , die wir durch  $P$ , resp.  $P'$  ziehen, in  $L$  und  $L_1$  zum Schnitte bringen, worauf wir durch  $L$  die Parallele zu  $TP$ , durch  $L_1$  die zu  $TP'$  ziehen bis zum Schnitt  $Q$ , resp.  $Q_1$  mit  $PP'$ , so daß  $\frac{R_1}{R} = \frac{P'Q_1}{PQ}$  wird; weiter ziehen wir die Parallelen  $PK^{(w)}$ ,  $P'K_1^{(w)}$  zu „ durch  $P$  und  $P'$  und schneiden die erste von ihnen mit der Senkrechten durch  $K$  zu  $A$  in  $K^{(w)}$ , führen durch  $Q_1$  die Parallele zu  $QK^{(w)}$ , welche  $P'K_1^{(w)}$  im Punkte  $K_1^{(w)}$  trifft; alsdann ist  $K_1$  der Fußpunkt der Senkrechten von  $K_1^{(w)}$  auf  $M$ .

Übrigens geht  $k$  durch die Umklappung von  $A$  in die Ebene  $M$  in eine zu  $(k')$  zentrisch kollineare Kurve über, und die Konstruktion von  $r'$  kann aus der Umklappung von  $r$  in bekannter Weise vorgenommen werden.

4. Es sei  $S$  eine der Symmetralebenen von  $A$  und  $M$  und werde von  $PP'$  im Punkte  $S$  geschnitten.  $S_1$  sei die zweite Symmetralebene von  $A$  und  $M$ . Projizieren wir auf  $M$  in der zu  $S_1$  senkrechten Richtung. Die Projektionen der Punkte  $O, P, P', S$  seien hiebei  $(O), (P), (P'), (S)$ ; dabei liegt der letzte von diesen Punkten auf der Spur  $o$  von  $A$ . Die Projektion  $(k)$  der gegebenen Kurve  $k$  liegt zu  $k'$  zentrisch kollinear für  $(O)$  als Zentrum und  $o$  als Achse der Kollineation. Es sei  $(r)$  der Krümmungshalbmesser von  $(k)$  im Punkte  $(P)$ . Da  $T(P) = TP$  und  $(r) = r$ , so ist

$$\frac{(r)}{r'} = \frac{t^3}{t'^3} [(O) (S) (P) P'] = \frac{t^3}{t'^3} (O S P P').$$

Verbinden wir die Punkte  $O, S, P, P'$  mit  $o$  durch Ebenen, so ist, wenn die Ebene  $(Oo)$  durch  $O$  bezeichnet wird,

$$\frac{r}{r'} = \frac{t^3}{t'^3} (O, S, A, M). \quad (8)$$

Da  $(O S A M) = \frac{\sin O A}{\sin S A} \cdot \frac{\sin S M}{\sin O M}$ , so ist der absolute Wert des angeführten Doppelverhältnisses gleich  $\frac{\sin O A}{\sin O M}$ , weshalb

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^3 \sin O M}{t^3 \sin O A} = \frac{t'^3 d}{t^3 a}, \quad (9)$$

wenn  $d$  und  $a$  die Entfernungen des Punktes  $O$  von den Ebenen  $M$  und  $A$  bezeichnen.

Der Zusammenhang von (9) mit (5) ergibt sich sehr einfach.

Die durch  $O$  gehende zur Spur  $o$  normale Ebene schneide  $o$  im Punkte  $N$  und die Parallelen zu  $o$  durch  $P$  und  $P'$  in den Punkten  $\bar{P}$  und  $\bar{P}'$ ,

welche auf der Geraden liegen, in der die durch  $P P'$  parallel zu  $o$  gelegte Ebene die vorerwähnte Ebene schneidet. Es ist

$$\sphericalangle O M = \sphericalangle O N \bar{P}', \quad \sphericalangle O A = \sphericalangle O N \bar{P};$$

weiter ist

$$O P' : O P = O \bar{P}' : O \bar{P} = N \bar{P}' \sin O N \bar{P}' : N \bar{P} \sin O N \bar{P},$$

und da  $N \bar{P}' = t' \sin \omega'$ ,  $N \bar{P} = t \sin \omega$ , so folgt daraus

$$\frac{O P'}{t' \sin \omega'} : \frac{O P}{t \sin \omega} = \sin O M : \sin O A.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir die Gleichung (1), aus der wir dann (5) abgeleitet haben.

Projiziert man die Kurve  $k$  aus irgend zwei Punkten  $O, O_1$ , welche in einer durch  $o$  gehenden Ebene liegen, und sind  $r', R'$  die Krümmungshalbmesser der Projektionen für die Punkte  $P', P_1'$ , in die sich  $P$  projiziert, und  $t', T'$  die Projektionen der Tangentlänge  $t$  auf  $T P$ , so ist der Beziehung (9) zufolge

$$\frac{r'}{R'} = \frac{t'^3}{T'^3}.$$

Dieses Ergebnis bekommen wir auch, wenn wir  $k$  durch den Kegelschnitt  $h$  ersetzen, welcher  $k$  in  $P$  oskuliert, und  $o$  im Punkte  $V \equiv O O_1$  berührt. Die projizierenden Kegel  $(O h)$ ,  $(O_1 h)$  schneiden  $M$  in zwei Kegelschnitten  $h', h_1'$ , welche zueinander zentrisch kollinear sind für  $V$  als Zentrum und  $o$  als Achse der Kollineation; da  $V$  auf  $o$  liegt und  $o$  außerdem  $h'$  und  $h_1'$  in  $V$  berührt, so hyperoskulieren einander diese Kegelschnitte in  $V$ . Ist  $r_0$  ihr gemeinsamer Krümmungshalbmesser für den Punkt  $V$  und setzt man  $V T = t_0$ , so ist  $r_0 : r' = t_0^3 : t'^3$ ,  $r_0 : R' = t_0^3 : T'^3$ , woraus wieder folgt  $r' : R' = t'^3 : T'^3$ .

Hätten wir den Kegelschnitt  $h$  so gewählt, daß er  $k$  in  $P$  oskuliert und  $o$  in  $V$  und in einem von  $V$  verschiedenen Punkte  $Q$  schneiden würde, so würden sich  $h', h_1'$  in  $V$  oskulieren und in  $Q$  schneiden;  $h'$  würde aber hier noch  $k'$  in  $P'$  und  $h_1'$  ebenso  $k_1'$  in  $P_1'$  oskulieren; es gilt also mit Rücksicht auf die letzte Gleichung, daß die Krümmungshalbmesser zweier Kegelschnitte, die sich in einem Punkt  $V$  oskulieren und also noch in einem Punkte  $Q$  schneiden, für irgend zwei Punkte derselben, die auf einer Geraden durch  $V$  gehen, sich zueinander verhalten wie die Kuben der Längen der Tangenten an diese Kegelschnitte zwischen deren Berührungspunkten und dem Schnittpunkte auf  $V Q$ . Dies folgt aber aus der Relation

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^3}{t^3} (O P_0 P' P) \text{ sofort, da hier } O = P_0 = V \text{ und } (O P_0 P' P) = 1 \text{ ist.}$$

5. Wir erwähnen noch insbesondere, wenn das Projektionszentrum  $O$  ins Unendliche fällt, daß die Formeln (5) und (7) übergehen in

$$\frac{r' : \sin \sigma'}{r : \sin \sigma} = \frac{t'^2}{t^2} \text{ und } \frac{R_1}{R} = \frac{t'^2}{t^2}. \quad (5'), (7')$$

Fällt  $P'$  mit  $P$  zusammen, so gelten diese Formeln (5'), (7') gleichfalls in sinngemäßer Bedeutung, also

$$\frac{r' : \sin \sigma'}{r : \sin \sigma} = \frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \tau'}, \quad \frac{R_1}{R} = \frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \tau'}, \quad (5''), (7'')$$

Legen wir durch  $T P'$  wieder die Normalebene  $N_1$  zu  $T$  und betrachten sie als neue Projektionsebene; es sei  $r''$  der Krümmungshalbmesser der neuen Projektion  $k''$  von  $k$  für den Punkt  $P'$ , so ist nach (5'')

$$\frac{r''}{r : \sin \sigma} = \frac{\sin^2 \tau}{\sin^2 \tau'}, \text{ weshalb } r' = r'' \sin \sigma'.$$

Als  $k'$  und  $k''$  können wir zwei Schnitte irgend eines Kegels ( $O k$ ) betrachten, die einander im Punkte  $P'$  berühren, von denen der zweite ein Normalschnitt ist. Dies gibt den Satz von Meusnier speziell für den Kegel.

Ist  $P'$  ein gewöhnlicher Punkt einer Fläche  $S$  und sind  $k_1, k_2, k_3$  irgend drei Kurven auf ihr, welche durch  $P'$  gehen, aber in  $P'$  verschiedene Tangenten haben, so lassen sich bekanntlich dreifach unendlich viele Flächen 2. Ordnung ermitteln, auf deren jeder es drei durch  $P'$  gehende Kegelschnitte gibt, welche beziehungsweise die Kurven  $k_1, k_2, k_3$  in  $P$  oskulieren.

Es ist jede dieser Flächen 2. Ordnung  $P$  eine Schmiegungsfläche von  $S$  in  $P'$ , und es wird jede Kurve auf  $S$ , welche durch  $P'$  geht, in diesem Punkte von einem Kegelschnitt der Fläche  $P$  oskuliert.<sup>1)</sup>

Nehmen wir auf  $P$  irgend zwei Kegelschnitte  $k', k''$  an, welche einander in  $P'$  berühren. Diese Kegelschnitte lassen sich durch einen eigentlichen Kegel 2. Ordnung  $K$  verbinden. Von jedem Punkte der gemeinschaftlichen Tangente  $t'$  von  $k'$  und  $k''$  in  $P'$  läßt sich je eine weitere Tangente an  $k'$  und  $k''$  legen; die Verbindungsebene beider ist eine Berührungsebene von  $K$ . Ist  $V$  der Mittelpunkt von  $K$ , so ist  $T \equiv (V t')$  gleichfalls eine Berührungsebene von  $K$ .  $T$  ist auch Berührungsebene der Fläche  $P$ , also auch  $S$  im Punkte  $P'$ . Denn sonst würde  $T$  die Fläche  $P$  in einem Kegelschnitt schneiden, der die Gerade  $V P'$  außer  $P'$  noch in einem dem Kegel  $K$  und der Fläche  $P$  gemeinschaftlichen, weder auf  $k'$ , noch  $k''$  liegenden Punkte trüfe, was unmöglich ist. Alle Flächen 2. Ordnung  $H$ , welche durch zwei Kegelschnitte, die zwei Punkte  $A, B$  gemein haben, gehen, bilden einen Büschel und besitzen dieselbe Polare  $q$  von  $A B$  als Schnittlinie der Ebenen, welche diese Kegelschnitte zugleich in  $A$  und  $B$  berühren. Rücken  $A$  und  $B$  unendlich nahe an einander, so werden die soeben erwähnten Ebenen unendlich benachbart,  $A B$  ist

<sup>1)</sup> Eine einfache geometrische Ableitung dieses Satzes findet sich bei Chr. Wiener: Lehrbuch der darst. Geom. II. Bd. S. 527.



eine Tangente aller Flächen des Büschels, der Schnitt  $q$  der Ebenen ist also die zu  $AB$  konjugierte Tangente der Flächen. Daraus folgt von neuem, daß  $T$  die Fläche  $P$  berührt und außerdem daß die Gerade  $VP'$  konjugiert ist zu  $t'$  auf  $P$ .

Projizieren wir irgend einen Kegelschnitt  $a$  von zwei Punkten  $U, V$ , die nicht in seiner Ebene liegen, wobei im allgemeinen die Gerade  $UV$  den Kegelschnitt nicht schneidet, in irgend eine Ebene  $L$ , so erhalten wir zwei Kegelschnitte  $a', a''$ , die sich in vier Punkten schneiden. Zwei von diesen Schnittpunkten gehören dem Kegelschnitt  $a$  an, die übrigen zwei sind Schnitte von  $L$  mit dem Kegelschnitt  $b$ , in welchem sich die projizierenden Kegel  $(Ua), (Va)$  außer  $a$  noch schneiden. Wenden wir dies auf die vorerwähnten Kurven  $k'$  und  $k''$  an und projizieren in die Ebene  $M$  von  $k'$ . Die Kurve  $k''$  projiziert sich von  $V$  nach  $k'$ , von irgend einem anderen Punkte  $U$  der Ebene  $T$  werde sie nach  $k_0$  projiziert. Es sei  $b$  der zweite Kegelschnitt, in dem sich die Kegel  $(Vk''), (Uk'')$  schneiden, Seine Ebene geht durch die Gerade, welche zu  $VU$  konjugiert ist in bezug auf beide Kegel und welche die Polare des Punktes  $UV.t'$  in bezug auf  $k''$  ist; sie geht also durch den Punkt  $P'$ . Jede durch  $t'$  gehende Ebene  $L$  schneidet die projizierenden Kegel  $(Vk''), (Uk'')$  in zwei Kegelschnitten  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ , deren gemeinschaftliche Punkte die Schnittpunkte von  $L$  mit  $k''$  und  $b$  sind. Wir sehen, daß sich drei von diesen Schnittpunkten in  $P'$  vereinigen, während der vierte dem Kegelschnitt  $b$  angehört und von  $P'$  verschieden ist. Daraus folgt, daß die Kegelschnitte  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  einander in  $P'$  oskulieren. Fällt  $L$  mit der Ebene  $M$  von  $k'$  zusammen, so erkennt man, daß  $k_0$  den Kegelschnitt  $k'$  in  $P'$  oskuliert. Und weiter folgt, daß auch die Kegel  $(Uk''), (Uk')$  einander längs der Kante  $UP'$  oskulieren. Dies führt zu dem Satze:

I. *Projiziert man irgend zwei Kurven  $k_1, k_2$  auf einer Fläche, die sich in einem gewöhnlichen Punkte  $P$  derselben berühren, von irgend einem Punkte  $U$  der Berührungsebene der Fläche in  $P$  in eine beliebige Ebene, so projizieren sie sich in zwei Kurven  $k_1', k_2'$ , welche einander in der ihnen gemeinschaftlichen Projektion  $P'$  von  $P$  oskulieren.*

Der duale Satz lautet:

II. *Projizieren wir eine Fläche von zwei Punkten  $E, F$  einer Geraden  $t$ , welche die Fläche in einem gewöhnlichen Punkte  $P$  berührt, in irgend eine durch  $P$  gehende Ebene  $G$ , so oskulieren einander die beiden Umrisse der Fläche in dem Punkte  $P$ .*

6. Alle Flächen 2. Ordnung durch zwei in einem Punkte  $P'$  sich berührende Kegelschnitte  $k', k''$  bilden einen Büschel von Flächen, welche alle einander in  $P'$  berühren. Es seien  $k' k''$  durch eine Fläche 2. Ordnung verbunden und es sei  $k'$  insbesondere ein Normalschnitt der Fläche, so wird nach dem ersten der soeben ausgesprochenen Sätze  $k''$  von irgend einem Punkte  $U$  der gemeinsamen Berührungsebene  $T$  der Flächen in  $P'$  auf die Ebene von  $k'$  in einen  $k'$  in  $P'$  oskulierenden Kegelschnitt  $k_0$  projiziert. Diese Beziehung bleibt aufrecht, wenn wir die Kegelschnitte  $k'$  und  $k''$

durch irgend zwei Kegelschnitte  $l_1, l_2$  ersetzen, die sie in  $P'$  oskulieren. Es oskulieren einander auch die Kegel  $(U l_1), (U l_2)$  längs der Kante  $U P'$ . Wählen wir  $U$  insbesondere unendlich fern in der zur gemeinschaftlichen Tangente an  $k'$  und  $k''$  in  $P'$  senkrechten Richtung. Als  $l_1$  wählen wir den Krümmungskreis von  $k'$  in  $P'$ . Der Kegel  $(U l_1)$  geht in einen zur Ebene  $N$  von  $k'$  senkrechten Zylinder über, welcher von der Ebene  $M$  des Kegelschnittes  $k''$  in einem Kegelschnitt  $l_2$  geschnitten wird, der  $k''$  in  $P'$  oskuliert. Es seien  $r'$  und  $r''$  die Krümmungsradien von  $k'$  und  $k''$  in  $P'$  und  $\varphi$  sei der Winkel der Ebenen  $N$  und  $M$ , alsdann hat  $l_1$  in  $P'$  den Krümmungsradius  $r'$  und  $l_2$  den Krümmungsradius  $r''$ . Die Kurve  $l_2$  ist eine Ellipse, deren halbe Hauptachse gleich  $\frac{r'}{\cos \varphi}$ , halbe Nebenachse gleich  $r'$  ist; folglich ist  $r'' = r'^2 : \frac{r'}{\cos \varphi}$  oder  $r'' = r' \cos \varphi$ , was der Ausdruck des Satzes von Meusnier ist.

Wählen wir im Satze II. die Ebene  $G$  senkrecht auf  $t'$ . Ersetzen wir die Fläche durch eine Schmiegungsfläche 2. Ordnung  $P$  für den Punkt  $P$ , so schneiden nach diesem Satze die Berührungskegel  $E, F$  der Fläche, welche in  $E$  und  $F$  auf  $t'$  ihre Mittelpunkte haben, die Ebene  $G$  in zwei Kegelschnitten  $e, f$ , welche einander in  $P$  oskulieren. Es sei  $G$  ihr gemeinschaftlicher Krümmungsmittelpunkt an dieser Stelle. Die normalkonjugierten Ebenen zu den Ebenen durch  $EP$  in bezug auf  $E$  hüllen einen Kegel 2. Ordnung ein, welcher die Normalebene  $P$  durch  $EP$  längs der Geraden  $EG$  berührt. Wir nennen  $EG$  die Krümmungsachse von  $E$  für  $EP$ ; sie ist die Achse des Rotationskegels, welcher  $E$  längs  $EP$  oskuliert. Analog schließen wir, daß  $FG$  die zu  $FP'$  gehörige Krümmungsachse des Kegels  $F$  ist. Wir haben also den Satz:

„Berührt eine Gerade  $t$  eine Fläche in einem gewöhnlichen Punkte  $P$ , so bilden die  $t$  zugehörigen Krümmungsachsen der die Fläche projizierenden Kegel, welche ihre Mittelpunkte auf  $t$  haben, einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der durch  $P$  gehenden und zu  $t$  senkrechten Ebene liegt.“

7. Zu der Formel (5) kann man schrittweise auch folgendermaßen gelangen. Wir übernehmen hier die Bezeichnung des Art. 2. Der projizierende Kegel  $(O k)$  schneide die zu  $A$  durch  $P'$  gelegte Parallelebene  $A$  in der Kurve  $k_0$ , deren Krümmungshalbmesser für den Punkt  $P'$  mit  $r_0$  bezeichnet werden möge. Es ist  $\frac{r_0}{r} = \frac{OP'}{OP}$ , und  $k'$  ist auch die Projektion von  $k_0$  von  $O$  aus. Nun können wir den Kegel  $(O k)$  durch einen Kegel 2. Ordnung  $K$  von demselben Mittelpunkt  $O$  ersetzen, welcher ihn längs  $OP$  oskuliert. Die Ebenen  $A_0$  und  $M$  schneiden  $K$  in den Kegelschnitten  $h_0, h'$ , welche  $k_0$ , resp.  $k'$  in  $P'$  oskulieren und sich außer  $P'$  noch in einem auf der Geraden  $A_0.M$  gelegenen Punkte  $Q$  schneiden. Nun denken wir uns eine zentrische Kollineation für  $P'$  als Zentrum und eine durch  $P'$  gehende Ebene als Ebene der Kollineation; in dieser Kollineation soll dem

Punkt  $O$  der unendlich ferne Punkt auf  $P'O$  entsprechen. Hiedurch geht der Kegel  $K$  in einen Zylinder  $K'$  über, und jede Ebene durch  $P'$  schneidet  $K$  und  $K'$  in zwei Kegelschnitten, die einander in  $P'$  oskulieren. Ist  $H$  die zu  $T$  parallele Durchmessersebene von  $K'$ , sind ferner  $n_1, n_2$  die Schnittkurven von  $K'$  mit irgend zwei Ebenen, welche die Normale in  $P'$  zu  $T$  enthalten und bezeichnen wir mit  $r_1, r_2$  die Krümmungshalbmesser von  $n_1, n_2$  für den Punkt  $P'$ , ferner  $s_1^2, s_2^2$  die Quadrate der in  $H$  gelegenen Halbmesser von  $n_1, n_2$ , so ist bekanntlich  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ . Schließt  $OP$  mit den Tangenten in  $P'$  an  $n_1$  und  $n_2$  die Winkel  $\tau_1, \tau_2$  ein so ist, der Euler'schen Beziehung für einen parabolischen Punkt zufolge  $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\sin^2 \tau_2}{\sin^2 \tau_1}$ , so daß

$$r_1 : r_2 = \sin^2 \tau_2 : \sin^2 \tau_1.$$

Wählen wir als  $n_1$  und  $n_2$  diejenigen Schnitte, welche  $h_0$  und  $h'$  in  $P'$  berühren, so erhalten wir die Beziehung

$$r_1 : r_2 = \sin^2 \tau' : \sin^2 \tau = t^2 : t'^2.$$

Da nun  $r_0 = r_1 \sin \sigma$ ,  $r' = r_2 \sin \sigma'$ , so folgt hieraus

$$\frac{r'}{r_0} = \frac{t'^2 \sin \sigma'}{t^2 \sin \sigma}$$

und somit

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^2 \sin \sigma'}{t^2 \sin \sigma} \cdot \frac{OP'}{OP},$$

welcher Ausdruck tatsächlich mit (5) identisch ist.

Wir ersehen, daß sich unsere Beziehung zwischen  $r'$  und  $r$  als ein ganz spezieller Fall aus den Krümmungsverhältnissen einer Fläche in einem gewöhnlichen Punkte ergibt.

Auch ersehen wir, daß wir bei der Konstruktion von  $r'$  auch so vorgehen können, daß wir von  $r$  zunächst durch ähnliche Lage zu  $r_0$  und von  $r$  durch Parallelprojektion in der Richtung  $OP$  zu  $r'$  übergehen.

Analog kann man nach Satz II den Krümmungskreis des Umrisses  $u$  einer Fläche  $S$  bei Zentralprojektion in eine Ebene  $M$  in irgend einem Punkte desselben  $P'$  schrittweise wie folgt konstruieren.  $P'$  ist die Projektion eines Punktes  $P$  auf der Fläche vom Projektionszentrum  $O$  aus. Die Tangente des Umrisses in  $P'$  ist die Spur der Berührungsebene der Fläche im Punkte  $P$ . Wir ermitteln den Krümmungskreis  $g$  desjenigen Umrisses für die Fläche  $S$  im Punkte  $P$  in eine geeignet gewählte Ebene durch  $P$ , welcher entsteht, wenn man in der Richtung  $OP$  parallel projiziert. Der Krümmungskreis  $g$  projiziert sich alsdann von  $O$  in die Ebene  $M$  in einen Kegelschnitt, welcher  $u'$  in  $P'$  oskuliert.

8. Zum Schluß wollen wir uns mit der Aufgabe beschäftigen:



Es ist für irgend einen Punkt  $P$  der Durchdringungskurve zweier Kegel (oder Zylinder) der Krümmungshalbmesser und die Schmiegungeebene zu konstruieren.

Es seien  $K_1, K_2$  die gegebenen Flächen,  $k_1, k_2$  seien ihre Spurkurven in der Projektionsebene  $M$ .

Ist  $P$  (Fig. 2) ein Punkt der Durchdringungskurve  $k$ , sind ferner  $S_1, S_2$  die Mittelpunkte der Kegel, so schneiden die Kanten  $S_1P, S_2P$  die Ebene  $M$  in zwei Punkten  $P', P''$  der Kurven  $k_1, k_2$ . Denken wir uns  $k$  im Punkte  $P$  durch einen in diesem Punkte oskulierenden Kegelschnitt  $h$ , der also in der Schmiegungeebene  $A$  von  $k$  im Punkte  $P$  liegt, ersetzt, so

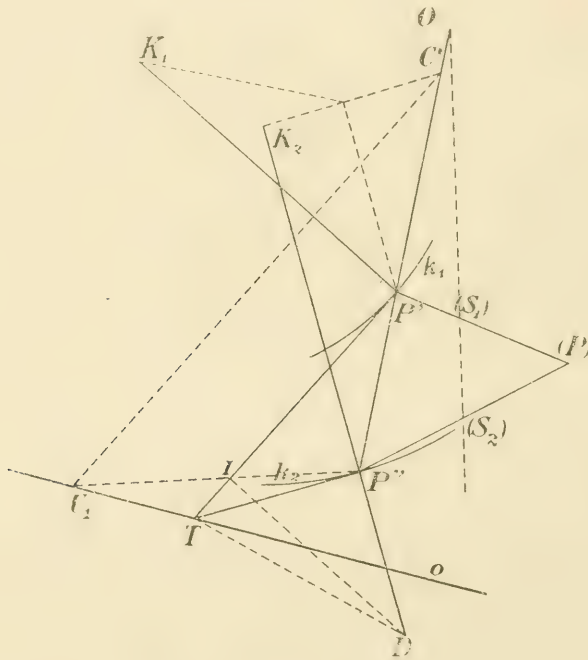


Fig. 2.

werden die Spuren  $h_1, h_2$  der Kegel  $(S_1h), (S_2h)$  Kegelschnitte sein, von welchen  $h_1$  die Kurve  $k_1$  in  $P'$ ,  $h_2$  die Kurve  $k_2$  in  $P''$  oskuliert; diese Kegelschnitte liegen zentrisch kollinear für den Spurpunkt  $O$  der Geraden  $S_1S_2$  als Zentrum und die Spurgerade  $o$  der Ebene  $A$  als Achse der Kollineation;  $P', P''$  sind in derselben einander entsprechend. Ist  $T$  der Schnitt der Tangenten  $TP', TP''$  an  $k_1$  und  $k_2$ , so ist  $TP$  die Tangente in  $P$  an  $k$ . Schneidet  $o$  die Gerade  $P'P''$  in  $P_0$ , so gilt bei sinngemäßer Beibehaltung der früheren Bezeichnung die Beziehung  $\frac{r'}{r''} = \frac{t'^3}{t''^3} (OP_0P'P'')$ , aus der sich ergibt

$$\frac{P_0 P''}{P_0 P'} = \frac{\gamma' \cdot t''^3}{\gamma'' \cdot t'^3} \cdot \frac{O P''}{O P'}$$

Diese Formel führt also zu der Geraden  $o$ .

Sind  $K_1, K_2$  die Krümmungsmittelpunkte von  $k_1, k_2$  in  $P'$ , resp.  $P''$ , so führen wir eine a. a. O. durchgeführte Konstruktion<sup>1)</sup> in umgekehrter Ordnung durch. Darnach bestimmen die Geraden  $P' P''$ ,  $P' K_1$ ,  $P'' K_2$ ,  $K_1 K_2$  eine Parabel  $[k]$ , deren zu  $P' P''$  senkrechte Tangente  $c$  die Tangente  $P' P''$  in  $C^*$  treffen möge. Die Gerade  $u$  durch  $T$ , welche mit  $TP'$  denselben Winkel einschließt wie  $TP''$  mit  $TC^*$ , ist Achse einer affinen Lage, in der sich  $P', P''$  entsprechen und welche jeden  $k_1$  in  $P'$  oskulierenden Kegelschnitt in einen solchen überführt, der  $k_2$  in  $P''$  oskuliert. Schneidet die Parallele durch  $O$  zu  $P' T$  die Gerade  $u_1$ , welche durch  $P''$  parallel zur Geraden  $u$  geführt wird, im Punkte  $U_1$ , so ist  $U_1 T$  die gesuchte Gerade  $o$ .

Dies gibt folgende Konstruktion von  $O$ .

Um  $C^*$  zu bekommen, denken wir uns das Sechseit  $(c, P'' P', P' K_1, K_1 K_2, K_2 P'', v_0)$ , in dem  $v_0$  unendlich fern liegt und welches  $[k]$  umgeschrieben ist, so haben wir die Parallele durch  $P'$  zu  $P'' K_2$  mit der Senkrechten von  $K_1$  auf  $P' P''$  zu schneiden und den Schnittpunkt mit  $K_2$  zu verbinden; die Verbindungsgerade trifft  $P' P''$  in  $C^*$ . Trifft die Senkrechte in  $T$  zu  $C^* T$  die Gerade  $P'' K_2$  in  $D$  und ist  $I$  der Fußpunkt der Senkrechten von  $D$  auf  $TP'$ , so ist  $P'' I \equiv u_1$ ; es schneidet somit die Parallele durch  $O$  zu  $TP'$  die Gerade  $P'' I$  im Punkte  $U_1$ , welcher bereits der gesuchten Spur  $o \equiv U_1 T$  angehört.<sup>2)</sup>

Kennen wir  $o$ , so ist die Konstruktion des Krümmungshalbmessers von  $k$  in  $P$  oder der Projektion von  $k$  im entsprechenden Punkte nach Vorgehendem gegeben.

Ist eine von den Flächen  $K_1, K_2$  ein Zylinder, so ändert sich nichts Wesentliches an unserer Konstruktion, sind beide Zylinder, so fällt  $O$  ins Unendliche und die Gerade  $u$  ist die Spur von  $A$ . Haben wir also  $C^*$  wie vorher ermittelt, so bringen wir etwa  $TP''$  mit der Parallelen zu  $C^* T$  durch  $P'$  zum Schnitt, errichten im Schnittpunkte die Senkrechte auf  $TP''$ , welche  $P' K_1$  in  $B$  schneiden möge. Alsdann geht  $u$  durch  $T$  senkrecht zu  $BT$ . Oder wir übertragen den Winkel  $C^* T P''$  etwa mit Hilfe des um  $T$  als Mittelpunkt beschriebenen durch  $C^*$  gehenden Kreises nach  $(P' T, u)$ .

9. Wir führen noch eine zweite Konstruktion an.

Zu dem Ende betrachten wir (Fig. 3) zuerst die Durchdringungskurve zweier Zylinderflächen mit den Spuren  $k_1, k_2$ ;  $P' P, P'' P$  sind die Richtungen derselben. Wir konstruieren die Spur  $u$  der Schmiegungebene  $(P u)$  in  $P$  für die Durchdringungskurve. Die Kurve  $k_2$  ersetzen wir durch ihren

<sup>1)</sup> Cf. „Zur Krümmung zentrisch kollinearere Kurven“ in diesem Bulletin (1918) Art. 7.

<sup>2)</sup> In der Figur ist diese Parallele irrtümlicherweise durch  $C^*$  statt durch  $O$  geführt worden.

Krümmungskreis  $l_2$  in  $P''$ , alsdann ist  $K_1$  der Krümmungsmittelpunkt in  $P'$  für den zu  $l_2$  affinliegenden Kegelschnitt für  $u$  als Achse der Affinität und für  $P''$ ,  $P'$  als sich in ihr entsprechende Punkte. Wir fällen von  $K_2$  die Senkrechte auf  $P'P''$  bis zum Schnitt  $G''$  mit  $TP''$ , ziehen  $G''G' \parallel P''P'$ , bis zum Schnitt  $G'$  mit  $TP'$  und fällen von  $G'$  die Senkrechte  $I$  auf  $P'P''$ . Ferner ziehen wir durch den Schnitt der Parallelen durch  $G'$  zu  $P'K_1$  mit der Parallelen durch  $K_1$  zu  $P'T$  die Gerade  $e$  nach dem Punkte  $P'K_1$ ,  $I$  und fällen von  $P'$  die Senkrechte auf  $e$ . Schneidet diese  $P''K_2$  in  $N$ , so ist  $u$  die Verbindungsgerade der Punkte  $T$ ,  $N$ .

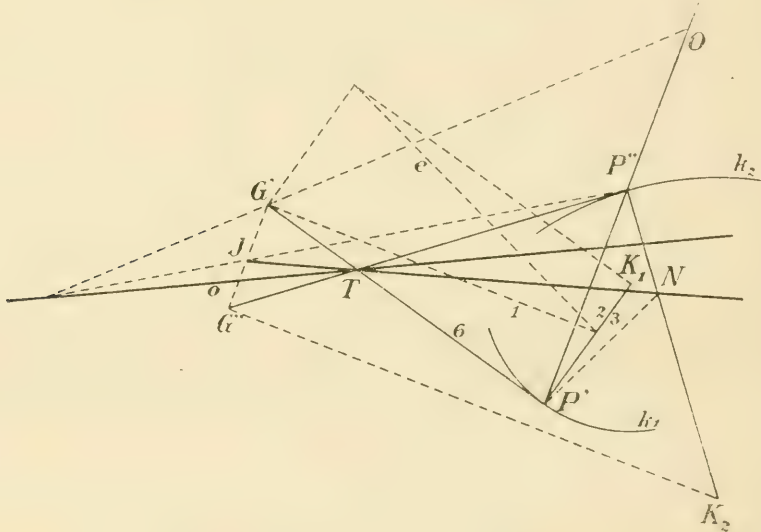


Fig. 3.

Denn  $G''$  ist der Pol von  $P'P''$  in bezug auf  $l_2$ , also  $G'$  in bezug auf  $l_1$ ; die Steinersche Parabel von  $l_1$  für den Punkt  $P'$  berührt also  $P'G'$ ,  $I$  und  $P'K_1$  in  $K_1$ . Bezeichnen wir  $P'K_1$  mit  $2$ , die zu  $P'K_1$  benachbarte Tangente der Parabel mit  $3$ , die unendlich ferne Gerade mit  $4$ , die ihr benachbarte Tangente der Parabel mit  $5$  und  $P'T$  mit  $6$ , so folgt aus dem Sechseck  $123456$ , daß  $e$  ein Durchmesser der Parabel ist. Die Senkrechte  $P'N$  zu  $e$  ist ihre Leitgerade und als solche der durch  $P'$  gehende Durchmesser von  $l_1$ , welcher den durch  $P''$  gehenden Durchmesser  $P''K_2$  von  $l_2$  in  $N$  auf der Affinitätsachse schneidet.

Ist aber  $h$  die Durchdringungskurve zweier Kegelflächen und  $O$  wieder der Spurpunkt von  $S_1S_2$ , so konstruieren wir zunächst  $u$  wie soeben; alsdann wird die Gerade, welche  $P''$  mit  $J \equiv G'G''$  verbindet, von  $OG$  in einem Punkte geschnitten, welcher der gesuchten Geraden  $o$  angehört. Ebenso wird die Gerade  $P'J$  von  $OG''$  in einem Punkte auf  $o$  geschnitten.

Denn, ist  $U_\infty$  der unendlich ferne Punkt auf  $P'P''$ , so ist  $(TU_\infty, u, TP', TP'') = (U_\infty JG'G'') = P''(U_\infty JG'G'') = P'(U_\infty JG'G'') =$



$(TO, o, TP', TP'')$ . Der dritte und der vierte von diesen Strahlenbüscheln sind mit dem letzten perspektiv mit  $OG'$ , resp.  $OG''$  als Perspektivachsen; dadurch ist die Richtigkeit der Konstruktion erwiesen. Hierbei können  $G'G'', J$ , wenn es die Durchführung der Konstruktion erfordert, durch die Schnittpunkte von  $TP', TP'', u$ , mit einer anderen Parallelen zu  $P'P''$  ersetzt werden.

10. Ersetzen wir wieder  $k_1, k_2$  durch  $l_1$  und  $l_2$  wie im Art. 8. Die einander in der zentrischen Kollineation zwischen  $l_1$  und  $l_2$  entsprechenden Punkte  $G', \dots G'', \dots$  auf  $TP'$  und  $TP''$  bilden zwei perspektive Punkt-reihen. Da sich die Polaren  $g', \dots g'', \dots$  dieser Punkte in bezug auf  $l_1$  und  $l_2$  gleichfalls entsprechen, so schneiden sie sich auf  $o$ , zwei perspektive Strahlenbüschel  $(g'), (g'')$  bildend.

Ist  $m_2$  irgend ein Kegelschnitt, welcher  $k_2$  in  $P''$  oskuliert, so bilden in bezug auf ihn die Polaren  $g^*, \dots$  der Punkte  $G'', \dots$  einen zu  $(G'', \dots)$  projektiven Strahlenbüschel  $(g^*)$ . Infolgedessen sind die Strahlenbüschel  $(g'), (g^*)$  projektiv und erzeugen einen Kegelschnitt  $w$ . Dieser trifft  $o$  außer in  $T$  noch in einem Punkte  $T'$ . Die Punkte  $T, T'$  kommen so zustande, daß wir die Doppelstrahlen der zu einander projektiven Büschel  $(g''), (g^*)$  mit den ihnen in  $(g')$  entsprechenden Strahlen schneiden. Diese Doppelstrahlen fallen aber mit  $TP''$  zusammen; folglich fallen auch die Punkte  $T, T'$  zusammen. Es berührt also  $w$  die Gerade  $o$  in  $T$ .

Dies gibt folgende Konstruktion von  $o$ .

Wir bringen die Polaren der Punkte von  $(G', \dots)$  in bezug auf irgend einen Kegelschnitt  $r_1$ , welcher  $k_1$  in  $P'$  oskuliert, mit den Polaren der entsprechenden Punkte von  $(G'', \dots)$  in bezug auf einen Kegelschnitt  $r_2$ , welcher  $k_2$  in  $P''$  oskuliert zum Schnitt. Die Schnittpunkte beschreiben einen Kegelschnitt, dessen Tangente in  $T$  die gesuchte Spur  $o$  ist.

Da  $w$  durch  $T, P', P''$  geht, so hat man nur noch zwei Punkte dieses Kegelschnittes zu ermitteln, um dann  $o$  als seine Tangente konstruieren zu können. Für die praktische Durchführung der Konstruktion ersetzen wir  $r_1$  und  $r_2$  durch die zugehörigen Krümmungskreise.

11. Für die Durchdringungskurve  $k$  der Kegel  $(S_1 k_1), (S_2 k_2)$  folgt hieraus eine neue Konstruktion der Schmiegungebene  $S$  in irgend einem Punkte  $P$ .

Wir ersetzen die Kegel durch die Kegel zweiter Ordnung  $(S_1 r_1), (S_2 r_2)$  und ermitteln zu den Punkten auf der Tangente  $TP$  die in bezug auf diese Kegel gleichzeitig konjugierten Geraden, welche einen Kegel 2. Ordnung bilden, welcher durch  $PT, PS_1, PS_2$  geht; seine Berührungsebene längs  $TP$  ist die fragliche Ebene  $S$ .

Ist  $k$  die Durchdringungskurve irgend zweier Flächen und konstruiert man zu diesen in einem gewöhnlichen Punkte  $P$  auf  $k$  Schmiegungeflächen 2. Ordnung  $P_1, P_2$ , so hat  $k$  in  $P$  mit der Durchdringungskurve  $\bar{k}$  dieser Flächen Krümmung und Schmiegungeebene  $S$  gemein.  $S$  schneidet  $P_1$  und  $P_2$  in Kegelschnitten  $s_1, s_2$ , die einander gleichfalls in  $P$  oskulieren.

Folglich schneiden einander die Kegel, welche man den Flächen  $P_1, P_2$  längs  $s_1$ , beziehungsweise  $s_2$  umschreiben kann, in einer Kurve, welche  $k$  in  $P$  oskuliert und somit  $S$  zur Schmiegungeebene hat. Daraus folgt: Die zu den Punkten der Tangente  $TP$  an  $k$  im Punkte  $P$  in bezug auf  $P_1$  und  $P_2$  gleichzeitig konjugierten Geraden beschreiben einen Kegel 2. Ordnung, welcher durch  $TP$  und die Polaren von  $TP$  in bezug auf  $P_1$  und  $P_2$  geht, und  $S$  ist die Ebene, welche ihn längs  $TP$  berührt.

So sind wir zu einer von F. Machovec herrührenden Konstruktion gelangt.

---

## Annotation concernant l'étiologie des sarcoïdes Boeck-Darier.

MUDr. BOHUMÍR REJSEK.

(Travail de la policlinique tchèque à Prague, pr. Prof. Dr. J. Bukovský.)

Je vais décrire diverses dermatites d'origine tuberculeuse rencontrées aux mois de janvier et de février 1919 chez une malade qui souffrait de la tuberculose pulmonaire. On trouve sur le visage une forme du lichen scrophulosorum, sur le tronc des miliaires lupoïdes Boeck et sur les membres supérieurs et inférieurs des sarcoïdes Boeck-Darier bénignes, de forme papuleuse, que je prends spécialement en considération. Le cas est plus intéressant à cause de la prompte récurrence qui s'est développée à la même place que l'affection primaire. Les efflorescences n'indiquent pas de nécrose.

J'ai fait deux examens histologiques de la papule primaire et de la récurrence. Au premier examen j'ai trouvé des vaisseaux un peu dilatés, entourés, dans la couche papillaire ainsi que dans le tissu conjonctif sous-cutané, d'une infiltration cellulaire en forme de petits noeuds. L'infiltration noeudeuse placée dans la couche papillaire, pénètre jusqu'à l'épithélium dans la couche Malpighi et décompose des prolongements épidermiques interpapillaires, où se forme une vacuolisation. A l'endroit, où se trouvent des infiltrations, la couche granuleuse de l'épiderme est complètement disparue. À la même place que les infiltrations cellulaires minces, les prolongements épidermiques interpapillaires s'agrandissent. L'épiderme montre une parakératose; çà et là on rencontre des cellules géantes.

L'aspect de l'affection histologique de la récurrence est analogue. La couche granuleuse est disparue et la vacuolisation dans la couche de Malpighi est la même. L'infiltration cellulaire périvasculaire est plus forte et plus diffuse, sans cellules géantes.

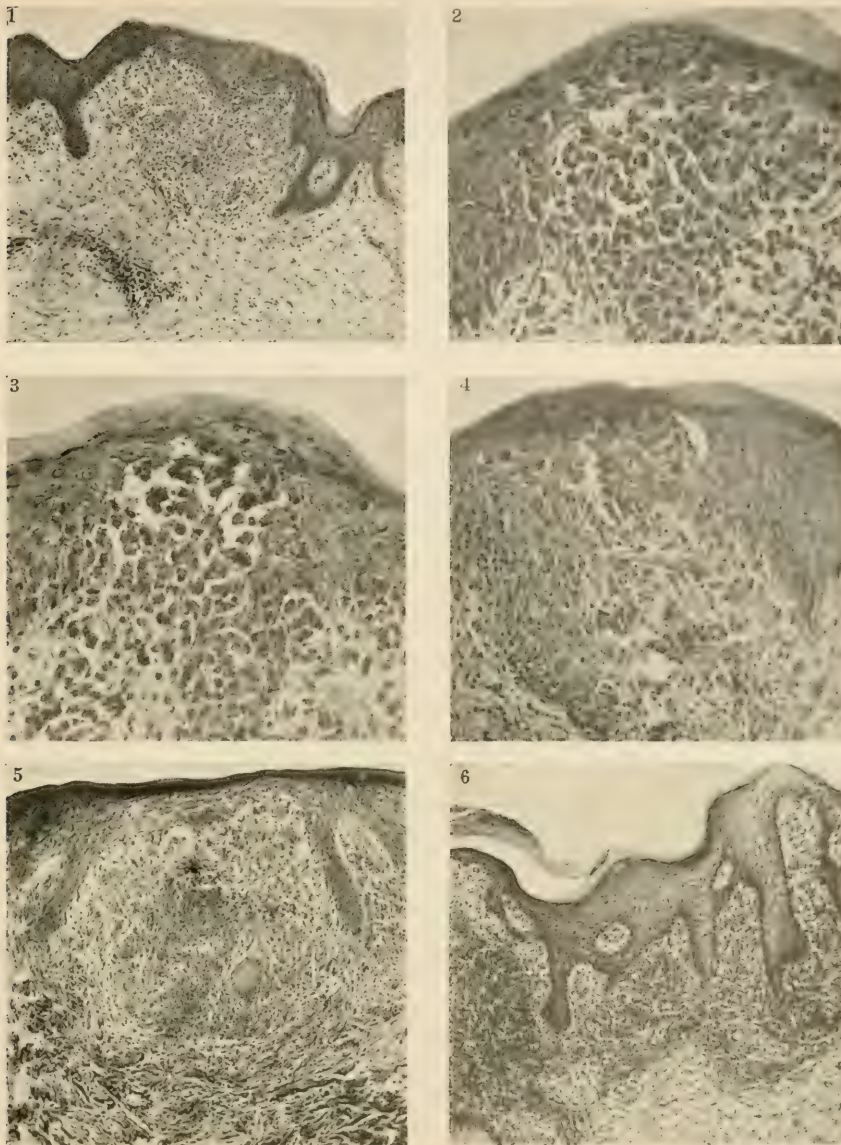
D'après la littérature il existe diverses opinions de l'étiologie; il y a donc deux théories spéciales: la toxique et la bactérienne.

Selon moi, les tuberculides sont causées par l'action de toxines tuberculeuses, qui provoquent dans la peau une disposition, c'est-à-dire une



susceptibilité spéciale. Chez tout le malade souffrant de la tuberculose, soit manifeste, soit latente, il existe une certaine quantité de toxines tuberculeuses dans la circulation du sang. Cette quantité va en s'accroissant ou en s'abaissant et la peau s'accoutume petit à petit à ces circonstances en recevant en même temps la susceptibilité. Si la quantité augmente tout d'un coup et si la vague de la toxine vient dans cette peau prédisposée, une réaction s'élève sous forme de tuberculides.

J'expliquerais l'étiologie des sarcôïdes d'après l'examen histologique de la manière suivante: La toxine arrive par les plus fines capillaires en contact direct avec l'épithélium, fait un effet lytique et cause une colliquation et décomposition de l'épithélium, ainsi que la disparition du kératohyalin de la couche granuleuse. Les prolongements épidermiques interpapillaires montrent, comme réaction, un agrandissement. La toxine agit aussi dans l'environ; le tissu dermique est imbibé par la lymphe, il se forme des vacuoles dans la couche papillaire, et les cellules conjonctivales sont hypertrophiées. Par l'impression aux vasomoteurs les leucocytes émigrent et forment une infiltration cellulaire périvasculaire en forme de noeuds. Les cellules géantes se forment, comme procès réactif, contre l'influence nuisible spécifique. La récurrence est causée par le même procès que l'affection primaire. L'éruption est localisée le long des nerfs. Les bacilles tuberculeux, qui ont été très rarement découverts, ont été portés à la peau par la circulation du sang. Dans le tissu dermique jouissant d'une très grande immunité, les bacilles ne peuvent plus vivre et périssent. C'est pourquoi nous trouvons si rarement des bacilles dans les coupes et que nous recevons presque toujours des expériences négatives; quant aux positives, elles proviennent de ce que les bacilles venaient de pénétrer dans la peau au moment où on en avait pris un morceau pour l'inoculation, donc avant qu'ils aient eu le temps de périr. On peut aussi expliquer, d'après cette disparition des bacilles, la transformation si rare des tuberculides en vraies tuberculoses cutanées.



Explications des figures de la planche.

- Fig. 1. — Formation d'un noeud dans la couche papillaire; disparition des cellules de la couche granuleuse.  
Fig. 2. — Epithélias des prolongements épidermiques interpapillaires imbibés par la lymphe; formation des vacuoles.  
Fig. 3. — Commencement de la colligation des prolongements épidermiques interpapillaires; les cellules inflammatoires pénètrent le corps papillaire dans l'épithélium. Parakératose.  
Fig. 4. — Imbibition lymphatique et décomposition d'un prolongement épidermique interpapillaire.  
Fig. 5. — Noeud dans le corps papillaire avec cellule géante. Agrandissement des prolongements épidermiques interpapillaires.  
Fig. 6. — Fusion des noeuds avec infiltration cytologique diffuse. Agrandissement des prolongements épidermiques interpapillaires. Parakératose.

(Fig. 1 — 5. Aspect de l'affection primaire. Fig. 6. Récidive.)





# Zur Krümmung zentrisch kollinearere Kurven in der Ebene.

Von  
**J. SOBOTKA.**

(Mit 8 Textfiguren.)

Vorgelegt am 26. Oktober 1918.

1. Die Darstellung dieser Krümmung, wie sie durch eine einfache, bekannte Formel ausgedrückt wird, pflegt nicht genug einfach zu sein; insbesondere werden bemerkenswerte Sonderfälle nicht berücksichtigt; diesem Mangel trachtet die vorgelegte Arbeit abzuweichen; außerdem werden in ihr verschiedene Zusammenhänge der Konstruktionen erläutert.

Wir können bei der Lösung der Aufgabe, aus dem Krümmungsmittelpunkt  $K$  einer Kurve  $k$  im Punkte  $P$  den Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  einer zu  $k$  zentrisch kollinearen Kurve  $k'$  für den zu  $P$  gehörigen Punkt  $P'$  zu ermitteln, im allgemeinen die Kurve  $k$  durch den Kegelschnitt  $h$  ersetzen, welcher  $k$  in  $P$  oskuiert und den Kollineationsmittelpunkt  $O$  als Brennpunkt besitzt. Dem Kegelschnitt  $h$  entspricht zentrisch kollinear der Kegelschnitt  $h'$ , welcher  $k'$  in  $P'$  oskuiert und  $O$  gleichfalls zum Brennpunkte hat.

Fällen wir (Fig. 1.) von  $K$  die Senkrechte auf  $OP$  und von ihrem Fußpunkt die Senkrechte auf  $PK$ . Es sei  $\bar{K}$  der Fußpunkt der letzten Senkrechten; alsdann ist  $O\bar{K}$  die Hauptachse von  $h$ . Die Senkrechte in  $O$  zum Leitstrahl  $OP$  trifft die Tangente  $PT$  des Kegelschnittes  $h$  im Punkte  $L$ , welcher der zu  $O$  gehörigen Leitgeraden dieses Kegelschnittes angehört. Diese Leitgerade ist also die Senkrechte von  $L$  auf  $O\bar{K}$ ; sie möge die Kollineationsachse  $o$  im Punkte  $L_0$  treffen.

Der Schnitt  $L'$  der Tangente  $TP'$  von  $k'$  in  $P'$  mit  $OL$  liegt auf der zu  $O$  gehörigen Leitgeraden von  $h'$ , und da sich die Polaren von  $O$  in bezug auf  $h$  und  $h'$  zentrisch entsprechen, so ist  $L'L_0$  die zuletzt erwähnte Leitgerade, und die Senkrechte von  $O$  auf sie die Hauptachse von  $h'$ . Trifft diese  $P'K_1$  in  $\bar{K}_1$ , so hat man in  $\bar{K}_1$  die Senkrechte auf  $P'K_1$  und in

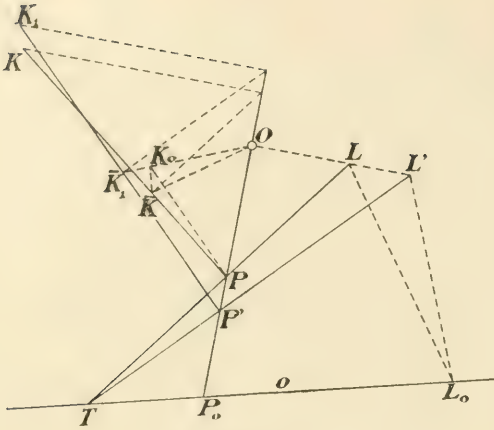


Fig. 1.

ihrem Schnitt mit  $OP$  die Senkrechte auf  $OP$  zu errichten, welche letztere  $P'K_1$  im gesuchten Punkte  $K_1$  trifft.

Diese Konstruktion benutzte Mannheim bereits im J. 1859 zur Lösung einer analogen Aufgabe; wir wollen aus ihr die algebraische Beziehung zwischen  $r = PK$  und  $r' = P'K_1$  ableiten.

Setzen wir  $P\bar{K} = \varrho$ ,  $P'\bar{K}_1 = \varrho'$ ,  $\sphericalangle T P P_0 = \tau$ ,  $\sphericalangle T P' P_0 = \tau'$ , worin  $P_0$  den Schnitt von  $o$  mit  $P P'$  bezeichnet,  $TP = t$ ,  $TP' = t'$ , so ist

$$\varrho = r \sin^2 \tau, \quad \varrho' = r' \sin^2 \tau', \quad \frac{\varrho}{OP} = \frac{\sin PO \bar{K}}{\sin P \bar{K} O},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{\sin PO \bar{K}}{\sin P' O \bar{K}_1} \cdot \frac{\sin P' \bar{K}_1 O}{\sin P \bar{K} O}. \quad (1)$$

Aus den Dreiecken  $LL_0L'$ ,  $TL_0L$ ,  $TL_0L'$  folgt

$$\frac{LL_0}{L'L_0} = \frac{\sin P' O \bar{K}_1}{\sin PO \bar{K}}, \quad \frac{LL_0}{TL_0} = \frac{\sin P_0 TP}{\sin TL L_0}, \quad \frac{L'L_0}{TL_0} = \frac{\sin P_0 TP'}{\sin TL' L_0}.$$

Diese Gleichheiten führen zu der Beziehung

$$\frac{\sin PO \bar{K}}{\sin P' O \bar{K}_1} = \frac{\sin P_0 TP'}{\sin P_0 TP} \cdot \frac{\sin P \bar{K} O}{\sin P' \bar{K}_1 O},$$

aus der mit Benützung von (1) folgt

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{\sin P_0 TP'}{\sin P_0 TP}.$$

Da nun

$$\frac{P_0 P}{t} : \frac{P_0 P'}{t'} = \sin P_0 TP : \sin P_0 TP',$$

so folgt aus der letzten Relation

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{OP}{OP'} \cdot \frac{P_0 P'}{t'} : \frac{P_0 P}{t},$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = (OP_0 P P') \frac{t}{t'}, \quad \frac{r}{r'} = \frac{t \sin^2 \tau'}{t' \sin^2 \tau} (OP_0 P P'). \quad (2)$$

Aus dem Dreieck  $TPP'$  folgt

$$t : t' = \sin \tau' : \sin \tau ;$$

es liefert also (2) schließlich die Formel

$$\frac{r}{r'} = \frac{t^3}{t'^3} (OP_0PP'). \quad (3)$$

welche Geisenheimer zugeschrieben wird.

2. Wir bezeichnen noch die Winkel  $P_0TP$ ,  $P_0TP'$ , mit  $\omega$ ,  $\omega'$

Aus der Beziehung

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^3}{t^3} (OP_0P'P)$$

folgt, da

$$\frac{P_0P}{P_0P'} = \frac{t \sin \omega}{t' \sin \omega'},$$

die Relation

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{OP' \sin \omega}{OP \sin \omega'}.$$

Fällen wir von  $K$  die Senkrechte auf  $OP_0$  und von ihrem Fußpunkt die Senkrechte auf  $PK$ , deren Fußpunkt mit  $\overline{K}$  bezeichnet werden möge, und ebenso von  $K_1$  die Senkrechte auf  $OP_0$  und von ihrem Fußpunkt die Senkrechte auf  $P'K_1$ , deren Fußpunkt wir mit  $\overline{K}_1$  bezeichnen, so ist  $\varrho = P\overline{K}$ ,  $\varrho' = P'\overline{K}_1$ . Wird die Parallele durch  $P$  zu  $P'K_1$  von  $O\overline{K}_1$  in  $K_0$  geschnitten, so ist, wenn  $PK_0 = \varrho_0$  gesetzt wird,  $\frac{\varrho'}{\varrho_0} = \frac{OP'}{OP}$  und aus der letzten Gleichung folgt

$$\varrho_0 \sin \omega' = \varrho \sin \omega.$$

Das ergibt folgende Konstruktion von  $K_1$  (Fig. 1).

Man ermittelt aus  $K$  den Punkt  $\overline{K}$ , zieht durch  $P$  die Parallele zur Normale  $P'K_1$  und schneidet sie in  $K_0$  mit der durch  $\overline{K}$  gezogenen Senkrechten zu  $o$ ; alsdann trifft  $OK_0$  die Normale  $P'K_1$  im Punkte  $\overline{K}_1$ , aus dem  $K_1$  selbst in der angegebenen Weise erhalten wird.

Diese Konstruktion ist unmittelbar auch anwendbar, wenn  $O$  im Unendlichen liegt und gestaltet sich bei orthogonal affiner Lage der Kurven  $k, k'$  besonders einfach, da die Senkrechte durch  $\overline{K}$  auf  $o$  die Normale  $P'K_1$  bereits im Punkte  $\overline{K}_1$  schneidet.

3. Für affinliegende Kurven  $k, k'$  geht die Formel (3) über in

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^3}{t^3} \cdot \frac{P_0P}{P_0P'}, \quad \text{oder} \quad r' \sin^2 \tau' \sin \omega' = r \sin^2 \tau \sin \omega. \quad (4)$$



Ziehen wir (Fig. 2) durch  $P$  und  $P'$  die Parallelen zu  $o$ , und sind entsprechend  $H$  und  $H_1$  die Fußpunkte der Senkrechten von  $K$  und  $K_1$  auf sie, so ist vermöge der letzten Gleichung

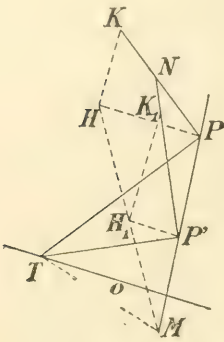


Fig. 2.

$$P' H_1 \sin^2 \tau' = P H \sin^2 \tau \quad \text{oder} \quad \frac{t'^2}{P' H_1} = \frac{t^2}{P H}.$$

Ist  $N$  der Schnittpunkt der Normalen  $PK$ ,  $P'K_1$  und  $M$  der Schnittpunkt von  $PP'$  mit der Senkrechten in  $T$  zu  $TN$ , so ist

$$t^2 = \overline{TQ} \cdot \overline{TN}, \quad t'^2 = \overline{TQ_1} \cdot \overline{TN},$$

falls  $Q$  und  $Q_1$  die Fußpunkte der Senkrechten von  $P$  und  $P'$  auf  $TN$  bedeuten, so daß  $t'^2 : t^2 = \overline{TQ_1} : \overline{TQ} = MP' : MP$ . Folglich ist  $MP' : MP = P'H_1 : PH$ , und es liegen die Punkte  $M, H, H_1$  auf einer Geraden. Dies gibt folgende Konstruktion.

Man schneidet  $PP'$  mit der in  $T$  zu  $TN$  errichteten Senkrechten in  $M$ , zieht die Parallelen  $PH, P'H_1$  zu  $o$  durch  $P$  und  $P'$ , verbindet  $M$  mit dem Fußpunkt  $H$  der Senkrechten, die man von  $K$  auf  $PH$  fällt und schneidet die Verbindungsgerade in  $H_1$  mit  $P'H_1$ ; alsdann trifft die Senkrechte durch  $H_1$  zu  $o$  die Gerade  $P'N$  im Punkte  $K_1$ .

4. Es sollen nun einige besondere Fälle unserer Konstruktion erörtert werden.

a) Die Tangenten an  $k$  und  $k'$  in den Punkten  $P$  und  $P'$  seien zueinander und zur Achse der Kollineation parallel. Da ist  $\lim \frac{t}{t'} = 1$ , also

$$\frac{r'}{r} = (OP_0P'P).$$

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion (Fig. 3).

Man schneidet die Parallele zu  $OP_0$  durch  $K$  mit der Normale  $P'K_1$  in  $P'$  an  $k'$  im Punkte  $K_0$  und  $P_0K_0$  mit  $PK$  im Punkte  $L$ ; alsdann trifft  $OL$  die Normale  $P'K_1$  im gesuchten Punkte  $K_1$ . Es ist da

$$PL = P'K_0 \cdot \frac{P_0P}{P_0P'}, \quad P'K_1 = PL \cdot \frac{OP'}{OP},$$

somit

$$P'K_1 = r(OP_0P'P), \quad \text{also} \quad r' = P'K_1.$$

Trifft  $KK_1$  den Strahl  $OP_0$  in  $E$ , so folgt aus dem vollständigen Viereck  $K_0KLK_1$ , daß  $PP', P_0E$  eine Involution bilden, welche  $O$  zum Mittelpunkt hat. Dieselbe Involution entsteht durch die Gegenseitenpaare des voll-

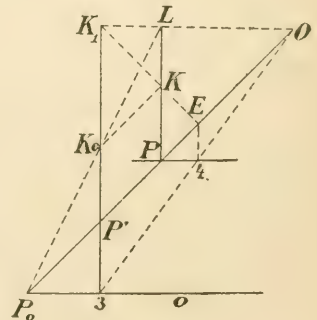


Fig. 3.

ständigen Vierecks, dessen zwei Ecken die unendlich fernen Punkte von  $o$  und  $PK$  sind, die dritte Ecke 3 der Schnittpunkt von  $o$  und  $P'K_1$  und die vierte Ecke 4 der Schnitt von  $O3$  mit der zu  $o$  parallelen Tangente  $t$  an  $k$  in  $P$  ist. Dies gibt die folgende Konstruktion. Man schneidet  $t$  mit der Verbindungsgeraden der Punkte  $3 = P'K_1 \cdot o$  und  $O$  im Punkte 4 und  $OP_0$  mit der Senkrechten zu  $o$  durch 4 im Punkte  $E$ ; alsdann geht  $EK$  durch den gesuchten Krümmungsmittelpunkt von  $k'$  in  $P'$ .

b) Der Strahl  $OP_0$  berührt die Kurven  $k, k'$  in  $P$ , beziehungsweise  $P'$  (Fig. 4).

Unsere Relation

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^3}{t^3} \cdot \frac{OP'}{OP} \cdot \frac{P_0P}{P_0P'}$$

gibt, da  $t = P_0P, t' = P_0P'$ ,

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'^2}{t^2} \cdot \frac{OP'}{OP}.$$

Schneidet  $OK$  die Normale in  $P'$  an  $k'$  im Punkte  $K_0$ , so ist

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{P'K_0}{r} \text{ und somit } \frac{r'}{P'K_0} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Schneidet die Parallele durch  $K_0$  zu  $OP_0$  die Gerade  $PK$  in  $K^*$  und  $P_0K^*$  die Gerade  $P'L$  in  $L$ , so ist

$$\frac{t'}{t} = \frac{P'L}{P'K_0} \text{ und somit } \frac{r'}{P'L} = \frac{t'}{t}.$$

Man hat also noch durch  $L$  die Parallele zu  $OP_0$  zu ziehen bis zum Schnitt  $L^*$  mit  $PK$ ; alsdann trifft  $P_0L^*$  die Normale  $P'K_0$  von  $k'$  im gesuchten Krümmungsmittelpunkt  $K_1$ .

Wir sehen, daß die Konstruktion unabhängig ist von der Richtung der Kollineationsachse. Nehmen wir also auf irgend einer Geraden durch  $P_0$  zwei beliebige Punkte an und legen durch sie zwei Kegelschnitte, von denen der eine  $k$  in  $P$ , der andere  $k'$  in  $P'$  oskuliert, so haben dieselben außer  $OP_0$  noch eine gemeinschaftliche Tangente durch  $O$ .

c) Schneiden sich die Kurven  $k, k'$  im Punkte  $P_0$  auf  $o$ , so ist für diesen Punkt  $\lim (t' : t) = \sin \tau : \sin \tau'$ ; ziehen wir eine Parallele zu  $OP_0$ , welche die Tangenten in  $P_0$  an  $k$  und  $k'$  in  $H$  und  $H_1$  und  $o$  in  $H_0$  schneiden möge, und setzen  $P_0H = \bar{t}, P_0H_1 = \bar{t}_1$ , so ist auch  $\bar{t}_1 : \bar{t} = \sin \tau : \sin \tau'$ ,

so daß  $\frac{r'}{r} = \frac{\bar{t}_1^3}{\bar{t}^3} (OP_0P'P)$ .

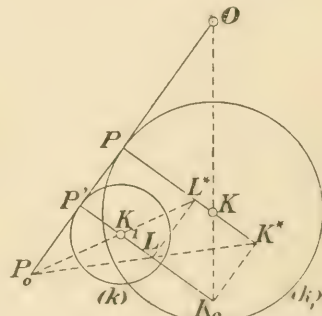


Fig. 4.







Bemerkt sei noch, daß, wenn  $N$  den Schnitt der Normalen  $PK$ ,  $P'K_1$  bezeichnet, die Geraden  $ML$ ,  $M'L_1$  sich in einem Punkte  $N_1$  auf  $TN$  schneiden.

Sind insbesondere die Kurven  $k$ ,  $k'$  orthogonalaffin, so haben wir die folgende einfache Konstruktion.

Wir fällen von  $K$  die Senkrechte auf  $PP'$ , von ihrem Fußpunkt die Senkrechte auf  $TP$ , von dem Fußpunkt dieser die Senkrechte auf  $u$ , in deren Schnitt mit  $TP'$  man die Senkrechte auf  $TP'$  errichtet, welche auf  $PP'$  den Punkt  $L_1$  einschneidet; die Parallele durch  $L_1$  zu  $u$  trifft  $P'K_1$  im Punkte  $K_1$ .

Liegt der Punkt  $K$  auf  $u$  und schneidet die Senkrechte in  $K$  zu  $u$  die Normale  $P'K_1$  im Punkte  $G$ , so liegen die Dreiecke  $NKG$ ,  $N_1LL_1$  ähnlich; es liegt somit  $L_1$  auf  $TG$ . Um also  $K_1$  zu erhalten, ermittelt man  $G$ , bringt  $GT$  mit  $PP'$  in  $L_1$  zum Schnitt und zieht durch  $L_1$  die Parallele zu  $u$ , die auf  $P'K_1$  den Punkt  $K_1$  einschneidet. Dies ist eine bekannte Krümmungsmittelpunkts-Konstruktion für die Ellipse.

6. Kehren wir wieder zum allgemeinen Falle, in dem  $k$  und  $k'$  zentrisch kollinear sind, zurück (Fig. 7). Das Verhältnis  $\frac{r'}{r}$  ändert sich nicht, wenn das Kollineationszentrum  $O$  sich auf  $PP'$  bewegt und die Kollineationsachse  $o$  sich um  $T$  dreht so, daß das Doppelverhältnis  $(TO, o, TP', TP)$

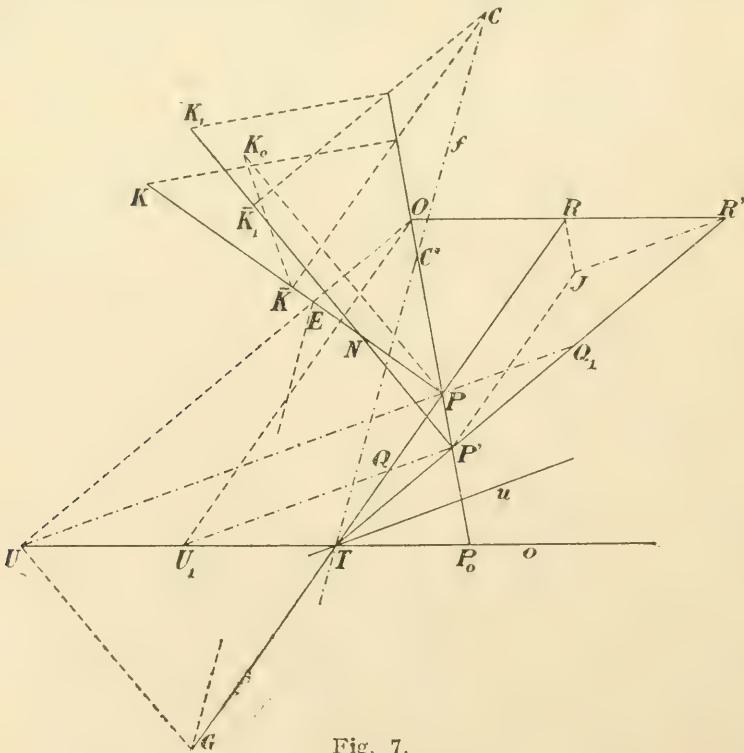


Fig. 7.

sich nicht ändert. Dieses Doppelverhältnis ist  $\delta = (O P_0 P' P)$ . Schneiden die Parallelen durch  $O$  zu  $T P'$  und  $T P$  die Gerade  $o$  in  $U$  und  $U_1$ , so ist, wenn  $O_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $o$  bezeichnet,  $\delta = (T O, o, T P', T P) = (T, O_\infty, U, U_1) = (U U_1 T)$ . Die Pascalgerade des speziellen Pascalschen Sechsecks  $O U P T P' U_1$  liegt unendlich fern; es ist somit  $U P \parallel U_1 P'$ . Schneidet also die Parallele zu  $U P$  und  $U_1 P'$  durch  $T$  die Gerade  $P P'$  in  $H$ , so ist  $\delta = (U U_1 T) = (P P' H)$ .

Es ist also für  $P$  und  $P'$  das Verhältnis  $\frac{r'}{r}$  für die Kurven  $k, k'$  auch gleich dem analogen Verhältnis von zwei Kurven, die affin liegen für  $u \equiv T H$  als Achse der Affinität.

Ziehen wir durch  $O$  die Parallele  $m$  zur Kollineationsachse  $o$  und schneiden  $T P$  und  $T P'$  mit ihr in den Punkten  $R, R'$ , so ist  $\delta = (O P_0 P' P) = (R' R O)$ . Aus den Dreiecken  $O P R, O P' R'$  folgt  $\frac{P R}{O R} \cdot \frac{O R'}{P' R'} = \frac{\sin \tau'}{\sin \tau}$ .

Aus der Gleichung

$$\frac{q'}{q} = \frac{t'}{t} (O P_0 P' P) = \frac{t'}{t} (R' R O)$$

erhalten wir, da

$$\frac{t'}{T P_0} = \frac{P' R'}{O R'}, \quad \frac{t}{T P_0} = \frac{P R}{O R}, \quad \text{also} \quad \frac{t'}{t} = \frac{P' R'}{O R'} \cdot \frac{O R}{P R},$$

die Relation

$$\frac{q'}{q} = \frac{P' R'}{P R}. \quad (5)$$

Die Verhältnisse  $\frac{r'}{r}$  und  $\frac{q'}{q}$  ändern ihre Werte nicht, wenn wir das Kollineationszentrum  $O$  auf  $O P$  beliebig nach  $O^*$  verlegen und die Kollineationsachse dabei um  $T$  nach  $o^*$  so drehen, daß, wenn  $P_0^*$  den Schnitt von  $o^*$  mit  $P P'$  bezeichnet, die Gleichheit besteht

$$(O P_0 P' P) = (O^* P_0^* P' P).$$

Beschreibt also  $O^*$  die Punktreihe auf  $P P'$ , so beschreibt  $P_0^*$  eine zu ihr konjektive Punktreihe, wobei  $P, P'$  die Doppelpunkte beider Punktreihen sind. Projizieren wir die erste Punktreihe in der Richtung  $T P$  (resp.  $T P'$ ) und die zweite von  $T$  durch die entsprechenden Kollineationsachsen, so sind die projizierenden Strahlenbüschel perspektiv, da sie den Strahl  $T P$  (resp.  $T P'$ ) entsprechend gemein haben. Die Achse der Perspektivität ist  $U_1 P'$  (resp.  $U P$ ), ist also parallel zu  $u$ .

Die Parallelen  $m$  durch die Kollineationsmittelpunkte zu den zugehörigen Kollineationsachsen hüllen eine Parabel ( $m$ ) ein, deren Tangenten



auf  $PP'$  und auf der unendlich fernen Geraden  $v_\infty$  der Ebene projektive Punktreihen festlegen. Da dem Schnittpunkt  $PP'$ ,  $v_\infty$  auf  $PP'$  der unendlich ferne Punkt der Affinitätsachse  $u$  entspricht, so sind  $u$ ,  $UP$ ,  $U_1P'$  Durchmesser von  $(m)$ .

Verbinden wir  $T$  mit dem Brennpunkt der Parabel  $(m)$  durch den Leitstrahl  $f$ . Es gehen also durch  $T$  die Tangenten  $TP$ ,  $TP'$  an  $(m)$ , der Durchmesser  $u$  und der Leitstrahl  $f$ . Es ist also  $\sphericalangle(u, TP) = \sphericalangle(TP', f)$  und  $\sphericalangle(u, TP') = \sphericalangle(TP, f)$ . Man kann  $f$  auch folgendermaßen konstruieren. Man errichtet in  $U$  die Senkrechte zu  $OU$ , welche  $TP$  in  $G$  schneiden möge. Die Verbindungsgerade von  $G$  mit dem Punkt  $E = OU$ .  $PK$  gibt die Richtung von  $f$  an; denn die Punkte  $U, G, P, E$  liegen auf einem Kreise, so daß  $\sphericalangle(P'T, f) = \sphericalangle UEG = \sphericalangle UPG = \sphericalangle(u, PT)$ . Analog bekommen wir die Richtung von  $f$  in der Geraden, welche den Schnitt der Senkrechten in  $U_1$  zu  $OU_1$  mit  $TP'$  und den Punkt  $OU_1$   $P'K_1$  verbindet.

Ist  $v'_\infty$  die zu  $v_\infty$  benachbarte Tangente von  $(m)$ , so folgt aus dem Sechsseit von Brianchon ( $PP'$ ,  $P'R'$ ,  $m$ ,  $PR$ ,  $v_\infty$ ,  $v'_\infty$ ), wenn sich die Parallelen durch  $P'$  zu  $PR$  und durch  $R$  zu  $PP'$  in  $I$  schneiden, daß  $IR'$  ein Durchmesser von  $(m)$  also  $IR \parallel u$  ist. Schneidet also  $U_1P'$  die Gerade  $TP$  in  $Q$  oder  $UP$  die Gerade  $TP'$  in  $Q_1$ , so ist  $PR : P'R' = TQ : TP' = TP : TQ_1$  und mit Rücksicht auf (5)

$$\frac{q'}{q} = \frac{TP'}{TQ} = \frac{TQ_1}{TP}.$$

Aus dieser Beziehung läßt sich  $r'$  aus  $r$  einfach in mannigfacher Weise darstellen, unter anderem auch so. Wir ziehen die Parallele durch  $O$  zu  $TP'$  bis zum Schnitt  $U$  mit  $o$ ; vom Punkte  $\bar{K}$  fällen wir die Senkrechte auf  $UP$ , welche die durch  $P$  zu  $P'K_1$  gezogene Parallele in  $K_0$  schneiden möge; die Parallele durch  $K_0$  zu  $PP'$  trifft  $P'K_1$ , im Punkte  $\bar{K}_1$ . Es ist da wirklich  $\frac{q'}{q} = \frac{PK_0}{P\bar{K}} = \frac{TQ_1}{TP}$ . Diese Konstruktion stimmt mit der überein, die wir erhalten, wenn wir von der zentrischen Kollineation zur affinen Lage übergehen.

7. Sind  $K, K^{(1)}, K^{(2)} \dots$  die Krümmungsmittelpunkte verschiedener Kurven, die sich in  $P$  berühren, für diesen Punkt und  $K_1, K_1^{(1)}, K_1^{(2)} \dots$  die der ihnen in unserer Kollineation entsprechenden Kurven für den Punkt  $P'$ , so sind vermöge der Beziehung  $\frac{r'}{r} = \frac{t'^3}{t^3}$  ( $OP_0P'P$ ) die Punktreihen  $K, K^{(1)}, K^{(2)}, \dots$  und  $K_1, K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, \dots$  ähnlich, und es hüllen somit die Geraden  $KK_1, K^{(1)}K_1^{(1)}, K^{(2)}K_1^{(2)} \dots$  eine Parabel  $[k]$  ein. Sind  $\bar{K}^{(1)}, \bar{K}^{(2)}, \dots$  und  $\bar{K}_1^{(1)}, \bar{K}_1^{(2)}, \dots$  die den Punkten  $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots$ , resp.  $K_1^{(1)}, K_1^{(2)} \dots$  in gleicher Weise zugeordneten Punkte wie  $\bar{K}$  und

$\bar{K}_1$  den Punkten  $K, K_1$ , so hüllen auch die Geraden  $\bar{K} \bar{K}_1, \bar{K}^{(1)} \bar{K}_1^{(1)}, \bar{K}^{(2)}, \bar{K}_1^{(2)}, \dots$  eine Parabel  $[\bar{k}]$  ein. Beide Parabeln haben  $OP, PK, P' K_1$  zu Tangenten.

Aus dem Brianchonschen Sechseit  $(PP', \bar{K}P, \bar{K}_1 \bar{K}, P' \bar{K}_1, v_\infty, v_\infty^*)$ , in dem  $v_\infty^*$  zu  $v_\infty$  benachbart ist, folgt, daß die Achse von  $[\bar{k}]$  senkrecht auf  $UP$  steht.

Die Senkrechten in  $\bar{K}$  zu  $PK$  und in  $\bar{K}_1$  zu  $P' K_1$  treffen sich in einem Punkte  $C$ ; beschreiben  $\bar{K}$  und  $\bar{K}_1$  die Punktreihen  $\bar{K}, \bar{K}^{(1)}, \bar{K}^{(2)}, \dots, \bar{K}_1, \bar{K}_1^{(1)}, \bar{K}_1^{(2)}, \dots$ , so beschreibt  $C$  gleichfalls eine gerade Punktreihe,  $C, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$  weil die durch die soeben erwähnten Punktreihen zu  $PK$ , resp.  $P' K_1$  senkrecht gelegten Parallelstrahlenbüschel perspektiv sind. Der Träger  $f$  der Punktreihe  $C' C^{(1)} C^{(2)} \dots$  geht durch  $T$ , da  $TP$  und  $T P'$  in diesen Strahlenbüscheln einander entsprechen, er geht auch durch den Brennpunkt  $F$  von  $[\bar{k}]$ , wovon man sich überzeugt, wenn man die Tangenten  $PK, P' K_1$  der Parabel  $[\bar{k}]$  mit ihrer Scheiteltangente in den Punkten  $\bar{K}^{(\varphi)}, \bar{K}_1^{(\varphi)}$  schneidet; der diesen zugehörige Punkt  $C$  fällt da in den Punkt  $F$ . Die Parabeln  $[\bar{k}]$  und  $(m)$  haben zu einander senkrechte Achsen. Der um  $TN$  als Durchmesser beschriebene Kreis ist dem Tangentendreieck  $NPP'$  von  $[\bar{k}]$  umgeschrieben und enthält infolgedessen den Brennpunkt  $F$ . Der durch  $N$  gehende Durchmesser von  $[\bar{k}]$  schneidet die Gerade  $u$ , da er auf ihr senkrecht steht, im Punkte  $M$ , welcher gleichfalls dem Kreise angehört. Nun ist  $\sphericalangle FNP = \sphericalangle P'NM$ , folglich auch  $\sphericalangle FTP = \sphericalangle P'TM$ . Daraus folgt, daß die Gerade  $TF$  identisch ist mit der früher durch  $f$  bezeichneten Geraden, und da unser Kreis dem Tangentendreieck  $TPP'$  von  $(m)$  umgeschrieben ist, so ist der Punkt  $F$  auch Brennpunkt der Parabel  $(m)$ . Die Tangenten der Parabel  $[\bar{k}]$  werden von den zu ihnen senkrechten Tangenten der Parabel  $(m)$  in Punkten auf  $PP'$  geschnitten.

Dies gibt folgende Konstruktion von  $K_1$ , wenn  $K$  gegeben ist (Fig. 8).

Wir ermitteln zuerst die Gerade  $f$ , entweder mit Hilfe der Geraden  $GE$  oder so, daß wir  $\sphericalangle(U_1 P'T) = \sphericalangle(P'T, f)$  machen, fällen von  $K$  die Senkrechte auf  $PP'$  und ziehen durch ihren Fußpunkt die Parallele zu  $TP$  bis zum Schnitt mit  $f$ , durch den wir die Parallele zu  $P'T$  ziehen bis sie  $PP'$  trifft; im Schnittpunkt errichten wir schließlich die Senkrechte auf  $PP'$ ; diese schneidet  $P' K_1$  im Punkte  $K_1$ .

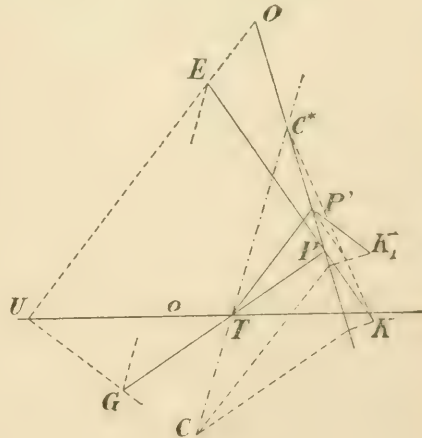


Fig. 8.

Aber auch die Benützung der Parabel  $[k]$  liefert eine einfache Konstruktion von  $K_1$ . Errichten wir im Schnittpunkt  $C^*$  von  $f$  mit  $PP'$  auf  $PP'$  die Senkrechte  $g$ , welche  $PK$  in  $K^{(0)}$ ,  $P'K_1$  in  $K_1^{(0)}$  schneidet, so sind  $K^{(0)}$ ,  $K_1^{(0)}$  einander entsprechend in den Punktreihen  $K, K^{(1)} \dots, K_1, K_1^{(1)} \dots$ , weil ja die Fußpunkte der Senkrechten von  $C^*$  auf  $PK$  und  $P'K_1$  einander in den Punktreihen  $\bar{K}, \bar{K}^{(1)} \dots, \bar{K}_1, \bar{K}_1^{(1)} \dots$  entsprechen. Es ist also  $g$  eine Tangente der Parabel  $[k]$ , welche durch  $PP'$ ,  $PK$ ,  $P'K_1$  und  $g$  vollkommen bestimmt ist. Den Punkt  $K_1$  konstruieren wir etwa mit Hilfe des Brianchonschen Sechsseits ( $PK, v_\infty, g, PP', P'K_1, KK_1$ ), indem wir die Parallele  $l$  zu  $PK$  durch  $P'$  mit der Geraden  $C^*K$  zum Schnitt bringen und durch den Schnittpunkt die Senkrechte auf  $PP'$  fällen, welche auf  $P'K_1$  den Punkt  $K_1$  einschneidet.

8. Für einen Kegelschnitt verhalten sich, wie bekannt, die Krümmungshalbmesser  $r, r'$  für irgend zwei Punkte  $P, P'$  wie die dritten Potenzen der Längen  $t = PT, t' = P'T$  ihrer Tangenten in diesen Punkten gemessen von deren Berührungspunkten  $P, P'$  bis zu ihrem Schnittpunkt  $T$ , was unsere Konstruktion bestätigt. Denn der Kegelschnitt ist zu sich selbst zentrisch kollinear für irgend einen Punkt  $O$  auf  $PP'$  als Kollineations-Zentrum und seine Polare in bezug auf ihn als Kollineationsachse. Schneidet  $o$  die Gerade  $PP'$  in  $P_0$ , so ist  $(OP_0P'P) = -1$ , weshalb

$$r' : r = t'^3 : t^3.$$

Hier ist die Gerade  $u$  der durch  $T$  gehende Durchmesser des Kegelschnittes.

9. Liegt insbesondere eine orthogonalaffine Lage vor, und ist wieder  $N$  der Schnittpunkt  $PK \cdot P'K_1$ , so fällt  $f$  mit  $TN$  zusammen. Man projiziert also  $K$  vom Schnittpunkte  $C^*$  der Geraden  $TN, PP'$  auf die Parallele durch  $P'$  zu  $PK$  nach  $\alpha$ , alsdann schneidet die Senkrechte von  $\alpha$  zu  $PP'$  die Normale  $P'K_1$  in  $K_1$ . Wir hätten auch die Parallele zu  $P'K_1$  durch  $P$  und die Senkrechte zu  $PP'$  durch  $K$  zum Schnitt bringen können; dann würde sich der Schnittpunkt von  $C^*$  auf  $P'K_1$  nach  $K_1$  projizieren. Da hier die Parabel  $[\bar{k}]$  in den zu  $PP'$  parallelen Strahlenbüschel (und in den Strahlenbüschel um  $N$ ) ausartet, so findet man leicht Übergänge zu den früher für diesen Fall orthogonal affiner Lage angegebenen Konstruktionen.

Benützen wir die Parabel  $[k]$ , so folgt aus dem ihr umgeschriebenen Sechsseit ( $PP', g, v_\infty, P'K_1, PK, KK_1$ ) auch die folgende Konstruktion.

Man fällt von  $K$  die Senkrechte auf  $PP'$  bis zum Schnitt mit  $TN$ , von hier dann die Senkrechte auf  $TP'$  bis zum Schnitt  $S$  mit  $PP'$ ; alsdann schneidet  $SK$  die Normale  $P'K_1$  im gesuchten Punkt  $K_1$ .



# Betrachtungen zur Krümmung der Kegelschnitte.

Von

**J. SOBOTKA.**

(Mit 7 Figuren im Texte.)

Vorgelegt am 17. Jänner 1919.

1. In der Arbeit: „Zur Konstruktion von Krümmungskreisen ...“, welche ich im Jahre 1902 in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag veröffentlicht habe, wird der Satz bewiesen:

„Sind  $t$ ,  $n$  zu einander normale Gerade, die sich in  $P$  schneiden, und konstruiert man zu irgend einem Dreieck  $\Delta = ABC$  ein perspektivliegendes  $\Delta_1 = A_1 B_1 C_1$  für  $t$  als Achse so, daß jede Seite von  $\Delta_1$  senkrecht steht auf dem Verbindungsstrahl von  $P$  mit dem der perspektiv entsprechenden Seite gegenüberliegenden Eckpunkt von  $\Delta$ , so sind  $t$ ,  $n$  und die Seiten von  $\Delta_1$  Tangenten einer Parabel  $u$ . Ist  $\mathfrak{U}$  der Berührungspunkt von  $n$  mit dieser Parabel, so ist  $\varrho = -\frac{1}{2} P \mathfrak{U}$  der zu  $P$  gehörige Krümmungshalbmesser für den Kegelschnitt  $k$ , welcher  $t$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $\Delta$  umgeschrieben ist, während  $\varrho' = -2 P \mathfrak{U}$  der zu  $P$  gehörige Krümmungshalbmesser für den Kegelschnitt  $k'$  ist, welcher gleichfalls  $t$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $\Delta$  eingeschrieben ist. Ferner ist  $\mathfrak{U}$  der zu  $P$  gehörige Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes  $k_1$ , welcher  $t$  in  $P$  berührt und  $\Delta$  zum Polardreieck besitzt; hierbei ist  $u$  die Steinersche Parabel von  $k_1$  für den Punkt  $P$ .“

Daraus folgt:

„Die zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte für  $k$ ,  $k'$ ,  $k_1$  sind in der besonderen Lage, daß die zwei letzten zueinander symmetrisch liegen in bezug auf den ersten.“

In diesem Sinne ist der Satz VII der erwähnten Arbeit zu berichtigen, welcher dort zwar richtig abgeleitet und angewendet aber nicht richtig formuliert worden ist. Dort wurde auch die Behauptung aufgestellt, daß das Perspektivzentrum der Dreiecke  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  auf  $n$  liegt, und

daß die Parabel  $u$  und der Kegelschnitt  $\bar{u}$ , welcher  $t$ ,  $n$  berührt und dem Dreieck  $ABC$  eingeschrieben ist, einander in der zentrischen Kollineation entsprechen, in welcher  $\Delta_1$  und  $\Delta$  einander zugeordnet sind.

Um dies einzusehen, betrachten wir die Tangenteninvolution von  $\bar{u}$ , für welche die Gerade  $PC$  die Achse ist. Diese Involution schneidet die Tangente  $AB$  in einer Punktinvolution  $\Pi$ . Wir bezeichnen die Punkte, in denen  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  von  $t$  geschnitten werden, durch  $C_0$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ , den Berührungspunkt von  $\bar{u}$  mit  $t$  durch  $T$  und den Schnitt  $n$  mit  $AB$  durch  $C'$ . Die Involution  $\Pi$  ist durch die Paare  $AB$ ,  $C_0C'$  festgelegt; in ihr entspricht dem Punkt  $E$  auf  $PC$  der Berührungspunkt  $E'$  von  $\bar{u}$  mit  $AB$ . Es gelten somit die Projektivitäten  $(AC, BC, PC_0, PC', AB) \asymp (B_0, A_0, T, P, C_0) \asymp (A, B, C_0, C', E') \asymp (B, A, C', C_0, E) \asymp P(B, A, C', C_0, E)$ .

Lassen wir den zuletzt angeschriebenen Strahlenbüschel um  $P$  eine Vierteldrehung in der Ebene vollführen und bezeichnen die unendlich fernen Punkte der gedrehten Strahlen beziehungsweise durch  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma_0$ ,  $\varepsilon$ . Aus der Beziehung  $(B_0, A_0, T, P, C_0) \asymp (\beta, \alpha, \gamma', \gamma_0, \varepsilon)$  folgt, daß die Geraden  $B_0\beta$ ,  $A_0\alpha$ ,  $T\gamma'$ ,  $P\gamma_0$ ,  $C_0\varepsilon$  eine Parabel umhüllen, welche  $t$  im Punkte  $T$  berührt und welche, da sie dem Dreieck  $\Delta_1$  eingeschrieben ist, dem Kegelschnitt  $\bar{u}$  in derjenigen zentrischen Kollineation entspricht, welche  $\Delta_1$  dem Dreieck  $\Delta$  zuordnet. Da diese Parabel auch die Gerade  $n$  berührt, so ist sie mit  $u$  identisch. Da  $u$  und  $\bar{u}$  einander in  $T$  berühren, so ist ihr Kollineationszentrum der Schnitt ihrer übrigen zwei gemeinschaftlichen Tangenten, liegt also auf  $n$ . Sonach hat der Satz VI der hernagezogenen Abhandlung richtig zu lauten:

„Die Parabel  $u$  ist zentrisch kollinear zum Kegelschnitt  $\bar{u}$ , welcher  $\Delta$  eingeschrieben ist und die Geraden  $t$ ,  $n$  berührt für  $t$  als Kollineationsachse, wobei das Kollineationszentrum auf  $n$  liegt.“

In diesem Sinne ist der Satz dort auch richtig angewendet worden.

Liegt insbesondere ein Eckpunkt von  $\Delta$  auf  $n$ , so bildet der Strahlenbüschel um ihn einen Teil von  $\bar{u}$ ; dieser Strahlenbüschel ist zu dem Tangentenbüschel von  $u$  perspektiv mit  $t$  als Achse der Perspektivität. Liegen die übrigen zwei Endpunkte von  $\Delta$  auf einer Parallelen zu  $t$ , so degeneriert auch  $u$ , und der Strahlenbüschel um  $u$  bildet einen Teil von  $u$ ; der Strahlenbüschel um  $T$  ist alsdann  $\bar{u}$  und  $u$  gemeinschaftlich.

2. Auf Grund dieses Zusammenhanges wollen wir den zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt  $K$  des Kegelschnittes  $k$  konstruieren, für den außerdem die Tangente  $t$  in  $P$ , ein Punkt  $C$  und eine zu  $t$  parallele Sehne  $AB$  gegeben sind. (Fig. 1.)

Wir führen die Konstruktion nicht für das Dreieck  $ABC$ , sondern für das Dreieck  $A'B'C'$  durch, in welchem  $C'$  der Fußpunkt der Senkrechten von  $C$  auf  $n$  und  $A'$ ,  $B'$  die Schnittpunkte von  $AB$  mit den Geraden sind, welche den Punkt  $C'$  mit  $CA \cdot t$  und  $CB \cdot t$  verbinden; der Kegelschnitt, welcher  $t$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $A'B'C'$  umgeschrieben

ist, oskuliert  $k$  in  $P$ , und der Strahlenbüschel am  $C'$  ist mit dem Tangentenbüschel der zugehörigen Parabel  $u$  in der angegebenen Weise perspektiv, was die folgende Konstruktion ergibt.

Man fällt von  $C$  die Senkrechte auf  $n$ , verbindet deren Fußpunkt  $C'$  mit dem Punkte  $BC . t$  durch eine Gerade, welche  $AB$  in  $B'$  schneiden möge; von  $AC . t$  fällt man die Senkrechte auf  $PB'$ , welche  $n$  im Punkte  $u$  trifft, so daß  $PK = \frac{1}{2} uP$  ist.

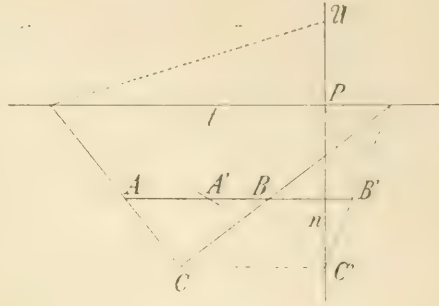


Fig. 1.

Ist der Kegelschnitt  $k$  durch  $P$ ,  $t$  und irgend ein Dreieck  $ABC$  gegeben, so schneide man (Fig. 2) etwa  $AP$  mit der Parallelen zu  $t$  durch  $B$  in  $A_1$  und  $BC$  mit der Geraden, welche  $AC . t$  mit  $A_1$  verbindet in  $C_1$ . Weiter bringt man die Gerade, welche den Fußpunkt  $C'$  der Senkrechten von  $C_1$  auf  $n$  und den Punkt  $AC . t$  verbindet, mit  $BA_1$  in  $A'$  zum Schnitte;

alsdann trifft die Senkrechte zu  $PA'$  durch den Punkt  $BC . t$  die Normale  $n$  im Punkte  $u$ . Denn man gelangt zu derselben Parabel wie für  $ABC$ , wenn man dieses Dreieck durch  $A_1B_1C_1$  ersetzt, wodurch wir die Konstruktion auf die vorangehende zurückgeführt haben.

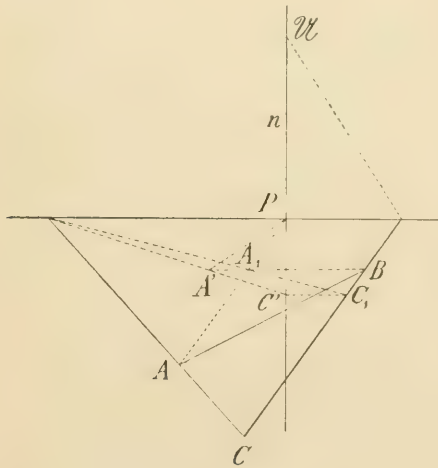


Fig. 2.

Die Parabel  $u$  ändert sich nicht, wenn das Dreieck  $ABC$  durch ein anderes  $A_1B_1C_1$  ersetzt wird, sofern  $A_1$  auf  $PA$ ,  $B_1$  auf  $PB$  angenommen wird und  $AC$ ,  $A_1C_1$  sowie  $BC$ ,  $B_1C_1$  sich auf  $t$  schneiden.

Infolgedessen berühren die den Dreiecken  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  eingeschriebenen Kegelschnitte  $\bar{u}$ , welche  $n$  und  $t$  zu Tangenten haben,  $t$  in dem Punkte  $T$ . Der durch  $T$  gehende Durchmesser von  $u$  schneidet  $n$  im Punkte  $K'$ , für den  $PK' = uP$  ist.

Die Tangente an  $\bar{u}$ , welche parallel zu  $t$  ist, schneidet  $AB$  in einem Punkte  $D_1$ ; der ihm in  $\Pi$  zugehörige Punkt sei  $D_2$ . Unsere Konstruktion von  $u$  lehrt, daß  $PD_2$  die Leitgerade  $g$  von  $u$  ist, daß also die Senkrechte von  $T$  auf  $g$  von  $n$  im Punkte  $K'$  getroffen wird.

Dies führt zu verschiedenen Konstruktionen von  $K'$ , von denen wir die folgenden anführen.





man diesen irgend zwei Parabeln ein, so werden die Längen der übrigen zwei gemeinschaftlichen Tangenten derselben durch  $t$  halbiert.“

Bezeichnen wir mit  $a, a'$  ein und mit  $b, b'$  das andere Paar paralleler Seiten in dem Parallelogramm, so daß  $a, b, t$  das eine,  $a', b', t$  das andere der erwähnten Dreiecke bilden; ist  $n$  eine weitere gemeinschaftliche Tangente der Parabeln,  $n_1$  die ihr unendlich benachbarte für die erste,  $n_2$  für die zweite Parabel,  $u$  die unendlich ferne Gerade der Ebene, so folgt aus den Brianchon'schen Sechseiten  $tnn_1aub, tnn_2a'ub'$ , daß tatsächlich die Entfernung der Punkte  $n.n_1, n.n_2$  durch  $t$  halbiert wird.

Wir gelangen zu den folgenden Konstruktionen. (Fig. 4.)

1. Für den Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  des Kegelschnittes  $v$ , welcher das Dreieck  $ABC$  zum Polar-dreieck hat und eine Gerade  $t$  in  $P$  berührt.

Wir fällen von  $A_0 = CA.t$  die Senkrechte  $a^0$  auf  $PA$  und von  $B_0 = CB.t$  die Senkrechte  $b_0$  auf  $PB$ ; sind  $N_\alpha, N_\beta$  die Schnittpunkte derselben mit der Normale  $n$  in  $P$  zu  $t$ , so übertragen wir den Vektor  $N_\alpha A_0$  nach  $A_0 A'$ , den Vektor  $N_\beta B_0$  nach  $B_0 B'$ , alsdann schneidet die Gerade  $A'B'$  auf  $n$  den Punkt  $K_1$  ein.

2. Für den Krümmungsmittelpunkt  $K'$  des Kegelschnittes  $k'$ , welcher  $t$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $ABC$  eingeschrieben ist.

Wir ermitteln  $a_0$  und  $b_0$ , wie zuvor und übertragen die Vektoren  $A_0 N_\alpha, B_0 N_\beta$  nach  $N_\alpha A'',$  beziehungsweise  $N_\beta B''$ ; alsdann schneidet die Gerade  $A''B''$  auf  $n$  den Punkt  $K'$  ein.

3. Für den Krümmungsmittelpunkt  $K$  des Kegelschnittes  $k$ , welcher  $t$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $ABC$  umgeschrieben ist.

Wir fällen von  $A_0$  und  $B_0$  die Senkrechten  $b'_0, a'_0$  auf  $PB$ , resp.  $PA$ , ermitteln zu deren Schnittpunkten mit  $n$  die symmetrisch liegenden Punkte  $A^*, B^*$  in bezug auf  $A_0$ , resp.  $B_0$ ; schneidet die Gerade  $A^*B^*$  auf  $n$  den Punkt  $H$  ein, so ist  $PK = \frac{1}{2}PH$ .

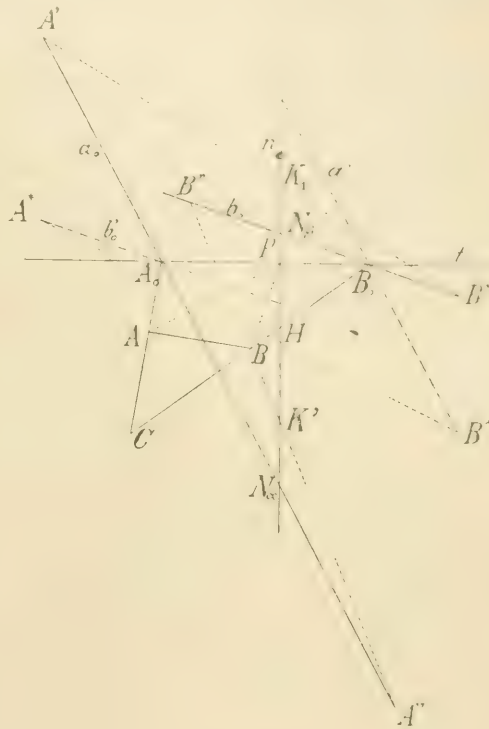


Fig. 4.

Zur Begründung dieser Konstruktionen ist zunächst zu bemerken, daß  $t, n, a_0', b_0'$  Tangenten der Steinerschen Parabel des Punktes  $P$  in bezug auf  $\tau$  sind;  $K_1$  ist der Berührungspunkt dieser Parabel mit  $n$ . Die Abschnitte der Tangenten  $b_0', a_0'$  also aller Tangenten dieser Parabel zwischen  $A^* B^*$  und  $n$  werden durch  $t$  halbiert; dies gilt auch für die zu  $n$  unendlich nahe Tangente; es ist also  $K_1 P = P H$ , was die Richtigkeit der Konstruktion unter 3) ergibt.

Die Parabel, welche  $t, n, a_0, b_0$  zu Tangenten hat, berührt infolge des erläuterten Hilfsatzes  $n$  im Punkte  $H$ . Da die Tangentenlängen dieser Parabel zwischen  $A'' B''$  und  $t$  durch  $n$  halbiert werden, so folgt daraus, daß der Schnittpunkt von  $A'' B''$  mit  $n$  der Krümmungsmittelpunkt  $K'$  von  $k'$  ist, d. h. für ihn  $P K' = -2 P K_1$  ist.

4. Es seien  $P Q R, P' Q' R'$  zwei Polardreiecke eines Kegelschnittes  $k$ . Wir schreiben ihnen zwei Kegelschnitte  $m, m'$  um, welche  $k$  in einem Punkte  $M$  berühren und sich somit noch in zwei weiteren Punkten  $U_1, U_2$  schneiden. Es sei  $u_1$  die Polare von  $U_1$  in bezug auf  $k$ . Da der Kegelschnitt  $m$  einem Polardreieck von  $k$  umgeschrieben ist, so lassen sich ihm unzählig viele Polardreiecke von  $k$  einschreiben. Die Polare in bezug auf  $k$  für irgend einen Punkt  $V$  auf dem Kegelschnitt  $m$  schneidet diesen in zwei Punkten, die mit  $V$  ein Polardreieck von  $k$  bilden. Daraus folgt, daß  $u_1$  den Kegelschnitt  $m$  und somit auch den Kegelschnitt  $m'$  in je zwei in bezug auf  $k$  konjugierten Punkten schneidet. Es legen somit  $m$  und  $m'$  einen Kegelschnittbüschel  $\mathfrak{S}$  fest, welcher  $u_1$  in einer Involution schneidet, die mit der auf  $u_1$  liegenden Involution konjugierter Punkte in bezug auf  $k$  identisch ist. In  $\mathfrak{S}$  artet ein Kegelschnitt in das Geradenpaar aus, welches von der Tangente in  $M$  an  $k$  und von der Geraden  $U_1 U_2$  gebildet wird. Diese Geraden schneiden  $u_1$  in den Punkten  $T$  und  $U$ , welche zu einander in bezug auf  $k$  gleichfalls konjugiert sind. Es ist also  $U_1 T U$  ein Polardreieck von  $k$  und da  $U_1 U \equiv U_1 U_2$  die Polare von  $T$  in bezug auf  $k$  ist, so fällt  $U_1 U_2$  mit der Polare des Punktes  $T$  in bezug auf  $k$  zusammen; es fällt somit einer der noch vorhandenen Schnittpunkte  $U_1, U_2$  von  $m$  und  $m'$  nach  $M$  und nur einer von ihnen kann von  $M$  verschieden sein, woraus folgt, daß die Kegelschnitte  $m$  und  $m'$  einander in  $M$  oskulieren.

Wir haben somit den Satz:

I. „Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt  $k$  in demselben Punkte  $M$  berühren und seinen Polardreiecken umgeschrieben sind, oskulieren einander im Punkte  $M$ .“

Dazu bemerken wir (Fig. 5.), daß die Polkreise eines Kegelschnittes, das sind Kreise, welche seinen Polardreiecken umschrieben sind, den sogenannten Hauptkreis  $v$  von  $k$  orthogonal schneiden, und umgekehrt lassen sich jedem Orthogonalkreis von  $v$  unendlich viele Polardreiecke von  $k$  einschreiben. Es gibt einen Kreis  $w$ , welcher  $v$  orthogonal schneidet und  $k$  in  $M$  berührt; derselbe ist durch  $M$ , durch den zu  $M$  in bezug auf  $a$



konjugierten auf einem Durchmesser von  $v$  mit  $M$  liegenden Punkt  $M^*$  und durch seine Tangente in  $M$  in eindeutiger Weise bestimmt. Da nun  $w$  den Kegelschnitt  $k$  in  $M$  berührt und Polardreiecken von  $k$  umgeschrieben ist, so gehört er den Kegelschnitten des Satzes I an; er ist deshalb ihr gemeinsamer Schmiegunskreis in  $M$ .

Wir wollen seinen Halbmesser  $r$  mit dem zu  $M$  gehörigen Krümmungshalbmesser  $r_1$  von  $k$  in Beziehung bringen.

Alle Kreise durch  $M$  und  $M^*$  schneiden  $v$  orthogonal und sind Polkreise von  $k$ . Es sei  $n$  die Normale von  $k$  in  $M$  und  $N$  der Pol von  $n$  in bezug auf  $k$ ; er liegt auf der Tangente  $t$  von  $k$  in  $M$ , und  $M'$  sei auf  $n$  zu  $M$  unendlich benachbart; alsdann liegt der Pol  $M''$  der Geraden  $N M'$  in bezug auf  $k$  gleichfalls auf  $n$  unendlich benachbart zu  $M$ . Es ist somit der dem Dreiecke  $N M' M''$  umschriebene Kreis ein Polkreis von  $k$  und fällt in der Grenze mit dem über  $\overline{M N}$  als Durchmesser beschriebenen Kreise  $h$  zusammen. Da dieser Kreis durch  $M$  geht und  $v$  orthogonal schneidet, so geht er auch durch  $M^*$ , und es ist  $N M^* \perp M M^*$ .

Es trifft also  $N M^*$  die Normale  $n$  in dem zu  $M$  diametralgegenüberliegenden Punkte  $H$  von  $w$ , und  $N H$  ist die Polare von  $M$  bezüglich  $v$ .

Konstruieren wir noch den Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  von  $k$  für den Punkt  $M$  mit Hilfe der dem Punkte  $P$  entsprechenden Steinerschen Parabel  $\phi$  von  $k$ . Diese hat die Achsen  $a, b$  von  $k$ , ferner  $t, n$  zu Tangenten, den durch  $M$  gehenden Durchmesser  $O M$  von  $k$  zur Leitgeraden und berührt  $t$  im Punkte  $N$ . Der Punkt  $K_1$  ist ihr Berührungspunkt mit  $n$ , so daß  $N K_1$  die Polare von  $M$  in bezug auf sie ist. Da  $M$  auf der Leitgeraden  $M O$  liegt, so ist  $N K_1$  ein Leitstrahl von  $\phi$ ; der zweite Leitstrahl des Punktes  $N$  ist senkrecht auf  $M O$ , fällt also mit  $N H$  zusammen. Da die Tangente  $t$  von  $\phi$  den Winkel dieser Leitstrahlen halbiert, so ist  $K_1 M = M H$ , also  $r_1 = -2 r$ .

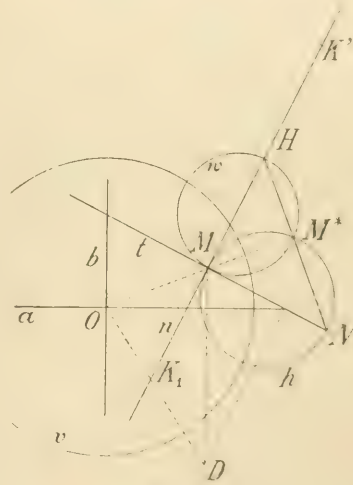


Fig 5.

Wir haben hier stillschweigend einen zentrischen Kegelschnitt  $k$  vorausgesetzt. Der Übergang zu einer Parabel  $k$  bietet nichts Neues; der Schnitt  $L$  von  $n$  mit der Leitgeraden der Parabel ist der Mittelpunkt von  $w$  und es ist deshalb  $M K_1 = 2 \cdot L M$ . Das ist die bekannte von Steiner aufgestellte Beziehung.

Der duale Satz zu I lautet:

II. „Kegelschnitte, welche einen Kegelschnitt  $k$  in demselben Punkte

$M$  berühren und seinen Polardreiecken eingeschrieben sind, oskulieren einander in diesem Punkte.“

Sein Beweis erfolgt vollkommen dual zu dem des Satzes I.

5. Ist  $k$  ein zentrischer Kegelschnitt (Fig. 5) mit dem Mittelpunkt  $O$ ,  $g_\infty$  die unendlich ferne Gerade der Ebene, so sind, wenn überdies die frühere Bezeichnung beibehalten wird,  $a, b, t, n$  Tangenten der Steinerschen Parabel  $p$ , deren Berührungspunkt  $K_1$  mit  $n$  als Schnitt von  $n$  mit der unendlich benachbarten Tangente  $n_1$  aus dem Sechseit ( $bg_\infty n n_1 t a$ ) erhalten werden kann. Wir erhalten hier den Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  somit dadurch, daß wir in  $t.a$  die Senkrechte zu  $t$ , in  $M$  die Senkrechte zu  $a$  errichten und den Schnittpunkt beider  $D$  mit  $O$  verbinden; die Verbindungsgerade trifft  $n$  in  $K_1$ .

Unter den Kegelschnitten des Satzes II befindet sich die Parabel  $s$ , welche dem Polardreieck  $abg_\infty$  von  $k$  eingeschrieben ist. Der zu  $M$  gehörige Krümmungsmittelpunkt  $K'$  von  $s$  ist allen Kegelschnitten dieses Satzes gemeinschaftlich. Die Leitgerade von  $s$  geht durch  $O$ ; sie geht auch durch  $D$  als den Höhengschnitt des Dreieckes, welches durch die Tangenten  $a, t$  und die zu  $t$  unendlich benachbarte Tangente  $t_1$  der Parabel  $s$  bestimmt ist. Es ist also  $OD_1$  die Leitgerade von  $s$ ; da sie die Normale  $n$  von  $s$  in  $K_1$  schneidet, so ist (nach Satz I)  $MK' = 2K_1M$ . Setzen wir  $MK' = R$ , so ist  $R = -2r_1$ .

Ist  $k$  eine Parabel, so rückt  $b$  ins Unendliche; der unendlich ferne Punkt von  $a$ , sein unendlich benachbarter auf  $a$  und der unendlich ferne Punkt  $B_\infty$  auf den Senkrechten zu  $a$  bilden ein Polardreieck von  $k$ ; der ihm eingeschriebene Kegelschnitt  $s$ , welcher  $k$  in  $M$  berührt, ist eine Parabel, welche  $a$  zur Scheiteltangente hat. Der zuvor mit  $D$  bezeichnete Punkt ist ein Punkt der Leitgeraden von  $s$ , welche hier zu  $a$  parallel ist und  $n$  im Punkte  $K_1$  schneidet, welcher der zu  $M$  gehörige Krümmungsmittelpunkt von  $k$  ist, wie wieder aus dem Sechseit ( $bg_\infty n n_1 t a$ ) folgt, in welchem nun  $b$  unendlich fern liegt, und der Punkt  $b.g_\infty = B_\infty$  ist. Es ist also auch jetzt  $MK' = 2K_1M$ .

Wir können somit den früher in anderer Weise hergeleiteten Satz auch so aussprechen:

III. „Beschreibt man in einer Ebene drei Kegelschnitte  $m, s, k$ , welche einander in einem Punkte  $M$  berühren und von denen der erste einem Dreieck  $ABC$  umgeschrieben, der zweite demselben eingeschrieben ist, während der dritte es zum Polardreieck hat, und sind der Reihe nach  $r, R$  und  $r_1$  die zu  $M$  gehörigen Krümmungshalbmesser dieser Kegelschnitte, so besteht zwischen diesen die Beziehung  $R = 4r = -2r_1$ .“

Jedem Kegelschnitt  $g$ , welcher irgend einen Kegelschnitt  $m$  des Satzes I im Punkte  $M$  oskuliert, lassen sich unendlich viele Polardreiecke von  $k$  einschreiben. Denn es sei  $G_1$  irgend ein Punkt auf  $g$ ; seine Polare  $g_1$  in bezug auf  $k$  schneidet  $g$  in zwei Punkten; ist  $G_2$  einer von ihnen und  $G$

der ihm auf  $g_1$  in bezug auf  $k$  konjugierte, so ist  $G_1 G_2 G_3$  ein Polardreieck von  $k$ ; folglich oskuliert der Kegelschnitt, welcher diesem Dreieck umschrieben ist und  $k$  in  $M$  berührt nach Satz I den Kegelschnitt  $k$  in  $M$ , fällt also mit dem Kegelschnitt  $g$  zusammen, da er ihn in  $M$  oskuliert und mit ihm außerdem die Punkte  $G_1, G_2$  gemein hat; es ist also  $G_3$  der zweite Schnittpunkt von  $g_1$  mit  $g$ , und dem Kegelschnitt ist das Polardreieck  $G_1 G_2 G_3$  und sind also unendlich viele Polardreiecke von  $k$  eingeschrieben. Analog schließen wir, daß jedem Kegelschnitt, welcher einen Kegelschnitt  $s$  des Satzes II im Punkte  $M$  oskuliert, sich unendlich viele Polardreiecke von  $k$  umschreiben lassen.

6. Hierzu bemerken wir noch folgendes (Fig. 6).

Es seien  $M, M_1$  zwei unendlich benachbarte Punkte von  $k$ ,  $M_0$  sei der Schnitt ihrer Tangenten in diesen Punkten, während der Schnitt ihrer Normalen in ihnen der Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  von  $k$  ist. Der unendlich kleine Winkel  $\varphi$ , welchen  $M_1 M_0$  mit  $M M_0$  einschließt ist der zum Bogen  $M M_1$  gehörige Kontingenzwinkel. Es ist

$$r_1 = \lim \frac{\overline{M M_1}}{\varphi} \text{ für } \lim \overline{M M_1} = 0.$$

Ist  $M'$  ein außerhalb der Strecke  $\overline{M M_1}$  liegender Punkt von  $M M_1$ , und  $M''$  der ihm auf  $M M_1$  in bezug auf  $k$  konjugierte, so ist das Dreieck  $M_0 M' M''$  ein Polardreieck von  $k$ ; der Kreis, welcher diesem Dreieck umgeschrieben ist, nähert sich in der Grenze, wenn  $M'$  sich an  $M$  unbeschränkt nähert, dem Kreise  $(r)$ , welcher  $M M_1$  in  $M$  berührt und durch  $M_0$  geht; es hat also  $(r)$  den Halbmesser  $r$ . Ein endlicher Kreis  $(R)$ , welcher die Seiten dieses Dreieckes berührt, berührt in der Grenze  $M M_0$  in  $M_0$ . Es sei  $M H$  ein Durchmesser von  $(r)$ . Da für  $\lim M M_1 = 0$   $\lim M M_0 = \lim M_0 M_1$  ist, so ist  $\lim \sphericalangle M_1 M M_0 = \frac{\varphi}{2}$  und  $M M_0 = \lim H M \cdot \frac{\varphi}{2}$ ; somit

$$-r = \lim \frac{M M_0}{\varphi} = \lim \frac{M M_1}{2 \varphi}; \text{ ebenso } M M_0 = -\lim R \frac{\varphi}{4}; \text{ somit}$$

$$-R = \lim \frac{4 M M_0}{\varphi} = \lim \frac{2 M M_1}{\varphi}.$$

Wir kommen also auch auf diesem Wege zu der Beziehung

$$R = 4r = -2r_1.$$

7. Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $K$  eines Kegelschnittes  $k$  für einen Punkt  $P$  derselben, wenn außer  $P$  noch die Tangente in ihm und drei weitere Punkte  $A, B, C$  gegeben sind, kann mit Hilfe der Steinerschen Parabel  $\phi$  des Punktes  $P$  auch in folgender Weise be-

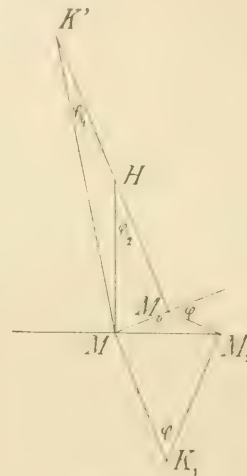


Fig. 6.



werkstelligt werden (Fig. 7). Wir betrachten das vollständige Viereck  $ABC P$ , welches  $k$  eingeschrieben ist. Die Schnittpunkte  $AB \cdot PC = C'$ ,  $BC \cdot PA = A'$ ,  $CA \cdot PB = B'$  bilden sein Diagonaldreieck, welches ein Polardreieck von  $k$  ist. Seine Seiten  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  mögen  $t$  in  $C_0'$ ,  $A_0'$ ,  $B_0'$  schneiden. Die Senkrechte  $a_0$  von  $A_0'$  auf  $PA$  ist normal konjugiert zu  $PA \equiv PA'$ , die Senkrechte  $b_0$  von  $B_0'$  auf  $PB$  ist normal konjugiert zu  $PB \equiv PB'$  in bezug auf  $k$ . Ist  $n$  die Normale von  $k$  in  $P$ , so ist durch  $n, t, a_0, b_0$  die Parabel  $p$  bestimmt; ihr Berührungspunkt mit  $n$  ist  $K$ . Schneiden  $a_0, b_0$  die Normale  $n$  in  $A_v, B_v$ , so ist  $(A_v B_v K) = (A_0' B_0' P)$ . Treffen die Parallelen durch  $P$  zu  $a_0$  und durch  $A_0'$  zu  $n$  einander in  $\bar{A}'$ , die Parallelen durch  $P$  zu  $b_0$  und durch  $B_0'$  zu  $n$  in  $\bar{B}'$ , und sind  $\alpha, \beta$ , die Fußpunkte der Senkrechten von  $\bar{A}'$  und  $\bar{B}'$  auf  $n$ ,  $H$  der Schnittpunkt von  $\bar{A}'\bar{B}'$  mit  $n$ , so ist  $(\bar{A}'\bar{B}'H) = (A_0' B_0' P) = (A_v B_v K)$ , und da  $P\alpha = A_v P$ ,  $P\beta = B_v P$ , so ist  $PH = KP$ .

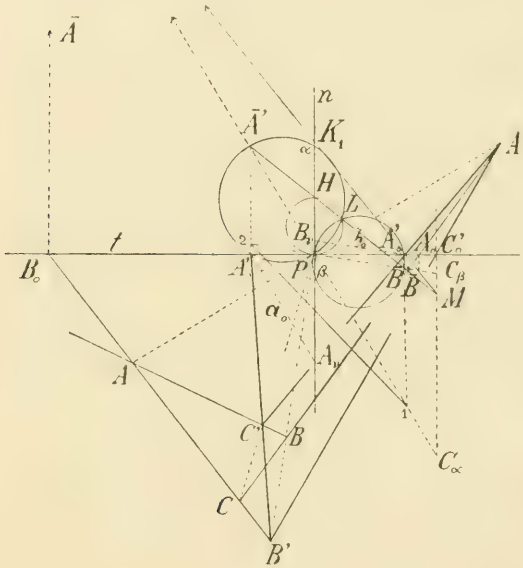


Fig. 7.

Trifft also  $\bar{A}'P$  die Gerade  $B_0'\bar{B}'$  in 1,  $\bar{B}'P$  die Gerade  $A_0'\bar{A}'$  in 2, so schneidet 1 2 die Normale  $n$  in  $K$ .

Wollten wir für den Kegelschnitt  $v$ , welcher  $t$  in  $P$  berührt und  $ABC$  zum Polardreieck hat, den zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  konstruieren, so hätten wir  $A', B', C', A_0', B_0'$  durch die Punkte  $A, B, C, A_0 = BC \cdot t, B_0 = CA \cdot t$  zu ersetzen. Es wäre also  $P\bar{B}'$  mit der Senkrechten in  $A_0$  zu

$t, P\bar{A}'$  mit der Senkrechten in  $B_0$  zu  $t$  in  $\bar{B}$ , resp.  $\bar{A}$  zu schneiden; alsdann träfe  $\bar{A}\bar{B}$  die Normale  $n$  in  $K_1$ .

Da  $B'(PB_0 A_0' C_0') = (PB_0 A_0' C_0') = -1$ , so ist auch  $(P\bar{A}\bar{A}'C_\alpha) = -1$ , wenn wir mit  $C_\alpha$  den Schnittpunkt von  $P\bar{A}$  mit der Senkrechten zu  $t$  in  $C_0'$  bezeichnen. Ebenso ist  $(P\bar{B}\bar{B}'C_\beta) = -1$ , wenn  $C_\beta$  den Schnitt von  $P\bar{B}$  mit  $C_0' C_\alpha$  bezeichnet. Es schneiden sich also  $\bar{A}'\bar{B}'$ ,  $\bar{A}\bar{B}$  in einem Punkte  $M$  auf  $C_\alpha C_\beta$ . Aus der Beziehung  $M(P\bar{A}\bar{A}'C_0') = -1$  ergibt sich wieder, daß die Strecke  $PK_1$  durch  $H$  halbiert wird; daß somit  $PK = -\frac{1}{2}PK_1$  ist.

Der Kreis über  $P\bar{A}'$  als Durchmesser geht durch den Punkt  $A_0'$  und berührt seine Polare  $PA$  in bezug auf  $k$  im Punkte  $P$ ; er ist also ein

Polkreis von  $k$ ; ebenso ist der über  $P\overline{B'}$  als Durchmesser beschriebene Kreis ein Polkreis von  $k$ . Diese beiden Polkreise schneiden sich noch im Fußpunkte  $L$  der von  $P$  auf  $\overline{A'}\overline{B'}$  errichteten Senkrechten; sie schneiden den Hauptkreis von  $k$  orthogonal; folglich schneidet jeder Kreis durch  $P$  und  $L$  denselben orthogonal und ist somit ein Polkreis von  $k$ . Es ist also auch der dem Dreieck  $PLH$  umschriebene Kreis, welcher  $k$  in  $P$  berührt, ein Polkreis von  $k$ . Dadurch sind wir wieder zu der von Steiner<sup>1)</sup> aufgestellten Beziehung gelangt, daß wenn wir  $PH = KP$  machen, der über  $PH$  als Durchmesser beschriebene Kreis den Hauptkreis von  $k$  orthogonal schneidet.<sup>2)</sup>

---

<sup>1)</sup> Jacob Steiners Gesammelte Werke, 2. Bd. S. 341.

<sup>2)</sup> In der Figur soll rechts  $B_0'$  statt  $A_0'$  stehen.

# Einige spezielle Beziehungen der Krümmungsmittelpunkte eines Kegelschnittes.

Von  
**J. Sobotka.**

(Mit 3 Figuren im Texte.)

Vorgelegt am 15. Feber 1919.

1. Sind  $A_1, A_2, A_3, P$  vier Punkte eines Kegelschnittes  $k$ , und ist  $\phi$  seine Tangente in  $P$ , so läßt sich der zu  $P$  gehörige Krümmungshalbmesser  $r$  von  $k$  durch die Formel

$$r = \frac{d_{21} d_{31} d_{32}}{4 \Delta} \quad (1)$$

ausdrücken, in welcher  $\Delta$  der Inhalt des Dreieckes  $A_1 A_2 A_3$  ist und  $d_{21}, d_{31}, d_{32}$  die Längen der Strecken bezeichnen, welche auf den durch die Punkte  $A_3, A_2, A_1$  zu  $\phi$  gezogenen Parallelen durch die Geradenpaare  $P A_2, P A_1; P A_3, P A_1; P A_3, P A_2$  beziehungsweise ausgeschnitten werden, wie ich seinerzeit gezeigt habe. <sup>1)</sup> Die Entwicklung dieser Formel zeigt, daß sie auch bezüglich des Vorzeichens richtig ist, wobei wir  $P$  als Anfangspunkt und  $\phi$  als  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems annehmen.

Wählen wir als  $A_3$  den weiteren Schnittpunkt der Normale  $n$  von  $k$  in  $P$  mit diesem Kegelschnitt und als  $A_1$  und  $A_2$  die Schnittpunkte von  $k$  mit der zu  $\phi$  parallelen Geraden, welche  $P A_3 = s$  im Punkte  $G$  halbiert, so hat man

$$4 \Delta = A_1 A_2 \cdot s = \frac{d_{12} s}{2},$$

so daß

$$r = \frac{-2 d_{31} d_{32}}{s},$$

woraus die Relation folgt

$$-r \cdot \frac{s}{2} = r \cdot GP = d_{31} d_{32}.$$

<sup>1)</sup> Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. 1904 (Zur Ermittlung der Krümmung . . .)



Man hat also folgende Konstruktion von  $r$ .

Man schreibt dem Dreieck  $A_1 A_2 P$  einen Kreis um, welcher  $n$  noch im Punkte  $T$  treffen möge; alsdann ist  $r = GT$ . Sind die Punkte  $A_1, A_2$  reell, so folgt hieraus, daß wenn die Senkrechte durch  $A_2$  zu  $A_1 P$  die Normale  $n$  in  $T'$  schneidet,  $r = T'G$  ist. Zu demselben Ergebnis würde jede der bekannten Konstruktionen von  $r$  aus gegebenen Elementen  $P, \phi$  und  $A_1, A_2, A_3$  im allgemeinen durch Spezialisierung ihrer Lage führen.

2. Schneidet  $n$  den zum Durchmesser von  $k$ , welcher durch  $P$  geht, in bezug auf die Kegelschnittachsen symmetrisch gelegenen Durchmesser im Punkte  $H$ , und wählen wir die Schnittpunkte der durch  $H$  zu  $\phi$  gehenden Parallelen mit  $k$  als  $A_1, A_2$ , während wir  $A_3$  wie zuvor auf  $n$  annehmen, so ist zunächst  $H$  der Pol einer Involution auf  $k$ , welche von  $P$  aus durch eine Involution rechter Winkel projiziert wird, so daß  $A_2 P \perp A_1 P$  und  $d_{31} \cdot d_{32} = -PH^2$ , demzufolge die Formel (1) hier ergibt, daß

$$2r = \frac{PH}{HA_3} s.$$

Ist der Kegelschnitt  $k$  eine gleichseitige Hyperbel, so bilden die Parallelen durch  $P$  zu den Asymptoten ein Paar der erwähnten Rechtwinkelinvolution, folglich liegt  $H$  auf der unendlich weiten Geraden der Ebene, so daß hier

$$\lim \frac{PH}{HA_3} = \lim \frac{PA_3 + A_3H}{HA_3} = -1,$$

somit

$$r = -\frac{s}{2}.$$

Diese Beziehung läßt sich noch in mannigfacher Weise ableiten.

3. Die normalkonjugierten Strahlen zu den Geraden des Büschels um  $P$  in bezug auf eine Hyperbel  $k$  hüllen (Fig. 1) die Steinersche Parabel des Punktes  $P$  ein, welche  $n$  im Krümmungsmittelpunkt  $K$  von  $k$  für den Punkt  $P$  berührt. Diese Parabel berührt  $\phi$  und die Senkrechten, welche man in den Schnittpunkten  $A, B$  von  $\phi$  mit den Asymptoten zu diesen errichtet. Schneiden diese Senkrechten  $n$  in  $A'$  und  $B'$ , so folgt hieraus, daß  $A'K = KB'$ .

Ist  $C$  der Schnitt von  $AA'$  mit  $BB'$  und ist  $O$  der Mittelpunkt von  $k$ , so ist  $CK \perp OP$ . Die Senkrechte von  $O$  auf  $PC$  halbiert in  $M$  die Strecke, welche auf  $n$  durch die Asymptoten  $OA, OB$  ausgeschnitten wird; es ist also der Durchmesser  $OM$  von  $k$  konjugiert zu der Richtung von  $n$ . Ist die Hyperbel gleichseitig, dann fallen

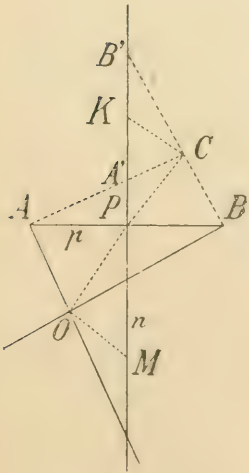


Fig. 1.



Da

$$L A_1'' = L A_3 \cdot \frac{A_3 A_1'}{A_3 P}, \quad L A_2'' = L A_3 \cdot \frac{A_3 A_2'}{A_3 P},$$

$$A_1'' A_2'' = A_1' A_2' \cdot \frac{L A_3'}{A_3 P},$$

so ist

$$2 r s = A_3 A_1' \cdot A_3 A_2'.$$

Schneidet somit der dem Dreiecke  $P A_1' A_2'$  umgeschriebene Kreis  $n$  noch im Punkte  $T$ , so ist  $2 r = T A_3$ .

Oder man fällt von  $A_2'$  die Senkrechte auf  $p$  und von ihrem Fußpunkt die Senkrechte auf  $A_1' P$ ; diese schneidet  $n$  im Punkt  $R$ , für den  $PR = 2 r$ . Selbstverständlich können da  $A_1'$  und  $A_2'$  mit einander vertauscht werden. Für eine gleichseitige Hyperbel folgt hieraus wieder, daß  $2 r = A_3 P$ .

6. Diese Beziehung bei einer gleichseitigen Hyperbel können wir auch auf folgende Art erhalten. Die Normalen, welche von irgend einem Punkte  $K$  der Ebene an einen Kegelschnitt  $u$  ausstrahlen, haben ihre Fußpunkte auf der Apollonischen Hyperbel  $k$  dieses Punktes, welche durch  $K$ , durch den Mittelpunkt  $O$  von  $u$  und durch die unendlich fernen Punkte  $A_\infty, B_\infty$  ihrer Achsen gehen. Ist  $K$  der zu  $P$  gehörige Krümmungsmittelpunkt von  $u$ , dann fallen zwei der Fußpunkte nach  $P$ ; daraus folgt, daß die gleichseitige Hyperbel  $k$ , welche durch  $O, A_\infty, B_\infty$  geht und  $u$  in  $P$  berührt, die in  $P$  errichtete Normale  $n$  von  $U$  außerdem noch im Punkte  $K$  schneidet. Nun ist  $k$  dem Polardreieck  $O A_\infty B_\infty$  von  $u$  umgeschrieben und berührt  $u$  in  $P$ , folglich ist nach einem bekannten Satze der Krümmungshalbmesser von  $k$  in  $P$  gleich  $\frac{1}{2} KP$ .

7. Nehmen wir wieder  $A_3$  auf  $n$  und  $A_1, A_2$  auf der zu  $p$  parallelen Sehne, welche unendlich nah an  $A_3$  liegt, an, so daß einer der Punkte  $A_1, A_2$ , etwa der letztere zu  $A_3$  unendlich benachbart ist. Setzen wir  $A_2 A_3 = d \sigma$ ,  $A_2 A_1 = t$  und bezeichnen mit  $\varphi$  den Winkel, welchen  $A_3 P$  mit der Tangente  $q$  an  $k$  in  $A_3$  bildet, so gibt hier die Formel (1) die Gleichung

$$r = - \frac{A_2 A_1^2 d \sigma \sin \varphi}{2 A_1 A_2 d \sigma \cos \varphi}, \quad \text{somit } 2 r = t t g \varphi.$$

Daher die Konstruktion: Wir schneiden  $k$  mit  $n$  in  $A_3$  und mit der Parallelen zu  $p$  durch  $A_3$  in  $A_1$ , fällen von  $A_1$  die Senkrechte auf  $p$  und von deren Fußpunkt die Senkrechte auf  $q$ . Trifft diese Senkrechte  $n$  in  $R$ , so ist  $2 r = PR$ . Nach der in Art. 4 herangezogenen Konstruktion ergibt sich für die jetzige besondere Lage der Punkte  $A_1, A_2, A_3$ , daß wir die Senkrechten in  $B_2 = q \cdot p$  zu  $p$  und in  $P$  zu  $PA_1$  zu errichten habe, um in ihrem Schnitt den Punkt 1 zu erhalten, während der Punkt 2 hier unendlich weit auf  $p$  liegt. Es ist also  $2 r = B_2 1$ . Daß diese



Konstruktion mit der vorangehenden übereinstimmt, folgt daraus, daß für  $\nexists A_2 A_1 P = \psi$  man erhält

$$B_2 1 = P B_2 \cot \psi = s t g \varphi \cot \psi \quad \text{und} \quad P R = A_2 A_1 t g \varphi = s \cot \psi t g \varphi,$$

also tatsächlich  $B_2 1 = P R$  ist.

8. Wir haben zuvor (Art. 6.) von dem folgenden Satz Gebrauch gemacht.

„Berühren einander zwei Kegelschnitte  $u, u_1$  in einem Punkte  $P$ , ist der erste von ihnen einem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschrieben, welches für den zweiten ein Polardreieck ist, und sind  $K, \text{ resp. } K_1$  die zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte  $u, u_1$ , so ist  $P K_1 = 2 \cdot K P$ .“

Wir wollen hier einen analytischen Beweis dieses Satzes geben. Wir wählen  $P$  als Anfangspunkt, die gemeinschaftliche Tangente von  $u$  und  $u_1$  in  $P$  als  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems.<sup>1)</sup> Die Koordinaten von  $A_1, A_2, A_3$  seien  $(x_1 y_1), (x_2 y_2), (x_3 y_3)$ . Die Gleichung von  $u_1$  ist allgemein

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{23} y = 0. \quad (1)$$

Da  $A_1, A_2$  konjugiert sind in bezug auf  $u_1$ , so ist

$$a_{11} x_1 x_2 + a_{12} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} y_1 y_2 + a_{23} (y_1 + y_2) = 0. \quad (2)$$

Es gelten weiter die Gleichungen (3) und (4), welche man durch zyklische Vertauschung von  $x_1, x_2, x_3$  und  $y_1, y_2, y_3$  erhält. Weiter ist  $P K_1 = r_1 = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$ . Eliminiert man aus dieser Gleichung und aus (2), (3) und (4) die Koeffizienten  $a_{ik}$  und setzt  $x_i = y_i t g \varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), so erhalten wir die Gleichung

$$r_1 \left| t g \varphi_1 + t g \varphi_2, 1, \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} \right| = \left| t g \varphi_1 t g \varphi_2, t g \varphi_1 + t g \varphi_2, 1 \right|,$$

worin der Faktor bei  $r_1$  und die rechte Seite Determinanten sind, für welche wir nur die ersten Zeilen geschrieben haben, deren zweite und dritte Zeilen aus den ersten durch zyklische Vertauschung hervorgehen.

Subtrahieren wir in beiden Determinanten die letzten Zeilen von den ersten und zweiten, so bekommt man durch weitere Ausführung

$$r_1 \left| t g \varphi_2 - t g \varphi_3, \frac{y_3 - y_2}{y_3 y_2} \right| = (t g \varphi_2 - t g \varphi_3) (t g \varphi_2 - t g \varphi_1) (t g \varphi_3 - t g \varphi_1) \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Man sehe Fußnote auf S. 1.

Bringen wir  $A_1 A_2$  in  $A_{12}$ ,  $A_2 A_3$  in  $A_{23}$  mit  $x$  zum Schnitt und setzen  $PA_{12} = x_{12}$ ,  $PA_{23} = x_{23}$ . Wir erhalten

$$x_{12} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 y_2 (\operatorname{tg} \varrho_1 - \operatorname{tg} \varrho_2)}{y_2 - y_1}.$$

Setzen wir also in die Gleichung (5) den aus der letzten Gleichung hervorgehenden Wert für  $\frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2}$  und den analogen für  $\frac{y_3 - y_2}{y_3 y_2}$  ein, so erhalten wir

$$r_1 = \frac{x_{12} x_{23}}{x_{12} - x_{23}} (\operatorname{tg} \varrho_1 - \operatorname{tg} \varrho_3).$$

Da wir *a. a. O.*<sup>1)</sup> für  $PK = r$  den Wert

$$2r = \frac{x_{12} x_{23}}{x_{23} - x_{12}} (\operatorname{tg} \varrho_1 - \operatorname{tg} \varrho_3)$$

erhalten haben, so folgt  $r_1 = -2r$ , wie behauptet wurde.

Führen wir durch  $A_{12}$  die Parallele zu  $PA_1$ , durch  $A_{23}$  die Parallele zu  $PA_3$ , sei  $G$  der Schnitt beider und  $L$  sei der Fußpunkt der Senkrechten von  $G$  auf  $n$ ; alsdann ist

$$x_{23} - x_{12} = A_{12} A_{23} = PL (\operatorname{tg} \varrho_1 - \operatorname{tg} \varrho_3);$$

somit

$$2r \cdot PL = PA_{12} \cdot PA_{23}.$$

Schreiben wir also dem Dreiecke  $A_{12} A_{23} L$  einen Kreis um, so schneidet dieser  $n$  im Punkte  $H$ , für den  $PH = 2r$  ist.

<sup>1)</sup> Fußnote auf S. 1.

# Kegelschnitte und Kreise, welche einen gegebenen Kegelschnitt oskulieren.

Von **J. Sobotka.**

(Mit 7 Figuren im Text.)

(Vorgelegt den 14. März 1919.)

1. Es seien in der Ebene zwei projektive Strahlenbüschel  $(P)$ ,  $(S)$  mit den Mittelpunkten  $P$ ,  $S$ , eine durch  $P$  gehende Gerade  $p$ , eine andere Gerade  $q$  und irgend ein Punkt  $R$  gegeben. Wir wollen einen Kegelschnitt  $k$  betrachten, welcher durch den Büschel  $(P)$  und einen zu ihm projektiven Strahlenbüschel  $(Q)$  mit dem Mittelpunkte  $Q$  erzeugt wird, wobei wir die Projektivität zwischen  $(P)$  und  $(Q)$  wie folgt herstellen. Wir schneiden  $p$  und  $q$  mit irgend einer Geraden, welche durch  $R$  geht, in den Punkten  $I$ ,  $I'$ ; dem Strahle  $S I'$  von  $(S)$  entspricht in  $(P)$  der Strahl  $p_1$ , dem wir in  $(Q)$  den Strahl  $Q I$  zuordnen. Bei dieser Konstruktion ist die Tangente  $t$  in  $P$  an  $k$  und der weitere Schnittpunkt  $U$  von  $k$  mit  $p$  von der Wahl des Punktes  $Q$  unabhängig. Wählen wir also statt  $Q$  einen anderen Punkt  $Q_1$  in der Ebene, so gelangen wir auf Grund unserer Konstruktion zu einem neuen Kegelschnitt  $k_1$ , welcher  $k$  in  $P$  berührt und in  $U$  schneidet; der noch übrige Schnittpunkt  $V$  beider liegt auf der Geraden  $Q Q_1$ .

Ist  $p_\sigma$  der in  $(S)$  gelegene, der Geraden  $p$  von  $(P)$  entsprechende Strahl und wählt man  $R$  auf der Geraden, welche die Punkte  $P$ ,  $(p_\sigma q)$  verbindet, so fällt  $t$  mit  $p$  und  $U$  mit  $P$  zusammen; die Kegelschnitte  $k$ ,  $k_1$  oskulieren einander in  $P$ . Liegen insbesondere die Punkte  $Q$ ,  $Q_1$  auf einer durch  $P$  gehenden Geraden, dann fällt auch noch  $V$  nach  $P$  und die Kegelschnitte  $k$ ,  $k_1$  berühren einander in  $P$  in der dritten Ordnung.

2. Wählen wir (Fig. 1) insbesondere  $(S)$  mit  $(P)$  konzentrisch so, daß die in diesen Büscheln einander entsprechenden Strahlen senkrecht auf einander stehen und nehmen wir  $R$  unendlich weit in der zu  $p$  senkrechten Richtung, so gelangen wir bei verschiedenen Wahlen von  $Q$  zu Kegelschnitten  $k \dots$ , die  $p$  berühren und einander in  $P$  oskulieren; ist dabei  $A$  irgend ein Punkt von  $k$ , trifft weiter die Senkrechte in  $P$  zu  $PA$  die Gerade  $q$  in  $A^*$ , und ist  $A_0$  der Schnitt von  $QA$  mit  $p$ , so ist  $A_0 A^* \perp p$ .

Gehen wir umgekehrt von irgend einem Kegelschnitte  $k$  aus, so bekommen wir den folgenden Zusammenhang. Wir wählen auf  $k$  einen festen Punkt  $Q$ , verbinden ihn mit irgend einem Punkt  $A$  von  $k$  durch eine Gerade, welche wir mit der Tangente  $\phi$  in  $A_0$  zum Schnitt bringen. In  $A_0$  errichten wir die Senkrechte zu  $\phi$ , in  $P$  die Senkrechte zu  $PA$ ; beide mögen sich in  $A^*$  schneiden. Beschreibt  $A$  den Kegelschnitt  $k$ , so beschreibt  $A^*$  eine Gerade  $q$ . Es sei  $K_1$  der Schnittpunkt von  $q$  mit der Normale  $n$  von  $k$  in  $P$ . Ist  $N$  der von  $P$  verschiedene Schnittpunkt der Geraden  $n$  mit  $k$ , so treffen sich darnach die Geraden  $QN$ ,  $\phi$  und  $q$  in einem Punkte  $L$ .

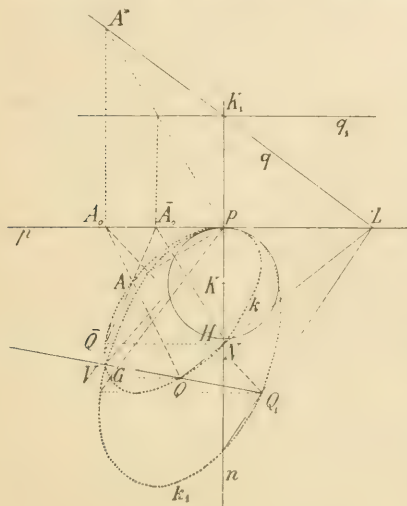


Fig. 1.

Schneidet die Parallele durch  $Q$  zu  $\phi$  den Kegelschnitt  $k$  noch im Punkte  $G$ , so folgt aus unserer Konstruktion, daß  $q$  senkrecht auf  $PG$  ist.

Beziehen wir nun den Strahlenbüschel  $(P)$  auf einen zweiten Strahlenbüschel  $(Q_1)$ , dessen Mittelpunkt  $Q_1$  irgend ein Punkt der Ebene ist, in früherer Art projektiv, also zu  $(Q)$  perspektiv inbezug auf  $\phi$ , so erzeugen  $(P)$  und  $(Q_1)$  einen Kegelschnitt  $k_1$ , welcher  $k$  in  $P$  oskuliert. Ihren von  $P$  verschiedenen Schnittpunkt  $V$  erhalten wir, indem wir im Schnitt  $V_0$  von  $QQ_1$  mit  $\phi$  die Parallele zu  $n$  ziehen, dieselbe mit  $q$  schneiden und zu der Verbindungsgeraden des

Schnittpunktes und des Punktes  $P$  in  $P$  die Senkrechte errichten. Diese trifft  $QQ_1$  in  $V$ .

Verlegen wir den Punkt  $Q$  in irgend einen andern Punkt  $Q^*$  auf  $k$ ; dann führt die Projektivität  $(P) \propto (S) \propto (Q^*)$  zu einer anderen Geraden  $q$  und diese beschreibt einen Strahlenbüschel  $(q)$  um  $K_1$ , während  $Q$  den Kegelschnitt  $k$  durchläuft. Denn zunächst sieht man, daß dabei der Punkt  $L$  auf  $\phi$  eine zur Reihe der Punkte  $Q$  auf  $k$  projektive Punktreihe beschreibt. Der Punkt  $G$  beschreibt gleichfalls eine zu der Reihe der Punkte  $Q$  projektive Punktreihe auf  $k$ ; somit ist die Reihe der Punkte  $L$  projektiv zu dem Büschel der Strahlen  $PG$ , also auch projektiv zur Reihe der unendlich fernen Punkte  $Q_\infty$  auf den Geraden  $q$ . Verlegen wir  $Q^*$  in den zweiten Schnittpunkt  $\bar{Q}$  der durch  $N$  zu  $\phi$  gezogenen Parallelen mit  $k$ , so wird  $L$  unendlich fern auf  $\phi$  und  $q$  ist parallel zu  $\phi$ ; folglich sind die Punktreihen  $L, \dots$  und  $Q_\infty, \dots$  perspektiv. Fällt  $Q$  mit  $P$  zusammen, so fällt  $q$  mit  $n$  zusammen; es schneiden sich also die Geraden  $q$  auf  $n$ , gehen somit durch  $K_1$  und bilden einen zur Reihe der Punkte  $Q$  auf  $k$  projektiven Strahlenbüschel.

Die dem Punkte  $\bar{Q}$  zugehörige Gerade  $q$  ist also die Parallele  $q_1$  zu  $\phi$  durch  $K_1$ . Schneiden die Geraden  $\bar{Q}A, \dots$  des Büschels  $(\bar{Q})$  die Tangente  $\phi$



in den Punkten  $\bar{A}_0, \dots$  so treffen vermöge unserer Konstruktion die Senkrechten von diesen auf die Geraden  $PA, \dots$  des Büschels ( $P$ ) die Normale  $n$  in einem festen Punkte  $H$ , für welchen  $PH = K_1P$  ist. Verlegen wir nun den Punkt  $Q$  nach  $Q_1 \equiv H$ , so fällt der Kegelschnitt  $k_1$ , welcher durch die Büschel ( $P$ ) und ( $Q_1$ ) erzeugt wird, mit dem über  $PH$  als Durchmesser beschriebenen Kreis  $k$  zusammen. Da sich  $k$  und  $k_1$  in  $P$  oskulieren, so ist  $k$  der Oskulationskreis von  $k_1$  im Punkte  $P$ .

Dies gibt zunächst eine bekannte Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $K$  eines durch vier Punkte  $P, A, B, C$  und die Tangente  $\phi$  in  $P$  gegebenen Kegelschnittes  $k$  für den Punkt  $P$ .

Wir nehmen einen der Punkte  $A, B, C$ , etwa  $C$  als  $Q$  an, bringen also  $CA$  und  $CB$  in  $A_0$  und  $B_0$  mit  $\phi$  zum Schnitte, errichten in  $P$  die Senkrechten auf  $PA$  und  $PB$ , welche von den Senkrechten in  $A_0$  und  $B_0$  auf  $\phi$  in  $A'$ , beziehungsweise  $B'$  getroffen werden mögen; alsdann schneidet  $A'B'$  die Normale  $n$  in  $P$  an den Kegelschnitt in  $K_1$ , und es ist  $PK = \frac{1}{2} K_1P$ .

Verbindet man nun irgend einen Punkt  $Q_1 \equiv C_1$  der Ebene mit  $A_0$  und  $B_0$  und bringt die Verbindungsgeraden mit  $PA$  und  $PB$  in  $A_1$  und  $B_1$  zum Schnitt, so hat unserer Erzeugungsweise zufolge der Kegelschnitt  $k_1$ , der durch die Punkte  $P, A_1, B_1, C_1$  geht und  $\phi$  berührt, mit  $k$  denselben Krümmungskreis  $\bar{k}$  in  $P$ .

3. Zu der soeben abgeleiteten Beziehung können wir auch wie folgt gelangen.

Es seien  $k, k_1$  zwei Kegelschnitte, die einander in  $P$  in zweiter Ordnung berühren, so daß sie nur noch einen von  $P$  verschiedenen Punkt  $V$  gemeinschaftlich haben. Legen wir durch  $P$  und  $V$  irgend einen dritten Kegelschnitt  $s$ , so wird derselbe  $k$  und  $k_1$  noch in je zwei Punkten schneiden, deren Verbindungsgeraden mit der Geraden  $\phi$ , welche noch die übrigen zwei den Kegelschnitten  $k$  und  $k_1$  gemeinschaftlichen Punkte verbindet, nach einem bekannten Satze von Ch. Sturm in einem Punkte zusammenlaufen.

Nehmen wir als  $s$  zwei Gerade an, eine —  $PA$  — durch  $P$ , die andere —  $VC$  — durch  $V$ . Schneidet die erste  $k$  in  $A, k_1$  in  $A_1$ , die zweite  $k$  in  $C, k_1$  in  $C_1$ , so schneiden sich danach  $AC$  und  $A_1C_1$  in einem Punkte  $A_0$  auf  $\phi$ .

Wenn wir umgekehrt die in  $P$  sich oskulierenden Kegelschnitte  $k, k_1$  mit einer Geraden durch  $P$  in  $A$  und  $A_1$  schneiden, die Schnittpunkte mit irgend einem Punkte  $A_0$  von  $\phi$  verbinden, so schneidet die Gerade  $A_0A$  den Kegelschnitt  $k$  noch in einem Punkte  $C$ , die Gerade  $A_0A_1$  den Kegelschnitt  $k_1$  noch in einem Punkte  $C_1$ , und die Gerade  $CC_1$  geht durch den von  $P$  verschiedenen Schnittpunkt  $V$  der Kegelschnitte  $k, k_1$ .

Aus dem Satze von Ch. Sturm folgt, wenn man auf der Gerade, welche zwei gemeinschaftliche Punkte zweier Kegelschnitte  $k, k_1$  verbindet, einen Punkt annimmt, durch ihn zwei Strahlen legt, von denen der eine  $k$  in  $M, N$ , der andere  $k_1$  in  $M_1, N_1$  schneidet, daß der Kegelschnitt  $s$ , welcher

durch  $M, N, M', N'$  und durch einen dritten gemeinschaftlichen Punkt von  $k$  und  $k_1$  geht, auch noch den vierten gemeinschaftlichen Punkt dieser Kegelschnitte enthält.

Haben wir zwei Dreiecke  $ABC, A_1B_1C_1$  in der Lage, daß die Geraden  $AA_1, BB_1$  sich in einem Punkte  $P$  der Geraden  $\phi$  schneiden, welche die Punkte  $A_0 = AC \cdot A_1C_1, B_0 = BC \cdot B_1C_1$  verbindet, so läßt sich ein Kegelschnitt  $k$  durch  $A, B, C, P$  legen, welcher  $\phi$  berührt und ein Kegelschnitt  $k_1$ , welcher  $k$  in  $P$  oskuliert und durch die Punkte  $A_1, C_1$  geht. Wenn wir den soeben mit  $s$  bezeichneten Kegelschnitt durch das Geradenpaar  $PA, CC_1$  ersetzen, so folgt daraus, daß  $s$  noch durch den gemeinschaftlichen, den einzigen von  $P$  verschiedenen Punkt  $V$  der Kegelschnitte  $k, k_1$  gehen muß, daß  $V$  auf  $CC_1$  liegt. Schneidet  $C_1B_1$  den Kegelschnitt  $k_1$  noch im Punkte  $B_2$  und legt man jetzt den Kegelschnitt  $s$  durch die Punkte  $C, C_1, B, B_2$ , so muß er auch durch  $P$  gehen; da die durch  $V$  gehende Gerade  $CC_1$  einen Teil von  $s$  bildet, so ist der andere Teil gleichfalls eine Gerade, welche durch  $B, B_2$  und  $P$  geht, woraus folgt, daß  $B_2$  mit  $B_1$  zusammenfällt. Es geht somit  $k_1$  auch durch den Punkt  $B_1$ . Daraus folgt der Satz:

„Die Kegelschnitte  $k, k_1$ , welche den Dreiecken  $ABC, A_1B_1C_1$  umgeschrieben sind und die Gerade  $\phi$  in  $P$  berühren, haben in  $P$  eine Berührung zweiter Ordnung miteinander.“

Ist also ein Kegelschnitt  $k$  dem Dreieck  $ABC$  umgeschrieben und berührt er die Gerade  $\phi$  im Punkte  $P$ , wählt man ferner auf  $PA$  den Punkt  $A_1$ , auf  $PB$  den Punkt  $B_1$ , ist  $A_0 = AC \cdot \phi, B_0 = BC \cdot \phi$ , und schneidet man die Geraden  $A_0A_1, B_0B_1$  mit einander in  $C_1$ , so hat der Kegelschnitt  $k_1$ , welcher dem Dreieck  $A_1B_1C_1$  umgeschrieben ist und  $\phi$  in  $P$  berührt, die Eigenschaft, daß er  $k$  in  $P$  oskuliert.

4. Trachten wir nun  $C_1$  so zu ermitteln, daß der Kegelschnitt  $k_1$  zum Oskulationskreis  $\bar{k}$  von  $k$  im Punkte  $P$  wird. Liegen (Fig. 2) die Punkte  $A_1, B_1, C_1$  auf  $\bar{k}$ , so ist  $C_1$  zu  $A_1$  konjugiert in bezug auf den Kreis  $a$ , welcher  $A_0$  zum Mittelpunkt hat und durch  $P$  geht. Desgleichen sind  $B_1$  und  $C_1$

konjugiert in bezug auf den Kreis  $b$  vom Mittelpunkt  $B_0$ , welcher durch  $P$  geht.

Die zu den Punkten der Geraden  $PA$  in bezug auf  $a$  konjugierten und auf Strahlen durch  $A_0$  gelegenen Punkte beschreiben den Kreis  $c_a$ , welcher zu der Geraden  $PA$  invers in bezug auf  $a$  ist; ebenso beschreiben auf Strahlen durch  $B_0$  die Punkte, welche zu den Punkten von  $PB$  in-

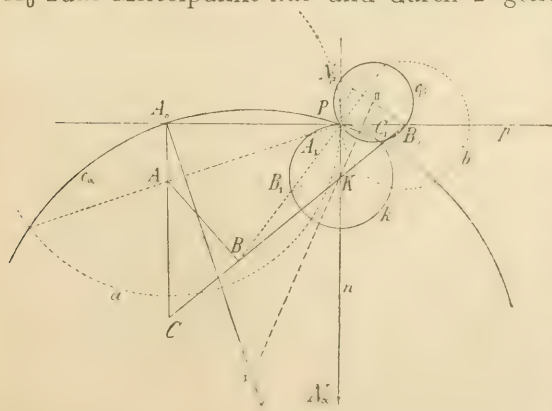


Fig. 2.

bezug auf  $b$  konjugiert sind den Kreis  $c_\beta$ , welcher zur Geraden  $P B$  invers in bezug auf  $b$  ist. Es ist deshalb  $C_1$  der von  $P$  verschiedene Schnittpunkt der Kreise  $c_\alpha, c_\beta$ .

Wird die Normale  $n$  von der Senkrechten, die man von  $A_0$  auf  $P A$  fällt, in  $N_\alpha$  und von der Senkrechten, die man von  $B_0$  auf  $P B$  fällt, in  $N_\beta$  getroffen, so sind  $A_0 N_\alpha$  und  $B_0 N_\beta$  Durchmesser der Kreise  $c_\alpha, c_\beta$ ; die Verbindungsgerade der Punkte  $I, II$ , welche  $\overline{A_0 N_\alpha}, \overline{B_0 N_\beta}$  halbieren, ist ihre Zentrale. Da der Kreis  $\bar{k}$  durch die Schnittpunkte  $P$  und  $C_1$  von  $c_\alpha$  und  $c_\beta$  geht, so ist  $I II$  auch für ihn ein Durchmesser. Folglich schneidet  $n$  die Gerade  $I II$  im Mittelpunkt  $K$  von  $\bar{k}$ .

5. Unsere Betrachtungen lassen eine duale Übertragung zu, welche zu den folgenden Ergebnissen führt.

Es seien (Fig. 3)  $\phi$  und  $c$  zwei feste Tangenten eines Kegelschnittes  $k$ ,  $P$  der Berührungspunkt von  $\phi$ ; führen wir durch den Schnittpunkt irgend einer Tangente  $a$  von  $k$  mit  $\phi$  die Senkrechte zu  $\phi$  und durch  $P$  die Senkrechte zur Geraden  $a_0$ , welche  $P$  mit dem Punkte  $a \cdot c$  verbindet, so beschreibt der Schnittpunkt  $A'$  beider Senkrechten eine Gerade  $q$ , wenn  $a$  sich längs des Kegelschnittes  $k$  bewegt. Jeder Tangente  $c$  von  $k$  ist eine solche Gerade  $q$  zugeordnet; beschreibt  $c$  den Tangentenbüschel von  $k$ , so beschreibt  $q$  einen zu ihm projektiven Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt  $K_1$  auf der Normale von  $k$  in  $P$  liegt.

Wählen wir irgend eine Gerade  $c_1$  in der Ebene, so hüllt die Gerade  $a_1$ , welche die Punkte  $\phi \cdot a, c_1 \cdot a_0$  verbindet, einen Kegelschnitt  $k_1$  ein, wenn  $a$  längs des Kegelschnittes  $k$  sich bewegt, und es wird  $k$  von  $k_1$  im Punkte  $P$  oskuliert. Die zweiten Tangenten von  $c \cdot n$  an  $k$  und von  $c_1 \cdot n$  an  $k_1$  schneiden sich im Punkte  $q \cdot \phi$ .

Schneiden wir die zu  $\phi$  parallele Tangente an  $k$  mit  $n$ , wählen die vom Schnittpunkt an  $k$  gehende zweite Tangente  $\bar{c}$  als  $c$ , so ist die zugehörige Gerade  $q$  parallel zu  $\phi$ ; bezeichnen wir sie in dieser Lage mit  $q_1$ .

Der Krümmungskreis von  $k$  in  $P$  schneide  $n$  noch im Punkte  $H$ . Die Tangente  $\bar{c}_1$  an ihn in diesem Punkte möge nun als die Gerade  $c_1$  angenommen werden. Ihr entspricht, wenn wir die Gerade  $c$  des allgemeinen Falles durch  $\bar{c}$  ersetzen, ein Kegelschnitt  $k_1$ , welcher  $k$  in  $P$  oskuliert und  $\bar{c}_1$  in  $H$  berührt, also mit dem Krümmungskreis  $\bar{k}$  zusammenfällt. Schneidet irgend eine Tangente  $a$  an  $k$   $\phi$  in  $A_x$ ,  $\bar{c}$  in  $A_y$ , und schneidet die Gerade  $a_0$ , welche  $P$  mit  $a \cdot \bar{c}$  verbindet  $\bar{c}_1$  in  $A_z$ , so hüllt also die Gerade  $A_x A_y$  den Kreis  $\bar{k}$  ein, wenn sich  $a$  längs  $k$  bewegt. Führen wir an  $\bar{k}$  eine zu  $n$  parallele Tangente, welche  $\bar{c}_1$  in  $C_1$ ,  $\phi$  in  $A_x'$  und  $q_1$  in  $A_x$  schneiden möge. Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $A_x' P C_1$  folgt, daß  $A_x' C_1 = 4 A_x A_x'$ ; es ist also der Krümmungshalbmesser von  $k$  für den Punkt  $P$  gleich  $2 \cdot \overline{K_1 P}$ .

Liegt ein Dreieck  $A B C$ , irgend eine Gerade  $\phi$  und ein auf ihr gelegener Punkt  $P$  vor, so ist dadurch ein Kegelschnitt  $k$  bestimmt, welcher dem Dreieck umgeschrieben ist und  $\phi$  in  $P$  berührt und ein Kegelschnitt  $k^*$ , welcher dem Dreieck eingeschrieben ist und gleichfalls  $\phi$  in  $P$  berührt.



Wählen wir im ersten Falle etwa  $C$  als den früher mit  $Q$  bezeichneten Punkt, so werden wir zu der Geraden  $q$  geführt, welche die Normale  $n$  von  $k$  für den Punkt  $P$  in  $K_1$  trifft. Betrachten wir im zweiten Fall dann

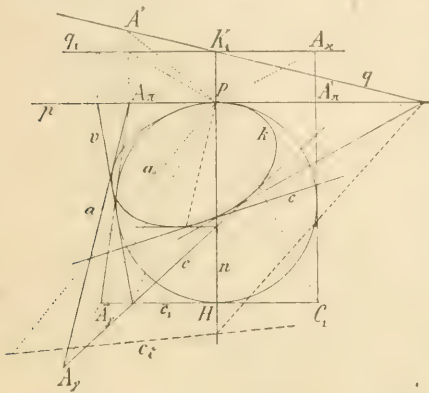


Fig. 3.

die Gerade  $AB$  als die zuvor mit  $c$  bezeichnete Tangente von  $k^*$ , so werden wir zu derselben Geraden  $q$  geführt. Es ist also der Krümmungshalbmesser von  $k$  in  $P$  gleich  $\frac{1}{2} K_1 P$  und der von  $k^*$  in demselben Punkte gleich  $2 K_1 P$ , was zu einem bekannten Satze führt, daß die Krümmung des dem Dreiecke  $ABC$  umgeschriebenen Kegelschnittes viermal so groß ist als die des ihm eingeschriebenen.

6. Dualisieren wir den Satz von Ch. Sturm, so haben wir die folgende

Beziehung. Zwei Kegelschnitte  $k_1, k_2$  in einer Ebene haben vier Tangenten gemeinsam; legen wir einen Kegelschnitt  $w$ , welcher zwei von ihnen berührt, so liegen der Schnittpunkt der übrigen zwei, der Schnittpunkt der weiteren zwei gemeinschaftlichen Tangenten zwischen  $k_1$  und  $w$ , sowie der zwischen  $k_2$  und  $w$  in einer Geraden.

Oskulieren die Kegelschnitte  $k_1, k_2$  einander im Punkte  $P$  (Fig. 3) mit der gemeinschaftlichen Tangente  $p$  in ihm, so sind in  $p$  drei von den ihnen gemeinschaftlichen Tangenten in  $p$  vereinigt; sie haben außerdem nur noch eine gemeinschaftliche Tangente  $v$ . Ziehen wir von irgend einem Punkte auf  $p$  die noch möglichen Tangenten  $a_1, a_2$  an  $k_1$  und  $k_2$ , schneiden dieselben mit einer durch  $P$  gehenden Geraden  $a_0$  und legen von den Schnittpunkten weitere Tangenten  $c_1, c_2$  an  $k_1$  und  $k_2$ , so liegt der Schnittpunkt derselben  $c_1 \cdot c_2$  auf  $v$ .

Dieser Zusammenhang ergibt sich, wenn wir statt des zuvor genannten Kegelschnittes  $w$  ein Punktepaar annehmen, von dem ein Element auf  $p$ , das andere auf  $v$  liegt.

7. Zum Zweck der weiteren Entwicklung schalten wir hier eine kleine Betrachtung über Kreise ein.

Denken wir uns (Fig. 4) einen Büschel von Kreisen  $k_\alpha$ , welche einander in einem Punkte  $P$  berühren. Ziehen wir durch  $P$  irgend eine Gerade  $a_0$ , wählen auf der ihnen gemeinschaftlichen Tangente  $p$  in  $P$  einen Punkt  $A_\pi$ , von dem wir an die Kreise  $k_\alpha, \dots$  die von  $p$  verschiedenen Tangenten legen, welche  $a_0$  in einer Reihe  $A_\alpha, \dots$  von Punkten schneiden; alsdann hüllt der Büschel von Tangenten  $c_\alpha, \dots$ , die man von den Punkten dieser Reihe an die zugehörigen Kreise noch legen kann, einen Kreis ein.

Fassen wir nämlich eine Laguerre'sche Inversion von Kreisen in der Ebene in bezug auf denjenigen Kreis  $k_{\alpha'}$  des Büschels  $k_\alpha, \dots$ , welcher seinen Mittelpunkt  $S$  auf der von  $A_\pi$  auf  $a_0$  gefällten Senkrechten hat als





gesehen, daß  $c_1$  auch Tangente an  $u_1$  sein wird. Legen wir durch  $B_\pi$  die von  $\phi$  verschiedenen Tangenten an die Kreise des Büschels  $k_\alpha, \dots$  und dann von ihren Schnittpunkten mit  $b_0$  an sie die weiteren Tangenten  $c_\beta, \dots$ , so werden diese einen zweiten Kreis  $u_2$  umhüllen, welcher  $\phi$  berührt und dessen Mittelpunkt  $U_2$  auf der von  $B_\pi$  auf  $b_0$  gefällten Senkrechten  $B_\pi S'$  so liegt, daß  $S' U_2 = B_\pi S'$  ist, wobei  $S'$  den Schnitt von  $B_\pi S'$  mit  $PS$  bezeichnet. Die Gerade  $c_1$  wird auch eine Tangente von  $u_2$  sein; sie wird also eine gemeinschaftliche Tangente der Kreise  $u_1, u_2$  sein.

Die Orientierung der Kreise im Büschel  $k_\alpha, \dots$  ist gegeben, wenn wir  $\phi$  einen Sinn beilegen, wodurch alsdann auch die Orientierung von  $u_1$  und  $u_2$  bestimmt ist, und zwar sind sie gleich orientiert, wenn sie auf derselben Seite von  $\phi$ , entgegengesetzt, wenn sie zu verschiedenen Seiten von  $\phi$  liegen, woraus folgt, daß ihr von  $\phi$  verschiedener gemeinsamer Speer, der auf der Geraden  $c_1$  liegt, sich mit  $\phi$  auf der Zentrale der Kreise  $u_1, u_2$  schneidet. Es ist somit diese Zentrale auch ein Durchmesser von  $\bar{k}$ .

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so erhalten wir folgende Konstruktion von  $\bar{k}$ .

Die Senkrechte von  $A_\pi$  auf  $a_0$  schneide die Normale  $n$  von  $k$  für den Punkt  $P$  in  $S$  und die Senkrechte von  $B_\pi$  auf  $b_0$  schneide sie in  $S'$ . Auf der ersten Senkrechten tragen wir  $S U'_1 = A_\pi S$ , auf der zweiten  $S' U_2 = B_\pi S'$  auf; alsdann ist  $U_1 U_2$  ein Durchmesser von  $k$  und schneidet somit auf  $n$  den Krümmungsmittelpunkt von  $\bar{k}$  für den Punkt  $P$  ein.

9. Es sei nochmals (Fig. 6) der Kegelschnitt  $k$  gegeben, welcher  $\phi$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschrieben ist. Wir konstruieren zu ihm einen zentrisch kollinearen  $k'$  so, daß  $\phi$  die Kollineationsachse und irgend ein Punkt  $Z$  auf  $\phi$  das Kollineationszentrum ist; alsdann oskulieren einander  $k$  und  $k'$  in  $P$ . Dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  entspricht ein zu ihm perspektives  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ . Drehen wir die Gerade  $\bar{A}_1 \bar{A}_2$  um deren Schnittpunkt  $E$  mit  $\phi$  und lassen dabei die Punkte  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  die Geraden  $Z \bar{A}_1, Z \bar{A}_2$  beschreiben, so gelangt das zu  $A_1 A_2 A_3$  perspektive Dreieck  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$  in neue Lagen, und man gelangt zu neuen Kegelschnitten, welche ihm umschrieben sind und  $\phi$  in  $P$  berühren. Alle diese Kegelschnitte oskulieren einander in  $P$ . Die Punkte  $A_1, \bar{A}_1, \dots$  und  $A_2, \bar{A}_2, \dots$  beschreiben zwei perspektive Punktreihen, die Geraden, welche sie mit  $P$  verbinden, zwei projektive Strahlenbüschel  $P(A_1 \bar{A}_1 \dots), P(A_2 \bar{A}_2 \dots)$ . Wählen wir auf  $\phi$  zwei Punkte  $B_1, B_2$  und ziehen durch  $B_1$  die Parallelen zu den Strahlen des ersten, durch  $B_2$  die Parallelen zu den Strahlen des zweiten Büschels. Dadurch erhalten wir zwei perspektive Strahlenbüschel, deren Perspektivachse  $u$  parallel zu  $\phi$  ist. Denn der Geraden  $A_1 D \parallel \phi$  entspricht in der Kollineation  $\bar{A}_1 \bar{D} \parallel \phi$  und dem Schnittpunkt  $D = A_2 P \cdot A_1 D$  entspricht der Schnittpunkt  $\bar{D} = \bar{A}_2 P \cdot \bar{A}_1 \bar{D}$  so, daß die Gerade  $D \bar{D}$  durch  $Z$  geht. Ziehen wir durch  $B_1$  die Parallele zu  $Z A_1$ , durch  $B_2$  die Parallele zu  $Z D$ , so sehen wir, daß sie einander in den Büscheln um  $B_1$  und  $B_2$  entsprechen, und daß ihr Schnittpunkt der Geraden  $u$  angehört und mit dem Schnitt-





gezogenen Parallelen  $u$ ,  $X_3$  irgend ein Punkt der Ebene, und schneidet man schließlich die Geraden  $X_3 C_1$ ,  $X_3 C_2$  beziehungsweise mit den durch  $P$  zu  $Q C_1$ ,  $Q C_2$  gezogenen Parallelen in  $X_1$  und  $X_2$ , so haben die Kegelschnitte welche  $P$  in  $\phi$  berühren, von denen der eine dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$ , der andere dem Dreieck  $X_1 X_2 X_3$  entweder umgeschrieben oder eingeschrieben ist oder von denen der eine  $A_1 A_2 A_3$ , der andere  $X_1 X_2 X_3$  zum Polardreieck hat, die Eigenschaft, daß sie einander in  $P$  oskulieren.

10. Zum Schluß wollen wir unsere Beziehungen auf die Lösung einiger Aufgaben anwenden, deren Zahl leicht vermehrt werden könnte.

„Ein Kegelschnitt  $k$  (Fig. 7) ist durch vier Tangenten und den Berührungspunkt  $P$  einer von ihnen  $\phi$  gegeben; man soll den Kegelschnitt  $k'$  konstruieren, welcher zwei gegebene Geraden  $x$ ,  $y$  berührt und  $k$  in  $P$  oskuliert.“

Es wird sich da darum handeln, irgend eine von den gegebenen Tangenten verschiedene Tangente  $z$  von  $k'$  zu ermitteln. Dies könnte durch die zentrische Kollineation zwischen  $k$  und  $k'$ , welche  $\phi$  zur Achse hat und deren Zentrum auf  $\phi$  liegt, geschehen.

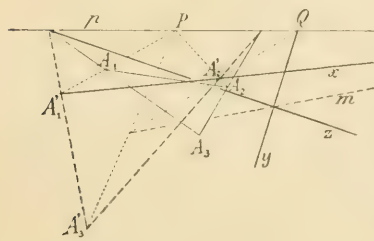


Fig. 7.

Einfacher jedoch ist die folgende Konstruktion. Die von  $\phi$  verschiedenen Tangenten, welche zur Bestimmung des Kegelschnittes  $k$  gegeben sind, mögen das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  bilden. Werden die Geraden  $P A_1$ ,  $P A_2$  von  $x$  in  $A_1'$ ,  $A_2'$  geschnitten und treffen sich die Geraden, welche  $A_1'$  mit  $A_1 A_3 \cdot \phi$  und  $A_2'$  mit  $A_2 A_3 \cdot \phi$

verbinden in  $A_3'$ , so oskuliert der Kegelschnitt  $k_0$ , welcher  $\phi$  in  $P$  berührt und dem Dreieck  $A_1' A_2' A_3'$  eingeschrieben ist,  $k$  in  $P$ . Aus dem Sechseit  $[\phi, \phi', x, A_2' A_3', A_3' A_1', q]$ , welches  $k_0$  umgeschrieben ist, in welchem  $q$  durch  $Q = y \cdot \phi$  geht und  $\phi'$  zu  $\phi$  unendlich benachbart ist, folgt, daß wenn man die Diagonalen  $P A_3'$ ,  $Q A_2'$  zum Schnitt bringt und den Schnittpunkt mit  $x \cdot \phi$  verbindet, diese Verbindungsgerade  $m$  die Tangente  $A_1' A_3'$  in einem Punkte schneidet, welcher  $q$  angehört. Da  $k_0$ ,  $k'$  gleichfalls zentrisch kollinear liegen für  $\phi$  als Achse und  $\phi \cdot x$  als Zentrum der Kollineation, so schneidet  $m$  die Gerade  $y$  auf derjenigen weiteren Tangente  $z$  von  $k'$ , welche  $A_1' A_3'$  auf  $\phi$  schneidet.

Oder man ermittelt etwa die Schnittpunkte  $X$ ,  $Y$  der durch  $x \cdot \phi$  und  $y \cdot \phi$  an  $k$  noch möglichen Tangenten  $x_1$ ,  $y_1$  mit  $A_1 A_2$  aus den Sechseiten  $[\phi, \phi', A_1 A_3, A_2 A_3, A_1 A_2, x_1]$ ,  $[\phi, \phi', A_1 A_3, A_2 A_3, A_1 A_2, y_1]$ , welche  $k$  umgeschrieben sind, wobei  $\phi'$  zu  $\phi$  benachbart ist; alsdann schneidet man  $P X$  mit  $x$  in  $X_1$  und  $P Y$  mit  $y$  in  $Y_1$ . Nach früherem ist  $z = X_1 Y_1$  eine weitere Tangente von  $k'$ .

In beiden Fällen erfordert die Konstruktion das Ziehen von 8 Geraden.



„Ein Kegelschnitt  $k$  ist:

a) durch drei Punkte  $A, B, P$  und den zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt  $K$ ;

b) durch drei Tangenten  $a, b, \phi$  und den zu  $\phi$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt  $K'$  gegeben;

man soll seine Achsen konstruieren.“

Man ermittelt in a) auf der Normale  $PK$  den Punkt  $K_1$  so, daß  $PK_1 = 2KP$  wird; schneidet  $AB$  die Tangente  $\phi$  in  $P$  an  $k$  im Punkte  $C$ , so bringe man die Senkrechte in  $C$  zu  $\phi$  mit der Senkrechten in  $P$  zu  $PA$  zum Schnitte und verbinde den Schnittpunkt mit  $K_1$ ; die Verbindungsgerade ist die zuvor mit  $q$  bezeichnete Gerade. Die Senkrechte zu  $q$  durch  $P$  trifft die Parallele durch  $B$  zu  $\phi$  im Punkte  $D$ , welcher auf  $k$  liegt. Die Gerade  $d$ , welche  $P$  mit der Mitte von  $BD$  verbindet, ist der zu  $\phi$  konjugierte Durchmesser von  $k$ . Zieht man durch den Punkt  $AB.d$  die Parallele zu  $\phi$  und verbindet den Punkt, in welchem sie  $PA$  schneidet, mit  $D$ , so trifft die Verbindungsgerade den Durchmesser  $d$ , wie sich aus dem Satz von Pascal leicht ergibt, in seinem Endpunkt  $F$ . Dadurch ist auch der Mittelpunkt  $O$  von  $k$  gegeben. Wir schneiden noch die Senkrechte in  $O$  zu  $d$  mit  $PK$  in  $N$  und beschreiben den durch  $O$  gehenden Kreis dessen Mittelpunkt mit dem der Strecke  $NK$  zusammenfällt <sup>1)</sup>. Dieser Kreis schneidet  $PK$  in zwei Punkten, welche den Achsen von  $k$  angehören. Eine der Achsen bestimmt mit  $\phi$  und  $PK$  ein Dreieck, dessen umgeschriebener Kreis die andere Achse reell schneidet. Die Schnittpunkte sind Brennpunkte von  $k$ .

b) Die Senkrechte zu  $\phi$  in  $b$ .  $\phi$  schneidet die Senkrechte im Berührungspunkt  $P$  von  $\phi$  zur Geraden, welche  $P$  mit  $a.b$  verbindet in einem Punkte von  $q$ . Es verbindet also  $q$  diesen Punkt mit dem Punkte  $K_1$ , für welchen  $PK_1 = \frac{1}{2}K'P$  ist. Die Senkrechte durch  $P$  zu  $q$  trifft  $a$  in einem Punkte der zu  $\phi$  parallelen Tangente  $f$  von  $k$ . Die Gerade, welche  $a.\phi$  und  $b.f$  verbindet, schneidet die Gerade, welche  $b.\phi$  mit  $a.f$  verbindet in einem Punkte, welcher dem zu  $\phi$  konjugierten Durchmesser  $d$  von  $k$  angehört; dieser trifft  $f$  in seinem Endpunkt  $F$ . Der weitere Verlauf der Konstruktion stimmt mit dem der vorangehenden überein.

<sup>1)</sup> Cf. Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten in den Sitzungsber. der k. böhm. Ges. d. Wissensch. 1902.

# Zur Krümmung algebraischer Kurven.

Von J. Sobotka.

(Mit 1 Figur im Texte.)

Vorgelegt am 21. November 1918.

1. Wir stellen uns zuerst die Aufgabe:

*In einem Kurvenbüschel soll der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Elemente für irgend einen Grundpunkt  $O$  des Büschels abgeleitet werden.*

Wir legen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem in der Ebene des Büschels zu Grunde, dessen Anfangspunkt in dem Grundpunkte des Büschels angenommen wird. Die Gleichungen irgend zweier Elemente des Büschels lassen sich schreiben

$$\begin{aligned} f &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 0, \\ g &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0, \end{aligned}$$

in denen allgemein  $u_k$  und  $v_k$  die Glieder bezeichnen, welche in den Veränderlichen  $x, y$  von der Ordnung  $k$  sind.

Die Gleichung des Büschels ist dann

$$f + \lambda g = (u_1 + u_2) + \lambda (v_1 + v_2) + U + \lambda V = 0,$$

in der  $U$  und  $V$  die Glieder höherer Ordnungen in  $x$  und  $y$ , von der dritten angefangen, enthalten. Es wird also die Kurve vom Parameter  $\lambda$  im Büsche von dem Kegelschnitt

$$(u_1 + u_2) + \lambda (v_1 + v_2) = 0, \tag{1}$$

im Punkte  $O$  in zweiter Ordnung berührt, so daß der Krümmungsmittelpunkt der Kurve  $f + \lambda g = 0$  für den Punkt  $O$  mit dem dieses Kegelschnittes zusammenfällt. Unsere Aufgabe reduziert sich hiernach darauf, den Ort der zu  $O$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte der Elemente im Kegelschnittbüschel  $(u_1 + u_2) + \lambda (v_1 + v_2) = 0$  zu suchen. Dieser Büschel hat noch drei weitere Grundpunkte  $A_1, A_2, A_3$  mit den Koordinaten  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , wobei auch zwei der Punkte konjugiert imaginär sein können.

Greifen wir irgend einen Kegelschnitt ( $\lambda$ ) des Büschels heraus. Beziehen wir ihn auf seine Tangente und Normale in  $O$  als Achsen  $X$ ,  $Y$ , die wir so orientieren, daß der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes auf die positive Seite von  $Y$  fällt und bezeichnen mit  $(X_1 Y_1)$ ,  $(X_2 Y_2)$ ,  $(X_3 Y_3)$  die Koordinaten von  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  in diesem System, mit  $r$  den zu  $O$  gehörigen Krümmungshalbmesser des Kegelschnittes, so ist nach einer Formel, die a. a. O.<sup>1)</sup> abgeleitet wurde und zwar ohne Beschränkung auf die Realität der Punkte

$$4 r Y_1 Y_2 Y_3 \Delta = \begin{vmatrix} X_1^2, X_1 Y_1, Y_1^2 \\ X_2^2, X_2 Y_2, Y_2^2 \\ X_3^2, X_3 Y_3, Y_3^2 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

worin  $\Delta$  den Flächeninhalt des Dreieckes  $A_1 A_2 A_3$  bezeichnet.

Schließt die positive  $X$  Achse mit der positiven  $x$ -Achse des ursprünglichen Koordinatensystems den Winkel  $\alpha$  ein, so ist

$$X_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \quad Y_1 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha,$$

und die Koordinaten des zu  $O$  gehörigen Krümmungsmittelpunktes des Kegelschnittes sind  $\xi = -r \sin \alpha$ ,  $\eta = r \cos \alpha$ .

Bezeichnen wir mit  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{23}$ ,  $\Delta_{31}$  die Flächeninhalte der Dreiecke  $O A_1 A_2$ ,  $O A_2 A_3$ ,  $O A_3 A_1$ , so geht (2) durch Ausführung über in die Gleichung

$$4 r \Delta = Y_1 Y_2 Y_3 \left( \frac{X_1}{Y_1} - \frac{X_3}{Y_3} \right) \left( \frac{X_2}{Y_2} - \frac{X_3}{Y_3} \right) \left( \frac{X_1}{Y_1} - \frac{X_2}{Y_2} \right)$$

oder

$$r \Delta Y_1 Y_2 Y_3 = 2 \Delta_{13} \Delta_{23} \Delta_{12}.$$

Setzen wir für  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  und  $r$  die Transformationswerte ein, so kommt

$$(x_1 \xi + y_1 \eta) (x_2 \xi + y_2 \eta) (x_3 \xi + y_3 \eta) + 2 \frac{\Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31}}{\Delta} (\xi^2 + \eta^2) = 0 \quad (3)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes.

Wir sehen, daß der gesuchte Ort eine rationale Kurve 3. Ordnung  $c^3$  ist, welche in  $O$  ihren Doppelpunkt hat. Die Tangenten in demselben sind isotrop.

2. Die unendlich fernen Punkte der Kurve sind auf den Geraden

$$x_1 \xi + y_1 \eta = 0, \quad x_2 \xi + y_2 \eta = 0, \quad x_3 \xi + y_3 \eta = 0.$$

Die Gleichungen der Asymptoten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  erhält man hieraus in bekannter Weise; sie lauten

<sup>1)</sup> Cf. „Zur Ermittlung der Krümmung eines durch Punkte oder Tangenten gegebenen Kegelschnittes“ in den Sitzungsberichten der k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. in Prag 1904.

$$x_1 \xi + y_1 \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_{23}}{\Delta} d_1^2, \quad x_2 \xi + y_2 \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_{31}}{\Delta} d_2^2, \quad x_3 \xi + y_3 \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} d_3^2$$

wenn  $OA_1 = d_1$ ,  $OA_2 = d_2$ ,  $OA_3 = d_3$  gesetzt wird.

Aus diesen Gleichungen läßt sich eine einfache Konstruktion der Asymptoten ableiten. Ist  $\delta_1$  die Entfernung der Asymptote  $a_1$  von  $O$  und  $\xi_0$  ihr Abschnitt auf der Achse  $x$ , so ist  $\frac{x_1}{d_1} = \frac{\delta_1}{\xi_0}$ , und da  $\xi_0 = \frac{\Delta_{23} d_1^2}{2\Delta x_1}$ , so ist

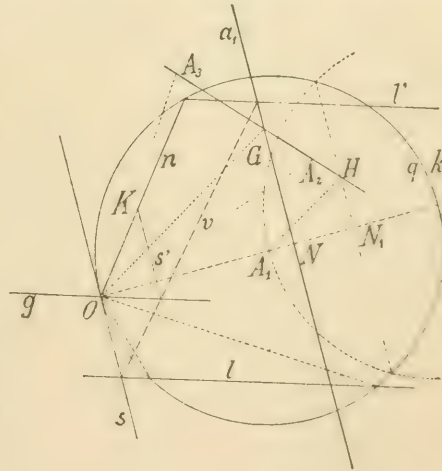
$$\delta_1 = \frac{\Delta_{23}}{2\Delta} d_1.$$

Daraus läßt sich  $a_1$  etwa, wie folgt, ermitteln. (Fig.) Schneidet  $A_2 A_3$  die Asymptote  $a_1$  in  $G$  und die zu  $OG$  durch  $A_1$  gezogene Parallele in  $H$ , und sind  $N, N_1$  die Schnittpunkte von  $OA_1$  mit der Asymptote  $a_1$  und der durch  $H$  zu ihr gezogenen Parallelen, so ist

$$\frac{\delta_1}{d_1} = \frac{\Delta_{23}}{2\Delta} = \frac{OG}{2A_1 H} = \frac{ON}{2A_1 N_1},$$

so daß  $2A_1 N_1 = d_1$  ist.

Wir beschreiben also um  $A_1$  als Mittelpunkt den durch  $O$  gehenden Kreis  $k$  und den zu ihm gleichen Kreis, dessen Mittelpunkt dem Punkt  $O$  auf  $k$  diametral gegenüberliegt. Die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise schneidet  $A_2 A_3$  im Punkte  $H$  und die zu  $A_1 H$  durch  $O$  gezogene Parallele im Punkte  $G$  der Asymptote  $a_1$ .



Die Kurve  $c^3$  kann man auf Grund der Eigenschaft konstruieren, daß die Elemente eines Strahlenbüschels  $\Sigma$ , dessen Mittelpunkt auf  $c^3$  liegt, diese Kurve in Punktepaaren schneiden, welche vom Doppelpunkt  $O$  der Kurve durch eine Involution projiziert werden, welche zu  $\Sigma$  projektiv ist; diese Involution wird von irgend einem durch  $O$  gehenden Kreis  $q$  in einer gleichfalls zu  $\Sigma$  projektiven Involution geschnitten, und die Verbindungsgeraden der Punktepaare dieser Involution bilden einen zu  $\Sigma$  projektiven Strahlenbüschel  $\mathcal{A}$ . Als Mittelpunkt von  $\Sigma$  wählen wir den unendlich fernen Punkt von  $a_1$ . Dem Strahle  $s$  durch  $O$  von  $\Sigma$  entsprechen in der Involution auf  $q$  die Schnittpunkte der isotropen Tangenten von  $c^3$  in  $O$ , also die unendlich fernen Kreispunkte der Ebene; somit entspricht der Geraden  $s$  im Büschel  $\mathcal{A}$  die unendlich ferne Gerade  $u_\infty$  der Ebene. Der Geraden



$u_\infty$  in  $\Sigma$  entspricht in  $\mathcal{A}$  die Gerade  $l$ , welche die von  $O$  verschiedenen Schnittpunkte der von  $O$  auf  $OA_2$  und  $OA_3$  gefälltten Senkrechten und des Kreises  $q$  miteinander verbindet. Der Geraden  $a_1$  von  $\Sigma$  entspricht in  $\mathcal{A}$  diejenige Gerade  $g$ , welche durch den von  $O$  verschiedenen Schnittpunkt des Kreises  $q$  mit der Geraden  $s$  geht und zu  $l$  parallel ist. Sind nun  $s'$  und  $l'$  irgend zwei einander entsprechende Strahlen von  $\Sigma$  und  $\mathcal{A}$ , so ist

$(su_\infty a_1 s') = (u_\infty l g l')$ . Nun ist  $(su_\infty a_1 s') = (a_1 s' s u_\infty)$ ,  $(u_\infty l g l') = (l' g l u_\infty)$ ; es ist also  $(a_1 s' s u_\infty) = (l' g l u_\infty)$ ; folglich liegen die Schnittpunkte  $a_1 \cdot l', s' \cdot g, s \cdot l$  auf einer Geraden  $v$ .

Um darnach den Schnittpunkt  $K$  von  $c^3$  mit einer durch  $O$  gehenden Geraden  $n$  zu bekommen, ermitteln wir  $a_1$  und als  $q$  benützen wir etwa gleich den Kreis  $k$ , so daß  $s$  ihn berührt. Durch den von  $O$  verschiedenen Schnittpunkt von  $n$  mit  $k$  ziehen wir die Parallele  $l'$  zu der in zuvor angegebener Weise ermittelten Geraden  $l$  und verbinden  $l' \cdot a_1$  mit  $l \cdot s$  durch die Gerade  $v$ ; alsdann haben wir noch durch  $O$  die Parallele  $g$  zu  $l$  und von ihrem Schnittpunkte mit  $v$  die Parallele  $s'$  zu  $a_1$  zu ziehen, welche auf  $n$  den fraglichen Punkt  $K$  einschneidet. Diese Konstruktion ist anwendbar auch wenn  $A_2$  und  $A_3$  konjugiert imaginär sind, da man auch jetzt die Gerade  $l$  in bekannter Weise einfach konstruieren kann.

3. Als Anwendung wollen wir die Aufgabe lösen:

*Es ist die Krümmung einer Kurve 3. Ordnung  $k$  für irgend einen Punkt derselben  $O$  zu konstruieren.*

Ziehen wir durch  $O$  eine Gerade  $p$ , welche die Kurve  $k$  noch in  $O'$  und  $O''$  schneiden möge und ziehen dann noch irgend eine Gerade  $p_1$ , welche sie in den Punkten  $A_1, A'_1, A''_1$  trifft. Weiter bringen wir etwa die Geraden  $OA_1 = q, O'A'_1 = q_1, O''A''_1 = q_2$  mit der Kurve noch in den Punkten  $A_2, A'_2, A''_2$  zum Schnitte; wir wissen, daß auch die Punkte  $A_2, A'_2, A''_2$  auf einer Geraden  $p_2$  liegen. Sind entsprechend

$$P = 0, P_1 = 0, P_2 = 0, Q = 0, Q_1 = 0, Q_2 = 0$$

die Gleichungen dieser Geraden, so gehört unsere Kurve dem Büschel

$$f = P P_1 P_2 + \lambda Q Q_1 Q_2 = 0 \quad (4)$$

an.

Es sei

$$P_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1, P_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Der Kegelschnitt im Büschel (1), für welchen  $\lambda = 0$  ist, zerfällt hier in die Gerade  $P = 0$  und in eine Gerade  $p^*$ , deren Gleichung wir bekommen, wenn wir im Produkt  $P_1 P_2$  die Glieder zweiter Ordnung in den Veränderlichen  $x, y$  unterdrücken. Diese Gleichung können wir in der Form schreiben

$$P^* \equiv c_2 \left[ P_1 + \frac{c_1}{c_2} P_2 - c_1 \right] = 0.$$

Die Gerade  $p^*$  ist parallel zur Geraden  $\bar{p}$  von der Gleichung

$$\bar{p} \equiv P_1 + \frac{c_1}{c_2} P_2 = 0.$$

Die Gerade  $\bar{p}$  gehört dem durch  $p_1$  und  $p_2$  festgelegten Büschel an. Ziehen wir in diesem Büschel die durch  $O$  gehende Gerade  $\bar{p}_0$ ; ihre Gleichung ist

$$P_1 - \frac{c_1}{c_2} P_2 = 0.$$

Folglich ist  $\bar{p}$  die zu  $\bar{p}_0$  harmonische Gerade in bezug auf  $p_1$  und  $p_2$ .

Es seien  $x^*$  und  $\bar{x}$  die Abschnitte der Geraden  $p^*$  und  $\bar{p}$  auf der  $x$ -Achse; ihre Werte sind

$$\bar{x} = \frac{-2 c_1 c_2}{a_1 c_2 + a_2 c_1}, \quad x^* = \frac{-c_1 c_2}{a_1 c_2 + a_2 c_1},$$

so daß

$$x^* = \frac{1}{2} \bar{x}.$$

Die Gerade  $p^*$  halbiert also die Entfernung der Geraden  $\bar{p}$  vom Punkte  $O$ .

Würde die Kurve  $f = 0$  in eine durch  $O$  gehende Gerade  $p$  und einen Kegelschnitt  $h$  zerfallen mit den Gleichungen

$$a x + b y = 0, \quad a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0,$$

so wäre mit Rücksicht auf (1)

$$u_1 + u_2 = (a x + b y) (2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33}) = 0.$$

Nun hat die Polare von  $O$  in bezug auf  $h$  die Gleichung

$$a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = 0.$$

Schneidet diese auf der  $x$ -Achse die Strecke  $\bar{x}$  und die Gerade  $2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$  die Strecke  $x^*$  ab, so ist wieder  $x^* = \frac{1}{2} \bar{x}$ .

Die Gleichung (4) führt zu dem der Gleichung (1) entsprechenden Kegelschnittbüschel, in welchem ein Kegelschnitt in das Geradenpaar  $p p^*$  degeneriert. Analog schließen wir, wenn  $\bar{q}$  die zum Punkte  $O$  in bezug auf  $q_1 q_2$  harmonische Gerade, und  $q^*$  die zu  $q$  parallele Gerade, welche die Entfernung dieser Geraden von  $O$  halbiert, bezeichnet, daß das Geradenpaar  $q q^*$  gleichfalls ein Element des Büschels (4) darstellt.

Es sind also  $O M_1 = p^* \cdot q$ ,  $M_2 = p \cdot q^*$  und  $M_3 = p^* \cdot q^*$  Grundpunkte des Büschels (1). Ist  $t$  die Tangente der gegebenen Kurve 3. Ordnung im Punkte  $O$ , so oskuliert der Kegelschnitt durch  $O$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , welcher  $t$  in  $O$  berührt diese Kurve in  $O$ . Der Krümmungskreis der Kurve in  $O$

wird also als Krümmungskreis des soeben erwähnten Kegelschnitts erhalten.

Dies führt zu der folgenden Konstruktion.

Hat man die Geraden  $\bar{p}$ ,  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$  und  $q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  geeignet festgestellt, so konstruiert man die Polaren  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  von  $O$  in bezug auf die Geradenpaare  $\bar{p}_1 \bar{p}_2$ ,  $q_1 q_2$  und ermittelt für  $O$  den Krümmungsmittelpunkt  $\bar{K}$  des Kegelschnittes, welcher  $t$  in  $O$  berührt und durch die Punkte  $L_1 = \bar{p} \cdot q$ ,  $L_2 = \bar{p} \cdot \bar{q}$ ,  $L_3 = \bar{p} \cdot \bar{q}$  geht; es ist alsdann  $O\bar{K}$  ein Durchmesser des Kreises, welcher die Kurve 3. Ordnung im Punkte  $O$  oskuliert.

Da wir jedes von den Geradenpaaren  $\bar{p}_1 \bar{p}_2$ ,  $q_1 q_2$  durch einen Kegelschnitt ersetzen können, so läßt sich unsere Konstruktion auch, wie folgt, modifizieren.

Durch  $O$  ziehen wir zwei Gerade  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ , welche die gegebene Kurve  $k$  noch in den Punkten  $O'$ ,  $O''$ , beziehungsweise  $A_1$ ,  $A_2$  trifft, wählen noch irgend zwei Punkte  $A_1'$ ,  $A_2'$  auf  $k$  und ermitteln etwa noch den Schnitt  $A_1''$  von  $A_1 A_1'$  mit  $k$ . Dann gehören  $k$ , ferner die aus den Geraden  $\bar{p}$ ,  $\bar{p}_1 = A_1 A_1'$ ,  $\bar{p}_2 = A_2 A_2'$  und die aus der Geraden  $\bar{q}$  und dem durch  $O'$ ,  $O''$ ,  $A_1'$ ,  $A_1''$ ,  $A_2'$  gehenden Kegelschnitt  $h$  bestehende Kurve einem Büschel an. Wir konstruieren also die Polaren  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  des Punktes  $O$  in bezug auf das Geradenpaar  $\bar{p}_1 \bar{p}_2$ , beziehungsweise in bezug auf den Kegelschnitt  $h$ . Oder nachdem wir die Geraden  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  mit den Punkten  $O'$ ,  $O''$  und  $A_1$ ,  $A_2$  festgelegt haben, wählen wir irgend drei Punkte  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  auf  $k$ , welche mit  $A_1$ ,  $A_2$  einen Kegelschnitt ( $\bar{p}$ ) und mit  $O'$ ,  $O''$  einen Kegelschnitt ( $\bar{q}$ ) festlegen, so daß  $k$ ,  $\bar{p}$  ( $\bar{p}$ ),  $\bar{q}$  ( $\bar{q}$ ) drei Kurven 3. Ordnung sind, welche einem Büschel angehören. Wir konstruieren nun die Polaren  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  von  $O$  in bezug auf die Kegelschnitte ( $\bar{p}$ ), ( $\bar{q}$ ).

In beiden Fällen werden die Geraden  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  in gleicher Weise zur Konstruktion des Punktes  $\bar{K}$  verwendet wie früher.

4. Betrachten wir nun eine allgemeine algebraische Kurve  $n$ . Ordnung  $k$  in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes  $P$  auf ihr. Wir wählen diesen Punkt als Anfang, die Tangente in ihm an  $k$  als  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Führen wir  $z$  als homogenisierende Veränderliche ein, so hat  $k$  die Gleichung

$$2 a_{23} y z^{n-1} + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) z^{n-2} + U = 0,$$

worin  $U$  eine homogene Funktion  $n$ -Ordnung von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bezeichnet, welche in bezug auf  $z$  höchstens vom Grade  $n - 3$  ist.

Die quadratische Polare  $k_2$  des Punktes  $P$ , für den  $x = 0$ ,  $y = 0$  ist, fällt, da  $U$  die Veränderlichen  $x$ ,  $y$  in höherer als der zweiten Ordnung enthält, mit der quadratischen Polare dieses Punktes in bezug auf die Kurve  $k'$

$$(2 a_{23} y z + a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) z^{n-2} = 0,$$

zusammen, welche sich aus dem Kegelschnitt  $s$

$$2 a_{23} y z + a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = 0, \quad (5)$$

und der  $(n - 2)$ -fach zu zählenden unendlich fernen Geraden der Ebene zusammensetzt. Schneidet irgend eine Gerade durch  $P$  diesen Kegelschnitt noch in  $Q$ , die unendlich ferne Gerade in  $Q_\infty$  und die quadratische Polare von  $P$  in bezug auf  $k'$  in  $R$ , so ist  $R$  auch das harmonische Zentrum ersten Grades von  $P$  in bezug auf die Punktgruppe, die sich aus  $Q$  und dem  $(n - 2)$ -fach zu zählenden Punkt  $Q_\infty$  zusammensetzt. Es ist also

$$\frac{n-1}{PR} = \frac{1}{PQ} + \frac{n-2}{PQ_\infty},$$

so daß  $PR = (n - 1) PQ$  ist.

Es liegt also  $k_2$  zu  $s$  ähnlich für  $P$  als Ähnlichkeitspunkt und  $(n - 1)$  als Ähnlichkeitsmodul. Da nun  $s$  die Kurve  $k$  in  $P$  oskuliert, so ist, wenn  $\rho$  den Krümmungshalbmesser von  $k_2$  und  $r$  den von  $k$  für den Punkt  $P$  bezeichnet,  $r = \frac{\rho}{n - 1}$ .

Ist  $r_i$  der Krümmungshalbmesser für  $P$  der  $i$ -Polare von  $P$  in bezug auf  $k$ , so hat man, da  $k_2$  auch die quadratische Polare von  $P$  in bezug auf die  $i$ -Polare ist, die Beziehung

$$r_i = \frac{\rho}{n - i - 1},$$

oder wenn man für  $\rho$  den Wert aus der vorangehenden Gleichung einsetzt,

$$r = \frac{n - i - 1}{n - 1} r_i \quad 1)$$

Daraus ergeben sich von neuem unsere Konstruktionen für die Kurve 3. Ordnung und analoge für irgend eine algebraische Kurve.

5. Die gewonnenen Ergebnisse lassen eine duale Übertragung auf algebraische Kurven  $n$ . Klasse zu. Die Gleichung einer solchen Kurve  $k$  können wir in rechtwinkligen Koordinaten  $u, v$  in der Form schreiben

$$a_0 v^n + (a_1 u + b_1) v^{n-1} + (a_2 u^2 + b_2 u + c_2) v^{n-2} + U_3 v^{n-3} + \dots + U_k v^{n-k} + \dots + U_{n-1} v + U_n = 0,$$

worin  $U_l$  ( $l = 3, \dots, k, \dots, n$ ) ein Polynom  $l$ . Grades in  $u$  bezeichnet

Wählen wir eine gewöhnliche Tangente der Kurve als  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so muß  $v = \infty$  die Gleichung befriedigen, also  $a_0 = 0$  sein. Die Gleichung des Berührungspunktes  $P$  von  $x$  mit  $k$  ist  $a_1 u + b_1 = 0$ ; wählen wir diesen Punkt als Anfangspunkt des

1) Cf. Żora wski: Über gewisse Eigenschaften der Polaren in Bulletin international d. Böhm. Akademie d. Wissensch. 1914.



Koordinatensystems, so wird  $a_1 = 0$  und die Gleichung von  $k$  läßt sich schreiben

$$(a_2 u^2 + b_2 u + b_1 v + c_2) v^{n-2} + U_3 v^{n-3} + \dots + U_n = 0.$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, daß der Kegelschnitt  $s$ , welcher die Gleichung

$$a_2 u^2 + b_2 u + b_1 v + c_2 = 0$$

hat, die Kurve  $k$  im Punkte  $P$  oskuliert.

Analog dem Vorangehenden finden wir, daß die zweite Polare  $k_2$  der Geraden  $x$  die Gleichung hat

$$a_2 u^2 + b_2 u + (n-1) b_1 v + c_2 = 0,$$

zu der wir auch leicht dadurch gelangen, daß wir die Gleichung der Kurve  $k$ , deren linke Seite mit  $F$  bezeichnet werden möge, durch Einführung der Variablen  $w$  homogen machen und beachten, daß für  $v = \infty$  die Koeffizienten  $a_2, b_2, (n-1) b_1, c_2$  beziehungsweise proportional sind den Ausdrücken

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w}, \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} \text{ während } \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

ist.

Nun ist für  $P$  der Krümmungshalbmesser  $r$  von  $s$  und also auch von  $k$  durch die Gleichung

$$r = -\frac{2 a_2}{b_1},$$

der Krümmungshalbmesser  $\varrho$  von  $k_2$  durch die Gleichung

$$\varrho = -\frac{2 a_2}{(n-1) b_1},$$

gegeben,<sup>1)</sup> so daß man die Beziehung erhält

$$r = (n-1) \varrho.$$

Ist  $r_i$  der Krümmungshalbmesser für  $P$  der  $i$ -Polare von  $x$  in bezug auf  $k$ , so hat man, da  $k_2$  auch die quadratische Polare von  $x$  in bezug auf die  $i$ -Polare ist, die Beziehung  $r_i = (n-i-1) \varrho$ , so dass

$$r = \frac{n-1}{n-i-1} r_i$$

ist.

Dadurch gelangen wir wieder zu mannigfaltigen Konstruktionen von Krümmungskreisen für algebraische Kurven. Insbesondere folgt beispielsweise für eine rationale Kurve dritter Klasse die folgende Konstruktion.

<sup>1)</sup> Anmerkung auf S. 2.

Durch irgend zwei Punkte  $A, B$  von  $x$  lege man die Tangenten an die Kurve, welche ein vollständiges Vierseit bilden, für welches  $x$  eine Diagonale ist. Ist  $C$  die ihr gegenüberliegende Diagonalecke des Vierseits und  $d$  die Doppeltangente der Kurve, so ist der zu  $P$  gehörige Krümmungshalbmesser der Kurve gleich dem doppelten zu  $P$  gehörigen Krümmungshalbmesser desjenigen Kegelschnittes, welcher  $x$  in  $P$  und außerdem die Geraden  $AC, BC, d$  berührt.

6. Wir wollen zum Schluß noch den Ort der Krümmungsmittelpunkte der Kurven einer Kurvenschar für die Berührungspunkte mit einer Grundtangente der Schar ermitteln. Dieser Ort ist auch, wie sich aus dualen Betrachtungen ergibt, der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die Kurven einer Kegelschnittschar in den Berührungspunkten mit einer Grundtangente.

Wir wählen diese Grundtangente als  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Sind  $A_1(x_1 y_1), A_2(x_2 y_2), A_3(x_3 y_3)$  die Ecken des Dreiecks, welches durch die übrigen Grundtangente der Schar gebildet wird und ist  $T(\xi, 0)$  der Berührungspunkt irgend eines Kegelschnittes  $k$  der Schar mit  $x$ , so ist der Krümmungshalbmesser  $R$  von  $k$  für  $T$  gleich dem Vierfachen des Krümmungshalbmessers  $r$  für den Kegelschnitt, welcher  $x$  in  $T$  berührt und dem Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  umgeschrieben ist. Der zugehörige Krümmungsmittelpunkt von  $k$  hat also die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta = R - 4r$ . Es ist somit die Gleichung (2) hier anwendbar und liefert

$$y_1 y_2 y_3 \Delta \eta = \begin{vmatrix} (x_1 - \xi)^2, & (x_1 - \xi) y_1, & y_1^2 \\ (x_2 - \xi)^2, & (x_2 - \xi) y_2, & y_2^2 \\ (x_3 - \xi)^2, & (x_3 - \xi) y_3, & y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Der gesuchte Ort ist mithin eine Parabel 3. Ordnung.







TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,  
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ A ČESKEHO VYSOKEHO UČENÍ  
TECHNICKÉHO V PRAZE.





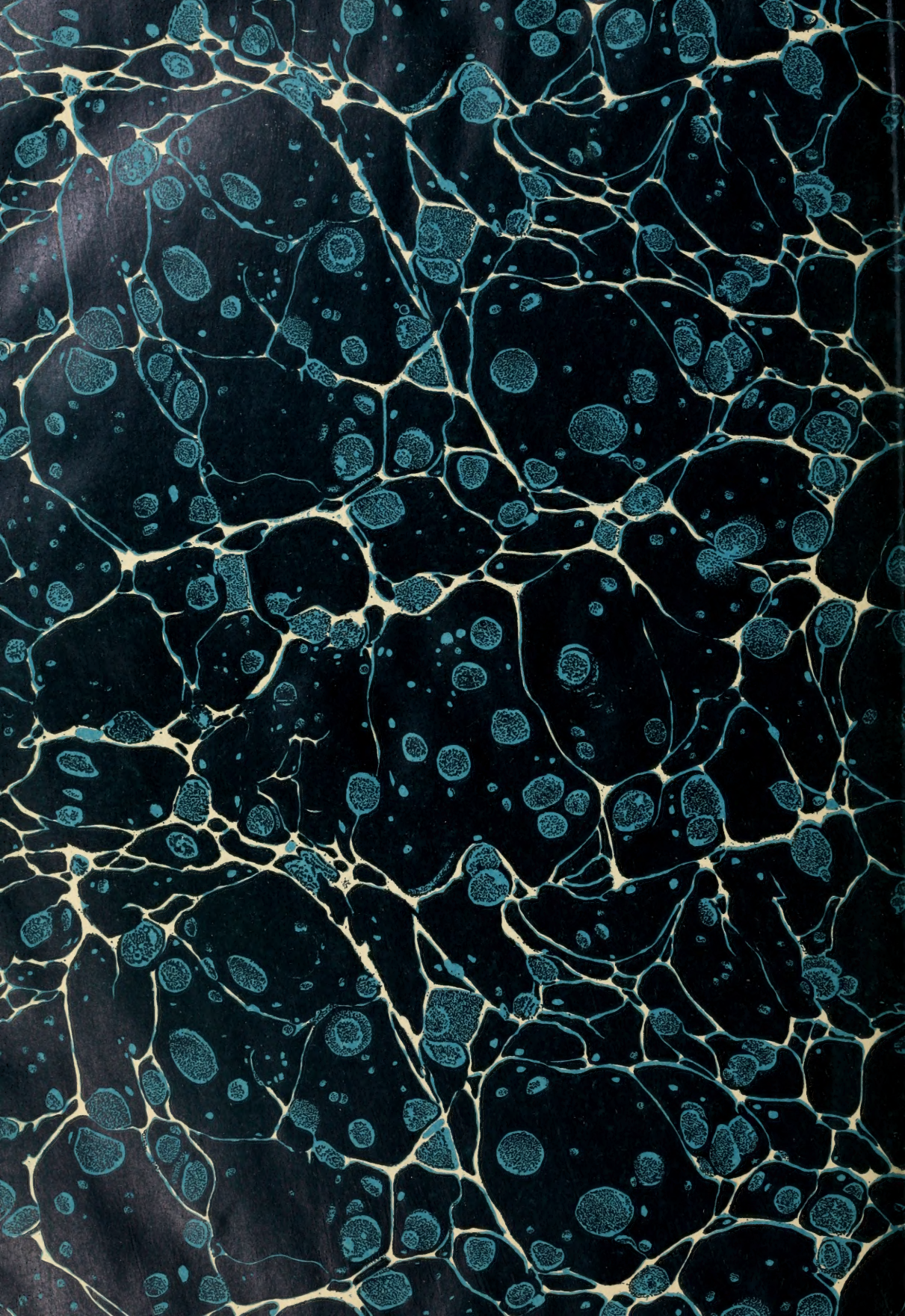




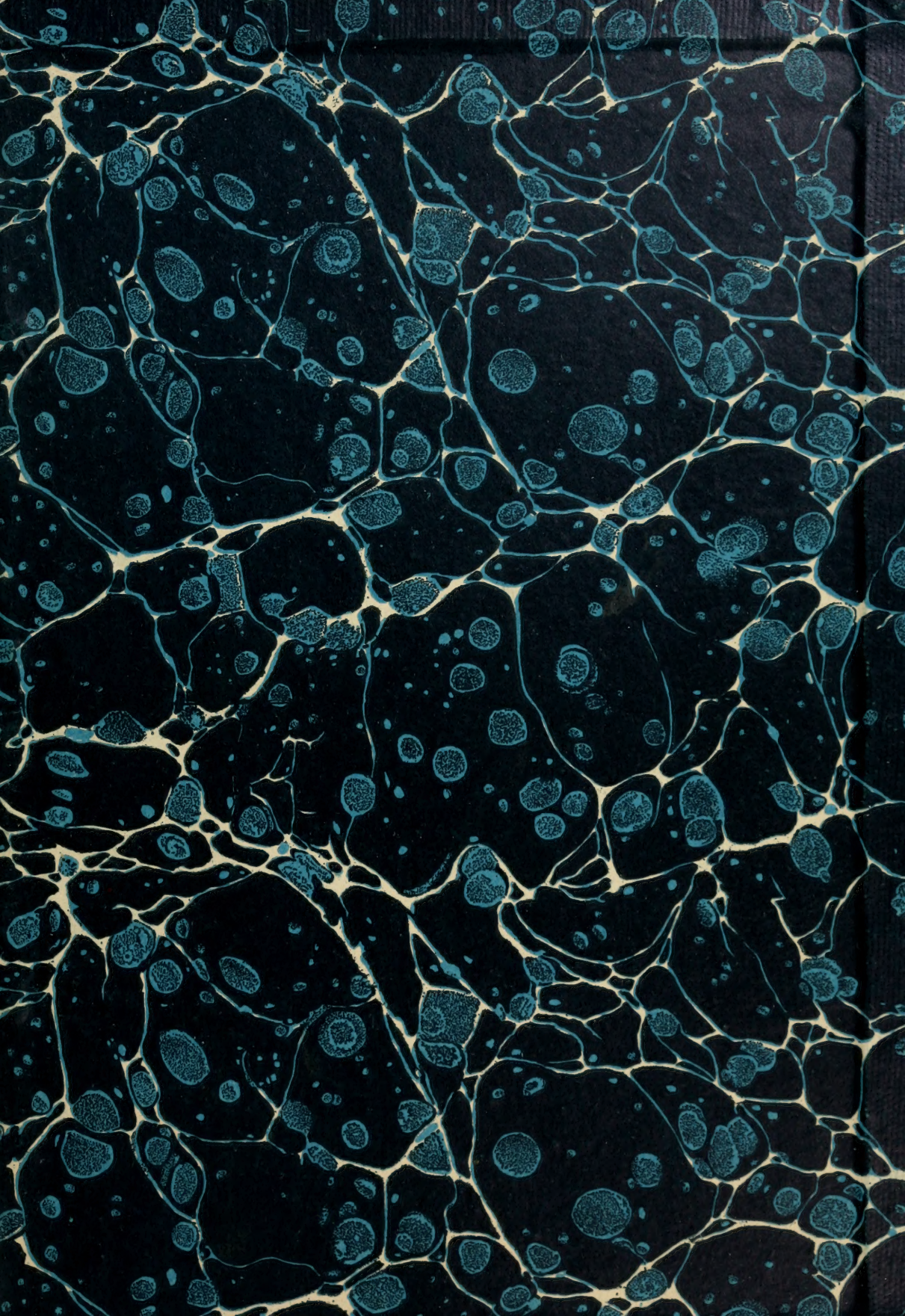














SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01298 3789