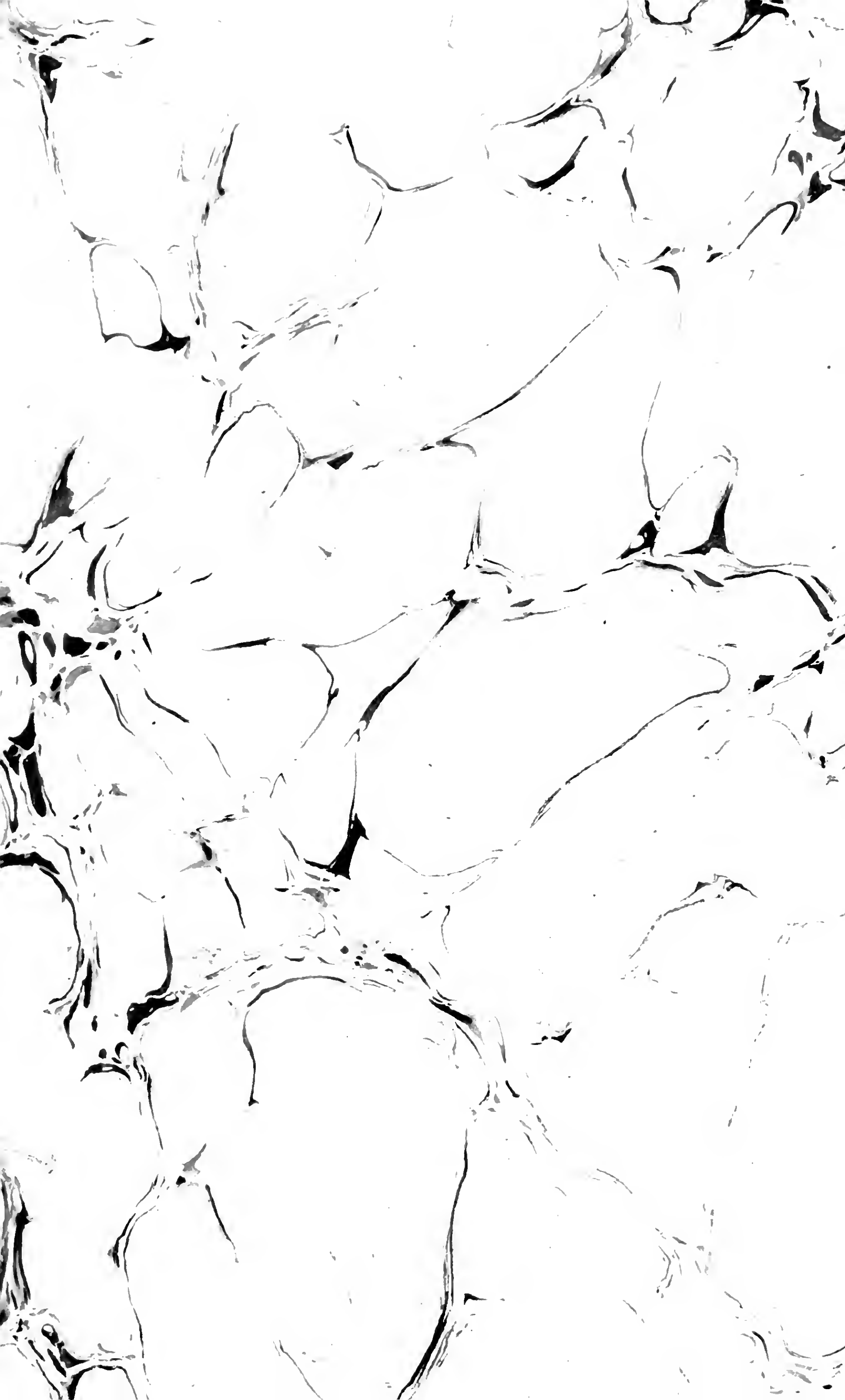


CALCOLO DIFFERENZIALE

E

PRINCIPII DI CALCOLO INTEGRALE

ANGELO GENOCCHI

CALCOLO DIFFERENZIALE

E

PRINCIPII DI CALCOLO INTEGRALE

PUBBLICATO CON AGGIUNTE

DAL

D.r GIUSEPPE PEANO

ROMA TORINO FIRENZE
FRATELLI BOCCA
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA
1884

Torino — VINCENZO BONA Tip. di S. M. e dei RR. Principi.

PREFAZIONE

Il difetto di buoni trattati di Calcolo è troppo sentito in Italia. Onde io, già allievo del ch^{mo} prof. Genocchi, ed ora, da alcuni anni, suo aiuto nell'insegnamento in questa R. Università, credetti cosa opportuna il pubblicarne il corso, tanto, ed a ragione, stimato pel suo rigore da quanti lo seguirono. Ma, e il dover dare alle lezioni la forma di trattato, e la necessità di comprendervi tutte quelle ricerche che non soglionsi fare nelle lezioni orali, ma che sono indispensabili in un libro, mi obbligò a importanti aggiunte e a qualche modificazione.

Questo volume contiene il calcolo differenziale e quei principii di calcolo integrale che più sono necessarii per le applicazioni geometriche.

Nelle annotazioni che precedono il libro, trovansi citati date e nomi di autori; trovansi pure definizioni e teoremi messi sotto forma alquanto differente da quelli del testo; ed infine credetti utile di far ivi notare alcune inesattezze in proposizioni e dimostrazioni, che sono quasi stereotipate in un gran numero di trattati, e che si riproducono ancora in opere recentissime, benchè in gran parte la loro inesattezza fosse già rilevata da varii autori, anche da anni.

Torino, 1° settembre 1884.

G. Peano.

ANNOTAZIONI

N. 1-3.

L'analisi si fonda, senza alcun postulato, sul solo concetto di numero. E benchè questo concetto già si debba avere dall'aritmetica e dall'algebra, si credette bene di qui riportare la definizione dei numeri incommensurabili, affinchè ben chiare risultino le dimostrazioni successive (p. e. quella del N. 14).

Il concetto di numero incommensurabile qui introdotto, di tutti il più semplice e naturale, è anche il più comune. V. per un più ampio sviluppo il Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa 1878, pag. 1-14.

Identico in sostanza è il modo di ragionare del Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872, e riportato dal Pasch, *Einleitung in den Differential- und Integral-Rechnung*, Leipzig 1882. Questi autori considerano delle due categorie di numeri da noi introdotte solamente la prima, cui si dà il nome di *Zahlenstrecke*, e sopra questo ente si definiscono le operazioni aritmetiche.

Però altri matematici considerano i numeri irrazionali come limiti di numeri razionali. Fra questi il Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes... — Math. Ann.*, Bd. V, pag. 123, dopo aver parlato dei numeri razionali, soggiunge:

« Wenn ich von einer Zahlengrösse in weiterem Sinne rede, so geschieht
« es zunächst in dem Falle, dass eine durch ein Gesetz gegeben unendliche
« Reihe von rationalen Zahlen

« $$(1) \quad a_1\, a_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, a_n \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

« vorliegt, welche die Beschaffenheit hat dass die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit
« wachsendem n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m
« sei, oder mit anderen Worten, dass bei beliebig angenommenem (positiven

« rationalen) ϵ eine ganze Zahl n_1 vorhanden ist, so dass $(a_{n+m} - a_n) < \epsilon$,
« wenn $n \geqq n_1$, und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist.

« Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: Die « Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b ».

Questa definizione è riprodotta, a meno di qualche parola, dall'HARNACK, *Die Elemente der Diff. u. Int. Rechnung,* Leipzig 1871, e dal LIPSCHITZ, *Grundlagen der Analysis*. Bonn 1877, pag. 37; ma essa pare meno semplice della precedente.

La questione della definizione dei numeri irrazionali è lungamente discussa dal DU BOIS-REYMOND, *Die Allgemeine Functionentheorie*, Tübingen 1882.

Molti trattati di calcolo non definiscono i numeri incommensurabili. Ma è facile scorgere in qualche dimostrazione delle asserzioni gratuite. Si confrontino a questo proposito il SERRET, *Cours de Calcul diff. et int.*, Paris 1879, Tomo I, N. 96, e JORDAN, *Cours d'Analyse*, Paris 1882, pag. 102, dove sta contenuto in un *évidemment* il concetto di numero incommensurabile.

Presso i matematici greci ciò che meglio corrisponde al nostro concetto di numero è la ragione, λόγος, di due grandezze. Si confr. il libro V di EUCLIDE.

N. 6.

La parola *funzione* ebbe il significato comunemente ammesso da LEIBNITZ, *Acta eruditorum*, 1692. Essa è stata definita da GIO. BERNOULLI:

« On appelle ... Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de « quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ». *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris*, 1718, pag. 100;

e più tardi da EULERO:

« Functio quantitatis variabilis est espressio analytica quomodocunque com- « posita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus ». *Introductio in Analysin Infinitorum*, Lausannæ 1748, pag. 4.

La definizione del testo, secondo la quale non è necessario che la y sia legata alla x da relazioni analitiche, è di LEJEUNE-DIRICHLET, *Dove's Repertorium der Physik*, Bd. I. Cfr. DINI, *Fondamenti*, ecc., N. 29.

N. 7.

Il concetto limite è fondamentale nel calcolo. Alcuni autori lo ritengono come intuitivo; altri lo definiscono o incompletamente, o con parole che avrebbero esse stesse bisogno di definizione. La definizione qui riportata, che trovasi in tutti i buoni trattati, nulla lascia a desiderare sotto l'aspetto del rigore e della chiarezza: ma è alquanto lunga.

* *

Aggiungerò qui un altro modo di definire il limite, che in sostanza non differisce dal precedente, ma che tuttavia può avere dei vantaggi. Parlerò solamente del limite quando la variabile cresca indefinitamente.

Diremo che f(x) *col crescere indefinitamente di* x *diventa maggiore d'un numero* a, *se da un certo valore di* x *in poi tutti i valori di* f(x) *sono maggiori di* a.

Diremo che f(x) *col crescere indefinitamente di* x *diventa minore di* a, *se da un certo valore di* x *in poi tutti i valori di* f(x) *sono minori di* a.

Diremo che f(x) *col crescere indefinitamente di* x *ha per limite* a, *se* f(x) *diventa maggiore d'ogni numero minore di* a, *e minore d'ogni numero maggiore di* a.

Tutti i numeri, paragonati al modo di diventare di $f(x)$, si possono distinguere in tre categorie: — 1° numeri di cui $f(x)$ diventa maggiore; — 2° numeri di cui $f(x)$ diventa minore; — 3° numeri di cui $f(x)$ diventa nè maggiore nè minore. È facile il vedere che se un numero appartiene alla prima categoria, tutti i suoi minori vi appartengono pure, e se un numero appartiene alla seconda, vi appartengono pure i suoi maggiori: i numeri della prima sono minori di quelli della seconda e della terza, e quelli della seconda maggiori di quelli della prima e della terza.

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè* f(x) *tenda ad un limite è che esistano la prima e la seconda categoria, e che non esista la terza, ovvero contenga un sol numero.*

Infatti se $f(x)$ tende verso il limite a, esso diventerà maggiore di tutti i numeri minori di a, ossia tutti i numeri minori di a appartengono alla prima categoria; analogamente tutti i numeri maggiori di a appartengono alla seconda; e alla terza categoria non appartiene al più che il solo numero a. Reciprocamente se esistono la prima e la seconda categoria, e non la terza, esisterà un numero a non minore d'alcuno della 1ª, nè maggiore d'alcuno della 2ª categoria; e se la 3ª categoria non contiene che un sol numero a, tutti i numeri minori di esso apparterranno alla 1ª, e i numeri maggiori alla 2ª categoria. In ogni caso $f(x)$ diventa maggiore di tutti i numeri minori di a e minore di tutti i numeri maggiori di a, dunque $f(x)$ ha per limite a.

* *

Del resto il *modo di diventare* d'una funzione $f(x)$ è un ente, che si può introdurre in matematica, e studiare, almeno collo stesso diritto con cui si introducono gli immaginarii.

Invero, potremo definire di questi enti l'eguaglianza e diseguaglianza, e le operazioni analitiche fondamentali. Quindi essi appartengono alle quantità analitiche. Potremo assumere le seguenti definizioni:

Diremo che, col crescere indefinitamente di x, $f(x)$ diventa maggiore o eguale o minore di $\varphi(x)$, se da un certo valore di x in poi $f(x)$ è maggiore o eguale o minore di $\varphi(x)$.

La $\varphi(x)$ potrebbe anche ridursi ad un numero costante, ed allora resta definita l'eguaglianza o diseguaglianza del modo di diventare di $f(x)$ e di un numero.

Intenderemo per somma dei modi di diventare di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ il modo di diventare la somma $f(x)+\varphi(x)$: e in modo analogo si possono definire le altre operazioni analitiche. Se $\varphi(x)$ è costante, restano definite le operazioni fra il modo di diventare d'una funzione ed un numero.

Dalle definizioni precedenti si ricava p. e. che x diventa maggiore di ogni numero: che x^2 diventa pure maggiore d'ogni numero, ma anche maggiore di x; anzi che x^2 diventa maggiore di kx, qualunque sia k, ossia d'ogni multiplo di x; che $\frac{1}{x}$ diventa maggiore di 0, dando ad x valori maggiori di 0, e diventa minore d'ogni numero positivo; che $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ diventa minore d'ogni numero positivo, e maggiore d'ogni numero negativo, senza diventare nè maggiore, nè eguale, nè minore di 0; ecc.

Queste grandezze analitiche in cui non è più vero che una grandezza, ripetuta un numero sufficiente di volte, possa superare ogni altra grandezza, si presentano pure nella ricerca dell'ordine d'infinità delle funzioni, ed in alcuni problemi di calcolo delle probabilità. Ma il loro studio ulteriore ci porterebbe troppo lontani.

N. 15.

I due importantissimi teoremi qui dimostrati trovansi enunciati implicitamente nelle definizioni di numeri incommensurabili date da CANTOR, ecc. V. annotazioni ai N. 1-3. Questi teoremi sono chiamati da DU BOIS-REYMOND, *Functionentheorie*, « Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip ».

N. 18.

La dimostrazione di questo numero fu data da CAUCHY, *Analyse algébrique*, Paris 1821, nota III.

La dimostrazione geometrica (pure data dal CAUCHY, id., pag. 44), in cui si ritiene che la linea di equazione $y=f(x)$, che ha due punti giacenti da parte opposta dell'asse delle x, incontra questo asse in qualche punto, non è soddisfacente. Invero al sistema di punti di ascissa x, e di ordinata $f(x)$ possiamo attribuire il nome di linea, senza aver però il diritto di estendere a tale sistema le proprietà delle linee che soglionsi considerare in geometria.

Per rendere più manifesto il valore di questa obbiezione, si osservi che una funzione $f(x)$ può essere continua per $x=x_0$ quantunque essa non assuma che soli valori razionali nelle vicinanze del valore x_0: quindi si potrebbe domandare se esista una funzione continua in un intervallo (a, b) che assuma soli valori razionali. È chiaro che la rappresentazione geometrica non permette di rispondere a questa domanda. Invece il teorema presente, ed il successivo dimostrano che una tale funzione è impossibile.

La dimostrazione geometrica sarebbe esatta qualora si definisse per funzione continua quella che non può passare da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedii. E questa definizione trovasi appunto in alcuni trattati. e fra i recenti citerò il Gilbert, *Cours d'analyse infinitésimale*. Louvain 1872; ma erroneamente l'A. a pag. 55 cerca di dimostrare la sua equivalenza con quella di cui noi ci serviamo. Invero. se col tendere di x ad a $f(x)$ oscilla entro valori che comprendono $f(a)$, senza tendere ad alcun limite, $f(x)$ è discontinua per $x=a$, secondo la nostra definizione, ed è continua, secondo la definizione del Gilbert. V. anche Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*. Ann. scientif. de l'école normale sup., t. IV.

È parimenti inconcludente la dimostrazione che ne dà il Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, tomo 1°, pag. 95 (4ª ediz.). Invero l'A. oltre ad altre inesattezze, ammette che un sistema di infinite quantità positive sia tutto racchiuso entro due limiti positivi, cosa inesatta perchè il limite inferiore di un sistema di numeri positivi potrebbe essere zero.

N. 20 e 21.

Una più ampia trattazione della continuità delle funzioni trovasi nel Dini. *Fondamenti*, ecc.

Il secondo teorema del N. 20 ed il primo del N. 21 sono dovuti a Weierstrass, che primo ne vide la necessità di dimostrarli. V. Schwarz, *Giornale di Crelle*, vol. 72, pag. 141.

Il secondo del N. 21 a Cantor. V. Heine. *Giornale di Crelle*, vol. 74. Darboux, *Mémoire, ecc.*, pag. 73, Dini, *Fondamenti*, ecc., N. 40.

N. 28.

La lettera e, per indicare il limite di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, fu introdotta da EULERO, *Introductio in Analysin infinitorum*, I, § 115.

N. 31.

Le proposizioni contenute negli esercizii 6 e 7 sono dovute a CAUCHY, *Analyse algébrique*, pag. 48 e segg. La prima proposizione è enunciata in questi termini:

« Si pour des valeurs croissantes de x la différence $f(x+1)-f(x)$ converge « vers une certaine limite k, la fraction $\frac{f(x)}{x}$ convergera en même temps vers « la même limite », senza mettere la condizione dell'esistenza del limite superiore dei valori di $f(x)$ in ogni intervallo finito.

Le proposizioni 9ª-13ª sono pure dovute a CAUCHY, id., pag. 103. La proposizione 9ª è pure vera senza supporre la continuità della funzione $f(x)$, ma supponendo solamente che i valori che essa assume in un intervallo finito siano minori d'un numero finito. V. DARBOUX, *Sur un théorème fondamental de la géométrie projective*. Math. Ann., Bd. XVII, pag. 55. La 13ª fu pure trattata da POISSON, *Traité de mécanique*, t. I, pag. 14, e da ABEL, *Œuvres complètes*, Christiania 1881. I, pag. 6. Per questioni analoghe V. *Nouvelles annales*, 2e série, question 763.

Si può aggiungere, come esempio rimarchevole di discontinuità, il seguente: Pongasi $\varphi(x)=\lim\limits_{t=0}\frac{x^2}{x^2+t^2}$, si ha $\varphi(x)=1$ se $x \gtrless 0$, e $\varphi(0)=0$. Allora la funzione di x

$$\lim \varphi(\operatorname{sen} n!\,\pi x)\,.$$

il limite essendo ottenuto dando ad n valori interi e positivi crescenti indefinitamente, vale 0 se x è commensurabile, e vale l'unità se x è incommensurabile.

N. 32.

Il MAC-LAURIN, *A treatise of Fluxions*, pag. 579, definisce per derivata (flussione) d'una funzione d'una variabile: « any measures of their respective rates « of increase or decrease, while they vary, or flow, together », e precisa in seguito meglio questo concetto, e trova le derivate delle solite funzioni analitiche.

Questo modo di concepire la derivata è perfettamente rigoroso; in esso non entra esplicitamente il concetto di limite; e credo opportuno di riprodurlo in poche parole.

Definito che cosa si intende dicendo che una funzione è crescente o decrescente per un valore particolare della variabile, dicasi che una funzione $f(x)$ cresce più rapidamente d'un'altra $\varphi(x)$, per $x = x_0$, se la differenza $f(x) - \varphi(x)$ è crescente per $x = x_0$; dicasi in questo caso che $\varphi(x)$ cresce meno rapidamente di $f(x)$.

Riconosciuto che in una funzione lineare è costante il rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile, e che la funzione cresce tanto più rapidamente quanto più grande è questo rapporto, si può dare a questo rapporto costante il nome di derivata della funzione lineare.

Diremo che $f(x)$ ha, per $x = x_0$, per derivata $f'(x_0)$, se, per $x = x_0$, $f(x)$ cresce meno rapidamente d'ogni funzione lineare avente una derivata maggiore di $f'(x_0)$, e cresce più rapidamente d'ogni funzione lineare avente derivata minore di $f'(x_0)$.

* *

Per lungo tempo si è ritenuto che ogni funzione continua avesse derivata: ritenendo ciò sufficientemente dimostrato da considerazioni geometriche sulle tangenti alle curve. In seguito ne furono date dimostrazioni analitiche poco soddisfacenti. La questione fu infine risolta portando numerosi esempi di funzioni continue che mancano di derivata per qualche valore speciale (V. eserc. 6°-9°), o per infiniti, ed anche per tutti i valori della variabile. Vedi fra gli altri WEIERSTRASS, *Giornale di Crelle*, vol. 79, pag. 29; DARBOUX, *Ann. Scientif. de l'École Normale*, 2e série, t. IV, pag. 92, e t. VIII, pag. 195; DINI, *Fondamenti*, ecc., pag. 147; WIENER, *Crelle's Journal*, vol. 90, pag. 221.

* *

In natura presentansi spesso funzioni che sono definite solamente a meno di una quantità costante ϵ, che non può più essere misurata dagli strumenti che si adoperano.

Per funzioni siffatte non si può parlare di derivata. Invero, sia $f(x)$ la vera funzione, e sia $\varphi(x)$ la funzione che si sostituisce alla vera, e che ne differisce meno di ϵ: posto $f(x) = \varphi(x) + \theta(x)$, sarà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h};$$

e facendo tendere h a zero, dal sapere che $\theta(x)$ e $\theta(x+h)$ sono in valor assoluto minori della quantità fissa ϵ, nulla si può dedurre del limite dell'ultimo termine, e quindi anche del limite del membro di sinistra.

N. 36 e segg.

I ragionamenti del testo dimostrano ad un tempo l'esistenza della derivata, e la determinano. Il procedimento seguito da parecchi autori, anche moderni, di determinare delle equazioni da cui si ricava la derivata, dimostrano solamente che se la derivata esiste, essa è quella trovata. Cfr. SERRET, *Calcul*, ecc., N. 25, 26, 46, ecc.: JORDAN, *Analyse*, ecc., N. 13, 23: . . . . . STURM, *Analyse*, N. 38 e seguenti.

N. 44-45.

La dimostrazione qui data della formula fondamentale del Calcolo è attribuita ad OSSIAN-BONNET. Cfr. SERRET, *Calcul*, ecc., N. 14. Come è esposta dal SERRET si presta a qualche obbiezione. Le parole « il faudra qu'elle (la funzione) com« mence à croître en prenant des valeurs positives, ou à décroître . . . » esprimono un concetto inesatto, perchè può una funzione per un valore speciale della variabile essere nè crescente, nè decrescente, nè costante, come avviene p. es. per la funzione $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ per $x = 0$.

La dimostrazione data dal JORDAN, *Analyse*, ecc., suppone che $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ converga equabilmente verso $f'(x)$ pei valori di x compresi nell'intervallo (a, b), il che esige la continuità della derivata. (Cfr. gli esercizii 9° e 14°.) Si vegga a questo proposito una mia nota pubblicata nei *Nouvelles Annales*, 1884, pag. 45. V. anche ivi, pag. 153 e 252.

Basta, affinchè il teorema N. 45 sia esatto, che la funzione $f(x)$ abbia derivata pei valori di x interni all'intervallo (a, b), e sia continua agli estremi a e b: questa derivata può anche essere infinita per qualche valore di x, purchè di segno determinato. Cfr. DINI, *Fondamenti*, ecc., pag. 69 e segg.

* *

Una formula più generale di quelle del N. 45 è la seguente: Se $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ammettono derivata per tutti i valori di x appartenenti all'intervallo (a, b), si ha per un certo valore x_1 compreso fra a e b

$$\begin{vmatrix} f'(x_1) & \varphi'(x_1) & \psi'(x_1) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Se si fa $\psi(x) = 1$ si ha la seconda formula, e se si fa inoltre $\varphi(x) = x$ si ha la prima.

Un'altra formula che si deduce pure dal teorema del N. 44 è la seguente, dovuta a Waring. Se $f(x)$ ha derivata $f'(x)$ in un certo intervallo e $f(a) = f(b) = 0$, esiste un valore di x compreso fra a e b per cui $f'(x) - kf(x) = 0$, ove k è una costante arbitraria. Basta invero applicare il teorema accennato alla funzione $f(x)\,e^{-kx}$.

Nei *Nouv. Ann.*, 2e série, VI, pag. 415, trovansi altre dimostrazioni, in cui però si suppone la continuità della derivata.

N. 49.

Esercizio 16°. — La formula di questo esercizio è dovuta a Leibnitz, *Miscellanea Berolinensia*, 1710.

Cfr. Tardy, *Note sur une formule de Leibnitz*. Nouv. Ann., 1869, pag. 69.

Esercizio 19° — Parecchie sono le formule proposte per determinare le derivate successive delle funzioni di funzioni.

Hoppe, *Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten*. Leipzig 1845. Id., *Math. Annalen*, Bd. 4.

Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis*, Bd. II.

Most, *Math. Ann.*, Bd. 4.

Gatting, Id., Bd. 3.

Bertrand, *Calcul différentiel*, pag. 309.

Terquem, *Nouvelles Annales*, Vol. 9°.

Tardy, *Giornale di Matematiche*. Vol. 2°.

Mossa, Fais, id., id., Vol. 13°.

Teixeira, id., id., Vol. 18°.

Fergola, *Annali di Matematica*, 1858.

Faà di Bruno, id., id., Vol. 6°, 1855. Id., *Formes binaires*, pag. 4.

N. 50.

Presso i geometri dei secoli XVII e XVIII una serie rappresentava sempre la funzione da cui quella serie si otteneva con procedimenti opportuni, nè sempre si badava alla sua convergenza. A Cauchy, *Anal. alg.*, chap. VI, si debbono le definizioni più precise di cui ci serviamo al giorno d'oggi: a lui e ad Abel le dimostrazioni più rigorose dei teoremi. Però molti di essi erano già rigorosamente enunciati e dimostrati da B. Bolzano di Praga (1781-1848). V. Stolz.

Math. Ann., XVIII, 255. Tuttavia anche al giorno d'oggi trovansi definizioni e dimostrazioni incomplete, come la presente:

« Eine unendliche Reihe, welche einen bestimmten, endlichen Werth reprä-
« sentirt, heisst *convergent* ». RAUSENBERGER, *Th. d. periodischen Functionen*, Leipzig 1884, pag. 23.

Parmi oziosa la distinzione delle serie divergenti in divergenti propriamente dette, ed oscillanti od indeterminate.

N. 55.

Non è esatta la proposizione, che trovasi in alcuni trattati: « Si può sola-
« mente affermare che se $\lim u_n = 0$, la serie non può essere indeterminata ». NOVI, *Algebra superiore*, pag. 56.

Così ad es. la serie in cui $u_n = \text{sen}\sqrt{n+1}\,\pi - \text{sen}\sqrt{n}\,\pi$, è tale che $\lim u_n = 0$, perchè $u_n = 2\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{n+1}\,\pi - \sqrt{n}\,\pi}{2}\cos\dfrac{\sqrt{n+1}\,\pi + \sqrt{n}\,\pi}{2}$, e col crescere indefinitamente di n il secondo fattore è compreso fra -1 e $+1$, ed il primo ha per limite zero. Tuttavia $s_n = \text{sen}\sqrt{n}\,\pi$ col crescere di n non tende ad alcun limite, nè finito, nè infinito.

N. 56.

Questo teorema è stato enunciato da CAUCHY, *Anal.*, pag. 124, e riportato da molti altri, p. e. dal SERRET, *Calcul*, pag. 133, in questi termini:

« La série $u_0, u_1, \ldots$ est convergente lorsque la somme $u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p+1}$
« tend vers zéro, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment ».

Ma queste parole si possono interpretare nel significato del testo, e costituiscono un teorema esatto, ovvero nel significato che, fissato ad arbitrio p, la somma $u_n + \ldots + u_{n+p-1}$ tenda a zero quando n cresce indefinitamente, ed il teorema risulta falso. È appunto in questo secondo significato che l'interpretò il CATALAN, *Théorie élém. des Séries*, pag. 4, nota 2ª, il quale quindi nega l'esattezza del teorema. Una prova di più che gli enunciati delle proposizioni debbono essere ben chiari.

N. 62.

Questo teorema fu da diversi matematici enunciato in senso troppo ampio. Già OLIVIER nel *Giornale di Crelle* enunciò come condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie che $\lim n\,u_n = 0$: e ABEL dimostrò nel medesimo giornale che questa condizione non è sufficiente (*Œuvres*, pag. 399).

Però l'affermazione di ABEL che è « très juste » che « la série ne peut pas etre « convergente si le produit nu_n n'est pas nul pour $n=\infty$ », si deve interpretare nel senso che la serie non può essere convergente se nu_n tende verso un limite non nullo. Potrebbe però avvenire che la serie fosse convergente, benchè nu_n non tenda verso alcun limite. Così per es. si consideri la serie in cui i termini di indice

$$1,\ 2^3,\ 3^3, \ldots m^3, \ldots$$

siano rispettivamente

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2}, \ldots \frac{1}{m^2}, \ldots$$

e gli altri termini siano tali da formare da loro una serie convergente qualunque. Il prodotto nu_n, se n è un cubo $=m^3$, varrà $m=\sqrt[3]{n}$: e facendo crescere indefinitamente n, nu_n assume valori comunque grandi.

Quindi è inesatta l'asserzione del BERTRAND, *Calcul diff.*, pag. 239, che in una serie convergente « nu_n tend nécessairement vers zéro ». Cfr. Id., id., pag. 232: NOVI, *Analisi algebrica*, pag. 102.

È invece esatto il teorema:

« In una serie convergente a termini positivi decrescenti continuamente $\lim nu_n=0$ ». In questi termini è enunciato p. e. dal CATALAN, op. cit., ma la dimostrazione che ne dà è incompleta, perchè dimostra solamente che se $\lim nu_n$ è diverso da zero, la serie è divergente, senza occuparsi del caso in cui questo limite non esiste.

N. 63.

Questo teorema è dovuto a CAUCHY. V. CATALAN, *Séries*, pag. 16.

N. 67.

La formula di TAYLOR, senza termine complementare, secondo il modo d'allora d'intendere le serie, fu data da questo matematico nel 1715.

È però ad osservarsi che GIO. BERNOULLI diede nel 1694 una formula, che porta il suo nome, e che equivale all'incirca a quella di Taylor, perchè con cambiamenti di lettere dall'una si può passare all'altra. Cfr. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, tomo I, pag. 125. Onde non credo fuori posto la sua reclamazione di priorità: « Quam eandem seriem postea Taylorus, interjecto plusquam viginti « annorum intervallo, in librum, quem edidit a. 1715, *De Methodo incremen-*

« *torum* transferre dignatus est, sub alio tantum characterum abitu ». *Opera*, T. II, pag. 584.

Il resto fu calcolato sotto forma (3) da LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1813, chap. VI, dove pure è calcolato sotto forma di integrale definito. La forma (2) fu data da CAUCHY, *Exercices de mathématiques*, tomo I, pag. 29, e *Comptes rendus des séances de l'Ac. Franç.*, 1840, pag. 642.

Furono date dimostrazioni sbagliate della serie di Taylor da J. KÖNIG, *Nouv. Ann.*, 1874, pag. 270, e da É. AMIGUES, *Nouv. Ann.*, 1880, pag. 105.

* *

Riguardo alla validità della serie di Taylor, o meglio, per semplicità, di quella di Maclaurin, si possono presentare i seguenti casi:

La serie può essere valida per ogni valore di x, come avviene per e^x, sen x, cos x, ecc.:

Ovvero può essere valida solamente per valori di x convenientemente limitati, come avviene per $\log(1+x)$, $(1+x)^m$, arc tang x, ecc.;

Ovvero la serie può essere convergente per alcuni valori di x, senza che la sua somma valga la funzione data. Questo avviene per es. per la funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}$, la quale si annulla, insieme a tutte le sue successive derivate per $x=0$, e quindi la serie di Maclaurin è convergente per tutti i valori di x, senza avere per somma la funzione.

Ma si possono anche portare esempi di funzioni, per cui la serie di Maclaurin è divergente per ogni valore di x (tolto il valore $x=0$). Si consideri ad es. la serie

$$(1)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a_n x^n}{1+b_n x^2},$$

ove le a_n sono quantità arbitrarie, e le b_n sono quantità positive scelte in modo che la serie precedente sia convergente per un intervallo contenente nel suo interno il valore $x=0$. I termini della serie precedente sono in valore assoluto minori, a partire dal terzo ($n=2$) dei termini

$$(2)\qquad \frac{a_2}{b_2},\quad \frac{a_3}{b_3}x,\quad \frac{a_4}{b_4}x^2,\ldots\ldots$$

e questa serie si può effettivamente rendere convergente; fatto per esempio $b_n=\pm n!\,a_n$, scegliendo il segno in modo che b_n risulti positivo, la serie formata coi valori assoluti della (2) sarà convergente per ogni valore di x, e la (1) sarà convergente e di convergenza equabile in ogni intervallo finito.

Se si deriva più volte la serie (1) si troveranno altre serie, ciascheduna delle quali si decompone nella somma di parecchie del tipo $C\sum \frac{x^{n-\alpha} a_n b_n^r}{(1+b_n x^2)^r}$, i cui termini sono in valore assoluto minori dei termini $C\frac{a_n}{b_n} x^{n-\alpha-2}$, e quindi tutte le serie formate derivando i termini della serie proposta sono convergenti, e di convergenza equabile in ogni intervallo. Perciò la funzione $f(x)$ ha derivate determinate e finite per ogni valore di x; e si ricava

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad \frac{1}{2!}f''(0)=a_2-a_0 b_0,\quad \frac{1}{3!}f'''(0)=a_3-a_1 b_1,$$

$$\frac{1}{4!}f^{\text{IV}}(0)=a_4-a_2 b_2+a_0 b_0^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=a_n-a_{n-2}b_{n-2}+a_{n-4}b^2_{n-4}-\cdots\cdots$$

Di qui si scorge che si possono determinare le quantità arbitrarie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in modo che $f(x)$ e le sue derivate abbiano per $x=0$ valori dati ad arbitrio: e si possono scegliere questi valori in modo che la serie di Maclaurin sia divergente per ogni valore di x. Basta p. e. fare $f^{(n)}(0)=[n!]^2$.

Vedi Du Bois-Reymond, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'scher Reihenentwickelung.* Math. Ann., XXI, pag. 109.

* *

La formula di Taylor si può enunciare a questo modo:

Se esistono le derivate 1ª, 2ª, ... nª di $f(x)$ per $x=x_0$, si ha

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0)+\epsilon],$$

ove ϵ è una quantità che ha per limite zero, con tendere a zero di h. Fatto $n=1$, si ha la formula che serve per definizione della derivata (N. 43). Naturalmente, se $f(x)$ ha derivata nª per $x=x_0$, dovrà avere le derivate precedenti anche nelle vicinanze di x_0: ma sopra la derivata nª non è necessario supporre nè l'esistenza nè la continuità nelle vicinanze di questo valore. Questa formula si dimostra assai facilmente, e basta per le applicazioni alla teoria ai massimi e minimi, e alla geometria. Questo modo di concepire la formula di Taylor parmi presenti molta analogia con quelli degli antichi geometri, quando ancor non si considerava la convergenza delle serie.

N. 69.

Maclaurin diede questa formula nel suo *A treatise of fluxions*, pag. 610, aggiungendo però: « This theorem was given by D. Taylor ».

N. 70.

Gli sviluppi in serie di e^x, sen x e cos x furono dati per la prima volta da NEWTON.

N. 72.

È stato dimostrato da LIOUVILLE che il numero e non può essere radice d'alcuna equazione di secondo grado a coefficienti commensurabili, ed infine da HERMITE, *Sur la fonction exponentielle*, Paris 1874, che esso non può essere radice d'alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali.

N. 75.

La formula del binomio fu data da NEWTON nelle lettere a LEIBNITZ del 13 giugno e 24 ottobre 1676. La discussione completa della convergenza della serie, e della sua somma fu fatta da ABEL, *Œuvres*, pag. 219.

N. 79.

Questa serie fu data da NIC. MERCATOR, *Logarithmotechnica*, 1668.

N. 82-83.

Questa serie è dovuta a JACOB GREGORY, *Exercitationes geometricæ*, 1668. JOHN MACHIN calcolò col suo procedimento il valore di π con 100 cifre decimali nel 1706.

Da lungo tempo è dimostrata l'irrazionalità di π e π^2. LINDEMANN, *Ueber die Zahal* π, Math. Ann., XX, pag. 213, dimostrò infine che esso non può essere radice d'alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali, e quindi l'impossibilità della quadratura del cerchio colla riga e col compasso.

N. 84-87.

« Le proprietà delle funzioni interpolari furono esposte in una Memoria del « tomo XVI (pag. 329-349) degli *Annali di matematica* del GERGONNE (Nismes « 1825-1826), compilata dallo stesso GERGONNE sopra note molto sommarie som- « ministrate dall'AMPÈRE. Poscia (nel 1840) quelle proprietà vennero riprodotte « dal CAUCHY nel tomo XI dei *Comptes rendus*, p. 755-788, e in questo mede-

« simo volume XI, pag. 835-847 (e id. pag. 933), il CAUCHY ha indicato l'uso « delle funzioni interpolari per la risoluzione delle equazioni numeriche. Tali « funzioni sono le medesime che sono state introdotte da NEWTON nella sua più « generale formula d'interpolazione che si trae dal Lemma V, libro III del- « l'opera *Principia mathematica Philosophiae naturalis*, dopo la proposizione XL « (3ª edizione, Londini 1726, pag. 486-487) e che è riferita dal LAGRANGE nelle « *Lezioni elementari di matematica alla Scuola Normale* (*Journal de l'École* « *Polytechnique*, tom. II, 7ᵉ et 8ᵉ cahiers, pag 276: (*Œuvres de Lagrange*, Paris « 1877, tom. VII, pag. 285) sotto la forma:

$$« \quad y = P + Q_1(x-p) + R_2(x-p)(x-q) + S_3(x-p)(x-q)(x-r) + \text{ ecc.}:$$

« essa fu citata anche da JACOBI nel giornale di CRELLE, tom. 30, pag. 138.

« Il CAUCHY ampliò nel 1821 la formula di LAGRANGE, determinando una « funzione razionale fratta che abbia un numeratore di grado $n-1$, e un de- « nominatore di grado m, e che per $m+n$ valori dati di x assuma $m+n$ « valori dati (*Analyse algébrique*, p. 528). JACOBI trattò poi lungamente la « medesima questione nella sua memoria testè citata (CRELLE, tom. 30, p. 127- « 156), e vi diede molteplici espressioni del numeratore e del denominatore della « cercata frazione col mezzo di determinanti, avvertendo essere di grande im- « portanza nella teorica dei trascendenti Abeliani la rappresentazione di dati « valori con funzioni razionali fratte. Egli vi considerò eziandio espressamente « il caso particolare in cui tutti o parecchi dei valori $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ asse- « gnati ad x divengono eguali fra loro (ivi, pag. 148).

« Anche il prof. BELLAVITIS si occupò a più riprese delle funzioni interpolari. « Veggasi la sua Memoria letta all'Istituto Veneto il 22 giugno 1856, *Sulla* « *risoluzione numerica delle equazioni*, § 15, e l'altra del 17 giugno 1860: « *Appendice alle Memorie sulla risoluzione numerica delle equazioni*, § 30; « inoltre il *Riassunto* litografico *delle lezioni di Algebra* date da lui nell'Uni- « versità di Padova nel 1867-68, § 81 e 84 ». GENOCCHI, *Intorno alle funzioni interpolari*. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, XIII, 1878.

In questa stessa nota il prof. GENOCCHI esprime le funzioni interpolari, e quindi anche il resto d'una formula d'interpolazione, con integrali multipli; ed in un'altra nota *Sopra una proprietà delle funzioni interpolari*. Atti della R. Acc. d. Scienze di Torino, XVI, 1881, dimostra la formula del N. 86, senza ricorrere ad integrali. Ma la dimostrazione riportata nel testo è dovuta a SCHWARZ, *Atti dell'Acc. di Torino*, Vol. XVII, 1882, benchè il concetto già si trovi nel BERTRAND, *Calc. diff.*, pag. 164. Se le variabili sono complesse, la funzione interpolare si può mettere sotto forma di integrale definito, preso lungo un contorno, analoga a quella notissima d'una derivata. Vedi PEANO, *Sulle funzioni interpolari*, Atti della R. Acc. di Torino, Vol. XVIII, 1883, dove trovansi alcuni sviluppi in serie ottenuti colle funzioni interpolari.

Altre proprietà di queste funzioni sono enunciate agli esercizi 31-34 alla fine del capitolo. Le funzioni interpolari di x^m coincidono colle funzioni *Aleph* di WRONSKI, ossia *funzioni omogenee complete*. V. TRUDI, *Giornale di Matematiche*, Vol. 2°, pag. 153.

V. ancora FROBENIUS, *Ueber Relationen zwischen den Nährungsbrüchen von Potenzenreihen*, Giornale di Crelle, 90, pag. 1.

* *

Una formula più generale di quella del N. 87 è la seguente: Se le $n+1$ funzioni $f_0(x)\ f_1(x)\dots\dots f_n(x)$ hanno derivate fino all'ordine $n-1$ pei valori di x appartenenti ad un intervallo entro cui trovansi i valori che attribuiremo ad x, sarà

$$\begin{vmatrix} f_0^{(n-1)}(u) & f_1^{(n-1)}(u) & \dots\dots f_n^{(n-1)}(u) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \dots\dots f_n(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & \dots\dots f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & \dots\dots f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0\,.$$

ove u è un valore medio fra le $x_1 x_2 \dots x_n$. Basta in questa formula fare $f_0(x)=f(x)$, e le funzioni successive eguali alle potenze successive 0, 1, 2,... di x, per ritrovare la formula del N. 87.

Più generalmente ancora, il determinante le cui linee si ricavano dalla

$$f(a),\ f'(a)\dots f^{(\alpha)}(a),\ f(b),\ f'(b),\dots f^{(\beta)}(b),\dots f(l),\ f'(l)\dots f^{(\lambda)}(l),\ f^{(n)}(u)$$

attribuendo alla lettera f varii indici, ove $n=(\alpha+1)+(\beta+1)+\dots+(\lambda+1)-1$, ed u è un conveniente valore di x medio fra $a, b, \dots l$, è nullo.

In questa formula sta compresa la precedente, e la formula di Taylor.

* *

Le funzioni interpolari sono suscettibili di numerose applicazioni, e permettono di dimostrare con facilità grandissima certe proposizioni di cui molti autori dànno dimostrazioni complicate, e spesso inesatte. P. e. se $F(t)$ è una funzione di t e di altre variabili, detti $t_1 \dots t_n$ n valori di t, il sistema delle n equazioni

$$F(t_1)=0\,,\quad F(t_2)=0\,,\dots\dots F(t_n)=0,$$

si può pure scrivere

$$F(t_1)=0\,,\quad F(t_1,t_2)=0,\dots\dots F(t_1,t_2\dots t_n)=0:$$

e se si fanno tendere $t_1 t_2 \ldots t_n$ con legge arbitraria verso t, le equazioni precedenti diventano al limite

$$F(t) = 0\,, \quad F'(t) = 0\,, \ldots\ldots F^{(n-1)}(t) = 0.$$

Questa proposizione occorre in geometria, nello studio del contatto delle curve e superficie. Si confronti la dimostrazione precedente, p. e. con quella data dal JORDAN, *Cours d'Analyse*, pag. 225.

N. 88.

Il limite superiore dell'errore commesso adoperando le tavole d'interpolazione dei logaritmi, trovato in tal modo colle funzioni interpolari, è quattro volte minore di quello dato dal SERRET, *Calcul*, tomo I, N. 119, ed è l'ottavo di quello dato dallo STURM, *Analyse*, I. N. 137.

N. 91-93.

Le regole di convergenza dei prodotti infiniti furono trovate dal CORIOLIS, e pubblicate da CAUCHY. *Anal. alg.*, nota IX. Le regole di convergenza, indipendentemente dall'ordine dei fattori, da WEIERSTRASS, *Crelle*, 51, e DINI, *Ann. di Mat.*, Serie 2ª, II.

N. 94-96.

Il CAUCHY nel *Cours d'Analyse*, pag. 131, ammise che la somma d'una serie convergente, i cui termini sono funzioni continue di una variabile, sia pure funzione continua. L'inesattezza di questa proposizione, ove non si impongano altre condizioni restrittive, fu rilevata da ABEL, V. *Œuvres complètes*, Christiania 1871, tom. I. pag. 224. Cfr. DU BOIS-REYMOND, *Notiz über einen Cauchy'schen Satz*, ecc., Math. Ann., Bd. IV.

Non è esatto il teorema, riferentesi alla derivazione per serie, enunciato dal DUHAMEL, *Journal de Liouville*, XIX, pag. 118, e riportato dal BERTRAND, *Calcul différentiel*, pag. 271:

« Lorsqu'une série $u_0 + u_1 + \ldots\ldots$ dont tous les termes sont réels et fonctions
« d'une même variable x, est convergente pour toutes les valeurs de x comprises
« entre deux limites x_1 et x_2, et devient discontinue pour une valeur particu-
« lière $x = a$, de telle sorte que pour $x = a - \epsilon$ et $x = a + \epsilon$ la différence
« des valeurs qu'elle acquiert reste finie quand ϵ est infiniment petit, la série
« des dérivées $\dfrac{du_0}{dx} + \dfrac{du_1}{dx} + \ldots$ est divergente pour $x = a$ ».

Per convincersi della sua inesattezza, pongasi p. e.

$$f(x, n) = \frac{(n x)^2}{1 + (n x)^2} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}.$$

Si verifica facilmente, che se $x > 0$ $\lim_{n=\infty} f(x, n) = 1$,

se $x < 0$, $\lim_{n=\infty} f(x, n) = -1$,

e se $x = 0$. $\lim_{n=\infty} f(0, n) = 0$,

e che inoltre la derivata $f'_x(0, n) = 0$. Si immagini ora la serie in cui la somma dei primi n termini sia appunto $f(x, n)$: questa sarà

$$f(x, 1), \quad f(x, 2) - f(x, 1), \quad f(x, 3) - f(x, 2), \ldots\ldots$$

ed è convergente per tutti i valori di x, ed ha per somma rispettivamente 1, 0 e -1 secondochè x è positiva. o nulla, o negativa: quindi la somma della serie considerata è discontinua per $x = 0$, e tuttavia la serie formata colle derivate dei termini, per $x = 0$, che è

$$0, \quad 0, \quad 0, \ldots\ldots$$

è convergente. L'inesattezza di questa proposizione già fu notata da Dini e Darboux.

N. 97.

Es. 4°. Questa formula fu data da Giac. Bernoulli, *Ars conjectandi*, p. 97. Moltissimi autori si occuparono di questa questione. Essi trovansi in gran parte citati nel vol. 8° degli *Annales scientif. de l'Éc. Norm. sup.*, 2me série, pag. 55 e segg.

7°. V. Catalan, *Nouv. Ann.*, 1re série, t. XVII, pag. 434 e XVIII, p. 152 e 197; Realis, *Nouv. Ann.*, 2e série, t. VII, pag. 159.

10° e 11°. Una dimostrazione assai elegante di questi teoremi fu data da Laurent, *Nouv. Ann.*, 1862, pag. 127.

20°-27°. V. Eulero, *Introductio*, ecc., cap. IX, X e XI, ove trovansi moltissimi altri prodotti infiniti e serie. I ragionamenti di Eulero però non sono più ai nostri tempi soddisfacenti, a causa delle nuove definizioni introdotte.

28°. V. Eulero, *Introductio*, ecc., cap. XV.

N. 99.

A proposito della continuità delle funzioni di più variabili, merita di essere rilevata la seguente inesattezza, enunciata da CAUCHY, *Cours d'Analyse*, p. 37:
« Soit ... $f(x, y, z\ldots)$ une fonction de plusieurs variables, $x, y, z, \ldots$; et « supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières $X, Y, Z, \ldots$ attri- « buées à ces variables, $f(x, y, z, \ldots)$ soit à-la-fois fonction continue de x. « fonction continue de y, fonction continue de z, etc. On prouvera aisément « que, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des quantités infiniment petites, et si l'on « attribue à $x, y, z, \ldots$ les valeurs $X, Y, Z, \ldots$, ou des valeurs très voisines, la « différence $f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots)-f(x, y, z, \ldots)$ sera elle-même infiniment « petite ».

Il 2° esempio del N. 123 prova l'inesattezza di questa proposizione.

N. 103.

Un esempio assai semplice di funzione di due variabili, in cui non è lecito invertire l'ordine delle differenziazioni, è dato al N. 123, 5°.

Altro esempio men semplice trovasi nell'HARNACK, *Diff. u. Int. R.*, pag. 97, e DINI, *Lezioni di analisi infinitesimale,* Pisa 1877-78, I, pag. 127.

N. 109.

Erroneamente il SERRET, *Calcul*, ecc., tom. I, pag. 194, ritiene l'esattezza della formula di Taylor per le funzioni di più variabili, senza supporre la *continuità* delle derivate di ordine n. Questa continuità, che non è necessaria per le funzioni d'una sola variabile, lo diventa per quelle a più, perchè nella dimostrazione si derivano delle funzioni composte, dove si suppone appunto la continuità delle derivate (V. N. 106).

Per riconoscere che la formula non è più applicabile se le derivate sono discontinue, si consideri la funzione

$$f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ove il radicale si prende sempre positivo, e si suppone $f(0,0)=0$. Questa è funzione continua per tutti i valori delle variabili, ed ha per derivate parziali

$$f'_x(x, y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad f'_y = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

per tutti i valori di x ed y, tolta la coppia (0, 0) per cui ambe le derivate sono nulle. Si applichi a questa funzione la formola

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k f'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

ove si faccia $x_0 = y_0 = -a$, $h = k = a + b$: si avrà

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} + (a+b)\left[f'_x(t, t) + f'_y(t, t)\right],$$

posto $t = x_0 + \theta h = y_0 + \theta k$. Ma

$f'_x(t, t) = f'_y(t, t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \; 0, \; +\frac{1}{2\sqrt{2}}$ secondochè $t \lesseqgtr 0$; quindi si dedurrebbe

$$\frac{b-a}{b+a} = -1, \; 0, \; +1,$$

il che è assurdo, essendo a e b quantità arbitrarie.

N. **110** e segg.

V. Dini. *Analisi inf.*, I, pag. 153.

N. **121.**

V. Eulero. *Mechanica*, 1736, tomo II, § 106, 497, e *Calc. diff.*, § 225. Si noti la dimostrazione dell'inverso del teorema di Eulero.

Le relazioni fra le derivate successive devonsi a Lacroix, *Calc. diff.*, § 292.

N. **122.**

I determinanti funzionali furono studiati da Jacobi, *De determinantibus functionalibus*, Giornale di Crelle, t. 22, pag. 319. V. anche le sue *Vorlesungen über Dynamik*, pag. 100. Il Cayley, *Crelle*, t. 52, pag. 276, li chiamò *Jacobiani*. La notazione, analoga alle derivate, è dovuta a Donkin. V. Baltzer, *Determinanten*, Leipzig 1875, pag. 127.

Il determinante Hessiano fu studiato da Hesse, *Crelle*, t. 28, pag. 84, e ricevette questo nome dal Sylvester, V. Baltzer, id., pag. 131.

* *

A proposito di questi determinanti, merita di essere rilevata una proposizione inesatta enunciata dal Bertrand. *Calcul diff.*, pag. 63. La proposizione è:

Siano $y_1 y_2 \ldots y_n$ funzioni delle variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$: date alle x n sistemi di incrementi, di cui uno sia $\Delta_i x_1$, $\Delta_i x_2 \ldots \Delta_i x_n$, e calcolati gli incrementi corrispondenti delle y, e siano $\Delta_i y_1$, $\Delta_i y_2, \ldots \Delta_i y_n$, il rapporto del determinante formato colle Δy al determinante delle Δx ha per limite il Jacobiano delle y rispetto alle x, ove si facciano tendere le Δx a zero.

P. es. fatto $n=2$, il determinante $\begin{vmatrix} \Delta_1 x_1 & \Delta_1 x_2 \\ \Delta_2 x_1 & \Delta_2 x_1 \end{vmatrix}$ si annulla facendo p. es. $\Delta_1 x_1 = \Delta_1 x_2$, e $\Delta_2 x_1 = \Delta_2 x_2$, il che si può supporre, senza impedire la piccolezza delle Δx; ma il determinante $\begin{vmatrix} \Delta_1 y_1 & \Delta_1 x_2 \\ \Delta_2 y_1 & \Delta_2 y_2 \end{vmatrix}$ non si annulla in generale per quei valori delle Δx; quindi il rapporto dei due determinanti assume, per valori comunque piccoli delle Δx, valori comunque grandi, ed anche il valore ∞: quindi non tende verso alcun limite.

Si potrebbe dimostrare che il teorema è vero solo quando o le funzioni date sono legate da una relazione lineare a coefficienti costanti, ed in questo caso il determinante del numeratore è identicamente nullo, ovvero quando le y sono quozienti di funzioni lineari delle x, il denominatore essendo lo stesso in tutte le y. In questo caso, servendoci del linguaggio della geometria a più dimensioni, se le x sono coordinate cartesiane d'un punto in uno spazio, e le y coordinate d'un punto d'un secondo spazio, fra i due spazii passa una corrispondenza omografica.

N. 124-126.

Trovansi in molti trattati di calcolo, negli enunciati e dimostrazioni riferentisi alle espressioni indeterminate, delle inesattezze che meritano essere rilevate. Ad es. il Serret, *Calcul*, I, N. 124, dice che se le due funzioni date tendono a zero, e se hanno derivata determinata, il rapporto delle funzioni ed il rapporto delle derivate tendono ad uno stesso limite, o crescono amendue al di là d'ogni limite. Invece si dimostra solamente che se il rapporto delle derivate tende ad un limite (e se $\psi'(x)$ non è nullo nelle vicinanze del valore considerato), anche il rapporto delle funzioni tende allo stesso limite: quindi si deduce che se il rapporto delle funzioni tende ad un limite, il rapporto delle derivate non può tendere verso un limite diverso da esso, ma non si dimostra che il rapporto delle derivate tenda ad un limite.

E che questo non si possa dimostrare lo provano i seguenti esempi:

Le funzioni siano $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, e x: il loro rapporto tende verso zero col tendere di x a zero; esse hanno derivate per tutti i valori di x, ma (V. N. 40, es. 9°) il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite.

In questo esempio la prima funzione ha derivata discontinua per $x = 0$. Ma è facile il portarne un altro in cui le derivate delle due funzioni siano continue.

Si considerino perciò le funzioni $x^2 f(x)$, e x^2, ove $f(x)$ è una funzione che ci riserveremo fissare. Il rapporto delle funzioni vale $f(x)$, le loro derivate sono

$$2xf(x) + x^2 f'(x)\,, \quad \text{e} \quad 2x\,.$$

ed il loro rapporto vale

$$f(x) + \frac{1}{2} x f'(x)\,.$$

Si prenda ora per $f(x)$ una funzione tale che

1° Esista un limite di $f(x)$ quando x tende a zero.

2° Che abbia derivata per tutti i valori di x, tolto al più il valore $x = 0$.

3° Che $f'(x)$ e $xf'(x)$ col tendere di x a zero non tendano ad alcun limite.

4° Che $x^2 f(x)$ tenda a zero col tendere di x a zero.

Soddisfa a tutte queste condizioni p. e. la funzione $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen} \frac{1}{x^4} \frac{dx}{x}$. Ed allora si ha che il rapporto delle due funzioni date tende ad un limite, che esse hanno derivata determinata e continua per tutti i valori di x, ma il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite.

La regola pel caso della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ è dimostrata in séguito dal Serret incompletamente, perchè ammette a priori l'esistenza del limite cercato. La stessa dimostrazione incompleta è data da Sturm, *Analyse*, I, pag. 152, da Hermite, *Analyse*, pag. 200, da Schlömilch, *Compendium der höheren Analysis*, Braunschweig 1881, pag. 143, e l'oscurità in questa questione è resa ancor maggiore dallo Sturm, ivi, pag. 156; ove dice che « avant d'appliquer les « règles il faudra bien s'assurer que l'expression proposée, ainsi que $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, ap- « proche d'une limite ».

V. Stolz, *Ueber Grenzwerthe der Quotienten*. Math. Annalen, Bd. XIV, pag. 231, e XV, pag. 556; Rouquet, *Nouvelles Annales de Math.*, 2e série, t. XVI, pag. 113.

N. 129-130.

Meritano qualche attenzione i risultati di questi numeri, perchè si riferiscono a proposizioni male enunciate e dimostrate in gran numero di trattati. Così spesso si dice che il limite del rapporto dell'incremento d'una funzione di più variabili al suo differenziale totale è l'unità (STURM, *Analyse*, N. 102: JORDAN, *Analyse*, N. 19, 22, ecc.): che nella formula di Taylor per le funzioni di più variabili il rapporto del resto dopo un termine al termine stesso abbia per limite zero col tendere a zero degli incrementi delle variabili (JORDAN, *Anal.*, N. 203: SERRET, *Calcul*, N. 134, 152, ecc.: BERTRAND, *Calcul*, I, pag. 392). V. anche TODHUNTER, *Calc. diff.*, Napoli 1880, N. 166.

Che queste proposizioni siano inesatte, risulta evidentemente dai varii teoremi del N. 130. Ben è vero che questi autori suppongono spesso, p. e. nella formula di Taylor, che i rapporti degli incrementi delle variabili rimangano indeterminati: ma allora non è più determinato il concetto di limite d'una funzione di più variabili. Del resto nelle applicazioni della formula di Taylor ai massimi e minimi delle funzioni di più variabili e ai punti singolari delle curve ammettono effettivamente che si possa determinare una quantità η, in modo che attribuendo alle variabili incrementi minori di η, il rapporto del resto dopo un termine al termine stesso sia costantemente minore d'una quantità ϵ fissata ad arbitrio, vale a dire attribuiscono alla parola limite lo stesso nostro significato.

N. 133-136.

Le dimostrazioni dei criterii per riconoscere i massimi e minimi delle funzioni di più variabili, date dal più gran numero di trattati, sono fondate sulla proposizione che nella formula di Taylor per le funzioni di più variabili il rapporto del resto dopo un termine qualunque al termine stesso abbia per limite zero col tendere a zero degli incrementi delle variabili. Questa proposizione è falsa in generale, se il termine considerato non è forma definita negli incrementi delle variabili: e se esso è forma definita, quella proposizione ha bisogno di dimostrazione.

Non è esatto il criterio enunciato dal SERRET, *Calcul*, pag. 219: « le maximum ou le minimum *a lieu* si, pour les valeurs de $h, k, \ldots$ qui annulent « d^2f et d^3f, d^4f a constamment le signe — ou le signe + ».

Per vedere l'inesattezza di questa proposizione, si consideri p. e. la funzione intera

$$f(x, y) = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx)\,,$$

ove $p > q > 0$, e fatto $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, si avrà

$$f(h, k) = 4pqh^2 - 2(p + q)hk^2 + k^4.$$

Il sistema dei termini a secondo grado è positivo per tutti i valori di h e k.

tolto il valore di $h=0$, per cui si annullano i termini a terzo grado, e il sistema dei termini a quarto grado è positivo. Quindi, secondo il criterio del Serret, $f(x, y)$ è minima per $x=0$. Ma è facile assicurarci che questo non è. Pongasi invero $y^2 = 2lx$: facendo tendere x a zero anche y tende a zero, e si avrà

$$(x, \sqrt{2lx}) = 4(l-p)(l-q)x^2.$$

Questa quantità è a nostro arbitrio positiva o negativa, secondochè l è fuori, o dentro all'intervallo (p, q): quindi la funzione f assume in ogni intorno dei valori $(0, 0)$ di x ed y valori positivi e valori negativi, ossia valori maggiori e minori di $f(0, 0)=0$, e f non è nè massima nè minima.

Lo stesso errore è commesso dal BERTRAND. *Calcul*, ecc., pag. 504; TODHUNTER, *Calcolo*. N. 229, ecc.

N. **141** e segg.

Gran parte dei teoremi sulle variabili complesse furono enunciati ed ordinati da CAUCHY. *Anal. Alg.*, chap. VII e segg.

N. **145**.

La moltiplicazione di due serie infinite è pure valida sotto altre condizioni. V. N. 160 in fine: PRINGSHEIM, *Multiplication bedingt convergirenden Reihen*, Math. Ann.. XXI: MERTENS, *Crelle*, Bd. 79, pag. 182.

N. **146**.

Le relazioni fra le funzioni trigonometriche ed esponenziali sono dovute a GIO. BERNOULLI. benchè pubblicate la prima volta da EULERO. *Introductio*, ecc., pag. 104.

N. **148**.

V. per cenni storici sulle funzioni iperboliche una nota di HOÜEL, *Nouv. Ann.* 1864. pag. 417.

N. **154**.

Le condizioni $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$ e $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$ sono necessarie e sufficienti per l'esistenza della derivata. Le condizioni $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy} = 0$, ed analoga per la v, sono pure necessarie, ma non sufficienti, come per inesattezza dice il KÖNIGSBERGER. *Th. d. Elliptischen Funct.*. Leipzig 1874. pag. 17 e 18.

N. 160.

Il teorema a pag. 238 fu enunciato e dimostrato da ABEL, *Œuvres*, I, pag. 223. La dimostrazione del testo è identica a quella di Abel. Generalizzò alquanto questo teorema FROBENIUS, *Giornale di Crelle*, vol. 89, pag. 262.

N. 168.

L'integrazione delle funzioni algebriche razionali mediante la decomposizione in frazioni parziali è dovuta a GIO. BERNOULLI, *Opera omnia*, t 1, p. 393. La teoria fu in seguito perfezionata, e semplificate le regole per determinare i numeratori costanti (che secondo Bernoulli sono determinati facendo sparire i denominatori, ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x), da EULERO, CAUCHY, ecc.

N. 174.

La decomposizione della frazione $\dfrac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$ nelle frazioni semplici è stata trattata da EULERO, vol. I delle *Mémoires de Pétersbourg* (an. 1809), e *Introductio in Analysin*, I, pag. 23: CRELLE, vol. IX e X del suo giornale: CLAUSEN, vol. VIII dello stesso: JACOBI, id., vol. XV, pag. 108. V. anche TRUDI, *Giornale di Matem.*, vol. 2°, pag. 225, e BALTZER, *Determinanten*, Leipzig 1875, pag. 109.

La decomposizione dell'integrale d'una funzione razionale nella sua parte razionale, e nella trascendente, come è fatta in questo numero, è dovuta ad HERMITE, *Nouvelles Annales*, 1872, pag. 145, e *Annales de l'École norm. sup.*, 2me série, 1872, tomo I, pag. 214.

N. 193.

Questa definizione dell'integrale definito è equivalente a quella data da RIEMANN, *Ges. Werke*, pag. 213; ma il considerare l'integrale definito come il limite inferiore di certe somme, e limite superiore di altre, pare alquanto più semplice che il considerare l'integrale come il limite verso cui tende una somma. Le quantità S_1 ed S_2 furono già introdotte da V. VOLTERRA, *Sui principii del calcolo integrale*, Giornale di Matematiche, XIX. Una dimostrazione elementare della proposizione che se $S_1 = S_2$, il loro valore comune sia il limite verso cui tende la somma del N. 192, Coroll. (e che qui non è riportata), fu data da me in una nota negli *Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino*, Aprile 1883.

N. 194-197.

Delle quattro proposizioni del N. 194, le tre prime, che già trovansi in Euclide, bastano a riconoscere l'eguaglianza o diseguaglianza delle aree piane poligonali. La quarta, di cui implicitamente anche Euclide si serve, è nettamente enunciata come *postulato* più volte da ARCHIMEDE nei libri *Della sfera e del cilindro,* postulato 5°, *Delle spirali*, nella prefazione, e specialmente nella prefazione alla *quadratura della parabola*, ed essa è necessaria per decidere dell'eguaglianza di aree non decomponibili in parti sovrapponibili. V. STOLZ, *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*. Math. Ann., XXII. V. anche DE ZOLT, *Principii della eguaglianza di poligoni*, Milano 1881.

Indipendentemente da ogni postulato, supposto di saper misurare ogni area piana limitata da un poligono, risulta dal N. 195, che preso ad arbitrio un numero maggiore di $\int_a^b f(x)\,dx$, si può formare un'area poligonale misurata da questo numero, e contenente nel suo interno l'area in questione, e preso un numero minore di quell'integrale, si può formare un'area poligonale misurata da questo numero e contenuta nell'interno dell'area data. Analogamente pei volumi, ed archi di linee.

N. 200.

Lo sviluppo in prodotto infinito di $\frac{\pi}{2}$, primo esempio di prodotti infiniti, fu dato da WALLIS (1616-1703), *Arithmetica infinitorum*.

G. PEANO.

CALCOLO DIFFERENZIALE

CAPITOLO I.

Delle Funzioni

Dei Numeri e delle Quantità.

1. Le quantità in Analisi si misurano e si rappresentano con numeri. Un numero è *intero* se risulta dall'unione di più unità, *fratto* se risulta dall'unione di unità e parti aliquote di unità. I numeri interi e fratti diconsi *commensurabili*.

2. Un numero commensurabile a divide tutti i numeri commensurabili in due categorie: numeri minori di a e numeri non minori di a (ovvero numeri non maggiori, e numeri maggiori di a), ed ogni numero della prima categoria è minore d'ogni numero della seconda. Viceversa, se tutti i numeri commensurabili trovansi divisi in due categorie, in modo che ogni numero della prima sia minore d'ogni numero della seconda, ammetteremo, estendendo il concetto di numero, che esista un numero non minore d'alcuno di quelli della prima categoria nè maggiore d'alcuno della seconda: e se nessun numero commensurabile gode di questa proprietà, diremo *incommensurabile* il numero così definito. Esso sarà maggiore di tutti quelli della prima categoria, e minore di tutti quelli della seconda.

Due numeri incommensurabili diconsi eguali se sono definiti dalle stesse categorie, ossia se ogni numero commensurabile minore dell'uno è pure minore dell'altro, e viceversa; il numero incommensurabile a si dirà minore di b, se esistono numeri commensurabili maggiori di a e minori di b.

3. Finora considerammo i numeri in valore assoluto; unendovi il concetto di direzione si hanno i numeri *positivi* e *negativi*. Il lettore già deve conoscere il modo di eseguire su essi le operazioni algebriche, e le loro proprietà; ed è specialmente per ben fissare il concetto, fondamentale nelle nostre ricerche, dei numeri incommensurabili, che si è ricordato quanto precede. Più tardi compariranno i numeri immaginarii.

4. Sono misurabili (con numeri positivi) le grandezze d'un sistema tali che: 1° se ne sia definita l'uguaglianza e la disuguaglianza — 2° di due grandezze disuguali si possa riconoscere la maggiore dalla minore — 3° che si sappiano sommare, e si sappia sottrarre la minore dalla maggiore — 4° che ogni grandezza si possa dividere in parti eguali — 5° e che ogni grandezza A, ripetuta un numero conveniente di volte, possa superare ogni altra grandezza B; e quindi che una parte aliquota di B possa rendersi minore d'ogni altra grandezza A.

Per eseguire questa misura, si prenda ad arbitrio nel sistema dato una grandezza U, che diremo *unità di misura;* essendo le grandezze sommabili e divisibili, si potranno immaginare tutte le grandezze nU, n essendo un numero commensurabile. Sia A una grandezza qualunque del sistema; o esisterà un valore di $n = a$, tale che $A = aU$, ed a è il numero che misura A; ovvero non esisterà, ed allora, in virtù dell'ipotesi 5ª, sonvi dei valori di n per cui $nU < A$, ed altri per cui $nU > A$; il numero (incommensurabile) maggiore dei primi e minore dei secondi valori di n sarà il numero che misura A. Due grandezze A e B disuguali sono misurate da numeri a e b pure disuguali; invero, se $A < B$, la differenza $B — A$ è misurata da un numero positivo (non nullo); ma questo numero vale $b — a$, dunque $b — a$ è positivo, ed a e b sono disuguali.

5. Fra le grandezze che compaiono in varie scienze alcune soddisfanno in modo evidente alle condizioni precedenti, e sono misurabili, come lunghezze di segmenti rettilinei, intervalli di tempo, ecc. Altre come le aree di superficie, le lunghezze di archi curvilinei, ecc., esigono, per potersi misurare, opportune definizioni e dimostrazioni.

Delle Funzioni e dei Limiti.

6. Nelle questioni che tratteremo possono comparire delle quantità cui si suppongono attribuiti valori determinati e fissi, e diconsi *costanti*, ed altre che si suppongono poter assumere diversi valori, e diconsi *variabili*. Fra le variabili ve ne sono di quelle, cui noi possiamo attribuire ad arbitrio successivamente diversi valori, e diconsi *variabili indipendenti*, ed altre i cui valori dipendono dai valori dati alle prime, e diconsi *variabili dipendenti* o *funzioni delle prime*.

Noi tratteremo dapprima le funzioni d'una sola variabile indipendente, e diremo che: *una funzione* y *di* x *è data in un intervallo* (a, b), *se ad ogni valore di* x *compreso fra* a *e* b *corrisponde un valore unico e determinato per* y — qualunque sia il mezzo di determinarlo.

Così ad esempio x^2 è funzione definita di x per ogni valore di x, e quindi è data in ogni intervallo: $\sqrt{x}$, intendendo per radice la radice aritmetica di x, è data per tutti i valori positivi di x; invece $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{x}$ è funzione di x definita per i soli valori interi e positivi della variabile, ecc.

Si suole indicare che y è una funzione di x scrivendo $y=f(x)$; $f(a)$ rappresenta il valore della funzione corrispondente al valore a della variabile. Altre funzioni di x si rappresenteranno con $\varphi(x)$ $f'(x)$.... Una notazione analoga serve anche per le funzioni di più variabili; così $F(x, y, z)$ significa una funzione delle tre variabili x y z, ecc.

7. *Dicesi che col tendere di* x *verso* a, y = f(x) *ha per limite* A, *se, fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare una quantità* h *tale che per ogni valore di* x, *che differisca da* a *meno di* h, *sia* f(x) — A *in valore assoluto minore di* ϵ.

Dicesi che col crescere indefinitamente di x, y = f(x) *ha per limite* A, *se, fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare un numero* N *tale che per ogni valore di* x > N *sia* f(x) — A < ϵ *in valore assoluto.*

Si suole indicare che $f(x)$ ha per limite A col tendere di x verso a, o col crescere indefinitamente di x scrivendo $\lim f(x)_{x=a} = A$, ovvero $\lim f(x)_{x=\infty} = A$, od anche più semplicemente $\lim f(x) = A$, quando si possa sottintendere il modo di variare di x.

Se non esiste alcuna quantità A che goda della proprietà enunciata, si dice che $f(x)$, col tendere di x ad a, o col crescere indefinitamente di x, non tende verso alcun limite.

Così, ad esempio, x^2 col tendere da x a 0 ha per limite 0, perchè, preso ad arbitrio ϵ, sarà $x^2 - 0 = x^2 < \epsilon$ per ogni valore di $x < \sqrt{\epsilon}$; $\sqrt{x}$ col tendere di x a 0 ha pure per limite 0, perchè sarà $\sqrt{x} - 0 < \epsilon$ per ogni valore di $x < \epsilon^2$; $1 + \frac{1}{x}$ col crescere indefinitamente di x ha per limite 1, perchè la differenza fra la funzione ed 1, che è $\frac{1}{x}$, sarà minore di ϵ per ogni valore di $x > \frac{1}{\epsilon}$; se $f(x)$ ha un valore costante l pei valori di x sufficientemente prossimi ad a o sufficientemente grandi, col tendere di x ad a, ovvero col crescere indefinitamente di x il limite di $f(x)$ è il valore costante l, perchè la differenza $f(x) - l$ è per quei valori di x nulla, e quindi minore d'ogni quantità ϵ, il che si esprime dicendo che una costante ha per limite sè stessa; ecc.

Affinchè si possa parlare del limite di y per $x = a$, o per x crescente indefinitamente, occorre che la funzione sia data per un sistema di valori di x prossimi quanto si vuole ad a, o grandi quanto si voglia. La funzione può essere ovvero non data per $x = a$; se $f(a)$ è dato, escluderemo, parlando di limite, il valore a fra quelli che può assumere x; onde si deduce che $\lim f(x)_{x=a}$ può essere diverso da $f(a)$, perchè $f(a)$ non dipende dai valori di $f(x)$ per x prossimo ad a, mentre da questi solamente dipende il limite di $f(x)$.

8. *Dicesi che* f(x) *è funzione continua per* $x=x_0$, *se lim* $f(x)=f(x_0)$, *quando* x *tende verso* x_0. E, ricordando la definizione del limite: « dicesi che $f(x)$ è continua per $x=x_0$, se, fissata ad arbitrio una quantità ϵ, si può determinare un intervallo x_0-h, x_0+h in modo che per ogni valore di x in esso sia in valore assoluto $f(x)-f(x_0)<\epsilon$ ».

Una funzione dicesi continua in un intervallo (a, b), *se è continua per tutti i valori di* x *in questo intervallo.*

Una funzione non continua dicesi *discontinua:* quindi $f(x)$ sarà discontinua per $x=x_0$ se col tendere di x ad x_0 $f(x)$ non tende verso alcun limite, ovvero, tende verso un limite diverso da $f(x_0)$.

Teoremi sui Limiti.

9. Teorema I. — *Una quantità non può tendere contemporaneamente verso due limiti diversi.*

Infatti pongasi per assurdo che una quantità P funzione di x tenda contemporaneamente verso due limiti A e B diversi. Posto $P=A+\alpha$, $P=B+\beta$, α e β, che sono le differenze fra P ed i suoi limiti A e B si possono rendere tanto piccoli quanto si vuole; e dall'eguaglianza $A+\alpha=B+\beta$ si ricava $A-B=\beta-\alpha$, eguaglianza impossibile, se A e B sono diversi, perchè il membro di sinistra è costante e non nullo, ed il membro di destra si può rendere tanto piccolo quanto si vuole.

10. Teorema II. — *Il limite della somma di più quantità, che abbiano tutte limite determinato, esiste ed è uguale alla somma dei limiti.*

Sia infatti $y=y_1+y_2+\ldots+y_n$ e supponiamo che y_1, y_2, ... y_n, funzioni d'una variabile x, abbiano per limiti a_1, a_2, ... a_n quando x tende verso a. Posto

$$y_1=a_1+\alpha_1; \quad y_2=a_2+\alpha_2; \quad \ldots \quad y_n=a_n+\alpha_n,$$

$\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sono quantità che si possono rendere tanto piccole quanto si vuole. Sommando si avrà: $y = (a_1 + a_2 \ldots + a_n) + (\alpha_1 + \ldots \alpha_n)$ ossia $y - (a_1 + \ldots a_n) = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$. Fissiamo ora ϵ quantità piccola ad arbitrio e prendiamo x tale che ogni α sia $< \frac{\epsilon}{n}$ allora sarà $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n < \epsilon$, $y - (a_1 + \ldots a_n) < \epsilon$, ossia $\lim y = a_1 + \ldots + a_n$.

11. TEOREMA III. — *Il limite del prodotto di più quantità aventi limiti determinati esiste ed è uguale al prodotto dei limiti.*

Sia $y = PQ$ dove P e Q sono funzioni di x aventi limiti determinati A e B, allora $P = A + \alpha$, $Q = B + \beta$ dove α e β possono prendersi minori di qualunque quantità piccola quanto si voglia. Sostituendo avremo: $y = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta$ donde $y - AB = A\beta + B\alpha + \alpha\beta$.

Fissiamo una quantità ϵ piccola ad arbitrio e si dia ad x un valore tale che $A\beta < \frac{\epsilon}{3}$ $\left(\text{basterà porre } \beta < \frac{\epsilon}{3A}\right)$; $B\alpha < \frac{\epsilon}{3}$ $\left(\alpha < \frac{\epsilon}{3B}\right)$ e finalmente $\alpha\beta < \frac{\epsilon}{3}$ $\left(\text{basterà prendere } \alpha < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \beta < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right)$; è chiaro che α e β possono soddisfare a tutte queste condizioni ed allora sarà $y - AB < \epsilon$; ossia $\lim y = AB$.

Se $y = P\,Q\,R\,S \ldots$, sarà $\lim y = \lim P \,.\, \lim Q\,R\,S \ldots = \lim P \,.\, \lim Q \,.\, \lim R\,S \ldots = \ldots\ldots = \lim P \,.\, \lim Q \,.\, \lim R \,.\, \lim S \ldots\ldots$, il che dimostra il teorema qualunque sia il numero dei fattori.

12. TEOREMA IV. — *Il limite del quoziente di due quantità aventi limiti determinati, il limite del divisore essendo diverso da zero, esiste, ed è uguale al quoziente dei limiti.*

Infatti sia $y = \frac{P}{Q}$, $\lim P = A$, e $\lim Q = B$, e $B \gtrless 0$; posto $P = A + \alpha$, $Q = B + \beta$, sarà $\frac{P}{Q} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha B - \beta A}{B(B + \beta)}$. Dicansi $A_1\, B_1\, \alpha_1\, \beta_1$ i valori assoluti di A, B, α, β; potremo supporre β numericamente minore di una quantità $h < B_1$; $B + \beta$ sarà numericamente maggiore di $B_1 - h$, ed il valore della frazione $< \frac{\alpha_1 B_1 + \beta_1 A_1}{B_1 (B_1 - h)}$, la quale quantità si può supporre minore d'una quantità arbitraria ϵ col supporre $\dfrac{\alpha_1 B_1}{B_1(B_1 - h)} < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $\dfrac{\beta_1 A_1}{B_1(B_1 - h)} < \dfrac{\epsilon}{2}$, ossia $\alpha_1 < \dfrac{\epsilon}{2}(B_1 - h)$, $\beta_1 < \dfrac{\epsilon}{2}\dfrac{B_1}{A_1}(A_1 - h)$, e quindi $\lim \dfrac{P}{Q} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim P}{\lim Q}$.

13. Teorema V. — *Se una quantità è sempre compresa fra due altre che tendono verso uno stesso limite, anche la prima tende verso questo limite.*

Infatti se P e Q sono due variabili che tendono verso A, ed R è sempre compreso fra P e Q, sarà anche $R - A$ compreso fra $P - A$ e $Q - A$: e se si rendono $P - A$ e $Q - A$ minori di ϵ sarà anche $R - A$ minore di ϵ, ossia R ha per limite A.

14. Teorema VI. — *Se col crescere continuamente di* x, y *cresce continuamente, ma mantenendosi sempre inferiore ad una quantità* A, y *tende verso un limite che è o* A *stesso, o una quantità minore di* A.

Infatti tutte le quantità si possono distinguere in due categorie: quantità che possono essere superate dai valori di y, e quantità che non ne possono essere superate: appartengono alla prima le quantità minori dei valori di y, alla seconda la quantità A; ed ogni numero della prima categoria è minore d'ogni numero della seconda: onde queste due categorie individuano un numero L che non viene mai superato dai valori di y, e tale che ogni numero minore di L è superato da valori di y; dico che L è il limite verso cui tende y col crescere di x. Invero, fissata una quantità ad arbitrio ϵ, il numero $L - \epsilon$ è superato da qualche valore di y, e quindi anche dai valori successivi, vale a dire da un certo valore di x in poi è $L - \epsilon < y < L$, ossia la differenza $y - L$ si conserva minore di ϵ, c. v. d.

15. Teorema VII. — *Se, col crescere indefinitamente di* x, y = f(x) *tende verso un limite, fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare un numero* N *tale che la differenza* f(x) — f(x'), *sia sempre minore di* ϵ *per tutte le coppie di valori di* x *e* x' *non minori di* N.

Invero, sia A il limite di y: si prenda N tale che per ogni valore di $x \geqq$ di N sia $f(x) - A < \frac{\epsilon}{2}$: sia x' un altro valore $\geqq$ N; sarà anche $f(x') - A < \frac{\epsilon}{2}$: e $f(x) - f(x') < \epsilon$, c. v. d.

Teorema VIII. — *Se fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare un numero* N *tale che la differenza* f(x) — f(x') *sia sempre* $< \epsilon$ *per tutti i valori di* x *e di* x' *non minori di* N, *col crescere indefinitamente di* x, f(x) *tende verso un limite.*

Infatti, diamo ad ϵ i valori decrescenti indefinitamente $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3 > \ldots$ e siano $N_1 N_2 N_3 \ldots$ i valori corrispondenti di N. Dando ad x un valore $> N_1$, sarà $f(x) - f(N_1)$ minore in valore assoluto di ϵ_1, ossia $f(x)$ sarà compreso fra $f(N_1) + \epsilon_1$ ed $f(N_1) - \epsilon_1$, che dirò a_1 e b_1; dando ad x un valore $> N_2$, $f(x$ sarà compreso fra $f(N_2) + \epsilon_2$ ed $f(N_2) - \epsilon_2$: e quindi, dando ad x valori maggiori di N_1 ed N_2, $f(x)$ sarà minore della più piccola delle due quantità a_1 e $f(N_2) + \epsilon_2$, che dirò a_2, e maggiore della più grande delle quantità b_1 e $f(N_2) - \epsilon_2$, che dirò b_2; onde per questi valori di x sarà $a_2 > f(x) > b_2$, ed $a_1 \geqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$, e $a_2 - b_2 \leqq 2\epsilon_2$: in modo analogo, per tutti i valori di $x > N_1, N_2, N_3$ sarà $f(x)$ compresa fra la minore delle due quantità a_2 e $f(N_3) + \epsilon_3$, che dirò a_3, e la maggiore delle due b_2 e $f(N_3) - \epsilon_3$, che dirò b_3: così continuando si avrà una serie di quantità $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ che, quando variano, decrescono continuamente, ad un'altra serie $b_1 b_2 b_3 \ldots$ che crescono continuamente, in modo però che le prime sono sempre maggiori delle seconde; e quindi le a e le b tendono verso limiti, che sono gli stessi, perchè, essendo $a_n - b_n \leqq 2\epsilon_n$, sarà lim $a_n =$ lim b_n; ed $f(x)$, sempre compresa fra le a e le b, tenderà pure verso lo stesso limite c. v. d.

16. Una quantità variabile dicesi *infinitesima* se ha per limite zero. In una stessa questione possono comparire diversi infinitesimi, e si sogliono paragonare fra loro; si dice che due quantità α e β sono infinitesime dello stesso ordine se il loro rapporto tende verso un limite finito e diverso da zero; si dirà che α è infinitesimo di ordine minore di β se $\frac{\alpha}{\beta}$ ha per limite zero, e quindi che α è infinitesimo d'ordine maggiore di β se $\frac{\alpha}{\beta}$ cresce in valore assoluto indefinitamente.

Fra i diversi infinitesimi che compaiono nella questione si suol sceglierne uno ad arbitrio, cui si dà il nome di infinitesimo principale, e sia h; si dirà che un altro infinitesimo α è di ordine n

se tende verso un limite finito diverso da zero il rapporto $\frac{\alpha}{h^n}$. Così ad esempio $\operatorname{sen} x$ è infinitesimo di primo ordine prendendo x per infinitesimo principale, perchè $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ha per limite 1, come vedremo: e $1 - \cos x$ è infinitesimo di secondo ordine, perchè

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x}\right)^2 \text{ ha per limite } \frac{1}{2}.$$

Si dice che $y = f(x)$ diventa infinita per $x = a$ se col tendere di x ad a i valori assoluti di y crescono indefinitamente, e quindi $\frac{1}{f(x)}$ è infinitesima. Anche per gli infiniti si può parlare di ordini, ed una quantità α si dirà infinita di ordine n rispetto all'infinito principale h se $\frac{\alpha}{h^n}$ tende verso un limite finito diverso da zero.

Una quantità variabile che tenda verso un limite finito si potrebbe perciò considerare come infinitesima d'ordine zero, ed una quantità infinita come infinitesima d'ordine negativo.

Non è vero però che, prendendo ad arbitrio l'infinitesimo principale, ogni altro infinitesimo sia di ordine misurato da un numero, ossia, α ed h essendo due infinitesimi, non è vero che si possa sempre determinare un numero n tale che $\frac{\alpha}{h^n}$ tenda verso un limite finito, e ciò perchè può avvenire che il rapporto $\frac{\alpha}{h^n}$ per certi valori di n possa non tendere verso alcun limite finito, nè verso lo zero, nè verso l'infinito, ed allora non possiamo dire se l'ordine di α sia maggiore o eguale, o minore di n; inoltre, anche supposto che questo non si presenti, perchè può avvenire che $\frac{\alpha}{h^n}$ qualunque sia n tenda sempre verso zero, o sempre verso ∞, od anche che esista un numero m tale che per $n < m$ quel rapporto tenda a zero, per $n > m$ tenda ad ∞, senza che per $n = m$ tenda ad un limite finito.

Teoremi sulle Funzioni continue.

17. Teorema I. — *Se una funzione è continua per* $x = x_0$ *e* $f(x_0)$ *è diverso da zero, essa conserva un segno costante nelle vicinanze di* x_0.

Infatti posto: $f(x) = f(x_0) + \alpha$ se $f(x_0)$ è diverso da zero potremo determinare un intervallo comprendente x_0 tale che per ogni valore di x in questo intervallo sia: $\alpha < f(x_0)$ in valore numerico. Allora $f(x_0) + \alpha$ ossia $f(x)$ avrà costantemente il segno di $f(x_0)$.

18. Teorema II. — *Se una funzione è continua in un certo intervallo* (a, b) *e per* $x = a$ *e per* $x = b$ *assume valori di segno contrario, la funzione* f(x) *si annulla per un valore di* x *compreso tra* a *e* b.

Infatti si consideri il valore medio fra a e b; se per esso $f(x)$ non si annulla, nel qual caso sarebbe dimostrato il teorema, $f(x)$ assumerà un certo segno che sarà o quello di $f(a)$ o quello di $f(b)$; si consideri fra i due intervalli in cui si è diviso (a, b) quello alle cui estremità $f(x)$ assume segni contrarii, e diconsi a_1 e b_1 i limiti di questo intervallo; sarà

$$a_1 \geq a ; \quad b_1 \leq b$$

ed il nuovo intervallo sarà la metà del primo. Si ragioni sull'intervallo $a_1\, b_1$ come si è ragionato sull'intervallo $a\, b$, e si troverà un intervallo $a_2\, b_2$ ai cui estremi $f(x)$ assume valori di segno contrario. Così continuando, si troverà una serie di intervalli $a\, b$, $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$, ... $a_n\, b_n$, ... in numero che si può rendere grande ad arbitrio (ove non si trovi un valore per cui $f(x)$ si annulli, ed il teorema resterebbe dimostrato) che soddisferanno alle condizioni:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq \ldots \quad b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$$

e
$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

ed in generale:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

La serie delle quantità $a, a_1, a_2 \dots a_n$, crescenti sempre ma tutte inferiori a b, tendono verso un limite: analogamente le quantità $b, b_1, b_2 \dots b_n$ decrescenti sempre, mantenentisi però superiori ad a, tendono verso un limite col crescere di n, e l'ultima formola dice che $\lim a_n = \lim b_n$.

Detto x_1 il limite comune delle quantità a e delle quantità b, si potrà prendere n così grande che a_n differisca da x_1 di una quantità minore di ϵ piccolo quanto si vuole, e che b_n differisca pure da x_1 di una quantità minore ϵ; vale a dire in un intervallo comunque piccolo ma finito comprendente x_1, sonvi valori di x per cui $f(x)$ è positivo, ed altri per cui $f(x)$ è negativo. Dovrà adunque essere $f(x_1) = 0$ perchè se $f(x_1)$ fosse diverso da 0, la funzione $f(x)$ non assumerebbe in un intervallo sufficientemente piccolo comprendente x_1 valori di segno contrario; quindi è dimostrato il teorema.

19. TEOREMA III. — *Se* f(x) *è continua nell'intervallo* (a, b), *e* f(a) = A, f(b) = B, *variando* x *nell'intervallo* (a, b), f(x) *assume ogni valore compreso fra* A *e* B.

Infatti sia K una quantità compresa fra A e B e supponiamo, p. e., che:

$$A < K < B.$$

Pongasi $F(x) = f(x) - K$: si avrà $F(a) = A - K < 0$, e $F(b) = B - K > 0$, e poichè la funzione $F(x)$ continua assume per $x = a$, e per $x = b$ valori di segno contrario, esisterà un valore x_1 di x compreso fra a e b per cui $F(x_1) = 0$, ossia $f(x_1) - K = 0$, ed $f(x_1) = K$, c. v. d.

20. Dicesi *limite superiore* dei valori d'una quantità variabile y una quantità l non minore d'alcuno dei valori di y, ma tale che ogni quantità minore di l possa essere superata da qualche valore di y. Dicesi che l' è il *limite inferiore* dei valori di y se nessun valore di y è minore di l', ed esistono valori di y minori d'ogni quantità più grande di l'

Teorema. — *Se una quantità variabile* y *assume valori minori di una quantità fissa* A, *esiste un limite superiore dei valori di* y (*eguale o minore di* A).

Infatti tutti i numeri trovansi divisi in due categorie: numeri che possono essere superati da qualche valore di y, e numeri che non ne possono essere superati: ogni numero della prima categoria è minore d'ogni numero della seconda: quindi queste due categorie individuano un numero l non minore di alcuno di quelli della prima, nè maggiore di alcuno di quelli della seconda categoria: l sarà il limite superiore dei valori di y. Invero l non può essere superato da alcun valore di y, perchè se a fosse un valore di y, ed $a > l$, ogni numero compreso fra a ed l apparterrebbe alla prima categoria, e quindi non è vero che l non sia minore d'alcun numero di essa: ed ogni numero minore di l appartenendo alla prima categoria può essere superato da qualche valore di y.

In modo analogo si dimostra che:

Se una quantità variabile y *assume valori maggiori d'una quantità B, esiste un limite inferiore dei valori di* y.

Teorema. — *Se* l *è il limite superiore (inferiore) dei valori di* f(x) *quando* x *varia in un intervallo finito* a b, *esiste un valore* x_1 *compreso nello stesso intervallo, tale che in ogni intervallo comunque piccolo comprendente* x_1 *nel suo interno il limite superiore (inferiore) dei valori di* f(x) *è ancora* l.

Infatti si divida l'intervallo $a\,b$ in due parti eguali; il limite superiore dei valori $f(x)$ in ciascheduno di questi intervalli esiste, non è maggiore di l, ed in uno è eguale ad l: si divida l'intervallo $a_1\,b_1$ in cui il limite superiore di $f(x)$ è ancora l in due parti eguali, e così via.

Si avrà una serie di quantità $a\;a_1\;a_2\;....$ sempre crescenti quando variano, ed un'altra serie di quantità $b\;b_1\;b_2\;....$ decrescenti, ma non indefinitamente, e quindi tendono verso uno stesso limite x_1.

Si prenda ora un intervallo $x_1 - \epsilon\;\; x_1 + \epsilon'$ contenente nel suo interno x_1; esisterà un valore di n per cui $x_1 - \epsilon < a_n < x_1 < b_n < x_1 + \epsilon'$; e siccome il limite superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo $a_n\,b_n$ è l, anche il limite superiore dei valori di $f(x)$ in ogni intervallo contenente x_1 nel suo interno è ancora l, c. v. d.

Si dimostrerebbe nello stesso modo che:

Se non esiste limite superiore (o inferiore) dei valori di f(x) *quando* x *varia nell'intervallo* (a, b), *esiste un valore* x_1 *compreso in questo stesso intervallo tale che in ogni intervallo comunque piccolo comprendente* x_1 *nel suo interno manca il limite superiore (o inferiore) dei valori di* f(x).

21. Dicesi che una funzione $f(x)$ diventa massima relativamente ad un intervallo (a, b) per $x = x_0$ se $f(x_0)$ non è minore d'alcun valore di $f(x)$ nello stesso intervallo. Dicesi che $f(x)$ diventa minima per $x = x_0$ relativamente allo stesso intervallo se $f(x_0)$ non è maggiore d'alcun altro valore di $f(x)$ nello stesso intervallo.

Teorema. — *Se* f(x) *è funzione continua nell'intervallo* (a, b), *esiste un limite superiore ed un limite inferiore dei valori di* f(x) *che ne sono anche il massimo ed il minimo.*

Infatti, si neghi l'esistenza del limite superiore dei valori di $f(x)$, esisterà un valore x_1 compreso nell'intervallo (a, b) tale che in ogni intervallo comprendente x_1 nel suo interno manca il limite superiore dei valori di $f(x)$; ma $f(x)$ essendo continua anche per $x = x_1$ fissata ad arbitrio ϵ, si può determinare un intervallo $x - h$, $x + h$ in modo che per ogni valore di x in esso sia $f(x) < f(x_1) + \epsilon$, e quindi esiste un limite superiore dei valori di $f(x)$ in un intervallo comprendente x_1 nel suo interno, il che è contradditorio coll'ipotesi precedente. Dunque esiste un limite superiore dei valori di $f(x)$ in questo intervallo, e sia l: si vuol dimostrare che $f(x)$ assume anche il valore l. Sia x_1 quel valore di x tale che in ogni intervallo contenente x_1 nel suo interno il limite superiore è ancora l; fissato piccolo ad arbitrio ϵ, si può determinare un intervallo $x_1 - h$, $x_1 + h$, tale che per tutti i valori di x in esso $f(x) - f(x)$ è minore di ϵ; inoltre, avendo l il limite superiore dei valori di $f(x)$ in esso, esisteranno dei valori di x in questo intervallo che differiranno di meno di ϵ di l, quindi $l - f(x_1)$ deve essere minore di 2ϵ: e siccome ϵ è piccolo ad arbitrio, ciò non sarà possibile se non quando $f(x_1) = l$, c. v. d.

In modo analogo si ragionerebbe pel limite inferiore, e pel minimo.

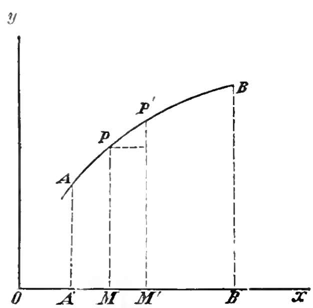
Teorema. — *Se* f(x) *è continua nell'intervallo* (a, b), *fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *se ne può determinare un'altra* h *tale che per ogni coppia di valori* x *ed* x' *della variabile, la cui differenza sia minore di* h, f(x) — f(x') *è minore di* ϵ.

Sia $a < b$: si determini $a_1 > a$ tale che per ogni valore di x compreso fra a e a_1 sia $f(x) - f(a) < \frac{\epsilon}{3}$; poi una quantità $a_2 > a_1$ tale che per ogni valore di x compreso fra a_1 e a_2 sia $f(x) - f(a_1) < \frac{\epsilon}{3}$, e così via, il che è possibile, perchè $f(x)$ è continua nell'intervallo $a\ b$. Si avrà una serie di quantità $a\ a_1\ a_2 \ldots.$ crescenti continuamente. Dico che esse possono crescere in modo tale da raggiungere b. Invero lo si neghi; le quantità $a\ a_1\ a_2 \ldots.$ tenderanno verso un limite eguale o minore di b, e sia c. Si determini un intervallo $c - \sigma$, c

tale che $f(x) - f(c) < \frac{\epsilon}{6}$ per ogni valore di x in esso; le quantità $a\, a_2$ .... avendo per limite c, se ne troverà una a_r contenuta in questo intervallo, e sarà $f(a_r) - f(c) < \frac{\epsilon}{6}$, e x essendo contenuto nell'intervallo (a_r, c) sarà anche $f(x) - f(c) < \frac{\epsilon}{6}$, e quindi $f(x) - f(a_r) < \frac{\epsilon}{3}$, e posso porre $a_{r+1} = c$; vale a dire c può essere raggiunto da qualche valore della a, ossia effettivamente si può dividere l'intervallo $a\, b$ in altri intervalli in numero finito $a\, a_1\;\; a_1\, a_2 \ldots\; a_{n-1}\, b$ tali che x essendo compreso nell'intervallo (a_s, a_{s+1}) sia $f(x) - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3}$. Sia h il più piccolo di questi intervalli; dico che $f(x) - f(x^1) < \epsilon$ se $x - x' < h$; invero x ed x' saranno o contenuti in uno stesso intervallo (a_s, a_{s+1}), ed allora $f(x) - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3}$, $f(x') - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3}$ e $f(x) - f(x') < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$; ovvero sono contenuti in due intervalli contigui (a_{s-1}, a_s) e (a_s, a_{s+1}), e quindi

$$f(x) - f(a_{s-1}) < \frac{\epsilon}{3},\; f(a_{s-1}) - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3},\; f(x') - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3},$$

e $f(x) - f(x') < \epsilon$, c. v. d.



22. Le funzioni d'una variabile si sogliono rappresentare geometricamente con curve. Sia $y = f(x)$ una funzione di x data in un intervallo (a, b); segnati due assi cartesiani $o\,x$ ed $o\,y$, si dia ad x un valore qualunque compreso in questo intervallo, e sia $o\,M$ un segmento misurato dal numero x; si segni il segmento $M\,P$ parallelo all'asse delle y, e misurato dal numero $f(x)$; variando x nell'intervallo (a, b), M varierà fra i due punti A' e B' le cui ascisse sono a e b ed il punto P assumerà infinite posizioni, che diremo formare una linea $A\,B$. Se la funzione $f(x)$ è continua, anche la linea è continua, ossia, fissato ad arbitrio ϵ si può determinare un arco $P\,P'$ di curva tale che le distanze dei suoi punti dal punto P siano minori di ϵ; invero si ha che $P\,P' < P\,Q + Q\,P'$, e siccome $P\,Q$ si può prendere piccolo ad arbitrio, e $Q\,P'$, che rappresenta l'incremento della funzione si può pure rendere piccolo ad arbitrio, perchè la funzione è continua anche $P\,P'$ si può rendere piccolo ad arbitrio.

Viceversa, se si ha una curva continua riferita ad assi cartesiani tale che ogni parallela all'asse delle y la incontri in un punto solo, questa curva dà luogo ad una funzione continua. Invero dando ad x un valore qualunque, si avrà un valore corrispondente per y; e siccome $Q\,P' < P\,P'$ (supposti gli assi ortogonali) e $P\,P'$ si può rendere piccolo ad arbitrio, si potrà pure rendere tale $Q\,P'$ che rappresenta l'incremento della funzione.

Si noti però, che, avendo noi chiamato *linea* il sistema di punti rappresentativi dei valori d'una funzione, non sarà lecito estendere, senza dimostrazione, alle linee così definite le proprietà delle linee che più comunemente si adoperano, e tanto meno poi di ricorrere a queste proprietà per dimostrare dei teoremi sulle funzioni.

Esempi di Funzioni continue.

23. I teoremi dimostrati ai n[i] 10, 11, 12 dicono che la somma, e il prodotto di funzioni continue sono pure funzioni continue; ed è pure funzione continua il quoziente di due funzioni continue, purchè non si annulli la funzione divisore. Quindi ogni funzione algebrica razionale intera di x, che si ottiene eseguendo su x e su costanti delle addizioni e moltiplicazioni, è funzione continua per tutti i valori di x. Le funzioni fratte saranno continue per tutti i valori di x per cui non si annulli qualche denominatore.

24. Funzione esponenziale. — Consideriame la $y = a^x$ dove a è un numero qualunque positivo. Ad ogni valore intero di x corrisponde un valore determinato per y; se si dà ad x un valore fratto $\frac{m}{n}$, $a^{\frac{m}{n}}$ ha, come si sa dall'algebra, n valori, di cui uno solo reale e positivo; sarà questo il valore che intendiamo rappresentato con a^x; e se ad x si dà un valore x_0 incommensurabile, si assumerà per a^{x_0} il limite verso cui tende a^x, dove si diano ad x valori commensurabili approssimantisi indefinitamente ad x_0. Con queste restrizioni, la funzione a^x, detta esponenziale, è data per ogni valore di x.

Essa è continua. Per dimostrarlo premettiamo che quando x tende verso 0, $\lim a^x = 1$.

Infatti, supposto dapprima $a > 1$, essendo ϵ una quantità positiva piccola ad arbitrio, ed m un numero intero e positivo, che ci riserveremo fissare, sarà soddisfatta la disuguaglianza $a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ se posso determinare m in modo che $(1 + \epsilon)^m > a$, e siccome

$$(1 + \epsilon)^m = 1 + m\,\epsilon + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\,\epsilon^2 + \ldots\ldots$$

ed i termini di questo polinomio sono tutti positivi, sarà $(1 + \epsilon)^m > 1 + m\,\epsilon$: quindi sarà soddisfatta la disuguaglianza precedente se $1 + m\,\epsilon \leqq a$, ossia $m \leqq \frac{a-1}{\epsilon}$.

Diansi ora ad x valori positivi non maggiori di $\frac{1}{m} = \frac{\epsilon}{a-1}$; sarà $a^x > 1$, e $a^x < 1 + \epsilon$, quindi per valori positivi sufficientemente piccoli di x, $a^x - 1$ si può rendere minore di una quantità ϵ piccola ad arbitrio, ossia $\lim a^x = 1$ per x infinitesimo positivo. Se x è un infinitesimo ma negativo ed uguale a $-y$, sarà $a^x = \frac{1}{a^y}$, e col tendere di x a 0, anche y tende a 0, a^y tende ad 1, ed $\frac{1}{a^y} = a^x$ ha per limite 1. Lo stesso avverrà per $a < 1$. Infatti posto $\frac{1}{a} = b$, sarà $b > 1$ ed $a^x = b^{-x}$, e col tendere di x a 0, b^x e b^{-x} tendono verso 1 come si è dimostrato.

Diamo ora ad x l'incremento h: l'incremento della funzione è $a^{x+h} - a^x = a^x\,(a^h - 1)$; ora a^x ha un valore finito ed $a^h - 1$ ha per limite 0, quindi l'incremento della funzione è infinitesimo coll'incremento della variabile.

La disuguaglianza trovata: $(1 + \epsilon)^m > a$ per valori sufficientemente grandi di m, dice che una quantità $1 + \epsilon > 1$ si può elevare ad una tale potenza da superare ogni quantità grande quanto si vuole. Quindi la funzione a^x con $a > 1$, cresce, col crescere di x, al di là di ogni limite. La stessa quantità a^x, quando x tende verso $-\infty$, cioè assume valori negativi, ma grandi quanto si vuole, tende verso 0, perchè, posto $x=-y$, $a^x=\frac{1}{a^y}$, e col tendere di x a $-\infty$, y tende a $+\infty$, a^y ad ∞, ed $\frac{1}{a^y}$ a zero. Se $a<1$, a^x, col tendere di x a $+\infty$, tende a zero; e col tendere di x a $-\infty$, tende a $+\infty$.

Si è definito, quando x_0 è incommensurabile, $a^{x_0}=\lim_{x=x_0}a^x$, e per rendere del tutto rigoroso quanto precede conviene dimostrare che questo limite esiste. Diansi perciò alla variabile valori commensurabili x che tendono ad x_0 crescendo; se $a>1$, a^x andrà crescendo continuamente, ma non indefinitamente, perchè, se x' è un numero commensurabile $>x_0>x$, sarà $a^x<a^{x'}$; quindi a^x tende ad un limite. Diansi ora alla variabile valori commensurabili x' che tendono ad x_0 decrescendo; $a^{x'}$ va decrescendo continuamente, ma non indefinitamente, quindi tende verso un limite; e $\lim a^x=\lim a^{x'}$, perchè $\frac{a^{x'}}{a^x}=a^{x'-x}$ e, col tendere di x ed x' ad x_0, $x'-x$ tende a zero assumendo valori commensurabili, e $a^{x'-x}$ tende ad uno, perchè la dimostrazione precedente nulla lascia a desiderare se si dànno alla variabile valori commensurabili. Inoltre se $x<x_0<x'$ sarà $a^x<a^{x_0}<a^{x'}$.

Se x_0 ed x_1 sono numeri incommensurabili, e $x_0<x_1$, sarà ancora $a^{x_0}<a^{x_1}$, sempre supposto $a<1$; invero sia x un numero commensurabile tale che $x_0<x<x_1$, sarà $a^{x_0}<a^x<a^{x_1}$, e $a^{x_0}<a^{x_1}$. Essendo x_0 ed x_1 incommensurabili sarà ancora $a^{x_0}.a^{x_1}=a^{x_0+x_1}$; invero siano x ed x_1 valori commensurabili che tendono a x_0 e x_1: sarà $a^x.a^{x'}=a^{x+x'}$, e passando al limite si trova la formola a dimostrarsi, ecc.

25. Funzioni di Funzioni. — Alcune volte una variabile y è legata ad una variabile x per mezzo d'una terza variabile u; cioè si ha

$$y=f(u) \text{ ed } u=\varphi(x).$$

Allora dato ad x un valore x_0, u assumerà un valore u_0 tale che $u_0 = \varphi(x_0)$, ed y un valore y_0 tale che $y_0 = f(u_0)$ e si dice che la y è funzione di funzione della x o funzione di x per mezzo di u.

Se le funzioni f e φ sono continue, anche la y, considerata come funzione della x, è continua.

Infatti essendo f funzione continua di u, fissata una quantità piccola ad arbitrio ϵ sarà possibile il determinare un'altra quantità ϵ' tale che dando ad u un aumento minore di ϵ' in valore assoluto, sia l'incremento di y minore di ϵ anche in valore assoluto; ed essendo $u = f(x)$ funzione continua di x, si potrà fissare una nuova quantità ϵ'', tale che, dando ad x incrementi minori di ϵ'', sia l'incremento di u minore di ϵ' e quindi quello di y minore di ϵ, c. v. d.

Così, p. e., se u è una funzione continua di x, e^u sarà pure funzione continua di x.

26. Funzioni inverse. — Sia $y = f(x)$ funzione data e continua della variabile x in un intervallo ab, e sia $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$; allora la funzione y assumerà ogni valore compreso fra α e β, ma potrà assumerli più di una volta. Supponiamo che $f(x)$ assuma ogni valore fra α e β una volta sola. Affinchè ciò avvenga, col variare di x fra a e b, y dovrà variare sempre nello stesso senso, ossia andar sempre crescendo o sempre diminuendo; perchè altrimenti essa assumerebbe più volte uno stesso valore. Allora fissato un valore di y compreso tra α e β, esiste un valore unico e determinato per x tale che $f(x) = y$, ed x, considerato come funzione di y, dicesi *funzione inversa* della $f(x)$.

Se una funzione $f(x)$ è continua, anche la sua inversa è continua. Sia $y = f(x)$; dò ad y un valore y_0 e cerco il corrispondente x_0 tale che $y_0 = f(x_0)$. Fisso ϵ piccolo ad arbitrio e faccio variare x tra $x_0 + \epsilon$ ed $x_0 - \epsilon$; y varierà tra y_1 e y_2, dove y_1 ed y_2 sono due valori comprendenti y; allora ad ogni valore di y compreso fra y_1 ed y_2 corrisponde un valore di x compreso fra $x_0 + \epsilon$ ed $x_0 - \epsilon$, la cui differenza da x_0 è minore di ϵ, onde x è funzione continua di y.

27. Logaritmi. — Dicesi che y è il logaritmo di x in base a se $a^y = x$, e si scrive $y = \mathrm{Log}_a x$. La base a è un numero positivo diverso dall'unità. Ogni numero positivo ha il logaritmo corrispondente, perchè, se $a > 1$, a^y col crescere di y da $-\infty$ a $+\infty$ va crescendo continuamente da 0 ad ∞ in modo da assumere sempre ed una sola volta ogni valore positivo; la funzione esponenziale essendo continua, è pure tale la sua inversa.

Fra gli infiniti sistemi di logaritmi sono specialmente usati quelli aventi per base $e = \lim\limits_{m=\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, i quali diconsi naturali (neperiani, iperbolici), e che indicheremo colla caratteristica log, ed i logaritmi in base 10, che diconsi decimali (volgari, di Brigg.).

Se u è funzione continua di x, ed ha valori positivi, anche $\mathrm{Log}\, u$ è funzione continua di x. La funzione u^v, ove u e v sono funzioni continue di x, ed $u > o$, è pure funzione continua, perchè si ha che $u^v = e^{v \log u}$. Come caso speciale, se v è costante $= m$, la funzione u^m, ove u è funzione continua e positiva, è pure continua, qualunque sia m, intero o fratto o incommensurabile, positivo o negativo.

28. Limite di $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ per m infinito. Diamo anzitutto ad m valori interi e positivi; si ha dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{m^2} + \dots + \frac{m(m-1)\dots 2.1}{1\,.\,2\dots m}\,\frac{1}{m^m}$$

che potremo scrivere

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2}\left(1 - \frac{m}{1}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{1.2\dots m}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)$$

dove tutti i termini sono positivi. Col crescere di m tutti i termini, a cominciare dal terzo, vanno crescendo, ed inoltre cresce pure il loro numero; onde $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ col crescere di m va crescendo continuamente. Ma, sostituendo l'unità ai binomii $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ... il secondo membro crescerà di valore, ossia

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+....+\frac{1}{1.2....m}$$

e se nel membro di destra invece dei divisori 3, 4,.....m metto 2 avrò *a fortiori*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{m-1}}$$

e sommando la progressione geometrica del membro di destra:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}, \text{ ossia } < 2+1-\frac{1}{2^{m-1}}$$

ed *a fortiori*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3.$$

Dunque l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, col crescere di m, cresce continuamente, mantenendosi inferiore a 3, e perciò tende verso un limite non superiore a 3. Il limite di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ si rappresenta colla lettera e; vedremo più tardi dei metodi rapidi per calcolarne il suo valore, le cui prime cifre decimali sono

$$e = 2,718281828459045......$$

Diansi ora ad m valori positivi non interi; sia n il più grande intero minore di m sicchè

$$n < m < n+1$$

sarà

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > \frac{1}{n+1} \text{ e } 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m$$

e siccome

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^m, \text{ e } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m$$

sarà a maggior ragione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Facendo crescere indefinitamente m, anche n ed $n+1$ crescono indefinitamente, ed il primo membro ha per limite e, perchè $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, e $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, e l'ultimo ha pure per limite e, perchè $\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$, e $\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$, onde $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, essendo compresa fra due quantità che tendono verso uno stesso limite, avrà pure per limite e.

Diansi in fine ad m valori negativi; e minori di -1 affinchè l'espressione abbia significato; posto $m = -n$, n sarà positivo, ed

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

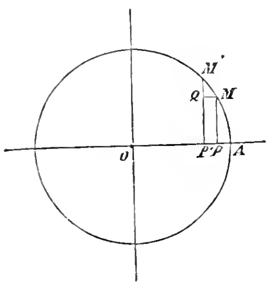
e facendo crescere indefinitamente m in valore assoluto, n cresce pure indefinitamente, e, siccome $\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$, e $\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$, sarà ancora $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$, ossia quest'espressione ha sempre per limite e, qualunque siano i valori dati ad m purchè in valore assoluto crescenti indefinitamente.

Se si pone nelle formule precedenti $m = \frac{1}{\alpha}$, col crescere indefinitamente in valore assoluto di m, α tende verso zero, ossia la quantità $\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ha per limite e col tendere di α a zero.

29. Funzioni circolari. — Sia x la lunghezza d'un arco di cerchio AM, il cui raggio si assume per unità; sarà

$$MP = \text{sen}\, x, \quad OP = \cos x,$$

diasi ad x un incremento MM′; il seno riceverà l'incremento QM′, ed il coseno l'incremento PP′; ma PP′ e QM′ sono minori della corda MM′, e dell'arco MM′, e quindi, col tendere di MM′, incremento della variabile, a zero, tendono pure a zero gli incrementi del seno e del coseno, ossia essi sono funzioni continue di x.



Le formule

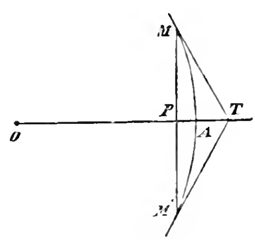
$$\text{tang}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

dicono che anche le altre linee trigonometriche sono continue per tutti i valori di x, eccettuati, per la tangente e secante i valori di x che annullano il coseno, e per la cotangente e cosecante quelli che annullano il seno, pei quali valori le funzioni diventano discontinue passando per l'infinito.

Se u è funzione continua di x, anche $\text{sen}\, u$ e $\cos u$ sono funzioni continue di x (N. 25).

La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno;* quindi $y = \text{arc sen}\, x$ se $x = \text{sen}\, y$. Facendo variare y fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, $x = \text{sen}\, y$ va crescendo con legge di continuità da -1 a $+1$; quindi ad ogni valore di x compreso fra -1 e $+1$ corrisponde uno ed un sol valore di $y = \operatorname{arc\,sen} x$ compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Esso però non è il solo arco il cui seno sia x, perchè anche gli archi $\operatorname{arc\,sen} x + 2k\pi$, e $(2k+1)\pi - \operatorname{arc\,sen} x$ hanno pure per seno x. Se $x > 1$ in valore assoluto, non esiste alcun arco il cui seno sia x. Intendendo adunque per $y = \operatorname{arc\,sen} x$, ove $x^2 < 1$, quell'arco compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ avente per seno x, y è una funzione continua della variabile x. In modo analogo la funzione $y = \operatorname{arc\,cos} x$ è funzione uniforme e continua di x, ove x sia compreso fra -1 e $+1$, e per y si prenda quell'unico arco compreso fra 0 e π avente per coseno x. Con opportune convenzioni si rendono pure funzioni uniformi $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$ e $\operatorname{arc\,cosec} x$.

30. — La quantità $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ col tendere di x a zero ha per limite uno.



Sia O il centro d'un cerchio, $OA = 1$ il suo raggio; l'arco $AM = x$; sia $AM' = x$, MT ed $M'T$ le tangenti al cerchio in M ed M'; si ha dalla geometria che $MPM' < MAM' < MTM'$, ossia $2 \operatorname{sen} x < 2x < 2 \operatorname{tang} x$, e, dividendo per $2 \operatorname{sen} x$ e ricordando che $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, si ha:

$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$. Facendo tendere x verso zero, $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ è compresa fra due quantità, l'una costante $= 1$, e l'altra $\frac{1}{\cos x}$ variabile, che ha per limite 1 quando x tende verso zero: quindi anche $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ e $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ hanno per limite uno, c. v. d.

Esercizii.

31. — 1° Se $f(x)$ è funzione intera di x, col tendere di x a $+\infty$, $f(x)$ cresce indefinitamente assumendo il segno del coefficiente del primo termine.

2° Se $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, f e φ essendo funzioni intere di x, e prime fra loro, y è funzione continua per tutti i valori di x che non annullano $\varphi(x)$. Se a è una radice multipla α volte dell'equazione $\varphi(x) = 0$, col tendere di x ad a, y diventa infinita d'ordine α, essendo $x - a$ l'infinitesimo principale. Col crescere indefinitamente di x, y tende verso un limite finito, o verso zero, o verso l'infinito, secondochè il grado di $f(x)$ è eguale o minore o maggiore di quello di $\varphi(x)$. Se i gradi di $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono eguali, il limite di y per $x = \infty$ è eguale al rapporto dei coefficienti dei termini di grado più elevato; se i gradi di f e φ sono disuguali, y diventa infinita o infinitesima d'ordine eguale alla differenza dei gradi, preso x per infinito principale.

3° Si è dimostrato (N. 25) che e^u è funzione continua se u è funzione continua di x. Se u è discontinua, e^u può essere continua o discontinua. Così, posto $u = \frac{1}{x}$, la funzione $e^{\frac{1}{x}}$ è continua per tutti i valori di x eccettuato il valore $x = 0$, per cui $\frac{1}{x}$ diventa discontinua; col tendere di x a zero $e^{\frac{1}{x}}$ tende verso $+\infty$, ovvero verso zero secondochè x tende a zero assumendo valori positivi o valori negativi. La funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}$, cui si attribuisca per $x = 0$ il valore zero, è funzione continua per tutti i valori di x, benchè $-\frac{1}{x^2}$ diventi discontinua per $x = 0$. La funzione $y = \frac{a e^{\frac{1}{x}} + b}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ è continua per tutti i valori di x tolto lo zero; col tendere di x a zero, y tende verso a o verso b secondochè x assume valori positivi o negativi.

In modo analogo sen u può essere discontinua se u è funzione discontinua di x; posto $u = \frac{1}{x}$, la funzione $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è continua per tutti i valori di x tolto il valore zero; col tendere di x a zero y oscilla fra -1 e $+1$ senza tendere ad alcun limite. La funzione

$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ col tendere di x a zero tende verso zero, e quindi è funzione continua per tutti i valori di x se per $x = 0$ si fa $y = 0$. La funzione $\frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ col tendere di x a zero va oscillando in modo da assumere infinite volte ogni valore.

4° Dimostrare che

$$e > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2\dots m}$$

e che

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2\dots m} + \frac{1}{1.2\dots m} \cdot \frac{1}{m}$$

qualunque sia il numero intero m.

5° Dimostrare che

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x .$$

Un capitale C messo all'interesse dell'r per 100 composto ogni n^{ma} parte di anno, diventa alla fine di t anni

$$C \left(1 + \frac{r}{n.100}\right)^n ;$$

trovarne il suo limite col crescere indefinitamente di n.

6° *Se* $f(x+1) - f(x)$ *col crescere indefinitamente di* x *tende verso un limite* L, *e se esiste il limite superiore dei valori assoluti di* $f(x)$ *in ogni intervallo finito, anche* $\frac{f(x)}{x}$ *tende verso lo stesso limite.*

Infatti, essendo $\lim_{x=\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$, fissato ad arbitrio ϵ si può determinare un numero N tale che per ogni valore di $x > N$ sia $f(x+1) - f(x) - L < \epsilon$ in valor assoluto. Diasi ad x un valore $> N$; sia n il massimo intero contenuto in $x - N$; onde $x - n = y$

sarà compreso fra N ed $N+1$. Essendo y, $y+1$, $y+2, \ldots\ldots > N$, si avranno le diseguaglianze:

$$
\begin{gathered}
f(y+1)-f(y)-L<\epsilon \\
f(y+2)-f(y+1)-L<\epsilon \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(y+n-1)-f(y+n-2)-L<\epsilon \\
f(x)-f(y+n-1)-L<\epsilon,
\end{gathered}
$$

e sommando:

$$f(x)-f(y)-nL<n\epsilon$$

e dividendo per x, e ponendo $x-y$ invece di n

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{x}-L+\frac{y}{x}L<\frac{x-y}{x}\epsilon$$

ed ancora

$$\frac{f(x)}{x}-L<\frac{f(y)}{x}-\frac{y}{x}L+\frac{x-y}{x}\epsilon\,.$$

Il membro di destra consta di tre termini; il terzo è $<\epsilon$, e quindi si può supporre piccolo ad arbitrio; il secondo $\frac{y}{x}L$ col crescere di x tende verso zero, perchè L è finito, e $y<N+1$; il primo termine, detto l il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ quando x varia nell'intervallo N, $N+1$, è $<\frac{l}{x}$, che tende verso zero col crescere indefinitamente di x; e perciò la differenza $\frac{f(x)}{x}-L$ potendosi rendere tanto piccola quanto si vuole, $\lim\frac{f(x)}{x}=L$, c. v. d.

Si può dimostrare in modo analogo che:

Se, col crescere indefinitamente di x, $f(x+1)-f(x)$ *cresce indefinitamente in valor assoluto, e se esiste il limite superiore dei valori assoluti di* $f(x)$ *in ogni intervallo finito, anche* $\frac{f(x)}{x}$ *cresce indefinitamente.*

La condizione che esista il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ in ogni intervallo finito, da un certo valore di x in poi, è necessaria; così p. e. la funzione $f(x) = \tang \pi x$ è tale che $f(x+1) - f(x) = 0$, ed il suo limite è zero; ciononondimeno $\frac{\tang \pi x}{x}$ col crescere di x non tende ad alcun limite. La proposizione inversa, cioè che se $\lim \frac{f(x)}{x} = L$, anche $\lim [f(x+1) - f(x)] = L$, non è esatta, e vi fa eccezione p.e. la funzione $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$, per cui $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$, e $f(x+1) - f(x) = -2 \operatorname{sen} \pi x$ col crescere di x non tende ad alcun limite.

7° Dimostrare che:

Se $lim \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = L$, *(od è infinito) ed esiste il limite superiore dei valori assoluti di* f(x), *anche* $\lim \frac{f(x)}{x^{n+1}} = L$ *(od è infinito).*

Se $\frac{f(x+1)}{f(x)}$, *col crescere di* x *tende verso un limite finito, o verso l'infinito, ed* f(x) *assume valori sempre positivi, in modo che in ogni intervallo finito esiste un limite superiore, ed un limite inferiore non nullo dei valori di* f(x), *anche* $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ *tende verso lo stesso limite.*

8° Dimostrare che col tendere di x a $+\infty$, qualunque sia n $\frac{a^x}{x^n}$, ove $a > 1$, tende a $+\infty$, $a^x x^n$, ove $a < 1$, tende a zero, $\frac{\log x}{x^n}$ tende a zero.

Le funzioni precedenti forniscono esempi di quantità infinite od infinitesime non aventi ordine. Così a^x con $a > 1$ tende verso infinito col crescere di x; ma, prendendo x per infinito principale, non esiste alcun valore di n tale che $\frac{a^x}{x^n}$ tenda verso un limite finito, ossia a^x diventa infinito d'ordine maggiore di qualunque ordine misurabile con un numero; in modo analogo a^x, con $a < 1$, diventa infinitesima rispetto $\frac{1}{x}$ d'ordine maggiore d'ogni ordine misurabile con un numero; e $\log x$ diventa infinito d'ordine minore d'ogni ordine misurabile con un numero.

Si può dimostrare in modo analogo che la funzione x^x definita per tutti i valori positivi di x tende verso 1 col tendere di x a zero: col tendere di x ad ∞ diventa infinita d'ordine maggiore di qualunque ordine finito. Il N. 27 non definisce questa funzione per x negativo. L'espressione x^x, secondochè x è della forma

$$\frac{2m}{2n+1} \quad \text{o} \quad \frac{2m+1}{2m+1} \quad \text{o} \quad \frac{2m+1}{2n},$$

ha dall'algebra, oltre a valori immaginarii, rispettivamente o un sol valore positivo, o un sol valore negativo, o nessun valore reale.

9° La funzione $f(x)=ax$, dove a è una costante arbitraria, è la sola funzione continua di x tale che, x ed y essendo due valori qualunque della variabile,

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{1}$$

Infatti sia $f(x)$ una funzione i cui valori soddisfanno all'eguaglianza (1). Posto $y=0$, essa diventa $f(x)=f(x)+f(o)$, onde

$$f(o)=0 \tag{2}$$

Posto $y=-x$ ricavo $o=f(x)+f(-x)$, onde

$$f(-x)=-f(x) \tag{3}$$

Ponendo $y+z$ invece di y ricavo

$$f(x+y+z)=f(x)+f(y+z)=f(x)+f(y)+f(z)$$

e più generalmente

$$f(x_1+x_2+\ldots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n). \tag{4}$$

Facendo in questa formula tutte le x eguali fra loro ricavo

$$f(nx)=nf(x). \tag{5}$$

Pongo in questa formula $x=1$, e ricavo $f(n)=nf(1)$, e se chiamo a la quantità $f(1)$ avrò $f(n)=an$ pei valori interi e positivi di n;

e per le formule (2) e (3) l'eguaglianza $f(n) = a\,n$ sussiste per tutti i valori interi di n.

Pongo nella (5) $x = \frac{m}{n}$, m ed n essendo numeri interi ed n positivo e ricavo $f(m) = n\,f\left(\frac{m}{n}\right)$ ossia $a\,m = n\,f\left(\frac{m}{n}\right)$ ed $f\left(\frac{m}{n}\right) = a\,\frac{m}{n}$, che dà i valori della funzione per tutti i valori commensurabili della variabile; ossia per tutti i valori commensurabili di x si ha $f(x) = a\,x$. Facciasi ora tendere x verso un valore incommensurabile x_0; $f(x)$, essendo supposta continua, tende a $f(x_0)$, e $a\,x$ tende ad $a\,x_0$, onde $f(x_0) = a x_0$, ossia la sola funzione che goda della proprietà enunciata è $a\,x$.

10°. La funzione $f(x) = a^x$ è la sola funzione continua di x i cui valori soddisfanno all'equazione:

$$f(x+y) = f(x)\,.\,f(y).$$

11°. Se per tutte le coppie di valori di x e di y si ha $f(xy) = f(x)\,f(y)$, la funzione $f(x) = x^a$, a essendo una costante.

12°. Se $f(xy) = f(x) + f(y)$, la funzione $f(x) = \operatorname{Log} x$, il logaritmo essendo preso in una base qualunque.

13°. Se $f(x+y) + f(x-y) = 2\,f(x)\,f(y)$, la funzione $f(x)$ vale o $\cos a\,x$, ovvero $\frac{a^x + a^{-x}}{2}$, a essendo una costante arbitraria.

14°. Sia $f(x, t)$ una funzione di due variabili x e t, e suppongasi che per una certa categoria di valori di x esista il limite di $f(x, t)$, quando t tende verso l'infinito, o verso una quantità finita e costante, od anche verso un limite funzione di x. Il limite di $f(x,t)$ dipenderà in generale da x, e sarà una funzione di x. Così p. e. $\lim\limits_{t=\infty}\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$ è una funzione definita per tutti i valori di x, e vale e^x (Eserc. 5°). Le funzioni definite a questo modo forniscono esempi di discontinuità delle funzioni.

La funzione $F(x) = \lim\limits_{t=\infty} \frac{a\,t\,x + b}{t\,x + 1}$ è definita per tutti i valori di x, e vale costantemente a se $x \gtrless 0$, e vale b se $x = 0$. La stessa funzione si può anche scrivere $F(x) = \lim\limits_{t=0} \frac{a\,x + b\,t}{x + t}$.

x^t, ove $x > 0$, col crescere indefinitamente di t tende verso zero, o verso 1, o verso $+\infty$ secondochè x è minore, o eguale, o maggiore di uno.

Quindi la funzione $F(x) = \lim_{t=\infty} \frac{f(x)\, x^t + \varphi(x)}{x^t + 1}$, ove f e φ siano definite pei valori positivi di x è pure definita per gli stessi valori, e coincide colla funzione $\varphi(x)$ se $x < 1$, e colla $f(x)$ se $x > 1$; e $F(1) = \frac{f(1) + \varphi(1)}{2}$.

La funzione $F(x) = \lim_{t=\infty} \frac{(1 + \operatorname{sen} \pi x)^t - 1}{(1 + \operatorname{sen} \pi x)^t + 1}$ è definita per tutti i valori di x, e vale 0 se x è intero, $+1$ se x non è intero, ed il massimo intero algebricamente minore di esso è pari, -1 se x non è intero, ed il massimo intero minore di esso è dispari.

CAPITOLO II

Delle Derivate.

32. — Dicesi *derivata* d'una funzione il limite del rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile, quando l'incremento della variabile tende a zero.

Se $y = f(x)$ è la funzione, $\Delta x = h$ l'incremento della variabile, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ l'incremento corrispondente della funzione, la derivata sarà il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, per h infinitesimo. Così ad es. se $f(x) = ax + b$, sarà $f(x+h) = a(x+h) + b$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, e $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, ossia a è la derivata di $ax + b$. Se $a = 0$, la funzione si riduce ad una costante, e la sua derivata è nulla.

La derivata d'una funzione $y = f(x)$ si rappresenta con y' o $f'(x)$, od anche con Dy e $Df(x)$; essa in generale dipende dal valore attribuito alla x, ed è perciò una funzione di x. Può però una funzione mancare di derivata o per valori speciali di x, od anche per tutti. È assai conveniente di eguagliare la derivata, che è il limite d'un rapporto, ad un vero rapporto, e si pone $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, dy e dx essendo due quantità dette differenziale della funzione, e differenziale della variabile, legate dalla sola condizione che il loro quoziente valga $f'(x)$. Una di esse è perciò arbitraria; si suol prendere ad arbitrio dx, ed allora $dy = f'(x)\,dx$, ossia il differenziale d'una funzione è eguale alla derivata moltiplicata pel differenziale della variabile indipendente. Derivare, o differenziare una funzione è il calcolare la derivata od il differenziale.

Una funzione avente derivata è continua, perchè, essendo $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$, col tendere di Δx a zero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende ad un limite finito y' e quindi Δy tende a zero. Inoltre, se la derivata non è nulla, l'incremento della funzione è infinitesimo del primo ordine, prendendo Δx per infinitesimo principale, perchè $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso un limite finito.

33. — Sia $y = f(x)$ l'equazione d'una curva riferita ad assi cartesiani ortogonali (Vedi N. 22). Posto $OM = x$, $MP = y$, $MM' = PQ = \Delta x$, $QP' = y$, sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta PP' fa coll'asse delle x. Facendo tendere Δx a zero, se la funzione $f(x)$ ammette derivata, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende a $f'(x)$, quindi tende verso un limite l'angolo di PP' con ox, e la retta PP', che congiunge il punto P della curva con un altro punto P' il quale si va avvicinando indefinitamente al primo, tende verso una posizione limite. Dicesi tangente ad una curva in un suo punto P la posizione limite della congiungente il punto P con un altro punto della curva, quando il secondo punto si avvicina indefinitamente al primo. Quindi se la funzione $f(x)$ ha derivata, la curva ha tangente, e la tangente fa coll'asse delle x un angolo α tale che $\operatorname{tang} \alpha = f'(x)$.

Anche in questioni di meccanica la derivata ha un significato semplicissimo. Suppongasi che un punto P si muova percorrendo una retta. Sia x la distanza del punto mobile P da un punto fisso della retta (x sarà la coordinata di P); sia t il tempo compreso fra un istante fisso ed un istante variabile. Ad ogni valore di t corrisponde una posizione di P e quindi un valore di x, onde sarà $x = f(t)$. Il moto del punto P dicesi equabile se lo spazio percorso in un intervallo di tempo è proporzionale a questo intervallo, e dicesi velocità del moto equabile il rapporto dello spazio percorso al tempo impiegato a percorrerlo. Se il moto è qualunque, dato un valore a t, e trovato il valore corrispondente per x, si dia al tempo un incremento Δt; x riceverà un incremento Δx che è lo spazio percorso dal mobile nell'intervallo di tempo Δt successivo al momento considerato; il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ rappresenta la velocità del moto equabile che nel tempo Δt percorre lo spazio Δx; si chiama velocità del moto proposto nell'istante considerato il limite di questo rapporto. Onde la velocità in un moto qualunque è la derivata dello spazio rispetto al tempo.

Regole di Derivazione.

34. — Derivata d'una somma. Sia $y = u + v - w$, u, v, w essendo tre funzioni di x aventi derivata $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$; sarà

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

e facendo tendere Δx verso zero, si ha:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx},$$

ossia *la derivata della somma algebrica di più funzioni è eguale alla somma delle derivate.*

Moltiplicando per dx, si ha:

$$d(u + v - w) = du + dv - dw. \qquad [1]$$

35. — Derivata d'un prodotto. Sia $y = au$, dove a è una costante ed u una funzione di x; sarà $\Delta y = a \Delta u$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta u}{\Delta x}$, e passando al limite $\frac{dy}{dx} = a \frac{du}{dx}$, e

$$d \, . \, au = a du, \qquad [2]$$

ossia *la derivata del prodotto d'una costante per una funzione è eguale al prodotto della costante per la derivata della funzione.*

Sia ora $y = uv$, u e v essendo funzioni di x; sarà

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x,$$

e passando al limite, $\frac{d\,.\,uv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, e

$$d\,.\,uv = udv + vdu; \qquad [3]$$

cioè *il differenziale del prodotto di due funzioni è eguale alla somma dei prodotti di ciascuna funzione pel differenziale dell'altra.* Quest'ultima formula si può anche scrivere $\frac{d\,.\,uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$.

Se y è eguale al prodotto di più funzioni $u_1\, u_2 \dots u_n$, sarà

$$\frac{d\,.\,u_1u_2\dots u_n}{u_1u_2\dots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{d\,.\,u_2u_3\dots u_n}{u_2u_3\dots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d\,.\,u_3\dots u_n}{u_3\dots u_n} = \dots$$
$$= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \dots + \frac{du_n}{u_n}.$$

Se gli n fattori precedenti si eguagliano ad una stessa funzione u, sarà $\frac{d\,.\,u^n}{u^n} = n\frac{du}{u}$, ossia $d\,.\,u^n = nu^{n-1}du$, e la derivata $\frac{d\,.\,u^n}{dx} = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$. Se $u = x$, la sua derivata $\frac{du}{dx} = 1$, e quindi $\frac{d\,.\,x^n}{dx} = n\,x^{n-1}$, e

$$d\,.\,x^n = nx^{n-1}dx, \qquad [4]$$

la quale formula serve a derivare una potenza di x con esponente intero e positivo.

Le regole precedenti forniscono il mezzo di derivare ogni funzione algebrica razionale intera; così se

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

sarà

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

36. — Derivata d'un quoziente. Sia $y = \frac{u}{v}$, e $v \gtrless 0$: sarà

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}\,, \quad \Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}\,, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}\,,$$

e passando al limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}\,, \quad \text{e} \quad dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\,, \qquad [5]$$

ossia *il differenziale d'un quoziente vale il denominatore moltiplicato pel differenziale del numeratore meno il numeratore moltiplicato pel differenziale del denominatore, tutto diviso pel quadrato del denominatore.*

Come caso particolare, se il numeratore si suppone costante ed $= 1$, sarà $du = 0$, e

$$d\,\frac{1}{v} = -\,\frac{dv}{v^2}\,.$$

Se $v = x^m$, $d\,\frac{1}{x^m} = d\,.\,x^{-m} = -\,\frac{mx^{m-1}\,dx}{x^{2m}} = -\,m\,x^{-m-1}\,dx$,

che si ottiene dalla formula [4] supponendo l'esponente intero e negativo.

37. — Derivate delle funzioni di funzioni. Sia $y = f(u)$, ed $u = \varphi(x)$: y è funzione di x per mezzo di u. Suppongasi che le funzioni $f(u)$ e $\varphi(x)$ ammettano derivata $f'(u)$ e $\varphi'(x)$. Si dia ad x un incremento Δx, e siano Δu e Δy gli incrementi corrispondenti di u ed y: sarà

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)\,, \quad \text{e} \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)\,.$$

Se, dando a Δx valori sufficientemente piccoli, Δu non si annulla mai, sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$, e facendo tendere Δx a zero $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tende verso $\varphi'(x) = \frac{du}{dx}$, e Δu tende a zero, e $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ col tendere di Δu a zero, tende verso $f'(u) = \frac{dy}{du}$, onde

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(u)\,\varphi'(x) = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx},$$

e
$$dy = f'(u)\,\varphi'(x)\,dx = f'(u)\,du, \qquad [6]$$

formula identica a quella che definisce dy se u fosse la variabile indipendente, ma qui du vale $\varphi'(x)dx$.

Se, comunque piccolo si prenda Δx, Δu, si annulla per qualche valore di Δx, la formula precedente è ancora a ritenersi vera. Infatti, se Δu si annulla per infiniti valori di Δx piccoli quanto si voglia, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ si annulla pure per gli stessi valori, ed il suo limite, che si suppone esistere, dovrà essere zero, onde $\varphi'(x) = 0$.

Facendo tendere Δx a zero, dandogli dapprima i soli valori per cui $\Delta u \gtrless 0$, è applicabile il ragionamento precedente, e quindi $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x) = 0$; dando a Δx i valori per cui $\Delta u = 0$, sarà anche $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, e $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$; ossia il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è costantemente nullo, comunque si faccia tendere Δx a zero, e la formula per la derivazione delle funzioni di funzioni è ancora applicabile.

38. — Derivazione delle funzioni inverse. Sia x funzione di y, che diremo diretta: $x = \varphi(y)$; si suppone che essa permetta inversione, vale a dire che si possa considerare y come funzione di x : $y = f(x)$: se $\varphi(y)$ ammette derivata non nulla, la sua inversa $f(x)$ ammette pure derivata. Invero diasi ad x un incremento Δx; sia Δy l'incremento corrispondente di y; sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$, e facendo tendere Δx a zero, anche Δy vi tende, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tende a $\varphi'(y)$, onde $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\varphi'(y)}$ ossia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad [7]$$

e la derivata d'una funzione inversa ha il valore reciproco della derivata della diretta.

Esempio: Sia $x = y^m$, m essendo un numero intero e positivo; variando y fra 0 e $+\infty$, x va crescendo con legge di continuità da 0 a $+\infty$; quindi questa funzione permette inversione, ossia, dato ad x un valore positivo, esisterà un sol valore positivo per y, che si rappresenta con $y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ tale che $y^m = x$. Applicando la regola precedente si ha $\frac{dx}{dy} = m\, y^{m-1}$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m\, y^{m-1}}$; e sostituendo ad y la sua funzione di x, sarà:

$$\frac{d \,.\, x^{\frac{1}{m}}}{dx} = \frac{1}{m}\, x^{\frac{1}{m} - 1}.$$

Se invece di x pongo u, u essendo una funzione di x, si ha, per la regola delle funzioni di funzioni, $d \,.\, u^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\, u^{\frac{1}{m} - 1} du$.

e se $u = x^n$, n essendo un numero intero, sarà:

$$d \,.\, x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}\, x^{\frac{n}{m} - 1}\, dx,$$

ossia la formula [4] per la differenziazione delle potenze sussiste anche per esponenti razionali.

39. — Derivata di Log x. Sia $y = \operatorname{Log} x$, il logaritmo essendo preso in una base a positiva, ed x una variabile che assume valori positivi, sarà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

Posto $\frac{h}{x}=\alpha$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\operatorname{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, e col tendere di α a zero,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e, \quad \text{e} \quad \lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\operatorname{Log} e,$$

ossia

$$\frac{d\operatorname{Log} x}{dx}=\frac{1}{x}\operatorname{Log} e. \qquad d\operatorname{Log} x=\frac{dx}{x}\operatorname{Log} e.$$

Se i logaritmi sono naturali, $\log e=1$, e quindi

$$d\log x=\frac{dx}{x} \tag{8}$$

la quale formula sussiste qualunque sia la variabile indipendente.

Es. Sia

$$y=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad dy=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot d\frac{1+x}{1-x}=\tfrac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\,\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\,dx=\frac{dx}{1-x^2}.$$

Sia

$$y=\log\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right),$$

$$dy=\frac{1+\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax+b}}}{x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}}\,dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+2ax+b}}.$$

40. Derivata di a^x. — Sia $y=a^x$; prendendo i logaritmi in una base qualunque, sarà $\operatorname{Log} y=x\operatorname{Log} a$, onde

$$x=\frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a},\quad \frac{dx}{dy}=\frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} a}\,\frac{1}{y},$$

$$\frac{dy}{dx}=y\,\frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e}=a^x\,\frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e},$$

ossia:

$$d \,.\, a^x = a^x \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e}\, dx = a^x \frac{1}{\operatorname{Log}_a e}\, dx = a^x \log a \, dx \,.$$

Se $a = e$, si ha

$$d\, e^x = e^x \, dx. \qquad [9]$$

41. Derivata di u^v. — Sia $y = u^v$, dove u e v sono funzioni di x, ed u assume solamente valori positivi. Sarà $y = e^{v \log u}$; onde

$$dy = e^{v \log u}\, d\,(v \log u) = e^{v \log u}\, \left(v \frac{du}{u} + \log u \, dv\right)$$

$$= v u^{v-1}\, du + u^v \log u \, dv.$$

Come caso speciale, se si fa u costante, ed eguale ad a, sarà $du = 0$, e

$$d \,.\, a^v = a^v \operatorname{Log} a \, dv \,,$$

formola per la differenziazione delle funzioni esponenziali. Se si suppone v costante $= m$, si ha:

$$d \,.\, u^m = m u^{m-1}\, du \,,$$

che dà la derivata d'una potenza, qualunque sia l'esponente (V. formula [4]).

42. Derivazione delle funzioni trigonometriche. — Sia $y = \operatorname{sen} x$; sarà:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\, h \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

e
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

e facendo tendere h a zero, $\lim \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} = 1$, $\lim \cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right) = \cos x$,

e quindi

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x\,, \quad d \operatorname{sen} x = \cos x\, dx. \tag{10}$$

Sia $y = \cos x$; sarà

$$\Delta y = \cos(x + h) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

e passando al limite

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x\,, \qquad d \cos x = -\operatorname{sen} x\, dx. \tag{11}$$

Si può anche trovare la derivata del coseno osservando che

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e derivando colla regola delle funzioni di funzioni.

Le altre funzioni trigonometriche si sanno esprimere razionalmente mediante il seno ed il coseno, ed applicandovi le regole note si ricava

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \cot x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}\,, \tag{12}$$

$$d \sec x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx. \tag{13}$$

Sia ora $y = \operatorname{arc\,sen} x$, ove x è compreso fra -1 e $+1$, e per y si prende l'arco compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ il cui seno è x, secondo le convenzioni del N. 29, si ha $x = \operatorname{sen} y$, $dx = \cos y\, dy$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$, e volendo esprimere la derivata in funzione della variabile indipendente x, si osservi che $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, ove il radicale si deve prendere col segno $+$, perchè, essendo y compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, $\cos y$ è positivo; quindi

$$d \text{ arc sen } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad [14]$$

Sia $y = \text{arc} \cos x$: sarà

$$x = \cos y, \quad dx = -\text{sen } y \, dy,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \text{ arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad [15]$$

ed il radicale si prenderà positivo, se y è compreso fra 0 e π.

Sia $y = \text{arc tang } x$; si ha

$$x = \text{tang } y, \; dx = \frac{dy}{\cos^2 y}, \; \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$d \text{ arc tang } x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

In modo analogo si ricava

$$d \text{ arc cot } x = -\frac{dx}{1 + x^2}, \qquad [16]$$

$$d \text{ arc sec } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad d \text{ arc cosec } x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \qquad [17]$$

Le formule precedenti permettono di determinare la derivata d'ogni funzione di x ottenuta eseguendo sulla variabile e su costanti un numero finito di volte le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza d'esponente qualunque, prendere logaritmi e funzioni trigonometriche dirette ed inverse.

Teoremi sulle derivate.

43. — Una funzione $f(x)$ dicesi *crescente* per $x = x_0$ se l'incremento $f(x + h) - f(x_0)$ della funzione è dello stesso segno dell'incremento h della variabile, supposto però sufficientemente piccolo h; dicesi invece *decrescente* se l'incremento della funzione è di segno contrario all'incremento della variabile.

Teorema. — *Se la derivata è positiva, la funzione è crescente, se negativa, è decrescente.*

Infatti sia $f(x)$ la funzione, $f'(x)$ la derivata; sarà

$$\lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

e quindi

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha, \text{ e } f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[f'(x_0) + \alpha]$$

α essendo una quantità infinitesima con h. Se ora $f'(x_0)$ non è nullo, si può supporre α minore in valor assoluto di $f'(x_0)$, quindi la quantità $f'(x_0) + \alpha$ del segno di $f'(x_0)$, ed allora $f(x_0 + h) - f(x_0)$ sarà del segno di h, o del segno opposto di h secondochè $f'(x_0)$ è positivo ovvero negativo, vale a dire la funzione è crescente se $f'(x_0)$ è positivo, decrescente se $f'(x_0)$ è negativo.

44. — Teorema (di Rolle). — *Se* f(x) *è funzione di* x *data in un intervallo* (a, b), *avente derivata* f'(x) *per tutti i valori di* x *in questo intervallo, e se* f(a) = 0 *ed* f(b) = 0, *esisterà un valore* x_1 *compreso fra* a *e* b *e diverso dagli estremi, per cui la derivata è nulla.*

Infatti o $f(x)$ è sempre nulla per tutti i valori di x compresi fra a e b, e allora per ogni valore di x compreso nello stesso intervallo sarà $f'(x) = 0$; ovvero $f'(x)$ assume anche valori diversi da zero, che potranno essere positivi o negativi. Se $f(x)$ ammette valori positivi, se ne consideri il loro massimo, che esiste, è positivo, e corrisponde ad un valore x_1 della variabile x compreso fra a e b, e diverso da a e da b, per cui la funzione è nulla. Quindi la quantità $f(x_1 + h) - f(x_1)$ sarà sempre negativa o nulla, qualunque sia h, e, supposto h positivo, le quantità $\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h}$ e $\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ saranno la prima positiva o nulla, e la seconda negativa o nulla; e dovendo esse, col tendere di h a zero, tendere verso uno stesso limite finito $f'(x_1)$, dovrà essere $f'(x_1) = 0$, c. v. d.

Se la funzione assume soli valori negativi, diventerà minima per un valore x_1 compreso fra a e b, e si dimostra con ragionamento analogo che per questo valore la derivata è nulla.

45. — TEOREMA. — *Se* f(x) *ammette derivata per tutti i valori di* x *nell'intervallo* (a, b), *sarà*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1),$$

x_1 *essendo una quantità compresa fra* a *e* b.

Infatti si consideri la funzione

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}[f(b) - f(a)];$$

essa si annulla per $x = a$ ed $x = b$, ed inoltre ha derivata $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per tutti i valori di x compresi fra a e b, perciò esisterà un valore x_1 compreso fra a e b per cui $F'(x_1) = 0$, ossia $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La formula precedente si può scrivere diversamente. Pongasi $b = a + h$; x_1 che è compreso fra a e b, si può mettere sotto la forma $x_1 = a + \theta h$, θ essendo una quantità compresa fra 0 ed 1 (esclusi i limiti); quindi moltiplicando per h si ha:

$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$$

formula assai importante, che vale supposto che $f(x)$ ammetta derivata per tutti i valori di x compresi fra a ed $a+h$.

Si può trovare una formula più generale della precedente.

Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ funzioni aventi derivata nell'intervallo (a, b) e si supponga che $\varphi'(x)$ non si annulli per alcun valore di x interno allo stesso intervallo, potendosi però annullare per $x=a$ ovvero $=b$. Si consideri la funzione

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left|\varphi(x)-\varphi(a)\right|;$$

si avrà $F(a)=0$, $F(b)=0$, $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$, quindi esisterà un valore x_1 compreso fra a e b, per cui $F'(x_1)=0$, ossia $f'(x_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x_1)$, e dividendo per $\varphi'(x)$, che non è nullo,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-(a)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}.$$

Ponendo in questa formula $b=a+h$, $x_1=a+\theta h$, si ha

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

46. — Teorema. — *Se la derivata d'una funzione è nulla per tutti i valori di* x *nell'interno d'un intervallo,* f(x) *ha un valore costante nello stesso intervallo.*

Infatti sia a un valore di x compreso nell'intervallo dato, $a+h$ un altro valore di x nello stesso intervallo; sarà

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),$$

ed essendo $a+\theta h$ pure compreso nello stesso intervallo, sarà $f'(a+\theta h)=0$, onde $f(a+h)=f(a)$ ha un valore costante.

Teorema. — *Se due funzioni* f(x) *e* φ(x) *hanno derivate eguali pei valori di* x *in un dato intervallo, la loro differenza è costante.*

Invero pongasi $F(x) = f(x) - \varphi(x)$: sarà $F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0$, e quindi $F(x)$ è costante.

Derivate successive.

47. — Se una funzione $f(x)$ ammette derivata $f'(x)$ pei valori di x in un certo intervallo, $f'(x)$ sarà una nuova funzione di x che potrà ammettere derivata, che rappresenteremo con $f''(x)$, e diremo seconda derivata di $f(x)$, chiamando anche la $f'(x)$ derivata prima.

La derivata della derivata seconda si chiama derivata terza, e si rappresenta con $f'''(x)$, e così di seguito. Se $f(x)$ è funzione analitica di x, anche le derivate successive sono funzioni analitiche della stessa natura, e si ottengono successivamente applicando le regole di differenziazione studiate.

Esempi: 1° — Sia $y = x^m$; sarà $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}, \ldots$

$$y^{(n)} = m(m-1) \ldots (m-n+1)\, x^{m-n}.$$

Se m è intero e positivo l'm^a derivata è costante $= m$, e le successive sono nulle: altrimenti le derivate sono in numero infinito, e tutte funzioni di x.

2° — Sia $y = \operatorname{Log} x$; sarà $y' = \frac{1}{x} \operatorname{Log} e$, $y'' = -\frac{1}{x^2} \operatorname{Log} e, \ldots$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \operatorname{Log} e.$$

3° — Sia $y = \operatorname{sen} x$; sarà

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{\mathrm{IV}} = \operatorname{sen} x, \ldots$$

ed esse si riproducono periodicamente. Si può pure scrivere

$$y' = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \ldots$$
$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

4° — Sia $y = a^x$; sarà $y' = a^x \log a$, $y'' = a^x (\log a)^2, \ldots$
$$y^{(n)} = a^x (\log a)^n.$$

48. — Dicesi differenziale n^{mo}, o d'ordine n d'una funzione y il prodotto dell'n^{ma} potenza del differenziale della variabile indipendente, per la derivata n^{ma} della funzione. La potenza n^{ma} di dx si rappresenta con dx^n (mentre con $d \,.\, x^n$ ovvero $d(x^n)$ si rappresenta il differenziale di x^n, ossia $nx^{n-1}dx$), e il differenziale n^{mo} di y si rappresenta con $d^n y$: onde se $y = f(x)$,

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

e quindi

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

e questa notazione è assai usata per esprimere le derivate successive. Se nell'eguaglianza $dy = f'(x)dx$ differenziamo ambo i membri, considerando dx come costante, abbiamo: $ddy = f''(x)dx^2$, cioè $ddy = d^2y$; ed analogamente $dd^2y = d^3y$, ecc., ossia un differenziale qualunque si ottiene differenziando il precedente, ma considerandovi il dx come costante.

Esercizii.

49. — 1° — Derivare le seguenti funzioni:

$$x^x, \; x^{\operatorname{sen} x}, \; e^{\operatorname{sen} x}, \; e^{\operatorname{arc\,sen} x}, \; x^{\frac{1}{x}}, \; \log\cos x, \; \log\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$
$$\log\log x, \; \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}.$$

2° — Derivare la funzione $x - \log(1 + x)$, e dedurre dal segno della derivata che per tutti i valori positivi di x è $x > \log(1 + x)$.

3° — Applicando ad una stessa funzione, mettendola, se occorre, sotto forme diverse, differenti procedimenti di differenziazione, si possono trovare facilmente delle identità. Così ad esempio si ha:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y,$$

e derivando rispetto ad x, si ricava la formula

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

4° — Se si eleva a potenza n (n essendo intero e positivo) il binomio $a + x$, si ha un risultato della forma

$$(a + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

e derivando

$$n(a + x)^{n-1} = A_1 + 2 A_2 x + \ldots + n A_n x^{n-1} \qquad (*)$$

$$n(n - 1)(a + x)^{n-2} = 2 A_2 + \ldots + n(n - 1) A_n x^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n(n - 1)\ldots(n - r + 1)(a + x)^{n-r} =$$

$$= r!\, A_r + \ldots + n(n - 1)\ldots(n - r + 1) A_n x^{n-r}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n! = n!\, A_n\,.$$

e ponendo in queste formule $x = 0$ si hanno tante equazioni che determinano i coefficienti $A_0\ A_1, \ldots$, e si ricava

$$A_0 = a^n,\ A_1 = n a^{n-1},\ A_2 = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}, \ldots$$

$$A_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} a^{n-r},\quad A_n = 1$$

e così resta dimostrata la formula del binomio di Newton per esponente intero e positivo.

Si può dimostrare la stessa formula moltiplicando la (*) per $(a+x)$ ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri.

Si dimostrerebbe in modo analogo la formula di Taylor per le funzioni intere di x.

5° — Dall'eguaglianza

$$1+x+x^2+....+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

che vale per tutti i valori di x diversi da 1, derivando, e poi moltiplicando per x, si ha

$$x+2x^2+...+n\,x^n=\frac{n\,x^{n+2}-(n+1)\,x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$$

e così si possono avere successivamente le somme

$$1^2\,x+2^2\,x^2+\ldots+n^2\,x^n,$$
$$1^3\,x+2^3\,x^3+\ldots+n^3\,x^n,\ \text{ecc.},$$

sempre per $x \gtrless 1$.

Se in queste espressioni si fa $x=1$, a sinistra si hanno le somme delle potenze dei successivi numeri naturali; ma il membro di destra si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$.

6° — Sia la funzione $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ che è definita e continua per tutti i valori di x. La sua derivata per $x=0$ è il limite di $\frac{f(h)-f(o)}{h}$, ossia il limite di $h^{-\frac{1}{3}}$; ora $h^{-\frac{1}{3}}$ col tendere di h a zero cresce indefinitamente in valor assoluto assumendo valori positivi se h è positivo, ed assumendo valori negativi se h è negativo; dunque $f(x)$ non ha derivata finita per $x=0$.

7° — La funzione $f(x)=x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, ed $f(0)=0$, è continua; la sua derivata per $x=0$ è il limite di $\frac{f(h)-f(0)}{h}$, ossia il limite di $\operatorname{sen}\frac{1}{h}$ quando h tende a zero; ma col tendere di h a zero

$\operatorname{sen}\frac{1}{h}$ non tende verso alcun limite, dunque la funzione $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ non ha derivata per $x = 0$.

8° — La funzione $x \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$, cui si attribuisce il valore 0 quando x vale 0, è funzione continua di x; e cercandone la derivata per $x = 0$ si ha che $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso $+1$, ovvero verso -1 col tendere di Δx a zero, secondochè si dànno a Δx valori positivi o negativi: onde questa funzione non ha derivata per $x = 0$.

9° — Non è vero in generale che se $f(x)$ è continua ed ammette derivata per tutti i valori di x in un dato intervallo, anche la derivata sia funzione continua. Per es. la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, con $f(0) = 0$, è funzione continua di x, ed ammette derivata per tutti i valori di x, perchè, per x diverso da zero, la derivata si ottiene colle regole note, ed è:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

e per $x = 0$ la derivata si ricava dalla sua definizione:

$$f'(0) = \lim \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0 :$$

cionondimeno la derivata $f'(x)$ è discontinua per $x = 0$, poichè col tendere di x a zero $f'(x)$ non tende verso alcun limite, perchè il primo termine tende verso zero, ed il secondo oscilla indefinitamente fra -1 e $+1$.

Tuttavia potremo dimostrare i seguenti teoremi (10° — 14°):

10° — *Se* f(x) *ha derivata* f'(x) *in un dato intervallo, e se col tendere di* x *ad* a, f'(x) *tende verso un limite* A, *sarà questo limite il valore della derivata per* x = a, *ossia* A = f'(a).

Infatti si ha che $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)$, essendo $0 < \theta < 1$, e, col tendere di h a zero, $a + \theta h$ tende verso a, ed $f'(a + \theta h)$ tende verso A, ossia $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tende verso un limite, e $f'(a) = A$.

Quindi se $f''(x)$ è discontinua per $x = a$, col tendere di x ad a, $f''(x)$ non deve tendere verso alcun limite.

11° — *Se* f(x) *ammette derivata in un certo intervallo comprendente il valore* a, *col tendere di* x *ad* a, f'(x) *assume infinite volte valori comunque prossimi ad* f'(a), *cioè fissata una quantità piccola ad arbitrio* ε *si può determinare un intervallo comprendente* a *tale che* f'(x) *assume in questo intervallo infiniti valori che differiscono da* f'(a) *di meno di* ε.

12° — *Se* f(x) *ha derivata nell'intervallo* (a, b) *ed* f'(a) *ed* f'(b) *sono di segno contrario, esiste un valore di* x *compreso fra* a *e* b *per cui la derivata si annulla.*

13° — *Se* f(x) *ha derivata nell'intervallo* (a, b), *ed* f'(a) = A *e* f'(b) = B, *variando* x *nell'intervallo* (a, b), f'(x) *assumerà tutti i valori compresi fra* A *e* B.

14° — *Se* f(x) *ha derivata* f'(x) *nell'intervallo* (a, b), *e se fissato ad arbitrio* ε *si può determinare* σ *in modo tale che per ogni valore di* x *compreso in esso e per ogni valore di* h < σ *sia* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ — f'(x) < ε *in valore assoluto, la derivata* f'(x) *è funzione continua, e viceversa.*

15° — Dimostrare le formule

$$d^n(u+v) = d^n u + d^n v$$

$$d^n \cdot au = a d^n u$$

$$d^n(au+bv) = a d^n u + b d^n v \,,$$

dove u e v sono funzioni di x, e a e b costanti:

16° — Essendo u e v sono funzioni di x, si ha:

$$d^n \cdot uv = u d^n v + n du\, d^{n-1} v + \binom{n}{2} d^2 u\, d^{n-2} v + \ldots + v\, d^n u.$$

I coefficienti dei termini sono quelli dello sviluppo della potenza n^{ma} d'un binomio; onde la formula precedente si può scrivere simbolicamente

$$d^n \cdot uv = (du + dv)^n$$

dove occorre intendere che sviluppata la potenza n^{ma} del binomio $du + dv$, scrivendo anche nel primo e nell'ultimo termine le potenze 0 di du e di dv, si porti al d l'esponente di du e di dv; ossia che invece di du^α, dv^β si legga $d^\alpha u$, $d^\beta v$, e ritenendo che $d^0 u = u$, $d^0 v = v$.

In modo analogo si ha simbolicamente:

$$d^n uvw \ldots t = (du + dv + \ldots + dt)^n .$$

17° — Pongasi $u_0 = u$, $u_1 = \frac{u'}{1}$, ... $u_n = \frac{u^{(n)}}{n!}$, e notazioni analoghe per v ed y.

Se $y = uv$, si ricava dalla formula del numero precedente:

$$y_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots\ldots + u_n v_0 .$$

18° — Sia $y = \frac{u}{v}$: si ha $u = vy$. Derivando quest'eguaglianza, servendoci delle notazioni e della formula (17°), si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned}
u_0 &= v_0 y_0 \\
u_1 &= v_1 y_0 + v_0 y_1 \\
u_2 &= v_2 y_0 + v_1 y_1 + v_0 y_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{n-1} &= v_{n-1} y_0 + v_{n-2} y_1 + v_{n-3} y_2 + \ldots + v_0 y_{n-1} \\
u_n &= v_n y_0 + v_{n-1} y_1 + v_{n-2} y_2 + \ldots + v_1 y_{n-1} + v_0 y_n
\end{aligned}$$

dalle quali si possono ricavare successivamente $y_0\, y_1 \ldots y_n$, ossia le derivate di y, in funzione delle derivate di u e v. Risolvendo il sistema delle equazioni lineari precedenti col metodo dei determinanti, si ha:

$$y_n = \frac{1}{v_0^{n+1}} \begin{vmatrix} v_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & u_0 \\ v_1 & v_0 & 0 & \ldots 0 & u_1 \\ v_2 & v_1 & v_0 & \ldots 0 & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1} & v_{n-2} & v_{n-3} & \ldots v_0 & u_{n-1} \\ v_n & v_{n-1} & v_{n-2} & \ldots v_1 & u_n \end{vmatrix}$$

che si può pure scrivere:

$$y_n = \frac{u_n}{v_0} - \frac{u_{n-1}}{v_0^2} v_1 + \frac{u_{n-2}}{v_0^3} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 \\ v_2 & v_1 \end{vmatrix} - \frac{u_{n-3}}{v_0^4} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 & 0 \\ v_2 & v_1 & v_0 \\ v_3 & v_2 & v_1 \end{vmatrix} + \dots\dots$$

19. — Sia $y = F(u)$ ed $u = \varphi(x)$, onde y è funzione di funzione di x mediante u. Si ha:

$$\frac{dy}{dx} = F'(u)\,\varphi'(x) = F'(u)\,u'\,,$$

e derivando più volte quest'eguaglianza, si ricava

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F'(u)\,.\,u'' + F''(u)\,.\,u'^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F'(u)\,.\,u''' + F''(u)\,.\,3u'u'' + F'''(u)\,.\,u'^3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = F'(u)u^{\mathrm{IV}} + F''(u)(4u'u''' + 3u''^2) + F'''(u)\,.\,6u'^2u'' + F^{\mathrm{IV}}(u)\,.\,u'^4$$

. . . .

Questi risultati si possono riassumere nella formula:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n!\,F^{(r)}(u)}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha} \left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta} \dots\dots \left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda}$$

ove nel membro di destra si intende la somma di tutti i termini che si possono ricavare da quello scritto dando ad r i valori $1, 2, \ldots n$, e alle $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ valori interi e positivi, o nulli, tali che:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = r$$
$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n\,.$$

Si verifica questa formula per $n = 1, 2, \ldots$ e si può dimostrare facilmente che, se è vera per un dato valore di n, è anche vera aumentando n di un'unità.

20. — In casi particolari si può, con opportuni artifizii, determinare la derivata d'ordine n d'una funzione.

Sia $y = \frac{1}{1-x^2}$: si può scrivere $y = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right\}$, e derivando n volte, si ha:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right].$$

21. — Sia $y = \text{arc tang}\, x$. Si ha $y' = \frac{1}{1+x^2}$, od esprimendo questa derivata in funzione di y, si ha $y' = \cos^2 y$: derivando successivamente, si ha la formula

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \,.\, \text{sen}\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

CAPITOLO III.

Della serie.

50. — Dicesi *serie* una successione di infinite quantità $u_0\ u_1\ u_2 ...$, formate con legge determinata. Queste quantità diconsi *termini* della serie; u_n dicesi il *termine generale;* u_n è funzione dell'indice n, e se u_n è dato in funzione di n, basterà fare $n = 0, 1, 2 .....$, per avere tutti i termini che si vogliono della serie. Ma la legge di formazione della serie può anche essere data diversamente.

Una serie dicesi *convergente* se la somma dei primi n termini della serie col crescere indefinitamente di n tende verso un limite (finito), e questo limite dicesi *somma della serie.* Una serie non convergente dicesi *divergente.*

La somma dei primi n termini della serie si suol rappresentare con s_n: onde

$$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1};$$

la somma della serie convergente si rappresenta con s; onde $s = \lim_{n=\infty} s_n$, e si scrive anche:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + ...$$

Dicesi *resto* d'una serie convergente arrestata all' n^{mo} termine la differenza fra il limite s e la somma s_n; rappresentandolo con r_n si ha

$$s = s_n + r_n .$$

Col crescere indefinitamente di n, $\lim r_n = 0$.

51. Come esempio di serie si può considerare la progressione geometrica

$$a,\ ax,\ ax^2, \ldots\ldots ax^n \ldots\ldots$$

In essa $s_n = a + ax + \ldots + ax^{n-1}$, e se x è diverso da $+1$,
$s_n = a\,\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$.

Se x è in valore assoluto minore di 1, col crescere indefinitamente di n, x^n ha per limite zero, e quindi s_n tende verso un limite, ossia la serie è convergente ed ha per somma $s = \frac{a}{1-x}$, ed il resto $r_n = a\,\frac{x^n}{1-x}$.

Se x è in valor assoluto maggiore dell'unità, x^n col crescere indefinitamente di n assume valori assoluti crescenti al di là d'ogni limite, e lo stesso avviene per s_n, e la serie è divergente.

Se $x = 1$, la serie diventa $a, a, a \ldots$; $s_n = na$, e col crescere indefinitamente di n, s_n cresce indefinitamente, e la serie è divergente. Se $x = -1$, la serie diventa $a, -a, a, -a \ldots$ e $s_n = a$, ovvero $= 0$, secondochè n è dispari ovvero pari; onde s_n non ha limite, e la serie è ancora divergente.

Teoremi sulle serie.

52. Teorema. — *Se una serie è convergente, e si moltiplicano i suoi termini per una quantità* a, *la nuova serie sarà pure convergente, ed ha per somma la somma della serie proposta moltiplicata per* a.

Sia

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots$$

la serie proposta:

$$au_0,\ au_1,\ au_2 \ldots\ldots$$

la serie ottenuta moltiplicando i termini della prima per a. Posto

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

ed

$$s'_n = au_0 + au_1 + \ldots + au_{n-1}\,.$$

sarà

$$s'_n = as_n\,.$$

e col tendere di n ad infinito s_n tende verso s somma della serie proposta, e quindi $\lim s'_n = as$, il che dimostra il teorema.

53. Teorema. — *Se due serie sono convergenti, anche la serie ottenuta, sommando i termini corrispondenti delle due serie, sarà convergente, ed ha per somma la somma delle somme delle due serie.*

Siano

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,,\ldots$$

e

$$v_0\,,\ v_1\,,\ v_2\,,\ldots$$

le due serie date;

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}\,,$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}\,;$$
$$\lim s_n = s\,,\ \lim s'_n = s'.$$

La serie ottenuta, sommando i termini corrispondenti delle due serie, è

$$u_0 + v_0\,,\ u_1 + v_1\,,\ u_2 + v_2\,,\ldots.$$

e posto

$$s''_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \ldots + (u_{n-1} + v_{n-1})\,.$$

sarà $s''_n = s_n + s'_n$, e facendo tendere n ad ∞, siccome $\lim s_n = s$, e $\lim s'_n = s'$, sarà $\lim s''_n = s + s'$, c. v. d.

54. Teorema. — *Se una serie è convergente, è pure tale la serie che si ottiene trascurando un numero finito dei primi termini, e viceversa.* In altre parole per riconoscere la convergenza o divergenza d'una serie si può far astrazione da un numero finito dei primi termini.

Sia la serie $u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots$; trascurando i primi m termini, si ha la serie $u_m, u_{m+1} \ldots\ldots$ Pongasi

$$s_{m+n} = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_m + u_{m+1} + \ldots\ldots + u_{m+n-1}\,.$$

$$s'_n = u_m + u_{m+1} + \ldots\ldots + u_{m+n-1}$$

ed

$$A = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{m-1}\,,$$

si avrà

$$s_{m+n} = A + s'_n \quad \text{e} \quad s'_n = s_{m+n} - A\,,$$

onde, se la seconda serie è convergente s'_n tende verso un limite e quindi tende anche verso un limite s_{m+n}, e $\lim s_{m+n} = A + \lim s'_n$, e se la prima serie è convergente, lo è pure la seconda, perchè se s_{m+n} tende ad un limite, $\lim s'_n = \lim s_{m+n} - A$.

55. Teorema. — *Se una serie è convergente, il suo termine generale col crescere indefinitamente dell'indice ha per limite zero.*

Infatti se $u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots$ è la serie convergente, ed

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$

ed

$$s_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n\,.$$

sarà $u_n = s_{n+1} - s_n$, e col tendere di n ad infinito $\lim s_n = s$, $\lim s_{n+1} = s$, onde $\lim u_n = 0$.

La condizione $\lim u_n = 0$ è necessaria per la convergenza, ma non sufficiente, come vedremo presto con esempi.

56. Teorema. — Se una serie è convergente, fissata ad arbitrio una quantità ϵ, si può determinare un numero N tale che per ogni valore di $n \geqq N$ e per ogni valore di p sia $u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+p-1} < \epsilon$ in valor assoluto: e viceversa, se questa condizione è soddisfatta, la serie è convergente.

Infatti, se la serie è convergente, s_n col crescere indefinitamente di n tende verso un limite, quindi (N. 15) fissato ϵ si può determinare un numero N tale che $s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p-1}$ sia sempre $< \epsilon$ in valor assoluto per tutti i valori di $n > N$, e reciprocamente.

Serie a termini positivi.

57. — Se i termini $u_0\ u_1\ u_2 \dots$ della serie sono tutti positivi, s_n col crescere di n va crescendo continuamente; quindi s_n tenderà verso un limite, o non vi tenderà secondochè s_n non cresce, ovvero cresce indefinitamente. Servono a riconoscere la convergenza i criteri somministrati dai teoremi che seguono.

Teorema. — *Se una serie a termini positivi ha i suoi termini, da un certo termine in poi, minori dei corrispondenti d'un'altra serie a termini positivi, che si sa essere convergente, sarà pure convergente la serie proposta.*

Siano $u_0, u_1, u_2, \dots$, e $v_0, v_1, v_2, \dots$ le due serie a termini positivi, e supponiamo che sia $u_0 < v_0$, $u_1 < v_1$, $u_2 < v_2, \dots$ ossia che la condizione enunciata nel teorema sia soddisfatta fin dal primo termine; se questo non avvenisse, si può far astrazione da quei termini in principio che non soddisfano alla condizione.

Posto

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1},$$

ed

$$s'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1},$$

sarà $s_n < s'_n$, e siccome la seconda serie è convergente, s'_n col crescere di n va crescendo continuamente, accostandosi al limite s' cui sarà sempre inferiore, onde $s'_n < s'$ ed a fortiori $s_n < s'$; quindi s_n col crescere di n va crescendo continuamente, mantenendosi però inferiore ad una quantità finita s', perciò la prima serie è convergente, e la sua somma è minore della somma della seconda serie.

Corollario. — Se si hanno due serie a termini positivi $u_0\, u_1 \dots$ e $v_0\, v_1 \dots$ e da un certo termine in poi $v_n > u_n$, se la prima serie è divergente, lo sarà pure la seconda.

58. Teorema. — *Una serie a termini positivi* $u_0, u_1, \dots$ *è convergente se* $\sqrt[n]{u_n}$ *è, da un certo termine in poi, minore di una quantità* h *minore di uno: essa è ancora convergente se* $\sqrt[n]{u_n}$ *tende verso un limite minore di uno.*

Invero, se $\sqrt[n]{u_n} < h$ sarà $u_n < h^n$, ed i termini della serie proposta sono, da un certo termine in poi minori dei termini corrispondenti della serie $1,\ h,\ h^2, \dots\dots$ la quale è convergente perchè $h < 1$: perciò è anche convergente la proposta.

Se $\sqrt[n]{u_n}$ tende verso un limite $l < 1$, fissata ad arbitrio una quantità h compresa fra l ed 1, esisterà un valore di n dal quale in poi $\sqrt[n]{u_n}$ differisce da l meno di $h - l$, e quindi $\sqrt[n]{u_n} < h < 1$, e ricadiamo nel caso precedente.

Corollario. — Una serie è divergente se $\sqrt[n]{u_n}$ è da un certo valore di n in poi maggiore di 1, perchè allora anche $u_n > 1$, ed i termini non decrescono indefinitamente.

59. Teorema. — *Una serie a termini positivi è convergente se il rapporto d'un termine al precedente è costantemente, da un certo termine in poi, minore d'una quantità* h *minore di uno, ovvero se tende verso un limite minore di uno.*

Sia $u_0,\ u_1,\ u_2, \dots$ la serie proposta: supponendo verificata la condizione enunciata fin dal primo termine, il che è lecito, sarà

$$\frac{u_1}{u_0} < h\,,\ \frac{u_2}{u_1} < h\,,\ \dots\dots\ \frac{u_n}{u_{n-1}} < h,$$

onde si deduce

$$u_1 < h u_0\,,\ u_2 < h u_1 < h^2 u_0\,,\ \dots\dots\ u_n < h^n u_0\,.$$

e quindi i termini della serie, eccetto il primo, sono rispettivamente minori di quelli della serie u_0, hu_0, h^2u_0, ... che è convergente, quindi anche la serie proposta è convergente.

Se il limite di $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fosse una quantità minore di uno, basta ragionare come al teorema che precede. Si può pure osservare che

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_n}$. (N. 31, 2ª parte dell'esercizio 7°).

Corollario. — Se il rapporto d'un termine al precedente è da un certo termine in poi maggiore di uno, la serie è divergente perchè i termini vanno crescendo, e non tendono verso zero.

60. — Si può, supposta verificata la condizione del teorema che precede, stimare il resto della serie troncata all'n^{mo} termine. Invero si ha

$$r_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots.$$

e se il rapporto d'un termine al precedente è $\leqq h < 1$, sarà

$$u_{n+1} \leqq hu_n, \quad u_{n+2} \leqq h^2u_n \ldots\ldots$$

ossia i termini della serie r_n sono non maggiori dei termini della serie

$$u_n, \quad hu_n, \quad h^2u_n, \ldots\ldots$$

la quale è convergente, ed ha per somma $u_n \frac{1}{1-h}$, onde

$$r_n < u_n \frac{1}{1-h}.$$

Il criterio di convergenza somministrato dal limite di $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ è uno dei più fecondi in pratica.

Sia p. es. la serie

$$x, 2x^2, 3x^3, \ldots\ldots: u_n = nx^n. \; u_{n+1} = (n+1)\, x^{n+1},$$

ed $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x$. Col crescere di n ad infinito

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$; quindi se $x < 1$, la serie proposta è convergente, se $x > 1$ la serie è divergente. Se $x = 1$, il rapporto diventa $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, e quindi è maggiore di uno, e la serie è divergente.

Sia la serie

$$\frac{x}{1}\,,\ \frac{x^2}{2}\,,\ \frac{x^3}{3}\,,\ \ldots\ldots;\ u_n = \frac{x^n}{n}\,,\ \text{e}\ u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,;$$

si ha

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}\,x = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x;\ \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x\,,$$

e la serie è convergente o divergente secondochè x è maggiore ovvero minore di 1. Se $x = 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}$ che è sempre minore di uno, ma siccome ha per limite 1, non esiste una quantità $h < 1$, tale che $\frac{u_{n+1}}{u_n} < h$; in questo caso la serie diventa $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,.... e dicesi armonica; dal teorema precedente non si può pertanto dedurre la sua convergenza o divergenza; vedremo che essa è divergente.

Sia la serie

$$1,\ \frac{x}{1}\,,\ \frac{x^2}{1\,.\,2}\,,\ \frac{x^3}{1.2.3}\,,\ \ldots.;\ u_n = \frac{x^n}{n!}\,,\quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,:$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$, e $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, onde la serie proposta è convergente qualunque sia x.

Il criterio precedente resta adunque in difetto se $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende verso il limite uno, essendo però o sempre, o qualche volta minore del limite, come appunto avviene per la serie armonica, e per la serie più generale in cui $u_n = \frac{1}{(a+n)^{1+\alpha}}$; in questi casi occorre ricorrere ad altri criterii.

61. Teorema. — *La serie il cui termine generale è* $\frac{1}{(a+n)^{1+\alpha}}$ *ed a è una costante positiva, è divergente se* α *è negativo o nullo, convergente se* α *è positivo.*

Si supponga dapprima $\alpha = 0$; si avrà la serie

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+1},\ \frac{1}{a+2},\ \ldots$$

Si consideri la funzione $F(x) = \log(a+x)$; sarà $F'(x) = \frac{1}{a+x}$, e dalla formola $F(x+1) - F(x) = F'(x+\theta)$ ove $0 < \theta < 1$ si ricava

$$\log(a+x+1) - \log(a+x) = \frac{1}{a+x+\theta}.$$

Se nel secondo membro si pongono invece di θ i due valori estremi 0 ed 1 si ricavano le diseguaglianze

$$\log(a+x+1) - \log(a+x) < \frac{1}{a+x};$$

$$\log(a+x+1) - \log(a+x) > \frac{1}{a+x+1}.$$

Facendo nella prima diseguaglianza, che è la sola che ci serve, $x = 0, 1, 2, \ldots n-1$, si ricava:

$$\log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$

$$\log(a+2) - \log(a+1) < \frac{1}{a+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log(a+n) - \log(a+n-1) < \frac{1}{a+n-1}$$

e sommando queste diseguaglianze, e posto

$$s_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1},$$

si ha:

$$s_n > \log(a+n) - \log a.$$

Ora siccome, col crescere indefinitamente di n, $\log(a+n)$ cresce indefinitamente, anche s_n crescerà indefinitamente, e la serie considerata, in cui $\alpha=0$, è divergente.

Come caso particolare, se $a=1$, si ha che la serie armonica è divergente.

Supponga si ora $\alpha<0$; sarà

$$(a+n)^{1+\alpha}<a+n, \quad \text{e} \quad \frac{1}{(a+n)^{1+\alpha}}>\frac{1}{a+n};$$

onde i termini della serie proposta sono maggiori dei termini della serie il cui termine generale è $\frac{1}{a+n}$, la quale è divergente, perciò anche la serie proposta per $\alpha<0$ è divergente. Per esempio la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots$$

è divergente.

Suppongasi in fine $\alpha>0$; si consideri la funzione

$$F(x)=-\frac{1}{\alpha(a+x)^{\alpha}}.$$

Sarà

$$F'(x)=\frac{1}{(a+x)^{1+\alpha}},$$

e ricorrendo alla formula $F(x+1)-F(x)=F'(x+\theta)$ si ricava

$$\frac{1}{\alpha(a+x)^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha(a+x+1)^{\alpha}}=\frac{1}{(a+x+\theta)^{1+\alpha}}$$

e se invece di θ pongo 1, il membro di destra diminuisce, onde:

$$\frac{1}{(a+x+1)^{1+\alpha}}<\frac{1}{\alpha(a+x)^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha(a+x+1)^{\alpha}}.$$

Se in questa diseguaglianza si fa $x = 0, 1, 2, \dots n-2$, si ricava:

$$\frac{1}{(a+1)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha a^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha (a+1)^{\alpha}}$$

$$\frac{1}{(a+2)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha (a+1)^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha (a+2)^{\alpha}}$$

. . . .

$$\frac{1}{(a+n-1)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha (a+n-2)^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha (a+n-1)^{\alpha}} .$$

Sommo queste diseguaglianze, aggiungo ad ambi i membri $\frac{1}{a^{1+\alpha}}$, e, posto

$$S_n = \frac{1}{a^{1+\alpha}} + \frac{1}{(a+1)^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)^{1+\alpha}} .$$

trovo:

$$S_n < \frac{1}{\alpha a^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha (a+n-1)^{\alpha}} + \frac{1}{a^{1+\alpha}} .$$

ed a maggior ragione:

$$S_n < \frac{1}{\alpha a^{\alpha}} + \frac{1}{a^{1+\alpha}} ,$$

perciò s_n, col crescere di n, cresce continuamente, ma non indefinitamente, e la serie proposta per $\alpha > 0$ è convergente.

62. Teorema. — *Una serie è convergente se* $\mathrm{n}^{1+\alpha}\mathrm{u_n}$, *dove* α *è positivo, non cresce indefinitamente con* n; *essa è divergente se* $\mathrm{n\,u_n}$ *col crescere di* n *non assume valori prossimi quanto si vuole allo zero.*

Infatti se esiste un numero A tale che $n^{1+\alpha} u_n < A$, sarà

$$u_n < \frac{A}{n^{1+\alpha}}, \qquad (n > 0),$$

ed i termini della serie proposta sono perciò minori dei termini corrispondenti della serie il cui termine generale è $\frac{A}{n^{1+\alpha}}$, la quale è convergente, perciò è anche convergente la serie proposta.

Se invece esiste un numero A tale che per valori di n sufficientemente grandi sia sempre $n\,u_n > A$, sarà $u_n > \frac{A}{n}$, e la serie il cui termine generale è $\frac{A}{n}$ essendo divergente, è pure tale la serie proposta.

Se u_n è infinitesimo d'ordine determinato r, prendendo per infitesimo principale $\frac{1}{n}$, la quantità $n^r\,u_n$ col crescere di n tende verso un limite finito l, diverso da zero e dall'infinito; quindi, per valori sufficientemente grandi di n, sarà $n^r\,u_n$ compreso fra due quantità finite comunque prossime ad l, e perciò la serie è convergente se $r > 1$, divergente se $r \leqq 1$.

Per esempio una serie, il cui termine generale è funzione razionale di n, è convergente quando il grado del denominatore supera almeno di due unità il grado del numeratore; altrimenti è divergente.

La serie, il cui termine generale è $u_n = \text{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right)$, sarà convergente se $\alpha > 1$, divergente se $\alpha \leqq 1$, supposto però x non nullo, perchè, siccome $\lim\limits_{n=\infty} n^\alpha\,\text{sen}^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right) = x^\alpha$, il termine generale è infinitesimo d'ordine α.

Lo stesso è a dirsi della serie in cui $u_n = \text{tang}^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right)$.

63. — Il metodo di ragionare per riconoscere la convergenza delle serie del penultimo numero si può generalizzare dando luogo al seguente:

TEOREMA. — *Se* f (x) *è funzione positiva ed indefinitamente decrescente per valori di* x $\geqq$ a, *e si conosce una funzione* F (x) *la cui derivata è* f (x), *la serie*

$$f(a),\ f(a+1),\ f(a+2)\ \ldots.$$

sarà convergente ovvero divergente secondochè F (x), *che col crescere di* x *cresce continuamente perchè la sua derivata è positiva, non cresce ovvero cresce indefinitamente.*

Infatti si ha $F(x+1) - F(x) = F'(x+\theta)$, ove $0 < \theta < 1$: e siccome $F'(x) = f(x)$ si ha $F(x+1) - F(x) = f(x+\theta)$: si è supposto che $f(x)$ decresca continuamente: quindi $f(x) > f(x+\theta) > f(x+1)$, ossia:

$$f(x) > F(x+1) - F(x) > f(x+1).$$

Facciasi successivamente $x = a, a+1, \ldots a+n-2, a+n-1$, e si sommino le diseguaglianze ottenute; posto:

$$s_n = f(a) + f(a+1) + \ldots + f(a+n-1),$$

si ha:

$$s_n > F(a+n) - F(a) > s_{n+1} - f(a).$$

Quindi si deduce che se $F(a+n)$ cresce indefinitamente col crescere di n anche s_n cresce indefinitamente, e la serie è divergente: se invece $F(a+n)$ tende verso un limite, esso ne sarà sempre minore, onde

$$s_{n+1} < f(a) + \lim F(a+n) - F(a),$$

quindi s_{n+1} non cresce indefinitamente e la serie è convergente.

64. — Si può dimostrare, ricorrendo al teorema che precede, che le serie

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}}, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \frac{1}{3^{1+\alpha}}, \ldots$$

$$\frac{1}{2(\log 2)^{1+\alpha}}, \frac{3}{3(\log 3)^{1+\alpha}}, \ldots$$

$$\frac{1}{3\log 3(\log\log 3)^{1+\alpha}}, \frac{1}{4\log 4(\log\log 4)^{1+\alpha}}, \ldots$$

. . . .

sono convergenti se $\alpha > 0$, divergenti se $\alpha \lesseqgtr 0$.

Infatti le serie scritte si ottengono dalle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \frac{1}{x(\log x)^{1+\alpha}}, \frac{1}{x\log x(\log\log x)^{1+\alpha}}, \ldots$$

dando ad x valori interi e positivi in modo che i denominatori siano reali e positivi: e queste funzioni sono per questi valori di x positive e decrescenti indefinitamente. Se $\alpha > 0$ si possono assumere per funzioni aventi per derivate le precedenti:

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}, \quad -\frac{1}{\alpha (\log x)^{\alpha}}, \quad -\frac{1}{\alpha (\log \log x)^{\alpha}} \dots$$

le quali col crescere di x tendono a zero: quindi se $\alpha > 0$, le serie proposte sono convergenti.

Se $\alpha = 0$, si può assumere

$$F(x) = \log x, \quad \log \log x, \quad \log \log \log x \dots$$

le quali col crescere di x crescono indefinitamente, quindi per $\alpha = 0$ le serie proposte sono divergenti. Esse sono divergenti a maggior ragione se $\alpha < 0$.

Serie con termini di segno qualunque.

65. Teorema. — *Una serie a termini di segno qualunque è convergente se è convergente la serie formata coi valori assoluti dei termini.*

Sia s_n la somma dei primi n termini della serie, s'_n la somma dei termini positivi di s_n, e $-s''_n$ la somma dei termini negativi. Sarà $s_n = s'_n - s''_n$; la serie formata coi valori assoluti dei termini abbia per somma Σ: sarà $\Sigma = \lim (s'_n + s''_n)$, quindi s'_n e s''_n, che crescono col crescere di n, mantenendosi però inferiori a Σ tendono verso limiti; sia $\lim s'_n = s'$, e $\lim s''_n = s''$; allora anche s_n tende verso un limite $\lim s_n = s' - s''$, e la serie è convergente.

La proposizione inversa non è vera.

66. Teorema. — *Una serie a termini di segno alternato decrescenti continuamente ed indefinitamente è convergente.*

Sia

$$u_0, \quad -u_1, \quad +u_2, \quad -u_3, \dots$$

la serie, dove le $u_0\ u_1\ u_2 \ldots\ldots$ sono quantità positive tali che $u_0 > u_1 > u_2 > \ldots\ldots$ e $\lim u_n = 0$. Prendasi un numero pari di termini dalla serie data, e sia

$$s_{2n} = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots. + u_{2n-2} - u_{2n-1}.$$

Questa somma si può scrivere:

$$s_{2n} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots.. + (u_{2n-2} - u_{2n-1})$$

e

$$s_{2n} = u_0 - (u_1 - u_2) - \ldots.. - (u_{2n-3} - u_{2n-2}) - u_{2n-1};$$

dalla prima eguaglianza si ricava che s_{2n} cresce col crescere di n, e dalla seconda che $s_{2n} < u_0$, onde s_{2n} col crescere di n tende verso un limite, e sia $\lim s_{2n} = s$.

Prendasi ora un numero dispari di termini; $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n}$, siccome $\lim s_{2n} = s$, e $\lim u_{2n} = 0$, sarà ancora $\lim s_{2n+1} = s$, ossia la somma d'un numero qualunque di termini della serie proposta tende ad un limite fisso, e la serie è convergente.

Se si tronca la serie all'n^{mo} termine u_{n-1}, il resto

$$r_n = \pm u_n \mp u_{n+1} \pm \ldots\ldots$$

ossia

$$r_n = \pm (u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots\ldots).$$

La quantità fra parentesi è positiva, e $< u_n$; quindi, arrestando la serie ad un termine qualunque, il resto è del segno, e minore in valore assoluto del primo termine trascurato.

Per es. la serie $\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots..$ i cui termini sono quelli della serie armonica alternati di segno, ha i suoi termini decrescenti continuamente ed indefinitamente; quindi è convergente. Troncandola al termine $\pm\frac{1}{n}$, l'errore che si commette è minore in valor assoluto di $\frac{1}{n+1}$; quindi se si vuol calcolare la somma di questa serie a meno di $\frac{1}{10^7}$ bisognerà sommare $10^7 - 1 = 10000000 - 1$ termini; onde quella serie è di convergenza assai lenta.

Serie di Taylor.

67. — Se $f(x)$ è funzione intera, di grado $n-1$, si ha dall'algebra la formula:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0),$$

che esprime $f(x_0+h)$ in funzione dei valori di $f(x)$ e delle sue derivate per $x=x_0$, e di h. Ma se $f(x)$ non è un polinomio intero di grado $n-1$, la formula precedente non potrà essere esatta: però spesso il polinomio di destra dà un valore approssimato di $f(x_0+h)$; noi ci proponiamo di stimare quest'approssimazione.

Pongasi perciò

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\,f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+R\,, \tag{1}$$

dove la quantità R, che chiameremo *termine complementare* o *resto*, è ciò che manca al polinomio di destra affinchè eguagli $f(x_0+h)$, ossia

$$R=f(x_0+h)-f(x_0)-h\,f'(x_0)-\ldots\ldots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)\,.$$

Per avere un'espressione più semplice di R pongasi $x_0+h=a$, onde $h=a-x_0$; sarà

$$R=f(a)-f(x_0)-(a-x_0)f'(x_0)-\ldots\ldots-\frac{(a-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0).$$

Si consideri la funzione

$$F(x) = f(a) - f(x) - (a - x) f'(x) - \ldots\ldots - \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x),$$

la quale si ottiene da R leggendo x dovunque trovasi x_0. Sarà $F(a) = 0$, $F(x_0) = R$, e derivando $F(x)$ si ricava

$$F'(x) = -\frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Ed ora basta ricorrere alle formule che legano i valori d'una funzione con quelli della derivata per avere espressioni di R.

Ricorrasi alla formula $F(a) - F(x_0) = (a - x_0) F'(x_1)$, ove x_1 è una quantità compresa fra x_0 ed a; sostituendo, e cambiando segno:

$$R = (a - x_0) \frac{(a - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

e ponendo $x_0 + h$ invece di a, e fatto $x_1 = x_0 + \theta h$, ove θ risulta compresa fra 0 ed 1, si trova l'espressione

$$R = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) \tag{2}$$

la quale è dovuta a Cauchy.

Ricorrendo invece alla formula:

$$\frac{F(a) - F(x_0)}{\varphi(a) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione arbitraria la cui derivata non si annulli nell'intervallo $x_0 a$, si ricava:

$$R = \frac{\varphi(a) - \varphi(x_0)}{\varphi'(x_1)} \frac{(a - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1)$$

e posto

$$\varphi(x) = (a - x)^p \qquad \text{con} \qquad p \geqq 1,$$

sarà

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(x_0) = (a - x_0)^p, \quad \varphi'(x) = -p(a - x)^{p-1},$$

e sostituendo:

$$R = \frac{(a - x_0)^p (a - x_1)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(x_1).$$

Se in essa si fa $p = 1$, si ritrova l'espressione precedente: facendo $p = n$ si ha:

$$R = \frac{(a - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_1),$$

od anche, posto $a = x_0 + h$, $x_1 = x_0 + \theta h$,

$$R = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h), \tag{3}$$

la quale espressione è dovuta a Lagrange (*).

La formula (1) dicesi formula di Taylor; le (2) e (3) dànno il il termine complementare in funzione d'una quantità incognita θ, che si sa essere compresa fra 0 ed 1.

68.— Facciasi ora crescere n indefinitamente: può avvenire che R tenda verso zero: se ciò avviene la serie $f(x_0)$, $hf'(x_0)$, $\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)$,... è convergente, e la sua somma è $f(x_0 + h)$: quindi si potrà scrivere:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}f''(x_0) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x_0) + \ldots\ldots$$

e si avrà $f(x_0 + h)$ sviluppata in serie ordinata secondo le potenze ascendenti di h, la quale chiamasi serie di Taylor. Affinchè però essa sia applicabile è necessario e sufficiente che $\lim R = 0$, per $n = \infty$.

(*) Un'altra espressione si ha dal calcolo integrale: sostituendo nella formula $F(a) - F(x_0) = \int_{x_0}^{a} F'(x)\,dx$ si ricava

$$R = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{a} (a - x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Si può subito affermare che la serie di Taylor è applicabile a tutte quelle funzioni per cui la derivata $f^{(n)}(x)$ è per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed $x_0 + h$ minore in valor assoluto d'una quantità A, qualunque sia l'ordine n. Infatti per queste funzioni è in valor assoluto $R < \frac{h^n}{n!} A$, come si ricava dalla forma del resto di Lagrange; e $\frac{h^n}{n!}$ tende a zero, perchè la serie avente questa quantità per termine generale è convergente, quindi anche $\lim R = 0$. Quindi sono sviluppabili colla serie di Taylor le funzioni e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x, \ldots..$ le cui derivate successive non crescono indefinitamente.

Si può pure applicare la serie di Taylor alle funzioni la cui derivata n^{ma} è della forma $u^n v$, u e v essendo due funzioni di x e di n, che, per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed $x_0 + h$ e per tutti i valori di n sono minori di due quantità fisse A e B, perchè, ricorrendo alla forma del resto data da Lagrange, si ha $R < \frac{h^n A^n}{n!} B$, la quale quantità ha ancora per limite zero.

Serie di Maclaurin.

69. — Pongasi nella formula di Taylor $x_0 = 0$, $h = x$; essa diventa

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \ldots.. + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R,$$

ed R assume le forme

$$R = \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x), \quad \text{ovvero} \quad R = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$$

e le formule precedenti sussistono se $f(x)$ ammette le derivate successive fino all'n^{ma} per tutti i valori della variabile compresi fra 0 ed x.

Se col crescere indefinitamente di n $\lim R = 0$, si avrà lo sviluppo di $f(x)$ in serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \ldots\ldots$$

la quale dicesi serie di Maclaurin.

La serie di Maclaurin è caso particolare della serie di Taylor: ma la serie di Taylor si può pure dedurre da quella di Maclaurin. Pongasi invero $F(h) = f(x_0 + h)$; sarà $F^{(n)}(h) = f^{(n)}(x_0 + h)$, ed applicando la serie di Maclaurin alla funzione $F(h)$ si ottiene la serie di Taylor.

Sviluppo in serie di e^x.

70. — Le derivate successive della funzione e^x sono eguali alla stessa funzione, e quindi tutte finite, e si riducono all'unità per $x = 0$: quindi applicandovi la serie di Maclaurin si ha:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

ed il resto della serie troncata all'ultimo termine è, sotto la forma di Lagrange,

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x},$$

ed esso ha effettivamente per limite zero col crescere indefinitamente di n, perchè, essendo convergente la serie il cui termine generale è $\frac{x^n}{n!}$, $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ (V. N° 60), ed $e^{\theta x}$ è compreso fra 1 ed e^x quantità finite; perciò il precedente sviluppo in serie di e^x vale per tutti i valori di x.

71. Ponendo nella formula precedente $x=1$, si ha una serie numerica che rappresenta il valore di e:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\dots..$$

ed il resto della serie troncata all'n^{mo} termine, è:

$$R_n=\frac{e^\theta}{n!}$$

e siccome $e<3$, si avrà $R_n<\frac{3}{n!}$. Ma possiamo trovare un'espressione più conveniente di R_n. Invero

$$R_n=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots..$$

ossia

$$R_n=\frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots..\right]$$

e poichè $n+1$, $n+2$...... sono maggiori di n,

$$R_n<\frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\dots..\right]$$

e sommando la progressione geometrica di ragione $\frac{1}{n}$ del membro di destra

$$R_n<\frac{1}{n!}\,\frac{n}{n-1}, \quad \text{ossia} \quad R_n<\frac{1}{(n-1)!(n-1)};$$

vale a dire l'errore che si commette troncando la serie dopo n termini è minore della $(n-1)^{ma}$ parte dell'ultimo termine scritto.

Scambiando n in $n+1$, e scrivendo il valore di $R_{n+1}=\frac{\theta}{n!\,n}$, si ha

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots..+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}$$

ove $0<\theta<1$.

72. — Servendoci di questa formula potremo dimostrare che il numero e è incommensurabile. Infatti, pongasi per assurdo che sia $e = \frac{m}{n}$, m ed n essendo due numeri interi: sarà:

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{1\,.\,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n\,!} + \frac{\theta}{n\,!\,n}\,;$$

si moltiplichi per $n\,!$, e si trasportino tutti i termini del membro di destra, eccetto l'ultimo, nel membro di sinistra; si avrà a sinistra un numero intero, e a destra $\frac{\theta}{n}$ la quale eguaglianza è assurda, perchè essendo θ compreso fra 0 ed 1, anche $\frac{\theta}{n}$ sarà maggiore di zero e minore di uno: quindi non può essere eguale ad un numero intero.

Pongasi, nello sviluppo in serie di e^x, $x \log a$ invece di x: siccome $e^{x \log a} = a^x$, si ottiene

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 \log^2 a}{1\,.\,2} + \frac{x^3 \log^3 a}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

Sviluppo in serie di sen x e cos x.

73. — Pongasi $f(x) = \operatorname{sen} x$; le derivate successive sono

$$\cos x,\ -\operatorname{sen} x,\ -\cos x,\ \operatorname{sen} x, \ldots$$

e si riproducono periodicamente, sicchè:

$$f^{(4n)}(x) = \operatorname{sen} x\,,\quad f^{(4n+1)}(x) = \cos x\,,$$
$$f^{(4n+2)}(x) = -\operatorname{sen} x\,,\quad f^{(4n+3)}(x) = -\cos x\,,$$

che per $x = 0$ si riducono rispettivamente a:

$$0,\ 1,\ 0,\ -1.$$

Onde applicandovi la formola di Maclaurin col resto di Lagrange si troveranno, a seconda del termine cui si arriva:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!} \operatorname{sen} \theta x,$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \qquad \dots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \cos \theta x,$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \qquad \dots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \operatorname{sen} \theta x,$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \qquad \dots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \cos \theta x.$$

Il resto, sotto qualunque forma si consideri, tende a zero col crescere indefinitamente di n, quindi

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Se si suppone $0 < x < \frac{\pi}{2}$, anche θx sarà compreso fra gli stessi limiti, e sen θx e cos θx saranno positivi; onde si deduce che se nella serie di sen x ci arrestiamo ad un termine con x^{4n-1}, ovvero con x^{4n+1} si ha un resto positivo o negativo, ossia il risultato è alternativamente minore e maggiore di sen x; quindi si hanno le disuguaglianze:

$$\operatorname{sen} x < x, \ \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!}, \ \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

74. — In modo analogo, posto $f(x) = \cos x$, si deduce:

$$f^{(4n)}(x) = \cos x, \qquad f^{(4n+1)}(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$f^{(4n+2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4n+3)}(x) = \operatorname{sen} x,$$

che, per $x = 0$, si riducono rispettivamente a:

$$1, \ 0, \ -1, \ 0.$$

Onde applicando la formola di Maclaurin, col resto sotto la forma data da Lagrange si trova, a seconda del termine a cui ci arrestiamo.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \operatorname{sen} \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \qquad \ldots\ldots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \operatorname{sen} \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \qquad \ldots\ldots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!} \cos \theta x.$$

Il resto, sotto qualunque forma si prenda, ha per limite zero col tendere di n ad infinito: onde

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

e, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, troncando la serie ad un termine con x elevato ad esponente doppiamente pari ovvero semplicemente pari, si ha un resto negativo, ovvero positivo, onde:

$$\cos x < 1, \ \cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}, \ \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots.$$

Formula del binomio.

75. — Il binomio $(a + b)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$; e ponendo $\frac{b}{a} = x$ il secondo fattore diventa $(1 + x)^m$; è questa funzione che vogliamo sviluppare secondo le potenze ascendenti di x.

Pongasi perciò $f(x) = (1 + x)^m$; sarà $f'(x) = m\,(1 + x)^{m-1}$, $f''(x) = m\,(m - 1)(1 + x)^{m-2}$, ed in generale

$$f^{(n)}(x) = m\,(m - 1)\ldots\ldots(m - n + 1)(1 + x)^{m-n}.$$

Quindi la formula di Maclaurin dà:

$$(1)\qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \dots\dots$$
$$\dots\dots + \frac{m\,(m-1)\dots(m-n+2)}{1\,.\,2\dots(n-1)}\,x^{n-1} + R_n,$$

e il resto R_n, sotto la forma di Lagrange, è

$$(2)\qquad R_n = \frac{m\,(m-1)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\dots n}\,x^n\,(1+\theta\,x)^{m-n},$$

e sotto quella di Cauchy è

$$(3)\qquad R_n = (1-\theta)^{n-1}\,\frac{m\,(m-1)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\dots(n-1)}\,x^n\,(1+\theta\,x)^{m-n}.$$

Se m è intero, e positivo, il resto si annulla facendo $n = m + 1$, e si ottiene lo sviluppo del binomio per l'esponente intero e positivo, che si conosce dall'algebra. Se m non è intero e positivo, la serie, i cui primi termini sono scritti nella formula (1), continua indefinitamente. In essa il rapporto del termine di posto $n+1$ al precedente è $\frac{m-n+1}{n}\,x = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right)x$, e col crescere indefinitamente di n ha per limite $-x$; quindi se x in valor assoluto è maggiore dell'unità, la serie è divergente, ed R_n non può aver per limite zero. Se x è in valor assoluto minore dell'unità, la serie è convergente; inoltre $\lim R_n = 0$, come ora dimostreremo.

Dalla convergenza di questa serie per $x < 1$ in valor assoluto, si deduce che il suo termine generale ha per limite zero, ossia

$$\lim \frac{m\,(m-1)\dots(m-n+2)}{1\,.\,2\dots(n-1)}\,x^{n-1} = 0$$

per n infinito, qualunque sia m: e scambiando m in $m-1$, si deduce che

$$\lim \frac{(m-1)\,(m-2)\dots(m-n+1)}{1\,.\,2\dots(n-1)}\,x^{n-1} = 0.$$

Ora la (3) si può scrivere $R_n = ABC$, ponendo:

$$A = \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)} x^{n-1},$$

$$B = mx(1+\theta x)^{m-1}, \quad \text{e} \quad C = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

ed il primo fattore A ha per limite zero, come si è visto; nel secondo mx è costante, e $(1+\theta x)^{m-1}$ è compreso fra 1 e $(1+x)^{m-1}$ quantità pure costanti; il terzo fattore C è minore dell'unità, perchè, qualunque sia il segno di x, purchè in valor assoluto < 1, $1 - \theta < 1 + \theta x$; onde $\lim R_n = 0$.

Quindi per tutti i valori di x minori in valor assoluto dell'unità, si ha:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \dots$$

Dando ad m varii valori, si ottengono le formule:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 + \frac{1.3}{2.4.6} x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^4 + \dots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 - \frac{1.3}{2.4.6} x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^4 + \dots$$

Queste formule possono servire per calcolare le radici dei numeri: così $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ e basterà svolgere in serie il radicale $\sqrt{1+\frac{1}{4}}$; queste serie sono rapidamente convergenti se la frazione x è assai piccola.

76. — Rimangono a studiare i casi di $x = \pm 1$. Premetteremo a questo scopo che l'espressione

$$P_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}$$

ove a e b sono costanti non intere e negative, nè nulle, col tendere di n ad ∞ cresce in valor assoluto indefinitamente se $a > b$, ha costantemente il valore 1 se $a = b$, e tende verso zero se $a < b$.

Suppongasi dapprima $a > b$, e $b > 0$; allora

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b}, \quad \frac{a+1}{b+1} = 1 + \frac{a-b}{b+1}, \dots$$
$$\frac{a+n-1}{b+n-1} = 1 + \frac{a-b}{b+n-1}$$

e quindi

$$P_n = \left(1 + \frac{a-b}{b}\right)\left(1 + \frac{a-b}{b+1}\right)\dots\left(1 + \frac{a-b}{b+n-1}\right)$$

dove i secondi termini dei binomii sono tutti positivi. Eseguendo la moltiplicazione si ha evidentemente

$$P_n > 1 + (a-b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1}\right).$$

Ma i termini entro parentesi sono i primi termini d'una serie divergente; quindi col crescere indefinitamente di n questa somma cresce indefinitamente, ed anche P_n cresce indefinitamente.

Sia ancora $a > b$, ma $b < 0$; prendasi l'intero m tale che $b + m > 0$, e pongasi $a + m = a'$, $b + m = b'$; suppongasi $n > m$, e $n - m = n'$; sarà

$$P_n = \frac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{b(b+1)\dots(b+m-1)} \cdot \frac{a'(a'+1)\dots(a'+n'-1)}{b'(b'+1)\dots(b'+n'-1)}.$$

Il primo fattore di P_n è una quantità finita, e non nulla, perchè a e b non sono nè nulli, nè numeri interi e negativi; il secondo fattore col crescere di n e quindi di n' cresce indefinitamente perchè $a' > b'$; onde $\lim P_n = \infty$.

Suppongasi $a < b$; sarà

$$\frac{1}{P_n} = \frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$$

ed essendo $b > a$, questa quantità cresce con n indefinitamente, onde $\lim P_n = 0$.

Se $a = b$, $P_n = 1$.

77. — Ciò posto, suppongasi nella formola del binomio $x = +1$; il resto, calcolato colla formola di Lagrange, diventa:

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}(1+\theta)^{m-n}$$

ossia

$$R_n = (-1)^n \frac{-m(1-m)\ldots(n-1-m)}{1.2\ldots n}(1+\theta)^{m-n},$$

ed il fattore $(1+\theta)^{m-n} < 1$ se $n > m$; il fattore $\frac{-m.(1-m)\ldots(n-1-m)}{1.2\ldots n}$ si ottiene da P_n ponendo $a = -m$, $b = 1$; quindi tende a zero se $-m < 1$, ossia $m > -1$; quindi, in questa ipotesi anche R_n tende a zero, e si ricava:

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots$$

per ogni valore di $m > -1$.

Se si fa $m = -1$, la serie di destra diventa $1 - 1 + 1 - 1\ldots$ che è divergente; se $m < -1$, il termine generale della serie

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = \pm \frac{-m(1-m)(2-m)\ldots(n-1-m)}{1.2.3\ldots n}$$

col crescere di n, per ciò che si è detto, cresce in valor assoluto indefinitamente, e la serie è divergente (N. 55).

78. — Facciasi in fine nella formula del binomio $x = -1$; la serie diventa

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \cdots$$

quindi

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - \frac{m}{1} = -\frac{m-1}{1}$$

$$S_3 = -\frac{m-1}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$$

$$S_4 = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

. . . .

$$S_n = (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+2)}{(n-2)!} + (-1)^{n+1} \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}.$$

Si ha così un' espressione di S_n, ed è facile il vederne il suo limite per n infinito. Invero si può scrivere:

$$S_n = \frac{(1-m)(2-m)\ldots\ldots(n-1-m)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}$$

e per ciò che si è dimostrato, $\lim S_n = 0$ se $1 - m < 1$, ossia $m > 0$, quindi si ha

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

per $m > 0$, la quale formula coincide appunto colla formula del binomio per $x = -1$, ed m positivo. Invece se $m < 0$, s_n col crescere di n cresce indefinitamente, e la serie è divergente; d'altra parte il binomio $(1 + x)^m$ si riduce a $0^m = \infty$, se m è negativo.

Se poi $m=0$, il binomio prende la forma 0^0 che non ha significato, e la serie si riduce al suo primo termine 1.

Conchiudendo, diremo che la formula del binomio vale per x minore di uno in valor assoluto; vale ancora per $x=1$ se $m>-1$, e per $x=-1$ se $m>0$, e vale solamente in questi casi.

Sviluppo in serie di $\log(1+x)$.
Formule pel calcolo dei logaritmi.

79. — Pongasi $f(x)=\log(1+x)$; si avrà

$$f'(x)=(1+x)^{-1},\quad f''(x)=-(1+x)^{-2},\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n},$$

onde si ricava

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ldots\ldots f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

e sostituendo nella formula di Maclaurin:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n, \tag{1}$$

dove R_n si può mettere sotto le due forme:

$$R_n=(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}, \tag{2}$$

ovvero

$$R_n=(-1)^{n-1}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{-n}. \tag{3}$$

La serie, i cui primi termini sono scritti nella formula (1) è divergente se $x>1$ in valor assoluto, perchè il rapporto di due termini consecutivi $\pm\frac{x^n}{n}:\mp\frac{x^{n-1}}{n-1}=-\frac{n-1}{n}x$ ha per limite $-x$ col crescere indefinitamente di n; quindi se $x^2 > 1$ la serie in questione non può rappresentare $\log(1+x)$.

Supposto x positivo, ma minore di uno, prendendo l'espressione (2) del resto, si ha $1+\theta x > 1$, quindi $(1+\theta x)^{-n} < 1$; il primo fattore $\frac{x^n}{n}$ col crescere indefinitamente di n tende a zero, perchè x^n ha per limite zero, ed il denominatore cresce indefinitamente; onde $\lim R_n = 0$, e

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

Questa stessa formula serve anche per $x=1$, perchè in questo caso $R_n = \pm \frac{1}{n}(1+\theta x)^{-n}$, ed il secondo fattore è ancora minore di 1, mentre il primo $\frac{1}{n}$ ha per limite zero; quindi si deduce:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots \tag{4}$$

che è la serie armonica coi termini di segno alternato; essa però è di convergenza assai lenta.

Suppongasi ora x negativo, ma minore di uno in valor assoluto; ricorrendo alla seconda forma del resto, si ha:

$$R_n = \pm x^n \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

e, col crescere indefinitamente di n, x^n ha per limite zero; il fattore $\frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$ ed è quindi finito; il terzo fattore $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} < 1$, onde $\lim R_n = 0$.

Se si fa $x = -1$, la serie di destra diventa

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots$$

la quale è divergente; d'altra parte a sinistra si ha

$$\log(1-1) = \log 0 = -\infty\,.$$

Conchiudendo si ha che, per tutti i valori di x minori di 1 in valor assoluto, e per $x=1$ sussiste la formula:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots \qquad (5)$$

80. — In questa formula si scambi x in $-x$: si ricava:

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\ldots \qquad (6)$$

e sottraendola dalla precedente, i termini con esponente pari si distruggono, e quelli con esponenti impari si raddoppiano; onde:

$$\log(1+x)-\log(1-x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots\right) \qquad (7)$$

la quale vale per $x^2<1$. Pongasi

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{h}{z}=\frac{z+h}{z}$$

si ricava: $x=\frac{h}{2z+h}$, e sarà certamente $x<1$ se h e z sono quantità positive. Sostituendo nella (7) si ha:

$$\log(z+h)-\log z=2\left(\frac{h}{2z+h}+\frac{h^3}{3(2z+h)^3}+\frac{h^5}{5(2z+h)^5}+\ldots\ldots\right) \qquad (8)$$

e dando in essa ad h e z valori positivi convenienti, si possono determinare i logaritmi naturali di tutti i numeri.

Facciasi in essa $z=1$, $h=1$; si ricava:

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,.\,3^3}+\frac{1}{5\,.\,3^5}+\frac{1}{7\,.\,3^7}+\ldots\ldots\right]$$

serie rapidamente convergente; e calcolandone un numero sufficiente di termini, si ha

$$\log 2=0{,}69314718\ldots\ldots$$

Facendo nella stessa formula $z=4$, $h=1$ si ricava:

$$\log 5 = \log 4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \dots\right]$$

ora $\log 4 = 2 \log 2$, e quindi è noto, e la serie è di convergenza rapidissima, onde facilmente si può avere il $\log 5$. Avuto questo, si ottiene $\log 10 = \log 5 + \log 2$, e si trova

$$\log 10 = 2{,}30258509\dots$$

e questo numero ci servirà fra breve.

Così si vede come si possano successivamente calcolare i logaritmi dei numeri primi. In pratica si suole ricorrere ad artifizii che rendano ancora più rapida la convergenza delle serie a calcolarsi. Ad esempio, per calcolare $\log 7$ si può fare a questo modo: pongasi nella formula (8) $z = 49 = 7^2$, e $h = 1$; $z + h$ diventa eguale a $50 = 2 \cdot 5^2$, onde:

$$\log 2 + 2 \log 5 - 2 \log 7 = 2\left[\frac{1}{99} + \frac{1}{3 \cdot 99^3} + \frac{1}{5 \cdot 99^5} + \dots\right]$$

donde si ricava $\log 7$ mediante $\log 2$ e $\log 5$ che sono noti, e della somma d'una serie di convergenza rapidissima.

81. — Le formule precedenti servono pel calcolo dei logaritmi naturali; da essi si possono dedurre i logaritmi in una base qualunque.

Sia invero y un numero dato, x ed x' i suoi logaritmi, il primo neperiano, ed il secondo in una base a.

Sarà

$$e^x = a^{x'} = y,$$

e prendendone i logaritmi in una base qualunque

$$x \operatorname{Log} e = x' \operatorname{Log} a,$$

onde

$$x' = x\,\frac{\text{Log}\, e}{\text{Log}\, a} = x\,\text{Log}_a\, e = x\,\frac{1}{\log a}$$

ossia il logaritmo in base a d'un numero qualunque si ottiene moltiplicando il logaritmo naturale dello stesso numero per un fattore costante, detto *modulo* del sistema di logaritmi in base a, il quale vale il logaritmo in base a del numero e, ovvero il reciproco del logaritmo naturale della base a.

Quindi il modulo dei logaritmi decimali varrà $\text{Log}_{10}\, e$ ovvero $\frac{1}{\log 10}$: rappresentandolo con M si ha:

$$M = \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2,302...} = 0,43429448...$$

Invece di calcolare prima i logaritmi naturali, per dedurne, moltiplicandoli pel modulo, i logaritmi in una base qualunque, si possono ottenere direttamente delle serie che dànno i logaritmi nella base voluta; invero moltiplicando p. e. la formula (8) per M, ed osservando che $M \log x = \text{Log}\, x$, si ricava:

$$\text{Log}(z+h) - \text{Log}\, z = 2M\left[\frac{h}{2z+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2z+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2z+h}\right)^5 + \cdots\right].$$

Sviluppo in serie di arc tang x.

82. — Pongasi $f(x) = \text{arc tang}\, x$: sarà

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \ldots\ldots$$

e la legge di formazione delle successive derivate non è semplice (V. N. 49, Es. 21).

Tuttavia, volendosi lo sviluppo in serie di arc tang x, si può procedere nel modo che segue. Si ha

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots..+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2},$$

quindi ponendo

$$\text{arc tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots..+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+(-1)^n R(x)$$

la funzione $R(x)$ si annulla per $x=0$, ove si prenda per arc tang x il più piccolo arco avente per tangente x, e la sua derivata è

$$R'(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Si ricorra alla formula

$$\frac{R(x)-R(0)}{\varphi(x)-\varphi(0)}=\frac{R'(\theta x)}{\varphi'(\theta x)}.$$

e pongasi $\varphi(x)=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; sarà $\varphi'(x)=x^{2n}$, $R(0)=0$, $\varphi(0)=0$, e sostituendo

$$R(x)=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{(\theta x)^{2n}}{1+(\theta x)^2}\,\frac{1}{(\theta x)^{2n}}=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{1}{1+\theta^2x^2}$$

essendo $0<\theta<1$. Ora se x è in valore assoluto minore od eguale ad 1, $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ha per limite zero col tendere di n ad ∞, mentre $\frac{1}{1+\theta^2x^2}$ è sempre <1, onde $\lim R(x)=0$ per $n=\infty$, e

$$\text{arc tang}\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots..$$

per tutti i valori di x non maggiori dell'unità in valor assoluto. Se $x^2>1$, la serie è manifestamente divergente.

Facciasi nella serie precedente $x = 1$: si ricava

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

serie da cui potrebbe ottenersi π, ma di convergenza troppo lenta.

83. — Si possono con opportuni artifizii formare delle serie per determinare π, assai comode nel calcolo. È da notarsi il seguente dovuto a Machin.

Pongasi $a = \text{arc tang} \frac{1}{5}$: si ricava:

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\ldots$$

e siccome $\text{tang}\, a = \frac{1}{5}$, si ha $\text{tang}\, 2a = \frac{2\, \text{tang}\, a}{1 - \text{tang}^2 a} = \frac{5}{12}$, e $\text{tang}\, 4a = \frac{120}{119}$, onde $\text{tang}\, 4a > 1$, e $4a > \frac{\pi}{4}$: posto $4a - \frac{\pi}{4} = A$ si ha:

$$\text{tang}\, A = \frac{\text{tang}\, 4a - 1}{1 + \text{tang}\, 4a} = \frac{1}{239}.$$

onde

$$A = \text{arc tang} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\ldots$$

e siccome $\frac{\pi}{4} = 4a - A$, si ha infine:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \ldots\ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\ldots\right]$$

le quali serie sono rapidissimamente convergenti.

Funzioni interpolari.

84. — Sia $f(x)$ una data funzione di x, e $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots$ diversi valori che si possono attribuire alla variabile x. Chiamansi funzioni interpolari di primo, secondo, terzo ecc. ordine le espressioni $f(x_1 x_2)$, $f(x_1 x_2 x_3)$, $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$, ecc. definite dalle eguaglianze:

$$f(x_1 x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f(x_1 x_2 x_3) = \frac{f(x_1 x_2) - f(x_1 x_3)}{x_2 - x_3}$$

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{f(x_1 x_2 x_3) - f(x_1 x_2 x_4)}{x_3 - x_4}$$

. . . .

La funzione interpolare d'ordine n dipende da $n+1$ variabili.

Si può scrivere

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

quindi

$$f(x_1, x_3) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_3} + \frac{f(x_3)}{x_3 - x_1},$$

e sottraendo, ed osservando che $\dfrac{1}{x_1 - x_2} - \dfrac{1}{x_1 - x_3} = \dfrac{x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$, si ha:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3) = \frac{f(x_1) \cdot (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x)}{x_3 - x_1},$$

e dividendo per $x_2 - x_3$

$$f(x_1 x_2 x_3) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

onde si scorge che la funzione interpolare d'ordine $n-1$ si potrà mettere sotto la forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} +$$

$$\frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} + \ldots\ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})},$$

e per dimostrare questa formola, verificata la sua esattezza per $n = 2, 3, \ldots$, basta dimostrare che, suppostala vera per un certo valore di n, è ancora vera aumentando n di un' unità.

Dall'ultima formula si deduce che una funzione interpolare è funzione simmetrica delle variabili da cui dipende.

85. — Si sa dall'algebra formare un polinomio intero di grado $n-1$ in x $F(x)$, che per gli n valori x_1 x_2..... x_n assume n dati valori, quindi gli stessi valori che assume un'altra funzione qualunque $f(x)$, cioè $f(x_1)$ $f(x_2)$..... $f(x_n)$. Questo polinomio si può esprimere mediante le funzioni interpolari. Invero, se $F(x_1) = f(x_1)$, la funzione $F(x) - f(x_1)$, che si annulla per $x = x_1$, è divisibile per $x - x_1$, e posto $F_1(x) = \frac{F(x) - f(x_1)}{x - x_1}$, $F_1(x)$ è un polinomio intero di grado $n-2$; se in esso faccio $x = x_2$, x_3,..... x_n, siccome $F(x_2) = f(x_2)$,..... $F(x_n) = f(x_n)$, ne deduco i valori che assume in corrispondenza $F_1(x)$, che sono:

$$F_1(x_2) = f(x_1\, x_2),\ F_1(x_3) = f(x_1\, x_3), \ldots.. \ F_1(x_n) = f(x_1\, x_n).$$

Inoltre dall'eguaglianza che definisce $F_1(x)$ ricavo:

$$F(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, F_1(x). \qquad [1]$$

Posso ora ragionare sul polinomio $F_1(x)$ di grado $n-2$, di cui conosco i valori corrispondentemente ad $n-1$ valori della variabile, come si è ragionato su $F(x)$: quindi, posto

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - f(x_1\, x_2)}{x - x_2},$$

$F_2(x)$ sarà un polinomio intero di grado $n-3$, che assume pegli $n-2$ valori di x: $x_3\, x_4 \ldots x_n$ rispettivamente i valori $f(x_1\, x_2\, x_3), \ldots f(x_1\, x_2\, x_n)$, e si ricava

$$F_1(x) = f(x_1\, x_2) + (x - x_2)\, F_2(x). \qquad [2]$$

Così continuando si avrà una nuova eguaglianza:

$$F_2(x) = f(x_1\, x_2\, x_3) + (x - x_3)\, F_3(x) \qquad [3]$$

. . . .

ed in fine avremo una funzione $F_{n-2}(x)$ di primo grado in x, che per $x = x_{n-1}$ e x_n assume i valori

$$f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}\, x_{n-1}) \text{ e } f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}\, x_n);$$

quindi potremo porre

$$F_{n-2}(x) = f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{n-2}\, x_{n-1}) + (x - x_{n-1})\, F_{n-1}(x)$$

dove $F_{n-1}(x)$ è una costante il cui valore si ricava da questa eguaglianza facendovi $x = x_n$, onde

$$F_{n-1}(x) = f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}\, x_n).$$

Sostituendo ora nella formula [1] ad $F_1(x)$ il valore dato dalla [2], ad $F_2(x)$ il valore dato dalla [3], e così via, si trova:

$$F(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\, f(x_1 x_2 x_3) + \ldots\ldots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_{n-1})\, f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n),$$

e si ha così espresso mediante le funzioni interpolari la funzione intera di grado $n-1$ in x che pei valori $x_1\, x_2 \ldots x_n$ assume i valori $f(x_1)\; f(x_2) \ldots f(x_n)$. La formula precedente dicesi formula d'interpolazione di Newton; e siccome si può in un sol modo formare un polinomio di grado $n-1$ che assuma n dati valori corrispondentemente ad n valori dati della variabile, questa formula non può differire dalla formula d'interpolazione di Lagrange.

86. — Da una formula del calcolo differenziale si ha:

$$f(x_1\, x_2) = f'(u),$$

u essendo un valore compreso fra x_1 ed x_2, supposto che $f(x)$ ammetta derivata per tutti i valori di x compresi nell'intervallo $x_1 x_2$. Esiste una formula analoga per le funzioni interpolari d'ordine qualunque.

Suppongasi che $f(x)$ ammetta le successive derivate fino all'ordine $n-1$ per tutti i valori di x compresi in un intervallo in cui si trovano i valori $x_1\, x_2 \ldots x_n$; e si consideri la funzione

$$\varphi(x) = f(x) - F(x)$$

la quale avrà pure le derivate successive fino all'ordine $n-1$. Questa funzione si annulla per $x = x_1\, x_2 \ldots x_n$; quindi per un teorema noto, supposto $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, la sua derivata $\varphi'(x)$ si annullerà per un valore di x compreso fra x_1 ed x_2, per un altro valore compreso fra x_2 ed $x_3, \ldots$ in tutto si annullerà certamente $n-1$ volte per valori compresi fra il minimo ed il massimo valore delle $x_1\, x_2 \ldots x_n$; per la stessa ragione $\varphi''(x)$ si annullerà per $n-2$ valori compresi nello stesso intervallo, e infine la derivata d'ordine $n-1$ si annullerà per un certo valore u medio fra i valori attribuiti ad x. Ma

$$\varphi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - F^{(n-1)}(x),$$

e derivando $F(x)$, si ha che

$$F^{(n-1)}(x) = (n-1)!\;\; f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$$

onde

$$\varphi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - (n-1)!\; f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)$$

e ponendo $x = u$, si ha

$$\varphi^{(n-1)}(u) = f^{(n-1)}(u) - (n-1)!\; f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0,$$

onde

$$f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = \frac{f^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}$$

formula che esprime la funzione interpolare d'ordine $n-1$ in funzione della derivata dello stesso ordine corrispondentemente ad un valore della variabile medio fra i valori attribuiti alla medesima.

Se la derivata d'ordine $n-1$ è continua, facendo tendere le $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ ad uno stesso valore x_0, anche u tende ad x_0, e

$$\lim f^{(n-1)}(u) = f^{(n-1)}(x_0),$$

onde

$$\lim f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,.$$

87. — La funzione $\varphi(x) = f(x) - F(x)$, che rappresenta l'errore che si commette prendendo invece della funzione $f(x)$ il polinomio intero $F(x)$, si può esprimere mediante funzioni interpolari. Invero il polinomio di grado n, che pegli $n+1$ valori $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, x_0$ assume gli stessi valori di $f(x)$, è

$$f(x_1) + (x - x_1) f(x_1\, x_2) + \ldots\ldots + (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1}) f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) +$$
$$+ (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n) f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, x_0)$$

facendo in esso $x = x_0$, il suo valore diventa $f(x_0)$, e scambiando poi x_0 in x si ha

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1 x_2) + \ldots\ldots + (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1}) f(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) +$$
$$+ (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n) f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, x)\,,$$

onde

$$\varphi(x) = (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n)\; f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, x)$$

ed anche

$$\varphi(x) = (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n)\; \frac{f^{(n)}(u)}{n!}\,,$$

u essendo un valore medio fra i valori $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, x$.

Sostituendo perciò in $f(x) = F(x) + \varphi(x)$ ad $F(x)$ e a $\varphi(x)$ i loro valori, si ha

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1\, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\, f(x_1\, x_2\, x_3) + \\ \ldots\ldots + (x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1})\, f(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) + \\ + (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)\, \frac{f^{(n)}(u)}{n!}\,. \end{aligned}$$

Questa formula presenta molta analogia colla formula di Taylor completata col resto di Lagrange.

Applicazione delle formule d'interpolazione.

88. — Alcune volte, calcolati i valori d'una funzione $f(x)$ corrispondentemente a due valori prossimi $x_1\, x_2$, si determina il valore della funzione corrispondentemente ad un valore x della variabile medio fra i due, supponendo che gli incrementi della funzione siano proporzionali agli incrementi della variabile, ossia si stabilisce la proporzione

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

da cui si ricava:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ossia

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1\, x_2)\,.$$

Questa ipotesi non è rigorosa in generale, ed invero, supposta vera, $f(x)$ diventa funzione di primo grado in x; quindi assumendo per $f(x)$ il valore dato dalla formula in questione, si commette un errore che potremo stimare.

Si ha, scrivendo la formula d'interpolazione di Newton col termine complementare

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1\, x_2) + (x - x_1)\,(x - x_2)\, f(x_1\, x_2\, x)$$

ovvero

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1\, x_2) + (x - x_1)\,(x - x_2)\frac{f''(u)}{2},$$

u essendo un valore medio fra x_1 ed x_2; e l'errore è rappresentato dal terzo termine di questa espressione.

Applichiamo questo risultato all'interpolazione dei logaritmi decimali. Siano calcolati e disposti in tavole i logaritmi in base 10 di tutti i numeri interi compresi fra 1000 e 10000; la ricerca del logaritmo d'un numero qualunque si può sempre ridurre alla ricerca del logaritmo d'un numero x compreso entro questi stessi limiti; sia x compreso fra gli interi N ed $N+1$; si determina $\operatorname{Log} x$ adoperando le tavole d'interpolazione, che sono appunto calcolate supposta la proporzionalità fra gli incrementi della funzione e della variabile; quindi si commette un errore che si ottiene dalla formula

$$\epsilon = (x - x_1)\,(x - x_2)\frac{f''(u)}{1\,.\,2}$$

facendo $x_1 = N$, $x_2 = N + 1$, $f(x) = \text{Log}\, x = M \log x$, $f'(x) = \frac{M}{x}$,
$f''(x) = -\frac{M}{x^2}$.

Pongasi ancora $x = N + h$; sarà $0 < h < 1$; quindi

$$\epsilon = -h(1-h)\frac{M}{2u^2}, \text{ essendo } N < u < N + 1.$$

Ora il prodotto $h(1-h)$, che è il prodotto di due quantità positive la cui somma è uno, diventa massimo quando esse siano eguali, e quindi $h = \frac{1}{2}$, onde $h(1-h) \leq \frac{1}{4}$; $M = \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2,3...} < \frac{1}{2}$, $u > 1000$, onde $\frac{1}{u^2} < \frac{1}{1\,000\,000}$, quindi si deduce che ϵ è negativo, ed in valore assoluto

$$\epsilon < \frac{1}{16 . 1\,000\,000} < \frac{1}{10\,000\,000},$$

ossia l'errore che si commette adoperando le tavole d'interpolazione è minore d'un'unità del settimo ordine decimale.

89. — Si può in modo analogo giudicare dell'errore che si commette adoperando la regola di *falsa posizione* per approssimare le radici delle equazioni numeriche, algebriche o trascendenti.

Sia $f(x) = 0$ l'equazione proposta; si suppone $f(x)$ funzione continua e avente derivate successive. Siano a e b due valori prossimi fra loro, tali che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno contrario; quindi fra a e b è compresa una radice dell'equazione. La regola di falsa posizione dice di determinare una quantità y tale che

$$\frac{y-a}{y-b} = \frac{f(a)}{f(b)},$$

onde $y = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$; y sarà un valore approssimato della radice cercata.

Per riconoscere questa approssimazione si ricorra alla formula

$$f(x) = f(a) + (x - a) f(a, b) + (x - a)(x - b) f(a, b, x).$$

Supposto che x sia la radice compresa fra a e b dell'equazione, sarà $f(x) = 0$, onde

$$0 = f(a) + (x - a) f(a, b) + (x - a)(x - b) f(a, b, x),$$

da cui si ricava

$$x - a = -\frac{f(a) + (x - a)(x - b) f(a, b, x)}{f(a, b)}$$

e

$$x = a - \frac{f(a)}{f(a, b)} - (x - a)(x - b)\frac{f(a, b, x)}{f(a, b)}.$$

Ma

$$a - \frac{f(a)}{f(a, b)} = \frac{b f(a) - a f(b)}{f(a) - f(b)} = y,$$

ossia

$$x = y - (x - a)(x - b)\frac{f(a, b, x)}{f(a, b)},$$

ossia l'errore ϵ che si commette assumendo vera la regola di falsa posizione è dato dal termine

$$\epsilon = -(x - a)(x - b)\frac{f(a, b, x)}{f(a, b)}.$$

Questo errore è espresso mediante l'incognita x, e quindi è sconosciuto; però osservando che x è compreso fra a e b, si ha in valor assoluto

$$(x - a)(x - b) < \frac{(a - b)^2}{4};$$

$f(a, b, x) = \frac{f''(u)}{2}$, dove u è pure compreso fra a e b: e detto M

il massimo valor assoluto di $f''(u)$ quando u varia fra a e b sarà: $f(a, b, x) < \frac{M}{2}$: quindi si avrà in valor assoluto

$$\epsilon < \frac{(a-b)^3}{8} \frac{M}{f(a)-f(b)} .$$

90. — Il calcolo differenziale ci permette pure di stimare l'errore che si commette adoperando la regola di Newton per approssimare le radici d'un'equazione. Sia a un valore approssimato d'una radice dell'equazione $f(x)=0$; $a+h$ la vera radice: sarà:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1 \cdot 2}f''(a+\theta h)=0 ,$$

onde

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2}{2}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)} .$$

La regola di Newton dice di prendere per valore approssimato di h il primo termine $-\frac{f(a)}{f'(a)}$: e così facendo si commette un errore rappresentato dal secondo termine. Esso è incognito; ma si potrà determinare una quantità che ne sia maggiore quando si sappia che h non eccede una quantità nota.

Prodotti infiniti.

91. — Abbiasi una serie di quantità

$$u_0 , \quad u_1 , \quad u_2 , \ldots\ldots$$

in numero infinito, formate con legge determinata; e si consideri il prodotto

$$P_n = u_0 u_1 \ldots\ldots u_{n-1}$$

delle prime n di queste quantità; se col crescere indefinitamente di n, P_n tende verso un limite P, si dirà che il prodotto infinito $u_0 u_1 u_2 \ldots$ è convergente, ed ha per valore P.

Si dimostrano con ragionamenti analoghi a quelli fatti sulle serie (N. 54 e 55) i teoremi:

Teorema. — *Per riconoscere la convergenza d'un prodotto infinito si può far astrazione da un numero finito di fattori non nulli in principio.*

Teorema. — *Se il prodotto infinito* $u_0 u_1 \ldots\ldots$ *è convergente verso un limite non nullo,* $\lim u_n = 1$ *per* $n = \infty$.

Per questa ragione il fattore generale u_n si suol mettere sotto la forma $u_n = 1 + \alpha_n$; il prodotto infinito diventa

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots\ldots,$$

e se esso è convergente verso un limite non nullo, $\lim \alpha_n = 0$ per $n = \infty$.

L'esame della convergenza d'un prodotto si riduce all'esame sulla convergenza di serie in virtù del seguente teorema:

92. — Teorema. *Il prodotto infinito*

$$(1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots\ldots(1+\alpha_n)\ldots\ldots$$

è convergente verso un limite non nullo, se sono convergenti le serie

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots$$

e

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots\ldots$$

Infatti, se la serie delle α è convergente, $\lim \alpha_n = 0$, e $\lim(1+\alpha_n) = 1$; quindi, da un certo fattore in poi, tutti i fattori sono positivi. Possiamo supporre che questo avvenga fin dal primo fattore, perchè, se ciò non avvenisse, possiamo fare astrazione dai fattori negativi.

Posto

$$P_n = (1+\alpha_0)(1+\alpha_1)\ldots\ldots(1+\alpha_{n-1}),$$

prendendo i logaritmi d'ambo i membri si ha:

$$\log P_n = \log(1+\alpha_0) + \log(1+\alpha_1) + \ldots\ldots + \log(1+\alpha_{n-1}).$$

La formula di Maclaurin

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha f'(0) + \frac{\alpha^2}{2} f''(\theta\alpha),$$

ponendovi $f(\alpha) = \log(1+\alpha)$, onde $f'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$, $f''(\alpha) = -\frac{1}{(1+\alpha)^2}$, dà:

$$\log(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{(1+\theta\alpha)^2}.$$

Facciasi in questa eguaglianza $\alpha = \alpha_0, \ \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$; siano $\theta_0\ \theta_1 \ldots\ldots \theta_{n-1}$ i valori corrispondenti di θ, e si sommino i risultati; si ricava

$$\log P_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1})$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{(1+\theta_0\alpha_0)^2} + \frac{\alpha_1^2}{(1+\theta_1\alpha_1)^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha^2_{n-1}}{(1+\theta_{n-1}\alpha_{n-1})^2}\right).$$

Le quantità $1+\theta_0\alpha_0$, $1+\theta_1\alpha_1, \ldots\ldots, 1+\theta_n\alpha_n, \ldots\ldots$ sono positive, ed il loro limite è l'unità; onde esisterà una quantità positiva m di cui esse sono maggiori; quindi

$$1+\theta_0\alpha_0 > m, \quad 1+\theta_1\alpha_1 > m, \ldots\ldots$$

e
$$\frac{\alpha_0^2}{(1+\theta_0\alpha_0)^2} < \frac{\alpha_0^2}{m^2}, \quad \frac{\alpha_1^2}{(1+\theta_1\alpha_1)^2} < \frac{\alpha_1^2}{m^2}, \ldots\ldots;$$

perciò la serie il cui termine generale è $\frac{\alpha_n^2}{(1+\theta_n\alpha_n)^2}$ ha i suoi termini rispettivamente minori dei corrispondenti della serie il cui termine generale è $\frac{\alpha_n^2}{m^2}$, la quale è convergente; quindi anche la prima è convergente.

Pertanto $\log P_n$ col crescere indefinitamente di n tende verso un limite determinato e finito

$$\lim \log P_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots\ldots) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{(1+\theta_0\alpha_0)^2} + \frac{\alpha_1^2}{(1+\theta_1\alpha_1)^2} + \ldots\ldots\right)$$

e, siccome $P_n = e^{\log P_n}$, anche P_n tende verso un limite

$$\lim P_n = e^{\lim \log P_n}$$

determinato, finito e non nullo.

93. — Corollario I. *Se è convergente la serie* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots$ *e divergente la* $\alpha_0^2, \alpha_1^2, \ldots\ldots$, $\lim\limits_{n=\infty} P_n = 0$.

Invero, la quantità $1 + \theta_n \alpha_n$, qualunque sia n, è finita, ed ha per limite 1; quindi esisterà una quantità M tale che $1 + \theta_n \alpha_n < M$, qualunque sia n. La serie a termini positivi

$$\frac{\alpha_0^2}{(1+\theta_0\alpha_0)^2}, \quad \frac{\alpha_1^2}{(1+\theta_1\alpha_1)^2}, \ldots\ldots$$

ha i suoi termini maggiori dei corrispondenti della serie

$$\frac{\alpha_0^2}{M^2}, \quad \frac{\alpha_1^2}{M^2}, \ldots\ldots$$

divergente per ipotesi, quindi la prima è pure divergente. Perciò, delle due parti di cui consta $\log P_n$, la prima col crescere di n tende verso un limite finito, e la seconda verso $-\infty$, onde $\lim \log P_n = -\infty$, e $\lim P_n = 0$.

Corollario II. *I prodotti infiniti*

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots\ldots$$

e

$$(1 - \alpha_0)(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\ldots\ldots$$

dove le α_0 α_1 α_2..... *sono quantità positive, sono convergenti verso un limite non nullo se è convergente la serie*

$$\alpha_0 , \quad \alpha_1 , \quad \alpha_2 \ldots\ldots$$

Invero la prima condizione del teorema è soddisfatta, e la seconda ne viene di conseguenza, perchè la serie

$$\alpha_0^2 , \quad \alpha_1^2 , \quad \alpha_2^2 , \ldots\ldots$$

ha i suoi termini, da un certo termine in poi (dal termine per cui $\alpha_n < 1$), minori dei termini corrispondenti della precedente.

Così ad esempio il prodotto infinito

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\ldots\ldots$$

è convergente se $x < 1$ in valor assoluto, perchè sono convergenti le serie

$$x , \; x^2 , \; x^3 \ldots\ldots \quad \text{e} \quad x^2 , \; x^4 , \; x^6 \ldots\ldots$$

Il prodotto infinito

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\ldots\ldots$$

ha per limite zero, perchè la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1}} , \; - \frac{1}{\sqrt{2}} , \; \frac{1}{\sqrt{3}} , \; - \frac{1}{\sqrt{4}} \ldots\ldots$$

è convergente, e la serie formata coi quadrati dei termini è la serie armonica, e quindi divergente.

Serie a termini variabili.

94. — I termini d'una serie

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots$$

possono essere funzioni d'una variabile x, e se essa è convergente per un sistema di valori di x, la sua somma è funzione di x definita per quei valori. Se x è uno fra questi, fissato ad arbitrio ϵ, si può determinare un numero N tale che per ogni valore di $n \geqq N$, il resto della serie r_n dopo l'n^{mo} termine sia minore in valor assoluto di ϵ. Questo numero N però può dipendere dal valore speciale attribuito ad x.

Diremo che una serie, i cui termini sono funzioni di x, convergente pei valori di x d'un dato intervallo (finito od infinito), è di *convergenza equabile* relativamente a quell'intervallo, se, fissata ad arbitrio una quantità ϵ, si può determinare un valore di N tale che per ogni valore di $n \geqq N$, e per ogni valore di x compreso in quell'intervallo sia in valor assoluto $r_n < \epsilon$.

I noti criterii di convergenza permettono spesso di riconoscere la convergenza equabile d'una serie. Così dai N. 57 e 65 si deduce:

Teorema. — *Una serie a termini variabili è di convergenza equabile in un dato intervallo, se i termini della serie sono sempre minori in valor assoluto dei termini corrispondenti d'una serie a termini positivi convergente.*

Infatti se i termini della serie $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots$ sono, qualunque sia il valore di x, minori numericamente dei termini corrispondenti della serie convergente a termini positivi $a_0, a_1, \ldots\ldots$, la serie proposta è convergente, e detti r_n e ρ_n i resti delle due serie dopo l'n^{mo} termine, si ha in valor assoluto $r_n < \rho_n$. Ma essendo la seconda serie convergente, si può, fissato ad arbitrio ϵ, determinare N tale che se $n \geqq N$ sia $\rho_n < \epsilon$; quindi a fortiori $r_n < \epsilon$, c. v. d.

Così ad esempio la serie esponenziale

$$1\,,\; x\,,\; \frac{x^2}{2!}\,,\; \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots$$

è di convergenza equabile in ogni intervallo finito, perchè, se a è maggiore dei valori assoluti che può assumere la variabile x, i termini della serie precedente sono numericamente minori delle quantità

$$1\,,\; a\,,\; \frac{a^2}{1\,.\,2}\,,\; \frac{a^3}{1\,.\,2\,.\,3}, \ldots\ldots$$

che formano serie convergente.

Siano $a_0\; a_1\; a_2 \ldots..$ quantità qualunque, e $b_0\; b_1\; b_2 \ldots..$ quantità positive formanti una serie convergente; la serie

$$b_0 \operatorname{sen} a_0 x\,,\quad b_1 \operatorname{sen} a_1 x\,,\quad b_2 \operatorname{sen} a_2 x \ldots..$$

è di convergenza equabile in ogni intervallo, perchè i suoi termini sono rispettivamente minori (o eguali) in valore assoluto ai corrispondenti della serie delle b.

Fra le serie di convergenza non equabile si può citare la stessa serie esponenziale relativamente all'intervallo $(-\infty, +\infty)$, perchè, se $x > 0$, il resto $r_n > \frac{x^n}{n!}$, e qualunque valore si fissi per n la quantità $\frac{x^n}{n!}$ assume, variando x, valori comunque grandi, e quindi da superare ogni quantità ϵ comunque data.

Si consideri ancora la serie:

$$\frac{x^2}{1(1+x^2)}\,,\quad \frac{x^2}{(1+x^2)(1+2x^2)}\,, \ldots\ldots \quad u_n = \frac{x^2}{(1+n\,x^2)\,[1+(n+1)\,x^2]}\,.$$

Si ha che

$$u_n = \frac{1}{1+nx^2} - \frac{1}{1+(n+1)x^2},$$

onde

$$u_0 = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$u_1 = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{1+(n-1)x^2} - \frac{1}{1+nx^2},$$

e sommando

$$s_n = 1 - \frac{1}{1+nx^2}.$$

Facciasi tendere n ad ∞; se $x \gtrless 0$, $\lim \frac{1}{1+nx^2} = 0$, e $\lim s_n = 1$; se $x = 0$, $s_n = 0$, e $\lim s_n = 0$; dunque la serie precedente è convergente qualunque sia x, e la sua somma è funzione di x che vale 1 se $x \gtrless 0$, e vale 0 se $x = 0$.

Se $x \gtrless 0$, $r_n = \frac{1}{1+nx^2}$, e se $x = 0$, $r_n = 0$.

Fissato ϵ piccolo ad arbitrio, e supporremo $\epsilon < 1$, affinchè $r_n < \epsilon$, deve essere $n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon x^2}$ se $x \gtrless 0$, non essendo n obbligato ad alcuna condizione se $x = 0$. Ora se si fa variare x in un intervallo in modo che i suoi valori non si approssimino indefinitamente a zero, ma esista una quantità a tale che $x^2 > a^2$, sarà $\frac{1-\epsilon}{\epsilon x^2} < \frac{1-\epsilon}{\epsilon a^2}$, e quindi se si suppone $n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon a^2}$ sarà anche $n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon x^2}$, e $r_n < \epsilon$; ossia la serie precedente è di convergenza equabile in ogni intervallo non contenente il valore 0 all'interno od agli estremi. Se invece si dànno ad x valori che si possono approssimare quanto si vuole a zero, la serie non è di convergenza equabile, perchè $\frac{1-\epsilon}{\epsilon x^2}$ col tendere di x a zero tende verso l'∞, e perciò non esiste alcun numero n di cui esso sia sempre minore.

95. Teorema. — *Se i termini d'una serie sono funzioni di* x, *che col tendere di* x *ad* x_0 (*o ad* ∞) *tendono verso limiti determinati, e se la serie è di convergenza equabile relativamente ai valori che si attribuiscono ad* x, *il limite della somma della serie data è eguale alla somma della serie dei limiti dei termini.*

Sia

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2 \ldots\ldots$$

la serie proposta, s_n la somma dei primi n termini, s la somma della serie, r_n il resto della serie troncata all'n^{mo} termine: i termini della serie, s_n, s, e r_n sono funzioni di x. Siano

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2 \ldots\ldots$$

i limiti dei termini della serie, col tendere di x ad x_0 (o ad ∞), e σ_n la somma dei primi n termini.

Dimostreremo dapprima che questa serie è convergente, ed in seguito che la sua somma è il limite della somma della serie data.

Fissata ad arbitrio una quantità ϵ, si può determinare un numero N tale che per $n \geqq N$ sia $r_n < \epsilon$, a causa della convergenza equabile della serie data; e se $p > 0$, sarà anche $r_{n+p} < \epsilon$, onde $r_{n+p} - r_n < 2\epsilon$, ossia

$$u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+p-1} < 2\epsilon,$$

le diseguaglianze riferendosi sempre ai valori assoluti delle quantità. Facciasi tendere x verso x_0 (o verso ∞); il membro di sinistra, che è sempre $< 2\epsilon$, tende verso un limite

$$a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots + a_{n+p-1},$$

il quale non potrà superare 2ϵ, onde

$$a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots + a_{n+p-1} \leqq 2\epsilon,$$

ossia, fissata ad arbitrio una quantità 2ϵ, si può determinare un numero N tale che per ogni valore di $n \geqq N$, e per ogni valore positivo di p sia

$$a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots + a_{n+p-1} \leqq 2\epsilon\,,$$

quindi (N. 56) la serie $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ è convergente, e la sua somma che diremo σ sarà compresa fra $\sigma_n + 2\epsilon$ e $\sigma_n - 2\epsilon$.

Fissata ora una quantità piccola ad arbitrio α, pongasi $\alpha = 3\epsilon + {}'$. Si determini N tale che per $n \geqq N$ sia $r_n < \epsilon$; sarà $s - s_n < \epsilon$; si determini una quantità h tale che per $x - x_0 < h$ in valor assoluto (ovvero per $x > h$) sia $s_n - \sigma_n < \epsilon'$, cosa possibile perchè $\lim s_n = \sigma_n$; per ciò che si è dimostrato precedentemente è anche $\sigma_n - \sigma < 2\epsilon$, onde $s - \sigma < 3\epsilon + \epsilon'$, ossia $s - \sigma < \alpha$; vale a dire fissata ad arbitrio α si può determinare una quantità h tale che per ogni valore di x che differisca da x_0 meno di h (ovvero per ogni valore di $x > h$) la differenza $s - \sigma$ sia $< \alpha$, onde s col tendere di x ad x_0 (ovvero di x ad ∞) ha per limite σ, c. v. d.

Corollario. — *Se i termini d'una serie sono funzioni continue di* x *in un dato intervallo, e la serie è di convergenza equabile nello stesso intervallo, la somma della serie è funzione continua di* x.

96. — Teorema. — *Se i termini d'una serie convergente sono funzioni di* x *aventi derivata, e la serie formata colle derivate dei termini è di convergenza equabile, la somma della serie data è funzione di* x *che ha derivata, la quale è eguale alla somma della seconda serie.*

Sia

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x), \ldots\ldots$$

la serie data, e $F(x)$ la sua somma, ossia

$$F(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots$$

Diasi ad x un valore x_0, poi un valore x_0+h, si faccia la differenza dei due valori di $F(x)$, e si divida per h. Si ricava

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f_0(x_0+h)-f_0(x_0)}{h}+\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h}+$$
$$+\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h}+\ldots\ldots$$

Chiamisi R_n il resto di questa serie dopo n termini.

Sia

$$f_0'(x),\quad f_1'(x),\quad f_2'(x),\ldots\ldots$$

la serie delle derivate dei termini, che si suppose di convergenza equabile, ed $r_n(x)$ il resto di essa dopo n termini; fissato ad arbitrio ϵ, si determini N tale che per $n \geqq N$ sia $r_n<\epsilon$.

Si ha

$$R_{n+p}-R_n=\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}+\frac{f_{n+1}(x_0+h)-f_{n+1}(x_0)}{h}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{f_{n+p-1}(x_0+h)-f_{n+p-1}(x_0)}{h}.$$

Se si pone $\varphi(x)=f_n(x)+f_{n+1}(x)+\ldots\ldots+f_{n+p-1}(x)$, si ha

$$R_{n+p}-R_n=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\varphi'(x_0+\theta h),$$

ossia

$$R_{n+p}-R_n=f'_n(x_0+\theta h)+f'_{n+1}(x_0+\theta h)+\ldots\ldots+f'_{n+p-1}(x_0+\theta h).$$

Il membro di destra vale

$$r_{n+p}(x_0+\theta h)-r_n(x_0+\theta h),$$

onde

$$R_{n+p}-R_n=r_{n+p}(x_0+\theta h)-r_n(x_0+\theta h),$$

onde

$$R_n = r_n(x_0+\theta h) + R_{n+p} - r_{n+p}(x_0+\theta h)\,.$$

Facciasi tendere p ad ∞; R_n è costante, $r_n(x_0+\theta h)$ può variare, perchè θ dipende da p, ma si mantiene sempre inferiore ad ϵ, R_{n+p} ed $r_{n+p}(x_0+\theta h)$ tendono a zero, onde $R_n \leqq \epsilon$.

Quindi la serie di $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ è di convergenza equabile, perchè fissato piccolo ad arbitrio ϵ si può determinare N tale che per $n \geqq N$ sia $R_n \leqq \epsilon$, ed i suoi termini hanno per limiti

$$f'_0(x_0),\quad f'_1(x_0),\quad f'_2(x_0)\,.\,.\,.\,.\,.$$

onde anche $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ tende verso un limite, e si ha:

$$F'(x_0) = f'_0(x_0) + f'_1(x_0) + f'_2(x_0) + \,.\,.\,.\,.\,.$$

Esercizii.

1° — Data la somma s_n dei primi n termini d'una serie, è anche data la serie, la quale è

$$s_1\,,\ s_2 - s_1\,,\ s_3 - s_2\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,,\ \text{ed in generale}\ \ u_n = s_{n+1} - s_n\,.$$

2° — Se s_n è funzione algebrica intera di n, anche u_n è funzione intera dell'indice. Viceversa se u_n è funzione intera di n, si può formare un'altra funzione intera di n, $F(n)$, che pei valori interi è positivi di n vale s_n.

3° Dimostrare che nelle serie

$$\begin{array}{ll} 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\,.\,.\,.\,. & u_n = n+1 \\ 1\,,\ 3\,,\ 6\,,\ 10\,,\,.\,.\,.\,.\,. & u_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ 1\,,\ 4\,,\ 10\,,\ 20\,,\,.\,.\,.\,.\,. & u_n = \frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

si ha rispettivamente

$$s_n = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2), \quad \frac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(n+3), \ldots\ldots$$

4° — Dimostrare che

$$0^p + 1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p =$$

$$\frac{A_0}{p+1} n^{p+1} + A_1 n^p + p A_2 n^{p-1} + p(p-1) A_3 n^{p-2} + \ldots\ldots p!\, A_p n\,,$$

dove A_0, A_1, A_2, ... sono costanti numeriche definite dalle equazioni:

$$A_0 = 1$$

$$\frac{A_0}{2!} + A_1 = 0$$

$$\frac{A_0}{3!} + \frac{A_1}{2!} + A_2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_0}{r!} + \frac{A_1}{(r-1)!} + \ldots\ldots + \frac{A_{r-2}}{2!} + A_{r-1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

da cui si ricava

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{12}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{1}{720} \ldots\ldots$$

5° — Se s_n è funzione razionale di n, anche u_n è funzione razionale di n. Viceversa se u_n è funzione razionale di n, non è vero in generale che esista una funzione razionale di n che esprima la somma s_n.

Per esempio non esiste alcuna funzione razionale di n che rappresenti la somma s_n della serie $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\ldots$

Pongasi invero che s_n possa essere rappresentata dalla funzione $\frac{f(n)}{\varphi(n)}$, ove $f(n)$ e $\varphi(n)$ sono funzioni intere di n, che potremo supporre prime fra loro; dovrà essere

$$\frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)} - \frac{f(n)}{\varphi(n)} = \frac{1}{n+1}.$$

ossia

$$(n+1)f(n+1)\varphi(n) - (n+1)f(n)\varphi(n+1) = \varphi(n)\varphi(n+1).$$

Il membro di sinistra è divisibile per $n+1$, quindi dovrà pure essere tale il membro di destra, ossia dovrà o $\varphi(n)$ ovvero $\varphi(n+1)$ essere divisibile per $n+1$. Se $\varphi(n)$ è divisibile per $n+1$, sarà $\varphi(n+1)$ divisibile per $n+2$; e allora il 2° termine del 1° membro ed il 2° membro sono divisibili per $n+2$, quindi dovrà pure essere divisibile il primo termine del primo membro. Ma $f(n+1)$ essendo primo con $\varphi(n+1)$ non è divisibile per $n+2$, quindi dovrà $\varphi(n)$ essere divisibile per $n+2$. Così continuando $\varphi(n)$, che è divisibile per $n+2$ dovrà pure essere divisibile per $n+3$, ecc., vale a dire $\varphi(n)$ dovrebbe essere divisibile per infinite funzioni distinte, il che è assurdo.

Se $\varphi(n+1)$ fosse divisibile per $n+1$, si dimostrerebbe che $\varphi(n)$ sarà divisibile per n, $n-1$, ... il che è parimenti assurdo.

6° — Dimostrare che

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{p}\,\frac{1}{x(x+1)\ldots\ldots(x+p-1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)\ldots\ldots(x+n+p)}$$

$$\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{1.(p+1)} + \frac{1}{2.(p+2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(p+n)} + \ldots\ldots$$

7° — La somma

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{mn},$$

ove m ed n sono numeri interi e positivi, col crescere indefinitamente di n ha per limite il logaritmo neperiano di m.

Si dimostra facilmente questa proposizione servendoci delle formule del N. 61.

8° — Il resto d'una serie in cui $\sqrt[n]{u_n} < h < 1$, (N. 58) è minore di $\dfrac{h^{n}{}_{1}}{1-h}$.

9° — Il resto d'una serie in cui $n^{1+\alpha} u_n < A$, ove $\alpha > 0$ (N. 62) è minore di $\dfrac{A}{\alpha(n-1)^{\alpha}}$.

10° — La serie

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots\ldots,$$

dove $a_1\, a_2 \ldots\ldots$ sono quantità positive decrescenti continuamente ed indefinitamente, è convergente per tutti i valori x eccettuati al più i valori della forma $2k\pi$, k essendo un numero intero, positivo o nullo o negativo.

Invero, posto

$$s_n = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots\ldots + a_n \cos nx,$$

si moltiplichino ambi i membri per $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$. Ricordando che

$$2 \cos kx \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \frac{2k+1}{2} x - \operatorname{sen} \frac{2k-1}{2} x,$$

si ricava

$$2 s_n \operatorname{sen} \frac{x}{2} = a_1 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x + a_2 \operatorname{sen} \frac{5}{2} x + \ldots\ldots + a_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x$$
$$- a_1 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x - a_2 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x - \ldots\ldots - a_n \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} x$$

ossia

$$2 s_n \operatorname{sen} \frac{x}{2} = - a_1 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \operatorname{sen} \frac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \operatorname{sen} \frac{5}{2} x + \ldots\ldots$$
$$+ (a_{n-1} - a_n) \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} x + a_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x. \qquad (*)$$

Ora la serie a termini positivi $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3, \ldots\ldots$ è convergente, perchè la somma dei primi n termini vale $a_1 - a_{n+1}$, e col tendere di n ad infinito $\lim a_{n+1} = 0$ per ipotesi; quindi è anche convergente la serie

$$(a_1 - a_2) \operatorname{sen} \frac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \operatorname{sen} \frac{5}{2} x + \ldots\ldots :$$

inoltre $\lim a_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x = 0$, onde facendo crescere indefinitamente n si ha dalla formula (*) che $2 s_n \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ tende verso un limite, e se $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ non è nullo, ossia x non è della forma $x = 2k\pi$, anche s_n tende verso un limite e la serie proposta è convergente.

Se si fa $x = 2k\pi$, le serie diventa

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots\ldots\ldots$$

la quale può essere convergente o divergente. Se si fa $x = (2k+1)\pi$, si ottiene il teorema del N. 66.

11° — La serie

$$a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots\ldots,$$

dove $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots$ sono quantità positive decrescenti continuamente ed indefinitamente, è convergente per ogni valore di x.

12° — Se la serie $u_0, -u_1, +u_2, \ldots\ldots$ è convergente, posto

$$\begin{aligned} &\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \quad \Delta u_2 = u_3 - u_2, \ldots\ldots \\ &\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0, \quad \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1, \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\ldots = \frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{2^2} \Delta u_0 + \frac{1}{2^3} \Delta^2 u_0 - \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \Delta^{n-1} u_0 + R_n, \end{aligned}$$

ove

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \left[\Delta^n u_0 - \Delta^n u_1 + \ldots\ldots \right].$$

Invero, posto

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots\ldots$$

si ha

$$S = 0 + u_0 - u_1 + u_2 - \dots\dots$$

e sommando queste due serie, e dividendo per 2, si ricava:

$$S = \frac{1}{2}\, u_0 - \frac{1}{2}\,(u_1 - u_0) + \frac{1}{2}\,(u_2 - u_1) - \dots\dots$$

ossia

$$S = \frac{1}{2}\, u_0 - \frac{1}{2}\, \{ \Delta u_0 - \Delta u_1 + \dots\dots \} .$$

quindi la serie $\Delta u_0, - \Delta u_1, + \Delta u_2 \dots\dots$ è convergente, e posto

$$S' = \Delta u_0 - \Delta u_1 + \Delta u_2 - \dots\dots$$

si ha

$$S = \frac{1}{2}\, u_0 - \frac{1}{2}\, S' .$$

In modo analogo posto

$$S'' = \Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 - \dots\dots$$

$$S''' = \Delta^3 u_0 - \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 - \dots\dots$$

si ricava:

$$S' = \frac{1}{2}\, \Delta u_0 - \frac{1}{2}\, S''$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S^{n-1} = \frac{1}{2}\, \Delta^{n-1} u_0 - \frac{1}{2}\, S^n ,$$

e sostituendo si ricava la formula a dimostrarsi.

13°
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \dots\dots$$

$$= \frac{1}{2x} + \frac{1}{2^2 . x(x+1)} + \frac{1 . 2}{2^3 . x(x+1)(x+2)} + \frac{1 . 2 . 3}{2^4 . x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots\dots$$

Questa formula si dimostra applicando la trasformazione precedente, e facendo vedere che $\lim R_n = 0$ per $n = \infty$. Se in essa si fa $x = 1$, si ha

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 . 2^2} + \frac{1}{3 . 2^3} + \dots\dots$$

La serie di sinistra rappresenta log 2 (V. N. 79 e 66) ed è lentissimamente convergente; la serie di destra invece è di convergenza assai più rapida.

Pongasi $x = \frac{1}{2}$: si ricava

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \ldots\ldots = 1 + \frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1\,.\,2}{1\,.\,3\,.\,5} + \frac{1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7} + \ldots\ldots$$

La serie di sinistra vale $\frac{\pi}{2}$ (V. N. 82), ed essa è così trasformata in un'altra di convergenza più rapida.

14° — Dimostrare che

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots = \frac{u_0}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}\Delta u_0 + \frac{x^2}{(1-x)^3}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n}\Delta^{n-1} u_0 + R_n\,,$$

ove

$$R_n = \frac{x^n}{(1-x)^n}\left[\Delta^n u_0 + x\,\Delta^n u_1 + x^2\,\Delta^n u_2 + \ldots\ldots\right].$$

15° — Dimostrare che

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 -$$
$$- \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots\ldots$$

per ogni valore di x minore in valor assoluto dell'unità.

16° — Nello sviluppo di $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ in serie colla formula del binomio, i coefficienti ridotti ai minimi termini, non ammettono per fattori primi del denominatore che divisori di q.

17° — Lo sviluppo in serie di e^x si può ottenere dalla formula

$$e^x = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

Invero, supposto per semplicità m intero e positivo, si ha:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots (^*)$$

Sia n un intero qualunque maggiore del valore assoluto di x, e si supponga $m > n$.

Si può scrivere $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = A + B$ ponendo

$$A = 1 + x + \frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

e

$$B = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n}{m}\right) + \ldots\ldots + \frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Ritenendo n fisso, e facendo crescere indefinitamente m, si ha

$$\lim A = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

e detto a il valore assoluto di x, si ha che in valor assoluto

$$B < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots\ldots + \frac{a^m}{m!}$$

ed a fortiori

$$B < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{a}{n+1} + \ldots\ldots + \frac{a^{m-n-1}}{(n+1)^{m-n-1}}\right],$$

e siccome $a < n$, e quindi $a < n+1$, i termini entro parentesi formano una progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{a}{n+1}$, onde

$$B < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{a}{n+1}}, \quad \text{ossia} \quad B < \frac{a^{n+1}}{n!(n+1-a)},$$

e si potrà porre

$$B = \theta\,\frac{a^{n+1}}{n!\,(n+1-a)}, \quad \text{essendo} \quad -1 < \theta < +1.$$

Facciasi ora crescere indefinitamente m; siccome $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ed A tendono verso limiti, vi tenderà pure B, e quindi θ, e posto $\lim\theta=\vartheta$, sarà $-1 \leqq \vartheta \leqq +1$, e si ricava:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \vartheta\,\frac{a^{n+1}}{n!\,(n+1-a)}.$$

Facendo ora tendere n ad ∞ l'ultimo termine ha per limite zero, e si ricava lo sviluppo in serie di e^x (N. 70).

Lo stesso risultato si ottiene anche più rapidamente osservando che il polinomio di destra della formula (*) si può considerare come una serie, facendolo seguire da infiniti termini nulli: i termini di essa sono funzioni di m, e la serie è di convergenza equabile: onde si può applicare il teorema del N. 95.

18° — Dedurre lo sviluppo in serie di $\log(1+x)$ dalla formula

$$\log a = \lim_{m=\infty} m\left(\sqrt[m]{a}-1\right).$$

Questa formula si dimostra ponendo $m=\frac{1}{h}$: ed allora $m\left(\sqrt[m]{a}-1\right)=\frac{a^h-1}{h}$, ed il suo limite per $m=\infty$, ossia per $h=0$ è la derivata di a^x per $x=0$. Pongasi in essa $a=1+x$; si sviluppi secondo le potenze di x, e si passi al limite.

19° Gli sviluppi in serie di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ si possono pure dedurre dalle formule per la moltiplicazione degli archi:

$$(1)\quad \operatorname{sen} mz = m \operatorname{sen} z \cos^{m-1} z - \binom{m}{3}\operatorname{sen}^3 z \cos^{m-3} z + \binom{m}{5}\operatorname{sen}^5 z \cos^{m-5} z - \ldots..$$

$$(2)\quad \cos mz = \cos^m z - \binom{m}{2}\cos^{m-2} z \operatorname{sen}^2 z + \binom{m}{4}\cos^{m-4} z \operatorname{sen}^4 z - \ldots..$$

dove si suppone m intero e positivo. Supposto m pari si ha:

$$(3)\ \cos mz = 1 - \frac{m^2}{2!}\operatorname{sen}^2 z + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\operatorname{sen}^4 z - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\operatorname{sen}^6 z + \ldots..$$

e supposto m dispari

$$(4)\quad \operatorname{sen} mz = m \operatorname{sen} z - \frac{m(m^2-1^2)}{3!}\operatorname{sen}^3 z + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\operatorname{sen}^5 z - \ldots..$$

Basta invero porre $mz = x$, e poi far tendere m ad ∞. Le formule precedenti si possono ottenere facilmente per induzione, ovvero per mezzo di derivazioni. Da esse si possono dedurre altre innumerevoli mediante derivazioni, lo scambio di z nel suo complemento, e riduzioni algebriche. Così, ad es., osservando che nella (4) il secondo membro è funzione intera di grado m in sen z, esprimendolo sotto forma di prodotto si deduce, posto $m = 2n + 1$:

(5)
$$\operatorname{sen}(2n+1)z =$$
$$(2n+1)\operatorname{sen} z \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

20° — La funzione sen x si può mettere sotto forma di prodotto infinito, e si ha:

$$\operatorname{sen} x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots\cdots$$

Pongasi nell'ultima formula dell'esempio precedente $(2n + 1)z = x$; si ricava

$$\operatorname{sen} x =$$
$$(2n+1)\operatorname{sen}\frac{x}{2n+1}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Fissato ad arbitrio un intero m, così grande però che $(m + 1)\pi$ sia maggiore in valor assoluto di x, si supponga $n > m$. Si potrà scrivere

$$\operatorname{sen} x = A \,.\, B,$$

ponendo

$$A = (2n + 1)\operatorname{sen}\frac{x}{2n+1}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{m\pi}{2n+1}}\right),$$

e

$$B = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Si ha che per n infinito $\lim (2n+1) \operatorname{sen} \frac{x}{2n+1} = x$, e

$$\lim \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2n+1}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right) = 1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2},$$

onde

$$\lim A = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{x^2}{m^2 \pi^2}\right) = P_m.$$

Per stimare B, si osservi che essendo esso eguale al prodotto di più fattori positivi minori di uno, sarà $B < 1$; inoltre, siccome supposte le ϵ positive,

$$(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2 \cdots\cdots (1-\epsilon_h) > 1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots\cdots + \epsilon_h),$$

si ricava

$$B > 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2n+1} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{(m+1)\pi}{2n+1}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2n+1}} \right].$$

Ora si osservi che $\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2n+1} < \left(\frac{x}{2n+1}\right)^2$; inoltre la funzione $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ col crescere di z nel primo quadrante va diminuendo da 1 a $\frac{2}{\pi}$, perchè la sua derivata è negativa; onde z essendo nel primo quadrante, si ha $\operatorname{sen} z > \frac{2z}{\pi}$. Facciasi $z = \frac{(m+1)\pi}{2n+1}, \cdots\cdots \frac{n\pi}{2n+1}$; tenendo conto delle diseguaglianze così ottenute, si ricava

$$B > 1 - \left(\frac{x}{2n+1}\right)^2 \left[\frac{\pi^2}{2^2 \left(\frac{(m+1)\pi}{2n+1}\right)^2} + \cdots\cdots + \frac{\pi^2}{2^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)} \right]$$

e semplificando

$$B > 1 - \frac{x^2}{4} \left[\frac{1}{(m+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} \right].$$

Si osservi che

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

$$\frac{1}{(m+2)^2} < \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}$$

. . . .

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

onde

$$B > 1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right), \qquad \text{ed infine} \qquad B > 1 - \frac{x^2}{4m},$$

quindi si potrà determinare una quantità θ compresa fra 0 ed 1, in modo che $B = 1 - \theta\,\frac{x^2}{4m}$.

Facciasi ora crescere indefinitamente n: della formula $\operatorname{sen} x = A \,.\, B$, siccome A tende verso un limite P_m non nullo, anche B, e quindi θ tende verso un limite, e posto $\vartheta = \lim \theta$, si ricava

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\left(1 - \vartheta\,\frac{x^2}{4m}\right).$$

Facendo ora tendere m ad infinito, si ha la formula che si voleva dimostrare.

21° $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

22° $$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

23° Posto $s_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots$

si ha:

$$\log\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{x^2}{\pi^2}s_2 - \frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}s_4 - \frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}s_6\cdots\cdots$$

il valore di x essendo compreso fra $-\pi$ e $+\pi$.

24° — Conservando la notazione del numero precedente si ha:

$$\log\cos x = -\frac{(2^2-1)}{\pi^2}x^2 s_2 - \frac{1}{2}\,\frac{(2^4-1)}{\pi^4}x^4 s_4 - \frac{1}{3}\,\frac{(2^6-1)}{\pi^6}x^6 s_6 - \ldots\ldots$$

per x compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

25° $$\operatorname{tang} x = \frac{2(2^2-1)}{\pi^2}s_2 x + \frac{2(2^4-1)}{\pi^4}s_4 x^3 + \frac{2(2^6-1)}{\pi^6}s_6 x^5 + \ldots\ldots$$

per x compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2s_2}{\pi^2}x - \frac{2s_4}{\pi^4}x^3 - \frac{2s_6}{\pi^6}x^5 - \ldots\ldots$$

$$-\pi < x < \pi.$$

26° $$\pi\cot\pi x = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2-1^2} + \frac{x}{x^2-2^2} + \frac{x}{x^2-3^2} + \ldots\ldots$$

od anche

$$\pi\cot\pi x = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-n+1} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{x+n}\right].$$

27° $$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4}\ \ldots\ldots$$

ed in generale $\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \ldots\ldots$ è eguale a π^{2n} moltiplicato per un coefficiente numerico razionale.

28° — La somma della serie $(n > 1)$

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots\ldots$$

vale il reciproco del prodotto infinito

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots\cdot\cdot$$

dove nei denominatori compaiono i successivi numeri primi.

Infatti, detta s la somma della serie data, si ha

$$\frac{s}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\cdots\cdot\cdot$$

e sottraendo

$$s\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots\cdot\cdot$$

dove nel membro di destra compaiono al denominatore tutti i numeri non divisibili per 2. Sottraendo da quest'ultima serie la serie ottenuta dividendola per 3^n, ossia

$$s\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{(3\,.\,3)^n}+\frac{1}{(3\,.\,5)^n}+\cdots\cdot\cdot$$

si ricava

$$s\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots\cdot\cdot$$

dove al denominatore compaiono tutti i numeri non divisibili nè per 2 nè per 3. In modo analogo si avrà:

$$s\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=1+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\cdots\cdot\cdot$$

Così continuando il membro di destra avrà per limite 1, quindi

$$\frac{1}{s}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots\cdot\cdot$$

29° — Data una serie u_0, u_1, u_2, ... determinare un prodotto infinito tale che il prodotto dei primi n suoi fattori sia eguale alla somma dei primi n termini della serie, e viceversa.

30° — Dimostrare che

$$(1+x)(1+rx)(1+r^2x)\ldots\ldots(1+r^{n-1}x)=$$

$$=1+\frac{1-r^n}{1-r}x+\frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})}{(1-r)(1-r^2)}rx^2+\frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}r^3x^3+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})\ldots\ldots(1-r^{n-k+1})}{(1-r)(1-r^2)\ldots\ldots(1-r^k)}r^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k+\ldots\ldots+r^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n,$$

e, supposto $r^2<1$, che il prodotto infinito

$$(1+x)(1+rx)(1+r^2x)\ldots\ldots$$

$$=1+x+rx^2+r^3x^3+r^6x^4+\ldots\ldots+r^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k+\ldots\ldots$$

31° — La funzione interpolare $f(x_1\,x_2\ldots\ldots x_n)$ si può esprimere in funzione delle variabili e dei valori della funzione data mediante determinanti, e si ha:

$$f(x_1\,x_2\ldots\ldots x_n)=\frac{\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1^{n-2} & \ldots\ldots & x_1 & 1 \\ f(x_2) & x_2^{n-2} & \ldots\ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_n) & x_n^{n-2} & \ldots\ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots\ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots\ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots\ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}}$$

32° — Calcolare le successive funzioni interpolari di

$$f(x)=x^m \qquad (m \text{ intero e positivo}),$$

e di

$$f(x)=\frac{1}{a+x}.$$

33° — Se

$$f_1(x) \quad f_2(x) \ldots\ldots f_n(x)$$

sono n funzioni di x, e

$$x_1 \quad x_2 \quad \ldots\ldots \quad x_n$$

n valori delle variabili, si ha che il determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \ldots\ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \ldots\ldots & f_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) \ldots\ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

è eguale al prodotto dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_1 x_2) & f_1(x_1 x_2 x_3) \ldots\ldots & f_1(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_1 x_2) & f_2(x_1 x_2 x_3) \ldots\ldots & f_2(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_1 x_2) & f_n(x_1 x_2 x_3) \ldots\ldots & f_n(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} \ldots\ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} \ldots\ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} \ldots\ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}.$$

34. — Se $f_1(x)$ $f_2(x)$ ..... $f_n(x)$ e $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ ..... $\varphi_n(x)$ sono due sistemi di n funzioni di x, il rapporto dei determinanti

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \ldots\ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \ldots\ldots & f_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) \ldots\ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) \ldots\ldots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) \ldots\ldots & \varphi_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) \ldots\ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

ove si facciano tendere tutte le variabili $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ verso uno stesso valore x ha per limite il rapporto dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & f_1''(x) \ldots\ldots & f_1^{n-1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x) & f_n'(x) & f_n''(x) \ldots\ldots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) & \varphi_1''(x) \ldots\ldots & \varphi_1^{n-1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n'(x) & \varphi_n''(x) \ldots\ldots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}.$$

CAPITOLO IV.

Funzioni di più variabili. Funzioni implicite.

Funzioni di più variabili.

98. — Una variabile u è funzione di più variabili indipendenti $x, y, z, \ldots$ se i suoi valori dipendono dai valori attribuiti a queste. Una funzione può essere data per tutti i sistemi di valori delle variabili indipendenti, ovvero per sistemi di valori che possono essere in varii modi limitati.

Così la funzione

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

ove a b e c sono costanti, è data per tutte le coppie di valori che si possono attribuire ad x e ad y; invece la funzione

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ove si intenda con questo segno la radice aritmetica della quantità che è sotto il radicale, è definita solamente per quelle coppie di valori di x ed y che soddisfanno alla diseguaglianza $1 \geqq x^2 + y^2$; e la funzione

$$u = \frac{(x+y)!}{x!\,y!},$$

ossia il coefficiente di $a^x b^y$ nello sviluppo di $(a+b)^{x+y}$ è definita dall'algebra pei soli valori interi e positivi o nulli delle variabili.

Se le variabili indipendenti sono due, x e y, si possono rappresentare geometricamente le coppie di valori che si attribuiscono alle medesime; ed invero, segnati in un piano due assi cartesiani (ortogonali), si immagini il punto le cui coordinate sono i valori attribuiti ad x e ad y; ad ogni coppia di valori di x ed y corrisponde un punto del piano e viceversa. Così, nel penultimo esempio, la funzione è data per tutti i valori di x ed y rappresentati da punti non esterni al cerchio il cui centro è l'origine ed il cui raggio è 1 (in assi ortogonali).

Anche i valori corrispondenti della funzione si possono rappresentare conducendo pel punto xy un segmento perpendicolare al piano (o parallelo ad un dato asse) e misurato dal valore della funzione: il sistema dei punti estremi di questi segmenti (superficie) rappresenta l'andamento della funzione delle due variabili.

In modo analogo, se $u=f(x, y, z)$, le terne di valori che si possono attribuire alle variabili si possono rappresentare mediante punti nello spazio, le cui coordinate cartesiane siano i tre valori attribuiti alle variabili. Diremo che la funzione u è data per un certo punto se è data per la terna di valori corrispondenti ad esso: i punti per cui la funzione è data possono riempiere tutto lo spazio, ovvero regioni di esso.

Meno semplici sono le rappresentazioni di funzioni di un numero maggiore di variabili.

99. — Diremo che i valori d'una funzione u di più variabili $x, y, z, \ldots$ hanno una data proprietà in vicinanza, o in un *intorno* dei valori $x_0, y_0, z_0, \ldots$ delle variabili indipendenti, se si può determinare un sistema di quantità finite $h, k, l, \ldots$ in modo che, dando alle variabili i sistemi di valori così prossimi ad $x_0\ y_0\ z_0 \ldots$ da differirne di quantità rispettivamente minori di $h, k, l, \ldots$, i valori che assume la funzione abbiano sempre quella proprietà.

Diremo che la funzione u di $x, y, z, \ldots$ tende verso un limite A col tendere delle variabili indipendenti ai valori finiti $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots$ se in un conveniente intorno dei valori $x_0\, y_0\, z_0 \ldots\ldots$ la differenza fra i valori della funzione ed il numero A è costantemente minore d'una quantità piccola ad arbitrio ϵ.

Più generalmente diremo che una funzione di più variabili tende verso un limite A col tendere di alcune di esse verso limiti finiti e col crescere indefinitamente delle altre, se, fissata ad arbitrio una quantità ϵ è possibile determinare tanti numeri quante sono le variabili in modo che per tutti i valori delle prime variabili differenti dal rispettivo limite meno del numero corrispondente, e per tutti i valori delle seconde maggiori dei numeri corrispondenti, i valori della funzione differiscono da A meno di ϵ.

La funzione $u = f(x, y, z \ldots\ldots)$ dicesi continua per $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots\ldots$ se col tendere di $x\, y\, z \ldots\ldots$ ad $x_0\, y_0\, z_0 \ldots\ldots$, essa tende verso $f(x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots)$.

I teoremi sui limiti dimostrati ai N. 9-13 sono applicabili qualunque sia il numero delle variabili indipendenti; quindi si deduce (N. 23) che le funzioni di più variabili ottenute eseguendo su esse e su costanti le operazioni di addizione e moltiplicazione sono continue per tutti i sistemi di valori delle variabili, e se si introducono anche divisioni, si avranno funzioni continue per tutti quei valori che non annullano i denominatori.

Se u è funzione continua di più variabili $x, y, z, \ldots\ldots$

$$u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

e se alle variabili $x\, y\, z \ldots\ldots$ si sostituiscono delle funzioni pure continue di altre variabili $\xi\, \eta\, \zeta \ldots\ldots$, la u diventa funzione di queste nuove variabili, e dicesi *composta* mediante le funzioni $x\, y\, z \ldots\ldots$, ed anch'essa è continua. Invero facendo tendere le variabili $\xi\, \eta \ldots\ldots$ verso i valori determinati $\xi_0\, \eta_0 \ldots\ldots$, le variabili $x\, y \ldots\ldots$, essendo continue, tendono verso i valori $x_0\, y_0 \ldots$ corrispondenti a $\xi_0, \eta_0 \ldots$, ed essendo anche f continua, col tendere di $x\, y \ldots\ldots$ ad $x_0\, y_0 \ldots\ldots$, u tende verso $f(x_0, y_0 \ldots\ldots)$ ossia verso il valore che assume attribuendo alle variabili indipendenti i valori $\xi_0\, \eta_0 \ldots\ldots$

Il sistema delle prime variabili può anche constare di una sola: quindi se u è funzione continua d'una sola variabile x, come e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, ... e se invece di x si sostituisce una funzione continua di più variabili, anche u sarà funzione continua di queste.

100. — Ci serviremo delle seguenti espressioni tratte dalla rappresentazione geometrica delle funzioni di 1, 2 e 3 variabili.

In un sistema di n variabili $x_1\, x_2 \ldots x_n$ diremo *punto* o *elemento* ogni gruppo di valori attribuiti alle variabili.

Sistema di punti, o *campo* ogni insieme di punti.

Cammino che unisce due punti $(a_1 \ldots a_n)(b_1 \ldots b_n)$ una successione di punti che si ottiene facendo $x_1\, x_2 \ldots x_n$ funzioni continue di una variabile t, che per due valori t_0 e t_1 di essa assumono rispettivamente i valori $(a_1 \ldots a_n)$ e $(b_1 \ldots b_n)$ e facendo variare t fra t_0 e t_1.

Un sistema di punti dicesi *continuo*, se due punti qualunque del sistema si possono unire con un cammino, i cui punti appartengano al sistema.

Un sistema di punti dicesi *finito*, se si possono determinare quantità finite

$$a_1,\ b_1,\quad a_2,\ b_2,\quad \ldots\ldots\quad a_n,\ b_n$$

in modo che per ogni punto del sistema sia

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1\quad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2,\quad \ldots\ldots\quad a_n \leqq x_n \leqq b_n\,.$$

Dicesi *punto limite* d'un sistema ogni punto tale che in ogni suo intorno esistano punti del sistema. Esso può, ovvero non appartenere al sistema.

Potremo ora dimostrare i seguenti teoremi, generalizzazione di quelli riferentisi alle funzioni d'una variabile.

Teorema 1° — *Se* y *è funzione di* $x_1\, x_2 \ldots\ldots$ *tale che col crescere ad un tempo di tutte le variabili cresce continuamente, ma non indefinitamente, essa tende verso un limite* (V. N° 14).

Infatti i valori di y non crescendo indefinitamente, avranno un limite superiore, e sia l; sarà sempre $y < l$, ma, fissata ad arbitrio una quantità ϵ esisterà un valore di $y > l - \epsilon$: questo valore corrisponda ai valori $a_1\, a_2 \ldots$ delle variabili. Se si dànno alle variabili valori qualunque non minori di $a_1\, a_2 \ldots.$ il valore di y sarà sempre $> l - \epsilon$, e minore di l, quindi differirà da l meno di ϵ, ossia y ha per limite l col crescere indefinitamente delle variabili.

Teorema 2° — *Se col tendere delle variabili* $x_1\ x_2 \ldots\ldots$ *ad* $a_1\ a_2 \ldots\ldots$ *una funzione* y *di esse tende ad un limite, fissata ad arbitrio una quantità* ϵ *si può determinare un intorno del punto* $(a_1\ a_2 \ldots)$ *in modo che la differenza fra due valori qualunque della funzione in questo intorno sia minore di* ϵ; *e viceversa* (V. N° 15).

Infatti si fissi un intorno di $(a_1\ a_2 \ldots)$ in modo che la differenza fra i valori di y ed il suo limite sia minore di $\frac{\epsilon}{2}$; la differenza fra due valori qualunque di y sarà $< \epsilon$, c. v. d.

Reciprocamente, se esiste un intorno di $(a_1\ a_2 \ldots)$ in modo che la differenza fra due valori di y sia minore di ϵ, detto y_0 uno di questi valori di y, tutti gli altri saranno compresi fra $y_0 + \epsilon$ ed $y_0 - \epsilon$, quindi ammetteranno un limite superiore l_s ed un limite inferiore l_i, la cui differenza non è maggiore di 2ϵ. Se ora si rimpicciolisce l'intorno del punto considerato, l_s se varia va diminuendo, ed l_i aumentando, essendo però sempre $l_s > l_i$; quindi sia l'uno che l'altro tendono ad un limite, che è comune, perchè essendo $l_s - l_i \leqq 2\epsilon$, quantità piccola ad arbitrio, sarà $\lim l_s = \lim l_i$; dicasi L il loro valore comune.

Fissata ad arbitrio una quantità α, si può determinare un tale intorno di $(a_1 \ldots)$ che $l_s - L < \alpha$, $L - l_i < \alpha$, e quindi anche y che è compreso fra l_s ed l_i differirà da L di meno di α, ossia $\lim y = L$, c. v. d.

Teorema 3° — *Se una funzione è continua e non nulla pei valori* $a_1\ a_2 \ldots$ *delle variabili, essa conserva un segno costante nelle vicinanze di questi valori.*

Per la dimostrazione si confronti il N° 17.

Teorema 4° — *Se una funzione è continua per tutti i punti d'un dato campo continuo, e se per due punti di questo campo essa assume i valori* A *e* B, *essa assume nello stesso campo tutti i valori compresi fra* A *e* B (V. N° 18 e 19).

Infatti, si segni un cammino interno al campo dato, che unisca i due punti dati; se t è la variabile da cui dipendono i valori di $x_1\ x_2 \ldots$, sarà y funzione continua di t, che assume i due valori A e B, e quindi assume ogni valore intermedio.

Se è possibile unire i due punti con infiniti cammini non aventi alcun punto comune, per ognuno di essi la funzione assume ogni valore compreso fra A e B, e quindi lì assume infinite volte.

Teorema 5° — *Se* y *è una funzione di più variabili, data in un campo finito, esiste un punto (appartenente o no ad esso) tale che il limite superiore* *dei valori che assume la funzione in ogni suo intorno è lo stesso che il limite superiore dei valori che assume la funzione nel campo dato.*

Invero dicasi l il limite superiore finito od infinito dei valori di y. Se x_1 è compreso fra a_1 e b_1, si divida il campo dato in due: l'uno formato dai punti la cui x_1 è minore del valore $\frac{a_1+b_1}{2}$, e l'altro dai punti la cui x_1 non è minore di questa quantità. Il limite superiore dei valori di y in uno dei due campi è l. Si divida quello fra i due campi il cui limite superiore è l in due, dividendo in due parti eguali l'intervallo in cui varia x_2, e così di seguito per tutte le variabili. Si troverà un campo per cui il limite superiore dei valori y è ancora l, e gli intervalli in cui variano $x_1\, x_2 \ldots$ sono le metà dei precedenti. Operando sul nuovo campo come si è fatto sull'antico, e così continuando, si troveranno infiniti campi, in cui il limite superiore dei valori di y è ancora l, e gli intervalli in cui variano $x_1\, x_2 \ldots$ vanno successivamente dimezzandosi, in modo che i loro estremi tendono verso un limite: siano $a_1\, a_2 \ldots$ i limiti verso cui tendono questi estremi. Dico che il punto $a_1\, a_2 \ldots$ è il cercato. Infatti, considerando un intorno qualunque di esso, uno di questi campi è tutto contenuto in questo intorno, quindi il limite superiore dei valori di y in questo campo, ed in quell'intorno è l.

La proposizione sussiste evidentemente pel limite inferiore.

TEOREMA 6° — *Una funzione di più variabili, data e continua in un campo finito e pei suoi punti limiti, ammette i limiti superiore ed inferiore finiti, ed assume effettivamente questi valori, ossia diventa massima e minima* (V. N° 21).

Infatti sia $(a_1\, a_2 \ldots)$ il punto tale che in ogni suo intorno il limite superiore dei valori di y coincide col limite superiore dei valori di y nel campo dato: sia y_a il valore corrispondente della funzione; si determini un intorno del punto a in modo che y risulti compreso fra $y_a - \epsilon$ ed $y_a + \epsilon$, cosa possibile a causa della continuità della funzione; si deduce che in questo intorno, e quindi in tutto il campo dato il limite superiore dei valori di y è finito, non minore di y_a, nè maggiore di $y_a + \epsilon$, ossia, siccome ϵ è quantità piccola ad arbitrio, il limite superiore dei valori di y è y_a, c. v. d.

Ragionamento analogo pel limite inferiore e minimo.

TEOREMA 7° — *Se* y *è funzione continua delle variabili* $x_1 \ldots x_n$, *in un campo finito e nei punti limiti di esso, fissata ad arbitrio una quantità* ϵ, *si* *possono determinare* n *quantità* $k_1 \dots k_n$ *in modo che differiscano meno di* ϵ_0 *i valori corrispondenti a due punti qualunque del sistema, le cui variabili differiscono fra loro rispettivamente meno di* $k_1 \dots k_n$. (N. 21).

Infatti, siano $h_1 \dots h_n$ quantità positive arbitrarie. I punti del campo le cui variabili differiscono da quelle d'un punto P meno di $h_1 t, \dots h_n t$ formano un intorno di P, e facendo decrescere t si avranno infiniti intorni, ognuno contenuto nei precedenti, e che si possono rendere tanto piccoli quanto si vuole.

Sia ϵ una quantità positiva arbitraria, P un punto del campo. Essendo y continua in P si può determinare t in modo che i valori di y corrispondenti ai punti dell'intorno di P determinato da t differiscano dal valore di y corrispondente a P meno di ϵ. Anzi infiniti valori di t godono di tale proprietà, perchè, trovatone uno, i suoi inferiori soddisfano pure alle stesse condizioni.

Potremo limitarci a considerare i valori di t minori di 1, e sia θ il loro limite superiore. Il valore di θ dipenderà dal valore di ϵ, e dal punto P; noi lo indicheremo anche con

$$\theta(\epsilon, P) .$$

Fatto $\epsilon = \epsilon_0$, $\theta(\epsilon_0, P)$ sarà una funzione del punto P, e sia ϑ il limite inferiore dei suoi valori. Se dimostro che ϑ non è nullo, se t è minore di ϑ, posto $k_1 = h_1 t, \dots k_n = h_n t$, se due punti del sistema hanno le variabili differenti meno di $k_1 \dots k_n$, l'uno si troverà nell'intorno t dell'altro, e la loro differenza è minore ϵ_0, che è il teorema a dimostrarsi.

Sia A il punto nei cui intorni il limite inferiore dei valori di $\theta(\epsilon_0, P)$ è ancora ϑ. Si consideri la funzione di ϵ

$$\theta(\epsilon, A) ,$$

dove ad ϵ si attribuiscono i valori minori di ϵ_0. Questa funzione assume sempre valori positivi, e col tendere di ϵ ad ϵ_0 va crescendo, e tende verso un limite positivo e non nullo (non maggiore di $\theta(\epsilon_0, A)$), che diremo τ; dico che ϑ non è inferiore a τ.

Invero siano ϵ' ed α due valori di ϵ tali che

$$\epsilon' + \alpha \leqq \epsilon_0 ;$$

sia $t' < \theta(\epsilon', A)$, e $t < \theta(\alpha, A)$, e $t < t'$. Se P è un punto dell'intorno di A definito dal valore precedente di t, i valori delle variabili di P differiranno da quelle di A meno di $h_1 t, \dots h_n t$, ed il valore della funzione pel punto P differirà da quello di A meno di α.

Si consideri l'intorno di P definito dal numero $t' - t$. I punti di questo intorno avranno le variabili differenti da quelle di P meno di

$$h_1(t' - t), \ldots . . h_n(t' - t),$$

e quindi differenti da quelle di A meno di

$$h_1 t', \ldots . . h_n t',$$

ossia apparterranno all'intorno di A definito da t'. Ma per questi punti il valore della funzione differisce da quello di A meno di ϵ', quindi il valore della funzione corrispondente a P differisce dal valore corrispondente ai punti dell'intorno $t' - t$ meno di $\epsilon' + \alpha$, ossia meno di ϵ_0, onde

$$\theta(\epsilon_0, P) \geqq t' - t.$$

Questa diseguaglianza è soddisfatta da tutti i punti dell'intorno t di A: quindi anche dal limite inferiore dei valori di θ, che è ϑ, ossia

$$\vartheta \geqq t' - t,$$

ma la quantità t si può supporre piccola ad arbitrio, ed affinchè questa diseguaglianza sia possibile deve essere

$$\vartheta \geqq t'.$$

e siccome t' è obbligato alla sola condizione $t' < \theta(\epsilon', A)$, si deduce

$$\vartheta \geqq \theta(\epsilon', A),$$

ed ϵ' essendo assoggettato alla sola condizione di non essere maggiore di ϵ_0, ϑ non essendo minore d'alcun valore di $\theta(\epsilon', A)$, non sarà minore del loro limite superiore τ, onde

$$\vartheta \geqq \tau. \qquad \text{c. v. d.}$$

Si può aggiungere a complemento di questa dimostrazione che si ha effettivamente $\vartheta = \tau$. Invero se fosse possibile $\vartheta > \tau$, sia t una quantità tale che $\vartheta > t > \tau$. Si deduce che nell'intorno t di A esistono punti per cui il valore della funzione differisce da quello corrispondente ad A di una quantità maggiore d'ogni quantità minore di ϵ_0, ossia di quantità eguali o superiori ad ϵ_0. Ma essendo $t < \vartheta \leqq \theta(\epsilon_0, A)$ ogni valore assunto dalla funzione nell'intorno t di A differisce dal valore corrispondente ad A d'una quantità minore di ϵ_0, il che è contradditorio colla conclusione precedente.

Si potrebbe pure dimostrare il teorema considerando il limite superiore T dei valori di t tali che negli intorni del punto P da essi determinati l'oscillazione della funzione, ossia la differenza fra i suoi limiti superiore ed inferiore, sia minore d'una quantità fissa ϵ. Si riconosce che T è funzione continua di P, e mai nulla, quindi anche il suo minimo sarà diverso da zero.

Derivate e differenziali parziali.

101. — Se nella funzione $u = f(x, y, z, ...)$ si suppongono dati valori fissi alle quantità $y, z, ...$, essa diventa una funzione della sola variabile x, e potrà ammettere derivata, che si calcolerà colle regole ordinarie, se f si ottiene eseguendo sulle variabili le operazioni analitiche studiate; noi la rappresenteremo con $f'_x(x, y, z, ...)$, e la chiameremo derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x. Il differenziale di u ottenuto ritenendo fisse tutte le quantità $y, z, ...$ e variabile x si chiamerà differenziale parziale di u rispetto x: rappresentandolo con $d_x u$ si avrà

$$d_x u = f'_x(x, y, z, ...) dx,$$

ove dx, differenziale della variabile indipendente, è arbitrario. In modo analogo si avranno le altre derivate parziali $f'_y(x, y, z .....)$, $f'_z(x, y, z, ...)$, ... e gli altri differenziali parziali

$$d_y u = f'_y(x, y, z .....) dy, \qquad d_z u = f'_z(x, y, z, ...) dz, \quad .....$$

ove dy, dz,...... sono pure quantità arbitrarie.

Risolvendo le equazioni precedenti rispetto alle derivate parziali si ha:

$$f'_x(x, y, z, ...) = \frac{d_x u}{dx}, \quad f'_y(x, y, z, ...) = \frac{d_y u}{dy}, ...$$

ed i membri di destra potrebbero servire per indicare le derivate parziali.

Praticamente però si suole trascurare l'indice del d al numeratore, convenendo cioè che la natura del differenziale parziale sia sufficientemente indicata dal denominatore, e si ottengono le notazioni

$$f'_x(x, y, z \ldots\ldots) = \frac{du}{dx}, \quad f'_y(x, y, z \ldots\ldots) = \frac{du}{dy} \ldots\ldots$$

Quindi il differenziale parziale rispetto x si rappresenterà con $\frac{du}{dx}dx$. Si deve badare in questa scrittura di non eseguire riduzioni, perchè il du del numeratore non può scompagnarsi dal denominatore che lo qualifica. Per rendere più visibile questo, alcuni Autori proposero pei differenziali parziali le notazioni

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial u}{\partial x}dx;$$

ma noi ci atterremo alla prima.

102. — Nei casi più comuni una funzione di più variabili ha altrettante derivate parziali, che sono alla loro volta funzioni delle stesse variabili, e che quindi possono ammettere derivate parziali, che si diranno derivate parziali di secondo ordine, e così via. Per esempio nel caso d'una funzione $u = f(x, y)$ di due variabili si hanno a considerare due derivate di primo ordine

$$f'_x(x, y) \qquad \text{ed} \qquad f'_y(x, y);$$

la prima ammetterà due derivate parziali di primo ordine, che indicheremo con

$$f''_{xx}(x, y) \qquad \text{e} \qquad f''_{xy}(x, y),$$

e la seconda le derivate

$$f''_{yx}(x, y) \qquad \text{e} \qquad f''_{yy}(x, y).$$

In modo analogo si hanno i differenziali parziali di secondo ordine, che sono i differenziali parziali di quelli di primo ordine calcolati ritenendo costanti i differenziali dx, dy..... e che si rappresentano, nel caso d'una funzione di due variabili, scrivendo

$$d_x\, d_x\, u = f''_{xx}(x, y)\, dx^2, \qquad d_y\, d_x\, u = f''_{xy}(x, y)\, dx\, dy\,,$$
$$d_x\, d_y\, u = f''_{yx}(x, y)\, dy\, dx\,, \qquad d_y\, d_y\, u = f''_{yy}(x, y)\, dy^2,$$

e così di seguito pei differenziali parziali d'ordine più elevato. Dalle eguaglianze precedenti si ricava

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{d_x\, d_x\, u}{dx^2}\,, \qquad f''_{xy} = \frac{d_y\, d_x\, u}{dx\, dy}\,, \quad \text{ecc.}$$

e si suol scrivere più brevemente

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{d^2 u}{dx^2}\,, \qquad f''_{xy}(x, y) = \frac{d^2 u}{dx\, dy}\,, \ldots\ldots$$

È infine inutile, nel derivare, il tener conto dell'ordine delle variabili rispetto cui si deriva, come ora dimostreremo.

103. — Teorema. — *Una derivata parziale d'ordine qualunque d'una funzione di più variabili non dipende dall'ordine delle successive derivazioni, supposta continua la funzione e le sue derivate fino all'ordine considerato.*

Si consideri dapprima una funzione di due variabili

$$u = f(x, y)$$

le cui derivate parziali di primo e secondo ordine esistano e siano continue. Si vuol dimostrare che $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Pongasi

$$V = f(x_0 + h\,.\, y_0 + k) - f(x_0 + h,\, y_0) - f(x_0,\, y_0 + k) + f(x_0,\, y_0).$$

Se si considera la funzione della sola variabile x

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

si ricava

$$V = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0),$$

quindi per una formula nota

$$V = h\,\varphi'(x_0 + \theta h).$$

Ma

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)$$

e per la stessa formula

$$\varphi'(x) = k f''_{xy}(x, y_0 + \theta_1 k),$$

e sostituendo in V si ricava

$$V = hk f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k).$$

Scambiando le variabili x ed y nel ragionamento precedente, ossia posto

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

si ricava

$$V = \Psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\,\Psi'(y_0 + \theta' k)$$

e

$$\psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y) = h f''_{yx}(x_0 + \theta_1' h, y).$$

onde

$$V = kh f''_{yx}(x_0 + \theta_1' h, y_0 + \theta' k).$$

Paragonando ora le due espressioni di V, e dividendo per hk si ricava

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_1' h, y_0 + \theta' k).$$

Facciasi in questa eguaglianza tendere h e k a zero; siccome le derivate sono continue per ipotesi, si ha

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0), \qquad \text{c. v. d.}$$

Sia ora u una funzione d'un numero qualunque di variabili

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots);$$

se ne calcoli la derivata parziale d'un certo ordine α derivando successivamente rispetto alle variabili $x_a\ x_b \ldots\ldots x_h$, e sia $f^{(\alpha)}_{x_a x_b \ldots x_h}(x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots)$; considerando questa come funzione delle sole due variabili x_k ed x_l, ritenendo cioè fisse le altre quantità, posso derivarla prima rispetto x_k poi rispetto x_l, ovvero prima rispetto x_l e poi rispetto x_k, e si troveranno i risultati eguali

$$f^{(\alpha+2)}_{x_a \ldots x_h\, x_k\, x_l}(x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots) = f^{(\alpha+2)}_{x_a \ldots x_h\, x_l\, x_k}(x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots),$$

e derivando ambo i membri rispetto le variabili $x_m\ x_n \ldots\ldots x_r$, se β è il numero delle derivazioni eseguite si avrà:

$$f^{(\beta)}_{x_a \ldots x_h\, x_k\, x_l\, x_m \ldots x_r}(x_1 \ldots\ldots) = f^{(\beta)}_{x_a \ldots x_h\, x_l\, x_k\, x_m \ldots x_r}(x_1 \ldots\ldots),$$

ossia in una serie di derivazioni è lecito scambiare l'ordine di due derivazioni successive, e quindi di permutare comunque l'ordine delle derivazioni.

Differenziali totali.

104. — Dicesi *differenziale totale* d'una funzione di più variabili la somma dei suoi differenziali parziali. Esso si rappresenta facendo precedere alla lettera rappresentante la funzione la caratteristica d. Quindi se $u = f(x, y, z)$, sarà il suo differenziale totale

$$du = d_x u + d_y u + d_z u = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz =$$
$$= \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\,.$$

105. — Se $u = f(x)$, e la funzione ammette derivata $f'(x)$, si ha che $\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, e quindi

$$\Delta u = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

ove α è una quantità infinitesima con Δx. Una formula analoga vale anche per le funzioni di più variabili.

Teorema. — *Se* u *è funzione di più variabili* $u = f(x, y, z, ...)$ *avente derivate parziali di primo ordine continue, si ha*

$$\Delta u = f_x'(x, y, z, ...)\Delta x + f_y'(x, y, z, ...)\Delta y + f_z'(x, y, z, ...)\Delta z + ...$$
$$+ \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z + ...$$

ove α, β, γ..... *tendono a zero col tendervi di* Δx, Δy, Δz, ...

Sia $u = f(x, y)$: si ha:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

che si può scrivere:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$$
$$+ f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ora

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x\, f_x'(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)$$
$$= \Delta x\, |f_x'(x, y) + \alpha|$$

dove $\alpha = f_x'(x + \theta\Delta x, y + \Delta y) - f_x'(x, y)$ ha per limite zero col tendere di Δx e Δy a zero; analogamente

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y\, f_y'(x, y + \theta'\Delta y) = \Delta y\, |f_y'(x, y) + \beta|$$

ove β ha pure per limite zero; sostituendo nell'espressione di Δu si ricava

$$\Delta u = \Delta x\, f_x'(x, y) + \Delta y\, f_y'(x, y) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad \text{c. v. d.}$$

Sia ora

$$u = f(x, y, z);$$

si ricava

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)\\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)\\ &\quad + f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)\\ &\quad + f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta u = \Delta x\, f_x'(x+\theta\,\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\\ + \Delta y\, f_y'(x, y+\theta'\Delta y, z+\Delta z)\\ + \Delta z\, f_z'(x, y, z+\theta''\Delta z),\end{aligned}$$

ed ancora

$$\Delta u = \Delta x\,[f_x'(x, y, z) + \alpha] + \Delta y\,[f_y'(x, y, z) + \beta] + \Delta z\,[f_z'(x, y, z) + \gamma]$$

dove α, β, γ sono quantità infinitesime con Δx, Δy, Δz; ossia

$$\begin{aligned}\Delta u = \Delta x\, f_x'(x, y, z) + \Delta y\, f_y'(x, y, z) + \Delta z\, f_z'(x, y, z)\\ + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

In modo analogo si ragiona per le funzioni di un numero maggiore di variabili.

106. — Dalla formula che precede si deduce la regola per derivare le funzioni composte.

Sia $u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$ e pongasi invece delle variabili x, y, $z \ldots\ldots$ delle funzioni d'una nuova variabile t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \ldots\ldots$$

u diventa funzione di t composta mediante x, y, $z \ldots\ldots$ Suppongasi che f ammetta le derivate parziali di primo ordine continue, e che φ, ψ, χ..... ammettano pure le derivate ordinarie. Dato a t un incremento Δt, e detti Δx, Δy, Δz..... e Δu gli incrementi corrispondenti di x, y, z,.... ed u, si deduce:

$$\Delta u = f'_x(x, y, z...)\,\Delta x + f'_y(x, y, z...)\,\Delta y + f'_z(x, y, z...)\,\Delta z + ...$$
$$+ \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z + ...$$

e

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x, y, z...)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y, z...)\frac{\Delta y}{\Delta t} + f'_z(x, y, z,...)\frac{\Delta z}{\Delta t} + ...$$
$$+ \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma\frac{\Delta z}{\Delta t} + ...$$

Facciasi ora tendere Δt a zero: anche Δx, Δy...... tendono a zero: quindi tendono pure a zero α, β, γ.... : passando quindi al limite, si ha:

$$\frac{du}{dt} = f'_x(x, y...)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y...)\frac{dy}{dt} + f'_z(x, y, ...)\frac{dz}{dt} + ...$$

e

$$du = f'_x(x, y...)\,dx + f'_y(x, y...)\,dy + f'_z(x, y, ...)\,dz + ...$$

Il membro di destra ha la forma d'un differenziale totale; ma in esso dx, dy, dz,.... non sono più differenziali di variabili indipendenti, ossia quantità arbitrarie, ma differenziali di funzioni d'una variabile:

$$dx = \varphi'(t)\,dt\,, \quad dy = \psi'(t)\,dt\,, ...$$

Così ad esempio se u fosse funzione d'una sola variabile x, funzione di t, si trova

$$du = \frac{du}{dx}\,dx\,.$$

che è la formula di differenziazione delle funzioni di funzioni (N. 37).

Se
$$u = x + y - z$$

si ricava $\frac{du}{dx} = 1$, $\frac{du}{dy} = 1$, $\frac{du}{dz} = -1$, quindi (N. 34)

$$du = dx + dy - dz\,.$$

Se
$$u = xyz\,,$$

si ricava $\frac{du}{dx} = yz$, $\frac{du}{dy} = xz$, $\frac{du}{dz} = xy$, quindi (N. 35)

$$du = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz\,.$$

Se $u = \frac{x}{y}$, si ha $\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}$, $\frac{du}{dy} = -\frac{x}{y^2}$, onde (N. 36)

$$du = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

Se $u = x^y$, si ha $\frac{du}{dx} = yx^{y-1}$ e $\frac{du}{dy} = x^y \log x$, onde (N. 41)

$$du = yx^{y-1}\,dx + x^y \log x\,dy\,.$$

107. — Sia più generalmente

$$u = f(x_1,\ x_2, \ldots\ldots x_n)$$

dove $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ si suppongono funzioni di più altre variabili $\xi_1\ \xi_2 \ldots\ldots \xi_m$; u diventerà funzione delle ξ composta mediante le x. Per calcolare la derivata parziale di u rispetto ξ_1 si deve supporre $\xi_2 \ldots\ldots \xi_m$ fisse, ed u sarà funzione di ξ_1 composta mediante $x_1\,x_2 \ldots\ldots x_n$; onde

$$\frac{du}{d\xi_1} = \frac{du}{dx_1}\,\frac{dx_1}{d\xi_1} + \frac{du}{dx_2}\,\frac{dx_2}{d\xi_1} + \ldots\ldots + \frac{du}{dx_n}\,\frac{dx_n}{d\xi_1}\,.$$

In modo analogo si ha

$$\frac{du}{d\xi_2} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{d\xi_2} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{d\xi_2} + \ldots\ldots + \frac{du}{dx_n}\frac{dx_n}{d\xi_2}$$

. . . .

$$\frac{du}{d\xi_m} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{d\xi_m} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{d\xi_m} + \ldots\ldots + \frac{du}{dx_n}\frac{dx_n}{d\xi_m}.$$

Se si moltiplicano queste derivate parziali rispettivamente per $d\xi_1\ d\xi_2 \ldots\ldots d\xi_m$ e si sommano, si avrà il differenziale totale di u; ordinando convenientemente il polinomio di destra si ha:

$$\begin{aligned} du = & \frac{du}{dx_1}\left(\frac{dx_1}{d\xi_1}d\xi_1 + \frac{dx_1}{d\xi_2}d\xi_2 + \ldots\ldots + \frac{dx_1}{d\xi_m}d\xi_m\right) \\ & + \frac{du}{dx_2}\left(\frac{dx_2}{d\xi_1}d\xi_1 + \frac{dx_2}{d\xi_2}d\xi_2 + \ldots\ldots + \frac{dx_2}{d\xi_m}d\xi_m\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{du}{dx_n}\left(\frac{dx_n}{d\xi_1}d\xi_1 + \frac{dx_n}{d\xi_2}d\xi_2 + \ldots\ldots + \frac{dx_n}{d\xi_m}d\xi_m\right). \end{aligned}$$

Le quantità in parentesi sono rispettivamente i differenziali totali delle funzioni $x_1\ x_2 \ldots x_n$; onde sostituendo

$$du = \frac{du}{dx_1}dx_1 + \frac{du}{dx_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{du}{dx_n}dx_n.$$

Il membro di destra ha la forma del differenziale totale di u considerando $x_1\ x_2 \ldots x_n$ come variabili indipendenti; ma nel nostro caso $dx_1\ dx_2 \ldots dx_n$ rappresentano i differenziali totali delle funzioni x.

108. — Il differenziale totale del differenziale totale di primo ordine d'una funzione di più variabili, calcolato ritenendo costanti i differenziali delle variabili indipendenti, dicesi differenziale totale di secondo ordine; il differenziale totale di quello di secondo ordine dicesi di terzo ordine, e così via.

Per esempio se u è funzione di due variabili x ed y, sarà

$$du = d_x u + d_y u,$$

i suoi differenziali parziali sono

$$d_x du = d_x^2 u + d_x d_y u$$

e

$$d_y du = d_y d_x u + d_y^2 u,$$

e sommandoli, si avrà il differenziale di secondo ordine $ddu = d^2u$; osservando che

$$d_y d_x u = d_x d_y u,$$

si ha

$$d^2u = d_x^2 u + 2d_x d_y u + d_y^2 u.$$

In modo analogo si possono esprimere successivamente d^3u,... in funzione dei differenziali parziali dei varii ordini.

Ma si possono scrivere facilmente le formule generali mediante una notazione simbolica. Si attribuisca al prodotto simbolico

$$(d_x + d_y + d_z \ldots) v$$

ove v è una funzione di x, y, ... il significato

$$d_x v + d_y v + d_z v + \ldots;$$

se u è funzione data di x, y, ... sarà

$$du = (d_x + d_y + \ldots) u,$$

e prendendone di nuovo i differenziali totali, si ha

$$d^2 u = (d_x + d_y + \ldots)(d_x + d_y + \ldots) u$$

che scriveremo

$$d^2 u = (d_x + d_y + \ldots)^2 u,$$

ed in generale

$$d^n u = (d_x + d_y + \ldots)^n u.$$

Per dedurre da questa scrittura l'espressione effettiva di $d^n u$, basta eseguire le n moltiplicazioni simboliche indicate. Ora le successive moltiplicazioni simboliche si fanno come le effettive, ossia come se le lettere $d_x\, d_y \ldots$ rappresentassero quantità; quindi si potrà applicare senz'altro la formula di Leibnitz per le potenze dei polinomii all'espressione simbolica di $d^n u$.

Formula di Taylor

per le funzioni di più variabili.

109. — La formula di Taylor (N. 67) si può estendere alle funzioni di più variabili. Sia u funzione delle variabili x, y, $z \ldots$

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

e si diano alle variabili prima i valori $x_0, y_0, z_0, \ldots$ poi i valori $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l, \ldots\ldots$

Pongasi in u

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \quad \ldots;$$

u diventa funzione di t composta mediante le $x, y, z \ldots$ funzioni di t: e sia

$$u = f(x, y, z \ldots) = F(t).$$

Sarà

$$F(0) = f(x_0, y_0, z_0, \ldots), \quad F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l \ldots).$$

Inoltre, se la funzione $f(x, y, z \ldots)$ ammette derivate parziali continue fino all'ordine n, anche $F(t)$ ammette le successive derivate fino allo stesso ordine, che si ricavano colla regola delle funzioni composte, e si ha:

$$F'(t) = \frac{du}{dx}\,\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dt} + \ldots..$$

ossia, poichè $\frac{dx}{dt} = h$, $\frac{dy}{dt} = k$, $\frac{dz}{dt} = l$, ... si ha

$$F'(t) = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \ldots..$$

che potremo scrivere simbolicamente

$$F'(t) = \left(\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots\right) u,$$

intendendo che il fattore simbolico

$$\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots..$$

messo davanti ad una funzione di x, y, z ... rappresenti la somma delle derivate parziali moltiplicate per h, k, l, ...

Derivando $F'(t)$ si ha:

$$F''(t) = \left(\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots\right)\left(\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots\right) u,$$

ovvero

$$F''(t) = \left(\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots\right)^2 u,$$

ed in generale

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots\right)^n u.$$

Per trasformare questa espressione simbolica in effettiva, basterà eseguire le moltiplicazioni simboliche indicate; ed anche qui le moltiplicazioni simboliche si fanno come se le scritture $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}, \ldots$ rappresentassero quantità; quindi si potrà fare d'un colpo solo tutte le moltiplicazioni simboliche estendendo al polinomio simbolico.

$$\left(\frac{d}{dx} h + \frac{d}{dy} k + \frac{d}{dz} l + \ldots\right)^n$$

la formula di Leibnitz per le potenze dei polinomii.

Si vede di qui che $F^{(n)}(t)$ è una funzione intera omogenea di grado n in $h, k, l, \ldots$, ed i coefficienti sono le derivate parziali d'ordine n di $f(x, y, z, \ldots)$, ove $x, y, z, \ldots$ hanno i valori precedentemente fissati $x_0 + ht$, $y_0 + kt, \ldots$

Pongasi ora $t = 0$ in $F'(t)$, $F''(t), \ldots F^{(n-1)}(t)$; si avranno i valori $F'(0)$, $F''(0), \ldots F^{(n-1)}(0)$, che sono funzioni omogenee di gradi $1, 2, \ldots n-1$ in $h, k, l, \ldots$, ed i coefficienti sono i valori delle derivate parziali di f per i valori $x_0, y_0, z_0, \ldots$ delle variabili. Sostituendo quindi nella formula di Maclaurin:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta)$$

ove $0 < \theta < 1$, ad $F(1)$, $F(0)$, $F'(0), \ldots F^{(n)}(\theta)$ i loro valori, si ha $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ espresso mediante un polinomio finito, il cui primo termine è $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$, i successivi, tolto l'ultimo, sono polinomii interi omogenei dei gradi $1, 2, \ldots n-1$ in $h, k, l, \ldots$ ed i cui coefficienti sono i valori delle derivate parziali per $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$, e l'ultimo termine, o resto, è un polinomio intero omogeneo di grado n in $h, k, l, \ldots$ i cui coefficienti dipendono ancora da queste quantità, e sono i valori che assumono le derivate parziali d'ordine n per valori intermedii delle variabili:

$$x_0 + \theta h, \quad y_0 + \theta k, \ldots\ldots$$

Per esempio, se le variabili si riducono a 2, e si fa successivamente $n = 1, 2, \ldots$ si hanno le formule:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) =$$
$$= f(x_0, y_0) + \{ h f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f_y'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \},$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \{ h f_x'(x_0, y_0) + k f_y'(x_0, y_0) \}$$
$$+ \frac{1}{2!} \{ h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2 h k f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$
$$+ k^2 f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \},$$

ecc.

Se $f(x, y, \ldots)$ è funzione intera di grado p nelle variabili, applicando la formula di Taylor, fatto $n = p + 1$, il resto è nullo, perchè sono nulle tutte le derivate parziali d'ordine $p + 1$, e si ha lo sviluppo di $f(x + h, y + k, \ldots)$ in un polinomio finito ordinato secondo le potenze di h e di k. Viceversa, se una funzione ha le derivate d'ordine $p + 1$ nulle, essa è funzione intera di grado p.

Se col crescere indefinitamente di n il resto ha per limite zero, si ha lo sviluppo in serie infinita del membro di sinistra. Posto

$$\Delta u = f(x + h, y + k, \ldots) - f(x, y, \ldots)$$

e

$$h = dx, \quad k = dy, \ldots\ldots$$

i successivi termini si riducono a du, $\frac{d^2 u}{2!}$, $\frac{d^3 u}{3!}$, ... e si ha

$$\Delta u = du + \frac{d^2 u}{2!} + \frac{d^3 u}{3!} + \ldots\ldots$$

Se nella formula di Taylor si fa

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \ldots\ldots$$
$$h = x, \quad k = y, \ldots\ldots$$

si ottiene una formula che è l'estensione di quella di Maclaurin alle funzioni di più variabili.

Funzioni implicite.

Equazione fra due variabili.

110. — Una funzione di una o più variabili può essere data analiticamente indicando le operazioni che bisogna eseguire sulle variabili indipendenti per ottenere la funzione, e dicesi *data esplicitamente*, ovvero funzione *esplicita*. Essa può invece essere determinata da equazioni che la legano alle variabili indipendenti, e dicesi *data implicitamente*, ovvero funzione *implicita*. Noi studieremo sotto quali condizioni una o più equazioni fra variabili possano determinare qualcuna di queste in funzione delle altre, e, se questo avviene, la natura e le proprietà delle funzioni così ottenute.

Se $f(x, y)=0$ *è un'equazione fra due variabili* x *ed* y *soddisfatta da una coppia di valori* $x_0\ y_0$ *delle variabili, sicchè* $f(x_0, y_0)=0$, *se la funzione* $f(x, y)$ *e le sue derivate prime sono continue in vicinanza dei valori* $x_0\ y_0$, *e se infine* $f'_y(x_0\ y_0)$ *non è nulla, esiste una ed una sola funzione* y *di* x, $y=\varphi(x)$, *determinata nelle vicinanze del valore* $x=x_0$ *che soddisfa all'equazione proposta, ossia tale che* $f(x, \varphi(x))=0$ *qualunque sia* x, *che per* $x=x_0$ *assume il valore* y_0, *e che è continua. Inoltre questa funzione ammette derivata.*

Infatti siano h_1 e k_1 due quantità così piccole che per ogni valore di x compreso nell'intervallo (x_0-h_1, x_0+h_1), e per ogni valore di y nell'intervallo (y_0-k_1, y_0+k_1) siano soddisfatte le condizioni di continuità di $f(x, y)$, e delle sue derivate prime; inoltre che $f'_x(x, y)$ sia sempre numericamente minore d'una quantità finita A, e che $f'_y(x, y)$, la quale per $x=x_0$ ed $y=y_0$ non è nulla, sia sempre numericamente maggiore d'una quantità finita B; ed infine che $Ah_1 < Bk_1$.

Ricorrendo alla formula di Taylor, ed osservando che $f(x_0, y_0) = 0$, si ha

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$
$$(0 < \theta < 1).$$

Se in questa formula si suppone $h \leqq h_1$, e $k = \pm k_1$, sarà $x_0 + \theta h$ compreso fra $x_0 - h_1$ ed $x_0 + h_1$, ed $y_0 + \theta k$ compreso fra $y_0 - k_1$ ed $y_0 + k_1$; quindi

$$f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) < A, \; hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) < h_1 A,$$

e $k f'_y(x_0 + \theta h_1, y_0 + \theta k) > k_1 B$ sempre in valor assoluto; quindi nell'espressione di $f(x_0 + h, y_0 + k)$, ove ad h e k siano dati i valori precedentemente stabiliti, il primo termine è minore numericamente del secondo, e la loro somma ha il segno del secondo termine; ma il secondo termine cambia di segno secondochè si fa $k = + k_1$ ovvero $k = - k_1$, perchè il primo fattore k cambia segno, ed il secondo fattore $f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ non cambia mai; dunque $f(x_0 + h, y_0 + k)$, considerata in quanto funzione di k, è continua, ed assume valori di segno contrario dando a k i valori $\pm k_1$; quindi si annullerà per un valore di k compreso fra $+ k_1$, e $- k_1$, e per uno solo, perchè se potesse essere

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0, \; f(x_0 + h, y_0 + k') = 0,$$

pel teorema di Rolle, dovrebbe potersi determinare un valore k'' compreso fra k e k' per cui sia $f'_y(x_0 + h, y_0 + k'') = 0$, il che è assurdo, perchè $f'_y(x\, y)$ non si annulla per alcuna coppia di valori di x e di y compresi negli intervalli considerati.

Dunque, supposte soddisfatte le condizioni enunciate, fissato ad arbitrio un valore ad x compreso fra $x_0 - h_1$ ed $x_0 + h_1$, esiste uno ed un sol valore per y compreso fra $y_0 - k_1$ ed $y_0 + k_1$ che soddisfi alla equazione $f(x, y) = 0$; se si fa $x = x_0$, il valore corrispondente di y è evidentemente y_0; questi valori y formano una funzione continua, perchè i valori di y differiscono da y_0 meno di k_1, quantità che si può supporre piccola ad arbitrio.

111. — La funzione y di x determinata nel modo precedente dall'equazione $f(x, y) = 0$ ammette derivata per $x = x_0$; infatti dando ad x il valore $x_0 + h$, e detto $y_0 + k$ il valore corrispondente di y, sarà:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0,$$

ossia

$$hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0,$$

e quindi

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}.$$

Facciasi qui tendere h a zero; k che rappresenta l'incremento della funzione y, tende pure a zero, perchè la funzione è continua; quindi

$$\lim f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = f'_x(x_0, y_0),$$

e

$$\lim f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = f'_y(x_0, y_0) \gtrless 0;$$

perciò anche $\frac{k}{h}$ tende verso un limite, e

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Se si dà ad x un altro valore qualunque, ed y rappresenta il valore della funzione, se $f'_y(x, y)$ non è nullo, sarà sempre

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

ed in tal modo la derivata è espressa in funzione di x e di y, ma y è funzione determinata di x.

Se $f(x, y)$ ammette le successive derivate parziali continue, si potrà derivare $\frac{dy}{dx}$, che è funzione di x composta mediante x ed y, funzioni di x che hanno derivata, e così continuando si vede che la funzione y ammette le successive derivate, e se ne vede il modo di determinarle.

Ma si arriva più facilmente al risultato, osservando che se in $f(x, y)$ si sostituisce ad y la funzione precedentemente definita di x, essa diventa funzione di x composta mediante x ed y, ed ha costantemente il valore zero; onde la sua derivata è nulla; derivando si ha:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

ed il primo membro di questa equazione è funzione di $x, y, \frac{dy}{dx}$, che sono funzioni di x che ammettono derivata, onde derivando si ha

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

e così continuando si hanno delle equazioni da cui si ricavano i valori $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots$ e queste non solo illusorie, perchè il coefficiente dell'incognita è sempre $\frac{df}{dy}$ che non è nullo.

Equazione fra più variabili.

112. — Più generalmente:

Se un' equazione $f(x_1, x_2, \ldots x_m, x) = 0$, *fra* $m + 1$ *variabili* $x_1, x_2, \ldots x_m, x$ *è soddisfatta dai valori* $a_1, a_2, \ldots, a_m, a$, *delle variabili, se la funzione* f *è continua, insieme alle sue derivate* *prime, nelle vicinanze del sistema* $a_1\, a_2 \ldots a_m\, a$, *e per questi valori non è nulla la derivata di* f *rispetto* x, *esiste una ed una sola funzione* $x = \varphi(x_1 \ldots x_m)$ *delle variabili* $x_1\, x_2 \ldots x_m$ *definita nelle vicinanze dei valori* $a_1 \ldots a_m$, *che sostituita nell'equazione* $f = 0$ *invece di* x, *la soddisfa qualunque siano i valori delle variabili, che è continua, e che assume il valore* a *quando si faccia* $x_1 = a_1, \ldots x_m = a_m$. *Essa inoltre ammette le derivate parziali.*

Infatti si ha

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m, a+h) = {} & h_1 f'_{x_1}(a_1+\theta h_1, a_2+\theta h_2, \ldots a+\theta h) \\ & + h_2 f'_{x_2}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ & + h_m f'_{x_m}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ & + h f'_x \ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{aligned}$$

Si supponga che per tutti i valori di $x_1\, x_2 \ldots x_m\, x$ compresi rispettivamente negli intervalli

$$a_1 - k_1,\ a_1 + k_1;\ \ldots\ldots a_m - k_m,\ a_m + k_m;\ a - k,\ a + k,$$

siano $f'_x < A_1$, $f'_{x_2} < A_2 \ldots\ldots f'_{x_m} < A_m$, e $f'_x > A$, e le quantità $k_1\, k_2 \ldots k_m$ così piccole che

$$A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots\ldots + A_m k_m < A k.$$

Se nella espressione di $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots a_m+h_m, a+h)$ si suppongono $h_1\, h_2 \ldots h_m$ numericamente minori delle quantità determinate $k_1\, k_2 \ldots k_m$, e si dànno ad h i due valori $\pm k$, la somma dei primi m termini è sempre minore dell'ultimo, onde questa somma avrà il segno dell'ultimo termine; e siccome f'_x conserva un segno costante, dando ad h i due valori $+k$ e $-k$ l'ultimo termine e quindi la somma cambia segno.

Quindi $f(a_1+h_1, \ldots a_m+h_m, a+h)$ è funzione continua di h, che cambia segno dando ad h i due valori $+k$ e $-k$, e perciò si annulla per un valore di h intermedio, ossia minore numericamente di k; e si annulla per un valore solo compreso fra $\pm k$, perchè se si annullasse per i due valori h' e h'' di h, la sua derivata rispetto h si dovrà annullare per un valore intermedio h''', ossia dovrà essere $f'_x(a_1+h,\ldots a_m+h_m, a+h''')=0$, il che è assurdo, perchè f'_x non si annulla nelle vicinanze di $a_1\, a_2 \ldots a_m\, a$.

Dunque riuscì possibile determinare un campo di variabilità di $x_1\, x_2 \ldots x_m$ in modo che ad ogni sistema di valori delle variabili in esso corrisponde uno ed uno solo valore di x, compreso fra $a-k$ ed $a+k$: e siccome k si può supporre piccolo ad arbitrio, la funzione è continua, ed assume il valore speciale a per $x_1=a_1,\ldots x_m=a_m$.

113. — La funzione x delle variabili $x_1\, x_2 \ldots x_m$ così definita pei valori delle variabili comprese negli intervalli considerati ammette derivate parziali di primo ordine; invero basta supporre $x_2 \ldots x_m$ costanti, ed x diventa funzione implicita della sola variabile x_1, quindi siamo nel caso studiato nei N. 110 e 111; e questa derivata sarà data dall'equazione

$$\frac{df}{dx_1}+\frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dx_1}=0\,.$$

In modo analogo, le altre derivate parziali saranno date dalle equazioni

$$\frac{df}{dx_2}+\frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dx_2}=0\,,\ldots\ldots\frac{df}{dx_m}+\frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dx_m}=0.$$

Da esse si ricavano le derivate parziali in funzione delle variabili indipendenti, e della funzione x.

Se la funzione f ammette le derivate parziali dei successivi ordini, anche x è funzione di $x_1\, x_2 \ldots x_m$, che ammette le derivate parziali dei varii ordini, che si troveranno derivando le espressioni delle derivate di primo ordine.

Ma più semplicemente, riconosciutane l'esistenza, si derivi ciascheduna delle m equazioni differenziali precedenti rispetto a tutte le variabili indipendenti. Si ricaveranno le equazioni

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + 2\frac{d^2 f}{dx\,dx_1}\frac{dx}{dx_1} + \frac{d^2 f}{dx^2}\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^2 + \frac{df}{dx}\frac{d^2 x}{dx_1^2} = 0\,,$$

$$\frac{d^2 f}{dx_1\,dx_2} + \left(\frac{d^2 f}{dx\,dx_1}\frac{dx}{dx_2} + \frac{d^2 f}{dx\,dx_2}\frac{dx}{dx_1}\right) + \frac{d^2 f}{dx^2}\frac{dx}{dx_1}\frac{dx}{dx_2} + \frac{df}{dx}\frac{d^2 x}{dx_1\,dx_2} = 0\,,$$

. . . .

dalle quali si deducono le derivate parziali del secondo ordine, e così via.

Sistema di due equazioni fra tre variabili.

114. — Abbiasi un sistema di due equazioni fra tre variabili

$$F(x\,,\,y\,,\,z) = 0\,,\quad f(x\,,\,y\,,\,z) = 0\,,$$

che si suppongono verificate pei valori $x_0\ y_0\ z_0$ delle variabili. Si suppone inoltre la continuità delle funzioni F ed f, e delle loro derivate nelle vicinanze di x_0, y_0, z_0. Si vuol esaminare se queste equazioni possano determinare y e z in funzione di x in un'intervallo contenente il valore x_0.

Perciò si osservi che se $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ non è nulla, la prima equazione determina una funzione z di x ed y

$$z = \varphi(x\,,\,y)$$

nelle vicinanze dei valori $x_0\ y_0$, tale che $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ qualunque siano i valori di x e di y, che è continua, e $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$; inoltre z ammette le derivate parziali $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$.

Sostituendo nelle seconda equazione $f=0$, a z la sua funzione di x e di y così definita, essa diventa un'equazione fra x ed y, $f(x, y, \varphi(x, y))=0$, ovvero, ponendo

$$\mathfrak{F}(x, y)=f(x, y, \varphi(x, y)),$$

essa diventa $\mathfrak{F}(x, y)=0$. Il primo membro di questa equazione fra x ed y è funzione continua di x ed y insieme alle sue derivate

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dy}=\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}:$$

l'equazione è soddisfatta dai valori $x_0\ y_0$ delle variabili, perchè

$$\mathfrak{F}(x_0, y_0)=f(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))=f(x_0, y_0, z_0)=0;$$

quindi se $\dfrac{d\mathfrak{F}}{dy}$ non è nullo, esisterà una sola funzione y di x

$$y=\psi(x)$$

data nelle vicinanze di $x=x_0$, continua, tale che $y_0=\psi(x_0)$, che soddisfa all'equazione $\mathfrak{F}(x, \psi(x))=0$, e che ammette derivata. Pongasi infine $\varphi(x, \psi(x))=\chi(x)$; allora la funzione $z=\chi(x)$ sarà pure funzione definita nelle vicinanze di $x=x_0$, continua, e avente derivata, e $\chi(x_0)=\varphi(x_0, \psi(x_0))=\varphi(x_0\ y_0)=z_0$; infine sostituendo nelle equazioni proposte $F=0$ e $f=0$ a y e z le funzioni ψ e χ di x, si ha:

$$F(x, \psi(x), \chi(x))=F[x, \psi(x), \varphi(x, \psi(x))]=0$$

perchè $F[x, y, \varphi(x, y)]=0$ qualunque siano x ed y;

$$f(x, \psi(x), \chi(x))=f[x, \psi(x), \varphi(x, \psi(x))]=\mathfrak{F}(x, \psi(x))=0,$$

ossia le due equazioni proposte, se

$$\frac{dF}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dy}$$

non sono nulle pei valori x_0, y_0, z_0 delle variabili, determinano due funzioni $y = \varphi(x)$ e $z = \chi(x)$ continue, che assumono i valori y_0 e z_0, per $x = x_0$, che soddisfanno alle due equazioni date, e che ammettono derivata.

Essendo uniche le funzioni φ e ψ, che soddisfanno alle condizioni precedenti, altrettanto avviene per le ψ e χ.

La condizione $\frac{d\mathfrak{F}}{dy} \gtrless 0$ si può esprimere mediante le derivate delle funzioni date F e f, e si ha

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dy} = \frac{df}{dy} \quad \frac{df}{dz} \quad \frac{d\varphi}{dy};$$

$\frac{d\varphi}{dy}$ è definito dall'equazione

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

onde si ricava

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dy} \quad \frac{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}},$$

quindi le condizioni $\frac{dF}{dz} \gtrless 0$ e $\frac{d\mathfrak{F}}{dy} \gtrless 0$, si riducono a

$$\frac{dF}{dz} \gtrless 0, \quad e \quad \frac{df}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{dF}{dy} = \begin{vmatrix} \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Ma la seconda condizione è sufficiente per l'esistenza delle funzioni ψ e χ; invero se, non essendo il determinante nullo, fosse $\frac{dF}{dz} = 0$, non potrebbe essere $\frac{df}{dz} = 0$, quindi basta scambiare le due equazioni date fra loro.

115. — La dimostrazione data dell'esistenza delle derivate delle funzioni y e z di x che soddisfano alle equazioni date permette di trovarle.

Queste derivate risultano così espresse in funzione di x, y, z. E se le F e f ammettono le successive derivate parziali, si potranno derivare le espressioni ottenute, e si troveranno le derivate seconde ecc. di y e z rispetto x.

Ma, riconosciuta l'esistenza di queste derivate, si possono ottenere più rapidamente osservando che se si sostituiscono ad y e z le loro funzioni di x in $F(x, y, z)$ e in $f(x, y, z)$, esse diventano due funzioni di x il cui valore è costantemente nullo, onde anche le loro derivate sono nulle. Derivando colla regola delle funzioni composte si ha:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0\,,$$

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0\,,$$

dalle quali equazioni si possono ricavare $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, che vi compaiono linearmente, e si ricavano effettivamente, perchè il determinante formato coi coefficienti delle incognite non è nullo per ipotesi. Derivando una seconda volta si ha:

$$\frac{d^2F}{dx^2}+2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2F}{dx\,dz}\frac{dz}{dx}+2\frac{d^2F}{dy\,dz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+$$
$$+\frac{d^2F}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dF}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=0\,,$$

ed un' altra analoga, in cui invece di F si legge f. Da esse si ricavano $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dx^2}$, e così di seguito.

Il modo di ragionamento che precede si può generalizzare, e trattare la questione più generale che si possa presentare sulle funzioni implicite.

Sistema di n equazioni fra $m+n$ variabili.

116. — *Se un sistema di* n *equazioni fra* $m+n$ *variabili*

$$f_1(x_1 \dots x_m y_1 \dots y_n) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, f_n(x_1 \dots x_m y_1 \dots y_n) = 0$$

è soddisfatto dai valori

$$a_1 \dots . a_m . \quad b_1 \dots . b_n$$

delle variabili, e se sono continue le funzioni $f_1 \dots f_n$ *e le loro derivate parziali prime nelle vicinanze di questi valori, e se infine non è nullo il determinante*

$$I = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dy_1} & \frac{df_1}{dy_2} & \dots\dots & \frac{df_1}{dy_n} \\ \frac{df_2}{dy_1} & \frac{df_2}{dy_2} & \dots\dots & \frac{df_2}{dy_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dy_n} & \frac{df_n}{dy_2} & \dots\dots & \frac{df_n}{dy_n} \end{vmatrix}$$

in cui alle variabili sono dati i valori $a_1 \dots a_m \; b_1 \dots b_n$, *allora esiste uno ed un solo sistema di funzioni* y *delle variabili* x

$$y_1 = \psi_1(x_1 \dots x_m) \,.\,.\,.\,.\,.\, \quad y_n = \psi_n(y_1 \dots x_m)$$

determinate nelle vicinanze dei valori $a_1 \dots a_m$ *delle variabili, che sostituite nelle equazioni date le soddisfanno identicamente qualunque siano i valori delle* x, *che sono continue, ed assumono i valori* $b_1\, b_2 \dots b_n$ *se si dànno alle variabili i valori* $a_1 \dots a_m$. *Esse inoltre ammettono le derivate prime.*

Il determinante I formato colle derivate parziali di primo ordine di $f_1 f_2 \dots f_n$ rispetto alle variabili $y_1 y_2 \dots y_n$ dicesi determinante *funzionale* ovvero Jacobiano delle funzioni f rispetto alle variabili y. Se $n = 1$, il determinante si riduce ad un solo elemento, cioè alla derivata del primo membro dell'unica equazione rispetto alla variabile che si vuol assumere come funzione, ed in questo caso la proposizione fu già dimostrata al N. 111. Quindi la proposizione sarà dimostrata vera in generale, se suppostala vera per un sistema di $n - 1$ equazioni si dimostra che essa sussiste ancora per n equazioni.

Se $I \gtrless 0$ gli elementi dell'ultima verticale non possono essere tutti nulli. Sia p. e. $\frac{df_n}{dy_n} \gtrless 0$; allora l'equazione

$$f_n(x_1\, x_2 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1}\, y_n) = 0$$

determina una ed una sola funzione y_n di $x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1}$

$$y_n = \varphi(x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1})$$

nelle vicinanze dei valori $a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1}$, che soddisfa identicamente all'equazione $f_n = 0$, che è continua, che ammette le derivate prime parziali, e tale che

$$b_n = \varphi(a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1}).$$

Sostituendo ad y_n la funzione φ nelle equazioni $f_1 = 0, \dots f_{n-1} = 0$, si trovano $n - 1$ nuove equazioni fra le variabili $x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1}$ che potremo scrivere:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots\dots \quad F_{n-1} = 0.$$

ponendo

$$F_i(x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1}) = f_i\,[x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1}\, \varphi(x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1})]$$

$$i = 1, 2, \dots n - 1.$$

Queste $n-1$ equazioni fra $m+(n-1)$ variabili sono soddisfatte dai valori $a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1}$ delle variabili, perchè

$$F_i(a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1}) = f_i\,|a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1}\, \varphi(a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1})|$$

$$= f_i(a_1 \dots a_m\, b_1 \dots b_{n-1}\, b_n) = 0$$

e le funzioni F sono continue, ed ammettono derivate parziali di primo ordine, perchè composte mediante la φ che è continua, ed ammette derivate parziali. Inoltre il Jacobiano delle F dipende da quello delle f, come ora vedremo.

Nel determinante I si aggiungano agli elementi della 1ª, 2ª, ... $(n-1)$ª colonna quelli dell'ultima moltiplicati rispettivamente per $\frac{d\varphi}{dy_1}, \frac{d\varphi}{dy_2}, \dots \frac{d\varphi}{dy_{n-1}}$: si avrà:

$$I = \left| \begin{matrix} \frac{df_1}{dy_1} + \frac{df_1}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_1}, & \frac{df_1}{dy_2} + \frac{df_1}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_2}, & \dots\dots & \frac{df_1}{dy_{n-1}} + \frac{df_1}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}, & \frac{df_1}{dy_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dy_1} + \frac{df_n}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_1}, & \frac{df_n}{dy_2} + \frac{df_n}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_2}, & \dots\dots & \frac{df_n}{dy_{n-1}} + \frac{df_n}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_{n-1}}, & \frac{df_n}{dy_n} \end{matrix} \right|$$

Se ora si deriva la funzione F_i $(i = 1, 2, \dots n-1)$ rispetto alla variabile y_j $(j = 1, 2, \dots n-1)$ si ha

$$\frac{dF_i}{dy_j} = \frac{df_i}{dy_j} + \frac{df_i}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_j},$$

e se si deriva la funzione, il cui valore è zero, che risulta da f_n sostituendo ad y_n la funzione φ, si ha

$$\frac{df_n}{dy_1} + \frac{df_n}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_1} = 0 \dots\dots \frac{df_n}{dy_{n-1}} + \frac{df_n}{dy_n}\frac{d\varphi}{dy_{n-1}} = 0,$$

onde sostituendo

$$I = \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dy_1} & \frac{dF_1}{dy_2} & \dots & \frac{dF_1}{dy_{n-1}} & \frac{df_1}{dy_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dF_{n-1}}{dy_1} & \frac{dF_{n-1}}{dy_2} & \dots & \frac{dF_{n-1}}{dy_{n-1}} & \frac{df_{n-1}}{dy_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{df_n}{dy_n} \end{vmatrix} = \frac{df_n}{dy_n} \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dy_1} & \frac{dF_1}{dy_2} & \dots & \frac{dF_1}{dy_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dF_{n-1}}{dy_1} & \frac{dF_{n-1}}{dy_2} & \dots & \frac{dF_{n-1}}{dy_{n-1}} \end{vmatrix},$$

ossia, detto I' il determinante funzionale delle F, si ha

$$I = \frac{df_n}{dy_n} I',$$

e siccome $\frac{df_n}{dy_n}$ non è nullo, ed I non è nullo, si deduce che anche I' è finito e non nullo.

Quindi le equazioni $F_1 = 0, \dots F_{n-1} = 0$ soddisfanno a tutte le condizioni enunciate nella proposizione, ed il loro numero è $n-1$, pel quale numero si è ammessa l'esattezza della proposizione; dunque esisterà uno ed un solo sistema di funzioni

$$y_1 = \psi_1(x_1 \dots x_m), \dots\dots y_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1 \dots x_m)$$

determinate nelle vicinanze dei valori $a_1 \dots a_m$ delle variabili, continue, aventi derivate prime, e che soddisfanno alle equazioni $F = 0$, ossia sarà

$$F_1(x_1 \dots x_m\, \psi_1 \dots \psi_{n-1}) = 0, \dots\dots F_{n-1}(x_1 \dots x_m\, \psi_1 \dots \psi_{n-1}) = 0$$

qualunque siano i valori delle x.

Se in

$$y_n = \varphi(x_1 \dots x_m\, y_1 \dots y_{n-1})$$

si sostituiscono a $y_1 \dots y_{n-1}$ le funzioni ψ, e si pone

$$y_n = \varphi(x_1 \dots x_m\, \psi_1 \dots \psi_{n-1}) = \psi_n(x_1 \dots x_m),$$

anche y_n sarà funzione delle x continua, e avente le derivate parziali di primo ordine.

Quindi le funzioni

$$y_1 = \psi_1(x_1 \dots x_m) \dots\dots y_n = \psi_n(x_1 \dots x_m)$$

sono funzioni date nelle vicinanze dei valori $a_1 \dots a_m$ delle variabili, continue, aventi derivata, che assumono i valori $b_1 \dots b_n$ se si dànno alle variabili i valori $a_1 \dots a_m$, e che soddisfanno alle equazioni $f = 0$, perchè per $i = 1, 2, \dots n-1$ si ha

$$\begin{aligned} f_i(x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_{n-1} \psi_n) &= f_i\left[x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_{n-1} \varphi(x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_{n-1})\right] \\ &= F_i(x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

e per $i = n$

$$f_n(x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_n) = f_n\left[x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_{n-1} \varphi(x_1 \dots x_m \psi_1 \dots \psi_{n-1})\right] = 0$$

ossia soddisfanno a tutte le condizioni del problema.

117. — La dimostrazione dell' esistenza delle derivate delle funzioni ψ permette anche di trovarle; ma, riconosciuta la loro esistenza, si possono trovare più facilmente nel seguente modo. Se nei primi membri delle n equazioni date $f = 0$ si sostituiscono alle y le funzioni ψ si ottengono delle funzioni delle x, che hanno il valore costante zero; quindi anche le loro derivate, che si possono trovare colle regole delle funzioni composte, sono nulle. Derivandole rispetto $x_i (i = 1, 2, \dots m)$ si ha

$$\begin{gathered} \frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_1}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \dots\dots + \frac{df_1}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{df_n}{dx_1} + \frac{df_n}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_n}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \dots\dots + \frac{df_n}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} = 0, \end{gathered}$$

il che costituisce un sistema di n equazioni lineari nelle incognite

$$\frac{dy_1}{dx_1} \quad \frac{dy_2}{dx_1} \dots\dots \frac{dy_n}{dx_1},$$

le quali risultano appieno determinate, perchè il determinante dei coefficienti è il Jacobiano, che non è nullo per ipotesi. Facendo $i = 1, 2, \ldots m$ si trovano m sistemi di n equazioni, da cui si ricavano tutte le derivate parziali del primo ordine. Esse risultano espresse mediante le derivate parziali di primo ordine delle funzioni f, in cui entrano le variabili indipendenti x e le funzioni y. Se le f ammettono le derivate parziali successive, le hanno pure le y, e si potrebbero ottenere derivando le espressioni delle derivate del primo ordine. Ma, in modo più semplice, derivando le equazioni precedenti si ricavano altre equazioni che si possono risolvere rispetto alle derivate dei varii ordini.

Formazione delle equazioni differenziali.

118. — Un'equazione fra variabili indipendenti, loro funzioni, e derivate di queste funzioni dicesi *differenziale*. Tali equazioni si sogliono distinguere in ordinarie, e a derivate parziali secondochè contengono solamente derivate di funzioni d'una variabile, ovvero anche derivate parziali di funzioni di più variabili. Dicesi poi *ordine* d'una equazione differenziale fra una variabile indipendente ed una sua funzione il massimo ordine delle derivate che vi compaiono.

Se y è funzione di x data implicitamente mediante l'equazione

$$f(x, y) = 0,$$

al qual caso si possono pure ridurre le funzioni esplicite, derivando rispetto x si ricava l'equazione differenziale di primo ordine

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

cui soddisfa la funzione y, e che ci servi per determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$. Derivando quest'equazione si ottengono altre equazioni differenziali dei varii ordini (N. 111).

Combinando fra loro l'equazione data e qualcuna delle sue differenziali, si possono ricavare altre equazioni differenziali soddisfatte sempre dalla funzione y, e si può disporre dell'arbitrarietà di tale combinazione per ottenere equazioni semplici, e convenienti ad uno scopo prefisso.

Così ad esempio, se

$$y = X^m,$$

ove X è funzione di x, ed m un numero dato (fratto o incommensurabile), derivando si ha l'equazione

$$y' = m\, X^{m-1}\, X',$$

e moltiplicandola per X, e tenendo conto dell'equazione data, si ricava

$$X y' = m\, y\, X',$$

equazione differenziale di primo ordine, in cui più non comparisce la potenza m di X.

Sia ancora

$$y = \text{arc sen}\, x\,;$$

si ricava

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ossia} \quad y'\sqrt{1-x^2} = 1\,,$$

equazione differenziale di primo ordine in cui più non comparisce la funzione trascendente *arc sen*. Si può anche far sparire il radicale derivando una seconda volta, e si ha

$$y''\sqrt{1-x^2} - y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,,$$

ovvero

$$y''(1-x^2) - x\,y' = 0\,,$$

equazione differenziale di secondo ordine algebrica e razionale rispetto a tutte le variabili, e di primo grado rispetto y' e y''.

119. — Oppure, combinando l'equazione data colle differenziali si possono far sparire delle costanti che comparivano nella equazione, e trovansi per tal modo equazioni differenziali soddisfatte dalla funzione y considerata, e da tutte le funzioni y che si possono ricavare dalla data equazione cambiando il valore alle costanti eliminate.

Per esempio, l'equazione

$$(1) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0\,,$$

che in assi ortogonali è l'equazione d'un cerchio, determina y funzione implicita di x; derivandola si ha

$$(2) \qquad x-a+(y-b)\,y'=0$$

equazione differenziale di primo ordine che non contiene più il parametro r. Combinando insieme le equazioni (1) e (2) si può invece eliminare a, e si ottiene

$$(y-b)^2\,(1+y'^2)-r^2=0$$

ed in modo analogo si potrebbe eliminare b. Ma se si vogliono eliminare ad un tempo più costanti, si derivi la (2), e si ha

$$(3) \qquad 1+y'^2+(y-b)\,y''=0\,,$$

ove mancano a ed r; derivando ancora

$$(4) \qquad 3\,y'\,y''+(y-b)\,y'''=0\,,$$

ed eliminando fra le (3) e (4) la b, o meglio il binomio $y-b$ si ottiene infine

$$(5) \qquad (1+y'^2)\,y'''-3\,y'\,y''^2=0\,,$$

equazione differenziale di terzo ordine cui soddisfa ogni funzione y di x definita dalla (1) qualunque siano i valori di a, b e r.

Eliminazioni analoghe si possono eseguire fra i sistemi d'equazioni differenziali ordinarie, o a derivate parziali ottenute ai N. 113, 115, 117.

120. — Ma, trattandosi di equazioni a derivate parziali si possono eliminare non solo costanti, ma anche funzioni. Sia p. e.,

$$F(u, v) = 0$$

un'equazione fra u e v, che sono funzioni date di tre variabili x, y, z, e quindi una equazione fra x, y e z, che supporremo determini z in funzione di x e di y. Derivando successivamente rispetto x ed y si ha

$$\frac{dF}{du}\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dF}{dv}\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{dx}\right)=0$$
$$\frac{dF}{du}\left(\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy}\right)+\frac{dF}{dv}\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

ed eliminando $\frac{dF}{du}$ e $\frac{dF}{dv}$ che vi compaiono omogeneamente si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx} & \frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy} \\ \frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{dx} & \frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{dy} \end{vmatrix}=0$$

od anche

$$\begin{vmatrix} -\frac{dz}{dx} & -\frac{dz}{dy} & 1 \\ \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \end{vmatrix}=0,$$

equazione contenente le derivate parziali prime di z, e dove scomparve ogni traccia della funzione F.

Funzioni omogenee.

121. — Si dice che

$$u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

è funzione omogenea di grado n delle variabili $x, y, z, \ldots\ldots$ se, qualunque sia t, si ha

$$f(tx, ty, tz, \ldots\ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots\ldots). \tag{1}$$

Così ad esempio,

$$x^2 + y^2, \quad \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \text{e} \quad \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

sono funzioni omogenee di x ed y, di gradi 2, — 1, e 0.

Teorema. — *Le derivate parziali di primo ordine d'una funzione omogenea di grado* n *sono funzioni omogenee di grado* n — 1.

Infatti si derivi rispetto x l'identità che servì per definizione delle funzioni omogenee; si ricava

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots) \frac{d \cdot tx}{dx} = t^n f'_x(x, y, z, \ldots)$$

e, osservando che $\dfrac{d \cdot tx}{dx} = t$, e dividendo per t,

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots) = t^{n-1} f'_x(x, y, z, \ldots)$$

il che dice appunto che f'_x è funzione omogenea di grado $n - 1$.

Di qui si deduce che le derivate di secondo ordine sono funzioni omogenee di grado $n - 2$, ed in generale le derivate d'ordine h sono funzioni omogenee di grado $n - h$.

Teorema (di Eulero). — *In una funzione omogenea la somma dei prodotti delle derivate parziali per le rispettive variabili è eguale alla funzione moltiplicata pel suo grado, e viceversa.*

Infatti si derivi rispetto t l'equazione (1); si ricava

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots)x + f'_y(tx, ty, tz, \ldots)y + f'_z(tx, ty, tz, \ldots)z + \ldots\ldots$$
$$= n t^{n-1} f(x, y, z, \ldots)$$

e posto $t = 1$,

$$f'_x(x, y, z,\ldots)x + f'_y(x, y, z,\ldots)y + f'_z(x, y, z,\ldots)z + \ldots = nf(x, y, z,\ldots)$$

ovvero

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z + \ldots = nu,$$

la quale equazione a derivate parziali costituisce appunto il teorema.

Reciprocamente, se la funzione $f(x, y, \ldots)$ soddisfa all'equazione $f'_x(x, y,\ldots)x + f'_y(x, y,\ldots)y + \ldots = nf(x, y,\ldots)$, qualunque siano i valori delle variabili, ponendo in loro vece tx, $ty, \ldots$ si avrà

$$f_x(tx, ty,\ldots)tx + f_y(tx, ty,\ldots)ty + \ldots = nf(tx, ty,\ldots).$$

Ora la funzione

$$F(t) = \frac{f(tx, ty,\ldots)}{t^n}$$

ha per derivata

$$F'(t) = \frac{t[f'_x(tx, ty,\ldots)x + f'_y(tx, ty,\ldots)y + \ldots] - nf(tx, ty,\ldots)}{t^{n+1}}$$

la quale è nulla, in virtù dell'equazione precedente, e quindi $F(t)$ avrà un valore costante, e sarà $F(t) = F(1)$. Sostituendo qui a $F(t)$ e ad $F(1) = f(x, y,\ldots)$ i loro valori, si ha

$$f(tx, ty,\ldots) = t^n f(x, y,\ldots),$$

ossia la funzione f è omogenea di grado n.

Se si deriva più volte la (1) rispetto a t, e poi si pone $t=1$, si ricava

$$\frac{d^2 u}{dx^2} x^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} y^2 + \ldots + 2 \frac{d^2 u}{dx\, dy} xy + \ldots\ldots = n(n-1) u,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

equazioni a derivate parziali di varii ordini, cui soddisfa la funzione u. Esse sono però conseguenze dei teoremi precedenti, e si possono trovare applicando il teorema di Eulero alle derivate di u.

Determinanti funzionali.

122. — Come già si disse, chiamasi determinante funzionale o Jacobiano di n funzioni $y_1 \ldots y_n$ di n variabili $x_1 \ldots x_n$ il determinante formato colle n^2 derivate parziali di primo ordine delle funzioni

$$I = \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_1}{dx_2} & \ldots\ldots & \frac{dy_1}{dx_n} \\ \frac{dy_2}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_2} & \ldots\ldots & \frac{dy_2}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dy_n}{dx_1} & \frac{dy_n}{dx_2} & \ldots\ldots & \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

e si suol indicare colla notazione

$$I = \frac{D(y_1, y_2, \ldots y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{Dy}{Dx}.$$

Per esempio, se si pone

$$y_1 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

e

$$y_2 = a'x_1^2 + 2b'x_1x_2 + c'x_2^2$$

si ricava

$$\frac{1}{4}\,\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} ax_1 + bx_2 & bx_1 + cx_2 \\ a'x_1 + b'x_2 & b'x_1 + c'x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Se le funzioni y sono le prime derivate d'una funzione u di n variabili, il loro Jacobiano è il determinante delle derivate seconde di u (Hessiano).

Le seguenti proposizioni rendono visibile un'analogia che esso ha colla derivata d'una funzione d'una variabile.

Se $y_1 \ldots y_n$ *sono funzioni di* $u_1 \ldots u_n$, *e queste sono funzioni di* $x_1 \ldots x_n$, *il Jacobiano delle* y *rispetto alle* x *è uguale al Jacobiano delle* y *rispetto alle* u *moltiplicato pel Jacobiano delle* u *rispetto alle* x. (N. 37).

Invero l'elemento (r, s) del determinante $\dfrac{Dy}{Dx}$ vale

$$\frac{dy_r}{dx_s} = \frac{dy_r}{du_1}\,\frac{du_1}{dx_s} + \frac{dy_r}{du_2}\,\frac{du_2}{dx_s} + \ldots\ldots + \frac{dy_r}{du_n}\,\frac{du_n}{dx_s},$$

quindi, per un noto teorema sulla moltiplicazione dei determinanti,

$$\frac{Dy}{Dx} = \frac{Dy}{Du}\cdot\frac{Du}{Dx}. \qquad \text{c. v. d.}$$

Se le variabili y *sono funzioni delle* x, *e se il Jacobiano non è nullo, si possono considerare le* x *funzioni delle* y, *ed i Jacobiani dei due sistemi sono reciproci.* (N. 38).

Invero, considerando le y funzioni di x, e le x funzioni di y, applicando il teorema precedente si ha

$$\frac{Dy}{Dy} = \frac{Dy}{Dx}\cdot\frac{Dx}{Dy};$$

il determinante di sinistra ha gli elementi della diagonale principale che valgono l'unità, e tutti gli altri nulli: onde il suo valore è l'unità, e

$$\frac{Dy}{Dx} \times \frac{Dx}{Dy} = 1, \qquad \text{c. v. d.}$$

Se le funzioni y *delle variabili* x *sono date implicitamente mediante* n *equazioni*

$$f_1(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = 0, \dots\dots f_n(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = 0$$

si ha

$$\frac{Dy}{Dx} = (-1)^n \frac{\frac{Df}{Dx}}{\frac{Df}{Dy}}.$$

(N. 111).

Invero, derivando le equazioni date, considerando le y come funzioni delle x, si ricavano le equazioni

$$-\frac{df_i}{dx_j} = \frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_j} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_j} + \dots\dots + \frac{df_i}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_j}$$

e, formato il determinante colle $-\frac{df_i}{dx_j}$, che vale $(-1)^n \frac{Df}{Dx}$, si riconosce che esso è eguale al prodotto dei determinanti formati colle $\frac{df}{dy}$ e $\frac{dy}{dx}$, ossia

$$(-1)^n \frac{Df}{Dx} = \frac{Df}{Dy} \cdot \frac{Dy}{Dx},$$

donde si ricava la formula a dimostrarsi.

Se il determinante $\frac{Dx}{Dy}$ *è nullo identicamente, e per un sistema di valori speciali delle variabili non sono nulli tutti i suddeterminanti della prima orizzontale, per un intorno dei valori considerati, il valore di una delle* y *dipende dai valori delle altre.* (Confr. N. 46).

Infatti sia p. e., non nullo il suddeterminante di $\frac{dy_1}{dx_1}$; allora dalle equazioni

$$y_2 = \varphi_2(x_1 x_2 \dots\dots x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = \varphi_n(x_1 x_2 \dots\dots x_n)$$

risultano determinate $x_2 \dots x_n$ in funzione di $x_1 y_2 \dots y_n$.

Sostituendo in

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \dots\dots x_n)$$

y_1 diventa funzione di $x_1 y_2 \dots y_n$.

Ora si ha, considerando le $y_1 \dots y_n$ funzioni di $x_1 \dots x_n$ funzioni di $x_1 y_2 \dots y_n$,

$$\frac{D(y_1 y_2 \dots y_n)}{D(x_1 y_2 \dots y_n)} = \frac{D(y_1 y_2 \dots y_n)}{D(x_1 x_2 \dots x_n)} \cdot \frac{D(x_1 x_2 \dots x_n)}{D(x_1 y_2 \dots y_n)};$$

ma

$$\frac{D(y_1 y_2 \dots y_n)}{D(x_1 y_2 \dots y_n)} = \frac{dy_1}{dx_1}; \quad \frac{D(y_1 \dots y_n)}{D(x_1 \dots x_n)} = 0 \qquad \text{per ipotesi},$$

$$\frac{D(x_1 x_2 \dots x_n)}{D(x_1 y_2 \dots y_n)} = \frac{D(x_2 \dots x_n)}{D(y_2 \dots y_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(y_2 \dots y_n)}{D(x_2 \dots x_n)}} = \text{quantità finita},$$

onde $\dfrac{dy_1}{dx_1} = 0$; ossia sostituendo in

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \dots \dots x_n)$$

ad $x_2 \dots x_n$ le loro funzioni di $x_1 y_2 \dots y_n$, y_1 diventa indipendente da x_1, e solo funzione di $y_2 \dots y_n$, c. v. d.

Esercizii.

123. — 1° La funzione

$$\frac{x - y}{x + y}$$

col tendere di x ed y a zero non tende ad alcun limite, ma assume in ogni intorno dei valori (0, 0) ogni valore.

2° — La funzione

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

col tendere di x ed y a zero non tende ad alcun limite, ma assume nelle vicinanze dei valori (0, 0) delle variabili tutti i valori compresi fra -1 e $+1$. In essa

$$\lim_{x=0} f(x, 0) = \lim_{y=0} f(0, y) = 0$$

e se si attribuisce alla funzione il valore 0 quando si faccia $x = 0$ ed $y = 0$ essa è per tutte le coppie di valori di x ed y funzione continua di x e funzione continua di y senz'essere funzione continua di x ed y considerate insieme.

3° — La funzione

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$$

è tale che posto

$$x = ht, \quad y = kt,$$

e facendo tendere t a zero il limite di $f(x, y)$ è sempre zero qualunque siano h e k, ossia se x ed y sono le coordinate cartesiane d'un punto del piano, in qualunque direzione si faccia accostare il punto (x, y) al punto $(0, 0)$ il limite della funzione è sempre zero; tuttavia $f(x, y)$ col tendere di x ed y a zero non tende verso alcun limite, ma in ogni intorno dei valori $(0, 0)$ essa assume tutti i valori compresi fra -1 e $+1$.

4° — La derivata parziale d'un determinante rispetto ad un suo elemento è il suddeterminante complementare di quell'elemento.

5° — La funzione

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ove si faccia $f(0, 0) = 0$, è funzione continua delle variabili x, y, ed ammette le derivate prime

$$f'_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 4y \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f'_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 4x \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

e

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0,$$

che sono pure continue; ma

$$f''_{xy}(0, 0) = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = 1,$$

onde non è lecito scambiare l'ordine delle derivazioni. In questo caso le derivate seconde sono discontinue.

CAPITOLO V.

Applicazioni analitiche.

Espressioni

che si presentano sotto forma indeterminata.

124. FORMA $\frac{0}{0}$. — Il Calcolo differenziale è utile per determinare il limite del quoziente di due funzioni $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando, pel valore speciale x_0 della variabile, il numeratore e denominatore si annullano. Se si ponesse $x = x_0$ nell'espressione di $f(x)$, essa assumerebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; e si suol chiamare vero valore di $f(x_0)$ il limite di $f(x)$ per $x = x_0$.

Supposto adunque $\varphi(x_0) = 0$, $\psi(x_0) = 0$, si può scrivere

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}},$$

e se le funzioni φ e ψ ammettono derivata per $x = x_0$, e $\psi'(x_0)$ non è nullo, passando ai limiti si deduce il limite cercato

$$\lim f(x) = \frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Oppure si può ricorrere alla formula (N. 45)

$$f(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}\ ,$$

ove x_1 è una quantità compresa fra x_0 ed x: si suppone che φ e ψ ammettano derivata nelle vicinanze del valore x_0, e che $\psi'(x)$ non sia nulla. Facendo tendere x ad x_0, anche x_1 tende ad x_0, e se il rapporto delle derivate tende verso un limite, anche il rapporto $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ tende allo stesso limite.

Se quindi avvenisse che ciascheduna delle derivate avesse ancora per limite zero, si applicherebbe al rapporto delle derivate la stessa regola, e si passerà alle seconde derivate, e così via. In generale se per $x=x_0$ si ha

$$\varphi(x_0)=0\,,\quad \varphi'(x_0)=0\,,\ldots\ldots\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0\,,$$
$$\psi(x_0)=0\,,\quad \psi'(x_0)=0\,,\ldots\ldots\ \psi^{(n-1)}(x_0)=0\,,\quad \text{ma}\quad \psi^{(n)}(x_0)\gtrless 0\,,$$

si avrà

$$\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=\ldots\ldots=\lim\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)}=\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)}\,.$$

Lo stesso risultato si può ricavare dalla formula di Taylor. Si ha diffatti

$$\varphi(x_0+h)=\varphi(x_0)+h\,\varphi'(x_0)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0+\theta h)\,,$$

e nella nostra ipotesi

$$\varphi(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0+\theta h)\,,$$

ed analogamente

$$\psi(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(x_0+\theta' h)\,;$$

onde dividendo l'una per l'altra

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)}=\frac{\varphi^{n)}(x_0+\theta h)}{\psi^{n)}(x_0+\theta' h)},$$

e passando al limite

$$\lim_{x=x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{n)}(x_0)}{\psi^{n)}(x_0)}.$$

125. — Finora si è supposto x_0 finito; ma le formule precedenti si possono estendere al caso in cui x tende verso l'infinito.

Se col tendere di x ad ∞, $\lim\varphi(x)=0$, e $\lim\psi(x)=0$, posto $x=\frac{1}{z}$, sarà

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

e col tendere di x ad ∞, z tende a zero, e si può applicare quanto si è detto precedentemente, e si ha, facendo il rapporto delle derivate rispetto z,

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{z=0}\frac{-\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}=\lim_{z=0}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

ossia anche in questo caso il limite del rapporto delle funzioni è eguale al limite del rapporto delle derivate.

Si può osservare che se per $x=\infty$ $\lim\varphi(x)=0$, e se $\varphi'(x)$ tende verso un limite, anch'esso è zero. Infatti se il limite di $\varphi'(x)$ fosse diverso da zero, da un certo valore di x in poi la derivata avrebbe un segno costante, e si manterrebbe numericamente maggiore d'un numero finito A; sia a il valore di x dal quale in poi questo avviene; dalla formula:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(x_1)$$

ove x_1 è compreso fra x ed a, si deduce che col crescere indefinitamente di x $f'(x)$ cresce indefinitamente, e quindi non può avere, contrariamente all'ipotesi, per limite lo zero.

Dal che si deduce che se in $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ si fa $x=\infty$, essa si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, come $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; il che però non impedisce che possa essere di qualche utilità il sostituire alla ricerca del limite di $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}$ quella del limite dell'altra funzione $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

126. Forma $\frac{\infty}{\infty}$. — Sia $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, e suppongasi che col crescere indefinitamente di x $\lim\varphi(x)=\infty$ e $\lim\psi(x)=\infty$. Si vuol dimostrare che se da un certo valore di x in poi $\psi'(x)$ non è nullo, e se il rapporto delle derivate $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ col crescere indefinitamente di x tende ad un limite, tende pure allo stesso limite $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Invero dalle relazioni

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}},\quad \text{e}\quad \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\Psi(x_0)}=\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

ove x_1 è compreso fra x_0 ed x, si ricava

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}\,\frac{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}.$$

Supponiamo $x>x_0$; sarà anche $x_1>x_0$. Potremo quindi fissare x_0 così grande che $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ differisca dal suo limite d'una quantità tanto piccola quanto si voglia; inoltre, fissato x_0, siccome col crescere di x $\lim\varphi(x)=\infty$, e $\lim\Psi(x)=\infty$, $\lim\frac{1-\dfrac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}=1$, e si potrà supporre x così grande che questa quantità differisca dall'unità di tanto poco quanto si vuole, ossia si potrà fare in modo che la differenza fra $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ed il limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ sia piccola ad arbitrio, e quindi

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} .$$

Lo stesso avviene se $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty$, perchè dei due fattori in cui si è decomposto $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ il primo si può rendere grande ad arbitrio, ed il secondo ad arbitrio prossimo all'unità.

Se nel rapporto $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ il numeratore ed il denominatore diventassero infiniti per un valore finito a della variabile, pongasi $x = a + \frac{1}{z}$: si ricava

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)}$$

ed il numeratore e il denominatore diventano infiniti per $z = \infty$, onde si ricava

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim \frac{\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)},$$

ed infine si ha ancora

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} .$$

È però a notarsi in quest'ultimo caso che, se pel valore finito $x = a$ una funzione (come $\varphi(x)$ e $\psi(x)$) diventa infinita, la sua derivata non può tendere verso un limite diverso dall'infinito.

Infatti se $f(x)$ è una funzione la cui derivata $f'(x)$ col tendere di x ad a tende verso un limite finito, od anche solo si mantiene inferiore ad una quantità finita, detto x_0 un valore prossimo ad a, dalla formula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_1)$$

si ricava che col tendere di x ad a anche $f(x)$ si mantiene finito.

127. — Forma $\infty - \infty$. Sia a considerarsi la differenza di due funzioni che per un dato valore di x diventano infinite di segno opposto. Rappresentandole con $\frac{1}{\varphi(x)}$ e $\frac{1}{\psi(x)}$, la loro differenza

$$\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\psi(x)},$$

si potrà scrivere

$$\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

Facendo qui tendere x al valore speciale considerato, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tendono a zero, e questa frazione si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, ed il suo limite si determinerà applicando le regole note.

Forma $0 . \infty$. — Abbiasi il prodotto $\varphi(x)\,\psi(x)$, e si supponga che per un valore speciale di x il primo fattore diventi zero, ed il secondo infinito. Si potrà mettere il prodotto sotto le forme

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

e nella prima espressione si ha un quoziente che prende la forma $\frac{0}{0}$, e nella seconda un quoziente che prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$, quindi siamo nei casi già trattati.

Forme 0^0, 1^∞, ∞^0. — Abbiasi la funzione $\varphi(x)^{\psi(x)}$, ove si suppone $\varphi(x) > 0$, e per un valore speciale di x sia

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0,$$

ovvero

$$\varphi(x) = 1, \qquad \psi(x) = \infty,$$

ovvero

$$\varphi(x) = \infty, \qquad \psi(x) = 0.$$

Prendendo il logaritmo della funzione si ha

$$\log \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \log \varphi(x),$$

e facendo tendere x verso il valore speciale, in ognuno dei tre casi uno dei due fattori di questo prodotto è nullo, e l'altro infinito, onde si ricade nel caso precedente. Determinato il limite del logaritmo, che è il logaritmo del limite, si avrà il limite della funzione passando dai logaritmi ai numeri.

128. — *Esempi.* 1° Determinare il vero valore di

$$y = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \qquad \text{per} \qquad x = a.$$

Facendo il quoziente delle derivate, si ha (N. 120)

$$\lim y = \lim \frac{m x^{m-1}}{n x^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

2° $$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{per} \qquad x = 0.$$

Si ricava

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1.$$

È a notarsi che questo risultato è una verificazione, non una dimostrazione nuova; perchè qui si è derivato sen x, e per dimostrare che la derivata di sen x è cos x ci serviamo appunto della proposizione che $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

3° $\quad y = \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} \quad$ per $\quad x = 0. \qquad \lim y = \frac{\log a - \log b}{\log c - \log d}.$

4° $$y = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x} \qquad \text{per} \quad x = 0.$$

$$\lim \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x} = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = 1.$$

5° $\quad y = \frac{\log(e^x - e^a)}{\log(x - a)} \qquad$ per $\quad x = a \qquad \left(\text{forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim y = \lim \frac{e^x(x-a)}{e^x - e^a} = \lim e^x . \lim \frac{x-a}{e^x - e^a} = e^a \lim \frac{1}{e^x} = 1.$$

6° $\quad y = \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x, \qquad$ per $x = \infty$

(forma $\infty - \infty$).

Posto $x = \frac{1}{z}$, si ha

$$y = \frac{\sqrt[n]{(1 + a_1 z)(1 + a_2 z) \dots (1 + a_n z)} - 1}{z}$$

che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$; e, applicando le regole date,

$$\lim y = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

ossia il vero valore di y è media aritmetica delle a.

7° $\quad y = \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \qquad$ per $\quad x = 0 \qquad$ (forma $\infty - \infty$).

Si può scrivere

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{(\operatorname{sen} x + x \cos x)(\operatorname{sen} x - x \cos x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x\right) \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^2 \operatorname{sen} x}.$$

Facendo tendere x a zero il primo fattore ha per limite 2, onde basterà considerare il secondo fattore, che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, ed applicandovi le regole note si trova che ha per limite $\frac{1}{3}$, onde $\lim y = \frac{2}{3}$.

8°. $\quad y = xe^{-ax} \quad$ (con $a > 0$), per $x = +\infty$. (forma $\infty \times 0$).

La funzione posta sotto la forma $y = \frac{x}{e^{ax}}$, assume la forma $\frac{\infty}{\infty}$, onde

$$\lim y = \lim \frac{1}{ae^{ax}} = 0.$$

9° Sia più generalmente a trovare il limite per $x = +\infty$ di $y = x^m e^{-ax}$, con a ed m positivi. Possiamo ridurci al caso precedente facendo $x^m = z$, onde $x = z^{\frac{1}{m}}$, e $y = ze^{-\frac{a}{m}z}$; facendo tendere x ad ∞ vi tende pure z, e quindi

$$\lim_{x=\infty} x^m e^{-ax} = 0.$$

Posto in questa formula $x = \log z$, si ricava

$$\lim_{z=\infty} \frac{(\log z)^m}{z^a} = 0;$$

e ponendo in essa $z = \frac{1}{t}$ si ha

$$\lim_{t=0} t^a (\log t)^m = 0\,,$$

risultati utili a ricordarsi.

10. $y = x^x$ per $x = 0$. (forma 0^0)

$$\text{Lim } y = 1.$$

11. $y = (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$ per $x = 0$ (forma 1^∞)

$$\text{Lim } y = e^a\,.$$

12. $y = \dfrac{x - \text{sen}\, x}{x + \text{sen}\, x}$ per $x = \infty$ $\left(\text{forma } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Il rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore è

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \text{tang}^2 \frac{1}{2}\, x\,,$$

ed esso, col crescere indefinitamente di x non tende verso alcun limite; di qui non è lecito conchiudere che anche la funzione data manchi di limite. Invero mettendo la funzione sotto la forma

$$y = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}\, x}{x}}{1 + \dfrac{\text{sen}\, x}{x}}\,, \quad \text{si deduce} \quad \lim y = 1.$$

Funzioni di più variabili che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$.

129. — Più difficile è l'esame dei valori che assume il quoziente di due funzioni di più variabili

$$u = \frac{f(x, y, \ldots)}{\varphi(x, y, \ldots)}\,.$$

ove si facciano tendere x, y,... verso i valori x_0, y_0,... per cui si annullano numeratore e denominatore.

Posto $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$,..., u diventa funzione di t che assume la forma $\frac{0}{0}$ per $t = 0$; il suo limite sarà (N. 121)

$$\lim u = \frac{f'_x(x_0, y_0, \ldots) h + f'_y(x_0, y_0, \ldots) k + \ldots}{\varphi'_x(x_0, y_0, \ldots) h + \varphi'_y(x_0, y_0, \ldots) k + \ldots},$$

supposto non nullo il denominatore. Questo limite dipende dai valori di h, k,..., salvochè le derivate parziali di f siano proporzionali a quelle di φ; e quindi u tende verso limiti diversi col tendere in vario modo di x, y,... a x_0, y_0,..., e considerata come funzione di x, y,... non tende ad alcun limite. Se le derivate parziali di f sono proporzionali a quelle di φ, occorre un esame ulteriore per riconoscere l'esistenza, ovvero non, del limite di u.

Se la funzione φ, che è nulla per $x = x_0$, $y = y_0$,..., si annulla ancora per altri valori delle variabili in ogni intorno di x_0, y_0,..., e se f non si annulla per questi valori che annullano φ, il rapporto $\frac{f}{\varphi}$ assume valori comunque grandi, ed anche il valore infinito in ogni intorno di x_0, y_0,..., e quindi u non può tendere verso un limite finito.

I criterii che seguono possono servire a riconoscere se φ si annulli ancora, ovvero non, in ogni intorno di x_0, y_0,..., eccettuati questi valori; ed in questo caso se u tenda o non tenda ad un limite. Ci occorrerà premettere alcune nozioni sulle forme algebriche.

130. — Dicesi *forma* di n$^{\text{no}}$ grado una funzione algebrica razionale intera e omogenea di più variabili.

Per esempio, sviluppando colla formula di Taylor

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$$

i successivi termini sono negli incrementi h, k,... forme di gradi 0, 1, 2,.....

Una forma dicesi *definita* se si annulla solo quando si annullano ad un tempo tutte le variabili.

Tale per es., è la forma $x^2 + y^2 + z^2$.

Una forma dicesi *indefinita* se può assumere valori di segno contrario. Tale è per es., ogni forma di grado dispari non identicamente nulla, perchè attribuendo alle variabili prima un sistema di valori per cui la forma non sia nulla, poi gli stessi valori cambiati di segno, la forma assume valori eguali e di segno contrario.

Una forma è funzione continua delle variabili, e se assume valori di segno contrario, si annulla per infiniti gruppi di valori delle variabili (N. 100, teor. 4°); ossia una forma indefinita non può essere definita, od anche una forma non può essere ad un tempo definita ed indefinita. Ma una forma potrebbe anche essere nè definita nè indefinita, il che avviene quando essa si annulla per valori non tutti nulli delle variabili, senza cambiare di segno.

Teorema 1°. — *Se* ψ (x, y,...) *è una forma definita di grado* n, *e* ω (x, y,...) *è una forma qualunque dello stesso grado, il rapporto* $\frac{\omega}{\psi}$ *ha un massimo ed un minimo finiti.*

Infatti $\frac{\omega(x, y, \ldots)}{\psi(x, y, \ldots)}$ è funzione omogenea di grado zero in $x, y, \ldots$, ed il suo valore non si altera moltiplicando tutte le variabili per una stessa quantità. Ma con questa moltiplicazione si può supporre che le variabili soddisfino alla equazione

$$\varpi = x^2 + y^2 + \ldots\ldots - 1 = 0,$$

perchè ove non vi soddisfacessero, basterebbe moltiplicarle per la quantità finita $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\ldots}}$. Dunque i valori che assume $\frac{\omega}{\psi}$ attribuendo alle variabili tutti i valori, sono gli stessi che i valori assunti attribuendo alle variabili solamente i valori appartenenti al campo definito dall'equazione $\varpi = 0$. Ora questo campo è finito, perchè ogni variabile risulta compresa fra -1 e $+1$; ogni punto limite del campo appartiene al campo stesso, perchè se valori comunque prossimi ad $X, Y, \ldots$ soddisfano all'equazione $\varpi = 0$, a causa della continuità della funzione ϖ anche $X, Y, \ldots$ soddisfano a questa equazione; infine a questo campo non appartiene il punto (0, 0,..), pel quale solo si annulla ψ. Quindi in tutto il campo le funzioni ω e ψ sono continue, e ψ mai nulla; e il loro quoziente $\frac{\omega}{\psi}$ è pure funzione finita e continua; quindi (N. 100 teor. 6°) esistono il massimo ed il minimo dei valori di $\frac{\omega}{\psi}$, ed essi sono finiti.

Teorema 2°. — *Se* ψ (x, y,...) *è una forma definita di grado* n, *ed* ω (x, y,...) *è una funzione che si può mettere sotto la forma di un polinomio omogeneo in* x, y,... *di grado* n, *i cui coefficienti dipendano ancora da queste variabili ed abbiamo per limite zero col tendere delle variabili a zero, anche* $\frac{\omega}{\psi}$ *ha per limite zero.*

Infatti ω è la somma di più termini della forma $Cx^\alpha y^\beta \ldots$, ove $\alpha+\beta+\ldots=n$, e C è funzione di $x, y, \ldots$ avente per limite zero. Quindi $\frac{\omega}{\psi}$ è la somma di più termini della forma

$$C \frac{x^\alpha y^\beta}{\psi(x, y, \ldots)} .$$

In questo prodotto il primo fattore C ha per limite zero: il secondo è compreso fra limiti finiti, perchè è il rapporto d'una forma di grado n ad una forma definita dello stesso grado; quindi quel termine ha per limite zero, e

$$\lim \frac{\omega}{\psi} = 0 .$$

Teorema 3° — *Se nella formula di Taylor per le funzioni di più variabili il termine che contiene omogeneamente al grado* n *gli incrementi delle variabili è una forma definita, facendo tendere a zero gli incrementi delle variabili, il rapporto del resto dopo quel termine al termine stesso ha per limite zero, e il rapporto del resto prima di quel termine al termine stesso ha per limite uno.*

Infatti, conservando le notazioni della pag. 147, e detti R_n ed R_{n+1} i resti prima e dopo il termine considerato, si avrà

$$F(1) = F(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta)$$

$$F(1) = F(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + R_{n+1} ,$$

onde si ricava

$$R_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta) . \qquad R_{n+1} = \frac{1}{n!} \left[F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0) \right] ,$$

e

$$\frac{R^{n+1}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} .$$

Il numeratore della frazione di destra è un polinomio omogeneo di grado n

negli incrementi delle variabili, i cui coefficienti dipendono ancora da questi incrementi, ed hanno la forma

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta \dots}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, \dots) - f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta \dots}(x_0, y_0, \dots),$$

e col tendere di h, $k, \dots$ a zero, il loro limite è zero; quindi pel teorema precedente,

$$\frac{R^{n+1}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = \lim \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} = 0 .$$

E dall'essere

$$\lim \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} = 0 ,$$

si deduce

$$\lim \frac{F^{(n)}(\theta)}{F^{(n)}(0)} = 1 ,$$

ossia

$$\frac{R_{(n)}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = 1 .$$

Teorema 4° — *Se la funzione* f(x, y,...) *si annulla pei valori* x_0, $y_0, \dots$ *e, sviluppando* f *colla formula di Taylor, il primo termine non identicamente nullo è una forma indefinita negli incrementi delle variabili, in ogni intorno di* x_0, $y_0, \dots$ *la funzione assume valori di segno contrario, e si annulla.*

Invero, supposta nulla la funzione e le sue derivate d'ordine minore di n, la formula di Taylor dà

$$f(x_0 + th, y_0 + tk, \dots) = F(t) = \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(\theta t) .$$

Ora $F^{(n)}(0)$ è una forma indefinita in h, $k, \dots$; quindi si possono dare ad esse valori tali che $F^{(n)}(0)$ risulti positivo, ovvero negativo. Supposto nella formula precedente $t > 0$, e facendolo tendere a zero, $F^{(n)}(\theta)$ tende a $F^{(n)}(0)$, ossia verso un limite che è, a seconda della scelta di h, $k, \dots$ positivo o negativo; quindi anche $F(t)$ è a nostro arbitrio positivo o negativo, e la funzione data assume in vicinanza di x_0, $y_0, \dots$ valori positivi e valori negativi; ed a causa della sua continuità, essa si annulla infinite volte.

Teorema 5° — *Se la funzione* $f(x, y, \ldots)$ *si annulla pei valori* $x_0, y_0, \ldots$ *e nello sviluppo colla formula di Taylor il primo termine non identicamente nullo è una forma definita negli incrementi delle variabili, in un conveniente intorno di* $x_0, y_0, \ldots$ *e per i valori delle variabili diversi da questi, la funzione non è nulla, e conserva un segno costante.*

Infatti, se sono nulle le derivate d'ordine minore di n, nella formula di Taylor, $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ si riduce al solo resto R_n prima dell'n^{mo} termine; e siccome questo è forma definita, e pel teorema 3° il rapporto di R_n al termine n^{mo} ha per limite 1, si deduce che il rapporto di $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ al termine n^{mo} ha per limite 1, ossia $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ è per valori di $h, k, \ldots$ sufficientemente piccoli dello stesso segno del termine di grado n.

Teorema 6°. — *Posto*

$$f(x, y, \ldots) = f_0 + f_1 + \ldots\ldots f_p + r_{p+1}$$
$$\varphi(x, y, \ldots) = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots\ldots \varphi_q + \rho_{q+1},$$

ove f_i e φ_j *sono funzioni omogenee in* $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$ *di gradi eguali al loro indice, ed ottenute applicando la formula di Taylor, se i primi termini non nulli negli sviluppi di* f *e* φ *sono* f_m e φ_n, *e se* φ_n *è forma definita negli incrementi delle variabili, posto* $u = \dfrac{f}{\varphi}$, *e facendo tendere* $x, y, \ldots$ *a* $x_0, y_0, \ldots$, *si ha:*

1° — *Se* $m > n$, *lim* $u = 0$;

2° — *Se* $m = n$, u *oscilla entro limiti finiti, e tende verso un limite* L *se qualunque siano gli incrementi delle variabili*

$$f_n = L\,\varphi_n.$$

3° — *Se* $m < n$, u *non tende ad un limite finito.*

Infatti, se $m > n$, si può scrivere

$$u = \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{\dfrac{r_n}{\varphi_n}}{\dfrac{\rho_n}{\varphi_n}}.$$

Facendo tendere gli incrementi delle variabili a zero, $\lim \dfrac{\rho_n}{\varphi_n} = 1$ pel teorema 3°, ed $\dfrac{r_n}{\varphi_n}$ è il rapporto alla forma definita φ_n d'una funzione omogenea di grado n negli incrementi delle variabili, i cui coefficienti dipendono ancora da essi, ed hanno per limite zero, onde $\lim \frac{r_n}{\varphi_n} = 0$, e $\lim u = 0$.

Se $m = n$, si avrà

$$u = \frac{f_n + r_{n+1}}{\rho_n} = \frac{\frac{f_n}{\varphi_n} + \frac{r_{n+1}}{\varphi_n}}{\frac{\rho_n}{\varphi_n}};$$

e facendo tendere gli incrementi delle variabilli a zero, $\lim \frac{\rho_n}{\varphi_n} = 1$, $\lim \frac{r_{n+1}}{\varphi_n} = 0$, perchè il numeratore, che è funzione omogenea di grado $n+1$ negli incrementi, i cui coefficienti dipendono ancora dai medesimi, e sono finiti, si può considerare come una funzione omogenea di grado n, i cui coefficienti sono ancora funzioni omogenee di primo grado, ed hanno per limite zero. Infine $\frac{f_n}{\varphi_n}$ varia fra limiti finiti che sono il massimo M e il minimo m valore di $\frac{f_n}{\varphi_n}$ (pel teorema 1°); quindi anche u varia entro limiti finiti tanto prossimi quanto si vuole ad M ed m, e non tenderà verso alcun limite, salvochè $M = m$. In questo caso, detto L il loro valore comune, sarà identicamente $\frac{f_n}{\varphi_n} = L$, ossia $f_n = L\,\varphi_n$, e $\lim u = L$

Se infine $m < n$, posto

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk, \ldots..) \quad \text{e} \quad \Phi(t) = \varphi(x_0 + th, y_0 + tk, \ldots..),$$

si avrà

$$\frac{F(t)}{\Phi(t)} = \frac{\frac{t^m}{m!} F^{(m)}(\theta t)}{\frac{t^n}{n!} \Phi^{(n)}(\vartheta t)} = \frac{1}{t^{n-m}} \, \frac{n!}{m!} \, \frac{F^{(m)}(\theta t)}{\Phi^{(n)}(\vartheta t)};$$

e facendo tendere t a zero, l'ultimo fattore tende al limite finito $\frac{F^{(m)}(0)}{\Phi(0)}$, che non è nullo, se si sono scelti $h, k, \ldots$ in modo che non sia nullo il numeratore, onde u tende verso l'infinito, e non può tendere ad un limite finito.

Massimi e minimi
delle funzioni d'una variabile.

131. — Diremo che una funzione $f(x)$, data in un intorno del valore x_0, diventa *massima* per $x = x_0$ se si può determinare un intervallo $x_0 - h$, $x_0 + h$ in modo che per ogni valore di x in esso sia

$$f(x_0) \geqq f(x).$$

Diremo che $f(x)$ diventa *minima* per $x = x_0$, se per ogni valore di x d'un intervallo $x_0 - h$, $x_0 + h$ si ha

$$f(x_0) \leqq f(x).$$

I massimi e minimi così definiti dipendono dalla successione dei valori della funzione, e li diremo anche *assoluti*. Una funzione può avere parecchi di tali massimi e minimi, anche fra loro diseguali, ed anche minimi più grandi di massimi. Essi sono a distinguersi dal massimo e minimo valore d'una funzione relativamente ad un dato intervallo (a, b) definiti al N. 21, e che diremo *relativi*, od anche *il più grande* e *il più piccolo* dei valori della funzione: questi dipendono dal sistema di valori assunti dalla funzione, e non dall'ordine in cui si susseguono.

Se per $x = x_0$ la funzione $f(x)$ ammette derivata $f'(x_0)$ positiva, la funzione è crescente (N. 43), ed i suoi valori sono rispettivamente minori o maggiori di $f(x_0)$, secondochè x è minore o maggiore di x_0, purchè sufficientemente prossimo; quindi la funzione non è per $x = x_0$ nè massima nè minima. Lo stesso avviene se $f'(x)$ è negativo; onde:

Se per $x = x_0$ *la funzione* $f(x)$ *ha derivata non nulla, per questo valore la funzione non è nè massima nè minima.*

Quindi, scartati dal sistema di valori di x quelli cui corrisponde una derivata (determinata, finita) non nulla, rimangono quelli per cui la funzione non ha derivata, od ha derivata nulla, pei quali la funzione può diventare massima o minima, e per essi occorre uno studio ulteriore per accertarsi dell'esistenza ovvero no dell'uno o dell'altro. Non daremo regole nei casi in cui manchi la derivata. Supposta la derivata nulla, possono servire le seguenti.

Se $f(x)$ ammette derivata $f'(x)$ in un intervallo $x_0 - h$, $x_0 + h$, si ha la formula

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_1),$$

ove x_1 è compreso fra x_0 ed x.

Se $f'(x)$, annullandosi per $x = x_0$, assume valori positivi per $x < x_0$, e valori negativi per $x > x_0$, comunque si supponga $x \gtrless x_0$ sarà sempre $(x - x_0) f'(x_1)$ negativo, onde $f(x) < f(x_0)$, e la funzione è massima per $x = x_0$. Se invece $f'(x)$ è negativa per $x < x_0$, e positiva per $x > x_0$, il prodotto $(x - x_0) f'(x_1)$ è sempre positivo, e la funzione è minima per $x = x_0$. Se poi $f'(x)$ conserva un segno costante nelle vicinanze di $x = x_0$, il prodotto $(x - x_0) f'(x_1)$ cambia segno secondochè $x \gtrless x_0$, e la funzione non è massima nè minima. Quindi si ha:

La funzione $f(x)$ *è massima, ovvero minima per* $x = x_0$, *se la sua derivata, annullandosi per questo valore, passa dal campo positivo al negativo, ovvero dal negativo al positivo. Non si ha nè l'uno nè l'altro se la derivata non cambia segno.*

Invece di considerare il segno della derivata nelle vicinanze di x_0 basta considerare il segno della seconda derivata per $x = x_0$, e si ha la regola:

La funzione $f(x)$ *è massima, ovvero minima per* $x = x_0$ *se, supposto* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0)$ *è negativo o positivo.*

Invero, se $f''(x_0) < 0$, $f'(x)$ è decrescente, ed essendo nulla per $x = x_0$, passa dal campo positivo al negativo; succede l'opposto se $f''(x_0) > 0$.

Questa regola ci lascia in dubbio se $f''(x_0) = 0$. Supposto in generale che per $x = x_0$ sia

$$f'(x_0) = 0\,, \quad f''(x_0) = 0\,, \ldots\ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \gtrless 0\,,$$

ricorrendo alla formula di Taylor si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_1)$$

con x_1 compreso fra x ed x_0; supposta, per semplicità di ragionamento, continua $f^{(n)}(x)$, essa conserva un segno costante variando x nelle vicinanze di x_0; se n è impari il fattore $(x - x_0)^n$ cambia segno secondochè $x \gtrless x_0$, onde cambia pure segno $f(x) - f(x_0)$, e non si ha nè massimo nè minimo; se n è pari, il fattore $(x - x_0)^n$ è positivo, ed $f(x) - f(x_0)$ ha il segno costante di $f^{(n)}(x_0)$; quindi la funzione sarà massima, ovvero minima secondochè $f^{(n)}(x_0)$ è negativa o positiva. Onde:

Se per $x = x_0$ si annullano la prima, e alcune delle successive derivate, la funzione non sarà, ovvero sarà massima o minima secondochè la prima derivata non nulla è d'ordine dispari, o pari; in questo caso si avrà un massimo od un minimo a seconda del segno negativo o positivo della prima derivata non nulla.

132. — Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo finito (a, b), esistono il massimo e minimo dei valori della funzione relativi a questo intervallo. L'uno e l'altro di essi può corrispondere a un valore estremo dell'intervallo (a, b), o a un valore medio; in quest'ultimo caso il massimo e il minimo relativo sono anche massimi e minimi assoluti della funzione; onde il massimo e il minimo relativo corrispondono o agli estremi dell'intervallo, o a quei valori di x che rendono la funzione massima o minima assolutamente.

Se l'intervallo entro cui varia x è infinito $|(a, \infty)$, ovvero $(-\infty, b)$, ovvero $(-\infty, +\infty)|$, la funzione può mancare di massimo o minimo, avendo, ovvero non, limiti superiore ed inferiore.

Esempi: — 1° Decomporre un numero in due parti in modo che il loro prodotto sia massimo.

Sia a il numero dato, x e $a-x$ le due parti, $y=x(a-x)$ il loro prodotto; considerando x come variabile, si ha

$$y' = a - 2x$$

che si annulla pel solo valore $x = \frac{a}{2}$; inoltre $y'' = -2$; quindi la funzione y ha un massimo assoluto per $x = \frac{a}{2}$, ossia quando si decomponga il numero dato in parti eguali: ed $y = \frac{a^2}{4}$. Esso poi è il più grande valore che assume y, perchè la derivata y' è positiva per $x < \frac{a}{2}$, e negativa per $x > \frac{a}{2}$, ossia nell'intervallo $-\infty, \frac{a}{2}$ la funzione è crescente, nel secondo $\frac{a}{2}, +\infty$ è decrescente.

La funzione non ammette nè minimo, nè limite inferiore.

$$2^\circ \quad — \qquad y = x^x \qquad (x > 0).$$

Derivando si ha

$$y' = x^x (1 + \log x).$$

Il primo fattore non si annulla mai, ed è sempre positivo; il secondo si annulla se $\log x = -1$, ossia $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$, ed annullandosi passa dai valori negativi che assume per $x < \frac{1}{e}$ a valori positivi; onde la funzione presenta un minimo assoluto per $x = \frac{1}{e} = 0{,}36788\ldots$, ed il minimo è $y = 0{,}67641\ldots$; esso è anche il più piccolo valore che possa assumere la funzione nell'intervallo $(0, \infty)$. La funzione non ha nè massimo, nè limite superiore.

$$3^\circ — \qquad y = x^{\frac{2}{3}}; \qquad \text{si ha} \qquad y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

La derivata non è nulla per alcun valore di x, ma è infinita per $x = 0$; per questo valore $y = 0$, e la funzione diventa effettivamente minima sia assolutamente, che relativamente all'intervallo $(-\infty, +\infty)$, perchè dando ad x un altro valore qualunque il valore della funzione è sempre maggiore di zero. La funzione non ha nè massimo nè limite superiore.

Massimi e minimi
delle funzioni di più variabili.

133. — Si dice che $u = f(x, y, z \ldots)$ diventa massima, ovvero minima pei valori $x_0\, y_0\, z_0 \ldots$ delle variabili, se per un conveniente intorno di questi valori si ha sempre

$$f(x_0\, y_0\, z_0 \ldots) \geqq f(x, y, z, \ldots)$$

ovvero

$$f(x_0\, y_0\, z_0 \ldots) \leqq f(x, y, z, \ldots).$$

Si consideri la funzione della sola x

$$f(x, y_0, z_0, \ldots):$$

se u diventa massima o minima per $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ questa funzione lo diventa per $x = x_0$; quindi la sua derivata $f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots)$, se esiste, è nulla. In modo analogo si può ragionare per le altre variabili, e si deduce:

Se u $= f(x, y, z, \dots)$ *diventa massima o minima pei valori* $x_0, y_0, z_0 \dots$, *corrispondentemente a questi valori le derivate parziali di* u, *se esistono, sono nulle.*

134. — Pongasi

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \dots\dots$$

e

$$F(t) = f(x, y, z, \dots\dots).$$

Se u diventa massima o minima pei valori $x_0\, y_0\, z_0 \dots$, lo stesso avviene di $F(t)$ per $t = 0$.

Ora, se $f(x, y, z, \dots)$ ammette le derivate prime continue, la funzione $F(t)$ ammette derivata finita

$$F'(t) = f'_x(x, y, z, \dots)h + f'_y(x, y, z, \dots)k + f'_z(x, y, z, \dots)l + \dots,$$

e quindi dovrà essere

$$F'(0) = f'_x(x_0, y_0, z_0 \dots)h + f'_y(x_0, y_0, z_0, \dots)k + \dots = 0$$

qualunque siano i valori di $h, k, \dots$; ed affinchè questa condizione sia soddisfatta dovrà essere

$$f'_x(x_0, y_0, \dots) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0, \dots) = 0, \dots\dots$$

come già si è trovato.

Supposto poi che f ammetta derivate parziali di secondo ordine continue, si ha

$$F''(t) = f''_{xx}(x, y, \dots)h^2 + f''_{yy}(x, y, \dots)k^2 + \dots\dots$$
$$+ 2f''_{xy}(x, y, \dots)hk + \dots\dots;$$

e se u diventa massima ovvero minima pei valori considerati, altrettanto avviene per $F(t)$ per $t = 0$, quindi è necessario pel massimo che

$$F''(0) \leqq 0$$

pel minimo che

$$F''(0) \geqq 0 ,$$

qualunque siano h, k, ..., ossia

Affinchè la funzione u *possa diventare massima, ovvero minima pei valori* x_0 y_0... *delle variabili che annullano le derivate prime, è necessario che la funzione omogenea di secondo grado in* h, k,...

$$F''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0, \ldots) h^2 + f''_{yy}(x_0, y_0, \ldots) k^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2 f''_{xy}(x_0, y_0, \ldots) h k + \ldots\ldots$$

non assuma rispettivamente valori positivi, ovvero negativi, qualunque siano h, k, l,...

135. — *Se per* $x = x_0$, $y = y_0$,... *si annullano tutte le derivate parziali d'ordine minore di* n *della funzione* $u = f(x, y \ldots)$, *e se, sviluppando* $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ *colla formula di Taylor, il termine che contiene* h, k,... *omogeneamente al grado* n *è forma indefinita,* u *non è nè massimo nè minimo pei valori* x_0, y_0,... *delle variabili. Se invece questo termine è forma definita positiva,* u *è minima, e se forma definita negativa* u *è massima.*

Infatti, applicando i teoremi 4° e 5° del N. 130 alla funzione

$$v = f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots),$$

se il termine considerato è forma indefinita, in ogni intorno di x_0, y_0,... v assume valori positivi e negativi. e $f(x, y, \ldots)$ valori maggiori e minori di $f(x_0, y_0, \ldots)$ onde la funzione u non è nè massima nè minima. Se invece esso è forma definita positiva sarà in un certo intorno di x_0, y_0,... $v > 0$, ossia

$$f(x, y, \ldots) > f(x_0, y_0, \ldots)$$

e la funzione u è minima per $x = x_0$, $y = y_0$,... In modo analogo si ragionerebbe se il termine considerato fosse forma definita negativa.

136. — Ecco un criterio per riconoscere se una data funzione omogenea di secondo grado $\psi(h, k, l, \ldots)$ è forma definita positiva, ossia se, qualunque siano i valori attribuiti ad h, k,... essa assume valori positivi, e mai nulli, salvochè si annullino ad un tempo tutte le variabili.

Se la ψ dipende da una variabile sola h, sarà $\psi = Ah^2$, ed essa sarà positiva, e nulla solo quando si annulli h, se $A > 0$.

Se ψ dipende da due variabili h e k, sarà

$$\psi = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 ;$$

e se essa è forma definita positiva, posto $k = 0$, ed h non nullo, ψ assume il valore Ah^2 che deve essere positivo e non nullo, onde deve essere

$$A > 0 :$$

ψ si può mettere sotto la forma

$$\psi = \frac{1}{A} \left[(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2) k^2 \right],$$

e se si dispone di h in modo che $Ah + Bk = 0$, ψ assume il valore positivo e non nullo $\frac{1}{A}(AC - B^2) k^2$; ed affinchè ciò avvenga è necessario che

$$AC - B^2 > 0.$$

Le condizioni $A > 0$ e $AC - B^2 > 0$, necessarie affinchè ψ sia forma quadratica definita positiva, sono anche sufficienti; invero, se k non è nullo, sarà

$$(AC - B^2) k^2 > 0, \quad \text{e} \quad (Ah + Bk)^2 \geqq 0,$$

onde la loro somma è positiva e $\psi > 0$; se k è nullo, non sarà nullo h, e quindi ψ si riduce a Ah^2, quantità positiva.

In generale, se ψ dipende da più variabili, h, k, l,..., si potrà scrivere

$$\psi = Ah^2 + 2Bh + C,$$

dove A è una costante, B è funzione omogenea di primo grado in k, l,... e C è funzione omogenea di secondo grado delle stesse quantità. Se si annullano k, l,... senza annullare h, si annullano B e C, e ψ assume il valore Ah^2, che è positivo per ipotesi, onde

$$A > 0.$$

La forma ψ si può scrivere

$$\psi = \frac{1}{A} \left[(Ah + B)^2 + (AC - B^2) \right],$$

ed $AC - B^2$ è funzione omogenea di secondo grado in $k, l, \ldots$ Dando a queste variabili valori qualunque non tutti nulli, e ad h un valore tale che $Ah + B = 0$, ψ assume il valore $\frac{1}{A}(AC - B^2)$ che è positivo e non nullo, quindi deve essere positiva e non nulla l'espressione $AC - B^2$: ossia, posto $\psi_1(k, l, \ldots) = AC - B^2$, ψ_1 è funzione omogenea di $k, l, \ldots$ che è sempre positiva e mai nulla, salvochè si annullino tutte le variabili.

Quindi le condizioni necessarie affinchè ψ sia forma definita positiva sono: 1° $A > 0$; 2° $AC - B^2$ sia forma definita positiva delle variabili $k, l, \ldots$.

Queste condizioni sono sufficienti. Invero se si attribuisce ad h un valore arbitrario, e a $k, l, \ldots$ valori arbitrarii non tutti nulli, dei due termini in cui si è decomposto ψ il primo è positivo o nullo, ed il secondo positivo, onde $\psi > 0$. Se invece si attribuiscono a $k, l, \ldots$ valori tutti nulli, h non sarà nullo, e ψ assume il valore Ah^2, che è positivo.

In tal modo, per riconoscere se una forma quadratica sia definita positiva siamo ridotti a riconoscere se abbia la stessa proprietà un'altra forma quadratica contenente una variabile di meno. Così continuando saremo ridotti ai casi già studiati con una o due variabili.

Si riconosce se una forma ψ sia definita negativa, se $-\psi$ è forma definita positiva.

Esempi.

137. — Spesso si domanda il massimo od il minimo valore relativo d'una funzione, cioè il più grande o il più piccolo valore d'una funzione mentre le variabili variano in un dato campo finito od infinito. E se esso corrisponde ad un sistema di valori interni al campo dato, corrispondentemente a questo sistema di valori la funzione diventa massima o minima, nel senso definito, cioè assolutamente.

Vogliasi per es. decomporre un numero positivo a in p parti positive in modo che il prodotto delle potenze positive $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$ di queste parti sia massimo.

Dette $x, y, \ldots u$, $a - x - y - \ldots - u$ queste parti, e posto

$$U = x^\alpha y^\beta \ldots u^\lambda (a - x - y - \ldots - u)^\mu,$$

trattasi di rendere massima la funzione U, o ciò che fa lo stesso, il suo logaritmo neperiano. Annullando quindi le derivate parziali di $\log U$, si ha

$$\frac{d \log U}{dx} = \frac{\alpha}{x} - \frac{\mu}{a - x - y - \ldots - u} = 0,$$

$$\frac{d \log U}{dy} = \frac{\beta}{y} - \frac{\mu}{a - x - y - \ldots - u} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d \log U}{dy} = \frac{\lambda}{u} - \frac{\mu}{a - x - y - \ldots - u} = 0,$$

le quali equazioni si possono pure scrivere

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \ldots = \frac{u}{\lambda} = \frac{a - x - y - \ldots - u}{\mu} = \frac{a}{\alpha + \beta + \ldots + \lambda + \mu},$$

dove l'ultimo termine si ottiene componendo le proporzioni precedenti. Quindi, detti x_0, $y_0, \ldots u_0$ i valori delle variabili che soddisfanno a queste equazioni, si ricava

$$x_0 = a \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \ldots + \mu}, \quad y_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \ldots + \mu}, \ldots, u_0 = a \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \ldots + \mu}.$$

e $$a - x_0 - y_0 - \ldots - u_0 = a \frac{\mu}{\alpha + \beta + \ldots + \mu},$$

ed il valore corrispondente di U, che diremo U_0 sarà

$$U_0 = a^{\alpha + \beta + \ldots + \mu} \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta \ldots \lambda^\lambda \mu^\mu}{(\alpha + \beta + \ldots + \mu)^{\alpha + \beta + \ldots + \mu}}.$$

Per riconoscere che U_0 è il più grande dei valori di U si potrebbe dimostrare che U diventa effettivamente massima per un sistema di valori $x_0, y_0, \ldots$ delle variabili, che questo è interno al campo considerato; e che per essi si debbono annullare le derivate di $\log U$; ma queste derivate non si annullano che pei valori precedentemente trovati; dunque essi sono i valori che rendono massima U.

Oppure, ricorrendo alla formula di Taylor, se $x, y, \ldots u$ è un altro sistema di valori positivi delle variabili, corrispondentemente a cui sia anche positivo $a - x - y - \ldots - u$, lo stesso avverrà per i valori

$$x_0 + t(x - x_0), \quad y_0 + t(y - y_0), \ldots \; u_0 + t(u - u_0),$$

ove t è una variabile compresa fra 0 ed 1; quindi $\log U$ avrà le derivate parziali prime e seconde finite e continue, e osservando che le derivate prime si annullano pei valori $x_0, y_0, \ldots$ delle variabili, si avrà:

$$\log U = \log U_0 - \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha(x - x_0)^2}{x_1^2} + \frac{\beta(y - y_0)^2}{y_1^2} + \ldots + \frac{\lambda(u - u_0)^2}{u_1^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu(x + y + \ldots + u - x_0 - y_0 - \ldots - u_0)^2}{(a - x_1 - y_1 - \ldots - u_1)^2}\right]$$

dove $x_1, y_1, \ldots u_1$ sono valori delle variabili della forma

$$x_0 + \theta(x - x_0), \quad y_0 + \theta(y - y_0), \ldots \; u_0 + \theta(u - u_0)$$

con $0 < \theta < 1$. La quantità entro parentesi è positiva, e non nulla, supposto che il sistema $x, y, \ldots u$ non coincida col sistema $x_0, y_0, \ldots u_0$; quindi

$$\log U < \log U_0$$

e

$$U < U_0,$$

ossia effettivamente U_0 è il massimo valore che può assumere U.

Si osservi che U diventa minimo $= 0$ se è nulla qualcuna delle parti in cui è decomposta a. Se a queste parti si dànno anche valori negativi, potrebbe avvenire che U_0 non sia il più grande dei valori di u.

138. — Vogliansi i massimi o minimi della funzione

$$u = F(x, y, z)$$

le variabili essendo legate dalla relazione

$$f(x, y, z) = 0.$$

Se da questa equazione si ricava z in funzione di x ed y, e si sostituisce nella prima, u sarà una funzione di x ed y ed i valori delle variabili che rendono u massima o minima debbono annullare il differenziale totale du qualunque siano dx e dy. Ora si ha

$$du = \frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dz}\,dz\,,$$

dove dz rappresenta il differenziale totale di z, definito dalla equazione

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz = 0\,.$$

Se all'equazione $du = 0$ si aggiunge quest'ultima moltiplicata per un'indeterminata $-\lambda$, si avrà

$$\left(\frac{dF}{dx} - \lambda\,\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy} - \lambda\,\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dz} - \lambda\,\frac{df}{dz}\right)dz = 0\,;$$

e se in questa equazione si dispone di λ in modo da annullare il coefficiente di dz, si dovranno anche annullare, corrispondentemente al massimo od al minimo, i coefficienti di dx e dy, e si ottengono le equazioni

$$\frac{dF}{dx} - \lambda\,\frac{df}{dx} = 0\,,\quad \frac{dF}{dy} - \lambda\,\frac{df}{dy} = 0\,,\quad \frac{dF}{dz} - \lambda\,\frac{df}{dz} = 0\,,$$

che sono simmetriche rispetto alle variabili, e che si ottengono eguagliando a zero le derivate parziali di

$$F - \lambda f.$$

Queste tre equazioni e le $f=0$, $u=F$ determinano le incognite λ, x, y, z, u, corrispondentemente ai quali valori u può diventare massima o minima.

Si ragionerebbe in modo analogo qualunque sia il numero delle variabili, e delle relazioni passanti fra esse.

Cambiamento delle variabili indipendenti.

139. — Abbiasi un sistema di variabili legate fra loro da relazioni convenienti. Preso un gruppo di queste come variabili indipendenti, di cui le rimanenti sono funzioni, si considerino le derivate ordinarie o parziali dei varii ordini di queste rispetto quelle. Preso un altro gruppo di variabili indipendenti, si considerino in modo analogo le derivate delle rimanenti variabili. Il problema del cambiamento delle variabili indipendenti consiste nel trovare le relazioni che passano fra le derivate prese nella seconda ipotesi e quelle prese nella prima.

Il caso più semplice è quello in cui $y=f(x)$, e si pone $x=\varphi(t)$; y diventerà una funzione di t; e le derivate $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ di y considerato come funzione di x si possono esprimere in funzione delle derivate di y rispetto a t e di x rispetto a t, come ora vedremo.

La regola di differenziazione delle funzioni composte dà.

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\,\varphi'(t)=f'(x)\,\frac{dx}{dt},$$

onde si ricava

$$f'(x)=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

che si potrà scrivere più semplicemente:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

intendendo che nel membro di sinistra $\frac{dy}{dx}$ rappresenti la derivata di y rispetto a x, cioè $f'(x)$, e che nel membro di destra $\frac{dy}{dx}$ rappresenti il quoziente dei differenziali di y ed x considerate come funzioni di t.

Differenziando rispetto t ambi i membri dell'equazione precedente, e dividendo per dx si ha

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}.$$

Differenziando un'altra volta, e dividendo per dx si ha ancora

$$(3) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx\,(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - 3\, d^2x\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}{dx^5},$$

e così di seguito si hanno le formule che esprimono le derivate di y rispetto ad x in funzione dei differenziali, e quindi delle derivate di x e y funzioni di t.

Si possono verificare le formule precedenti col supporre $t = x$, ossia che la nuova variabile non differisca dall'antica; allora nella differenziazione sarà dx costante, e $d^2x = d^3x = \ldots = 0$. Tenendo conto di questo le formule precedenti riduconsi ad identità.

Se si fa $t = y$, ossia si considera y come variabile indipendente, nelle formule precedenti bisognerà porre $d^2y = d^3y = \ldots = 0$, ed esse si riducono a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy\, d^2x}{dx^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-dx\, dy\, d^3x + 3\, dy\, d^2x^2}{dx^5}, \ldots$$

ovvero mettendo in evidenza le derivate di x rispetto y si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}, \ldots$$

Esempio. — Trasformare l'espressione

$$r=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ove x è la variabile indipendente, ed y funzione di x, in un'altra in cui sia t la variabile indipendente, e x e y funzioni di t.

Applicando le formule precedenti si ha:

$$r=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Sia ancora y funzione di x; siano t ed u altre due variabili legate alle precedenti da relazioni che supporremo messe sotto la forma

$$x=\varphi(t,u), \quad y=\psi(t,u).$$

Si vogliono esprimere le derivate di y rispetto a x in funzione delle derivate di u rispetto a t.

Basterà a questo scopo di esprimere le derivate di y rispetto a x in funzione delle derivate di y ed x rispetto a t; queste si potranno infine calcolare fra le relazioni che passano fra x, y, t ed u, perchè si ricava differenziando

$$dx=\frac{d\varphi}{dt}dt+\frac{d\varphi}{du}du, \qquad dy=\frac{d\psi}{dt}dt+\frac{d\psi}{du}du,$$

$$d^2x=\frac{d^2\varphi}{dt^2}dt^2+2\frac{d^2\varphi}{dt\,du}dt\,du+\frac{d^2\varphi}{du^2}du^2+\frac{d\varphi}{du}d^2u, \qquad \text{ecc.}$$

Esempio. — Vogliasi trasformare l'espressione V dell'esempio precedente in un'altra in cui si prendono per variabili r ed α legate alle x e y dalle relazioni

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,.$$

ed α è la variabile indipendente.

Trasformata l'espressione di V in modo che α risulti la variabile indipendente, si trovò

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}\,;$$

differenziando le relazioni date si ricava

$$dx = \cos\alpha\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,d\alpha\,.$$
$$dy = \mathrm{sen}\,\alpha\,dr + r\cos\alpha\,d\alpha\,,$$

onde

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\alpha^2\,,$$

e

$$d^2x = \cos\alpha\,d^2r - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,dr\,d\alpha - r\cos\alpha\,d\alpha^2$$
$$d^2y = \mathrm{sen}\,\alpha\,d^2r + 2\cos\alpha\,dr\,d\alpha - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,d\alpha^2\,,$$

quindi

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -\,rd^2r\,d\alpha + 2\,dr^2\,d\alpha + r^2 d\alpha^3$$

ed infine

$$V = \frac{(dr^2 + r^2 d\,\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{-\,rd^2r\,d\,\alpha + 2\,dr^2\,d\,\alpha + r^2 d\,\alpha^3}\,.$$

140. — Sia z funzione di x ed y; si sostituiscono ad x ed y due altre variabili t, u legate ad esse da relazioni note, che permettono di esprimere x e y in funzione di t e u, e reciprocamente. Si vogliono esprimere le derivate parziali di z rispetto ad x e y in funzione delle derivate parziali di z rispetto a t ed u.

La regola di differenziazione delle funzioni composte, considerando z funzione di t ed u, funzioni di x ed y, dà

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dx} + \frac{dz}{du}\,\frac{du}{dx}\,,$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dy} + \frac{dz}{du}\,\frac{du}{dy}\,,$$

che esprimono appunto le derivate $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ in funzione di $\frac{dz}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$.
I coefficienti $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$,... si ricavano dalle relazioni date fra x, y, t, u.

Differenziando ancora le equazioni precedenti se ne dedurranno altre che determinano $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, ecc.

Esempio. — Sia z una funzione di x ed y tale che soddisfi all'equazione

$$\frac{d^2z}{dy^2} - a^2 \frac{d^2z}{dx^2} = 0\,;$$

invece di x ed y prendansi per variabili indipendenti t ed u legate alle precedenti dalle relazioni

$$t = x + ay\,, \quad u = x - ay\,,$$

onde si ricava

$$\frac{dt}{dx} = 1\,, \qquad \frac{dt}{dy} = a\,, \qquad \frac{du}{dx} = 1\,, \qquad \frac{du}{dy} = -a.$$

Derivando z rispetto x ed y, come si è detto, si ricava nel nostro caso:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{du}\,, \quad \frac{dz}{dy} = a\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz}{du}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{d^2z}{dt\,du} + \frac{d^2z}{du^2}\,,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = a^2\left(\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{d^2z}{dt\,du} + \frac{d^2z}{du^2}\right).$$

onde sostituendo nell'equazione data, dopo aver diviso per $4a^2$, si ha

$$\frac{d^2z}{dt\,du} = 0.$$

In modo analogo si trattano i casi in cui sia maggiore il numero delle variabili.

CAPITOLO VI.

Variabili complesse.

Limiti.

141. — Le regole del calcolo infinitesimale si possono estendere alle quantità che l'algebra chiama immaginarie o complesse, riduttibili alla forma

$$a + bi,$$

ove a e b sono quantità reali, ed i l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$.

Diremo *variabili* le quantità $z = x + iy$ se sono variabili le quantità reali x ed y. Diremo che z tende ad un *limite* $c = a + ib$ se

$$\lim x = a, \qquad \lim y = b.$$

La differenza $z - c = (x - a) + i(y - b)$ ha per modulo

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

il quale, se $\lim z = c$, ha evidentemente per limite zero. Viceversa, se

$$\lim \operatorname{mod}(z - c) = 0,$$

le quantità $x-a$ e $y-b$ avranno pure per limite zero, perchè numericamente minori di $\operatorname{mod}(z-c)$, e quindi $\lim z=c$.

Ammetteremo dimostrati i teoremi (N. 10-12) sui limiti d'una somma, d'un prodotto e d'un quoziente, anche per le variabili complesse, perchè la dimostrazione è facilmente riduttibile alle variabili reali.

Serie a termini complessi.

142. — La serie

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots$$

i cui termini sono complessi si dirà *convergente* se la somma

$$s_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_{n-1}$$

col crescere indefinitamente di n tende verso un limite, cui si dà il nome di somma della serie.

Se si pone

$$u_0=p_0+iq_0, \quad u_1=p_1+iq_1, \ldots\ldots$$

ove le p e le q sono reali, si ha

$$s_n=(p_0+p_1+\ldots+p_{n-1})+i(q_0+q_1+\ldots+q_{n-1})$$

e se la serie è convergente, ossia s_n tende ad un limite $S=P+Qi$, è necessario e sufficiente che siano convergenti le serie delle p e delle q, e sia

$$P=p_0+p_1+\ldots\ldots$$
$$Q=q_0+q_1+\ldots\ldots$$

143. — Si consideri p. e. la progressione geometrica

$$1\,,\quad x\,,\quad x^2\,,\quad x^3\,,\ldots\ldots;$$

si ha

$$s_n = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\,;$$

se il modulo di x è minore di 1, il modulo di x^n col crescere indefinitamente di n ha per limite zero, onde la serie proposta è convergente e si ha

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \qquad (\text{mod}\, x < 1).$$

Se si fa $x = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, si ha $(r < 1)$

$$\frac{1}{1-r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} = 1 + r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + r^2(\cos 2\alpha + i\,\text{sen}\,2\alpha) + \\ + r^3(\cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha) + \ldots\ldots$$

Ma il membro di sinistra

$$\frac{1}{1-r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} = \frac{1 - r\cos\alpha + i\,r\,\text{sen}\,\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}\,,$$

quindi eguagliando le parti reali ed i coefficienti di i si hanno le formule per tutti i valori positivi di $r < 1$, e per tutti i valori reali di α:

$$\frac{1 - r\cos\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = 1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots\ldots$$

$$\frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = 0 + r\,\text{sen}\,\alpha + r^2\,\text{sen}\,2\alpha + \ldots\ldots$$

144. TEOREMA. — *Il termine generale d'una serie convergente ha per limite zero col crescere indefinitamente dell'indice.*

Invero, se $u_n = p_n + iq_n$, e se è convergente la serie delle u_n, sono pure convergenti le serie reali i cui termini sono p_n e q_n, onde (N. 55) $\lim p_n = \lim q_n = 0$, e $\lim u_n = 0$.

Ammetteremo dimostrati i teoremi (N. 52 e 53) riferentesi alla moltiplicazione d'una serie per una costante, e alla somma di due serie.

TEOREMA. — *Una serie a termini complessi è convergente se è convergente la serie formata coi moduli dei termini.*

Siano

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots$$

i termini della serie data,

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots$$

i loro moduli che supporremo formino una serie convergente; e siano

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots$$

gli argomenti dei termini. Si avrà che

$$u_n = r_n (\cos \alpha_n + i \operatorname{sen} \alpha_n),$$

quindi le serie formate colle parti reali e coi coefficienti di i dei termini sono

$$r_0 \cos \alpha_0, \quad r_1 \cos \alpha_1, \quad r_2 \cos \alpha_2, \ldots$$

e

$$r_0 \operatorname{sen} \alpha_0, \quad r_1 \operatorname{sen} \alpha_1, \quad r_2 \operatorname{sen} \alpha_2, \ldots$$

i termini delle quali sono rispettivamente minori in valor assoluto dei termini della serie convergente

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots$$

onde esse sono pure convergenti, ed è convergente la serie delle u.

Così p. es. la serie

$$1, \quad x, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots$$

è convergente qualunque sia x, reale o complesso, perchè, detto r il modulo di x, i moduli dei termini formano la serie

$$1, \quad r, \quad \frac{r^2}{2!}, \quad \frac{r^3}{3!}, \ldots\ldots$$

che è convergente, ed ha per somma e^r.

145. Teorema. — *Se le serie*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots \qquad (1)$$

e

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \ldots\ldots \qquad (2)$$

sono convergenti, e sono pure convergenti le serie formate coi moduli dei loro termini

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots\ldots \qquad (3)$$

e

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \ldots\ldots \qquad (4),$$

la serie

$$w_0, \quad w_1, \quad w_2, \ldots\ldots \qquad (5)$$

in cui

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \quad w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \ldots\ldots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots\ldots + u_n v_0, \ldots\ldots$$

è convergente, ed ha per somma il prodotto delle somme delle due serie date.

Dimostreremo dapprima il teorema sulle serie (3) e (4) formate coi moduli dei termini, ossia sulle serie a termini positivi.

Posto

$$A_p = a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_{p-1}$$
$$B_p = b_0 + b_1 + \ldots\ldots + b_{p-1}$$

e

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots\ldots + (a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} b_0)$$

è facile il riconoscere che il prodotto

$$\begin{aligned} A_p\, B_p = & \; a_0 b_0 + a_1 b_0 + \ldots\ldots a_{p-1} b_0 \\ & + a_0 b_1 + a_1 b_1 + \ldots\ldots + a_{p-1} b_1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_0 b_{p-1} + a_1 b_{p-1} + \ldots\ldots + a_{p-1} b_{p-1} \end{aligned}$$

vale

$$A_p B_p = C_p + a_1 b_{p-1} + \ldots + a_{p-1} b_1 + \ldots + a_{p-1} b_{p-1},$$

ossia

$$A_p\, B_p > C_p\,,$$

e che

$$A_p\, B_p < C_{2p} < C_{2p+1}\,.$$

Ponendo nella prima diseguaglianza $p = n$, si ha

$$C_n < A_n\, B_n\,,$$

e fatto nella seconda $n = 2p$, ovvero $2p+1$, onde p risulta il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$, si ha

$$C_n > A_p\, B_p\,.$$

Facendo crescere indefinitamente n, anche p cresce indefinitamente, e dette A e B le somme delle serie (3) e (4) si ha

$$\lim A_n = \lim A_p = A\,, \quad \lim B_n = \lim B_p = B\,,$$

quindi C_n risulta compresa fra due quantità che tendono verso uno stesso limite, e sarà perciò

$$\lim C_n = AB.$$

Si considerino ora le serie complesse (1) e (2); posto

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$$
$$s''_n = w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_{n-1},$$

si ha

$$s_n\, s'_n - s''_n = u_1\, v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}\, v_1 + \ldots + u_{n-1}\, v_{n-1},$$

onde, considerando i moduli d'ambo i membri, e ricordando che il modulo d'una somma non è maggiore della somma dei moduli,

$$\operatorname{mod}(s_n\, s'_n - s''_n) \leqq a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + \ldots + a_{n-1}\, b_{n-1},$$

ossia

$$\operatorname{mod}(s_n\, s'_n - s''_n) \leqq (A_n\, B_n - C_n);$$

facendo crescere indefinitamente n, $\lim (A_n\, B_n - C_n) = 0$, onde $\lim \operatorname{mod}(s_n\, s'_n - s''_n) = 0$, e quindi

$$\lim s''_n = \lim s_n \,.\, \lim s'_n \qquad \text{c. v. d.}$$

Funzioni esponenziali e circolari di variabile complessa.

146. — Porremo per definizione di e^x, quando x è complesso

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots,$$

ove nel membro di destra la serie è convergente qualunque sia x, e la sua somma per x reale è appunto e^x.

Porremo in modo analogo, quando x è complesso, per definizione

(2) $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

(3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

le quali serie sono convergenti qualunque sia x, e se x è reale rappresentano appunto $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Se nella formula (1) invece di x si legge ix, si ha

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

ovvero, a causa delle formule (2) e (3):

(4) $$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x\,.$$

e scambiando x in $-x$

(5) $$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x\,.$$

Da queste ultime due formule si ricava

(6) $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,,\quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,,$$

e si hanno così le funzioni circolari espresse mediante esponenziali.

147. — La proprietà

(7) $$e^x \,.\, e^y = e^{x+y}$$

sussiste anche se x ed y sono complessi. Invero si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots\ldots$$

e moltiplicando le due serie colla regola nota, il che si può fare, perchè sono convergenti le serie formate coi moduli dei termini, si ha

$$e^x \cdot e^y = 1 + (x + y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \cdots\cdot$$

ed il termine generale è

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{y}{1} + \cdots + \frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\,\frac{y^r}{r!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[x^n + nx^{n-1}y + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\,x^{n-r}y^r + \cdots + y^n\right] = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

ossia

$$e^x \cdot e^y = 1 + (x + y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \cdots$$

e siccome la serie di destra ha per somma e^{x+y} per definizione, si ricava la formula a dimostrarsi.

In virtù di questo teorema si ha che

$$(8) \qquad e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y)\,;$$

supposto x ed y reali, $x + iy$ sarà una quantità complessa qualunque, e e^{x+iy} resta espressa sotto forma trigonometrica, ed ha per modulo e^x e per argomento y.

Reciprocamente una quantità complessa di modulo r e di argomento α si può scrivere semplicemente $re^{i\alpha}$.

Moltiplicando le formule (4) e (5) membro a membro, si ha

$$(9) \qquad 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\,,$$

formula nota di trigonometria, che risulta così dimostrata qualunque siano i valori di x.

Moltiplicando le formule

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$
$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

si ha

$$e^{i(x+y)} = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x),$$

ossia

$$\cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) =$$
$$\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x);$$

scambiando in essa x ed y in $-x$ e $-y$ si ha

$$\cos(x+y) - i \operatorname{sen}(x+y) =$$

$$\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x),$$

onde, si ricavano le formule per l'addizione degli archi

$$(10) \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x, \end{cases}$$

che valgono qualunque siano x ed y, reali o complessi.

Da queste ultime formule si ricava

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy,$$
$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy,$$

ed in virtù delle (6)

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \operatorname{sen} iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

onde, se y è reale, $\cos iy$ è pure reale, e $\operatorname{sen} iy$ è immaginario puro; onde sostituendo nelle ultime formule, supposto x ed y reali, si ha $\cos(x+iy)$ e $\operatorname{sen}(x+iy)$ ridotti alla forma $a+bi$.

148. — Le funzioni $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ presentano molta analogia colle funzioni circolari coseno e seno, e, benchè si esprimano mediante esponenziali, e quindi non siano funzioni nuove, tuttavia si imposero loro i nomi di *coseno iperbolico* e *seno iperbolico*, e si rappresentano scrivendo

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ;$$

e si ricavano con tutta facilità le formule

$$\mathrm{Ch}\,(-x) = \mathrm{Ch}\, x , \qquad \mathrm{Sh}\,(-x) = -\mathrm{Sh}\, x .$$

$$\mathrm{Ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$\mathrm{Sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

$$e^x = \mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x$$

$$e^{-x} = \mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x ,$$

$$1 = \mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x$$

$$\cos ix = \mathrm{Ch}\, x , \quad \operatorname{sen} ix = i\, \mathrm{Sh}\, x ,$$

$$\mathrm{Ch}\,(x + y) = \mathrm{Ch} x\, \mathrm{Ch} y + \mathrm{Sh} x\, \mathrm{Sh} y$$

$$\mathrm{Sh}\,(x + y) = \mathrm{Sh} x\, \mathrm{Ch} y + \mathrm{Ch} x\, \mathrm{Sh} y .$$

Le altre funzioni trigonometriche si definiscono mediante le loro espressioni in funzione del seno e del coseno, le quali sono i risultati di dimostrazione se x è reale; così per x complesso si pone

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} ,$$

ovvero, esprimendo tutto mediante esponenziali

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tang} x = \frac{1}{i} \; \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} .$$

Si dà una definizione analoga per la tangente iperbolica, e si pone

$$\mathrm{Th}\, x = \frac{\mathrm{Sh} x}{\mathrm{Ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ,$$

onde si ha

$$\tan ix = i\, \mathrm{Th} x , \qquad \text{ecc.}$$

149. — Si dice che y è il logaritmo naturale di x, e si scrive

$$y = \log x$$

se

$$e^y = x\,.$$

Pongasi $x = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, ed $y = p + iq$: si avrà

$$e^y = e^{p+iq} = e^p(\cos q + i\,\mathrm{sen}\,q)\,,$$

ed affinchè questa quantità complessa possa essere eguale ad x, è necessario che i moduli siano eguali, e gli argomenti non differiscano che per un multiplo di 2π: onde l'equazione $e^y = x$ si riduce alle seguenti fra quantità reali

$$e^p = r$$
$$q = \alpha + 2k\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

La seconda determina q; dalla prima si ricava p in modo unico, perchè essendo r reale e positivo, esiste un sol valore reale di p tale che $e^p = r$, ed è il logaritmo di r stato definito a proposito delle funzioni di variabile reale: noi lo indicheremo scrivendo

$$p = \log' r.$$

Così determinate p e q, risulta noto $p + qi = y = \log x$, e si ha

(13) $$\log[r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)] = \log' r + i(\alpha + 2k\pi)\,,$$

ossia il logaritmo d'una quantità complessa ha infiniti valori; la loro parte reale è comune, ed è il logaritmo (nel significato di variabili reali) del modulo: ed il coefficiente di i è l'argomento aumentato d'un multiplo arbitrario di 2π.

Se la quantità di cui si vuole il logaritmo è reale e positiva, essa è eguale al suo modulo r, e per argomento si può assumere lo zero; onde la formula precedente dà

$$\log r = \log' r + 2k\pi i\,;$$

ossia il logaritmo d'una quantità reale e positiva ha infiniti valori; uno, corrispondente a $k=0$, è reale, ed è il logaritmo definito per le variabili reali; tutti gli altri sono immaginarii, e a due a due coniugati, perchè si avranno valori coniugati per $\log r$ se si dànno a k valori eguali e di segno contrario.

Sia ora $-r$ una quantità reale e negativa; il suo modulo è r, e per argomento si può assumere π; onde

$$\log(-r) = \log' r + (2k+1)\pi i;$$

essi sono tutti immaginarii; dando a k le coppie di valori $0, -1$; $1, -2$; $2, -3$;... $\log(-r)$ assume i valori immaginarii coniugati

$$\log' r \pm \pi i, \quad \log' r \pm 3\pi i, \quad \log' r \pm 5\pi i, \ldots\ldots$$

150. — Alla scrittura u^v si dà, per u e v complessi, il significato

$$u^v = e^{v \log u}$$

che costituisce un'identità nota per u e v reali ed $u > 0$. Siccome $\log u$ ha infiniti valori, e detto $\log u$ uno di essi, tutti gli altri sono della forma

$$\log u + 2k\pi i,$$

anche u^v avrà infiniti valori, che in generale sono distinti.

Così ad esempio, in virtù delle convenzioni fatte, l'espressione $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ha il significato $e^{i \log i}$; e siccome

$$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = (4k+1)\frac{\pi}{2}i,$$

si ha

$$i^i = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}},$$

ossia, assume infiniti valori, tutti reali.

151. — Diremo che $x = \text{arc sen } z$, ovvero $x = \text{arc cos } z$ se $\text{sen } x = z$, ovvero $\cos x = z$. Queste funzioni circolari inverse si possono facilmente ridurre ai logaritmi. Invero, prendendo i logaritmi d'ambo i membri dell'eguaglianza (4) si ha

$$ix = \log(\cos x + i \text{ sen } x), \tag{14}$$

e se si pone in essa $\text{sen } x = z$, onde $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, e $x = \text{arc sen } z$, si ha

$$\text{arc sen } z = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right); \tag{15}$$

analogamente, ponendo nella formula (14)

$$\cos x = z, \qquad \text{sen } x = \sqrt{1-z^2}, \qquad x = \text{arc cos } z,$$

si ha

$$\text{arc cos } z = \frac{1}{i} \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right). \tag{16}$$

Esaminando la formula (15), si scorge che dato z, l'espressione $\sqrt{1-z^2} + iz$ ha due valori corrispondenti al doppio valore del radicale: ad ognuno di essi corrispondono ancora infiniti valori di $\text{arc sen } z$, perchè il logaritmo ha infiniti valori. Se z è reale e < 1, $\sqrt{1-z^2}$ è reale, il modulo di $\sqrt{1-z^2} + iz$ è l'unità, il logaritmo di questa quantità è immaginario puro, e dividendo per i si ha $\text{arc sen } z$ reale. Ma se z è reale > 1, ovvero immaginario, risulta immaginario anche $\text{arc sen } z$. Così ad esempio, l'espressione

$$\text{arc sen } 2 = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{-3} + 2i\right) = \frac{1}{i} \log i\left(\sqrt{3} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{i} \log'\left(\sqrt{3} + 2\right) + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Si divida la formula (4) per la (5); si avrà

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\cos x - i \operatorname{sen} x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x};$$

prendendone i logaritmi

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x},$$

e posto $\operatorname{tang} x = z$, e $x = \operatorname{arc\,tang} z$, si ha

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2} \log \frac{1 - iz}{1 + iz}.$$

Così restano definite le funzioni esponenziali e logaritmiche, e le funzioni trigonometriche dirette ed inverse per valori complessi delle variabili, e si vede che le funzioni trigonometriche dirette si possono esprimere mediante esponenziali, e le inverse mediante logaritmi; onde se dell'esponenziale e del logaritmo che ne è l'inverso si fa una sola categoria di funzioni, si deduce che tutte le funzioni trascendenti finora introdotte nel calcolo si possono ridurre alla sola e^x.

Funzioni di variabile complessa.

152. — Diremo che w è funzione della variabile complessa z, e si scrive $w = f(z)$, se ad ogni valore di z corrisponde un valore di w.

Se si fa $w = u + iv$, $z = x + iy$, ove u, v, x, y sono variabili reali, se w è funzione di z saranno u e v funzioni reali di x ed y.

Diremo che la funzione $w = f(z)$ ha derivata se, col tendere a zero della quantità complessa h, tende verso un limite la quantità

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

e questo limite è il valore della derivata $f'(z)$ corrispondentemente al valore considerato di z.

153. — Pongasi

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

e

$$h = k + il,$$

ove k ed l sono quantità reali. Si avrà:

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

e

$$f(z+h) = \varphi(x+k, y+l) + i\psi(x+k, y+l),$$

onde

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{[\varphi(x+k, y+l) - \varphi(x, y)] + i[\psi(x+k, y+l) - \psi(x, y)]}{k+il},$$

Se w ammette derivata $f'(z)$, la quantità $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ tende verso $f'(z)$ in qualunque modo si faccia tendere Δz a zero. Suppongasi dapprima in $\Delta z = h = k + il$, nulla la parte immaginaria l: si avrà:

$$\lim \frac{\varphi(x+k, y) - \varphi(x, y) + i[\psi(x+k, y) - \psi(x, y)]}{h} = f'(z),$$

ed affinchè ciò avvenga, debbono tendere verso limiti la parte reale ed il coefficiente di i; quindi le funzioni φ e ψ ammettono derivate parziali rispetto x, e si avrà

$$f'(z) = \varphi'_x(x, y) + i\,\psi'_x(x, y).$$

Suppongasi invece in Δz nulla la parte reale k: si avrà:

$$\lim \frac{\varphi(x, y+l) - \varphi(x, y) + i[\psi(x, y+l) - \psi(x, y)]}{il} = f'(z),$$

e quindi con ragionamento analogo si deduce l'esistenza delle derivate parziali di φ e ψ rispetto y, e

$$f'(z) = \psi'_y(x, y) - i\,\varphi'_y(x, y).$$

Paragonando questa espressione di $f'(z)$ colla precedente, colla quale deve essere identica, si ha:

$$\varphi'_x(x, y) = \psi'_y(x, y) \quad \text{e} \quad \psi'_x(x, y) = -\varphi'(x, y),$$

ossia:

Affinchè $w = u + iv$ *sia funzione di* $z = x + iy$, *è necessario che le funzioni reali* u *e* v *delle variabili reali* x *ed* y *soddisfino alle equazioni*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}.$$

Se si deriva la prima equazione rispetto x, la seconda rispetto y, e se si ritiene $\frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dy\,dx}$, si ricava l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

equazione a derivate parziali di secondo ordine, in cui non entra che la funzione u. In modo analogo, derivando la prima equazione rispetto y e la seconda rispetto x, e sottraendo si ha

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

ossia anche v soddisfa alla stessa equazione a derivate parziali cui pure soddisfa uc.

154. — *Se le condizioni*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

sono verificate, la funzione w *ha derivata.*

Invero, si ha (N. 105)

$$\varphi(x+k, y+l) - \varphi(x, y) = k\varphi'_x(x, y) + l\varphi'_y(x, y) + \alpha k + \beta l,$$

$$\psi(x+k, y+l) - \psi(x, y) = k\psi'_x(x, y) + l\psi'_y(x, y) + \alpha' k + \beta' l,$$

e, sommata la prima equazione colla seconda moltiplicata per i, si ha

$$\Delta w = k(\varphi'_x + i\psi'_x) + l(\varphi'_y + i\psi'_y) + \alpha k + \beta l + \alpha' ik + \beta' il,$$

ovvero, osservando che $\psi'_y = \varphi'_x$ e $\varphi'_y = -\psi'_x = i^2\psi'_x$,

$$\Delta w = (k + il)(\varphi'_x + i\psi'_x) + \alpha k + \beta l + \alpha' ik + \beta' il,$$

e dividendo per $\Delta z = k + il$,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \varphi'_x + i\psi'_x + \alpha\frac{k}{k+il} + \beta\frac{l}{k+il} + i\alpha'\frac{k}{k+il} + i\beta'\frac{l}{k+il}.$$

Facciasi qui tendere Δz a zero; k ed l tendono pure a zero, e quindi anche $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$; le quantità

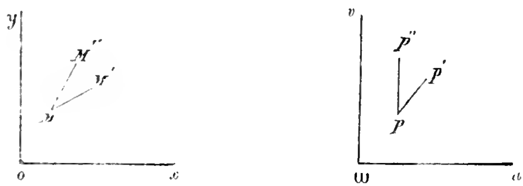
$$\frac{k}{k+il} \quad \text{e} \quad \frac{l}{k+il}$$

sono finite, perchè il loro modulo è minore dell'unità, onde

$$\lim\frac{\Delta w}{\Delta z} = \varphi'_x + i\psi'_x, \qquad \text{c. v. d.}$$

155. — Si rappresenti su d'un piano la variabile $z = x + iy$ mediante un punto M le cui coordinate cartesiane ortogonali sono

x ed y; si rappresenti in modo analogo in un altro piano la funzione $w = u + iv$ mediante un punto P le cui coordinate siano u e v. Essendo w funzione di z, ad ogni punto M del primo piano corrisponde un punto P nel secondo, e quindi la funzione complessa $w = f(z)$ determina una corrispondenza fra i punti del primo piano e quelli del secondo.



Dato a z il nuovo valore $z + h$, rappresentato dal punto M', sarà il modulo di h rappresentato dal segmento MM' ed il suo argomento dall'angolo di MM' coll'asse delle x. Se P' è il punto corrispondente ad M', $PP' = \text{mod}\, \Delta w$, e angolo $\widehat{PP', \omega u} = \text{arg.}\, \Delta w$. Fatto qui tendere Δz a zero, se la funzione ha derivata $f'(z)$ sarà

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

e quindi

$$\lim \text{mod} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim \frac{\text{mod}\, \Delta w}{\text{mod}\, \Delta z} = \lim \frac{PP'}{MM'} = \text{mod}\, f'(z),$$

e se $\text{mod}\, f'(z)$ non è nullo, anche

$$\lim \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim [\arg \Delta w - \arg \Delta z] =$$

$$= \lim [\widehat{P'P, \omega u} - \widehat{M'M, ox}] = \arg f'(z).$$

Se M'' è un altro punto prossimo ad M, e P'' il corrispondente, sarà anche

$$\lim \frac{PP''}{MM''} = \text{mod}\, f'(z), \quad \lim [\widehat{P''P, \omega u} - \widehat{M''M, ox}] = \arg f'(z),$$

quindi si deduce

$$\lim \frac{PP''}{MM''} : \frac{PP'}{MM'} = 1 ,$$

$$\lim \left[(P''\widehat{P, \omega u} - P'\widehat{P, \omega u}) - (M''\widehat{M, ox} - M'\widehat{M, ox}) \right] = 0 ,$$

la quale ultima si può pure scrivere

$$\lim (P''\widehat{P}P' - M''\widehat{M}M') = 0.$$

La prima equazione si può interpretare dicendo che, col tendere di M' e M'' ad M i rapporti $\frac{PP''}{MM''}$ e $\frac{PP'}{MM'}$ tendono a diventare eguali, e quindi i lati MM', MM'', PP', PP'' tendono a diventare proporzionali. La seconda equazione, ove si supponga di far variare M' e M'' in modo che $M''MM'$ tenda ad un limite, dice che

$$\lim P''PP' = \lim M''MM' ,$$

il che si può interpretare dicendo che gli angoli $M''MM'$ e $P''PP'$ tendono all'eguaglianza: onde i triangoli $M'MM''$ e $P'PP''$ tendono a diventare simili. Tutto questo fatto si suol esprimere dicendo che i due piani sono nelle loro parti infinitesime simili. Però quanto precede non si deve ritenere che come schiarimento delle formule trovate.

156. — Ammetteremo dimostrate anche per le variabili immaginarie le regole di differenziazione per le variabili reali, d'una somma, prodotto, quoziente, funzioni di funzioni, e funzioni inverse (N. 34-38), perchè la dimostrazione è la stessa.

La derivata della funzione esponenziale e^x si può ottenere nel seguente modo. Si ha

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h ,$$

onde

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \, \frac{e^h - 1}{h} . \qquad (1)$$

Ora

$$e^h = 1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots\dots$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{1} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots\dots$$

$$\frac{e^h - 1}{h} - 1 = h\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \dots\dots\right],$$

e

$$\operatorname{mod}\left[\frac{e^h - 1}{h} - 1\right] = \operatorname{mod} h \,.\, \operatorname{mod}\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \dots\dots\right] \qquad (2)$$

La quantità racchiusa nella parentesi di destra è finita, e, detto k una quantità positiva maggiore del modulo di h, sarà

$$\operatorname{mod}\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \dots\right] < \frac{1}{2!} + \frac{k}{3!} + \dots,$$

quindi, facendo tendere h a zero, il membro di destra della (2) ha per limite zero, e

$$\lim \operatorname{mod}\left[\frac{e^h - 1}{h} - 1\right] = 0,$$

ossia

$$\lim \frac{e^h - 1}{h} = 1\,.$$

Quindi dalla formula (1) si ha

$$\lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x,$$

vale a dire la derivata di e^x è ancora e^x.

Dalla derivata di e^x si deducono le derivate di $\operatorname{sen} x$, e $\cos x$, perchè queste funzioni si possono esprimere mediante esponenziali; si ha:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

onde, derivando

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x\,, \quad \frac{d \cos x}{dx} = i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = -\operatorname{sen} x\,,$$

precisamente come se le variabili fossero reali.

Applicando la regola della derivazione di funzioni inverse, si trovano le derivate di $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x, \ldots$ che coincidono con quelle trovate per le variabili reali.

Serie ordinate secondo le potenze d'una variabile.

157. — Teorema. *Se in una serie*

$$u_0\,,\ u_1 x\,,\ u_2 x^2\,,\ u_3 x^3\,, \ldots\ldots,$$

ove $u_0, u_1, \ldots$ *sono quantità indipendenti da* x, *per un certo valore di* x *di modulo* R *il modulo del termine generale* $u_n x^n$ *non assume valori comunque grandi, la serie proposta è convergente per ogni valore di* x *il cui modulo è minore di* R.

Infatti, suppongasi che il modulo del termine generale, pel valore di x il cui modulo è R, sia sempre minore d'una quantità finita A: sarà

$$\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n < A\,.$$

Diasi ad x un valore il cui modulo sia $r < R$; il modulo del termine generale della serie sarà $\operatorname{mod} u_n x^n = \operatorname{mod} u_n \,.\, r^n$, che si può scrivere $\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n \,.\, \left(\frac{r}{R}\right)^n$. In virtù dell'ipotesi precedente si ha che $\operatorname{mod} u_n x^n < A \left(\frac{r}{R}\right)^n$. Ora la serie, il cui termine generale è

$A\left(\frac{r}{R}\right)^n$, è convergente, perchè è una progressione geometrica la cui ragione $\frac{r}{R}$ è minore dell'unità.

Quindi la serie formata coi moduli della data, che ha i suoi termini minori dei corrispondenti d'una serie convergente, è pure convergente, e perciò è pure convergente la serie proposta.

COROLLARIO. — *Se la serie* $u_0, u_1 x, u_2 x^2, \ldots$ *è convergente per un valore di* x *di modulo* R, *è ancora convergente per ogni valore di* x *il cui modulo è minore di* R.

Infatti, se la serie data è convergente pel valore considerato di x, il modulo del termine generale ha per limite zero col crescere indefinitamente di n; onde da un certo termine in poi il modulo dei termini della serie saranno minori d'una quantità finita (positiva) scelta ad arbitrio; i termini precedenti sono finiti, ed in numero finito, quindi i loro moduli sono tutti minori d'una quantità finita; onde i moduli dei termini sono minori d'una quantità finita, e ricadiamo nel teorema precedente.

158. — Una serie ordinata secondo le potenze di x può essere convergente per tutti i valori di x; tale sarebbe la

$$1, \quad x, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots$$

la cui somma è e^x; oppure non essere convergente per alcun valore di x, tolto il valore $x=0$, per cui la serie si riduce al primo termine; tale è la serie

$$1, \quad x, \quad 2!\,x^2, \quad 3!\,x^3, \ldots\ldots,$$

perchè in essa, supposto $\bmod x > 0$, il termine generale ha per limite l'infinito. Ma può avvenire che la serie proposta sia convergente per alcuni valori di x, e divergente per altri. Sia ρ il limite superiore dei valori dei moduli di x per cui la serie è convergente.

La serie data sarà convergente per tutti i valori di x il cui modulo è minore di ρ, divergente per quelli il cui modulo è maggiore di ρ: potrà essere convergente, ovvero divergente pei valori di x di modulo eguale a ρ.

Per es. la progressione geometrica

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\ldots\ldots$$

è convergente per ogni valore di x di modulo minore di 1, è divergente pei valori di x di modulo $\geqq 1$.

La quantità ρ dicesi *raggio di convergenza* della serie; se nel piano in cui si rappresenta la variabile complessa, centro nell'origine con raggio ρ, si descrive un cerchio, questo vien detto *cerchio di convergenza;* la serie proposta è convergente pei valori della variabile rappresentati da punti interni al cerchio di convergenza, divergente per gli esterni.

159. — *Se la serie*

$$u_0,\quad u_1 x,\quad u_2 x^2,\ldots\ldots$$

è convergente pei valori di x *il cui modulo è minore di* ρ, *sono pure convergenti per gli stessi valori di* x *le serie formate colle derivate dei termini, e, posto*

$$\begin{aligned}
f(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots\ldots \\
f'(x) &= \phantom{u_0 +{}} u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + \ldots\ldots \\
f''(x) &= \phantom{u_0 + u_1 +{}} 2u_2 + 3.2u_3 x + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

le funzioni $f'(x)$, $f''(x)$, ... *sono le derivate prima, seconda*, ... *di* $f(x)$.

Infatti, detto r il modulo di x, che supporremo $< \rho$, e detto R una quantità compresa fra r e ρ, la serie data è convergente se si dà ad x un valore di modulo R; quindi il modulo del suo termine generale $u_n x^n$, che sarà $\operatorname{mod} u_n R^n$ avrà per limite zero col crescere di n, e quindi sarà sempre finito; e potremo supporre

$$\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n < A \,.$$

Ora il termine generale della serie delle derivate, che è $n\, u_n x^{n-1}$ ha per modulo

$$n \operatorname{mod} u_n \,.\, r^{n-1} = n \,.\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n \,.\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} .\,\frac{1}{R} < n\, A \left(\frac{r}{R}\right)^n .\,\frac{1}{r}\,.$$

Ma la serie il cui termine generale è $n\, A \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{1}{r}$ è convergente, perchè il rapporto d'un termine al precedente ha per limite $\frac{r}{R} < 1$ col crescere indefinitamente di n; quindi anche la serie formata coi moduli dei termini di $f'(x)$ è convergente, ed è convergente infine la serie i cui termini si ottengono derivando i termini di $f(x)$.

La serie $f''(x)$, che si ottiene da $f'(x)$ come questa si è ottenuta da $f(x)$, è pure convergente, e lo stesso avviene qualunque sia il numero delle derivazioni eseguite.

Ciò premesso, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n\, x^n\,,$$

$$f(x+h) = \sum u_n\, (x+h)^n$$

$$f(x+h) - f(x) = \sum u_n \left[(x+h)^n - x^n\right] =$$

$$= \sum u_n \left[n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots\right]$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum u_n \left[n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots\right]$$

e sottraendo la serie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} n u_n x^{n-1},$$

si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = h \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \left[\binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{3} x^{n-3} h + \dots \right]$$

$$= \frac{h}{1\,.\,2} \sum_{n=0}^{n=\infty} n(n-1) u_n \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{3\,.\,4} x^{n-4} h^2 + \dots \right]$$

e per dimostrare che

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

basta dimostrare che il membro di destra ha per limite zero col tendere di h a zero, e quindi basterà riconoscere che il fattore che moltiplica h è finito.

Suppongasi $\mathrm{mod}\, h$ così piccolo che $\mathrm{mod}\, x + \mathrm{mod}\, h < \rho$, cosa possibile, poichè $\mathrm{mod}\, x < \rho$; sia R tale che

$$\mathrm{mod}\, x + \mathrm{mod}\, h < R < \rho.$$

Si avrà

$$\mathrm{mod} \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{3\,.\,4} x^{n-4} h^2 + \dots \right] <$$

$$(\mathrm{mod}\, x)^{n-2} + \frac{n-2}{3} (\mathrm{mod}\, x)^{n-3} \,\mathrm{mod}\, h + \frac{(n-2)(n-3)}{3\,.\,4} (\mathrm{mod}\, x)^{n-4} (\mathrm{mod}\, h)^2 + \dots$$

$$< (\mathrm{mod}\, x)^{n-2} + \frac{n-2}{1} (\mathrm{mod}\, x)^{n-3} \,\mathrm{mod}\, h + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} (\mathrm{mod}\, x)^{n-4} (\mathrm{mod}\, h)^2 + \dots$$

$$< (\mathrm{mod}\, x + \mathrm{mod}\, h)^{n-2} < R^{n-2}$$

ed il modulo del termine generale della serie che si considera sarà minore di

$$n\,(n-1) \operatorname{mod} u_n \,.\, R^{n-2}\,;$$

ora si è dimostrato che la serie il cui termine generale è $n\,(n-1)\,u_n\, x^{n-2}$ è convergente, ed è anche convergente la serie dei suoi moduli per ogni valore di x di modulo $< \rho$, quindi anche pei valori di x di modulo R; quindi la serie il cui termine generale è $n\,(n-1) \operatorname{mod} u_n \,.\, R^{n-2}$ è convergente ed ha una somma finita B. Lo stesso avverrà per la serie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\,(n-1)\,u_n \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3}\, x^{n-3}\, h + \ldots\right]$$

il cui modulo sarà $< B$; onde

$$\operatorname{mod}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right] < \operatorname{mod} h \,.\, B\,,$$

e siccome il membro di destra ha per limite 0 per $h=0$, si conchiude che $f'(x)$ è appunto la derivata di $f(x)$.

Per la stessa ragione $f''(x)$ è la derivata di $f'(x)$, e quindi la derivata seconda di $f(x)$, e così di seguito.

Le funzioni $f(x)$, $f'(x)$,... che ammettono derivata sono continue.

Applicando il teorema precedente alla serie che servì per definizione di e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

si ha

$$\frac{de^x}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

ossia

$$\frac{de^x}{dx} = e^x\,.$$

Analogamente, derivando le serie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\cdots$$

si ritrova

$$d \operatorname{sen} x = \cos x \, dx, \qquad d \cos x = - \operatorname{sen} x \, dx.$$

160. — I teoremi precedenti fanno scorgere una certa analogia fra le funzioni definite come somma d'una serie ordinata secondo le potenze delle variabili, nell'interno del cerchio di convergenza, colle funzioni intere. Questa analogia si fa più evidente coi teoremi che seguono.

TEOREMA. — *Se la serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots\cdots \tag{1}$$

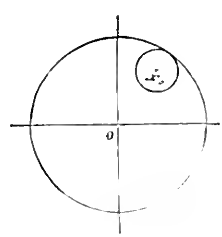
è convergente pei valori di x *il cui modulo è minore di* ρ, *sarà applicabile la serie di Taylor*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots\cdots, \tag{2}$$

supposto $\operatorname{mod} x_0 < \rho$, *per tutti i valori di* h *per cui*

$$\operatorname{mod} h < \rho - \operatorname{mod} x_0.$$

In altre parole, ricorrendo alla rappresentazione geometrica, la (1) definisce una funzione $f(x)$ per tutti i valori di x rappresentati da punti interni al cerchio il cui centro è l'origine, e il cui raggio è ρ. Se x_0 è un punto interno a questo cerchio, si vuol dimostrare che la serie (2) è convergente, ed ha per somma $f(x_0 + h)$ per tutti i valori di h il cui modulo è minore di $\rho - \operatorname{mod} x_0$, ossia per tutti i valori $x_0 + h$ rappresentati da punti interni al cerchio di centro x_0, e tangente internamente al cerchio di convergenza della serie (1). Però non è esclusa la possibilità che la serie (2), ordinata secondo le potenze ascendenti di h, possa ancora essere convergente per altri valori di h.



Infatti, posto

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^m}{m\,!}f^{(m)}(x_0)+R_m, \tag{3}$$

ed osservando che

$$f(x_0+h)=\sum u_n(x_0+h)^n, \quad f(x_0)=\sum u_n x_0^n,$$

$$f'(x_0)=\sum n u_n x_0^{n-1}, \ldots\ldots f^{(m)}(x_0)=\sum n(n-1)\ldots(n-m+1)\,u_n x_0^{n-m},$$

si ricava:

$$R_m=\sum u_n\left[(x_0+h)^n-x_0^n-n\,h\,x_0^{n-1}-\ldots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right].$$

I sommatarii si debbono prendere rispetto n, che varia da 0 ad ∞. Però nell'espressione di R_m i primi termini corrispondenti ai valori 0, 1,... m di n sono nulli; quindi in R_m basterà dare ad n i valori

$$m+1, \quad m+2, \ldots\ldots$$

Prendendo i moduli d'ambo i membri si ha

$$\operatorname{mod} R_m<\sum_{n=m+1}^{n=\infty}\operatorname{mod} u_n\,.\operatorname{mod}\left[(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\ldots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right]$$

ma

$$\operatorname{mod}\left[(x_0+h)^n-x_0^n-n\,h\,x_0^{n-1}-\ldots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right]<$$

$$\left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n+(\operatorname{mod}x_0)^n+n\operatorname{mod}h\,(\operatorname{mod}x_0)^{n-1}+\ldots+\binom{n}{m}(\operatorname{mod}h)^m(\operatorname{mod}x_0)^{n-m}$$

$$<\left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n+\left[\operatorname{mod}x_0+\operatorname{mod}h\right]^n,$$

onde

$$\operatorname{mod} R_m<\sum_{n=m+1}^{n=\infty}\operatorname{mod} u_n\left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n+\sum_{n=m+1}^{n=\infty}\operatorname{mod} u_n\left[\operatorname{mod}x_0+\operatorname{mod}h\right]^n. \tag{4}$$

Ora le serie i cui termini generali sono

$$\operatorname{mod} u_n \left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n, \quad \text{e} \quad \operatorname{mod} u_n \left[\operatorname{mod} x_0 + \operatorname{mod} h\right]^n$$

sono convergenti: quindi i due sommatarii della (4) col crescere indefinitamente di m hanno per limite zero, onde

$$\lim \operatorname{mod} R_m = 0,$$

e $\lim R_m = 0$. Facendo quindi crescere indefinitamente m nella (3), si ricava la formula (2), che volevasi dimostrare.

Teorema. — *Se nella serie (convergente se mod* $x < \rho$*)*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$

non tutti i coefficienti sono nulli, $f(x)$ *si può annullare per* $x=0$, *ma essa non si annulla più in un conveniente intorno di* $x=0$.

Infatti se il primo dei coefficienti non nulli è u_n, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= u_n x^n + u_{n+1} x^{n+1} + \ldots\ldots \\ &= x^n \left| u_n + u_{n+1} x + \ldots\ldots \right| : \end{aligned}$$

il primo fattore x^n si annulla per $x=0$ se $n>0$, e non si annulla per altri valori di x: il secondo è funzione continua di x, che per $x=0$ assume il valore non nullo u_n, quindi esso non è nullo in un conveniente intorno di $x=0$, e lo stesso avviene di $f(x)$.

Teorema. — *Se* $f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$, *si annulla, per valori non nulli di* x *in ogni intorno di* $x=0$, *i coefficienti* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *sono tutti nulli.*

Questo teorema è conseguenza del precedente.

Teorema. — *Se la serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$

è convergente per i valori di x *di modulo* $< \rho$, *e se* $f(x)$ *si annulla per infiniti valori di* x *il cui modulo è minore d'una quantità* $R < \rho$, *tutti i coefficienti sono nulli, ed* $f(x)$ *è identicamente nulla.*

Infatti, esisterà un valore x_0 di x, di modulo non maggiore di R, tale che in ogni suo intorno $f(x)$ si annulla. Sviluppando $f(x_0 + h)$ secondo le potenze di h, il che è lecito se $\mathrm{mod}\, h < \rho - \mathrm{mod}\, x_0$, quantità finita, $\geq \rho - R$, si avrà una funzione di h, che si annulla in ogni intorno di $h = 0$, per valori non nulli di h, e quindi è identicamente nulla per questi valori; ossia $f(x)$ è identicamente nulla pei valori di x rappresentati da punti interni al cerchio di centro x_0, e di raggio $\rho - \mathrm{mod}\, x_0$. Se ora si considera un altro punto x_1, interno a questo cerchio, $f(x)$ è nulla in un suo intorno, qnindi è nulla per tutti i valori di x rappresentati da punti interni al cerchio di centro x_1 e di raggio $\rho - \mathrm{mod}\, x_1$. Così continuando si scorge che $f(x)$ è nulla identicamente per tutti i valori di x, e quindi tutti i suoi coefficienti sono nulli.

Teorema. — *Se le serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots..$$
$$\varphi(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots..$$

sono convergenti pei valori di x *il cui modulo è minore di* ρ, *e sono eguali per infiniti valori di* x *il cui modulo è minore d'una quantità* $R < \rho$, *i coefficienti delle stesse potenze di* x *nelle due serie sono eguali, e le serie identiche.*

Infatti, basta applicare il teorema precedente alla serie

$$f(x) - \varphi(x) = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1)x + (u_2 - v_2)x^2 + \ldots..$$

Teorema (di Abel). — *Se la serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots..$$

è convergente pel valore x_0 *di* x *(che supporremo appartenere alla circonferenza del cerchio di convergenza), facendo tendere* x *verso* x_0 *in modo che* $\frac{x}{x_0}$ *tenda all'unità assumendo soli valori reali e crescenti,* $f(x)$ *tende a* $f(x_0)$.

Infatti, detta $\varphi(x)$ la somma dei primi m termini della serie,

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 x + \ldots.. + u_{m-1} x^{m-1}$$

e $\psi(x)$ il resto della serie

$$\psi(x) = u_m x^m + u_{m+1} x^{m+1} + \ldots..$$

si avrà

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Ma $\psi(x)$ si può scrivere

$$\psi(x) = u_m x_0^m \left(\frac{x}{x_0}\right)^m + u_{m+1} x_0^{m+1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+1} + \ldots\ldots$$

Si considerino le quantità

$$\begin{aligned}
p_0 &= u_m x_0^m, \\
p_1 &= u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1}, \\
p_2 &= u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1} + u_{m+2} x_0^{m+2}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

e dicasi p il massimo dei loro moduli, od il loro limite superiore, il quale esiste, perchè ciascheduna delle quantità $p_0, p_1 \ldots$ è finita, e col crescere indefinitamente del loro indice, $\lim p_n = \psi(x_0) = f(x_0) - \varphi(x_0)$, quantità finita.

Posto ancora

$$r_n = u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1} \left(\frac{x}{x_0}\right) + \ldots\ldots + u_{m+n} x_0^{m+n} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

si ha

$$r_n = p_0 + (p_1 - p_0)\left(\frac{x}{x_0}\right) + (p_2 - p_1)\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + (p_n - p_{n-1})\left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

ossia

$$\begin{aligned}
r_n = p_0\left[1 - \frac{x}{x_0}\right] + p_1\left[\frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] + \ldots \\
+ p_{n-1}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right] + p_n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n.
\end{aligned}$$

e presi i moduli d'ambi i membri, osservando che i binomii entro parentesi sono reali e positivi, e che i moduli di $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}, p_n$ non sono maggiori di p, si avrà:

$$\operatorname{mod} r_n < p\left[1 - \frac{x}{x_0} + \frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right].$$

ossia

$$\operatorname{mod} r_n < p:$$

e facendo crescere indefinitamente n,

$$\lim \operatorname{mod} r_n = \operatorname{mod} \lim r_n < p.$$

Ora si ha che

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^m \lim r_n,$$

quindi, prendendo i moduli d'ambo i membri, e ricordando che $\frac{x}{x_0}$ è reale < 1,

$$\text{mod}\,\psi(x) < \left(\frac{x}{x_0}\right)^m p < p.$$

Ma, essendo convergente la serie $f(x_0)$, si può determinare un valore di m così grande che la somma di un numero qualunque di termini successivi a quello di posto m, le quali somme sono appunto $p_0, p_1, p_2, \ldots$, abbia un modulo minore d'una quantità ω piccola ad arbitrio; quindi anche il loro limite superiore $p < \omega$: ossia, fissata ad arbitrio una quantità ω, si può determinare m in modo tale che il resto $\psi(x)$ della serie $f(x)$ troncata all'm^o termine sia minore di ω, qualunque sia il valore reale < 1 di $\frac{x}{x_0}$. In altri termini la serie considerata ha i suoi termini complessi, che si possono considerare come funzioni della variabile reale $\frac{x}{x_0}$, compresa fra 0 ed 1, ed è di convergenza equabile.

Ciò premesso, siccome

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

e

$$f(x_0) = \varphi(x_0) + \psi(x_0)$$

si ricava

$$f(x_0) - f(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) + \psi(x_0) - \psi(x);$$

si può prendere m così grande che i moduli di $\psi(x_0)$ e $\psi(x)$ siano $< \omega$; si può supporre x così prossimo ad x_0, che

$$\text{mod}\left[\varphi(x_0) - \varphi(x)\right] < \omega',$$

perchè $\varphi(x)$ è funzione continua di x; quindi si può rendere

$$\text{mod}\,[f(x_0) - f(x)] < \omega' + 2\,\omega,$$

quantità piccola ad arbitrio, ed infine,

$$\lim f(x) = f(x_0), \qquad \text{c. v. d.}$$

Il teorema precedente si può applicare in molte questioni. Eccone un esempio.

TEOREMA. — *Se le serie*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots$$

e

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \ldots\ldots$$

sono convergenti, ed è pure convergente la serie

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \ldots, \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0, \ldots,$$

la somma di questa serie è eguale al prodotto delle somme delle due serie date (V. N. 145).

Infatti, se x è una quantità positiva minore di 1, sono convergenti le serie

$$u_0, \quad u_1 x, \quad u_2 x^2, \ldots\ldots$$

e

$$v_0, \quad v_1 x, \quad v_2 x^2, \ldots\ldots$$

e sono pure convergenti le serie formate coi loro moduli. Onde applicando il teorema del N. 145 si deduce, per $x < 1$,

$$(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots)(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots\ldots)$$
$$= w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots\ldots$$

Facciasi qui tendere x verso 1: pel teorema precedente le serie

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$
$$v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots\ldots$$
$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots\ldots$$

tendono rispettivamente alle somme delle serie date, e quindi

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \qquad \text{c. v. d.}$$

CAPITOLO VII.

Integrali indefiniti.

161. — Una funzione $F(x)$ avente per derivata $f(x)$ dicesi funzione *primitiva*, o *integrale* di $f(x)$, (o del differenziale $f(x)\,dx$), e si scrive

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Quindi, per definizione, questa equazione equivale alla

$$F'(x) = f(x).$$

Se $f(x)$ ha un integrale $F(x)$, ne ha infiniti, perchè ogni funzione $F(x) + C$, ove C è una costante arbitraria, ha ancora per derivata $f(x)$; reciprocamente ogni funzione che ha per derivata $f(x)$ non differirà da $F(x)$ che per una costante, ed è della forma $F(x) + C$.

L'espressione $F(x) + C$, ove a C non si attribuisca alcun valore speciale, dicesi l'*integrale generale* di $f(x)\,dx$, perchè attribuendo a C varii valori si trovano tutti gli integrali di $f(x)\,dx$, ciascheduno dei quali dicesi anche *integrale particolare*. Gli integrali, di cui attualmente ci occupiamo, soglionsi chiamare *integrali indefiniti.*

162. Teorema. — *Se la funzione* f(x) *è continua nell'intervallo* (a, b), *esiste una ed una sola funzione definita nell'intervallo* (a, b), *la cui derivata è* f(x), *e che assume un valore dato arbitrariamente corrispondentemente a un dato valore della variabile.*

Sia p. e. $a < b$, e siano

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, \ldots \; x_{n-1}, \quad x_n = b$$

valori crescenti di x, che divideranno l'intervallo (a, b) in n intervalli parziali. Si rappresentino in generale con $l(\alpha, \beta)$, e $\lambda(\alpha, \beta)$ rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore dei valori assunti da $f(x)$ mentre x varia nell'intervallo (α, β), i quali ne sono anche il massimo ed il minimo (N. 21). Sia $\varphi(x)$ la funzione definita nell'intervallo (a, b) a questo modo:

per $x = a$, $\varphi(a) = A$, A essendo una quantità scelta ad arbitrio; nell'intervallo (a, x_1), compresi gli estremi, sia

$$\varphi(x) = A + (x - a)\, l(a, x_1),$$

nell'intervallo (x_1, x_2) sia

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_1) + (x - x_1)\, l(x_1, x_2)\\ &= A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + (x - x_1)\, l(x_1, x_2),\end{aligned}$$

ed in generale, nell'intervallo (x_{r-1}, x_r) sia

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_{r-1}) + (x - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r)\\ &= A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + (x_2 - x_1)\, l(x_1, x_2) + \ldots\ldots\\ &\qquad + (x_{r-1} - x_{r-2})\, l(x_{r-2}, x_{r-1}) + (x - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r).\end{aligned}$$

Le quantità $l(a, x_1)$, $l(x_1, x_2)$, ... sono tutte comprese fra $l(a, b)$, e $\lambda(a, b)$; onde si ricava

$$A + l(a, b)(x - a) > \varphi(x) \geq A + \lambda(a, b)(x - a).$$

La natura della funzione $\varphi(x)$ dipende dalla scelta dei valori $x_1, x_2, \ldots$ interpolati fra a e b; e attribuendo alla variabile x un valore fisso, e variando in tutti i modi possibili $x_1, x_2, \ldots, \varphi(x)$ assumerà in generale infiniti valori, tutti compresi entro limiti finiti, come risulta dalla ultima diseguaglianza. Sia $F(x)$ il limite inferiore dei valori che assume $\varphi(x)$, conservando fisso x, e variando la divisione dell'intervallo (a, b). Dico che la funzione $F(x)$, che per $x=a$ assume evidentemente il valore A, ha per derivata $f(x)$.

Infatti, dati ad x due valori X_1 ed $X_2 > X_1$, ed eseguita una divisione arbitraria dell'intervallo (a, b), e calcolata la $\varphi(x)$ corrispondente, se X_1 cade nell'intervallo (x_{r-1}, x_r) e X_2 in (x_{r-1}, x_s), sarà

$$\varphi(X_1)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\dots+(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, x_r),$$

e

$$\varphi(X_2)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\dots+(x_r-x_{r-1})l(x_{r-1}, x_r)+\dots$$
$$+(X_2-x_{s-1})\,l\,(x_{s-1}, x_s).$$

Suddividasi l'intervallo (x_{r-1}, x_r) in (x_{r-1}, X_1) e (X_1, x_r), e l'intervallo (x_{s-1}, x_s) in (x_{s-1}, X_2) e (X_2, x_s); e sia $\varphi'(x)$ la funzione analoga a $\varphi(x)$ calcolata su questa nuova divisione dell'intervallo (a, b). Sarà

$$\varphi'(X_1)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\dots+(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, X_1)$$

e

$$\varphi'(X_2)=A+(x_1-a)l(a, x_1)+\dots+(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, X_1)+$$
$$+(x_r-X_1)l(X_1, x_r)+\dots+(X_2-x_{s-1})l(x_{s-1}, X_2),$$

quindi, paragonando le espressioni di $\varphi'(X_1)$ e $\varphi(X_1)$, ed osservando che $l(x_{r-1}, X_1)\leqq l(x_{r-1}, x_r)$, si ha

$$\varphi'(X_1)\leqq\varphi(X_1);$$

analogamente, paragonando $\varphi'(X_2)$ e $\varphi(X_2)$, e osservando che

$$(X_1-x_{r-1})l(x_{r-1}, X_1)+(x_r-X_1)l(X_1, x_r)\leqq(x_r-x_{r-1})l(x_{r-1}, x_r)$$

e

$$l(x_{s-1}, X_2)\leqq l(x_{s-1}, x_s),$$

si deduce

$$\varphi'(X_2) \leqq \varphi(X_2).$$

D'altra parte si ha

$$\varphi'(X_2) - \varphi'(X_1) = (x_r - X_1)\, l(X_1, x_r) + \ldots + (X_2 - x_{s-1})\, l(x_{s-1}, X_2),$$

e sostituendo a $l(X_1, x_r) \ldots l(x_{s-1}, X_2)$ rispettivamente $l(X_1, X_2)$ e $\lambda(X_1, X_2)$, entro cui esse sono comprese, si ha

$$(X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2) \geqq \varphi'(X_2) - \varphi'(X_1) \geqq (X_2 - X_1)\, \lambda\, X_1, X_2);$$

e questa diseguaglianza si decompone nelle due

$$\varphi'(X_2) \leqq \varphi'(X_1) + (X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2) \qquad (a)$$

e

$$\varphi'(X_2) \geqq \varphi'(X_1) + (X_2 - X_1)\, \lambda(X_1, X_2). \qquad (b)$$

Ora $F(X_2)$ è il limite inferiore dei valori di $\varphi(x_2)$, e quindi anche di $\varphi'(X_2)$, onde $\varphi'(X_2) \geqq F(X_2)$; e siccome si è trovato $\varphi'(X_1) \leqq \varphi(X_1)$, dalla diseguaglianza ($a$) si ricava

$$F(X_2) \leqq \varphi(X_1) + (X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2),$$

e questa, che è soddisfatta da tutti i valori di $\varphi(X_1)$ sarà ancora verificata dal loro limite inferiore $F(X_1)$, onde

$$F(X_2) \leqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2),$$

e quindi

$$\frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \leqq l(X_1, X_2). \qquad (a')$$

In modo analogo, dalla diseguaglianza (b), osservando che $\varphi(X_2) \geqq \varphi'(X_2)$, e $\varphi'(X_1) \geqq F(X_1)$, si ricava

$$\varphi(X_2) \geqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\, \lambda(X_1, X_2).$$

quindi anche $F(X_2)$, che è il limite inferiore di $\varphi(X_2)$, sarà $\geqq$ della quantità di destra:

$$F(X_2) \geqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\,\lambda(X_1, X_2),$$

onde

$$\frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \geqq \lambda(X_1, X_2). \qquad (b')$$

Le (a') e (b') riunite dànno

$$l(X_1, X_2) \geq \frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \geq \lambda(X_1, X_2).$$

Questa formula è dimostrata per $X_2 > X_1$, ma in essa X_1 e X_2 compaiono simmetricamente, quindi questa condizione si può togliere. Facciasi in questa diseguaglianza $X_1 = x$, $X_2 = x + h$; si avrà:

$$l(x, x+h) \geqq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqq \lambda(x, x+h),$$

e facendo tendere h a zero, siccome, per la continuità di $f(x)$,

$$\lim l(x, x+h) = \lim \lambda(x, x+h) = f(x),$$

si deduce

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

ossia la funzione $F(x)$ ha appunto per derivata $f(x)$.

Risulta così trovata una funzione $F(x)$ che per $x = a$ assume un valore arbitrario A, e la cui derivata è $f(x)$, il che volevasi fare.

Regole d'integrazione.

163. — Dalle formule che dànno i differenziali di funzioni si ricavano facilmente altre formule che dànno gli integrali di quei differenziali.

Così ad esempio dalla formula

$$d\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\,dx \qquad\qquad (n \gtrless -1)$$

si ricava

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad\qquad [1]$$

la quale serve qualunque sia n purchè non eguale a -1.

Supposto $x > 0$ si ha

$$d \log x = \frac{dx}{x}\,,$$

onde si ricava

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C\,.$$

Se $x < 0$, e quindi $-x$ positivo, si avrà

$$d \log(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}\,,$$

onde per x negativo si avrà

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C\,;$$

del resto questa nuova formula coincide colla precedente, perchè introdotti i logaritmi immaginarii, $\log x$ e $\log -x$ non differiscono fra loro che per un multiplo dispari di πi, ossia per una costante. Quindi si avrà:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C = \log(-x) + C = \frac{1}{2} \log x^2 + C, \qquad [2]$$

dove le varie costanti non hanno necessariamente lo stesso valore.

L' $\int \frac{dx}{x}$ si può anche dedurre dall' $\int x^n\, dx$ facendo tendere n verso -1. Per riconoscere questa verità si consideri fra gli infiniti valori di $\int x^n\, dx$ quello che si annulla per $x = 1$; esso sarà

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1};$$

facendo tendere n verso -1, il limite del membro di destra, che si determina derivando numeratore e denominatore rispetto n, è appunto $\log x$, cioè quell' $\int \frac{dx}{x}$ che si annulla per $x = 1$.

164. — Analogamente dalla formula

$$d \operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1 + x^2}$$

si ricava

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C. \qquad [3]$$

Dalle formule

$$d \operatorname{arc\,sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{e} \quad d \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C \qquad [4]$$

dove le costanti non sono eguali fra loro. Ma queste due espressioni si possono facilmente ridurre l'una all'altra, perchè

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}\,.$$

e quindi $\text{arc sen}\, x$ e $-\text{arc cos}\, x$ non differiscono che per una costante.

Menzioneremo ancora i seguenti integrali

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \tag{5}$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \text{sen}\, ax + C\,, \quad \int \text{sen}\, ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C. \tag{6}$$

165. — La somma

$$\int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, dx - \int \chi(x)\, dx$$

ha per derivata

$$\varphi(x) + \psi(x) - \chi(x)\,,$$

onde

$$\int [\varphi(x) + \psi(x) - \chi(x)]\, dx = \int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, dx - \int \chi(x)\, dx \tag{7}$$

ossia *l'integrale d'una somma algebrica è eguale alla somma degli integrali.*

Il prodotto $a \int f(x)\, dx$ ha per derivata $a f(x)$, onde

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx \tag{8}$$

ossia *l'integrale del prodotto d'una costante per una funzione è eguale alla costante moltiplicata per l'integrale della funzione.*

Le formule [1], [2], [7], [8] permettono d'eseguire l'integrale d'ogni funzione della forma

$$ax^m + bx^n + cx^p + \dots ,$$

ove $a, b, c, \dots$ e $m, n, p, \dots$ sono costanti qualunque e queste non eguali a -1, e si ha

$$\int (ax^m + bx^n + cx^p + \dots)\, dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + \dots$$

Ogni funzione intera si può ridurre alla forma precedente, in cui $m, n, p, \dots$ sono interi e positivi; onde si deduce:

L'integrale d'una funzione intera è pure funzione intera.

166. — Se in $\int f(x)\, dx$ si pone $x = \varphi(t)$, questo integrale diventa una funzione di t, ed il suo differenziale sarà ancora $f(x)\, dx$, ove $x = \varphi(t)$ e $dx = \varphi'(t)\, dt$; onde si deduce che

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt ,$$

e così si è trasformato l'integrale cercato in un altro mediante un *cambiamento di variabile*. Se si sa eseguire il secondo integrale, basterà sostituire a t la sua espressione in x per avere il primo.

Esempio. — Vogliasi $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$. Pongasi $x - a = t$; onde $dx = dt$; si ricava

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m}\, dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + C = -\frac{1}{(m-1)\, t^{m-1}} + C$$

e sostituendo a t il suo valore

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C .$$

Questa formula serve per $m \gtrless 1$. Nel caso di $m = 1$ si ha

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \log(x-a) + C,$$

ovvero
$$= \log(a-x) + C,$$

ovvero
$$= \frac{1}{2} \log(x-a)^2 + C.$$

167. — Dalla formula

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

ove u e v sono funzioni di x si deduce

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

e quindi

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

In questa formula consiste il procedimento detto d'*integrazione per parti*. Per applicarlo si decomponga il differenziale ad integrarsi in due fattori, l'uno finito u, e l'altro dv che sia il differenziale d'una funzione v facile a determinarsi; l'integrale cercato resta decomposto in due parti, l'una integrata, e l'altra affetta dal segno integrale; e se questo nuovo integrale è più semplice del precedente, si avrà fatta un' utile applicazione di questo procedimento.

Es. Vogliasi l' $\int x^m \log x\,dx$. Pongasi

$$u = \log x, \quad dv = x^m\,dx,$$

onde

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

si avrà

$$\int x^m \log x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \int \frac{x^m\,dx}{m+1},$$

ossia

$$\int x^m \log x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

Integrazione delle funzioni razionali.

168. — Ogni funzione razionale fratta di x si può mettere sotto la forma

$$\frac{F(x)}{f(x)},$$

ove $F(x)$ ed $f(x)$ sono funzioni intere di x.

Se il grado del numeratore è maggiore o eguale a quello del denominatore, si divida $F(x)$ per $f(x)$: sia Q il quoziente ed R il resto; si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{R}{f(x)},$$

ed integrando, siccome l' $\int Q\,dx$ si sa fare, siamo ridotti ad integrare una frazione in cui il numeratore è di grado inferiore a quello del denominatore. Per fare questa integrazione ci occorre la teoria algebrica della decomposizione delle funzioni fratte in frazioni della forma

$$\frac{A}{(x-a)^m}$$

dette *frazioni semplici*.

169. — Sia adunque il grado di $F(x)$ minore di quello di $f(x)$. Sia a una radice dell'equazione $f(x)=0$, ed α il suo ordine di multiplicità. Pongasi

$$f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$$

ove $\varphi(x)$ è un polinomio intero non divisibile per $x-a$, e quindi $\varphi(a) \gtrless 0$.

Dall'identità, qualunque sia A,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}\,\varphi(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$$

si ricava

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{F(x)-A\,\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\,\varphi(x)}.$$

Si determini la costante A in modo che il numeratore della seconda frazione sia divisibile per $x-a$: perciò è necessario e sufficiente che esso si annulli per $x=a$, e si ha l'equazione

$$F(a)-A\,\varphi(a)=0,$$

onde A risulta determinato

$$A=\frac{F(a)}{\varphi(a)}$$

ed il suo valore è finito, perchè $\varphi(a)$ non è nullo. Così determinato A, la seconda frazione si può semplificare, e posto

$$F(x)-A\,\varphi(x)=(x-a)\,F_1(x)$$

si ha

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\,\varphi(x)},$$

ed il grado di $F_1(x)$ sarà minore del grado del denominatore, perchè il grado di $F(x)-A\,\varphi(x)$ è minore di quello di $(x-a)^{\alpha}\,\varphi(x)$.

Se $\alpha>1$, si operi sulla seconda frazione del membro di destra come si è fatto sulla data, e si avrà

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\,\varphi(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\,\varphi(x)}.$$

e così continuando, si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{G(x)}{\varphi(x)},$$

ove $G(x)$ è un polinomio intero di grado minore di quello di $\varphi(x)$. In questa nuova frazione al denominatore non comparisce più la radice a: se b è una radice multipla β volte di $f(x)=0$, e quindi anche di $\varphi(x)=0$, si potrà decomporre in modo analogo $\frac{G(x)}{\varphi(x)}$, e così continuando, se $a, b, \ldots l$ sono le radici dell'equazione $f(x)=0$, ed $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ il loro ordine di multiplicità, si avrà

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)}=&\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{L}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.\end{aligned}$$

e così resta decomposta la frazione data in frazioni semplici.

170. — Se le radici $a, b, \ldots l$ di $f(x)=0$ sono semplici, si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}.$$

I numeratori costanti si ottengono col procedimento indicato; così posto

$$f(x)=(x-a)\,\varphi(x)$$

si ha

$$A=\frac{F(a)}{\varphi(a)}.$$

Ma derivando l'equazione precedente si ha

$$f'(x)=(x-a)\,\varphi'(x)+\varphi(x),$$

e ponendo $x = a$

$$f'(a) = \varphi(a),$$

onde

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

Analogamente si ha

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \ldots L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

e queste nuove formule sono spesso più comode pel calcolo, perchè riesce spesso più facile calcolare la derivata di $f(x)$ che i suoi quozienti per $x - a$, $x - b, \ldots$

Se

$$f(x) = (x - a)(x - b)\ldots(x - l),$$

si avrà

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x - a} = (x - b)(x - c)\ldots(x - l),$$

onde

$$\varphi(a) = (a - b)(a - c)\ldots(a - l)$$

e

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F(a)}{(a - b)(a - c)\ldots(a - l)}.$$

Analogamente

$$B = \frac{F(b)}{(b - a)(b - c)\ldots(b - l)}, \ldots L = \frac{F(l)}{(l - a)(l - b)\ldots\ldots}.$$

Sostituendo questi valori nella prima formula, e moltiplicando per $f(x)$ si ricava

$$F(x) = \frac{(x - b)\ldots(x - l)}{(a - b)\ldots(x - l)} F(a) + \frac{(x - a)(x - c)\ldots(x - l)}{(b - a)(b - c)\ldots(b - l)} F(b) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - a)(x - b)\ldots\ldots}{(l - a)(l - b)\ldots\ldots} F(l).$$

che esprime un polinomio intero $F(x)$ in funzione dei valori che esso assume pei valori $a, b, \dots l$ della variabile, il cui numero è maggiore del grado di $F(x)$. Questa formula è conosciuta sotto il nome di formula d'interpolazione di Lagrange.

171. — Il calcolo differenziale somministra dei procedimenti utili per determinare i numeratori delle frazioni semplici, anche nel caso delle radici multiple.

Conservando le notazioni precedenti, se si moltiplica per $(x-a)^\alpha$ l'equazione

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{G(x)}{\varphi(x)}$$

ove $f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$, si avrà:

$$\frac{(x-a)^\alpha F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

$$= A + A_1(x-a) + \dots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha \frac{G(x)}{\varphi(x)}.$$

Se in questa si fa $x=a$ il terzo membro si riduce ad A, il secondo ad $\frac{F(a)}{\varphi(a)}$, ed il primo si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma se ne può determinare il limite coi procedimenti noti. Se invece la si deriva, poi si fa $x=a$, l'ultimo membro si riduce ad A_1, e si hanno così due espressioni di A_1, e così di seguito.

Si può pure osservare che l'ultima formula dà lo sviluppo di $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in un polinomio ordinato secondo le potenze discendenti di $x-a$, completato col resto $(x-a)^\alpha \frac{G(x)}{\varphi(x)}$, ed esso si può ottenere colla formula di Taylor, ovvero colla divisione algebrica.

172. — Ottenuta la decomposizione in frazioni semplici di $\frac{F(x)}{f(x)}$, si avrà il suo integrale ricorrendo alle formule

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C \qquad \text{se} \qquad \alpha > 1$$

e

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \log(x-a) + C = A \log(a-x) + C$$

$$= \frac{1}{2} A \log(x-a)^2 + C,$$

e se ne deduce che

Ogni funzione algebrica razionale è integrabile con funzioni algebriche razionali e logaritmi, supposte note tutte le radici del denominatore.

Ciò che precede sussiste sia che siano reali o immaginarii i coefficienti di F ed f. Ma se i coefficienti sono reali, ed è pure reale x, se $f(x)$ ha radici immaginarie, l'integrale risulta complicato di immaginarii, ed è conveniente il farli sparire. A questo scopo si osservi che se a è una radice complessa multipla α volte di $f(x)=0$, anche la sua coniugata, che diremo b, sarà multipla lo stesso numero di volte; onde i termini

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad \text{e} \qquad \frac{B}{(x-b)^k}$$

sono coniugati, ed i loro integrali, per $k > 1$,

$$-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \qquad \text{e} \qquad -\frac{B}{(k-1)(x-b)^{k-1}}$$

sono pure immaginarii coniugati, e la loro somma è reale.

Se l'esponente vale 1, la somma

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

ha per integrale

$$A \log(x-a) + B \log(x-b),$$

ossia, posto

$$a = p + iq \qquad b = p - iq$$
$$A = h + ik, \qquad B = h - ik,$$

l'integrale diventa

$$(h+ik)\log(x-p-iq) + (h-ik)\log(x-p+iq),$$

ovvero per formule note

$$(h+ik)\left[\log\sqrt{(x-p)^2+q^2} - i \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p}\right]$$
$$+(h-ik)\left[\log\sqrt{(x-p)^2+q^2} + i \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p}\right],$$

e semplificando esso diventa

$$h \log[(x-p)^2+q^2] + 2k \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p},$$

e così scomparvero gli immaginarii.

Del resto questo integrale si può ottenere senza passare per gli immaginarii, perchè, riducendo allo stesso denominatore si ha

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = 2\frac{h(x-p)-kq}{(x-p)^2+q^2},$$

ed il suo integrale vale la somma dei due integrali

$$\int \frac{2h(x-p)\,dx}{(x-p)^2+q^2} = h\int \frac{d[(x-p)^2+q^2]}{(x-p)^2+q^2} = h\log[(x-p)^2+q^2]$$

e

$$-2k\int \frac{q\,dx}{(x-p)^2+q^2} = -2k\int \frac{d\,\frac{x-p}{q}}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1} = -2k \operatorname{arc\,tang} \frac{x-p}{q},$$

ovvero anche

$$+2k \text{ arc tang } \frac{q}{x-p},$$

perchè $-\text{arc tang } z$ e $+\text{arc tang } \frac{1}{z}$ non differiscono fra loro che per una costante.

173. — *Esempi.*

1°
$$\int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Servendoci delle notazioni precedenti si ha

$$F(x)=1, \quad f(x)=1-x^2, \quad a=1, \quad b=-1:$$

$$f'(x)=-2x, \quad A=\frac{F(a)}{f'(a)}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}, \quad B=\frac{F(b)}{f'(b)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right],$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left|\log(x+1)-\log(x-1)\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

2° $\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}$, che si può scrivere $\int \frac{a\,dx}{(ax+b)^2+(ac-b^2)}$.

Se $ac-b^2>0$, posto $ax+b=\sqrt{ac-b^2}\,z$, si ha

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \text{ arc tang } z+C,$$

ed infine

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \text{ arc tang } \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C.$$

Se invece $ac-b^2<0$, pongasi

$$ax+b=\sqrt{b^2-ac}\,z,$$

si avrà

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-ac}} \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{z-1}{z+1} + C ,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} + C .$$

3°
$$\int \frac{px+q}{ax^2+2bx+c}\, dx .$$

Esso si decompone nella somma dei due integrali

$$\frac{p}{2a} \int \frac{2ax+2b}{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{p}{2a} \log (ax^2+2bx+c)$$

e

$$\int \frac{q-\frac{bp}{a}}{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{aq-bp}{a} \int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}$$

precedentemente ottenuto.

4° — Più generalmente l'integrale

$$\int \frac{p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \dots + p_{n-1}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n}\, dx$$

in cui il numeratore è di grado minore d'una unità a quello del denominatore si può decomporre nella somma dei due integrali

$$\frac{p_0}{nq_0} \int \frac{nq_0 x^{n-1} + (n-1) q_1 x^{n-2} + \dots + q_{n-1}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n}\, dx =$$

$$= \frac{p_0}{nq_0} \log (q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n)$$

e

$$\frac{1}{nq_0} \int \frac{[nq_0 p_1 - (n-1) q_1 p_0]\, x^{n-2} + \dots\dots}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n}\, dx ,$$

in cui il grado del numeratore è minore di due unità almeno a quello del denominatore.

5°
$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}\,dx\,,$$

ove $f(x)$ è una funzione intera di grado minore di n.

Ricorrendo alla formula di Taylor si ha

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Di qui si ricava

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(a)}{(x-a)^n}+\frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{f''(a)}{2!\,(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!\,(x-a)}\,,$$

e quindi

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}\,dx=-\frac{f(a)}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}-\frac{f'(a)}{(n-2)\,(x-a)^{n-2}}-\ldots$$
$$+\frac{f^{(n-1)}a}{(n-1)!}\log(x-a)+C.$$

174. — La decomposizione d'una frazione in frazioni semplici si può pure ottenere col seguente

Teorema. — *La frazione* $\dfrac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$, *ove*

$$\varphi(x)=p_0\,x^m+p_1\,x^{m-1}+\ldots\ldots+p_m$$

e

$$\psi(x)=q_0\,x^n+q_1\,x^{n-1}+\ldots\ldots+q_n$$

sono funzioni intere di gradi m *ed* n *prime fra loro, ed*

$$F(x)=a_0\,x^{m+n-1}+a_1\,x^{m+n-2}+\ldots\ldots a_{m+n-1}$$

è una funzione di grado minore di quello del prodotto $\varphi(x)\psi(x)$, *si può decomporre nella somma di due frazioni*

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}=\frac{P}{\varphi(x)}+\frac{Q}{\psi(x)},$$

ove P *e* Q *sono funzioni intere di grado minore di quelli dei denominatori corrispondenti.*

Invero, se fra le $m+n+1$ equazioni

$$\begin{array}{rl}
F(x)= & a_0 x^{m+n-1}+a_1 x^{m+n-2}+\ldots\ldots+a_{m+n-1}\\
x^{n-1}\varphi(x)= & p_0 x^{m+n-1}+p_1 x^{m+n-2}+\ldots\ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(x)= & \qquad\qquad p_0 x^m+\ldots\ldots+p_m\\
x^{m-1}\psi(x)= & q_0 x^{m+n-1}+q_1 x^{m+n-2}+\ldots\ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi(x)= & \qquad\qquad q_0 x^n+\ldots\ldots+q_n
\end{array}$$

si eliminano le $m+n$ quantità

$$x^{m+n-1},\quad x^{m+n-2},\ldots\ldots x^0$$

che vi compaiono linearmente, si ha

$$\begin{vmatrix}
F(x) & a_0 & a_1\ldots\ldots\ldots a_{m+n-1}\\
x^{n-1}\varphi(x) & p_0 & p_1\ldots\ldots\ldots 0\\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(x) & 0 & 0\ldots\ldots\ldots p_m\\
x^{m-1}\psi(x) & q_0 & q_1\ldots\ldots\ldots 0\\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi(x) & 0 & 0\ldots\ldots\ldots q_n
\end{vmatrix}=0,$$

e sviluppando questo determinante secondo la prima verticale, si ha

$$AF(x)+(A_1 x^{n-1}+\ldots\ldots+A_n)\varphi(x)+(A_{n+1}x^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m+n})\psi(x)=0.$$

Il coefficiente A, che è il suddeterminante di $F(x)$ non è nullo, perchè è il risultante calcolato col metodo dialitico di Sylvester delle due funzioni $\varphi(x)$

e $\psi(x)$ che sono prime fra loro: onde risolvendo l'ultima equazione rispetto $F(x)$ si ha

$$F(x) = Q\,\varphi(x) + P\,\psi(x).$$

ove Q e P sono polinomii dei gradi $n-1$ ed $m-1$ in x: e quindi

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)} = \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)}. \qquad \text{c. v. d.}$$

Applicando più volte questo teorema si deduce che se in $\frac{F(x)}{f(x)}$ si può decomporre il denominatore nel prodotto di più funzioni intere prime fra loro

$$f(x) = \chi_1\,\chi_2 \cdots \chi_n,$$

si avrà

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_1}{\chi_1} + \frac{P_2}{\chi_2} + \ldots + \frac{P_n}{\chi_n},$$

ove $P_1, P_2, \ldots P_n$ sono polinomii interi di grado minore del grado del denominatore corrispondente. Quindi si avrà

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{P_1}{\chi_1}\,dx + \int \frac{P_2}{\chi_2}\,dx + \ldots + \int \frac{P_n}{\chi_n}\,dx.$$

Come caso particolare, se si conoscono le radici di $f(x) = 0$, ossia se:

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}\,(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n},$$

si avrà

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{P_1}{(x - a_1)^{\alpha_1}}\,dx + \int \frac{P_2}{(x - a_2)^{\alpha_2}}\,dx + \ldots\ldots$$

e gli integrali del membro di destra si sanno fare sotto forma finita (N. 173, 5°).

Se in $\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$ il grado del numeratore è minore di due unità del grado del denominatore (N. 173, 4°), e φ e ψ sono prime fra loro, posto

$$H = \begin{vmatrix} \varphi'(x) & \varphi(x) \\ \psi'(x) & \psi(x) \end{vmatrix},$$

sarà conveniente decomporre

$$F(x) = AH + Q\,\varphi(x) + P\,\psi(x),$$

onde

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)} = A\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right) + \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)},$$

ove A è una costante, e P e Q sono polinomii interi il cui grado è minore anch'esso di due unità del grado del denominatore corrispondente. Quindi integrando si ha

$$\int \frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}\,dx = A \log \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \int \frac{P}{\varphi(x)}\,dx + \int \frac{Q}{\psi(x)}\,dx. \quad (*)$$

Così ad esempio, per decomporre l'integrale $\int \frac{A}{BC}\,dx$, ove

$$A = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2,$$
$$B = b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2,$$
$$C = c_0 x^2 + 2c_1 x + c_2,$$

posto

$$H = \begin{vmatrix} b_0 x + b_1 & b_1 x + b_2 \\ c_0 x + c_1 & c_1 x + c_2 \end{vmatrix} = h_0 x^2 + 2h_1 x + h_2,$$

si ricorrerà all'identità, che si ottiene dalle equazioni precedenti eliminando x^2, x^1, x^0:

$$\begin{vmatrix} A & a_0 & a_1 & a_2 \\ H & h_0 & h_1 & h_2 \\ B & b_0 & b_1 & b_2 \\ C & c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

onde si ricava

$$A\,(hbc) - H\,(abc) + B\,(ahc) - C\,(ahb) = 0,$$

rappresentando coi simboli (hbc), (abc),... i determinanti di terzo ordine complementari di A, H,... Quindi si deduce

$$\int \frac{A}{BC}\,dx = \frac{(abc)}{(hbc)}\,\frac{1}{2}\log\frac{B}{C} + \frac{(ahb)}{(hbc)}\int\frac{dx}{B} - \frac{(ahc)}{(hbc)}\int\frac{dx}{C}.$$

Se il lettore conosce la teoria delle formazioni invariantive, riconosce nella formula (*) che godono appunto di proprietà invariantiva i tre integrali, e che A, P, Q sono formazioni invariantive (invarianti e convarianti) di F, φ e ψ.

Come si disse, non si sa eseguire l'integrale $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ ove non si conoscano le radici del denominatore. Però, se $f(x)$ ha radici multiple, si può decomporre l'integrale nella parte algebrica, e in uno o più integrali di funzioni fratte, in cui il denominatore ha tutte le radici semplici. Invero l'algebra insegna come, con successive divisioni, si possano ottenere i polinomi $\chi_1\,\chi_2 \ldots \chi_m$ tali che

$$f(x) = \chi_1 \cdot \chi_2^2 \cdot \chi_3^3 \cdots \chi^m{}_m,$$

dove $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_m$ sono polinomii primi fra loro, ed ognuno ha sole radici semplici; quindi si avrà:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_1}{\chi_1} + \frac{P_2}{\chi_2^2} + \frac{P_3}{\chi_3^3} + \ldots + \frac{P_m}{\chi_m{}^m},$$

e l'integrale cercato sarà ridotto alla somma di più integrali della forma

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx.$$

Sia χ' la derivata di χ; si determinino due polinomii U e V tali che

$$P = U\chi + V\chi',$$

il che è possibile in infiniti modi, ove non si faccia alcuna ipotesi sui gradi di U e V. Invero essendo χ ed χ' primi fra loro, perchè χ ha sole radici semplici, si potranno calcolare, in virtù del teorema dimostrato, due polinomii M ed N in modo che

$$1 = M\chi + N\chi':$$

moltiplicando quest'equazione per P:

$$P = PM\chi + PN\chi',$$

ed aggiungendovi l'identità

$$0 = W\chi'\chi - W\chi\chi'$$

ove W è un polinomio qualunque, si avrà:

$$P = (PM + W\chi')\chi + (PN - W\chi)\chi',$$

ossia

$$P = U\chi + V\chi',$$

e, a causa dell'arbitrarietà di W, questo si può fare in infiniti modi.

Quindi si ha

$$\frac{P}{\chi^n} = \frac{U\chi + V\chi'}{\chi^n} = \frac{U}{\chi^{n-1}} + \frac{V\chi'}{\chi^n},$$

e

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx = \int \frac{U}{\chi^{n-1}}\,dx + \int \frac{V\chi'}{\chi^n}\,dx.$$

Ma integrando per parti il secondo integrale, si deduce

$$\int \frac{V\chi'}{\chi^n}\,dx = -\frac{V}{(n-1)\chi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{V'}{\chi^{n-1}}\,dx,$$

onde

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx = -\frac{V}{(n-1)\chi^{n-1}} + \int \frac{U + \dfrac{1}{n-1}V'}{\chi^{n-1}},$$

e così l'integrale proposto è espresso mediante una funzione algebrica ed un nuovo integrale, della stessa forma del dato, in cui l'esponente n è diminuito di un' unità. Ripetendo la stessa operazione sul nuovo integrale, si avrà infine

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx = \text{funzione razionale di } x + \int \frac{Q}{\chi}\,dx.$$

Eseguendo la stessa operazione su tutti gli integrali in cui si è decomposto $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ si avrà:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \text{funzione razionale} + \int \frac{Q_1}{\chi_1}\,dx + \int \frac{Q_2}{\chi_2}\,dx + \ldots + \int \frac{Q_n}{\chi_n}\,dx,$$

dove Q_1, $Q_2, \ldots Q_n$ sono polinomii interi.

Integrazione di funzioni irrazionali.

175. — Se la funzione da integrarsi non contiene che irrazionali monomii, cioè potenze fratte della variabile x, si potrà rendere razionale il differenziale ponendo

$$x = z^n, \qquad \text{onde} \qquad dx = nz^{n-1}dz,$$

e scegliendo l'esponente n in modo da far sparire gli irrazionali; e basterà a questo scopo prendere per n un multiplo comune dei denominatori degli esponenti frazionarii. Così ad es., posto $x = z^6$, si avrà

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+z^2}{1-z^3}\,6\,z^5 dz,$$

e la funzione ad integrarsi è razionale.

In modo analogo si rende razionale un differenziale non contenente altra irrazionalità che potenze fratte del binomio $a+bx$, ovvero della funzione $\frac{a+bx}{c+dx}$, ponendo rispettivamente

$$a+bx = z^n, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{a+bx}{c+dx} = z^n,$$

e scegliendo l'esponente n in modo da far sparire gli irrazionali.

176. — Un differenziale della forma

$$f\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right)dx,$$

ove f rappresenta una funzione razionale di due variabili, si può pure rendere razionale con acconcie trasformazioni.

Pongasi

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz. \tag{1}$$

Elevando a quadrato, si ha

$$a+bx+cx^2=a+2\sqrt{a}\,xz+x^2z^2;$$

sottraendo da ambo i membri a e dividendo per x

$$b+cx=2\sqrt{a}\,z+xz^2,$$

ove x comparisce a primo grado; risolvendola rispetto x si ha:

$$x=\frac{2\sqrt{a}\,z-b}{c-z^2},$$

onde

$$dx=2\,\frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}\,z^2}{(c-z^2)^2}\,dz,$$

e sostituendo nella (1)

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}\,z^2}{c-z^2}:$$

quindi l'integrale cercato

$$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx=$$

$$\int f\left(\frac{2\sqrt{a}\,z-b}{c-z^2},\ \frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}\,z^2}{c-z^2}\right)2\,\frac{c\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}\,z^2}{(c-z^2)^2}\,dz,$$

diventa l'integrale d'una funzione razionale.

Se tutte le quantità che compaiono nel differenziale sono reali, questa sostituzione introduce degli immaginarii se a è negativo. Con una piccola modificazione ci possiamo liberare da questo inconveniente.

Il trinomio $a+bx+cx^2$ deve essere positivo per qualche valore di x, se la sua radice quadrata è reale per alcuni valori di x. Sia adunque x_0 tale che

$$a+bx_0+cx_0^2 \geqq 0.$$

Si ha dalla formula di Taylor

$$a+bx+cx^2=a+bx_0+cx_0^2+(b+2cx_0)(x-x_0)+c(x-x_0)^2.$$

Facciasi la sostituzione

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a+bx_0+cx_0^2}+(x-x_0)z \qquad (2)$$

Elevando a quadrato e riducendo si ha

$$(b+2cx_0)+c(x-x_0)=2\sqrt{a+bx_0+cx_0^2}\,.\,z+(x-x_0)z^2,$$

equazione di primo grado in x, onde si ricava x funzione razionale di z; e $\frac{dx}{dz}$ risulta pure funzione razionale di z, e sostituendo nella (2) anche il radicale diventa funzione razionale di z, ed il differenziale dato diventa razionale.

Se si suppone $x_0=0$ si ha la sostituzione precedente. Se x_0 è tale che $a+bx_0+cx_0^2=0$, ossia, se, posto

$$a+bx+cx^2=c(x-\alpha)(x-\beta),$$

si fa $x_0=\alpha$, si avrà la sostituzione

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)z \qquad (3)$$

ossia, elevando a quadrato e riducendo

$$c(x-\beta)=(x-\alpha)z^2$$

equazione di primo grado in x.

È a notarsi che se $a<0$, e quindi non è applicabile la trasformazione (1), si può applicare la (3), perchè il trinomio $a+bx+cx^2$ che è negativo per $x=0$, ed è positivo per alcuni valori di x si deve annullare, ed avere radici reali.

Si può pure fare

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c}\,x-z \tag{4}$$

onde si ricava

$$a+bx=z^2-2\sqrt{c}\,x\,z$$

equazione di primo grado in x, da cui si ricava x, $\frac{dx}{dz}$, ed il radicale funzioni razionali di z.

177. — *Esempi.*

1°
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Pongasi $\sqrt{x^2+\alpha}=z-x$: si ricava

$$\alpha=-2xz+z^2,$$

onde

$$x=\frac{z^2-\alpha}{2z},\quad \sqrt{x^2+\alpha}=\frac{\alpha+z^2}{2z},$$

$$dx=\frac{z^2+\alpha}{2z^2}\,dz,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dz}{z}=\log z+C,$$

ed infine, sostituendo a z il suo valore

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\log\left[x+\sqrt{x^2+\alpha}\right]+C.$$

2° $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Esso si può rendere razionale coi procedimenti indicati: ma più semplicemente, dalla formula

$$d \operatorname{arc\,sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

si deduce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C.$$

L'integrale più generale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C.$$

3° $$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Esso si può ridurre ai precedenti mediante la sostituzione

$$Ax + B = z,$$

onde si ricava

$$A\,dx = dz\,, \quad Ax^2+2Bx+C = \frac{1}{A}\left[z^2+AC-B^2\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{dz}{\sqrt{A\,(z^2+AC-B^2)}}.$$

Quindi, se A è positivo, portando fuori dell'integrale $\frac{1}{\sqrt{A}}$ si ha per l'esempio 1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[z+\sqrt{z^2+AC-B^2}\right] + \text{costante},$$

e sostituendo a z il suo valore

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[Ax+B+\sqrt{A(Ax^2+2Bx+C)}\right] + \text{costante}.$$

Se invece A è negativo, in questa formula compaiono immaginarii. Ma possiamo ottenere lo stesso integrale portando fuori del segno integrale il fattore $\frac{1}{\sqrt{-A}}$, e si avrà:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A(z^2+AC-B^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dz}{\sqrt{(B^2-AC)-z^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{-A}} \text{ arc sen } \frac{z}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{costante},$$

ossia

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \text{ arc sen } \frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{costante},$$

e si deve osservare che $B^2 - AC > 0$, poichè essendo A negativo, ed il trinomio $Ax^2+2Bx+C$ positivo per qualche valore di x, le sue radici sono reali.

4° — L'integrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

si può ridurre al precedente ponendo $x - a = \frac{1}{z}$; ma si può ridurre ai primi studiati mediante la sostituzione

$$z = \frac{Aax + B(a+x) + C}{x-a},$$

da cui si ricava

$$x = \frac{az + (Ba+C)}{z-(Aa+B)}$$

$$x - a = \frac{Aa^2+2Ba+C}{z-(Aa+B)}, \quad dx = -\frac{Aa^2+2Ba+C}{[z-(Aa+B)]^2} dz,$$

$$Ax^2+2Bx+C = \frac{(Aa^2+2Ba+C)[z^2+AC-B^2]}{[z-(Aa+B)]^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(Aa^2+2Ba+C)(z^2+AC-B^2)}},$$

e quindi, se $Aa^2+2Ba+C>0$, il secondo integrale vale

$$\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}\log\left[z+\sqrt{z^2+AC-B^2}\right]+\text{costante},$$

ovvero sostituendo

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}\log\frac{Aax+B(a+x)+C+\sqrt{Aa^2+2Ba+C}\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}.$$

Differenziali binomii.

178. — Un differenziale della forma

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

ove a e b sono costanti, e gli esponenti m, n, e p sono numeri commensurabili, dicesi *differenziale binomio*.

Con un cambiamento di variabili si può trasformare il differenziale dato in un altro della stessa forma in cui gli esponenti che tengono le veci di m ed n siano interi. Invero, posto

$$x=z^\alpha$$

si ha

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=\alpha\, z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p\,dz,$$

che è ancora un differenziale binomio, e gli esponenti di z fuori e dentro parentesi saranno interi se si sceglie α in modo che siano interi $m\alpha$ ed $n\alpha$.

Inoltre l'identità

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx$$

trasforma il differenziale proposto in un altro della stessa forma in cui l'esponente in parentesi si cambia da n in $-n$, quindi in uno dei due differenziali l'esponente della variabile in parentesi è positivo. Perciò potremo supporre, senza ledere alla generalità, gli esponenti m ed n interi, ed n positivo.

179. — Il differenziale proposto è integrabile quando p è un intero, perchè in tal caso è funzione razionale di x.

Se si fa

$$a + bx^n = y$$

si ricava

$$x = \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb} \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy$$

e

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{nb} \, y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dy\,,$$

ossia il differenziale proposto si trasforma in un altro dello stesso tipo; e questo, e quindi anche il dato sarà integrabile, se l'esponente $\frac{m+1}{n} - 1$ è intero, ossia se

$$\frac{m+1}{n} = \text{intero}.$$

Ed applicando questo stesso criterio a

$$x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx\,,$$

che è una trasformazione del dato, si ricava che esso si saprà pure integrare quando $\frac{m + np + 1}{n}$ è intero, ossia

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{intero}.$$

Si hanno così tre casi nei quali si sa eseguire l'integrale sotto forma finita, e sono quelli in cui è intero uno dei tre numeri

$$p\,, \quad \frac{m+1}{n}\,, \quad \frac{m+1}{n}+p.$$

180. — Si possono stabilire delle formule che legano l'integrale d'un differenziale binomio con altri dello stesso tipo, in cui però variano gli esponenti m e p.

Si integri per parti

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

prendendo per fattore da integrarsi $x^m \, dx$, e per fattore da differenziarsi $(a+bx^n)^p$. Posto, per semplicità di scrittura

$$a+bx^n = q\,,$$

si avrà:

$$\int x^m y^p \, dx = \frac{x^{m+1} y^p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1} \int x^{m+n} y^{p-1} \, dx\,. \tag{1}$$

supposto però $m+1$ diverso da zero. Questa formula esprime l'integrale cercato mediante un altro in cui invece di m e p leggesi rispettivamente $m+n$ e $p-1$, e se questi numeri sono più semplici dei precedenti, sarà utile l'applicazione della formula.

Se invece si integra per parti il differenziale dato, prendendo per fattore da integrarsi $y^p x^{n-1} dx$, il cui integrale è $\dfrac{y^{p+1}}{(p+1)nb}$, si avrà:

$$\int x^m y^p \, dx = \frac{y^{p+1} x^{m-n+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n+1}{(p+1)nb} \int x^{m-n} y^{p+1} \, dx\,. \tag{2}$$

la quale formula riduce l'integrale proposto ad un altro in cui si è diminuito l'esponente m di n unità, e si è aumentato p di 1.

Si troverebbe questa stessa formula risolvendo la (1) rispetto all'integrale del membro di destra, e scambiando $m+n$ e $p-1$ in m e p.

Le formule (1) e (2) esprimono l'integrale d'un differenziale binomio in funzione d'un altro dello stesso tipo, in cui si sono alterati ambo gli esponenti m e p. Possiamo però da queste dedurre altre formule in cui si alteri un solo esponente.

Se nella (2) nel membro di destra, invece di y^{p+1} si legge $y^p(a+bx^n)$, e quindi

$$\int x^{m-n}\, y^{p+1}\, dx = a\int x^{m-n}\, y^p\, dx + b\int x^m\, y^p\, dx,$$

e si risolve l'equazione rispetto a $\int x^m y^p\, dx$, che comparisce in ambo i membri, si ha

$$\int x^m\, y^p\, dx = \frac{y^{m-n+1}\, y^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}\, y^p\, dx. \tag{3}$$

Se si risolve questa equazione rispetto all'integrale di destra, e dovunque c'è m si legge $m+n$, si avrà:

$$\int x^m\, y^p\, dx = \frac{x^{m+1}\, y^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}\, y^p\, dx. \tag{4}$$

Paragonando fra loro le formule (1) e (4) si ha una relazione fra gli integrali

$$\int x^{m+n}\, y^{p-1}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int x^{m+n}\, y^p\, dx.$$

Se si risolve l'equazione rispetto al secondo integrale, e invece di m si legge $m-n$, si ha la formula

$$\int x^m\, y^p\, dx = \frac{x^{m+1}\, y^p}{m \quad 1+np} + \frac{npa}{m+1+np}\int x^m\, y^{p-1}\, dx. \tag{5}$$

Se infine si risolve quest'equazione rispetto al secondo integrale, e a p si sostituisce $p+1$, si avrà

$$\int x^m y^p dx = -\frac{x^{m+1} y^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+np+n}{n(p+1)a} \int x^m y^{p+1} dx. \quad (6)$$

Le formule (3) e (4) permettono di aumentare o diminuire l'esponente m di n unità: e quindi, applicate più volte, trasformano l'integrale dato in un altro in cui invece di m si trova $m \pm kn$, k essendo un intero qualunque. Le formule (5) e (6) permettono di aumentare o diminuire l'esponente p di k' unità alla volta, e quindi, più volte applicate riducono l'integrale dato ad un altro in cui invece di p leggesi $p \pm k'$, k' essendo un intero qualunque.

Le formule (1)...(6) diventano illusorie quando il rispettivo denominatore è nullo; il che avviene quando

$$m+1=0, \quad \text{ovvero} \quad p+1=0, \quad \text{ovvero} \quad m+1+np=0;$$

ma allora si ha rispettivamente

$$\frac{m+1}{n}=0, \quad p=-1, \quad \frac{m+1}{n}+p=0,$$

e quindi siamo nei casi d'integrabilità già riconosciuti.

181. — *Esempi.* Abbiasi l' $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. In questo caso particolare la formula (3) diventa

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se quindi m è intero e positivo, togliendovi due unità alla volta, ci ridurremo infine, se m è impari all' $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, cui applicando la stessa formula di riduzione, si ha

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\,,$$

e l'integrale nel membro di destra sparisce. Se m è pari, saremo infine ridotti a $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$.

Abbiasi

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Applicando la formula (4), ovvero la (6) si ha immediatamente:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\,.$$

Un differenziale della forma

$$x^q\,(a\,x^r + b\,x^s)^p\,dx$$

si può ridurre al tipo dei differenziali binomii trattati scrivendolo così

$$x^{q+pr}\,(a+bx^{s-r})^p\,dx.$$

Integrali di funzioni trascendenti.

182. — Alcune funzioni trascendenti si integrano immediatamente ricorrendo alle formule (N. 40 e 42):

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\,,\quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,,\quad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x\,,\qquad \text{ecc.}$$

Altri differenziali trascendenti si riducono a differenziali razionali con acconci cambiamenti di variabili. Così, se l'integrale dato si può mettere sotto la forma

$$\int f(u)\, u'\, dx\,,$$

ove f è una funzione razionale, u una funzione trascendente, u' la sua derivata, esso si ridurrà, prendendo per variabile u, a

$$\int f(u)\, du\,,$$

che è l'integrale d'una funzione razionale.

183. — L'integrale

$$\int f(e^{ax})\, dx\,,$$

ove la funzione f è razionale, si può trasformare nell'integrale d'una funzione razionale ponendo

$$e^{ax} = z\,,$$

da cui

$$x = \frac{1}{a} \log z\,, \quad dx = \frac{dz}{az}\,,$$

e

$$\int f(e^{ax})\, dx = \int f(z)\, \frac{dz}{az}\,.$$

Sia p. e. l' $\int \frac{dx}{1+e^x}$; posto $e^x = z$, esso diventa

$$\int \frac{dz}{z(1+z)} = \log z - \log(1+z)\,,$$

ossia

$$= x - \log(1+e^x)\,.$$

184. — L'integrale

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx\,,$$

ove f è funzione razionale, si può ridurre al caso precedente, ricorrendo alle espressioni di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ mediante esponenziali immaginarii; ed il differenziale dato diventa funzione razionale di e^{ix}.

Ma esso si può pure rendere razionale, senza ricorrere ad immaginarii, ponendo

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x = z,$$

da cui si ricava

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x = 2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x \cos^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

onde

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

ed il differenziale del membro di destra è razionale.

In casi speciali si può ricorrere a trasformazioni più semplici. Se l'integrale dato si può mettere sotto la forma

$$\int f(\operatorname{tang} x)\, dx,$$

basta porre $\operatorname{tang} x = z$, onde $x = \operatorname{arc\,tang} z$, $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$, e

$$\int f(\operatorname{tang} x)\, dx = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\, dz.$$

Questo avverrà sempre quando nel differenziale compaiono sole potenze pari di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, perchè

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{1 + \operatorname{tang}^2 x}, \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 x}.$$

Se l'integrale dato si può mettere sotto la forma

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos^2 x) \cos x \, dx ,$$

f essendo funzione razionale, basterà porre $\operatorname{sen} x = z$, e l'integrale diventa

$$\int f(z, 1 - z^2) \, dz ;$$

se si può mettere sotto la forma

$$\int f(\operatorname{sen}^2 x, \cos x) \operatorname{sen} x \, dx ,$$

posto $\cos x = z$, esso diventa

$$- \int f(1 - z^2, z) \, dz.$$

185. — Abbiasi

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n dx.$$

Se m ed n sono interi, il differenziale è funzione razionale del seno e del coseno, e quindi si sa calcolare sotto forma finita coi metodi del numero precedente. Se si pone $\operatorname{sen} x = z$, si ha

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dz ,$$

e nel membro di destra si ha un differenziale binomio, che si potrà integrare se uno dei numeri

$$\frac{n-1}{2} , \quad \frac{m+1}{2} , \quad \frac{m+n}{2}$$

è intero, il che avviene certamente quando m ed n sono interi.

Però, in tutti i casi è utile l'abbassare il valore assoluto degli esponenti m ed n, il che si ottiene mediante formule di riduzione.

Decompongasi il differenziale a integrarsi in

$$\operatorname{sen}^m x \cos x \, dx \times \cos^{n-1} x ,$$

e si integri per parti prendendo il primo fattore come fattore a integrarsi. Si avrà:

$$(1)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^{m+2} \cos^{n-2} x\, dx.$$

Oppure, integrando per parti, dopo aver decomposto il differenziale nel prodotto

$$\operatorname{sen}^{m-1} x \times \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx,$$

si ha

$$(2)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx.$$

Se nella formula (1) si tien conto dell'identità

$$\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx,$$

e si risolve l'equazione rispetto all'integrale proposto che comparisce in ambo i membri, si ha:

$$(3)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx,$$

ed in modo analogo dalla formula (2) si ricava

$$(4)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx.$$

Se si risolve l'equazione (3) rispetto all'integrale di destra, e si aumenta n di due unità si ha:

$$(5)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{m+2} x\, dx,$$

ed in modo analogo, dalla (4) si ricava

$$(6) \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^n x \, dx .$$

Le formule precedenti si potrebbero pure ricavare in varii altri modi. P. e. scambiando x in $\frac{\pi}{2} - x$ si scambiano fra loro le formule (1) e (2), (3) e (4), (5) e (6). Le ultime quattro permettono di aumentare, o diminuire uno dei due esponenti m ed n di due unità, senza alterare l'altro. Le formule (3) e (4) sono illusorie quando $m + n = 0$; in questo caso si applicheranno le (1) e (2); e così riducendo di due unità alla volta gli esponenti m ed n, essi finiranno se sono interi, per assumere i valori 1, o 0, o -1; e saremo così ridotti ai seguenti nove integrali, che calcoleremo direttamente:

$$\int dx = x ,$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x ,$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x ,$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x ,$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{sen} x ,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos x} = -\log \cos x ,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \log \operatorname{tang} x ,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \int \frac{d \frac{1}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} x ,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) .$$

186. — Alcuni altri differenziali, che si possono rendere razionali colle sostituzioni del N. 184, si possono pure integrare direttamente con opportuni artifizii.

1° — Abbiasi

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x}.$$

Determinate due quantità r e α tali che

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \operatorname{sen} \alpha$$

si avrà

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = r (\cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha) = r \cos (x - \alpha),$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} = \frac{1}{r} \int \frac{d\,(x-\alpha)}{\cos (x-\alpha)} = \frac{1}{r} \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-\alpha}{2} \right) + C.$$

2° — Abbiasi

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \operatorname{sen}^2 x}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 x$, esso diventa

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + b \operatorname{tang}^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{a + b \operatorname{tang}^2 x},$$

e quest'ultimo differenziale è razionale se si prende $\operatorname{tang} x$ per variabile indipendente.

3° — Si consideri

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x};$$

osservando che

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x, \quad \text{e} \quad 1 = \cos^2 \tfrac{1}{2} x + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{a\left(\cos^2 \frac{1}{2} x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x\right) + b\left(\cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x\right)} =$$

$$= 2 \int \frac{d\,\frac{1}{2} x}{(a+b)\cos^2 \frac{1}{2} x + (a-b)\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x},$$

e siamo così ridotti all'integrale precedente.

4° — Sia

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x + c \operatorname{sen} x}.$$

Posto ancora $b = r\cos\alpha$, $c = r\operatorname{sen}\alpha$, l'integrale proposto diventa

$$\int \frac{dx}{a + r\cos(x-\alpha)} = \int \frac{d(x-\alpha)}{a + r\cos(x-\alpha)},$$

e quindi è ridotto all'integrale che precede.

187. — L'integrale

$$\int e^{ax} x^n \, dx$$

si può semplificare mediante l'integrazione per parti. Prendendo per fattore ad integrarsi $e^{ax}\,dx$ si deduce

$$\int e^{ax} x^n \, dx = \frac{e^{ax}}{a} x^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} x^{n-1} \, dx,$$

e l'integrale proposto risulta ridotto ad un altro in cui l'esponente

n è diminuito di 1. Se n è intero e positivo, applicando più volte questo procedimento, ci ridurremo infine a

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

e così risulta determinato l'integrale proposto.

Fatto, per semplicità, $a = -1$, si trova

$$\int e^{-x} x^n\,dx = n!\,e^x\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right].$$

Se invece n è negativo, si potrà risolvere la formula di riduzione rispetto all'integrale di destra; ovvero, integrando per parti, e decomponendo il differenziale dato nel prodotto

$$e^{ax} \,.\, x^n\,dx,$$

si ha

$$\int e^{ax} x^n\,dx = \frac{e^{ax}\,x^{n+1}}{n+1} - \frac{a}{n+1}\int e^{ax} x^{n+1}\,dx \qquad (n \gtrless -1),$$

e quindi si potranno aggiungere tante unità quante si vogliano ad n. Se n è intero e negativo, aggiungendovi più unità, si ridurrà a valere -1: e siamo ridotti all'integrale

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx,$$

cui non è più applicabile la formula precedente. Questo integrale non si sa esprimere sotto forma finita.

188. — Se in $\int e^{ax} x^n\,dx$ si fa

$$e^x = z, \qquad x = \log z, \qquad dx = \frac{dz}{z},$$

si ottiene

$$\int e^{ax} x^n\,dx = \int z^{a-1} (\log z)^n\,dz,$$

e questo secondo integrale si saprà calcolare quando si sappia calcolare il primo, ossia quando n è intero e positivo.

La funzione $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$, ponendo $ax = z$ si trasforma in

$$\int \frac{dz}{\log z},$$

ed a questa funzione si dà il nome di logaritmo integrale, od iperlogaritmo. Essa si può scrivere

$$\int \frac{dz}{\int \frac{dz}{z}} = \int \frac{dz}{\int \frac{dz}{\int dz}}$$

Se nello stesso integrale si suppone a complesso $= g + ih$, sarà $e^{ax} = e^{gx} (\cos hx + i \operatorname{sen} hx)$, e

$$\int e^{ax} x^n dx = \int e^{gx} x^n \cos hx\, dx + i \int e^{gx} x^n \operatorname{sen} hx\, dx:$$

quindi se n è intero è positivo, si saprà calcolare il membro di sinistra, e si avranno calcolati i due integrali

$$\int e^{gx} x^n \cos hx\, dx, \quad \text{e} \quad \int e^{gx} x^n \operatorname{sen} hx\, dx.$$

Come caso particolare, fatto $n = 1$, si avrà

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

e posto $a = g + ih$,

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx + i \int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx = \frac{e^{gx} (\cos hx + i \operatorname{sen} hx)}{g + ih}$$

$$= \frac{e^{gx} [g \cos hx + h \operatorname{sen} hx + i (g \operatorname{sen} hx - h \cos hx)]}{g^2 + h^2},$$

onde

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + h^2}(g \cos hx + h \operatorname{sen} hx)$$

$$\int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + h^2}(g \operatorname{sen} hx - h \cos hx),$$

cui basta aggiungere le costanti arbitrarie per avere gli integrali generali.

Del resto questi integrali si possono ottenere direttamente mediante l'integrazione per parti. Invero, messi i differenziali sotto le forme

$$e^{gx}\, dx \,.\, \cos hx \qquad \text{e} \qquad e^{gx}\, dx \,.\, \operatorname{sen} hx\,,$$

si ha

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx = \frac{1}{g}\, e^{gx} \cos hx + \frac{h}{g} \int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx\,,$$

e

$$\int e^{gx} \operatorname{sen} hx\, dx = \frac{1}{g}\, e^{gx} \operatorname{sen} hx - \frac{h}{g} \int e^{gx} \cos hx\, dx\,,$$

e si hanno due equazioni lineari fra gli integrali cercati.

Altro caso particolare degli integrali precedenti sono

$$\int x^n \cos x\, dx\,, \qquad \text{e} \qquad \int x^n \operatorname{sen} x\, dx\,,$$

che si ottengono facendo $g = 0$, $h = 1$. Le formule di riduzione si possono però ottenere direttamente mediante l'integrazione per parti. Si ha invero

$$\int x^n \cos x\, dx = + x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = - x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx\,,$$

e così la coppia di integrali proposti si riduce ad un' altra dello stesso tipo, in cui invece di n si legge $n-1$. Quindi, se n è intero e positivo, applicando più volte lo stesso procedimento, si arriverà agli integrali noti

$$\int \cos x \, dx, \qquad \int \operatorname{sen} x \, dx.$$

Se si fa $\operatorname{sen} x = z$, si ha

$$\int x^n \cos x \, dx = \int (\operatorname{arc\,sen} z)^n \, dz,$$

e se si fa $\cos x = z$, si ha

$$\int x^n \operatorname{sen} x \, dx = -\int (\operatorname{arc\,cos} z)^n \, dz,$$

e quindi anche questi integrali si sapranno eseguire se n è intero e positivo.

189. — Si possono calcolare gli integrali della forma

$$\int f(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots e^{gx}) \, dx,$$

essendo f una funzione intera. Invero, la funzione f si decompone nella somma di più termini, ciascheduno dei quali è il prodotto d'una costante numerica per una potenza di x, e per alcune potenze di $e^{ax}, e^{bx}, \ldots$: raggruppando insieme gli esponenziali, saremo ridotti ad eseguire alcuni integrali del tipo

$$\int x^m e^{px} \, dx,$$

ove m è intero e positivo, e questi integrali si sanno fare (N. 187).

L'integrazione d'una funzione intera di x, di esponenziali $e^{ax}, e^{bx}, \ldots$ e di seni e coseni di funzioni lineari di x si può ridurre al caso precedente, sostituendo ai seni e coseni le loro espressioni mediante esponenziali.

L'integrale

$$\int f(x)\, e^{ax}\, dx,$$

ove $f(x)$ è funzione razionale di x, decomponendo $f(x)$ in un polinomio intero e nelle sue frazioni semplici, si esprime mediante alcuni integrali della forma

$$\int x^m e^{ax}\, dx, \quad \text{e} \quad \int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^n}\, dx,$$

ove m ed n sono interi e positivi. In virtù delle formule del N. 187 il primo si può calcolare; il secondo, posto $x - \alpha = z$, diventa $e^{a\alpha} \int z^{-n} e^{az}\, dz$, che si può esprimere mediante funzioni note, e il logaritmo integrale.

Gli integrali

$$\int f(x) \operatorname{sen} ax\, dx, \quad \int f(x) \cos ax\, dx$$

si possono ridurre al precedente esprimendo le funzioni trigonometriche mediante esponenziali.

CAPITOLO VIII.

Integrali definiti.

---

190. — Sia $f(x)$ una funzione avente un integrale indefinito $F(x)$, e quindi infiniti della forma $F(x)+C$, in un intervallo contenente i valori a e b. L'incremento d'uno di questi integrali indefiniti, quando si attribuiscano alla variabile i valori a e b è

$$F(b) - F(a),$$

ed è indipendente dall'integrale indefinito particolare che si considera. A questa differenza si dà il nome di *integrale definito* di $f(x)$ preso fra i limiti a e b, e si rappresenta con $\int_a^b f(x)\,dx$ che si legge *integrale da* a a b *di* f(x)dx. Quindi, per definizione, se $F(x)$ ha per derivata $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

I numeri a e b diconsi rispettivamente *limite inferiore* e *limite superiore* dell'integrale.

Esempi. — 1° Vogliasi $\int_0^1 x^m\,dx$, con $m > 0$. La funzione $F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ è un integrale definito di $x^m\,dx$ in tutto l'intervallo

(0, 1), ed in generale per tutti i valori positivi di x; quindi $F(1) = \frac{1}{m+1}$, $F(0) = 0$, e

$$\int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}.$$

2° Si ha $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x$, intendendo, secondo il solito, con $\operatorname{arc\,tang} x$ quell'arco compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ la cui tangente è x. Onde si deduce

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

3° Cerchisi l' $\int_a^b \frac{dx}{x}$. Se a e b sono amendue positivi, si può porre $F(x) = \log x$, perchè la funzione $\log x$ ha per derivata $\frac{1}{x}$ in tutto l'intervallo (a, b); quindi

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

Se a e b sono amendue negativi, posto $F(x) = \log(-x)$, si avrà

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log(-b) - \log(-a) = \log \frac{b}{a}.$$

come prima. Se infine dei limiti a e b l'uno è positivo, e l'altro negativo, la funzione $\frac{1}{x}$ non è determinata e finita nell'intervallo (a, b), quindi non si può parlare d'integrale nè indefinito nè definito, e l'espressione $\int_a^b \frac{dx}{x}$ non ha in questo caso alcun significato, secondo le definizioni date.

191. — Dalla definizione degli integrali definiti si deducono immediatamente i seguenti teoremi:

I. *Se in un integrale definito si scambiano i limiti, l'integrale definito cambia di segno ma non di valore assoluto.*

Infatti, per definizione, se $F(x)$ è un integrale di $f(x)\,dx$, *si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

e

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

onde

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx; \qquad \text{c. v. d.}$$

Con questo scambio si può sempre fare in modo che il limite inferiore sia più piccolo del limite superiore; cosa che supporremo in diverse circostanze.

II. *Se* f(x)dx *ha un integrale* F(x) *pei valori di* x *compresi in un intervallo cui appartengono i valori* a, b, c, *di* x, *si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Infatti questa formula equivale all'identità

$$F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)].$$

In modo analogo, se $f(x)$ è integrabile in un intervallo contenente i valori x_0, x_1, $x_2 \ldots x_n$, si ha

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

III. *Se* f(x) *è integrabile nell'intervallo* (a, b) *si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_1).$$

ove x_1 *è una quantità compresa fra* a *e* b.

Infatti, questa formula è equivalente a quella del calcolo differenziale

$$F(b) - F(a) = (b - a)\, F'(x_1).$$

Corollario. — *Se, nell'intervallo* (a, b), f(x) > 0, *e se* a < b, *si avrà pure*

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Invero, per l'ultima formula, quell'integrale vale $(b-a) f(x_1)$, e per le ipotesi fatte, $b - a > 0$, e $f'(x_1) > 0$.

Corollario. — *Se, nell'intervallo* (a, b), *si ha* $\varphi(x) > \psi(x)$, *e se* a < b, *si avrà pure*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx > \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

Infatti

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx,$$

e quest'ultimo integrale è positivo, pel corollario precedente.

IV. *Se le funzioni* $\varphi(x)\psi(x)$ e $\psi(x)$ *sono integrabili nell'intervallo* (a, b), *e se* ψ(x) *non si annulla nello stesso intervallo, si ha:*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx = \varphi(x_1) \int_a^b \psi(x)\, dx,$$

x_1 *essendo un valore di* x *compreso fra* a *e* b.

Invero, posto

$$F(x) = \int \varphi(x)\psi(x)\, dx, \quad \Psi(x) = \int \psi(x)\, dx,$$

si avrà, se $\psi'(x) = \psi(x)$ non si annulla nell'intervallo (a, b):

$$\frac{F(b) - F(a)}{\Psi(b) - \Psi(a)} = \frac{F'(x_1)}{\Psi'(x_1)},$$

ovvero

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx}{\int_a^b \psi(x)\,dx} = \frac{\varphi(x_1)\,\psi(x_1)}{\psi(x_1)} = \varphi(x_1),$$

onde si ricava la formula a dimostrarsi.

192. Teorema. — *Se la funzione* $f(x)$ *è integrabile nell'intervallo* (a, b), *detta*

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, \ldots x_{n-1}, \quad x_n = b$$

una successione arbitraria di valori di x *ordinati secondo la loro grandezza, e detti* $l(\alpha, \beta)$ e $\lambda(\alpha, \beta)$ *i limiti superiore ed inferiore dei valori di* $f(x)$ *nell'intervallo* (α, β), *l'integrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è sempre compreso fra le due somme*

$$s_1 = (x_1 - x_0)\,l(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,l(x_1, x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,l(x_{n-1}, x_n)$$

e

$$s_2 = (x_1 - x_0)\,\lambda(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,\lambda(x_1, x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,\lambda(x_{n-1}, x_n),$$

qualunque siano i valori $x_1\, x_2 \ldots\ldots$

Se la funzione $f(x)$ *è continua, l'*$\int_a^b f(x)\,dx$ *è l'unica quantità sempre compresa fra tutti i valori di* s_1 *ed* s_2, *qualunque siano i valori interpolati fra* a *e* b.

Invero si ha (formula II)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,$$

e quindi, per la formula III,

$$\int_a^b f(x)dx = (x_1 - x_0)\,f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\,f(\xi_n),$$

ove $\xi_1\ \xi_2 \ldots\ldots \xi_n$ sono valori di x appartenenti rispettivamente agli intervalli

$$(x_0, x_1), \quad (x_1, x_2) \ldots\ldots (x_{n-1}, x_n).$$

Quindi si hanno le diseguaglianze

$$\begin{gathered} l(x_0, x_1) > f(\xi_1) > \lambda(x_0, x_1) \\ l(x_1, x_2) > f(\xi_2) > \lambda(x_1, x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l(x_{n-1}, x_n) > f(\xi_n) > \lambda(x_{n-1}, x_n). \end{gathered}$$

Moltiplicando ora queste diseguaglianze per $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$ che son tutte dello stesso segno e sommando, si ha, se esse sono tutte positive, ossia se $a < b$,

$$s_1 > \int_a^b f(x)\,dx > s_2\,,$$

e se $a > b$,

$$s_1 < \int_a^b f(x)\,dx < s_2\,,$$

il che dimostra la prima parte del teorema.

La differenza $s_1 - s_2$ si può scrivere

$$\begin{aligned} s_1 - s_2 = (x_1 - x_0)\,\delta(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,\delta(x_1, x_2) + \ldots\ldots \\ + (x_n - x_{n-1})\,\delta(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

ponendo $\delta(\alpha, \beta) = l(\alpha, \beta) - \lambda(\alpha, \beta) =$ all'oscillazione della funzione f nell'intervallo (α, β).

Ora se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo (a, b), si può dividere questo intervallo in parti in modo che in ciascheduna di esse l'oscillazione di $f(x)$ sia minore d'una quantità ϵ fissata ad arbitrio (N. 21). Quindi la differenza $s_1 - s_2$ si può rendere minore di $\epsilon(b - a)$, ossia minore di ogni quantità determinata.

Perciò non può esistere che una sola quantità compresa fra i valori di s_1 ed s_2; e siccome questa proprietà appartiene all' $\int_a^b f(x)\,dx$, si conchiude che questo è la sola quantità compresa fra tutti i valori di s_1 ed s_2.

Corollario. — *Se* $f(x)$ *è funzione continua, l'* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è il limite verso cui tende la somma*

$$s = (x_1 - x_0) f(z_1) + (x_2 - x_1) f(z_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(z_n),$$

ove $x_0 = a$, x_1, x_2, … $x_n = b$ *sono valori di* x *ordinati secondo la grandezza, e* z_1, z_2, … z_n *valori arbitrarii di* x *appartenenti agli intervalli* (x_0, x_1), (x_1, x_2), … (x_{n-1}, x_n); *essendo il limite preso col far tendere a zero tutti questi intervalli.*

Infatti, fissata una quantità arbitrariamente piccola, che indicheremo con $\epsilon(b-a)$, si determini una quantità h in modo che attribuendo ad x due valori qualunque la cui differenza sia minore di h, sia anche la differenza dei valori corrispondenti della funzione minore di ϵ. Si divida l'intervallo (a, b) in intervalli arbitrarii di cui ciascuno sia minore di h; si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n-1} (x_{r+1} - x_r) f(\xi_{r+1}),$$

essendo ξ_{r+1} un valore determinato di x nell'intervallo (x_r, x_{r+1}). Quindi la differenza fra la somma s e l'integrale sarà

$$\int_a^b f(x)\,dx - s = \sum_{r=0}^{r=n-1} (x_{r+1} - x_r) \left[f(\xi_{r+1}) - f(z_{r+1}) \right];$$

e siccome ξ_{r+1} e z_{r+1} appartengono allo stesso intervallo (x_r, x_{r+1}) la cui ampiezza è minore di h, anche la loro differenza sarà minore di h, e $f(\xi_{r+1}) - f(z_{r+1}) < \epsilon$; onde $\int_a^b f(x)dx - s < \epsilon(b-a)$, ossia, fissata una quantità arbitrariamente piccola $\epsilon(b-a)$, riuscì possibile determinare una quantità h in modo che comunque diviso l'intervallo (a, b) in intervalli parziali, di cui ognuno sia minore di h, la differenza tra la somma s e l'integrale è sempre minore di $\epsilon(b-a)$, ossia s ha per limite l'integrale col tendere a zero di tutti gli intervalli.

193. — I teoremi precedenti suggeriscono una nuova definizione dell'integrale definito, la quale, benchè non equivalente in tutto a quella già data, con questa coincide nei casi più comuni.

Sia $f(x)$ una funzione di x data nell'intervallo (a, b). Sia p. e. $a < b$. Supporremo l'esistenza dei limiti superiore ed inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (a, b) e quindi in ogni suo intervallo parziale.

Detti ancora $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots x_n = b$ valori arbitrarii crescenti di x, e detti $l(\alpha, \beta)$ e $\lambda(\alpha, \beta)$ i limiti superiore ed inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (α, β), si considerino le somme

$$s_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, l(x_r, x_{r+1}) \quad \text{e} \quad s_2 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, \lambda(x_r, x_{r+1}),$$

dove r varia da 0 ad $n-1$.

È facile il vedere che ogni somma s_1 è maggiore di ogni somma s_2; quindi esiste un limite inferiore S_1 dei valori di s_1, ed un limite superiore S_2 dei valori di s_2, e $S_1 \geqq S_2$.

Se $S_1 = S_2$, il loro valore comune sarà l'unica quantità minore di tutte le somme s_1 e maggiore delle s_2. In tal caso chiameremo $\int_a^b f(x)\,dx$ il loro valore comune, e diremo, in questo numero, che la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b).

Se $f(x)$ ammette un integrale indefinito, ossia esiste una funzione $F(x)$ avente per derivata $f(x)$, pel teorema del N. precedente, $F(b) - F(a)$ è pure minore di tutte le somme s_1 e maggiore delle s_2; quindi, se $S_1 = S_2$, si deduce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

e le due definizioni di integrale definito, quella cioè data al N. 190, e quella data in questo numero coincidono quando sono amendue applicabili. Ma potrebbe avvenire che esista una funzione $F(x)$ la cui derivata è $f(x)$, senza che esistano i limiti superiore ed inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (a, b), ovvero, esistendo, senza che sia $S_1 = S_2$, ed allora sarà applicabile la prima definizione, e non la seconda. Oppure potrebbe essere $S_1 = S_2$ senza che esista alcuna funzione avente per derivata $f(x)$, ed allora sarà applicabile la seconda definizione, e non la prima.

Si scorge che la differenza $S_1 - S_2$ è eguale al limite inferiore dei valori di $\Delta = \sum (x_{r+1} - x_r)\, \delta\, (x_r, x_{r+1})$, indicando con $\delta\ (\alpha, \beta)$ l'oscillazione della funzione nell'intervallo (α, β), ossia la differenza $l\,(\alpha, \beta) - \lambda\,(\alpha, \beta)$. Quindi:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè f(x) *sia integrabile nell'intervallo* (a, b), (*ossia affinchè* $S_1 = S_2$, *secondo il nuovo significato*), *è che il limite inferiore dei valori di* Δ *sia zero.*

Se la funzione f(x) *è sempre crescente, o sempre decrescente nell'intervallo* (a, b), *ovvero se l'intervallo* (a, b) *si può decomporre in intervalli in ciascheduno dei quali* f(x) *varia sempre in uno stesso senso, essa è integrabile nell'intervallo* (a, b).

Invero, supposta $f(x)$ crescente, si decomponga (a, b) in n parti eguali, e sia h il loro valore comune. Sarà $\delta (x_r, x_{r+1}) = f(x_{r+1}) - f(x_r)$, e $\Delta = h\,[f(b) - f(a)]$, e questa quantità si può rendere tanto piccola quanto si vuole col prendere h sufficientemente piccolo. Analoga dimostrazione per gli altri casi.

Se f(x) *è continua, essa è integrabile.*

Questa proposizione risulta dal teorema N. 192.

Se f(x) *è discontinua per alcuni valori di* x *in numero finito nell'intervallo* (a, b), *o più generalmente, se tolti dall'intervallo* (a, b) *alcuni intervalli la cui somma si possa rendere piccola ad arbitrio, per tutti i rimanenti valori di* x *la funzione è continua, essa è integrabile.*

Infatti, si decomponga l'intervallo (a, b) negli intervalli nei quali essa è discontinua, e la cui somma sia $< \epsilon$, e gli intervalli rimanenti si dividano ad arbitrio. La somma Δ si decompone in due parti; l'una corrispondente ai primi intervalli, e questa somma è minore di $\epsilon\,[l\,(a, b) - \lambda\,(a, b)]$, quantità che si può rendere piccola ad arbitrio, col prendere sufficientemente piccolo ϵ; l'altra parte di Δ, che corrisponde agli intervalli per cui la funzione è continua, si può rendere piccola ad arbitrio: quindi anche Δ si può rendere minore di ogni quantità assegnabile, e la funzione è integrabile.

In questo numero si suppose finora che il limite inferiore dell'integrale definito fosse più piccolo del limite superiore. Ove questo non avvenga, si può assumere per definizione

$$\int_b^a f(x)\, dx = - \int_a^b f(x)\, dx.$$

Sono pure assai facili a dimostrarsi le formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

e, se $a < b$

$$(b-a)\,l\,(a, b) > \int_a^b f(x)\,dx > (b-a)\,\lambda\,(a, b)\,.$$

i segni di diseguaglianza dovendo essere scambiati, se $a > b$.

Si consideri ora l'integrale definito, come funzione del suo limite superiore, e pongasi

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx.$$

Sarà $F(X+h) - F(X) = \int_X^{X+h} f(x)\,dx$: e questa quantità è compresa fra $h\,l\,(X, X+h)$ e $h\,\lambda\,(X, X+h)$, e, siccome l e λ sono finiti, col tendere di h a zero, esse tendono verso zero, ossia $F(X)$ è funzione continua.

Inoltre, dalla diseguaglianza

$$h\,l\,(X, X+h) > F(X+h) - F(X) > h\,\lambda\,(X, X+h)\,,$$

se $h > 0$, e da quella che si ottiene da questa rovesciando i segni di diseguaglianza, se $h < 0$, si ricava in ogni caso

$$l\,(X, X+h) > \frac{F(X+h) - F(X)}{h} > \lambda\,(X, X+h).$$

Facciasi qui tendere h a zero. Se $f(x)$ è continua per $x = X$,

$$\lim l\,(X, X+h) = \lim \lambda\,(X, X+h) = f(X)\,,$$

e quindi

$$\lim \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = f(X),$$

ossia $F(X)$ ha per derivata $f(X)$ per tutti i valori della variabile, per cui $f(X)$ è continua.

Applicazioni degli integrali definiti alla geometria.

194. — Molte grandezze geometriche, come aree, volumi, archi di curva, ecc. sono misurate da integrali definiti.

Ma è utile di ben fissare con quali assiomi, postulati e definizioni noi possiamo arrivare a conchiudere l'eguaglianza o diseguaglianza di due grandezze non sovrapponibili, e a trovare che un certo numero misura una data grandezza.

Per stabilire l'eguaglianza o diseguaglianza di due grandezze geometriche ci serviremo delle proposizioni seguenti:

1° *Due grandezze sovrapponibili sono eguali.*

2° *A grandezze eguali aggiungendo o sottraendo grandezze eguali si hanno risultati eguali.*

3° *La parte è minore del tutto.*

4° *Se due grandezze sono diseguali, la loro differenza ripetuta un numero sufficiente di volte può superare ogni data grandezza.*

Definiremo la misura d'una grandezza in modo analogo alla ragione di due grandezze:

Dicesi che il numero a *misura una grandezza* A, *essendo* U *l'unità di misura, se ripetendo* U m *volte ed* A n *volte, la grandezza* m U *è maggiore o eguale o minore di* n A *secondochè il numero* $\frac{m}{n}$ *è maggiore o eguale o minore di* a.

Con questa definizione non occorre supporre la divisibilità in parti eguali di U. Ma se U è divisibile in parti eguali, e quindi ha un significato il prodotto kU, ove k è un numero razionale, la definizione precedente si può trasformare nella seguente:

Dicesi che il numero a *misura la grandezza* A, *essendo* U *l'unità di misura, se* kU *è maggiore, o eguale, o minore di* A *secondochè il numero razionale* k *è maggiore o eguale o minore di* a.

Ci sarà utile il seguente

TEOREMA. — *Se una grandezza* A *è minore delle grandezze* B_1, B_2, ... *misurate dai numeri* b_1, b_2, ..., *e se* A *è maggiore delle grandezze* C_1, C_2, ...

misurato dai numeri $c_1, c_2 \ldots$, *e se esiste un sol numero* a *minore di tutti i numeri* b *e maggiore dei numeri* c, *il numero* a *misura* A.

Infatti, essendo m ed n due numeri interi, si formino le grandezze mU ed nA.

Sia dapprima $\frac{m}{n} > a$. Siccome a è l'unico numero minore dei numeri b e maggiore dei numeri c, $\frac{m}{n}$ che è diverso da a non sarà ad un tempo minore dei numeri b e maggiore dei c; ma $\frac{m}{n}$ è maggiore di a, e quindi maggiore dei numeri c: dunque esso non sarà minore di tutti i numeri b.

Sia b_r un numero della categoria b tale che $\frac{m}{n} \geqq b_r$, e sia B_r la grandezza misurata da b_r. Sarà per la definizione di misura

$$m U \geqq n B_r :$$

ma $B_r > A$, quindi $nB_r > nA$ (Euclide, Libro V, assioma III), e

$$m U > n A.$$

Sia $\frac{m}{n} < a$. Si dimostra in modo analogo che

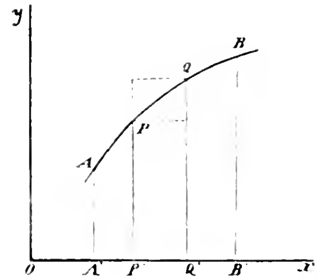
$$m U < n A.$$

Sia infine $\frac{m}{n} = a$. Dico che $mU = nA$. Infatti lo si neghi; sarà mU minore o maggiore di nA. Sia mU minore di nA, e sia Δ la loro differenza, sicchè $m U + \Delta = nA$. Esisterà (proposizione 4ª) un numero k, tale che $k\Delta > U$. Si moltiplichi l'ultima equazione per k; si avrà $kmU + k\Delta = knA$, e quindi $(km + 1) U < knA$. Ma questa diseguaglianza è assurda, perchè essendo $\frac{km+1}{kn} = \frac{m}{n} + \frac{1}{kn}$ maggiore di $\frac{m}{n} = a$, per ciò che si è sopra dimostrato deve essere $(km + 1) U > knA$. Quindi mU non può essere minore di nA. In modo analogo si dimostra che mU non può essere maggiore di nA. Quindi si conchiude

$$m U = n A.$$

Pertanto, ripetendo U m volte, ed A n volte, la grandezza mU è maggiore o eguale o minore di nA, secondochè $\frac{m}{n}$ è maggiore o eguale o minore di a, ossia a è il numero che misura A.

195. Area piana. — Sia $y = f(x)$ l'equazione d'una curva riferita ad assi cartesiani ortogonali. Si suppone $f(x)$ continua e positiva nell'intervallo da a a b $(a < b)$. Dico che l'area piana limitata dalla curva AB, dalle ordinate AA', BB' corrispondenti ai valori a e b di x, e dall'asse delle x è misurata dall' $\int_a^b f(x)\,dx$.



Infatti: diviso il segmento $A'B'$ in parti: e pei punti di divisione segnate le ordinate in modo da decomporre l'area data in parti, di cui una qualunque sia $PQP'Q'$, e costrutti i due rettangoli di base $P'Q'$ e di altezza la massima e minima ordinata dei punti dell'arco PQ, e fatta la stessa operazione per tutte le parti in cui si è divisa l'area data, questa è minore della somma dei primi rettangoli e maggiore della somma dei secondi, qualunque sia la legge con cui si divide $A'B'$.

Ma dette $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$, $x_n = b$ le ascisse dei punti di divisione di $A'B'$, e detti $l(\alpha, \beta)$ e $\lambda(\alpha, \beta)$ il massimo e il minimo valore di $f(x)$ nell'intervallo (α, β), la somma dei primi rettangoli è misurata dal numero

$$s_1 = \sum (x_{r-1} - x_r)\, l(x_r, x_{r-1}),$$

e la somma dei secondi da

$$s_2 = \sum (x_{r-1} - x_r)\, \lambda(x_r, x_{r-1}).$$

ed esiste il sol numero $\int_a^b f(x)\,dx$ minore di tutti i valori che può assumere s_1 e maggiore dei valori di s_2.

Quindi $\int_a^b f(x)\,dx$ è il numero che misura l'area data.

196. Volume. — Sia dato un solido qualunque, di cui si cerca il volume V. Segnato un asse Ox, si immagini un sistema di piani perpendicolari ad Ox, che incontrano Ox in punti di ascisse

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, \ldots\ldots x_n = b,$$

e che dividono il solido in porzioni. Si suppone il solido dato compreso fra i piani di ascisse $x = a$ ed $x = b$.

Sia $f(x)$ l'area della sezione fatta nel solido da un piano perpendicolare all'asse Ox nel punto di ascissa x.

Supporremo $f(x)$ funzione continua.

Si supponga riconosciuto che il volume limitato fra due piani paralleli è compreso fra i volumi di due cilindri aventi per altezza la distanza fra i due piani, e per base rispettivamente la massima e la minima area della sezione fatta nel solido da un piano parallelo ai due, e compreso fra essi, cosa facile a riconoscersi nei casi più comuni (e che potrebbe assumersi come postulato in tutti i casi).

Allora il volume dato sarà minore della somma di certi cilindri, misurata da $s_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, l\,(x_r, x_{r+1})$, e maggiore della somma di altri cilindri misurata da $s_2 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, \lambda\,(x_r, x_{r+1})$.

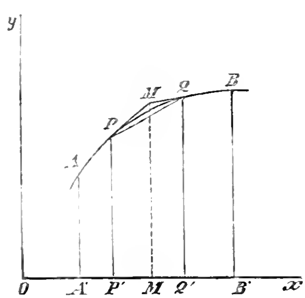
Ma esiste il sol numero $\int_a^b f(x)\,dx$ minore di tutti i valori di s_1 e maggiore dei valori di s_2; dunque l' $\int_a^b f(x)\,dx$ misura il volume dato.

197. — Lunghezza d'un arco di curva piana. Sia $y = f(x)$ l'equazione d'una curva AB in coordinate cartesiane ortogonali. Si suppone che la funzione $f(x)$ abbia derivata $f'(x)$ continua nell'intervallo (a, b), e che in quest'intervallo la $f'(x)$ vada sempre crescendo, ovvero sempre decrescendo, ovvero che l'intervallo (a, b) si possa decomporre in intervalli parziali in ciascheduno dei quali $f'(x)$ vada sempre crescendo o decrescendo.

Ricorreremo ai due postulati (Archimede, περὶ σφαῖρας καὶ κυλίνδρου, A, λαμβ. α′ e β′):

1° *Di tutte le linee contermini la minima è la retta.*

2° *Di due linee piane contermini, convesse dalla stessa parte, l'avviluppante è maggiore dell'avviluppata.*



Pongasi $F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, ossia eguale al reciproco del coseno dell'angolo che la tangente alla curva nel punto di ascissa x fa coll'asse Ox. Sia (α, β) un intervallo parte di (a, b): PQ l'arco corrispondente di curva. Dico che l'arco PQ è compreso fra due grandezze misurate dai numeri

$$(\beta - \alpha)\, l\,(\alpha, \beta) \quad \text{e} \quad (\beta - \alpha)\, \lambda\,(\alpha, \beta),$$

indicando con $l\,(\alpha, \beta)$ e $\lambda\,(\alpha, \beta)$ i limiti superiore ed inferiore dei valori di $F(x)$ nell'intervallo (α, β). Invero l'arco PQ è maggiore della sua corda (postulato 1°), la quale è misurata da $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+[f(\beta)-f(\alpha)]^2}=(\beta-\alpha)\sqrt{1+\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right)^2}=$ $=(\beta-\alpha)\sqrt{1+[f'(x_1)]^2}=(\beta-\alpha)F(x_1)$, ove x_1 è una quantità compresa fra α e β; e questo numero è maggiore di $(\beta-\alpha)\lambda(\alpha,\beta)$.

Inoltre, se nell'intervallo (α,β) $f'(x)$ è sempre crescente, ovvero sempre decrescente, e quindi l'arco PQ è convesso da una stessa parte del piano, segnate le tangenti in P e in Q alla curva, queste si incontreranno in un punto M, la cui ascissa γ è compresa fra α e β, e, pel postulato 2°, sarà arco $PQ<PM+MQ$. Ma questa linea PMQ è misurata da $(\gamma-\alpha)F(\alpha)+(\beta-\gamma)F(\beta)$; e siccome $F(\alpha)$ ed $F(\beta)$ sono minori di $l(\alpha,\beta)$, si deduce che l'arco PQ è minore della lunghezza misurata da $(\beta-\alpha)\,l(\alpha,\beta)$.

Se nell'intervallo (α,β) $f'(x)$ non varia sempre nello stesso senso, per la ipotesi fatta, si potrà decomporre quest'intervallo in altri, p. e. (α,γ), (γ,δ), (δ,β) in ciascheduno dei quali $f'(x)$ varia nello stesso senso, e quindi l'arco PQ sarà minore della lunghezza $(\gamma-\alpha)l(\alpha,\gamma)+(\delta-\gamma)\,l(\gamma,\delta)+(\beta-\delta)l(\delta,\beta)<(\beta-\alpha)l(\alpha,\beta)$, come prima.

Ciò premesso, si divida l'intervallo dato (a,b) in parti, coi valori arbitrarii $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\dots x_{n-1},\ x_n=b$. Si avrà pure decomposto l'arco AB in parti, ed applicando a ciascheduna di queste le diseguaglianze precedenti, si avrà che l'arco AB è minore del sistema di lunghezze misurate dai numeri $s_1=\sum(x_{r+1}-x_r)\,l(x_r,x_{r+1})$, ed è maggiore delle lunghezze misurate dai numeri $s_2=\sum(x_{r+1}-x_r)\,\lambda(x_r,x_{r+1})$. Ma esiste il sol numero

$$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

minore di tutti i valori di s_1, e maggiore dei valori di s_2; dunque questo integrale misura l'arco AB.

Così si vede come, partendo dai concetti intuitivi di grandezze geometriche, completati da postulati semplicissimi, ammessi fin dagli antichi geometri, si possa arrivare a trovare che un certo numero misura una data grandezza, senza ricorrere a nuove definizioni che sono, o paiono arbitrarie.

Questo modo di ragionare, che è quello stesso di Archimede, si può pure applicare ad altre grandezze geometriche; ma è facile lo scorgere che, almeno senza introdurre nuovi postulati non comunemente ammessi, non si può applicare a tutte le grandezze geometriche.

Calcolo degli integrali definiti.

198. — In virtù della definizione data, un integrale definito si ottiene con tutta facilità conoscendone l'integrale indefinito. Il calcolo però si può semplificare applicando direttamente all'integrale definito i procedimenti di integrazione visti per gli integrali indefiniti.

Si è trovato, posto $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,,$$

colla quale eguaglianza si intende che calcolato un integrale indefinito di $f(x)\,dx$, e sia

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

e posto $x = \varphi(t)$, la funzione $F[\varphi(t)]$ è un integrale del membro di destra. Se si prende ora nel membro di destra l'integrale definito fra t_0 e t_1 si ha

$$F[\varphi(t_1)] - F[\varphi(t_0)] = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,,$$

e se si fa $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi(t_1) = x_1$, il membro di sinistra vale

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\,.$$

onde

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Esempio. Se in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx$ si fa $x = \frac{\pi}{2} - z$, si ricava

$$\operatorname{sen} x = \cos z\,, \quad dx = -dz\,,$$

e x assumerà i valori 0 e $\frac{\pi}{2}$ ove si faccia $z = \frac{\pi}{2}$ e 0; onde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m z\,dz\,,$$

e se nel membro di destra si scambiano fra loro i limiti, e la lettera z in x,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx.$$

Sia ancora a calcolare $\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$, del quale differenziale non si conosce l'integrale indefinito. Si avrà

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Nel secondo integrale del membro di destra facciasi la sostituzione $x = \pi - z$, onde $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} z$, $\cos x = -\cos z$, $dx = -d\,z$; e per $x = \frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{2}$, e per $x = \pi$, $z = 0$. Si avrà:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - z) \operatorname{sen} z}{1 + \cos^2 z} d\,z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - z) \operatorname{sen} z\,dz}{1 + \cos^2 z}\,,$$

che si scinde nella somma

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} z\,dz}{1 + \cos^2 z} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \operatorname{sen} z\,dz}{1 + \cos^2 z}.$$

Ora $\int \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{1+\cos^2 z} = -\int \frac{d \cos z}{1+\cos^2 z} = -\operatorname{arc\,tang} \cos z$, e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{1+\cos^2 z} = -\operatorname{arc\,tang} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang} \cos 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Sostituendo questi valori nell'integrale cercato, ed osservando che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \operatorname{sen} z}{1+\cos^2 z}\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx,$$

si ricava infine

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

199. — La regola d'integrazione per parti, e alcune formule di riduzioni trovate dànno luogo a formule del tipo

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) \pm \int \psi(x)\, dx,$$

e posto $F(x) = \int f(x)\, dx$, $\Psi(x) = \int \psi(x)\, dx$,

$$F(x) = \varphi(x) \pm \Psi(x):$$

fatto in questa formula $x = x_1$ ed $x = x_2$, e sottraendo si ha

$$F(x_2) - F(x_1) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \pm [\Psi(x_2) - \Psi(x_1)],$$

ossia

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \pm \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\, dx,$$

ossia per integrare per parti un integrale definito basta fare la differenza dei valori che assume ai limiti la parte integrata, e prendere fra gli stessi limiti il nuovo integrale.

Vogliasi per esempio l' $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\, dx$ per m intero e positivo; si è trovata la formula (N. 185, (4))

$$\int \operatorname{sen}^m x\, dx = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx;$$

quindi, applicando la regola precedente si avrà, se $m > 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\, dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx;$$

in modo analogo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx = \frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-4} x\, dx,$$

. . . .

e così applicando più volte la stessa formula, ci ridurremo, se m è pari $= 2n$, a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Se invece m è impari, $m = 2n+1$, ci ridurremo infine agli integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = 1,$$

onde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} .$$

200. — Dalle formule precedenti possiamo dedurre un'espressione di π sotto forma di prodotto infinito. Invero, essendo, per x compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

$$0 \leqq \operatorname{sen} x \leqq 1 ,$$

sarà

$$\operatorname{sen}^{2n+1} x \leqq \operatorname{sen}^{2n} x \leqq \operatorname{sen}^{2n-1} x$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, dx ,$$

e sostituendo agli integrali i loro valori, e permutando l'ordine dei fattori

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} ,$$

ossia

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} ,$$

da cui si deduce

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n+\theta}{2n+1} ,$$

ove θ è una quantità compresa fra 0 ed 1.

Facciasi in questa formula crescere indefinitamente n; l'ultimo fattore $\frac{2n+\theta}{2n+1}$ tende verso l'unità; onde $\frac{\pi}{2}$ è eguale al limite degli altri fattori, ossia

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots\cdots$$

Questa formula è dovuta a Wallis.

Integrali definiti con limiti infiniti, o in cui la funzione a integrarsi è infinita entro i limiti d'integrazione.

201. — Nella definizione data di $\int_a^b f(x)\,dx$ si è supposto che i limiti a e b siano numeri finiti, e che sia pure determinata e finita la funzione $f(x)$ nell'intervallo d'integrazione. Però, con opportune convenzioni, possiamo attribuire un significato allo stesso simbolo, ove queste condizioni non siano verificate.

Intenderemo, colle scritture

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

i limiti, ove esistano, verso cui tende l'$\int_a^b f(x)\,dx$ ove si faccia rispettivamente tendere b verso $+\infty$, o a verso $-\infty$, ovvero b verso $+\infty$ e a verso $-\infty$.

Vogliasi p. e. $\int_0^{\infty} e^{-hx}\,dx$. Si ha

$$\int e^{-hx}\,dx = -\frac{e^{-hx}}{h}, \quad \int_0^b e^{-hx}\,dx = \frac{1-e^{-bh}}{h},$$

e facendo tendere b verso l'infinito positivo, se $h > 0$, $\lim e^{-bh} = 0$, onde

$$\int_0^{\infty} e^{-hx}\,dx = \lim_{b=\infty} \int_0^b e^{-hx}\,dx = \frac{1}{h} \qquad (h > 0).$$

Se invece $h < 0$, $\int_0^b e^{-hx}\,dx$ col crescere indefinitamente di x cresce indefinitamente, onde $\int_0^{\infty} e^{-hx}\,dx$ non ha valore finito.

Si ha

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C\,,$$

onde

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = -\cos b + \cos a\,,$$

e se qui si fa tendere b verso l'infinito, $-\cos b$ oscilla fra -1 e $+1$ senza tendere ad un limite determinato; quindi non ha senso l'espressione

$$\int_a^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx.$$

Lo stesso è a dirsi se si fa tendere il limite inferiore, od amendue i limiti all'infinito.

Si consideri ancora

$$\int \frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{h} + C.$$

Potremo supporre $h > 0$, perchè nel differenziale non comparisce che il suo quadrato; e supporremo, secondo le convenzioni fatte, $\operatorname{arc\,tang} \frac{x}{h}$ compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Si avrà:

$$\int_0^b \frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{h}\,,$$

e facendo tendere b verso $+\infty$ si ha

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{\pi}{2h}.$$

Si ha pure

$$\int_a^b \frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{h} - \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{h}\,,$$

e se si fa tendere b a $+\infty$, ed a a $-\infty$ si deduce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^2 + x^2} = \frac{\pi}{h}.$$

Si è trovato (N. 188)

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx - b\operatorname{sen} bx)$$

$$\int e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx);$$

quindi, se $a < 0$, si deduce

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

202. — Se del differenziale dato si conosce l'integrale indefinito, dalla formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

è spesso assai facile riconoscere se col crescere indefinitamente di b, o di a, o di amendue, l'integrale proposto tenda ad un limite finito, e quindi se la funzione data sia integrabile entro limiti infiniti.

Ma sono utili i seguenti criterii che permettono, dallo studio del solo differenziale, di riconoscere l'esistenza dell'integrale entro limiti infiniti.

Teorema. — *Se la funzione* $f(x)$ *da un certo valore di* x *in poi conserva uno stesso segno, l'* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *è infinito se il prodotto* $xf(x)$ *è in valor assoluto, da un certo valore di* x *in poi, maggiore d'una quantità finita non nulla.*

Lo stesso $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *è finito se il prodotto* $x^{1+n}f(x)$, *ove* n *è un numero positivo, è da un certo valore di* x *in poi minore d'una quantità finita.*

Infatti, se X è un valore di x dal quale in poi sono soddisfatte le ipotesi del teorema, si avrà:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^X f(x)\,dx + \int_X^b f(x)\,dx.$$

Il primo integrale del membro di destra è finito, ed indipendente da b; e basta considerare il secondo.

Se p. e. $f(x)$ è positiva, e $xf(x) > A$, A essendo una quantità non nulla, sarà $f(x) > \frac{A}{x}$, e $\int_X^b f(x)\,dx > \int_X^b \frac{A}{x}\,dx$. Questo integrale vale $A \log \frac{b}{X}$, e col crescere indefinitamente di b tende all'infinito; dunque anche $\int_a^b f(x)\,dx$ col crescere indefinitamente di b cresce indefinitamente.

Suppongasi ora che, per tutti i valori di $x > X$ sia $x^{1+n} f(x) < A$, ove $n > 0$. Sarà $f(x) < \frac{A}{x^{1+n}}$, e $\int_X^b f(x)\,dx < \frac{A}{n}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{b}\right) < \frac{A}{nX}$. Quindi col crescere indefinitamente di b l'integrale $\int_X^b f(x)\,dx$ cresce continuamente, perchè la sua derivata è positiva, ma mantenendosi sempre minore d'una quantità finita, e perciò tende ad un limite finito, e lo stesso avviene per l'integrale proposto.

Corollario. — *Se* $f(x)$ *conserva da un certo valore di* x *in poi lo stesso segno, l'* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è infinito se col crescere indefinitamente di* x *lim* $xf(x)$ *è finito e non nullo, ovvero infinito. Lo stesso integrale è determinato e finito, se* $x^{1+n} f(x)$, *ove* $n < 0$, *col crescere di* x *tende ad un limite finito, o allo zero.*

Se la funzione $f(x)$ cambia sempre di segno da ogni valore di x in poi, si può applicare il criterio:

L' $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *è determinato, se, detto* $f_1(x)$ *il valore assoluto di* $f(x)$, *l'* $\int_a^\infty f_1(x)\,dx$ *è finito.*

Infatti, se $\int_a^b f_1(x)\,dx$ col crescere indefinitamente di b tende ad un limite finito, fissato ad arbitrio ϵ, esisterà un valore di b, e sia B, tale che attribuendo a b due valori b e b' maggiori di B è (N. 15)

$$\int_a^{b'} f_1(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_b^{b'} f_1(x)\,dx < \epsilon.$$

Ma, essendo $f_1(x) \geqq f(x) \geqq -f_1(x)$, sarà

$$\int_b^{b'} f_1(x)\,dx \geqq \int_b^{b'} f(x)\,dx \geqq -\int_b^{b'} f_1(x)\,dx\,,$$

ossia, fissata ad arbitrio ϵ, si può determinare un valore B di b in modo che la differenza fra due valori assunti da $\int_a^b f(x)dx$, attribuendo a b due valori b e b' qualunque, maggiori di B sia in valor assoluto minore di ϵ, ossia l' $\int_a^b f(x)\,dx$ col crescere indefinitamente di b tende ad un limite.

203. — Se la funzione $f(x)$ diventa infinita per $x = b$, si intende per $\int_a^b f(x)\,dx$ il limite, se esiste, verso cui tende l' $\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$, dove $b-\epsilon$ è una quantità compresa fra a e b, ove si faccia tendere ϵ verso zero. Se $f(x)$ diventa infinita per $x = a$, si assume per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx\,.$$

ove $a+\epsilon$ è compreso fra a e b. Se $f(x)$ diventa infinita per un valore $x = c$ medio fra a e b, si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon'=0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x)\,dx\,,$$

e si fanno analoghe definizioni, se $f(x)$ diventa infinito per più valori di x appartenenti all'intervallo (a, b).

Esempi. — 1°. Si voglia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ove la funzione ad integrarsi diventa infinita al limite superiore. Si ha

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x\,.$$

e facendo tendere x verso 1, il membro di destra tende a $\frac{\pi}{2}$; quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Si ha $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$; $\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\epsilon}$, e facendo tendere ϵ a zero,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

3°. Si ha $\int \frac{dx}{x} = \log x$: quindi $\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = -\log \epsilon$, e facendo tendere ϵ a zero si ha $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$.

4°. Si voglia $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$. Per definizione esso è eguale al limite di $\int_{+\epsilon}^{+1} \frac{dx}{x} + \int_{-1}^{-\epsilon'} \frac{dx}{x}$, ove ϵ ed ϵ' tendano a zero; ossia $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim \log \frac{\epsilon}{\epsilon'}$, e facendo tendere ϵ ed ϵ' verso zero indipendentemente l'un dall'altro, questa quantità non tende ad alcun limite. Quindi l' $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ non è determinato.

204. — Se del differenziale dato si conosce l'integrale indefinito $F(x)$, ricorrendo alla formula

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = F(b-\epsilon) - F(a)$$

sarà spesso facile, come si è fatto negli esempi precedenti, riconoscere l'esistenza, ovvero non del limite dell'integrale, ove si faccia tendere ϵ a zero.

Alcune volte, con un conveniente cambiamento di variabile si può trasformare il differenziale dato in un altro che si conserva finito ai limiti dell'integrazione. Così per es. volendosi riconoscere l'esistenza di

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

ove $k^2 < 1$, in cui il differenziale diventa infinito al limite superiore, pongasi $x = \operatorname{sen}\varphi$: si avrà

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,.$$

e facendo tendere φ verso $\frac{\pi}{2}$, e quindi x verso 1, la funzione da integrarsi rimane finita, e quindi anche l'integrale di sinistra tende ad un limite.

Ma in un gran numero di casi si può riconoscere dal solo esame del differenziale l'esistenza dell'integrale ricorrendo alle seguenti proposizioni.

TEOREMA. — *Se* $f(x)$ *diventa infinita per* $x = b$, *e nelle vicinanze di* $x = b$ *conserva un segno costante, se in queste vicinanze il prodotto* $(b-x)f(x)$ *è maggiore in valor assoluto d'un numero determinato non nullo, l'* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è infinito. Se invece in queste vicinanze il prodotto* $(b-x)^n f(x)$, *ove* n *è un numero minore dell'unità, si conserva minore d'un numero finito, esiste l'* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Invero, supposto che le condizioni enunciate siano soddisfatte in tutto l'intervallo (a, b), perchè ove questo non avvenisse, basta decomporre l'integrale in due, e supposto per semplicità $a < b$, e $f(x) > 0$, se $(b-x)f(x) > A$, sarà $f(x) > \frac{A}{b-x}$, e

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx > A\left[\log(b-a) - \log\epsilon\right]$$

e fatto tendere ϵ a zero, il membro di destra cresce indefinitamente, e lo stesso avviene dell'integrale di sinistra.

Se invece $(b-x)^n f(x) < A$, con $n < 1$, sarà $f(x) < \frac{A}{(b-x)^n}$,

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx < A\int_a^{b-\epsilon}\frac{dx}{(b-x)^n} = A\left[\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n} - \frac{\epsilon^{1-n}}{1-n}\right] < A\,\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}\,;$$

quindi, col tendere di ϵ a zero, l' $\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ cresce continuamente, perchè la sua derivata è positiva, ma non indefinitamente, e perciò tende ad un limite, ed esiste l' $\int_a^b f(x)\,dx$.

COROLLARIO. — *Se* $f(x)$ *diventa infinita per* $x=b$, *e, col tendere di* x *a* b, $(b-x)f(x)$ *tende ad un limite finito e non nullo, ovvero all'infinito (determinato di segno), l'* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è infinito. Se invece il prodotto* $(b-x)^n f(x)$, *ove* $n<1$ *tende ad un limite finito o nullo, l'* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è determinato e finito.*

COROLLARIO. — *L'* $\int_a^b f(x)\,dx$ *è determinato e finito, se altrettanto avviene di* $\int_a^b f_1(x)\,dx$, *ove* $f_1(x)$ *è il valore assoluto di* $f(x)$.

Calcolo d'alcuni integrali definiti.

205. — Si consideri l'integrale

$$\text{(1)} \qquad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,, \qquad (p>0,\ q>0)$$

che vien detto integrale Euleriano di prima specie. Esso ha un valore finito se p e q sono positivi. Invero la funzione da integrarsi è finita per tutti i valori di x interni all'intervallo (0, 1), e non può diventare infinita che ai limiti di quest'intervallo, se p e q sono minori di 1; ma siccome $x^{1-p}.x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ e $(1-x)^{1-q}.x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ tendono all'unità col tendere rispettivamente di x a zero, e ad 1, si deduce che l'integrale è sempre finito.

L'equazione (1) definisce pertanto la funzione $B(p,q)$ di due va riabili, per tutti i valori positivi di esse. Questa funzione gode di notevoli proprietà.

Pongasi in (1) $x=1-z$; si ricava

$$\mathrm{B}(p,q)=-\int_1^0 (1-z)^{p-1} z^{q-1}\,dz=\int_0^1 (1-z)^{p-1} z^{q-1}\,dz,$$

ossia

(2) $$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p),$$

il che dice che $\mathrm{B}(p,q)$ è funzione simmetrica delle due variabili.

L'integrazione per parti dà

$$\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}+\frac{q-1}{p}\int x^p(1-x)^{q-2}\,dx,$$

e, mettendo i limiti, se $q>1$,

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx,$$

e nell'integrale di destra ricorrendo all'identità

$$x^p=x^{p-1}-x^{p-1}(1-x),$$

si ha, fatte alcune riduzioni (V. anche N. 180, (5))

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{q-1}{p+q-1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx,$$

ossia

(3) $$\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p,q-1).$$

Applicando più volte questo procedimento, se $q>1$, sottraendo un'unità alla volta, saremmo ridotti ad un integrale in cui $q \overline{\gtrless} 1$. Ci ridurremo a $q=1$ se q era intero; e siccome

$$\mathrm{B}(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}\,dx=\frac{1}{p},$$

si deduce, se q è intero:

$$(4) \qquad \mathrm{B}(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \cdot \frac{q-2}{p+q-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p} \,.$$

Si avrebbe una formula analoga se p è intero: se p e q sono amendue interi, l'ultima formula si può scrivere

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!} \,.$$

206. — La funzione $\mathrm{B}(p, q)$ si può sviluppare in prodotto infinito, qualunque siano p e q. Invero, risolvendo la formula (3) rispetto all'integrale di destra, e aumentando q di un' unità, si ha

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{p+q}{q} \mathrm{B}(p, q+1),$$

ed applicando più volte questa stessa formula, si ha

$$(5) \qquad \mathrm{B}(p, q) = \frac{p+q}{q} \frac{p+q+1}{q+1} \cdots \cdots \frac{p+q+k}{q+k} \mathrm{B}(p, q+k+1).$$

Sia n l'intero tale che $n \leqq q \leqq n+1$. Siccome aumentando q $\mathrm{B}(p, q)$ diminuisce, si deduce

$$\mathrm{B}(p, n+k+1) > \mathrm{B}(p, q+k+1) > \mathrm{B}(p, n+k+2),$$

ovvero

$$\mathrm{B}(p, n+k+1) > \mathrm{B}(p, q+k+1) > \frac{n+k+1}{p+n+k+1} \mathrm{B}(p, n+k+1).$$

Il fattore $\dfrac{n+k+1}{p+n+k+1} = 1 - \dfrac{1}{p+n+k+1}$; quindi si deduce che esiste una quantità θ compresa fra zero ed uno, per cui

$$\mathrm{B}(p, q+k+1) = \left(1 - \frac{\theta}{p+n+k+1}\right) \mathrm{B}(p, n+k+1).$$

Sostituendo al B del membro di destra della (5) il valore qui ottenuto, ed in questa a $\mathrm{B}(p, n+k+1)$ il suo valore dato dalla (4) si ha:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k)}{q(q+1)\ldots(q+k)}\cdot\frac{1.2\ldots(n+k)}{p(p+1)\ldots(p+k+n)}$$
$$\left(1-\frac{\theta}{p+n+k+1}\right),$$

che si può pure scrivere

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{1.2\ldots k(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k)}{p(p+1)\ldots(p+k)q(q+1)\ldots(q+k)}\times$$
$$\frac{(k+1)\ldots(k+n)}{(p+k+1)\ldots(p+k+n)}\left(1-\frac{\theta}{p+n+k+1}\right).$$

Facciasi qui tendere k all'infinito. Il secondo fattore ha per limite l'unità: quindi il primo fattore ha per limite $\mathrm{B}(p,q)$, ossia

$$(6)\qquad \mathrm{B}(p,q)=\lim_{k=\infty}\frac{k!\,(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k)}{p(p+1)\ldots(p+k)q(q+1)\ldots(q+k)},$$

ovvero anche

$$\mathrm{B}(p,q)=$$
$$\frac{p+q}{pq}\left(1-\frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right)\left(1-\frac{pq}{(p+2)(q+2)}\right)\left(1-\frac{pq}{(p+3)(q+3)}\right)\cdots\cdots$$

Questa formula serve per tutti i valori positivi di p e di q. Però il prodotto infinito del membro di destra è ancora convergente qualunque siano p e q, purchè non interi e negativi, o nulli, nel qual caso qualche fattore è infinito.

La funzione B si può mettere sotto altre forme, facendo un conveniente cambiamento di variabile nella (1). Se si fa $x=\frac{z}{1-z}$, ed invece di z si rimette x, si ha

$$(7)\qquad \mathrm{B}(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx,$$

e se nella stessa formula si scambia x in $\operatorname{sen}^2 x$ si ha

$$(8) \qquad \mathrm{B}(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2p-1} x\, dx.$$

Se in questa si fa $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, si trova

$$(9) \qquad \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

E se si fa $p = q = \frac{1}{2}$ nella formula (6) si ritrova la formula di Wallis (N. 200).

207. — L'integrale

$$(1) \qquad \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx$$

dicesi integrale Euleriano di seconda specie. Esso ha un valore finito se $n > 0$. Invero, la funzione ad integrarsi $e^{-x} x^{n-1}$ moltiplicata per una potenza qualunque di x ha per limite zero col crescere indefinitamente di x; inoltre essa può diventare infinita per $x = 0$, se $n < 1$, ma siccome $x^{1-n} . e^{-x} x^{n-1}$ col tendere di x a zero tende all'unità, si conchiude che l'integrale è finito.

La funzione $\Gamma(n)$ gode di notevoli proprietà. Si ha dall'integrazione per parti

$$\int e^{-x} x^{n-1}\, dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1)\int e^{-x} x^{n-2}\, dx,$$

e mettendo i limiti, se $n > 1$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx = (n-1)\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2}\, dx,$$

ossia

$$(2) \qquad \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1).$$

Questa formula permette di ridurre il valore di n, se era maggiore dell'unità, ad essere eguale o minore di 1. Se n è intero, applicando più volte la stessa formula si arriverà all'integrale

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

e quindi, per n intero:

$$(3) \qquad \Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 2.1 = (n-1)!\,.$$

208. — La funzione $\Gamma(n)$ si può sviluppare in prodotto infinito. Pongasi perciò nella (1) $x = kz$, ove k è un numero positivo arbitrario. Si avrà

$$(a) \qquad \Gamma(n) = k^n \int_0^\infty e^{-kz} z^{n-1} dz.$$

Ora si ha che $e^z > 1 + z$, quindi $e^{-kz} < \frac{1}{(1+z)^k}$, e

$$\Gamma(n) < k^n \int_0^\infty \frac{z^{n-1} dz}{(1+z)^k}.$$

L'integrale di destra si riduce alle funzioni B ponendo $z = \frac{t}{1-t}$ (N. 206, formula 7); onde

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-1} dz}{(1+z)^k} = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{k-n-1} dt,$$

e quindi

$$(b) \qquad \Gamma(n) < k^n \, \mathrm{B}(n, k-n).$$

D'altra parte si ha

$$\int_0^\infty e^{-kz} z^{n-1} dz > \int_0^1 e^{-kz} z^{n-1} dz,$$

e, poichè $e^{-z} > 1 - z$, si avrà a fortiori

$$\int_0^\infty e^{-kz} z^{n-1} dz > \int_0^1 (1-z)^k z^{n-1} dz = \mathrm{B}(n, k+1),$$

e quindi

$$(c) \qquad \Gamma(n) > k^n \mathrm{B}(n, k+1).$$

Se nella (b) invece di k si legge $k+n+1$ si ha

$$\Gamma(n) < (k+n+1)^n \mathrm{B}(n, k+1) = k^n \mathrm{B}(n, k+1)\left(1+\frac{n+1}{k}\right)^n.$$

e paragonando questa formula colla precedente, si deduce

$$(d) \qquad \Gamma(n) = k^n \mathrm{B}(n, k+1)\left(1+\theta\frac{n+1}{k}\right)^n,$$

ove $0 < \theta < 1$. Facciasi in questa formula crescere indefinitamente k: l'ultimo fattore del membro di destra ha per limite l'unità, e quindi

$$\Gamma(n) = \lim_{k=\infty} k^n \mathrm{B}(n, k+1).$$

Se si suppone k intero, e si sostituisce a B la sua espressione nota si deduce

$$\Gamma(n) = \lim_{k=\infty} k^n \frac{1 \,.\, 2 \ldots\ldots k}{n(n+1)\ldots\ldots(n+k)}.$$

Paragonando questa formula colla (6) del N. 205, che dà lo sviluppo in prodotto infinito di $\mathrm{B}(p, q)$, si deduce subito che la funzione B si esprime mediante la Γ. Invero si ha

$$\Gamma(p) = \lim k^p \frac{k!}{p(p+1)\ldots(p+k)}, \qquad \Gamma(q) = \lim k^q \frac{k!}{q(q+1)\ldots(q+k)},$$

$$\Gamma(p+q) = \lim k^{p+q} \frac{k!}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k)},$$

e quindi

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \lim \frac{k!(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k)}{p(p+1)\ldots(p+k)q(q+1)\ldots(q+k)},$$

ossia

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Se in questa si fa $p = q = \frac{1}{2}$, si deduce

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi,$$

onde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

209. — Si consideri ancora l'integrale

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Posto $x = \sqrt{z}$, si ha

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z} z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

ossia

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Se nel primo si fa $x = -z$, esso diventa identico al secondo, onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

L'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx,$$

ove a una costante positiva, si può ridurre al precedente ponendo $x\sqrt{a} = z$, e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Sviluppo in serie degli integrali definiti.

210. — Se la funzione $f(x)$, che si deve integrare, si può mettere sotto la forma

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + R_n,$$

ove u_0, $u_1, \ldots$ sono funzioni continue di x, si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_{n-1}\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

Facciasi qui crescere indefinitamente n. Se si riconosce che $\int_a^b R_n\,dx$ ha per limite zero, si conchiude lo sviluppo in serie dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \ldots\ldots$$

211. — Si ha per esempio:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x};$$

quindi, moltiplicando per dx, ed integrando fra 0 ed x

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

Ora

$$\int_0^x \frac{x^n}{1+x}\,dx = \frac{1}{1+\theta x}\int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)},$$

ove θ è una quantità compresa fra 0 ed 1. Di qui si riconosce che se $-1 < x \leqq 1$, $\int_0^x \frac{x^n}{1+x}\,dx$ col crescere indefinitamente di n ha per limite zero, e quindi (N. 79)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \qquad (-1 < x \leqq +1).$$

Se x non è compreso fra questi limiti, la serie di destra è divergente.

212. — Si ha

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \pm x^{2(n-1)} \mp \frac{x^{2n}}{1+x^2};$$

moltiplicando per dx ed integrando fra 0 ed x si ha

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \int_0^x \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx.$$

L'ultimo termine vale

$$\int_0^x \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{1+\theta x^2}\int_0^x x^{2n}\,dx = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x^2)},$$

ove θ è compreso fra 0 ed 1. Quindi si vede che se $-1 \leqq x \leqq +1$, questo termine ha per limite zero, e (N. 82)

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \qquad (-1 \leqq x \leqq +1).$$

213. — Se $f(x)$ si può sviluppare in serie

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

convergente per tutti i valori di x appartenenti all'intervallo finito (a, b), e se questa serie è di convergenza equabile, ossia, se fissato ad arbitrio ϵ esiste un numero N tale che il resto della serie dopo un numero di termini qualunque maggiore di N, qualunque sia il valore di x nell'intervallo (a, b) è sempre minore di ϵ, e le funzioni $u_0\ u_1 \ldots$ sono continue, e quindi è anche continua $f(x)$, sarà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots.$$

Infatti, detto R_n il resto della serie dopo n termini, se $n > N$, sarà $R_n < \epsilon$: quindi $\int_a^b R_n\,dx < \epsilon(b-a)$, e questa quantità si può rendere tanto piccola quanto si vuole col prendere ϵ sufficientemente piccolo.

Es. 1°. Si ha

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots..$$

e la serie di destra è di convergenza equabile per ogni intervallo finito, perchè se a è il massimo valore assoluto che può assumere x, il resto della serie considerata dopo n termini è minore del resto corrispondente dello sviluppo in serie di $\frac{e^a}{a}$, la quale è convergente. Quindi

$$\int_a^b \frac{e^x}{x}\,dx = \log b + b + \frac{b^2}{2.2!} + \frac{b^3}{3.3!} + \ldots..$$

$$- \log a - a - \frac{a^2}{2.2!} - \frac{a^3}{3.3!} + \ldots..$$

2°. In modo analogo dalla serie

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots..$$

che è di convergenza equabile in ogni intervallo finito, si deduce

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \ldots..$$

3°. Con identico procedimento si ha

$$\int_a^b \frac{\cos x}{x}\,dx = \log b - \frac{b^2}{2.2!} + \frac{b^4}{4.4!} - \ldots..$$
$$- \log a + \frac{a^2}{2.2!} - \frac{a^4}{4.4!} + \ldots..$$

4° Vogliasi l' $\int_0^x e^x x^{n-1}\,dx$.

Si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots..$$

$$e^x x^{n-1} = x^{n-1} + x^n + \frac{x^{n+1}}{1.2} + \frac{x^{n+2}}{1.2.3} + \ldots..,$$

e questa serie è di convergenza equabile in ogni intervallo finito;

$$\int_0^x e^x x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{1.2(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{1.2.3(n+3)} + \ldots..$$

Se si fa $x = \infty$ il membro di sinistra si riduce a $\Gamma(n)$; ma nel membro di destra tutti i termini diventano infiniti.

5°. Vogliasi l' $\int_0^1 x^{nx}\,dx$. Si ha

$$x^{nx} = e^{nx \log x} = 1 + nx \log x + \frac{n^2 x^2 \log^2 x}{1.2} + \frac{n^3 x^3 \log^3 x}{1.2.3} + \ldots..$$

e la serie di destra di convergenza equabile per tutti i valori (positivi) di x.

Quindi per calcolare l'integrale proposto basta eseguire parecchi integrali del tipo $\int_0^1 x^m \log^m x\,dx$. Ma si ha, dall'integrazione per parti,

$$\int x^m \log^p x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^p x - \frac{p}{m+1}\int x^m \log^{p-1} x\,dx,$$

e quindi

$$\int_0^1 x^m \log^p x\,dx = -\frac{p}{m+1}\int_0^1 x^m \log^{p-1} x\,dx.$$

Applicando più volte questa formula, ci ridurremo infine a $\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$, e quindi

$$\int_0^1 x^m \log^p x\,dx = (-1)^p \frac{p!}{(m+1)^{m+1}}.$$

Sostituendo si ha

$$\int_0^1 x^{nx}\,dx = 1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \frac{n^4}{5^5} - \ldots\ldots$$

214. — Se si ha

(1) $$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

ove la serie di destra è convergente e di convergenza equabile nell'intervallo finito (a, b), e i termini di questa serie sono funzioni di x, continue o discontinue, ma integrabili nell'intervallo (a, b) secondo la definizione del N. 193, allora la funzione $f(x)$ è pure integrabile, ed il suo integrale è la somma degli integrali dei termini della serie.

Invero, fissata ad arbitrio una quantità ϵ, si determini un valore di n dal quale in poi il resto della serie (1) dopo n termini $R_n < \epsilon$. Diviso l'intervallo (a, b) in parti, supposto per semplicità $a < b$, e detto $s_1\varphi(x)$ e $s_2\varphi(x)$ la somma dei prodotti di questi intervalli parziali rispettivamente pel limite superiore ed inferiore dei valori di $\varphi(x)$ in quell'intervallo, dalla eguaglianza

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + R_n$$

si ricava

$$s_1 f(x) \leqq s_1 u_0 + s_1 u_1 + \ldots\ldots + s_1 u_{n-1} + s_1 R_n$$
$$s_2 f(x) \geqq s_2 u_0 + s_2 u_1 + \ldots\ldots + s_2 u_{n-1} + s_2 R_n,$$

ed inoltre, siccome $R_n < \epsilon$, saranno $s_1 R_n$ ed $s_2 R_n$ minori in valor assoluto di $\epsilon(b - a)$.

Detti $S_1\varphi(x)$ e $S_2\varphi(x)$ i limiti inferiore e superiore di $s_1\varphi(x)$ e $s_2\varphi(x)$, si deduce

$$S_1 f(x) \leqq S_1 u_0 + \ldots\ldots + S_1 u_{n-1} + \epsilon(b - a)$$
$$S_2 f(x) \geqq S_2 u_0 + \ldots\ldots + S_2 u_{n-1} - \epsilon(b - a).$$

Ma, essendo le funzioni u integrabili, si ha $S_1 u = S_2 u = \int_a^b u\,dx$; quindi $S_1 f(x)$ ed $S_2 f(x)$ che differiscono fra loro meno di $2\epsilon(b-a)$, quantità che si può rendere piccola ad arbitrio, sono eguali, e la funzione $f(x)$ è integrabile: e l' $\int_a^b f(x)\,dx$ differisce dalla somma degli integrali dai primi n termini della serie meno di $\epsilon(b-a)$, quantità che si può rendere piccola ad arbitrio: quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots\ldots$$

215. — L'integrazione per parti, più volte ripetuta, permette di sviluppare in serie alcuni integrali.

Abbiasi p. e. $\int_0^x x^m f(x)\,dx$. Integrando per parti, e prendendo come fattore ad integrarsi $x^m\,dx$, si ha

$$\int_0^x x^m f(x)\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} f(x) - \frac{1}{m+1}\int_0^x x^{m+1} f'(x)\,dx.$$

Applicando all'integrale di destra lo stesso procedimento, e così via, si ha:

$$\int_0^x x^m f(x)\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} f(x) - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f'(x) + \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} f''(x) - \ldots$$

$$\pm \frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} f^{(n-1)}(x) \mp \frac{1}{(m+1)\ldots(m+n)}\int_0^x x^{m+n} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Facciasi qui crescere indefinitamente n. Se l'ultimo termine ha per limite zero, si ha lo sviluppo in serie dell'integrale proposto. Se in questa serie si fa $m=0$, si trova, sotto le condizioni enunciate,

$$\int_0^x f(x)\,dx = x f(x) - \frac{x^2}{1.2} f'(x) + \frac{x^3}{1.2.3} f''(x) - \ldots\ldots$$

Questa formula è dovuta a Gio. Bernoulli, e si potrebbe pure ottenere da quella di Taylor.

Applicando la formola precedente all' $\int_0^x e^{-x} x^{n-1} dx$ si trova

$$\int_0^x e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} e^{-x} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} e^{-x} + \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} e^{-x} + \dots..$$

$$+ \frac{x^{n+m-1}}{n(n+1)\dots(n+m-1)} e^{-x} + \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} \int_0^x x^{n+m-1} e^{-x} dx.$$

L'ultimo termine vale $\frac{(\theta x)^{n+m-1} e^{-\theta x}}{n(n+1)\dots(n+m-1)}$, che col crescere indefinitamente di m ha per limite zero; quindi l'integrale proposto è eguale alla somma della serie infinita, i cui primi termini sono scritti nel membro di destra.

216. — Ma anche la formula di Taylor si può ottenere direttamente mediante l'integrazione per parti. Si ha

$$\int_{x_0}^a (a-x)^m f(x) dx = \frac{(a-x_0)^{m+1}}{m+1} f(x_0) + \frac{1}{m+1} \int_{x_0}^a (a-x)^{m+1} f'(x) dx.$$

Applicando la stessa formula all'integrale di destra, e ripetendo questa operazione n volte, si ha

$$\int_{x_0}^a (a-x)^m f(x) dx = \frac{(a-x_0)^{m+1}}{m+1} f(x_0) + \frac{(a-x_0)^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f'(x_0) + \dots$$

$$+ \frac{(a-x_0)^{m+n}}{(m+1)\dots(m+n)} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{1}{(m+1)\dots(m+n)} \int_{x_0}^a (a-x)^{m+n} f^{(n)}(x) dx.$$

Se in questa si fa $m=0$, si ricava

$$\int_{x_0}^a f(x) dx = \frac{a-x_0}{1} f(x_0) + \frac{(a-x_0)^2}{1.2} f'(x_0) + \dots + \frac{(a-x_0)^n}{1.2\dots n} f^{(n-1)}(x_0) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \int_{x_0}^a (a-x)^n f^{(n)}(x) dx.$$

Se qui si suppone che $f(x)$ sia la derivata di $F(x)$, si ottiene

$$F(a)-F(x_0)=\frac{a-x_0}{1}F'(x_0)+\frac{(a-x_0)^2}{1\,.\,2}F''(x_0)+\ldots+\frac{(a-x_0)^n}{1\,.\,2\ldots n}F^{(n)}(x_0)+$$
$$+\frac{1}{n\,!}\int_{x_0}^{a}(a-x)^n\,F^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Questa è appunto la formula di Taylor, completato con un resto che è dato sotto la forma di integrale definito (V. pag. 71, nota).

Questa espressione del resto è assai conveniente, perchè non contiene alcuna indeterminata θ. Se in esso si fa $a=x_0+h$, ed $x=x_0+ht$, si ha

$$R=\frac{h^{n+1}}{n\,!}\int_{x_0}^{x_0+h}(1-t)^n\,F^{(n+1)}(x_0+ht)\,dt.$$

Se si ricorre alla formula $\int_{x_0}^{a}\varphi(x)\,dx=(a-x_0)\varphi(x_1)$ ove x_1 è compreso fra x_0 ed a, si ha

$$R=\frac{1}{n\,!}(a-x_0)(a-x_1)^n\,F^{(n+1)}(x_1)$$

che è la forma data da Cauchy*. Ricorrendo invece alla formula

$$\int_{x_0}^{a}(a-x)^n\,F^{(n+1)}(x)\,dx=F^{(n+1)}(x_1)\int_{x_0}^{a}(a-x)^n\,dx=$$
$$F^{(n+1)}(x_1)\,\frac{(a-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

si ha

$$R=\frac{(a-x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}\,F^{(n+1)}(x_1),$$

sotto la forma data da Lagrange.

FINE DEL VOLUME

INDICE

CORREZIONI

		Invece di	*leggasi*
Pag. 4	linea 16	da x a	di x a
» 7	» 2	$A_1 - h$	$B_1 - h$
» 13	» 13	$x - h$, $x + h$	$x_1 - h$, $x_1 + h$
» »	» 20	$f(x) - f(x)$	$f(x) - f(x_1)$
» »	» 21	avendo	essendo
» »	» 22	che differiranno	tali che i valori corrispondenti di $f(x)$ differiranno
» 16	» 12	$\leqq, \leqq$	$\geqq, \geqq$
» 18	» 10	$f(x)$	$\varphi(x)$
» 19	» 23	$\frac{m}{1}$	$\frac{1}{m}$
» 25	» 14	all'esponente n	nt
» 28	» 6	$\frac{2m+1}{2m+1}$	$\frac{2m+1}{2n+1}$
» 32	» 9	y	Δy
» 43	» 1	$f'(x)$ assume	$f(x)$ assume
» 44	» 13	$\varphi(b) - (a)$	$\varphi(b) - \varphi(a)$
» 45	» 18	$= m$	*ed* $= m\,!$
» 48	» 13	$2^3 x^3$	$2^3 x^2$
» 50	» 25	sono	due
» 61	» 8-9	maggiore ovvero minore	minore ovvero maggiore
» 71	nota	$\int_a^b F(x\, dx$	$\int_a^b F'(x)\, dx$
» 73	linea 15	ultimo	n^{mo}
» 77	» 12	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^4}{4!}$
» 97	» 4	$\epsilon = -$	$\epsilon =$
» »	» 8-9	ϵ è negativo ed in valor assoluto	*si cancelli*

			Invece di	*leggasi*
Pag. 110	linea	13	1°	97. 1° —
» 117	»	5	$1 + \frac{1}{m}$	$1 + \frac{x}{m}$
» 124	»	7		$1 + \frac{x}{1-r} + \frac{rx^2}{(1-r)(1-r^2)} + \dots$
» 148	»	10	$u = p + 1$	$n = p + 1$
» 150	»	11	$x_0 + \theta h_1$	$x_0 + \theta h$
» 153	»	17	$f'_x < A_1$	$f'_{x_1} < A_1$
» 172	»	14	$\frac{Dx}{Dy}$	$\frac{Dy}{Dx}$
» 173	»	2	$\frac{D(x_1 x_2 \dots x_n)}{D(x_1 x_2 \dots x_n)}$	$\frac{D(x_1 x_2 \dots x_n)}{D(x_1 y_2 \dots y_n)}$
» 178	»	7	$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}$	$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$
» 188	»	11	ossia	ossia il limite di
» 190	»	3 dal fondo	$\Phi(0)$	$\Phi^{(n)}(0)$
» 207	»	1	$\frac{dz}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$	$\frac{dz}{dt}$ e $\frac{dz}{du}$
» 224	»	ultima	uc	u
» 245	»	11	$\varphi(x_2)$	$\varphi(\chi_2)$
» 275	»	11	$= q$	$= y$
» 277	»	8	di k' unità	di un' unità
» 282	formula (3)		$\frac{n-1}{m+1}$	$\frac{n-1}{m+n}$
»	»	formula (4)	$\frac{m+1}{m+n} \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx$	$\frac{m+1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^n x \, dx.$