

3. 2. 67

S. 1802. C. 5.

X

~~Handwritten scribble~~

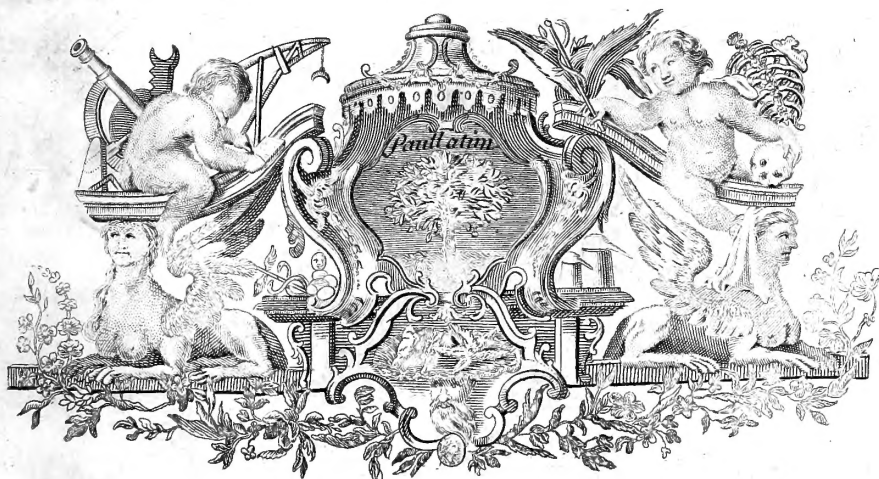
X₂ 4 5

\$1802 L.5.

COMMENTARIUM
ACADEMIAE
SCIENTIARUM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS V.

AD ANNOS clbcccxxx. et clbcccxxxr.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.
clb l3 cc xxxviii.



INDEX
COMMENTARIORVM
IN CLASSE MATHEMATICA.

Frid. Christoph. Maieri Noua Methodus calculandi
Eclipses Lunares. pag. 3.

Io. Bernoulli Solutiones nouorum quorundam Pro-
blematum Mechanicorum. pag. 11.

Frid. Christoph. Maieri Problemata Trigono-Sphae-
rica tria pag. 25.

Eiusdem Singularis Modus obseruandi siderum de-
clinationes et altitudinem Poli. pag. 33.

Leonb. Euleri de Progressionibus transcendentibus,
seu quarum termini generales Algebraice dari
nequeunt pag. 36.

Frid. Christoph. Maieri Problematibus de Stationibus
Planetarum. Casus alter pag. 57.

Dan. Bernoulli Notationes de aequationibus, quae
progrediuntur in infinitum, earumque reso-
lutione per Methodum serierum recurrentium:
vt et de noua serierum specie. Praelectio
prima. pag. 63.

Eiusdem Praelectio secunda. pag. 70.

Georg.

Georg. Wolffg. Krafft Solutio Problematis Cato-
ptrico-Geometrici. pag. 82.

Leonb. Euleri de Summatione innumerabilium Pro-
gressionum. pag. 91.

Dan. Bernoulli Differtatio breuis de motibus cor-
porum reciprocis seu oscillatoriis, quae vbiq̄ue
resistentiam patiuntur quadrato velocitatis suae
proportionalem. pag. 106.

Eiusdem Addidamentum ad Theoremata. pag. 126.

Leonb. Euleri quomodo data quacunq̄ue curua in-
uenire oporteat aliam, quae cum data quo-
dammodo iuncta ad Tautochronismum pro-
ducendum sit idonea. pag. 143.

Eiusdem de communicatione motus in collifione
corporum. pag. 159.

Eiusdem de Curuis rectificabilibus Algebraicis atque
traiectoriis reciprocis Algebraicis. pag. 169

Dan. Bernoulli Specimen Theoriae Nouae de men-
sura fortis. pag. 175.

IN CLASSE PHYSICA.

J. G. Du Vernoi de Glandulis Renalibus Eusta-
chii. pag. 187.

Jos. Weitbrecht de Figura et situ Vesicae vrina-
riae. pag. 194.

Georg.

Georg. Bernh. Bülfinger de Radicibus et Foliis Cichorii. pag. 198.

J. G. Du Vernoi Aër intestinorum tam sub externa quam intima tunica inclusus. pag. 213.

Eiusdem Observationes de quadrupede volatili Russiae. pag. 218.

Jos. Weitbrecht de Notis Characteristicis Ossium. pag. 234.

J. G. Gmelin de Augmento Ponderis, quod capiunt quaedam corpora, dum igne calcinantur. pag. 263.

J. G. Leutmann ad grauitatis liquorum differentiam cognoscendam. pag. 273.

J. G. Gmelin de Salibus Alkalibus fixis Plantarum. pag. 277.

IN CLASSE HISTORICA.

Theoph. Siegfr. Bayeri Conuersiones rerum Scythicarum temporibus Mithridatis Magni et paullo post Mithridatem. pag. 297.

Eiusdem Numus Aegiensis Illustratus pag. 361.

Eiusdem Fasti Achaici pag. 374.

Eiusdem Fasti Achaici Illustrati. pag. 382.

Em

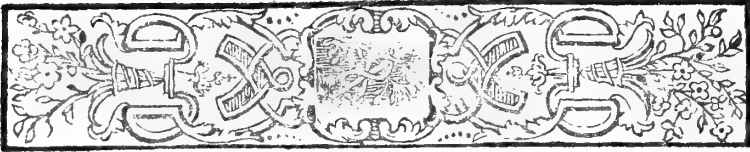
In Obseruationibus Astronom. et Physf.

7. N. De L'Isle Continuatio Eclipsum Iouis Satellitum. pag. 451.

Obseruatio defectus Lunae, habita Patavii ab Io. Poleno. pag. 458.

CLASSIS PRIMA
CONTINENS
MATHEMATICA.

1950



NOVA METHODVS
CALCVLANDI
ECLIPSES LVNARES.

AVCTORE

F. C. Maiero.

I.

Kepplerus in Rudolphinis p. 99. et 101. punctum orbitae lunaris, in quo fit maxima obscuratio, distinguit a loco copulae; eo enim momento, quo vtrumque luminare a nodo aequaliter remotum est, copulam celebrari pronunciat; at, si luna ibi versatur vbi linea centra luminarium iungens ad orbitam lunarem normalis est, in loco maximae obscurationis esse arbitratur. Mihi pro certo est, duo haec loca non esse diuersa, sic vero definiri debere, quod ibi et copula et maxima obscuratio fiat, vbi linea centra iungens omnium est breuissima. Interim tamen copulae definitionem Keplerianam tanquam vsu receptam retinebo, eamque distin-

Tabula I.

quam a definitione loci, vbi maxima obscuratio contingit, siue, vbi centra sibi sunt proxima. Hanc breuissimam centrorum distantiam, vti et distantias pro initio et fine eclipses, noua ratione indagare in praesenti scripto docebo.

Fig. 1.

2. Sint positione datae $A\odot$ et $B\odot$ viae rectae duorum mobilium \odot et \odot aequabiliter latetorum; Sint etiam duo loca \odot et \odot data, in quibus simul existunt mobilia; quaeruntur duo alia loca S et L , in quibus mobilia datam a se inuicem distantiam SL obtinent.

Ponatur sinus anguli $A\odot B = g$, et cosinus $= c$, sumto r pro sinu toto, velocitas ipsius \odot fit ad velocitatem \odot vti m , ad n , distantia SL fit $= f$, $\odot\odot = a$ et $\odot\odot = b$, quaeratur $L\odot = x$. siue $S\odot = \frac{m}{n}x$. Fiet praeterea $S\odot = \frac{an+mx}{n}$ et $L\odot = b+x$, consequenter ipsa SL determinatur per regulam, a me in Comment. A. praecedentis datam, cuius ope sequentem sum nactus aequationem $(rn^2 + rm^2 - 2cmn)x^2 + 2(ramn + rn^2b - bcnm - acn^2)x = rn^2f^2 + 2abcn^2 - ra^2n - rb^2n^2$, quae pro more rite tractata reddit $x = n \frac{c(an+bm) - r(am+bn) + \sqrt{(rff(rmm+rnn-2cmn) - gg(an-lm))^2}}{mmm+rnn-2mnc}$.

3. Apparet duplicem esse valorem ipsius x , adeoque duo assignari posse loca mobili \odot , in quibus ab altero \odot datam habet distantiam, ceterum

terum si quantitates cognitae per numeros logarithmicos datae sunt, valor ipsius x regulis, quas olim dedi, commode inueniri potest.

4. At multo commodior fit calculus si $a=b$ (quem quidem casum in negotio eclipsium semper formare licet, obtinet enim in copulis), tum enim erit $x = nx$

$$\frac{-(r-c)a(m+n) + \sqrt{rff(rmm+rmn-2cmn)-aag(n-m)^2}}{rmm+rmn-2mnc}$$

5. In media eclipsi centra luminarium quam proxime ab inuicem distant; necesse ergo est, vt ille locus definiatur in quo luna a sole quam minimam seruat distantiam. Hoc fit si quantitas problematis superioris quaesita statuatur esse omnium minima, quae inuenitur, differentiando primam supra exhibitam aequationem, vt impetretur

$$x = -na \frac{(r-c)(m+n)}{nn(r-\frac{cm}{n}) - mm(\frac{cn}{m} - r)} \text{ seu } x = -na$$

$\frac{(r-c)(m+n)}{rm^2 + rn^2 - 2mnc}$ ponendo scilicet $a=b$, pro casu facillimo.

6. Vt problema ad eclipsium casus applicetur, notandum est in aequatione praecedente, a signare distantiam vtriusque luminaris a nodo eandem vtrinque, g esse sinum anguli quò inclinatur orbita lunae ad eclipticam, c esse cosinum, et $r-c$ sinum versum eiusdem anguli. — Item, m esse

A 3

motum

motum horarium solis, n vero lunae, f quoque esse summam semidiametrorum umbrae et lunae, et denique x esse spatium quo distat initium et finis eclipsios a locis luminarium primo assumptis.

7. Exemplo ex Rudo'phinis pag. 103. de prompto calculum illustrabo. Anno 1616. Aug. $\frac{16}{23}$ die fuit copula post meridiem Vraniburgi tempore aequali

(secundum data Kepleri)	H	'	''
	15.	29.	4
Locus solis erat	S	°	
	5.	3.	57. 1
Locus ☾ in sua orbita	11.	3.	57. 1
Locus ☿	5.	9.	38.27
Distantia ☾ et umbrae a ☿	5.	41	26
ergo logarithmus ipsius $a = -$			173881
Quia inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam in copulis Keplero constanter est	°	'	''
	5.	18.	0
erit inde log. g			238195
— — — log. c			421
— — — log. $(r-c)$			545490
Semidiameter umbrae		'	''
	49.	32	
Semidiameter lunae		16.	22
ergo f .		65.	54
et log. f			- 9370
Horarius lunae $= n$		'	''
	38.	22	
— — — umbrae $= m$		2.	25
ergo $n - m =$		35.	57
			et

CALCVLANDI ECLIPSES LVNARES. 7

et log. $(n-m)^2 =$	102444
Porro erit $(n+m) =$	40. 47
ergo $l(n+m) =$	38607
log. n	44716
log. m	321196
ergo log. n^2	89432
et n^2	24. 32
item log. m^2	642392
et m^2	0. 5 $\frac{1}{2}$
ergo $r(n^2 + m^2)$	24. 37 $\frac{1}{2}$
log. $mnc =$	366333
log. 2	- 69315
ergo log. $2mnc$	297018
et $2mnc$	3. 4 $\frac{2}{3}$
ergo $r(n^2 + m^2) - 2mnc =$	21. 32 $\frac{5}{6}$
et log. $(r(n^2 + m^2) - 2mnc) =$	102410
log. $(na(r-c)(m+n)) =$	455032
inde fit log. $x =$	342622
et x , hoc est distant. copulae a media eclipsi =	1. 57

(NB. Hic arcus aufertur a copula si luna est post nodum (S. 5) sed ante nodum additur).

Hunc arcum percurrit luna intra	3. 3
copula erat	15. 29. 4
ergo obscuratio maxima fit	15. 32. 7
Keplerus habet	15. 33. 48

Sol

Sol interea percurrit	7
ergo umbra distat a ☉	5. 41.19
et luna ab ☉ distat	5. 39.29
Hisce datis et angulo inclinationis trigonome-	
trice inuenitur distantia centrorum =	31.30
est vero summa semidiametrorum	65.54
ergo ablato arcu inter centra restant	34.24
Diameter lunae est	32.43
Eclipsis ergo totalis est cum mora.	

Pro fine et initio.

log. ff	- 18740
{ log. ff $\sqrt{(rm^2 + rnn - 2mnc)}$ =	83670
{ numerus ipse =	25. 59. 20
l. aa =	- 347762
l. gg	476390
	128628
	$(n-m)^2 = 102444$
{ log. (aagg(n-m) ²) =	231072
{ Numerus ipse	5. 57. 5
{ ergo ff $(rm^2 + rn^2 - 2nmc) - ggaa(n-m)^2 = 20. 2.15$	
{ eius logarithmus =	109674
{ radiceis logar.	54837
l. n =	44716
{ log. n $\sqrt{(rmn - rnn - 2nmc) - ggaa(n-m)^2}$ =	99553
{ Numerus ipse	22. 10. 17
	<i>na(r-c)</i>

CALCVLANDI ECLIPSES LYNARES. 9

$na(r-c)(m+n) =$	0. 38. 2
	differ. 21. 32. 15
	Summa 22. 48. 19
Logar. differ.	102454
— summae	96733
Log. $(rmm - rnn - 2mnc) =$	102410
{ l. + x =	+ 44
{ l. - x =	= -5677
{ ergo + x =	/ " "
{ — - x =	59. 58. 30.
	o. / " "
	i. 3. 30. 40
	H. / "
tempus pro + x =	i. 33. 48
tempus pro - x =	i. 39. 30
tempus copulae =	15. 29. 4
	Initium = 13. 55. 16
	Finis = 17. 8. 34
	• " "
Duratio eclipsos =	3. 13. 18
Semiduratio	1. 36. 39
Init.	13. 55. 16
Medium eclipsos	15. 31. 55
Obscuratio maxima fit	15. 32. 7
	" "
	Differentia = 12

Vnde patet, hanc differentiam non esse prorsus contemnendam, vti vulgo fit

Pro Mora.

Formula morae (sicut et durationis) est haec:

$$= \frac{2n\sqrt{rff(rm^2 + rm - 2mc) - agg(n-m)^2}}{r^2m + rml - 2mnc}$$

Tom. V.

B

vbi

10 DE NOVA METHODO CALCULANDI &c.

vbi f = differentiae semidiametrorum =	33. 10
cuius logarithmus =	59280
log. ff =	118560
log. r/fV (-----) =	220970
cuius numerus =	6. 35. 30
$aagg(n-m)^2$ =	5. 57. 5
$(rff(rmm+rnn-2mnc)-aagg(n-m)^2)$ =	39. 25
§cuius logarithmus	451458
¶et logar. radice =	225729
log. $2n$ =	24597
	<hr/>
	201132
log. $(rmm+rnn-2mnc)$ =	102410
logarithmus scrupulorum morae	98722
log. n .	44716
logarithmus morae	54006
	<hr/>
Mora ipsa =	H. / / 0. 34. 58
Keplerus habet	0. 34. 48

8. Atque ita dispalescit, quid differat mea methodus a vulgari. Cuius liberum esto de ea statuere quod ipsi videbitur.



Io. Bernoulli

SOLUTIONES NOVORVM
 QVORVNDAM
 PROBLEMATVM
 MECHANICORVM.

Excerptae ex litteris ad Filium Danielem

Petropolin datis d. 3. Iun. St. n. 1730.

Problema.

Sit ACK triangulum materiale rectangulum in k , quod super plano horizontali DH sine omni frictione moueri possit. Sit etiam corpus graue m quod super hypothenusa AC positum sua grauitate descendat pariter sine frictione; quo fiet vt descendente corpore, triangulum iugiter ab eo pressum retrocedere cogatur. Quaeritur tum corporis tum trianguli velocitas, tum etiam via quam corpus ex motu composito describit atque vtriusque lex accelerationis.

Tabula I.
 Fig. 2.

Definitio.

Corpus aliquod vi acceleratrice animari dicitur, quando ab ea continuo ad motum vrgetur vel sollicitatur secundum quamcunque directionem.

Lemma I.

Si corpori alicui, cuius massa A, et vis acceleratrix qua animatur p , superaddatur massa B nullam habens vim acceleratricem, animabitur massa composita vi acceleratrice $= \frac{pA}{A+B}$. Vid. Act. Lips. 1714. vbi haec fusius exposui.

Lemma 2.

Fig. 3.

Si corpus aliquod C animatur, simul duabus viribus acceleratricibus vniformibus secundum diuersas directiones CR et CS, quae vires sint vt ipsae lineae CR et CS, compleaturque parallelogrammum SR, mouebitur corpus secundum diagonalem CT eodem modo ac si vna tantum vi vniformi expressa per CT animaretur. Et tres istae longitudines CR, CS, CT eodem tempore percurrerentur, si corpus singulis istis viribus seorsim animaretur, eruntque velocitates acquisitae in R, S, T, vt ipsae lineae CR, CS, CT. Patet ex compositione virium mortuarum.

Lemma 3.

Duo corpora animata diuersis viribus acceleratricibus p et P, si in motu sint constituta temporibus siue aequalibus siue inaequalibus, erunt eorum velocitates vltimo acquisitae in ratione composita ex subduplicata virium et spatiorum percursorum s et S, hoc est vt $Vp \times Vs$ ad $Vp \times VS$. Demonstr. in Act. Lips. 1713.

Se

*Sequitur nunc SOLVTIO Problematis; praeuia
tamen praeparatione:*

Fig. 2.

Ex puncto quolibet E in hypotenusa AC trianguli rectanguli ACK erigatur recta verticalis EG, quae repraesentet vim naturalem acceleratricem grauium quam vocabo g ; super ea formetur triangulum rectangulum EFG, cuius latus EF sit perpendicularare ad AC, alterum GF eidem AC parallelum; ductae iam intelligantur FN, NL, LR, RS, ST, TV, etc. in infinitum, ea nimirum lege, vt prima, tertia, quinta etc. horizonti DH, secunda vero, quarta, sexta &c. hypotenusae AC sint parallelae. Hinc omnia triangula EGF, EFN, ENL, ELR, etc. sunt inter se et ipsi triangulo CAK similia. Sit itaque huius trianguli altitudo $AK = a$, basis $KC = b$, hypotenusa $AC = \sqrt{aa + bb} = c$. Inuenietur per analogias $GF = \frac{ga}{c}$, $NL = \frac{gab^2}{c^3}$, $RS = \frac{gab^4}{c^5}$, $TV = \frac{gab^6}{c^7}$, etc. et ita porro: $EN = \frac{gb^2}{cc}$, $ER = \frac{gb^4}{c^4}$, $ET = \frac{gb^6}{c^6}$, etc. atque ita deinceps, $FN = \frac{gab}{cc}$, $LR = \frac{gab^3}{c^4}$, $ST = \frac{gab^5}{c^6}$, etc. Et sic deinceps, $FE = \frac{gb}{c}$, $LE = \frac{gb^3}{c^3}$, $SE = \frac{gb^5}{c^5}$, $VE = \frac{gb^7}{c^7}$, etc. et sic semper. Quae series procedunt singulae in progressionem geometricam descendente in ratione cc ad bb . His praemissis, ita arguo: cum pondus m , quod nunc in E esse concipimus, continuo premit aequaliter hypotenusam AC, sitque eius vis acceleratrix GE seu g , qua nimirum ad descensum verticalem animatur, atque in hac directione si nihil obfaret actu descenderet: sed cum triangu-

lum pro parte obftet descensui, et inde a pressione corporis aliquam vim acceleratricem secundum directionem horizontalem in se recipiat, videndum est quanta illa sit, tum etiam quantam retineat corpus secundum directionem hypotenusae, et qualis retrocedente triangulo oriatur in corpore vis acceleratrix per compositionem vtriusque quamque ideo viam AP corpus describat a puncto A ad horizontalem DH. In hunc finem concipiatur vis GE resolui in GF et FE; illa GF sola effret acceleratrix secundum directionem hypotenusae, si triangulum ACK effret immobile, vtpote a cuius inuincibili obstaculo, vis altera normalis FE tota destrueretur: sed quia triangulum est mobile, patet vim FE non omnino destrui, sed tantum imminui, et quidem in ea ratione in qua aggregatum massae trianguli et massae corporis (quod aggregatum massarum vocabo M) maius est quam massa solius corporis m . Vnde si triangulum AKC cedere posset secundum directionem FE, foret per lemma 1. vis acceleratrix totius systematis h. e. tam trianguli quam corporis in hac directione, $= \frac{m}{M} \times FE$, manente interim etiam in corpore priore vi acceleratrice secundum directionem AC et expressa per GF. Sed quia triangulum non cedit secundum FE propter oppositionem plani immobilis horizontalis DH: resoluenda est vis acceleratrix $\frac{m}{M} \times FE$, quatenus est in corpore, in FN et NE; et habebitur $\frac{m}{M} \times FN$
et

et $\frac{m}{M} \times NE$, quarum illa $\frac{m}{M} \times FN$ animat systema adeoque et ipsum triangulum ad retrocedendum secundum directionem horizontalem; haec autem $\frac{m}{M} \times NE$ porro resoluta in NL et LE , dat $\frac{m}{M} \times NL$ et $\frac{m}{M} \times LE$, ex quibus illa $\frac{m}{M} \times NL$ contribuit cum priore GF ad motum corporis in directione AC , haec vero $\frac{m}{M} \times LE$ (quae contribuit ad animandum corpus m in directione LE , ipsi autem affociatur massa trianguli) simili modo tractanda est vt antea cum FE factum est; erit namque per Lemma 1. $\frac{m}{M} \times \frac{m}{M} \times LE$, seu $\frac{mm}{MM} \times LE$ noua pars vis acceleratricis qua totum systema h. e. corpus et triangulum secundum LE sollicitaretur, si planum immobile DH non obstaret; resoluatur ergo haec vis $\frac{mm}{MM} \times LE$ in LR et RE , eritque $\frac{mm}{MM} \times LR$ et $\frac{mm}{MM} \times RE$, quarum illa $\frac{mm}{MM} \times LR$ dat nouam partem vis acceleratricis priori adiciendam ad animandum systema ipsumque adeo triangulum in directione horizontali; haec vero $\frac{mm}{MM} \times RE$ vltius resoluta in RS et SE dat $\frac{mm}{MM} \times RS$ et $\frac{mm}{MM} \times SE$, quarum illa $\frac{mm}{MM} \times RS$ est iterum noua pars vis acceleratricis in corpore ad illud animandum in directione AC , sed altera $\frac{mm}{MM} \times SE$ ope lemmatis 1. tractata dabit etiam nouam partem vis acceleratricis nempe $\frac{m^3}{M^3} \times ST$ qua triangulum in directione horizontali animatur: atque ita deinceps procedatur in infinitum. Quo facto liquet, omnes particulares acceleratrices secundum $GF, NL, RS,$

TV, etc. simul sumtas dare vim totalem acceleratricem qua corpus m secundum directionem hypotenusae AC animatur, motuque vniformiter accelerato descendit; omnes vero particulares secundum GF, NL, RS, TV, etc. simul sumtas, dare pariter vim acceleratricem totalem, qua triangulum vel si mauis totum systema retro vrgetur secundum directionem horizontali BH parallelam, ac proin etiam motu vniformiter accelerato mouetur. His itaque in vnum collectis habebimus has duas progressiones, erit nempe vis acceleratrix totalis in corpore m secundum AC, $= GF + \frac{m}{M} \times NL + \frac{mm}{MM} \times RS + \frac{m^3}{M^3} \times TV + \text{etc.}$ Et vis totalis acceleratrix totius systematis seu trianguli secundum DH $= \frac{m}{M} \times FN + \frac{mm}{MM} \times LR + \frac{m^3}{M^3} \times ST + \text{etc.}$ Substitutis iam valoribus supra inuentis linearum GF, NL, RS, nec non linearum FN, LR, ST, etc. obtinebitur vis prior pro accelerando corpore secundum AC $= \frac{ga}{c} + \frac{m}{M} \times \frac{gab^b}{c^2} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^4}{c^6} + \frac{m^3}{M^3} \times \frac{gab^6}{c^7} + \text{etc.}$ Atque vis altera pro accelerando systemate secundum DH $= \frac{m}{M} \times \frac{gab}{cc} + \frac{mm}{MM} \times \frac{ga^4}{c^4} + \frac{m^3}{M^3} \times \frac{gab^5}{c^6} + \text{etc.}$ Quae duae progressiones sunt manifestae geometricae et descendentes in ratione Mcc ad mbb , adeoque sunt summabiles: inuenitur nimirum summa progressionis prioris $= \frac{gacm}{ccM - bbm}$; ac summa posterioris $= \frac{gabm}{ccM - obm}$. Quod erat inueniendum pro vtriusque lege accelerationis.

Corollarium 1.

Quoniam $\frac{g \cdot cM}{ccM - bbm} : \frac{g abm}{ccM - bbm} = cM : bm$, erit vis acceleratrix corporis in directione hypothenufae, ad eiusdem vt et trianguli vim acceleratricem in directione horizontali, in ratione composita ex ratione hypothenufae ad basin trianguli et ratione massae totius systematis ad massam corporis.

Corollarium 2.

Hinc quia corpus animatur simul duabus viribus acceleratricibus, vna secundum hypothenufam, altera secundum horizontalem, quae se habent vt cM ad bm , si capiatur cP ita vt $cM : bm = c$ seu $AC : CP = \frac{mb}{M} = \frac{m}{M} \times CK$ ducaturque AP , erit per Lemma 2. AP via, quam corpus vtraque vi animatum, realiter describit. Quod erat inueniendum pro secundo.

Corollarium 3.

Cum sit $GP = \frac{mb}{M}$, erit $KP = \frac{Mb - mb}{M}$ adeoque $cP : KP = m : M - m$, hoc est, vt massa corporis ad massam trianguli, et cum per idem lemma 2. eo tempore, quo corpus ab A ad P descendit, triangulum ipsum retrocedat, per intervallum CP , ita vt apex trianguli C futurus sit in eodem puncto P , manifestum est, si intelligatur tota quantitas materiae trianguli concentrata in supremo trianguli apice A , fore CP , cui aequalis erit distan-

tia quantitatis materiae collectae a perpendiculari AK, ad KP quae est distantia corporis ab eadem perpendiculari AK versus plagam oppositam ei, versus quam reperitur apex A, ut m ad $M - m$, h. e. in ratione reciproca massarum corporis et trianguli, idque cum semper se habeat vbicunque sumatur punctum P in recta AP, liquet centrum commune grauitatis materiae trianguli concentrae et corporis descendere in eadem semper perpendiculari AK; per consequens etiam si materia per totum triangulum diffusa sit, tamen commune centrum grauitatis totius systematis durante motu in eadem semper linea verticali descendere. Quam quidem proprietatem ex alio etiam principio generalissimo demonstrare possum.

Corollarium 4.

Cum corpus aliquod graue, quod nempe vi acceleratrice naturali g animatur, libere descendens per altitudinem AK, seu a acquirat velocitatem in A designandam per Va , si inuenire velimus velocitatem trianguli vltimo acquisitam, postquam nempe apex c percurrit spatium CP, faciendum est per Lemma 3. ut $Vg \times Va$ ad $V \frac{gcb^2}{c - M - bbm}$ $\times V \frac{mb}{M}$ ita Va ad quartam $mbV \frac{a}{ccM^2 - bbmM}$, quae erit = velocitati finali trianguli; ut vero habeatur velocitas corporis in P, postquam nempe re ipsa spatium AP percurrit, quaerenda primo est lon-

giti-

studo AP seu $\sqrt{AK^2 + PK^2}$ et reperietur
 $= \sqrt{\left(\frac{MMaa + MMbb - 2Mmbb + mb^2}{MM}\right)} = \sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$;
 Nunc faciendum est per partem secundam lem-
 matis secundi vt cP ad AP, h. e. vt $\frac{mb}{M}$ ad
 $\sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$ seu vt mb ad $\sqrt{(MMcc - 2Mmbb + mmbb)}$ ita velocitas inuenta trianguli, quae
 est $mb\sqrt{\frac{a}{ccMM - bbM}}$, ad velocitatem quaesitam rea-
 lem corporis in P quae itaque erit $\frac{mb}{M} \sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$ quod erat inueniendum pro
 primo.

Corollarium 5.

Hinc confirmatur conseruatio virium viuarum;
 multiplicando enim quadratum velocitatis finalis
 trianguli per ipsius massam prouenit vis viva tri-
 anguli $= \frac{abmmM - abm^2}{ccMM - bbM}$, atque multiplicando quadra-
 tum velocitatis actualis corporis in puncto P per
 massam ipsius, habebitur vis viua corporis $= \frac{accMM - 2abbMm + abm^2}{ccMM - bbM}$; adeoque summa vtriusque $= \frac{accMM - abm^2}{ccMM - bbM} = am$, hoc est = vi viuae solius cor-
 poris m si libere ex A in K caderet. Q.E.D.

Corollarium 6.

Etiam hoc curiositatis gratia solui potest pro-
 blema, qualem nempe inclinationem dare, con-
 ueniat hypothenuae AC, ita vt manentibus mas-
 sis tam corporis quam trianguli vt et altitudine
 AK, triangulum velocissime retro pellatur, ipsum-

que adeo corpus in puncto P habeat minimam possibilem velocitatem; in hunc finem ex vi acceleratrice trianguli quae est $\frac{gabm}{ccM-bbm}$ seu (substituta $aa+bb$ pro cc) $\frac{gabm}{aaM+bbM-bbm}$ faciendum est maximum; supponendo literam b variabilem reliquas vero omnes inuariantes, hoc pacto enim inuenitur per communem regulam de *maximis* et *minimis*, $b = a\sqrt{\frac{M}{M-m}}$; proinde $\sqrt{M-m} : \sqrt{M} = a : b$, hoc est, sinus totus debet esse ad tangentem anguli KAC in subduplicata ratione massae trianguli ad massam totius systematis seu ad summam massarum trianguli et corporis. Vnde sequitur, angulum KAC semirecto semper maiorem esse debere. Et nominatim si M sit duplum ipsius m , id est, si massae trianguli sit aequalis massae corporis, erit $a.b :: 1. \sqrt{2}$, seu vt latus quadrati ad diagonalem, id quod facit vt angulus KAC, ceu ex tabulis tangentium habetur, sit quam proxime 54 grad. 44. min. qui etiam est angulus quem facere debet manubrium gubernaculi cum carina nauis, vt haec quam promptissime gyrari possit, sicvti docui in meo Manuario Nautico Cap. V. art. 16. nec non angulus obliquitatis sub quo globus aliquis elasticus impingere debet in duos alios, qui iunctim sumti habeant massam ipsi aequalem, ita vt hi quam celerrime a se inuicem recedant. Vid. Dissert. meam Cap. XI. art. 14.

Scholion.

Fig. 4.

Non inconſultum duco oftendere, quomodo alia huiusmodi problemata per methodum noſtram hic expoſitam ſolui poſſint. Sit ex. gr. idem triangulum ACK grauitatis quidem expers, ſed datam quantitatem materiae nullius grauitatis in ſe continens; quod moueri poſſit ſuper plano inclinato DH ad horizontem. Hypothenuſa CA ſupponitur horizontalis, latus AK perpendicularare ad baſin CK, incumbat vero hypothenuſae AC corpus graue E, libertatem habeat fluendi ſuper AC ſine omni frictione; ſicuti triangulum materiale non graue ACK ſupponitur fluere poſſe liberrime ſuper plano decliui DH. Queritur, ſi hoc triangulum a pondere corporis incumbentis preſſum deſcenderit, ac ſimul cum eo ipſum quoque corpus, qualem quouis in loco velocitatem habeat tam corpus quam triangulum.

Solutio.

Quod attinet ad motum corporis E, haud difficulter intelligitur, illum continuo fieri in eadem verticali GE. Sed vt determinemus vim acceleratricem qua deſcendit triangulum ſuper plano decliui DH; rem ita praestabimus. Per GE exponatur grauitas ſeu vis naturalis acceleratrix corporis E, quae vt ante dicatur = g ; reſoluatur ea in GF parallelam plano DH et in EF eidem normalem. Sit quoque hypothenuſa AC = c ,

C 3

AK =

22 SOLUTIONES NOVORVM QVORVND.

AK = a , CK = b ; massa corporis = m , massa totius systematis = M , adeoque massa trianguli = $M - m$. Erit ob similia triangula GEF et ACK, GF = $\frac{ga}{c}$ et EF = $\frac{gb}{c}$. Concipiamus tantisper cessare vel demtam esse vim GF, et solam agere vim FE; habebimus casum praecedentem, ubi DH tanquam linea horizontalis, et TE tanquam vis verticalis considerari debet; hinc ergo per Solutionem praec. inueniemus vim acceleratricem trianguli ACK secundum directionem DH; cui nunc ea, quam negleximus, iterum addi debet quae ex GF resultat, utpote quae cum parallela sit plano eidem DH, tota impenditur ad pellendum systema in directione DH; cognita sic velocitate trianguli, cognoscitur etiam velocitas realis corporis in E secundum directionem GE. Retentis itaque iisdem litteris, ponendum est $\frac{gbm}{cM}$ pro g in $\frac{gabm}{cM - bbm}$ quod vim acceleratricem trianguli denotabat in praecedenti casu, et prodibit $\frac{gab'mm}{c^2MM - bbcMm}$ pro vi acceleratrici qua triangulum animatur resultante tantum ex FE in praesenti casu; huic nunc addendum est, quod insuper acquirit a GF = $\frac{ga}{c}$, quod ideo est $\frac{gam}{cM}$; vnde emergit trianguli vis acceleratrix totalis = $\frac{gab'mm}{c^2MM - bbcMm} + \frac{gam}{cM} = \frac{gacm}{ccM - bbm}$. Quare faciendo hic etiam per Lem. 3. ut \sqrt{ga} ad $\sqrt{(\frac{gab'mm}{ccM - bbm} + \frac{gam}{M})}$, ita \sqrt{a} seu velocitas naturalis acquisita ex casu libero per altitudinem aequalem ipsi AK ad velocitatem trianguli postquam apex C percurrit spatium super DH aequale ipsi c seu

feu hypothenusae AC, quae itaque velocitas erit $= c\sqrt{\frac{am}{ccM-bbm}}$. Est autem CA ad AK seu c ad a vt modo inuenta trianguli velocitas super plano DH ad actuaalem seu realem velocitatem corporis in directione verticali GE; vnde velocitas corporis $= a\sqrt{\frac{am}{ccM-bbm}}$. Quod erat inueniendum pro determinandis velocitatibus.

Corollarium.

Etiam ex hac, vt ex praecedente solutione a priori instituta mirifice confirmatur conseruatio virium viuarum; etenim vis viua trianguli $= \frac{ccm \times (M-m)}{ccM-bbm}$, et vis viua corporis $= \frac{a^3 m m}{ccM-bbm}$, quarum summa (instituto calculo) inuenitur $= am$, quemadmodum fieri par est, vt conseruetur vis viua, quae esset in corpore libere descendente per altitudinem verticalem aequalem ipsi AK. Reducendo velocitates ad communem denominatorem inuenitur velocitas trianguli $= \frac{c\sqrt{am}}{\sqrt{(ccM-bbm)}}$ et velocitas corporis $= \frac{a\sqrt{am}}{\sqrt{(ccM-bbm)}}$.

NOTA. Si praeterea velimus, vt ipsum quoque triangulum AKC grauetur pro ratione suae massae $M-m$; eodem ratiocinio, quo ante in solutione scholio subiuncta fecimus, vtendum est, nisi quod iam per GE exponenda sit grauitas seu vis naturalis acceleratrix in directione verticali non tantum corporis E, sed totius systematis; corpus quippe et triangulum in hoc casu communem habent grauitationem naturalem. Hinc
ergo

24 SOLUTIONES NOVORVM QVORVND.

ergo iam ipsa GF seu $\frac{ga}{c}$ designabit partem vis acceleratricis totius systematis et proinde trianguli, quam tantisper cessare vel demtam esse concipiamus, dum altera tantum EF seu $\frac{gb}{c}$ systema totum proinde etiam corpus vrget normaliter ad planum DH. Atque ita habebimus casum primum, vbi DH tanquam horizontalis et FE tanquam vis acceleratrix verticalis qua corpus animatur, consideranda est. Quare si in $\frac{gabh m}{ccM - bbm}$ (quod in illo primo casu exprimebat vim acceleratricem totalem trianguli) ponamus $\frac{gb}{c}$ pro g , orietur $\frac{gabbm}{c^2M - bbcm}$ pro vi qua triangulum animatur resultante tantum ex FE in hoc casu. Ei igitur addenda nunc est vis altera partialis, quam haecenus negleximus, oriunda ex GF, quam vim modo vidimus esse $\frac{ga}{c}$. Et ita obtinemus pro praesenti casu vim acceleratricem totalem trianguli $= \frac{gabbm}{c^2M - bbcm} + \frac{ga}{c} =$ (facta reductione) $\frac{g^2ccM}{ccM - bbm}$. Faciendo nunc per Lemma 3. vt \sqrt{ga} ad $\sqrt{(\frac{gaccM}{ccM - bbm})}$ ita \sqrt{a} seu velocitas naturalis acquisita ex descensu libero per altitudinem aequalem ipsi AK ad velocitatem trianguli, quam habebit postquam percurrit spatium aequale ipsi c seu hypotenusae AC; quare ergo velocitas erit $= \sqrt{(\frac{accM}{ccM - bbm})}$; faciendo nunc porro vt CA ad AK seu c ad a , ita modo inuenta velocitas trianguli $\sqrt{\frac{accM}{ccM - bbm}}$ ad $\sqrt{\frac{a^3M}{ccM - bbm}}$ quae erit velocitas realis corporis in directione verticali GE. Q. E. I.

Corollarium.

Hinc quoque patet conseruari quantitatem virium viuarum: nam vis viua trianguli $= \frac{accM}{ccM-bbm}$ $\times (M-m) = \frac{accM^2-accMm}{ccM-bbm}$ et vis viua corporis $= \frac{a^3Mm}{ccM-bbm}$, quae simul sumtae faciunt $\frac{accM^2-accMm+a^3Mm}{ccM-bbm} =$ (ob $cc-aa=bb$) $\frac{accM^2-ab^3Mm}{ccM-bbm} = aM =$ vi viuae quam acquireret totum systema graue, si libere ex altitudine verticali et aequali ipsi AK seu a caderet. Q. E. D.

PROBLEMATATA
TRIGONO - SPHAERICA
TRIA

AVCTORE

F. C. Maiero.

Problema I.

IN triangulis sphaericis ZSP et ZTP, communem basem PZ, et aequalia latera PS et PT habentibus, dantur latera ZS et ZT, et anguli ad P: quaeruntur reliqua.

Tabula I.
Fig. V.

Solutio.

Sit sinus lateris ZS = A, eiusque cosinus = C
 — — — ZT = a — — = c.
 Tom. V. D angu-

$$\begin{array}{l} \text{Sinus anguli ZPS} = P \text{ eiusque cofinus} = Q \\ - \quad - \quad \text{ZPT} = p \quad - \quad - \quad = q \\ - \quad \text{laterum PS, PT} = t \quad - \quad - \quad = z \\ - \quad \text{basis ZP} = x \quad - \quad - \quad = y \end{array}$$

Quoniam hoc pacto omnia triangulorum latera denominata sunt, angulorum ad P cofinus exprimere licet per regulam a me saepius allegatam atque ita aequationes formare vti sequitur.

$$\begin{array}{l} 1. \quad r \frac{rC - yz}{tx} = Q \quad \text{item} \quad r \frac{rc - yz}{tx} = q \\ 2. \quad \frac{rC - yz}{z} = \frac{tx}{r} \quad - \quad \frac{rc - yz}{q} = \frac{tx}{r}. \end{array}$$

Ex binis hisce fit

$$\begin{array}{l} 3. \quad - \quad - \quad r q C - q y z = r Q c - Q y z \\ 4. \quad - \quad - \quad y z = r \frac{Qc - qC}{Q - q} \end{array}$$

Si fiat finus semisummae angulorum ad P = M, et finus semidifferentiae = N, erit $Q - q = \frac{2MN}{r}$ adeoque

$$5. \quad - \quad y z = r r \frac{Qc - qC}{2MN}$$

Ex aequationibus primis formantur quoque

$$6. \quad rC - yz = \frac{Qtx}{r}. \quad - \quad - \quad rc - yz = \frac{qtx}{r}$$

exinde

$$7. \quad yz = \frac{rrC - Qtx}{r} \quad yz = \frac{rrc - qtx}{r}$$

Ex binis his habetur

$$8. \quad - \quad rrC - Qtx = rrc - qtx$$

$$9. \quad - \quad tx = rr \frac{C - c}{Q - q}$$

Ponatur finus semisummae laterum ZS et ZT = m et finus semidifferentiae = n. erit $C - c = \frac{2mn}{r}$ adeoque

$$10. \quad tx = \frac{rrmn}{MN}.$$

Ex

Ex regulis aliis, mihi saepe allegatis, constat effe cofinum summae laterum quaesitorum (PZ et PS) $= \frac{yz-tx}{r}$ et cofinum differentiae esse $= \frac{yz+tx}{r}$. Substituantur ergo ex aequationibus 5 et 10. valores aequivalentes, vt prodeant duae regulae vna pro summa quaesitorum, altera pro differentia, quibus repertis ipsa quaesita, vti notum est, habentur.

Est igitur

$$11. \frac{yz-tx}{r} = \frac{(r+Q)c-(r+q)c}{2MN} r = \frac{(r+Q)c-(r+q)c}{Q-q}$$

Ponatur tangens semianguli ZPS = T et tangens semianguli ZPT = t, erit $r+Q = \frac{rP}{T}$ et $r+q = \frac{rP}{t}$, quibus suffectis habetur cofinus summae vt sequitur:

$$12. \frac{yz-tx}{r} = rr \frac{Pt c - pTC}{2MNTt}.$$

Cofinus differentiae eodem modo definitur.

$$13. \frac{yz+tx}{r} = r \frac{(r-q)c-(r-Q)c}{2MN} = r \frac{(r-q)c-(r-Q)c}{Q-q}$$

Retentis semiangulorum tangentibus T et t supra adhibitis erit $r-q = \frac{tp}{r}$ et $r-Q = \frac{TP}{r}$ quibus surrogatis, prodit cofinus

$$14. \frac{yz+tx}{r} = \frac{tpC - TPc}{2MN}.$$

Hisce regulis inueniuntur summa et differentia laterum quaesitorum, ex istis vero duo numeri quibus latera quaesita definiuntur: sed incertum est vter numerus vtri lateri tribuendus sit. In casibus tamen specialibus semper patet quomodo distribuendi sint.

Iacobus Bernoulli Problema in Tractatu *de Cometis* proposuit, quod non nisi specialis casus est praesentis problematis; ponit nimirum arcum $ZT = 90^\circ$, adeoque $c = 0$. item angulum $ZPS = 90^\circ$, et per consequens $Q = 0$. inde fit angulus ZPT quadrante maior ut pro q ponendum sit $-q$. et r fit $= -r \frac{yz - tx}{r} = \frac{-r p C}{t q} = \frac{-BC}{t}$ (posito $\frac{r p}{q} = B =$ tangenti anguli ZPT .) item $\frac{yz + tx}{r} = \frac{t p C}{r q} = \frac{t BC}{r r}$. Inde patet quam facilis calculus requiratur ad solutionem problematis *Bernoulliani*.

Problema Trigonometricosphaer. II.

Fig. VI.

I. In triangulis *Sphaericis* SPZ et sPZ basi PZ et angulum ad Z communes habentibus, sunt dati anguli omnes ad P , itemque latera PS et $P s$: quaeruntur reliqua.

Solutio.

Sit igitur

Sinus lateris $PS = A$, et cosinus $= C$.

— — $P s = a$, — — $= c$.

Sinus anguli $ZPS = P$, et cosinus $= Q$.

— — $ZPs = p$, — — $= q$.

Sinus baseos $PZ = x$ et cosinus $= y$ et tangens $= T$

Sinus anguli ad $Z = t$ — — $= z$.

Per notam inter sinus laterum et sinus angulorum oppositorum analogiam, habetur sinus lateris

teris $ZS = \frac{AP}{t}$, ponatur autem breuitatis gratia $=f$, eiusque cofinus $=g$.

Quoniam hoc modo in triangulo SPZ omnia latera denominata sunt, erit (per regulam a me in II. Tom. Comment. pag. 24. traditam)

$$1. \quad z = \frac{rC-gy}{fx} r \quad \text{adeoque}$$

$$2. \quad \frac{rrC-fzx}{y} = rg$$

et porro per eandem regulam

$$3. \quad Q = r \frac{rg-Cy}{Ax} \quad \text{et inde}$$

$$4. \quad rg = \frac{\Delta Qx+rCy}{r}$$

Ex 2da et 4ta fit

$$5. \quad rrrC-rfzx = A Qxy + rCyy.$$

substituatur $yy = rr - xx$.

$$6. \quad rrrC-rfzx = A Qxy + rrrC - rCxx.$$

deletis aequalibus, factaque diuisione per x .

$$7. \quad rfz = rCx - A Qy.$$

et quia $f = \frac{AP}{t}$, fit

$$8. \quad \frac{rz}{t} = \frac{rCx - A Qy}{AP.}$$

Eadem operatio in altero triangulo PZs reddit

$$9. \quad \frac{rz}{t} = \frac{rcx - aqy}{ap.}, \quad \text{sic ex 8va et 9na fit}$$

$$10. \quad rAPcx - rapCx = -AQapy + aqAPy$$

atque ita

$$11. \quad \frac{rx}{y} = T = Aa \frac{Pq-pQ}{\Delta Pc-apC}. \quad \text{Q. E. I.}$$

2. Vt regula inuenta breuis reddatur, notandum est, quod $\frac{Pq-pQ}{r}$ fit sinus anguli SPs, hunc ponam $=b$, ita fit $rb = Pq - pQ$; quo substituto, regula est $= \frac{rbAa}{\Delta Pc - apC}$. Praeterea diuisione per Aa ,

obtinebitur $\frac{r b A a}{A P c - a p C} = \frac{r b}{\frac{P c}{a} - \frac{p c}{A}}$. Sumta deinde
 N pro cotangente lateris PS, et n , pro cotan-
 gente lateris Ps, erit $\frac{N}{r} = \frac{C}{A}$ et $\frac{n}{r} = \frac{c}{a}$, quibus sur-
 rogatis, regula tandem simplicissima habetur =
 $\frac{r r b}{P n - p N}$ siue potius $\frac{r r b}{p N - P n}$. Quia in aequatione 11.
 debuisset fieri $T = \frac{p Q - P q}{a p C - A P c} A a$.

3. Per problema hoc inuenitur altitudo poli
 PZ, ex datis duarum stellarum declinationibus,
 earumque transitibus per verticalem communem
 ZSs: (namque ex hisce noti sunt anguli ad P
 horarii). Inueniuntur quoque, azimuthum PZs, et
 altitudines verae ZS, Zs.

4. Si declinationes stellarum incognitae fue-
 rint, poterit ratio inueniri, quam habent tangen-
 tes declinationum; scilicet, earundem stellarum
 transitus obseruentur quoque per alium vertica-
 lem ZMN a priore diuersum. Ponatur in hoc
 altero transitu sinus anguli ZPM = M, et sinus
 anguli ZPN = m, item sinus anguli MPN = d.
 Quoniam in vtroque casu latus PZ manet inua-
 riabile erit.

$$\begin{aligned} 1. & \quad \frac{r r b}{p N - P n} = \frac{r r d}{m N - M n} \\ 2. & \quad p d N - P d n = b m N - b M n. \\ 3. & \quad (p d - b m) N = (P d - b M) n. \end{aligned}$$

adeoque

$$N : n = (P d - M b) : (p d - m b). \quad Q. E. I.$$

5. Quod

5. Quod si vnus stellae cognita est declinatio, inuenitur alterius declinatio per problema praefens; quod quidem per se patet.

Problema Trigonometricosphaer. III.

1. In triangulis Sphaericis PZS et PZs, communem basin PZ, et latera ZS, Zs aequalia habentibus, sunt cogniti anguli ad P, et latera PS, Ps; quaeruntur reliqua.

Fig. VII.

Solutio.

Sit sinus lateris PS=A, cofinus = C.

— — Ps=a, — = c.

cofinus anguli SPZ = Q.

— — sPZ = q.

cofinus lateris ZS (=Zs) = y.

sinus baseos ZP=t, cofinus=z et cotangens=v

Cum in triangulo SZP denominata sint omnia latera, per ea definitur cofinus anguli SPZ, scilicet

1. $Q = \frac{ry - Cz}{Ac} r.$

2. $AQt + rCz = rry.$

eodem modo est

3. $q = \frac{ry - cz}{at} r, \text{ et}$

4. $atq + rcz = rry.$ Sic ex 2da et 4ta fit

5. $(AQ - aq)t = r(c - C)z$

6. $\frac{AQ - aq}{c - C} = \frac{rz}{t} = v. \text{ Q. E. I.}$

32 PROBLEMATATA TRIGONOSPHERICA &c.

2. Vt regula breuis fiat, ponatur finus semisummae laterum PS, Ps, esse = f , et finus semidifferentiae = g , ita habetur $c - C = \frac{2fg}{r}$, quo valore suffecto regula abit in hanc $r \frac{\Delta Q - aq}{2fg}$.

3. Per hoc problema innotescit altitudo poli, ex cognitis duarum stellarum declinationibus, earumque transitibus per communem (ignotam licet) altitudinem.

4. Si declinationes cognitae non sunt, poterit ratio inueniri quae est inter cosinus declinationum, obseruando nimirum earundem stellarum transitus per aliam a priore diuersum Almucantarat. Ponamus tum esse cosinum anguli TPZ = M et cosinum anguli tPZ = m , erit

$$1. \quad r \frac{\Delta Q - aq}{2fg} = r \frac{\Delta M - am}{2fg} \text{ siue}$$

$$2. \quad \Delta Q - \Delta M = aq - am.$$

$$3. \quad A: a = (q - m) : (Q - M). \quad \text{Q. E. I.}$$

5. Si fiat finus semisummae angulorum SPZ et TPZ = K , et semidifferentiae = L . Item finus semisummae angulorum sPZ et tPZ = k et finus semidifferentiae = l , erit $Q - M = \frac{2KL}{r}$ et $q - m = \frac{2kl}{r}$, adeoque prior analogia abit in hanc

$$A: a = kl: KL.$$

6. Data vnus stellae declinatione, inuenitur hac methodo declinatio alterius; inuenitur enim ratio cosinum declinationum vtriusque stellae.

Sin-

SINGVLARIS MODVS
OBSERVANDI SIDERVM DECLINATIONES
ET ALTITVDINEM POLI.

AVCTORE
F. C. Maiero.

I.

D Eclinationum inuentio cognitam poli altitudinem vulgo supponit, et vicissim altitudinis polaris inuentio requirit stellae alicuius declinationem notam; turbantur et eiusmodi inquisitiones a refractionibus. Incommodis hinc mederi conatus sum, modum nuper (d. 29. Maii 1729.) ostendens, qui praeter obseruationis possibilitatem nil supponit; visa tamen est bonitati methodi officere azimutha obseruandi difficultas. Hanc igitur euitare studui, nouumque modum excogitavi quo paria praestare licet. Eum nunc describam.

Tabula II.

2. Eligantur duo circuli verticales, ignota licet azimutha, itemque duo almucantarati quorum itidem altitudines scire necesse non est; sint igitur duae stellae ignotarum declinationum, quae per quatuor istos circulos motu diurno transire possunt; obseruentur momenta transituum, item-

Tom. V.

E

Ex.

que culminationes, vt hoc pacto innotescant anguli horarii ad polum.

Fig. 1.

Ex gr. ZO et ZR sunt verticales, quorum azimutha HO et HR ignota sunt. AB et BC sunt duo almucantarati, quorum altitudines AH et BH ignotae sunt quoque. DI et ED sunt paralleli duarum stellarum; *f*, *g*, *l* et *k* sunt transitus stellarum per verticales, quorum momenta obseruare oportet ope horologii; *m*, *n*, *p*, *q*, sunt transitus stellarum per almucantaratos quos notare itidem oportet. Factis hisce obseruationibus, noti sunt anguli horarii ad P, quos formant declinationum complementa Pf, Pg, Pl, Ph, Pm, Pn, Pp et Pq, cum altitudine aequatoris PZ.

3. Ex cognitis angulis horariis ad P eruitur ratio quam habent tangentes declinationum quaesitarum, itemque ratio quae est inter cosinus earundem declinationum, ex datis autem duabus rationibus hisce ipsi cosinus vel tangentes, declinationum quaesitarum elicientur, sicuti ex problemate sequente palam fiet.

4. Datis rationibus quas habent duorum arcuum cosinus ad inuicem, itemque tangentes; inuenire ipsos cosinus et tangentes arcuum.

Sit ratio cosinum = $a:b$, et tangentium = $m:n$, cosinus arcus primi sit = x , adeoque cosinus

nus secundi = $\frac{bx}{a}$, conficitur inde tangens primi
 = $\frac{r\sqrt{r-xx}}{x}$ secundi = $\frac{r\sqrt{raa-bbxx}}{bx}$, et porro analogia

1. $m:n = \frac{r\sqrt{r-xx}}{x} : \frac{r\sqrt{raa-bbxx}}{bx}$

2. $m\sqrt{raa-bbxx} = bn\sqrt{r-xx}$.

3. $mmrraa-bbrnn = mmbbxx-nnbxx$.

$\frac{r\sqrt{amm-bnn}}{b\sqrt{m^2-n^2}} = x$. Q. E. I.

5. Declinationibus sic inuentis, poli altitudo eruitur porro per ea quae alibi tradidi. Quin et verticalium vsurpatorum azimutha, et almucantaratorum altitudines prono calculo definiuntur, quorum aliquis vsus ad refractiones manifestandas et ad alias obseruationes faciendas esse potest.

6. Apparatus ad obseruationes huc pertinentes fere nullus est. Varia quidem possunt excogitari artificia, quibus verticales et almucantarati requisiti constituuntur, vt stellarum ad eos appulsus notari possit, sed multis non est opus; fila pendentia aut baculi perpendiculariter erecti, ferrei, rotundi, repraesentant verticales, quorum vnus dioptris tycho- nicis versatilibus instructus est, quae pauca obseruationi transituum per verticales abunde satisfaciunt; transitus autem per Almucantaratos vulgari quadranti nullo fere negotio obtinentur. Solum horologium superest quo mensura aliqua capitur certa, et ex qua declinationes, polique altitudo eliciuntur. Quo ipso patet methodum hanc nec a refractionibus turbari, nec cognitae aliarum rerum mensuras supponere, nec tandem obseruationum difficultate premi.

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCENDENTIBVS, SEV QVARVM TERMINI GENERALES ALGEBRAICE DARI NEQVEVNT.

Auct. L. Eulero.

I.

Cum nuper occasione eorum, quae Cel. Goldbach de feriebus cum Societate communicauerit, in expressionem quandam generalem inquirerem, quae huius Progressionis $1+1, 2+1, 2.3+1, 2.3.4+1$ etc. terminos omnes daret; incidi considerans, quod ea in infinitum continuata tandem cum geometrica confundatur in sequentem expressionem, $\frac{1 \cdot 2^n \cdot 2^{1-n} 3^n \cdot 3^{1-n} 4^n \cdot 4^{1-n} 5^n}{1+n \cdot 2+n \cdot 3+n \cdot 4+n}$ etc. quae dictae progressionis terminum ordine n exponit. Ea quidem in nullo casu abrumpitur, neque si n est numerus integer neque si fractus, sed ad quemuis terminum inueniendum tantummodo approximationes suppeditat, nisi excipiantur casus $n=0$, et $n=1$, quibus ea actu abit in 1. Ponatur $n=2$, habebitur $\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6}$ etc. = termino secundo 2. Si $n=3$ habebitur $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 7}$ etc. = termino tertio 6.

§. 2. Quanquam autem haec expressio nullum usum habere videatur in inuentione terminorum

norum; tamen ad interpolationem eius seriei, seu ad terminos, quorum indices sunt numeri fracti egregie accommodari potest. De hoc autem hic explicare non constitui, cum infra magis idonei modi occurrant ad idem efficiendum. Id tantum de isto termino generali afferam, quod ad ea, quae sequuntur quasi manuducat. Quaesivi terminum cuius index $n = \frac{1}{2}$, seu qui aequaliter interiacet inter primum 1, et praecedentem qui itidem est 1. Posito autem $n = \frac{1}{2}$, affectus sum seriem $\sqrt{\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9}}$ etc. quae terminum quaesitum exprimit. Haec autem series similis mihi statim visa est eius, quam in *Wallisii* operibus pro arca circulari vidisse memineram. Inuenit enim *Wallisius* circulum esse ad quadratum diametri vt 2.4.4.6.6.8.8.10 etc. ad 3.3.5.5.7.7.9.9. etc. Si igitur fuerit diameter = 1, erit circuli area = $\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7}$ etc. Ex huius igitur cum mea conuenientia concludere licet, terminum indicis $\frac{1}{2}$ esse aequalem radici quadratae ex circulo, cuius diameter = 1.

§. 3. Arbitratus eram ante seriei 1, 2, 6, 24, etc. terminum generalem, si non algebraicum tamen exponentialem dari. Sed postquam intellexissem terminos quosdam intermedios a quadratura circuli pendere, neque algebraicas neque exponentiales quantitates ad eum exprimendum idoneas esse cognoui. Terminus enim generalis eius

E 3 pro-

progressionis ita debet esse comparatus, vt tum quantitates algebraicas tum a quadratura circuli tum forte ab aliis quoque quadraturis pendentes comprehendat; id quod in nullam formulam nec algebraicam nec exponentialem competit.

§. 4. Cum autem considerassem, dari inter quantitates differentiales eiusmodi formulas, quae certis in casibus integrationem admittant et tum quantitates algebraicas praebeant, in aliis vero non admittant et tum quantitates a quadraturis curuarum pendentes exhibeant; animum subiit huiusmodi forte formulas ad progressionis memoratae aliarumque eius similium terminos, generales suppeditandos aptas esse. Progressiones vero, quae tales requirunt terminos generales, qui algebraice dari nequeunt, voco transcendentis; quemadmodum Geometrae omne id, quod vires communis Algebrae superat transcendens appellare solent.

§. 5. Id ergo meditatus sum, quomodo formulas differentiales ad progressionum terminos generales exprimendos accommodari maxime conveniat. Terminus autem generalis est formula, quam ingrediuntur tum quantitates constantes, tum alia quaequam non constans vt n , quae ordinem terminorum seu indicem exponit: vt si tertius terminus desideretur oporteat loco n ponere 3. Sed in formula differentiali quantitatem quandam variabilem

riabilem inesse oportet. Pro qua non consultum est adhibere n , cum eius variabilitas non ad integrationem pertineat: sed postquam ea formula integrata est vel integrata esse ponitur, tum demum ad progressionem formandam inferniar. In formula igitur differentiali insit oportet quantitas quaedam variabilis x , quae autem post integrationem alii ad progressionem spectanti aequalis ponenda est; et quod oritur, proprie est terminus, cuius index est n .

§. 6. Ut haec clarius concipiantur, dico $\int p dx$ esse terminum generalem progressionis sequenti modo ex eo eruendae; denotet autem p functionem quamcunque ipsius x , et constantium in quarum numero adhuc ipsum n haberi debet. Concipiatur $\int p dx$ integratum talique constante auctum, ut facto $x = 0$ totum integrale evanescat, tum ponatur x aequale quantitati cuidam cognitae. Quo facto in inuento integrali nonnisi quantitates ad progressionem pertinentes supererunt, et id exprimet terminum, cuius index $= n$. Seu integrale dicto modo determinatum erit proprie terminus generalis. Si quidem id haberi potest, non opus est formula differentiali, sed progressio inde formata habebit terminum generalem algebraicum; secus res se habet si integratio non succedit, nisi certis numeris loco n substitutis.

§. 7. Assumsi igitur plures huiusmodi formulas differentiales integrationem non admittentes
nisi

nisi si ponatur loco n numerus integer affirmatiuus, vt seriei termini principales fiant algebraici: et inde progressionem formam. Earum itaque termini generales in promptu erunt, et a quam quadratura quique eius termini intermedii pendeant definire licebit. Hic quidem non plures eiusmodi formulas percurram; sed vnicam tantum aliquanto generaliore pertractabo, quae valde late patet, et ad omnes progressionem, quarum quilibet termini sunt facta constantia ex numero factorum ab indice pendente accommodari potest; quique factores sunt fractiones, quarum numeratores et denominatores in progressionem quacunque arithmetica progrediuntur, vt: $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} +$ etc.

§. 8. Sit proposita haec formula $\int x^e dx (1-x)^n$ vicem termini generalis subiens, quae integrata ita, vt fiat $= 0$, si sit $x=0$; et tum posito $x=1$, det terminum ordine n progressionis inde ortae. Videamus ergo qualem ea suppeditet progressionem. Est $(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3$ etc. Et propterea $x^e dx (1-x)^n = x^e dx - \frac{n}{1}x^{e+1} dx + \frac{n.n-1}{1.2}x^{e+2} dx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{e+3} dx$ etc. Quare

$$\int x^e dx (1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{n.x^{e+2}}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1.x^{e+3}}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2.x^{e+4}}{1.2.3.(e+4)} \text{ etc.}$$

Ponatur $x=1$, quia constantis additione non est opus, et habebitur

$$\frac{1}{e+1}$$

$\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1}{1.2.(e+3)} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.(e+4)} +$ etc. terminus generalis seriei inueniendae. Quae talis erit, vt si $n=0$, prodeat terminus $= \frac{1}{e+1}$; si $n=1$ term. $= \frac{1}{(e+1)(e+2)}$, si $n=2$, term. $= \frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$ si $n=3$. prodeat terminus $= \frac{1.2.3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ lex qua hi termini progrediuntur manifesta est.

§. 9. Hanc ergo affectus sum progressionem

$$\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1.2}{(e+1)(e+2)(e+3)} + \frac{1.2.3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)} \text{ etc.}$$

cuius terminus generalis est $\int x^e dx (1-x)^n$. Termini vero ordine n ipsius haec erit forma

$$\frac{1.2.3.4 \dots n}{(e+1)(e+2) \dots (e+n+1)}$$

Haec quidem forma sufficit ad terminos indicum integrorum inueniendos, sed si indices non fuerint integri, ex ea ipsi termini inueniri nequeunt. Iis autem proximis inueniendis

$$\text{inferuit haec series } \frac{1}{e+1} - \frac{n}{1.(e+2)} + \frac{n.n-1}{1.2.(e+3)} -$$

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.(e+4)} \text{ etc. Si } \int x^e dx (1-x)^n \text{ multiplicetur}$$

per $e+n+1$, habebitur progressio cuius terminus ordine n hanc formam habet

$$\frac{1.2.3 \dots n}{(e+1)(e+2) \dots (e+n)}$$

cuius igitur verus terminus generalis erit $(e+n+1) \int x^e dx (1-x)^n$. Hic obseruandum est, progressionem semper fieri algebraicam, quando loco e

assumatur numerus affirmatiuus. Ponatur e.g $e=2$,

progressionis terminus n^{mus} erit $\frac{1.2.3 \dots n}{3.4.5 \dots (n+2)}$ seu

$$\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}$$

Id quod ipse terminus generalis quoque indicat, qui erit $(n+3) \int x x dx (1-x)^n$. Nam

eius integrale est $\left(C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{2(1-x)^{n+2}}{n+2} \right)$

$$- \frac{(1-x)^{n+3}}{n+3} + \frac{3(1-x)^{n+4}}{n+4} - \dots$$

Tom. V. F. - (1-x)

42 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

$\frac{(1-x)^{n+3}}{n+3}$) $(n+3)$, vt hoc fiat $= 0$ si $x=0$,

erit $C = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$. Ponatur $x=1$, erit terminus generalis $\frac{n+3}{n+1} - \frac{2(n+3)}{n+2} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

§. 10. Vt igitur progressionem transcendentem adipiscamur, ponatur e aequale fractioni $\frac{f}{g}$. Erit progressionis terminus ordine $n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)} g^n$ siue $\frac{g \cdot 2g \cdot 3g \cdot \dots \cdot ng}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)}$

Terminus vero generalis erit $= \frac{(f+(n+1)g)}{g} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Qui si diuidatur per g^n , erit pro progressionem $\frac{1}{f+g} + \frac{1 \cdot 2}{(f+g)(f+2g)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)} \dots$ etc. cuius terminus ordine n est $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)}$. Eius progressionis igitur terminus generalis erit $\left(\frac{f+(n+1)g}{n+1}\right)$

$\int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Vbi si fractio $\frac{f}{g}$ non sit numero integro aequalis, seu si f ad g non habuerit rationem multiplicem, progressio erit transcendens, et termini intermedii a quadraturis pendebunt.

§. 11. Exemplum quoddam in medium afferam, vt vsus termini generalis clarius ob oculos ponatur. Sit in paragraphi praecedentis progressionem priorem $f=1$, $g=2$, erit terminus ordine $n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$, progressio vero ipsa haec $\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \dots$ etc. cuius terminus generalis ergo erit $\frac{2n+3}{2} \int dx (1-x)^n \sqrt{x}$. Quaeratur terminus

minus cuius index $\frac{1}{2}$; fiet igitur $n = \frac{1}{2}$, et habebitur terminus quaesitus $= 2 \int dx \sqrt{(x - x^2)}$. Quod cum significet elementum areae circularis, perspicuum est terminum quaesitum esse aream circuli, cuius diameter $= 1$. Proposita porro fit haec series, $1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc., quae est coefficientium binomii ad potestatem r eleuati.

Terminus ordine n est ergo $\frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$

In §. praecedente habetur hic $\frac{(f+g)(f+2g)\dots(f+ng)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$

Hic, vt cum illo comparetur inuertendus est, vt habeatur $\frac{(f+g)(f+2g)\dots(f+ng)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$; multiplicetur hic per $\frac{n}{(f+ng)}$, et erit is $= \frac{(f+g)(f+2g)\dots(f+(n-1)g)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$

oportet igitur esse $f+g=r$ et $f+2g=r-1$, vnde fiet $g=-1$ et $f=r+1$. Eodem modo

tractetur terminus generalis $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx$

$(1-x)^n$. Prodibit pro progressionē proposita $1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ etc., hic terminus generalis,

$\frac{n(-1)^{n+1}}{(r-n)(r-n+1) \int x^{-r-1} dx (1-x)^n$. Sit $r=2$ erit hu-

ius progressionis $1, 2, 1, 0, 0, 0$, etc., terminus generalis $n(-1)^{n+1} : ((2-n)(3-n) \int x^{-3} dx (1-x)^n$). Hic autem notari debet, hunc casum

et alios quibus $e+1$ fit numerus negatiuus, non posse ex generali deduci, quia tunc integrale non non fit $= 0$ si $x=0$. Pro his vero $\int x^e dx (1-x)^n$ peculiari modo integrari conuenit, post integrationem enim constans infinita est adiicienda: quando ve-

44 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

r et $r-1$ est numerus affirmatiuus, vt posui §. 8. constantis additione non est opus. Considerata autem progressionem, cuius terminus ordine n erat sequens, $\frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$, transmutari potest illa termini exponentis n forma in hanc $\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1))(1 \cdot 2 \dots (r-n+1))}$. Sed per §. 14. est $r \cdot r-1 \dots 1 = \int dx (-lx)^r$, et $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$ est $\int dx (-lx)^{n-1}$ et $1 \cdot 2 \dots (r-n+1) = \int dx (-lx)^{r-n+1}$. Quamobrem ibi tractatae progressionis $1 + \frac{r}{1} + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} + \frac{r \cdot r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ hic habetur terminus generalis $\frac{\int dx (-lx)^r}{\int dx (-lx)^{n-1} \int dx (-lx)^{r-n+1}}$. Si fuerit $r=2$, erit terminus generalis.

$\frac{2}{\int dx (-lx)^{n-1} \int dx (-lx)^{3-n}}$, cui respondet haec progressio $1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$. Vt si quaeratur terminus indicis $\frac{3}{2}$ erit is $= \frac{2}{\int dx (-lx)^{\frac{1}{2}} \int dx (-lx)^{\frac{3}{2}}}$.

Dicta ergo area circuli $= A$, cuius diameter est $= 1$, quia est $\int dx (-lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$ et $\int dx (-lx)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{A}$, erit terminus medium interiacens inter duos primos terminos progressionis $1, 2, 1, 0, 0, 0, \dots$ huius formae $\frac{4}{3A}$, hoc est $\frac{5}{3}$ quam proxime.

§. 12. Progredior nunc ad progressionem, de qua initio dixi, $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3$ etc. et in qua terminus ordine n est $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$. Continetur haec progressio in generali nostra, sed terminus ge-

generalis peculiari modo inde deriuari debet. Hactenus scilicet terminum generalem habui si terminus ordine n est $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)}$, qui si ponatur $f=1$ et $g=0$, abit in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, cuius terminus generalis quaeritur: substituuntur ergo in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$, hi valores loco f et g , erit terminus generalis quaesitus $\int \frac{x^{\frac{1}{0}} dx (1-x)^n}{0^{n+1}}$. Qui vero huius expressionis sit valor, sequenti modo inuestigo.

§. 13. Ex conditione, qua huiusmodi termini generales vsui accommodari debent, intelligitur loco x alias functiones ipsius x posse subrogari, dummodo eae tales fuerint, vt sint $=0$ si $x=0$ et $=1$ si $x=1$. Huiusmodi enim functiones si loco x substituuntur, terminus generalis perinde satisfaciet ac ante. Ponatur igitur

$x^{\frac{g}{f+g}}$ loco x et consequenter $\frac{-f}{f+g} x^{\frac{g}{f+g}} dx$ loco dx ;

quo facto habebitur $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int \frac{g}{f+g} dx (1-x^{\frac{g}{f+g}})^n$

Iam hic ponatur $f=1$, et $g=0$, habebitur

$\int \frac{dx (1-x^0)^n}{0^n}$. Cum autem sit $x^0=1$, habemus hic

casum, quo numerator et denominator euanescent $(1-x^0)^n$ et 0^n . Per regulam igitur cognitam quae-

ramus valorem fractionis $\frac{1-x^0}{0}$. Id quod fiet quaerendo valorem fractionis $\frac{1-x^z}{z}$ tum, cum z euanescit, differentietur igitur et numerator et denominator sola z variabili posita; habebitur $\frac{-x^z dz lx}{dz}$ seu $-x^z lx$, si iam ponatur $z=0$, prodibit $-lx$. Est itaque $\frac{1-x^0}{0} = -lx$.

§. 14. Cum igitur sit $\frac{1-x^0}{0} = -lx$, erit $\frac{(1-x^0)^n}{0^n} = (-lx)^n$, et propterea terminus generalis quaesitus $\int \frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$ transmutatus est in $\int dx (-lx)^n$. Cuius valor inueniri per quadraturas potest. Quamobrem huius progressionis 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. terminus generalis est $\int dx (-lx)^n$, eodem modo adhibendus, quo supra praeceptum est. Hunc autem esse terminum generalem progressionis propositae ex eo quoque cognoscitur, quod terminos, quorum indices sunt numeri integri affirmatiui, reuera praebeat, sit v. g. $n=3$, erit $\int dx (-lx)^3 = \int -dx (lx)^3 = -x(lx)^3 + 3(xlx)^2 - 6x lx + 6x$ constantis additione opus non est, cum facto $x=0$ omnia euanescant, ponatur igitur $x=1$, quia $l1=0$, omnes termini logarithmis affecti

fecti euanescent et restabit 6, qui est terminus tertius.

§ 15. Verum quidem est, hanc methodum terminorum istius seriei inueniendorum nimis esse operosam, eorum nimirum quorum indices sunt numeri integri, qui utique facilius continuanda progressionem obtinentur. Verum tamen ad terminos indicum fractionum inueniendos per quam est idonea, quippe qui adhuc ne operosissima quidem methodo definiri potuerunt. Si ponatur $n = \frac{1}{2}$ habebitur respondens terminus $= \int dx \sqrt{-lx}$ cuius valor per quadraturas datur. Sed initio ostendi hunc terminum esse aequalem radici quadratae ex circulo cuius diameter est 1. Hinc quidem idem concludere non licet, ob defectum analysis; infra autem sequetur methodus eosdem terminos intermedios ad algebraicarum curuarum quadraturas reducendi. Ex cuius cum hac comparatione forte nonnihil ad amplificationem analysis deriuari poterit.

§. 16. Progressionis cuius terminus ordine n indicatur per $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)}$, terminus generalis est per §. 10. $\frac{f + (n+1)g}{g^{n+1}} \int x^f dx$
 $(1-x)^n$. Si autem terminus ordine n fuerit 1. 2.
 3. - - - n , tum est terminus generalis $\int dx$
 $(-lx)^n$. Quae formula, si loco 1. 2. 3. - - - n
 sub-

substituatur, habebitur $\frac{\int dx (-lx)^n}{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)} =$
 $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Ex quo efficitur $(f+g)$
 $(f+2g) \dots (f+ng) = \frac{g^{n+1} \int dx (-lx)^n}{\int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n}$

Quae expressio igitur est terminus generalis huius generalis progressionis $f+g, (f+g)(f+2g), (f+g)(f+2g)(f+3g)$ etc. Huiusmodi igitur progressionum omnium ope termini generalis omnes termini cuiuscunque indicis definiuntur. Quae infra sequentur de reductione $\int dx (-lx)^n$ ad quadraturas notiores seu curuarum algebraicarum, etiam hic usum habebunt.

§. 17. Sit $f+g=1$, et $f+2g=3$, erit $g=2$ et $f=-1$. Vnde orietur haec progressio particularis $1, 1.3, 1.3.5, 1.3.5.7$, etc. Cuius igitur terminus generalis est $\frac{2^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(2n+1) \int x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^n}$.

Quanquam hic exponens ipsius x sit negatius, tamen id incommodum, de quo supra dictum, hic locum non habet, cum sit unitate minor. Ponatur $n=\frac{1}{2}$ vt inueniatur terminus ordine $\frac{1}{2}$, erit
 $is = \frac{2^{\frac{3}{2}} \int dx \sqrt{-lx}}{2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2} \int dx \sqrt{-lx}}{\int \frac{dx-x dx}{\sqrt{x-xx}}}$. Per §. 15.

autem constat dare $\int dx \sqrt{-lx}$ radicem quadratam
 ex

ex circulo, cuius diameter = 1, fit peripheria eius circuli p , erit area = $\frac{1}{2}p$, adeoque $\int dx \sqrt{-lx}$ dat $\frac{1}{2} \sqrt{p}$. Deinde $\int \frac{dx - xdx}{\sqrt{x - xx}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}} + \int \frac{x dx}{2\sqrt{x - xx}}$ sed $\int \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}}$ dat arcum circuli, cuius finus versus est x . Posito itaque $x = 1$, proueniet $\frac{1}{2}p$. Quamobrem terminus quaesitus erit = $\sqrt{\frac{2}{p}}$.

§. 18. Cum progressionis, cuius terminus ordine n indicatur per $(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)$,

terminus generalis per §. 16. fit $\frac{g^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(f+(n+1)g) \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n}$

similiter si terminus ordine n fuerit $(b+k)(b+2k) \dots (b+nk)$, erit terminus generalis

$\frac{k^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(b+(n+1)k) \int x^{\frac{b}{k}} dx (1-x)^n}$. Diuidatur illa pro-

gressio per hanc, nempe terminus primus per primum, secundus per secundum et ita porro: devenietur ad nouam progressionem, cuius terminus ordine n erit

$\frac{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)}{(b+k)(b+2k) \dots (b+nk)}$. Et terminus generalis huius progressionis ex illis duobus compositus erit

$\frac{g^{n+1} (b+(n+1)k) \int x^{\frac{b}{k}} dx (1-x)^n}{k^{n+1} (f+(n+1)g) \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n}$

Qui vacuus est ab integrali logarithmico $\int dx (-lx)^n$.

§. 19. In omnibus huiusmodi terminis generalibus hoc maxime notandum est, non quidem
Tom. V. G dem

dem loco f, g, b, k numeros constantes poni oportere, sed eos quomodocunque ab n pendentes quoque assumi posse. In integratione enim eae literae perinde atque n tractantur, omnes tanquam constantes. Sit terminus ordine n hic $(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)$, ponatur $g=1$, sed $f=\frac{nn-n}{2}$. Quia progressio ipsa est $(f+g), (f+g)(f+2g), (f+g)(f+2g)(f+3g)$ etc. ponatur ubique 1 loco g , erit ea, $f+1, (f+1)(f+2), (f+1)(f+2)(f+3)$. Sed loco f scribi debet in termino primo 0, in secundo 1, in tertio 3, in quarto 6 et ita porro, prodibit haec progressio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc. cuius igitur ter-

$$\begin{aligned} \text{minus generalis } & \frac{2 \int dx (-lx)^n}{(nn+n+2) \int x^{\frac{nn-n}{2}} dx (1-x)} \\ & \frac{2 \int dx (-lx)^n}{(nn+n+2) \int dx (x^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n+1}{2}})^n} \end{aligned}$$

§. 20. Accedo nunc ad eas progressionem, unde compendium illud in definiendis terminis intermediis huius progressionis 1, 2, 6, 24, 120, etc. nactus sum. Id enim latius patet quam ad hanc solam progressionem, quoniam eius terminus generalis $\int dx (-lx)^n$ etiam in infinitarum aliarum progressionum terminos generales ingreditur. Assumo hunc terminum generalem $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}}$ $dx (1-x)^n$, cui respondet terminus ordine n hic

$\frac{1}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\dots(f+ng)}$. Pono hic $f=n$, $g=1$,
erit terminus generalis $(2n+1)\int x^n dx (1-x)^n$ vel
 $(2n+1)\int dx (x-xx)^n$ et forma eius ordine n ,

$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots 2n}$. Progressio vero ipsa
haec $\frac{1}{2}$, $\frac{1.2}{3.4}$, $\frac{1.2.3}{4.5.6}$, etc. vel haec $\frac{1.1}{1.2}$, $\frac{1.2.1.2}{1.2.3.4}$,
 $\frac{1.2.3.1.2.3}{1.2.3.4.5.6}$ etc. In qua numeratores sunt quadra-

ta progressionis 1. 2. 6. 24. inter denominatores
vero duos proximos aequidistans facile inuenitur.
Sit in progressionem 1, 2, 6, 24. etc. terminus,
cuius index $\frac{1}{2}$, A, erit progressionis illius termi-
nus ordine $\frac{1}{2} = \frac{AA}{1}$.

§. 21. Ponatur in termino generali $(2n+1)\int x^n dx (1-x)^n$, $n = \frac{1}{2}$ erit terminus huius expo-
nentis $= 2\int dx \sqrt{x-xx} = \frac{AA}{1}$, unde $A = \sqrt{1.2}\int dx$
 $\sqrt{(x-xx)} =$ termino progressionis 1, 2, 6, 24, etc.
cuius index est $\frac{1}{2}$, qui ergo ut ex eo elucet est
radix quadrata ex circulo diametri 1. Dicatur
nunc terminus huius progressionis ordine $\frac{3}{2}$, A,
erit respondens in assumpta progressionem $= \frac{AA}{1.2.3}$

$4\int dx (x-xx)^{\frac{3}{2}}$ ergo $A = \sqrt{1.2.3.4}\int dx (x-xx)^{\frac{3}{2}}$
Simili modo inuenitur terminus ordine $\frac{5}{2} = \sqrt{1.2.3.4.5.6}\int dx (x-xx)^{\frac{5}{2}}$.
Ex quibus generaliter
concludo terminum ordine $\frac{p}{2} = \sqrt{1.2.3.4.$
 $\dots (p+1)\int dx (x-xx)^{\frac{p}{2}}$. Hoc igitur modo
inueniuntur omnes termini progressionis, 1, 2, 6,
24, etc. quorum indices sunt fractiones denomi-
natore existente 2.

52 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

§. 22. Porro in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}$

$\int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$, pono $f=2n$ manente $g=1$, prodibit $(3n+1) \int dx (xx-x^3)^n$ terminus generalis huius progressionis $\frac{1}{3}$, $\frac{1.2}{5.6}$, $\frac{1.2.3}{7.8.9}$ etc. Multiplicetur ille per praecedentem $(2n+1) \int dx (x-xx)$, prodibit $(2n+1)(3n+1) \int dx (x-xx)^n \int dx (xx-x^3)^n$. Qui dabit hanc progressionem $\frac{1.1.1}{1.2.3}$, $\frac{1.2.1.2.1.2}{1.2.3.4.5.6}$ etc. ubi numeratores sunt cubi terminorum respondentium progressionis 1, 2, 6, etc. Huius progressionis terminus ordine $\frac{1}{3}$ sit A, erit respondens illius $A^{\frac{1}{3}} = 2 \left(\frac{2}{3} + 1\right) \int dx (x-xx)^{\frac{1}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$, ergo terminus ordine $\frac{1}{3}$ est $\sqrt[3]{1.2.5} \int dx (x-xx)^{\frac{1}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$; similiter term. ordine $\frac{2}{3}$ est $\sqrt[3]{1.2.3.7} \int dx (x-xx)^{\frac{2}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{2}{3}}$. Atque terminus ordine $\frac{4}{3}$ est $\sqrt[3]{1.2.3.4.5.1.1} \int dx (x-xx)^{\frac{4}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{4}{3}}$ et generaliter terminus ordine $\frac{p}{3}$ est $\sqrt[3]{1.2. \dots . p. \left(\frac{2p+1}{3}\right)} (p+1) \int dx (x-xx)^{\frac{p}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{p}{3}}$.

§. 23. Si ulterius progredi velimus, ponendo $f=3n$, oportebit terminum generalem $(4n+1) \int dx (x^3-x^4)^n$ in praecedentes multiplicare, vnde habetur $(2n+1)(3n+1)(4n+1) \int dx (x-xx)^n \int dx (x^2-x^3)^n \int dx (x^3-x^4)^n$ qui est pro hac serie $\frac{1.1.1.1}{1.2.3.4}$, $\frac{1.2.1.2.1.2.1.2}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ etc. Ex qua definientur termini
pre-

progressionis 1, 2, 6, 24, etc. quorum indicet sunt fractiones denominatorem 4 habentes. Nimirum

terminus cuius index est $\frac{p}{4}$ inuenietur $= \sqrt[4]{1.2.3.}$

--- $p. (\frac{2p}{4} + 1) (\frac{3p}{4} + 1) (p + 1) \int dx (x - xx)^{\frac{p}{4}} \int dx (xx - x^3)^{\frac{p}{4}} \int dx (x^3 - x^4)^{\frac{p}{4}}$. Hinc generaliter concludere

licet terminum ordine $\frac{p}{q}$ esse $= \sqrt[q]{1.2.3. --- p}$

$((\frac{2p}{q} + 1) (\frac{3p}{q} + 1) (\frac{4p}{q} + 1) --- (p + 1)) (\int dx (x - xx)^{\frac{p}{q}} \int dx (x^2 - x^3)^{\frac{p}{q}} \int dx (x^3 - x^4)^{\frac{p}{q}} --- \int dx (x^{q-1} - x^q)^{\frac{p}{q}})$. Ex hac igitur formula termini cuius-

cunque indicis fracti inuenientur per quadraturas curuarum algebraicarum: ad id autem requiritur $(1.2.3. --- p)$ terminus cuius index est numerator fractionis propositae.

§. 24. Eodem modo ulterius progredi licet ad progressionem magis compositas, assumendis terminis generalibus magis compositis, sed ea longius non persequor. Possunt etiam signa integralia multiplicari, vt terminus generalis sit $\int q dx \int p dx$ nimirum integrale ipsius $p dx$ debet multiplicari per $q dx$, et quod resultat denuo integrari, id quod demum dabit facto $x = 1$ terminum seriei. In vtraque autem integratione, vt sit determinata, oportet addenda constante efficere, vt posito $x = 0$, integrale fiat itidem $= 0$. Similiter tractandi sunt termini generales,

qui pluribus signis integralibus continentur vt $\int r dx$
 $\int q dx \int p dx$. Attamen semper loco p, q, r etc. ta-
 les sunt sumendae functiones, vt, quoties n fue-
 rit numerus integer affirmatiuus, prodeant ter-
 mini ad minimum algebraici.

§. 25. Sit terminus generalis $\int \frac{dx}{x} x^e dx (1-x)$
 hic in seriem conuersus dat $\frac{x^{e+1}}{(e+1)^2} - \frac{n \cdot x^{e+2}}{1 \cdot (e+2)^2}$

$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot x^{e+3}}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)^2}$ etc. Posito $x=1$, habebitur ter-
 minus ordine n per hanc seriem $\frac{1}{(e+1)^2} - \frac{n}{1 \cdot (e+2)^2}$
 $+ \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)^2}$ etc. Progressio vero ipsa haec erit
 a termino cuius index est 0 incipiens $\frac{1}{(e+1)^2}$,
 $\frac{(e+2)^2 - (e+1)^2}{(e+2)^2(e+1)^2}$, $\frac{(e+3)^2(e+2)^2 - 2(e+3)^2(e+1)^2 + (e+2)^2(e+1)^2}{(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$,
 $\frac{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2 - 3(e+4)^2(e+3)^2(e+1)^2 + 3(e+4)^2(e+2)^2(e+1)^2 - (e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$ etc.

Lex huius progressionis manifesta est, et non indiget explicatione. Sit

$e=0$, erit $\int dx (1-x)^n = \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{n+1}$ ergo termi-

nus generalis est $\int \frac{dx - dx(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}$, progressio ve-

ro haec erit $\frac{1}{1}$, $\frac{4-1}{4 \cdot 1}$, $\frac{9 \cdot 4 - 2 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{9 \cdot 4 \cdot 1}$, $\frac{16 \cdot 9 \cdot 4 - 3 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 1 + 3 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 1}{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}$ etc. Huius differentiae hanc con-
 stituent progressionem, $\frac{-1}{4 \cdot 1}$, $\frac{-9+4}{9 \cdot 4 \cdot 1}$, $\frac{-16 \cdot 9 + 2 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4}{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}$
 etc.

§. 26. In hac dissertazione ergo id, quod
 praecipue intendi, affectus sum; nempe vt ter-
 minos

minos generales inuenirem omnium progressionum, quarum singuli termini sunt facta ex factoribus in progressionem arithmetica progredientibus, in quibusque numerus factorum vt libuerit ab indicibus terminorum pendeat. Quanquam autem hic semper numerus factorum indici aequalis positus sit, tamen si is alio modo inde pendens desideretur, res nihil habet difficultatis. Index denotatus est litera n , si iam quis requirat vt numerus factorum sit $\frac{mn+n}{2}$, alia operatione opus non est, nisi vt vbique loco n substituatur $\frac{mn+n}{2}$.

§. 27. Coronidis loco adhuc aliquid, curiosum id quidem magis quam vtile adiungam. Notum est per $d^n x$ intelligi differentiale ordinis n ipsius x , et $d^n p$, si p denotet functionem quampiam ipsius x , ponaturque dx constans, esse homogeneum cum dx^n , semper autem, quando n est numerus integer affirmatiuus, ratio quam habet $d^n p$ ad dx^n algebraice potest exprimi, vt si $n=2$ et $p=x^3$, erit $d^2(x^3)$ ad dx^2 vt $6x$ ad 1. Quaeritur nunc si n sit numerus fractus, qualis tum futura sit ratio. Difficultas in his casibus facile intelligitur, nam si n est numerus integer affirmatiuus, d^n continuata differentiatione inuenitur, talis autem via non patet, si n est numerus fractus. Sed tamen ope interpolationum progressionum, de quibus in hac dissertatione explicauimus, rem expedire licebit.

§. 28. Sit iuuenienda ratio inter $d^n(z^e)$ et dz^n posito dz constante, seu requiritur valor fractionis $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$. Videamus primo qui sint eius va-

lores si n est numerus integer, vt postmodum generaliter illatio fieri possit. Si $n=1$. erit eius valor $e z^{e-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-1)} z^{e-1}$, hoc modo e exprimo, vt facilius postea ea quae tradita sunt huc referantur. Si $n=2$, erit valor $e(e-1) z^{e-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-2)} z^{e-2}$. Si $n=3$, habebitur $e(e-1)(e-2) z^{e-3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-3)} z^{e-3}$. Hinc generaliter infero quicquid sit n fore semper $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-n)} z^{e-n}$. Est autem per §. 14,

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e = \int dx (-lx)^e$ et $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-n) = \int dx (-lx)^{e-n}$. Quare habetur $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n}$

$\frac{\int dx (-lx)^e}{\int dx (-lx)^{e-n}}$ vel $d^n(z^e) = z^{e-n} dz^n \frac{\int dx (-lx)^e}{\int dx (-lx)^{e-n}}$.

Ponitur hic dz constans et $\int dx (-lx)^e$ vt et $\int dx (-lx)^{e-n}$ ita debent integrari, vt supra praeceptum est, et tum ponere oportet $x=1$.

§. 29. Non necesse est, quomodo verum eliciatur, ostendere, apparebit id ponendo loco n numerum integrum affirmatiuum quemcunq;. Quaeratur autem quid sit $d^{\frac{1}{2}}z$, si sit dz constans. Erit ergo $e=1$ et $n=\frac{1}{2}$. Habebitur itaque $d^{\frac{1}{2}}z = \frac{\int dx (-lx)}{\int dx \sqrt{-lx}}$
 \sqrt{zaz}

$\sqrt{z} dz$. Est autem $\int dx(-lx) = 1$ et dicta area circuli A, cuius diameter est 1, erit $\int dx \sqrt{-lx} = \sqrt{A}$,

unde $d^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{\frac{z dz}{A}}$. Proposita igitur fit haec aequatio ad quampiam curuam $y d^{\frac{1}{2}} z = z \sqrt{dy}$, vbi dz ponitur constans, et quaeratur qualis ea fit curua.

Cum sit $d^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{\frac{z dz}{A}}$ abibit ea aequatio in hanc $y \sqrt{\frac{z dz}{A}} = z \sqrt{dy}$, quae quadrata dat $\frac{yy dz}{A} = z dy$: unde inuenitur $\frac{1}{A} \int z = c - \frac{1}{y}$, vel $y/z = cAy - A$, quae est aequatio ad curuam quaesitam.

PROBLEMATIS

DE

STATIONIBVS PLANETARVM

CASVS ALTER.

AVCTORE

F. C. Maiero.

Sint datae duorum Planetarum orbitae ad ecli Tabula H. Fig. 2.
pticae planum reductae, earumque positio;
fit quoque data vnus distantia a Sole: Quaeritur distantia alterius stationaria.

Maioris orbitae axis AB fit = A.
eiusdem eccentricitas dupla OF fit = F.
eiusdem parameter $\frac{OF}{2}$ = P.

Tom. V.

H

Di-

Distantia planetae maioris OS fit = D.

In minore orbita fit parameter = p

distantia planetae OI = d.

Haec interioris orbitae distantia sumatur vt data: ergo et angulus IOF, quo axium positio definitur.

Sinus anguli FOI = s, cosinus = c.

Habetur autem praeterea ex natura ellipseos

Cofinus anguli FOS = $r \frac{2AD - AP}{2DF} = N$, eiusque sinus = M.

ex conditione stationis est

$$\text{Cofinus anguli SOI} = r D d \frac{P^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}}{DDp^{\frac{1}{2}} + ddP^{\frac{1}{2}}} = q,$$

eiusque sinus = p.

Inde fit porro (ob angul. SOI = ang. FOI - ang. FOS)

1. $\frac{Nc + Ms}{r} = q$, ergo, $rq - Nc = Ms$.

quadrando fit

2. $r^2 q^2 - 2rqNC + N^2 c^2 = M^2 s^2 = r^4 - r^2 N^2 - r^2 c^2 - N^2 c^2$.

3. $r^2 q^2 + r^2 c^2 + r^2 N^2 - 2rqNc - r^4 = 0$:

facta substitutione aequalientium, et diuisione per r^2 habetur

$$4. \begin{cases} r^2 D^2 d^2 \frac{P + 2VP + p}{(DDp^{\frac{1}{2}} + ddP^{\frac{1}{2}})^2} + r^2 A^2 \frac{(2D - P)^2}{4D^2 F^2} \\ - sc A d \frac{(2D - P)(P^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})}{F(D^2 p^{\frac{1}{2}} + d^2 P^{\frac{1}{2}})} + cc - rr = 0. \end{cases}$$

Praecedens aequatio quarta ducatur in $4DDFF$
 $(DDp^{\frac{1}{2}} + ddP^{\frac{1}{2}})^2$.

$$5. \left\{ \begin{aligned} & 4r^2 D^4 d^2 F^2 (P + P\frac{1}{2}p\frac{1}{2} + p) + r^2 A^2 (2D - P)^2 \\ & (DDp\frac{1}{2} + ddP\frac{1}{2})^2 - - - - \\ & - 4cdA D^2 F (2D - P) (\Gamma\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) (DD\frac{1}{2} + d(P\frac{1}{2})) \\ & - 4r^2 D^2 F^2 (DDp\frac{1}{2} + ddP\frac{1}{2})^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Haec vero porro in ordinem redigatur

$$6. \left\{ \begin{aligned} & D^6 - rA \frac{2cdF\frac{1}{2} + 2cdFP\frac{1}{2} + rAPp\frac{1}{2}}{c^2 F^2 p\frac{1}{2} + r^2 APp\frac{1}{2}} D^5 - \\ & \frac{+ 4r^2 d^2 F^2 P + 4r^2 d^2 F^2 p + 8r^2 A^2 F\frac{1}{2} p\frac{1}{2} + r^2}{4(c^2 F^2 + r^2 AP)} \\ & \frac{A^2 P^2 p + 4cdAF\frac{3}{2}\frac{1}{2} + 4r^2 AFPp + 8r^2 d^2 F^2 \frac{1}{2} p\frac{1}{2}}{2p(c^2 F^2 + r^2 AP)} D^4 - \\ & - 2rAd^2 P\frac{1}{2} \frac{rAP\frac{1}{2} + cdFp\frac{1}{2} + cdFP\frac{1}{2}}{p(c^2 F^2 + r^2 AP)} D^3 + d^2 P \\ & \frac{r^2 A^2 P^3 p\frac{1}{2} + 2rcdAFP + 2rcdAFP\frac{1}{2} p\frac{1}{2} + 2r^2 F^2 + 2r^2 d^2 AP}{2p(c^2 F^2 + r^2 AP)} D^2 \\ & - \frac{r^2 A^2 d^4 P^2}{p(r^2 AP + c^2 F^2)} D + \frac{d^4 r^2 P^3 A^2}{4(r^2 AP + c^2 F^2)p} = 0. \end{aligned} \right.$$

Potest haec aequatio diuidi per aliam quadratici ordinis, vt postea patebit.

Scholion.

2. Idem problema potest aliter et breuius solui, ita quidem vt aequatio non nisi quatuor dimensionum prodeat. Debent autem in subsidium adhiberi duo sequentia Lemmata. Fig. 3.

Lemma I.

3. In omni quadrilatero FOIS, [positis OF = F, OI = d, SI = M, SF = N, OS = D, et FI = m]

$$= -m] \text{ est, } F^2 d^2 + F^2 m^2 + d^2 m^2 + M^2 m^2 + M^2 N^2 + m^2 N^2 - m^4 = F^2 D^2 + F^2 N^2 + D^2 N^2 + M^2 d^2 + M^2 D^2 + d^2 D^2 - D^4.$$

Nam $\triangle IOS + \triangle OSF = \triangle FIS + \triangle FIO$. Horum vero triangulorum areae exprimi possunt per sua latera, [quod aliunde notum est] igitur ad aequationem devenitur sequentem, $2D^2 d^2 + 2D^2 M^2 + 2M^2 d^2 - D^4 - d^4 - M^4 + 2D^2 F + 2D^2 N^2 + 2F^2 N^2 - D^4 - F^4 - N^4 = 2M^2 m^2 + 2M^2 N^2 + 2N^2 m^2 - M^4 - m^4 - N^4 + 2m^2 d^2 + 2m^2 F^2 + 2F^2 d^2 - m^4 - d^4 - F^4$, deletis vtrisque aequalibus, et divisione facta per 2, habetur $D^2 d^2 + D^2 M^2 + d^2 M^2 + D^2 F + D^2 N^2 + F^2 N^2 - D^4 = M^2 m^2 + M^2 N^2 + m^2 N^2 + m^2 d^2 + m^2 F^2 + d^2 F^2 - m^4$. Q. E. D.

Lemma 2.

4. Quadratum lineae SI (fig. 1.) iungentis planetas stationarios est $= \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1}$

Ponatur linea SI = Z, ita fiet cosinus anguli SOI (per trigonometriae praecepta) $r \frac{D^2 + d^2 - Z^2}{2Dd}$ idem vero cosinus stationis tempore est $= r D d$

$\frac{P_{\frac{1}{2}}^1 + p_{\frac{1}{2}}^1}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1}$, ergo facta reductione aequationis legitima habetur $Z^2 = \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1}$.

Q. E. D.

Solutio Problematis altera.

5. Ducantur ex foco F lineae FI et FS, vt Fig. 2.
 obtineatur quadrilaterum FOIS, sumaturque linea
 FI vt data, quae nimirum fitum axium determi-
 net, et ponatur esse = m. Est et praeterea OI
 = d, OS = D, OF = F, FS = A - D, et SI =
 $\sqrt{(D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1)}$
 $\sqrt{(D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1)}$. Ex hisce po-
 fitis aequatio formatur per Lemma 1. §. 2., vti
 fequitur.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & F^2 d^2 + F^2 m^2 + d^2 m^2 + D^2 m^2 + A^2 m^2 - 2ADm^2 \\
 & - m^4 + m^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1} + \\
 & (A^2 - 2AD + D^2) \frac{(D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1)}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1} \\
 & = 2F^2 D^2 + F^2 A^2 + D^2 A^2 + D^2 d^2 - 2F^2 AD - \\
 & 2D^3 A + d^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1} \\
 & + D^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 + d^4 P_{\frac{1}{2}}^1}{D^2 p_{\frac{1}{2}}^1 + d^2 P_{\frac{1}{2}}^1}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Inde fit porro.

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \left\{ \begin{aligned}
 & + m^2 \\
 & 2p_{\frac{1}{2}}^1 - d^2 - \\
 & - F^2
 \end{aligned} \right\} D^4 + 2A \left\{ \begin{aligned}
 & - m^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + F^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + 2d^2 P_{\frac{1}{2}}^1
 \end{aligned} \right\} D^3 - \left\{ \begin{aligned}
 & + F^2 A^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + d^2 A^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + m^4 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & - F^2 d^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & - F^2 m^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & - A^2 m^2 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & - d^4 p_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + 2A^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1 \\
 & + 2F^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}^1
 \end{aligned} \right\} D
 \end{aligned}$$

$$-2Ad^2P_2 \left\{ \begin{array}{c} d^2 \\ m^2 \\ -F^2 \end{array} \right\} D + d^2P_2 \left\{ \begin{array}{c} d^2 \\ m^2 \\ 2m^2 \\ A^2c^2 \\ A^2m^2 \\ -m^4 \\ -F^2A^2 \\ -d^4 \end{array} \right\} = 0.$$

Fiat cosinus anguli FOI = c , ut habeatur $m^2 = \frac{rF^2 + rd^2 - 2Fcd}{r}$ hoc valore in aeq. 2. substituto, ceterisque bene obseruatis, emergit

$$3. \left\{ \begin{array}{l} D^4 - \left\{ \frac{Fcp_2^1}{rdP_2^1} \right\} AD^3 + \left\{ \begin{array}{l} APFcrf_2^1 \\ A^2r^2dP_2^1 \\ F^2r^2cP_2^1 \\ -2Fd^2rcp_2^1 \\ +2F^2c^2d_2^1 \end{array} \right\} \frac{D^2}{2rcFp_2^1} \\ + \frac{Ad^2P_2^1}{Fcp_2^1} \left\{ \begin{array}{l} rd \\ -Fc \end{array} \right\} D - \frac{d^2F_2^1}{2Frcp_2^1} \left\{ \begin{array}{l} rFF^2c \\ 2F^2c^2d \\ -A^2dr^2 \\ -F^2dr^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 0.$$

Potest haec aequatio in factores resolui hoc n. o. lo.

$$\left(\frac{2Fcp_2^1}{rd_2^1} D^2 - 2AD - AP \right) \left(2D^2 - 2AD + AP - 2d^2 + \frac{2Fcd}{r} \right) \\ = 4 \frac{F^2c^2d^2}{r^2} - 4F^2d^2 - A^2P^2, \text{ cuius aequationis radix } D \\ \text{dabit distantiam alterius planetae, ideoque locum} \\ \text{ipsum in orbita sua, in quo est stationarius.}$$

Dan.

Dan. Bernou'li

NOTATIONES DE AEQVATIONIBVS, QVAE PROGREDIUNTVR IN INFINITVM, HARVMQVE RESOLUTIONE PER METHODVM SERIERVM RECVRRENTIVM: VT ET DE NOVA SERIERVM SPECIE.

Praelectio Prima.

I.

Frequentes admodum sunt aequationes, quae sine fine progrediuntur; solent autem hac forma esse praeditae

$$y = x + ax + bx^3 + cx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

aut evanescentibus terminorum alternorum coefficientibus.

$$y = x + fx^3 + gx^5 + bx^7 + lx^9 + \text{etc.}$$

vbi coefficientes certa lege instar serierum numericarum se subsequuntur.

§. 2. Tales aequationes exhiberi potissimum solent pro quadraturis aut rectificationibus, ita vt dum x rectam aliquam lineam variabilem indicat, exprimat per y spatium aliquod curvilineum, aut arcus lineae curvae, quae illi lineae rectae respondeant; quoniam autem saepe numero solutio desideratur problematis inuersi, quod postulat, vt ex arcu curvae definiatur recta iis respon-

64 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

spondens, ideo excogitata fuit methodus inuertiendi aequationes ad hanc formam

$$x = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \delta y^5 + \text{etc.}$$

ita enim inuenitur

$$\begin{aligned} axx &= \alpha y^2 + 2\alpha\alpha y^3 + 2\beta\alpha y^4 + 2\gamma\alpha y^5 + \text{etc.} \\ &\quad + \alpha\alpha\alpha y^4 + 2\alpha\beta\alpha y^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bx^3 &= \beta y^3 + 3\alpha\beta y^4 + 3\beta\beta y^5 + \text{etc.} \\ &\quad + 3\alpha\alpha\beta y^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$cx^4 = \gamma y^4 + 4\alpha\gamma y^5 + \text{etc.}$$

$$ex^5 = \delta y^5 + \text{etc.}$$

vnde si fuerit

$$(A) \quad y = x + axx + bx^3 + cx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

erit substitutis singulorum terminorum valoribus

$$\begin{aligned} y &= y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \delta y^5 + \text{etc.} \\ &\quad + a \quad + 2\alpha a \quad + 2\beta a \quad + 2\gamma a \\ &\quad \quad + b \quad + 2\alpha\alpha a \quad + 2\alpha\beta a \\ &\quad \quad \quad + 3\alpha b \quad + 3\beta b \\ &\quad \quad \quad \quad + c \quad + 3\alpha\alpha b \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + 4\alpha c \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + e \end{aligned}$$

cuius aequationis identitas obtinetur, faciendo $\alpha = -a$, $\beta = 2a^2 - b$, $\gamma = -5a^3 + 5ab - c$, $\delta = 14a^4 - 21a^2b + 6ac + 3bb - e$ etc.

Igitur aequatio (A) aequipollet huic conuersae

$$(B) \quad x = y - \alpha y^2 + (2a^2 - b)y^3 - (5a^3 - 5ab - c)y^4 + (14a^4 - 21a^2b + 6ac + 3bb - e)y^5 - \text{etc.}$$

§. 3. Quamuis autem, quum in generalibus substitimus non facile perspiciamus legem, qua coefficientes assumpti α , β , γ , δ etc. progrediuntur, nisi

nisi post multorum terminorum considerationem, tamen in casibus particularibus ea saepe fit valde obuia. Sic v. gr. cum assumitur aequatio

$$y = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \text{etc.}$$

haec conuertitur ope aequationis (B) in hanc

$$x = y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 - \text{etc.}$$

cuius progressionis lex inspicienti cuius apparet.

Prior docet ad dati numeri $\frac{1}{1-x}$ logarithmum (y) accedere, altera ad dati logarithmi (y) numerum $\frac{1}{1-x}$.

§. 4. Exemplum huius rei cum mihi aliquando occurreret, volui periculum facere, an aliquod hac in parte auxilium praestare posset methodus illa singularis, quam in Comment. Tom. 3. exhibui pro inueniendis radicibus aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, idque sola terminorum additione vel subtractione continua, quod cum tentarem, vidi istam methodum minime nos deficere appropinquare volentes ad radicem aequationis sine fine progredientis, dum modo certa ratione vtamur: in eo autem cardo rei vertitur, vt series, quae ad leges loco citato exhibitas formanda est pro norma aequationis propositae, quaeque incipit a tot terminis arbitrariis, quot dimensiones habet eadem aequatio, hic incipere fingatur ab infinitis nullionibus, quos omnes excipiat vnitas.

66 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

§. 5. Sit nempe rursus aequatio (A) et in hac valor ipsius x proxime inueniendus, quod per aequationis conuersionem contenditur. Dico desiderato satisfactum iri, si aequationi (A) talis detur forma,

$$1 = \frac{1}{y}x + \frac{a}{y}xx + \frac{b}{y}x^3 + \frac{c}{y}x^4 + \frac{e}{y}x^5 + \text{etc.}$$

dein ponatur vnitas infinitis nullionibus subsequens hunc in modum

$$- - - - \text{O. O. O. O. I.}$$

formeturque postea series ita, vt quilibet terminus sit aequalis aggregato ex suo praecedente multiplicato per $\frac{1}{y}$, eoque qui hunc praecedit multiplicato per $\frac{a}{y}$, et qui hunc praecedit multiplicato per $\frac{b}{y}$ atque sic porro: series haec est

$$- - - - \text{O O. O. O. I. } \frac{1}{y}, \left(\frac{1}{y} + \frac{a}{y}\right), \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2a}{y^2} + \frac{b}{y}\right) \\ \left(\frac{1}{y^3} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right), \left(\frac{1}{y^4} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^3} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \text{ etc.}$$

Quibus sic factis, erit penultimus terminus diuisus per vltimum prope aequalis valori quaesito x , et eo quidem propius, quo plures fuerint termini. Erit itaque proxime

$$x = \left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right) : \left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^3} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \text{ vel}$$

$$(C) \quad x = \frac{y + 3ay + (aa + 2b)y^2 + cy^3}{1 + 4y + (3a + 3b)yy + (2c + 2ab)y^2 + ey^3},$$

et vbi maiori accuracione opus est facili negotio, et certe multo faciliori saepissime, quam si altera vtitur methodo, propius ad verum valorem accedemus. Lubet autem ad exempla nonnulla de-

scri-

scendere, vt comparatio inter vtramque metho-
dum institui possit.

§. 6. Sit aequatio (D) $x = \frac{r}{2.3} - \frac{rr}{2.3.4.5} + \frac{r^3}{2.3.4.5.6.7} - \frac{r^4}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{r^5}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} -$
etc., in quam aliquando directe nulla facta con-
uersione incidi, et quae ita est comparata, vt si
diameter circuli denotetur per vnitatem, incogni-
ta r exprimat quadratum circumferentiae. In-
uenitur per methodum paragraphi tertii (posito
prius $\frac{r}{2.3} = q$, vt aequatio (C) obtineat formam
aequationis (A): $q = \frac{1048.067}{673758}$, ergo $r = \frac{6.288402}{673758}$
ex quo sequeretur circumferentia circuli $= 3.05$
50. Quod si autem methodo nostra calculum po-
namus minore labore prodit numerus multo ve-
rior, nempe $q = \frac{4191}{2555}$, et $r = \frac{25146}{2555}$, atque cir-
cumferentia circuli $= 3.1376$.

Notabo hic in transitu, incognitam r in ae-
quatione (D) non solum quadratum circumferen-
tiae circuli, sed et eiusdem duplum, triplum ac
quoduis multipulum exprimere, ita vt illa aequa-
tio infinitas habeat radices reales, quarum regula
nostra minimam indicat. *Conf. Diss. de seriebus*
recurr.

§. 7. Huic exemplo aliud adiungemus inuer-
sum, sit scilicet radius circuli $= r$, chorda arcus
cuiuscunque $= x$, arcus ipse $= z$; notum est con-
uenire hanc aequationem aptissimam

$$I \quad 2 \quad (D)$$

$$(D) z = x + \frac{1}{3 \cdot 2^3} x^3 + \frac{3}{5 \cdot 2 \cdot 2^5} x^5 + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^7} x^7 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^{12}} x^9 + \text{etc.}$$

Huius aequationis tres tantum terminos priores considerabimus in vtraque methodo, ita vt tum in formula communi (B) tum in nostra (C) fit ponendum $a=0$, $b=\frac{1}{24}$, $c=0$ et $e=\frac{3}{640}$; igitur ex illa fit $x=z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5$, ex hac vero $x = \frac{1920z + 160z^3}{1920 + 240zz + 9z^4} = (\text{proxime}) z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5 + \frac{1}{7680} z^7$, sic vt neutra notabiliter differat ab altera.

§. Data igitur circumferentia circuli non inepte adhibebuntur hae formulae pro inuestigandis sinibus ad datos arcus non admodum magnos: habent etiam formulae huiusmodi vsum in problematis geometricis ad circulum pertinentibus, vbi requiritur vt expressio algebraica pro sinu vel chorda ex assumpto arcu adhibeatur proxime satisfaciens; quod si enim arcum posueris z pro radio r , tuto assumes chordam $= z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5$, vel $= \frac{1920z + 160z^3}{1920 + 240zz + 9z^4}$, eiusdemque arcus sinum $= z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5$ vel $= \frac{120 + 40zz + 9z^4}{120 + 60zz + 9z^4}$. huiusmodi formulas sed reciprocas, quae nimirum ex chorda arcuum proxime definiunt, iam olim dedit *Newtonus*, quas etiam ex aequatione (D) elicuisse mihi visus est.

§. 9. Ex his perspicuum est, satis apte methodum nostram adhiberi pro radice inuenienda aequatio-

aequationum continuo progredientium, quandoquidem in his exemplis allatis multo rectius procedat, quam ordinaria. Qui autem haec et superiora in Tom. II. exposita recte affecuti fuerint, perspicient terminorum omnium in infinitum aliquomodo rationem haberi propter vniformitatem legis, qua termini aequationis progrediuntur, quamuis in constructione radices pauci termini adhibeantur. Et hoc quidem modo fit, quod certe mirabile est, vt quoties aequatio infinita ad finitam reduci potest, id ipsum hac methodo indicetur, simulque radix iusta, recte se habentibus praemissis, constanter oriatur, vbicunque abrumaptur seriei paragraphi quinti constructio, quod a regulis consuetis minime est expectandum. De hoc proxima occasione agam; nunc finiam postquam monuero, succedere posse, vt series §. 5. non vergat ad naturam progressionis geometricae, quo in casu non conuenit valor aequationis (C). Illud tunc fit quando radix illa, quam minimam in Diff. de seriebus recurrentibus vocauimus, est imaginaria; quomodo autem huic incommodo obuiam iri possit, in eadem docui Dissertatione. His itaque et aliis similibus non amplius immorabimur.

Dan. Bernoulli

NOTATIONES DE AEQVATIONIBVS, QVAE PROGREDIVNTVR IN INFINITVM, EARVMQVE RESOLVTIONE PER METHODVM SERIERVM RECVRRENTIVM: VT ET DE NOVA SERIERVM SPECIE.

Praelectio Secunda.

I.

POSTquam in prima harum notationum mearum praelectioe ostendi modum generalem inuertendi aequationem, cuius alterutra indeterminata ceu incognita per omnes dimensiones in infinitum transit, in praesentibus potissimum monstrabo egregium consensum atque nexum methodi nostrae cum illis casibus, quibus aequatio infinitorum terminorum in aliam ordinariam finitam transmutari potest. Hunc autem in finem quaedam praemittam circa nouum aliquod serierum genus.

§. 2. Constructio harum serierum in hoc generaliter consistit, vt fingantur numeri data lege quacunque progredientes, quos ponam esse

(A) $a. b. c. d. e. f.$ etc.

ex his autem formetur talis series

(B) $a.(aa+b).(a^3+2ab+c).(a^4+3aab+2ac+bb+d)$
 $(a^5+4a^3b+3aac+3abb+2ad+2bc+e).(a^6+5a^4b$
 $c+6$

$+4a^3c+6aabb+3aad+6abc+b^3+2ae+2bd+cc$
 $+f)$ etc. quae ita est comparata, vt quilibet terminus
 constet ex aggregato omnium praecedentium suo
 ordine multiplicatorum per $a, b, c, d, e, f,$ etc.
 et noui termini in serie (A) subsequenti. Ita v. gr.
 tertius terminus seriei (B) est aggregatum ex prae-
 cedente $(aa+b)$ multiplicato per $a,$ ex anteprae-
 cedente (a) multiplicato per b et ex nouo ter-
 mino c ex serie data (A) depromto.

§. 3. Singularis est harum serierum proprie-
 tas, quod quoties series (A) est algebraica, alte-
 ra (B) fiat recurrens, seu exponentialis; atque
 adeo huius terminus generalis cum omnibus inde
 pendentibus praerogatiuis habeatur. Voco autem
 seriem algebraicam, cuius terminus generalis ha-
 betur expressus per quantitates algebraicas ratio-
 nales ordinarias, quarum denominatores variabilis
 non ingreditur, cuiusmodi sunt omnes series nu-
 merorum figuratorum: series recurrentes quando-
 que etiam nomine exponentialium designo, quod
 in termino generali variabilis est in exponente;
 si modo series non sit recurrens spuria. Pertin-
 ent enim series algebraicae quoque ad recurrentes,
 quas tamen non vt recurrentes veras consi-
 dero. Notabilem serierum nostrarum praefatam
 indolem, postquam obseruassem, tentavi modum
 generalem reducendi seriem B ad recurrentem sub
 praedicta lege: nec successus me sefellit, vti mox
 apparebit.

§. 4. Sumantur in serie (A) quorumuis duorum terminorum proximorum differentiae, quae constituent seriem; ex hac secunda serie eodem modo formetur tertia, ex hac quarta donec perueniatur ad differentiam constantem, quae natura est huiusmodi serierum. Sit autem primus terminus in prima serie a , in secunda α , in tertia ξ , in quarta γ et sic porro, donec obtineatur series vltima, cuius singulos terminos inter se aequales vocabo δ , numerum denique harum serierum designabo per l , vel numerum differentiationum per $l-1$. Notetur porro indicem seriei recurrentis, dici $m, n, p, q, \dots r$, quando quiuvis terminus aggregatum est sui praecedentis per m , huiusque praecedentis per n , et eius qui hunc praecedit per p , et qui hunc per q , et sic deinceps, donec terminus multiplicandus per r occurrat. His ita definitis, fiat series recurrens, cuius termini initiales numero l iidem sint qui in serie B, nempe $a, (aa+b), (a^3+2ab+c), \text{etc.}$ et cuius index $m, n, p, q, \dots r$, se habeat vt sequitur.

$$\begin{aligned}
 m &= a + \frac{1}{1} \\
 n &= \alpha - \frac{l-1}{1} a - \frac{l-1}{1} \\
 p &= \xi - \frac{l-2}{1} \alpha + \frac{l-1}{1 \cdot 2} \alpha - \frac{l-2}{1 \cdot 2} a + \frac{l-1}{1 \cdot 2} a - \frac{l-2}{1 \cdot 2} \\
 q &= \gamma - \frac{l-3}{1} \xi + \frac{l-2}{1 \cdot 2} \alpha - \frac{l-1}{1 \cdot 2} a - \frac{l-2}{1 \cdot 2} a - \frac{l-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 &: \\
 &: \\
 r &= \delta - \dots + \gamma + \xi + a + a + 1.
 \end{aligned}$$

Legem aequationum quiuvis facile percipiet: notet autem

autem vbique duo signa vltima non reciprocari, et in postrema aequatione signa superiora valere, cum l est numerus par, at inferiora, cum est impar. Regulam hanc generalem exemplis quibusdam illustrabimus.

Exemplum 1.

§. 5. Sumatur pro (A) series vnitatum, erit $l=1$, $a=1$, reliquae autem litterae α , ϵ , etc. $=0$, fiat series recurrens, vel potius in hoc casu geometrica, incipiens ab 1. cuius index simpliciter sit $=a + \frac{1}{1} = 2$, nempe 1. 2. 4. 8. 16. etc. vbi terminus generalis posito x pro exponente termini est 2^{x-1} et quae conuenit cum serie (B).

Exemplum 2.

Exponat iam series (A) numeros naturales 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. fit $l=2$, $a=1$, $\alpha=1$; $\epsilon=\gamma$ etc. $=0$, sumantur duo primi termini seriei (B) 1 et 3; et ex his constituatur series recurrens, cuius index $=m$, $n=3$, -1 , quae haec est 1. 3. 8. 21. 55. 144. etc. habens pro termino generali $((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^x - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^x) : \sqrt{5}$, quae rursus in praesenti casu cum aequatione (B) plane consentit.

Exemplum 3.

Sit porro loco seriei (A), quae sequitur 2. 2. 5. 11. 20. 32. etc. indicata generaliter per $\frac{3xx-9x+10}{2}$
 Tom. V. K pro

pro qua valet $l=3, a=2, \alpha=0, \beta=3$ euanescentibus reliquis valoribus. Hic igitur incipiendo a tribus primis terminis seriei (B), qui sunt 2, 6 et 21, et ex his formando seriem exponentialem, quae pro indice habeat 5, -7, 6, nempe hanc 2. 6. 21. 75. 264. 921. etc. deprehendimus adhuc, eam nequicquam differre a propofita (B), cuius terminus generalis data radicum extractione facile inuenitur.

Exemplum 4.

Sit denique (A) 10. -25. -10. 31. 74. 95. 70. etc. repraesentata per terminum generalem $-4x^3 + 49xx - 154x + 119$, vbi $l=4, a=10, \alpha=-35, \beta=50, \gamma=-24$, reliquis in nihilum abeuntibus. Exinde fit (B) 10. 75. 490. 2956. 16944. 93800. etc. Si vero ab huius seriei quatuor primis terminis incipiatur atque ex illis series recurrens indicis 14, -71, 154, -120 formetur, haec eadem series (B) oriatur, cuius proin terminus generalis erit $-\frac{1}{3}(2)^{x-2} + 8(3)^{x-1} - \frac{81}{2}(4)^{x-1} + \frac{128}{3}(5)^{x-1}$.

Corollarium I.

§. 6. Si series (A) terminus generalis sit $\frac{x-1 \cdot x-2 \cdot x-3 \cdot \dots \cdot x-n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$, conueniet series (B) cum serie recurrente, cui index est $\frac{n+1}{1}, -\frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}, \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots, +1 + 1$, et cuius termini primi numero $n+1$ sunt 0. 0. 0.

--- 1. sic v. gr. si series (A) fuerit numerorum trigonalium 0. 0. 1. 3. 6. 10. 15. 21. etc., erit series (B) 0. 0. 1. 3. 6. 11. 21. 42. etc., ad quam peruenitur si posito $n=2$, formetur series recurrens ex tribus numeris 0, 0, 1, cuius index fit 3, -3, 2: si fiat $n=3$, dat series (A) tales numeros 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20. 35. etc., altera (B) autem 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20. 36. etc. quae series recurrens est, cuius index est 4, -6, 4, 0. Notetur autem terminum vltimum in indice esse vel 2 vel 0, provti n fuerit numerus vel par vel impar.

Corollarium 2.

§. 7. Dantur etiam series algebraicae (A) tales vt altera (B) vncias exhibeat binomii ad certam dignitatem eleuati omnibus terminis reliquis in infinitum euanescentibus. Ita si (A) est -1. -1. -1. -1. -1. etc. fit (B) -1. 0. 0. 0. 0. etc. si (A) ponatur -1. -2. -3. -4. -5. etc. fit (B) -2. 1. 0. 0. 0. etc. et pariter si (A) -3. -6. -10. -15. -21. -28. etc. oritur (B) -3. 3. -1. 0. 0. 0. 0. etc. Igitur omnes hae series (B) quoque pertinent ad classem recurrentium, sed ita tamen vt termini aliquot postremi in indice sint considerandi, vt aequales nihilo. Hoc modo series dicta numerorum -3. 3. -1. 0. 0. 0. 0. etc. consideranda est vt recurrens, quae habeat secundum regulam nostram generalem §. 4. indicem 1. 0. 0. 0. ponendo scilicet $l=4$, $a=-3$, $\alpha=-3$, $\beta=-1$, $\gamma=0$, quando-

K 2 quidem

quidem ex his positionibus vtraque series (A) et (B) oriatur.

Scholion.

§. 8. Si series (A) fit talis, vt eius termini singuli reales et progressionem algebraicam inter se formantes, sint dato numero nullionum f interpolati, primumque terminum pariter datus numerus nullionum g praecedat, fit series (B) rursus recurrens; si nempe series talis 0.0. --- 0.a.0.0. --- 0.b.0.0. --- 0.c.0.0. --- 0.d.0. etc. formeturque ex hac secundum legem §. 2. alia progressio considerando nulliones, vt terminos seriei non negligendos, habeantque se caeterum a, b, c, d etc. vt et α, β, γ --- δ , nec non numerus l , vt dictum est in §. 4. erit series (B) genita rursus recurrens cuius indicem breuitatis causa non apponam generalem: exemplum tamen rei vnum alterumve apponam. Sit $f=1, g=0$, formentque litterae a, b, c, d etc. seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4. etc. Fit series (A) talis

1. 0. 2. 0. 3. 0. 4. 0. 5. 0. 6. 0. etc. ipsaque (B)

1. 1. 3. 5. 10. 19. 36. 69. 131. 250. 476. etc.

quae recurrens est habens pro indice 1, 2, 0, -7;

Sit porro pro serie (A)

0, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 10, 0, 0, 15, 0, 0, 21. etc.

ex qua generatur series (B)

0, 1, 0, 1, 3, 1, 6, 7, 9, 22, 46, 71. etc. cui ceu recurrenti index est 0, 1, 3, 0, 0, -3, 0, 0, -3, 0, 0, 1.

§. 9. Dictae autem series algebraicae siue continuatae siue interpolatae non solae sunt quae alteram reddunt recurrentem: nam possunt etiam esse recurrentes qualescunque, haeque vt de algebraicis ostensum est, cum continuatae, tum nullionibus interruptae. Sit v. gr. (A) 2.3.5.9.17.33.65.129. etc. cuius seriei terminus generalis est $2^{x-1} + 1^x$ siue $2^{x-1} + 1$, quaeque adeo recurrens est, indice 3, -2 praedita: fit series (B) 2.7.25.90.325.1175.4250.15375. etc. quae itidem recurrens indicem habet 5, -5. Sin autem fuerit (A) 2.0.3.0.5.0.9.0.17.0.33. etc. oritur (B) 2.4.11.28.73.189.491.1274.3308. etc. quae est series exponentialis quarti ordinis, cui index est 2, 3, -3, -2.

§. 10. Tota denique res in hoc consistit theoremate generali, vt si primus seriei (A) terminus intelligatur multiplicatus per x , secundus per x^2 tertius per x^3 et sic in infinitum, sicque habeatur $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ etc. respiciendum sit, an haec vltima series infinita in summam finitam algebraice expressam reduci possit nec ne? si prius indicium est, seriem (B) recurrentem fore; tunc autem summa aequalis statuenda est vnitati, posteaque aequationi concilianda est haec forma $1 = ax + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4 \dots$
 $+ \Phi x^l$, quo facto erit index seriei (B) ceu recurrentis $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \Phi$ pertinens ad ordinem l . Si vero exposita series $ax + bxx + cx^3$

$+dx^4+ex^5+fx^6$ etc. in summam finitam algebraice expressam redigi non possit, erit series (B) transcendens nec formula finita indicari poterit. Et in hoc quidem continetur, quicquid hactenus circa hanc rem monitum fuit.

Iam vero redeo ad id, quod potissimum constitueram; nempe ad modum in prima harum notationum parte expositum inuertendi aequationem sine fine per omnes dimensiones incognitae progredientem, ostensurus nunc aequationes infinitas, cum ad finitas redigi possint, etiamsi non mutatas non aliter tamen resolui hac methodo, quam si prius ad formulam finitam fuissent reducta.

§. 11. Sit igitur aequatio proposita reducta, quod semper fieri potest, ad hanc formam (M)
 $x = ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 +$ etc. Ponantur autem litterae coefficientes $a, b, c, d, e, f,$ etc. progressionem formare, qualis §. 4. posita fuit, reliquasque etiam, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta,$ ut et l valores suos ibidem definitos seruare. Sic igitur fiet, ut omnes termini aequationis in summam finitam, quod notum est, redigi queant. Si vero lex summae in diuersis casibus recte obseruetur, facile erit generaliter illam definire: hoc autem facto aequatio noua ita disponatur, ut ab vna parte sit vnitas et ab altera stent reliqui aequationis termini. Hoc modo aequatio proposita (M) abit in hanc

$$1 \left(\frac{l}{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & 1 \left(\frac{l}{1} x - \frac{l-1}{1.2} xx + \frac{l-1.l-2}{1.2.3} x^3 - \frac{l.l-1.l-2.l-3}{1.2.3.4} x^4 + \dots + x^l \right) \\
 & + a \left(x - \frac{l-1}{1} xx + \frac{l-1.l-2}{1.2} x^3 - \frac{l-1.l-2.l-3}{1.2.3} x^4 + \dots + x^l \right) \\
 \text{(N)} & 1 = + a (\dots xx - \frac{l-2}{1} x^3 + \frac{l-2.l-3}{1.2} x^4 \dots + x^l) \\
 & + \beta (\dots x^3 - \frac{l-3}{1} x^4 \dots + x^l) \\
 & + \gamma (\dots x^4 \dots + x^l) \\
 & : \\
 & : \\
 & + \delta (\dots \dots \dots x^l)
 \end{aligned}$$

Sunt itaque aequationes (M) et (N) aequivalentes; quod si autem prior secundum leges §. 4. partis primae harum notationum, et posterior secundum leges §. 12. dissertationis de seriebus recurrentibus Tom 3. resolatur, modo numeri initiales requisiti non differant, ex vtraque methodo similis oritur series. Consensus iste clarius intelligitur, si valores §. 4. $m = a + \frac{l}{1}, n = a - \frac{l-1}{1} - \frac{l-1}{1.2}$ etc. coincidere cum coefficientibus quantitatum x, xx , etc in vltima aequatione (N) obseruatum fuerit.

§. 12. Ex his modo dictis etiam fluunt, quae paragrapho 8. et 9 monita sunt. Ceterum quod dixi §. 5. part. 1. pro inuenienda radice aequationis infinitae intelligendam esse vnitatem infinitis nullionibus impositam, id non ita stricte sumendum esse, quasi non loco simplicis vnitatis quotcunque numeri arbitrarii adhiberi possent, per se patet. Hinc etiam loco seriei (B) §. 2.

po-

potuiffet alia magis composita formari ex eadem ferie (A) fcilicet intelligendo praeter vnitatem numeros $p, q, r, \dots s$ quoscunque, ex quibus series eadem lege conftruatur, qua ferie (B)

§. 2. simul autem intelligendo numeros $s, \dots r, q, p, 1$ tanquam primos feriei terminos. Id vero fi ita effectum fuerit, dico rurfus feriem (B) recurrentem fore, fi ferie (A) fit vel algebraica vel exponentialis eaeque fiue purae fiue nullionibus interpolatae, et indicem feriei (B) non alium fore; attamen hoc refpectu terminos $s, \dots r, q, p, 1$ non censendos pertinere ad feriem (B) Quod vt exemplo magis explicemus, fingemus aequationem refoluendam effe talem

$1 = x + 3ax + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 +$
etc. Conftruatur ferie non incipiendo vt ante a fimplici vnitare, fed a numeris quotcunque arbitrariis, v. gr. ab 3. 2. 1. fic vt fit 3. 2. 1. 25. 70. 216. 679 2183. etc. quam dico rurfus recurrentem effe, fi modo tres primi termini 3. 2. 1. affumti a ferie excludantur: neque differre indicem ab eo, qui vi regulae §. 4. reperitur nempe effe in hoc cafu 4, -3, 1. Poffunt itaque innumeris modis aequationes infinitae refolui, qui omnes indicant modum quo iftae aequationes ad finitas reduci debeant, quoties id fieri poteft. Solet autem methodus §. 5. part. 1. inter omnes effe maxime breuis.

§. 13. Et haec funt quae de ferierum nostrarum vfu in refoluendis aequationibus infinitis

monenda habui. Finiam igitur hasce notationes postquam obiter quasdam notauero alias proprietates serierum (B) §. 2. definitarum. Patet quidem cum summa omnium terminorum seriei (A) finita est et cognita, summam quoque quotcunque terminorum in altera (B) hinc innotescere concessa radicum extractione, quia fit exponentialis, id est, ex pluribus geometricis conflata. Singulare autem hac in re compendium est, quando summa omnium terminorum (B) desideratur, neque enim haec amplius a radicum extractione vlllo modo pendet sed constanter eadem est, manente summa prioris. Omnem rem quiuis perspiciet postquam notarit, seriem (B) conflata esse ex $(a+b+c+d+e+f- - - -)^1$, $(a+b+c+d+e+f- - - -)^2$, $(a+b+c+d+e+f- - - -)^3$ - - - -, id est ex omnibus dignitatibus rationalibus summae primae seriei (A). Igitur si haec summa fuerit $=S$, erit summa alterius (B) $=S+SS+S^3+ \text{etc.} = \frac{S}{1-S}$.

§. 14. Idem certo modo valet pro seriebus magis compositis, quarum mentionem feci in paragrapho duodecimo, quando nempe series (B) non ex sola vnitate sed ex pluribus quantitatibus arbitrariis formatur. Ita ex. gr. quum ex serie (A) *a. b. c. d. e. f* construitur series (B) incipiens a duobus terminis arbitrariis *m*, et *n*, scilicet *m. n. na + mb. naa + mab + nb + mc. etc.* erit huius

Tom. V.

L

summa

summa sub prioribus conditionibus = $\frac{m+n-ma}{1-s}$, vel (si termini m et n non ad seriem pertineant) = $\frac{ms+ns-ma}{1-s}$. Id vero apparet ex eo, quod huiusmodi series compositae semper resolui possint in plures series simplices multiplicatas per litteram aliquam constantem. Atque hoc modo reperitur summa seriei (B) conueniens quotcunque terminis arbitrariis $m. . . . n. p. q. r.$ initialibus = $m. . . . + n + p + q + r + \frac{(m. . . . + n + p + q + r)s}{1-s} - \frac{(m. . . . + n + p + q)a}{1-s} - \frac{(m. . . . + n + p)b}{1-s} - \frac{(m. . . . + n)c}{1-s} - \frac{(m)\Phi}{1-s}$, vbi per Φ intelligitur terminus seriei (A) cuius exponens est numerus terminorum arbitrariorum vnitate diminutus: potest autem haec summa compendiosiori formula exprimi, nempe esse illam aequalem

$$\frac{m. . . . + n + p + q + r - qa - p(a+b) - n(a+b+c) - m(a+b+c) - \Phi}{1-s}$$

SOLVTIO PROBLEMATIS CATOPTRICO GEOMETRICI

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. I.

Tabula II
et IV.

Proposuit, sub finem anni proxime elapsi, *Clariff. Leutmannus* Problema aliquod Geometricum, cuius applicationem ad vsus Catoptri-

optricos, non exigui momenti futuram esse aiebat. Solutionem eius ex Algebrae fontibus deriuaturus statim vidi, eam ita comparatam esse, vt ad aequationes taedio plenas deducat, quaecunque fere optio incognitarum instituat. Naturam vero huius problematis vltius circumspiciens deprehendi, id ex eorum numero esse, quae feliciter *per Geometriam Linearem, absque calculo procedentem*, soluantur, *quam per calculum Analyticum*; id quod *Cel. Hermannus* nuperrime in *Tomo IV. horum Commentariorum pag. 47.* exemplo singulari ostendit, et pluribus adhuc confirmari posset.

§. 2. Problema autem *Clar. Leutmanni* hoc est: Sit angulus rectus ADC, huic angulo imponatur speculum sphaericum ABC ita, vt $DA=DC$. Deinde bisecetur arcus AC in B, ex B ducantur BE ipsi DC, et BF ipsi DA, parallelae. Quae-runtur iam in rectis indefinitis BE, BF, duo puncta E et F talia, vt ex eorum utroque radii incidentes in C et A, in alterum punctorum quae-sitorum reflectantur.

Tabula III.
Fig. 1.

§. 3. Positis ergo, quae in §. 2. assumpta sunt, et ducta recta DG per puncta D et B data, transibit haec DG per centrum speculi AC, et angulum rectum ADC bisecabit. Nam ductis chordis AB et BC erit in triangulis ABD, CBD, $AD=CD$, *per hyp.* $AB=BC$, *ob bisectum arcum spe-*

Fig. 2.

*culi in B, et DB vtrique communis; ergo trian-
gula ipsa aequalia erunt, et angulus $ADB =$ an-
gulo CDB , consequenter vterque semirectus. Du-
cta igitur adhuc chorda AC , quae secet rectam
 DG in H , erit in triangulis ADH et CDH , rur-
sus $AD = DC$, $ADH = CDH$ *per modo dem.* et DH
communis vtrique; ergo rursus triangula haec ipsa
aequalia, consequenter $AH = HC$, et $AHD = CHD$,
hoc est, vterque rectus; quare recta DG chordam
 AC bifecat ad angulos rectos in H , atque idcirco
per centrum arcus ABC , hoc est, per centrum
speculi, transibit.*

Fig. 3.

§. 4. Iam vero quaesita puncta Problematis
facillime sic obtineri dico: *Per data tria puncta*
 A, C , et G , *describatur circulus, secabit is lineas*
indefinitas BE, BF , in punctis desideratis E et F .

§. 5. Quod ut euincatur, demonstrandum pri-
mo est, ducti circuli GAC centrum esse in recta
 DBG , iungente punctum bisectionis speculi B , et
verticem anguli recti D . Nam ponatur centrum
speculi, quod (§. 3.) est in recta DG , esse G ,
erit ob $GA = GC$, arcus $AFG =$ arcui CEG ;
porro ob bisectum in B speculum, erit angulus
 $AGB =$ angulo CGB ; hinc, quia circulus per tria
puncta G, A, C , transit, erit etiam arcus $AH =$
arcui CH . Ergo ob $AFG = CEG$. *per modo dem.*
erit etiam $HFG = HEG$, atque idcirco vterque ho-
rum arcuum semicirculus, hoc est, DBG transit
per centrum circuli $HFGHEH$.

§. 6.

Fig. 4.

§. 6. Ducantur nunc ex inuentis punctis E et F rectae EC, EA, FA, FC, dico, fore vt, si EC et EA considerentur vt radii incidentes, eorum reflexi sint CF et AF; et vice versa, si FA et FC considerentur vt incidentes, esse eorum reflexos AE et CE. Nam productis EB et FB vsque dum occurrant circulo GFHE in N et M, et ductis chordis NM et FE, quae secent diametrum in H et O, erunt anguli MNE et MFE aequales, quia eidem arcui MCE insistant. Ob eandem rationem aequales etiam sunt anguli NMF et NEF, qui eidem arcui NAF insistant. Sunt vero etiam anguli circa B aequales, quia sunt verticales; ergo triangulum HNB simile est triangulo BFO; et triangulum HMB simile est triangulo BEO, hinc erit analogia $BN:NH=BF:FO$; sed ob angulum FBE bisectum per rectam BG, erit $BF:FO=BE:OE$, ergo habebitur $BN:NH=BE:OE$, vnde triangulum BNH simile erit etiam triangulo BEO; quare porro triangula BFO et BEO similia erunt, et, ob latus BO commune, etiam aequalia; hinc $BF=BE$. Ex quo patet, puncta quaesita F et E, aequaliter a puncto medio speculi B esse remota. Ductis iam porro chordis FG, GE, erunt in triangulis BFG, BEG, $BF=BE$, per dem. angulus FBG = angulo EBG, per dem. § 3. et BG communis utrique, quare haec triangula aequalia erunt, idcirco $FG=GE$, aut arcus $FG=$ arcui GE. Si iam ducantur rectae GC et GA, erunt hi radii speculi AC, et propterea normales punctorum

C et A. Sed anguli ECG, FCG; EAG, GAF, insunt arcibus aequalibus FG et GE, quare ipsi hi anguli erunt inter se aequales ex vtraque parte perpendicularium in speculum GC et GA; atque idcirco si EC et EA considerentur vt radii incidentes, erunt, per reflexionis legem, eorum reflexi CF et AF; et vice versa, si FA et FC considerentur vt incidentes, erunt eorum reflexi AE et CE. *Quod erat inueniendum et demonstrandum.*

Fig. 5.

§. 7. Quamuis vero *Clariff. Leutmannus* Problema hoc ad eum tantum casum restrinxerit, quo angulus datus ADC rectus est: extenditur tamen eadem solutio ad omnes casus, in quibus angulus datus ADC est obliquus vel obtusus quicumque; vti facile inuenietur, si quis ratiocinium hucusque adhibitum in angulo obliquo vel obtuso qualicumque ADC repetere velit.

Fig. 6.

§. 8. Imo vero, si loco speculi sphaerici adhibeatur aliud ABC iuxta curuam quamcunque, ita tamen, elaboratum, vt circa punctum medium eius B, rami BA, BC, vtrinque similes sint, et aequales, atque id angulo cuicumque ADC ita fit impositum, vt rursus $DA = DC$: eadem semper, quae antea, constructio locum obtinebit. Nam coniungantur puncta D et B per DG, bifecabit haec recta angulum ADC, et erit simul axis speculi ABC. Ductis enim chordis BA, BC, et

et AC, quae fecet rectam DG in P, erit $AD=CD$ per hyp. $AB=CB$, quia rami BA et BC sunt similis et aequales, et BD communis; quare DG bifecabit angulum ADC. Iam vero in triangulis ADP, CDP, anguli apud D aequales, et praeterea $AD=CD$, et DP communis; hinc dicta triangu-
 gula aequalia et similia; anguli ad P vtrunque aequales, hoc est, vterque rectus, et $AP=PC$, unde fit vt ordinatim applicata AC in P bifariam fecetur sub angulo recto, et consequenter ipsa DBG fit axis huius curuae ABC.

§. 9. Ductis itaque, pro natura curuae ABC data, normalibus AG, CG, ex punctis A et C, fecabunt illae axem BG in vno eodemque puncto G, quod facile ex arcibus curuae BA, BC, similibus et aequalibus, per hyp. intelligitur. In-
 uento sic puncto G, describatur circulus, qui per data tria puncta A, G, C, transeat, fecetque rectas BF, BE, in punctis F et E, erunt haec F et E iterum ipsa illa puncta quaesita.

§. 10. Quod, vt confirmem, demonstrandum primo rursus est, centrum circuli AGC in axem DBG incidere debere. Nam ob puncta curuae A et C homologa, et arcus BA, BC, aequales et similes, erunt normales AG, CG, aequales, unde et arcus circulares AFG et CEG aequales quoque erunt. Est autem in triangulis DAG, DCG, $DA=DC$, $AG=GC$, et DG communis, quare angulus

lus $AGH =$ angulo CGH , et arcus circularis $AH =$ arcui circulari HC , vnde arcus $HAG =$ arcui HCG , hoc est, erit vterque semicirculus, et hinc HG diameter, quae consequenter per centrum circuli AGC transit. Hinc pari ratiocinio, quo ante (§. 6.) euincitur, arcus FG et GE esse aequales. Ductis igitur rectis EC , EA , FA , FC , insistent anguli ECG , FCG , GAE , FAG , arcubus circularibus aequalibus GF et GE , proinde erunt omnes aequales. Sunt vero GC et GA ad puncta C et A normales, per construct. quare anguli ECG , GCF , erunt aequales, circa perpendicularem GC , hoc est, si radius EC consideretur vt incidens, erit ipsius reflexus CF ; quod pariter etiam de EA , FA , lineis verum esse patet.

Tabula IV,
Fig. I.

§. II. Cum autem rarius accidere soleat, vt specula alia in vsus Catoptricos vocari soleant, quam sphaerica, applicabo iam solutionem antea (§. 4.) inuentam ad casum eum, qui frequentissime occurrere potest; nempe ad eum, cuius solutionem *Clariff. Leutmannus* requisit. Sit in hunc finem angulus rectus ADC , speculum sphaericum impositum ABC , ita vt sit $DA = DC$, rectae lateribus anguli parallelae sint BF , BE ; pro inueniendo puncto E ducatur radius CG , deinde ex puncto C recta alia CH , quae faciat angulum GCH aequalem dato HGC , et secet rectam BG in H , denique radio HC , centro H , describatur arcus CE , secans

cans rectam BE in E, puncto desiderato; alterum punctum F inuenietur sumendo $BF = BE$. Nam per hanc constructionem obtinetur centrum circuli, qui per G, C, A, puncta, transire debet, in recta DG, prout esse debet, *iuxta* §. 5. et ob $HG = HC = HA$, transibit circulus ex H descriptus per indicata tria puncta.

§. 12. Ad praxin inuandam, si fortasse aliqua ex his speranda sit, indicabo sequentem methodum, cuius ope pro quouis radio speculi, et arcu ABC inquiri potest in distantiam puncti E aut F, a medio speculi puncto B. Cum enim in G supponatur esse centrum speculi sphaerici, datis radio speculi, et dimidio eius arcu BC, dabuntur in triangulo aequicuruo GHC, anguli aequales HGC, et GCH, nec non latus CG; unde ex his inuenietur latus HG, quod subtractum a radio speculi GB relinquet latus HB. In triangulo igitur HBE dabuntur HB, HE, latera, cum angulo constante $HBE = \frac{1}{2} ADC = \text{semirecto}$, in hoc casu; ex quibus inuenietur desiderata distantia BE aut BF. Computaui hac methodo sequentem laterculum, in quo radius speculi sphaerici BG ponitur esse partium 10000.

| ABC
Arcus. | BE | ABC
Arcus | BE |
|-----------------|-------|------------------|-------|
| 2. ^o | 7072 | 18. ^o | 7157. |
| 4. | 7075. | 20 | 7177. |
| 6. | 7080. | 22 | 7198. |
| 8. | 7088. | 24. | 7222. |
| 10. | 7098. | 26. | 7248. |
| 12. | 7109. | 28. | 7275. |
| 14. | 7123. | 30. | 7304. |
| 16. | 7139. | | |

Fig. 2.

§. 13. Ille casus, quo speculi sectio integrum quadrantem complet, simplicissimus est. Sit enim tale speculum ABC, eius medium B, angulus re-ctus, cui impositus est, ADC, ita vt sit $DA = DC$, centrum speculi in G; describatur ergo per tria puncta G, A, C, circulus GAC, secabit is re-ctas indefinitas BE, BF, in punctis quaesitis E et F. Iam vero ob parallelas AG et KE, erunt ar-cus AK et GE aequales; ductis vero radiis inci-dentibus et reflexis EC, CF; EA, AF; formabun-tur duo triangula EMC, et ELA, similia; sunt enim ad M et L re-cti anguli, et praeterea ECG, AEK, insunt modo dictis aequalibus arcibus, ergo ipsi anguli aequales. Hinc positis cognitis $GC = GA = 1$, $MC = a$, et incognita $ME = x$, erit $MG = LA = 1 - a$, quare ob dictam triangulorum simili-tudinem orietur statim analogia haec: $MC(a) : ME(x) = EL(1+x) : LA(1-a)$ quare $x^2 + x = a - a^2$, et hinc $ME = \pm \sqrt{a - a^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$.

DE SUMMATIONE INNUMERABILIVM PROGRESSIONVM.

Auct. L. Eulero.

I.

QVae in praecedente differtatione de progressionibus transcendentibus earumque terminis generalibus tradidi, multo latius patent, quam videri possent; et inter alia quam plurima, ad quae accommodari possunt, eximius earum potest esse vsus in inueniendis summis innumerabilium progressionum. Quemadmodum enim in superiore differtatione innumerae progressionis ad terminos generales sunt reuocatae, quae communem algebram transcendunt; ita hic eandem methodum accommodabo ad terminos summatorios inueniendos progressionum, ad quas indefinite summandas communis algebra non sufficit.

§. 2. Progressio quaequam summari dicitur indefinite, si detur formula numerum indefinitum n continens, quae exponat summam tot terminorum illius progressionis, quot n comprehendit unitates, ita vt si ponatur v. gr. $n = 10$ ea formula exhibeat summam decem terminorum a primo numeratorum. Formula haec vocatur terminus summatorius illius progressionis, atque est simul

terminus generalis progressionis, cuius terminus quicumque aequatur summae tot terminorum illius progressionis, quot eius exponens in se continet unitates.

§. 3. Cum progressionibus quaeque exponantur terminis generalibus, quaestio de summandis progressionibus est haec, ut ex termino generali terminus summatorius inueniatur. Et quidem iam eo est peruentum, ut, quoties terminus generalis est functio rationalis ipsius indicis n exponentes sunt numeri integri affirmatiui, semper terminus summatorius inueniri queat. Quando autem exponentes ipsius n sunt negatiui, nisi excipiantur pauci casus, nemo adhuc terminos summatorios dedit. Ratio huius difficultatis est, quod tum termini summatorii plerumque algebraice exprimi nequeant, sed tales requirant formas, quae quadraturas in se contineant.

§. 4. Assumatur haec forma $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$, tamquam terminus generalis cuiusdam progressionis, quae scilicet integrata, ita ut fiat $= 0$ si $x=0$ positoque $x=1$ daret terminum ordine n . Progressio quae hoc modo ex ea formatur erit haec $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, etc. cuius ergo terminus generalis est formula assumpta $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$
Series

Series vero haec inuenta summatoria est progressionis harmonicae $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc. cuius terminus generalis est $\frac{1}{n}$. Quamobrem huius progressionis terminus summatorius erit $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$, qui illius est terminus generalis.

§. 5. Cum terminus generalis progressionis $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, etc. sit $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$. Poterit ex hoc ea progressio interpolari, seu quilibet terminus medius inueniri: vt si requiratur terminus, cuius index est $\frac{1}{2}$, oportebit integrari $\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$ vel $\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, cuius integrale est $2\sqrt{x} - 2l(1+\sqrt{x})$ quod cum fiat $= 0$ si $x=0$, ponatur $x=1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2} = 2 - 2l2$. Deinde, quia generaliter terminus ordine $n+1$, terminum ordine n superat fractione $\frac{1}{n+1}$, erit terminus ordine $1\frac{1}{2} = 2\frac{2}{3} - 2\sqrt{2}$, et terminus ordine $2\frac{1}{2}$ hic $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2l2$, etc. Series igitur interpolata erit

$$2 - 2l2, 1, 2 + \frac{2}{3} - 2l2, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2l2, \text{etc.}$$

§. 6. Ad hunc modum rem generalius complexus sum, et assumsi formulam $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$, ubi P denotat functionem quamcunque ipsius x. Integrale hoc vt semper ita debet accipi vt posito $x=0$; id totum fiat $= 0$. Deinde hoc facto

non vt ante pono $x=1$, sed vt latius pateat pono $x=k$. Forma hoc modo resultans erit terminus ordine n progressionis cuiusdam, cuius terminus generalis est forma assumpta $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$. Progressio vero ipsa haec erit $k, k+\int P dx, k+\int P dx + \int P^2 dx$, etc. vbi in integralibus $\int P dx, \int P^2 dx$, etc. loco x iam positum esse k pono.

§. 7. Progressio inuenta, si quivis terminus a sequente subtrahatur, praebebit hanc $k, \int P dx, \int P^2 dx, \int P^3 dx$ etc. Huiusque terminus summatorius aequalis est termino generali praecedentis progressionis, cuius terminus generalis est $\int P^{n-1} dx$, haec formula $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$. Sit $P=x^\alpha: a^\alpha$ erit progressionis huius $k, \frac{k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)a^\alpha}, \frac{k^{2\alpha+1}}{(3\alpha+1)a^{2\alpha}}$ etc. terminus generalis $\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}}$ atque terminus summatorius hic $\int \frac{a^{n\alpha}-x^{n\alpha}}{(a^\alpha-x^\alpha)a^{n\alpha-a}} dx$.

§. 8. Inventus ergo est terminus summatorius pro omnibus progressionibus quorum termini sunt fractiones, harumque numeratores progressionem geometricam, denominatores vero arithmeticam constituunt. Vt vero facilius ad omnes casus accommodari possit, sumatur haec progressio,

INNMERABILIVM PROGRESSIONVM. 95

fit, $\frac{b}{c}, \frac{b^{i+1}}{c+i}, \frac{b^{2i+1}}{c+2e}, \frac{b^{3i+1}}{c+3e}$, cuius terminus generalis est $\frac{b^{(n-1)i+1}}{c+(n-1)e}$, comparat ut hic cum illo

$$\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}} \text{ vel } \frac{ck^{(n-1)\alpha+1}}{(c+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}} \text{ erit } \alpha = \frac{e}{c} \text{ et } \frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{a^{\frac{(n-1)e}{c}}} = b^{(n-1)i+1} \text{ atque } a =$$

$$\left(\frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{b^{(n-1)i+1}}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} = \left(\frac{ck}{b}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} \frac{k}{b^{ci:e}}. \text{ Hic ne}$$

a pendeat ab n , debet enim a esse constans quantitas, oportet ut $\frac{ck}{b}$ sit $= 1$, erit ergo $k = \frac{b}{c}$, at-

que $a = \frac{b^{\frac{e-ci}{c}}}{c}$. Quocirca terminus summatorius est

$$\int \frac{b^{\frac{ne-ni}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e-ci)}{c}} (b^{\frac{e-ci}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}})} dx. \text{ Quae ita debet in-$$

tegrari ut fiat $= 0$ si $x = 0$, tum vero ponere oportet $x = \frac{b}{c}$.

§. 9. Cognita summa progressionis indefinita habebitur summa progressionis in infinitum, si ponatur $n = \infty$. Terminus quidem summatorius inuentus non magis ad hunc casum quam ad aliumquemque accommodatus videtur. Est mihi vero alia methodus summas serierum infinitarum inuestigandi, quae latissime patet. Sit series $\frac{b}{c} + \frac{b^{i+1}}{c+i} +$

$$b^{2i+1}$$

$\frac{b^{2i+1}}{c+2e}$ etc. Ponatur numerus terminorum n , et summa eorum A . Augeatur numerus n unitate, augetur summa A termino ordine $n+1$, qui est $\frac{b^{n+1}}{c+ne}$. Si nunc n et A tanquam quantitates fluentes considerentur, quia n est quasi infinites major quam 1, erunt earum differentialia dn et dA inter se ut augmenta 1 et $\frac{b^{n+1}}{c+ne}$. Vnde prodit aequatio $dA = \frac{b^{n+1} dn}{c+ne}$. Quae integrata dabit aequationem inter summam A et numerum terminorum n .

§. 10. Ponatur $l(c+ne) = z$, erit $\frac{edn}{c+ne} = dz$ atque $e+ne = g^z$ denotante g numerum, cuius logarithmus est 1. Est ergo $n = \frac{g^z - c}{e}$ et b^{n+1}

$$= b^{\frac{g^z - c}{e} + 1} = b^{\frac{e - ci}{e}} b^{\frac{g^z}{e}}, \text{ consequenter } dA =$$

$$\frac{b^{\frac{e-ci}{e}} b^{\frac{g^z}{e}} dz}{e}. \text{ Haec quidem aequatio ita genera-}$$

liter instituta integrationem nisi per series non admittit. Si vero ponatur $i=0$, ut prodeat seriei $\frac{b}{c} + \frac{b}{c+e} + \frac{b}{c+2e} +$ etc., habebitur aequatio $dA = \frac{b}{e} dz$ et $A = \frac{b}{e} (z + lC) = \frac{b}{e} lC(c+ne)$. Constantis quidem C non determinatur, sed tamen aequa-

aequatio ad definiendam differentiam inter duas summas inferuit: vt fit alius numerus terminorum m , et summa B erit $B = \frac{b}{e} lC(c+me)$. Ergo $A - B = \frac{b}{e} l \frac{c+me}{c+ne} = \frac{b}{e} l \frac{m}{n}$, quia m et n sunt infinita.

§. 11. Maneat $i=0$, et progressio erit haec $\frac{b}{c}, \frac{b}{c+e}, \frac{b}{c+2e}, \frac{b}{c+3e}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{b}{c+(n-1)e}$. Terminus autem summatorius est

$$\int \frac{b \frac{ne}{c} - c \frac{ne}{c} x \frac{ne}{c}}{b \frac{(n-1)e}{c} (b \frac{e}{c} - c \frac{e}{c} x \frac{e}{c})} dx. \text{ Sumatur alia progressio}$$

$\frac{b}{c}, \frac{b}{c+2f}, \frac{b}{c+2f}, \frac{b}{c+3f}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{b}{c+(n-1)f}$ et summatorius $\int \frac{b \frac{nf}{c} - c \frac{nf}{c} x \frac{nf}{c}}{b \frac{(n-1)f}{c} (b \frac{f}{c} - c \frac{f}{c} x \frac{f}{c})}$

dx ; in quo integrato itidem ponere oportet $x = \frac{b}{c}$. Addantur hae duae progressionis, scilicet terminus primus primo, secundus secundo, et ita porro prodibit haec progressio $\frac{2b}{c}, \frac{2bc+b(e+f)}{(c+e)(c+f)}, \frac{2bc+2b(e+f)}{(c+2e)(c+2f)}$ etc., cuius terminus generalis est

$$\frac{2bc+(n-1)b(e+f)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}. \text{ Terminus vero summatorius erit } = \int dx \left(\frac{b \frac{ne}{c} - c \frac{ne}{c} x \frac{ne}{c}}{b \frac{(n-1)e}{c} (b \frac{e}{c} - c \frac{e}{c} x \frac{e}{c})} + \frac{b \frac{nf}{c} - c \frac{nf}{c} x \frac{nf}{c}}{b \frac{(n-1)f}{c} (b \frac{f}{c} - c \frac{f}{c} x \frac{f}{c})} \right)$$

§. 12. Simili modo, sed vniuersalius, pro termino generali in cuius denominatore n duas tenet dimensiones, inuenitur terminus summatorius, si illius progressionis p cuplum ad huius q cuplum addatur. Obtinebitur hoc modo progres-

fio, cuius terminus generalis est $\frac{pb}{c+(n-1)e} + \frac{qb}{c+(n-1)f}$
 $= \frac{(p+q)bc+(n-1)b(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Terminus autem summa-
 torius huic termino generali respondens erit

$$\int \frac{p dx}{b^{\frac{(n-1)e}{c}}} \left(\frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}} \right) + \int \frac{q dx}{b^{\frac{(n-1)f}{c}}} \left(\frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}} \right)$$

$$= \int dx \left(\frac{pb^{\frac{n(e+f)}{c}} - pb^{\frac{n(e+f)-f}{c}} c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}} - pb^{\frac{nf}{c}} c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}} +}{b^{(n-1)(e+f)}} \right.$$

$$\left. \frac{pb^{\frac{(n-1)f}{c}} c^{\frac{ne+f}{c}} x^{\frac{ne+f}{c}} + qb^{\frac{n(e+f)}{c}} - qb^{\frac{n(e+f)-e}{c}} c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}} -}{(b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}})} \right.$$

$$\left. - \frac{qb^{\frac{ne}{c}} c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}} + qb^{\frac{(n-1)e}{c}} c^{\frac{nf+e}{c}} x^{\frac{nf+e}{c}}}{(b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}})} \right). \text{ Ponatur } b=1$$

hoc enim modo vniuersalitati nihil decedit, erit-
 que terminus generalis $\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Sit cx

$=y$, erit $dx = \frac{dy}{c}$. Atque terminus summatorius ha-
 betur $= \int \frac{dy}{c} \left(\frac{p+q-py^{\frac{f}{c}}-qy^{\frac{e}{c}}-py^{\frac{ne}{c}}-qy^{\frac{nf}{c}}+qy^{\frac{ne+f}{c}}+qy^{\frac{nf+e}{c}}}{(1-y^{\frac{e}{c}})(1-y^{\frac{f}{c}})} \right)$

in qua formula integrata, ita vt posito $y=0$ ea
 quoque fiat $=0$, oportet ponere $y=1$.

§. 13. Assumatur iam terminus generalis hic

$\frac{\alpha+\beta n}{\gamma+\delta n+\epsilon n n}$. Qui comparatus cum $\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$
 dabit $c = \sqrt{(\gamma+\delta+\epsilon)}$, $e = \frac{\delta+2\epsilon+\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\epsilon)}}$, $f = \frac{\delta+2\epsilon-\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\epsilon)}}$
 $p = \frac{\alpha\delta-\beta\delta+2\alpha\epsilon-2\beta\gamma+(\alpha+\beta)\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\epsilon)}(\delta\delta-4\gamma\epsilon)}$ atque
 $q = \frac{\beta\delta-\alpha\delta+2\beta\gamma-2\alpha\epsilon+(\alpha+\beta)\sqrt{(\delta\delta-4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma+\delta+\epsilon)}(\delta\delta-4\gamma\epsilon)}$. His in termino sum-
 matorio substitutis, prodibit terminus summatorius
 huius

huius progressionis $\frac{\alpha+\epsilon}{\gamma+\delta+\epsilon}$, $\frac{\alpha+2\epsilon}{\gamma+2\delta+4\epsilon}$, $\frac{\alpha+3\epsilon}{\gamma+3\delta+9\epsilon}$,
 etc. cuius terminus generalis est $\frac{\alpha+\epsilon n}{\gamma+\delta n+\epsilon n^2}$.

§. 13. Eodem modo si in termino generali n plures duabus dimensiones habuerit, eruetur terminus summatorius, combinandis tot progressionibus simplicibus, quot dimensiones n habere debet, quemadmodum idem in casu duarum dimensionum factum est. Attamen hac ratione non ad quasvis, quae in huiusmodi terminis generalibus contineri videntur, series perueniri potest. Nam quoties denominator $\gamma+\delta n+\epsilon n^2+\zeta n^3+\eta n^4$ etc. duos pluresue habet factores simplices aequales, tum progressio in tot simplices progressionibus resolui nequit, neque igitur eius terminus summatorius inueniri.

§. 14. Hanc ob rem aliam tradam methodum, quae hos casus non excludat. Sit progressio quaedam simplex $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{1}{a+(n-1)b}$. Huius terminus

summatorius erit $\int \frac{1-a\frac{nb}{a}x\frac{nb}{a}}{1-a\frac{b}{a}x\frac{b}{a}} dx$, vel ponatur ax

$=y$, erit is $\int \frac{1-y\frac{nb}{a}}{1-y\frac{b}{a}} \cdot \frac{dy}{a}$, in quo integrato poni

oportet $y=1$. Multiplicetur hic in $y^\alpha dy$ et sum-

ma huius facti $\int y^\alpha dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y\frac{nb}{a}}{1-y\frac{b}{a}} \right)$ erit secundum

modum descriptum tractata terminus summatorius huius progressionis $\frac{a}{a\epsilon a}$, $\frac{a}{(a+b)(\epsilon a+b)}$, $\frac{a}{(a+2b)(\epsilon a+2b)}$ etc.posito breuitatis ergo ϵ loco $a+2$. Huius progressionis terminus generalis est $\frac{a}{(a+(n-1)b)(\epsilon a+(n-1)b)}$ vel $\frac{a}{b^2 n^2 + (ab + \epsilon ab - 2bb)n + (a-b)(\epsilon a - b)}$.

§. 15. Assumamus progressionem generalem huius generis, quae facilius ad casus quosuis adaptatur, sit eius terminus generalis

$\frac{1}{a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{2}c}$. Hic cum illo termino generali comparatus dabit $a = \frac{(2b-c)^2 - 4ac + (2b-c)\sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}{4}$
 $b = \frac{2b-c + \sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}{4}$, $\epsilon = \frac{2b-c - \sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}{2b-c + \sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}$. Hi valores si substituantur loco a, b , et α , (est vero $\alpha = \epsilon - 2$) in $\int y^\alpha dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ prodibit terminus summatorius progressionis propositae, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b+c}$, $\frac{1}{a+3b+3c}$ etc.

§. 16. Hoc modo ulterius progredi licet; multiplicetur $\int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ in $y^{\alpha-2} dy$, et facti integrale $\int y^{\alpha-2} dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ denuo in $y^{\epsilon-\alpha-1}$ huiusque producti integrale $\int y^{\epsilon-\alpha-1} dy \int y^{\alpha-2} dy \int \frac{dy}{a}$
 $(1-y$

$\left(\frac{1-y\frac{nb}{a}}{1-y\frac{b}{a}}\right)$, erit terminus summatorius progressio-
 nis huius $\frac{a^2}{a \cdot \alpha a \cdot \xi a}$, $\frac{a^2}{(a+b)(\alpha a+b)(\xi a+b)}$, $\frac{a^2}{(a+2b)(\alpha a+2b)(\xi a+2b)}$
 etc. cuius terminus generalis est $a^2 : (a+(n-1)b)$
 $(\alpha a+(n-1)b)(\xi a+(n-1)b)$ similiter $\int y^{\gamma-\xi-1} dy \int y^{\xi-\alpha-1}$
 $dy \int y^{\alpha-2} dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y\frac{nb}{a}}{1-y\frac{b}{a}}\right)$ est terminus summatorius
 progressionis, cuius terminus generalis est
 $\frac{a^3}{(a+(n-1)b)(\alpha a+(n-1)b)(\xi a+(n-1)b)(\gamma a+(n-1)b)}$. Hoc igitur
 modo ad omnes progressionem pervenitur, quarum termini sunt fractiones, numeratoribus exi-
 stentibus numeris constantibus, denominatoribus autem constituentibus quamcunque progressionem
 algebraicam.

§. 17. Si summae huiusmodi progressionum
 in infinitum continuatarum desiderentur, oportet
 ponere $n =$ infinito. Hoc posito postremum cuiusque
 termini summatorii membrum scilicet $\int \frac{dy}{a}$
 $\left(\frac{1-y\frac{nb}{a}}{1-y\frac{b}{a}}\right)$ transmutabitur in hoc $\int \frac{dy}{a(1-y\frac{b}{a})}$. Quia
 enim y semper est minus quam 1, praeter ca-
 sum ultimum, quo fit $y = 1$, evanescet $y\frac{nb}{a}$ prae
 1. atque ideo $1-y\frac{nb}{a}$ abibit in 1. Propterea hu-
 ius seriei $\frac{a}{a \cdot \alpha a} + \frac{a}{(a+b)(\alpha a+b)} + \frac{a}{(a+2b)(\alpha a+2b)} +$ etc.
 in infinitum summa erit $\int y^{\alpha-2} dy \int \frac{dy}{a(1-y\frac{b}{a})}$, et

huius $\frac{a^2}{a \cdot a \cdot 6a} + \frac{a^2}{(a+b)(aa+c)(6a+c)} + \frac{a^2}{(a+2b)(aa+2b)(6a+2b)}$
 + etc., summa erit $\int y^{6-\alpha-1} y \int y^{\alpha-2} dy \int \frac{dy}{a(1-y\frac{b}{a})}$
 et ita de reliquis omnibus.

§. 18. Sit $b=a$, ut fiat $\frac{b}{a}=1$, erit $\int \frac{dy}{a(1-y)}$
 $= A - \frac{1}{a} l(1-y)$. Quia posito $y=0$ totum integrale
 fieri debet $=0$, erit $A=0$, adeoque $\int \frac{dy}{a(1-y)} =$
 $-\frac{1}{a} l(1-y)$. Multiplicetur hoc in $y^{\alpha-2} dy$ habebit-
 tur $-\frac{y^{\alpha-2} dy}{a} l(1-y)$. Huius integrale ut inuenia-
 tur ponatur $1-y=z$, erit $y=1-z$, habebitur igi-
 tur integrandum $\frac{(1-z)^{\alpha-2} dz}{a} l z = (1 - \frac{(\alpha-2)}{1} z +$
 $\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1 \cdot 2} z^2 - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}) \frac{dz}{a} l z$. Quia
 vero $z^\eta dz l z = C - \frac{z^{\eta+1}}{(\eta+1)^2} + \frac{z^{\eta+1} l z}{\eta+1}$, erit illius
 integrale haec series $\frac{1}{a} (C - z + z l z + \frac{(\alpha-2)}{1 \cdot 4} z^2 -$
 $\frac{(\alpha-2)}{1 \cdot 2} z^2 l z - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9} z^3 + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 l z + \text{etc.})$
 Hoc integrale si fiat $y=0$ seu $z=1$ debet fieri
 $=0$, hanc ob rem erit $C = 1 - \frac{(\alpha-2)}{1 \cdot 4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9}$
 $- \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16} \text{ etc.}$

§. 19. Perspicuum est ex hoc integrali, quo-
 ties α sit numerus integer unitate maior, tum
 semper integralis eius terminorum numerum fo-
 re finitum, atque ideo summam progressionis de-
 finire. Attamen etiam si terminorum numerus sit
 infi-

ininitus, summa propositae seriei dabitur per aliam seriem infinitam quae vero plerumque magis conuergit quam proposita, atque ideo perquam est utilis ad summam determinandam.

§. 20. Sit summa progressionis in infinitum continuatae $\int \frac{-y^{\alpha-2}}{a} dy l(1-y)$, quia hic est positum $b=a$, erit progressio ipsa $\frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{2(\alpha+1)a} + \frac{1}{3(\alpha+3)a} + \frac{1}{4(\alpha+4)a}$ etc. Huius summa habetur si in illo integrali ponitur $y=1$, sed facta $y=1-z$ est integrale illud $\frac{1}{\alpha} (1 - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} - \text{etc.} - z + \frac{(\alpha-2)}{1.4} z^2 - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} z^3 + \text{etc.} + z/z - \frac{(\alpha-2)}{1.2} z^2/z + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3} z^3/z - \text{etc.})$. Si iam fiat $y=1$ vel $z=0$ erit summa seriei $\frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{2(\alpha+1)a} + \frac{1}{3(\alpha+2)a}$ etc. aequalis summae huius seriei $\frac{1}{\alpha} - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} a$ etc. vel summa huius $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2(\alpha+1)} + \frac{1}{3(\alpha+2)}$ etc. aequalis summae huius $1 - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9}$ - etc.

§. 21. Praeterea alium habeo modum series valde conuergentes inueniendi, quarum summa aequalis fit seriei propositae. $\int -y^{\alpha-2} dy l(1-y)$ aequatur ita integratum vt fiat $=0$ si $y=0$ huic seriei $1 - \frac{(\alpha-2)}{1.4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.2.3.16} + \text{etc.} - z + \frac{(\alpha-2)}{1.4} z^2 - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.9} z^3 + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.2.3.16} z^4 - \text{etc.} + z/z - \frac{(\alpha-2)}{1.2} z^2/z + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3} z^3/z - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1.2.3.4} z^4/z + \text{etc.}$ existente $z=1-y$; sed cum sit $-l(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}$ etc. erit $\int -y^{\alpha-2} dy l(1-y) =$

$$= \frac{y^a}{a} + \frac{y^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{y^{a+2}}{3(a+2)} \text{ etc.}$$
 Haec series si a est numerus affirmatiuus est aequalis illi quicquid fit y , et ita multis modis series eiusdem summae reperiuntur, quarum altera alterius opo facilius summat.

§. 22. Exemplo rem illustrabo fit $a=1$, habebitur trium sequentium serierum summa aequalis huic

$$+1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

$$-z - \frac{1}{4}zz - \frac{1}{9}z^3 - \frac{1}{16}z^4 \text{ etc.} = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \text{ etc.}$$

$$+z/z + \frac{1}{2}z^2/z + \frac{1}{3}z^3/z \text{ etc.}$$

$$\text{Quia vero est } z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 \text{ etc.} = -l(1-z) =$$

$$-ly \text{ erit } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{y+z}{1} + \frac{y^2+z^2}{4} +$$

$$\frac{y^3+z^3}{9} + \frac{y^4+z^4}{16} + \text{ etc.} + ly/z, \text{ est hic } y+z=1,$$

et manifestum est tales loco y vel z numeros assumi posse, vt series maxime conuerget. Id vero euenit quando $y=z$ vel vtrumque $=\frac{1}{2}$, eritque hoc casu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc.} = 1 + \frac{1}{8} +$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{128} + \frac{1}{400} + \text{ etc.} + \square/z. \text{ Hoc modo summa progressionis } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc.}$$

$$\text{valde prope haberi potest, est enim } l2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} +$$

$$\frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16}. \text{ Summa progressionis } 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} \text{ etc.}$$

$$\text{est quam proxime } = 1, 154481 \text{ et } \square/2 = 0,$$

$$480453; \text{ ergo summa seriei } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$$

$$\text{etc. est } = 1, 644934 \text{ } q.p. \text{ Si quis autem huius seriei summam addendis aliquot terminis initialibus determinare voluerit, plusquam mille terminos}$$

nos addere deberet, quo nostrum inuentum numerum reperiret.

§. 23. Ex his igitur methodum percipere licet, quomodo cuiuslibet progressionis, cuius termini sunt fractiones, quarum denominatores constituunt progressionem quamcunque algebraicam, terminum summatorium inueniri oporteat. Equidem vt hic rem considerauimus, numeratores deberent esse quantitates constantes; sed non difficulter haec methodus extendetur ad eas quoque progressionem, in quibus numeratores progressionem etiam quamcunque algebraicam faciunt. Propterea haec methodus ad omnes progressionem quarum termini generales algebraice possunt exponi, accommodari potest, eiusque opetermini summatorii inueniri. Excipiendi tamen sunt casus, quibus terminus generalis irrationalis est.

DISSERTATIO BREVIS

DE MOTIBVS CORPORVM RECIPROCIS SEV OSCILLATORIIS, QVAE VBIQUE RESISTENTIAM PATIVNTVR QUADRATO VELOCITATIS SVAE PROPORTIONALEM.

Vbi ostenduntur Theoremata, quorum ope expedite ad calculum reuocantur motus pendulorum in mediis perfecte fluidis praesertim aëre ceu medio tenuissimo.

AVCTORE

Dan. Bernoulli

I.

Tabula IV.

Insertit *Newtonus* Libro secundo *Princ. Math. Phil. Nat.* sectionem, quae sexta est, de motu et resistentia corporum funependulorum, vbi praesertim operam dedit explicandae theoriae, quae resistentias quadratis velocitatum proportionales facit, neque id immerito, quandoquidem ista hypothesis valeat pro plerisque fluidis, veluti aqua, mercurio, aëre, oleis calidis aliisque, eamque eo accuratius conuenire ostendunt experimenta ad calculum reuocata, quo celerius corpora mouentur. Haec igitur mihi, postquam incidissem in theorema illud Tomo IV. Commentariorum pag. 136. insertum, occasionem dederunt explorandi quanam theoremata alia circa

mo-

motum corporum pendulorum in mediis resistentibus fluidissimis exinde deduci possent et quodnam compendium in hisce calculis, qui prolixi admodum esse solent, expectandum esset. Communicabo hic, quae mihi talia tentanti se manifestarunt, postquam theorema ipsum huc transcripsero.

Theorema.

§. 2. Sit curua qualiscunq̄e $aACc$, in qua^{cc} corpus ita moueri ponatur, vt vbique resistentiam offendat quadrato velocitatis suae proportionalem: incipiat primo descendere grauitate sua^{cc} in A , perueniatque priusquam retrogrediatur in^{cc} C , dein descendere incipiat idem corpus in a ,^{cc} ascensuque suo integro perueniat in c , ducantur^{cc} verticales Ab et Cd , atque horizontales ab et^{cc} cd sintque omnia haec elementa infinite parua.^{cc} Dico fore semper spatium percursum AC proportionale logarithmo rationis Ab ad Cd , id^{cc} est, si symbolis vtamur intelligaturque per n ^{cc} numerus constans, quem in schediasmate citato^{cc} §. 5. definiui, simulque dicantur Ab et Cd , dx ^{cc} et dy , fore arcum percursum $AC = \frac{1}{2n} \log. \frac{dx}{dy}$.^{cc}

Fig. 3.

Problema.

§. 3. Dato arcu descensus corporis in cycloide oscillantis, inuenire arcum ascensus in praesenti resistentiarum hypothesi.

Solutio.

Tabula IV.
Fig. 4.

Oscilletur corpus in cycloide QDG, fit diameter circuli generatoris DH, quae ponitur verticalis $=a$, in qua si sumantur abscissae, ducanturque ab utraque parte applicatae horizontales, uti figura exhibet, erit per naturam cycloidis, vbique $DA^2 = 4a \times DM$; vnde si corpus ex punctis infinite propinquis A et a delapsum ascensus suos *respectiue* perficere ponatur vsque in C et c, dicaturque arcus descensus $DA = t$, arcus ascensus respondens $DC = s$, $Aa = dt$ et $Cc = ds$, erit per praecedens theorema $t + s = \frac{1}{2n} \log. \frac{Ab}{Ca} = (\text{per naturam cycloidis}) \frac{1}{2n} \log. \frac{t dt}{s ds}$. Ponatur numerus, cuius logarithmus est unitas $=c$, erit $c^{2n(t+s)} = \frac{t dt}{s ds}$, hinc $c^{-2nt} t dt = c^{2ns} s ds$, quae recte reducta dat $2nc^{-2nt} t + c^{-2nt} = -2nc^{2ns} s + c^{2ns}$. Ex qua aequatione per methodos passim traditas valor litterae s qua lubet accuratione haberi potest. Caeterum si aequatio differentialis vltima comparetur cum aequatione integrali, obtinetur alia differentialis quae facilius in series resoluitur, nempe haec $\frac{t dt}{1+2nt} = \frac{s ds}{1-2ns}$, siue $t dt - 2nt t dt + 4nnt^3 dt - 8n^3 t^4 dt + \text{etc.} = s ds + 2nss ds + 4nns^3 ds + 8n^3 s^4 ds + \text{etc.}$, quae per integrationem mutatur in hanc $\frac{1}{2} t t - \frac{2}{3} n t^3 + \frac{4}{4} n n t^4 - \frac{8}{5} n^3 t^5 + \text{etc.} = \frac{1}{2} s s + \frac{2}{3} n s^3 + \frac{4}{4} n n s^4 + \frac{8}{5} n^3 s^5 + \text{etc.}$ Q. E. I.

Theo.

Theorema.

§. 4. Corpus quod in cycloide quacun- que oscillatur eadem constanter in excursionibus decre- menta sumit si arcus descensus sint aequales, id est, si in diuersis cycloidibus arcus descensus sint aequales, sunt etiam arcus ascensus aequales.

Demonstratio.

Oppido liquet ex praecedente problemate, quandoquidem littera *a* diametrum circuli gene- ratoris denotans ex computo euanuerit.

Scholion.

§. 5. Cum facillimum sit theorema istud ex- perimento confirmare, rem tentavi sequentem in modum. Globum e filo tenui suspensum in aqua vibraui, ita tamen vt arcus descensus nec admo- dum magnus esset respectu longitudinis fili, quo sine notabili errore arcus circulares descripti pro cycloidicis haberi possent, nec tamen minimus, ne motus esset lentissimus, in quo casu fluidorum resistentia non amplius sat accurate sequitur ra- tionem quadratorum velocitatum; sicque differen- tiam obseruaui inter arcum descensus et arcum ascensus: mox vero eundem globum sed longe breuius suspensum in aqua ita rursus vibraui, vt arcus descensus idem esset qui antea, tuncque ad normam theorematis arcum ascensus similem quo- que obseruaui. Dein in aëre quia differentia mi- nima inter vtrumque arcum obseruari nequit sa-

tis accurate, numeravi in corpore sphaerico oscillante et ex diuersis altitudinibus suspenso singula vicibus suspensionis centum oscillationes, post quas vltimae oscillationes semper inter se ab vtraque parte aequales erant, cum primae inter se pariter aequales fuerant. In huiusmodi experimentis curandum est, vt corpus pendulum ex puncto firmo filoque tenui suspensum sit, oscillationesque fiant in eodem plano cum filo; facile enim oscillationes simplices in motum turbinarium abeunt describente corpore figuram ellipsi formem, vel veram ellipsin, si filum suspendens vt infinite altum ratione corporis excursionum considerentur. Singulare corporibus turbinantibus accidit, quod axis figurae oblongae a corpore descriptae perpetuo in gyrum agatur in eandem plagam, si bene memini, qua corpus mouetur, sicque imitantur motum planetarum, quorum aphelia et perihelia similiter locum mutant; istud autem corporis turbinantis phaenomenon tribui attritui filii contra suspensionis locum.

Theorema.

§. 6. Si corpus in medio admodum tenui arcus cycloïdicos describat, erit semper excessus minimus arcus descensus super arcum ascensus proportionalis quadrato arcus descensus vel simpliciter proportionalis altitudini verticali descensus.

De-

Demonstratio.

Quum medium est tenuissimum, fit valor litterae n minimus; ut vero appareat quid ab hac positione resultet notari debet, esse $c^{-2nt} = 1 - 2nt + \frac{4nnt}{1.2} - \frac{8n^3t^3}{1.2.3} + \frac{16n^4t^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$ similiterque $c^{2ns} = 1 + 2ns + \frac{4nns}{1.2} + \frac{8n^3s^3}{1.2.3} + \frac{16n^4s^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$ Iam vero si utamur aequatione differentiali paragraphi tertii, quae est $c^{-2nt} t dt = c^{2ns} s ds$, sufficiet ex istis seriebus infinitis duos primos accipere terminos, (quia nempe valor n minimus est) atque sic ponere $c^{-2nt} = 1 - 2nt$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns$, hosque valores in aequatione substituere, quae sic transmutatur in hanc $t dt - 2nt dt = s ds + 2ns s ds$, cuius integralis est $\frac{1}{2} t t - \frac{2}{3} n t^3 = \frac{1}{2} s s + \frac{2}{3} n s^3$. Quod si vero utamur aequatione tertii paragraphi integrata, nempe $2nc^{-2nt} t + c^{-2nt} = -2nc^{2ns} s + c^{2ns}$ non amplius sufficiunt duo termini ex seriebus praememoratis sumendi, quin imo quatuor requiruntur ita ut ponendum sit $c^{-2nt} = 1 - 2nt + \frac{4nnt}{1.2} - \frac{8n^3t^3}{1.2.3}$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns + \frac{4nns}{1.2} + \frac{8n^3s^3}{1.2.3}$, post quorum valorum substitutionem oritur iam $2nt - 4nnt + 4n^3t^3 - \frac{8}{3}n^4t^4 + 1 - 2nt + 2nnt - \frac{4}{3}n^3t^3 = -2ns - 4nns - 4n^3s^3 - \frac{8}{3}n^4s^4 + 1 + 2ns + 2nns + \frac{4}{3}n^3s^3$, quae recte dispositis terminis reiectisque $-\frac{8}{3}n^4t^4$ et $\frac{8}{3}n^4s^4$ atque facta diuisione per $-4nm$ transit in hanc $\frac{1}{2} t t - \frac{2}{3} n t^3 = \frac{1}{2} s s + \frac{2}{3} n s^3$, ut antea. Diuisa autem ista aequatio per $s+t$ reduci potest ad hanc formam $t-s = \frac{4}{3}n(tt-st+ss)$, vel quoniam arcus s et t notabili-

tabiliter non differunt censendum est $t-s=\frac{4}{3}nt$, quod indicat excessum arcus descensus t super arcum ascensus s proportionalem semper esse quadrato arcus descensus vel per naturam cycloidis simpliciter proportionalem descensui verticali, ut habet propositio. Ceterum cum valor ipsius n sit loco supra citato specificè determinatus ex magnitudine gobi oscillantis eiusque grauitate specifica ratione fluidi resistentis, facillimum nunc est diminutionem motus arcuumque descriptorum ad calculum omnibus circumstantiis definitum reuocare, qua de re mox quaedam superaddam. Q.E.D.

Corollarium.

§. 7. Si fluidum tenuissimum in quo corpus oscillatur modo grauius, modo leuius sit manentibus reliquis, erit differentia inter descensum ascensumque in ratione grauitatis specificae fluidi ad corpus; positis autem omnibus variabilibus erit eadem arcuum differentia in ratione composita ex directa descensus verticalis et grauitatis specificae fluidi, atque reciproca ratione, globi eiusdemque grauitatis specificae. Si autem fluidum non sit valde tenue, non amplius valet hoc theorem, et ne proxime quidem, quamuis *Newtonus* fecus sentire videatur p. 306. edit. *Princ. Math.*

Scholion.

§. 8. Quia constat aerem liberum, (qui quidem sine notabili errore pro medio subtilissimo ha-

cenferi potest, si corpus nec minimum fit nec admodum leue) esse modo densiorem modo rariorem, poterit ratio grauitatum specificarum haberi ex numero oscillationum dati penduli, post quem oscillationes dato arcu diminutae fuerint. Et hinc mensura caloris fixa haberi potest, vt alia occasione monstrabo.

Problema.

§. 9. Si corpus in medio subtilissimo oscilletur arcus describens cycloidicos, inuenire ex primo arcu descensus arcum ascensus, quem corpus post magnum oscillationum numerum datum describet, aut vicissim ex vtroque arcu dato inuenire numerum oscillationum.

Solutio.

Sit primus arcus descensus $=t$, erit per §. 6. arcus subsequentis ascensus $=t - \frac{4}{3}ntt$: similiter reperitur arcus secundi ascensus $=t - \frac{8}{3}ntt + \frac{32}{9}nnt^3 - \frac{64}{27}n^3t^4$, et posito vltimo numero oscillationum l , erit arcus vltimo ascensu descriptus $=t - l(\frac{4}{3}n)tt + (ll-l)(\frac{4}{3}n)^2t^3 - (l^3 - \frac{5}{2}ll + \frac{3}{2}l)(\frac{4}{3}n)^3t^4 + \text{etc.}$, cui seriei sine notabili errore substitui potest haec altera geometrica $t - (\frac{4}{3}nl)tt + (\frac{4}{3}nl)^2t^3 - (\frac{4}{3}nl)^3t^4 + \text{etc.}$ tum ob paruitatem numeri n cuius dimensiones inferiores prae maxima quasi euanescent. Est autem summa huius seriei geometricae $=t : (1 + \frac{4}{3}nlt)$, vnde si arcus ascensus post numerum oscillationum l dicatur r , erit

$$\text{I. } r = t : (1 + \frac{4}{3}nlt), \text{ siue}$$

$$\text{II. } l = (t-r) : \frac{4}{3}ntr. \quad \text{Q. E. I.}$$

Problema.

§. 10. Ex dato decremento totali $t-r$, quod numero oscillationum l conuenit, inuenire decrementum minimum, quod soli primae aut soli vltimae oscillationi debetur.

Solutio.

Immediate fuit ex praecedente aequatione; quia enim $l = (t-r) : \frac{4}{3}ntr$, erit $\frac{4}{3}nt = \frac{t-r}{lr}$, hincque facta multiplicatione per t obtinetur decrementum primae oscillationis seu $\frac{4}{3}(ntt) = \frac{t(t-r)}{lr}$, pariterque decrementum vltimae oscillationis siue $\frac{4}{3}nr r = \frac{r(t-r)}{lr}$. Vnde pro priori casu fit regula, vt sumatur quarta proportionalis ad arcum vltimo ascensu descriptum, ad arcum primi descensus et decrementum integrum diuisum per numerum oscillationum, quae quarta proportionalis dabit decrementum primae oscillationis, si autem inuertantur duo priores analogiae termini prōdit decrementum oscillationis vltimae. Ceterum si decrementum integrum simpliciter diuidatur per numerum oscillationum, quod oritur vocari potest decrementum medium, et si in diuersis casibus sint decremēta integra proportionalia initialibus arcubus, vti sunt in experimentis Neutronianis infra considerandis, patet decremen-

menta media rationem sequi decrementorum initialium. Q. E. I.

Problema.

§. II. Eadem determinare pro arcubus circularibus, quae hucusque de arcubus cycloïdicis eruta fuerunt.

Solutio.

Consideretur curva QDG vt arcus circularis, cuius radius = a , reliquis denominationibus quae paragrapho tertio factae fuerunt retentis; erit aequatio inter arcum descensus t et arcum ascensus s haec $c^{2ns} \times dC = c^{-2nt} \times b A$ vel (positis abscissis DO et DM, quae arcubus s et t respondent, S et T) $c^{2ns} dS = c^{-2nt} dT$, quae aequatio indeterminatarum permixtione non affecta per quadraturas et rectificationes construi aut etiam calculo analytico per approximationes resolui potest, ita vt arcus incognitus s ex dato t definiri queat: calculum autem nimis prolixum non apponam indicasse contentus compendium, quo tractari debet, si medium sit tenuissimum, quod corpori vibrato non admodum leui nec paruo resistit, prouti est aër ratione globi verbi gratia plumbei in aëre oscillantis.

Fig. 4.

Notetur rursus n fieri minimum cum medium est tenuissimum, posseque cenferi $c^{-2nt} = 1 - 2nt$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns$; ita vero pro nostro hoc casu talis inferuiet aequatio $dS + 2ns dS = dT -$

P 2

$2nt dT$

$2ntdT$ vel $dS + 2nsdS + 2nSds - 2nSds = dT - 2ntdT - 2nTdt + 2nTdt$, siue $S + 2nsS - \int 2nSds = T - 2ntT + \int 2nSdt$. Est vero $ds = \frac{ads}{\sqrt{(2aS-SS)}}$ et $dt = \frac{adT}{\sqrt{(2aT-TT)}}$; quibus valoribus substitutis oritur haec altera aequatio: $S + 2nsS - 2na \int \frac{Sds}{\sqrt{(2aS-SS)}} = T - 2ntT + 2na \int \frac{TdT}{\sqrt{(2aT-TT)}}$. Est porro $\int \frac{Sds}{\sqrt{(2aS-SS)}} = -\sqrt{(2aS-SS)} + \int \frac{ads}{\sqrt{(2aS-SS)}} = -\sqrt{(2aS-SS)} + s$, pariterque $\int \frac{TdT}{\sqrt{(2aT-TT)}} = -\sqrt{(2aT-TT)} + t$; quibus valoribus denuo substitutis prodit $S + 2nsS + 2na\sqrt{(2aS-SS)} - 2nas = T - 2ntT - 2na\sqrt{(2aT-TT)} + 2nat$, ope cuius aequationis non difficulter admodum arcus ascensus s ex arcu descensus t definitur. Patitur autem vltima ista aequatio vltiorem reductionem, quae eo innitur, quod ex natura rei differentia inter t et s vt et inter T et S fit minima.

Ratio istarum differentiarum, quae huc potissimum facit, patebit ex figura, vbi AD est arcus descensus et DC arcus ascensus, et ex puncto D ducta est verticalis DA atque ex punctis A et C horizontales AM et CO, ac denique producta AM vsque in L, simulque CP, parallela ipsi DH. Est scilicet differentia arcuum CL, et differentia inter T et S est OM vel CP; et quia tam CL quam CP minimae sunt, erit per naturam circuli $CL(t-s)$. $CP(T-S) :: \text{radius } (a)$. $ML(\sqrt{2aT-TT})$. Posita igitur $t-s = q$ erit $T-S = q$, $\frac{\sqrt{(2aT-TT)}}{a}$, vel $s = t - q$ et $S = T - q$

$\frac{\sqrt{(2aT-TT)}}{a}$. Substituantur hi valores in aequatione ultimo loco exposita, vt habeatur $T - q \frac{\sqrt{(2aT-TT)}}{a} + 2ntT - \frac{2ntq\sqrt{(2aT-TT)}}{a} - 2ntTq + 2nqq\sqrt{\frac{(2aT-TT)}{a}} + 2na\sqrt{(2aT-2q\sqrt{(2aT-TT)})-TT} + \frac{2Tq\sqrt{2aT-TT}}{a} - \frac{2aTqq+Tqaa}{aa} - 2nat + 2naq = T - 2ntT - 2na\sqrt{(2aT-TT)} + 2nat$. In hac aequatione reiciendi sunt termini affecti quantitate qq vel nq reliquis incomparabiliter minore. Dein centendum est $\sqrt{(2aT-2q\sqrt{(2aT-TT)})-TT} + \frac{2Tq\sqrt{2aT-TT}}{a} = \sqrt{(2aT-TT)} - q + \frac{Tq}{a}$: quibus omnibus observatis oritur tandem aequatio finalis, quae immediate decrementum q desideratum exhibet, nempe $q = 4naa - \frac{4nt(a-T)}{\sqrt{(2aT-TT)}}$, vel si abscissae ex centro sumantur dicaturque distantia puncti M a centro $= \theta$, id est, si ponatur $a-T = \theta$, erit $q = 4naa - \frac{4nat\theta}{\sqrt{(aa-\theta\theta)}}$. Atque sic denique ad aequationem simplicissimam reductum fuit problema de inveniendis decrementis arcuum circularium in medio resistente tenuissimo, quod problema prima fronte calculum tantum non insuperabilem requirere videtur. Ceterum si arcus ascensus desideretur non post vnam sed plures oscillationes, vt ratione arcuum cycloidicorum §. 9. indicatum fuit, id aliofere compendio fieri hic non potest, nisi vt singula decremента successiue definiantur. Q. E. I.

Corollarium.

—Si arcus descensus t sit valde parvus, ita vt pro cycloidico haberi possit, sit rursus vt §. 6.

q vel $t-s = \frac{4}{3}ntt$. Id vero vt appareat, acci-
piemus aequationem penultimam praecedentis pa-
ragraphi, nempe $q = 4naa - \frac{4nat(a-T)}{\sqrt{(naT-TT)}}$. Quia au-
tem T vt infinite parua quantitas consideratur
censendum est $\frac{1}{\sqrt{(2aT-TT)}} = \frac{1}{\sqrt{2aT}} + \frac{T}{4a\sqrt{2aT}}$, atque
proin $q = 4naa - \frac{4naat}{\sqrt{2aT}} - \frac{4naaT}{4a\sqrt{2aT}} + \frac{4natT}{\sqrt{2aT}} + \frac{4natTT}{4a\sqrt{2aT}}$,
vel reiecto vltimo termino (quia $t = \infty T$) $q = 4$
 $naa - \frac{4naat + 3natT}{\sqrt{2aT}}$; et cum praeterea sit arcus t qua-
si infinite paruus, fit $t = \sqrt{2aT} + \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{2a}}$ (hincque
 $q = 4naa + \frac{36naaT - 48na^3 + 3naTT - 4naaT}{12a}$) reiecto
termino penultimo, qui infinite paruus censen-
dus) $\frac{8}{3}naT =$ (per naturam circularis arcus eius-
que infinite paruus) $\frac{4}{3}att$, quod demonstrandum
nobis proposuimus.

§. 13. Postquam sic determinavi oscillatio-
nes corporum in mediis ad nostram hypothesin
resistentibus tum pro arcubus cycloidicis tum pro
circularibus, communicabo hic theoremata quae-
dam de corporibus perfecte elasticis verticaliter
in planum horizontale pariter perfecte elasticum
decidentibus resilientibusque, sed sine demonstra-
tionibus, quae ex praecedentibus quibus facile sibi
finget.

Theorema.

§. 14. Decidat corpus ex altitudine infinita
suaque vi elastica resiliat redeatque ad secundam
illisionem et sic porro; sit autem numerus illisio-
num $= l$, dico altitudinem ascensus fore post vl-
timam

timam illisionem $= \frac{1}{2n} \log. \frac{l+1}{l}$, adeoque nunquam saltus plane evanescere, quantumvis magnus sit eorundem numerus. Patet hinc ascensum vltimum pro eodem saltuum numero rationem sequi diametrorum, quas globi habent, eorundemque grauitatum specificarum ratione mediorum resistentium.

Theorema Generalius.

§. 15. Sit iam altitudo primi descensus non amplius infinita sed qualiscunque, nempe $= t$, altitudo ascensus post datum numerum vibrationum $l = s$, retentis denominationibus reliquis supra adhibitis, dico fore $s = \frac{1}{2n} \log. [(l + 1 + c^{2nt} - l) : (lc^{2nt} - l + 1)]$

Theorema.

§. 16. Positis iisdem, si quaeratur numerus lapsuum l , quibus corpus vltra datam altitudinem s resiliat, erit $l = (c^{2nt} - c^{2ns}) : (1 - c^{2nt} - c^{2ns} + c^{2n(t+s)})$.
Si $t = \infty$, fit $l = 1 : (c^{2ns} - 1)$.

Exemplum.

Sit $t = \infty$; grauitas specifica corporis ad aërem in quo cadit vt 1000 ad 1; Diameter globi aequalis decimae parti vnus pedis Anglici, denotet autem s altitudinem vnus pedis. Angici, fit proxime $n = \frac{3}{800}$, $c^{2ns} = 1 - \frac{3}{400}$, et $l = 1 : (c^{2ns} - 1) = 133$, quod indicat corpus tale vtur perfecte elasticum et ex altitudine infinita delapsum atque etiam millies grauius quam aër, qui ei resistit,

non vltra centum cum triginta tribus efficere saltus altitudinem vnus pedis Anglici transgredientes, reliquos autem omnes (quorum quidem numerus infinitus est) infra hanc altitudinem subsistere.

Conclusio.

§. 17. Si conferamus hactenus dicta cum iis quae *Newtonus* habet in suis *Princ. Math. Phil. Nat. Lib. 2. Sect. 6.* vbique consensum aliquem percipiemus quamuis methodi nostrae valde sint diuersae. Sunt autem *Newtoni* propositiones plurimae tantum proxime verae, at nostrae saluis positionibus omni rigore mathematico sunt praeditae. Quae *Newtonus* habet de velocitatibus absolutis, indeque deducendis resistentiis et oscillationum temporibus, idque pro diuersis resistentiarum positionibus, equidem ex iis quae alibi dedimus haud difficulter deducuntur; ea autem huc non affero, quia animus tantum fuit exemplis illustrare vsum quem habet theorema nostrum fundamentale quod superiore anno cum Societate communicavi, et quod paragrapho secundo rursus exposui. Denique quod attinet ad valorem litterae n eius valorem numeris absolutis dedimus in Tom. IV. p. . §. 9. sicut et in Tomis II. et III. Innititur autem valor ipse n hypothese a *Mariotto* stabilitae, quod fluidum directe in planum impingens data velocitate impetum faciat aequalem ponderi cylindri eiusdem fluidi

at-

atque crassitiei, cuius cylindri altitudo talis sit, ut graue libere ex illa cadendo velocitatem acquirat, quae sit fluidi velocitati aequalis. Istam hypothesin plura experimenta de fluidis non admodum lente motis sumta confirmant. Quod si vero impetus iste fluidi sit augendus, in eadem quoque ratione erit augendus valor litterae *n*. Videamus autem nunc quid experimenta hac de re inquirant. Horum autem extant plurima apud *Newtonum in Princ. Math. Phil. Nat. Lib. sec. Sect. 6. p. 307. edit. nouissimae*, vbi *scholium generale* exhibet: omnia ista experimenta videntur summa cum attentione facta et apprime ad rem nostram faciunt. Excerptam hic primam experimentorum classem, relinquens aliis explicationem theorematum nostrorum ad experimenta, quae in aliis fluidis quam aëre facta sunt.

Experimenta Newtoni ad calculum reuocata.

Globum ligneum inquit *Newtonus* pondere vnciarum Romanarum $57\frac{1}{2}$, diametro digitorum Londinensium $6\frac{1}{8}$ fabricatum, filo tenui ab vncō satis firmo suspendi, ita ut inter vncum et centrum oscillationis globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem et vncia vna a centro suspensionis distans, et e regione puncti illius collocaui regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudes

Tom. V. Q dines

“dines arcuum a pendulo descriptas; deinde nu-
 “meravi oscillationes, quibus globus octauam mo-
 “tus sui partem amitteret. Si pendulum dedu-
 “cebatur a perpendiculo ad distantiam duorum
 “digitorum et inde demittebatur, ita vt toto suo
 “descensu describeret arcum duorum digitorum,
 “totaque oscillatione prima ex descensu et ascen-
 “su subsequente composita, arcum digitorum fere
 “quatuor, idem oscillationibus $16\frac{1}{4}$ amisit octa-
 “uam motus sui partem, sic vt ultimo suo ascen-
 “su describeret arcum digiti vnus cum tribus par-
 “tibus quartis digiti. Si primo descensu descrip-
 “sit arcum digitorum quatuor amisit octauam mo-
 “tus partem oscillationibus 121, ita vt ascensu
 “ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si pri-
 “mo descensu descripsit arcum digitorum octo,
 “sexdecim, triginta duorum vel sexaginta qua-
 “tuor, amisit octauam motus partem oscillatio-
 “nibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ respectiue etc.

Primo loco patet quod, vbi arcus descripti paulo sunt maiores, nec adeoque motus fiunt lentissimi, id annotante etiam *Newtono*, sint decre-
 menta vni oscillationi debita proxime proportio-
 nalia quadratis arcuum descriptorum, quod con-
 uenit cum theoremate § 6. Ita cum in duobus
 penultimis experimentis primi arcus descensus erant
 16 et 32 digitorum requirebantur $35\frac{1}{2}$ et $18\frac{1}{2}$
 oscillationes, vt decremēta essent 2 et 4 digi-
 torum. Igitur in casu priori si decremēta ae-
 qualiter

qualiter distribuuntur, vni oscillationi conuenit decrementum medium $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ et in casu posteriori de-

crementum medium $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$; est igitur prius decre-

mentum ad posterius proxime vt 1 ad 4, id est vt quadrata arcuum descensibus initialibus descriptorum. Sunt autem decrementa media vt decrementa primae oscillationi vtrouique debita, quod demonstraui §. 10. quia decrementa integra facta fuerunt arcubus initialibus proportiona-

lia. Est interim decrementum $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ ad alterum

$\frac{4}{18\frac{1}{2}}$ in ratione paulo maiori quam 1 ad 4, quod

indicat resistantiam aliam, quae solet statui momentis temporum proportionalis atque tenacitati medii tribuitur, sensibiliorem fuisse in priori experimento quam in posteriori, vbi motus iam erat velocior. Iam vero insuper videamus quaedam fuerint decrementa primae ab vtraque parte oscillationi debita. Ad hoc autem per regulam §. 10. simpliciter requiritur vt decrementa

media inuenta $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ et $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$ augeantur in ratione

vt 8 ad 7. siue t ad r . Ergo cum primus descensus erat 16. digitorum, fuit decrementum pri-

mae oscillationis $= \frac{8}{7} \times \frac{2}{35\frac{1}{2}} = 0,0644$ partibus

Q 2 di-

digiti vel $= 0,00536$ partibus pedis; pariter inuenitur decrementum primae oscillationis conueniens arcui 32 digitorum $= 0,02059$ pedis partibus. Deberent autem per §. 6. ista decrementa esse respectiue aequalia $\frac{1}{3}ntt$, seu quadrati arcus in pedibus Anglicis exprimendi multiplicato per $\frac{1}{3}n$. At erant grauitates specificae globi et aquae, prouti *Newtonus* indicat pag. 309. vt 55 et 97. Ergo posito tempore instituti experimenti fuisse grauitates specificas aëris et aquae vt 1 et 850, diuisaque diametro globi in partes millesimas pedis Anglici, erit $n = \frac{376}{48.5728}$ 0,001358. Est igitur in priori casu $\frac{1}{3}ntt = 0,00322$ et in posteriori $= 0,01288$. Sunt igitur decrementa ista calculi notabiliter minora decrementis ex obseruatione deductis, idque proxime in ratione vt 3 ad 5. Vnde concludendum foret, si nihil obstaret oscillationibus praeter resistantiam illam a nobis haëtenus consideratam et ab inertia particularum fluidi resistantis oriundam, non amplius valere pro aëris resistantia valorem n quem pro resistantia aquae stabiliuimus in superioribus Tomis tum ex ratione tum ex experimentis longe plurimis, et esse resistantiam aëris ad resistantiam aquae non habita ratione ad differentias grauitatum specificarum propemodum vt 5 ad 3. Cum vero alia sint experimenta alterius generis, quae sũ dent non aliter resistere aërem quam aquam, potius iudicandum est, esse impedimenta alia in motibus pendulorum consi-
 ds-

deranda, quorum rationem nondum habuimus, talia sunt I^{mo} resistentia, quam filum globum suspendens, offendit. II^{do} Illisio siue attritus fili in locum suspensionis. III^{do} Aliqualis fili rigiditas et IV^{to} quod potissimum hic notandum, tenacitas medii, quae aliam resistentiam format momentis temporum vt creditur proxime proportionalem, quae resistentia posterior in oscillationibus corporum ideo consideranda praecipue est, quia motus oscillationum sunt valde lenti. Opportuna hic esset occasio monstrandi modum, quo altera haec resistentia etiam ad mensuras reduci possit, quod in oscillationibus minimis plane est necessarium, quodque non difficile esset, quandoquidem in potestate sit theorema nostrum fundamentale extendere ad vtrumque resistentiarum simul resistentium genus, quo theoremate generaliori facto omnia pari facilitate absoluentur. Quoniam autem hae paginae iam in maius quam constitueram volumen excreuerunt, neque nunc per ista omnia ire vacat, haec et similia in proximam occasionem reseruabo.

Dan. Bernoulli
 ADDITAMENTVM
 AD
 THEOREMATA.

De Motu Corporum curvilineo in mediis resistentibus, in quo resistentiae considerantur quae partim quadratis velocitatum partim momentis temporum proportionales sunt.

MVLtus hucusque fui in commentandis motibus, qui fiunt in mediis resistentibus, iisque ad mensuras quantum fieri potest accuratas reducendis. In Tomo secundo atque tertio motus consideravi rectilineos. In quarto autem et praesente curvilineos potissimum. Quod ad hos pertinet, theorema dedi in Tomo quarto alicuius ut puto usus in abbreviandis calculis alias saepe vix superabilibus: huiusque theorematum fertilitatem ostendi in dissertatione brevi, quam videre est in hoc tomo. Haec autem solam considerant hypothesein resistentiarum quadratis velocitatum proportionalium. Cum vero in motibus lentissimis alia quaedam resistentiae species se manifestet praeter modo dictam, quae cum ratione aliqua statuitur momentis temporum proportionalis (qua de re legi possunt quae in Tomo tertio exhibentur) cumque in fine dissertationis huic Tomo insertae me hanc quoque resistentiam explicaturum promiserim, facturus promissa, ostendere

dere hic constitui modum, quo theoremata illa circa motum curuilineum exhibita extendi possint ad hypothesin resistantiarum partim quadratis velocitatum partim momentis temporum proportionalium, vt sic experimentis accuratissime instituendis intelligere possimus, an et quaenam motuum lentissimorum in mediis resistantibus mensurae sperari possint. Breuis ero quia methodus vix differt ab illa quam in duobus praecedentibus Tomis adhibui, et si cui haecce non satis explicata videantur, hunc rogarim vt superiora cum istis conferre velit. Vt appareat analogia, transcribam ex tomo quarto ipsa theorematum illius verba paucis mutatis, quae sunt mutanda.

Theorema.

§. 2. Sit curua qualiscunq̄ue $aACc$ super qua corpus moueri ponatur, ita vt vbique resistantiam offendat quadrato velocitatis suae, tum etiam momento temporis proportionalem. Incipiat primo descendere grauitate sua in A perueniatque priusquam retrogrediatur in C ; dein descendere incipiat idem corpus in a ascensuque suo maximo perueniat in c ; ducantur verticales Ab et Cd atque horizontales ab et cd , sintque elementa Aa et Cc infinite parua, dico fore semper spatium percursum AC proportionale logarithmo rationis quam habet $bA.g - aA.m$ ad $dC.g + Cc.m$, vbi per g et m intelliguntur constantes quae in demonstratione definiuntur.

Tabula IV.
Fig. 3.

De-

Demonstratio.

Descendat primo corpus ex A perueneritque in punctum F, moxque post tempusculum infinite paruum dt in E: ducantur horizontalis FG et verticalis GE: ponatur velocitas in puncto F $= v$ in E $= v + dv$. Exprimatur actio grauitatis corpus fluido submersum animans per g , numerusque ille qui multiplicatus per quadratum velocitatis dat resistantiam fluidi priorem indicetur per n . Denique notetur, alteram resistantiam, quae nempe ponitur vbique momenti temporum proportionalis, talem esse vi ipsius positionis, vt in omni corporis situ aequaliter resistat nulla facta attentione ad corporis velocitatem: hanc igitur resistantiam vocabimus m , quae multiplicata per tempusculum dt dat incrementum velocitatis dv ; hinc igitur habetur aequatio

$$I. \left(\frac{g \cdot EG}{PE} - n v v - m \right) dt = dv$$

quae posito $\frac{FE}{v}$ pro dt in hanc aequationem

$$II. gEG - n v v \cdot FE - m FE = v dv.$$

Iam vero fingamus corpus idem descendere incepisse ex puncto a rursusque peruenisse in punctum F moxque in E, dicatur retentis caeteris positionibus velocitas eius in F $= p$ et in E $= p + dp$; ita obtinebitur loco secundae aequationis haec altera.

$$III. gEG - n p p \cdot FE - m \cdot FE = p dp.$$

Subtrahantur termini aequationis tertiae a terminis aequationis secundae; sic erit facta ab vtraque parte diuisione per $pp - vv$.

IV.

IV. $n. FE = \frac{-pdp + vdv}{pp - vv}$

cui postremae aequationi id commode accidit, quod integrari possit; vt vero debita constans addi possit, consideranda est velocitas corporis ex a delapsi in puncto A ; sit ergo velocitas illa $= a$. ita vt existente puncto F in A sit $p = a$ et $v = 0$, dicaturque numerus, cuius logarithmus est vnitas, $= c$, atque ita aequatio quarta si integretur dat

V. $pp = vv + c^{-2n.A^P} aa$.

Verum cum corpus ex A delapsum peruenit in C , fit $v = 0$ et $AF = AC$, tunc igitur habetur $pp = c^{-2n.AC} aa$ vel

VI. $2n. AC = \log. \frac{aa}{pp}$.

vbi iam per p intelligitur velocitas corporis ex a delapsi in puncto C . Superest vt inquiramus in rationem ipsius $\frac{aa}{pp}$, vt habeatur deinceps valor quaesitus ipsius AC . Denotat autem a velocitatem corporis ex puncto a delapsi vsque in A , et p velocitatem qua idem corpus ex C ascendere possit vsque in c . Quoniam igitur in utroque casu velocitates sunt infinite paruae, erunt resistentiae primae speciei nullae. Igitur si considerentur aA et Cc sicuti plana inclinata, super quorum priori corpus grauitate sollicitatum a statu quietis descendat resistentiam vniformem vbique offendens, dum super altero ascendit paribus conditionibus ad statum quietis vsque, inuenietur ex mechanicis esse (retentis significati-
 nibus litterarum g et m) $\frac{aa}{pp} = \frac{bA \cdot g - aA \cdot m}{dC \cdot g + Cc \cdot m}$. Hinc er-
 Tom. V. R go

go aequatio sexta exhibet hanc aequationem finalem et enunciato theorematis conformem, nempe

$$\text{VII. } AC = \frac{1}{2n} \log. \frac{bA \cdot g - aA \cdot m}{dC \cdot g + Cc \cdot m}. \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium I.

§. 3. Si $m=0$, id est, si nulla habeatur ratio resistentiae, quae momento temporis proportionalis ponitur, oritur theorema, quod in tomo quarto et praecedente dissertatione breui pertrauimus.

Corollarium 2.

§. 4. Si vero $n=0$, id est, si non respiciatur resistentia rationem duplicatam velocitatum affectans, fit $\frac{bA \cdot g - aA \cdot m}{dC \cdot g + Cc \cdot m} = 1$, seu $(bA - dC)g = (aA + Cc)m$; facit autem summa omnium elementorum $(bA - dC)$ altitudinem verticalem per quam corpus descendit, dum ex statu quietis ad quietem peruenit et summa omnium $(aA + Cc)$ efficit arcum curuae, quem corpus interea describit, unde si prior summa dicatur x , altera z , fit $xg = zm$, quae aequatio etiam oritur si directe quaeratur, ita vt sic casus particulares recte in aequatione catholica theorematis contineantur.

Scholion.

§. 5. Poterunt iam, quamuis calculo prolixiori, ope aequationis septimae omnia problemata solui atque theoremata inueniri similia illis
quae

quae dedimus in superioribus; nolo autem his nimium immorari; vnicum explicabo quod instituto nostro nunc est conuenientissimum. Nempe quomodo decremента oscillationum corporis arcus cycloidicos describentis ad calculum reuocari debeant, vt haec decremента tum calculo tum experimentis eruta atque inter se comparata ostendant quousque fidendum sit hypothefibus in motibus lentissimis.

Equidem praeferenda esset positio arcuum circularium positioni arcuum cycloidicorum, quia pendula simplicia de quibus experimenta sumi solent, reuera arcus circulares describunt. At vero quum computus fiat admodum prolixus in casu arcuum circularium, neque hi a cycloidicis notabiliter differant, si parui sumantur, prouti sumendi sunt, vt motus fiat lentissimus, operae pretium non est laborem calculi nimii subire; neque est cur vel minimus scrupulus hac in parte supersit. Si quis tamen cupiat arcus circulares etiam calculo subiicere, hanc viam strauimus in dissertatione huius Tomi §. II. vbi methodo singulari rem totam absoluimus. Nunc agemus tantum de arcibus cycloidicis, tum pro mediis notabiliter resistentibus, tum etiam pro iis, quorum resistentia minima est neque aliter nisi post plurimas oscillationes percipi potest.

Problema.

§. 6. Dato arcu descensus corporis in cycloide oscillantis, quod resistantiam duplicem supra explicatam ubique offendit, inuenire arcum ascensus.

Solutio.

Tabula IV.
Fig. 4.

Sit cyclois proposita QDG; diameter circuli generatoris DH, cuius situs est verticalis $=a$; fingatur corpus ex A et a successiue delapsum ascensus facere vsque in C et c, ducantur horizontales AM, aI, CO et cH minimaque verticales Ab et Cd: sit DA = t, DC = s, Aa = dt, Cc = ds, erit per naturam cycloidis DM = $\frac{tt}{4a}$, DO = $\frac{ss}{4a}$, IM vel bA = $\frac{tdt}{2a}$, NO vel dC = $\frac{sds}{2a}$, quibus omnibus valoribus substitutis in aequatione vltima §. 2. oritur.

$$\text{I. } t + s = \frac{1}{2n} \log. \frac{gtdt - 2madt}{gsds + 2mads}$$

quae aequatio posito rursus c pro numero cuius logarithmus est vnitas transformari potest in hanc
II. $g.c^{2ns} s ds + 2ma.c^{2ns} ds = g.c^{-2nt} t dt - 2ma.c^{-2nt} dt$,
cuius integratione facta oritur talis aequatio exponentialis

$$\text{III. } 2ng.c^{2ns} + (4mna - g).c^{2ns} = -2ng.c^{-2nt} t + (4mna - g).c^{-2nt}$$

Hisce aequationibus aequiualeat etiam haec simpliciter differentialis a quantitatibus exponentialibus libera, nempe

$$\text{IV. } \frac{gs + 2ma}{2ngs + 4mna - g} ds = \frac{gt - 2ma}{-2ngt + 4maa - g} dt,$$

Ex

Ex omnibus autem istis aequationibus facile est ad valorem arcus s ex dato t quantumlibet accedere. Q. E. I.

Scholion.

§. 7. Non prolixiorem calculum nec difficiliorem requirit positio vtriusque resistantiae quam solius eius quae sequitur rationem quadratorum velocitatum. Si autem in praesentibus aequationibus ponas $t = z + \frac{2ma}{g}$, et $s = q - \frac{2ma}{g}$, obtinebis aequationes prorsus similes illis quae in priora differtatione §. 3. exhibitae fuerunt. Interim patet non amplius hic valere theorema §. 4. eiusdem differtationis. Quod reliquum est pro instituto nostro resistantiam aëris eiusque theoriam potissimum spectante, id in sequenti propositione complectemur, ubi ponemus vtramque resistantiam valde parvam, et singula decremента minima esse ratione arcuum descriptorum; quae hypotheses faciunt vt quantitates n , m et t , s sint infinite parvae censendae.

Problema.

§. 8. Inuenire minima oscillationum decremента corporis in cycloide oscillantis in medio admodum parum secundum vtramque hypothesin resistente.

Solutio.

Si n secundum naturam problematis sit valde parvus numerus, erit censendum $c^{2ns} = 1 + 2ns$

R 3

et

et $c^{-2nt} = 1 - 2nt$; quibus valoribus commutatis in aequatione secunda paragraphi 6. fit

$$2mads + (g + 4mna)sd s + 2ngs s ds = -2madt + (g + 4mna)tdt - 2ngttdt,$$

Haec autem aequatio post sui integrationem mutatur in hanc

$$2mas + \frac{1}{2}(g + 4mna)ss + \frac{2}{3}ngs^3 = -2mat + \frac{1}{2}(g + 4mna)tt - \frac{2}{3}ngt^3;$$

quae ad nihilum reducta et diuisa per $s + t$ abit in hanc

$$2ma + \frac{1}{2}(g + 4mna)(s - t) + \frac{2}{3}ng(ss - st + tt) = 0.$$

Et si in hac vltima aequatione ponatur simpliciter tt loco $ss - st + tt$ (censentur enim arcus t et s fere aequales) reperietur decrementum oscillationis seu

$$t - s = (2ma + \frac{2}{3}ngtt) : \frac{1}{2}(g + 4mna)$$

Denique apparet posse simpliciter poni g pro $g + 4mna$; hoc igitur facto oritur

$$t - s = \frac{4ma}{g} + \frac{2}{3}ntt. \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium.

§. 9. Quo longius est pendulum eo magis ceteris paribus decrescunt oscillationes, dum in hypothesis vnicae resistentiae quae sequitur rationem quadratorum velocitatum penduli nihil confert ad decremента oscillationum, prouti demonstraui in priore disertatione §. 4.

Problema.

§. 10. Data summa decrementorum post magnum oscillationum in medio tenuissimo numerum

merum, inuenire decrementum soli primae oscillationi debitum.

Solutio.

Mutatis mutandis eadem est, quae in dissertatione antecedente §. 9. et 10. quapropter ratiocinium non repetam, sed dicam tantum, quid methodo illa recte adhibita oriatur. Sit primus arcus descensus = t , arcus ultimo ascensu descriptus = r , numerus oscillationum = l ; et cum primum decrementum sit per praecedentem §. = $\frac{4ma}{g} + \frac{4}{3}nlt$, inueniendus est huius decrementi valor; dico autem fore posito recte vbique calculo

$$I. r = (t - \frac{4lma}{g}) : (1 + \frac{4}{3}nlt),$$

quae aequatio inferuit, vt possit vltimus arcus ascensus inueniri ex primo arcu descensus t et numero oscillationum l . Dein inuenietur numerus oscillationum l ex utroque arcu t et r , tali vtendo aequatione.

$$II. l = (t - r) : (\frac{4ma}{g} + \frac{4}{3}ntr).$$

Denique, quod saepissime requiritur, est vt ex toto decremento $t - r$ inueniatur decrementum primae oscillationis, nempe $\frac{4ma}{g} + \frac{4}{3}nlt$. Hic vero locum non obtinet compendium illud quo vsi sumus in superiori dissertatione loco modo citato multiplicando aequationem per t . Hinc nec ita concinna fiet regula; sic autem pertractabimus aequationem secundam; inde est nempe $\frac{4ma}{g} = \frac{t-r}{l} - \frac{4}{3}ntr$

$nt r$; addatur ab vtraque parte $\frac{4}{3} ntt$, vt habeatur $\frac{4ma}{g} + \frac{4}{3} ntt = \frac{t-r}{l} - \frac{4}{3} ntr + \frac{4}{3} ntt$, quae aequatio mutata paulo facie haec tandem est.

III. $\frac{4ma}{g} + \frac{4}{3} ntt = \frac{t-r}{l} + \frac{4}{3} nt \times (t-r)$,
 quae monstrat decremento toti diuiso per numerum oscillationum addendum esse numerum minimum $\frac{4}{3} nt \times (t-r)$, exprimendo scilicet arcus t et r in pedibus Anglicis. Q. E. I.

Corollarium.

§. 11. Non differunt aequationes duae priores nec forma nec valore ab suis correspondentibus dissertationis prioris §. 9. si ponatur $m=0$; tertia autem aliam tunc habet formam quam aequatio eiusdem dissertationis §. 10. sed valores non differunt nisi in quantitibus quas vt minimas tractauimus.

Conclusiones Physicae de natura oscillationum in aëre et fluidorum resistentium.

§. 12. Licet vtique aërem considerare ceu medium minimae resistentiae, ita vt propositiones praecedentes applicari possint ad inuestigandam resistentiam aeris, si modo haec resistentia pura sit, sunt autem alia insuper obstacula oscillationibus: nempe fili aliqua rigiditas eiusque impulsus contra locum suspensionis, vt et resistentia quam aër contra filum exercet, quorum obstaculorum

lorum in calculo nullam habuimus considerationem. Licet autem obstaculum a rigiditate fili eiusque impulsu contra latera foraminis, per quod fili summitas transit, referre ad classem resistentiae illius quam fecimus momenti temporum proportionalem, dum resistentiam aëris contra filum putabimus ipsi globo superuenire. Quibus ita positis apparet non mutari naturam aequationum praemissarum, sed augeri tantum valores litterarum m et n : quia vero incertum est quantum augeantur, eos determinabimus per experimenta, atque sic postea examinabimus, an aequationes duobus experimentis accommodatae conueniant cum reliquis experimentis de eodem pendulo sumtis. Itaque utemur prima aequatione §. 10. nempe $r = (t - \frac{4lm}{g}) : (1 + \frac{4}{3}nlt)$, vel quia in eodem pendulo eodemque fluido non mutantur litterae a et g , ponemus

$$r = (t - la) : (1 + \frac{4}{3}lt)$$

atque in duobus casibus particularibus inquiremus in valores litterarum a et l . Hos autem casus sumemus ex *Newt. Nat. Princ. Math.* p. 310. edit. 3.

I. Certus globus ex certa altitudine suspensus describens primo descensu sextam partem vnius pedis post 374 oscillationes ascensu fecit octauam partem vnius pedis.

Hic $t = \frac{1}{6}$, $r = \frac{1}{8}$, $l = 374$, vnde $\frac{1}{8} = (\frac{1}{6} - 374a) : (1 + \frac{374g}{6})$

II. Idem globus similiter suspensus describens primo descensu tertiam partem vnius pedis post 272 oscillationes ascensum fecit aequalem quartae parti pedis.

138 ADDITAMENTVM AD THEOREMATA.

Hic $t = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{4}$, $l = 272$; ergo $\frac{1}{4} = (\frac{1}{3} - 272a) : (1 + \frac{272b}{3})$
 Ex combinatis istis aequationibus fit $a = \frac{85}{1831104}$
 et $b = \frac{5712}{1831104}$, hinc igitur substitutis his valo-
 ribus oritur $r = (t - \frac{85l}{1831104}) : (1 + \frac{3712lt}{1831104})$, vel

$$r = \frac{1831104l - 85l}{1831104 + 3712lt}$$

Videamus nunc quantum vltima haec aequatio con-
 ueniat cum reliquis experimentis ibidem memo-
 ratis. Sic cum primus arcus descensus erat $= \frac{2}{3}$
 et numerus oscillationum $162\frac{1}{2}$, erat vltimus ar-
 cus ascensus $= \frac{1}{2}$; sed secundum formulam debe-
 bat esse $= \frac{1206924}{2449904}$, quae sic satis conueniunt.
 Dein posito $t = \frac{1}{3}$ et $l = 83\frac{1}{3}$, obseruatum fuit esse
 $r = 1$; est autem secundum aequationem $r =$
 $\frac{2434389}{2405707}$, quae pariter non multum dissentiunt.
 Mox cum t erat $= \frac{2}{3}$, $l = 41\frac{2}{3}$, obseruatum fuit
 $r = 2$, dum formula nostra indicat $r = \frac{4879403}{2405771}$;
 Denique existente primo arcu descensus $5\frac{1}{3}$ pe-
 dum, obseruabatur vltimus ascensus quatuor pedum
 post oscillationes $22\frac{2}{3}$: debet autem secundum ae-
 quationem esse vltimus ascensus $r = \frac{9763962}{2521822}$. Om-
 nes hi casus egregie consentiunt cum theoria prae-
 ter vltimum, qui aliquantum magis ab illa rece-
 dit, quod non defectui alicui formulae sed aliis
 circumstantiis tribuendum esse nullus dubito, ve-
 luti quod arcus circularis nimius fuerit, quam vt
 pro cycloidico haberi possit, aut quod in obser-
 uatione non satis distincti fuerint arcus a chordis
 respondentibus, cum diuisiones factae fuerint in
 regula horizontaliter posita. Simile autem quid

con-

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA 139

contigisse ex eo liquet, quod numeri oscillationum semper magis vergere obseruati fuerint ad rationem duplam praeter ultimam obseruationem, cuius numerus rursus diuergit, nam praecise dupla est ratio inter $83\frac{1}{3}$ et $41\frac{2}{3}$, dum ratio inter $41\frac{2}{3}$ et $22\frac{2}{3}$ minor est dupla, et si ex inductione de ultimo isto numero oscillationum quis iudicasset, vix illum ultra $20\frac{2}{3}$ extensurus fuisset.

Similiter computum apponam experimentorum de eodem pendulo sumtorum et pag. 307. recensitorum eiusque conspectum in sequenti tabula dabo.

| Primus de-
scensus in
ped. Anglic. | Numerus of-
cillationum. | Ultimus asc.
per obseru. | Ultimus asc.
per theori-
am. | Differentiae in
fractionibus de-
cim. ped. Angl |
|--|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|---|
| $\frac{1}{6}$ | 164 | $\frac{7}{48}$ | $\frac{291244}{1987232}$ | +0.0007 |
| $\frac{1}{3}$ | 121 | $\frac{7}{24}$ | $\frac{600083}{2061488}$ | -0.0005 |
| $\frac{2}{3}$ | 69 | $\frac{7}{12}$ | $\frac{1214871}{2093836}$ | -0.0029 |
| $\frac{4}{3}$ | $35\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{2438455}{2101472}$ | -0.0059 |
| $\frac{8}{3}$ | $18\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{4881372}{2112896}$ | -0.0223 |
| $\frac{16}{3}$ | $9\frac{2}{3}$ | $\frac{14}{3}$ | $\frac{9765066}{2125389}$ | -0.0711 |

Atque sic quidem apparet non incongruenter adhiberi formulas §. 10. cum in illis litterae m et n seu inde pendentes a et b ope duorum experimentorum determinantur, quod fecimus in hisce calculis. Si tamen dicendum, quod res est, negari non potest hanc methodum plane non con-

uenire cum oscillationibus perquam exiguis veluti vnus digiti aut adhuc minoribus. Tunc enim deberent decremēta singula esse inter se aequalia, atque proin decrementorum aggregatum proportionale numero oscillationum, quod minime conuenit cum experimentis de globo plumbeo oscillante a *Newtono* sumtis et in eodem scholio generali p. 310. recensitis, vbi dicitur, globum quū primo descensu perfecit arculum duorum digitorum, perfecisse ascensu ducentesimo vigesimo octauo septem quartas digiti partes, eundemque globum similiter suspensum ascensu ducentesimo vigesimo sexto arculum descripsisse septem partium octauarum digiti cum primo descensu descriperat vnum digitum, quae duae obseruationes non satis conciliari possunt cum superioribus aequationibus nostris, si simul respiciamus reliquas obseruationes. Vnde tandem concludo, quod etiam vberius explicauī in dissertatione Tom. 3. motibus paulo velocioribus inferuire hypothesin simplicem resistentiam quadratis velocitatum proportionalem, motibus lentioribus eandem hanc resistentiam coniunctam cum altera quae momentorum temporum rationem sequatur egregie satisfacere, motibus autem plane lentissimis, quales fiunt in oscillationibus perexiguis neutram ex affe satisfacere eorumque theoriam incertam adhuc esse, nec fortasse dari posse ob inconstantiam incertitudinēque circumstantiarum multiplicium. Si dicas fluida resistentiam exercere aliquam momentis temporum

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA. 141

ad amiffim proportionaleni, fequitur praeterea filia corporum pendulorum in fluidis iis fufineri poffe extra fitum verticalem, et quidem ab eodem notabiliter remota, quod nec in aëre nec in aqua imò nec in oleis plerisque vnquam obferuatam fuiffe crediderim; quamuis id in fluidis valde tenacibus veluti oleis quibusdam aut melle fi modo fluida fint vocanda, fieri poffe nullum fit dubium. Dubito igitur an aëri vel aquae limpidae et purae dici poffit vllam tenacitatem, quae fub fenfus cadat, inefle et an refiftentia illa quae fe manifeftat cum corpus lentius fe mouet in hisce fluidis ortum trahat ab eorundem tenacitate, quo in cafu magis fequeretur rationem momentorum temporis, vti oftendi in citata differtatione Tom. 3. Vt vero redeam ad ofcillationes minimas pendulorum, quamuis vix puto comprehendi illas fe pati certis regulis tamen monendum duxi, theoriam non protinus reiiciendam efle, ideo, quod non cum omni rigore experimentis de illa re furtis respondeat, quandoquidem huiusmodi experimenta fatis accurate minime inftitui poffint. Vix fieri potefl vt minor quam decima pars lineae recte et aliqua cum certitudine obferuetur: et tali particulae in experimentis *Newtonianis* ad ofcillationes minimas globi plumbei praememoratas pertinentibus respondent propemodum quindecim ofcillationes, ita vt non videam quomodo affirmari poffit minorem ofcillationum numerum requifitum fuiffe vt octaua motus pars amitteretur, cum primus defcenfus fuerit vnus digiti quam cum fuerit duorum digitorum, praefertim cum id difsentire videatur

deatur cum reliquis obseruationibus. Scio tamen id fieri posse, imo debere in arcibus sat paruis, si resistentiae statuatur momentis temporum perfecte proportionales.

Quoniam autem ex omnibus phaenomenis concludi posse videtur corpora in fluidis paulo celerius mota praeter resistentiam quadratis velocitatum proportionalem aliam offendere, quae statui posset momentis temporum proportionalis, quaestio se menti offert, qui ergo fiat, vt nullum corpus aqua vel minimum grauius in eadem suspensum haereat, idemque cur e filo suspensum semper situm infimum assumat, denique cur in motu lentissimo ista resistentiarum positio plane non conueniat. Haec si recte intelligerentur, sperari posset illam scientiam quae fluida spectat haud parum hinc promotum iri. Interim suspicari licet in motu non admodum lento particulas fluidi a se inuicem quasi diuelli, hanc autem diuulsionem in motu lentissimo ideo non superuenire; quod vna particula super aliam se mouendo sat cito locum a corpore moto relictum occupet; ita duo specula laeuigata sibi super imposita sine ingente vi diuelli non possunt, dum facile vnum super altero mouetur. Nisi simile quid succedat statuaturque particulas fluidi liberrime super se inuicem moueri; sicque locum corporis solidi moti profecto occupare non video, quare pendula corpora in fluidis locum infinitum semper perfecte assumant.

QVOMODO DATA QVACVNQVE
CVRVA INVENIRI OPORTEAT ALIAM, QVAE
CVM DATA QVODAMMODO IVNCTA AD
TAVTOCHRONISMVM PRODVCENDVM
SIT IDONEA.

Auct. L. Eulero.

1.

Meditanti mihi ante quadriennium de cur-
ua tautochrōna ad Horologium Domini
Sullii accommodata, vid. Comm.A. 1727.
occurrit aliud quoddam oscillationum genus, quod
duabus continetur curvis, et tale est, vt data ea-
rum altera, altera semper inueniri possit. Quam-
obrem quaestio de hoc tautochronismo indeter-
minata est, et infinitas admittit solutiones. Quae
proprietas, quae mihi elegans esse, et vsum quen-
dam fortasse in praxi habere posse visa est; prae-
tereaque ipsa solutio, quae problematis traiecto-
riarum reciprocarum similis est solutionis, et pro-
pter id peculiarem hucusque non multum vsita-
tum soluendi modum requirit, me impulerunt,
vt meam methodum ad huiusmodi problemata
soluenda admodum idoneam iterum proponerem,
huicque casui accommodatam traderem.

Tabula V.

§. 2. Originem autem duxit praesens pro-
blema ex certo quodam oscillandi genere, quod
hic

Tabula V
Fig. I.

hic ante omnia exponere conuenit. Concipio trochleam ABP circa axem per centrum eius A transeuntem mobilem. Huic trochleae duae affirmatae sint laminae incuruatae AD , AE , filis circumductae, quae laminae semper deferant, ubi tangentes sunt verticales, ut in D et E , vnde verticaliter dependeant tracta a potentiis vi inertiae destitutis, ne vi opus sit ad eas mouendas. Sit situs $FDAEG$ status aequilibrum, ducatur ex A verticalis ABC , quae vna cum trochlea circa A moueri concipiatur; Ita ut machina tum sit in quiete, cum recta ABC fuerit verticalis. Ex hoc igitur iam ratio distantiarum punctorum D et E a recta AC determinatur, si datae fuerint potentiae in F et G applicatae.

§. 3. Detorqueatur machina ex statu quietis in situm quemuis $RMANS$, ut recta quae ante fuerat verticalis AC , in situm AQ perueniat, angulo CAQ percurso. Tangent ergo fila MR , NS , a datis potentiis sollicitata laminae in M et N , ut sint verticalia. Ex hoc perspicuum est vim potentiae F in R translatae ad vertendam trochleam esse auctam, alteram vero G in S translatae esse diminutam. Ex quibus consequitur, machinam in $RMANS$ positam nequaquam in quiete permanere posse, sed ad situm $FDAEG$, in quo ponitur aequilibrium, perpetuo tendere. Reipsa igitur, cum nihil impediat, in situm aequilibrum feretur; idque motu, quia continuo versus eum

eum pellitur, accelerato: eo igitur situ quiescere non poterit, sed ex eo in contrariam plagam exurret, et ita perpetuo oscillationes peraget.

§. 4. Machina hac descripta, hoc est, quod mihi proposui, problema. *Quomodo laminae AD, AE sint incuruandae, ut oscillationes reddantur isochronae, seu ut omnes eodem tempore absoluantur.* Manifestum est, problema praesens ex eorum esse numero, quae indeterminata appellantur, propter duas curvas AD et AE determinandas, quarum vna tantummodo ex conditione problematis determinatur. Problema igitur tale est, ut data harum curvarum altera, altera inueniri possit. Erunt deinde sine dubio casus, quibus hae duae curvae sunt inter se aequales et similes. Quamobrem hanc quaestionem bipartitam propono, vnde duplex nascitur solutio. Primo nempe methodum tradam, *qua data altera curvarum altera inueniri queat; deinceps, quomodo ii eruendi sint casus, quibus ambae curvae sint inter se aequales et similes.*

§. 5. Ad solutionem harum quaestionum animi attendere conuenit ad duo puncta curvarum AD et AE homologa, quae mihi sunt ea, in quibus simul laminae a filis tanguntur, ut D et E, item M et N. Horum punctorum haec est mutua relatio, ut dispositis curuis ad communem de-

Tom. V. T bitum-

bitumque axem AQ , tangentes in iis punctis sint parallelae vt MR , NS . In ipso statu aequilibrii $FDAEG$ sunt eae tangentes ipsi axi parallelae, in aliis positionibus non item, sed faciunt cum axe angulum; ex quo *angulus declinationis* CAQ , seu qui metitur distantiam situs machinae a statu quietis cognosci poterit, sunt enim inter se aequales. Quia enim NS parallela est AC , erit angulus, quem SN producta cum axe QA constituit, aequalis angulo CAQ .

Fig. 2.

§. Vt hoc diligentius persequar, sint AM et AN duae curvae quaesitae, quarum axis communis sit AC . Capiantur in iis duo puncta homologa M et N , erunt tangentes MR , NS inter se parallelae. Ducantur applicatae MP , NQ , erit summa angulorum $PMR + QNS$ aequalis duobus rectis. Siue ducantur normales MT , NA in curvas, erunt anguli PMT , QNV inter se aequales. Sed quia subnormales PT , QV , ad contrarias plagas diriguntur, erit angulorum PMT , QNV , alter alterius negativus. Porro cum anguli tangentium cum axe AC sint aequales angulis PMT , QNV , sequitur angulum declinationis machinae aequalem esse alterutri angulorum normalibus et applicatis contentorum.

Fig. 3.

§. 7. His expositis ad ipsius machinae motum me conuerto. Peragat trochlea ABO oscillationes, et dum ad statum naturalem tendit, pervenerit

venerit in fitum $RMANS$, et axis in AQ , distans a verticali AC angulo CAQ , seu BAO . Infit in puncto O velocitas ex altitudine v oriunda, qua circumferentia trochleae convertitur. Sit pondus trochleae $=P$, erit vis viua, quae inest in trochlea, si ea fuerit vbique aequaliter crassa et grauis, $=\frac{1}{2}Pv$. Nam si omnes trochleae partes eadem velocitate ex alt. v acquisita mouerentur, tum foret vis viua $=Pv$. Cum autem partes, quo centro sint propinquiores, eo tardius moueantur, vis viua dimidio fit minor, vt computum instituenti liquebit.

§. 8. Progrediatur puncto temporis machina in fitum $rmAns$, axisque AQ in Aq , vt ergo angulo OAO angulus declinationis diminuatur. Punctum igitur M perueniet in m , et N in n , eritque ang. $OAO = MAm = NAn$ propter vniformem totius machinae motum angularem. Interim potentia in R applicata descendit in r , at altera in S ascendit in s ; eritque ob $MR = mr$, lineola Rr parallela et aequalis lineolae Mm . Et simili modo Ss parallela erit et aequalis elemento Nn . Ducantur horizontales, $r\sigma$, $S\sigma$ nec non $m\mu$, $N\nu$, quae producantur in I et K ad verticalem AC vsque. Transitu hoc per Oo aucta erit velocitas circumferentiae trochleae, vt fit nunc $=$ veloc. ex alt. $v + dv$ acquisitae. Vnde vis viua trochleae in praesenti situ est $=\frac{1}{2}P(v + dv)$.

§. 9. Absoluto ergo angulo OAo , vis viua trochleae aucta est elemento $\frac{1}{2}Pdv$, quod incrementum ortum suum debet potentiis in R et S applicatis. Quamobrem inuestigabo quanta hac temporis particula ab his potentiis genita sit vis viua. Sit pondus potentiae in R aequiuale $=R$ pondus potentiae in S aequiuale $=S$. Perspicuum est a potent. R descensu per $R\varrho$, genitam esse vim viuam $R.R\varrho$ seu $R.M\mu$. At vero a potentia S propter ascensum per σs destructa est vis viua $S.\sigma s$ seu $S.nv$. His coniunctis generata habebitur vis viua $=R.M\mu - S.nv$. Huic vi genitae, aequale esse debet incrementum reipsa deprehensum $\frac{1}{2}Pdv$. Quocirca haec acquiritur aequatio, $\frac{1}{2}Pdv = R.M\mu - S.nv$.

§. 10. Propter triangula similia $Mm\mu$, mAI , et Nnv , ANK , erit $M\mu = mI$. $Mm : Am$ et $nv = NK.Nn : AN$. Est autem $Mm : Am = Oo : AO$. Ergo $M\mu = mI.Oo : AO$; et $nv = NK.Oo : AO$. Propterea haec emergit aequatio $\frac{1}{2}P.AO.dv = R.mI.Oo - S.NK.Oo$. Est vero $Oo : AO = \text{ang. } OAo$. ergo $\frac{1}{2}P.dv = (R.mI - S.NK)OAo$. Hic autem angulus OAo est elementum anguli BAO , qui aequalis est angulo, quem applicata curuae AM vel AN in axem AQ ducta cum normali in curuam constituit. Huius igitur anguli elementum aequatur elemento OAo . Ex quo apparet elementum dv in quantitibus ex curuis datis exprimi, neque lineas vtriusque curuae inter se esse
per

permixtas. Datis itaque curuis laminarum hoc modo motus trochleae inuenietur, et inde oscillationes, de quibus iudicari poterit, vtrum sint isochronae, an secus.

§. 11. Consideremus nunc eam conditionem, qua oscillationes trochleae isochronae esse debent. Accipiamus in circumferentia trochleae punctum, quod in infimo loco stat machina quiescente, id quod est punctum O. Necessesse ergo est, vt et hoc punctum oscillationes isochronas conficiat, seu vt aequalibus temporibus, vbicunque motum inchoauerit, ad infimum punctum B perueniat. Ad hoc oportet, vt accelerationes puncti O versus B sint vt viae describendae, donec ad B perueniant, id est, vt anguli OAB. Ex quo fluit fore dv vt $BO.Oo$, pono autem $adv = BO.Oo$.

§. 12. Valore hoc loco dv in superiore aequatione substituto, haec prouenit aequatio $\frac{1}{2}P.AO.BO.Oo = R.a.mI.Oo - S.a.NK.Oo$. Diuidatur per Oo , et multiplicetur per 2. orietur $P.AO.BO = 2R.a.mI - 2S.a.NK$. Quae a differentialibus quantitatibus prorsus est libera. Mutetur paululum constans, eritque $P.b.BAO = R.mI - S.NK$. Potest autem ang. BAO in ipsis curuis AM, AN exhiberi, et quantitatibus ad eas pertinentibus exprimi. Vnde sequitur aequationem inuentam sufficere ad problema soluendum.

§. 13. Quod aequatio primum differentialis inuenta sit, ea vero diuisione facta per quantitatem differentialem ad integralem sit reducta, id indicat sine differentialibus statim ad inuentam algebraicam aequationem perueniri posse sequenti modo multum breuiore et faciliore. Momentum potentiae R, ad trochleam conuertendam est R.mI, alterius potentiae S, est S.NK. Quia hoc illi contrarium est atque minuit, trochlea ab O ad B sollicitatur a vi R.mI—S.NK, huicque vi proportionalis est acceleratio, quae, vt oscillationes sint isochronae, debet esse vt via describenda id est vt BO, vel BAO, vel quoque vt P.b.BAO. cui aequalis poni potest, eritque vt supra P.b.BAO = R.mI—S.NK.

Tabula VI.
Fig. 1.

§. 14. Sunt vero mI, NK, perpendiculara ex A in tangentes; et BAO aequatur angulo, quem tangentes cum axe constituunt. Facta igitur applicatione ad sequentem figuram reperitur haec aequatio P.b. ATM = R.AP—S.AQ. Sumatur eius differentialis P.b.dATM = R.dAP—S.dAQ. Est vero d.ATM = angulo, quem duo elementa curuae proxima inter se constituunt, idcirco = angulo a duobus normalibus infinite propinquis intercepto, qui habetur elemento curuae per radium osculi diuiso; qui quotus in vtraque curua idem esse debet propter tangentes parallelas, in altera vero negatiuus esse debet eius, qui in altera accipitur. Hanc ob rem pono AM = y, AP = p, PM =

$=\sqrt{yy-pp}=q$, atque $AN=z, AQ=r, QN=\sqrt{zz-rr}=s$. Erit radius osculi ibi $=y dy:dp$. hic vero $=z dz:dr$. Deinde elementum curuae in illa $=y dy:q$; in hac $=z dz:s$; vt ergo elementum ang. ATM fit ex illa curua $=dp:q$, ex hac $=dr:s$. Oportet vero esse $dp:q=-dr:s$.

§. 15. His valoribus substitutis, proueniet haec aequatio $Pbdp:q=Rdp-Sdr$. Est vero $-dr:s=dp:q$, vnde $dr=-sdp:q$, quo substituto aequatio resultans $Pbdp:q=Rdp+Ssdp:q$ diuidi poterit per dp , quo facto, et multiplicato per q . habebitur ista aequatio $Pb=Rq+Ss$. Ex qua haec fluit proprietas curuarum quaesitarum, vt summa $R.PM+S.QN$ semper sit constans sumtis tangentibus parallelis. Habentur ergo duae hae aequationes $Pb=Rq+Ss$ et $sdp+qdr=0$. Ex quibus iunctis problemati facile satisfiet.

§. 16. Applicemus haec ad axem AT. Ducantur applicatae MX, NY; sitque $AX=x, XM=y$, et $AY=v, YN=z$. Erit $PM=q=\frac{x dx+y dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et $QN=s=\frac{v dv+z dz}{\sqrt{(dv^2+dz^2)}}$. Atque ob tangentes PM, QN inter se parallelas erit $dx:dy=dv:-dz$, seu $dz=-dvd y:dx$. Superior vero aequatio $Pb=Rq+Ss$ transmutabitur in hanc $Pb=R(x dx+y dy):\sqrt{(dx^2+dy^2)}+S(v dv+z dz):\sqrt{(dv^2+dz^2)}$ substituatur loco $dz, -dvd y:dx$; erit $Pb=R(x dx+y dy):\sqrt{(dx^2+dy^2)}+S(v dx-z dy):\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Vnde elicietur $z=v dx:dy+(R(x dx+y dy)-Pb\sqrt{(dx^2+dy^2)}):Sdy$. Vocetur $dx:dy=\xi$: et
($R(x dx$

$(R(x dx + y dy) - PbV(dx^2 + dy^2)) : S dy = B.$
 erit $z = \xi v + B$; vnde $dz = \xi dv + v d\xi + dB =$
 $-v dy : dx = -dv : \xi.$ Consequenter $dv + \xi \xi dv$
 $+ v \xi d\xi + \xi dB = 0$; diuidatur per $V(1 + \xi \xi)$ erit
 $dv V(1 + \xi \xi) + v \xi d\xi : V(1 + \xi \xi) + \xi dB : V(1 + \xi \xi)$
 $= 0.$ Quae integrata dat $v V(1 + \xi \xi) + \int \xi dB :$
 $V(1 + \xi \xi) = C.$ Quocirco erit $v = \frac{C - \int \xi dB : V(1 + \xi \xi)}{V(1 + \xi \xi)}$
 ac $z = \frac{C \xi + B V(1 + \xi \xi) - \xi \int \xi dB : V(1 + \xi \xi)}{V(1 + \xi \xi)}.$

§. 17. Est autem substituto loco B valore
 debito nempe $(R(x \xi + y) - PbV(1 + \xi \xi)) : S,$
 $\int \xi dB : V(1 + \xi \xi) = R x V(1 + \xi \xi) : S - \frac{Pb}{S} \int \frac{\xi \xi d\xi}{1 + \xi \xi}.$
 Vnde fit $v = \frac{CS - R x V(1 + \xi \xi) + Pb \int \xi \xi d\xi : (1 + \xi \xi)}{S V(1 + \xi \xi)}$ atque
 $z = \frac{CS \xi + R y V(1 + \xi \xi) + Pb \xi \int \xi d\xi : \xi \xi (1 + \xi \xi)}{S V(1 + \xi \xi)}.$ Data ergo
 curua alterutra AN, seu aequatione inter v et z ,
 si in ea loco v et z valores inuenti substituan-
 tur, habebitur aequatio inter y et x , seu altera
 curua. Sed si ad commoditatem constructionis at-
 tendamus, detur curua AM seu aequatio inter x et y ;
 et inuenietur ex dato quouis puncto M, eius homo-
 logum N, propter AY et YN, quae per qua-
 draturas facile determinantur. Perspicuum vero est
 alteram curuam ex altera construi ope quadraturae
 circuli; et ideo vtramque non posse esse alge-
 braicam.

§. 18. Si habeatur pro alterutra curua aequa-
 tio inter perpendiculum in tangentem et ipsam
 tangentem, totum negotium multo facilius ex-
 pe-

pedietur. Pofitis enim $AP = p$, $Pm = q$, et $AQ = r$, $QN = s$, erit per §. 15. $Pb = Rq + Ss$ atque $sdp + qdr = 0$, vnde elicitur $s = (Pb - Rq) : S$. atque $dr = -sdp : q = -dp(Pb - Rq) : Sq$. Data ergo aequatione inter p , et q , inde inuenietur aequatio inter s et r . Seu facilius fi habeatur aequatio inter r et s , fubftituantur pro s et r valores in p et q , prodibitque aequatio inter p et q . Data ergo alterutra harum curuarum, altera facile reperitur.

§. 19. Illuftremus hanc regulam exemplis nonnullis. Sit altera curua AN circulus, cuius peripheria per A transit, fit eius radius $= a$. Erit $rr - 2ar + ss = 0$ feu $r = a + \sqrt{aa - ss}$ indeque $dr = -sds : \sqrt{aa - ss}$. Ponatur loco dr , $-dp(Pb - Rq) : Sq$ et loco s , $(Pb - Rq) : S$, ergo loco ds , $-Rdq : S$, proueniet haec aequatio $dp = -Rq dq : \sqrt{SSaa - (Pb - Rq)^2}$. Quae aequatio exprimit naturam alterius curuae, et quia est feparata, per quadraturas conftitui potest. Quum hoc modo inueniantur puncta homologa, poterit altera vtcunque applicata refpectu axis AT, altera quoque applicari, hoc obferuato, vt tangentes in punctis homologis vnico tantum in cafu fint parallelae; perfpicuum ergo eft, eafdem curuas infinitis modis applicatas fatisfacere poffe.

§. 20. Sit altera curua AN rurfus circulus, centrum in A habens erit r conftans et $s = 0$, vn-

Tom. V. V de

de $q = Pb : R$, adeoque constans. Est igitur ob hanc proprietatem curua quaesita nata ex evolutione circuli, idque talis cuius radius est $Pb : R$. Modus vero huius applicandae hic est, vt centrum circuli generatoris ponatur super centro trochleae A. Quod haec curua talis esse debeat, ex Differt. de nouo quodam tautochr. genere in Comm. A. 1727. inserta colligi potest. Cum enim altera curua AN sit circulus centrum in A habens pondus seu potentia S, in quouis situ eundem exerit effectum, vt ergo altera curua sola tautochronismum producere debeat. Qui, cum sit ille casus citatus, necesse est, vt curua quaesita eadem sit, vt ibi, genita ex evolutione circuli.

Tabula VI.
Fig. 2.

§. 21. Progredior iam ad alterum problematis casum, et inuestigo casus quibus ambae curuae sint inter se eadem et circa axem similiter applicatae. Sint ergo curuae AM, AN eadem circa axem AC similiter positae. Oportet inuenire talem aequationem inter coordinatas AX, x et XM, y , vt posito in ea $x = AY, v$, fiat $y = NY = z$. Ad hoc efficiendum duas hasce proprietates inuentas considero; primo, vt ductis normalibus MT et NV seu nV , sit ang. $XMT = YNV = YnV$; deinde vt sit $Pb = R. PM + S, QN$. Sed quia curuae sunt aequales et similiter applicatae, necesse est vt sit $R = S$, ponatur autem $Pb : R = 2c$, erit altera proprietates hac aequatione contenta, $PM + QN = 2c$, seu $PM + qn = 2c$.

§. 22.

§. 22. Huc ergo problema est reductum, vt inueniatur curua AnM talis, vt, si in ea accipiantur duo puncta M et n , ex quibus normales MT et nV ductae cum applicatis MX , nY angulos constituent, alterum alterius negatiuum, seu quae se mutuo ad angulos rectos interfecerint; ductis deinde tangentibus MP et nq , in easque demissis ex A perpendicularis AP , Aq , vt, inquam, sit summa $PM + nq$ constans seu aequalis, $2c$. Quamobrem quaero aequationem inter tangentem PM , et angulum XMT , seu quantitatem independentem, quae facto angulo negatiuo, ipsa quoque negatiua euadat, talem, vt, si loco anguli XMT , seu quantitatis vicem eius gerentis eius negatiuum ponatur, PM transmutetur in aliam quae cum PM efficiat summam $2c$.

§. 23. Cum finus anguli cuiusuis, facto angulo negatiuo, abeat in sui negatiuum, loco anguli adhibeo eius finum, sit igitur finus anguli $XMT = \xi$, et tangens $PM = q$, requiritur aequatio inter ξ et q , in qua, loco ξ posito $-\xi$, q abeat in s , vt sit $q + s = 2c$. Hanc ob rationem pono $q = c + Q$, designante Q functionem quamcunque imparem ipsius ξ , facto enim ξ negatiuo et Q abibit in $-Q$, vt ergo sit $s = c - Q$, summa igitur $q + s$ erit $= 2c$, vt requirebatur.

§. 24. Inuenta autem aequatione inter q et ξ , oportet ex ea aequationem inuenire inter coor-

dinatas AX, XM seu inter x et y ; id quod frequenti modo efficietur. Si $AX = x$, et $XM = y$, erit sinus anguli $XMT = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et tangens $MP = (x dx + y dy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Erit itaque $\xi = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ et $q = (x dx + y dy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. His igitur valoribus in aequatione inter ξ et q substitutis, resultabit noua aequatio inter x et y , ex qua curua qualis sit cognoscetur. Ponatur vero $dy = p dx$, erit $\xi = p : \sqrt{(1 + pp)}$ vnde patet ξ abire in negatiuum, si p fiat negatiuum. Quamobrem loco Q poni potest functio quaecunque impar ipsius p , et erit $q = (x dx + y dy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = c + Q$, seu $(x + py) \sqrt{(1 + pp)} = c + Q$.

§. 25. Aequatio ergo inter x et y pro curua quaesita talis esse debet, vt posito $dy : dx = p$, sit $(x + py) : \sqrt{(1 + pp)} = c + Q$ denotante Q functionem imparem ipsius p , siue cum et $Q \sqrt{(1 + pp)}$, ob $\sqrt{(1 + pp)}$ functionem parem ipsius p , sit functio impar, scribatur loco $Q \sqrt{(1 + pp)}$ solum Q; et erit $x + py = c \sqrt{(1 + pp)} + Q$. Substituendis igitur loco Q determinatis functionibus ipsius p , et deinde loco p eius valore $dy : dx$, habebuntur aequationes, quas non nisi x et y cum suis differentialibus et constantibus ingrediuntur.

Tabula VI.
Fig. 3.

§. 26. Relatio, quam Q et p inter se habere debent, optime exprimetur curua MAm, quae circa punctum A habet arcus similes et aequales con-

contrarie positos, vt ex inspectione palam est. Si enim per punctum A, quod tanquam centrum est figurae, ducatur recta Pp, eaque tanquam axis consideretur, in quem demittantur applicatae PM. Dico abscissis AP exprimentibus p, applicatas PM designare posse Q. Nam sumta AP negatiua vt Ap, applicata pm erit applicatae PM aequalis, eiusque negatiua, vt ergo quantitas applicatam PM exprimens fit functio ipsius p impar, et propterea Q exhibere possit.

§. 27. Quaeritur nunc quomodo ex curua hac data inueniri et construi possit curua quaesita coordinatis orthogonalibus x et y contenta; seu quomodo ex p et Q datis inueniri et construi possint x et y. Id quod sequenti modo efficietur. Cum fit $x + py = c\sqrt{1 + pp} + Q$, erit $dx + pdy + ydp = cpdp : \sqrt{1 + pp} + dQ$. Quia vero est $dy = p dx$, erit $dx = dy : p$; vnde $dy(1 + pp) + ypdp = cppdp : \sqrt{1 + pp} + pdQ$. Diuidatur per $\sqrt{1 + pp}$ et habebitur $dy\sqrt{1 + pp} + ypdp : \sqrt{1 + pp} = cppdp : (1 + pp) + pdQ : \sqrt{1 + pp}$. Quae integrata dat $y\sqrt{1 + pp} = cspdp : (1 + pp) + spdQ : \sqrt{1 + pp}$. Quomobrem erit $y = \frac{cp - cspdp(1 + pp) + spdQ : \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{1 + pp}}$. Quoniam vero est $x = Q + c\sqrt{1 + pp} - py$, erit $x = \frac{c + cspdp(1 + pp) + Q\sqrt{1 + pp} - pspdpQ : \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{1 + pp}}$. Ex quibus constat et x et y, in meris p et Q dari, et consequenter curuam quaesitam ex data MAm construi posse.

§. 28. Vt exempla habeamus huiusmodi curvarum tautochronarum, pono $Q = ap$, erit $x + py = c\sqrt{1 + pp} + ap$, unde, facto $y - a = z$, fiet $xx + 2pxz + ppzz = cc + ccpp$, ergo $pp = \frac{2pxz + xx - cc}{cc - zz}$ consequenter $p = \frac{xz + c\sqrt{xx + zz - cc}}{cc - zz} = dy : dx = dz : dx$, siue $ccd z - zz dz - xz dx = c dx \sqrt{xx + zz - cc}$. Hanc aequationem, etsi ad rationalitatem reductam, nullo modo neque separare neque integrare potui, id quod mihi magnopere mirum videtur, cum uti perspicuum est curua nihilominus constructui possit. Est enim $y = \frac{cp - c\sqrt{1 + pp} - c\int dp : (1 + pp)}{\sqrt{1 + pp}}$ seu $z = \frac{cp - c\int dp : (1 + pp)}{\sqrt{1 + pp}}$ et $x = \frac{c + c\int p : (1 + pp)}{\sqrt{1 + pp}}$. Aequatio ergo inuenta construibilis est, quanquam consuetis modis reducendi nequaquam separari vel integrari possit. Non dubito, quin ex facie constructionis huius aequationis cognita multa praecleara de aliis aequationibus inseparabilibus inueniri queant.

§. 29. Modum hunc ad aequationes separatam difficiles perueniendi conferens cum schediastemate *Celeb. Hermannii* actorum Tomo II. inserto, pag. 188. quo methodum tradit infinitas aequationes differentiales construendi, deprehendi *Virum Celeb.* ope similis aequationis ei, ex qua nostrae aequationes deducuntur, quam vocat *Canonicam*, ad eiusmodi aequationes peruenisse. Ea igitur methodo omnes aequationes, quae nostro problemati satisfaciunt, quaeque forte cuiquam prorsus

prorsus inseparabiles videri queant, construi poterunt. Et sane *Hermannus*, cum aequationem §. 28. cum eo communicassem, eam statim ope methodi suae separauit, eandemque constructionem inuenit, quam ego a posteriori cognitam hic apposui. Dubitari itaque nequit, quin *Vir Celeb.* plurimum aequationum, quae adhuc inseparabiles habitae sunt, separationem sit daturus.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. I.

EXperientia constat corporum in se mutuo in- Tabula VII.
currentium motus immutari; quaestio igitur hinc nata est, quae sit huius alterationis motus causa. Dubitari quidem non potest, quin in ipso corporum conflictu ratio huius phaenomeni inuestigari debeat; corpus enim omne siue quiescens siue motum perseuerat in suo statu, nisi a vi quapiam cieatur et ex statu suo deturbetur. Quamobrem quaestio huc est reducta, vt definiatur, qua in re insit haec vis et quanta sit, quae motus mutationem in conflictu corporum producere valet. Praeterea etiam determinari debet, quantam

tam in collisione vtriusque corporis motus mutationem subeat.

§. 2. Inuentae sunt iam superiore seculo a viris maxime meritis *Wrenno*, *Wallisio* et *Hugenio* regulae communicationis motus ex quibus cognoscitur, duobus corporibus in se inuicem incurrentibus, quanta futura sit vtriusque corporis post conflictum celeritas. Regulae etiam istae experimentis egregie confirmantur, vt de earum veritate nefas effet dubitare. Variis tamen incedentes viis illi ad has regulas peruenerunt, et postmodum ab aliis plures ac diuersae inuentae sunt demonstrationes. Harum autem nulla, quantum mihi videtur, est genuina, sed deriuatae sunt omnes ex alienis principiis.

§. 3. Accedit ad hoc, quod nullus adhuc ipsam alterationis motus causam monstrauerit, neque quomodo corpora in se mutuo agere possint, explicuerit. Hanc ob rem operae pretium fore existimaui, istam dissertationem proponere, in qua regulae communicationis motus ex certissimis mechanicae principiis deducantur; simulque ostendatur, quomodo in ipsa collisione corpora in se mutuo agant motusque immutent.

§. 4. Accipio hic tanquam indubitatum principium, omnem motus vel diminutionem vel augmentationem vel directionis mutationem produci
a po-

a potentiis, idque successiue non saltu. Facile hoc a quoquam concedetur: nihil enim contra id afferri possit, nisi ipsa motus in collisione communicatio, in qua an natura non faciat saltum a multis est disputatum. Statuo igitur in concursu duorum corporum vtriusque corporis celeritatem a potentia inter corpora illa delitente immutari.

§. 5. Corpora in se mutuo impingentia vim actionis potentiae similem sentire elucescit praecipue in mollioribus corporibus vt cera vel argilla: facile enim perspicitur impressiones, quas sunt consequuta, non subito sed pedetentim esse factas; ex quo etiam ad duriora corpora concludere licet, successiue et per gradus mutationem fieri. Omnia autem corpora conflictu sibi mutuo impressiones imprimunt, quanquam hoc non de omnibus apparet. Sunt enim corpora, quae impressionem seu mutatam in conflictu formam non retinent, sed pristinam formam recuperant, quae elastica vocantur; illa vero quae mutatam in conflictu formam seruant, mollia.

§. 6. Inter haec duo genera innumerabiles continentur gradus intermedi; eorum scilicet corporum, quae impressiones acceptas ex parte tantum, non penitus, exuunt, ad quorum classem sine dubio omnia quae in mundo sunt corpora, pertinent. Neque enim perfecte reperietur corpus elasticum neque perfecte molle, sed omnia medii

Tom. V. X inter

inter haec generis deprehenduntur. Corpora porro tam elasticitate destituta seu mollia, quam elastica etiam differunt ratione duritiei, secundum quam alia aliis magis vel minus sunt dura. Durius autem vocatur corpus quod ab eadem vi minorem impressionem accipit, ex hocque intelligitur, quid sit corpus perfecte durum, quod nimirum a quaque vi finita infinite parvam tantum impressionem accipiat. Prout ergo haec impressio vel restituitur vel secus, corpus perfecte durum vel ad elasticorum vel non elasticorum classem pertinebit.

§. 7. Quando duo corpora elastica inter se collidunt alterum comprimit alterum, et sibi impressiones infligunt; postmodum vero se rursus in pristinam formam restitunt. Quamdiu corpora comprimuntur vel vtrumque corpus vel alterutrum saltem de motu suo amittit. Quando vero se restitunt, tum etiam motus in compressione amissus restituitur, sed aliter inter corpora distribuitur. In non elasticorum conflictu autem impressionem quam vtrumque accepit maximam retinet. Ad motum igitur corporum elasticorum post conflictum determinandum, requiritur, ut vtriusque corporis inuestigetur celeritas tum quando sunt prorsus restituta. Pro corporibus vero non elasticis, inueniri debet vtriusque corporis celeritas quam habet in statu maximae impressionis.

§. 8. Quemadmodum ad omnem motum generandum opus est potentia, ita etiam ad partes

COR-

corporis comprimendas et impressiones faciendas potentia requiritur; corpus enim omne vi inertiae vti motui ita quoque impressioni accipiendae resistit, quae a potentia superari debet. Hanc impressionis accipiendae difficultatem vt clarius percipiamus, corporibus annexa concipio elastra in loco, quo impressiones recipiunt. Loco igitur impressionum elastra haec comprimi pono; eodem enim redit siue id, quod comprimitur, sit ipsius corporis pars, siue elastrum corpori adiunctum.

§. 9. Inter corpora igitur A et B concurrentia pono elastrum *ab*, quod dum pergunt ad se inuicem accedere comprimatur. Haecque compressio elastri tamdiu durat, quoad motus, quo ad se inuicem accedunt, vim elastri potest superare, tunc ergo elastrum erit in statu maximae compressionis. Deinde si corpora sunt elastica, pono elastrum hoc interpositum vi sese restituendi pol- lere, si vero non sunt elastica, concipio, elastrum cum in statum maximae compressionis est redu- ctum, subito omnem vim sese expandendi amit- tere.

Fig. 11

§. 10. Hac ratione conflictum considerantes poterimus ex legibus Mechanicis, quas potentiae in alterandis motibus seruant, mutationes motuum in collisione corporum supputare. Notum enim est quantam eeleritatem data potentia in datum corpus agens dato tempore generare, nec non si fuerit motus corporis potentiae contrarius, de-

struere valeat. Elastrum autem inter corpora concurrentia conceptum, dum se expandere conatur vices potentiae subit, et quo id magis comprimitur, magis etiam corporum motus diminuitur.

§. 11. Quo magis elastrum istud comprimitur, eo etiam maiorem habeat oportet vim sese expandendi, sed quanta ea sit in quolibet compressionis gradu, non est opus ut sciamus; quamcunque enim seruet legem, eadem tamen denique post conflictum prodit motus distributio. Quantitatem ergo vis elastri expansivae generali litera utcumque variabili P designabo et a nulla alia pendente. Scilicet P mihi erit pondus, cuius nisi deorsum aequalis est vis elastri expansiva.

Fig. 2.

§. 12. Incurrat corpus A in elastrum AC vim P se expandendi habens, celeritate tanta quanta ex altitudine v graue cadendo acquirit; progrediatur puncto temporis per spatium $Aa = dx$, sitque celeritas quam in a habeat genita ex altitudine $v + dv$. Perspicuum est si esset $P = A$ corpus eodem modo retardatum iri, quo sursum proiectum a vi gravitatis retardatur, fore nempe $dv = -dx$, si esset $P = nA$ foret $dv = -Pdx : A$, si vis elastri motui corporis est contraria: sed si motum promoveat, erit $dv = +Pdx : A$.

Fig. 3.

§. 13. Moueatur corpus A in linea AO celeritate altitudini a debita, corpus vero B minori cele-

celeritate in eadem directione versus O ex altitudine b oriunda, occurrent haec corpora sibi inuicem, fietque conflictus. Pono ea tum in se mutuo agere incipere, cum distantia centrorum fuerit $=f$. Iphis igitur corporibus vt punctis consideratis interpositum concipio elastrum longitudinis f . Sit id AB, quando ergo corpus A reperietur in A, et B in B conflictus incipiet, elastrumque, quia A celerius mouetur quam B, magis continuo comprimetur.

Fig. 4.

§. 14. Reductum iam sit elastrum ad longitudinem PQ, quam pono $=f-x$. Sit celeritas quam corpus A cum in P venerit habet, ex altitudine v orta, celeritasque corporis B in Q ex altitudine u , et vis elastri quam nunc habet se expandendi sit $=P$. Tempusculo quam minimo progrediatur corpus A per elementum $Pp=dr$ et corpus B per $Qq=ds$; sitque altitudo exhibens celeritatem quam corpus A in p habebit $=v+dv$, et respondens altitudo celeritati corporis B in q $=u+du$. Erit $pq=PQ+Qq-Pp=f-x+ds-dr$, sed pq aequatur ipsi PQ vna cum suo differentiali, i. e. $pq=f-x-dx$. Habebitur consequenter $dx=dr-ds$.

§. 15. Quia elementa Pp et Qq simul ponuntur percursa, erunt ipsis celeritatibus, quibus percurruntur proportionalia. Quocirca est $dr:ds=\sqrt{v}:\sqrt{u}$, sunt enim ipsae celeritates vt radices qua-

dratae ex altitudinibus generantibus. Siue habeatur $\frac{dr}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dr-dx}{\sqrt{u}}$; ex hac aequatione reperitur $dr = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$, atque $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$.

§. 16. Corpus vero A dum progreditur per $Pp = dr$ contrariam habet vim elastri expansiuam P, eritque propterea ex §. 12. $dv = -Pdr : A$. Simili modo corpus B per $Qq = ds$ transiens a vi elastri P acceleratur eritque $du = +Pds : B$. Ex his aequationibus coniunctis reperitur $-Adv - Bdu = Pdr - Pds = Pdx$. Sumantur integralia erit const. $-Av - Bu = \int Pdx$, fiat autem $\int Pdx = 0$, si ponatur $x = 0$. Ad constantem determinandam ponatur $x = 0$, eritque tum $v = a$ et $u = b$, est propterea const. $= Aa + Bb$. Habemus igitur istam aequationem $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$.

§. 17. Resumamus aequationes $Adv = -Pdr$, et $Bdu = Pds$, substituamusque pro dr et ds valores inuentos, erit $Adv = \frac{Pdx\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ et $Bdu = \frac{Pdx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$. Habetur ergo ex illa $Pdx = -\frac{Adv\sqrt{v} + Bdu\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Erat autem ante $Pdx = -Adv - Bdu$. Ex hisque prodit $Adv\sqrt{u} = -Bdu\sqrt{v}$ seu $\frac{Adv}{\sqrt{v}} = -\frac{Bdu}{\sqrt{u}}$. Qua integrata obtinetur $A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = \text{const.} = A\sqrt{a} + B\sqrt{b}$. Talis enim esse debet constans vt etiam aequatio ante conflictum verum praebeat.

§. 18. Duas ergo inuenimus aequationes istas $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$; atque $A(\sqrt{a} - \sqrt{v}) + B(\sqrt{b} - \sqrt{u}) = 0$. Ex quibus celeritates cor-

tes corporum in quouis compressionis statu durante ipso conflictu inueniri possunt. Ad hoc vero requiritur, vt P sit cognita functio ipsius x , quo possit integrale sumi et in eo pro x status compressionis assumtus substitui.

§. 19. Hic autem praecipue celeritates vtriusque corporis post conflictum desiderantur. Quae-ramus eas primo pro corporibus elasticis, hocque in casu finitus est conflictus, quando fit iterum $x=0$, adeoque $\int P dx = 0$. Ex quo erit $A(a-v) = -B(b-u)$. Diuidatur altera aequatio per hanc, prodibit $\sqrt{a} + \sqrt{v} = \sqrt{b} + \sqrt{u}$. Atque ex postremis his duabus aequationibus facile eruitur $\sqrt{v} = \sqrt{a} + \frac{2B(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{A+B}$ et $\sqrt{u} = \sqrt{b} + \frac{2A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{A+B}$. Hic \sqrt{v} et \sqrt{u} denotant ipsas corporum A et B celeritates, quas post conflictum habebunt; at vero \sqrt{a} et \sqrt{b} celeritates eorum ante conflictum.

§. 20. Si corpora fuerint omni elasticitate destituta, conflictu finietur, quando elastrum est maxime compressum, hoc euenit si est $dx=0$ seu $dr=ds$, i. e. vbi $v=u$. Aequales ergo corpora non elastica habebunt post conflictum celeritates, adeoque coniuncta manebunt. Erit autem eorum communis celeritas \sqrt{v} vel $\sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a}+B\sqrt{b}}{A+B}$.

§. 21. Posui in his vtrumque corpus secundum eandem plagam moueri, hoc vero non impedit quo minus hae regulae sint vniuersales. Notum

tum enim est plagam mutari, mutata celeritate in negativam. Ita si poneretur $-Vb$ loco Vb haberentur regulæ communicationis motus pro corporibus in plagas oppositas motis.

§. 22. Simili modo inueniri possunt regulæ communicationis motus pro corporibus non perfecte elasticis: ad hoc vero requiritur, vt et nota sit lex vis elasticæ elastri, et quousque se restituere valeat. His autem definitis facile erit motum vtriusque corporis post conflictum determinare.

§. 23. Si corpora oblique in se impingant, aut si plura corpora simul collidant, quos post conflictum habitura sint motus, hic esset superfluum inuestigare. Propositum enim tantum erat hic regularum collisionis genuinam dare |demonstrationem: magis autem compositi casus ex his regulis resoluuntur, eatenusque sunt extra dubium positi, quatenus ab his simplicibus pendent.

DE
CVRVIS RECTIFICABILIBVS
ALGEBRAICIS

ATQVE
TRAIECTORIIS RECIPROCIS ALGE-
BRAICIS.

Auct. Leonh. Eulero.

QVanquam admodum facile est innumeras dare curuas algebraicas, quae rectificari possunt, quaerendis vel euolutis vel causticis curuarum algebraicarum; tamen si ordines curuarum consideremus, rarissime in iis occurrunt, quae re-ctificationem admittant. In ordine linearum secundo, qui ex sectionibus conicis constat, nulla est huiusmodi; in tertio duae habentur re-ctificabiles, quantum quidem constat. Cum autem ante aliquot annos in inueniendis traiectoriis recipro-
 cis algebraicis occupatus essem, methodum *Celeb. Iob. Bernoulli* primum sequutus diligentissime curuas re-ctificabiles anquirebam, vt iis ad propositum vterer. Detexi etiam in ordine sexto curuam re-ctificabilem, quae mihi praebebat traiectoriam algebraicam ordinis quarti, eaque satisfeci quaestioni tum agitatae, de exhibendis simplicioribus traiectoriis recipro-
 cis algebraicis. Inueni quoque multas aequationes generales curuas re-ctificabiles dantes, ex quibus in promptu erat omnes curuas re-
Tom. V. Y ctifica-

ctificabiles simpliciores eruere. Haec iterum nunc perlustrans deductus sum ad generalissimam quandam aequationem curuas rectificabiles omnes in se continentem. Insunt enim in ea plures quantitates vniuersales, pro quibus quicquid substituatur, curua rectificabilis prodit. Sit quantitas quaedam variabilis z , cuius differentiale ponatur constans, sintque P et Q huius variabilis z functiones quaecunque saltem algebraicae. Si iam hoc modo construatur curua vt eius abscissa, quae ponatur x , sumatur aequalis $P + \frac{dQ(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$ et applicata quam uoco $y = \frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP - dPddQ}$. Erit huius curuae longitudo s appellata aequalis $Q + \frac{dP(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$. Semper igitur quicunque valores literis P et Q tribuantur, curua erit rectificabilis et algebraica. Demonstrationem huius dare non opus esse iudico, cuilibet enim, si sumferit differentialia coordinatarum x et y et curuae s , innotescet esse $dx^2 + dy^2 = ds^2$ labore tantum est opus nullo autem artificio.

Haec forma quidem latissime patet, sed habeo tamen aliam adhuc multo generaliore, imo generalissimam sequentem. Designantibus vt ante literis maiusculis L , M et N functiones quascunque variabilis z , si sumantur

$$x = L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dLdN + dM\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2})}{dLdNddL + dMddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}}$$

$$y = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2})}{dLdNddL + dMddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}}$$

erit longitudo curuae respondentis

$s = N$

$$s = N + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2)}{dLdNddL + dM^2dNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLddM - dMddL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Formulae hae in praecedentes mutantur, si ponatur $M = 0$, sunt igitur illae in his contentae.

Facile perspicitur, si literae L , M et N non solum significant quantitates algebraicas, sed etiam transcendentales quasque, in istis formulis omnes prorsus contineri curvas tam algebraicas quam transcendentales. Quia enim hae functiones L , M et N nullo modo a se inuicem sunt pendentes, nulla excogitari potest aequatio inter x et y , siue sit algebraica siue transcendens, quae non ad praescriptas formulas esset reducibilis.

Simili modo si manente N functione vniuersalissima, ita tamen ut $\frac{dN}{dz}$ sit functio algebraica L vero et M denotent functiones algebraicas, omnes prorsus curuae algebraicae in formulis datis comprehenduntur; erunt autem eae rectificabiles si N assumatur functio algebraica, at vero si N non fuerit functio algebraica, sed transcendens seu a quadratura curuae cuiusdam pendens, curua resultans non erit rectificabilis, sed eius rectificatio pendebit a quadratura eius curuae. Hoc igitur modo soluitur etiam celebre illud problema multum inter Geometras agitatum, postulans methodum quadraturas curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi, cuius solutiones duae datae sunt in Actis Lipsiensibus a Viris Ce-

leberrimis *Iac. Hermanno* et *Iob. Bernoullio*. Ex istis vero formulis ita soluetur; sint curuae, cuius quadratura ad rectificationem curuae algebraicae est reducenda, coordinatae t et v quarum vtraque sit functio algebraica ipsius z . Sumatur $N = R + afvdt$, vbi R etiam designet functionem ipsius z algebraicam quacunque. Hoc posito dabunt formulae traditae omnes curuas algebraicas, quarum rectificatio a quadratura curuae propositae, scilicet a $\int vdt$ pendent, si quidem L et M assumantur, vt iam est monitum, functiones algebraicae ipsius z . Alter vsus harum formularum, quem hic exponere constitui, respicit ad inuentionem traiectoriarum reciprocarum; reperitur enim ex iis aequatio vniuersalissima omnes traiectorias reciprocas in se complectens, quae etiam facillime ita restringitur, vt algebraicas tantum easque omnes praebeat.

Tabula VII.
Fig. 6.

Nititur autem haec inuentio theoremate *Bernoulliano*, quo ex rectificatione curuarum diametrum habentium construuntur traiectoriae reciprocae, hoc modo: MAM est curua huiusmodi diametrum habens AP , et verticem A in quo tangens AQ , est perpendicularis ad diametrum AP . Per huius curuae singula puncta M ducantur rectae diametro parallelae, in iisque sumantur MN aequales arcibus AM , constituent puncta N curuam NAE traiectoriam reciprocam, cuius axis conuersionis est ipsa diameter PAB . Huius curuae si sumatur abscissa

sciffa AQ et applicata QN, erit $AQ = PM$ et $QN = AM - AP$. Quamobrem si curvae MAM coordinatae AP et PM eadem fumantur, quae ante vocatae erant x et y , habebitur statim aequatio pro traiectoria reciproca EAN. Quia vero non omnis curua in locum MAM collocari potest, in aequationibus supra traditis literae L, M et N quodammodo restringi debent, vt tantum curuas ad institutum accommodatas praebent. Cum omnes lineae AP, PM et AM sint functiones ipsius z , ita eae in z determinentur, vt sumto z affirmatiuo prodeat curuae MAM ramus dexter, at posito z negatiuo vt prodeat ramus sinister. Ad hoc requiritur, vt AP quia in utroque casu eadem manet, sit functio par ipsius z , seu functio quae immutata manet, etiamsi z fiat negatiuum. At PM et AM esse oportet functiones ipsius z impares, i. e. quae fiant negatiuae mutato z in $-z$. Quamobrem esse debet L functio par ipsius z M vero et N functiones impares. His enim positis absciffa aequabitur functioni pari, applicata vero et ipsa curua functionibus imparibus. Nam dL erit functio impar, ddL functio par, dM et dN functiones pares, atque ddM et ddN functiones impares. Ex quo perspicietur lineas AP, PM et AM requisitam habituras esse proprietatem. Erit igitur

$$AQ = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLdM - dMdL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Atque traiectoriae reciprocae EAN applicata erit

$$QN = N - L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2 - dLdN - dM\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)})}{dLdNddL + dMdNddM - dL^2ddN - dM^2ddN + (dLdM - dMdL)\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}}$$

Ex hac constructione fluent omnes trajectoriae reciprocae, si loco L , M et N substituantur functiones non solum algebraicae, sed etiam transcendentes. Algebraicae vero trajectoriae reciprocae omnes habebuntur, si eae quantitates fuerint functiones algebraicae, et quidem vt requiritur L functio par, atque M et N functiones impares.

Notandum porro est etiam $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$ esse debere functionem ipsius z imparem quemadmodum dL . Ponatur igitur $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = dL - dS$, vbi dS est functio impar ipsius z , adeoque S functio par erit $\frac{dN^2 - dM^2 + dS^2}{2dS} = dL$, ex quo erit dL functio impar vt requiritur, et $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)} = \frac{dN^2 - dM^2 - dS^2}{2dS}$. Erit igitur $L = \frac{1}{2} \int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} + \frac{1}{2} S$. Quamobrem vt trajectoria reciproca fiat algebraica, oportet $\frac{dN^2 - dM^2}{dS}$ esse integrabile. Erit autem abscissa $AQ = M + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)((dN + dM)^2 - dS^2)}{4dS(ds dM + dS dN - dN ds - dM ds)}$ et $QN = N - \frac{1}{2} \int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} - \frac{1}{2} S + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)(4dM dN + (dN - dM - dS)^2)}{4dS ds dM + ds dN - dN ds - dM ds}$. Quamdiu autem $\sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$ manet quantitas surda, non opus est peculiari determinatione, est enim radix quadrata ex functione pari non quadrato tam functio par quam impar.

SPECIMEN

THEORIAE NOVAE

DE

MENSURA SORTIS.

AVCTORE

Daniele Bernoulli.

I.

EX eo tempore, quo Geometrae considerare coeperunt mensuras sortium, affirmarunt omnes, *valorem expectationis obtineri, cum valores singuli expectati multiplicentur per numerum casuum quibus obtingere possunt, aggregatumque productorum dividatur per summam omnium casuum: casus autem considerare iubent, qui sint inter se aequae proclives: Hacque posita regula, quodcunque reliquum est in ista doctrina huc redit, ut casus omnes enumerentur, in aequae proclives resoluantur atque in debitam classem disponantur.*

§. 2. Demonstrationes huius propositionis, quarum quidem in lucem prodierunt multae, si recte examines, omnes videbis hac inniti hypothesisi, *quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat vni quam alteri, unicuique aequae sint adiudicandae partes; rationes autem nullas considerari,*
quae

personarum statum respiciant, solasque illas perpendi, quae ad conditiones sortis pertineant. Talem sententiam ferant iudices supremi publica auctoritate constituti, at vero hoc loco non iudicia sed consilia danda sunt; regulae nempe, quibus quisque suam sibi aestimare debeat sortem pro diuersa rerum suarum constitutione.

§. 3. Vt appareat, non male hoc ita moneri, pone casu aliquo homini plane pauperi sortem contigisse, qua pari probabilitate aut nihil aut viginti millia ducatorum obtinebit, an sortem suam hic aestimabit decies millenis ducatis, et male sibi consuluerit cum nouem millibus eam venderit? Id mihi non videtur, quamuis et credam hominem admodum opulentum sibi deficere, cum illam si potuerit eodem pretio acquirere recuset: si vero hac in re non fallor, perspicuum est, non posse omnibus hominibus pro eodem modulo mensuram sortis assignari nec proinde adhaerendum esse regulae §. 1. Sed et quiuis perspiciet, qui haec attente considerare voluerit, ita definiri posse vocem *valoris*, qua in ista regula vsi sumus, vt tota deinceps sine scrupulo omnibus sit accipienda, nempe *valor* non est aestimandus ex pretio rei, sed ex *emolumento*, quod vnusquisque inde capeffit. Pretium ex re ipsa aestimatur omnibusque idem est, *emolumentum* ex conditione personae. Ita proculdubio pauperis magis refert lucrum facere mille ducatorum quam diuitis, etsi pretium vtrique idem sit.

§. 4.

§. 4. Eo iam deducta est res, ut unus vo-
 cis mutatione quivis sibi consulere possit: quia au-
 tem nova est hypothesis, indigebit illa dilucidatio-
 ne aliqua. Constitui itaque speciminis loco expo-
 nere, quae eam in rem meditatus sum; Regulae
 interim fundamentalis loco hac utemur: *Cum emolu-
 menta singula expectata multiplicantur per numerum
 casuum, quibus obtinebuntur aggregatumque productorum
 dividitur per numerum omnium casuum, obtinebitur
 emolumentum medium, et lucrum huic emolumento
 respondens aequivalebit sorti quae sitae.*

§. 5. Verum sic liquet, nullam posse mensu-
 ram sortis obtineri, nisi simul innotescat *emolu-
 mentum*, quod ex lucro quovis unicuique venit, et
 vice versa quantum lucrum requiratur ut cer-
 tum inde eveniat emolumentum, qua de re vix
 est ut aliquid certi dici possit, quandoquidem a
 variis circumstantiis mutari potest. Ita quamvis
 plerumque a lucro simili magis alleuetur pauper
 quam opulentus, posset tamen ex gr. hominis ca-
 ptiui bis mille ducatos diuitis, cui altero tanto opus
 sit pro libertate redimenda plus referre lucrum bis
 mille ducatorum, quam alterius non ita diuitis; hu-
 iuscemodi autem exempla quamvis fingi possent
 sine fine, oppido tamen rara sunt. Considerabi-
 mus igitur potissimum, quid plerumque contingat
 atque ut rectius rem intelligamus, bona hominis
 censibimus sensim sensimque incrementis infinite
 parvis continuo augeri. Ita vero valde probabile
 Tom. V. Z est

est *lucrum quoduis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale*. Dum hanc hypothesein illustrem, dicam quid *bonorum summa* mihi significet, nempe omnia ea, quae victum, amictum fortunam commodam, imo et luxum omniumque desideriorum expletionem subministrare et largiri valent, ita ut nemo nihil habere dici possit nisi quem fames extingit, sitque plurimis bonorum potissima pars industria, quae vel ipsam mendicitatem in se continet: qui mendicando decem annuatim aureos sibi comparat, is non facile accipiat summam quinquaginta aureorum cum conditione ut nihil unquam sibi mendicet aut alio modo acquirere tentet, iisque expensis salutem omnem habeat rescissam; quinimo de iis etiam, qui nihil habentes aere premuntur alieno, dubito, an se eo liberari simulque summam longe maiorem dono accipere velint cum tali conditione. Iam vero si mendicus pactum inire nolit nisi summam paratam obtineat minimum centum aureorum, nec ille qui aere alieno laborat nisi mille aureos accipiat, priorem centum, alterum mille aureis diuitem dicemus quamuis communi loquendi modo ille nihil, hic vero minus quam nihil habeat.

§ 6. His ita definitis redeo ad id quod in superiori paragrapho indicaui, nempe nisi quid insoliti interueniat *aestimari posse emolumentum lucri valde parui summae bonorum reciproce proportionale* Equidem cum recte considero, qua natura homines

comparati esse soleant, video hanc positionem plerisque applicari posse. Pauci sunt, qui non annuos suos reditus dispendant omnes: iam vero, si vnus bona valeant centum mille ducatos, alterius totidem semiducatos; si ille annuos inde reditus obtineat quinquies mille ducatorum, hicque rursus totidem semiducatorum; perspicuum est omni respectu priori ducatum esse quod alteri semiducatum, atque adeo lucrum vnus ducati priori non plus valere, quam lucrum semiducati alterum iuuat. Si igitur vterque lucrum faciat vnus ducati, alter duplum inde emolumentum accipiet duos nempe lucratus semiducatos, quod exemplum quoniam instar omnium est, alia afferre superfluum puto. Eo verior est haec propositio, quod maxima hominum pars bona alia praeter industriam vix habet, et ex hac sola perpetuo viuit. Sunt tamen quibus vnus ducatus magis cordi est, quam sunt plures ducati homini minus diuiti magis autem generoso. Quia vero nos deinceps considerabimus vnum eundemque hominem nihil id ad nos attingit. Qui minus lucro delectatur, is quoque patientius fert damnum. Verum tamen quia aliquando particulares esse possunt causae quibus res secus se habet, pertractabo argumentum generalissime, quam ad specialem nostram descendam hypothesin, vt sic omnibus satisfiat.

§. 7. Denotet igitur AB summam bonorum ante sortem decisam; dein producta AB construat
Z 2
Tabula VII.
Fig. 5.
tur

tur super BL curua BGS cuius applicatae CG, DH, EL, FM etc. ceu *emolumenta* respondeant abscissis BC, BD, BE, BF etc. vt lucris. Sint porro m, n, p, q etc. numeri denotantes quot modis obtineantur lucra BC, BD, BE, CF, etc, erit (per §. 4.) *emolumentum* medium $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m+n+p+q}$ + etc. Si vero nunc in linea AQ ad lineam AR perpendiculari sumatur AN = PO, erit recta NO = AB, id est, BP lucrum legitime expectandum seu fors quaesita. Iam si porro scire velimus, quantum debeat esse depositum pro sorte ista obtinenda, continuanda est curua in partem contrariam, ita vt nunc abscissa Bp denotet vbique iacturam, applicata vero po damnum iacturae. Quoniam autem in ludo iustae conditionis damnum iacturae debet esse aequale emolumento lucri, erit sumenda An = AN, vel po = PO, atque sic denotabit Bp depositum, ultra quod nemo ire debet, qui rebus suis bene contulere cupit.

Corollarium I.

§. 8. In hypothefi haecenus ab auctoribus adhiberi solita, qua ponitur lucrum quoduis ex se solo esse aestimandum, semperque *emolumentum* afferre sibi simpliciter proportionale, fit linea BS recta: vnde sequitur si fuerit $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m+n+p+q}$ + etc. fore etiam sumtis ab vtraque parte proportionalibus $BP = \frac{m.BC + n.BD + p.BE + q.BF}{m+n+p+q}$ + etc., quod conforme est cum regula communiter adhibita.

Co-

Corollarium 2.

§. 9. Si AB fuerit infinita ratione lucri vel maximi BF, quod speratur, erit arcus BM instar lineolae rectae infinitae paruae considerandus, hocque in casu rursus locum habet eadem ista regula vulgaris, quae adeoque valet proxime in omnibus ludis qui haud magni sunt momenti.

§. 10. Postquam sic argumentum pertractauimus generalissime, pergemus ad hypoth. sin illam particularem supra memoratam, quae sane prae omnibus aliis considerari meretur. Ante omnia quaerenda est natura curuae sBS manentibus positionibus paragraphi septimi: quia vero vi hypotheseis lucrula infinite parua sunt consideranda, censēbimus lucra BC et BD tantum non aequalia, ita differentia CD sit infinite parua; ductaque Gr ipsi BR parallela erit rH *emolumentum* infinite paruum hominis cuius bona sunt AC et qui facit lucrum minimum CD. Istud vero *emolumentum* non solum ex lucrulo CD, cui utique caeteris paribus est proportionale, sed et ex summa bonorum AC, cuius rationem sequitur inuersam, est aestimandum. Igitur si ponatur $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$; $AB = a$, denotetque b constantem quantitatem quamcunque, erit $dy = \frac{b dx}{x}$, vel $y = b \log. \frac{x}{a}$. Est itaque curua sBS logarithmica cuius subtangens vbique $= b$ et cuius asymptotos est Qq.

§. 11. Si nunc comparentur haec cum iis, quae paragrapho septimo dicta sunt, apparebit esse $PO = b \log. \frac{AP}{AB}$, $CG = b \log. \frac{AC}{AB}$, $DH = b \log. \frac{AD}{AB}$; et sic porro; ergo cum fuerit $PO = \frac{m.CC + n.DH + p.EL + j.FM}{m+n+p+q}$ + etc., erit nunc $b \log. \frac{AP}{AB} = (mb \log. \frac{AC}{AB} + nb \log. \frac{AD}{AB} + pb \log. \frac{AE}{AB} + qb \log. \frac{AF}{AB} + \text{etc.}) : (m+n+p+q + \text{etc.})$; unde deducitur $AP = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q \cdot \text{etc.})^{\frac{1}{m+n+p+q + \text{etc.}}}$, et cum ab hac subtrahitur AB remanebit BP sortem denotans quaesitam.

§. 12. Subministrat praecedens paragraphus hanc regulam: *lucrum quoduis summa bonorum auctum eleuetur ad dignitatem indicatam per respondentem numerum casuum; dein omnes hae dignitates inter se multiplicentur et ex curuarum producto extrahatur radix ordinis indicati per numerum omnium casuum: tum denique a radice subtrahatur summa omnium bonorum: quod residuum est, indicabit sortem quaesitam.* Arque haec propositio est principalis pro dimetienda sorte in variis casibus, cui nunc ut factum est haecenus in hypothesi communi, theoriam integram; quod opus tum vtilitate tum nouitate sua se commendare posset, superstruerem, si id alii incepti labores permitterent. Nunc quidem inter ea, quae se mihi prima obtulerunt fronte, notabiliora quaedam tantum allegabo.

§. 13. Et primo quidem apparet, quum conditiones ludi finguntur vel aequissimae, vtrumque col-

collusorum tamen praeiudicium exinde accipere; egregium profecto naturae documentum vitandae aleae.. Sequitur id autem ex concavitate curvae sBS versus BR, qua fit, vt facto deposito Bp aequali lucro sperato BP, sit *detrimentum po*, quod ex sinistro euentu oritur semper maius emolumento PO quod speratur. Quamuis autem id satis per se pateat Geometris, attamen vt intelligatur ab omnibus exemplo illustrabo. Sint duo collusores, quorum quivis in bonis centum habeat ducatos, horumque partem dimidiam forti in vtramque partem aequae proclivi committat. His ita positus habebit quivis quinquaginta ducatos vna cum spe centum ducatorum: vtriusque autem summa per regulam paragr. 12. valet tantum $(50 \cdot 150)^{\frac{1}{2}}$ seu $\sqrt{50 \cdot 150}$ id est, minus quam octoginta septem ducatos, ita vt vterque a ludo quamuis aequissimae conditionis detrimentum capiat plusquam tredecim ducatorum: at vero vt simul appareat veritas illa, quam quivis naturalis luminis instinctu agnoscit, eo maiorem nempe esse aleatoris imprudentiam quo partem bonorum suorum notabiliorem fortunae exponat, considerabimus idem exemplum hoc solo interposito discrimine, alterum collusorem ante depositos quinquaginta ducatos habuisse ducentos: is tunc damnum accipit, quod exprimitur per $200 - \sqrt{150 \cdot 250}$, nempe parum ultra sex ducatos.

§. 14. Cum itaque inconsiderate agit, quicumque paribus conditionibus vel minimam bonorum suorum partem alearum fortunae credit, conueniet hic inquirere quamnam in deponendis nummis quibus praerogatiuam habere debeat prae collusore, ut sine praeiudicio ludum inire possit. Ludum vero fingemus simplicissimum rursus, duobus nempe definitum casibus, aequè procliuibus altero secundo altero contrario; sit lucrum euentu prospero impetrandum $= a$, depositum euentu sinistro perdendum $= x$; summa bonorum $= \alpha$; sic igitur erit $AB = \alpha$; $BP = a$; $PO = (\S. 10) b \log. \frac{\alpha+a}{\alpha}$ et quum (per §. 7.) sit $p\theta = PO$, erit per naturam logarithmicæ $Bp = \frac{\alpha'}{\alpha+a}$; denotat autem Bp depositum x ; est igitur $x = \frac{\alpha^2}{\alpha+a}$, quæ quantitas semper minor est quam lucum speratum a ; exinde etiam deducitur, stulte hunc agere qui omnia sua bona periclitatur spe lucri quantumuis magni, quod nemo difficulter sibi persuadebit, si recte perpenderit definitiones nostras præmissas. Hinc etiam est, quod in vita ciuili vnanimiter videtur receptum, hominem nempe cum ratione rem dubiam tentare posse, quam alius non possit.

§. 15 Hic præsertim consideratu digna sunt quæ mercatoribus solennia sunt in vadandis mercibus, quæ mari vehuntur; id vero sequenti explicabo exemplo. Caius Petropoli degens merces coëmit Amstelodami, quas si præsentem habeat
Petro-

Petropoli, vendere potest pro decem millibus Rubelonibus. Curat igitur ut mari aduehantur, dubitat autem an vade uti debeat nec ne? Interim non ignorat inter centum naues eo anni tempore Amstelodamo Petropoliu proficiscentes quinque perire tantum solere; nec tamen vadem reperire potest infra pretium octingentorum Rubelonum, quod enorme putat. Queritur igitur quanta Cui bona esse debeant praeter praedictas merces, ut cum ratione sponsonem negligere possit: sint illa $=x$; erunt eius bona vna cum spe mercium felicis appulsus $=\sqrt[100]{(x+10000)^{96}x^4}=\sqrt[20]{(x+10000)^{19}x}$, si sponsonem non fuerit usus; si vero usus fuerit, habebit summam certam $x+9200$. Aequatis autem hisce quantitibus fit $(x+10000)^{19}x=(x+9200)^{20}$ seu proxime $x=5043$. Si proin Caius plus habuerit praeter mercium suarum expectationem quam quinque milia quadraginta tres Rubelones, bene faciet recusando sponsonem, sin minus accipiendo. At si quaeratur quanta bona ille qui pro octingentis Rubelonibus se sponforem exhibuit minimum possidere debeat, ut cum ratione sponsonem in se suscipere possit, ponimus eius bona $=y$; et erit $\sqrt[20]{y+800}^{19} \cdot (y-9200) = y$, seu proxime $y=14243$, qui numerus sine nouo calculo ex praecedente colligi etiam potuisset. Qui minus diues est inepte se vadem offert, quod tamen opulentior non sine ratione facit. Hinc intelligitur quam commode huiusmodi sponsones introductae

fuerint, cum parti vtrique magno inferuire possint emolumento. Pariter si sexcentis Rubelonibus Caius vadem habere possit, imprudenter recuset eum, si minus habeat quam 20478. R. nimisque timide agit, si plus quam 20478. diues merces vadatur. Ita quoque inconsiderate ageret qui minus quam 29878. R. habens se Caio sponso-rem offerret pro sexcentis Rubelonibus; bene autem sibi consulat, si id faciat quum plus habet. Nemo interim, quantumvis diues rebus suis bene prospiceret, si quingentis Rubelonibus sponsonem in se fusciperet.

Tabula VI.
Fig. 2.

§. 16. Praeterea ex hac nostra theoria alia sequitur regula hominibus non inutilis futura; scilicet consultius esse bona illa, quae periculo sunt obnoxia, in plures distribuere partes quam omnia simul periclitari; haec rursus explicabo. Sempronius bona habet praesentia in vniuersum 4000. duc. et in terris exoticis insuper merces possidet pro 8000. duc. quae non aliter quam mari aduehi possunt. Constat autem ex diuturno rerum vsu ex decem nauibus vnā perire. His ita stantibus dico Sempronii, si omnes 8000. duc. vni naui credat, expectationem a mercibus valere 6751. duc. qui nempe numerus est $\sqrt[10]{12000 \cdot 4000 \cdot 8000} - 4000$. Si vero partibus aequalibus duabus nauibus merces committat, expectatio sibi valebit $\sqrt[100]{12000 \cdot 8000 \cdot 4000} - 4000$, id est, 7033. duc. Atque sic augebitur Sempronii expectatio, quamdiu partem vni naui

naui committendam diminuit, nec tamen vnquam excedet ista expectatio valorem 7200. duc. Idem hoc monitum inseruiet iis etiam, qui bona sua litteris cambialibus credunt, aut aliis fortunae casibus exponunt.

§. 17. Plurima certe sunt alia noua plane eaque haud inutilia, quae nunc praeterire cogor. Maximam quidem eorum partem quibus cordatus tacito naturae instinctu aliququaliter videt et sequitur, nemo autem fortasse crediderit, posse ea tam praecise definiri, vt in his exemplis factum est. Cum igitur ita sit vt omnia haec theoremata tam egregie consentiant cum iis, quae natura edocti sumus, iniquum esset ceu nudas veritates hypothesebus precariis innixas, ea negligere. Confirmabitur id etiam sequenti exemplo, quod hisce meditationibus occasionem dedit, et cuius historia haec est. Proposuit aliquando Cel. *Nicolaus Bernoulli*, in Academia Basiliensi Iuris vtriusque Professor, Honoratissimus meus Patruelis, Cl. *Montmortio* quinque problemata, quae videre est dans l'analyse sur les jeux de bazard de Mr. de *Montmort* p. 402. Horum problematum vltimum huc redit, *Petrus in altum proiicit nummum, idque donec in terram delapsus notatam semel ostenderit frontem: si vero id primo contingat iactu, tenetur Paulo dare ducatum vnum; si secundo duos; si tertio quatuor; si quarto octo; et sic porro duplicando quouis iactu ducatorum numerum: Quaeritur fors Pauli?*

Huius problematis mentionem fecit praefatus meus Patruelis in epistola, quam ad me dedit, cupiens de eo sententiam meam scire. Quandoquidem calculus dicit, sortem Pauli infinitam esse, nec tamen ullus sanae mentis, ut dicit, futurus sit, qui non libentissime spem suam vendiderit pro summa vigintiducatorum. Reuera quoties principiis communibus rem aggredimur, inuenimus sortem Pauli infinitam, quamuis nemo eam pretio vel admodum mediocri sibi sit comparaturus. Quum vero nostris principiis calculum absoluimus, intelligimus demum huius nodi solutionem. Solutio problematis ad principia nostra accommodata haec est.

§. 18. Infiniti sunt casus hic considerandi: horum autem pars dimidia facit ut ludus primo finiatur iactu; pars quarta ut finiatur iactu secundo; octaua ut tertio, decima sexta ut quarto et sic deinceps. Si proin numerus casuum omnium quamuis infinitus indicetur per N ; patet esse casus numero $\frac{1}{2}N$, quibus Paulus lucratur unum ducatum; $\frac{1}{4}N$ quibus duos; $\frac{1}{8}N$ quibus quatuor; $\frac{1}{16}N$ quibus octo, et sic sine fine. Fuerint nunc Pauli bona uniuersa $= \alpha$, et erit fors ipsius quaesita $= \sqrt[N]{(\alpha + 1)^2} \cdot (\alpha + 2)^{\frac{N}{4}}$
 $(\alpha + 4)^{\frac{N}{8}} \cdot (\alpha + 8)^{\frac{N}{16}} \cdot \text{etc.} - \alpha$, siue $= \sqrt{(\alpha + 1)}$
 $\sqrt[4]{(\alpha + 2)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha + 4)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha + 8)} \cdot \text{etc.} - \alpha$.

§. 19. Ex hac formula sortem Pauli indicante, sequitur hanc crescere crescentibus bonis, et nunquam

quam fieri infinitam, nisi cum simul bona sunt infinita. Corollaria specialia haec sunt. Si nihil habuerit Paulus, fors eius erit $= \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8}$. etc. quae praecise sic ipsi valet duos ducatos. Si decem habuerit ducatos, proxime tres valebit expectatio, et quatuor cum triente praeter propter si centum habuerit, ac denique sex cum mille habuerit. Facile hinc iudicatu est quam immensas quis diuitias possidere debeat, ut cum ratione viginti ducatis sortem Pauli emere possit. Pretium autem quo emi debet, quamuis differat a sorte quae iam possidetur, quia tamen admodum exigua est differentia, quando a est numerus magnus, vnum alteri aequale statui potest: accurate autem posito emtionis pretio $= x$, determinatur, eius valor hac aequatione $\sqrt[2]{(a+1-x)} \cdot \sqrt[4]{(a+2-x)} \cdot \sqrt[8]{(a+4-x)} \cdot \sqrt[16]{(a+8-x)}$ etc. $= a$, cui proxime satisfacit cum a est numerus magnus haec aequatio $x = \sqrt[2]{(a+1)} \cdot \sqrt[4]{(a+2)} \cdot \sqrt[8]{(a+4)} \cdot \sqrt[16]{(a+8)}$. etc. $- a$.

Praelecta hac dissertatione coram Societate misi eius apographum supra memorato D: no Nicolao Bernoulli ut intelligerem quid de mea propositae suae difficultatis solutione sentiret. Is vero in epistola, quam A. 1732. ad me scripsit, testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modo quiuis suae sortis aestimator sit, aliter vero se

rem habere, si tertius instar iudicis secundum aequitatem et iustitiam unicuique collusorum sortem assignare debeat. Id ipse pariter in §. 2. exposui. Communicavit deinae Vir Clar. mecum sententiam, quam de eadem difficultate tulit Cel. Cramerus aliquot ante annis, quam dissertationem meam conscripsssem et quam usque ad 20 meae conformem inveni, ut mirum sit in tali argumento tam accurate nos consentire potuisse. Igitur operae pretium erit verba apponere, quibus Cl. Cramerus ipse sententiam suam aperuit in litteris A. 1728. ad Patruelem meum datis: ita autem ille:

“Je ne sai si jene me trompe, mais je crois
 “tenir la resolution du cas singulier, que Vous
 “avez proposé à Mr. de Moymort dans Votre lettre
 “du 9. 7bre 1713. Probl. 5. pag. 402. Pour ren-
 “dre le cas plus simple je supposerai que A jette
 “en l’air une piece de monnoye, B s’engage
 “de lui donner 1 ecu si le coté de la croix tombe
 “le premier coup, 2 si ce n’est que le second,
 “4 si c’est le troisieme coup, 8 si c’est le quatrieme
 “coup &c. Le paradoxe consiste en ce que le cal-
 “cul donne pour l’equivalent que A doit donner à B
 “une somme infinie, ce qui paroît absurde, puisqu’il
 “n’y a personne de bon sens, qui voulut donner 20.
 “ecus. On demande la raison de cette difference
 “entre le calcul mathematique et l’estime vulgaire.
 “Je crois qu’elle vient de ce que (*dans la theorie*)
 “les mathematiciens estimant l’argent à proportion
 “de sa quantité & (*dans la pratique*) les hommes de
 “bon

bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. Ce qui rend l'esperance mathematique infinie c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir, si le coté de la croix ne tombe que bien tard, le centieme ou le millieme coup. Or cette somme si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage pas plus à accepter le parti, que si elle n'étoit que 10 ou 20 millions d'ecus. Supposans donc que toute somme au dessus de 10 millions ou (pour plus de facilité) au dessus de $2^{24} = 166777216$ d'ecus lui est egale, ou plutot que je ne puisse jamais recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que vienne le coté de la croix, et mon esperance sera

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \dots + \frac{1}{2^{23}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \times 2^{24} + \&c. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ jusqu'à } 24 \text{ termes, } + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. = 12 + 1 = 13.$$

Ainsi moralement parlant mon esperance est reduite à 13 ecus et mon equivalent à autant, ce qui paroît bien plus raisonnable que de le faire infini.

Vaga est hactenus ista solutionis explicatio et contradictioni obnoxia; si enim verum sit, non maiorem nobis videri summam 2^{25} quam 2^{24} , nulla omnino attentio facienda erit ad summam, quam acquirere possim post vigesimum quartum iactum, quippe ante vigesimum quintum iactum faciendum iam possideam $2^{24} - 1$, quod non differt in hac theoria ab 2^{24} . Eodem igitur iure spem meam 12 scudos valere dici potest quam 13. Id vero nequaquam dico ad impugnandum Auctoris prin-

principium, quod meum quoque est, que les hommes de bon sens doivent estimer l'argent à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire, seu potius ne quis inde occasionem capiat male sentiendi de ipsa theoria. Verum id ipsum etiam expressis indicat verbis Cl. Cramerus in sequentibus, quae plane ad mentem nostram sunt. Sic igitur pergit:

“ On le (l'équivalent) pour ra encor trouver
 “ plus petit en faisant quelque autre supposition de
 “ la valeur morale de richesses; car celle que je viens
 “ de faire n'est pas exactement juste, puisqu'il sera
 “ vrai que 100. millions font plus de plaisir que 10
 “ millions quoiqu'ils n'en fassent pas 10. fois plus.
 “ Par exemple si l'on vouloit supposer que la valeur
 “ morale des biens fut comme la racine quarrée
 “ de leurs quantités mathematiques, c'est à dire,
 “ que le plaisir que me fait 40000000. fut double
 “ du plaisir que me fait 10000000., alors mon
 “ esperance morale seroit

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \frac{1}{16}\sqrt{8} + \text{etc.} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

“ Mais cette quantité n'est pas l'équivalent, car
 “ l'équivalent doit être non pas égal à mon espé-
 “ rance, mais tel que le chagrin de sa perte soit
 “ égal à l'esperance morale du plaisir que j'espere
 “ de recevoir en gagnant. Donc l'équivalent doit
 “ être (par supposition) $(\frac{1}{2-\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} = 2,$
 “ 9 &c., moins que 3. ce qui est bien mediocre
 “ & que je crois pourtant aprocher plus de l'esti-
 “ me vulgaire que 13. &c.

CLASSIS

CLASSIS SECVNDA
CONTINENS
PHYSICA.

Tom. V.

Bb

1917-18-19

1917-18-19

ADVERTISE

1917

DE
GLANDVLIS RENALIBVS
EVSTACHII.

AVTORE

J. G. Du Vernoi.

§. I.

Glandulas Renales nil aliud esse quam simplices Capsulas ad vsum Renum potissimum fabricatas, id opinor tam earum partium ante et post partum contemplatione, quam circumstantiis aliis non tam conicere quam demonstrare proclive est: Viceversa, cum praeconcepta glandulae ideae, quae multorum animis inhaeret, eas minus consentire improsperasque fore eiusmodi principio subnixas disquisitiones fere existimandum esse. Quamobrem, ad illustrandam hancce Corporis Humani particulam, operae pretium esse, insigniora phaenomena seu obseruationes tam e Foetuum quam Adultorum perlustratione ed spectantes, coram Academia paucis exponere, vtilum est.

Obs. I. Glandulas Renales in vtrouis latere Renibus constanter assidentes inuenio, quumque

Ren extrahitur, eas perpetuo sequi vnamque cum eo massam conficere video, sicuti is situs a Cel. *Rbuysch. Thes. 1. n. V. not. 2. seqq.* verbis describitur: *Superior inquit pars Renis veri, succenturiato non solum est contigua, verum etiam membranofo et admirando nexu inter se connectuntur, sc. Ren succenturiatus excavatus est parte sui inferiore, quam in cauitatem supremam partem Renis veri tanquam in acetabulum admittit, in modum articulationis ossium, quae per arthrodiam fit.*

II. Exterior earundem conformatio, frequentius quam in aliis partibus variabilis visa est, idque non in diuersis solummodo, sed quoque in vno eodemque subiecto: Nam interdum in latere dextro, alia figura, alia magnitudine, alia soliditate quam in laeuo visae sunt.

III. In nonnullis foetibus monstrisque, solidae fere visae sunt, absque sinu intermedio sensibili.

IV. In aliis foetibus, eas humore sanguinis aemulo, rubicundo, fluidore distentas saepenumero obseruauimus.

V. In Respiratione vtentibus contra, compressas et depresso deprehendi.

VI. Quoad magnitudinem, cum in foetu tum in adultis Renem haud aequant.

VII. Flatu seu liquore iniecto, earum latera facile a se inuicem diduci possunt.

VIII. Flatu per venam immisso, momento turgent ac in tumorem eleuantur.

IX. Aperta glandula, modum exploraturus quo ista inflatio fieret, inieci mercurium: Mox in interiore superficie plurimi ductus mercurio impleti sunt, e quorum orificiis mercurius exstillabat: Qualia orificia iam á *Warthono* obseruata reperio.

X. Duplex ad vnamquamque Glandulam arteria cum simplici vena tendit: id vero animaduersione dignissimum est, ductus innumerabiles radiorum forma circa glandulam protensos esse, circumque admirabilem circa eam efformare.

XI. E pariete inferiori glandulae, vas exiguum quod arteriae magnae propago est, e glandula prodire visum, in comitatu arteriae spermaticae, apud viros ad testes, apud foeminas ad ouaria descendere visum est.

§. 2. Postrema obseruatio ante reliquas ventilari meretur, quoniam supra allegatam glandulae ideam, certis ductibus humorem peculiarem deuehentibus subnixam corroborare videtur. Isti ductus referente *Valisnerio*, a *Celeb. Valsalua* primum detecti sunt, qui postquam certos ductus in viris ad *Epididymides*, in mulieribus vero ad ouaria tendentes obseruasset, in eam perductus est coniecturam eas forte ad generationem conferre. Eiusmodi autem ductum iuxta *Obs. XI.* e glandula prodire visum ac in utroque sexu versus organa genera-

tionis tendentem conspicere quoque procliuè erat, in cuius certe disquisitione, ob vasculorum exilitatem et profundum glandulae situm, singulari cautione, et industria opus est. Quamobrem ea similitudine inter ductum *Valsaluae* et Nostrum apparente, ad Viri Cl. sententiam initio accedebam, sperans videlicet, postquam eo inuento praecipuae difficultates ad ductuum existentiam spectantes sublatae essent, amplam tam inuenti quam vsus nos aliquando seu ex ipsismet Cl. Autoris obseruationibus seu proprietatum disquisitionum ope accepturos esse: Tum temporis enim, omnes in praefatis *Obseruationibus* X. et XI. obuiaè circumstantiae haud satis perspectae erant, quae tamen ad propositae disquisitionis intelligentiam scitu necessariae et vtilissimae sunt, uti ex sequentibus perspicuum erit: Nempe, contra meam praefatam sententiam, ductibus a *Valsalua* descriptis *Obseruationes* nostras minime respondere intellexi, prouti eorumdem ortus et proprietates iuxta praefatas obseruationes, satis euincunt: Illae enim ductum e glandula more vasis excretorii ortum trahere, Hae contra e trunco Aortae, ut caetera vasa sanguinea, ductum prodire declarant. Pro iisdem ergo ductibus haberi non posse manifestum est. Caeterum omnes eiusmodi *Obseruationes*, Cl. *Viri* inuentum minime quidem infirmare, vel eidem e directo aduersari fateor; pro eodem tamen veri studio haud dissimulandum est, quod x. crebra et longa *Glandularum Renalium* disquisitione

tione ad ductuum originem inuestigandam instituta, ductus e glandula oriri visus, vera et simplex fit arteriae magnae propago exilissima, sub glandula incedens eique firmius agglutinata, sed falso productu *Valsaluae* initio habita. 2. Si eius Arteriae a *Cl. Viro* nulla distincta et specialis mentio facta fit, vereor ne Vir caeteroquin oculatissimus et solertissimus, falsa imagine deceptus, in eam sententiam perductus fuerit.

§. 3. Glandulae Renales seu ante seu post partum diligentius consideratae, e laeuigato subluteoque cortice seu substantia, singularem adipis speciem mentiente conflatae sunt, subque praefato cortice ampla cauitas continetur, qua humoris fluidi et sanguinis aemuli *Obs. IV.* notabilem copiam includi, frequens obseruatio est: Quare mutato nomine, Sinus seu capsulae rectius appellantur, non tam propter praefatam excauationem a glandulae notione alienissimam, sed potissimum ob earumdem texturam et substantiam, quae ex singulari materia adiposa, concreta et conformata visa est.

§. 4. Nunc ad Capsularum usum, quantum rei obscuritas patitur, inuestigandum me transfero. Ac primo sententiam Clarissimi Viri *Antonii Molinetti*, mihi plurimum placuisse fateor: Nam res notatu dignissima est, quo tempore Organa urinae secretioni dicata sopita iacent, in foetu videlicet, capsulae tumidae et sanguine imbutae

conspiciuntur: Vice versa post partum, quando illorum actio fit perfectior, hae vacuae et depressae cernuntur. Caeterum ea esse organa quae nexum cum Renibus intimum habent, iisque specialiter dicata sunt, Nemo qui praefatas obseruationes attentius euoluerit, assensum hodie deneget. His praemissis, duplici modo Renes considerari possunt. 1. Partes eorum essentialia, quae proprium corpus seu parenchyma Renis constituunt. 2. Partes eorundem exteriores et proxime ambientes, quibus Renes veluti *Fascia* inuoluti, a caeteris visceribus distinguuntur, vnde sequitur, praefatas capsulas vel prioribus vel posterioribus proprie inferuire Renum partibus, earumque in gratiam necessario fabricatas fuisse.

§. 5. Si in exteriores partes cogitationem et oculos intendamus, ac in fauorem earum capsulas inferuire velimus, erit sane ratio in admirabili congerie et fabricâ innumerabilium vasculorum, forma radiorum circulariter glandulam ambientium in eamque tendentium (Obs. X.) quae forte totidem vasa reductoria sunt, quibus e partibus exterioribus sanguis, ne per plurima distincta vascula venae cauae infunderetur, in capsulam corruatur, in ea permiscetur, et mediante vena ampliore, e praefata capsula ad communem alueum defertur. Is enim, quum per angustias faculorum adiposorum, praecipue in foetu, magna vti videtur difficultate progrediatur, eiusque ad
venam

Venam cauam immediata reductio tam in Foetu quam Adulto minus tuta fuisset, haud praeter rem esse videtur, vt secundum admirabilem Naturae legem, eiusmodi structurae ratio in eum finem adesset; tametsi ad praefatam mechanicen magis illustrandam, multum meditationis et experientiae adhuc desiderari sciam.

§. 6. Si vice versa eas Capsulas Renibus ipsis inferuire contendamus, Rationes nonnullas inuenire haud difficile erit: Ac inter alias conditio Renum ante Partum praecipua visa est, qua vrinae secretionem eo temporis spatio vel nullam vel exiguam fieri constat, haecque caussa est cur Vesica Foetus vacua inuenitur, et cur in recens natis, si recte memini, mictio primo et altero die haud succedit. Interdum tamen fieri potest, vt absque secretionem vrinae in Renibus, Vesica vrinam contineat, nempe per alias vias nobis incognitas, quibus nunc inuestigandis non vacat; sed illius Renum in Foetu conditionis clarum testimonium offert diuersitas magna earum partium in foetu et adulto, ob quam per Renes pariter ac per Pulmonem, et caetera viscera quae in Foetu pallida et fere exanguia cernuntur, exigua duntaxat pars sanguinis transmitti potest, tametsi in vasis maioribus copia sanguinis inclusa sit: In quem finem certa, et in adulto haud obuia organa Foetui concessa sunt, quibus circuitus sanguinis illaesis visceribus absolui potest, in quorum propterea

numerum capsulas referre, naturae haud inconsonum est: Is enim sanguis qui Renibus destinatus est, modo per arterias capsulares et adiposas incedens, sapienti naturae consilio, in partes exteriores quaquaversum sese diffundit: Inde vero per fabricam supra expositam, in cauum capsulae infunditur, et mediante capsulari Venae ampliore aliisque venis adiposis, ad venam cauam tutissime defertur.

* Antonii Molinetti sententia legi potest Dissert. Anat. Pathol. VI. 7.

DE
FIGVRA ET SITV
VESICAE VRINARIAE *

AVTORE

Jos. Weitbrecht.

I.

Tabula VIII.

CVM ante biennium sectioni alicuius cadaueris in Nosocomio Marino incumberem, vesicamque excisam inflarem: figuram eius longe aliam esse intelligebam, quam ex anatomico-

mico-
* Cum haec de figura Vesicae urinae observatio ab autore facta, et una cum icone et obiecto ipso, mense Julio 1730. in Academia proposita fuisset; accidit postmodum, ut Epistolae Morgagnianae Lugduni Bataurum 1728. impressae ad has oras afferrentur, in quibus Epist. I. §. 61. haec eadem observatio, verbis tantum non iisdem, ab Illustri hoc Anatomico recensetur. Quia vero nulla haecenus inter hos binos Autores intercesserat communicatio; in Epistolis etiam nulla figura sit adiecta; si quoque Scriptores, qui post Epistolas

micorum descriptionibus atque iconibus memoria conceperam. Mutua collatio confirmavit, me non fuisse falsum. Sed tum temporis ex vnico obiecto nihil certi concludere licebat aut stabilire, pro lusu naturae, quod aiunt, rem omnem habenti.

§. 2. Postquam vero, sequentibus occasionibus oblatis in octo saltim cadaueribus continuo dissectis, obseruationem dictam denuo ad examen reuocarem: *constantem* illam deprehendi, et veritate rei coactus iudicavi descriptiones atque figuras anatomicas vesicae, publici iuris factas, quaecunque erroris causa fuerit, cum natura ipsa in sexu hominis masculino non conuenire.

§. 3. Quodsi enim praecipuos Autores Anatomicos, *Vesalium, Columbum, Spigelium, Bartholinos, Veslingium, Diemerbroeckium, D. de Marchettis, J. van Horne, Verbeyenium*, aliosque descriptores potius, quam scriptores euoluamus: patet, quod secundum vnanimem consensum illorum, *vesica sit vas cauum, membranaceum, oblonge rotundum, superne latius, inferne angustius, sensimque in collum arctum terminans, hinc lageniforme, aut pyriforme*. Atque haec descriptio cum iconibus quoque ita conuenit, vt locus, vbi *vrachus* insertus est, pyri vmbilicum, collum vero petiolum referat.

C c 2

§. 4.

Stolas Morgagnianas compendia ediderunt, ad hanc descriptionem nullatenus attenderunt; praesens denique dissertatio non de figura sola sed et de situ vesicae agit: statutum fuit illam nihilominus in *Commentario* referre. Quod ideo monetur, ne quis censor molestiam auctori creet.

§. 4. Haec si cum obiecto ipso conferamus, deprehendimus contra: quod Vesica *cava* quidem sit et quadantenus rotunda, sed ita, vt diameter a fundo ad locum inferiorem, circa collum et vterum infertionem, sit *longissima*; ab vno latere ad aliud *breuior*; a parte anteriore ad posteriorem, *breuissima*: quod pars superior, quae vulgo *fundus* nuncupatur, non magis ampla sit, sed potius magis *acuminata* quam inferior: quod collum vesicae *sensim* facta oriatur, sed pro appendicula, tamquam obturamentum in dolo fit habenda: quod idem collum non ex parte, quae fundo opposita est, ex vesica procedat, sed ex infimo latere anteriore, et distantia colli *anterior* ab vracho duplo *breuior* sit, quam distantia eiusdem per posterius latus mensurata: quod denique tantum absit, vt vesica ex fundo *sensim* in collum arctum terminerur, vt potius infima sui pars, qua intestinum accumbit, et cui duae vesiculae seminales appllantantur, *planitiem* quandam, non vero rotunditatem prae se ferat. Quod igitur nec pyriformis nec lagenae similis sit, et consequenter pristinae tum descriptiones tum figurae merito pro falsis iudicentur.

§. 5. Haec de *figura* vesicae: iam de *situ*. Ille autem talis est. Primo quidem id omnium maxime attendendum est, vt de positione ossium, ex quibus cauitas illa, quam peluim dicunt, componitur, certi sumus. Etenim os Sacrum non ita appllantatur spinae dorsi (loquor autem de homine pedibus

pedibus recta insistente) vt cum hac in linea recta et ad horizontem perpendiculari descendat: sed deflectitur illud retro deorsum in linea ad horizontem obliqua. Neque minus ossa pubis et ischii plurimum ad interiora reclinantur, et cum osse sacro tantum non parallele currunt. Hinc ossis sacri superficies interna non tam anteriora, quam inferiora, externa autem non tam posteriora, quam superiora respicit: neque minus os pubis exterius magis deorsum quam antrorsum, interius vero magis sursum quam retrorsum spectat.

§. 6. Ex his sequitur, verissimum quidem esse id, quod Vesica urinaria in cavitare, quae peluis dicitur, contineatur: falli autem eos, qui cum *Columbo* statuunt: illam *sub* osse pubis sitam esse. Non enim certe vesica sub osse pubis iacet, sed potius euentissime huic ossi oblique superincumbit.

§. 7. Vfus huius obseruationis potissimum triplex est. Nam primo quidem *Vesalio* suus honor restituitur, qui non *apicem* vesicae, seu partem superiorem, cui vrachus connectitur, vti perperam fecerunt Scriptores posteriorum temporum, sed *humilimam* vesicae corporis *sedem*, *fundum* dixit, qui quidem fundus proprie planities illa (§. 4.) est, qua vesica intestino recto incumbit. Deinde commodum haud spernendum redundat in illos, qui exciscindorum lapidum caussa methodo *Cheseldeniana* circa partem hanc versantur, quippe operatio in hac ipsa planitie instituitur. Imaginaria denique ratio tollitur, quam de antiquo situ ana-

tomici quidam ex male intellecto *Vesalio* reddiderunt, quod scilicet hunc in finem a natura institutus sit, ne vesica a superincumbente vtero atque intestinis *premeretur*; qui quidem metus per se vanus erat, quia nulla talis pressura nociua ab intestinis quietis et vbique firmiter alligatis proficisci potest; deinde vero, ex consideratione *restituti* situs necessario id, quod metuebant, euenire debet; vt igitur excogitata illa ratio hoc modo plane et iustissime obliteretur.

Tabula VIII. Vesica urinaria hominis.

- | | |
|--|----------------------------------|
| a. Summitas vesicæ, vulgo fundus. | e. Vesiculæ feminales accumbunt. |
| b. Latus anterior. | f. Vasa duo deferentia. |
| c. Latus sinistrum. | g. Insertio vreteris sinistri. |
| d. Planities inferior, cui intestinum et rectum et | b. Ceruix cum principio vretræ. |

DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII

DISQVISITIO ACADEMICA

G. B. *Bülffingeri*.

I.

Academicam molior *Disquisitionem*, non promitto expositionem dogmaticam. Demonstrationes de hoc argumento nullas possideo. Feci obseruationes et condidi coniecturas. Quod Philosophis Graecis *Academia* reliquit, adhibui, sensus scilicet, et probabilem de phaenomenis discursum. Primo igitur *Visa* accipe, deinceps *Cogitata*.

§. 2.

VISA.

§. 2. Lusi per hanc hiemem colendo radices Cichorii. A domestico vsu negotium adorsus, finiam in *obseruatione Botanica*. Dolio vinario aliquot centenis pertuso foraminibus, ita terram, tenui arena mixtam, et radices memoratas, commisi alternis ordinibus, vt e singulis foraminibus prominere radices horizontaliter positae vertex. Eo facto attendi phaenomenis, quae moderatus parturiebat hypocaufti calor.

§. 3. Vulgare, nec praeter expectationem fuit, folia sic protrudi, vt sursum vniuersa reflecterentur, atque omnem dolii ambitum, crescente in dies corona, cingerent. Eam mihi spem fecerant visa, quae *Dodartus* narravit in *Memoriis Academiae Scientiarum Parisinae ad A. 1700. p. 74.*

§. 4. Rarius illud existimaui visum, quod circa *ordinem et modum originis radicularum* animaduerti. E radicibus longioribus cultro abscindere segmenta necessum fuit. Vidi autem post aliquot tempus, vbi radices quasdam extrahere dolio contigit, nouas in sectione illa radículas prodire; scilicet in sectionis transuersae parte ea, quae corticem a substantia separat lignosa, primo tubercula exire, atque ex illis, vbi rumperentur, radículas. Hic *locus* erat quasi *proprius*. Paucissimas vidi erumpere alibi, atque omnino ibi, vbi insertiones erant, quas vulgo vocant.

§. 5.

§. 5. Segmenta radicum reiectanea neglexi primo, nisi quod maiora ob domesticos vsus in corbem coniecta, ne illico marcescerent, terra obtexi. Vidi post aliquod temporis interuallum etiam in his sectionibus prodire tubercula, atque ex illis protrudi aut radículas aut foliola.

§. 6. Ea res fecit, vt terrae meliori denuo inserta fuerint haec segmenta, in qua omnino germinarunt egregie. Segmentorum variae species erant. Altera transuersim ad radicis axem secta, altera secundum axem: maiora altera, altera minora: altera vtrinque resecta, altera ex vno solum latere.

§. 7. Dissecui *coram Societate* frustum radicis fortioris transuersim et secundum axem in partes complures, atque omnino in quadrantes segmentorum diuisi: nec omnis illa laniena impediuit, quo minus laetissime *singula* germinarent.

§. 8. Cum adeo obsequentes atque in germinando pertinaces deprehenderem radices nostras, cogitavi, annon fallere illas liceat modo, quo deludi arbores solent. Notum est, earum aliquas, vt v. gr. tilias, salices etc. etsi *inuerso situ* positas germinare, et radicem conuertere in ramos, ramos mutare in radices. Hic obstinatioris reperi radices meas, sed tandem tamen vincibiles.

§. 9. *Inuerso* plantatae *situ* sequentia exhibuerunt phaenomena. Quas terrae totas commisi, sic vt et superne eadem obtegerentur, tubercula vtrinque protruserunt, atque ex illis superne radi-

ces, inferne folia. Illae super sectionem repentes mox in terram reclinatae sunt: Haec vbi sectionem perreperant, sursum inflexa.

§. 10. Erat inter hasce radices aliqua, cuius vertex a vermibus non nihil erofus erat: eam inuerse posui sicut ceteras, sic tamen vt ex opposita parte e terra emerret. Nullas haec radices e superiori sectione protrufit, sed ex inferiori folia magno numero. Ea autem per planum sectionis repentia intrarunt in specus, vermium habitacula, et trans ipsam radicem sursum enixa sunt. Miseratus eorum sortem separaui radicem in duas partes, et denuo terrae commisi eodem situ. Vidi pergere folia, et intra 13. dies supra terram emergere.

§. 11. Vidi et aliud segmentum, quod ex vtraque parte tuberculis conspicuum erat. Id inuerso situ terrae commisi, sic tamen, vt emerret pars, quae olim infima nunc summa erat. Vidi crescere indies tubercula, sed non diffilire per 4. hebdomades. Donec tandem ex eorum aliquo prodiret radícula vix lineam aequans longitudine: cui etsi postmodum attendi, nullum accedere incrementum obseruaui. Post alios 13. dies ex vno tuberculorum etiam *surculus* prodiit, quem incauta manus abruptit, sed nouo foecunda mater natura suppleuit. Huius quidem radicis iconem spectatorum oculis imitabunda naturae tabula exhibet nostra.

§. 12. In alio vidi similia segmento; sed tenuia admodum et paruula erant foliola, vt nisi alia simul ad latus excreuissent, negassem illis honorem delineationis, quo in Tab. eadem fruuntur.

§. 13. Vidi etiam sponte oblatum, quod hactenus sectione mediante quaesueram. In radice, cuius vertex putrescere incipiebat ad altitudinem vnus pollicis, sub illa putrida parte nouos prodire furculos et folia animaduerti, quae laetius pullularunt, vbi libera ab eo onere putrescente praestiti.

§. 14. Aliquando cum in radice inuerse posita furculus iam pene ex terra emergeret, denuo inuerti radicem, vt situm naturali similem nancisceretur: vigi denuo sese reflectere furculum et ad auras eniti. Imaginem facti videas in Tabula sequenti.

§. 15. Vidi etiam illud, quamdiu noua germina sub terra eniterentur, rarissime expansa esse in folia, sed quasi furculos retulisse: atque ipsa etiam, si quae erant foliola, fuisse, quam minime explicita, latitudinis prae altera, quae supra terram conspicitur, contemptibilis.

§. 16. Vidi etiam furculos eiusmodi ab radice abruptos, et terrae commissos, nouas egisse radículas, et folia protrusisse.

§. 17. Perterebraui et asciam, eidemque sic inserui radices, vt deorsum vertex spectaret; alteras sine foliis, alteras iam insignes foliolis, utrasque

que quoad situm naturalem verticaliter inuerfas. Radicem terra circumdedi, vertice, vt dixi, infra aſciam prominente. Vidi prodire folia, et alia coronam formare circa foramen ſuum, alia ſuſum reflecti per ipſum foramen, et tranſ terram incumbentem eniti in ſuperiores auras.

§. 18. Si quando ſegmentum radiculis ſuis inſigne ſic inuerterem, vt illae ſupra terram emerent: vidi illas adeo non augeri aut reflecti verſus terram, vt potius marcerent breui tempore.

§. 19. Similiter, cum aliquando radices horizontaliter ita ponerem, vt media tantum parte terra tegerentur, eminentibus extra eam terminis radicum: vidi folia prodire et germinare egregie, ſed marcere fines radicum.

§. 20. Inter plurima plantarum mearum folia, eorum ſex mihi forte obuia fuerunt bifida, hoc eſt ex vno ſtylo in duas diuiſa partes, quarum ſingulae folium exhibebant. Non erat diuaticatio perfecte ſimilis, nec in eadem radice omnia, ſed in diuerſis obſeruauit, ſingula ſcil. ſuper alias radices, et mixtas foliis ordinariis. Imaginem non curauit deſcribere. Si quis eam deſiderat, fingat pennam in *Actis Naturae Curioſorum Dec. I. Ann. 2. Obſer. 80.* delineatam eſſe folium, et habeat, in quo acquieſcat.

COGITATA.

§. 21. Visus, quae dicta sunt, iudicavi *miram* *crefcendi pertinaciam* esse his radicibus insitam. No-uum mihi fuit, segmenta ista omnia germinare, vtcunque male habita sectionibus praevius. Postea tamen inueni, id et aliis annotatum esse. *Marchantium* deprehendi similia narraffe in *Memoriis Academiae Scientiarum Parisinae. ad A. 1709. pag. 82. 83.* Aliqua tamen cum differentia. Verba sunt :

On fait par experience, qu'il y a des racines charnues, qui etant coupées par rouelles de l'epaisseur de trois ou quatre lignes, ou verticalement fendües en quatre parties, multiplient fort bien leurs especes. Ces rouelles et ces morceaux de racines ne sont pourtant que des parties tronquées assés minces, qui etant replantées produisent a leurs circonferences quantité d'autres racines fibreuses, dont il s' eleve dans la meme année des plantes, qui viennent a leur perfection, et tout a fait semblables à celle, d'où on les a pris.

§. 22. Equidem Vir Industrius protrudi vult radículas in circumferentia segmentorum: id non dubito fieri in pluribus. Obseruavi id in raphano siluestri, quem lecto hoc eius monito tentamini exposui, sed obseruavi ea cum limitatione, vt non nisi ex insertionibus agi radículas viderem, non promiscue ex omni parte segmenti.

Verum

Verum in nostris vix vnum alterumue succurrit exemplum, quod ex circumferentia radices extruferit. Cetera omnia ex confinio corticis et substantiae lignosae, eo praecise ambitu, quo post sectionem succus prodit lacteus et amarus. Fortassis operae pretium fuerit, idem et in aliis experiri radicibus ex eorum genere, quae succum ferunt lacteum.

§. 23. Illud nescio an recte intulerit, quando superioribus statim adiungit:

D' où il s' ensuit, qu' il faut, que la vapeur humide de la terre dilate d' abord les semences, qui sont dans ces petites parties tronquées, et que la matiere, qui sert a la formation des racines, s' y rencontre, pour produire les nouvelles racines, qui paroissent quelques jours après, et qui en fin donnent naissance a ces nouvelles plantes.

Cur vnica fit planta solum, si euoluantur semina plantarum futurarum segmento illo contentarum? Cur non integra prodit earum caterua, qualis prodit si plura semina capsae suae inclusa terrae committuntur? Sunt ne matura in ipsis radicibus semina futurarum plantarum, an solus immaturitatem supplet locus et succus praeparatior?

§. 24. Annon potius sufficit viso huic explicando sola structurae per integram radicem homogeneitas, qua fit, vt vnumquodque segmentum alteri segmento, ipsique adeo radici toti homo-

logum sit, et iisdem producendis effectibus aptum. An dici potest, plantas eiusmodi esse exercitus plantarum, quae pro circumstantiis aut singulae euoluantur in maiores, aut vnam totalem omnes efficiant?

§. 25. Ingeniose *Illustris Fontenellius*, intelligi hic de plantis, quod de anima humana dictum accepimus. *Principium vegetandi* (dic, si ita velis, animam vegetatiuam) esse *totum in tota radice*, et *totum in qualibet eius parte*. Vid. *Hist. Acad. Paris. ad A. 1709. p. 55.*

§. 26. Cogitauit et de altera plantarum mearum *pertinacia*, qua sursum enitebantur surculi et folia, quicquid etiam impediementi opposuerim. Visa nostris similia iam ante hos triginta annos enarravit in *Memoriis Scientiarum Parisinis*, *Dodartus*, ad A. 1700. p. 61. *seqq.* quaeritur de probabili visorum origine.

§. 27. Qui sursum emergere surculos voluerunt, ob *minorem crescendi difficultatem*, dimidium phaenomeni soluere studuerunt cum detrimento partis alterius. Ita enim et radices sursum, non deorsum, niti deberent. Néc attenderunt phaenomeno, quo grana seminum humefacta, sed in aëre posita, radices deorsum emittunt, germina sursum. Neque reptatum explicabunt, §. 9 et 10. indicatum; neque fugientia retro germina §. 17. excusabunt. Sed infantia haec fuit explicationum huius phaenomeni.

§. 28.

§. 28. Meliora profatus est, quem ante dixi, *Dodartus*, vel ob solam in sententia dicenda modestiam memorandus cum encomio. Diuersam facit structuram fibrarum in radicibus et surculis: illas tales vult, vt a vaporibus ascendentibus in ima sui parte abbrevientur, et in superiore a calore solis per rarefactionem succi sui et aëris contenti expandantur; has autem tales, vt a calore solis abbrevientur per dissipationem succi sui, et in parte inferiore per introductos qui e terra ascendunt vapores prolongentur. Nihil opus est aduersus hanc sententiam disputare. Monuit ipse *Dodartus*, quae desiderari possint. Negat, se acquiescere huic solutioni: atque enumerat, quae illi desint. Vide *loc. cit. p. 72.*

§. 29. *La Hirium* vidimus ingeniosam quaestioni solutionem applicare, quae non male conueniat viso, quale ipsi proponitur. Dum ex semine germen et radix prodit, hanc crassiori succo, adeoque grauiori, et fortius deorsum nitente nutrit, illud vaporibus, et sursum nitente fluido. Ita *punctum* quasi aliquod *diuisionis* concipias, ex quo radicem crassiori, et germen spirituosiori fluido nutriendum incoes, quorum igitur vtrumque diuersis vrgetur directionibus, donec in situm illis conatibus aptum deueniat. Vide *Memorias Acad. Scient. Paris. ad A. 1708. p. 297. seqq.* et *Historicus Anni p. 82.*

§. 30. Iucunda haec sunt, sed fateor, me haerere ob visa nostra §. 9. an etiam hic vaporibus folia nutriri contigit, et radículas crassiori succo; cum illa prodirent infimo, hae summo segmenti loco? neque punctum diuisionis hic locum habuit, circa quod tanquam motus sui centrum in contrarias plagas niterentur aut reuoluerentur partes subtiliori aut crassiori succo nutriendae. Fortassis etiam hoc vtile fuerit attendere, si furculorum directio sursum enitens, etiam in ipso aëre, a nisu vaporum oritur, necessum erit nutriri furculos vaporibus, qui aërem leuitate superent specifica; namque ii foli sursum tendunt in aëre. Id autem an facile admiseris, nescio.

§. 31. Quicquid aliis videatur, mihi *Astruciana* prae caeteris expositio placet. Vult 1. succum nutritium ferri in fistulis secundum longitudinem plantae, extensis: 2. fistulas invicem communicare vel immediate, vel ope canaliculorum horizontalium ex medulla egredientium, more radiorum circuli: 3. in tubis ad horizontem parallelis vel inclinatis fluida grauitare in parietes fistularum inferiores, et nequaquam in superiores: igitur 4. succum nutritium proprio pondere cadere in fistulas plantae inferiores, ibidemque colligi in copia maiori, quam in superioribus: vnde 5. tubuli isti amplius extendantur, et pori fiant apertiores: 6. succum in eos maiori copia penetrare, et inferiorem plantae partem crescere fortius. Ex

eo 7. fieri, vt, dum inferior pars magis quam superior augetur, extremitas illius sursum recuruetur, tamdiu 8. donec in eum planta situm deueniat, quo vtraque pars aequaliter nutriatur, hoc est, in verticalem. 9. Fieri autem hoc in partibus plantarum flexibilibus, hoc est, in extremitatibus plantarum adhuc mollibus. Quin imo 10. in ipsis feminibus, quae adeo vtcunque proiecta sursum germinant. 11. Ex aduerso radices nutriri ab extrinseco humore: igitur 12. superiorem fortius crescere partem, quam inferiorem, quia 13. ceteris, licet omnibus, paribus, humor sua grauitate iuuat ingressum in partes radices superiores, in inferiores impediat.

§. 32. Habet haec expositio characterem, qui rebus competit naturalibus. *Simplex* est, et *minimum laboris* naturae imponit. *Demus* succum nutritium ferri in fistulis communicantibus: *cetera* se omnia bene habebunt, nisi quod emendari debeat, quod *numero* 3. dicitur. In canaliculis ad horizontem inclinatis etiam superior paries premitur a fluido stagnante altiori. In horizontalibus, qui communicant cum altioribus tubulis res eadem obtinet. Sed inferiores tamen tubuli, et inferiores tubulorum parietes fortius premuntur, quam tubi superiores, vel eorundem tubulorum parietes superiores. *Sufficit* id scopo Viri. *Nec obest*, differentiam esse exiguam: est enim continua; est contra obiectum molle; nec illi effectus imputatur citus, sed omnino lenis et lentus.

§. 33. Sunt etiam *phaenomena* mihi, quae *praecipuas* hypotheseos et *ratio*cinii *partes* *confirmant*. Inferiores fortius nutriri fibras egregie patuit mihi in raphano, quem *Excellentissimus Comes de MUNICH* Academiae spectandum transmisit. Eius haec facies erat: scissus per medium tres exhibuit cavitates communicantes; quibus externe totidem eminentiae respondebant; in superioribus duobus quae collaterales erant, et cum inferiore, per longitudinem raphani excurrente, communicabant, folia varie inflexa conspiciebantur, quorum vnum deorsum inflexum per totam raphani longitudinem excurrerebat, et ubi ad finem cavitatis peruenerat, non nihil reflectebatur sursum: folium bene nutritum erat, et forte, sed coloris ex flauo albibicantis, quod tamen postea aëri expositum hilariter euiruit. Folium illud primarium in situ raphani, quamdiu terrae infixus erat, directe deorsum ibat, circa latus cavitatis: sed postea ubi terrae humidae a me super imponebatur raphanus in situ horizontali, erexit sese folium, egitque radículas, et noua protrudit folia. Ea quidem omnia huc proprie non pertinent: quare etiam a prolixiori harum et aliarum circumstantiarum descriptione me abstineo. *Duo* autem sunt, quae omnino lucem dictis foenerantur nostris. *Alterum*, quod folia, quae varie in cavitatibus superioribus reflexa erant, omnia rugas ostenderent in latere infimo, quoties deorsum aut horizontaliter crescere debuerunt; nullas autem haberent in superiore latere,

quoties

quoties eadem reflexa sursum pergerent: *Alterum*, quod nullas superne rugas haberent lacinae folii primarii sursum reflexae, etsi contra destinationem sibi ordinariam dirigerentur; imo nullas etiam acquirerent, cum inuerso iterum situ raphani in directionem naturalem denuo reflecterentur. Ista quidem omnino ostendunt, in ea plantae parte, quae nutritur ab intrinseco, *inferiores fortius* crescere fibras, quam superiores; plane, ut requiritur.

§. 34. Sed radices ab extrinseco nutriri, crescere, et conseruari docent phaenomena nostra, superius exposita §. 18. et 19. Itaque mirum non est, contrariam illarum sortem esse, atque omnino talem, qualem *Vir Insignis* postulat §. 31. No. 11. seqq.

§. 35. Ista quidem de secunda hac plantarum nostrarum pertinacia. Superest *tertium* quid, quod nescio an simulationem interpretari debeam, an serium naturae phaenomenon. Obtinui tandem, ut ex inferiori radice parte sursum versa furculus prodiret: sed non nisi post maguum tuberculi incrementum. Quid dicam? An hic in contrarium succus iuit protrudens furculum, vbi radix debebat prodire? Vix videtur, quoniam et inferius prodire furculi maiore copia. An dici debet, tuberculum quasi plantam exhibere integram, e cuius summo furculus prodiit, cum ex imo radix

prodire deficiente nutrimento externo non posset?

§. 36. Optassem, vt dicereliceret, quod sub terra prodeat compactum, radicis specie, idem in aëre expansum prodire furculi et foliorum specie. Fuisset hoc affine, explicationi arborum inuerse positarum §. 8. et commodum phaenomeno §. 12. Non id vero licuit, postquam ab extrinseco radices nutriri vidimus §. 34.

§. 37. Igitur in eo hætenus manere placet, esse vbique, quod furculis, et esse quod radicibus formandis conueniat; sed alteris euoluendis nutrimentum deberi internum, alteris externum.

§. 38. Illud *curiosulis* dictum esto: *Occurrere in radicibus nostris, quod in magnete.* Si magnetem secus transuerse ad axem polorum suorum, superficies antea contiguae virtutes nanciscuntur contrarias, altera australes, boreales altera. Ita in radicibus nostris, si transversim secentur, superficies contiguae contrarias acquirunt fortes, altera radices protrudit, altera furculos et folia. Id, si velis, portentis loco habe. Si minus, finge directionem succi interni, et fistularum structuram efficere, vt ille nonnisi secundum vnã directionem nutriat, adeoque in illam partem crescere debeant, quae ab intrinseco nutriuntur.

AER INTESTINORVM
 TAM SVB EXTIMA QVAM INTIMA
 TVNICA INCLVSVS
 OBSERVATIONES ANATOMICAE.

A
 J. G. D.

Art. 1.

EIusmodi Tumorum intestinalium, an vllum alibi exemplum literis consignatum sit nec ne, Problema esto; nempe, super intestini exteriore facie, per insignem tractum, plurima spatia, in quibus in tumorem extima intestini tunica vesicae instar attollitur, conspicua sunt. Eiusmodi autem eleuationum quaedam latiores, quaedam contractiores, plus minus eminentes, quaedam instar annuli totum ambitum intestini complectentes iisque locis crassitiem notabilem conciliantes, omnes colore intestinorum proprio praeditae conspiciuntur. Caeterum, extus et superficie tenus consideratae diaphana et candida materia turgere, comprimuntque digito crepitantium vesicularum sensum imprimere, intus vero post incisionem cellulas candidas, fauum mellis aemulantes, siccas ac humore vacuas referre visae sunt.

2. Inverso intestino, super interiore facie, et quod animaduersione magis dignum est è dire-

Et 3

cto,

to, eiusmodi tumores seu eleuationes pari numero forma et amplitudine, qua in exteriori superficie, conspicuae erant; Earum enim nonnullae contractiores, aliae circulum efformantes et ex earum numero nonnullae adeo protuberantes erant, vt fere cauum canalıs obturarent. Caeterum, etsi areae glandulosae speciem mentiantur, re penitus perspecta cum prioribus ad amissim conuenire obseruauı. Iis qui Anatomicis administrationibus adfuere, phaenomenon haud absimile obseruare licuit, quod eorum Tumorum seu eleuationum elegantem imaginem oculis sistit, quando videlicet parte aliqua membranoso-cellulosa vel ex instituto vel casu praeter animi sententiam insufflatâ, ea per aëris impulsione[m] collectionemque in tumorem artificialem praefatis tumoribus simillimum eleuatur.

3. Indicem operum *Rhuyschianorum* euoluenti, tumor intestinorum flatulentus in *Catalogo Rariorum* p. 141. sistitur, quo nomine an eiusmodi eleuationes quales nostrae sunt, *Cl. Autor* velit nec ne. id ex praefato catalogo, si ad manus esset, exponere procliue foret.

4. In *Historiâ Acad. Paris*, 1703. Tumorum ieiuni et ilei cauum obfidentium obstruentiumque in Foemina cruciatu ventris assiduo, sex mensum ante vitae finem spatio exagitata, commemoratio facta est, quâ a *Cl. Littrio* causa simul indicatur, vide-

videlicet, Glandularum intestinalium, mole, figura et consistentia vitatarum tumefactio: cuiusmodi fateor tumoris generatio inter rarissima phaenomena numeranda est, quoniam conceptu arduum est, glandulas minutissimas visum effugientes quales intestino concessae sunt, in eam extendi molem magnitudinemque posse, ut caecum intestinale totum fere impleant, et quod magis admirandum est, vita superstita, et doloris in vna tantummodo ventris sede sensu, tametsi totam ieiuni ileique tractum praefati tumores occupauerint.

5. Ingens ergo et essentialis discrimen inter istos et Petropoli obseruatos tumores eorumque generationem, perspicere proclive est. Glandularum enim loco, tam in extrema (in qua certe nullas dari glandulas constat) quam interiore intestini facie, vesiculoso-racemosa textura, et congerie exiguarum et pellucidarum vesicularum efformata, et (quod a glandularum intestinalium indole quoque alienum est,) annuli vel armillae instar diffusa, tunicasque intestini absque alia eiusdem immutatione solummodo dissocians distendensque, ac tandem geminum tumorem e regione sibi oppositum excitans, intuentibus conspicua est, propter quam adeo indolem conformitatemque situs cum duplici corpore celluloso intestinis proprio,* rationem istorum phaenomenorum in praefata substantia sitam esse perspicuum est: Cuiusmodi vitio

tio

* Vidi Comment. Acad. Imper. Tom. IV.

tió corpus subcutaneum adiposo cellulofum frequenter obnoxium effe folet, quando aut ferofa aut aërea aut alia materia eius vesiculas distendente, in variis cutis regionibus, vel *Emphysematis*, vel *Tympanitidis*, vel *Anasarcae* specie, superficies corporis exterior vesicae instar intumescit.

6. Caeterum in istiusmodi partibus haud aeque mirum id videri debet ac in intestinis, quorum videlicet textura solidior parrticularumque nexus et contactus intimior praefatam tunicarum diuulsionem separationemue perarduam nedum impossibilem reddere videtur: Imo diligentior rei consideratio effecit, vt de originis et formationis in intestinis ratione dubitem, an eiusdem generis intumescentiarum communi origini ea respondeat? vel contra, (quod mihi verosimillimum videtur) peculiari caussae propriaeque dispositioni intestinorum, quâ videlicet materia aërea intestinorum cauum permeans, eorundem tunicas peruadendi facultatem acquirit.

7. Vt irruptio aëris locum habere queat, sufficit si per admixtionem actionemque particularum e praua alimentorum potulentorumque qualitate resultantium, is aër ad maiorem subtilitatis tenuitatisque gradum dispositionemque poris minutissimis peruadendis aptam perducatur, inque cellulis ac flexibus intestinorum, ad membranam seu tunicam interiorem applicetur, qua dispositione
con-

continuata, haud difficile erit, vt in pluribus locis, per raram et spongiosam tunicæ interioris tunicam aëri caeteroquin imperuiam, particulae aëris magis liberae et magis pressae in contiguam texturam vesicularem paulatim irrumpentes eam extendant (speciemque intumescendae intus producant: quarum reditu seu regressu in cauum intestini impedito, etiam procliue erit ad alterum exteriorem contextum cellulosum, data huius cum interiori communicatione, transitum moliri ac ita efficere, vt in extima superficie consimilis ac in interiori facie tumor oriatur.

8. Pari, sed paulo diuersa ratione, aëre externo nullam mutationem alterationemue, vt in praecedente hypothesi, subeunte, aëris irruptionem explicare licet, si videlicet a praua alimentorum potulentorumque indole, tunicæ interioris quam aëri imperuiam diximus, dispositio natiua sic immutetur, vt vel defectu vel liquefactione materiae illinientis, vel ob aliam quamcunque causam, eius resistentia contra nitenti aëri debilior sit; ob quem nisum, pororum amplitudine incrementum paulatim affumente, aër introrsum penetrans, similia iis quae commemorauimus phaenomena tam in contiguo seu interiori, quam exteriore contextu celluloso producere potest.

9. Aliam adhuc rationem eorum phaenomenorum excogitare fas est, si in quibusdam locis, tunica

intestinorum interior exteriorque, a frigoris violentia vel ab aliis causis sic contipata fuerit, ut halituosorum effluuiorum perspiratio fieri nequeat: nam hac materia intra cellulas collecta eiusmodi emphysemata generari posse verosimile est. Caeterum, quia tam ad causarum quam symptomatum concomitantium veram exactamque historiam elaborandam, *Mortuorum contemplatio* quae in partibus affectae simplicem notionem nos ducit sola haud sufficit, absque singulorum olim vsque ad vitae finem sese excipientium phaenomenorum obseruatione, pergratum fateor fuisset nosse, qualia eiusmodi Tumoribus sociata fuerint symptomata grauia ne, uti suspicor, truculenta, varia, anomala? an contra exigua, parum molesta vitaeque minime aduersa? sed vndenam et a quo notitiam quam hic desidero, obtinere possumus?

DE
QVADRVPEDE VOLATILI
RVSSIAE
 OBSERVATIONES.

A
 F. G. D.

PRaeter *Vespertilionem*, quem Historiae animalium scriptores animal cuiusdam inter murem et auem speciei, proptereaque *Murem alatum* vel animal *volucere biforme*, quod cum nullo animal-

mante nobis noto similitudinem habet, vocant, nulla inter Europaea Animalia eiusmodi species anomala obseruata fuit, quae a sua communi indole eatenus discedit, vt similitudinem ambiguum videlicet auis et quadrupedis simul induat, vitaeque actiones vtrique proprias exerceat: talia enim, vt caprae, leones, equi, boves alati pro chimaera seu pro non entibus in Poëtarum aut Pictorum cerebro effictis aut pro monstris apud excultas nationes haberi solent, de quibus vid. *Fort. Licetus Ambros. Paraeus.* An eiusmodi Animantia praeter *Vespertilionem*, ob aëris aduersam qualitatem in ea quam inhabitamus orbis terrarum parte haud dentur, id alii viderint. In caeteris autem terrae partibus, in Africa videlicet, in Asia et America, praeter ingentem copiam Animalium rarissimorum quae institutis terra et mari peregrinationibus conquesta et perlustrata fuere, eiusmodi species anomalas quae contra sui generis indolem volatiles sunt, tam inter aquatica quam terrestria animalia inueniri spectabiles et dignissimi Viri testantur. Vid. *Raii Synops. Anim. Du Hamel Hist. Acaad. Paris. Ephemerid. N. C. R. P. Souciet in Obs. Astron. Geograph. Physicis.* Vid. etiam Peregrinationes Nauigationesque in nouam Hispaniam, Virginiam aliasque Americae Regiones ab Hispanis, Lusitanis, Batauis, Gallis, Anglisque olim susceptae, in quibus *Pisces volantes, Lacertae alatae, Feles alatae* inque eorum numero *Sciuri* quoque *alati* inueniuntur.

Certe ob hanc ipsam Animalium diuersissimorum perlustrationem, peregrinationum nauigationumque incredibilis vtilitas necessitasque intelligitur, qua praeter communia et familiaria ad escam vsitata et pauca alia apud nos obuia animalia, reliqua sub alio sole viuientia maxima et minima, totumque adeo mundum animale perlustrare, Autorisque et Opificis immensas opes, maiestatem, sapientiam intelligentiamque in creatione et conseruatione eorundem conspicuam suspicere fas est. Haud tamen in externarum rerum nuda contemplatione quales sunt ortus, conformatio, varietas, indoles, ingenium, vitae genus et infinitae aliae admirandae proprietates, quae insignem animi delectationem voluptatemque in omni homine honesto excitant, verum praecipue in singularum partium internarum fabricae actionumque, in iisque excellentiae, magnitudinis, subtilitatis, prouidentiae et intellectus, quorum conspectu longe maiori voluptate et admiratione animus perfunditur, contemplatione et cogitatione, vera Animalium cognitio et vtilitas versatur.

Etsi vero initio eiusmodi animantia anomala apud Europæos dari negauerim, notatu tamen dignum est, quandam speciem pulcerrimam *Moscuae* primum, deinde *Petropoli* in syluis et montibus haud infrequentem innotuisse, quae *Sciuro Americanorum volanti Raii* et *R. P. Souciet* proxime accedit et ab incolis quoque *sciurus volatilis* appellatur, sub quo
titu-

titulo sub finem superioris anni, eiusmodi animalculum, cuius descriptionem etsi haud sufficienti numero obseruationum subnixam hic subiicio, Academiae oblatum fuit, quod etsi Russiae aequae Americae commune ac perpetuum, minus mirandum est, quod ignotum fuerit, si ad alia animalium attendamus. Caeterum (vt notionem aliquam generalem praemittam) totius corporis, deinde capitis, auricularum, rostri, labii superioris, dentiumque tam figura quam numero, pedum, unguium, caudae conformatione, tandem villosa cute cum *seiarorum* specie omnino conuenire, mole autem ei cedere, et pilorum canescentium et nigricantium colore differre visum est. Num ea corporis constitutione praedita Animantia absque aliis adminiculis aëri sese committere possint, iis, qui ratione pollent diiudicandum relinquo: Quadrupedis reverâ potius quam volatilis imaginem ea denotare lateor.

Ad eam in terrestri et quadrupede Animali extraordinariam proprietatem, quae artem infirmi intellectus plenam inuoluit, plures diuersasque actiones ac varia instrumenta elegantissimo et summo artificio elaborata et disposita adeoque ab incomparabili Opifice excogitata desiderari existimo, quemadmodum obseruationum quarundam selectiorum expositione nemo non intelligere potest.

Pellis igitur, quâ in eo Animantium genere totum corpus stricte tegitur, iusto laxior et amplior, ad vtrumque latus ventris sese prolongans et ad extremitatem pedis vsque ad palmarem fere latitudinem elongata singularem illam Alae proprietatem mentitur, qua in huiusce animalculi admirationem pertrahimur, et ob quam ad volatilia Animantia Anomala ab incolis, qui propriis oculis praefatum volandi actum contemplati sunt, refertur, narrantes videlicet, ei quando vult procliue esse, earum appendicum subsidio corpus in altum efferre, et sic ab vna arbore versus alteram euolare.

Primum illud instrumentum obuium expansio est, leuissima tenuissimaque propriae cutis, supra et infra villosa, quae cutis dorsum, ventrem cruraque anteriora et posteriora inuoluentis prolongatio est, ex duabus conflata laminis, totumque adeo replens spatium laterale, quod cruri anteriori et posteriori, quibus ceu fulcris alligata est, interiacet. Id vero obseruandum est, eam latitudinem prope crus posterius ad duorum vsque pollicum latitudinem reduci: nam ea ab extremo cruris anterioris, oblique introrsum versus crus posterius tendens, sinuosumque marginem efficiens in eo itinere paulatim de sua latitudine amittit, quare earum expansionum in vtroque latere figura ad triangulum fere accedit. Caeterum earum substan-

stantia, vti iam dictum est, cutanea, ex duabus aequalibus planisque laminis sibi inuicem agglutinatis conflata, ac instar subtilissimae cuticulae tenuissima leuissimaque et pellucida: Pili vero, vt in reliqua cute, subtilissimi serici ad instar molles et cinereo nigricante colore visi sunt. Tantum de earum expansionum *aliformium* externa facie.

Secundi generis instrumenta praefatarum laminarum interstitio inclusa, per laminarum disiunctionem caute aggressam conspectui oblata fuisse. Ambae laminae ita separatae, simplices pelliculas omnium tenuissimas et politissimas absque pinguedinis et sanguinis villo vestigio manifesto referre visae sunt. In ea itaque duplicatura duo obseruanda sunt: *1.* congeries quaedam fibrarum subtilium albarum et spongiosarum, e dorso vertice descendentiū, et curuis veluti lineis excurrentium, laminisque praefatis adhaerentium, breui autem itinere confecto visum rursus effugientium, quibus ad extensionem aequae ac contractionem paratis, laminas diduci et contrahi posse clare intellexi. *2.* Postquam laminae a se inuicem in totum vsque ad marginem exteriorem diuaticatae sunt, alia fibrarum series quae a praecedenti tam situ quam directione diuersa est, videlicet fasciculus tenuissimus teres, longus, in extrema ora exteriore praefatae duplicaturae inclusus cernitur, cuius altera extremitas longae apophysi acutae quae ad latus carpi promi-

prominet connata, altera vero extremo cruris posterioris alligata est.

Tertii generis instrumenta, partium haecenus descriptarum proprie fulcra et gubernacula sunt, videlicet 1. vniuersa ossium compages, 2. officula quaedam singularia praefatarum appendicum aliformium actionem immediate spectantia. De ossibus in genere obseruandum est, integram compagem, qua ultra centum ossa continentur, exiguae auiculae sceleton pondere vix aequare, adeo subtilitate soliditateque eximia, eius Animalculi vere quadrupedis ossa, auicularum ossibus affinia sunt. Sed artuum anteriorum diligentiolem perlustrationem instituti ratio praecipue postulat, quoniam praefata membra auium et quadrupedum aemula, non solum ad gressum incessumque, sed ad apprehensionem quoque, admirabilem aptitudinem nata sunt. In eorum compage sequentia ossa obseruare fas est. 1. Os Clauiculae. 2. Os Scapulae. 3. Os humeri. 4. et 5. Ossia ulnae et radii. 6. Officula carpi, pollicis et quaternorum digitorum. 7. tria officula supernumeraria.

Os clauiculae, officulum 8. lineas longum, obliquo situ inter sternum et scapulam collocatum, illi ligamenti tenuissimi, teretis, laxioris, huic duorum ligamentorum ope, vno crassiore latiusculo cotulae ad instar excavato ad acromii latus, altero tenuissimo, tereti ad principium

cipium processus Coracoidis annexum est. Facie collum respiciente leuiter concauum, opposita vero parum conuexum, vtrinque vero complanatum, cuius extremum alterum quod scapulam respicit latius, et aduncum euadit, alterum contractius et crassius: medium vero lineae latitudinem aequat, caeterum soliditatis eximiae particeps.

Os Scapulae durum, pellucidum tenuissimumque, costa inferiore clauiculae longitudinem aequans, latitudinem vero 4. linearum haud excedens, forma a reliquis animantibus in eo discrepat, quod planumsuperiusconuexum deorsumque versus oppositam superficiem incuruatum, planum inferius contra sursum extrorsum versus superficiem externam inflexum sit cum margine sulcato: propterea duplex conuexitas seu testudinea superficies videlicet vna exterior iuxta longitudinem costae superioris, altera inferior iuxta costae inferioris longitudinem efformatur. 2. duplex spina, vna naturalem situm obtinens, altera inuersa in opposita facie dorsum respiciente conspicua est: diceres duarum scapularum lateraliter sibi iunctarum compagem iunctionemque esse, quoniam vtrinque duae cauitates infra et supraspinatae efformantur. Spina inuersa dicta, a basi incipiens, ad lineae altitudinem excrescens et processu acromio carens prope ceruicem euanescit. Altera vero situm naturalem obtinens non solum ad 2. linearum altitudinem excrescit, sed processu gaudet

in signi supra caput ossis humeri eminente et admodum amplo, ad quadranguli figuram fere accedente; costae denique superioris extremitas cervici proxima in insignem crassum et tricornerum processum. (vulgo processus coracoides) terminatur. Duo superiora cornicula alterum longius alterum brevius, parum incurvata fulcoque intermedio disiuncta, admirabili ratione ossis humeri cum scapulae ceruice cotyloide, iunctioni inferuiunt: Tertium vero corniculum, mediante ligamento, iunctionem cum clavicula prope eius extremum efformat.

Os humeri humano perquam simillimum est, nisi quod protuberantiae capiti laterales proportionem excedere visae sint.

Ossa vlnae et radii ad eundem modum quo in vulgari *Sciuro*, *Lepore*, *Vulpe*, *Echino* etc. conformata et disposita sunt, videlicet situ minime plano seu a latere, sed vnum super alterum: Os radii anteriorem, os vero vlnae posteriorem locum tenens 2. Eadem officula, more aliorum animalium, ab vno extremo ad alterum a se inuicem haud dehiscunt: Os enim vlnae, circa medium ossis radii haerens, ac eousque tantum dehiscens, subito ei adhaesit, et spinae piscium similis cum eo concrevit et evanescit: Os dices bifidum, circa medium in 2. portiones inaequales diuisum, quarum altera tenuior os vlnae, crassior os radii ordine inuerso constituit: Nam quod

sum-

na admiratione dignum est, eorum officulorum ordo seu constitutio ordinaria sic immutata visa est, ut os ulnae ossis radii speciem, os contra radii speciem ossis ulnae referat: os enim brevius et subtilius, quod 12. lineas longum, spinaeque piscium tenuioris intus sulcatae aemulum est, superiore suo extremo duplici rostro sinuque sigmoideo ad ossis humeri trochlearem processum accommodato, praeditum est. Os contra longius et crassius 16. linearum longitudinem aequans, radiumque mentiens superiore extremo, quod teres et excautum est, ossis humeri inferius extremum excipit, ob quam rationem potior pars trochlearis processus, radio inarticulata est, postica tantum eius parte in sinum recepta sigmoideum ossis ulnae, cuius adeo alterum rostrum, quod inferius est, propter dictam radii oppositionem, quando cubitus flectitur, sinum ossis humeri anteriorem attingere minime potest, alterum contra rostrum more aliorum animantium sinum posteriorem absque ullo impedimento ingreditur. In eiusdem ossis radii extremo inferiore id pariter animadversione dignum est, quod praefata extremitas ad ossium carpi receptionem sola inferuiat.

Tam officula carpi plurima, quam metacarpi pollicis, digitorum unguiumque, structura cum praefatis animantibus conuenire visa sunt.

Ad latus externum carpi officulum prominet, cornu acutum referens, osseae tamen et solidissimae substantiae, leuiter inflexum, diametro in principio 3. lin. et in fine dimidiam, longitudine vero 16. lineas aequante, cuius basis seu principium bicornis, hoc est duplici rostro cum sinu inter medio constans, ei quod diximus lateri externo carpi annexum est, caeterum ab omni alio nexu liberum, praefatis expansionibus aliformibus interiacens, suo tantummodo apice ad fasciculi fibrosi supra descripti extremum atligatum est. In eiusdem officuli gratiam, duo alia in vola officula minima ad carpum pertinentia et extra ordinem sita exstant, alterum transuersim positum ac pollice firmatum, alterum radii extremo annexum et oblique cum praecedenti officulo copulatum, quae ambo ad angulum acutum inuicem coeuntia a sinu officuli excepta, rostrisque eiusdem firmata, eam articulationem admirabilem efficiunt, qua praefatum officulum variis motibus edendis aptum et idoneum redditur.

Ea, quae haecenus breuiter exposita sunt, videlicet incredibilem leuitatem animalculi fere totum quantum membranacei, expansionumque cutanearum tenuissimarum leuissimarumque officulorumque ad eas spectantium singularem fabricam connexionemque attentius consideranti, ratio, opinor, qua eiusmodi animalculum in altum efferri suspensoque in aëre corpore aliquamdiu certum

volandi actum exercere valet, minus obscura ceneri debet, quamvis inter eam et volucrum constitutionem, magnam dissimilitudinem intercedere fatendum sit; cum Vespertione contra, ob analogia organa, ingentem conformitatem animadvertere fas est. Quare per latas in utroque ventris latere conspicuas telas summa flexilitate et tenuitate praeditas eumque in modum dispositas, ut quemadmodum alae avium ad pectus accommodantur retrahunturque, rursusque a pectore diducuntur et dilatantur, eae pariter ad contractionem aequae ac dilatationem proclives sint, per telas inquam praememoratas futuram esse corpusculi animalis in aëre suspensionem progressionemque; censendum est, quando per crurum subitam et velocem extensionem, qualis in saltu et cursu accidit, eodem momento abductio et complanatio earumdem oritur, qua prior easdem contrahens et complicans, videlicet actio vis fibrarum e dorso ad telas tendentium superatur; nam incedente aut quiescente animalculo, per earum fibrarum actionem telae sursum reuocatae ad latus ventris sese accommodant, ne pendulis aut fluctuantibus illis vel ipsae laederentur, vel incesus difficultas auferretur; Eodem tempore, quo extensis per saltum cruribus corpus in altum eleuatur, telaeque iis quasi fulcris annexae etiam complanatae praefatam corporis suspensionem adiuvant, ossiculum seu cornu longum et acutum supra descriptum ad externum manus latus prominens, eidem operationi apprime inferuit; Nam

quum articulatione admodum mobili cum carpo polleat, qua sursum deorsum, antrorsum et retrorsum sese conuertendi facultatem obtinet, eius functio similis est *Remigationi*, quandoquidem per varias et velocissimas eius particulae agitationes tractionesque, telarum eam arcte amplectantium robor firmitasque ad percutiendum verberandumque aërem non solum augetur, sed etiam regendo, dirigendo, et variis modis inflectendo, ista in aëre progressio perficitur, quorum motuum instrumentum praeter musculos carpi, is praecipue fasciculus fibrarum summo eiusdem particulae apici alligatarum, vt primarium censeretur meretur.

Tantum pro hac vice, speciminis solummodo gratia, de structura exteriori *Quadrupedis volatilis Russiae*, quae omnino digna sunt, vt intimius persequantur elaborenturque, quoniam, vt ait *Seneca* quando de Naturae mysteriorum studio imprimis de terrae motuum causis locutus haec subiicit: Nulla res consummata est dum incipit, nec in hac tantum re omnium maxima ac inuolutissima, in qua etiam cum multum actum erit, omnis aetas quod agat, inueniet, sed in omni alio negotio, semper a perfecto fuere principia. * Quamobrem, vt de partium internarum constitutione earumque rudi admodum descriptione, quam hic subiicio, sententiam meam aperiam, eam pro elaborata et Naturae satis consentanea descriptione,

ad

* L. An. Senec. Natur. Quaest. L. 6. c. 5.

ad quam multum sedulitatis, peritiae et contemplationis adhibitum fit, minime haberi volo, sed hac vice solummodo generalem rudemque conspectum partium internarum exhibere animus est.

r. Adeo tenuia sunt et pinguedine destituta integumenta, ut per illa partes subiectae fere transluceant.

A cerebro molli et copioso, eiusque structurae interioris nec non organorum sensoriorum inuestigatione studio abstinui.

In orbitae inferiori parte, e glandula ibi locata ductum excretorium iuxta dentes molares maxillae superioris hiantem, qui a *Cl. Nuckio* quartum appellatur, observaui.

Ductus excretorius e glandula maxillari claviculam fere attingente ortus, sub lingua deficiens pariter in conspectum venit.

Foramen linguae vulgo coecum dictum, distincte apparuit. Tantum de capite.

2. In collo rem quae sine exemplo visa est, et cuius contemplatio summam admirationem excitat, a me quidem animaduersam, sed tanta diligentia quanta res postulabat, haud persecutam fuisse fateor, silentio tamen praetermittere haud licet.

Primo Laryngis operculum ad linguae radicem sic
retra-

retractum erat, ut primo intuitu praefata functio operculi aegre locum obtinere videretur: eius enim apice, sine ullo cum cartilagine thyroide nexu, ultra eius oram quo alius initium Epiglottidis est, vix protento, reliqua epiglottidis substantia valvulam sigmoideam e linguae tunica efformatam, tam substantia quam forma mentitur, ad quam utrinque exilis musculus e cartilagine arytaenoide ad apicem extremum sese extendens conspicuus est. Porro in eiusdem particulae perlustratione viam seu ductum geminum sub praefata Epiglottide in linguae radicem substantiamue penetrantem offendimus. Sed attendite ad Tracheae compagem, quam more aliorum animantium tam terrestrium quam volatilium, ex annulis nequaquam constare, sed ex variis anomalis et nescio quibus characteribus signatam et conflaram esse animadversione dignissimum est. Certe nihil elegantiae tam coloris coccinei quam figurae praefatorum characterum, quod peritissimi *Chalcographi* opus esse diceretis, super addi posse existimo. Omnes qui rem contemplati sunt, illam ut diximus vere se habere confirmaverunt. Alii vero qui audient tantum, vereor ne inter fabulas recenseant culpamue vel in me vel in pictorem reiciant, quale iudiciorum genus hodie satis frequens est, ubi phaenomena naturae minus ordinaria euulgantur. Vt cunque res cedat, eorum characterum formam ab Academiae pictore bona fide

fide delineatam hic exhibendam esse duxi, donec eius rei penitus illustrandae occasio offeratur. Sed quod maxime lepidum silentioque haud praetermittendum est, figura nouem characterum hic delineatorum, totidem litteris in Russica Grammatica vsitatis exacte respondet. Sed de hac re satis.



In pulmone in quo nihil memoratu dignum oblatum est, an bronchia similibus characteribus signata essent nec ne? inuestigare conatus fui: Ea vero cum annulis tum characteribus carere, nudasque fistulas esse visa sunt.

In corde quod auelanae instar rotundum sacculoque inuestitum erat, 1. valvularum mitralium defectum. 2. cuiusdam foraminis oblongi, in dextro sinu more foraminis oualis in venam pulmonalem tendentis praesentiam obseruasse mihi visus sum: tametsi fateor vtriusque obseruationis veritatem cauere nolim.

Postremo, omento, liene, glandulisque mesaraicis Abdomen vacuum: Intestina ad modum tae-niarum in longum complicatarum, vel organorum instar musicorum disposita, ac inter illa coecum figurae Y: Ambo ductus biliaris videlicet et pancreaticus simplici intestinorum inflatione subito sese manifestantes: Duo fibrarum plana vnum a dextris, alterum a sinistris, ventriculi

triculi orificium sinistrum amplexantia: Glandularum renalium cauitas perampla: hepatis in plures lobulos diuisi moles ambo hypochondria occupans punctaque rubella candidae substantiae intermixta illud variegantia et a *Malpighio* in Sciuro vulgari obseruata. *vid. Exerc. de hep. p. 11.* Postremo, in Renibus vice plurium caruncularum, vnica papilla foramen peluis instar Epistomii obturans: Vesicae vrinariae longissimum collum cum accumbente pro-
stata: ea inquam sunt, quae obiter in partium internarum in hocce animalculo perlustratione absque sedulo examine oblata sunt.

DE
NOTIS CHARACTERISTICIS
OSSIVM.

AVTORE

Jos. Weitbrecht.

Tabula IX.

DVm circa dealbationem ossium ad Sceleti con-
ficienda destinatorum occupatus eram, acci-
dit, quod fieri solet, vt illa nonnumquam mi-
nora praeprimis, a vento, aliaue caussa
disiicerentur, atque inter se confunderentur. Haec
res ab initio vehementer me torfit, quia suum
cuique locum denuo assignare sine errore non erat
in

in mea potestate, nec definitiones autorum ad ossa *distinguenda* mihi sufficiebant. Cogitavi igitur de *methodo*, qua huic incommodo mederer; cumque illa nimis rudis et anatomico indigna videretur, quae ossa signo quodam notare, aut vinculis carceribusque coercere iubet; *notas* quasdam *characteristicas* ex accurata ossium ipsorum cognitione haustas mihi familiares reddidi, incitatus exemplo *Vesalii*, qui, vti de se in *Hum. Corp. Fabr. L. I. Cap. XL.* testatur, *longo indefessoque spectandi usu edoctus etiam obuinctis oculis cum sodalibus interdum deponere ausus fuerat, vnius mediae horae spatio nullum os ex tot aceruis, in coemeteriis, porrigi posse, quod, cuiusmodi esset, tactu non diiudicaret.* Nec meus me fefellit labor. Diligenti enim contemplatione tales exquisiui *notas*, quarum ope, ossa Sceleti quomodocunque inter se mista, facili negotio in ordinem redigere didici. Iuuabunt ista forte et alios: dabo igitur descriptiones harum notarum et delineationes. Suppono autem, qui haec in usus suos conuertere velint, cognitione ossium iam imbutos esse quodammodo: non enim osteologiam scribo, sed ossium solos characteres opto.

I. Circa *caput* non opus est, vt diu haeream. Raro enim accidere solet, vt illud in plures quam in duas partes diuidatur, quae etiam facillime sibi iterum imponuntur. Caput autem integrum in sua ossa, ex quibus caluaria, nares, maxillae componuntur, resolvere partim in Sceletis conficiendis

locum non habet, partim vero plus artis, patientiae atque imaginationis requirit, quam quod a tyrone expectari possit. Dentes quidem inter coquendum nonnunquam excidunt: facile autem redaptantur, si ad discrimen inter dentes incisorios, molares, et caninos notissimum, itemque ad proportionem, quae inter alueolos dentesque intercedit, attenderis.

II. In *vertebris* ordinandis in usum trahenda est generalis illa diuisio, quatenus in ceruicales, dorsales et lumbares dispescuntur. Singulis enim speciebus sui peculiare sunt characteres. Cum enim id in spina dorsi in genere obseruandum sit, ut a principio ad finem, quoad crassitiem et robur semper crescat, aliter ac in brutis, in quibus eodem ordine ad lumbos vsque decrescit: propterea vertebrae colli sunt omnium minimae, lumborum sunt maximae, dorsales autem magnitudinem mediam seruant; sed ita, ut quo magis descendant, eo magis etiam crassescant. Corpora vertebrarum colli, pro altitudine sua *latiuscula* sunt, corpora vertebrarum dorsi superiora eandem videntur seruare proportionem; mox vero altitudo et latitudo sibi *aequalis* est; tum, quae sequuntur, apparent *altiora* quam *latiora*; infima autem et corpora vertebrarum lumbarium denuo *latitudine* maiori pro altitudine sua gaudent. Vertebrae praeterea dorsi ad corporum suorum margines laterales leues *sinus* habent, quibus costae implantantur. Vertebrae colli habent pro-

cessus

cessus spinosos, *brevissimos* et plerumque bifurcos, excepta septima et prima: *Dorsales* habent eosdem processus *longos*, ad corpus valde oblique positos, apice suo ad horizontem spectantes, exceptis duabus ultimis, quae iam rectitudine sua insequentibus lumbares aemulantur: *lumbares* enim eosdem habent processus breviores, latos, ad angulum rectum perpendiculariter positos. Omnem denique ambiguitatem tollunt processus *transversi*. In vertebrae enim *colli transforati* sunt pro transmittendis vasis cervicalibus; in *dorso* ad apicis latus leuiter *exsculpti* et ob cartilaginum vestigia laeuigati sunt propter applantatas utrinque duodecim costas; in *lumbis* autem *simplices* sunt, recti, et potissimum acuti. Ne vertebrae inuersim ponas, ut superiora respiciant, quae deorsum spectare debebant, signum peti potest, partim a processibus spinosis, utpote qui maximam partem ex duabus quasi laminis ad angulum oblique spectantibus compositi sunt, partim vero, et quidem securissime omnium, a processibus superioribus inferioribusque, qui finis suos superficiales, quibus se mutuo recipiunt vertebrae, ita positos habent, ut in *superioribus extrorsum*, in *inferioribus* autem *introrsum* spectent; quae quidem compages in spina naturaliter adhuc cohaerente oculos mirifice delectat. Haec de vertebrae in genere. Ut vero quaeuis species sigillatim collecta in ordinem reducatur; partim tentando inuenies, quae sibi proxime adiacere debeant; par-

tim ad ea confugiendum est, quae superius de magnitudine corporum, et reliquis vertebrarum differentiis diximus: partim adminicula quaedam particularia conquirenda sunt. Et quidem in vertebrae colli ad haec attende: Vertebra prima *caret corpore*, et processum *spinofum* habet *nullum*, septima habet *longissimum*, secunda dente suo satis distincta, *crassissimum*; praeterea in vertebra prima illi sinus, qui processus ossis occipitis recipiunt, et profundius cauati, et longius *protracti* ac *lunati* quasi sunt, quam quibus cum vertebra secunda articulatur. Reliquae colli vertebrae, quo magis descendunt, eo et *tenuiorem* spinam habent, et *longiorem*. Ordinem vertebrarum dorfi imprimis adiuuant illi *sinus*, quos costarum gratia corporibus insculptos supradiximus. Quia enim costae, exceptis prima et duabus vltimis, applantantur ad margines et confinia corporum duorum; hinc quaeuis vertebra *duos sinus* habet, vnum in limbo superiore, alterum in inferiore; sed quo magis vertebrae descendunt, eo magis quoque costae ab illo confinio recedunt, et sinus illi in limbo inferiore decrefcunt, donec in tribus vltimis plane euanescent, et costa duodecima in vertebra duodecima sola, circa medium corpus fere illius requiescat. Atque horum *sinuum augmenta* et *decrementa* in redigendis spondylis dorfi plurimum te iuuabunt. Vertebrae lumbares praeter crassitiem corporum sensim auctam nullas peculiare notas habere videntur, nisi quod *tertia* seu *media* processum transuersum ha-

beat

beat *longissimum*, in reliquis autem ille pro distantia a tertia augeatur et decrescat.

III. Circa *os sacrum* nulla est remora. Neque enim quemquam adeo rudem ac ineptum esse existimem, ut illud ita reponat, ut superficies altera, prominentiis suis ad modum processuum spinosorum exasperata versus peluim sit directa. Officula coccygis nonnumquam ab osse sacro rumpuntur; illorum autem superficies, quae peluim respicit, quadantenus *plana*, opposita e contrario, *conuexa* est.

IV. In *costis* opera danda est, ut illas primo omnes, quae ad *idem latus* pertinent, colligas, deinde, quo ordine in quouis latere se inuicem sequantur, attendas, tertio, ut quaenam collectio ad *dextrum sinistrumue* latus pertineat, distinguas. Ut finem *primum* obtineas, scito, omnes costas eiusdem lateris homogeneitatem quandam figuræ seruare, ita ut partim *curuatura* extremitatum sursum deorsumue spectans, partim *acutum inferius* labrum partim vero, et imprimis quidem monticuli illi, qui articulationi costarum cum processibus transversis vertebrarum inseruiunt, simili directione ac positione, simili modo gaudeant. Selige igitur aliquam costam, e. gr. *longissimam*, et cum hac reliquis confer: si dicta omnia simili modo se habent, ad idem illud latus, pertinent; sin minus, lateri opposito erunt adscribendae. Ordo autem
costa-

costarum talis est: *Prima* est breuissima, *latissima* et curuitate gaudens maxima, tum quae sequuntur, semper posterior priore *maio*rem curuaturae *angulum* habet, siue ad rectitudinem inclinatur, ita, ut vltima propemodum aequae quidem breuis ac prima, sed tenuis, et tantum non recta sit. Deinde a prima ad quintam longitudo semper *crescit*; quinta et sexta plerumque *aequaliter* longae; a sexta ad duodecimam longitudo iterum *minuitur*; quae duo, *curuatura* nimirum et *longitudo*, simul considerata ab errore satis cauebunt. Est tamen alia quaedam nota, quae ab *extremitate posteriori* desumi potest. Illa enim, quatenus sub terminis articulationum binarum cum corpore vertebrarum et harum processu transuerso, comprehenditur, in quatuor superioribus costis, tenuis, *teres* et *longa* est, at in succedentibus semper pro ratione ordinis crassior, *latis* ac *breuior* euadit. Atque haec quidem obseruationes in decem mediis costis potissimum locum habent. Costae autem prima et vltima tantisper seponendae sunt, donec innotuerit, quatenam collectio ad hoc vel illud latus pertineat; id quod sequenti modo expiscaberis: omnes viginti aut octodecim (nam et in vndecima haec nota nonnumquam deficit) ita coram te reponas, ut extremitates posteriores dexterarum tuarum, anteriores autem sinistrearum, et quidem *auer*sim sitae, respondeant: quae in hoc situ locum articulationis cum processu vertebrae transuerso *conspiciendum* praebent, ad latus *dexterum* pertinent; quae vero

Tabula IX.

Fig. 1. 2.

vero locum illum *occultant*, lateri *sinistro* affigito; similiter in tali positione sulcus labri inferioris *ibi* apparet, *hic* occultatur. Porro in memoriam reuocandum est, quod supra dixi de vertebra, quod ad corporum suorum margines leues sinus habeant, quibus costae implantantur, quodque haec costarum cohaesio ad duorum corporum *conspici* fiat, et vna eademque costa binis simul vertebrae adplicata sit. Obseruabis enim, tuberculum illud costae *ex* gr. septimae, quod sinum corporis vertebrae septimae subit, magnitudine et latitudine superare alterum, ad angulum oblique ipsi adiacens, quo eadem costa sinulum ad marginem corporis vertebrae sextae intrat. Quia vero haec costae cum vertebra superiore cohaesio in duodecima, et nonnumquam in vndecima quoque, deficit, imo et articulatio illarum cum processibus transuersis obliteratur; hinc in harum duarum costarum ordinatione facile errabis, cauebis autem, si ad angulum *tuberosum* adtendis, qui iuxta articulationem primariam situs eo inseruit, vt costae cum praecedente vertebra per ligamenta connectantur. Tandem costae primae ita a se inuicem discernuntur: repone nimirum eas coram te, vt extremitas posterior manui tuae dexterae, anterior autem finistrae respondeat: tum quae extremitatem posteriorem *sursum* vergentem habet, *sinistro* lateri adscribes, quae autem plane iacentem monstrabit, *dextro* lateri adiudicabis. Praeterea latus costae primae internum, pectori obuersum, conuexitatem

quandam prae se fert, externum vero sulcosum est.

V. *Sternum* in duo plerumque ossa diuiditur, quorum superius ensis *manubrio* ab autoribus aequiparatur; alterum vero *gladius* dicitur. Illud triangulare quodammodo, exterius cavitatibus et monticulis exasperatum, intus vero planum est; hoc vix pollicem latum, sex autem longum in cuspidem nunc vnum nunc duos definit, cui *cartilago ensiformis* adhaeret; *extus* similiter *asperum*, *intus leue*, planum et aliquatenus concauum est.

VI. *Scapula* dextra a sinistra distinguitur: si illarum superficiem externam ita respicis, vt spina *oblique sursum* vertat, si enim ad dextram spectat, tum et dextra illa scapula est; si ad laeuam, laeua; quod idem ex positu cavitatis glenoidis pro recipiendo humero addiscitur.

VII. *Clauicula* duas extremitates habet, quarum, quae *rotunda* est, *sterno* applantatur, plana autem processui coracoidi scapulae incumbit. Haec planities in superficie accumbente *aspera*, in externa laeuis est. Ne autem dexteram pro sinistra accipias, scito, extremitatem rotundam habere angulum protuberantem *versus gulam*, quo per ligamentum interclauiculare connectuntur; deinde mox corpus clauiculae incuruari, ita, vt longe a gula deorsum recedat, conuexitasque costas respiciat; tum vero denuo collum *versus* reflectatur.

VIII. *Ossa innominata*, quae in sceletis adultorum in vnum os coalita deprehenduntur, primo *acetabulum*, id est, cavitatem insignem pro articulatione femoris habent, et quidem extrorsum spectantem; deinde ileum externe vbiq̄ue laeue est, interne autem, et quidem versu posteriora pro receptione ossis sacri plurimis exasperationibus gaudet. Neque minus incisura magna inter os ilei et ischii posteriora respicit. Quae quidem notae ad discernenda dextra a sinistris sufficiunt, si forte disiuncta fuerint.

IX. *Ossa humeri, cubiti, radii, femoris, tibiae, fibulae* hanc inter se similitudinem habent, vt omnium sceleti ossium, pro latitudinis ac profunditatis ratione longissimae sint. Notae autem peculiare, quibus inter se distinguuntur, sequentes sunt. *Femur* et longissimum et crassissimum est. *Superne* unum caput ad angulum obliquum sursum prominet a corpore, et ex opposito eius latere processum insignem, qui *trochanter maior* dicitur, habet. In *inferiore* extremitate duo sunt capita, quibus cum tibia articulatur. Corpus ipsum satis *teres* quadrantenus a linea recta deflectit, superiusque ac inferius incuruatur, ita vt conuexitas anteriora respiciat. Atque haec curuatura tibi pro norma erit, in assignando latere: si enim contemplando illam, caput superius magnum tibi a dextris erit, os quoque dextrum habebis, si a sinistris, sinistrum; praeterea, quod inter duo capita inferiora

externum est, superficiem suam cartilagine incrustari solitam paullo *altius* positam habet, quam *internum*, et hoc quoque magis *deorsum* producitur.

X. *Ossa tibiae* tam extremitate sua superiore, utpote pro corporis sui ratione crassissima, duabusque cavitatibus glenoidibus pro receptione capitum femoris donata, quam protuberantia *angulosa* lineari, secundum longitudinem ossis anteriorem producta, et cuius contusionem tam difficulter ac dolorose ferimus, nota se praebent. Extremitas inferior basin suam, qua *talum* recipit, propemodum *quadratam* habet, et ad latus internum alteri scilicet e regione oppositum processu quodam crasso ac lato munitur, qui vulgo *malleolus* interior audit, et in parte antica in apicem breuem definit. Cum igitur memorata *protuberantia* acuta longitudinalis *anterius*, *malleolus* autem *interius* ponatur, id tibi notam *dextrae* ac *sinistrae* tibiae sufficientem praebet, quod et porro ex cavitatibus supra dictis in extremitate superiore, sub qua *anterius* in medio protuberantia insignis pro implantatione tendinum, extendendae tibiae inseruentium conspicitur, elucescit; cum enim caput femoris internum longius *deorsum* produci diximus, necessario illius causa cavitatis tibiae interna, illi capiti respondens, profundior quoque esse debuerat.

XI. *Fibula* plurimum facessit negotii. A reliquis ossibus sui similibus quidem tenuitate sua, et
 figura

figura corporis prismatica distinguitur: suo autem quaevis lateri assignatur notis sequentibus. Extremitatum duarum illa, quae *crassior* et brevior ac rotundior est, (si quidem, quod angulosum est, rotundum dici potest) *superius*, quae autem *latior* tenuiorque est, *inferius* cum tibia connectitur; neque minus *facies* illa, qua inferius ad latus tali applicatur, *spatiosior* est et amplior, quam ubi superius tibiae adiacet; porro *fibula* locum a corpore aversum obtinet, siue, *exterius* posita est. Tandem quia corpus prismaticum esse diximus, *tres* lineas seu *angulos* obtinuit, quae *tria latera* terminant; quae autem harum linearum longitudinalium maxime *obtusæ* et rotunda est, *exteriora* occupat, quae maxime *acuta* est, *anterior* prospicit. Denique extremitas superior in apicem obtusum e *medio* prominentem definit, inferior autem apicem similem non in medio, sed a *latere*, et quidem *posticitus* descendentem obtinuit. Atque his respectibus observatis, quae dextro femori applicari debeat *fibula*, quae sinistro, dignosci potest.

XII. Viciniae gratia, quae de patellis dicenda sunt, hic inspergamus. Has quidem *Vesalius* L. I. c. 32. tam eleganter ac perfecte descripsit, ut secundum illius ductum, eas quam facillime distinguas: ne tamen a nobis intactae relinquantur; ad haec tria totum illarum discrimen reducamus. Primo, illarum superficies interior, qua femori ac tibiae applicantur, *laevis* est, et in medio protube-

rans, exterior contra *aspera* est, loraminulis scatens longitudinalibus; deinde triangularis quaedam *appendicula deorsum* spectat, cum superne corpus satis aequabile sit; denique protuberantia memorata superficiem internam diuidit in duos quasi *senus* superficarios, quorum qui *lterior* est, *externo* foemoris capiti applicari debet. Atque his notis adiutus, quae dextera sit, quae sinistra, mox intelliges.

XIII. *Brachium* tria ossa constituunt, os *humeri*, *ulna* et *radius*; horum longissimum et crassissimum est os *humeri*, quod imprimis in extremitate superiori capite *globoso* munitum est, quo in cauitatem glenoidem scapulae possit immitti, quale nullum aliud os habet. Hoc autem caput corpori ossis non perpendiculariter insidet, sed ad latus quasi appositum est, siquidem et memorata cauitas non deorsum sed extrorsum spectat. Ad distinctionem dextri a sinistro tres notae satisfaciunt: *sulcus* proxime ad caput corpori ossis secundum longitudinem eius inscriptus, et recipiendo tendini longo musculi bicipitis destinatus; *processus* maior ad latus alterum iuncturae inferioris; et *fouea* profunda pone dictam iuncturam, motui olecrani finem ponens. Quodsi igitur os humeri ita locaueris, ut caput et processus maior interiora, sulcus anteriora, fouea autem posteriora respiciant, in loco conuenienti reposuisti.

XIV. *Ossa cubiti* similitudinem quandam inter se habent; nam corpora illorum sunt eiusdem fere crassitie, eiusdem quoque propemodum figuræ cum spina acuta longitudinali, qua se mutuo respiciant; et, ni *vlne olecranum* appositum esset, eiusdem quoque longitudinis. Ambo gaudent apophysi altera *crassa*, altera *tenui* et *rotunda*, sed ordine inuerso, et figura diuersa. *Vlna* enim in superiore extremitate cavitatem insignem, *sigmoidem* dictam habet, a latere postico, processu ingente, quem iam aliquoties *olecrani* nomine allegauimus, munitam; inferior autem *vlne* extremitas in capitellum *globosum*, cum breui processu *styloide* laterali definit. At *radius* superne apophysin habet *rotundam*, vbique aequalẽ, cum cavitãte glenoidẽ, qua tuberi in iunctura ossis humeri sibi destinato insidet, et ad omnes motus, flexorium, pronum et supinum aptus redditur; inferne autem lata eius apophysis fovea *duplici* per lineam in medio protuberantem discreta ordinem carpi superiorem recipit, et manus extremæ motum agilem reddit. Superne ad latus processus *vlne sinus* insculptus est, ad recipiendam *cristam*, qua radii capitulum superius quasi circumuoluitur; inferne vicissim in radio simili modo *sinus* excavatus est, recipiendi *vlne capitelli* gratia. Quibus obseruatis apparebit, quomodo ossa cubiti sibi inuicem immitti debeant. Ne autem *radius* finistrum ad *vlnam* dextram applices: considera manum situ *supino*, tunc enim intelliges, *radius* obtinere lo-

cum a corpore auersum, et respondere *pollici*, *vl-*
nam vero obuerti corpori et respondere digito
 auriculari. Quia vero talis proximitas circa iun-
 cturam tantum cum osse humeri perpetuo constans
 fit, mutato autem situ manus supino in prouum
 illa inuertatur, hac ratione soli *vl-nae* suum latus
 conueniens assignatum manet; radii vero gratia
 hoc addendum, illius extremitatem inferiorem ha-
 bere latus *supinum* siue volae manus respon-
 dens, *planum* et aequabile, *prouum* vero siue dor-
 so manus continuum, *conuexum* crenisque ac fulcis
exasperatum pro transmittendis dirigendis que ten-
 dinibus musculorum digitos extendentium. Ad
 quam proprietatem si attenderis, illa sola ab er-
 rore te praeseruabit.

Fig. 3.

Fig. 4.

XV. *Offa carpi ac tarsi* id inter se commune ha-
 bent, vt figuris gaudeant omnium totius sceleti ossium
 maxime irregularibus, inter se ipsa autem nullam pla-
 ne conformitatem seruent; hinc vel hic solus cha-
 racter ossa carpi et tarsi a reliquis discernit. *Offa*
tarsi autem ab ossibus *carpi* vincuntur irregulari-
 tate et magnitudine; vnde factum esse conicio,
 cur ossa *tarsi* peculiariora nomina ob figuras suas
 satis adhuc simplices a veteribus acceperint, ossa
carpi vero nulla. Sed cuius ossi suum assignare
 locum memoriter, id non sine imaginatione per-
 tinaci erit efficiendum. Tentabimus tamen aliquid
 in re perplexa, initium a carpi ossibus octo fa-
 cientes. Vt sciamus, de quo osse sermo sit, re-
 tine-

tinebimus methodum veterum, qui ea primum, secundum, tertium etc. octauum dixerunt. Dispersuntur in duos ordines, superiorem et inferiorem, qui se mutuo recipiunt articulatione ad enarthrosin quam proxime accedente. Quaterna ordinem conficiunt. *Primum* et *secundum* ordinis superioris, vbi cum radio cohaerent, *gibba* sunt, et per ginglymum cum illo articulantur: *Tertium* secundo applantatur ad latus a corpore *auersum*: *Quartum solitarium* cum tertio articulatur. Neque minus primum et secundum conficiunt ex opposito latere cavitatem *communem* profundam pro receptione ossium ordinis inferioris; *Tertium* cavitatem illam *complet*. Immittuntur autem in eandem ex ordine inferiore, imprimis os *septimum tubere* insigni; os *sextum* et *octauum* vero ad latera septimi posita caput pro implenda cavitae *adaugent*. *Quintum* cum primo et sexto iungitur, et recipiendo *pollici* destinatum est. Haec quatuor ossa ordinis inferioris quasi in arcu circuli posita esse videntur, et inferius superficies suas fere *triangulares*, non tamen planas habent, quibus quinque ossa metacarpi, superficiebus respondentibus coaptantur. His praemissis, ossa propius contemplantur, incipiendo ab iis, quae in oculos luculentius incurrunt. Os *minimum quartum* est, semiglobosum, *vnica* iunctura seu vnico sinu gaudens pro receptione tertii. Os *octauum* imprimis *lingua* sua prominente, cui ligamentum annulare carpi internum adnascitur, discernitur.

scernitur. *Septimum* quodammodo pyramidale est, loco apicis in *tuber* insigne, globosum, desinens. *Os primum latum* est, et *oblongum*, in medio *cauatum*, pro recipiendo latere interno tuberis ossis septimi, extus *conuexum*, et duplici iunctura per sulcum transuerfum distincta, tam pro sinu radii, quam pro osse quinto et sexto, eminens. *Os secundum* extus similiter *globosum* est, pro articulatione radii, intus vero *concauitatem lunatam* aequabilem habet, propter summam eiusdem memorati tuberis, et complendae cavitatis communis gratia. His remotis restant ossicula tria, a quibus *tertium* imprimis superficiali et *ouali* iunctura cum osse quarto distinguitur. *Os sextum* vero *quatuor* sinibus seu excauationibus ad angulum non plane rectum positus quasi Trapezium format. *Os quintum* singularem iuncturam habet, quam alibi* descripsi pro articulo pollicis, et *fossulam* longitudinalem ad latus iuncturae pro transitu tendinis radiaei interni, versus volam, inter duas protuberantias, quarum altera intra confinia ossis primi et sexti se immittit, altera lingula ossis octaui opposita firmando ligamento annulari inferuit. Iam si in ordinem suum redegeris haec ossa, curandum est, vt, quae ad latus quoduis pertinent, colligas. In hoc autem partim plurimum adiumenti afferent ea, quae iam diximus, et imprimis observatio iuncturarum pro ossibus metacarpi; partim vero ea, quae iam de singulis ossibus notamus. Sunt autem sequentia.

Os

* Vid. Comment. Acad. Imper. Tom. IV. p. 238.

Os *primum* quasi ex duobus compositum videtur, quae per *fulcum* supra memoratum distinguuntur. Repone igitur illud coram te secundum latitudinem suam, ut et convexitatem duplicem, et sulcum respicere possis. Si ille sulcus a sinistra versus dextram oblique descendet, os sinistrum erit, si e contra a sinistra ad dextram oblique ascendit, ad carpum dextrum os illud pertinebit.

Fig. 5.

Offis *secundi* cavitatis *lunata* alterum cornu habet *acutum*, alterum *latiusculum*, acutum in *dorso* manus apparet, *latiusculum* in *vola*. Ad *latus* cavitatis alterum est *sinus* leuiter exsculptus, similiter *lunatus*, ad alterum *sinus* propemodum *quadrangularis*: *sinus* *lunaris* offi primo coaptatur, *sinus* *quadrangularis* offi tertio. Hae notae dextram et sinistram determinabunt.

Fig. 7.

Fig. 6. 7.

Os *tertium* tres habet iuncturas pro connectione cum offe *secundo*, cum *quarto*, et cum *octauo*. Respice igitur simul ad binas iuncturas primas; si *tertia* *dexteræ* *tuæ* respondet, os *dextrum* quoque est, si *sinistra*, *sinistrum*.

In offe *quarto* imprimis *rotundum* aliquod *tuberculum* insigne protuberat, versus *volam* spectans, pro *insertione* *vnaris* *interni*, et quo, mediante *ligamento*, cum *lingula* offis *octaui* coniungitur; deinde in illo *tuberculo* conspiciuntur

Fig. 8.

vestigia insertionis fibrarum ligamenti annularis dicti; denique externe corpus huius ossis aequabiliter conuexum est, interne vero, volam versus, inter iuncturae marginem et corpus ipsum, sulcus aliquis leuis latiusculus conspicitur; quo supra dictum tuberculum tanto magis eleuatur. His obseruatis, vnumquodque loco suo proprio referuari poterit.

Fig. 9. Os *quintum* pro pollice habet in iunctura sua *sinus* duos, angustiozem et profundiozem in latere dorsum manus respiciente, *ampliozem* in latere opposito. Neque minus fossula seu *fulcus* supra memoratus conspici debet superius in vola. Talis situs determinabit dextrum et sinistrum.

Fig. 10. Os *sextum* sinus habet quatuor, qui *maximus* est, metacarpi ossibus sustinendis inseruit, et *lunatus* est, ita vt cornua digitorum medium respiciant. Cornu autem in *vola* positum *acutius* est; in dorso, *latius*.

Fig. 11. Os *septimum* basin pro sustinendo metacarpo propemodum triangularem habet, ita, vt apex in vola terminetur. In latere autem altero singularis *iunctura* *lambdoides* apparet secundum *longitudinem* ossis *producta*, et iuncturae simili in osse octauo, cum quo articulatur, correspondens.

Fig. 12. Os *octauum*, si ad quadrangularem basin, cui duo ossa metacarpi insistent, respexeris, *lingulam* suam

suam aduncam ita positam habet, vt versus pollicem inclinetur, et cauitatem illam conficiat, in qua tendines flexorum sub ligamento annulari reconduntur.

XVI. *Tarsus* habet *septem* ossa. Primum *calcaneum* maximum est; secundum *talus*, seu *astragalus*, sequitur magnitudine, inter calcaneum ac tibiam interiacet, et imprimis *globofo* capite distinguitur. Dein pari passu ambulant os tertium *nauiculare* seu scaphoides, et quartum *cuboides*; illud *oblongum* cauitate sua sphaeroide se prodit, hoc *angulosum* est; illud caput astragali recipit, hoc sinui calcanei se immittit. Reliqua tria *cuneiformia* iuxta se posita ossis nauicularis faciei triplici applicantur, et cum tribus metatarsi ossibus articulantur. Illorum, quod *maximum* est, *interius* iacet et pollicis respondet, *minimum* duo reliqua *interiacens* digito secundo; quod magnitudinem mediam seruat, exterius digito medio. Quartum et quintum os metatarsi recipit cuboides. *Calcaneum* igitur infimam ac *posticam* pedis extimi partem constituit, *talus* *superiorem*, ossa *cuneiformia* *anterius*, *scaphoides* autem et *cuboides* situ *medio* locata sunt.

Calcaneum habet processus *quatuor* notabiles, *posticum*, cui insistimus; *anticum*, cui os cuboides applicatur, *superiorem* et *lateralem* pro receptione tali. Inter processum lateralem et posticum cal-

calcaneum quasi *excavatum* videtur, cum in latere opposito aequabiliter tuberosum sit; ista excavatio semper in *interiore* parte pedis debet esse constituta. Obseruato igitur respectu processuum caeterorum, si *lateralis* processus tibi a sinistris est, calcaneum ad pedem dexterum pertinet, si a dextris, ad sinistrum.

Astragalus seu *talus*, iuncturas quatuor habet prae reliquis notandas: *caput anteriora* prospicit; iunctura *concaua inferior calcaneo* immittitur; *superior* conuexa *quadrangularis* tibiam sustinet; *lateralis triangularis* fibulam recipit. Cum vero fibula in externo pedis latere posita sit, hinc illa iunctura triangularis similiter *exteriora* occupare debet; in dextro igitur pede a dextris, in sinistro a sinistris erit.

Os *scaphoidis* margo superior atque interior crassus est, et apophysin magnam lateralem habet; quae quidem *apophysis* si ceteris rite positis *interius* apparet, cuiusnam pedi os annumerandum sit, satis patet.

Os *cuboidis* iunctura posterior, qua ad calcaneum apponitur, faciem fere *plani* semicirculi habet, cuius arcus exteriora occupat. Neque minus iunctura anterior, quae cum metatarso copulatur, ad iuncturam posteriorem *inclinatur*, *angulo* similiter *extrorsum* producto, in dextro pede dextrorsum, in sinistro sinistrorsum. Facies superior *plana* est, inferior autem *sinuosa* et protuberans.

Os *quintum*, seu *cuneiforme* maximum, anteriorem iuncturam habet *lunatam*, cui primum os pollicis adaptatur; *cornua extorsum*, siue reliqua cuneiformia respiciunt. Ceterum hoc os si cuneiforme nomen meretur, inuerso certe situ positum est, acie tenui sursum, corpore autem crasso deorsum spectante. Est autem in latere suo conspicuo conuexum, in occulto concauum, ut rotunditati pedis succurrat; ibi quoque iuncturam *lambdoidem*, iuncturae simili in osse *sexto respondentem* exhibet, cuius quidem latus alterum superius *parallele* antrorsum currit, alterum perpendiculariter descendit.

Fig. 10.

Fig. 13.

Os *sextum* et *septimum* vere cuneum aemulantur; corporis facies *lata sursum* spectat, acies vero deorsum. Iuncturae, quae inuicem copulantur, sunt ad latera partis posticae. Iuncturae autem anticae et posticae sunt triangulares, posticae tamen latiores et breuiores anticis. Iam si os *sextum* iuncturam *lambdoidem* in latere sinistro habet, ad pedem dextrum pertinet, quia os *quintum* a sinistris est; quod vice versa de osse sinistro erit dicendum. Os *septimum* vero lateraliter per iuncturam triangularem cum osse cuboide copulatur; quae iunctura si a dextris apparet, os quoque dextrum est, si a sinistris, sinistrum.

Fig. 14-15.

XVII. Offa postbrachialis seu *metacarpi*, et *metatarsi*, *longa et teretia* sunt; ut inter se distinguantur,

Tabula X.
Fig. 16, 17.

quantur, nota haec: ossa metacarpi, vbi cum digitis iunguntur, capitulum habent *crassius* et *latius*; ossa metatarsi autem pro ratione longitudinis suae sunt subtiliora ac tenuiora.

Ossa *metacarpi* soleo numerare *quinque*; nam primum os pollicis in metacarpo refero, secundum in phalanga digitorum prima, tertium in phalanga digitorum extrema, ita vt pollex phalanga media carere dicendus sit, quod item de pollice pedis intellectum velim. Os pollicis primum, a reliquis metacarpi ossibus differt breuitate et crassitie, deinde per peculiarem iuncturam cum osse quinto carpi iungitur, quam loco citato descripsi. Vt dextrum a sinistro distinguas, videbis, latus ossis *internum*, seu a reliquis digitis auersum, semper esse *breuius* quam *externum*, deinde, sinus alter iuncturae angustior est in latere indicem respiciente, amplior in latere opposito. Caetera *quatuor* ossa sibi inuicem succedunt longitudine decrescente, ita, vt quod *indicem* sustinet, *longissimum* sit, quod *auricularem* *breuissimum*; reliquorum duorum *crassius* vero *digitum medium*; quamquam non eadem proportio huius decrementi obseruetur. Vt scias, quae ad sinistram pertineant, sequentes retine notas: Os *indicis*, vbi cum carpo iungitur, *capitulum* habet omnium *crassissimum*, et in eo *protuberantiam* magnam, qua in forcam, quae est inter sextum et septimum os carpi, immittitur; porro ex vno latere tantum articula-

tur

tur cum osse metacarpi sequente per iuncturam duplicatam. Cum igitur, vbi haec iunctura est, os digiti medii applicatur, hinc si ad dextram pertinet manum, a dextris quoque debet esse; si ad sinistram, a sinistris.

Os, quod *medium* digitum sustinet, in latere capituli ad carpum, habet *processum* acutum in dorso manus conspicuum, iuxta os antecedens; porro eadem iunctura duplicata conspicitur in vno latere, quae in osse praecedente; in altero vero *duae cavitates* gloriores paruulae *rotundiusculae*, pro recipiendis *capitulis* lateralibus ossis sequentis. Ex quorum omnium situ dextrum a sinistro discernere poteris. Eadem concludi possunt in osse *quarto* metacarpi, annularem sustinente, ex iisdem *capitulis lateralibus* elatioribus. In latere capitulis his opposito, sinus latiusculus horizontalis apparet, et simplex, pro recipiendo osse *quinto*. Os *quintum* enim ex *vno* tantum latere articulatur, ex altero liberum est; vbi igitur iunctura deficit, illud latus terminum manus ponit.

Fig. 16, 17

XVIII. Ossa quinque *metatarfi*, vt ordine crescunt, ita longitudine decrescunt: haec autem differentia cum inter os *tertium* et *quartum* non semper ita euidens sit ac inter *secundum* et *tertium*, in specie notandum est, *basin* ossis *quarti*, qua cum osse cuboide articulatur, magis *rotundam* esse, quam longam, et in aliquibus *concauam*, et cum ossibus

Tom. V. LI fociis

- Fig. 19. fociis vtrinque articulatione *simplici* iungi, cum contra os *tertium* ex vno latere cum *secundo* iungatur articulatione duplici. Os pollicis a reliquis differt magnitudine sua, crassitie, et corpore prismatico. Os *quintum* vero per processum oblongum lateralem circa extremitatem superiorem distinguitur, qui versus exteriora protuberat. Ex curvitate horum ossium plantam et dorsum facile dignoscimus. Dextra autem et sinistra his notis seligitur. *Pollicem* ad os cuneiforme per iuncturam *lunatam* adaptari supra diximus, cornua autem iuncturae extrorsum siue ad reliqua ossa spectare; id igitur in pollicis iunctura quoque erit obseruandum. Deinde ossa metatarsi in capitulo inferiore habent duos processus paruos, *aduncos* quasi, et versus plantam recuruos, quorum qui pollicis proximus est, *breuior*, alter vero *longior* est.
- Fig. 20.
- Fig. 21.
- Fig. 22. 23. XIX. *Phalangae* digitorum *manus* superant digitos *pedum* longitudine et crassitie, si pollicem pedis exceperis. Digiti quoque pedum corpora habent *tenua* ratione *capitulum* suorum. Differentia inter phalangam digitorum manus primam et secundam ab articulationibus peti potest. Prima enim in extremitate superiori iungitur cum ossibus metacarpi per *enarthrosin*, hinc ibi *foueam* unicam habet; in extremitate autem inferiore iungitur cum phalanga secunda per *ginglymum*, et hunc in finem capitulis *duobus* cum interiecto sinulo instructa est, quibus vicissim *duae* foueolae cum
- Fig. 24.

cum interiecta lineola media eminente respondent in extremitate superiore ossium phalangae secundae. Haec ossa ut et reliqua digitorum, a latere volae sunt *plana* et *recurva*, in *dorso* autem *convexa* et *rotundiuscula*. *Longissimum* illorum ad *digitum medium* pertinet; ex duobus *brevissimis* quod *crassius* est, *pollicis*, quod *tenuius auriculari* adiudicari debet; quod aliorum duorum ad *indicem* pertinet, id *plerumque brevius*, sed *crassius*, quod ad *annularem*, id *longius* sed *tenuius* esse solet: non igitur eundem ordinem longitudinis cum ossibus metacarpi seruant. Regula autem discriminis inter dextrae et sinistrae manus ossa haec videtur esse. Ex capitulis duobus in extremitate inferiore, semper paulo *altius* et *crassius* solet esse id, quod *digitum medium* respicit; in *medii* autem *digiti* osse in specie capitulum in vicinia *annularis* altius est; in pollicis phalanga praeterea *latus a digitis auersum longius* productum esse videtur quam *latus oppositum*.

Fig. 25.

Phalanga *secunda eundem* propemodum ordinem seruat, quam *prima*; quod enim *longissimum* est, ad *digitum medium* pertinet, quod *brevissimum*, ad *minimum*. Reliquorum quod *crassius* et *brevius* ad *indicem*, quod *longius* et *tenuius* ad *annularem* pertinet. Discrimen inter dextra et sinistra peti debet *ex articulatione* cum phalanga *prima*. Nam quemadmodum ibi capitula versus *medium digitum* (et in ipso medio digito versus *annularem*) paulo *altiora* ac *crassiora* sunt, ita et

phalangae secundae foveolae illis capitulis correspondentes, etiam *profundiores* ac toto habitu maiores conspiciuntur.

Ossa phalangae *tertia*e inter se vix distingueris; en notas: *Pollicis* est *maximum*; postea digiti *minimi* est *minimum*; *medii* est inter reliqua tria *crassissimum*, non semper et *longissimum*; quod restat *longissimum*, ad *annularem* pertinet, vltimum ad indicem. Sed dextra a sinistris discernere; id quidem effectui dare hactenus non potui, si os pollicis excipias, quod in latere a digitis auerso foveolam *spatiosiore*m habere videtur.

XX. *Primum* digitorum *pedis* internodium similiter differt a reliquis internodiis *longitudine*, et in quouis ordine quod pollicis propius est, longius quoque est. Os pollicis singulari sua et proportionata magnitudine a ceteris quatuor distinguitur, et si os quartum ac quintum sibi fere longitudine similia sunt, differentiam a *crassitie*, quae ossi *quinto* conuenit, petere oportet. Os pollicis habet latus internum, siue a digitis auersum longius quam id, quod oppositum est; ceterorum extremitas inferior qua cum internodio digitorum secundo iunguntur per *ginglymum*, capitulum alterum, quod est pollicis *propius*, *altius* quoque habet, vti id in phalangis digitorum manus obseruatum est; quamuis id propter ossium exiguitatem difficile sit cognitu.

Reliqui duo ordines quemadmodum pro distantia a pollice, longitudine decrescere dicti sunt; ita

ita et difficilium est, dextra a sinistris discernere; id quod partim ab *exilitate* horum officulorum provenit, partim vero a diuersa figura, in quam pedes ab usitatis calceis torquentur, dependet. Saepe in digito tertio et quarto phalanga extrema cum media coaluit. Solum os pollicis extremum ad latus iuncturae internum, i. e. a reliquis digitis *aversum*, protuberantiam *latiorem*, longiorem et *asperiorem* habet, quam in latere externo opposito.

Fig. 27.

XXI. Restant ossa *sesamoidea*, quae cum reliquis confundi posse dubito. Illa sola, quae internodio pollicis pedis primo apposita sunt, conformitatem aliqualem habent cum osse *quinto carpi*, quia vero praeter suam conuexitatem *nulla* alia protuberantia praedita sunt; hinc ab officulo carpi facile distinguuntur.

Si quae sunt, quae ex descriptione non satis intelligentur, ea fortasse aptius peti possunt ex *figuris*, quae imaginationem plurimum adiuuare solent, quasque adicere hic libuit: Vbi generaliter notandum est, ossa omnia e dextro latere desumpta esse.

Tabula IX. et X.

Fig. 1. Extremitas posterior costae quartae.

Fig. 2. Extremitas posterior costae octauae.

In ambabus est

a. articulatio cum corpore vertebrae.

b. articulatio cum processu transuerso.

Fig. 3. 4. Extremitas radii ad carpum.

a. superficies plana.

b. superficies conuexa, aspera.

Fig. 5. 6. Os carpi primum.

a. sulcus.

b. sinus lunatus pro recipiendo osse secundo.

c. cavitatis pro recipiendo tubere ossis septimi.

Ll. 3

Fig. 7.

- Fig. 7. *a.* Offis carpi secundi cornu acutum.
b. concauitas lunata.
c. finus quadrangularis.
- Fig. 8. *a.* Offis quarti carpi tuberculum.
b. sulcus latiusculus.
- Fig. 9. Os carpi quintum.
a. finus iuncturae profundior. *b.* sulcus.
- Fig. 10. *a.* Offis sexti finus lunatus.
b. finus pro adaptando osse quinto.
- Fig. 11. *a.* Offis septimi tuber
b. iunctura lambdoides, quae iungitur offi sequenti.
- Fig. 12. *a.* Offis octavi lingula.
b. iunctura longitudinalis lambdoides.
- Fig. 13. 14. Os tarfi sextum cuneiforme.
a. iunctura lambdoides.
b. iunctura duplicata, cui similem habet
- Fig. 15. *b.* Os septimum.
- Fig. 16. Os metacarpi tertium.
a. processus acutus.
bb. duae cavitates glenoides.
- Fig. 17. *bb.* duo capitula in osse quarto metacarpi.
- Fig. 18. *aa.* offis metatarfi tertii articulatio duplex.
- Fig. 19. *a.* Offis quarti articulatio simplex.
- Fig. 20. Iunctura lunata offis metatarfi pollicem sustinentis.
- Fig. 21. Capitula inferiora offium metatarfi.
a. processus aduncus longior, *b.* breuior.
- Fig. 22. Os phalangae primae digitorum manus.
- Fig. 23. Os phal. primae digitorum pedis.
In utroque notatur
a. fouea in extremitate superiore.
b. duo capitula in extremitate inferiore.
- Fig. 24. *a.* foueola duplex in osse phalangae secundae digitorum manus.
- Fig. 25. Extremitates superiores phalangae primae digitorum
a. capitella altiora.
b. breuiora.
- Fig. 26. *a.* latus productius offis primi pollicis pedis.
- Fig. 27. *a.* protuberantia aspera offis pollicis extremi.

DE

AVGMENTO PONDERIS,

QVOD CAPIVNT QVAEDAM CORPORA,
DVM IGNE CALCINANTVR.

AVTORE

Job. Georg. Gmelin.

§. 1.

Plurima esse corpora, quae dum calcinantur, augmentum ponderis sui capiunt, extra omnem dubium positum est, si vel sola *Boylei* considerentur experimenta, quae *Tr. suo* de flammæ ponderabilitate recenset. Verum ratio huius augmenti plurimis videtur obnoxia dubiis. Vnam quidem generalem et communem esse in omnibus, quae id augmentum patiuntur, corporibus, verisimillimum est.

§. 2. Si igitur vni corpori eam rationem assignare queamus, eandem et reliquis applicare licebit. Ex vnius ergo corporis exacto examine nostro forte potiemur scopo. Malumus tale feligere, quod plurimum iam manibus tritum est; ita enim hunc finem non solum nos impetrare, sed et experimenta hæcenus instituta vel corrigere vel conciliare posse confidimus.

§. 3. Antimonium in hunc censum venit. Id enim non solo carbonum, sed et solari igne torsum

sum est. Conuenit ergo recensere experimenta hactenus cum eo instituta, et quid ex eis concludi possit aut in qua re adhuc deficiant, dispicere.

§. 4. *Bouleduccius*, * postquam antimonium igne carbonum, lento quidem, qualis semper ad hoc opus requiritur, in vase fictili calcinasset, eius octo vncias ad sex vncias et septem fere drachmas redegit, quam decrementi proportionem et ego propemodum, cum in ferreo vase calcinationem instituerem, obseruaui. *Kunckelius*, ** libram antimonii calcinatione sensim sensimque decrementum patiturum prope vnciarum, ex eo tempore pondus recuperare pristinum, et ad vnam, imo ad vnam cum semisse, insuper augeri scribit, quod superioribus contrariari videtur obseruationibus. Mihi tamen id euenit, vt, cum antimonii octo ad sex vncias calcinando redegerim, eae postea, vbi calcinatione vltius institi, vltra sex drachmarum incrementum adhuc capefferint. Vt vero ad pristinum tale antimonium redeat pondus, imo quid vltra adhuc lucretur, id mihi haud ita visum est; continuando enim sex harum vnciarum, quae sex drachmis auctae erant, calcinationem, fumus albicans, lenissimo igne ex calcinata materia exhalans, satis indicabat, sulphuream partem vt plurimum auolasse, et metallicam in fumum resolui, vt omnis vltior expectatio frustranea fuisset.

Itaque

* Hist. A. R. S. ed. Paris. 1701. L. V. P. II. S. I. C. IV. §. 1.

** Laborat, Chym, P. III. C. XXXIV.

Itaque haud errasse videtur *Kunckelius*, dum tradit, antimonium ab igne augmentum capeffere; sed iacturam, quam patitur, maiorem non debuiffet pronunciare augmento. Illud enim decrementum ponderis et in Msto quodam Diario Regii cuiusdam Laboratorii confignatum inuenio, vbi antimonii crudi vncias duas ad tredecim drachmas cum femiffe ope speculi caustici intra decem dies redactas eiusdemque vnicam vnam duabus drachmis mensuraeque quarta parte igne carbonum immutatam fuisse memoratur. Pluribus vero in eadem re factis obseruationibus concordantibus maior haberi potest fides prae vna dissentiente.

§. 5. *Du Clofus* * regulum antimonii in marmore tritum atque in tenuissimum puluerem comminutum ope speculi vstorii post vnam horam decima pristini ponderis parte auctum deprehendit, quod experimentum igne carbonum quoque institutum, regulum octava ponderis parte auctum praebuit. *Homburgus* ope lentis *Sereniff. Duc. Orleanens.* idem tentamen instituens, reguli antimonii martialis puluerisati quatuor vncias, $1\frac{1}{2}$ ped. a vero lentis foco locatas, vnius horae spatio, cessante nimirum fumo, qui per totam horam insignis fuit, trium drachmarum et granorum quorundam incrementum sumfisse obseruauit, imo computo facto post reductionem reguli calcinati, qui
 Tom. V. M m post

* Hist. A. R. S. L. I. S. II. C. I. §. 2. et 3.

** Memoires 1705. p. 124. et 125.

post eam tres saltem vncias cum semisse pendebat, sex drachmis solis radios hunc regulum auxisse concludit, quandoquidem semiuncia, quae regulo reducto defecit, ea ipsi videatur, quae durante calcinatione fumo perdita fuit. *Kunckelius* * reguli antimonii libram vnam calcinatione ad sex scrupulos, (videtur legi debere sex drachmas) imo quandoque ad vnciam augeri, mensura vero aliquam partem minui tradit, cui posteriori *Georg. Ernest. Stablius* etiam suffragari videtur, cum et rationes, a *Kunckelio* pro se adductas in suam demonstrationem trahat. *Vid. eius Experim. et Obseru. Chym. et Phys. p. 347.* In diario superius citato inuenio, reguli antimonii martialis vnciam vnam per calcinationem carbonum igne institutam quatuor scrupulos pondere et quartam partem mensura auctam fuisse, speculo vero caustico idem antimonii pondus calcinatum aliquot dierum spatio scrupuli vnus incrementum accepisse.

§. 6. Ex hisce experimentis concludi posse puto: Regulum antimonii calcinatione ponderis sui augmentum acquirere. De antimonio res probabilis quidem est (§. 4.) ast nondum euicta. Et *Kunckelii* enim et meae obseruationes ea cura et sollicitudine institutae non sunt, qualis hic requiritur. Etsi annotatum non sit, qualia vasa adhibuerit *Kunckelius*, id tamen certum est, quod si adhibuerit ferrea, vti ego, id obseruationem maxime suspectam

* Chymische Tractätlein p. 29.

ctam reddere; haec enim et ab ignis actione et perpetua spathae agitatione facilem patiuntur abrasionem, prouti ab aliis iam notatum est. Huic damno lapidea vel et fictilia vasa, imprimis plum-bata, obnoxia non adeo sunt, hisceque vsu esse *Bouleduccium* annotauimus. (§. 4.) Sed nec in hu-ius nec reliquorum, solius *Homburgi* exceptis, ex-perimentis gradus ignis, qualis adhibitus fuerit, proditum est, cum tamen pro vario ignis gradu et antimonium et eius regulus diuersimode augean-tur. Nec inuenio in experimentis igne carbonum institutis, vllas infumtas fuisse cautelas, ne fauilla carbonum, saepius afflatu eorum in aëra se disper-gens, vel scintillulae igneae, adhaereant calcinan-dae materiae, ex quo tamen augmentum facile capere posset. *Kunckelii* experimenta (§. 4. 5.) praeter rationes supra allatas ideo etiam suspecta sunt, dum antimonium calcinatione plus incrementi capere scribat, ac regulum antimonii, quod omnium reliquorum experimentis contrariatur. Fiais etiam calcinationi assignandus est. Si enim diutius, ac requiritur, calcinatione vrgeas haec corpora, etsi antea augmentum capefferint, decrementum notabile postmodum rursus patiuntur; si breuius, augebuntur quidem pondere, ast quantum, tunc ignorabis, quia plus adhuc auferentur, si calcina-tione vltterius insisteres. Hanc cautelam a *Hom-bergo* obseruatam superius recensitae (§. 5.) testan-tur obseruationes. Interim hanc obseruandi negli-gentiam rationem esse diffensus memoratorum ex-perimentorum coniectura facili assequi licet.

§. 7. Ex augmento, quod haec corpora calcinatione capiunt, concludimus, aliquid iis accessisse. Cum vero nihil in hac operatione addatur, quod sub sensus incurrit, praeter solarem vel carbonum ignem, ideo plurimis haec conclusio placet, particulas quasdam igneas, vel materiam quandam subtilem, vel, ut alii exprimunt, Φλογιστόν quid accessisse. Hasque particulas sulphureas maxima pars existimat. Sed vtraque res dubia est. Nunquam talis calcinatio in vase aëre vacuo instituta fuit, etsi *Boyleus* quoddam recenset experimentum, vbi eam in vase clauso peregit. Quam facile est, ut particulae hinc inde in aëre volantes adhaerere possint antimonio, illudque repraesentare, quod *Du Hamelio* l. c. sub fibroforum corpusculorum nomine venit. Concessis vero particulis igneis, de quibus haecenus saltem dubitamus, disquiremus, an eas sulphureas appellare liceat? Notum est, in reductione calcium metallicarum hanc cautelam tradi, ut ad eam promouendam purissima alcalia haud feligantur, sed ea, quae sulphureo principio abundant, e. g. impurum sal Tartari, vel et Tartarus ipse, ob hanc maxime rationem, quod sulphureum principium calcinatione auolauerit, idque restitui debeat. Particulas vero sulphureas novas accessisse, et auolasse pristinas, hypothesisum amorem sapit. Nec quicquam roboris particulis his sulphureis addit experimentum *Du Hamelii* l. c. productum, quod spiritus vini calcinato antimonio (videtur ex aliis circumstantiis, regulum anti-

antimonii intelligere Cel. Autorem) affusus post aliquam digestionem rubram Tincturam ex leo decerpat, antimonium vero remaneat eiusdem profusus ponderis atque erat ante calcinationem. Oporteret iuxta hypothefin Cel. Viri antimonium (vel regulus) post hanc extractionem ponderis esse minoris ac ante calcinationem, quia durante calcinatione magna pars fumo perdita fuit. Vel igitur experimentum in dubium vocari poterit, vel particulae hae igneae non omnes sunt sulphureae, eae nempe non sunt, quae post Tincturam a Spiritu extractam remanserunt. Sed cum particulae igneae adeo simplices sint, ut dubitari de earum existentia possit, quomodo compositae comprehendi poterunt? Quidni liceat Tincturam hanc a sulphure reguli antimonii particulis quibusdam abscondito, per calcinationem vero sui iuris facto, deducere? Nec enim calcinato antimonii regulo omne sulphur denegari potest, quandoquidem egregii Viri vim eius emeticam a subtili quodam et narcotico sulphure deriuant.

§. 8. Alii particularum ignearum ofores, aliam rationem augmenti huius quaesuerunt. *Kunckelius* enim existimat, corpora porosa suspendi quasi ab aëre, hinc leuiora reddi, magis vero compacta comprimi et ita grauiora fieri. Antimonii vero regulum magis compactum esse post ac ante calcinationem exinde probat, quod mensura eius post calcinationem minor sit. Actionem aeris ex

metallorum in aqua et aëre penforum collatis ponderibus elucere putat; pluraque pro defensione hypotheseos suae affert experimenta, quorum insignius hoc est: Catinus probatorius, si vel vehementissimo igne torqueatur, pondere non augetur; quam primum vero plumbum ei impositum intra poros suos recepit, plus ponderabit, ac plumbum et catinus seorsim pensa. Poros igitur catini cum plumbo repletos concessisse aëre inquit, ut corpus catini, quod hac ratione magis compactum est, comprimatur, hincque pondere augetur. Sed omnia haec dubiis obnoxia sunt. Contrariam de mensurae imminutione, quam praetendit, observationem in superioribus (§. 4.) allegavi; Huicque maiorem adscribo fidem, quod *Boyleus* afferat, * plumbi, si per ignem calcinetur, gravitatem absolutam augeri quidem, sed specificam minui. Utraque tamen observatio in hoc etiam deficere videtur, quod modus, quo mensurae vel augmentum vel imminutio notata fuere, haud describatur. Si enim is per vasculum quoddam celebratus sit, tum vel maior vel minor quassatio vasis, et vel maior vel minor subtilitas atque teneritas mensurandi magnam differentiam inferre potuerunt. Experimentum insuper, quod *Kunkelius*, ceu maxime stringens, pro se adducit, eam vim habere vix verisimile est. Ut haud vream, quae de catino probatorio vehementissimo etiam igne pondere non augendo adducit et *Boyleus* insti-

* Detect. penetrab. vitri exp. III.

lei * obseruationi accuratissimae et summa cura institutae contraria plane sunt, id ei vehementius aduersatur, quod et plumbum iuxta proprium eius affertum et *Io. Freindii* ** obseruationes calcinatione grauius euadat. Ab hoc igitur catini sui augmentum maiori compendio et perspicuitate deriuari poterit. Actio aëris in respectu ad grauitatem labili nititur fundamento. Aliam sine consideratione aëris norunt Physici allegare rationem imminutionis grauitatis corporum in aqua.

§. 9. Tantis igitur, cum ea, quae haëtenus recensuimus, dubiis obnoxia sint, experimenta ita adornare necesse est, vt vel in verisimilem quandam, vel si fieri potest, perspicuam atque certam rationem aliquando penetrare liceat. Ignis carbonum huic scopo non conuenire videtur, quod exceptio possit fieri, augmenti rationem in corpusculis forte carbonum sitam esse. (§. 6.) Ideo solaris seligendus, illo nimirum purior.

§. 10. Vt causa augmenti innotescat, calcinatio in vacuo instituat. Si enim et tum augmentum capiant corpora, iusta omnino est conclusio, particulas igneas id effecisse. Sed cum corpus calcinandum durante calcinatione perpetuo agitari et vt vera ratio augmenti innotescat, subinde statim examinari debeat, iis difficultatibus et in vacuo obuiam eundum.

§. I I.

* Exp. de flammae ponderab. Exp. VIII. ** Prael. Chym. p. 14.

§. 11. Pro perpetua agitatione concilianda instrumentum selegi, quo alias motus in vacuo perfici solet, loco vero brachii, qui alias inferiori extremitati connexus est, orbem quendam minorem pluribus aculeis vel cuspidibus orichalceis in extremitate sua rotundiusculis adaptare curavi. Alterae difficultati ita succurri poterit. Catinus antliae, campana et omnia, quae ad corpus calcinandum non pertinent, attamen pro calcinatione in vacuo instituenda necessaria sunt, statera antea pendantur. Sic, vtut aëris accessus haud admittatur, corporis subinde incrementum diiudicari potest, statera pensis omnibus simul detractoque pondere eorum, quae non ipsum corpus calcinandum constituunt.

§. 12. Cum vero catinus antliae non possit a cylindro eius in machina *Leupoldiana* ita separari, vt manente vacuo, in orbem verti non debeat, quae versio materiam calcinandam in catino vndiquaque dispergeret, ideo cylinder antliae simul cum catino et campana appendi necesse est. Sed tum ad aliquot grana certi esse non possumus, quia statera ingens requireretur. Ideo fieri curavi tubum orichalceum, 3. circiter pollic. Angl. longum, cui inferne cochlea foemina et superne cochlea mas, inque medio epistomium, adaptata sunt. Cochlea foemina recipit cochleam marem tubuli ex cylindro antliae prodeuntis, et mas recipitur a cochlea foemina catini. Mediante hoc tubo

tubo catinum ita a cylindro antliae separare possum, vt erectus semper maneat, vacuumque in campana conferuetur; eo ipso vero pondus eorum, quae statera pendenda sunt, multum decrefcit, et licet et tunc de minimis grani partibus certiores esse non possimus, de integris tamen certiores esse posse confidimus. Hanc rationem quantum corpora calcinatione augeantur, feliciter adhuc eruemus, si fumi calcinatione auolantis collectionem instituamus; collectum enim additum ponderi corporis calcinati iustam demum rationem suppeditabit. Reliquae, quae necessariae videntur cautelae, partim ex superioribus eruendae, partim adeo arduae non sunt, vt hic memorentur, partim cum instituentur, demum sese prodent. Ea vero proximae aestati reseruo.

AD GRAVITATIS LIQVORVM DIFFERENTIAM COGNOSCENDAM.

AVTORE

J. G. Leutmann.

§. I.

Fiat instrumentum vitreum A, eius globus vitreus infimus (a) plumbo comminuto ad tertiam, et quod excurrit, partem repletur, vsque dum instrumentum A in vitro aqua repleto mergatur ad (b) circiter. Iniiciatur cera

Tabula XI.

Tom. V.

Nn

rafa

rafa in bullam instrumenti (*a*), et ita disponatur plumbum, vt in aqua natans instrumentum tubulum (*c*) perpendiculariter erigat. Tunc caute eximatur ex aqua, ne plumbum alium situm occupet, et admoueatur igni, vt cera liquefacta, et iterum refrigerata, inuoluat et contineat plumbum, quo minus alium situm assumat,

§. 2. Instrumenti A tubulus (*c*), habeat brachium dependens (*d*), solido ex vitro, tantae longitudinis, vt eius extremum (*g*) etiam in leuissimo liquore, e. gr. Spiritu Vini alkohol. non attingat superficiem.

Deinde paratus sit tubulus (*f*), in inferiore parte clausus. Is imponatur in instrumentum A, vt ceram coagulatam attingat. Instrumentum immittatur in vitrum aqua repletum, et iniiciatur in tubulum (*f*) tantum plumbi, donec brachium (*d*) superficiem aquae lambat, postquam extremum (*g*) pinguedine aliqua fuerit illinitum.

§. 3. Postea eximatur instrumentum A, et in liquorem alium priore grauiorem, e.g. aquam falsam, immittatur, et quia brachium (*d*) propter altius natans instrumentum, non attinget superficiem aquae, iniiciantur ponduscula cylindriaca orichalcea, exacte ad trutinam docimasticam librata, tot, quot requiruntur, vt brachium (*d*) superficiem liquoris etiam lambat.

§. 4. Tandem ponduscula eximantur, et grauitates eorum, in ipsis signatae, colligantur, et apparebit, quanta inter vtrasque aquas sit differentia specifica grauitatis.

§. 5 Si vero experiri cupias, vtrum differentia liquorum, per instrumentum inuenta, respondeat proportioni, quae indicatur a bilance, ad quam liquor vterque libratus est, hoc modo age:

§. 6. Assumatur lagena vitrea A, cui embolus vitreus (b) ita terendo aptatus est, vt ad tertias repleta lagena spiritu vini, si inuerso modo statuatur in loco, soli, vel calori ad fornacem exposito, per 12. horas, expansus per solis calorem liquor, et aër, ne guttulam quidem exprimere valeant de Spiritu Vini, in embolum incumbente: id quod indicio erit exacte clausae lagenulae.

§. 7. Tunc repleatur lagena liquore aliquo librando, vsque ad summum, imprimatur embolus, vt superfluat liquor, abstergatur linteo, et libretur ad bilancem mediocrem, sed celerrimam, qualis mea, quae 5. libr. aggrauata adhuc $\frac{1}{4}$ graen. superpondii indicat, et colligantur pondera. Hoc etiam instituat cum altero liquore, eodem modo, et ponderum differentia indicabit differentiam liquorum specificam.

§. 8. Deinde, eodem tempore, liquores eadem, quae in lagena fuerunt, examinentur per instrumentum antea descriptum, et inuenies, quod concordet proportio differentiae grauitatis specificae, vtroque modo quaesita inter binos liquores.

§. 9. *Magnus Hombergius* egregium etiam dedit modum, quo mediante idem volumen diuersorum liquorum obtineatur. Scilicet lagenulam vitream A, cum praecedente tubulo breniori (*b*), quam lagenulae collum (*a*) est, adornauit. Per hunc infusi liquoris tantum effluit, quantum tubulus (*b*) permittit, et sic idem volumen liquoris remanet in lagenula, qualiscunque etiam is fuerit.

§. 10. Mihi vero aptior videtur modus a me propositus, cum lagena embolo clausa, quia *Hombergii* instrumentum postulat situm in plano horizontali I, vt id perpendiculariter erigatur. Decliuui enim in plano positum II, aut plus liquoris remanet in lagenula, aut minus III, prout situm fuerit nacta. Et quanquam exigua percipiatur differentia, tamen aliqua inuenitur, libratis liquoribus ad bilancem exactam.

§. 11. Deinde clausum mea methodo vitrum vna cum liquore librari potest, sine effusionis metu, et grauitas vitri subtrahi: quod ad plura experimenta valde vtile atque commodum inueni.

DE
SALIBVS ALKALIBVS FIXIS
PLANTARVM.

AVTORE

J. G. Gmelin.

§. 1.

EX quo vsus salium fixorum Plantarum in Medicina inualuit: ex eo tempore varie disceptatum est, an Salia fixa a diuersis Plantis acquisita re ipsa diuersa sint, nec ne; et si differant, in quam re haec differentia consistat. Nec vero haec lis in hunc vsque diem diremta. Vt enim multus de hoc sermo fuerit, is in opinionibus tantum versatus est, nec vllō experimento solide exactus. Quo magis arduum videtur, rem pensitare altius. Id et Medicae artis interest, cum plures sint, qui differentiam Salium fixorum plantarum nauici habentes promiscue singula praescribunt sine delectu, alii, qui eam insignem credentes, vbi delectum instituunt, non sine mordacis conscientiae stimulis aegris propinari posse credunt.

§. 2. Salia fixa sunt Salia sui generis, notisque gaudent, quibus facile ab aliis distinguuntur. Quod si ergo pura sint, ea semper eadem esse oportet. Pura rarissime obtinentur, nisi calcinatione eorum

intensius instituta, et saepius post nouas solutiones repetita. Talis vero in praeparatione salium plantarum non adhibetur, vel rarissime. Ergo ea impura vt plurimum esse oportet.

§. 3. Generalis obseruatio est, id, quod salia fixa impura reddit, esse vel terrestre quid, vel pingue, vel acidum, vel et nonnunquam alcalinum volatile. Prout corpora, e quibus extrahuntur, vno horum abundant, vel prout nexus horum omnium obtinet, ea ratione hoc magis quam illo abundant. Quodsi igitur plantae diuersae diuersae quantitatis obtinent principia, necesse est, vt et salia fixa exinde elicita diuersa sint. Illud vero ex analysi constat.

§. 4. Haec differentia ex indole Plantarum diuersa fluit. Fateor, multas accedere posse causas, differentiam hanc naturalem augentes. Eadem planta diuerso igne combusta diuersum sal alcali exhibebit. Si ex eorundem cinerum dimidia parte lixiuium aqua feruida, ex altera vero frigida extrahatur, diuersum orietur sal. Haec omnia *G. E. Stablius* * praeclare et abunde docet. Sed huius loci non sunt; differentiam enim salium fixorum plantarum essentialem, non accidentalem et ab ingenio artificis pendentem demonstrare animus est.

§. 5. Vt pigitur salia fixa inter se comparentur, opus est, vt eodem modo ex plantis extracta sint, nimirum, vt idem ad sensum ignis gradus, idem-

* Fundament. Chym.

idemque certus quidam in combustione plantarum obseruetur, vt combustio ad certum vsque statum continuetur, atque lixiuum eodem et vniformi modo ex cineribus plantae paretur. Impediemus prima et secunda cautela, vt partium volatilium in vna planta, caeteris paribus, non plus auolet, quam in altera; per tertiam curabimus, vt sulphurearum et terrearum partium plantae aequalis fiat solutio: feruida enim aqua extractum lixiuum plus sulphurearum et terrearum partium continebit, quam tale, quod frigida extractum est. Ita vero facile fit, vt plantae eadem diuersa quantitate principia exhibere possint.

§. 6. Certi hi gradus determinandi sunt. Cum salia plantarum vsui tantum Medico haecenus adaptata sint, scopus a Medicina intentus in praeparatione eorum ante oculos habendus est. Is vero duplex videtur. I. Vt humores corporis salino suo principio alterando in pristinum eos redigant statum. II. Vt, si possibile, etiam agant in corpus humanum specifica plantae, e qua extracta sunt, virtute. Curandum ergo est, vt volatiles partes, quantum penes artificem est, ab auolatione praeseruentur, et sulphureae moram acquirant, vt sali fixo se associare queant, ne ante hanc copulam dissipentur. Fieri enim potest, vt, si quid specificum in planta, id vel volatilibus vel sulphureis partibus intricatum cum illis in auram abeat, quod remaneret, si gradus ignis remissior adhibitus fuisset. Optima igitur methodus est, si
plan-

plantae ita comburantur, vt in luculentam flammam non erumpant, sed gliscant tantum. Hoc tamdiu continuandum, vsque dum in cineres fatiscant, nec calcinatio vltcrius protrahenda, ne perditio partium volatiliu vel sulphurearum nimia fiat.

§. 7. Salia ex cineribus cum frigida extrahi debent, vt veri Salis formam induant. Cumque aquae fontanae, fluuiales, puteales, pluuiiales &c. speciesque vnus generis multum inter se differant; vt ex tentaminibus iustae fieri possint conclusiones, cum aqua aliquoties destillata lixiuuium extrahendum est, idque in vase vitreo vel terreo non plumbato, ne vlla suspicio superfit, aliquid heterogenii Sali admistum fuisse. Si omnibus his obseruatis cautelis lixiuua plantarum inter se differunt, certum est, Salia eorum fixa differre.

§. 8. Auspicato incidit in manus meas Diarium laborum Chymicorum, Regis Sueciae auspiciis institutorum, manuscriptum, vbi omnes hae cautelae in diuersis Plantis obseruatae fuerunt. Singulae Plantae, vnaquaeque in suo catino inter prunas candentes posito, lente et eo vsque combustae sunt, donec in cineres dilapsae fuerint, nullo carbonum relicto vestigio. Cineribus postea in vitro puro locatis aqua simplex destillata affusa, haecque, vbi aliquod tempus super eos relicta erat, diuersis liquoribus permixta fuit. Taediosum esset, diuersa phaenomena, quae euenerunt, prouti relata

TABVL

Comment. V. p. 281.

DIVERSORVM S

INDVCTAE FVERVNT.

| | | | | | | |
|-----------|-----------------|-----------|---------|------------|------------|-------------|
| ale Cent- | A Sale Bar- | A Sale C | le Hyf- | A Sale Ma- | A Sale Hy- | A Sale Mar- |
| r. ma. | bae Caprae, | momill. e | pi. | trifyluae. | perici. | rubii. |
| | let flip. extri | | | | | |

ffer totiter offer-fferuefcit. lefferuefcit et

TABVLA

EXHIBENS MUTATIONES, QVAE QVIBVSDAM LIQVORIBVS A DIVERSORVM SALIVM PLANTARVM FIXORVM ADMIXTIONE INDVCTAE FVERVNT.

Table with multiple columns and rows detailing chemical reactions and color changes. Headers include various salts like 'A Sale Abro-tur.', 'A Sale Ab-finth, vulg.', etc. Rows list substances like 'Spiritus Vitrioli', 'Spiritus Nitti', 'Spiritus Salis', 'Solutio Aluminis', 'Solutio Magnae', 'Solutio A-genti', 'Solutio Viti', 'Sol. Vitrioli', 'Sol. Sulph. cum calc. viva', 'Sol. Sulph. c. Sal. tart.', 'Infus. Gal.', 'Jalis. Tereb.', 'Syrupus Vitrioli', 'Solutio Vitrioli', 'Solutio Nitti', 'Solutio Salis', 'Solutio Solutio', 'Solutio Aluminis', 'Solutio Magnae', 'Solutio A-genti', 'Solutio Vitrioli', 'Solutio Nitti', 'Solutio Salis', 'Solutio Solutio'.

Solut. Scor. Reg. Antim a Salibus Molliti, Pimpinellae, Pini, Pulmonariae, Quercus, Rutae, Saniculae, Scabiofiae, Salinae, Scipilli, Fragariae, Tanacet. Filicis non immutata fuit, vii nec a Resin. solutione Salia Mchloni, Origan, Filicis.

lata sunt, huc transcribere, imprimis, cum Diarium germanico idiomate conscriptum sit. Maxime opportunum autem visum est, tabellam formare, ex cuius primo intuitu tota differentia phaenomenorum, quae cum diuersis salibus obuenerunt, patefceret. Hanc igitur hic offero. Praecisa colorum significatio, quam germanico idiomate habent, cognita et probe perspecta mihi est. Vt latinis eos exprimam nominibus, secutus sum *Vrbani Hiernii* App. de coloribus, Parasceui suae 1712. impressae adiunctam. Qui vero hoc Tractatu non indicati sunt, donec haec doctrina diffusior tradatur, ita nominavi, vt ideam satis claram eorum habiturum confidam, qui vel sola nomina legat. Plantae, e quibus salia memorati Diarii extracta fuerunt, sine dubio omnes officinales sunt, vt opus haud fuerit, integrum earum ex Botanicis Autoribus adponere nomen. Exsiccatae etiam probe fuerunt, nam Mens Decembr. demum combustae sunt. Folia sola plantarum adhibita fuerunt, si excipias Carduum benedictum, cum toto, Tanacetum, Melilotum et Saxifragiam vna cum floribus assumpta, et Chamomillam cum floribus et stipitibus.

§. 9. Cum lixiuia diuersarum plantarum cum iisdem liquoribus diuersa phaenomena exhibuerint, experimentis comprobatum est, salia fixa inter se differre. Confirmatur haec differentia ex diuersitate cinerum, e quibus salia elixiuata sunt, et

lixuiorum ipforum, sensibus nudis patente. Color cinerum Artemisiae, Centauri minoris, Chacrefolii, Anethi, fusco cinereus erat; Barbae Caprae, Pulmonariae, albus; Saniculae, candicans; Absinthii pontici, ex albo et viridi cinereus; Rutae, Agrimoniae, Saxifragiae, subfuscus; Tanaceti, obscure viridis; Cuscutae, viridis; Euphrasiae, Abortani, Absinthii vulgaris, Scabiosae, cinereus; Cochleariae, ex albo cinereus; Hyssopi, Millefolii, Anserinae, obscure cinereus; Meliloti, Quercus foliorum, Plantaginis, Farfarae, summitatum Pini, Fumariae, obscure fuscus; Marrubii lucidior paululum; Pulegii, lucide fuscus, albis maculis intermixtis; florum Sambuci, Salviae nobilis, Serpilli, lutescens; Fragariae, sulphureus; Nepetae, obscure rubens; Prunellae, obscure lateritius; Matrifyluae, coeruleascens; Filicis, nigricans; Hyperici, Matricariae, Origani, Pimpinellae, niger.

§. 10. Pondus cinerum, ad plantarum pondus exactum, inaequale erat. Pulmonaria paulo minus quam septimam partem cinerum exhibebat; Cardui benedicti folia, paulo minus praebuerunt, quam nonam; Tussilaginis, nonam fere; Plantaginis, paulo minus quam vndecimam; Pulegii, minus; Nepetae, Matrifyluae, duodecimam; Marrubii paulo minus; Serpilli, minus quam decimam tertiam; Fumariae, plus; Tanaceti, minus quam decimam quartam; Absinthii pontici, Cochleariae, florum Sambuci, plus; Barbae Caprae, Prunellae, minus quam decimam quintam; Cuscutae, Meli-
loti,

loti, Saxifragiae, Salviae nobilis, Fragariae, plus; Absinthii vulgaris, Anserinae, Artemisiae, Chae-
refolii Romani, Euphrasiae, Rutae, Scabiosae, de-
cimam sextam; Matricariae, minus; Agrimoniae,
minus quam decimam septimam; Hyssopi, minus
quam decimam octauam; Abrotani, Chamomillae,
minus quam decimam nonam; Trifolii fibrini, mi-
nus quam vigesimam; Anethi, Pimpinellae, Quer-
cus, minus quam vigesimam vnam; summitates Pi-
ni, minus quam vigesimam tertiam; folia Cen-
taurii minoris, Filicis, vigesimam quartam; Ori-
gani, minus quam vigesimam septimam; Hyperici,
minus quam vigesimam octauam. Raritas vero
cineribus eadem erat, exceptis cineribus Chamo-
millae, qui satis compacti videbantur.

§. 11. Lixiua limpida fuerunt. Cineres qui-
dem Anserinae, Trifolii Fibrini, Cuscutae, Ma-
trifyluae, herbeum aquae adfusae ab initio colo-
rem; Cochleariae, Euphrasiae, coeruleum subui-
ridem; Saxifragiae, Salviae nobilis, Tanaceti, lu-
cide viridem conciliarunt. Ii vero colores intra
aliquot dies euauerunt, limpidis relictis lixiuiis.

§. 12. Lixiua Anserinae, Matrifyluae, Hyf-
sopi, Plantaginis, Pulmonariae, peracria erant;
Marrubii, Matricariae, Saxifragiae, Scabiosae, Sal-
viae, florum Sambuci, Prunellae, Tanaceti, Pim-
pinellae hortensis, Abrotani, Nepetae, Cardui
benedicti, Millefolii, Trifolii fibrini, Origani, Ane-
thi,

thi, Meliloti, Artemisiae, Rutae, Saniculae, Cochleariae, Fumariae, Cuscutae, acria; Filicis, Abfinthii vulgaris et pontici, Agrimoniae, Centaurii minoris, Chamomillae, Chaerefolii, Pulegii, Euphrasiae, Quercus, mediocriter acria; Hyperici, Tussilaginis, subacria. Sapore vix vlllo gaudebat lixiuum Fragariae, et lixiuum Barbae Caprae loco acredinis dulcedinem gustui offerebat, sed nullus plane sapor dignosci poterat in lixiuo Serpilli.

§. 13. Pimpinellae, Anethi, Fragariae, lixiuia sulphureum odorem spirarunt; reliqua inodora erant.

§. 14. Praeter Phaenomena, quae in tabella continentur, sequentia adhuc obseruata sunt: sal Filicis solutionis Vitrioli Martis colorem exaltat, infusionem vero succi Heliotropii non mutat, at Syrupum Violarum praffino diluto colore tingit. Sal Origanii solutionem scoriarum reguli Antimonii rubro colore tingit; sal Plantaginis eandem solutionem colore intensiorem reddit, in vtroque tamen casu diaphana manet. Sal Matricariae ab eadem nullam mutationem patitur.

§. 15. De differentia ergo salium fixorum plantarum dubitare non licet. Difficilius est determinare, in quo differant. Cum praeter terram, vel pingue, vel acidum, vel alkali volatile, salibus plantarum nihil admisceri soleat, (§. 3.) ideo non opus est, vt plura experimenta instituantur, quam

quam quae sufficientia sint, horum praesentiae vel absentiae, copiae vel paucitatis detegendae. Sufficientia igitur sunt experimenta et observationes recensitae. Dubitare enim licet, an ferrum in cineribus cuiusvis plantae, ex observationibus *Geoffroy*, praesens, sali etiam sese insinuet atque cum eo solvatur. Praeter difficultatem, quam alcalia salia habent in soluendo ferro, id phaenomenon contrarium est, quod ferrum in cineribus plantarum Magnetis ope demonstrari possit, quod fieri haud posset, si ferrum vel acido quodam vel sulphureo solutum esset.

§. 16. Ex phaenomenis in tabella recensitis evidens est, salia omnia, quotquot ibi memorantur, salium fixorum notis gaudere, praeter solum sal Filicis, societatem vegetabilem igne respuens. De hoc vero postea.

§. 17. Salia Absinthii vulgaris et pontici, Hyperici, Euphrasiae, Quercus, Artemisiae, Nepetae, Saxifragiae, Matrisylvae, sunt salia alcalia fixa, terrestri materia diuersimode temperata. Salia alcalia, quo plus terrae et sulphuris continent, eo minor acor eorum est. Quae igitur sulphur non continent, nec acore magno praedita sunt, ea multum terrae continere certum est. Id phaenomena, quae cum salibus Absinthii vulgaris et pontici, Hyperici, Euphrasiae, Quercus, euenerunt, confirmant. Et ex diuersis efferuescentiae gradibus, quos haec

Oo 31

falia cum spiritu Vitrioli subierunt, patet, falia Euphrasiae et Absinthii vulgaris maiori terrae copia foeta esse, ac falia Hyperici et Quercus, haecque maiori, ac sal Absinthii pontici. Salia Artemisiae, Nepetae, Saxifragiae, cum acriora sint, minus terrae continebunt, et sal Matrifyluae, cum acerimum sit, minus adhuc. Id quidem omne phaenomenis consonum est.

§. 18. Quale id sal Hyperici fuerit, de quo *Du Hamelius*, * illud solutionem Mercurii sublimati lacteo colore praecipitasse, diuinare nescio; an forte essentiale fuerit? Id vero ob alias circumstantias concludere haud licet; an diuersum sal Hyperici gallici a suecico, vti sal commune gallicum diuersum ab hispanico?

§. 19. Salia Agrimoniae et Chaerefolii sunt alkalia fixa, forte paucis alkali volatili imbuta. Id ex phaenomenis, quae in solutione Vitrioli Veneris occurrunt, elucere videtur. Nollem tamen nimis praeeptis in hanc conclusionem ruere. Forte colores non rite nominantur, nam phaenomena sibi nonnunquam contrariantur; deinde in sublimati solutione nullum volatilis indicium habetur. Res ergo anceps est, et eodem iure haec falia ad ea referri possunt, quae §. 17. describuntur. Multa terra vtrumque gaudet, Chaerefolii tamen minori quam Agrimoniae.

§. 20.

* Hist. Ac. Sc. ed. Par. 1701. p. 77.

§. 20. Salia Anserinae, Tuffilaginis, Plantaginis, Pulegii, Tanaceti, Centauri minoris, Barbae Caprae, sunt alkalia fixa, pauco acido refracta. Cum salia Plantaginis et Anserinae cum spiritu Vitrioli, illud ne hilum quidem, hoc parum efferuescat, atque sublimati solutionem illud subcroceo, hoc obscure flauo colore praecipitet, multo acido foeta sunt. Illud plus acidi habet, quam hoc, hoc vero plus quam sal Tanaceti, hoc plus quam sal Tuffilaginis, hoc denique plus, quam sal Pulegii. Hanc maiorem in sale Plantaginis copiam solutio etiam scoriarum reguli Antimonii indicauit, quae cum nullo reliquorum vel ullam mutationem subiit. Sal Barbae Caprae salis tartarei particeps esse videtur. Phaenomena quidem non dissentiant, dulcedo vero eius id suadet. Cum porro salia Plantaginis et Anserinae acerrimo sapore gaudeant, minorem terrae copiam, salia Tanaceti, Tuffilaginis, Pulegii, Barbae Caprae, et Centaurii minoris maiorem continere debent. Hancque copiam terrae in causa fuisse, cur eadem salia cum solutionibus sulphureis nullam mutationem subierint, admodum verisimile est.

§. 21. Salia Abrotani, Cardui benedicti, Hysopii, Pimpinellae, Rutae, Cuscutae, Prunellae, Serpilli, Matricariae, sunt salia alkalia fixa, sulphure foeta. Sulphur, quod continent, diuersimode manifestatur. Salia Abrotani et Cardui benedicti spiritum Vitrioli, hoc obscuro flauo, illud subfusco diluto colore tingunt, solutio vero Lunae albo inde
prae-

praecipitatur colore. Ex altera igitur parte sulphur adeste indicatur, ex altera eius praesentia negatur. Et vice versa, salia Cuscutae, Prunellae, Serpilli sulphur suum per solutionem Lunae prodant, in spiritu Vitrioli ne halitum sulphureum indicantia. Tandem salia Hyssopi, Pimpinellae, Rutae et Matricariae et spiritum Vitrioli et solutionem Lunae indices sulphuris sui agnoscere debent. An igitur diuersae indolis sulphura? Id *Homburgus* et *Hicrius* pluribus experimentis edocti falsi sunt, etsi in hunc usque diem plures adhuc reclamant. Haec differentia vero in delicatis experimentis tantum agnoscitur. Quis rudis artifex norit, Cupra, Ferra, Antimonia, ubi experimenta chymica cum iis instituuntur, inter se diuersa esse? *Boyleus* tamen se experientia id addidisse faretur. *Homburgus* inter sulphur vegetabile seu animale, bituminosum et minerale distinguit.* Primum rudioribus particulis constare asserit, tertium subtilioribus, secundum mediae naturae esse inter primum et tertium. Haec ingeniosus Vir ad explicandam aquarum regalium et fortium actionem. *Hiernius* sermonem alio modo flectit; vterque agnoscit, sulphura specie diuersa dari. Existimo igitur, salia Abrotani et Cardui benedicti minerale sulphur fouere, illud quidem in maiori copia quam hoc; salia vero Cuscutae, Prunellae, Serpilli, vegetabile solum vel animale, prius maiorem copiam quam posterius, hocque maiorem

ac

* Memoires de l'Academie des Sciences 1708 p. 49. ed. Bat.

ac sal Prunellae; tandem salia Hyssopi, Pimpinellae, Rutae et Matricariae bituminosum sulphur, siue sulphur mediae naturae inter vegetabile et minerale, duo posteriora quidem in maiori copia, ac priora. Hyssopi et Rutae salia minorem terrae copiam gerunt, ac salia Pimpinellae et Matricariae. Mirari tamen licet, sal Pimpinellae, etsi minorem prae reliquis sulphuris eiusque ob copiosam terram magis diluti quantitatem foueat, ubi solutum erat, odore suo sulphur indicasse, quod reliqua maiori quantitate sulphuris et pauciori terra foeta non fecerant. Sal Serpilli multa terra abundat, quod et ex eius insulso sapore diiudicari potest.

§. 22. Sal Fumariae est alkali fixum, sale communi foetum. Id constat ex solutione lunae, quae feri lactis instar praecipitata est. Terrae parum continet.

§. 23. Sal Marrubii sulphure quodam minerali et sale communi scatet.

§. 24. Salia Trifolii fibrini, Chamomillae, Meliloti, Pulmonariae, Fragariae, florum Sambuci iuxta sulphureum principium acido aliquid participant. Ex colore cinerum flor. Sambuci et Fragariae (§. 9.) sulphuris praesentia iam indicatur, imo lixiuum Fragariae odore suo, id manifeste monstrauit. Salia Sambuci, Fragariae et Trifolii fibrini quoad copiam sulphuris primo lo-

eo stant, postea salia Meliloti, Pulmonariae, Chamomillae. Quoad acidi copiam primum locum obtinet sal Fragariae et florum Sambuci, postea Pulmonariae, Meliloti, Chamomillae, Trifolii fibrini. Mutationes colorum in spiritu Vitrioli et solutione Lunae hunc in finem saltem consulendae. Sed quae paradoxa hic? Fragariae sal vix quodam sapore gaudet, attamen plus efferuescit, quam salia Meliloti et florum Sambuci acria, et sal Pulmonariae peracre. At ex prioribus responderi posse existimo. Quo minus salia heterogeneis corporibus foeta sunt, eo magis acria sunt. Et vice versa. Iam verò palam est, Fragariae sal prae omnibus reliquis multo sulphure scatere. Hoc obtunditur sal; hinc et sapor fere perit. Verum hoc non impedit, quo minus Vitrioli spiritus cum sale colluctetur. Impedit saltem, ne eo gradu colluctetur, ac si sulphur absens vel eius copia minor fuisset. Hinc et sal florum Sambuci fortius efferuescit. Salia Trifolii fibrini, Chamomillae, Meliloti, iuxta sulphur terram multam continere videntur, Chamomillae tamen minus quam reliqua. Sal Pulmonariae bituminosi sulphuris notas exhibet, idem verò exigua quantitate adest, e contra acidum sal inibi copiose continetur. Id quidem acorem non impedit, sed efferuescentiam minuit, conformiter phoenomenis.

§. 25. Salia Origani, Millefolii, Pini, Scabiosae, Salviae, Anethi, Saniculae, sunt Alkalia fixa, sulphure

phure foeta et pauxillo alkali volatilis. Salia Origani et Millefolii in omnibus circumstantiis prope eadem sunt, saltim Origani sal sulphuris bituminosi, sal vero Millefolii sulphuris mineralis indicia praebet. Et quoniam solutio scoriarum Reguli Antimonii a sale Origani in rubrum colorem mutata est, et solutio sublimati in obscure flavum, aliquid etiam acidi salii Origani inesse patet. Salia Pini, Scabiosae, Salviae, vix a se inuicem differunt, sulphure abundant bituminoso, et priores sulphuris copia multum superant.

§. 26. Salia Anethi et Saniculae sulphure multo scatere certum est. Id vel odor saltim lixivii cinerum Anethi indicat. Solutio Lunae rem dubio omni eximit. Et phaenomena illa omnia, quae cum spiritibus Vitrioli, Salis, Nitri, solutionibus sachari Saturni, Aluminis, sublimati, Lunae, Vitriolorum Veneris et Martis, eueniunt, omnia ob sulphur euenisse nullus dubitet. Sed quale id sulphur? An bituminosum? Illud vero spiritus Vitrioli colorem saltim mutat, nec in eo praecipitatur, spiritusque Salis et Nitri immutatos relinquit. Cuncta phaenomena, huic salii propria esse asserere auzim; ideo et sulphur, a quo exorta sunt, peculiaris plane indolis est. Nec mihi ultra progredi licet; sed non dubito, quin haec salia ob sulphur in iis contentum peculiare plane effectus habitura sint, si alia cum iis experimenta instituantur. Et tum specialiora de iis dici poterunt.

runt. Sal Anethi ditius est sulphure, quam sal Saniculae. Volatile, quod hisce salibus inest, ex fumo cum spiritu Nitri cognoscitur. Sal Saniculae et acidi paucillum continet, quod ex sublimati solutione croceo saltem inde colore tincta diiudicari potest.

§. 27. Sal Filicis est sal tertium, ammoniacalis naturae, sulphure foetum. Omnia indicia salis communis exhibet, sed quod cum spiritu Nitri fumum edat, et Alkali volatilis. Hoc in causa est, cur hoc sal ammoniacalis naturae pronunciauerim. Sulphur, quod continet, minerale est. Id Phoenomena cum spiritu Vitrioli et salis produunt. An exaltatio coloris in Vitrioli Martis solutione obseruata a volatili, an ab adstringente quadam re processerit, decidere nolo.

§. 28. Perspicuum itaque est, salia fixa plantarum differre, et qua re differant, argumentis sufficientibus monstraui. Sententia exinde ferri potest, an differentia haec in re Medica aliquod momentum habere possit? Nimis sane differunt, quam vt differentia eorum negligatur. Si sal Tartari e. g. a sulphuris, vel acidi, vel volatilis, admixtione immutari creditur, ita, vt alium tunc effectum in corpore humano editurum esset, ac sine vlla admixtione ingestum: quid impedit, quod et diuersis plantarum salibus diuersos effectus adscribere queamus?

§. 29.

§. 29. Sed falso supponitur, folia plantarum virtutem specificam plantarum, e quibus parata sunt, ita retinere, vt effectum eius sensibilem in corpore humano edere queant. Folia Absinthii, Cardui benedicti, Centauri minoris, eundem prope effectum edere creduntur, attamen folia eorum multum differunt. Vice versa, Nepetae et Euphrasiae folia, folia Tusilaginis et Plantaginis, Prunellae et Serpilli folia, diuersum effectum edunt, cum folia vix fere differant. Hoc, vti verum est, satis monstrat, folia plantarum eundem effectum non edere, ac eorum plantae. In effectum vero alicuius rei virtus specifica consistit, et haec causam sensibilem habere debet. Inest e. g. foliis Absinthii certus amaror, qui a sale et oleo peculiari modo permixtis prouenit; is vero in combustione plantae perit. Ergo et effectus inde proueniens in sale nullus erit. Non negauerim, possibile esse, vt halitus quidam subtilissimi alicuius rei, quae in planta non combusta exstiterant, et peculiarem effectum ediderunt, in sale remanere queant. Eos vero adeo subtiles et paucos esse oportet, vt sensibus nullo modo pateant. Id enim obseruatio euincit. Nullo modo me vrget exemplum Viri, a foliis Absinthii singulariter abhorrentis et varia inde symptomata sustinentis, et ab usu salis Absinthii eodem modo affecti; * id enim rarissimum est. Et halitus subtiles e planta

* Ephem. Nat. Curios.

ta in sale remanentes, qui hic effectum produ-
xerunt, cum omnibus prope hominibus insensi-
biles sint, nec effectum sensibilem in aliis pro-
ducent.

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS

HISTORICA.

THE UNIVERSITY OF

CHICAGO

LIBRARY



CONVERSIONES RERVM SCYTHICARVM

TEMPORIBVS

MITHRIDATIS MAGNI
ET PAVLLO POST MITHRIDATEM.
T. S. B.

Venio ad tempus maximis rebus gestis insignitum, monumentorum miserabili strage atque interitu deforme, septemtrionalibus autem fabulis foecundum. Nam Scythae tam a Mithridate Eupatore afflicti sunt, quam a Getis pulsī: inde iam de Othino Afisque fama ducta, Troianis admistis originibus. Quae ex instituto nostro sic tractabimus, vt quantum veritatis in hoc altissimo puteo demersum esse sentiemus, tantum pro virili parte proferamus et a vanis perpurgemus. Haud sum ignarus, ab exitu Alex-
Tom. V. Qq andri.

andri Macedonis vsque ad hunc Mithridatem annos ducentos intercedere: eos tamen veluti deserta loca et inculta tesqua relinquere nos oportet. Illa est videlicet monumentorum istius aetatis conditio. Quantum est, quod vel in primis de Lyfimacho nobis relictum fuit? Tamen, si recordemur, Thraciam eum tenuisse et Ponticas provincias, fieri non potest, quin Graecas toto litore Ponti Euxini colonias idem quoque dicto audientes habuerit, vt tanto magis illius rebus Scythicas contineri sentiamus. Fuisse Lyfimachum, quem regem! quam potentem! fuisse igitur tantummodo constat: et tum fere, captum bello a Dromichaete Getarum rege et dimissum, (1) vel *τραγωδύμενα*. de eius liberis interfecerunt, denique Seleuci Nicatoris senis de sene Lyfimacho victoriae. Veluti canis e Nilo, ita tantas res delibant *ἐι δαιμόγιοι*. Fateor, scriptores eorum temporum Graecos nobis periisse: tamen, si exstarent, credo eos Laconicum isthuc nobis exorsuros, *ἀμμες ποτ' ἤμες ἀλκιμοι*. Quid enim simile vetustis historicis illa aetas protulit? Nunc, cum etiam isti interciderunt, sit sane in ducentis annis *Σκυθῶν ἐρημία*. Nam Macedonum reges ad Philippum vsque, quos rerum suarum praecones nacti sunt? Philippus qualem cuperet, habuit Polybium Megalopolitanum, magnum virum, sed qui de Scythicis rebus, in his, quae ex incomparabili opere exstant, non vacavit, nisi vbi occasione belli, quod

(1) Strabo pag. 209. et 211. ed. Casaub. conf. Plutarchum in Demetrio.

quod Byzantii cum Rhodiis habuere, de Maeotide et Ponto et mercatura Pontica quaedam interfatus est lectu dignissima. (2)

Quamobrem de Mithridate nos hic, quantum potest, videamus. Strabo, (3) Mithridatis ducumque eius armis, regionem, inde a Tira fluuio, quem alibi Danastrim esse demonstrauius, per Maeoticas gentes et per omne, vsque in Colchidem, litus Ponticum, illustriorem, quam dudum fuerat, factam praedicat. Modo res Ponticae et ipsius Mithridatis illa nunc in luce versarentur, vt dudum. Si Memnon, ne quid dicam de reliquorum scriptorum ruina, sub qua illa tempora sepulta iacent, igitur, si vel vnus Memnon hodie exstaret, quam multa de Mithridate sciremus. Photius effecit, vt eum maxime desideremus, quem is tanta dignum diligentia iudicauit, quanta haud facile alterum aliquem, et in quo tam multas reperimus veluti e naufragio tabulas rerum obscurae et intermortuae memoriae. Photius ex Memnone, (4) *Mitbridates*, inquit, *postquam regnare coepit, κατ-εστρέψατο πολέμῳ ἔτι τὸς περὶ τὴν Φάσιν βασιλεῖς, ἕως τῶν κλιμάτων, τῶν ὑπὲρ τῶν Καύκασον, ἔτι τὴν ἀρχὴν ἠύξησε, bello deuicit reges circa Phasin fluuium vsque ad regiones, quae super Caucaaso monte sitae sunt et regnum suum auxit.* Haec maximarum victoriarum summa est. Tantundem fere nobis ex

Qq 2

Trogo

(2) p. 425. seq. ed. Gron. (3) p. 10. ed. Casaub. (4) p. 378. ed. Hoefch.

Trogo Pompeio Iustus reliquit: (5) *ad regni administrationem cum accessisset, statim non de regendo, sed de augendo regno cogitavit: itaque Scythas, inuictos antea, ingenti felicitate perdomuit. Sic item Appianus Alexandrinus: (6) ἐχαρῶσατο δὲ τὰ περιόσια τῶν βαρβάρων καὶ Σκυθῶν ὑπὲρ ἀγέλο πολλὰς, καὶ Ῥωμαίοις τεσσαρακοντῆτη πόλεμον ἐγκραλῶς ἐπολέμησεν, deuicit circumiectos barbaros et Scytharum multos subiecit et cum Romanis summa vi bellum gessit annos quadraginta. Has res igitur nobis curae esse oportere iudicauimus.*

Mithridate Euergete defuncto, Mithridates, ut Sallustius ait, (7) *extrema pueritia regnum ingressus, matre veneno interfecta. Historia Miscella: (8) regnavit annis quadraginta, alii triginta. Perperam utrumque. Nam cum, M. Tullio Cicerone, C. Antonio Nepote, Coss. A. V. C. 691. quod certo constat, interiit, is, si quadragesimus fuit annus, ne quid dicam de tricesimo, sequitur, Mithridatem A. V. C. 652. imperium adiisse. At numum Mithridatis vide, similem illis, quos Ioannes Valens in Achaemenidarum imperio produxit, cuius ἄλκυρον Buxbaumius CPlI redux mecum communicauit. Habes in eo annum ΒΣ signatum, siue 202. Si is Seleucidaeus fuit, in autumnum A. V. C. 643. incidit: sin Pontica illa fuit Epochā secundum Ioannis Valentis rationes, erit A. V. C. 649.*
A p-

Tabula XII.
Fig. 1.

(5) l. XXXVII. 3. (6) p. 412. ed. Tol. (7) In Fragmentis e Senecio. (8) p. 40. ed. Murat.

Apparet igitur ex titulo numi ΒΑΣΙΛΕΩΣ ΜΙΘΡΑΔΑΤΟΥ ΕΥΠΑΤΟΡΟΣ ante A. V. C. 652 regem fuisse Mithridatem. Quare ex codice Ambrosiano veram in Paulo Diacono lectionem restituit Ludouicus Muratorius V. C. *vixit LXXII, contra Romanos bellum habuit annis XL*. Ita natus fuit A. V. C. 620. Appianus dubius haeret, (9) annosne LXVIII. aut LXIX. vixerit: regno tribuit LVII sicuti Plinius (10) LVI. Eutropius, T. Linium fere solitus sequi: *regnavit annis sexaginta, vixit septuaginta duobus*. Ab hac sententia in annis regni non abhorret vel Strabo, (1) cui ἔνδεκα ἔτη γεγονώς patri successisse dicitur, videtur enim mihi Strabo δυώδεκα scripsisse, vel Memnon (2) cui τρισκαίδεκα ἔτης ad regnum peruenisse dicitur, neque ita multo post a matris fratrisque aut fictis insidiis aut veris sese vindicasse parricidio. Igitur A. V. C. 632. regnare coepit, vnde ad illius exitum, anni sunt sexaginta Eutropii, aut potius Linii. Sed cum Paulus Diaconus et Appianus annos quadraginta bellum cum Romanis gessisse scribunt, manifesti erroris tenentur. Vix enim XXXI anni numerari possunt, si inde a Cappadocia Ariobarzani regi L. Sullae ductu restituta et ab A. V. C. 660. tamquam a belli Romani prima occasione secundum Dionysium Petauium exordiaris: nam A. V. C. 666. demum, nudatis Mithridatis consiliis, bellum a Romanis indictum gerique coeptum est. Ergo anni fere triginta ante bellum Roma-

Qq 3

num

(9) p. 411. 412. (10) l. XXV. 2. (1) p. 329. (2) p. 378.

num vacui fuerunt bellis Scythicis, quae Mithridates mature suscepit gerenda. Immo velim pro se quisque consideret, qui vigor animi in hoc regem iam senem fuerit, quae latissime regnandi et cupiditates et spes et per barbaricam militiam ad maiores res indurandi militis fiducia, ut inde concludamus, qualem adolescentiam exegerit Mithridates.

Nihil est reliquum, quam ut de bello Scythico passim undique colligamus veterem memoriam, praesertim vero ex Strabone. Huic enim in Mithridaticis multum tribuo. Nam Strabonis mater neptis Lagetae fuit, proneptis Dorylai eius, qui apud Mithridatem Euergeten multum potuit. Huius Dorylai frater Phyletaerus filium reliquit et ipsum Dorylaum nomine, quem Mithridates summis honoribus admouit. Lagetam quoque Strabonis proauum et Stratarcham Lagetae fratrem ad se vocatos coluit. Stratarcham Strabo ultima senectute vidit. Moaphernes matris Strabonis patruus, extremis temporibus Mithridatis illustris euasit: ne nunc totum genus Strabonis hic repetam, Mithridaticis deuinctum turbis, ut res istae etiam intra domus Strabonis famam contineri potuerint. Modo non ita exiliter res tantas tractasset Strabo, quod condonari possit alio in argumento versanti, nisi etiam confuse et suobscure tractasset, quo vitio in toto opere laborat. Strabone igitur auctore (3) Mithridates cum ad
regnum

(3) p. 372.

regnum peruenit, Pontum tenuit iis finibus, quos pater rexerat. Haly fluuio versus orientem a Cappadociae regno diuidebatur, inde litus omne ad Amastriam vsque et Paphlagoniae quaedam partes ea in ditioe censebantur: in mediterraneis vero prouinciae ultra Halyn extendebantur. Sinope erat regia, vbi et natus est Mithridates.(4) Hic deinde Heracleam, Graecam urbem et liberam, sibi subiecit et litus omne Ponticum, quod Cappadociae praetendebatur vsque ad Colchidem.(5) Occupauit quoque Armeniam minorem, quae Cappadociam ab oriente claudebat, per Euphratem a reliqua Armenia diuisa. Et cum Tibareni ultra Trapezuntem Chaldaei que vicini sub dynastis Armenis fuissent, eos quoque sibi subiecit, Ἀντίπατρος τῆ Σίσιδος παραχωρήσαντος, *Antipatro Siside se suaque tradente*. Armenia, ob situm regionis maximis munimentis refugioque fortunarum, si quis casus postularet, peropportunum, inprimis curae fuit Mithridati, vt in ea ad quinque et septuaginta castralla exstruxerit, inque iis opum suarum magnam partem recondiderit.(6) Sic aditus in Colchidem patefactus erat, (7) regionem admodum accommodatam Scythicum bellum cogitanti, propter tum subsidiorum ad naualem rem copiam, tum expeditionis meditatae et occasionem et ex propinquo facilitatem. Deinde iam, qui Mithridatica scripserunt, (8) Achaeos, Zygos, Heniochos, Cer-

(4) Strabo p. 375: (5) ibid. (6) Strabo p. 382: (7) ib. p. 343: (8) Apud Strabonem p. 342.

Cercetas, Moschos, et Phreirophagos et Θοάνας, siue ut in excerptis Strabonis est, Σοάνας aliasque paruas circa Caucasum gentes commemorant, per quas via aperienda erat et Scythas et Borysthenem Istrumque petitulo. Proximi Bosporanis Achaeci, Zygi medii inter Heniochos Colchis proximis: nam reliquae gentes iam intra montes reiectae. Hos populos partem vi, partem dolo et conditionibus in potestatem redegit videtur Mithridates. Heniochi qui quatuor reges habuere, ita fidi fuere postea Mithridati, ut, cum a Cn. Pompeio victus in Bosporum fugeret, (9) in eorum regionem sese reciperet sine metu, non item committere se fortunamque suam ausus Zygiis, quorum in litoribus magna molestia iter fecit, naues subinde conscendens, donec Achaecos teneret, qui eum cupide receperunt. Notae deinde Maeoticae gentes, Sindi, Dandarii, Toreatae, Agri, Arrechi, Tarpetes, Obidiaceni, Sittaceni, Dosci, (10) quae gentes a Ponti litoribus circumiectae Bosporanis, ad Maeotin et Tanaim, Caucasumque pertinebant. Incertum, Scythaene, an Sarmatici corporis. Nam ad orientem iam Sarmatae planiciem, usque ad Volgam, incolebant. (1) Illae autem gentes etiam postea saepe Bosporanis subiectae, saepe sui iuris fuerunt. (2) Sed ut erat Mithridates promptus atque arte fallendi nulli secundus, ita omnes illos populos conciliaffe sibi videtur,

(9) Strabo p. 342. (10) Strabo p. 341. (1) Strabo p. 343. (2) ib. p. 341.

detur, et in societatem belli contra Scythas accipisse.

Scythiae autem hunc fere statum iis temporibus fuisse reperio. Cherrhonesus in tres quasi ditiores diuisa erat. Litora Graecae coloniae inde ab vltima aetate obfederant: Bosporani tyranni partem agri tenebant orientalem, Scythae, quos Tauros et Γαργυρῆς nostri vocant, occidentalem. (3) Sed Bosporanae prouinciae in obiecta Asia vltra Bosporum Cimmericum multo ampliores fuerunt. Panticapaeum sedes tyrannorum fuit: Theodosiopolis siue Theodosia, quae nunc *كافا* *Cafa*, extrema versus Tauros vrbs. (4) Hi autem Scythae Tauri ab Isthmo, vbi ceteris connexi fuerunt Scythis, maximam Cherrhonesi incoluerunt regionem. Haec tum Scythia Minor dicta. Regio omnis copiosa, quod Scythae agros suos impigre colerent. Tantus inde frumenti prouentus fuit, vt Leucon tyrannus Atheniensibus ab Theodosia vndecies millia medimnorum submiserit, quamquam Chrestomathiae Strabonianae tantum centum et quinquaginta millia edunt. (5) Ceterum quod Bosporani dynastae ante Mithridatem tyranni vocantur, id argumento est, potentiam illam ex Graecis coloniis esse ortam, quae etiam iustam dominationem et a se delatam vltro, non fere alio magis quam tyrannidis nomine nuncuparunt, vt Miltiades tyrannus vocatus est apud Cornelium Nepotem. *Tom. V.* *R r* *bo:*

(3) ib. p. 214. (4) p. 214. 215. (5) p. 91. ed Hudf.

bo: (6) ἐκαλῶντο δὲ τύραννοι, καίπερ οἱ πλείους ἐπιεικέως γεγονότες, *nuncupabantur vero tyranni, quamquam plerique eorum clementes fuerunt.* Non est, quod miretur Isaac Casaubonus tamquam in re insolita, tyrannos dici, qui aequitati studuerint. Hic ipse vir longe doctissimus tyrannos illos ex Diodoro Siculo et Strabone nobis, quamquam non accurate, exposuit, tamen ita, (6) vt, quando neque ista tempora, neque res ad nostram curam pertinent, eorum recensione superfedere possimus. Archaeanaetidae, Milesiorum apud Panticapaeum coloniam, magistratus magis, quam reguli, inde usque ab Olymp. LXXV. quo fere tempore Xerxes in Graeciam traiecit, annos duos et quadraginta rebus praefuerunt. Spartacus primus tyrannorum Olymp. LXXXV. 3. post Corinthiaci initium belli fuit. Ad Olympiadem CXXIV. Diodorus Siculus nos deserit, vt anni centum et octoginta ad initia Mithridatis vacui maneant, quos ex obscuris Strabonis testimoniis, Isaac Casaubonus non ausus est restituere. Parysades tum maxime tyrannus Bosporanorum fuit cum Mithridates bellum Scythicum gereret. Minori Scythiae Strabo accenset partem regionum extra Isthmum usque ad Borysthenem, magnam videtur dicere, quae ad Tyram Istrumque pertinebat, (7) quamquam hic locus in Strabone corruptelae mihi suspectus est. Id eum vero dicere apparet, Scythas non latius coluisse iis temporibus, quam Herodotus.

(6) Comment. in Strabonem p. 117. (7) p. 215.

rodoti, nisi quod Istro traiecto agri nescio quantum tenere, Thracibus vi eiectis. Nam Strabo hic Mithridatica tempora illorumque scriptores respicit. Scythae illi pecudibus studebant et lacte victitabant, agros vero elocabant colendos, quibus visum esset exiguum tributum pendere: non solventibus bellum inferebant. (8) Igitur permitti Scythis alii populi fuerunt. Scymnus Chius, qui Mithridate opibus florente periegesin scripsit, de Tomitis, cum canit: ὑπὸ Σκυθῶν ἐν κύκλῳ οἰκισμένους prodidit. Et de Dionysopoli idem

Ἐν μεθορίοις δὲ τῆς Κροβύζων ἢ Σκυθῶν
Χώρας, μιγάδας Ἑλληνας οἰκηλῆας ἔχει.

*In confinibus autem Crobizorum et Scytharum
Terrae, Graecos habet barbaris permixtos incolas.*

Tenuere igitur Mithridatico aevo Scythae etiam regiones ultra Istrum. In superioribus regionibus vicini Germanis Bastarnae et Tyrigetae, quos Strabo Germanici populos corporis fuisse suspicatur. (9) Roxolani denique ἀρκλικώλατοι μελαζὺ τῆς Ταναΐδος ἢ τῆς Βορυσθένους νεμόμενοι πεδία, ὑπὲρ δὲ Ρωξολανῶν εἰ τινας οἰκισσιν, ἕκ ἴσμεν, *maxime ad boream reiecti agros intra Tanaim et Borysthenem incolunt, an super Roxolanis alii colant, ignoramus.* Hic tantum velim, vt veterum opinio vnicuique ob oculos versetur, qua Tanais fontes multo, quam sunt, magis sub borea ponerent, vt superiorem Volgam

Rr 2

cum

(8) ib. (9) p. 211.

cum Tanai confudisse videantur. Igitur Roxolanū intra fontes Borysthenis ad Tanaim forte et ad Volgam coluisse videntur Mithridaticis temporibus. Frustra adhuc illa in gente, quae tum primum cognita, deinde etiam Romanis bellis celebrata fuit, ad hunc diem laboratum fuit. Nihil ego inuenio, in quo satis acquiescam. Sed cum Budinos Fennorum maiores fuisse arbitror, ut alias exponam amplius, Fenni autem etiam nunc Suedos *Rosfalein*, *Ros populum* vocant, potest sane ea res nos aduertere.

Cum his gentibus gesturus bellum Mithridates, a Cherrhonesitis ad opem ferendam inuitatus est. Strabo: (10) Χερζρόνητος ἦν πρόσθεν αὐτόνομος πορθυμένη δὲ ὑπὸ τῶν βαρβάρων ἠναγκάσθη προσάτην ἐλέσθαι Μιθραδάτην τὸν Εὐπάτορα, ἑλληνιστὴν ἐπὶ τὴν ὑπὲρ τῆς Ἰσθμοῦ μέχρι Βορυσθένους βαρβάρους καὶ τῆς Ἀδρίας. *Cherrhonesus vrbs erat antea sui iuris, vexata agro vastato a barbaris* (καταλαρρομένη Chrestomathiae Straboniana habent, quod facit, ut *captam atque dirutam fuisse non ausim interpretari*) *coaeta est patronum et defensorem sibi adsciscere Mithridatem Eupatora, qui tum bellum mouebat aduersus barbaros supra Isthmum Cherrhonesi Tauricae usque ad Borysthenen et Hadriaticas regiones.* Oportet igitur in vicino iam fuisse Mithridatem, Scythasque ad Tanaim petiisse, cum a Cherrhonesitis

(10) p. 213. (1) p. 88. ed. Hudf.

fitis in auxilium vocaretur. Misit copias, ut videtur, nauales ex Colchide, cum Cherson vrbs aliter ab eo adiri non posset. Strabo ita pergit narrando: *Mithridates hoc cognito, ἄσμενος πέμψας εἰς τὴν Χερσόνησον Σκυθίαν, ἅμα πρὸς τε τὰς Σκύθας ἐπολέμη Σκίλυρον τε ἢ τὰς Σκυλῆρας παῖδας, τὰς περὶ Παλακόν, ἧς Ποσειδώνιος μὲν πενήκοντα Φησὶν, Ἀπολλωνίδης δὲ ὀγδοήκοντα, ἅμα δὲ τῆρας τε ἐχειρώσατο εἰς ἢ Βοσπόρου καλέσθη κύριος, παρ' ἐόντος λαβῶν, Παρισάδου τῆ καλέχοντος.* Locus hic corruptelae accusatus fuit, quod interpretes τὰς περὶ Πάλακον *Palacum ipsum*, more utique Graecorum loquendi explicarent, non cohaerente deinde sensu, Casaubonus vero Παλάκιον castellum reponeret, quo vsus sit *Scilurus aduersus Mithridatis legatos*. Huius sane meminerat Strabo: (2) sed idem paullo ante (3) Πάλακον τῆ Σκυλῆρας commemorat, eamque lectionem veram esse sentio, quam codices proponunt, eum autem in sensum accipio, quod filii nepotesque Sciluri, Palacum ut vel maiorem natu, vel testata virtute virum ducem secuti sint, patre ob senectutem imbelli. Non minus enim hanc interpretationem vsus Graecorum loquendi quam alteram admittit, loci autem huius natura eam solam. Conuerto igitur Latine: *Mithridates cupide misit exercitum Cherrhonesum, simul contra Scythas bellum gessit et contra Scilurum Scilurique liberos, qui cum Palaco erant, quosue*

R 1 3

Po-

(2) p. 216. (3) p. 211.

Posidonius ait quinquaginta, Apollonides vero numero ad octoginta fuisse: et simul hosce subegit et Bosporum in potestatem recepit Parisade concedente, qui regionem tenebat. Ita et res diuersae et tempora vno in sermone proponuntur. Daces memorantur, Diophantus, quem Memnon quoque inter praecipuos commendat, et Neptolemus. Diophantus videtur Chersonitis subsidio venisse contra Scilurum et filios. Nam Strabo testatur, (4) contra eos a Diophanto Mithridatis duce Eupatorium castellum esse conditum ad Carcinitin sinum: occidentale id Tauricae litus erat. Eodem teste, (5) Scilurus et filii castella in Cherrhoneso condiderunt iisque vfi sunt belli arcibus contra duces Mithridatis, Παλάκιον τε ἔχοντες καὶ Χαῦνον ἔχοντες καὶ Νεάπολιν, haec tria tantum nominat Strabo. Itaque praelium quoque cum Palaco in Cherrhoneso commissum videtur, quoniam Diophantus fuit, qui eum vicit. Hic Palacus Scythas et Roxolanorum, duce Thasio, submissa auxilia secum habebat numero ad quinquaginta milia, Diophantum vero multo minori instructum exercitu aggressus, contra phalangem ordinatam armatamque egregie, cum ista multitudine adeo nihil effecit, vt multis suorum amissis recipere sese cogeretur. Scythae interim etiam Parisaden Bosporanorum tyrannum vrgebant adeo, vt ex desperatione salutis Mithridati se suaque traderet. (6) Strabo: Παρισάδης ἔχοντες εἰς τὴν ἀντιόχου πρὸς τὰς ἑαρ-

(4) p. 216. (5) ib. (6) Strabo p. 214.

βαρβάρους Φόρον πραττομένους μείζω τῷ πρότερον, Μιθριδάτῃ τῷ Εὐπάτορι παρέδωκε τὴν ἀρχήν. *Parisades cum non posset resistere barbaris tributum poscentibus maius, quam antea, Mithridati Eupatori tradidit principatum.* Huic Parisadae subsidio venisse videtur Neoptolemus dux. Illius cum Scythis duas pugnas recenset Strabo duobus locis. Vno in loco equestre certamen super glacie Maeotidis paludis ponit ante nauale praelium eadem in Maeotide. (7) Οἱ δὲ, inquit, πάγῳ παρ' αὐλοῖς τοῖσσι τινέσ εἰσιν ἐπὶ τὸ νότιον τῆς λίμνης τῆς Μαιωλίδος, ὡς' ἐν χωρίῳ, ἐν ᾧ χειμῶνος ὁ τῷ Μιθριδάτῃ στρατηγὸς ἐνίκησε τὸν βαρβάρους ἵππομαχῶν ἐπὶ τῷ πάγῳ, τὸν αὐτὸν κατανουμαχῆσαι θέρους, λυθέντος τῷ πάγῳ. *Glacis apud eos tanta est in ostio lacus Maeotidis, ut eodem in loco, in quo hieme Mithridatis dux barbaros equestri certamine super glacie vicit, nauali praelio eosdem superaueravit aestate, glacie soluta.* Alibi praelium nauale ponere videtur ante equestre et hibernum, (8) ita enim factus est: Νεοπτόλεμον δὲ Φασὶ τὸν τῷ Μιθριδάτῃ στρατηγὸν, ἐν τῷ αὐτῷ πόρῳ θέρους μὲν ναυμαχίᾳ περιγενέσθαι τῶν βαρβάρων, χειμῶνος δ' ἵππομαχίᾳ. *Neoptolemum, aiunt, Mithridatis ducem eodem in traiectu, aestate nauali praelio superiorem fuisse barbaris, hieme autem equestri certamine.* Sed apparet priori loco eum multo curatius temporum ordinem respexisse, in altero rem magis quam tempus. Ostium Maeotidis, traiectus

(7) Strabo p. 50. (8) id. p. 212.

iectus est, seu Bosporus Cimmerius, de cuius congelata glacie etiam Herodotus testatur, (10) ἢ δὲ θάλασσα πήγνυται ἢ ὁ Βόσπορος πᾶς ὁ Κιμμέριος, ἢ ἐπὶ τῷ κρυάλλει οἱ ἐντὸς τάφρου Σκύθαι καλοικημένοι στρατεύονται ἢ τὰς ἀμάξας ἐπελάυνουσι πέρην ἐς τὴς Ἰνδοῦς. *Mare autem congelascit et Bosporus Cim-merius totus, super glacie Scythae qui intra fossam sunt, (in Cherrhoneso Taurica) praelia committunt et super eadem plaustris vecti usque in Indiam iter faciunt.* Et gelu quidem condensari facillime potuit tum Bosporus tum magna Maeotidis et Ponti pars, quod iis locis passim limo inducto aggestaque harena vada praebentur, qua de re prolixè disputat Polybius. (1) Ex loco autem, in quo praelia commissa sunt, concludo, Bosporano tyranno hunc maxime Neoptoleum auxilio esse missum contra Scythas et victoribus Mithridaticis Parisadem ἐκόντα ἀέκοντί γε θυμῷ Bosporanas regiones tradidisse. Scymnus Chius de Panticapaeo tyrannorum sede, in fragmentis Holstenianis:

Ἐπ' αὐτῆ τῆς σόματος τῆς Μαιώτιδος
 Λίμνης τὸ Πανλικάπαιόν ἐστιν ἕχαλον
 Τῆς Βοσπόρου Βασιλείου ἐπωνομασμένον.

*In ipso ostio Maeotidis
 Paludis Panticapaeum est extremum
 Bospori Regia cognominatum.*

Scriptit Scymnus, ut Henricus Doduellus argumētis veritati consentaneis demonstravit, A. V. C.

664.

(10) l. IV. c. 28. (1) p. 308. 309. ed. Casaub.

664. periegesin illam Nicomedi Chresto regi Bithyniae, Mithridatis clienti dedicatam, ad quam haec fragmenta refero. Igitur cum a Mithridate, aliquot annis ante, constitutum esset regnum Bosporanum, hunc nominis honorem consecutum est Panticapaeum. (*) Historia Miscella: (2) *Mitbridates totum Ponticum mare in circuitu cum Bosporo tenebat.* Sed ultra Carcinitin sinum et Borysthenem nihil tenuisse videtur. Ad curam Mithridatis de ornando Panticapaeo refero, quod Plinius scribit: (3) *circa Bosporum Cimmerium in Panticapaeo vrbe, omni modo laboravit Mitbridates rex et ceteri incolae, sacrorum certe caussa, laurum myrtumque habere: non contigit.* Pertenuis igitur haec memoria est a Strabone conseruata, ceterarum rerum nulla, nisi quod ad Ctenuntem extrema tentasse inuenio Scythas, ab ea autem vrbe depulso tota denique Cherrhoneso cessisse. (4) Tributum deinde Bosporani, in quo nomine iam omnes et Graeci et Scythae, qui Cherrhonesum tenebant, censebantur, Mithridati pependerunt in singulos annos frumenti medimnos ad centum et octoginta millia, argenti ducenta talenta. (5)

Romani, inquit Memnon, (6) cum suspecta haberent Mithridatis consilia, τοῖς Σκυθῶν βασιλεῦσιν ἐψηφίσαντο τὸς παλῶας αὐτὸν ἀρχὰς ἀποκα-
Tom. V. S s ταθῆ-

(*) Quae vrbs nunc كرش Ghiersch seu Khierschet Kersch dicitur.
(2) p. 34. ed. Muratorii. (3) l. XVI. c. 32. (4) Strabo p. 216. (5) p. 215.
(6) Photius p. 378.

ταδῆσαι, decreuerunt, ut Mithridates Scythiae regionibus suas regiones restitueret. Ille vero nihili fecit S. C. Romanum et societate cum Parthis, Medis et Tigrae Armeno inita, etiam Σκυθικῶς βασιλῆς ἔ τὸν Ἰβήρα προσήλαριζέτω, *Scytharum reges et Iberum in amicitiam pertraxit.* Haec, ait Memnon, accidisse circiter ea tempora, cum S. P. Q. R. Nicomedem Nicomedis et Nyfae filium regem daret Bithynis, Mithridates vero Socratem superioris Nicomedis fratrem et ipsum Nicomedem cognomine Chrestum opponeret. Constat satis A. V. C. 664 ista accidisse. A. V. C. 665. hunc Nicomedem Chrestum a Senatu hostem iudicatum ipse Mithridates, qui euexerat, de medio sustulit. A. V. C. 666. Bithyniam aperto bello inuadens Mithridates, Romanorum arma in se conuertit. Hoc ei tempus opportunum visum, cum partim fregisset Scythicos populos, partim discordiis litibusque ferendis distractos, iuuando comiter factionem suam contra validiores, firmauisset ad obsequia. Iustinus: (7) *ab Scythia quoque exercitum venire iubet.* Gallograeci etiam et Sarmatae Basternaeque per legatos ad auxilia ferenda sollicitati. Ex eo tempore tamquam turbo aliquis defauiens, simul totam Asiam, simul Graeciam insulasque omnes in potestatem accepit. L. Cornelius Sulla cum redegisse videbatur in ordinem, cum rex pace inita coactus est in regnum suum se recipere A. V. C. 670.

Erant

(7) l. XXXVIII. 3.

Erant tum Romae C. Marii plebisque vires contra optimates praeualidae: optimatibus studebat Sulla. Interim dum ad componendas res vr- bis Sulla proficiscitur, Mithridates, vt ait Memnon, (8) πολλὰ διὰ τὴν ἐν ἧ καλὴνέχθη συμφορὰν ἀποσάντων ἐθνῶν ἐξ ὑπαρχῆς χειρωσάμενος, *multis gentibus, quae propter calamitatem, qua repente corruerat, defecerant, receptis, vires recuperavit.* Id puto accidisse, postquam L. Muraena Sullae legatus reuocatus est a Mithridate lacefcendo. Nam cum Sulla pacem regi dedisset, Muraena e Cappadocia eum lacefsebat. Hoc amoto, Appianus quoque testatur, (9) Mithridatem res Bosphoranas ordinasse et Macharem filium genti praefecisse, Achaeos denique Colchis finitimos subegisse. Haud ita multo post, L. Lucullus ex consulatu in Ciliciam prouinciam et ad bellum Mithridaticum, M. Aurelius Cotta eius in consulatu collega cum classe ad Propontidem Bithyniamque tuendam venerunt. P. Rutilius Cottae legatus ad Chalcedonem caesus, maximam exercitus partem amisit. Gloria victoriae penes Basternas maxime fuit, qui peditibus Romanis in fugam coniectis, magnam stragem ediderant. (10) Basternarum ad triginta ceciderunt, ex reliquo exercitu regio septingenti. Romani pedites ad quinque millia et quingentos. Haec regi victoria A. V. C. 680. obtigit. Basternae autem, quorum in exercitu Mi-

Ss 2

thridatis

(8) p. 380. (9) p. 363. (10) Memnon p. 378.

thridatis virtus eluxit, quantum ex Scymni Chii eorum temporum aequalis fragmento constat, Thracibus vicini coluere, alterius tamen corporis populus, ita enim fatus est. (1)

Οὔτοι δὲ Θραῖκες Βασάρνοα τ' ἐπήλυδες.

Et Strabo eos haud ita multo post haec tempora ad Tyram fluium collocat (2) in mediterraneis, ad Danubii vsque ostia, *χεδόν τι καὶ αὐτὰς τῆς Γερμανικῆς γένεσ ὄντας*. Cornelius Tacitus (3) disertè: *Peucini quos quidam Basternas vocant, sermone, cultu sede ac domiciliis ut Germani agunt*. Itaque vel inde colligitur, quantum regionum Mithridates partem vi, partem beneuolentia sua sibi deuinxerit. Sed cum L. Lucullus acie toties superior, e Cappadocia Ponticas prouincias iuuaderet, Mithridates πρὸς τὰς Σκυθῶν βασιλείας, *ad reges Scytharum*, et ad Parthum legatos de auxiliis misit, ἀλλ' οἱ μὲν ἀπῆπον, *Scythae ei negarunt*. Testem habeo Memnona. (4) Appianus in Mithridaticis scribit, (5) misisse regem εἰς Σκύθας τὰς ὀμήρους, *ad Scythas finitimos* aurum muneraque alia per Dioclen legatum: hunc cum auro ad Lucillum transfugisse. Igitur tum quidem in exercitu regio contra Romanos Scythae publico nomine militarunt nulli: Fuit quidem in castris Romanis e Mithridatico exercitu transfuga ἀνὴρ Σκύθης, ὄνομα Ολκιάβας, utar enim Appiani verbis, (6) qui a L. Lucullo ad

(1) p. 46. ed. Hudson. (2) p. 212. (3) De moribus Germanorum. cap. 46. (4) p. 373. (5) p. 375. ed. Tollii. (6) p. 376.

ad secretos sermones saepe admiffus, cum ad eum meridianam breui pugione accinctus veniens a feruis accessu prohiberetur, siue suspectum sese esse sentiens, siue praeferox iracundia, quod ignominiam accepisset a feruis, ad Mithridatem rediit atque Σοβάδακον Scytham, ut transiturum ad Romanos criminatus oppressit. Sex. Iulius Frontinus in stratagematis (7) auctores habuit, quibus hunc *Aduthantem*, sic enim adpellat, subornatum a Mithridate scribit, ad occidendum ex insidiis Lucullum. Scytham eum fuisse, non confestim crediderim Appiano. Nam Plutarchus in Lucullo (8) hunc Ολθακόν vocat, et *Dardariorum dynasten* fuisse prodidit, γένος δ' εἰσὶν οἱ Δαρδάριοι Ἑσβαίων τῶν περὶ τὴν Μαίωλιν οὐκένων, *Dardarii genus barbarorum ad Maeotim colentium*. Hic populus prope Lazios situs fuit, isthic fere, ubi etiam nunc in tabulis Delislianis est *Dandars*. Quare mihi dudum in mentem venit, Plutarchum scripsisse Δανδαρίδης. Stephanus ex Hecataeo Δανδάριοι ἔθνος περὶ τὸν Καύκασον. Strabo quoque Dandarios, Sindos et Toreatas Maeoticis accenset. (9) Cornelius Tacitus (10) quoque *Sozam Dandaricae* (ut quidem Beatus Rhenanus emendavit, erat enim antea Dandari-dae) *oppidum a Mithridate relictum* sine praesidio et cultoribus, scribit. Hos Dandarios Lucas Holstenius, (1) *Indicam gentem circa fontes Indi fuisse* censuit. Nempe in hoc quidem vehementer erravit.

(7) l. II. c. V. 30. (8) p. 501. (9) p. 341. (10) Annal. XII. 16.
 (1) In Stephanum p. 91.

ravit Holstenius, vir, si quis alius de geographia veteri optime meritus, quod *Δαρδανέας* Indos apud Dionysium Periegeten cum his *Dandariis* commiscuit. Noli igitur Holstenii monitu apud Periegeten vocem illam mutare in *Δανδάρες*, sed Claudium Ptolemaeum potius audi, qui *Δεράδρας* et *Δαράδρας* scripsit, aut, si malis, Nonnum Pentapolitam et Stephanum Byzantium, qui *Δάρδας*, ex quo Dionysius Alexandrinus carminis caussa *Δαρδανέες*. Sed Plutarchi ad Caucasum Dandarii, metuendum est, ut ad Scythas non magis pertinerint, quam ad Indos. Quid si ad Sarmaticos intra Caucasum populos potius sunt referendi? Nimirum Scytharum nomine, ista quidem aetate, qua Appianus scripsit, de gentibus omnibus ad Caucasum impune abutebantur scriptores. Apud eundem Appianum: (2) *Αγαροι ἔθνος Σκυθικόν*, Mithridatis vulnus curasse dicuntur. Videntur illi ex *Gerrho* regione Scythica ad *Gerrhum* fluium Herodoto commemorata, *Γέρροι*, ut τὸ ἔθνην Stephanus edidit.

Cum deinde Mithridates a Lucullo victus fractusque ad Tigranem fugeret, iterum legatos misit, πρὸς τὰς ἐν Σκυθία Χερρόνησιτας ἢ Θεοδοσιανὰς ἢ τὰς περὶ τὸν Βόσπορον δυνάστας ὑπὲρ συμμαχίας, ad *Cherrhonesitas in Scythia et Theodosianos et dynastas Bosporanos de foedere*, quemadmodum Memnonis excerpta habent. (3) Sed peccauit breuitate

(2) p. 385. (3) p. 387.

uitate recensendi Memnonem Photius. Quid enim de foedere agi poterat cum incolis Cherrhonesi Tauricae vel cum Bosporanis, qui sub Mithridatis potestatem dudum redacti fuerant? Auxilia imperare poterat Mithridates, sed auxilia submissa sunt nulla. Quamuis Bosporanum regnum administraret Machares Mithridatis filius, quem et ipsum Mithridatem vocat Dio Cocceianus, tamen ille separata a patris rationibus consilia sectando, Romanos victores magis respexit. Eodem tempore multi Romae inuidebant Lucullo, nonnulli res ab eo gestas criminando exagitabant, in exercitu vero eius miles lasciuiebat, piratae denique omnia per maria grassabantur, cum ad summam incommodorum, M. Fabius dux Luculli a Mithridate subito oppressus est. Itaque Lucullo successor datus est Cn. Pompeius, qui praelio nocturno A. V. C. 689. Mithridatem toto regno Pontico exiit. Rex e fuga Dioscuriadem venit, nihil humile et abiectum animo agitans, ἀλλὰ τὸν Πόντον ὅλον ἐν κύκλῳ ἢ Σκύθας ἐπὶ τῷ Πόντῳ ἢ τὴν Μαϊώτιδα λίμνην περιελθόντα ἐς Βόσπορον ἐμβαλεῖν, *sed Pontum totum in circuitu et Scythas et Maeoticam paludem circumire et in Bosporum inuadere*, Macharisque perfidiam vlcisci, per quam a suis prouinciis excludabatur. Eodem teste Appiano, (4) per Scythicas gentes ἔθνη καὶ πολεμικὰ καὶ ἀλλόθρια, *tum bellicosas, tum alienato in Ponticos animo*, partem vi, partem gratia iter sibi patefecit in Bosporum.

Scy-

(4) p. 399. seq. Dio Cassius p. 28.

Scythas hic, dicit Appianus, populos ad occidentale litus Ponti Euxini. Ab Dioscuriade enim Mithridates Heniochos petiit, qui a quatuor regibus tenebantur. His transitum comiter praebentibus, Zygios vitavit, cum ob locorum difficultatem, tum ob feritatem gentis: itaque eorum in provincia secundum litus maris iter fecit, naues saepe conscendens, vbi terrestris via non patebat. (5) Inde eum Achaeos admisisse, scribit Strabo, Appianus (6) obistere ausos et repulso fuisse. Maeoticas regiones ingressus Mithridates, multis subditis regulis, ob famam rerum gestarum ab omnibus benigne hospitaliterque deductus est: munera vtrimque data, foedus initum firmatumque elocandis inter principes filiabus regis. (7) Machares, vbi cognouit, patrem *claustra Scythica*, vt Appianus loquitur, Caucasea, inquam, transisse, omniaque intra Maeotia et Tanain (in qua regione Bosporani regni Maeoticae gentes a veteribus collocari solent) tenere, e Bosporo Cimmerio in Pontum ad Romanos fugit, medioque in cursu, vel ipse sibi manus intulit, vel, vt Dio Cassius refert, ab amicis suis interfectus fuit. Cn. Pompeius Mithridatem persequens, Colchidem intrauit et ad Phasin fluuium, Seruilium cum classe, qua Ponti oram tuebatur, obuium habuit. At postquam cognouit, per quae loca, quam difficili itinere adeatur Bosporus, quam deinde anceps in longinquis regionibus et inquietis bellum futurum

effet,

(5) Strabo p. 342. (6) p. 399. (7) Appianus l. c.

esset, relictis ad tuendam Ponti oram naualibus pedestribusque praesidiis, Iberos et ad Caspium mare Albanos in potestatem redegit, inde in Pontum et Syriam reduxit exercitum. (8) Mithridates consilia agitabat, neque pro praesenti fortuna, neque pro aetate. Constituerat enim secum, adiunctis sibi Scythicis Geticisque auxiliis, per Pannoniam inuadere Alpes, (9) et omne barbaricum nomen in Romanos concitare. Eo et delectus militum habebat acerrime et arma telaque comparabat et exactioibus crudelissimis congerebat in aerarium opes, et eunuchos ad Scythiae regulos mittebat, qui auxilia peterent, filiasque regias deuinciendae caussa amicitiae inter regulos elocarent. (10) Enochi cum filiabus regiis, a quingentorum militum praesidio deducebantur. At haud longe digressi a Mithridate milites, euchos interfecerunt et puellas ad Cn. Pompeium adduxerunt. Iam et Castor, praefectus Phanagoriae nouis rebus studebat, (1) et passim vrbes exercitusque deficiebant, qua occasione Pharnaces vsus, patrum regnum rapuit, Mithridates violenta morte interiit, M. Tullio Cicerone, C. Antonio Nepote Coff. ante C. N. 63. Quemadmodum Scythae toties Cherrhonesi possessione euersi sunt, ita regnum Bospotanicum suis finibus tum in Cherrhoneso tum in obiectis ad orientem versus Caucasum prouinciis, fere vsque ad Valeriani Imp. tempora.

(8) Appianus l. c. Flutarchus in Pompeio p. 637. (9) Appianus p. 400
 (10) Omnia ex Appiano. (1) Historia Miscella ex T. Liui. p. 40.

pora (2) stetit et aduersus finitimas gentes, ne Asiaticas Romanorum prouincias infestarent, propugnaculo fuit. Tertius a Mithridate Afander, qui ab anno ante C. N. 45. regnauit et apud Caesarem Augustum gratiosus fuit, Isthmum Cherrhonesi muro ducto clausit, denis in singula stadia turribus exstructis. (3) Nostrum non est, res Bosporanas hic amplius persequi, potestque Ioannis Valentis industria eas cognoscere cupienti sufficere. (4)

Fractis eum in modum Scythis, ab occidente Getae grauiorem procellam mouerunt, quam nunc certo alicui tempori non possemus adsignare, nisi Dionis Prusaei Sophistae oratio Borysthenitica exstaret. Quod Mithridatis temporibus Olbia vrbs floruerit, ex Scymni Chii fragmentis Holstenianis (5) intelligimus:

Ἐπὶ δὲ ταῖς κατὰ Ὑπανίην καὶ Βορυθῆνην
 Τῶν δυσὶ πόλεμῶν συμβολαῖς ἐστὶ πόλις
 Κτιθῆσα, πρότερον Ολβία καλεσμένη.
 Μετὰ ταῦθ' ὑφ' Ἑλλήνων πάλιν Βορυθῆνης
 Κληθῆσα, τούτην τὴν πάλιν Μιλύσιοι
 Κτιζοῦσι κατὰ τὴν Μηδικὴν ἐπαρχίαν.
 Διακοσίων δὲ καὶ τεσσαράκοντα σταδίων
 Τὸν ἀνάπλεον ἀπὸ θαλάττης τῷ Βορυθῆνι
 Πόλεμῳ ἔχει.

Οὗτος

(2) Zosimus p. 28 ed. Oxon. (3) Strabo p. 215. (4) In Achaemenidarum imperio.

Οὗτος δὲ πάντων ἐστὶ χρειωδέστατος,
 Κήλη μεγάλη καὶ πολλὰ καὶ καρπῆς Φέρων
 Τὰς Φυομένους, νομὸς τε τοῖς ἑοσκήμασι.

*Vbi ostiis iunctis in unum confluunt
 Hypanis Borysthenesque, structa est ciuitas,
 Quae nomen antea obtinebat Olbiae:
 Deinde Graecis dicta denuo fuit
 Borysthenus: Milesii quoque struxerant
 Hoc oppidum florente regno Medico,
 Ad quod ducentis stadiis adscenditur
 Quaterque denis ex mari Borysthenem
 Per flumen.
 Hic amnis vnus omnium utilissimus
 Vastis abundans plurimisque piscibus
 Frugumque copia atque laetis pascuis.*

vt Lucas Holstenius conuertit. Recte Scymnus vigente adhuc Medico regno conditam a Milesiis scripsit, nam Ensebius Olymp. XXXI. 2. coloniam deductam fuisse testatur, annis ante C. N. 655. tertio anno Phraortis regis Medorum, sedecim annis ante, quam Cimmerici a Scythiis ex his regionibus pulsi sunt, vt nostrae rationes in Chronologia Scythica postulant. Ob tantam vetustatem vrbis et propter maximam opportunitatem mercaturae, tantae ciuium fuere opes, vt, Herodoto teste, Olbitae dici mallent, quam Borysthenitae, sicuti a Graecis ceteris ipsoque Herodoto nuncupabantur. Olbia autem, si interpreteris nomen, *felicitatem et affluentiam* continet, qua se *beatos* iudicarunt ciues.

Post id tamen nomen Borysthenitarum, a vicino ductum fluuio, sic obtinuit, vt Dio Chryso-
 stomus ipsa in vrbe, Borysthenitas dicere minime
 reformidaret. Iam de hac vrbe sic ait Dio So-
 phista: (5) ἡ δὲ πόλις τῶν Βορυσθενιῶν τὸ μέγε-
 θὸς ἔστιν ἔτι πρὸς τὴν παλαιὰν δόξαν, ἀλλὰ τὰς συν-
 εχῆς ἀλώσεως καὶ τὰς πολέμους, *vrbs Borysthenita-
 rum pro veteri gloria non item nunc ampla est, quod
 saepe capta, multa bello pertulit.* Tum vero com-
 memorat, τὴν τελευταίαν καὶ μεγίστην ἄλωσιν, ἣ
 πρὸς Πλερόνων καὶ Πεντήκοντα καὶ ἑκατὸν ἔτων. ἔειπον δὲ
 τούτῃν Γέται καὶ τὸς ἄλλας τὰς ἐν τοῖς ἀριστέροις τῆ
 Πόντιος πόλεις, μέχρι Ἀπολλωνίας, *extremam vrbis
 expugnationem omnium acerbissimam, annis non amplius
 centum et quinquaginta ante eum diem: ceperunt autem
 Getae cum hanc urbem, tum ceteras sinistro litore
 Ponti, vrbes, vsque ad Apolloniam.* Denique cete-
 ra persequitur, vt Getae, poenitentia ducti da-
 mnumque id suum rati, si vrbs antea mercatibus
 frequentissima et fructuosissima Scythis, in ruinis
 iaceret, Graecos immunitate aliisque commodis
 propositis ad restaurandam eam allegerint. Bo-
 rystheniticam Dio dixit, vt ab eruditis viris ob-
 seruatum fuit, A. C. 94. Ergo res illae Geticae
 in annum ante C. N. 56. A. V. C. 698. septimum
 ab interitu Mithridatis incidunt. Postquam Getarum
 regnum crebris bellis concussum, Βοιρεβίσις;
Voereuistas ex Δεκανέσις *Decenaei* aut praestigiatio-
 ris, aut sapientis viri, sententia restituit, etiam

Ro-

(5) p. 437. ed. Morelii.

Romanis terrori fuere Getae. Illo a seditiosis ciuibus sublato, regnum inter plures principes diuisum fuit. Modo eorum quatuor fuerunt, modo quinque et vel plures vel pauciores numero. (6) Ante Augustum Caesarem adeo validi fuere Getae, vt ad ducenta millia in aciem possent producere, Augusti vero temporibus, tum diffidiis inter se, tum bellis, sic attriti sunt, vt sub Tiberii Caesaris aetatem Strabo testetur, non fuisse amplius quam quadraginta millia virorum, qui arma ferrent. Getas vt opinor dicit, qui in maiorum sedibus permanferant, cum ceteri nouas quaesissent. Huiusce rei indicium est capta ante C. N. 94. Olbia. Et inde fere in Scythicis campis frequentius Getarum nomen, quam Scytharum est. Sed de his rebus praestat copiosius dicere in Memoriis Geticis, quam hoc loco.

Nam nos hic potius dicemus de Othino eiusque expeditione in septentrionales regiones, quam in his Geticis Scythicisque turbis contineri sentio. Othini memoria vera, vt puto, est, sed adeo deformata ab figmentis tum vulgaribus, tum eruditatis, vt vix colorem quendam veritatis retineat, vtque mirum non sit, cum in his quae de eo traduntur, tanta exstet apud scriptores septentrionales dissensio. Dum pro se quisque omnia ad suam gentem trahit, dum aliena appetit, non apparet, quid teneat tamquam proprium vel in historia

T t 3

vel

(6) Strabo p. 210.

vel etiam in fabula. Cum vero diuinus cultus Odino per omnem ferme Europam septentrionalem est tributus, id mihi idoneum argumentum videtur esse, vt credam, existitisse aliquem prisco aeuo celebrem virum, magnis facinoribus perpetratis insignem, quem hominum simplicitas ex heroum numero paulatim euexerit ad deos et denique praecipuo honore ante deos alios coluerit. Ne quem vero moueat, cum et fabulam concedam esse Othinum, et veritatem in fabula requiram, figmenta reiiciam. Plerique populi et praesertim libertatis virtutisque amantes, rerum ante se gestarum admiratione moti, si non scripto, tamen sermone et carmine aliquam priscae memoriae recordationem conseruarunt. Fabulae a veris sermonibus narrandi obscuritate differunt, non tota natura sua, vti falsa et commentitia. Sic in Graecarum fabularum plerisque inest rerum gestarum quaedam veritas, sed velis occultata suis et tenebris. Eleganter Strabo: (7) Φιλῆδῆμων ὁ ἄνθρωπος, προσίμιον δὲ τὸ Φιλόμεθον, et idem paullo post non minus vere: οἱ πρῶτοι ἰσορικοί ἢ Φυσικοί, μυθογράφοι. Quam sententiam Palaephatus, Eustathius et magnus Grammaticorum populus in explicandis fabulis Graecis sequuntur. In Romanis autem nolite credere, Fabium Pictorem aut L. Sifennam, vel Claudium Quadrigarium et Q. Valerium Antiatem ab Euandri, Carmentae, Saliorum carminibus abstinuisse, aut

nihil

(7) P. 13.

nihil traxisse a fama. Is quidem vehementer errat, qui nihil secus factum putet in primordiis Romani nominis, quam vt scriptis eruditorum hominum continetur. Ingenuam T. Liuii confessionem vide, aut Dionysii Halicarnassensis a T. Liuiio diffensionem. Priscis autem fabulis, (quas a *fando* seu obscuro rumore haud absurde putamus dici) multa figmenta paullatim admista fuerunt, quae pro suo quisque ingenio aut rescidit aut interpretatus est. Est tamen difficile in omni fabula sentire, quid falsi admistum sit vero, aut quantum in earum aliqua vetus rumor a putido commento discrepet: multo deinde difficilius est, si diuersorum populorum diuersae fabulae vnum in corpus confusae sint: difficillimum, si qui eruditi homines, vt ampliores ornatioresque priscas facerent fabulas, otio suo intemperanter sunt abusi, eorum pigmenta a rudibus fabulis vt seiungas. Quare, quemadmodum Flamini Diali non licebat vel nominare vel tangere fabam, ita videri alicui possit, a fabulis omnibus abstinere oportere historicos. At timent merito, ne in obscuris temporibus, simul cum fabulis tenuem verae historiae memoriam amittant, eo, vt quisque iudicio vallet, ita vero similia in iis confectatur. Mihi vero duabus de causis non videntur negligendae: tum, ne quis vana et commentitia ex iis in historiam importet, nimio veteris rumoris studio, tum, si qua in iis, veris consentanea transluceant, ea vt nobis seponamus. Septemtrionales fabulae
eandem

eandem naturam, quam Graecae habent. Sermone hominum et cantu conseruabantur, pertenui sane et fallaci ad fidem ministerio, praesertim si vera facta adulando extollerentur in maius. Olauus Verelius initio animaduersionum in Gothrici et Rolfi historiam, narrationes de rebus praeclare gestis per ora hominum traditas et in concionibus conuuiisque celebratas fuisse demonstrauit. Quid enim aliud Islandorum, Noruagorum Danorumque Scaldri egerunt, quam ut pro suo quisque ingenio, seu veterem rumorem, seu sui facta temporis con-celebraret? (8) Eorum fidem Arrius Polyhistor (9) et eius fere aequalis Saemundus Sigfusi filius et post alios, quos Thormodus Torfaeus et Arngri-mus Ionas recensent, Snorro Sturlaeus (10) secuti sunt. Sapienter hic fidei suae cauit Snorro, vir, ut ex illius monumentis ingenii apparet, magno iudicio, neque minori integritate et fide, par de-nique optimis prisca aevi scriptoribus, praeterquam cum a tenui eruditione delusus est. Is enim ait (1) scripsisse se, *ductu partim eorum, quae in antiquissimis veterum annalibus, quibus reges virique illustres alii stirpes suas recensuerant, partim quae ex antiquis canilenis rhytmisque, oblectationis causa quondam decantatis, ad memoriam posteritatis peruenerunt: quamuis autem, inquit, plenam harumce rerum scientiam polli-*

(8) Vide Thormodi Torfaei prolegomena in historiam Noruagicam et Orcadensem. (9) A. C. 1117. Thorm. Torfaeus in serie regum Daniae l. 1. c. 4. Prolegomenis Historiae Noruagicae p. 4, Arngrimus Ionas in Crymogaea et Specimine Islandico (10) A. C. 1241. caesus. Ioannes Peringskiöldus Praefat. in Snorronem et Torfaeus l. c. (1) Historiae Noruagicae t. 1. p. 1.

polliceri non audeamus, exempla tamen haudquaquam nos deficiunt, quibus certiores reddimur, viros olim eruditissimos fidem talibus habuisse. Similiter in Danis Saxo Grammaticus, (2) Snorrone quidem nullo modo comparandus, et testatur in praefatione, vetera carmina se respexisse, et ipso in opere exhibuit. Non est necesse, vt addam aliquid de Gronlandis, quorum carmina Thornmodus Islandus (3) edidit et in historiam transtulit. Tenemus initium vndecimi seculi, cum, quidquid veri, rumor et fabulae continere viderentur, in historiam congeri coeptum est. Ex eo tempore septemtrionalis historia firmioribus ad fidem monumentis sese extulit. Nam in superioribus temporibus, tametsi operam omnem atque ingenium viri boni adhibuerunt, tamen non modo in vetustis fabulis, sed in propioris aetatis carminibus et fama, facile fuit falli. Snorro in praefatione sic ratiocinatus est secum: *haud dubitamus, singula illa, quae in carminibus traduntur, de expeditionibus rebusque gestis, veritati consentanea ducere: quamvis hic poetarum mos sit, vt eorum, quae sibi proposuerant, encomia, summo decantent opere, vix tamen crediderim, quemquam ausurum fuisse, domino ea narrare facinora, quae auscultantibus pariter et ipsi falsitatis vanitatisque nomine perspecta forent, quippe in dedecus potius, quam laudem vergentia.* Prudentem virum audio et recte secum ineuntem rationes, sed quae non
 Tom. V. V v itme

(2) A. C. 1193. Stephanus Stephanus in prolegomenis p 21. (3) A. C. 1030. Arngrimus Ionas in specimine Islandiae historico p. 151.

item omnium carminum auctoritati inferuiant. Quot enim poetae de vetustis ante se rebus cecinerunt, qui fallerentur ipsi, qui ne pudorem quidem mentiendi haberent, cum proptet rerum vetustatem, nemo esset, qui eos refelleret! Si Theocritus in Ptolemaei Philadelphi encomio, si in Olympionicis ceterorumque ludorum victoribus Pindarus nihil falsi rebus ipsis, quas tractant, admiscuerunt, non tamen iisdem credideris in ceteris, quae ex superiori memoria interferunt. Nempe omnibus in gentibus, quanto longius aetas nepotum a maiorum temporibus absuit, tanto intentius accepta a parentibus, in foro, circulis, conuiujs personuerunt: et amissa etiam continenti memoria, quaedam magnarum rerum scintillae in animis hominum exstingui non potuerunt. Haec quia tamquam e longo interuallo vix noscebantur, vt obscura et male cohaerentia, aucta deinde solertia captantium e vanis miracula, multo incertiora euaserunt, quam fuerant dudum. Multum igitur refert, quis ista tum lubrica tractarit. Saxo Grammaticus vsu se scribit Thulensium, sic enim Islandos vocat, narrationibus: iisdem vsu est Snorro Sturlaeus. Vide quid homo homine discrepet: plane inter sese non conueniunt. Quare aut Saxo deprauata carmina et figmentis scatentia integrioribus praetulit, aut diuersa miscendo, ab ratiocinijs suis declusus concidit. Quamobrem tantopere indignatus est Ionas Iacobus Venusinus Historiographus Regis Daniae, quod Saxo Scal-

dro-

drorum carminibus nimium tribuerit, *quaedam enim*, inquit, *eiusmodi sunt, ut apertae veritati vim faciant: quae si pro veris acceptarem, nae nos in historia nihil vidisse videremur.* Multo grauius in eum insurgit Angrimus Ionas apud Stephanium (4) qui ei ne quidem viri boni nomen relinquere videtur. Sed Saxonem etiam in propioris memoriae rebus, his ipsis rebus coaeui scriptores condemnant. Nescio tamen, an eruditio ab Romanis Graecisque monumentis intemperanter a quibusdam ad fabulas adhibita, plus mali importarit, quam aliorum vanitas. Multa eiusmodi *ἐπαυλοφώρω* deprehendi. Ioannes Lyscander, qui tantum sibi in Danica historia permisit, Saxoni Grammatico irascitur, (5) quod toto in opere Cimmericorum memoriam, ac ne Cimbrorum quidem apud Danos vel Islandos inuenerat, ut nec Snorro Sturlaeus. Post Saxonem docti homines, cum sibi aliquid apud Romanos Graecosque visi sunt reperisse, hanc partem beuigne expleuerunt, sed medius fidius admodum imprudenter: inde aliis audacia, ut eam quoque veluti antiquam septemtrionalium gentium famam venditarent. Cum Arngrimus Ionas in Crimogea ostendisset, Islandiam Noruagicorum scriptorum testimonio ab A. C. 874. primum colli coepisse; e contrario Ioannes Isaacus Pontanus in commentario de insulis borealibus omnem eam monumentorum Islandicorum fidem idcirco conuul-

V v 2

fam

(4) In Prolegomenis p. 36 37. (5) Antiquitatum Danicarum sermo VIII. p. 69.

sam voluit, quod Thules mentionem iam Graeci inieciſſent et in iis praefertim Pytheas. Scilicet multa apud antiquos eſt memoria Tules, quam cum Adamus Bremeniſis comperiſſet, Islandiae attribuendam iudicauit. Eum ſecuti ſunt alii, vt ne dubitarint quidem ita eſſe. Peperit haec diſputatio inſignem librum Arngrimi Ionaë, quod ſpecimen hiftoriae Islandicæ inſcripſit, in quo libro mihi Pontano ſatiſfeciffe videtur, nihil ad Islandiam pertinere Thulen demonſtrans et potius Britannicis inſulis eſſe inferendam. Venit deinde tamquam in controuerſi et vacui nominis poſſeſſionem Olaus Rudbeckius, (6) qui id ipſum toti Scandinaviae vindicauit. At Thormodus Torfaeus (7) ſpecie concedentis tam graues difficultates Rudbeckio mouit, vt Thule citius Islandia ſit, quam Scandinauia. Tamen ſibi quoque obſtare veterum loca ſenſit, vir veritatis, ſi quis vniquam, ſtudioſiſſimus, Torfaeus. Scilicet ne veteres quidem de vna et eadem inſula id nominis uſurparunt, vt iam tum in vocabulis quibusdam ingenioſe ludere ſunt ſoliti. Serius item ab externa eruditione, ſed tenui illa atque ex ſanguine Dacorum nomen Danis tributum eſt. Vetera monumenta ignorant: recentiores quidam errorem iſtum gratanter acceperunt, non modo iam nomen ſolum, verum etiam res Dacorum ad Iſtrum geſtas, Daniae vindicantes, quos quidem grauiffimis verbis Ioannes

(6) In *Atlantica* cap. de Thule p. 514. (7) *Hiſtoriae Noruagicae* T. II. p. 10. ſeq.

nes Isaacus Pontanus explofit. (8) Sed infinita sunt, in quibus immatura eruditio feptemtrionalibus hiftoriis nocuit. Quae cum ita fint, vt omni in fabula, ita in Othino, quantum humana mens cauere poteft, prouidendum eft, vt non minus fequioris aetatis commenta, quam ab eruditione petita pigmenta, a vetufto rumore feiungamus.

Complures Odinos in monumentis feptemtrionalibus commemorari, Ioannes Schefferus, (9) et Olaus Verelius (10) obferuarunt, ne dicam alios. Saxo Grammaticus vifus eft feptem eodem nomine et honore diuinitatis inferuiffe. Thormodus Torfaeus (1) tamen, re accuratius confiderata, vnum vbique Othinum deprehendit. *Quod autem, inquit, Odino fuo tam prodigiofam aetatem adfcripferit, in eo illum parum circumfpectum fuiffe confiteri conuenit.* Nempe, cur Saxoni non liceret in Othino deo, quod Graeci in Ioue, Apolline, ceterisque diis immortalibus fibi permiferunt, vt non modo iftis temporibus, quibus hi heroes fuerunt in hominibus, fed multis etiam feculis poft producerent adulteros. Sin a Saxone difcedas, trium praecipue aut duorum Othinorum memoriam prifcam exftare inuenies: nam fi Mithodinum excipias, Odinus Prifcus et Odinus Vpfalienfis relinquuntur. Hanc Brynolfi Suenonii fententiam placuiffe video Nicolao Kederö, fummi ingenii, eru-

V v 3

ditio-

(8) p. 640. (9) In Vpfalia c. 7. (10) In hiftoriam Gothrici et Hrolfi p. 40. (1) In Dynaftiarum Daniae ferie 4. II. c. 5.

ditionis autem excellentis viro. (2) Equidem illum Vpſaliensem vulgo dictum solummodo inter mortales existisse puto et ab eodem superstitionem manasse, donec procedente tempore se ipso antiquior et verus deus crederetur. Snorro Sturlæus in historiis Noruagicis Odini Vpſaliensis famam ex Arrio Polyhistore consignauit, in Edda autem Odini Prisci, seu eiusdem Odini, qui iam haberetur vt vetus deus. Sed cum Snorro, Odinum ex priscis sedibus in septemtrionem vt deduceret, regionum situm describit, manifestum est, eum ab eruditione tenui litteratum Latinarum, qua iam tum aliqui in Noruegia calebant, sic delusum fuisse, vt tamen etiam hic aliquid veteris famae subodorari queamus. Tanto diligentius expendenda erunt omnia. Oceanum, inquit, ambire terram, atque maria sua passim in sinus diffundere: ex his esse mare a *Noruaſund*, seu *Gaditano freto*, vt Ioannes Peringskiöldus V.C. explicuit: isthinc ad Palaestinam vsque protendi atque inde in longitudinem porrigi, aquilonem versus, Mare Nigrum, seu Pontum Euxinum: ad boream iuxta Mare Nigrum esse *Suioniae* (3) regnum, quod quidam vastae *Serklandiae* (4) comparent, alii *Blalandiae*, (5) quam Peringskiöldus *Aethiopiam* interpretatur: septemtrionalem plagam propter intensissimum frigus et inclementiam caeli incultam
iacere,

(2) In numo aureo Othjini p. 3. conf. Noua Litteraria maris Baltici A. 1700. p. 363. (3) *Suitiot.* (4) *Serkland.* (5) *Blaland.*

iacere, Africam ad meridiem torreri aestu nimio solis: plurimos in Suonia esse tractus, diuersis distingui linguis et varia populorum multitudine abundare: esse isthic gigantes, pygmaeos, pugiles subfusci coloris, gentes prodigiosas, tum serpentes stupendae magnitudinis. Ex montium borealium iugis descendere Tanaim, olim dictum *Fanaquisl*, seu *Vanaquisl*, (*Vanorum fluuium*) qui per *Suitiot* deuectus in Mare Nigrum sese exponeret: regionem huius fluii brachiis interclusam, *Vanaland*, vel *Vanabeimur*, *Vanorum terram* dici. Ab Tanai illo tres orbis regiones diuidi et Europam ab Asia discerni.

Hancine adeo formam terrae Snorro Sturlaeus paullo ante A. C. 1241. edere potuit? Nempe nihil eorum dicit, quae tum propter crebras Scandinauorum terra marique profectioes nota erant: libellis quibusdam lepidis hercle et eruditis auscultare maluit. Septemtrionalem tractum habitari posse negat, et nescio quae monstra iis in locis disseminat. Quid autem? nihilne ei Biarmiae seu Permae, ad borealem vsque oceanum cultae, in mentem venit? quam vero Noruagos ad quaerendas sibi diuitias nauibus adiisse, vel ex Snorrone constat. Minime gentium, audiendi erant potius illi, qui ex Graecis Latinisque hauserant. Hi vero septentrionem omnem solitudine et terroribus immitis caeli implerunt, hi, teste Eustathio Thessalonicensi in praefatione commentario-

rum Iliados, solitudines mapparum suarum, pygmaeis atque aliis istiusmodi monstris exornarunt. Tanais Europam ab Asia discernit: recte, si Strabonem (6) audias. Tanais item tertiam orbis regionem a duabus? nempe ingeniosum hoc est. Ex borealibus montibus Tanais in Pontum Euxinum descendit, Pontus, ut verba Snorronis non obscure indicant, in septemtrionem extenditur. Sunt haec eiusmodi, quae ex fabulis Argonauticis orta, situm harum terrarum sic interuerterunt, ut Pontus Euxinus hinc longe abesset a boreali oceano, de quo errore saepius monui. Sed ut hic Snorronis magister Herodoteam orbis terrae diuisionem, quae apud optimum quemque veterum Geographorum locum inuenit, secutus est, ita etiam ex Ephoriana aliquid recepit. Nam Ephorus orbem terrarum in quatuor partes distribuebat, (7) Celticam ab occidente, Scythiam sub septemtrione, et sub illis Aethiopiam et Indiam. Aethiopia magistro Snorronis, fuit *Blandland*, ex Scythia, propter tenuem conuenientiam vocis, factum est *Suitiod* et ex *Scythia magna*, ut fautores Ephorianaee sententiae loquebantur, *Suitiod Miklu*. *Serkland* Ephoriana est India. *Perringskiöldus* ad Theodorici regis vitam, (8) cum ex Hialmteri regis historia refert, Ingonem Manheimiae regem filio suo classem tradidisse, cum qua in Arabiam, Sarklandiam aliaque loca orientalia

(6) p. 338. 339. (7) Confer ea, quae diximus in *Memoriis Scythicis* p. 354. seq. et p. 386. (8) p. 407.

Italia proficisceretur, *Sarklandiam* explicat *Sarckedoniam*, siue *Carthaginem Africae*. Quidquid sit de illa expeditione, *Sarkland* et *Serkland* profecto non potest fieri, vt sit regio aliqua alia quam Ἡ Σερικὴ, *Serica*. In commentationibus de *Serica* et *Seribus* ostendam, regionem illam, ob mercaturam *Serici* celebratam, ab *Mesopotamiensibus*, qui eam exercebant mercaturam, شرق et شرقة *Scherk*, *Scherkab*, *Scharkeb*, id est, orientem fuisse dictam. Et fuit quidem illa regio non ita ampla vt *India*, tamen fama sui nominis sub *Augusto Caesare* et postea, *Romanum orbem* impleuit. Idcirco auctores, quos *Geographus Rauennas* secutus est, (9) *Indiam* et *Sericam* vno nomine comprehenderunt, *Indiam Sericam* appellantes. Et commode hoc accidebat *Ephoriana*e sententiae studiosis, quod *prisci Geographi*, vt *Ptolemaeus*, *Agathemerus*, *Marcianus Heracleota*, infra *Scythiam* protenderent regionem *Sericam*, vt *India Ephori* facile posset cedere nobiliori nomini *Sericae*. At enimvero, inquires, potuitne *Ingonis*, *Manheimiae regis*, filius nauibus suis proficisci vsque in *Sericam*, siue *Indiam*? Scilicet, si nihil aliud sententiae meae obstet, vtut concedam, vera ista esse, quae de *Ingone* hoc referuntur, neque enim a fide abhorreo, tamen nihil absurdi sentio. Recognoscite mecum veterum *Normannorum* nauigationes, vim atque audaciam. Primos omnium *Europaeorum* in *Americam* nauigasse, vtcumque aliquis mirabitur,

Tom. V.

XX

tur,

(9) Vide cum in primis p. 43. ed. Porch.

tur, Snorronis auctoritate moueor, vt credam. Quidni iidem pro reliqua fortuna sua et incredibili audacia viam inuenerint circum Africam nauigandi? Id ego autem nunc non postulo, magis enim inclinatur animus, vt credam, eos primum petiisse Alexandriam, deinde ex sinu Arabico nauibus fuisse deuectos in Indiam, Sericae mercaturae causa.

Postquam Snorro orbis terrarum situm confusus inter se vetustatis lineamentis depinxit, regionem, ex qua Othinum profectum compererat, subobscurè item monstrat. Terram, inquit, ad orientem Tanais existisse, nomine *Afa-land*, vel *Afaheimur* et metropolin eius *Asgard*, in qua et princeps fuerit nomine *Odinn* et locus sacrificiis cultuque deorum celebris. Cum principe fuisse duodecim praefectos, quos ipsi *Diar*, *edur* *Drottmar* vocarint, quibus curam sacrorum gesserint, et ius dixerint populo. Odinus longinquis peregrinationibus bellisque nobilitatus multas victorias reportauit, multa regna sibi subiecit, ex quo fama fuit, vbi pugnaret, ab ea parte stare victoriam. Tandem exercitum suum eduxit (*bendur Voenum*) contra *Voenos*, qui regni sui fines valide tutati sunt. Rursum, inquit Snorro, ab ortu solis aestiui vsque ad occasum solis hiberni longissima montium iuga protenduntur, disterminantia *Suidiod Miklu*, *Scyrbiam magnam* a ceteris regnis. Haud ita procul ab hoc eorum montium australi parte, *Teucria* eius sita est; ibi

ibi magnos quoque tractus possidebat Othinus. Verum enim vero plena haec sunt praepostero πολυτοπίας studio. Quoniam ex veterum geographorum sententia Tanais Asiam ab Europa determinabat, isthuc autem vocabulum *Asia* cum *Afarum* nomine congruebat, inde tenui ratiocinio *Afae* visi sunt ex *Asia* profecti. Ita Georgius Hicckesius: (10) *Famefus ille Othinus et eius affectae se pro deastris seu diis aut semidiis venditantes ex Asia oriundi sunt: itaque As in plurali Aser diis septemtrionalibus nomen gentile erat.* Contra ea Gudmundus Andreae Islandus, in notis, quae *Voluspae* a Petro Resenio ex Saemundi Edda editae subiunguntur, (1) *Ab Afa Asia, solum diuinum, sacra terra: non hi ab Asia nomen, sed regio ab illis suscepta.* Haud eo inficias, *as*, dei, et *aeser* deorum nomen veteri lingua, non modo Scandinauica, sed etiam Celtica viguisse. Hesychius Αισοί, θεοί ὑπὸ Τυρρηγῶν. Suetonius Tranquillus in vita Caesaris Augusti: (2) *Aesar Etrusca lingua deus.* Inde *ara* quoque videtur dicta, et priscis Italis *asa*, Numae Pompilii lex: (3) PELEX. ASAM. IVNONIS. NE. TAGITO. *Pellex aram Iunonis ne tangito.* Sic: *Furii, Valerii, ero, mures, melior, foederum, plurima, arena,* vulgo apud priscos Romanos, et in Saliorum carminibus, (4) dicta sunt, *Fusii, Valesii, eso, muses, foedesum, plusima, asena.* Apud Turcas *as*, *parum,*

X x 2

rum,

(10) In thesauro linguarum septemtrionalium t. 1. p. 193. (2) ad v. 20. (3) c. 97. (4) Apud A. Gellium. l. IV. c. 3. (4) Varro apud Macrobius l. III. c. 2. et de Latina lingua l. VI.

rum, parcum, apud Slauonos *as, vnum*, sicuti apud Ruffos *odin*. Sed vt Asiam ab istis diis, vel deos septemtrionales ab Asia fuisse dictos existimemus, maiori opus est vi ad persuadendum nobis. Potius ego, vt paullo ante dixi, ea in sententia sum, conuenientiam tenuem soni in vtraque voce, erroris causam exstitisse, vt Ochinum cum asis suis ex Asia repeteret ille Polyhistor Arius, cui aurem praebuit Snorro. Sed multo grauius peccatum in *Teucris*, cuius nominis tanta non est cum *Turcis* societas. Vbi a Perinskiöldo *Teucria* editur, ibi ipso in Snorrone est *Tyrkland*. (5) Nimirum postquam Illustris Stiernhielmus (6) coniecturam expediuit, *Turcas* vetustis septemtrionis monumentis celebratos esse, digna visa est Peringskiöldo coniectura, quam sequeretur. Alio loco vbi Snorro de Leifuri in Vinlandiam profectio agit, comes eius commemoratur *Turkir Sudur madur*, (7) ibi Peringskiöldus: *sociorum vnus Turkirus*, omisit enim in Latina versione, *vir e regione meridionali*, quod in Suedica interpretatione exstat. Mihi vero nihil aliud dicere voluisse Snorro videtur, quam *Turcam ex australi terra*. Neque illud *Tyrkland* quidquam aliud est, quam *Turcia*; non illa in Turkestan, sed ad Danubium et Danastrim et Danaprin Tanaimque et in Cherrhoneso Taurica. Cherrhonesum et superiores regiones vsque ad fontes Tanais, vt a Constantino

Por-

(5) t. i. p. 5. 75. (6) Apud Olauum Verelium ad Hennozar Saga p. 8. 89. (7) T. I. p. 332.

Porphrogennetta describitur, Chazari tenuerunt, multis ante hunc Imperatorem aetatibus ex Turcestania profecti. Theophanes Byzantius: (8) τῆς Τέρκως ἀπὸ ἑώας, ἕς Χαζάρως ὀνομάζουσιν εἰς συμμαχίαν ἐκαλᾶτο. Et lingua Chazarorum nulla alia, quam Turcica fuit, quod multis exemplis constat. Quocirca etiam liber Cosri, qui disputationem Iudaei cum Chazaro continet, Turcice scriptus fuit. Supra Chazaros Turcae alii, eorum cognati, a fontibus Tanais vsque ad Istrum confederunt. Et tamen, quod ex Constantino Porphyrogenneta constat, circiter A.C. 893 a Pazinacitis toto illo agro eieci fuerunt, tamen ad Istrum et in Pannonia sedes suas collocarunt. Ex hac igitur regione prisca fama Othinum eduxit, in qua cum Turcas viderent colere, eo *Tyrkland* nomen regionis, ut tum erat, ediderunt. Vox illa *Diar* Turcica reuera est, et *domus complures, regionem, prouinciam* significat. Sic ديار بكر, *Diar Bekir*, ديار ربيعة, *Diar Rabia*, ديار مصر, *Diar Mezir*, ديار الجزائر, *Algjezira*. Praeterea in dignitatum nominibus videtur fuisse, isthuc *Diar*: nam et Kiouiae Princeps Oskoldus, qui circiter A. C. 865. fuit, *Diar* in Russicis Annalibus vocatur, quod nominis, imitatione Turcarum gessisse videtur. Tenemus igitur regionem, quam Getae Scythaeque incoluerunt iis temporibus, quibus Othinum fuisse, fama perhibet. Non nego, Snorronem Tyrklandiae nomine aliam regionem in animo habuisse.

X x 3

Nam

Nam cum de Othini expeditione agit, eam ad orientem Tanais collocat, Othinumque profectum dicit *fürst vestur in Gardariki, oc tha Sutbur i Saxland*, (9) *primum, occidentem versus in Gardarikiam*, (quae nunc media Russiae regio est) *deinde meridiem versus in Saxoniam*. Scilicet cum illius aetate, Turciae eius, quam modo commemoravi, iam oblitterata esset memoria, contra ea Turcae orientales celebrarentur, eodem se vertit Snorro. Sed si ex Getis fuit Othinus, non iam mirum est, sermonem illius tam in Germania quam in Dania et Scandinavia, peregrinum fuisse visum, ita tamen ut non plane abhorreret ab his linguis, quemadmodum Turcica. Testantur sane septemtrionales, diversam illius fuisse linguam, eamque *Asamal, Asarum sermonem* vocant. Olaus Verelius, (10) postquam ostendit, sibi cum Arngrimo videri, ab omni aevo in septemtrione hanc linguam Noruagicam obtinuisse, (id autem mihi quodammodo a vero non videtur alienum esse) Eddam producit his verbis: *Asiatici matrimonia in his terris inierunt, genusque suum in Saxonia et arctoo orbe admodum propagarunt: sola ipsorum lingua hic in usu fuit: et satis liquet, quod in septemtrionem linguam suam intulerint per Noruegiam et Daniam, Sueoniam et Saxoniam*. Eo in loco ipsa Noruegica lingua ex *Asamal* orta atque facta dicitur. At Verelius, seu dissimulans Eddae auctoritatem, siue aliquem eius errorem sentiens, ita fatur: *Vocabatur haec lingua Asamal, hoc est, Asiatico-*

(9) p. 5. (10) In historia Gothrici et Hrolfi p. 2.

ticorum sermo: sed a priori, non nisi dialecto differ-
 bat: utriusque enim communis mater Scythica fuit:
 si quid autem peculiare posterior haec habebat, vulgo
 id minus receptum, Scaldis tantum frequentabatur,
 novo hoc lepore carmina sua condire studentibus: quae
 propterea minus facilia intellectui, nostro praesertim
 aeuo, cum vulgaris pariter ac poetica dictio vetus in
 usu esse desit. Eddam cum citet, prologum eius
 dicit, quem alibi merito exhibitat. Eo in prolo-
 go, Olai Magni codices haec tantum habent: *ex*
indigenis ibi Asae uxores sibi et filiis suis delegerunt,
ut hae familiae intra breue tempus per Saxoniam et
omnem orbem Arctoum dispergerentur et lingua Asia-
norum facta esset propria et communis omnibus has
terras incolentibus. Codex vero Regius et Ste-
 phanius non modo ista addunt, quae Verelius pro-
 duxit, sed etiam alia. *Noruegis, Suecis, Danis,*
Anglis. Quod confirmant litteris mandata priscorum
Asiaticorum nomina propria, quae vna cum hac lingua
Asiae, in septemtrionalia haec regna, Noruegiam, Sue-
ciam, Daniam et Saxoniam transtulerunt, occurrunt
etiam in Anglia locorum et urbium vetusta nomina,
quae alia lingua, quam ibi iam viget, videntur in-
data. Totum locum, at iterum in medio omissis
 quibusdam verbis, Ioannes Peringskiöldus produ-
 xit, (1) ut ostenderet, mox ab Odini profectioe,
 fermo-

(1) Ad Theodorici vitam p. 353. Idem ex alio MS. veteri p. 354.
 haec adfert: "Omnes historiae et relationes, quae lingua Noruegica conscri-
 ptae sunt, atque veritatem comitem habent, a Turcarum et Asianorum in
 Septemtrionem migratione ibidemque habitatione initium sumunt: quapropter
 vere

sermonem illum, per uniuersam Germaniam, Galliam et Britanniam mox propagatum fuisse, a qua opinione Verelius abhorruit. Quid autem in ea est, quod aliquis probet? Si Odinus toto cum populo suo, Pompeii, ut nobis concedunt omnes, aetate, in septentrionem concessisset, non potuissent tamen Germani Asarum sermonem tam cito cognoscere, ut eodem iam sub Iulio Caesare et Augusto vterentur omnes. Locutos autem inuenio eam linguam, quae nunc fere est. Non adeo confestim magnis in populis veteres linguae intereunt, nouae recipiuntur: non tantum alicuius tyranni imperium valuit, quae natura sua fieri non possunt, ea ut impetraret. Redeo igitur ad Verelium; qui *Asamal* dialectum diuersam esse concedit, eandem tamen linguam esse contendit: *nam inquit, utriusque mater Scythica fuit.* In eo petit sibi concedi, quod maxime controuersum est. Non video, quemquam Scythicae linguae rationes tam congruentes Scandinauicis et Teutonicis reperisse, ut Lithuanicae Mathaeus Praetorius in Orbe Gothico demonstrauit esse. *Lapides* Praetorio minatus est Peringskiöldus, forte mihi alius minabitur. Enimvero his armis non opus est, non defensoribus illis. At iocari video Peringskiöldum atque addere, *litteratos.* Ne illis quidem ob-

“ vere dicendum est, eam linguam, quam Noruegicam vocamus, ipso secum
 “ huc in aquilonem transduxisse, quae lingua postea Saxoniae, Daniae, Sue-
 “ ci e, Noruegiae et alicui parti Angliae communis facta est. Huius populi
 “ princeps erat Odinus Thori filius.

obruetur Praetorius. Sed Scythiam Verelius non dicit eam, quae sola fuit Scythia, vt ex Herodoto patefecimus, verum Ephorianam illam, reuera autem, nisi antiquissimo cuique suae gentis auctori refragetur, Turciam. Dicat mihi nunc quisquam, quemadmodum Turcica lingua mater et Germanicarum et Scandinauicarum esse potuerit: aut quemadmodum sola dialecto discrepet.

Qui *Teucriam* ex *Tyrkland* excuderunt, iidem hanc orientis regionem a Snorrone designatam ex oculis relinquunt, aliam sine duce quaerunt. Peringskiöldus ad Theodorici regis vitam (2) hunc ex Heruarae historia locum produxit: *thessu samtüda komm austan Asiae menn oc Tirkia oc bigdu Nordurlaund*, atque ita latine conuertit: *circa idem hoc tempus ex oriente aduenerunt Asiani atque Turcae*, (i. e. *Teucris*, *Troiani*) *qui boreales has oras excolere coeperunt*. Verelius, cum Heruaram ederet, nihil de Teucris et Troianis suspicatus est. (3) Mutata scena est per Stiernhielmi coniecturam. Huic autem coniecturae patrocinebatur vetus opinio, Othinum a Troia et ex Phrygia fuisse profectum. Quantum Troia distat ab oriente Tanaïs, in qua regione iidem Asgardum situm fuisse prodiderunt?

qua opera si credam illis,

Vna opera alligem canem fugitiuam agninis lactibus.

Tom. V.

Yy

Fue-

(2) P. 354. (3) P. 6. 37. 38.

Fuerunt igitur eruditi viri, ut aetas quaeque tulit eruditos, qui Homericis delectati Musis hoc totum excuderunt. Qui vero? nempe vel solum nomen *Fryggae*, quae Othini fuit coniux, admonere eos Phrygiae potuit; saepe enim multae atque longae una ex voce cufae sunt fabulae. Et cum *Asgard* adeo celebraretur, pro ingenio istius seculi, nullam aliam urbem, quam Troiam recordabantur. Vetus tamen ista est opinio. Non ego heic ad prologum Eddae prouocabo, in quam Olaus Verelius vehementer inuectus est. (4) *Maximam*, inquit, *prologi istius partem, utpote adulterinam et a sciolo quopiam ex mythologia Graeca et Latina confutam non agnoscit genuina Edda Snorronis*. Attamen etiam genuina in Edda, mythologia septima haec inuenio: *in medio orbe Borsonii condiderunt Asgardum dictam: haec Troia erat.* (*Asgardur, thad er Troia*). Quod Olaus Magnus *medio in orbe reddidit*, in Snorrone est, *i Midum heime*. Quid si isthuc potius tamquam proprium nomen edidit Snorro? quid si *Media* ea sit? Nam tali in eruditione, qualis tum obtinuit, mirum non est, si quis in Noruegia atque Islandia crediderit, Turciam et Mediam eandem esse regionem, eandem deinde Teucricam et Phrygiam, ibi Troiam fuisse celebrem urbem. Et potuit ab illis totum hoc ad Tanaim reuocari, quando Geographus Rauennas, apertissimus seculo suo auctor, sic ait: (5) *iuxta regionem Maeotida est patria maxima, quae dicitur Dardania*.

(4) In notis ad Heruaur Saga c. 2. adde p. 5. (5) p. 141. ed. Porch.

dania. Est haec Dandaria, de qua supra diximus: at Rauennas ille profecto *Dardanos* sibi visus est deprehendisse: quid enim aliud sibi velit isthuc *patria maxima?*

Venit mihi hoc loco in mentem Platonis in secundo de Republica dictum: primum quidem et vel maxime reprehensionem habere, si quis mentiatur, praecipue tamen, εὖν τις μὴ καλῶς ψεύεται. Quid autem potest esse imperite mentiri, si haec, quae produximus, aliquid ingenii habent? Non est ita deplorata historia Romana, vt Q. Pompeii temporibus, aliquod nomen fuisse vel Dardanum vel Teucrium putemus: non illa tunc Troia fuit, vt Asgardigloria, vel Othini regia, eius vastitati conueniat. Neque Turcia illa Orientalis Romanorum vquam arma audiuisse videtur. Getae vero ad Istrum senserunt etiam iis temporibus, quibus fere Pompeius fuit, cum, vt ex Appiani Alexandrini Illyricis constat, bella in Illyrico Romani gefferunt. Snorro Sturlaeus, (6) de aetate Othini sic testatum reliquit: *per id tempus, Romanorum imperatores arma sua, longe lateque per orbem circumferentes, cunctas nationes sub iugum misere: quo fiebat, vt possessiones suas multi domini desererent. Romani imperatores, Snorrioni, Rumveria Höstingiar, vocabulo aptissimo ad rem et amplissimi sensus, vt quemcunque magistratum Romanum contineat.* Prologus Eddae diserte Pompeium

ium nominat, quod item ab eruditione Romana
 petitum est. Neque aspernantur hanc aetatem
 doctissimi viri, neque nos sane refragamur. Nam
 postquam ex multis difficultatibus, quae Othinum
 circumfident, eluctati sumus, nihil inuenimus, in
 quo acquiescamus, nisi Geticas gentes et hoc fere
 tempus, cum tantae Getarum vires, vt supra di-
 ximus, in Scythicos populos incubuerunt. Inpri-
 mis autem Othinus Neuros forte et Gelonos se-
 migraecos ex sedibus suis excitasse et cum Getis
 suis septemtrionem occidentemque versus duxisse
 videtur, fortassis etiam Scythis multis signa eius
 frequentibus. Nam quod ex Herodoto constat,
 Budini, Neuroi, Gelonique in Scythico nomine et
 corpore olim continebantur, cum origine Scythica
 non essent, lingua quoque vterentur alia, quam
 Scythica. Itaque in incorrupta fama apud Snor-
 ronem, Vani illi et Voeni, quibuscum foedera
 consociauit Othinus, diuersi sunt ab incolis Gar-
 darikiae, quae regio tum vtique a Scythis tene-
 batur. Reclamamus nunc ex Herodoto, qui mo-
 res Neurosum maxime, quae studia praestigiarum
 illo in populo fuerint, eaque conferamus cum
 Voenis Snorronis, (7) aut cum his Fennis, qui
 nunc sunt. Ne *λυκανθρώπους* quidem Neurosum
 obliuioni traditos reperiemus. Quare hi mihi cum
 Budinis et Gelonis Voenorum populus fuisse vi-
 dentur, siue Fennorum. Fennos autem paullo
 post hanc aetatem, Romanis referentibus et cum
 pri-

(7) T I. p. 3. *9.

primis Cornelio Tacito, ad Vistulam totaque in Polonia vagantes reperimus, neque alii nunc mihi videntur Aestii fuisse in Prussia et Curonia, *orientales* dicti Germanis Balthici maris accolis, commo-
 modo ad situm vocabulo. Cum Getis autem Othinus videtur reliquam migrationem confecisse. Est deinde in Othini nomine aliquid, quod, cum Budinos praestigiatores cogito, non puto penitus esse dissimulandum. Ab Adamo Bremensi et Varnefrido et in Genealogia veteri, quam Schefferus in Vpsalia produxit, Othinus vocatur *Wodan*. Ita passim scriptoribus, Germanicis praesertim, *Vodan*, *Voden* et *Vodin*. Eggehardus Vragiensis ad A. C. 943. praedium Lutarii Comitis *Wodeneswego* commemorat, tamquam *Wodeni viam* dicas, iuxta *Suntersewo*, oppidum. Si *Wodin* pronuncies, tum maxime isthuc *Budivos* seu *Vudinos* (vt veteres Graeci dicebant) auditur, nomen populi Budini. Fuere alii Budini trans Tanaim in Asia ad Caucasum, qui cum fere notiores sint in iis scriptoribus, quorum secundum Herodotum monumenta exstant, facile fallere potuerunt eruditos Noruagos et Islandos, illum praesertim Polyhistorem, vt cum de Budinis fama exstaret, non de his ad Borysthenem, sed de aliis ad Tanaim et Caucasum cogitarint. Ceterum Getas, quorum ducem Othinum fuisse autumo, etiam alia tenuis fama indicat, cum de Thracibus admiscetur, vt dicam postea. Praeterea hoc velim, vt quis in Strabone animaduertat, quanta Getici nominis ante eum potest-

tia fuerit, quam exiles autem postea vires exstiterint: (8) αὐξηθέντες δ' ὄν ἐπιπλείσον οἱ τε Γέται, οἱ τε Δάκοι, ὥστε εἰκοσι μυριάδων ἐκπέμπαν στρατίαν, νῦν ὅσον εἰς τέτταρας μυριάδας συνεσαλμένοι τυγχάνουσι, καὶ ἐγγύς μὲν ἤκησι τῷ ὑπακῆσαν τοῖς Ῥωμαίοις. *Cum autem Getae et Davi vehementer aucti essent, ut exercitum ad ducenta millia educerent, nunc ad quadraginta fere millia reducti sunt, et prope abst, ut Romanis se subiiciant. Quamobrem non est absurdum statuere, maximam Getarum partem cum Othino enigrasse. Denique ut Snorro indicat, habitum praestigiis honorem fuisse in Othini populo, tamen illis in rebus superiores et quasi magistros exstitisse Voenos, sic Strabo (9) apud Getas, ἄνδρα γόητα, qui ex Aegypto diuinationes repetierat suas, hoc est, a populo alio, quam Getico, commemorat, cuius artibus Βουρεβίστας princeps Getarum vsus, rempublicam eam formauerit. Et ut Othino istae praestigiae diuinitatis opinionem conciliarunt, ita Geticus populus ad honorem illum praestigiis deferendum proclivis in hoc vel Deceneo vel Ceneo fuit Strabo: Προσημασίας ἐκμεμαθηκώς τινος, δι' ὧν ὑπεκρινάτο τὰ θεῖα, δι' ὀλίγου καθίστατο θεός. *Diuinationes quasdam edoctus, per quas deorum responsa dabat, parum absuit quin fieret deus. Sed alio in loco: (1) ὁ παρὰ τοῖς Γέταις θεός, τὸ μὲν παλαιὸν Ζαμόλξις Πυθαγοραῖός τις, κατ' ἡμᾶς δὲ, ὁ τῷ Βουρεβίστα θεσπιζὼν Δεκόνειος. Deus apud Getas, olim quidem Zamolxes**

(8) p. 211. (9) p. 210. (10) p. 210. (11) 524.

molxes ille Pythagoraeus, nostra vero memoria Decaeneus, qui Byrebistae vaticinatur. Aetas hominis nos admonet, hunc Decaeneum fortassis ipsum illum Othinum fuisse, qui Voereuista rege occiso, populo autem Getico diffidiis distracto, migrationem eam susceperit.

Exposui sententiam, quae de aetate Othini communior in septemtrione fuit, inque ea, quae vana essent, annisus sum expurgare, quae similia vero, confirmare. Alia praeter hanc in prologo Eddae proposita est. Ostendi iam supra, quod Verelii de prologo isto iudicium fuerit. Neque eo minus illustris Stiernhielmus succensuit (2) his prologi, ἰπαλεκληρύοσι, γρυπαέλοις, τραγελάφοις, Ἄ ἐν τοῖσι παραπελάσμασι τοῖς Μηδικοῖς γράφοσι.

Tamen multi fuerunt, qui pleraque, vti veterem famam, reciperent. Itaque operae pretium est, vt arcana huius adyti patefaciamus. Apparebit enim, quibus *fornum bokum, libris antiquis*, vt Heruarae auctor loquitur, vfi fuerint septemtrionales, quantumque cauendum sit, ne eruditula commenta amplexemur, pro vetusta Scandinauicarum gentium fama. Nam ille prologi auctor Othinum Pompeii aetate fuisse scribit, eundem vero vicessimum a Priamo Troiano recenset. Nimirum ex duabus sententiis hic corrector fecit vnā. Si cuique patrum eius annos triginta dederis, erit
sum-

(2) Vide notas Verelianas ad *Heruarae sagæ* p. 5. seq.

summa in Othino collecta sexcentorum annorum. Et, si Troia capta sit A. P. I. 3530. vt optimus quisque Chronologorum censet, illa summa adiecta, Othinus A. P. I. 4130. annorum fuerit triginta: hoc autem ab eo Othino, de quo diximus, interuallum est annorum amplius quingentorum. Biornus Ionaë Skardsæensis, *maximus inter Islandos antiquarius*, vt eum Stephanus Olai ad Vaticanium Volæ appellat, in commentariis ad Voluspam, ex Saemundi Oddensis annalibus Odinum Priscum refert ad annum a Troia capta 667 hoc est, ad A. P. I. 4197. Eum et producit et reprehendit Thormodus Torfæus doctissimus aequè Islandus, tamquam alicuius Islandi commenta pro Saemundi rationibus sequentem: ipse autem ita sentit, vt in calculo annorum, annis in singulos distribuendis XXXV. ad A. P. I. 4230. excedat. (3) *Si, inquit, coniecturis locus esset, suspicari liceret, cum Thraces Dario Hystaspi circa hæc tempora se dediderunt, regem eorum ab Thore Memnonis filio oriundum metu seruitutis in Scandinauiam concessisse.* Enimvero hic annus Torfai iam in Xerxem regem congruit, non in Darium. Genealogiam regis Thracici a Thore Memnonis filio non huius facimus, neque cetera moramur. Nam mythologus aliquis Noruagus hic videtur in Herodoto Budinorum migrationem in alteram Borysthenis ripam respexisse, quam ad A. P. I. 4168.

con-

(3) In Serie regum Daniae p. 120. In Historia Noruegica Parte I. p. 138.

contigisse, in Chronologia Scythica diximus: a quo anno Biorni calculus propius abest, quam noster. Non, quod iam tum Budinus aliquis, aut ille Othinus Priscus fuerit, aut quod emigratum sit in septemtrionem, sed quod in nomine Budinorum offendentes mythologi, porta eburnea insomnium vigilantes admiserint. Et sunt in Herodoto alia, quae aucupati videntur fuisse. Credo ego, cum de Arimaspiis legissent, ex eo talem sibi suum Othinum finxisse. Saxo Grammaticus: (4)

vulgo dicitur Othin

Armipotens, vno semper contentus oculo.

Edda Snorronis, mythologia decima quarta fabulatur, Othinum, cum e fonte Mimi sapientiam bibere vellet, Mimero fontis domino oculum oppignorasse, vnde in vaticinio Volae: (5)

Omnino noui Odine, vbi oculum abdidisti,

In recenti illo fonte Mimeri.

Saxo Grammaticus iterum ait: (6) *Odinum orbem oculo, hispido amiculo circumactum, bellorum usum caluissse.* Totidem verbis ille Aristeas Proconnesius de Arimaspiis:

Ὀφθαλμὸν δ' ἐν ἑκάστος ἔχει χαρίεντι μελώπῳ,

Χάλισσι λάσιοι, πάντων σιβαρωῶν ἀνδρῶν.

Oculum vnum habent in fronte,

Hirsuti capillos, omnium fortissimi hominum.

Deinde quae mythologi habent de *Sif* muliere, (quam propter vnus congruentiam syllabae, pro

Tom. V.

Zz

reli-

reliqua facilitate sua *Sibylam* interpretantur) ea sunt ex Herodoti illo loco surrepta, vbi de Hercule et virgine semidracone. Sed quid ceteris de Tyra fabulis atque isti genealogiae Thracicae in prologo Eddae faciemus? Admiscet Mythologus *nigri Memnonius arma*, tamquam ille Troam Priami filiam duxerit atque ex ea genuerit Tyren. Hoc est eiusmodi, vt illud alterum, Priamum fuisse Odinum et a Frigga coniuge eius Phrygiam regionem appellationem habuisse. Multa quidem in Aurorae filio Memnone Graeculi post Homerum sibi permisere, omnes tamen eum Aethiopibus et Indis praeficiunt, filiam autem Priami elocare eidem ausus est nemo. Constantinus Manasses, (7) vbi Παλάνιν Indum Priamo subsidia misisse per Memnona canit, de exercitu eius ita fatus est:

Οἱ δὲ στραῖος ἦσαν Ἰνδοὶ, πάντες μελανοχρῶτες.
Adeo, in quibus lusit Homerus, in iis posteritas feriam confectata historiam, noua quotidie excudit, quasi subleuatura poetae fidem. Qui autem poterant auctori prologi, Priami ista γενεαλογή-μενα in mentem venire? Potest fieri, vt aliquid ex veteri fama de Thracibus Getarum populo cognatis vicinisque percrebuerit. In Fastis Siculis ex Semironio Babylonio refertur, (8) quod post Ninum in Assyriis regnauerit Θέρξας ὀνόματι, ὄντινα μετωνόμασεν ὁ τότε παλῆρ Ζάμης τῆς Ρέας ἀδελφός, Ἀρεα, εἰς ὄνομα τῆ παλάνητος ἀσέρος.
Thur-

(7) p. 23 ed. Paris. (8) p. 88. ed. Raderi.

Thurras, cui ipsius *Thurrae* pater, *Rheae* frater, nomen *Martis* imposuit, a planeta. Hunc deinde *Thurram* ait, expeditione suscepta versus boream, *Caucasum* quendam ex stirpe *Iapeti* bello aggressum, denique in *Thracia* obiisse. Est sane illa tenuis memoria *Tyrae* *Thracum* parentis, de quo *Samuel Bochartus* in *Phalego*, quantum fatis est, egit. Hic est *Thor* in mythologiis septemtrionalibus, a quo videtur *Tyr* in *Edda Snorronis* (9) distingui, at in prologo confunduntur nomina. *Tyr* in septentrionalibus linguis *magnum quemque virum* significat, et in compositis augendi vim habet, vt *Georgius Hicelius* animaduertit. (10) Credo eandem vim vocis apud *Sarmatas* obtinuisse. Nam *Lucianus* in *Toxari* testatur, si quis praelio superatus *ζῆρον* exclamarit, eius vitae *Sarmatas* percipisse, veluti ἐπὶ λύτρῃ ἤκοντος, hoc est, veluti qui diceret, vt ille in *Rhapsodia Dolon*:

Ζωγρεῖτ', ἀλλὰρ ἐγὼν ἐμὲ λύσομαι.

Hesychius: τυρωθένια, τὸν παραχθένια, κινηθένια. Sed utcumque inter *Thracas* vicinosque *Getas* et *Scythas* *Sarmatasque* celebre hoc *Tyrae* nomen fuerit, tamen ipso in prologo *Eddae* nihil aliud, quam hoc nomen arreptum aliunde sentio. *Thraces* vero, quos genealogiae *Priami* immisceri videmus, non sunt *Europaei*, sed *Asiatici*. Acceperat igitur mythologus, *Thracas* cum *Rhaeso* suo *Troia-*

Zz 2

nis

(9) Conf. in *Edda* mythol. 19. et 23. (10) In *Theſauro* linguarum septemtrionalium T. I. in *Grammatica* Moeso-Gothica p. 102. It. p. 18. et *Rudolphus* *Jonas* in *Lexico* Islandico voce *Tyr*. *Eddae* mythologia 23.

nis rebus ab Homero adspergi. Hi sunt illi Thracas, quos Herodotus (1) cum Phrygia in Asia posuit. Eustathius ad Dionysium Periegeten (2) de his Thracibus, καλέμενοι δέ ποτε Βρίγες, εἶτα μεταβάλλες εἰς Ἀσίαν μετέπεσον εἰς τὸ Φρύγων ὄνομα, dicti Briges atque cum in Asiam traiecissent, mutato nomine Phryges. Ista migratio, si qua fuit, tam vetusta est, quam Dardanus. Nam is, ut Eustathius alio loco, (3) in cataclysmo ex Samothracia nauigasse dicitur in Asiam, εἰς τὰς Τρωικὰς τόπους. Macedones item referebant Herodoto, (4) Briges finitimos Macedoniae agros tenuisse, transgressos in Asiam dictos fuisse Phryges. Hos Thracas Xenophon quoque ab Cyri expeditione rediens reperit. Brigum autem nomen Hesychius nobis explicat ex Iuba: Βρίγα λέγεσθαι ἐλεύθερον, Lydia lingua: quod nostrum videtur esse *Frey, fry, liber, sui iuris*, est enim hoc simile iis vocibus quas Plato ex Phrygicis in Cratylo recensuit, quas nos etiam hodie in linguis nostris agnoscimus. Mythologus autem ista quidem ignoravit: quae in mentem temere venerunt, ea sic posuit, ut historia eius Horatianae tabula esset

*Per similes, cuius, velut aegri somnia, vanae
Finguntur species, ut nec pes, nec caput vni
Reddatur formae.*

Sed sunt ex Graecis, qui in Homero Thracas Europaeos interpretentur: quare minora scholia (5)

non

(1) l. III. 90. (2) ad v. 323. (3) ad v. 524. (4) l. VII. 73.
(5) II, K. v. 435.

non patiuntur Rhesum Eiones esse filium, vt Homerus cecinerat, sed Strymonis edunt fuisse: nam is fluuius in Thracia Europaea erat. Deinde alii Thracas ab Ilio duxerunt in Europam, eo maxime argumento, quod hic quoque reperiunt Dardanios. Appianus in Illyricis Graecis Hoeschelianis: (6) ὑλώδης δ' ἔστιν ἡ Παιόνων ἢ ἐπιμήκης ἐξ Ἰαπόδων ἐπὶ Δαρδάνης, *uliginosa est Paeonum regio et a Iapodibus ad Dardanios protenta.* Paeones autem ipsi de Iliacis originibus gloriabantur. (7) Itaque fieri potest, vt in vetusta Othini fama de Thracibus Europaeis aliqua memoria conseruata fuerit, quae deinde ex Homericis fabulis aliisque Graeculorum figmentis sit foedata. Nam ipsum Getarum nomen ad extremum in Othini fabula reperimus, vbi de morte eius Snorro: (8) *morti vicinus perhibuit, Godheim sibi petendum esse, vt amicos suos ibi exhilarare possit. Godheim Peringskiöldus deorum sedes reddit, inuito vtique Snorrone, qui paullo ante dixerat: hanc Svithiod (Sueciam) vocarunt Mannbeima, sed alteram Miklo Svithiod (magnam Suetiam, siue Scythiam) appellarunt Godbeima: de hoc Godheim multa exstant memoriae prodita.*

Postquam Othinum ab Istro et Borysthene deduximus, non opus est, vt totum illius iter in Saxoniam, Daniam, Suediam ex Snorrone per-

Zz 3

sequa-

(6) p. 11. Imperite vetus interpres, vt solet: "Paeones natio ingens cir-
 ■ Istrum per longum incolens, ab Iapodum populis supra Dardanos protendi."
 tur (7) Herodotus l. V. c. 13. (8) p. 11."

sequamur. Nam satis nunc est, quod memoriam conuersionum iis in regionibus, quas tractandas suscepi, recolimus. Ceterum non displicet mihi Olai Verelii sententia, cum de Othino sic ait: (9) *Fuit hic Oainus per orbem arctoum longe celeberrimus, non tam illustribus facinoribus, quam praestigiis et artibus magicis.*

(9) In indice ad *Herrauds Saga* voce *Sonar Odins*.

Coniectura de nomine Balthici maris.

Matthaeus Praetorius in orbe Gothico Balthicum mare ab *albis litoribus* dictum censuit. Pruteni enim litorales, quoad linguae Prussicae, quae nunc plane est exstincta, vsus obtinuit, *Baltikkei* appellati sunt, id est, *albae terrae incolae*, a *baltikkas*, quod *album* significabat. Est autem hoc vocabulum etiam Litthuanicum. *Baltas*, *baltinu*, *dealbare*, *balkstu*, *subcandidum esse*, *baltis* et *balties*, *cerussa*, *baltis*, *baltimas*, *albugo*, *baltulis* et *baltinelis*, *candidum*. Vendice *bidla*, Esthonicè, *walge*, Fennicè, *walckia*, Russicè, *bielo*. Quemadmodum litorales Prussi lingua sua *Baltikkei* dicti fuerunt, ita inuenio, Ordinis Teutonici Equites litus isthuc, in quod succina eiiciuntur, *Wittland*, id est, *albam terram* appellasse. Vidi duo diplomata Hannonis Sangerufani, ex quibus hoc didici. Vnum hic apponam:

Frater Anno Hospitalis S. Mariae Theut. Hierosolym. Magister vniuersis praesens scriptum visuris salutem in Domino sempiternam. Recognoscimus et tenore praesentium protestamur, quod, cum nos et Fratres nostri, quandam munitionem, ut securus pateat introitus et exitus nauibus ad terras Prussiae applicantibus, in loco, qui *Wittlandes-ort* vulgariter appellatur, construere intendimus: qui siquidem locus, pro tertia parte Venerabilem Dominum Episcopum Sambiensem et pro duabus partibus nos contigit, idem Episcopus, ut dicta munitio
a nobis

a nobis ac nostris Fratribus in Christianitatis subsidium construenda felicem ac prosperum assequeretur effectum, eam dicti loci partem, qui ipsum in longitudinem et latitudinem usque ad nemus adiacens contingit, nobis Fratribus ac Ordini nostro cum utilitate, iurisdictione et iure in veram proprietatem contulit ac donavit perpetuo libere possidendam. Nos vero de Fratrum nostrorum consilio dicti Episcopi grato occurrentes assensui, tres mansos et praeterea tantum terrae spatium in longitudine et latitudine, quantum nobis, Fratribus nostris ac Ordini, dicto loco, scilicet Witteslandes-ort, ut praemissum est, contulit ac donavit, praefato Episcopo suisque successoribus cum omni utilitate, iurisdictione et iure in veram proprietatem pro restauro cōfirmamus et donamus in eo loco, quo dictus Episcopus Cathedralē suam sedem decreuit collocare. Praeterea hoc adicimus (adiicimus) supra dictis, quod, si in dicto loco, videlicet Wittlandes-ort contigerit inueniri lapides, qui Burnstein (succinum) vulgariter appellantur, dictorum lapidum duae partes nobis ac Fratribus nostris et pars tertia cedit Episcopo memorato. Et si necesse fuerit expensas haberi in collectione seu conquisitione lapidum praedictorum, nos et Fratres nostri ipsas pro duabus partibus faciemus et saepedictus Episcopus pro tertia parte sua, tertiam partem faciet et per sacrum. In huius itaque rei testimonium, sigillum nostrum est appensum. Datum anno Domini 1264. mense Iulii.

NVMVS AEGIENSIS

ILLVSTRATVS.

T. S. B.

Tabula XII.
Fig. a.

C Aput barbatum et laureatum AIGEΩ: - -
= Signum decussatum in speciem Graecae litterae X, cuius ima crura A describunt, appositis litteris, in summo API, in medio TOΔ, in imo MOC, quas laurea complectitur. Numus in museo Imperatoriae Academiae Petropolitanae.

I. Exstant numi AIGIEΩN. AIGEIQN. AIGAIΩN. AIGEAIQN. AIGAEΩN nominibus inscripti, in quibus doctissimi antiquarii haesitarunt, cui vnumquemque numum vrbi, cui populo vnumquodque εθνικόν attribuerent. Hic numus Aegiesium in Achaia est. Id me optimo iure censere, αὐτὸ τῆτο, τὸ εθνικόν demonstrat. Stephanus Byzantius enim, postquam ex Eudoxo Achaiae urbem Aegium esse docuit, ὁ πολίτης, inquit, Αιγίως, et auctoritatem oraculi adfert, quod quia Eustathius (1) altero versu plenius protulit, ex hoc malumus citare quam e Stephano:

Υμεῖς δ' Αιγίως ἔτε τρίτοι, ἔτε τέταρτοι,
Οὐδὲ δωδέκατοι, ἔτ' ἐν λόγῳ, ἔτ' ἐν ἀριθμῷ.

Neque aliter Polybius, Pausanias, Strabo. *Aegieses* T. Liuius dicuntur. Et esse hunc numum Achai-
Tom. V. A a a cum,

(1) Il B. p. 292, ed. Rom.

cum, praeterea signum decussatum confirmat, quod nihil aliud significat quam Achaïam. Bernhardus Montefalco quidem (2) isthuc signum AIGI EIΩN monogramma esse censet, nihil vero optimi sensus iudicio, atque doctrinae detractum velim, si hic eum sequi non ausim. Nam Aegiensium nomen Graece non effertur Αιγιάων, neque magis quidquam in oculos incurrit, quam signum isthuc ex A et X esse conflatum. Videtur autem Montefalco in circulum legisse, ut, si ab A pergas sinistrorsum, putes habere te in superiori cruce I. cui proximum sit Γ, tum redire ordinem ad A: et in superiori I desinere, ut sint AIGAI. Sed Aegae in Cilicia, Macedonia, in peninsula Thracæstorum, Myrrhina, Aeolide, Lydia, Locride, Aetolia, Euboea (tam multae enim eodem nomine fuere Aegae) gentile omnes habuere teste Stephano, Αιγιάων aut Αιγέων. Aegae vero in Achaïa, tum quidem, cum hic numus est signatus, fuere nullae, agro Aegaeo multis antea temporibus attributo Aegiensibus. (3) Exstant denique numi apud Golzium et Begerum his cum monogrammatibus:

in quibus nemo ne haesitauerit quidem, AXAIΩNI esse legendum. Est etiam numus in gaza Regis Prussiae

(2) In Palaeogr. Graeca p. 143. (3) Strabo ed. H. Petri p. 441.

Prussiae, in quo Aegienfes signum illud Achaiae tetragono incluserunt. Eo in signo A rudius ad Phoeniciae formam litterae factum, vt hic in numo ipso cernitis, quem primus protulit Laurentius Begerus, (4) et ex Begero Bernardus Montefalco in Antiquitatibus explicatis. (5) Alios duos numos Nicolaus Haymus (6) edidit. Vterque habet caput Iouis: vnus praeterea circa Achaiae monosyllabum, Corinthi nomen, alter obscuriores litteras, in quibus Tyri monogramma mihi suspicionem mouit, vt postea quoque dicam, de Tyro oppido in Argolica regione, haud longe ab Inacho fluuio. Scilicet ex quo tempore vrbes in Peloponneso pleraeque ad vnum corpus et concilium Achaicum aggregatae fuerunt, ius monetae cudendae singularum vrbiū fuit: numi autem erant communes Achaeorum omnium, quacunque in vrbe essent signati. Inde commune populi Achaici monogramma impressum fuit, nonnumquam apposito nomine vrbis eius, in qua cusi sunt, haud raro etiam praetermissio. Sic Polybius tradit, Achaeos amicitiam sociali foedere iniuisse, ἢ νόμοις χρηῖσθαι τοῖς ἀγλοῖς ἢ σαθροῖς ἢ μέτροις ἢ νομισμασιν, vt legibus, ponderibus, mensuris iisdem, pecunia denique communi vterentur omnes. Hoc enim aliis in vrbus Graeciae minime obtinebat, vt vna in vrbe signati numi, alterius populi in vrbus reciperentur. Testem habeo Galenum in protre-

Fig. 2.

Fig. 3. 4.

A a a 2

prico,

(4) T. I. p. 447. (5) T. III. parte I. tab. 89. (6) In thesauro Britannico T. II. p. 96.

ptico, (7) τὰ καλὰ πόντιον νομισμάτα παρὰ τοῖς θε-
 μένοις ἰχθύοις, παρ' ἄλλοις ἐσὶ κίβδηλα, *numi sin-*
gulis in ciuitatibus cusi, apud eos utique pretium ha-
bent, a quibus signati sunt, at aliis in ciuitatibus
non recipiuntur. Quam ob causam Aristoteles in
 Nicomachiis (8) νόμισμα παρὰ τὸν νόμον dictum
 asserit, quod οἷον ὑπάλλαγμα τῆς χρείας γέγονε
 καλὰ συνθήκην, ἢ ὅτι ἐ Φύσει, ἀλλὰ νόμῳ ἐστὶ ἢ
 ἐφ' ἡμῖν, μεταβάλλειν ἢ ποιῆσαι ἄχρηστον. Hoc enim
 non tantum eo pertinet, quod in Oeconomicis
 tradit, (9) Hippiam tyrannum Athenis omnem nu-
 mum ἀδόκιμον esse iussisse, atque eodem ex ar-
 gento. cudendos nouo signo elocasse alios: verum
 etiam ad singularum leges urbium respexit, per
 quas suum cuique numo pretium fuit.

In aduersā numi parte caput Iouis est lau-
 reatum, siue is sit ZEYΣ ΣΩΤΗΡ, cuius simu-
 lacrum Aegii in foro dedicatum fuit, (10) siue
 ZEYΣ OMAFYPIOS, cuius delubrum in mariti-
 ma urbis regione exstitit. (1) Homagyrius, (tam)
 quam *congregatorem populi in unum concilium* dicas-
 in eius conuentus honorem positus videtur, qui
 a Panachaeis Aegii est habitus. Quamquam Pau-
 sanias id nomen eo interpretatur, quod Agame-
 mnon hoc loco principes Graeciae de summa bellii
 Troiani in consilium adhibuerit, tamen id veluti
 vanum et futile nemo morabitur. Fuit et Iupi-
 ter

(7) p. 7. ed. Parif. (8) l. V. c. 8. (9) l. I. c. I. (10) Pausanias.
 p. 583. (1) ib. p. 584.

ter Infans patria Aegiensium religione cultus, cuius simulacrum aeneum ab Agelada Argiuo fabricatum, quotquot annis sacerdos lectus in aedibus suis adferuabat. Huic Ioui priscis temporibus sacerdos venustate inter ceteros eximia legebatur puer, eoque pubescente alius. (2) Tenuit religio Iouis Aegiensis ea maxime causa, quod ad urbem hanc Iouem a capra nutritum ferebant, (3) unde et Aenarium, haud procul ab Aegio, lucus Achaeorum comitiis frequentatus, Ioui sacer erat, teste Strabone. Ea causa etiam Iunonis vultum Aegienses signarunt in numo Golziano. In eiusdem numi auersa Lucina est sic, ut signum deae Aegiensis Pausanias descripsit. (4) Damophon Messenius fecerat, os, manus et pedes e marmore Pentelico, reliquum corpus e ligno: a vertice ad calcem tenuis carbasus simulacrum tegebat, ἢ ταῖς χερσὶ, inquit Pausanias, τῆ μὲν ἐς εὐθὺ ἐκτέταλαι, τῆ δὲ ἀνέχει δάδα. Id ἐς εὐθὺ τέταλαι, quemadmodum intelligendum sit, figura in numo declarata. Quem vero Iouem hoc in numo Aegiensi positum dicemus? Nempe Homagyrium potius, quam Sotera. Non enim tantummodo in Aegiensium, verum etiam in aliarum quoque numis urbium, qui Achaici nominis essent et corporis, Iupiter spectatur, ut non peculiariter Aegii cultum Sotera, sed Panachaeorum tutelam Homagyrium signari manifestum sit. Et mos erat, ut praetores Achaei primo comitiorum die omnis

Aaa 3

caus

Tab. XII.
Fig. 6.

(2) Pausanias p. 584. (3) Strabo. p. 441. (4) p. 582.

caussa pronuntiarent Iouem, Apollinem, Herculem. (5) Crotoniatis, Sybaritis et Coloniatis in Magna Graecia, ΖΕΥΣ ΟΜΟΠΙΟΣ cultus est, teste Polybio. (6) In quo paene inclinatus animus, ut e Pausania reponere malim ΟΜΑΓΥΠΙΟΝ. Nam ut Sybaritae ceteraeque urbes hoc nomine dedicarent Iouem, ad cuius delubrum conuentus agerent et commune ciuitatum concilium, Achaeorum imitatione institutum est. Miserunt enim legatos in Achaiam, qui mores legesque Achaeorum addiscerent, secundum quas similem suis in urbibus rem publicam conderent. (7)

Laurentius Begerus in numo Aegiensi (8) vultum Neptuni, non, ut nos, Iouis, explicat. *Haud procul ab Helice, inquit, Neptunus Heliconius colebatur: huic Iones in Panioniis sacra fecerunt: ita verosimile fit, Achaeos pulsos Ionibus, eiusdem religionis numinis fuisse tactos. Fama tenet, Ionas ab Achaeis repetisse simulacrum dei ac formam illius, Achaeos noluisse concedere, qua sine alia, quam quod illud numen ab se solis coli vellent? Patrae urbs in Achaia et ea in urbe Neptunus quoque cultus. In eam sententiam praestantissimus vir iudicauit. Mouit autem eum res perexigua ut ita statueret, quod in auersa numorum quorundam Achaicorum tridens Neptuni visitur. Sed quid auersae illa nota ad caput laureatum? quid Neptuno cum laurea? Deni-*

(5) Lilius l. XXXII. c. 25. (6) p. 176. (7) Polybius l. c. (8) Thesauri Brand. T. I. f. 445.

nique aliis in numis auersa habet fulmen Iouis et clauam Herculis, numquid et illa ad Neptunum iure meritoque referemus? Quod Begerus vrget amplius, ante Helicen euersam, Achaeos aequè, vt antea Ionas, concilium Aegii celebrassè atque adeo sua sacra Neptuno Heliconio fecissè, id nos nihil mouet. Nam cum Aegiensium in loco Ioui sacro conuenere Achaei, non potuere, quin Ioui illius praesidi luci facerent. Ea consuetudo tenebat in Graecia, vt quo in loco conuentus instituerentur populi, illic sacra instaurarentur illi deo deaeue, cuius numini is ipse locus sacer erat: Amphictiones Delphis faciebant Apollini, Panionium Ephesi Dianae. Praeterea Helicae et ad Neptuni Heliconii, conuentum Panachaeorum indictum reperio fuisse nullum, immo ne Aegii quidem fuisse, nisi aliquanto tempore post Helicen euersam. (9) Iones autem ab Achaeis victi, e fuga sese receperunt Helicen: inde etiam e pacis foedere, Ionibus dimissis, Achaei sine populi concilio fuere sub regibus: vbi liberi corporis coeperunt esse, quod Strabo testatur, (10) in Aenarion loco, is Aegiensium in agro erat, conuentum est. Neptuni autem Heliconii adeo nulla Achaeos religio mouit, vt reposcentibus Ionibus illius simulacrum dei formamque templi, Helicensibus auctores essent Achaei, vti redderent. Testis Strabo. (11) Helicensibus nihilo magis ad reddendum permotis, insècuta est et Helices et fani Heliconii

(9) Pausanias p. 538. (10) p. 441. (11) p. 439.

nii clades a terrae motu et fluctibus maris. (2) Achaei hoc in religionem vertentes, Ionibus sua sibi sacra habere iusserunt. Quamvis igitur post istam cladem ager omnis Helicensis Aegiensibus esset attributus, (3) tamen ad fanum Neptuni Heliconii non Achaei, sed Iones sacra fecere, ad Strabonis vsque aetatem. Clades Heliconia, eiusdem testimonio Strabonis, duobus ante Leuctricam pugnam annis contigit. Pugnatum est, Olympiadis CII. anno tertio ineunte: terrae motu igitur concussa est Helice Olympiadis CI. anno quarto. Eum annum Pausanias (4) disertis verbis edidit, ut Eusebium non moremur, qui ad Olympiadem C. refert. Et Aristoteles vero in meteorologicis tradit (*) Achaicum illum terrae marisque motum eodem tempore, quo magnus cometa apparuit, hieme videlicet, *Αριστάρις ἀρχοντος*. Locum corruptum Seldenus iam emendauit, ut esset *Αγείης*. In marmoreo chronico *ΑΡΧΟΝΤΟΣ ΑΘΗΝΗΣΙΝ ΑΣΤΕΟΥ ΚΑΤΕΚΑΗ ΔΕ ΤΟΤΕ ἔξ ἑρανοῦς*, ut suppluit Seldenus, seu potius ut Palmerius: *ἔξ περιουθῆ δοκίς ἐν ἑρανοῦ*. Asteus archon fuit Olymp. CI. 4. Ab eo tempore Aegium praecipua dignitate urbs fuit, ut habet Pausanias eo in loco, (5) quem cum Begerus non accurate inspexisset, Helicae putauit conuentus Achaeorum ante hanc cladem fuisse solitos celebrari, quod Romuli Amasaei quidem sermo indicat, nequaquam vero ipse Pausanias: itaque

(2) Strabo l. c. Pausanias p. 523. (3) Pausanias p. 589. (4) l. c. (*) L. I. c. 6. (5) p. 538.

que mea isthaec est sententia, in aduersa numi nostri ceterorumque Achaicorum Iouem Homagyrum conspici, in auersa praeter monogramma Achaicum, eius symbolum dei existare, cui deo vrbs quaelibet, in qua numus est cusus, peculiari religione deuota fuit. Aegienses autem praeter Iouem publice coluerunt Neptunum et Herculem, teste Pausania: aliae vrbes deos deasue alios. Ita aut tridentem Neptuni signarunt in auersa, aut fulmen Iouis, aut cytharam Apollinis, aut caput Mineruae, aut clauam Herculis. Retineo me, ne, dum vt satisfaciam lectoribus, quaero, per omnes Achaicos numos vagando nimium ab instituto deflectam.

Quas ego vero dicam in auersa existare litteras? Ludouicus Nonnius cum in numis Achaicis Goltii, Myrtilam, Callimachum, Pandiona, Thelamonem, videret, *nomina*, inquit, *forte sunt praetorum et damiurgorum*. (6) **APICTOΔAMOC**, vt ego lego in hoc numo, est nomen magistratus Aegiensis. Nomen in Peloponneso frequens. Aristodemum habemus ex Herculis posteris, a quo duae regiae domus apud Spartanos: Aristodemum alium Spartanorum regis necessarium, tutorem eius liberis datum: Aristodemum tyrannum Megalopoli, quo expulso, concilio Achaeorum adscripti sunt Megalopolitani: Aristodamum, qui cum Callicrate, Agefia et Philippo legatus, ab Achaeis in castra venit

Tom. V. Bbb ad

ad L. Aemilium Paullum, ob victoriam de Perse rege gratulatum. Et quorsum omnes Aristodemus hic annumerem? Quem autem magistratum gessisse Aristodemum? quo tempore signatum hunc numum esse existimem? Indicium aliquod temporis extrema littera facit, quae ut ab Ioanne Harduino et Bernardo Montefalcone annotatum est, sub Caesare Augusto in lunulam mutari coepit, cum antea, ut est in gripho Euripidis, ἑὸς πυχός τις et in aenigmate Agathonis tragoedi, arcui Scythico similis videretur. Cleomedes ἐν Κυκλιῇ Θεωρίᾳ (7) lunam cornutam σιγμοειδέα τῷ χήματι dixit: at is Augustei scriptor seculi est. Ante Hadrianum Imperatorem figura ista τῶν σίγμα vetus in marmoribus et numis adhiberi prorsus desit. Quoad autem Augustus rebus Romanis praefuit, Achaia in prouinciis censita est, in quas rectores a Senatu, non a Caesare sunt missi. Nerone Claudio Druso Caesare, C. Norbano Coss. A. Dionysiano 15. *Achaïam et Macedoniam onera deprecantes leuari in praesens proconsulari imperio tradique Caesari placuit, ut auctor est Tacitus: (3) ex quo tempore prouinciae Moesiae, quae iam antea Caesaris Augusti et Tiberii Caesaris in potestate fuerat, adiecta. Cur graue Achaeis proconsulare imperium fuerit, multis disputat ad hunc locum Ioannes Fredericus*

cus

(7) p. 75. (8) Anal. 1. I. c. 76. 80.

cus Gronouius. Sed mihi numi Achaici omnes libera populi Achaici republica cusi videntur. Aristodamus autem non fuit aliquis praetorum Achaicorum, sed Aegiensis magistratus. Ioannes Harduinus in numis vrbium hunc ipsum numum produxit iis verbis: ΑΙΓΙΕΩΝ *ex parte auersa nomen Archontis* ΑΠΙΣΤΟΔΑΜΟΣ. A. *hoc est, Αρχων, vel Praetor fuit. Apud illustrem Harlaeum et in museo nostro.* Quamquam Harduinus duos numos vidit, tamen vereor, ne A. isthuc tantummodo in monogrammate Achaiae sibi deprehendisse sit visus: nam quod τὸ σιγμα aliter, quam in nostro est, exprimit, hoc vero suspicionem mihi mouet, aliquid humani clarissimo antiquario accidisse. Si in eo non est erratum, tamen archontem incommode praetorem exponit. Nam praetores vt dicerent Romani τὰς σπαθηγὰς Graecorum, consuetudo perpetua obtinuit: apud Achaeos autem σπαθηγῶν quotannis vnum, ἀρχοντῆας vero ciuitatum rectores fuisse complures, infra declarabo ex instituto. Eundem in modum Cimon et Methrodorus Manecadis filius in numis Golzianis Patreenfium archontes fuerunt, Dymaeorum vero Myrtilus, Phliuntiorum Callimachus, in numis item Golzianis. Vt plane intelligatur, quos Dymaeis et Phliuntiis adscribam, cum nihil apparuerit doctissimis ante nos antiquariis, cur numos istos Achaicos his potissimum vrbibus adsignarent, digrediar equidem non inuitus ab Aegio atque in Achaia per ceteras vrbes vagabor.

Tab. XII. 7.
Tab. XIII. 8.

9. 10.

Ita igitur sentio, numos Achaicos, eius urbis, a qua signati fuere, nomen, aut litteris referre, aut quodam monogrammate. Apponam tum litteras, tum monogrammata mea cum interpretatione.

ΦΟΡ Κορινθίων sine dubio. Est enim illa littera, vetus a Phoeniciis acceptum κόππα, diuersum a κάππα, vt vel ex Eustathio iam abunde notum.

Δ Δυμείων.

Α Αργείων.

Μ Μεγαλοπολιῶν, siue Μεσσηνίων. Vbi in mentem venit, quod Eustathius ad Iliadem scriptum reliquit: (9) Lacedaemonios scutis signi in locum inscripsisse Α litteram, λαμβδα, ἐκ τῆς κατάρχοντος σοιχείας χαρακτηρίζοντας, ita vt Messenios τὸ Μ. Adfert autem eam in rem ex Eupoli, ἐξεπλάγην γὰρ, ἰδῶν εἰλβον τὸ λάμβδα, hoc est, *scutum Laconicū militis.*

Κ Κλεωναίων.

Φ Φλισθίων aut Φεγεάτων.

Ν Ναυπλιέων.

ΜΙ Μυκηναίων, compositum monogramma tribus ex litteris, Μ et Υ et Φ veteri.

ΕΑ Φαράων seu Φηραίων, vrbs enim est in Achaia Φάρα. Sic, inquam, vt in numis ΕΑΛΕΙ-

ΩΝ.

(9) f. 293, cd. Rom.

ΩΝ et ΦΑΣΤΙΩΝ, de quibus Ezechiel Spanhemius.

¶ In numis Begerianis, quod nomen vrbs sit, non recordor. Puto virum doctissimum I legisse in numis, in quibus P fuit scriptum. Scitis enim, quam tenui capite isthuc P in numis scribatur, vt videri possit nullum exstare caput et plane ipsum I esse. Tum vero P is numus fuerit, vrbs non ita celebris quidem, at in qua tamen Liuius concilium Achaicum aliquando conuenisse testatur.

¶ Τυπίς oppidi in Argolide.

Iam primus ex Haymo numus, quem supra produxi, a Corinthiis, Naupliensibus et Megalopolitanis, alter ex eodem Haymo a Pharaeis, Mycenaeis, Tyriis est cusus. Vndecimus e gaza Regis Prussiae a Dymaeis et Rhio oppido, duodecimus ab Argiuis Naupliensibus, Pharaeis, tertius et decimus a Dymaeis, Megalopolitanis aut Messeniis, Rhioque vrbe, quartus et decimus a Cleonaeis, Dymaeis, Megalopolitanis, quintus et decimus a Cleonaeis, Argiuis, Megalopolitanis, sextus et decimus a Naupliensibus Phliuntiis siue Pheneatis et Messeniis seu Megalopolitanis. Omnes e numophylacio Prussico. Itaque videtis, cur Myrtilum Dymaeis, Phliuntiis Callimachum archontem dederim. Quintus et decimus in his numis habet praeterea epocham Achaicam ZB adscriptam. Annus Achaicus LXII. est, cum praeturam gessit Eperatus. Haec epocha quae fit, e fastis Achaicis intelligetur.

Tabula XIII.
Fig. 11. 12.
13. 14. 15. 16.



FASTI ACHAICI.

T. S. B.

| A.P.I. | A.V.C. | Coff. | Olymp. | A.A.
chaic | Praet |
|--------|--------|--|-------------------|---------------|-------|
| 4431 | 471 | P. Cornelius Dolabella
Cn. Domitius Calvinus | CXXIV.
1
2 | | |
| 4432 | 472 | C. Fabricius Luscinius
Q. Aemilius Pappus | 3
4 | | |
| 4433 | 473 | L. Aemilius Barbula
Q. Marcius Philippus | | | |
| 4434 | 474 | P. Valerius Laevinus
T. Coruncanus Nepos | CXXV.
4
1 | 1 | |
| 4435 | 475 | P. Sulpicius Saverio
P. Decius Mus | 2
3 | 2 | |
| 4436 | 476 | C. Fabricius Luscinius II.
Q. Aemilius Pappus II. | 3
4 | 3 | |
| 4437 | 477 | P. Cornelius Rufinus II.
C. Iunius Brutus II. | 4
5 | 4 | |
| 4438 | 478 | Q. Fabius Gurges II.
C. Genucius Clepsina | CXXVI.
4
1 | 5 | |
| 4439 | 479 | M. Curius Dentatus III.
L. Cornelius Lentulus | 1
2 | 6 | |
| 4440 | 480 | Ser. Cornelius Merenda
M. Curius Dentatus | 2
3 | 7 | |
| 4441 | 481 | C. Fabricius Luscinius IV.
C. Claudius Canina | 3
4 | 8 | |
| 4442 | 482 | L. Papirius Cursor II.
Sp. Caruilus Maximus II. | CXXVII.
4
1 | 9 | |
| 4443 | 483 | C. Quinctius Gulo Claudus
L. Genucius Clepsina | 1
2 | 10 | |
| 4444 | 484 | C. Genucius Clepsina II.
Cn. Cornelius Blasio | 2
3 | 11 | |
| 4445 | 485 | C. Fabius Maximus Pictor.
Q. Ogulnius Gallus | 3
4 | 12 | |

His XXV. annis omnis Tραχυαλειος seu Scriba et Στρατηγος

Sub verem huius anni Pyrrhus rex in Italiam traiecit. Vide infra Fastos illustratos. c. I. 6.
Dymaci, Patrenses, Tritacenses, Pharaenses Achaicam rempublicam eodem vere condunt. I. 6. 7.

| A.P.I.A.V.C. Cofl. | Olymp. | A.A. Praet. chaic. | |
|--|--------------------|--------------------|---|
| 4446 486 P. Sempronius Sophus
App. Claudius Crassus | CXXVIII.
4
1 | 13 | <i>sen Praetores duo, quotannis lecti, rebus praefuerunt.</i> |
| 4447 487 A. Atilius Regulus
L. Iunius Libo | 2
3 | 14 | |
| 4448 488 T. Iunius Pera
N. Fabius Pictor | 3
4 | 15 | |
| 4449 489 Q. Fabius Maximus Gar-
ges III.
L. Mamilius Vitulus | 4 | 16 | |
| 4450 490 App. Claudius Caudex
M. Fulvius Flaccus | CXXIX.
4
1 | 17 | |
| 4451 491 M. Valerius Maximus
M. Ottacilius Crassus | 2
3 | 18 | |
| 4452 492 L. Postumius Megillus
Q. Mamilius Vitulus | 3
4 | 19 | |
| 4453 493 L. Valerius Flaccus
T. Otacilius Crassus | 4 | 20 | |
| 4454 494 Cn. Cornelius Scipio Afina
C. Duilius Nepos | CXXX.
4
1 | 21 | |
| 4455 495 C. Aquilius Florus
L. Cornelius Scipio | 2
3 | 22 | |
| 4456 496 A. Atilius Calatinus
P. Sulpicius Paternulus | 3
4 | 23 | |
| 4457 497 Cn. Cornelius Blasio
C. Atilius Regulus | 4 | 24 | |
| 4458 498 M. Atilius Regulus II.
L. Manlius Vulfo Longus | CXXXI.
1
4 | 25 | |
| 4459 499 M. Aemilius Paulus
Ser. Fulvius Nobilior | 1
2 | 26 | |
| 4460 500 Cn. Cornelius Afina II.
A. Atilius Calatinus II. | 2
3 | 27 | 1 MARCVS Carynensis vnus
vnus anni praetor. I 7.
2 His annis e Dymacorum,
Tritacensium et aliarum
vrbium quibus praetores
lecti. c. II. I. |
| 4461 501 Cn. Seruilius Caepio
C. Sempronius Blaesus | 3
4 | 28 | 3 |
| 4462 502 C. Aurelius Cotta
P. Seruilius Geminus | CXXXII.
1
4 | 29 | 4 |
| 4463 503 L. Caecilius Metellus
C. Furius Pacilius | 1
2 | 30 | 5 |

MARCVS Carynensis II. r.
Sicyonii, pulso Cal. Iu-
niis Nicocle tyranno, ac-
cedunt corpori Achaico.
II. I.
Aegientes, Burti, Carynen-
ses accedunt corpori A-
chaico. I. 8. II. I.

| A.P.I. | A.V.C. | Coff. | Olymp. | A.A.
chaic. | Pract. |
|--------|--------|---|---------------------------|----------------|--|
| 4464 | 504 | C. Atilius Regulus II
L. Manlius Vulfo | $\frac{2}{3}$ | 31 | 6 |
| 4465 | 505 | P. Claudius Pulcher
L. Iunius Pullus | $\frac{3}{4}$ | 32 | 7 |
| 4466 | 506 | P. Seruilius Geminus II
C. Aurelius Cotta II. | CXXXIII.
$\frac{4}{1}$ | 33 | 8 |
| 4467 | 507 | L. Caecilius Metellus II.
M. Fabius Butco | $\frac{1}{2}$ | 34 | 9 |
| 4468 | 508 | M. Fabius Licinus
M. Otacilius Crassus II. | $\frac{2}{3}$ | 35 | 10 |
| 4469 | 509 | M. Fabius Butco II.
C. Atilius Balbus | $\frac{3}{4}$ | 36 | 11 ARATVS Sicyonius I. c. II. 3. |
| 4470 | 510 | A. Manlius Torquatus
C. Sempronius Blacufus II. | CXXXIV.
$\frac{4}{1}$ | 37 | 12 |
| 4471 | 511 | C. Fundanius Fundulus
C. Sulpicius Gallus | $\frac{1}{2}$ | 38 | 13 ARATVS II. c. II. 2.
Corinthii, Epidaurii,
Troezenii, Megarenfes,
accessere Achacis. c. II. 2. |
| 4472 | 512 | C. Lutatius Catulus
A. Postumius Albinus | $\frac{2}{3}$ | 39 | 14 ARATVS III. c. I. c. II. 7.
Cleonis Nemea celebrat
praetor c. II. 7. |
| 4473 | 513 | Q. Lutatius Catulus Cerco
A. Manlius Torquatus II. | $\frac{3}{4}$ | 40 | 15 |
| 4474 | 514 | C. Claudius Cento
M. Sempronius Tuditanus | CXXXV.
$\frac{4}{1}$ | 41 | 16 ARATVS IV.
Bellum Aetolicumc. II
7. 8. |
| 4475 | 515 | C. Mamilius Turrinus
Q. Valerius Flaccus | $\frac{1}{2}$ | 42 | 17 ARATVS V. c. II. 7. 8. |
| 4476 | 516 | Ti. Sempronius Gracchus
P. Valerius Falto | $\frac{2}{3}$ | 43 | 18 ARATVS VI. c. II. 7. 8. |
| 4477 | 517 | L. Cornelius Lentulus
Q. Fuluius Flaccus | $\frac{3}{4}$ | 44 | 19 ARATVS VII. c. II. 8.
Aristippus tyrannus op-
pressus c. II. 8. |
| 4478 | 518 | C. Licinius Varns
P. Cornelius Lentulus | CXXXVI.
$\frac{4}{1}$ | 45 | 20 DIOETAS c. II. 8. Me-
galopolis Achacis tradita
a Lyfiade tyranno c. II. 7. |
| 4479 | 519 | C. Atilius Balbus II.
T. Manlius Torquatus | $\frac{1}{2}$ | 46 | 21 ARATVS VIII. c. II. 6. |
| 4480 | 520 | L. Postumius Albinus
Sp. Caruilius Maximus | $\frac{2}{3}$ | 47 | 22 LYSLADES Megalopoli-
tanus I. c. II. 6. |
| 4481 | 521 | Q. Fabius Maximus
M. Pomponius Matho | $\frac{3}{4}$ | 48 | 23 ARATVS IX. c. II. 6. |
| 4482 | 522 | M. Aemilius Lepidus
M. Poblicius Mallecolus | CXXXVII.
$\frac{4}{1}$ | 49 | 24 LYSLADES II. c. II. 6. |

| APIA V.C. Coss. | Olymp. | A. A. Praet. |
|-----------------|---|--|
| 4483 523 | M. Pomponius Matho II.
C. Papirius Mafio | 50 25 |
| 4484 524 | M. Aemilius Barbula
M. Iunius Pera | 51 26 |
| 4485 525 | L. Postumius Albinus
Cn. Fulvius Centumalus | 52 27 |
| 4486 526 | Q. Fabius Maximus II.
S. Caruilus Maximus | CXXXVIII 53 28 |
| 4487 527 | P. Valerius Flaccus
M. Atilius Regulus | 54 29 |
| 4488 528 | M. Valerius Messala
L. Apustius Fullo | 55 30 |
| 4489 529 | L. Aemilius Papus
C. Atilius Regulus | 56 31 |
| 4490 530 | Q. Fulvius Flaccus II.
T. Manlius Torquatus | CXXXIX 57 32 |
| 4491 531 | C. Flaminius Nepos
P. Furius Philo | 58 33 |
| 4492 532 | M. Claudius Marcellus
Cn. Cornelius Scipio II. | 59 34 |
| 4493 533 | P. Cornelius Afina
M. Minucius Rufus | 60 35 |
| 4494 534 | L. Veturius Philo
C. Lutatius Catulus | CXL 61 36 |
| 4495 535 | M. Livius Salinator
L. Aemilius Paullus | 62 37 |
| | | ARATVS X. c. II. 6. |
| | | MARCVS Carynensis.
Vincitur bello nauali
cum Illyriis et naue mer-
sa perit. c. II. 6. |
| | | LYSIADES III. c. II. 5-6.
Athenae Achaeorum factae
per deditionem. |
| | | ARATVS XI. c. II. 5. |
| | | ARISTOMACHVS Argi-
uus. c. II. 5. Simultates
cum Cleomene Spartanor-
um tyranno susceptae. |
| | | ARATVS XII. c. II. 5.
Clades Achaeorum ad
Lycacon. Mantinea oc-
cupata, ad Megalopolin
res male, ad Orchome-
nium bene gesta. |
| | | TIMOXENVS c. II. 5. |
| | | HYPERBATES. c. II. 5
Clades Achaeorum ad He-
catombacon accepta. |
| | | ARATVS XIII. c. II. 5
Bellum Cleomenicum
paullo ante hunc praet-
orem hieme coepit. |
| | | TIMOXENVS c. II. 5. 9.
Cleomenes victus fuga-
tusque, Sparta capta. |
| | | ARATVS XIV. c. II. 9.
Clades Achaeorum ad
Caphyas. Sociale bel-
lum in Aetolos decer-
nitur. c. II. 9. |
| | | ARATVS minor, Arati,
praetoris filius. c. II. 9.
Bellum sociale gestum. |
| | | EPERATVS Pharaemfis
c. II. 9. |

| A.P.I. | A.V.C. | Coff. | Olymp. | A. A. | Pract. | |
|--------|--------|--|--------------------------|-------|--------|--|
| 4496 | 536 | P. Cornelius Scipio
Ti. Sempronius Longus | $\frac{2}{3}$ | 63 | 38 | ARATVS XV. c. II. 9.
Pax cum Aetolis. |
| 4497 | 537 | C. Flaminius Nepos II.
Cn. Seruilius Geminus | $\frac{3}{4}$ | 64 | 39 | |
| 4498 | 538 | C. Terentius Varro
L. Aemilius Paullus II. | CXXI.
$\frac{4}{1}$ | 65 | 40 | |
| 4499 | 539 | Ti. Sempronius Gracchus
Q. Fabius Maximus III. | $\frac{1}{2}$ | 66 | 41 | |
| 4500 | 540 | Q. Fabius Maximus IV.
M. Claudius Marcellus | $\frac{2}{3}$ | 67 | 42 | |
| 4501 | 541 | Q. Fabius Verrucosi. F.
Maximus.
Ti. Sempronius Gracchus | $\frac{3}{4}$ | 68 | 43 | ARATVS XVI. c. II. 4.
Philippus rex Messenios
adffigit c. II. 4. |
| 4502 | 542 | App. Claudius Pulcher
Q. Fulvius Flaccus III. | CXLII.
$\frac{4}{1}$ | 69 | 44 | ARATVS XVII. c. II. 4.
Veneno perit. |
| 4503 | 543 | P. Sulpicius Galba
C. Fulvius Centumalus | $\frac{1}{2}$ | 70 | 45 | EVRYLEON. c. III. 2. |
| 4504 | 544 | M. Claudius Marcellus
M. Valerius Lacinus II. | $\frac{2}{3}$ | 71 | 46 | CYCLIADIS. c. III. 2.
Aetoli et Elei ad Larif-
sam. cum Achaeis praec-
lium committunt. |
| 4505 | 545 | Q. Fabius Maximus V.
Q. Fulvius Flaccus IV. | $\frac{3}{4}$ | 72 | 47 | |
| 4506 | 546 | M. Claudius Marcellus
T. Quinctius Crispinus | CXLIII.
$\frac{4}{1}$ | 73 | 48 | NICEAS. c. III. 2. |
| 4507 | 547 | M. Lulius Salinator II.
C. Claudius Nero | $\frac{1}{2}$ | 74 | 49 | PHILOPOEMEN Megalo-
politanus I. c. III. 2.
Ad Mantineam victi
Spartani. |
| 4508 | 548 | Q. Caecilius Metellus
L. Veturius Philo | $\frac{2}{3}$ | 75 | 50 | PHILOPOEMEN II. c. III. 2. |
| 4509 | 549 | P. Cornelius Scipio
L. Licinius Crassus | $\frac{3}{4}$ | 76 | 51 | ARISTAENETVS Diae-
us c. III. 2. |
| 4510 | 550 | M. Cornelius Cethegus
P. Sempronius Tuditanus | CXLIV.
$\frac{4}{1}$ | 77 | 52 | |
| 4511 | 551 | Cn. Seruilius Caepio
C. Seruilius Geminus | $\frac{1}{2}$ | 78 | 53 | |
| 4512 | 552 | Ti. Claudius Nero
M. Seruilius Geminus | $\frac{2}{3}$ | 79 | 54 | LYSIPPVS c. III. 3. |
| 4513 | 553 | Cn. Cornelius Lentulus
P. Aulus Pactus | $\frac{3}{4}$ | 80 | 55 | PHILOPOEMEN III. c.
III. 3. |
| 4514 | 554 | P. Sulpicius Galba
C. Aurelius Cotta | CXLV.
$\frac{4}{1}$ | 81 | 56 | CYCLIADIS. c. III. 4. |
| 4515 | 555 | L. Cornelius Lentulus
P. Villius Tappulus | $\frac{1}{2}$ | 82 | 57 | ARISTAENVS Megalo-
politanus. c. III. 4. |

| A.P.I. | A.V.C. | Coff. | Olymp. | A. A-chaic. | Praet. | |
|--------|--------|---|---------------------------|-------------|--------|---|
| 4516 | 556 | Sex. Aelius Pactus Catus
T. Quinctius Flaminius | $\frac{2}{3}$ | 83 | 58 | NICOSTRATVS c. III. 4 |
| 4517 | 557 | C. Cornelius Cethegus
Q. Minucius Rufus | $\frac{3}{4}$ | 84 | 59 | ARISTAENVVS. c. III. 4 |
| 4518 | 558 | L. Furius Purpureo
M. Claudius Marcellus | CXLVI.
$\frac{4}{1}$ | 85 | 60 | |
| 4519 | 559 | M. Porcius Cato
L. Valerius Flaccus | $\frac{1}{2}$ | 86 | 61 | ARISTAENVVS II. c. III. 4 |
| 4520 | 560 | P. Cornelius Scipio Africanus II.
P. Sempronius Longus | $\frac{2}{3}$ | 87 | 62 | |
| 4521 | 561 | L. Cornelius Merula
Q. Minucius Thermus | $\frac{3}{4}$ | 88 | 63 | |
| 4522 | 562 | L. Quinctius Flaminius
Cn. Domitius Ahenobarbus | CXLVI.
$\frac{4}{1}$ | 89 | 64 | PHILOPOEMEN IV. c. III. 5 |
| 4523 | 563 | P. Cornelius Scipio Nafica
M. Atilius Glabrio | $\frac{1}{2}$ | 90 | 65 | DIOPHANES c. III. 5. |
| 4524 | 564 | L. Cornelius Scipio
C. Laelius | $\frac{2}{3}$ | 91 | 66 | |
| 4525 | 565 | Cn. Manlius Vulfo
M. Fulvius Nobilior | $\frac{3}{4}$ | 92 | 67 | PHILOPOEMEN V. c. III. 6. |
| 4526 | 566 | M. Livius Salinator
M. Valerius Messala | CXLVIII.
$\frac{4}{1}$ | 93 | 68 | PHILOPOEMEN VI. c. III. 6. |
| 4527 | 567 | M. Aemilius Lepidus
C. Flaminius Nepos | $\frac{1}{2}$ | 94 | 69 | PHILOPOEMEN VII. c. III. 7. |
| 4528 | 568 | Sp. Postumius Albinus
Q. Marcus Philippus | $\frac{2}{3}$ | 95 | 70 | |
| 4529 | 569 | Ap. Claudius Pulcher
M. Sempronius Tuditanus | $\frac{3}{4}$ | 96 | 71 | ARISTAENVVS c. III. 7. |
| 4530 | 570 | P. Claudius Pulcher
L. Porcius Licinius | CXLIX.
$\frac{4}{1}$ | 97 | 72 | LYCORTAS c. III. 7. |
| 4531 | 571 | Q. Fabius Labeo
M. Claudius Marcellus | $\frac{1}{2}$ | 98 | 73 | PHILOPOEMEN VIII. a Messeniis capitur et veneno necatur. c. III. 1. 7.
LYCORTAS suffectus c. III. 1. |
| 4532 | 572 | L. Aemilius Paullus
Cn. Baebius Tamphilus | $\frac{2}{3}$ | 99 | 74 | LYCORTAS c. III. 1. |
| 4533 | 573 | P. Cornelius Cethegus
M. Baebius Tamphilus | $\frac{3}{4}$ | 100 | 75 | |
| 4534 | 574 | A. Postumius Albinus
C. Calpurnius Piso | CL.
$\frac{4}{1}$ | 101 | 76 | LYCORTAS c. IV. 1. |
| 4535 | 575 | Q. Fulvius Flaccus
L. Manlius Acidinus | $\frac{1}{2}$ | 102 | 77 | HYPERBATVS c. IV. 1. |

| A.P.I.A.V.C. Coff. | | Olymp. | A.A. Praet. | | | |
|--------------------|-----|---|-------------------------|-----|----|---|
| | | | chaic. | | | |
| 4536 | 576 | M. Iunius Brutus
A. Manlius Vulfo | $\frac{2}{3}$ | 103 | 78 | CALLICRATES Leon-
teſius c. IV. 1. |
| 4537 | 577 | C. Claudius Pulcher
Ti. Sempronius Gracchus | $\frac{3}{4}$ | 104 | 79 | |
| 4538 | 578 | Q. Petilius Spurius
Cn. Cornelius Scipio Hi-
ſpalus | CLI.
$\frac{4}{1}$ | 105 | 80 | |
| 4539 | 579 | P. Mucius Scaeuola
M. Aemilius Lepidus II. | $\frac{1}{2}$ | 106 | 81 | XENARCHVS c. IV. 2. |
| 4540 | 580 | Sp. Postumius Albinus
M. Mucius Scaeuola | $\frac{2}{3}$ | 107 | 82 | |
| 4541 | 581 | L. Postumius Albinus
M. Popilius Laenas | $\frac{3}{4}$ | 108 | 83 | |
| 4542 | 582 | C. Popilius Laenas
P. Aelius Ligur | CLII.
$\frac{4}{1}$ | 109 | 84 | ARCHON c. IV. 2. |
| 4543 | 583 | P. Licinius Craſſus
C. Caffius Longinus | $\frac{1}{2}$ | 110 | 85 | } XENON alterutro ex his
annis praetor fuit. c.
IV. 3. |
| 4544 | 584 | A. Hoftilius Mancinus
A. Atilius Serranus | $\frac{2}{3}$ | 111 | 86 | |
| 4545 | 585 | Q. Marcius Philippus
Q. Scruilius Caepio | $\frac{3}{4}$
CLIII. | 112 | 87 | ARCHON. c. IV. 3. |
| 4546 | 586 | L. Aemilius Paullus II.
C. Licinius Craſſus | $\frac{4}{1}$ | 113 | 88 | |
| 4547 | 587 | Q. Aelius Paetus
M. Iunius Pennus | $\frac{1}{2}$ | 114 | 89 | Mille Achaici et amplius
Romam euocati ad cauſam
dicendam |
| 4548 | 588 | C. Sulpicius Gallus
M. Claudius Marcellus | $\frac{2}{3}$ | 115 | 90 | CALLICRATES c. IV. 4. |
| 4549 | 589 | T. Manlius Torquatus
Cn. Octavius Nepos | $\frac{3}{4}$ | 116 | 91 | |
| 4550 | 590 | A. Manlius Torquatus
Q. Caffius Longinus | CLIV.
$\frac{4}{1}$ | 117 | 92 | |
| 4551 | 591 | Ti. Sempronius Gracchus
M. Iuuenius Talla | $\frac{1}{2}$ | 118 | 3 | |
| 4552 | 592 | P. Cornelius Scipio Naſica
C. Marcius Figulus | $\frac{2}{3}$ | 119 | 94 | |
| 4553 | 593 | M. Valerius Meſſala
C. Fabius Strabo | $\frac{3}{4}$ | 120 | 95 | |
| 4554 | 594 | L. Aacicus Gallus
M. Cornelius Cethegus | CLV.
$\frac{4}{1}$ | 121 | 96 | |
| 4555 | 595 | Cn. Cornelius Dolabella
M. Fulvius Nobilior | $\frac{1}{2}$ | 122 | 97 | |
| 4556 | 596 | M. Aemilius Lepidus
C. Popilius Laenas II. | $\frac{2}{3}$ | 123 | 98 | |

| A. P. I. A. V. C. | Coff. | Olymp. | A. A. | Pract. | | |
|-------------------|-------|-------------------------------|---------------|--------|-----|---|
| 4557 | 597 | Sex. Iulius Caesar | $\frac{3}{4}$ | 124 | 99 | |
| | | L. Aurelius Orestes | | | | |
| 4558 | 598 | L. Cornelius Lentulus | CLVI. | 125 | 100 | |
| | | C. Marcius Figulus | $\frac{1}{1}$ | | | |
| 4559 | 599 | P. Cornelius Scipio Nafica | 1 | 126 | 101 | |
| | | M. Claudius Marcellus II. | $\frac{2}{2}$ | | | |
| 4560 | 600 | Q. O. imius Nepos | $\frac{2}{3}$ | 127 | 102 | |
| | | L. Postumius Albinus | | | | |
| 4561 | 601 | Q. Fulvius Nobilior | $\frac{3}{4}$ | 128 | 103 | |
| | | T. Annius Lufcus | | | | |
| 4562 | 602 | M. Claudius Marcellus III. | CLVII. | 129 | 104 | |
| | | L. Valerius Flaccus | $\frac{4}{1}$ | | | |
| 4563 | 603 | L. Licinius Lucullus | 1 | 130 | 105 | |
| | | A. Postumius Albinus | $\frac{2}{2}$ | | | |
| 4564 | 604 | L. Quinctius Flaminius | $\frac{2}{3}$ | 131 | 106 | MENALCIDAS Spartanus. c. IV. 5. |
| | | M. Acilius Balbus | | | | |
| 4565 | 605 | L. Marcius Cenforinus | $\frac{3}{4}$ | 132 | 107 | DIAEVS Megalopolitanus c. IV. 5. Achaei e custodia a Romanis dimiffi. c. IV. 4. |
| | | L. Calpurnius Pifo | | | | |
| 4566 | 606 | Sp. Postumius Albinus | CLVIII. | 133 | 108 | DAMOCRITVS c. IV. 5. |
| | | L. Calpurnius Pifo | $\frac{4}{1}$ | | | |
| 4567 | 607 | P. Cornelius Scipio Africanus | 1 | 134 | 109 | DIAEVS c. IV. 5. |
| | | C. Liviuf Drufus | $\frac{2}{2}$ | | | |
| 4568 | 608 | Ca. Cornelius Lentulus | $\frac{2}{3}$ | 135 | 110 | CRITOLAVS. Cecidit in acie aduerfus Romanos. c. IV. 5. |
| | | L. Mummius Achaicus | | | | DIAEVS fuffectus c. IV. 5. Corinthus deleta. c. IV. 5. |
| 4569 | 609 | Q. Fabius Maximus Aemilianus | $\frac{3}{4}$ | 136 | 111 | |
| | | L. Hoftilius Mancinus | | | | |
| 4570 | 610 | Ser. Sulpicius Galba | CLIX. | 137 | 112 | |
| | | L. Aurelius Cotta | $\frac{4}{1}$ | | | |

FASTI ACHAICI ILLUSTRATI.

T. S. B.

CAPVT PRIMVM.

INITIA REIPUBLICAE ACHAICAE.

Achaei magnum Homericis temporibus nomen, Spartam, Argos et omnem inferiorem Peloponnesum olim incoluerunt. Cum autem Heraclidae eos his agris expulissent, recepti sunt ab Ionibus, qui tunc inde a finibus Corinthi occidentale litus Peloponnesi tenebant, regionem ab ipso situ Aegialeum dictam, deinceps enim Ionia ab incolis nominata est. (1) Rex tum erat Achaeorum Tisamenus Orestis filius. Inde coorto dissidio Iones ab Achaeis tota regione exterminati sunt. Pulsis Ionibus, sub regum potestate Achaei manserunt usque ad Ogygum seu Gygem: vtrumque enim nomen apud Polybium existat. (2) Ogygi autem filiorumque eius impotentia exacerbati Achaei, sublata tyrannide, popularem statum induxerunt. Ex eo diuisum est Achaicum nomen in duodecim πόλεις, ciuitates, seu, vt alias iidem scriptores edunt, μέρη, regiones. Non tamen eadem ciuitates semper recensitae sunt eo in numero, aliis deletis clade aliqua, aliis in Achaicum corpus illarum loco receptis. Herodotus (3) haec nomina suae aetatis ciuitatum edidit: *Pellenen, Aegiram, Aegas, Buram, Helicen, Aegium, Rhypes, Patrees, Pharees, Olenum, Dymen, Tritaeces*. Ταῦτα, inquit, δωδέκα μέρη νῦν Ἀχαιῶν ἐσὶ καὶ τότε γε Ἰώνων

(1) Strabo, Pausanias. (2) p. 178. 375. (3) l. i. c. 145.

ἑσίων ἤν. Polybius (4) autem has libera in republica ciuitates recenset: *Patras*, (*Patrees* Herodoti) *Dynam*, *Pharas* (*Pharees* Herodoti) *Tritaeam* (*Tritaees* Herodoti) *Leontium*, *Aegiram*, *Pellenen*, *Aegium*, *Buram*, *Cerauniam*, *Olenum*, *Helicen*. Nullae tum Herodoti *Aegae* et *Rhypes*. Earum in loco succedere *Leontium* et *Ceraunia*. Pausanias tamen (5) nomina Achaicarum ciuitatum, vt fue-
re sub regibus, paullo aliter edidit, quam Herodotus, vt nunc quidem in Pausaniae exemplaribus est: *Dynam*, *Olenum*, *Pharas*, *Tritiam*, *Rhypes*, *Easium*, *Cecyrinam*, *Buram*, *Helicen*, *Aegas*, *Aegiram*, *Pellenen*. Pro eo, quod est in Pausania *Ἐάσιον*, Amasaeus *Θάσιον* censuit legendum: at Sylburgius non absurde pro *Ἐάσιον* scriptum a Pausania putat *Ἄγιον*, vt in eo nihil ab Herodoto differat. Cecyrinam vero Pausaniae idem Sylburgius recte censet, eiusdem Pausaniae et Strabonis *Κεραυνίαν*, aut potius, vt Pausanias aliis in locis, *Κερύνειαν* esse: *Καρυνεΐαν* tamen malim, ex quo est *Καρυνεύς* Polybii. Haec ciuitas ex posterioris memoria temporis irrepsit in catalogum Pausaniae. Nam cum haec duodecim nomina sint, tamen non multo post Pausanias etiam *Patras* adscribit, vt sint tredecim ciuitates, inuito et repugnante ipso Pausania. *Carynia* loco mota, repositis *Patris*, emendato *Easio*, vt sit *Aegium*, Herodorus et Pausanias in nominibus concordant. *Aegas* et *Rhypes* praetermiserit Polybius, Strabo declarat: (6)

Aegam

(4) p. 179. (5) p. 536. (6) Strabo p. 447. 442.

Aegam enim, seu alio nomine Aegas, non habitari tradit, agrum Aegiensium esse: Rhypes autem, Myscelli illius patriam, qui Crotonem condidit, item esse nullas, agro inter Aegienses et Pharienses diuiso. Et Pausanias quoque tantum ruinas Rhyparum sua aetate exstitisse ait. Crotona a Myscello condita est Olympiade XI. aut XII. (7) quod satis vetus tempus est florentissimae urbis. Quaeuis τῶν δωδέκα μερίδων rursus in septem aut octo δήμους seu *populos* distribuebatur: τοσῶτον, inquit Strabo, (8) εὐανδρεῖν τὴν χώραν συνέβαιναν. Inde vsque a libertate recuperata, nulla admodum re, nisi iustitiae et aequitatis laude celebrati sunt Aethaci. Neque enim Persicis in bellis subsidia misere ad Thermopylas, aut ad Euboeam aut Salaminem. Sic Pausanias. (9) Quod autem addit, εἰδὲ σφᾶς κατὰ λόγον συμμαχῶν ἔχει Λακωνικὸς ἢ Ἀττικὸς, id ad illa ipsa bella pertinet. Nam tametsi, ut idem testatur Pausanias, ad Plataeas subsidia misere Graecis aduersus Mardonium, tamen, quia non venerunt in tempore, in communi Graecorum donario, quod Olympiae dedicatum est, Aethaeorum nomen ceteris sociis non fuit adscriptum. Bello Peloponnesiaco, ut vel e Thucydide constat, Atheniensibus fauerunt, nullo admodum insigni motu rerum. Quare oraculum, ut supra posui, perquam ignominiose tractauit Aegienses, ut Aethaeorum longe vilissimos. At

vbi

(7) Strabo p. 291 eodem anno, quo Syracusae. V. etiam Heraclidem in *politiciis Graecorum* p. 2833. ed. Gronouii. (8) p. 441. (9) p. 536.

Vbi Helice terrae motu concussa (id autem accidit Olympiadis CI. 4. vt supra declarauimus) Aegiam agri Helicensis accessione auctam, caput extulit, (10) iam inde dignitate et opibus longe inter ceteras vrbes maximis fuit. Id accidit duobus ante Leuetricam pugnam annis. Postquam ea in pugna fractae sunt Lacedaemoniorum vires, Arcades autem et Messenii contra eos arma cepere, Thebani a Macedonibus deuicti, Athenienses debilitati, nihil in commune consulebatur, Achaei diuturna pace et libertate (praeter Pellenen, quae tum adhuc sub tyranno erat) viribus ad audendum comparatis, aliquo haberi in honore coeperunt. Hanc potentiam, praesertim cum ad Chaeroneam in acie stetit contra Philippum regem, (1) Macedones inique ferre, premere deinde Achaeos, donec diuersis studiis partium animos populi diffociarent, vt aliae ciuitates tyrannos, aliae praesidia Macedonia recipere. (2)

II. Tandem conspirarunt Dimaei, Patrenses, Tritaenses, et Phareenses ad concordiam et recuperandam libertatem, Ol. CXXIV. quarto anno. Quinto post anno, Aegienfes, eiecto praesidio Macedonico et Buri, interfecto tyranno, Carynenses autem (Καρυνᾶς fuere, qui Κεραυνίαν Polybii et Strabonis, vt supra retuli, incolebant) tradente urbem tyranno, in vnum et idem concilium coierunt. Accessere mox Sycionii extra Acha-

Tom. V. D d d iam

(10) Pausanias p. 589. (1) E Pausania et Polybio L. II. c. 38. seq.
 (2) Polybius l. c.

iam. Forma ea rei publicae. Erat suus cuique ciuitati senatus, vt Liuius habet. (3) Hi sunt ἄρχοντες Polybii. (4) Is autem scribit, cum Attalus Aegii in concilio postulasset, vt honores Eumenis regis fratris sui restituerentur, decretum concilii ad ciuitates esse missum, quo iubebant τοῖς ἄρχουσι πᾶσας ἀποναλασῆσαι τὰς Εὐμένους τιμὰς. Per se autem quisque intelligere potest, τὰς ἄρχοντας senatus cuiusque fuisse praefides et rectores. Erant et Damiurgi pro ciuitatum numero, donec decem Damiurgi lege instituerentur, summus populi Achaici magistratus. (5) Primis quinque et viginti annis omnes Achaei Γραμματεῖα κοινὸν ἐκ περιόδου καὶ δύο Στρατηγούς, *Scribam vnum communem e singulis secundum ordinem ciuitatibus et duos praetores elegerunt.* (6) Post id visum est populo commodius factum, si vnus Στρατηγός seu praetor quotannis exercitui praeficeretur, et secundum eum Ἰππάρχης esset, seu magister equitum, magistratus ipse, Ἰππαρχία. (7)

III. Praetorem ius erat conuocare damiurgos, damiurgi de quibus rebus erat consultandum, praetore communicante, senatum populumque singularum urbium consulebant. Deliberatione priuatis in concionibus inita, Damiurgi vocabant concilium Achaicum etiam extra tempus lege statutum, si ita videretur. Concilia enim populi statuta tantummodo bis habita quotannis, sub verem et autumnum. Vbi in vnum conuenerant, praetor qui con-

(3) l. XXX. c. 19 (4) p. 1246. (5) Liuius I XXXVIII. 30. XXXII. 22. (6) Polybius p. 181. (7) Polybius p. 181. 1244, 1398.

concilio praesidebat, Ioue, Apolline, Hercule auspicii causa vocatis, de quibus consultandum esset, in medium proponebat. Suadentibus aliis, aliis disuadentibus, si maior Damiurgorum pars consentiret, referebatur ad populum. Tertio die decretum iusti concilii fieri, ex lege erat. Eo in concilio, quod de bello aduersus Philippum regem cum Romanis gerendo habitum est, Sex. Aelio Paeto, T. Quinctio Flaminio Coss. quinque Damiurgi relatu-ros se ostendebant: quinque alii duos dies tenebant, ne decretum recitari et perrogari sententiae possent, donec Memnon Pellenensis aduersae partis vnus et minis et precibus Rhisiassi, pater is erat Memnonis, ad Damiurgorum, qui Romanis studebant factionem tertio die traductus, numero iubentium accessit. Sic relatum est ad populum. Dymaei et Megalopolitani, priusquam lex ferebatur a populo, ne ea tenerentur, concilio excefferunt. Aliis de rebus, quam de quibus ante concilium cum senatu populoque singularum ciuitatum communicatum fuisset, agi in conciliis non placuit. Itaque Caecilio legato Romano negarunt concilium gentis se duros Damiurgi, nisi scripta mandata ederet, de quibus antea domi consideraret populus. Praetoris erat, hortari, vt de communi re sua conferrent, suaderent, disuaderent, expenderent aequa lance rationes suas, ex animi sui sententia nihil ipse dicebat, si de bello disceptaretur. Quapropter Philopoemen praetor apud Lini-um: (8) *bene comparatum apud Achaeos esse, ne*

praetor cum de bello consulisset, ipse sententiam diceret: statuere quam primum ipsos, quid vellet iussit, praetorem decreta eorum cum fide et cura executurum. Caeteris in rebus inuenio praetorem sententiam dixisse suam, suaforem disuaforem fuisse. Cum de Eumenis regis honoribus Aegii ageretur, Archon praetor ut Attali legatorum precibus subueniret, surrexit ad dicendum. Res enim, inquit Polybius, ipsa postulabat, ut praetor diceret. Pauca in rem locutus, ne corruptus fuisse censeretur, e consilio discessit. At tum Polybius, qui magister equitum erat, surrexit, et sermonem habuit, factumque eius in verba decretum est. (9)

IV. Huius concilii fundamenta primus iecit Marcus Carynensis, Philopoemen opus perfecit, Lycortas confirmavit. Primo tempore cum pro regno status coepit esse popularis, concilia in Aenario loco sunt coacta: post recuperata libertate, Aegii haberi placuit. Sic Pausanias et Strabo. Lilius, (10) *seu dignitate, inquit, verbis seu loci opportunitati datum est.* Nonnumquam tamen postea Argis, et Sicyone, et Corinthi, et Tegeae, et Rhii, et Megalopoli extra ordinem conuentus indicti. Id vero etiam egit Philopoemen praetor, ut omnibus in ciuitatibus, quae Achaici essent nominis, conuentus ex ordine celebrarentur. Cum super ea re legem pararet promulgare, conuentumque Argos indiceret, Damiurgi Aegium euocarunt populum. M. Fuluius Aegienfium. fucebat: caussae, Argos tamen venit, ubi cum;

(8) I. XXV. 25; (9) p. 1244; Caetera fere e Polybio p. 1179; see Pausanias p. 54, 4; (10) I. XXXI. 25; XXXII. 19.

cum diu multumque disceptatum esset, praetorque rem inclinam cerneret, ab incepto destitit. (1) Obtinuere tamen ceterae vrbes, vt tandem etiam aliis in vrbibus conueniretur.

V. Conuentus, vt dixi, iusti in modum concilii coacti sunt quotannis duo. Vnus vere exeunte sub exortum Pleiadum, vt testatur Polybius, (2) alter sub auctumno. Henricus Doduellus (3) cum variae sint huiusce fideris in parapegmatibus Graecis ἐπιβολαί, putat a Polybio isthuc tempus indicari, quo aestas ceperit secundum Plinium. Nam Plinius ita fatur: (4) *Vergiliae priuatim attinent ad fructus, vt quarum exortu aestas incipit, occasu biems, semestri spatio inter se messes vindemiasque et omnium maturitatem complexae.* Et ille quidem pro parapegmate Romano ad VI. Idus Maias Vergiliarum exortum constituit. Varro autem (5) ad VII. Idus Maias, a quo die Columella quoque aestatem orditur, vt in Plinio putem emendandum, sic vt est in Varrone: Geoponicī scriptores, Florentinus (6) (quamquam hic quoque Varronem sequitur et praeterea corruptus est) Quintilii fratres, Proclus, Ioannes Tzetzes Hesiodesius scholiasta (7) intra initia Maii atque Nouembris rusticis suis definiunt et verem potius exeuntem, quam aestatis initium in Vergiliarum exortu ponunt. Georgius Syncellus (8) Μαῖς ἐννάτη τὴν τῶν Πληιάδων ἐπιβολήν

Ddd 3

con-

(1) Lilius l. XXXVIII. 300. (2) p. 424. 487. (3) in Cyclis p. 291.
 (4) l. XVIII. 29. (5) de re rustica l. I. 28. (6) p. 4. 14. (7) p. 91. seq.
 (8) Variarum Dissertationum Petauii. l. II. c. 29.

constituit: hoc item est VII. Id. Maias. Sed non opus est, ut multa hic colligam: nam Dionysius Petaius (*) summa diligentia et accuratione id ipsum egit, ut ostenderet, ad XI. Maii matutinum ortum Φαινόμενον eius sideris fuisse relatam. Iam cum exortu Heliaco Pleiadum et aestas et messis exordiebatur in Graecia et annus Achaicus. Hesiodus

Πληιάδων Ἀλλαγένεων ἐπιτελλομένων
 Ἀρχεῶδ' ἀμηνῆ, ἀρότσιο δὲ δυσσομένων

Aratus: Iupiter, ait, Pleiadibus

ἢ θέρεος ἢ χέμαλος ἀρχομένοις
 Σημαίνειν ἐκέλευσεν, ἐπερχομένους τ' ἀρότσιο.

Sic Manlius, sic omnes. De anno Achaico Polybius (9) τὸ μὲν εἶν κατὰ τὴν Ἀράτου τῆ νεωτέρου στρατηγίαν εἶδος ἐτύγχανε διεληλυθὸς περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιβολήν. ἔτω γὰρ ἦγε τῆς χρόνος τὸ τῶν Ἀχαιῶν ἔθνος, annus praeturae Arati elapsus erat circiter Pleiadum exortum: sic enim agebat annum populus Achaicus. De concilio autem (10) in quo comitia legendis praetoribus egerint Achaeci, eundem iam modum, iisdem verbis, περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιβολήν. In verno igitur concilio designati sunt. Sed intercedebat aliquot dierum tempus inter comitia eumque diem, quo die praetores designati magistratum iniuerunt. Nam cum Aetoli Messenios Olympiadis CXXXIX. 4. adorti et in solemini concilio querelae sociorum ad Achaecos perlatae essent, bello

(*) l. c. (9) l. V. c. i. (10) p. 487.

bello in Aetolos decreto, Aratus designatus est praetor. Cum autem Timoxenus, qui a concilio praeturam nondum deposuerat, lentius agere videretur delectu habendo rebusque apparandis, Aratus id ipsum aegre ferens, vt maturaret auxilium, quinque diebus magistratum anticipavit, et a Timoxeno publicum sigillum recepit, id enim praetoris in manu erat. (1) Et de Archone Polybius, (2) decretum fuisse in concilio, in quo fuerat designatus, vt illico procederet praetor, quia bellum instabat Romanum cum Perseo. Ex quibus intelligo, initium anni Achaici fuisse ipso in exortu Heliaco Pleiadum circiter XI. Maii eodem quoque die praetores iniisse magistratum atque ita esse interpretandum Polybii alterum locum *περι τὴν ἐπιτολήν ipso in exortu*: alterum, vbi de concilio agit, *circiter exortum* significare, seu aliquot diebus ante, vt populus ab ipso concilio tempus haberet proficiscendi in agros, ad messem faciendam. Polybius igitur etiam disertis verbis testatur, (3) exeunte vere designatos fuisse praetores, ineunte aestate, hoc est, non ita multis post diebus coepisse in magistratu esse. Eandem rationem seruatam puto in concilio altero statō *sub auctumno*, vt Livii ipso verbo vtar: (4) fuisse enim celebratum exeunte auctumno, medio anno Achaico, cum rebus bello gerendis tempus iam exiisset et operae agrestes feriarentur.

VI.

(1) Polyb. I. IV. 6. (2) p. 1244. (3) p. 424. (4) l. c.

VI. Primi ex Achaëis Dymaei cum Patrensibus, Tritaënsibus et Pharaënsibus in libertatem et commune concilium conspirarunt Olympiade CXXIV. ut Polybius testatum reliquit. Plutarchus, qui sua ex Arati Sicyonii praetorii viri commentariis accepit, annum edidit nullum, tantum cum Pyrrhi in Italiam expeditione motum populi Achaici connectit. Nimirum Pyrrhus res primum gessit cum P. Laeuino Cos. A. V. C. 474. sed magistratum inierat Kal. Quintilibus A. P. I. 4433. ut tum fuisse compertum habemus, (6) itaque Olympiadis CXXIV. 4. paullo ante inito. Bellum Tarentinum anno ante Pyrrhi expeditionem coepit, teste Pausania in Atticis: (7) τῶν δὲ τῷ πρότερον ἔτη πρὸς Ῥωμαίους συνεστῆκε πόλεμος, ut Casaubonus docte emendauit in commentario Polybiano. (8) Causa belli, ut ex Dionysii excerptis constat, C. Fabricio, Q. Aemilio Coss. probro apud Tarentinos adfectis legatis Romanis. Inter eos Coss. et P. Valerium Laeuinum annus intercessit vnus, quo L. Aemilius, Q. Marcius Coss. bellum cum Tarentinis ex voto gesserunt. Tum vero Tarentini bello impares, A. V. C. 473. extremo, Pyrrhum auxilio vocarunt, isque cum classe, ne expectato quidem vere, ut Zonaras e Dionysio docet, in Italiam profectus: ergo A. V. C. 474. Olymp. CXXIV. 4. A. P. I. 4434. Id amplius stabiliendum duco. Polybius (9) Romanos cum Gallis pacem fecisse scribit

(5) Polyb. l. IV. c. 6. Plutarchus in Arato p. 1049. (6) V. Doucellus in cyclis Romanis p. 586. (7) p. 28. (8) p. 118. (9) p. 151.

bit triennio ante Pyrrhi expeditionem, quinque ante Delphicam Gallorum cladem annis. Galli ad Delphos accisi sunt, teste Pausania in Phocicis, (10) Olympiadis CXXV. 2. Ad eundem annum Phlegon Trallianus, aut potius Eratosthenes Cyrenaëus in Ολυμπιονικῶν συναγωγῇ habet τὴν Κελῶν ἀπώληαν. Addit Pausanias, Anaxicrate archonte Athenis: et Anaxicratem ait archontem fuisse, cum Ladas Aegiensis stadia vicit. Ladas vicit Olympiadis CXXV. 1. Gorgia tum maxime archonte Athenis. Secundum Gorgiam Anaxicrates Athenis magistratum gessit, vt testatur Eratosthenes in Olympionicis. Iam si duobus annis ante Pyrrhus traiecit, confirmatur nostra ratio. Et tribus annis ante Pyrrhi expeditionem pax cum Gallis inīta. Cornelius Dolabella Cos. Gallos Senones Etruscosque ad lacum Vadimonis vicit. Inter eum consulem et Laeuinum duo consulatus, duo anni intercessere. Habes Olympiadis CXXIII. 4. tertium ante Pyrrhi expeditionem. Polybius quodam in loco, (1) Pyrrhum in Italiam venisse scribit vno anno priusquam Galli impressionem fecere in Graeciam: hi autem, si vno anno in Graecia commorati Delphos inuaserunt, ne hoc quidem impedit, quin Pyrrhus vere nouo Olympiadis CXXIX. 4. A. V. C. 474. traiecerit. Sed, vt verum fatear, non ita sensit Polybius. Nam cum Gallorum impressionem in Graeciam commemorat, non Macedonum cum Gallis res attingit, sed solam

Tom. V. Eee, bar-

barbarorum excursionem per ceteras in Graecia urbes. Eam autem excursionem clademque Delphicam et transitum Gallorum in Asiam, ut ex verbis perspicuum est, vno et eodem in anno recenset. Sic Eratosthenes quoque: ἡ τῶν Κελτῶν εἰς Ἑλλάδα στρατῆα τε ἔκ ἀπώλεια. Hoc vero interest inter Eratosthenem et Polybium, quod is rem vtramque Olympiadis CXXV. 2. refert; hic autem anno vno ante, siue primo eiusdem Olympiadis. Nisi quid in Polybii verbis deprauatum sit, memoriae is lapsus fuit: nam is ipse Polybius alio in loco, ut supra declaravi, annos duos inter Pyrrhi expeditionem et Delphicam Gallorum cladem dedit. Denique Polybius notam temporis (2) expeditionis Italicae edidit, Ptolemaeum Lagi, Seleucum Nicatora, Lyfimachum, Ptolemaeum Ceraunum non magno interuallo decessisse. Hi utique circa initium, medium et finem Olympiadis CXXIV. obierunt, qua ex re nihilo minus confirmata nostra est sententia.

VII. Hoc primum constituto, ut, si Pyrrhus vere A. V. C. 474. Italiam cum classe petiit, eodem autem anno Dymaei cum ceteris vrbibus Aethiopiae reipublicae fundamenta iecerunt, annus is fit ab V. C. 474. Olympiadis CXXIV. 4. vergens in Olympiadem CXXV. audiendus porro est Polybius. (3) Annos, ut ex eo supra declaravi, primos
XXV.

(2) I. II. 41. I. II. 70. (3) I. II. c. 43. Strabo tantum 20. annos p. 440
ἐπὶ τῶν ἐν παρόδῳ paullo negligentior

XXV. scribam vnum et praetores duos habuere Achaei: ab illo autem tempore Marcum Carynensem praetorem vnum, vnos praetores deinceps in singulos annos. Igitur Marcus Carynensis praetor est factus anno XXVI. post Achaicam rem publicam constitutam, A. V. C. 499. Olympiadis CXXXI. 1. in ipso Vergiliarum exortu, vt supra quoque demonstraui. Atque ita etiam Casaubonus in chronologia Achaica.

VIII. Circiter quintum annum, hoc est, 30 Achaico A. V. C. 503. Olympiadis CXXXII. $\frac{1}{2}$ Aegienes praesidium Macedonicum oppido eiecerunt: secuti eos Buri, occidere tyrannum. Iseas autem tyrannus Carynensis id ipsum metuens, urbem tradidit. (4) Inde, vt dicam postea, alii atque alii focii accefferunt, eorumque nomina lapideo foederis monumento, fidei causa inscripta sunt. (5)

Caput Secundum

De decem atque septem praeturis Arati Sicyonii.

VT praetores populi Achaici suis annis inferamus diligentia maxime adhibenda est in ordinandis septemdecim praeturis Arati Sicyonii: has vt constituamus, ante omnia opus est, annum cognosci, quo Sicyon libertatem recupera-

E e e 2

nit

(4) Polybius I. II. c. 41. (5) Polybius p. 387. (6) p. 323.

uit Arati ope. Polybius hoc quod quaerimus, docet. Sed animus adhibendus est, ne in interpretando Polybio offendamus. Τετάρτῳ δ' ὕστερον ἔτη τῷ προσηρημένῳ στρατηγῆτος annos natus viginti Aratus patriam liberavit. Vt antea exul fuerit Argis, vt comparata parua manu Sicyonem nocte occupauerit, vt Nicocles tyrannus fuga salutem quaesiuerit, Plutarchus in Arati vita narrat. Ne vero sic interpretere Polybium, vt Casaubonus: Marcum Carynensem praetorem quartum fuisse, cum Sicyon liberata est a tyranno. Hoc enim Henricum Doduellum summum virum, in cyclis Laonicis (6) sefellisse opinor, vt post Marcum praetorem crederet praetorem primo fuisse Aratum Olympiadis CXXXII. i. Nempe Polybius hic per saltum incedit. Marcum Carynensem Olympiadis CXXXI. i. et parte maxima anni secundi, seu ab ipso initio aestatis A. V. C. 499. ad ῥερινὴν ὥραν A. V. C. 500. praetorem fuisse supra ostendimus. Ab hoc praeturae anno quartum dicit Polybius, quo res gessit Aratus Sicyone. *Post Marci primam praeturam quarto anno, eodem praetore Marco, inquit Polybius.* Non quod Marcus continuauerit magistratum, alioqui dicturus fuerat, τῷ προσηρημένῳ τὸ τέταρτον στρατηγῆτος, non τετάρτῳ ἔτη τῷ αὐτῷ στρατηγῆτος, eodem, qui quatuor annis ante fuerat, praetore. Et diserte tradunt scriptores annuam fuisse praeturam, tum vero etiam Polybius a Marco primum praetore e Dimaeis, Tritaeensibus aliarumq;

vr.

urbium ciuibus praetores fuisse lectos, quorum nomina interciderunt. Igitur Sicyon capta est anno, Achaico XXX Olympiadis CXXXII $\frac{1}{2}$. Addit Plutarchus (7) ipsum diem V. Daesii, qui cum in Olympiadis CXXXII. primum annum incidit, ipsas Kal. Iunias demonstrat iuxta tabulas Doduellianas. Monet nos Plutarchus, mensem eum Anthesteriona a] Atheniensibus vocitatum. Antestherion non excessit medium Martium in cyclo Harpali, nedum ut attingeret Maium, cum Daesius intra Maium et Iunium iis temporibus coerceretur. Sed ratio illa Plutarchi, comparandi menses Macedonicos cum Atticis, nondum satis explorata est, ut eum audeam erroris postulare. Ergo Sicyon capta est, cum Marcus Carynensis non ita multis ante diebus praeturam suscepisset.

II. Iam, inquit Polybius, anno constituto, quo Sicyon Achaeorum facta, ἀγδῶν δὲ πάλιν ἔτεν σπᾶληγὸς ἀίρεθῆς τὸ δεύτερον *Acrocorinthum cepit Aratus*. Cepit autem urbem atque arcem, quae in Macedonum potestate erat, astu, ut prolixè narrat Plutarchus. Archelaus dux, ubi viuis in manus Achaeorum venit, dimissus est: Theophrastus ducum alter, quod excedere urbe nollet, occisus: Perfaeus tertius, dum arx oppugnatur, fugit Cenchreas. Ille Zenonis philosophi sectator, cum postea aliquando de Zenonis paradoxo, solum sapientem bonum esse ducem disceptaretur, fer-

tur dixit: τὸτο μάλιστα καμὸς ποιε τῶν Ζήνωνος ἤρεσκε δογμάτων. νῦν δὲ μελαβάλλομαγ νεθετηθῆς ὑπο τῆ Σικυωνίς νεανίς, vt est apud Plutarchum. (8) Si numeremus ab illo, quem supra dixi, anno, octo alios annos, praetor iterum Aratus fuit Olympiadis CXXXIV. $\frac{1}{2}$. Aliam notam temporis Polybius subiecit: Corinthum captam esse ab Achaeis, anno vno antequam Carthaginieneses magno bello victi a Romanis, pacis condiciones acceperunt. Cladem dicit Carthaginensium ad Aegates insulas a C. Lutatio Cos. acceptam. Eam acceptam esse A. V. C. 512. Olympiadis CXXXIV. 2. exeunte, satis constat. Nondum enim adulta aestate commissum nauale est praelium: itaque paulo ante tertium eiusce Olympiadis annum. Fuit igitur Aratus praetor iterum a Maio mense, qui incidebat in Olympiadis CXXXIV. primum annum, vsque ad Maium, qui Olympiadis CXXXIV. 2. anno agebatur. Nam res Aratus ad Corinthum gessit τῆ περὶ θέρους ἀκμάζον ὥρα, plenilunio: (9) hoc est, adulta aestate, quae eam aestatem antecessit, qua Carthaginensis classis est victa. Ex quo Doduellus (10) argumentum ducit, nocte ea Acrocorinthum esse occupatam, quam Metageitnionis XVI. seu Sextilis Iuliani XII. dies excepit. Accessere rei gestae magnitudine perculsi ad corpus Achaicum Epidaurii, Troezenii, qui Argoli-

(8) p. 1037. adde Athenaeum p. 162. Polyaeum in Stratagematis I. VI. 34. Pausaniam p. 130. (9) Plutarchus p. 1036. (10) in cyclis p. 292.

golicum litus tenebant et extra Isthmum Megarenfes.

III. Nunc quoque prima praetura e Plutarcho deprehenditur. Scribit autem Plutarchus, Aratum pulso Sicyonio tyranno adolescentem annorum viginti equo meruisse et magistratibus (damiurgos populi et archontas ciuitatum puta) percarum, praetoribus, siue Dymaeus aliquis, seu Tritaeensis, seu ex aliquo alio oppido esset, dicto audientem enixe fuisse, cum cerneret exules a se Sicyonem reductos praediorum suorum possessoribus molestos, vt de vtrisque bene mereretur, profectum ad Ptolemaeum (is tum erat Euergetes Philadelphi filius) argenti summam, quanta satis erat, ad controuersias Sicyonias sedandas impetrasse et regis animum confirmasse Achaeis. Inde iam ille reuersus, cum summa apud Achaeos esset gratia, praetor factus est: ἐνιαυτῷ δ' ὕστερον, inquit Plutarchus, αὐθις στρατηγῶν, anno interiecto iterum praetor, Corinthum aggressus est. Si praetor fuit anno interiecto, prima praetura attribuenda est anno Achaico XI. qui inerat ineunte aestate Olympiadis CXXXIII. 3. Plutarchi interpretes ἐνιαυτῷ ὕστερον enunciat Latine *insequenti anno*. Perperam vero hoc, vt multa alia: nam id Plutarchus potius dixisset τῷ δ' ἐξῆς ἐνιαυτῷ. Et quod ipse testatur Plutarchus, quod nobis etiam in progressu disquisitionis nostrae spectandum erit, Aratus alternis fere annis praetor fuit. Pausanias quidem

vbi

vbi tradit, (1) Sicyonios ab Arato liberatos, ἀυλίαια δὲ στρατηγὸς ἀπὸ τῶν Αἰχαιῶν ἤρῃτο ait. Sed confusa sunt omnia eo in loco Pausaniae, quaedam etiam suspecta. Vt, cum scribit, Aratum Sicyonios, libertate restituta, sui iuris esse voluisse, post vbi Macedones Antigono Philippi tutelam gerente, Graecis formidarentur, Sicyonios, quamquam Dorici generis erant, recepisse in Achaicum concilium. Cui rei palam aduerfatur Polybius (*) cum sic ait: Aratus annos viginti natus patriam ereptam iugo tyranni virtute sua et fortitudine, προσέειπε πρὸς τὴν τῶν Αἰχαιῶν πολιτείαν, ἀρχῆθεν εὐθύς ἐρασις γενόμενος τῆς προαιρέσεως αὐτῶν, *Achaicae rei publicae adiunxit: iam inde statim a principio studiosus institutorum populi Achaici.* Habet sua ex Arati ipsius commentariis Polybius: Pausanias vero videtur aurem praeuiffisse Phylarcho, cuius quae fides fit, Polybius (2) declarauit. Iam Sicyonios Achaeis adscriptos demum habuit secundum Pausaniam annus Achaicus 52. quoniam Demetrius rex vt infra demonstrabo A. V. C. 525. decedens, Philippum filium sub tutela Antigoni reliquit. Quae cum attigit Pausanias, tum ille vero ἀυλίαια δὲ στρατηγὸς Ἀπάλος. Aut igitur vndecimam praeturae Arati anno 53. in animo habuit: aut primam si dicere voluit, vides vt omnia perturbauerit per summam negligentiam. Primam autem dicere

(1) p. 129. 130. Sic Strabo p. 440. scribit: "Aratum praetorem Antigono Acrocorinthum ademisse et patriam suam Achaeis adiecisse et Megarenfes et Argos et Hermiona, Phliuntem, Megalopolin." Quibus in verbis nihil accurati, nihil chronologicum est. (*) p. 181. (2) p. 196.

dicere voluit, nam ea in praetura ait, contra Amphiffentes, Locros atque Aetolos duxisse, Corinthumque cepisse. Iterum alia perturbatio. In prima praetura quidem Aratus Locros et Calydoniam populatus Bacotis subsidio venit, pugna ad Chaeroneam commissa et Aboœocrito Boeotarche ab Aetolis caeso: Corinthum vero ea in praetura non cepit, sed vt ex iis, quae supra tradidi, colligitur, anno Achaico 38. Olympiadis CXXXIV. 2. anno inito.

IV. Nunc reliquas Arati praeturas persequemur. Plutarcho (3) et Polybio testibus, Aratus multas praeturas aut continuatas aut alternis annis gessit, donec in decima et septima praetura lento veneno a procuratore Philippi regis, Taurione, necatus est. (4) Plutarchus maxime alienatum a Philippo rege scribit Aratum, postquam ille classem Romano bello amiserat: tum enim regem infesto animo inuasisse Messenios, Arato vehementer Messeniorum vicem dolente. Polybius autem in excerptis mortem Arati ponit intra id tempus, cum M. Marcellus Syracusas expugnauit, et Philippus rex Lissum in Illyrico. Syracusae sunt captae, Q. Fuluius Flacco III. App. Claudio Coss. cum dies festus Dianae ageretur. (5) Hi Coss. fuerunt, A. Varroniano 542. ab Olympiadis CXXI. 4. anno, ita vt iis Coss. Olympiadis CXLII. 1. annus inierit. Philippo autem regi suspecto iam

Tom. V. Fff antea

(3) p. 1038. (4) Plat. p. 1047. Polyb. p. 722. (5) Livius. l. XV. 23

antea bellum denique illatum est Q. Fabio Maximo IV. M. Claudio Marcello Coff. (6) A. V. C. 540. Philippus Apolloniam cum classe adortus, sublatis velis vertit ex improviso et Oricum cepit. M. Valerius praetor Romanus ad Oricum venit cum classe instructa, urbem recepit, Apolloniae infestum regem per Q. Naeuium praefectum socium oppressit, inde classem ipse opposuit regiis. Cum se teneri sentiret Philippus, subductis aut incensis nauibus, Macedoniam terrestri itinere petiit, magnam partem inermi exercitu et spoliato. Res paullo ante hiemem gesta: classis Romana Orici hibernauit. Haec est illa Philippi regis classis, quam amissam fuisse Romano bello Plutarchus scribit. Post id vero res contra Messenios gestae et Aratus offensus. Porro etiam Lilius (7) Philippi in Illyrios bellum, quo bello Lissus est capta sub verem A. V. C. 544. M. Marcello M. Laeuino Coff. explicat. Fuit igitur Aratus veneno sublatus inter A. V. C. 542. et A. V. C. 544. Iam, si Philippus A. V. C. 541. Messenios fines, populi, sui quidem iuris, non alieno tamen ab Achaeis animo (8) inuasit, eo anno primum similtates inter regem et veterem eius amicum consiliorumque participem Aratum sunt natae, ob quas Arato lentum venenum paullo post a Taurione, vt Polybius ait, exhibitum, ex quo decimum et septimum praetor extinctus est. Vt Philippus rex Demetrium filium miserit cum aliquot nauibus in Peloponnesum, vt

is

(6) Lilius l. XXV. 40. (7) l. XXVI. 25. (8) Pausanias p. 350.

is astu et celeritate summa arcem Messeniorum occupauerit, Pausanias narrat. (9) Id necesse est, contigisse tempore aliquo, quo nauigari potuerit, nec tamen adhuc obfessum a Romanis fuerit mare. Puta me dicere sub A. V. C. 541 verem. His autem rebus gestis Philippum regem ipsum adfuisse ad Messenam, e Polybii excerptis teneo, (10) eodem quoque venisse Aratum cum Arato filio. Et fuit Aratus eo tempore praetor. Nam Plutarchus (*) scribit, Messenios seditionibus agitato, cum magistratus a multitudine dissideret: ὁ μὲν Ἀράτος ὑπέρεθ βουθῶν, ὁ δὲ Φίλιππος, ἡμέρα μίᾳ πρότερον ἐλθὼν εἰς τὴν πόλιν, non modo aluit seditionem, sed etiam auxit, vt apertam in vim erumperet. Si Aratus ἐβουθή, praetor fuit. Haec igitur est decima sexta Arati praetura. Anno post res in Peloponneso Philippus gessit nullas: imminabat enim Macedoniae M. Valerius praetor cum classe. Quid igitur tandem? quo anno dicemus Aratum praetorem XVII. fuisse? A. V. C. 542. an A. V. C. 543 Casaubonus extremam Arati praeturam posuit Olympiadis CXLI. 2. A. V. C. 539. quod cum iis testimoniis, quae produxi, pugnat. Cum optio alterutrius anni nobis est relicta, nihil aliud ad suspicandum de vero anno occurrit, quam veneni lenti mentio. Discessit a rege hostilia omnia metuens ab eo, qui priuatim in domum suam deliquerat, publice Messenios adfligebat, Achaeis insidiari videbatur, nulla fide, nullo

(9) p. 349. (10) p. 703. (*) p. 1050.

beneficiorum respectu. Philippus autem, vni e ducibus et familiaribus suis Taurioni negotium dedit, vt quam occultissime Aratum veneno aggredderetur. Is postquam in familiaritatem Arati irrepfit, cogitata perfecit: dedit autem venenum, vt ait Plutarchus, *λεντὸν, φέρμας τε μαλακὰς τὸ πρῶτον ἐν τῷ σώματι ἢ βῆχα κινῶν ἀμβλαῖαν, εἶτα ἕτως κατὰ μικρὸν εἰς φθορὰν περαῖνον.* Ergo non tantum veneno, sed etiam Taurioni tempus erat concedendum: veneno, vt grassaretur, Taurioni, vt se apud Aratum neque Philippo, neque familiaribus eius primum ad insidias, insinuaret. Quae mecum considerata sic habui, vt inclinaret animus, Arati praeturam extremam A. V. C. 543. inferendam potius esse, quam A. V. C. 542. Sed, vt infra ostendam, A. V. C. 543. praetor fuit, et vel sic satis temporis et Taurioni ad praebendam venenum et veneno ad nocendum tribui potuit, praesertim si extremo tempore praeturae decessit Aratus. Decessit, vt Pausanias tradit, (1) Aegii: inde corpus Sicyonem ductum honoresque diuini eius meritis decreti.

V. Venio nunc ad duodecimam praeturam Arati suo anno inferendam. Plutarchus scribit: (2) duodecimum praetorem male pugnasse contra Cleomenem ad Lycaeon. Elapsus autem, collectis e fuga copiis, Mantineam sociam Cleomenis urbem occupauit. Ad Megalopolin cunctari visus, oppugnans-

(1) p. 132. (2) p. 1043. Pausanias scribit p. 132. 539. ad Dymen fuisse pugnatum, vbi Aratus praetor agros habuit.

gnantibus Spartanis urbem. Lysides Megalopolitanus, qui cum in annum praeturam cum Arato petierat, iam antea infensus Arato, sine mandato praetoris aggressus Lacedaemonios, fortiter pugnans occubuit, invidia in Aratum redundante, veluti destituisset aemulum laudis. Quam ob rem annum exercitus stipendium praetori multam dixit. Ad exercitus raptim Aegium concessit, populusque Orchomenium vindicavit ignominiam deiectis Spartanis et Megistono Cleomenis vitrico capto. His rebus gestis Aratus praetura non modo decessit, sed eam etiam in perpetuum abiuravit: motus tamen postea Achaeorum discrimine recepit, ut infra declarabo. Praetorem fuisse duodecimum A.V.C. 531. Olympiadis CXXXIX $\frac{1}{2}$ ex sequentium annorum rebus colligitur. Nam post Arati hanc praeturam Timoxenum in magistratu illo fuisse, Plutarchus testatur: (3) post Timoxenum fuisse praetorem Hyperbaten, e Plutarchi Arato (4) et Cleomene (5) colligo. Hyperbate praetore, Mantinea amissa, Achaei ad Hecatambaeon in Dymaeis ingenti praefio fusi, acciderunt Cleomenem, quem pace facta, ducem sibi legerent. Hic vero Aratus, quod poterat, tum vi, tum artibus suis obtinuit, ut Cleomene deluso, res Achaea ad opem Antigoni tutoris spectaret. Ergo Cleomenes bellum Achaeis indicit, (nam antea magis tumultus, quam iustum bellum fuerat,) Pellenen oppugnat elapsoque Hyperbate praetore, vrbe potitur. Ar-

Fff 3

gini

(3) p. 1044. (4) p. 1045. (5) p. 811.

giui quoque et Sicyonii rebus nouis studebant: Corinthiorum violentas manus vix euasit Aratus. Inde Corinthii se suaque Cleomeni dederunt: Achaei vero ad Aratum frequentes conuenerunt Sicyone, praetoremque eum libera cum potestate, quod alii nemini honori datum, et cum praesidio delectorum adolescentium creauerunt. Hanc praeturam, quae, ut vides, decima tertia fuit, certissimis ratiociniis suo in anno constituere possumus, ex quo deinde rationibus subductis annus quoque duodecimae praeturae exhibit. Bellum hoc Cleomeonium Olympiade CXXXIX. gestum esse, fatis constat. Est vero a Cleomene indictum ipso tempore, cum Nemea celebrarentur, teste Plutarcho. (6) Ergo primo anno Olympiadis CXXXIX. Nam tertio anno eiusdem Olympiadis cum Nemea altera instaurarentur, ut e Polybio (7) constat, bello Cleomenico finis est impositus. Nemea autem tertio cuiusuis Olympiadis anno ineunte aestiua, primo exeunte hiberna erant. Hiberna, ut videtur, duodecimo secundi hiberni mensis die. Igitur praetura decima tertia Arati, orto bello Cleomenico, coepit sub anno secundo eius Olympiadis seu A. V. C. 531. cum ipso aestatis principio. Plutarchus de hac praetura, (8) *τριάκοντα μὲν ἔτη ἔ
τρία πεπολιτευμένος ἐν τοῖς Ἀχαιοῖς, πεπρωλευκῶς
δὲ ἔ
δυνάμει ἔ
δόξῃ τῶν Ἑλλήνων.* Iam quae sententia Plutarchi sit, vide. In reipublicae gerendae praeceptis, (4) *ἔ
τω, inquit, παρῆλθεν εἰς δό-
ξαν*

(6) p. 812. (7) p. 216. (8) p. 1046.

ξαν Ἀραῖος, ἀρχὴν ποιησάμενος πολιτείας τὴν Νι-
 κοκλέως τῆ τυράννης κατέλυσιν. Cum versatum in
 republica dicit, ab eo tempore, quo Nicoclen ty-
 rannum Sicyonium oppressit, isthuc quidem non
 plane significat, inde iam vsque in magistratibus esse
 coepisse, at Plutarchi tamen animo eam opinio-
 nem sedisse, non absurdus est, qui suspicetur. Illi
 autem triginta tres anni non possunt ab alio prin-
 cipio duci, quam ab eo tempore, cum praetura
 annua fuit constituta ab Achaeis. Nam in decima
 tertia praetura, vt vides, Aratus tertius et trice-
 simus praetor annuus fuit. Sic, puto, tempus ipse
 in commentariis insignauerat Aratus: non, quod
 tot annos magistratus gesserit, sed quod, hoc il-
 lius formae reipublicae spatium exstiterit. Ante-
 quam decimum et tertium praetor fuit, sub Ne-
 meis ludis, bello Cleomenico indicto, Aratus cum
 Antigono egit, vt auxilio veniret Achaeis contra
 Spartanos. Et cum Antigonus alia conditione
 quam tradendae Corinthi sese moturum non esse
 ostendit, Aratus misso ad regem Arato filio de
 foedere conuenit in eam conditionem, quod tum
 Corinthus auulsa a nomine Achaico Spartanis se
 dedidisset. (10) Auctumnus erat cum Antigonus
 aduentaret Cleomenesque exercitum haberet ad
 Isthmum; interea Argos per Aristotelem Argium
 proditione receperunt Achaei. (1) Dux memo-
 rabilis rei Aratus, sed Macedonicis cum copiis,
 vt priuatum eo tempore fuisse appareat. (2) Ci-
 uita-

(9) p. 804. (10) Polybius p. 191. 192. (1) Polyb. l. c. (2) Plut. p. 1046.

uitates aliae quae defecerant, metu perculsae redierunt ad foedus Achaicum: Cleomenes ne a Macedonibus et Achaëis includeretur, recessit, Antigonus Acrocorintho recepta hibernauit Corinthi et Sicyone. Ineunte vere Antigonus Tegeam mouit eaque vrbe et Mantinea Orchomenoque captis, ipse ad conuentum Achaeorum sub autumno profectus exercitum in hiberna dimisit. Haec igitur maximam partem perpetrata sunt, Arato praetore: erat adhuc praetor, cum Cleomenes otiosos arbitratus hostes in hibernis agere, Megalopolin admotis copiis cepit, primo autem vere fins Argiuorum inuasit. Initio denique aestatis, hoc est, cum praetor nouus Achaeorum inisset magistratum, Antigonus in Laconicam mouit, Cleomenemque tandem magno praelio vicit, in quo Philopoemenis adolescentis virtus eluxit, quem postea praetorem nominabo saepius. Cleomenes nocte, quae diem consecuta est, e Sparta aufugit in Aegyptum: vrbs capta, vetus reipublicae forma et disciplina restituta. Paucis diebus post, Antigonus, audito, Illyrios impressionem fecisse in Macedoniam, motis castris Argos venit sub ipsum tempus Nemei ludicri. Haec aestiua erant Nemea XII. Panemi siue Olympiadis CXXXIX. 3. A. V. C. 532. XVI. Quintilis secundum Doduell tabulas. Olympiadis CXL. 1. Lacedaemonii nouis rebus studentes Agesipolin et Lycurgum creauerunt reges: is annus, inquit Polybius, (3) erat a fugato-
Cleo.

Cleomene tertius. Ita omnia in hac parte chronologiae confirmata sunt. Illo autem anno, quo victus fugatusque est Cleomenes, Timoxenum Achaeorum praetorem fuisse, inuenio, vt paullo post dicam amplius. Ante Aratum praetorem duodecimum, in magistratu fuit Aristomachus Argiuis. Hoc plane intelligere mihi sum visus e Plutarcho. (4) Nam is narrat, Aristomachum Argiium tyrannum, cum Aratus eum ad societatem Achaicam pellexisset, spe praeturae proposita, quae gloriosior esset, quam tyrannis, aurem praebuisse conditioni, Lysiadem autem, qui tum praetor erat, vt suum isthuc meritum esset, Aristomachum sibi conciliaffe. Cum de summa rei ageretur in concilio, Aratus Aristomachum perculit, mox permisit tamen auctorque adeo fuit, vt non modo reciperetur, sed etiam, vt praeturam in proximum annum Aristomacho decernerent Achaei. Ea in praetura Aristomachus, inuito Arato, cum Cleomene tyranno Lacedaemonio similitates aluit, quae erupere in tumultum. Cum ad Pallantion Cleomenes se obtulit, Aratus autem Aristomachum absterruit, ne signa conferret, ea calumnia Lysiaes duodecimam praeturam petenti Arato se extorsurum putauit. Nihil tamen egit. Apparet autem e Plutarchi Cleomene (5) etiam; Aratum paullo ante Aristomachum praeturam gessisse. Nam cepit Caphyas Aratus: ea occasione Cleomenes cum copiis mouit, opposi-

Tom. V. G g tusque

(4) p. 306. 1043. 1047. (5) p. 306.

tusque Cleomeni est Aristomachus praetor. Habes ordinem rerum illum, ut non modo, quo anno Aristomachus praetor fuerit, intelligatur, sed etiam ut Aratus ante Aristomachum, ante Aratum Lyfiades collocandus sit. Hic Lyfiades tres praeturas gessit. Auctorem habeo Plutarchum. (6) Sed haec ceteraque quae inter secundam et duodecimam Arati praeturam intercessere, accuratius expendenda duco.

VI. Demetrius rex Macedoniae, quo anno Philippum filium orbem, Antigonum autem tutorem reliquerit, Polybius declarat, sub ipsum inquam tempus expeditionis Romanorum in Illyrios. Demetrius Illyriorum regem Agronem concitavit, qui suscepto bello haud dubie superior, nimis laetus ea felicitate, mortem commessationibus acceleravit, relicta in regno vxore Teuta. Teuta proxima aestate novas copias in Graeciam immisit, quo tempore cum Aethienses submississent Aetolis auxilia naualia, pulsi ab Illyriis, Marcum Carynensem, qui exercitum ductabat, amiserunt. Submersus enim est cum naue. (7) Eadem aestate Cn. et L. Coruncanius legati Romani de iniuriis expostulatum venere ad Teutam. Hi, dum redeunt, summis percussoribus caeduntur. Ea causa anno post Cn. Fulvius Centumalus L. Postumius Albinus Coss. cum exercitu profecti in Illyricum, vno anno bellum confecerunt. Obiit igitur

De-

(6) P. 1041. (7) Polybius p. 137.

Demetrius rex A. V. C. 525. Antigono Tutori Dexippus et Porphyrius annos XII. Eusebius XX. attribuunt. Antigonus autem, cum, vt supra demonstraui, A. V. C. 532 capta Sparta, raptim moueret in Illyrios, adulta aestate hostes acie vicit. Hic, cum lateribus non pepercisset clamando monendoque milites, sanguinem vomere coepit ex eoque morbo non multo post diem obiit supremum. (8) Ergo vix octo annos rebus Macedonicis praefuit et sub A. V. C. 553 fato functus est. Simul apparet, Marcum Carynensem A. V. C. 524 praetorem fuisse. Paulo antequam Aristomachus consilia de tyrannide ponenda communicauit cum Arato, hic Athenas occupauerat et Piraeum, Munichiam, Salaminem et Sunium datis CL. talentis Diogeni praefecto Macedonici praesidii, receperat. (9) Mortuus tum maxime erat Demetrius rex. Obiit autem A. V. C. 525. Et eo anno Athenis in concilium Achaicum receptis, praetorem, non Aratum, sed alium fuisse, diserte testatur Plutarchus. (10) Scribit enim, Athenienses, accepto, Demetrium decessisse, acciuisse Aratum: ὁ δὲ καὶ περ ἑτέρας μὲν ἀρχόντος τότε τῶν Ἀχαιῶν, tamen accurrit. Bene igitur in hunc annum Lysiadis praetura conuenit, vt qui superiori anno Arati factione a tertia praetura depulsus, tamen eum nunc aequo iure petere et consequi est visus. Marco Carynensi Lysiadem cedere oportuit, cum tertiam peteret praeturam. Obstitit enim Aratus priu-

Ggg 2 tim

(8) Polybius p. 215. 216. (9) Pausanias p. 130. (10) p. 1047.

tim infensus Lyfiadi. (1) Antea autem *παρ' ἐνιαυ-
τὸν ἦρχε μὲν ἐναλλάξ τῷ Ἀράτῳ στρατηγῶν Λυσιά-
δος*, ut ait Plutarchus. Sic Arati X. 1X. et VIII.
praeturam, simul cum duabus Lyfiadis ordinaui-
mus.

VII. Lyfiades antea tyrannus Megalopolita-
nus Aratum metuebat adeo, ut Antippo Argi-
uorum tyranno sublato, vnice in se versum
tandem leniendum obsequio et deponenda ty-
rannide censeret. Quod cum accidit, eo an-
no non erat praetor Aratus. Accites enim Me-
galopolin ad Lyfiadem venit, (2) quod eum futu-
rum non fuisse praetorem, puto. Consentit de-
nique ipsa fere ratio, ut Lyfiadem se suosque anno
Achaico 45 tradidisse, anno autem 47 praeto-
rem fuisse ponamus, quod non videntur paucis in-
teriectis diebus aut mensibus Lyfiadi praetori rem
publicam tradituri fuisse Achaei, quem paullo an-
tea oderant tyrannum: annus vnus interiectus elbere
poterat inuidiam. Igitur A. V. C. 518 a Lyfiade,
ut dicebam modo, Megalopolis est tradita Achaeis.
Et ita se gessit Lyfiades (seu ut Pausanias atque
Plutarchus *Λυδιάδης* et *Λυδιάδας*: quamquam nos
Polybiam potius sequimur, apud quem est *Λυσι-
άδης* et *Λευσιάδας* Dorice) ita, inquam, se gessit,
*ὡς Ἀράτῳ παρισωθῆναι τὰ ἐς δόξαν, ut citae di-
gnitate atque publica existimatione Arato nihil conce-
deret*, quod ait Pausanias. (3) Quod de Aristippo
ty-

(1) Plutarchus p. 1041. (2) Plutarchus p. 1041. (3) p. 657

tyranno dictum est, id vero explicatius edifferemus: aperiet enim nobis aditum ad patefaciendam nouam praeturam Arati. Aratus statuit, (4) sublato per insidias Aristomacho, Achaeos in libertatem vindicare. Prodito consilio, Aristomachus nihilo magis tutus, a seruis suis obtruncatur. Sed Aristippus tyrannidem occupat, frustra cum subitariis copiis Arato aduolante. Aristippus Achaeos, quod in pace arma cepissent, iudicio postulauit, priuatim vero vel in primis in seipsum. Arato, instinctu Antigoni Gonatse regis percussores submisit. Frustra tamen laqueos tendebat viro inter suos spectabili et gratioso. Aratus cum exercitu adortus Aristippum ad Charera fluium acri praelio pugnauit. Vbi hostilem exercitum auctum subsidiis tenuit, Cleonas sese contulit, eaque in vrbe Nemeorum ludicrum instaurauit. Haec Nemea aestiua. acta sunt Olympiadis CXXXIV. 3. anno meunte, mensis aestiui secundi die XII. In hunc solum annum illa Nemea quadrant. Nam in eiusdem Olympiadis primo anno exeunte, quae acta sunt Nemea hiberna, ea nondum ita laeta fieri Achaeis, vt Aratus Argos spectare possit. Immo post illa Nemea Aratus primum praetor res ad Corinthum gessit. Etiam Nemea hiberna Olympiadis CXXXV. 1. anni huc trahi non possunt. Nam eo maxime anno Aratus cum Aegolis bellum gessit. Plutarchus, (5) vt semel narrationem instituerat de rebus Argiuis,

G g g 3:

ita

(4) Plut. 1039; 1040. (5) p. 1041.

ita eam persecutus est, resque Megalopolitanas et Lyfiadis subiunxit, denique, quod omiserat eo in fermone, Aetolicum bellum attingit. Sane et Aristippi caedes et Lyfiadis res omnes post isthuc bellum collocandae sunt: non item illa Nemea. Nam in hunc ipsum primum Olympiadis CXXXV. incidere non poterant, quia Aetolico non Argiuo bello distinebatur Aratus: neque in tertium annum eius Olympiadis, post Aetolicum bellum A. V. C. 517. quoniam duobus annis ante et amplius Antigonus Gonatas rex iam obierat, quem tum maxime, cum eas res ad Chareta gessit Aratus, superstitem fuisse, Plutarchus declarat. Doduellus rationes perturbavit. (6) Putat enim Aratum Olympiadis CXXXII. $\frac{1}{2}$ primum fuisse praetorem; ea autem in praetura bellum Aetolicum esse gestum censet. Hoc de bello Aetolico repugnat omnibus rationibus nostris, quas puto satis esse firmatas. De prima praetura Arati atque secunda multis iam supra diximus, quo in loco Polybii quoque testimonium, quod offensionem fuit Doduello, expendimus. Nunc vide alia, quae Doduello obstant. Aratus persuasit Agidi Lacedaemoniorum regi, ut societate cum Achaeis inita, Aetolos a Megaricis finibus depelleret. Cum ad Corinthum conuenissent et Agis censeret pugnandum esse cum Aetolis, antequam Peloponnesum inuaderent, Aratus obstitit, ὅτι βέλλιον ἤγατο τῆς καρπῆς χερδὸν ἁπαντὰς συγκεκομισμένων ἤδη τῶν γεωργῶν, παραελθῆν

(6) In Cyclis p. 323.

ελθῆν τὲς πολεμίας. Agis offendit se facturum, quod visum esset Arato, ἢ γὰρ πρεσβύτερόν τε εἶναι ἢ στρατηγῆν Ἀχαιῶν. Sic Plutarchus ex Arati commentarius. (7) Aratus, vt regem plane insententiam suam adigeret, magnam partem exercitus dimisit: Agis vbi sese deferi sensit et ipse se recepit Lacedaemonem: vbi per Agefilaum ephorum omnia turbata inuenit, ad Chalcioecum confugit, Cleombrotus alter rex in aede Neptuni sedit supplex. Leonidas ab exilio reuocatus, regnum, e quo fuerat pulsus, recepit, Cleombrotum exulare iussit, Agim insidiosè captum coniectumque in carcerem ephorum iudicio tradidit. Hi laqueo ceruicem regis eliserunt. Leonidas rex Agiatiden Agidis vxorem opulenti haeredem patrimonii, probis mulierem moribus et forma praestanti, vi coegit, vt Cleomeni filio suo nuberet. Illa focerum mariti sui interfectorem summo odio prosequuta est, περὶ δὲ αὐτὸν τὸν νεανίσκον ἦν ἀγαθὴ γυνὴ ἢ Φιλόσοργος. Iam paullo ante Cleomenicum bellum, Democrates exul Lacedaemonius, Cleomenis indolem spectans et vigorem aetatis, Arato vndecimum praetori (vt satis e Plutarcho (8) apparet, si cum rationibus nostris eius testimonium conferatur) dixit: ὦρα σοι ταχύγειν, πρὸ τῆς κέντρα Φύσαι τῆτον τὸν νεοσσόν. Fuerit licet hic νεοσσός annorum triginta, tum cum Aratus praetor XI. erat Olympiadis CXXXVIII. † ergo Olympiadis CXXXII. 2. vix annorum septem puer fuit: quā

πασ-

(8) p. 801. (8) p. 806.

malum potuit ducere Agiatiden? Quae, cum ita sint, non is extremus annus Agidis fuit. E contrario bellum cum Aetolis nullum gerere poterant Achaei adulto paulum Demetrii Macedonis regno. Nam contra illius potentiam Achaei Aetolique foedus iniuerunt. Ergo cum ceterae rationes consentiant, nihil autem repugnet, Aetolicum bellum gestum est Olymp. CXXXV. 1. seu, vt ex iis, quae e Plutarcho protuli, liquet, auctumno, messe iam conuecta ab agricolis A. V. C. 514. Post autem, vbi Demetrius Antigono Gonatae successerat, Athenas aggressus est Aratus, (9) sextum praetor.

VIII. Redeo ad Aetolicum bellum. Ab Corintho, vt dixi paullo ante, socios dimisit Aratus, ipse denique recessit: Agis rex nonnihil moratus, vt magnum ostentaret et Spartano dignum animum, tandem et ipse se recepit. Per hanc opportunitatem Aetoli Peloponnesum ingressi Pellenen ceperunt: at Aratus repente ea in vrbe adortus Aetolos lasciuientes, acie ante moenia vrbis vicit et cum hostium agmine irrupit in vrbem. Verum, inquit Plutarchus, (10) cum multae atque validae gentes conspirarent in Achaeos, Aratus statim cum Aetolis et pacem et foedus confirmavit. Has gentes puto, primum Macedonas, quos aequae metuebant Aetoli Achaeique, qui nunc defuncto Antigono Gonata, nouo sub rege Demetrio

(9) Plutarchus p. 1046. (10) 1046

trio videbantur in ordinem redigi posse, qui Aristippum Argiuorum tyrannum aluerant aduersus Aratum: praeterea Argiuos ipsos et Megapolitanos, qui sub tyrannis adhuc erant: denique Spartanos, qui Agide illa hyeme sublato, acta illius improbare videbantur. Quare nihil verosimilius, quam Aratum sequentibus etiam tribus annis fuisse praetorem, cum tot terrores Achaicum nomen circumfisterent. Noli autem mirari continuatas Arati praeturas summo in discrimine rerum. Plutarchus de Arato sic habet: (1) *tantum polluisse auctoritate, ὥς' εἰ μὴ κατ' ἐνιαυτὸν ἐξῆν, παρ' ἐνιαυτὸν ἀφ᾽ ἑαυτοῦ ἐρατήγηδόν αὐτὸν, ut, si non quotannis contingeret eum praetorem legi, tamen secundo quouis fieret.* Tum is ipse quoque, vbi narravit, quantis terroribus agitatus Aristippus tyrannus, quantum sibi cauerit, ad Aratum flectens sermonem, εἰ δ' ἔχ' ὄπλοις κατὰ βίαν, νόμῳ δὲ ὑπ' ἀρετῆς ἀναλάπασον ἀρχὴν πεποιημένος, *libere tamen egit.* Quid ἀναλάπασος ἀρχή, nisi continuatae praeturae? Et hoc commemorat Plutarchus ita, vt facile intelligas, cum extrema Aristippi spectare. Aristippum autem Arato VIII praetore oppressum esse, ex eo colligo etiam, quod mox Lysides id ipsum metuens, se suaque tradidit Achaeis anno Achaico 45. Praetorem tum fuisse Dioetam puto. Illum, inquam, de quo Polyaeus in stratagematis. (2) Διοίτας ἐρατήγηδός Ἀχαιῶν τὴν Ἡραίων πόλιν Φανερώς ἔλεν εἰ δυνάμενος, ἀφανῶς εἴλε, Φθείρας μεγάλαις
 Tom. V. Hhh λoις

(1) p. 1038. (2) l. II. extremo.

λοις χρήμασι τῶν Ηραιῶν τινας. Bene Casaubonus: *scribendum τὴν Ηραιῶν πόλιν et mox Ηραιεῖς*. Nam ita est τὸ ἔθνικόν apud Polybium et Pausaniam et Stephanum Byzantium: vrbs ipsa Ηρᾶ in Arcadia, haud procul a Messene, vt ille Stephanus, ad Alpheum fluuium, vt notum e Pausania. Nulli sane anno magis conuenit vrbs capta et attributa Achaeis, (recepti autem sunt ab Dioeta in fidem, ὡς εἰσαῦτις ὑπήκοοι γενησόμενοι ταῖς Αχαιοῖς,) quam huic anno. Reliqui enim anni nullum interuallum relinquunt Dioetae praetori. At cum Aratus XIII. praetor erat, Heraeenses ad Lacedaemonios defecerant. Nam quod Polybius testatur, (3) Antigonus Tutor Mantinea per deditionem occupata, Heraeam et Telphussam duxit, παραλαβὼν δὲ τὴν πόλιν τῆς πόλεως, ἐπέλογετο προσχωρησάντων αὐτῷ τῶν κατοικόντων Aegium ad concilium populi profectus est. Mansit vrbs sub praesidiis Macedonicis, donec anno Achaico 57 Philippus rex, *reddidit Heraeam et Triphyliam Achaeis*, vt ait Liuius. (4) Fuit igitur antea Achaeorum Heraea, quam ad Lacedaemonios, inde ad Macedonas traducta est.

IX. Reliquae sunt praeturae duae Arati, decima quarta et decima quinta, vtraque facile expedienda. De decima quarta prius dicam paucis. Celebris ea est clade Achaeorum ad Caphyas accepta. Aetoli post Antigoni Tutoris mortem inuasere

(3) p. 194 (4) l. XXXII 5.

uasere Messenios anno Achaico 35. cum Timoxenus praetura nondum abiisset, (5) Aratus autem prator esset designatus. Eo lentius peragente negotium, Aratus quinque diebus anticipato magistratu mandata dedit ad ciuitates, vt Megalopolin conuenirent, qui arma possent ferre. Inde duxit in Aetolos et clade maxima ad Caphyas est adfectus. Aetoli victoria vsi, Pellenenses et Sicyonios agros populati, per Isthmum discessere domum, quod aestas vtique vergeret et Philippum aduentare fama esset. Philippus Corinthi congregatis sociis, bellum in Aetolos decernit, quod ex eo sociale dictum. Paucis post diebus solemne concilium Achaeorum conuenit, in quo Aratus omnibus probris sententiisque profcissus, populum dicendo et commemoratione rerum suarum placuit. Id concilium Olympiadis CXXXIX. 4. habitum fuisse disertè tradit Polybius, (5) sic inquam vt vergerit in Olympiadem CXL. Interim Aratus e decreto concilii socios in arma concitat, exercitum conscribit, bellum parat. Polybius istius anni notam quoque indicat, quod tum Saguntini ab Hannibale petiti fuerint, (7) sed ita tradit, vt appareat eum res Carthaginenses accommodare ad Achaicas. Primum enim refert Aratum Arati filium patri successorem datum, (8) eo autem praetore Saguntinos petiisse Hannibalem. Saguntus oppugnari coepit M. Liuius, L. Aemilio Coss. vt Polybius Liuiusque memoriae prodiderunt. Horum

Hhh 2

con-

(5) Hist. p. 1049 Polybius p. 383. (6) p. 394. (7) p. 413. 425. (8) p. 424

consulatus incidit in A. V. C 535. ab Idibus Martiis, ut tum erat, cum adhuc procederet tum primus annus Olympiadis CXL. tum praetura Arati minoris superiori anno suscepta. Fuit Aratus filius patris dissimillimus et segnis imperator. Eo praetore bellum sociale coepit. Aratum minorem Eperatus Phareensis in praetura secutus est, depulso ab illius spe magistratus Arato patre per Philippi regis factiones, ut Plutarchus (9) et in primis Polybius (10) testantur. Eperato praetore Polybius scribit Hannibalem petiisse Italiam, P. Scipione Ti. Sempronio Coss. ipso teste Polybio (1) Olympiadis CXL 2. Bene hoc conuenit. Bellum sociale finem habuit Olympiadis CXL. 3. ut Polybius duobus locis testatur. (2) Tum autem praetor fuit decimum quintum Aratus pater. Nam Philippus rex segnitiam Eperati pertaesus, cum Arato Sicyone rediit in gratiam, ut anno post Eperatum praetor fieret. (3) Arati praeturas suis annis adsignauimus ita, ut multorum aliorum quoque praeturas constitutas simul habeamus.

X. Vnum ad extremum non praetermittam. Iosephus Scaliger in *ισαγιών συναγωγῆ* (4) narrat, Agin Eudamidae filium in Eleos mouisse, Megalopolin oppugnasse, Pellenen cepisse, praelio cum Mantinensibus commisso, et re male gesta incidisse in Aratum et tum exercitum amisisse, tum vitam. Haec testatur in canonibus isagogicis (5) Scaliger se edidisse, *ut gesta colligi potuere*, ne forte putes ex

MSto

(9) p. 1049. (10) p. 480. (1) p. 525. (2) p. 414. 617. (3) Polybiu I. V. c. 30. (4) p. 366. (5) p. 341.

MSto quodam fragmento haec eum edidisse. Nimirum secutus est Pausaniam, qui haec ita de Agide tradita reliquit, (6) vt ipsam aciem, qua ab Arato Sicyoniorum et Achaeorum duce atque Lydiade Megalopolitano victus fuerit Agis, instruat. Fuit, vt ait, eodem in praelio Podares dux Mantineensis, eius Podaris, qui aduersus Epaminondam pugnans cecidit ἀπόγονος τρίτος, quod nisi reddas pronepotis filium, sane non video, quomodo in istius Agidis tempora congruat, cuius res supra attigimus. Sed is Agis bello non cecidit: necatus est admodum iuuenis in carcere: ac ne gessit quidem bellum, nisi cum Achaeis ipsoque Arato contra Aetolos. Alio loco Pausanias, (7) cum dicit, Eleos inuitos secutos fuisse Lacedaemonios contra Athenienses in bello Peloponnesiaco, (vt constat etiam ex Thucydide,) tum vero addit, συνέστησαν δὲ μετὰ ἑὸς πολλὸν χρόνον ἐπὶ Λακεδαιμονίῃς Μαντινεῦσιν ὁμοῦ καὶ Ἀργείοις et denique res Philippi Amyntae regis ponit. Rursum alio in loco (8) bellum inter Lacedaemonios Eleosque causam accepisse prodit eo tempore, cum a Thebanis victi Lacedaemonii Olympico ludicro arcerentur. Denique alio in loco (9) hunc Agida Eudamidae sic designat, vt nullum sit dubium, quid senserit, quemue Agiden indicauerit. At cum Agin scribit, (10) Pellenen Achaeorum vi cepisse, ab Arato autem Sicyonio mox fuisse eiectum, hic ego vero Pausaniam tenco in manifesto errore, vt qui legerat Agide opem ferente Achaeis captam ab Aetolis

Hhh 3

Pel-

(6) p. 619 (7) p. 383. (8) p. 454. (9) p. 657. (10) p. 339.

Pellenen et mox recuperatam ab Arato. Quare nihil est verius, quam quod fecit infinitis in locis Pausanias, idem fecisse in Agide Eudamidaë multaque diuerforum temporum facta et ducum nomina confundisse, quod multis verbis refellere huius neque loci neque argumenti est. Satis est, si explodatur Pausanias, ne quem incautum fallat.

Caput Tertium

De octo Philopoemenis praeturis.

Philopoemen annum agens LXX. praetor octauum a Messeniis captus et veneno sublatus est. Fuisse eum hoc anno praetorem, Plutarchus sub extremo vitae neque dicit, neque penitus dissimulat. Scribit vero Philopoemenem Argis ex febre male habuisse, cum de Messeniorum tumultu adferretur, ad eum nuncium aduolasse nihilominus vno die Megalopolin stadia amplius quadraginta, atque inde cum equitibus quos voluntarios secum ducebat, ad Colonidem obsidione liberandam festinasse. Nihil praetorii in toto illo sermone, donec necato Philopomene subiicit, Achaeos ἐδ' ἠγλιῶν ἀναβολὴν ποιήσασθαι τῆς τιμωρίας ἀλλ' ἐλομένους στρατηγὸν Λυκόρταν impressionem fecisse in Messenium agrum, vbi necem eius vlti, combusto cadauere, cinerem magnam cum pompa funeris deuexerunt. Tulit autem vrnam, vt is quoque habet, Polybius Lycortae praetoris filius, cuius historias nunc magis lugemus adeo
cru-

crudeliter laniatas, quam Aethi Philopoemenem amissum. Iustinus scribit, (1) Philopoemenem antequam cicutam biberet, quaesisse, *an Lycortas praefectus Aethi euaisset*. Puta eum dicere praetorem, aut magistrum equitum. At Plutarchus tantum de Lycorta sine magistratus nomine quaesisse tradit. Cum autem adeo raptim lectus est praetor Lycortas, vides utique desideratum fuisse imperatorem. Et fuisse Philopoemenem praetorem, Livio tutissime credas, qui Polybium studiose expressit. Sic autem ait: (2) *cum bello superiores essent Aethi, Philopoemen praetor eorum capitur, ad praeeoccupandam Coronem profectus*. Addit cetera etiam, quae Plutarchus habet, septuaginta annos iam natum et diutino morbo viribus attenuatis equites nobilissimos gentis nuper a se lectos relinquendi pudore, eos in laqueos sese induisse. Addit deinde de Lycorta, quod nobis lucem praebet in Iustino fidum auctorem Trogum Pompeium secuto: *is*, inquit, *alter imperator Aethi erat*. Sane cum et Livius et Iustinus simul de Lycorta et equitibus quaesisse tradunt, argumento id quoque est, Lycortam tum ἱππάρχην Aethi fuisse. Iam Pausanias quidem (3) de Philopoemene, *ὡς δὴ τῶν Αἰθιωῶν ὄγδοον ἀπεδέχθη τότε ἡγεμῶν, a Messeniis captus est*: caue autem sic Pausaniam interpreteris, veluti tum maxime Philopoemen octauum praetor in sequentem annum fuerit designatus: nam sic alias etiam loquitur, cum non designatum, sed in magistratu fuisse aliquem

(1) l. XXXII c. 2. (2) l. XXXIX. 49. (3) p. 704.

aliquem tradit. Octauam hanc Philopoemenis praeturam fuisse, exploratum quoque habeo e numero superiorum praeturarum. Et Plutarchus discrete: ἤδη γεγονώς ἔτος ἑβδόμητοςόν, ὄγδοον δὲ τῶν Ἀχαιῶν στρατηγῶν. Quidam Graecorum insignem anni istius notam ponunt, Philopoemenem, Annibalem, P. Scipionem Africanum decessisse haud magno interuallo, anno vno, vt est apud Liuium. (4) Valerius Antias apud eundem, (5) Annibalem mortuum prodidit Q. Fabio Labeone, M. Claudio Marcello Coss. Alii alio in anno mortuum ferunt: item in Scipione maiore controuersia est, quae in Philopoemene esse potest nulla. Nam his plane Coss. casum eius refert Liuius. Liuium cum dico, puta me dicere Polybium, quem is accurate persequitur. Et quis accuratius poterat nouisse tempus, quam Polybius, qui Philopoemenem extulerat? Philopoemenis in locum Lycortas magister equitum successus est. Nam, quod supra e Plutarcho ostendi, vt nuncius de clade praetoris allatus est, repente a concilio Achaico iussus est praeturam suscipere. Hic vno impetu oppressit Messenios, de intersectoribus supplicium cepit, summam vero rei Messenicae ad concilium, quod tum Megalopoli conuenerat, reiecit. Δευτέρην σύνοδον vocat Polybius (6) vt intelligas, conuentum eum sub autumno fuisse. Ergo tempusprehendimus, quo tempore Messene in ordinem redacta est. Polybius (7) secundo Olympiadis CXLIX. anno legatos Achaeorum venisse Romam scribit,

(4) l. XXXIX. 50. (5) l. XXXIX. 56. (6) p. 1206. (7) 1202.

scribit, et tum maxime adfuisse Q. Marcium legatum Romanum, quem iisdem Coss. Senatus miserat, ut, quoniam Messene descuerat a concilio Achaico, res sociorum in Peloponneso adspiceret, cum e Macedonia redisset, in quam potissimum mittebatur. (8) Ex his facile intelligas, superiori hieme defecisse Messenios, ut peruagata rei fama, Roma excire eius exitu veris legatum Romanum posset. Venit primum in Macedoniam, tum in Peloponnesum, quod aliquantum temporis interualum requirebat: tamen cum Romam rediit, nihil de Philopoemenis exitu adferebat, e contrario Achaeorum potentiam criminantis in modum praedicabat. Fuit igitur initio aestatis, cum Q. Marcius in Achaeis ageret, nihil magnae rei susceptum: paullo post vero Philopoemen praetor captus et necatus, Lycortas suffectus sub autumno in concilio Messenios restituit. (9) Quis autem mihi repugnabit, si eundem Lycortam post suffectum magistratum, praeturam quoque sequentis anni ob rem bene gestam suscepisse dicam? Sic meritus erat, sic mihi videor Achaeos pernouisse, ut merita nulla sine praemio virtutis relinquerent.

II. Insignis quoque est secunda Philopoemenis praetura, in qua Nemeum ludicrum spectauit, non magno interuallo a pugna ad Mantineam, insigni honore et populi plausu exceptus, teste Plutarcho. (10) Nemea illa alia esse non possunt, quam Olympiadis CXLIII. 3. anno ineunte. Sic autem
Tom. V. Iii Plu-

(8) Linius l. XXXIX. 48. (9) Polybius p. 1206. (10) p. 362.

Plutarchus fatus est: Λέγεται τῆς τῶν Νεμείων πανηγύρεως συνεσώσης, στρατηγὸν τὸν Φιλοποίμενα τὸ δεύτερον ἢ νενικηκότα μὲν ὑπάλαι τὴν ἐν Μαυλικία μάχην, τότε δὲ χολὴν ἄγοντα τὴν ἑορτὴν κ. τ. λ. Loquitur de ea pugna, qua Philopoemen praetor Machanidam tyrannum Spartanum ad Mantineam vicit manuque sua interemit. Si istius pugnae tempus inuestigauero, praeturam quoque primam tenebo. Polybius (1) pugnam ponit, inter Asdrubalem Hannibalis fratrem a M. Livio, C. Claudio Nerone Coss. deictum, et res a P. Scipione in Hispania aduersus Asdrubalem Gisgonis gestas. Hae res perpetratae sunt sub verem, A. V. C. 548. cum Q. Caecilius Metellus, L. Veturius Philo idibus Martiis consulatum inissent, vt fatis e T. Livio ipsoque Polybio constat. Iam vero Philopoemen antequam Machanidam est adortus, tum emendandis populi moribus ordinandaque republica, quam Philippus rex nonnihil perturbauerat, tempus impendit, tum vero ἑὸς ὅλως ἔκλιω μῆνας menses non integros octo, vt ait Polybius, apparando bello. Si hos octo menses a primis auspiciis praeturae numeres, res gesta mense Decembri A. V. C. 547. sin aliquantum temporis ordinandae reipublicae praecipimus, vt hi octo menses solo in apparatu postea sint consumti, incidemus in ipsum verem, paullo ante vernum Achaeorum concilium. Quid autem potius credamus, quam media hieme nihil mouisse Philopoemenem ex hibernis vero, duxisse in Spartanos. Eo in
prae-

(1) Polybius. p. 279.

praelio magister equitum fuit Aristaenetus Dy-
 maeus. (1) Quid deinde est manifestum magis,
 quam continuatum Philopoemeni fuisse magistratum,
 si, vt Plutarchus tradit, non dudum victis ad Man-
 tineam Spartanis iterum praetor Nemeis interfuit
 Olympadis CXLIII. 3. ineunte. Nam si interfuisset
 praetor iterum Nemeis Olympiadis CXLIV. 1. ex-
 eunte, non poterat pugna ad Mantineam recen-
 tis memoriae officia in populo Achaico concitare.
 Anno autem post, quem potius legerint praetorem,
 quam Aristaenetum Diaeum, qui ad Mantineam equi-
 tum magister praeclare pugnauerat. Nam ob rem
 bene gestam summus magistratus ei debebatur, nisi
 Philopoemenis potius fuisset habenda ratio, cui
 continuaretur. Sic Lycortas, etiam re male gesta
 captoque Philopoemene praetore, e magistro equitum
 suffectus est praetor. Et persuadet hoc quoque nobis
 error Plutarchi, Aristaenetum hunc confundentis
 cum Aristaeno Megalopolitano, qui ex eo videtur
 ortus, quod vtrumque praetorem commemorari
 sciebat Plutarchus. Ante Philopoemenem Niciam
 praetorem ponendum duco. Et Liuius quidem Ni-
 ciae praeturam aestati illi inseruit, qua aestate M.
 Liuius, C. Claudius Coss. fuere. (2) Sed nescio quo
 seductum errore fuisse dicam. Nam ita fatus est ipse:
*Cum de finiendo Aetolico bello ageretur, nuncius affer-
 tur, Philippo regi, Machanidam Olympiorum solemne
 ludicrum parantes Eleos aggredi statuisse: praeuertend-
 um id ratus cum expedito agmine Corinthum descendit.*

Iii 2

Audi-

(1) Polybius p. 879. (2) l. XXVIII. 7. 8.

Audito Machanidam recessisse, *Aegium se ad concilium Achaeorum recepit.* Recte isthuc sane, quoniam, ante Olympii Iudicri tempus Aegii solemne concilium legendo praetori conuenire solebat. Reddidit tum Philippus Achaeis Heraeam et Triphyliam. Inde cum Achaeis repentinam impressionem classe deuectus in Aetoliam fecit. Ex Aetolia cum praeda Niciam praetorem Aegium remisit, ipse ad confirmandos sibi animos aduersus Attalum regem, Graeciam obiit. Vides sane eo in concilio praetorem fuisse lectum Niciam, Liuiumque res sub primam Olympiadem ineuntem transtulisse in alterum annum. Ante Niciam Cycliades praetor fuit anno Achaico 71. Nam Liuus (3) sic ait: *Solemni Nemeorum peracto, paucisque additis diebus Dymas est profectus Philippus: Cycliadas, penes eum summa imperii erat, Achaicae ad Dymas regi occurrerunt.* Paucis post diebus ad Larissum fluium pugna cum Aetolis, Eleis Romanisque acerrima commissa, (4). Philippus rex fusus est. Fuisse tum magistrum equitum Philopoemenem, Plutarchus testatur. (5) Quod cum vix commemorasset Liuus, tum vero *exitu huius anni, inquit, T. Quinctius Crispinus Cos. ex vulnere moritur.* Quae quidem longe grauissima est offensio. Nam Nemea dixerat, non sane ea, quae acta sunt Olympiadis CXLIII primo anno exeunte, quod omnes temporis istius rationes penitus conturbaret et in M. Liuii C. Claudii consulatum incideret: sed ea Nemea, quae acta sunt superioris Olympi-

(3) II. XXVII. 31. (4) ib. c. 31. 32. (5) p. 360

Iympiadis tertio anno ineunte, hoc est A.V.C. 544. Ante Cycladen praetor fuit Euryleon, de quo Polybius in excerptis: (6) Ευρυλέων ὁ τῶν Αἰχαιῶν στρατηγὸς ἄπολμος ἦν ἢ πολεμικῆς χρέας ἀλλότριος. Tum vero, inquit, quia tempus est, ut ad rem Philopoemenis progrediatur, recte sibi factum videri, si mores et ingenium tanti ducis describeret. Hoc dum persequitur, καλῶσαθῆς ὑπὸ τῶν Αἰχαιῶν ἱππάρχης ἐν τοῖς προειρημέναις καιροῖς. Videt eum Euryleone praetore, de quo paullo ante dixerat, etiam magistrum equitum fuisse? Non diffiteor tamen, in excerptis Polybianis saepe difficultatem maximam nobis obuersari, cum de tempore quaestio est. Nam cum saepe ab instituto recedat Polybius, tum ubi recesserit haud facile deprehendas. Potest igitur fieri, ut Philopoemenes magister equitum fuerit tantummodo praetore Cyclada. Isthuc tamen ex excerptis Polybianis manifestum est, Euryleonem praetorem fuisse tempore aliquo inter expeditionem Hispanicam P. Sulpicio, Cn. Fulvio Coff. et Nemea, quae Cyclade praetore acta demonstrauimus, nullo sane alio, quam 68. anno Achaico.

III. Iam tertiam praeturam quando gesserit Liuius testatum reliquit. P. Sulpicio Galba, C. Aurelio Coff. (7) Cycladen praetorem fuisse tradit, cum Philippus rex ad Achaeorum concilium venit: *consultabant*, inquit, *de bello aduersus Nabutyranum Lacedaemoniorum, qui translato imperio a*

Iii 3

PBI.

(6) p. 1, 87. (7) Liuius l. XXXI. 25,

Philopoemene ad Cycliaden, nequaquam parem illi ducem, dilapsa cernens Achaeorum auxilia, redintegraverat bellum. Decretum est eo in concilio ut exercitus contra Nabin cogereetur. Simul Cycliadis alteram et Philopoemenis tertiam praeturam deprehendimus. Et Cycliaden artibus Philippi regis praeturam obtinuisse, Philopoemene repulso, e Plutarcho constat. (8) Aute Philopoemenem praetorem fuisse Lyfippum, vide ut cognouerim. Plutarchus, (9) Lyfippum praetorem, Messeniis expugnatis scribit mouere non ausum esse in Spartanos: at Philopoemenem priuatum suis cum ciuibus Messenen hostium potestati eripuisse. Nullam notam temporis apposuit: sed hunc 79 annum Achaicum nobilem illa praetura fuisse sic colligo. Polybius tradit, Machanida sublato, Nabin Spartae inuasisse tyrannidem et tres annos quieuisse ab externo bello, ciuibus opprimendis vnice occupatum, (10) quod tempus fere incidit hoc anno, cum, Machanidas caesus superioris Olympiadis anno secundo exeunte. Iam Philopoemene praetore, quem ab ipsa necessitate legisse videntur Achaeci, et Messene recuperata laeti, quieuit Nabis: Cycliade autem praetore, ut ait Liuius, redintegravit bellum. Haec quia optime cohaerent, mouent me sane, ut hoc, quo dixi, anno potius Lyfippum praetorem recenseam, quam superiori.

IV. Post tertiam praeturam Philopoemenes cernens Philippum regem sibi aduersari, neque
Achaeos

(8) p. 362. (9) p. 363. (10) p. 938.

Achaeos sibi satis aequos esse, animis in Philippum plus quam in libertatem versis, profectus est in Cretam, ut Gortyniis operam in bello nauaret: Philopoemenem anno Achaico 82 profectum esse inuenio. Nam Pausanias scribit, eum expectasse, donec noui magistratus legerentur, ubi sese excludi sensit, excessisse et ut Plutarchus declarat, eo maxime tempore, cum patriae periculum immineret a Nabide. Quare cum Achaei Aristaeum praetorem auxilio misissent, Megalopolitani in Philopoemenem graues sententias tulerunt, tamquam in desertorem patriae, Aristaeus autem etsi ab eo in republica dissidebat, tamen impediuit, ne quid grauius statueretur. Praetor autem Aristaeus (sic eum Polybius, (2) sic Linius, sic Pausanias, qui Megalopolitanum fuisse tradit, vocant, quorum apud me maior est auctoritas quam Plutarchi Aristaeum vocantis) anno Achaico 82 fuit, ut mox demonstrabo. Erant autem bello Romano flagrante Macedonia, tres factiones in Achaia, una res trahentium ad Philippum regem, principem habebat Cycliaden, altera Romanarum partium Aristaeum, Philopoemenem solam rempublicam et libertatem complectebatur. Philippus rex, ut tamquam mercede delinitis Achaeis magis obnoxiam sibi eorum rempublicam haberet, Cycliade praetore condiciones tulit de bello Spartano suis opibus

(1) Plut. p. 363. Pausan. p. 701. 702. (2) Ille quidem in excerptis Porphyrogenetis p. 1421. etiam *Αρισταίνετον* appellat, hoc vero potius Graeco Constantini grammatico, quam Polybio tribuerim. Ortus error, quod Aristaeus Diaeus confunderetur cum Aristaeo Megalopolitano.

bus conficiendo. Promissa regis insidiosa erant, eane causa ab ipso Cycliade sunt reiecta. L. Cornelio Lentulo, P. Villio Cosl. hieme, aut potius primo vere in Achaiam legatos misit Philippus, qui, inquit Liuius, *iusiurandum (ita enim pepigerant quotannis iuratos in verba Philippi) exigent: simul qui redderent Achaeis Orchomenon et Heraeam et Tripbyliam.* (3) Erat eo tempore adhuc praetor Cycliades, cui initio aestatis successit Aristaenus, qui et Megalopolitanos a Nabide liberauit et Romanam factionem defendens, Cycliadem pepulit. De eare Liuius ita habet: (*) *Elatiam obsidenti consuli rei maioris spes affulsit, Achaeorum gentem a societate regia ad Romanam amicitiam auertendi: Cycliadem principem factionis ad Philippum trabentium res, expulerant, Aristaenus, qui Romanis gentem iungi volebat, praetor erat.* T. Quinctium Flaminium Cos. dicit. Is magistratum inerat idibus Martiis. Iam licet eo tempore, tanta *προέμπτωσης* anni Romani, quantum Iosephus Scaliger et Dionysius Petauius quoque statuerunt, vt Ianuarius congruerit cum Septembri Iuliano, non fuit, expunxit enim hanc opinionem Ismael Bulialdus in epistola ad Gronouium patrem: tamen vnus mensis aut paullo amplius confusionem fuisse, nemo negare ausit. Reuera igitur initio Februarii Iuliani, ipseque veris A. Varroniano 556. consulatum inijt T. Quinctius. Venit autem Brundisio cum classe in Epium maturius, vt ait Patauinus ille pater historiarum, quam ante eum soliti fue-

(3) Liuius l. XXXII 5. (*) l. XXXII. 19.

fuerant consules. Delectus et prodigia procuranda non ita multos dies eum retinere potuerunt Romanae. Soluerit extremo mense Februario Iuliano, et post navigationem, vt is habet, quadraginta dies moratus, vno collocutus cum rege, tertio post hunc diem in faucibus Epiri summo praelio decertauerit, ante idus Apriles Iulianas, poterat victor discedere. Inde considera Liuium, quas res gesserit consul. Poterat circiter Kal. Maias obsidere Elatiam, eoue tempore cum populo Achaico agere per legatos, cum neque verna tempestas exisset, neque Aristaenus decessisset praetura. Fateor me quam arctissimis gradibus incedere in istius temporis vestigiis, sed ita me ipse Liuius cogit, qui adeo perspicue post ortum Pleiadum A. V. C. 556. Nicostratum fuisse praetorem demonstrat. Nam cum sequenti hieme Cos. ad Maliacum sinum prope Nicaeam Philippo cum rege colloqueretur, erat, vt Liuius refert, cum Philippo Cycliades ille praetorius Achaeorum exul, cum consule *Achaei duo Aristaenus et Xenophon.* (4) At cum ex iis ipsis hibernis consul Argos peteret ad colloquium cum Nabide, eodem, inquit, *Nicostratus Achaeorum praetor cum auxiliaribus paucis venit.* (5) Fuit igitur eo tempore Aristaenus priuatus, Nicostratus autem praetor. Exacto eo anno Achaico, seu vt Liuius, (6) initio veris cum Boeotis egit T. Quintus, vbi etiam Aristaenus praetor Achaeorum auditis suadere Boeotis societatem Romanam. *Ini-*
Tom. V. l. 32. Kkk

(4) l. XXXII. 32. (5) l. XXXII. 39. (6) l. XXXIII. 1. 2.

tio veris nondum poterat inisse praeturam Aristaeus. At siue in tempore aliquantum aberrauerit Lilius, seu alia qua causa Aristaeus maturius inierit magistratum, cogit tamen nos res ipsa, ut sic praeturas constituamus, ut in fastis constitutas vides. M. Porcio L. Valerio Coss. ab aestate praetorem fuisse Aristaeum, Lilius declarat. (7) Duxit enim illa aestate T. Quinctius aduersus Nabidem, Aristaeus autem cum Achaeis eadem in expeditione fuit. Poterat hic quoque nobis scrupulum iniicere Lilius, quoniam post hiberna Romana illico et concilium habitum de bello gerendo scribit, et Aristaeum praetorem nominat, tamquam superioris anni reliquam praeturam eo vere. At quod Lilius legenti occurret, tota illa aestate Aristaeus praetor Achaeos duxit. Unus hac in re scrupulus, quod Lilius tradit, (8) cum T. Quinctius bello confecto et Nabidi tyranno Spartanisque pace data exercitum reduxit Elatiam in hiberna, Argiuos ludicrum Nemeorum indixisse. Haec Nemea sunt hiberna, anno primo Olymp. exeunte, mensis hiemalis secundi die XII. At idem Lilius restatur, die stata propter belli mala praetermissum ludicrum, in aduentum Romani exercitus ducisque fuisse indictum. Nihil igitur scrupuli restat.

V. Redeo ad Philopoemenem. Hic vero tum maxime e Creta aduenit in patriam, cum T. Quinctius et Achaei Nabidem oppugnarent, illis Coss. illo, quo rem gestam esse demonstrauius anno. Testem habeo Plutarchum. (9) Is quidem etiam
sic

(7) l. XXXIV. 24. 25. 26. (8) l. XXXIV. 41. (9) p. 363.

fic ait: ἐφ' ὃν ἐνθάδε ἀπεθῆς ἄρχων. At non ita festinauere Achaei in legendo duce Philopoemene, quod eorum animos profectioe Cretica offendisset. T. Lilius (10) P. Cornelio, M'. Acilio Coss. praetorem Philopoemenem nauali praelio a Nabide victum scribit: is enim Antiochi regis aduentu elatus rebellauerat. Sed superiori aestate haec gesta fuisse et a Liuiio duarum aestatum res coniungi, manifestum est. Nam cum M'. Acilium Cos. traiecisse refert, tum vero rebus istis inserit Diophanem praetorem, (1) qui res aduersus Messenios gesserit. Illis Coss. quoque Nabidem tyrannum cecidisse scribit Lilius, (2) tum vero *Philopoemen audita caede tyranni profectus Lacedaemonem, cum omnia turbata metu inuenisset, societati Achaeorum Lacedaemonios adiunxit.* Plutarchus quidem refert, cum exercitu eum venisse Spartam et partem vi, partem gratia effecisse, vt Achaici corporis esse vellent ciues, vt eum tunc praetorem fuisse tibi persuadeas: at Pausanias rem tacit planissimam. (3) Commemorata enim Nabidis nece scribit, Philopoemenem aduolasse Spartam et cogisse Lacedaemonios, vt se attribui concilio Achaico paterentur, non multo post Titum aduenisse (T. Quinctium dicit, qui tum legatione fungebatur, minime vero, vt Pausanias habet, dux Romanorum eo bello fuit) et Diophanem Diaei filium Megalopolitanum, ἄρχων ἐν τῷ τότε ἡρημέ-
νον τῶν Αἰαίων, cui tum praetura mandata erat ab

Kkk 2

Achae-

(10) l. XXXV. c. 25. (1) l. XXXVI. 31. (2) l. XXXV. 35. (3) p. 703.
Plut. p. 365.

Achaeis, Lacedaemonem inuasisse. Philopoemen vero, inquit, καὶ περ ἐν τῷ παρόντι ἰδιώτης ὢν, quamquam *privatus erat eo tempore*, portas urbis claudi iussit. Ob quod meritum cum multa a Lacedaemoniis Philopoemeni tribuerentur, ille pecuniam reiecit suavitque, ut ea potius Timolaum, qui in Achaico conuentu plurimum auctoritate valebat, amicum sibi redderent. Eandem rem attigit Plutarchus.

VI. Rursum praetor Philopoemenes Cn. Manlio, M. Fulvio Coss. Testis Livi. (4) Graue eius decretum in Spartanos, videri ab iis foedus violatum: Spartani renunciandum societati decreuerunt mittendumque ad Fulvium Cos. Cephalleniam legatos, qui se suaque dederent Romanis. Ea causa ab Achaeis bellum Lacedaemoniis indictum: *ne extemplo gereretur, hiems impedit*, inquit Livi. Habes notam temporis, ut intelligas, haec accidisse intra concilium autumnale et initium hiemis. Nam paullo ante quae de loco concilii controuersia inter Philopoemenem et Damiurgos fuerit, a Livo relatum est. Cum Fulvius Cos. aduolasset postulassetque, ut de controuersia cum Spartanis legatos Romam mitterent, missi Diophanes et Lycortas. Is omnia Senatui permisit, hic ex praecipis Philopoemenis postulabat, ut Achaeis ex foedere et legibus suis, quae decreissent, agere liceret. Responsum a Senatu ita perplexum accepere, ut Achaei omnia sibi concessa iudicarent. Hac veluti victoria elati Achaei bellum gerendum decernunt.

Phi-

(4) I. XXXVIII. 31.

Philopoemeni, inquit *Liuius*, *continuatur magistratus*.
 Eo in magistratu exules Spartanos reduxit Lacedaemoniosque Lycurgi disciplina repudiata, Achaeorum instituta sequi iussit, muros ut diruerent, alia multa immitia mandauit.

VII. Reliqua est septima Philopoemenis praetura, quam vide ut indagauerim. Lycortas praetor fuit P. Claudio, L. Porcio Coss. ita ut successorem habuerit Philopoemenem octauum praetorem. Nam his Coss. tradit *Liuius* (5) legatos, quorum princeps Appius Claudius fuit, missos et ad Philippum et ad Achaeos venisse, Lycortam autem praetorem iis Clitore in Achaia dedisse concilium. Polybii excerpta (6) Olympiade CXLVIII. datum fuisse testantur, seu ipso initio praeturae. Missi sunt legati postquam initio illius anni, puta sub verem, Q. Caecilius ceterique legationem renunciauerant Consulibus Senatuique Romano. Ergo huic Q. Caecilio superiori anno Megalopoli dederat concilium populi Achaici Aristaenus praetor, (7) cum a Philippo rege veniens Caecilius pro Lacedaemoniis disceptaret. Eo in concilio Diophanes cum Aristaeno sentiebat, cum Philopoemene Lycortas et Archon. Aristaenus vir, quantum Philopoemenes in armis, tantum ipse ciuili disciplina et eloquentia potens: Romanorum vero, cum res Achaea patiebatur, studiosissimus. (8) Spectata fuit eius prudentia illo in concilio, in quo tum Caecilium, tum ceteros legatos audiuit. Erant legati alii, qui a

Kkk 3 Pto-

(5) l. XXXIX. 33. (6) p. 1188. (7) Polybius p. 1179. (8) ib. p. 1439.

Ptolemaeo rege, alii qui Roma a Senatu redierant⁹ Utrosque miserat Philopoemenes praetor. Ergo anno vno ante Aristaenum praetor septimum fuit Philopoemenes. Miserat autem Philopoemenes legatos Romam, postquam M. Lepidus Cos. ostenderrat, Senatui displicere, quae in Lacedaemonios statuta fuissent, (9) ut ex eo intelligas, quo anno praeturam gesserit Philopoemenes, qua in praetura belli Boeotici causas quaesivit, paene ut in vim erumperet. (10) Hunc in modum praeturas octo Philopoemenis ordinatas digestasque habemus.

VIII. Diodorus Siculus in excerptis Valestianis, (1) de Philopoemene sic scribit: πολλὰκις μὲν στρατηγίας ἠξιώθη, τεσσαράκοντα ἔτη τῷ πολέμῳ ἡγούμενος. Hi quadraginta anni procedunt a decima tertia praetura Arati. Tunc quoque Plutarchus (2) eum annos natum triginta in praelio aduersus Cleomenem cum equitatu Achaico mirifice se extulisse scribit. Praelium ipsum a Polybio descriptum habemus. (3) Plane haec concordant. At ab eo tempore si dicas rempublicam tractasse Philopoemenem, nihil hoc ad praeturas, aut alium magistratum quem gesserit. Nam ab ipso praelio profectus est in Cretam, nec rediit nisi Euryleone praetore, cum illico magistrum equitum eum legerrunt Achaei. Testis Plutarchus.

Caput

(9) Polybius p. 1173. (10) *ib.* p. 1174. (1) p. 298. (2) p. 358. (3) p. 208. *seq.*

Caput Quartum

De praetoribus post Philopoemenem usque ad euersam rempublicam.

Lycortam dixi Philopoemeni suffectum necem eius esse ultum, tum continuatam ei praeturam videri. Quantum in eo fuit, rempublicam confirmavit in futurum. (4) Anno Achaico 101. eundem fuisse praetorem Lycortam e Polybio, is Lycortae fuit filius, cognoui. Scribit enim in excerptis, (5) Ptolemaeum Epiphanem legatum misisse ad Achaeos cum amplissimis muneribus, ut societatem cum Achaeis iniret firmissimam: Achaeos cupide recepisse et post concilium ipsos quoque destinasse legatos tum alios, tum Lycortam: hunc autem ea causa διὰ τὸ κατὰ τὸν καιρὸν καθ' ὃν ἐποιεῖτο τὴν ἀνανέωσιν τῆς συμμαχίας ἃ Πτολεμαῖος, ἡραληγῶν τε τότε συνεργῆσαι αὐτῷ, quod cum foedus societatemque reparauit Ptolemaeus, ipse praetor fuit et enixe rem iuuuit. Igitur extremo tempore praeturae in concilio, in quo successor Lycortae datus est, de societate, inde etiam de Lycorta legato mittendo conuenit. Sed Lycortas fines non excessit, διὰ τὸ μεταλλάξαι Πτολεμαῖον περὶ τῆς καιρῆς τῆς τῆς. Decessit Epiphanes Olympiadis CL. anno secundo inito A. V. C 575. Fuit igitur Lycortas praetor anno superiori. Secundum Lycortam praetorem fuisse Hyperbatum Polybius testatum reliquit. (6) Is ex eorum factione fuit, qui

Ro-

(4) Polybius p. 177. (5) p. 1215. (6) p. 1216.

Romanis fauebant, auctor mittendi Romam legatum Callicratem, omnium Achaeorum gratissimum. Callicrates ut rediit, quia nondum percrebuerat vulgo, quam perniciofa adulatione Senatum Romanum armauisset in Graecos, praetor creatus est in sequentem annum, ut excerpta Polybiana proditum memoriae reliquerunt. Quod postquam de Lycorta praetore proditum est in Polybii excerptis, mox excerpta sequuntur de Hyperbato praetore, ea cum praefatione, ὅτι κατὰ τὸν καιρὸν τῆτον ἀναδόνητος Ὑπερβάτης τῆ στρατηγῆ διαβῦλιον, id nondum nos ita certos de tempore relinquit. At postquam etiam de Callicratis praetura narratum est, tum vero in excerptis, C. Claudii, T. Sempronii Coss. expeditiones recensentur, ut adpareat, nos veris annis praeturas adsignasse.

II. Eo tempore, cum iam moueret in Graeciam bellum Perseus rex, Xenarchus praetor erat, haud obscure iam antea non satis aequus Romanis, (7) nunc vero regem et res nouas non videbatur aspernari. Incidit vero, ut e Liuiio (8) intelligimus, praetura Xenarchi in aestatem, qua P. Scaeuola, M. Aemilius Lepidus Coss. fuerunt. Eodem teste Liuiio, (9) Xenarchi frater fuit Archon eiusdem in republica sectae homo, Aegirates, si is ipse est Archon, quem Polybius tradit, (10) postea legationem in Aegypto obiisse. Hic praeturam gessit eo tempore, quo Q. Marcius Philippus legatus Graecas ciuitates obiit, cum Perseo collocutus est de induciis, Boeotorum commune dissoluit et Argis in concilio ab Achaeis impetrauit,

(7) Polybius p. 1198. (8) l. XLI. 23. (9) l. c. cap. 24. (10) p. 1228.

uit, vt Chalciden praesidio suo tutarentur. Legatione ea Q. Marcius defunctus est κατὰ χειμῶνα, vt ait Polybius, (1) quod Liuius explicat, (2) *principio hiemis*. Et hic quidem legationem recenset P. Licinio, C. Cassio Coss. sed apparet plane, ante eos Coss. superiori aestate Q. Marcium fuisse in Graecia. Nam renunciata legatione principio veris P. Licinius Cos. in Graeciam cum exercitu profectus est.

III. Iterum praetor fuit Archon A. Achaico 112. Nam Polybius tradit, (3) A. Hostilium Procos. ex hibernis in Thessalia legatos misisse circumciuitates, qui etiam ad Achaeos peruenerint. Datum iis est concilium Aegii. Ab eo profecti in Aetoliam et Acarnaniam. Dum hic commemorantur, Achaei inter se consultant, quid facto opus sit. Decretum est, vt illico praeturam adiret Archon, attollentibus animos Achaeis, quod Hostilius superiori aestate rem male gesserat. Ea causa Romae quoque maturata sunt comitia creandis consulibus. Creati sunt Q. Marcius Philippus II. Q. Seruilius Caepio (4) ante diem V Kal. Februarias, vt Pighius Liuium restituit. Archoni praetori, qui vt casum a republica auerteret, Romanis auxilia mittenda esse suaserat, datus est magister equitum Polybius, (5) is cuius historias tanti facimus. Archonem praeturam magnis impensis sibi comparasse, Polybius quoque tradit.

IV. Magnae tum in Achaico populo erant auctoritatis, Arcesilaus, Ariston Megalopolitanus, Stratus Tritaensis, Xenon Patarenis, Apollonides

Tom. V.

LII

des

(1) p. 1228. (2) l. XLII. 44. (3) Polybius p. 1241. (4) Liuius XLIII. 11. (5) Polybius p. 1244.

des Sicyonius eiusdem cum Archone sententiae et Straton alterius factionis pro Perseo, Lycortas neutrarum partium. Erant praeterea etiam Diophanes, Hyperbatonus, Callicrates, Theodorides Sicyonius, Andronidas, Ageſias, Ariſtodamus, Philippus, Lyciſcus, Eureas, Charopus, Telecles Megalopolitanus, Anaxidamus, alii. Et quanta multitudo fortium et nobilium virorum fuerit, ex ipſa reipublicae ruina eſt cognitum, de qua equidem dicam paucis verbis, quia de hiſtoria rerum Achaicarum ſcribere non inſtitui. Callicrates, quem anno Achaico 103 praetorem fuiſſe oſtendi, anno ante legatus cum eſſet Romae, cauillando criminandoque vulnera patriae retexit. Hic primum cognouere Romani, poſſe fieri, vt oppreſſa libertate Achaica ipſi ſoli omnia pro arbitrio agerent. In bello cum Perſeo Achaicis auxiliis non admodum ſunt uſi Romani, quod infidam ſocietatem fore crederent, cum nonnulli e criminatione Callicratis ſuſpecti eſſent. Conſecto autem bello Macedonico, iam quaſi per otium diſſoluendi corporis Achaici conſilia agitabant. Perſeo deuiſto ex Achaia legati Callicrates, Ariſtodamus, Ageſias, Philippus, in Macedoniam uenere gratulatum de uictoria. Inde Q. Aelio, M. Iunio Coffe et decem legatis Romanis, qui ad ordinandas res Macedoniae uenerant, C. Claudius, Cn. Domitius proſecti ſunt in Achaiam. (6) Ibi uero criminoſe accuſati in concilio Achaei, tamquam Macedonicis rebus magis quam Romanis aequi, nominatiſque uo-

verbo.

(6) Polyb. p. 1284, Liuius. l. XLV. 31.

verbo omnes, qui bello cum Perse rege praetores fuissent. Xenon autem magnae vir auctoritatis in concilio surrexit fiduciaque innocentiae, quoniam et ipse praetor fuerat, se vero ostendit adeo nihil in Romanos deliquisse, ut vel Senatum Romanum iudicem non reformidet. Hoc dictum arripuit legatus Romanus, iussique Romam venire ad causam dicendam Achaei mille et amplius. (7) Ἐσπαθήγῃσα μὲν Ἀχαιῶν ἔ ἐγὼ, inquiebat Xenon apud Pausaniam, cui autem anno eum ego praetorem adscribam? Quoniam C. Popilio, P. Aelio Coss. bellum indictum est Perseo, aut ante priorem Archonis praeturam, cum glisceret bellum, aut ante secundam Archonis praeturam, cum et gestum est et confectum. Quo me vertam nescio. Post septimum et decimum annum trecenti et paulo etiam minus, qui soli ex omni illo numero supererant, dimissi sunt e carceribus, cum satis poenarum luisset viderentur. (8) Dimissi sunt igitur L. Marcio, L. Calpurnio Coss. Inde controuersiae cum Lacedaemoniis. Missus est Sulpicius Gallus, qui Lacedaemonios Argiuosque disceptantes conciliaret: is causam reiecit ad Callicraten, ipse ex auctoritate Senatus quam potuit plurimas ciuitates ab Achaico concilio auellere instituit. Fuit igitur tum praetor Callicrates. Modo item constaret, quo anno C. Sulpicius Gallus consularis legatus fuerit in Graecia. Constat autem ex excerptis Polybianis (9) et Diodori Siculi (10) et ex Polybii excerptis Peirescianis, (1) eum A. V. C. 598 apud Sardes legatum de Eumene rege iudicium quam acerri-

(7) Pausanias f. 548. 549. (8) Pausanias f. 549. seq. (9) p. 1298. 1299
 (10) legat. 21. (1) p. 144.

me exercuisse. Videtur igitur superiori anno fuisse in Achaia. Nam Polybius Peirescianus sic de eo: C. Gallus χωρίς τῶν ἀπὸ ἡθέρων ἀλογημάτων παραγενόμενος εἰς τὴν Ἀσίαν. Nulla sane alia imprudenter facta, quam quae in Achaia perpetravit. Fuit igitur Callicrates praetor anno Achaico 115. veluti in mercedem prodicionis magistratus ei delatus sit ab Achaeis Romano fulmine attonitis. Tandem Athenienses Oropios afflixerunt: Oropii Achaeos Menalcida praetore acciuerunt, e quo fonte extrema calamitas manavit. Habeo auctorem Pausaniam et ita habeo, vt extremae praeturae ex eo referri possint.

V. Menalcidas Spartanus, Diaeus, Damocritus, Diaeus iterum, Critolaus, Diaeus tertium, praetores successerunt, teste Pausania. Horum praeturae ordinandae sunt. Incipiam a Critolao. Ad hunc praetorem legati venere Romani, qui concilium gentis sibi vt daretur, postularunt. Critolaus eos reiecit ad sextum mensem et statum gentis concilium sub auctumno. (2) Venerunt igitur legati sub ipsis auspiciis praeturae. Inde Critolaus conuentum Achaeorum Corinthi indixit, vbi bellum esse gerendum cum Romanis decretum est. Q. Caecilius Metellus, pro praetore is Macedoniam tenebat, accepto nuncio, L. Mummius Cos. bellum mandatum Achaicum, maturandum duxit, vt belli Achaici confecti gloriam praeciperet. Primum per nuncios Achaeis edixit, vt quosdam alios populos, qui se a

con-

(2) Pausanias p. 557.

concilio Achaico seiunxerant, sui iuris esse paterentur, sic commissorum veniam consecuturos et aequas pacis condiciones. (3) Interea Metellus copias deducit e Macedonia, Critolaus vero pacis mentione repudiata Heracleam obsidet. Aduentante iam ex Macedonia Metello, Scarphean recedit. Ipso in itinere Metellus hostes affecutus cecidit. Critolaus nusquam neque inter viuos, neque inter mortuos repertus est. Liuius (4) veneno sibi mortem consciuisse prodidit. At Pausanias in palude ad Oetan montem forte demersum putat et incertus animi, multa alia in eum modum se suspicari posse ostendit, vt, quod verissimum sit, non adpareat. Hanc cladem alii ad Heracleam, alii ad Scarphean, Liuius ad Thermopylas acceptam ferunt. Scilicet inter Heracleam et Scarphean Thermopylae interiectae sunt, quas iam traiecerat, teste Pausania, Critolaus, cum eum Romani consecuti essent, vt clades illa ab tribus locis commode insigniri queat. Refellendus mihi quoque vno verbo est Flori error, (5) qui sic fatus est: *Critolai manum Metellus Cos. per patentes Elidis campos toto cecidit Alphaeo et vno praelio peractum erat bellum.* Nihil vsquam fani. Neque enim in Elide, sed longe extra Peloponnesum prope Macedoniam pugnatum est: neque vno certamine confectum bellum: neque Q. Caecilius Cos. fuit, sed propraetore Macedoniam ordinauit. Fuit enim praetor Macedoniae A. V. C. 606 vicitque Andrisum Pseudophilippum. Iulius Obsequens in prodi-

(3) Paus. p. 558. (4) epit. 52. (5) l. II. c. 16.

giis, Sp. Postumio, L. Pifone Coss. Olympionicon synagoge ad primum annum Olympiadis CLVIII. Praetorem rem gessisse, Velleius Paterculus, immo alii omnes produnt. Eodem tempore, dum in Macedonia Metellus praetor bello persequitur Andricum, Damocritus praetor Achaeorum nouus Spartanos petiit, vt Pausanias refert. (6) Iam cum Damocritus A. Achaico 133 praetor fuit, Diaeus autem anno post rebus Achaicis praefuit, vt e Pausania constat, tum vero Diaeum excepit Critolaus, vides Critolaum A. Achaico 135 lectum praetorem, eadem aestate fufum ad Thermopylas esse. Diaeo praetore, A. Achaico 132 legatis Romanis Corinthi datum concilium, in quo cum essent propemodum violati, ignominiose vtique habiti, causfam excidio vrbis praebuere. (7) Nam etiam hic in Floro error refellendus: *Critolaus causa belli, qui legatos Romanos, dubium an manu certe oratione violauit.* Diaeum dicere oportuit: Critolaus legatis Romanis in concilio nullum responsum dedit, iussis redire post sextum mensem: neque tamen vel verbo vel re molestus fuit. Iam et Menalcidae praeturam et Diaei primam vides recte collocatam. Mutuo enim sese omnes illae praeturae, quas produximus e Pausania, exceperunt. Postquam Critolaus cecidit, Diaeus, *Achaici motus primus auctor*, vt vere Liuius, ei suffectus, copias collegit et *ad Isthmon a L. Mummius Cos. victus est*, vt habet epitoma Liuii. Nam Metellus per Thebanum agrum, Megaram, inde ad Isthmum duxit. Dum se ad praelium accingit, Mummius Cos.

in

(6) p. 554. (7) Paus. p. 556.

in castra venit. Sic Pausanias. (8) Florus: *et vno praelio peractum erat bellum: iam et urbem terreat obfidio, sed cum Metellus dimicasset, ad victoriam Mummius venit.* Et S. Aurelius Victor: (9) *L. Mummius aduersus Corinthios missus, victoriam alieno labore quaesitam interceptit: nam cum illos Metellus Macedonicus apud Heracleam sudisset et duce Critolao priuasset, cum lictoribus et paucis equitibus in Metelli castra properauit et Corinthios ad Leucopetram vicit duce Diaeo.* Fuit sane in his rebus dissentio scriptorum classicorum, ne quid ab his, qui infra classem sunt, confictum putes. Nam in historia miscella, (10) Metellus praetor dicitur Achaeos Boeotosque socios duobus praeliis sudisse, vno ad Thermopylas, iterum in Phocide, illic viginti millia, hic septem caesa. Claudium puta Quadrigarium ea referre. Valerius Antias, inquit, *in Achaia pugnatum et viginti millia Achaeorum cum duce suo Dieuco cecidisse confirmat: at vero Polybius Achivus, quamuis in Africa cum Scipione fuerit, tamen quia domestica cladem ignorare non potuit, semel in Achaia pugnatum cum Critolao duce adserit: Dieucum vero adducentem ex Arcadia milites ab eodem Metello oppressum cum exercitu docet: igitur post extincta totius Achaiae praesidia euerfionem urbium Metello praetore meditante, Consul Mummius repentinus venit in castra.* Dieucus scribarum vitio est Diaeus praetor. Ceterum facile vides, Liuii hoc esse fragmentum corruptis deprauatisque verbis, vt multa sunt alia in historia miscella et Paulo Diacono. Controuersum reliquit Liuius, Metellusne an Mummius praelio vicerit Diaeum. Pausanias autem (11) Mummius tradit pepulisse Diaeum, Diaeum fugisse Megalopolin et occisa

(8) p. 560. (9) in. viris illustribus: c. 60. (10) p. 25, ed. Murat. (11) p. 560

occisa vxore, venenum hausisse: Mummiū die post pugnam ad Corinthum adfuisse, portisque apertis in summa perturbatione, non ausum ingredi, quod insidias metueret: tertio die vi cepisse et incendisse urbem. Plinius: (2) *capta est Olympiadis CLVI. anno tertio, nostrae urbis lcccviii*. Hic annus urbis conditae nos admonet, Olympiadem CLVIII. scriptam fuisse a Plinio. Olympionica Scaligeri ad Olymp. CLVIII. 3. *κατὰ τὸν ἀντὶν καιρὸν, ὡς τισι δοκεῖ, Κόρινθος κατὰ Μέρμυις καλεσκάφη*, et anno quarto, triumphum L. Mummi de Achaeis et Corinthiis ponunt. Sic Velleius Paterculus (3) eodem anno et Carthaginem et Corinthum excisam scribit Cn. Lentulo, L. Mummiō Coss. Ad Olymp. CLX. cum stadio vicit Diodorus Sicyonius, annum primum, Antitheo archonte, eadem Olympionicon synagoge *κατὰ τινος Μέρμυις τὴν Κόρινθον καθεῖλεν*. Id quale sit, Pausanias declarat, (4) cum eodem anno, eodem archonte, ne stadiōnica quidem alio adscripsit: *ὁ δὲ πόλεμος ἔχεν ἕτως τέλος*. Igitur e Pausania hoc inferuit Scaliger. Nam excisa Corintho, clades belli etiam alias vrbes absumpsit et forte Olymp. CLXI. primus praetor Romanus missus est in Achaia. L. Mummius Cos. quidem omnem e ciuitatibus popularem statum sustulit, remque publicam tradidit optimatibus, concilia quoque singularum urbium dissoluit: non multis tamen annis post, Romani sui cuique genti concilia restituerunt. Haec cum commemorauit Pausanias, *ἡγεμῶν δὲ ἔτι*, inquit, *ἢ ἐς ἐμὲ ἀπεσέλλετο*. Praetorem dicit Achaiae, cui etiam Graecia parebat, quae quondam Achaeos habuerat principes. OB-

(2) l. XXXIV. c. 2 (3) l. I c. 12. 13. (4) p. 563.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICÆ

ET

PHYSICÆ
IN RVSSIA
INSTITVTAE.

Tom. V.

M m m

CONFIDENTIAL
SECRET TO THE

CONFIDENTIAL
SECRET TO THE

ECLIPSIVM IOVIS SATELLITVM
IN OBSERVATORIO PETROPOLITANO OB-
SERVATARVM CONTINVATIO,

PER

Josephum Nicolaum De L' Isle.

| Anni | Stilo novo. | Tempore | | |
|------|-------------|---------|-------|--|
| | | H. | vero. | |
| 1735 | Maii 21 | 13 | 52 37 | I mmersio i. satellitis tubo Catadioptrico maiori obseruata. Obseruatio non admodum certa, ob nimium crepusculum, cælumque nebulosum & caliginosum. |
| | Aug. 16 | 9 | 19 32 | Emersio i. tubo Catadioptrico maiori visa, cælo admodum sereno et tranquillo. |
| | Oct. 10 | 6 | 31 50 | Emersio i. tubo Catadioptrico maiori obseruata. Cælum equidem erat serenum & tranquillum; Iupiter autem non admodum eleuatus. |
| 1736 | Iunii 1 | 13 | 30 21 | Immersio primæ Satellitis tubo Newtoniano obseruatæ tempus, si quartam minuti primæ par- |

M m m 2

t m

| Anni | Stilo. nouo. | Tempore vero.
H. ' " | tem exceperis, satis certum; Iupiter enim valde depressus, crepusculumque sat magnum erat. |
|------|--------------|-------------------------|--|
| 1736 | | | |
| | Iunii 21 | 12 50 0 | Immersio 4. tubo Newtoniano. Iouis altitudo admodum demissa, crepusculique magnitudo observationem ad minuti primi interuallum, reddunt incertam. |
| | Iulii 10 | 14 10 39 | Immersio 2. tubo Casadioptrico. Hæc obseruatio dubia, ob nebulam. |
| | | 17 13 40 43 | Immersio 1. tubo 15. pedum Campaniano, cælo claro atque sereno. |
| | | 40 53 | Tubo Newtoniano: |
| | Aug. 2 | 11 56 42 | Immersio primi Satellitis hoc momento obseruata: potius eiusdem occultatio à Iouis disco appellanda erat; quoniam unam ab altera, ob vicinitatem satellitis & Iouis, distinguere haud licuit. Cælum erat serenum, et Iupiter, meridiano siquidem proximus, in summa ferè altitudine. Tubum |

ECLIPSIUM IOVIS SATELLITUM 453

| Annus | Stilo nouo | Tempore vero
H. / // | |
|-------|------------|-------------------------|--|
| 1736 | | | bum Newtonianum in ob-
seruatione adhibui, per
quem satellitem intra plu-
rima minuta disco Iouis,
antequam penitus immer-
geretur, adhærentem ma-
gis magisque semet oc-
cultantem obseruauit. |
| | Aug. 22 | 8 50 58 | Emerfio 2. tubo Cata-
dioptrico. Obseruatio cer-
ta cœlo sereno. |
| | 29 | 11 31 12 | Ioue à nube, quæ eum
per 24. minutorum pri-
morum spatium occulta-
uerat emerfo, secundus
satelles iam, sed omni
suæ claritati nec dum re-
stitutus, conspiciebatur;
tubo Newtoniano. |
| | Sept. 13 | 7 51 37 | Immerfio 4. Satelles
hic iam à pluribus minu-
tis sensim imminutus ap-
parebat; quod autem ita
lentè fiebat, vt momen-
tum verum immerfionis
ad aliquot minuta secun-
da incertum sit. Præ-
terea occultationi pro-
ximus satelles iterum pau-
lo maiori lumine fulgere, |

| Anni | Stilo novo | Tempore vero. | |
|-------|------------|---------------|---|
| 1736. | | H. | ' " |
| | Sept. 23 | 9 5 30 | ac deinde illud iterum amittere visus fuit.
Hoc ipso momento, quo Iupiter, quem nubes per horæ dimidium visui eripuerant, apparebat, secundus satelles è Iouis umbra iam emergens conspiciebatur tubo Newtoniano, multò minori tamen luce quam cæteri satellites. Observationem hanc ventus vehemens reddidit difficillimam. |
| | Oct. 5 | 7 45 23 | Emergio 1. tubo Catadioptrico, satis accurata, coelo claro atque sereno & Iove Meridiano proximo. |
| 1737 | Iulii 4 | 13 39 55 | Immersio secundi, tubo Newtoniano. Crepusculum iam ingruerat satis forte. |
| | 9 | 12 51 1 | Immersio tertii, tubo Catadioptrico, cælo sereno. |
| | 22 | 11 39 42 | Immersio primi, tubo Campaniano 15. pedum. |
| | | 39 53 | - - - tubo Catadioptrico. Cælum sudum. |

EC LIPSIUM IOVIS SATELLITUM. 455

| | | | | |
|--------|----|----|----|---|
| Aug. 7 | 9 | 56 | 44 | Immersio primi, tubo Newtoniano. Cœlum per interualla nubibus obtegebatur. |
| 21 | 12 | 57 | 17 | Immersio tertii, circiter æstimata, namque 15. min. secundis ante hoc tempus Iupiter & Satellites à nubibus abicondebantur, cum tertius immersioni proximus, iam valdè diminutus appareret, tubo reflectente. |
| 28 | 15 | 43 | 26 | Immersio primi, tubo Newtoniano, intra aliquot minuta secunda difficulter æstimata, ob nimiam Satellitis & Planetæ vicinitatem. Lux etiam crepusculi aliquantum obstabat. |
| 30 | 10 | 12 | 18 | Immersio primi, tubo Campaniano 15. ped. |
| | 12 | 22 | | - - tubo altero 13. ped. |
| | 12 | 38 | | - - tubo Catadioptrico. |
| | | | | Cœlum erat apprimè serenum & quietum: ita tamen primus Satelles vicinus erat disco Iouis, |
| | | | | ut |

| Anni | Stilo nouo | Tempore vero | | vt dubitandi locus rema-
neret de vltimo immer-
sionis momento, intra
pauca minuta secunda. |
|-------|------------|--------------|----------|--|
| 1737. | | H. | ' " | |
| | Aug. 30 | 10 | 44 18 | Immersio secundi, tu-
bo reflectente. |
| | Sept. 19 | 8 | 20 30 | Emersio tertii; tubus
Newtonianus adhibeba-
tur, cœlo satis sereno. |
| | | 26 | 12 22 4 | Emersio tertii, tubo
Catadioptrico. |
| | | | 22 21 | - - - tubo 22. pedum,
cœlo serenissimo. |
| | | 29 | 14 42 43 | Emersio primi, tubo
Newtoniano. |
| | | | 42 41 | - - - tubo 22. pedum. |
| | Oct. 8 | 11 | 8 7 | Emersio primi, tubo
reflectente. |
| | | 17 | 7 33 45 | Emersio primi, tubo
Catadioptrico. |
| | | | 33 59 | - - - tubo 22. pedum:
cœlo defœcato. |
| | | 19 | 8 14 12 | Emersio secundi, tu-
bo 22. ped. cœlo sereno |
| | Nov. 6 | 8 | 50 12 | Immersio quarti, tu-
bo Newtoniano, cœlo
satis sereno: intra ta-
men aliquot minuta se-
cunda non poterat certò
diffiniri, ob nimiam mo-
tûs |

ECLIPSIVM IOVIS SATELLITVM. 457

| Anni
1737. | Stilo nouo. | Tempore vero
H. / // | |
|---------------|-------------|-------------------------|--|
| | | | tûs huius Satellitis tarditatem, et diametrum eius multo minus quam in aliis satellitibus conspicuam. |
| | Nou. 9 | 7 50 21 | Emerfio primi, iudicata; namque 20. tantum minutis sec. tardius hic satelles apparere incepit, tubo Catadioptrico, cum iam erat semiliberatus ab umbra, ita obstante nebula. |
| | 13 | 5 27 37 | Emerfio secundi, tubo Newtoniano, defocato coelo. |
| | 16 | 9 44 14 | Emerfio primi, tubo reflectente; coelo apprimè sereno. |
| | | 44 26 | - - - tubo Campaniano 15 pedum. |
| | | 44 28 | - - - tubo 23 pedum. |
| | 25 | 6 7 35 | Emerfio primi, tubo Catadioptrico, quae tamen citiùs accidere potuit per integrum quadrantem vnus minuti primi, cum trans nebulam tota haec obseruatio institui potuerit. |

N n n

OB-

OBSERVATIO DEFECTVS
LUNAE HABITA PATAVII AB I. POLENO,
TVBO OPTICO LONGO PEDES PARISIENSES
SEPTEM, Kal. APRIL. MDCCXXXVI.

| H. | /' | "/ | |
|----|----|----|---|
| 10 | 56 | 30 | P Enumbra occupat marginem Lunae. |
| 11 | 0 | 0 | Initium vmbrae ad Lunae limbum. |
| 11 | 2 | 48 | Vmbra tegit Grimaldum. |
| 11 | 7 | 12 | Attingit Aristarchum. |
| 11 | 8 | 22 | - - Keplerum. |
| 11 | 17 | 50 | - - ad medium Copernicum. |
| 11 | 27 | 54 | - - Archimedes. |
| 11 | 29 | 6 | Occupat Tychonem. |
| 11 | 42 | 30 | Medium tenet mare Nectaris. |
| 11 | 47 | 58 | Attingit Mare Crisium. |
| 11 | 53 | 12 | Tegit totum Mare Crisium. |
| 11 | 58 | 0 | Totalis immerfio. |
| 13 | 32 | 40 | Lux aliqua tenuis in Lunae margine. |
| 13 | 34 | 6 | Vera emerfio circa id tempus. |
| 13 | 39 | 18 | Grimaldus totus emergit. |
| 13 | 40 | 17 | Extra vmbra Galilaeus. |
| 13 | 44 | 16 | Aristarchus. |
| 13 | 48 | 15 | Keplerus. |
| 13 | 50 | 21 | Medium Maris humorum; (forfan: tantilld. plus.) |
| 13 | 55 | 26 | Copernicus. |
| 14 | 3 | 14 | Tycho. |
| 14 | 10 | 37 | Menelaus. |
| 14 | 13 | 8 | Totum Mare serenitatis. |
| 14 | 13 | 37 | Medium Dionysii. |
| 14 | 26 | 20 | Medium Mare Crisium. |
| 14 | 29 | 19 | Totum Mare Crisium. |
| 14 | 33 | 34 | Vifus effe vmbrae finis verus. |
| 14 | 35 | 0 | Iam finit emerfio ab omni etiam penumbra. |

F I N I S .



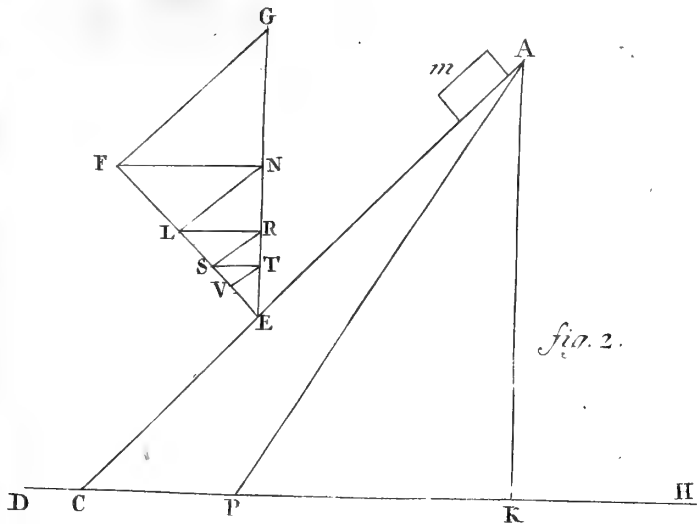


fig. 2.

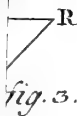


fig. 3.

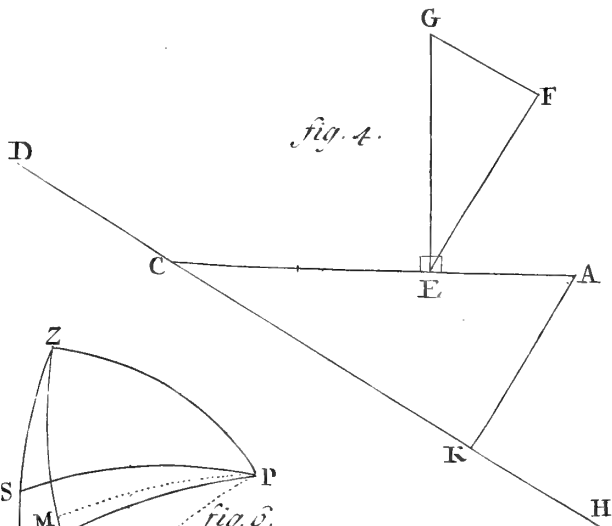


fig. 4.

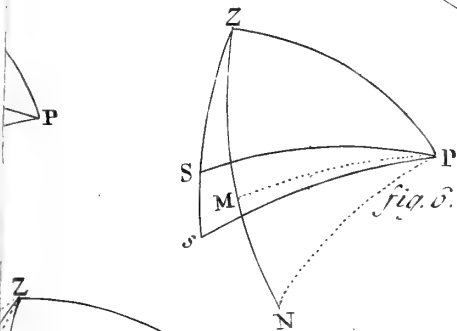


fig. 5.

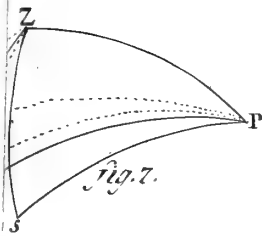
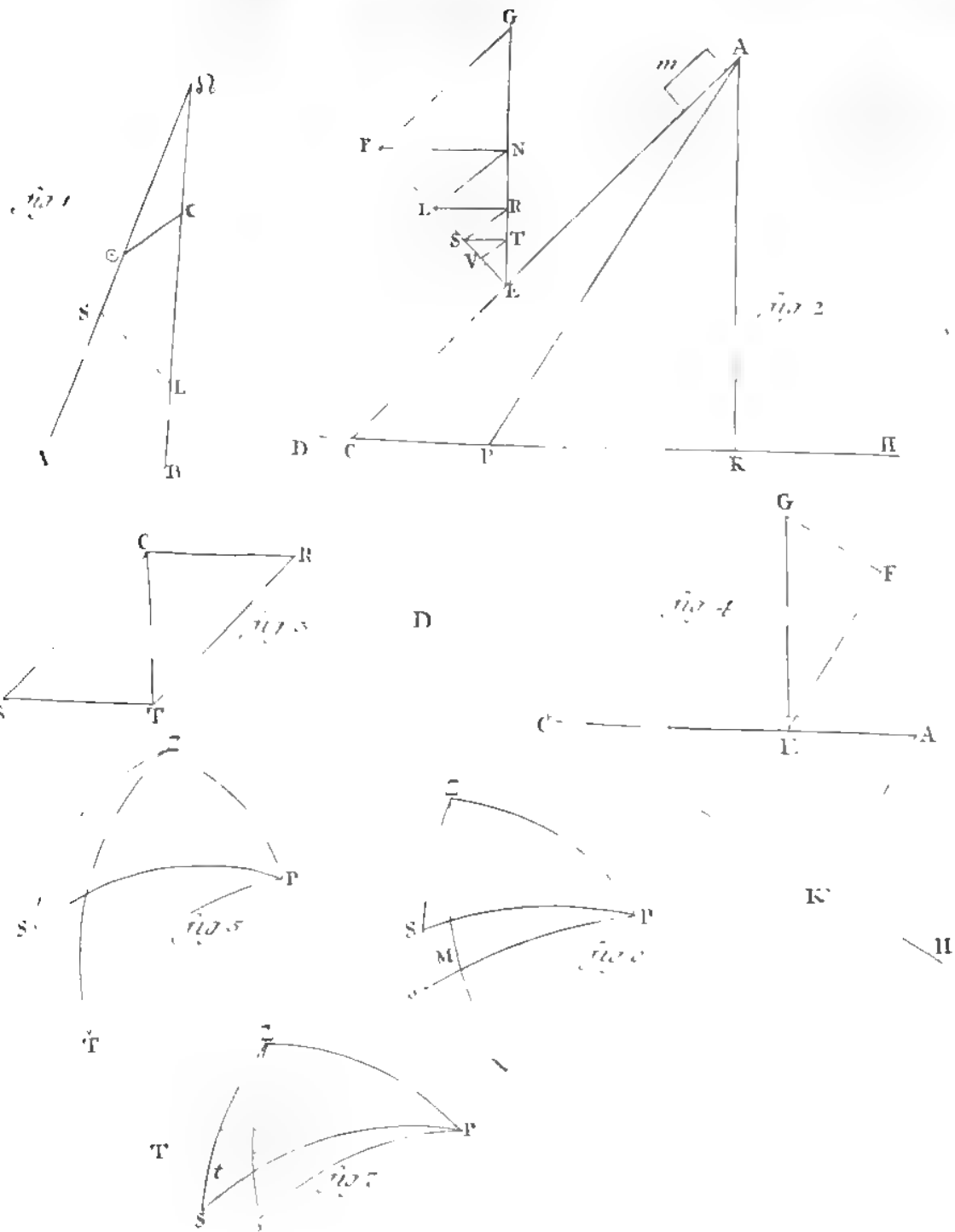


fig. 7.



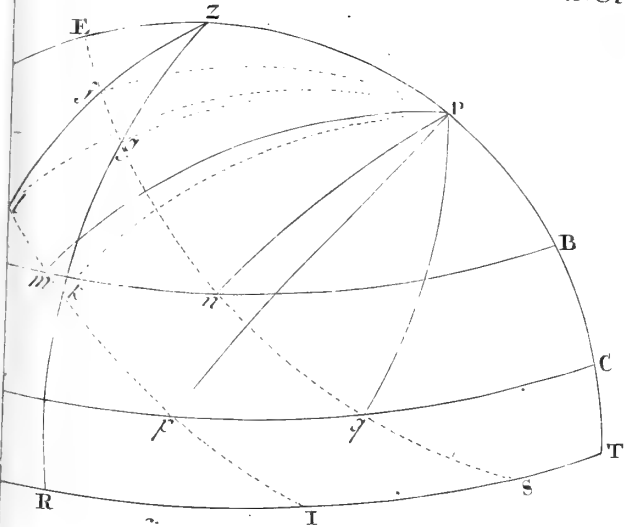


fig. 1.

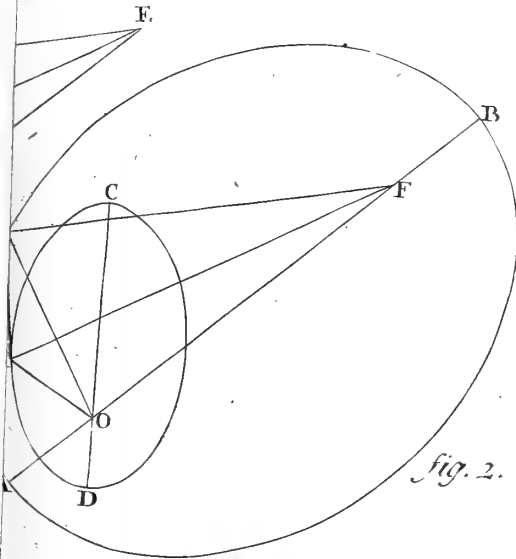
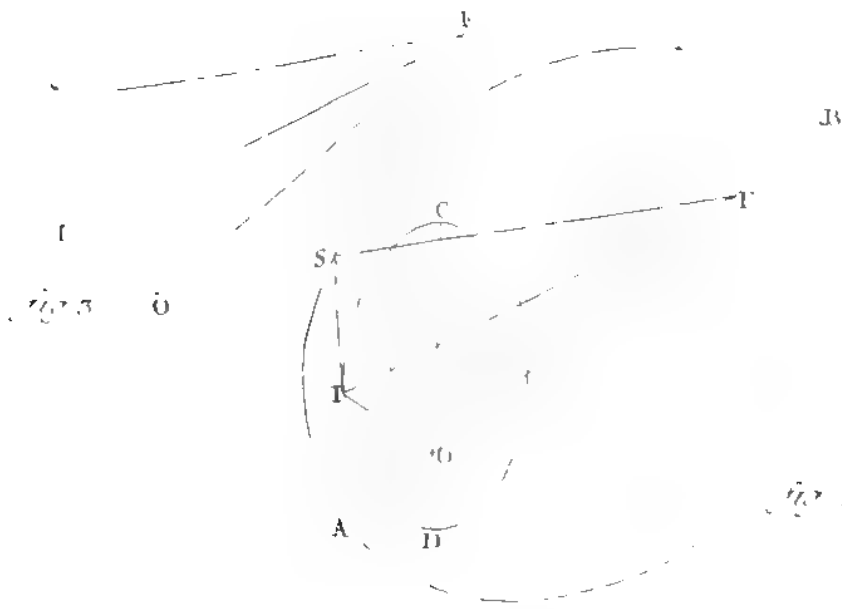
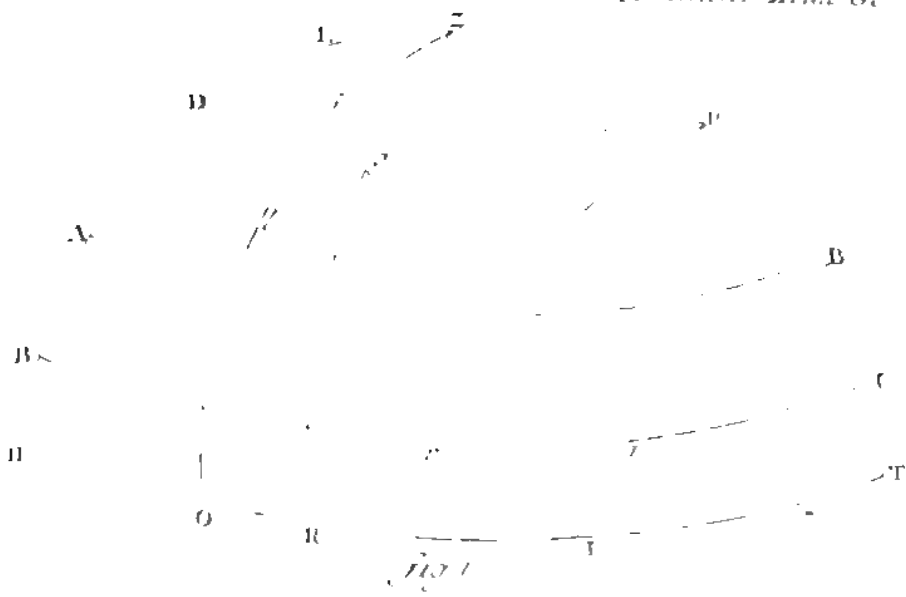
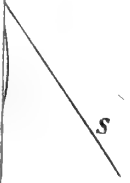
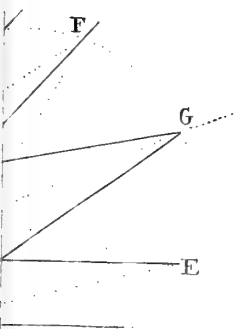
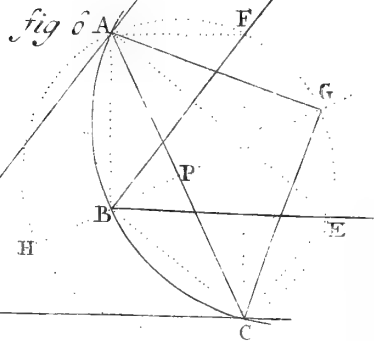
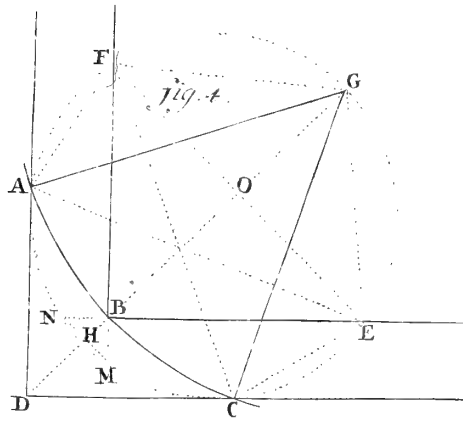
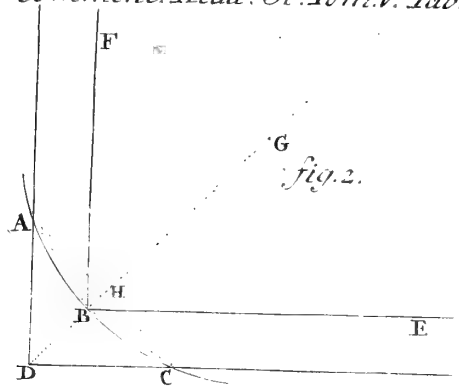
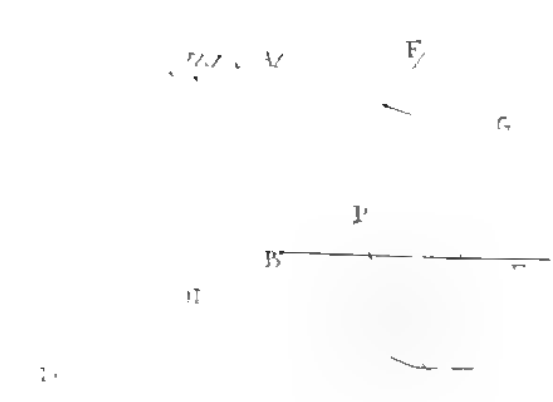
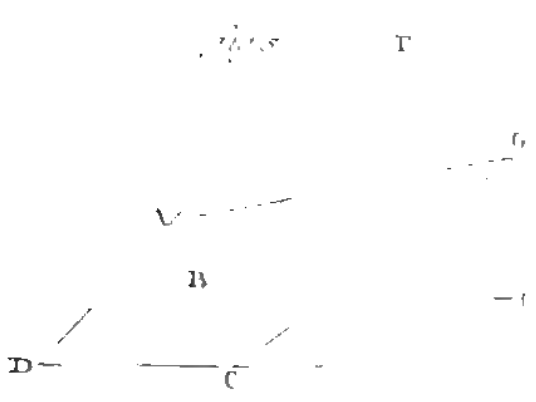
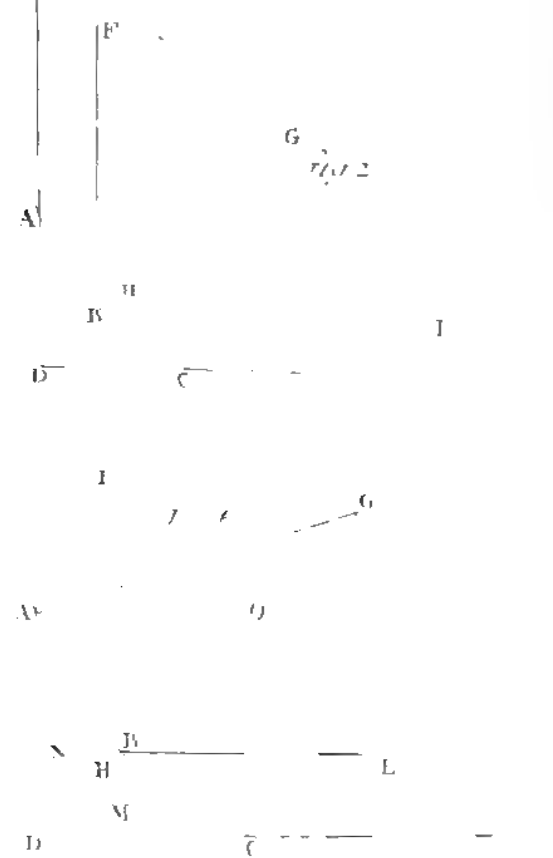
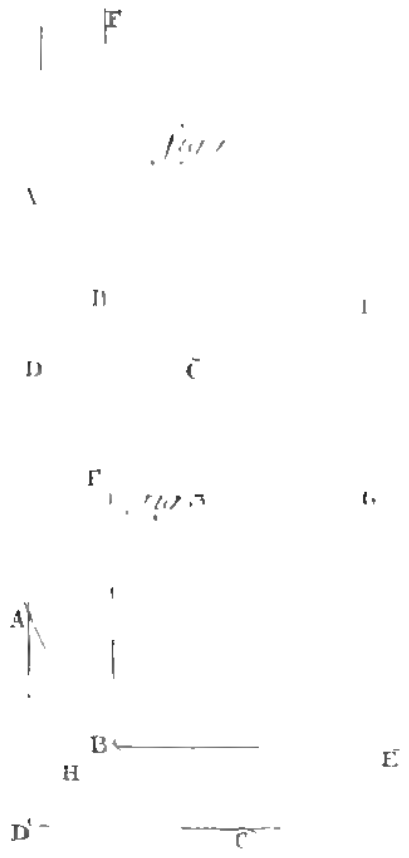
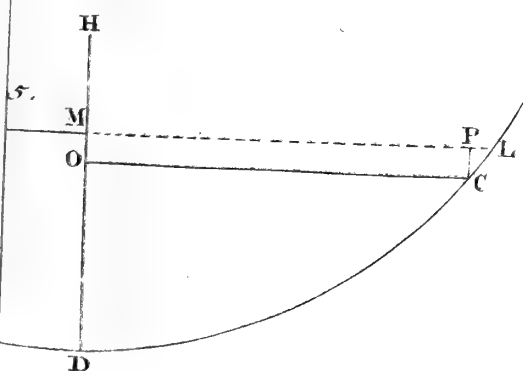
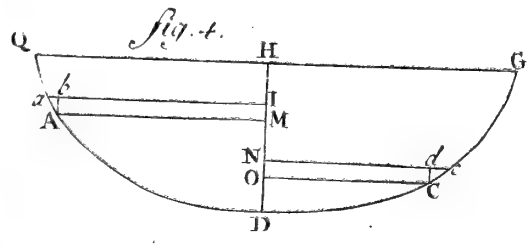
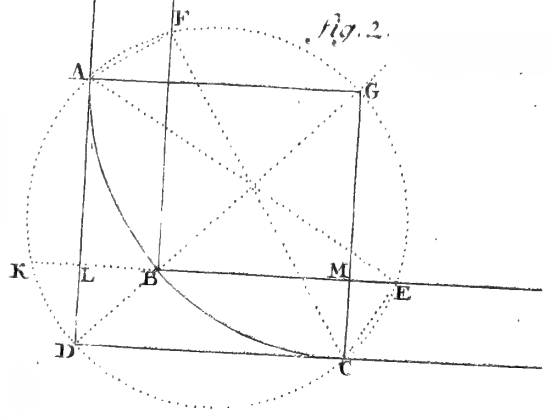


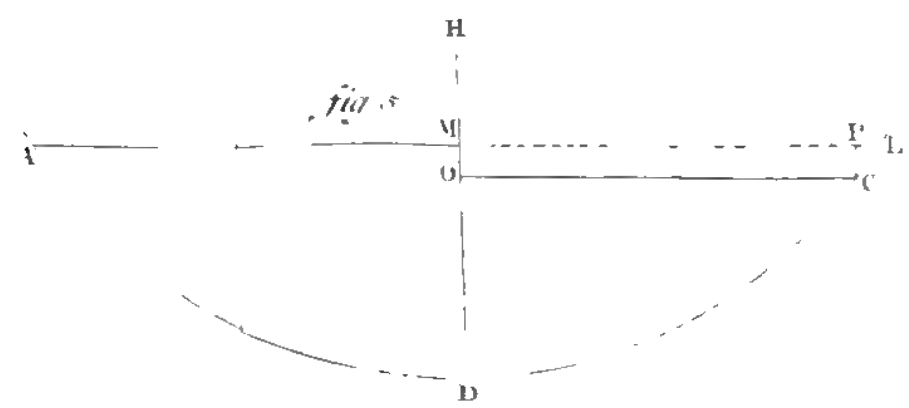
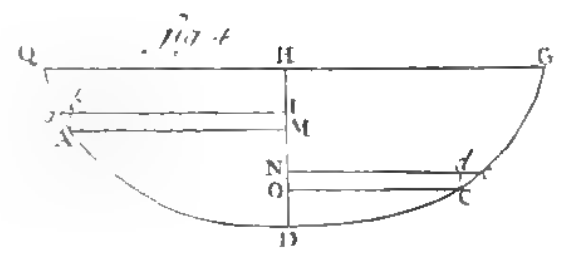
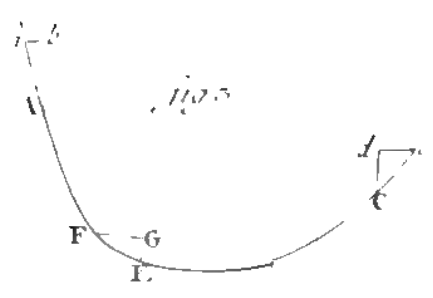
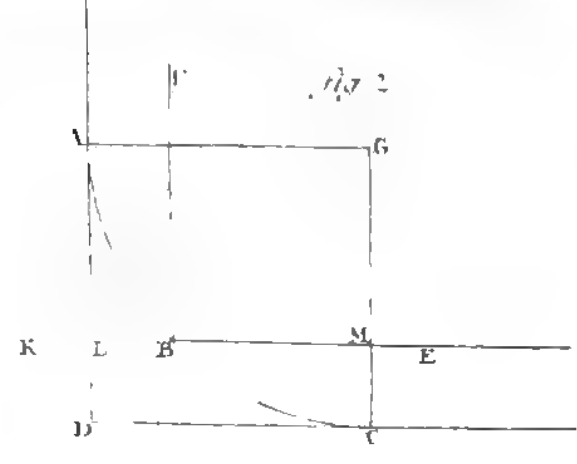
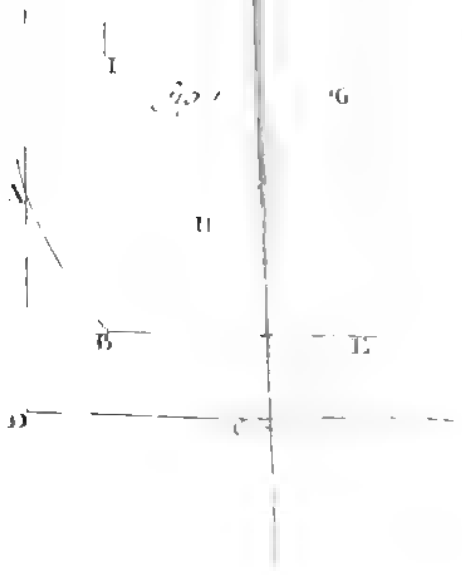
fig. 2.

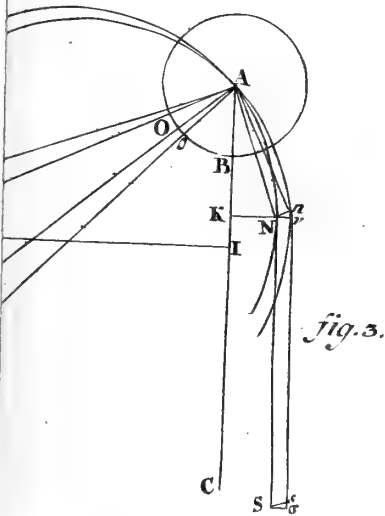
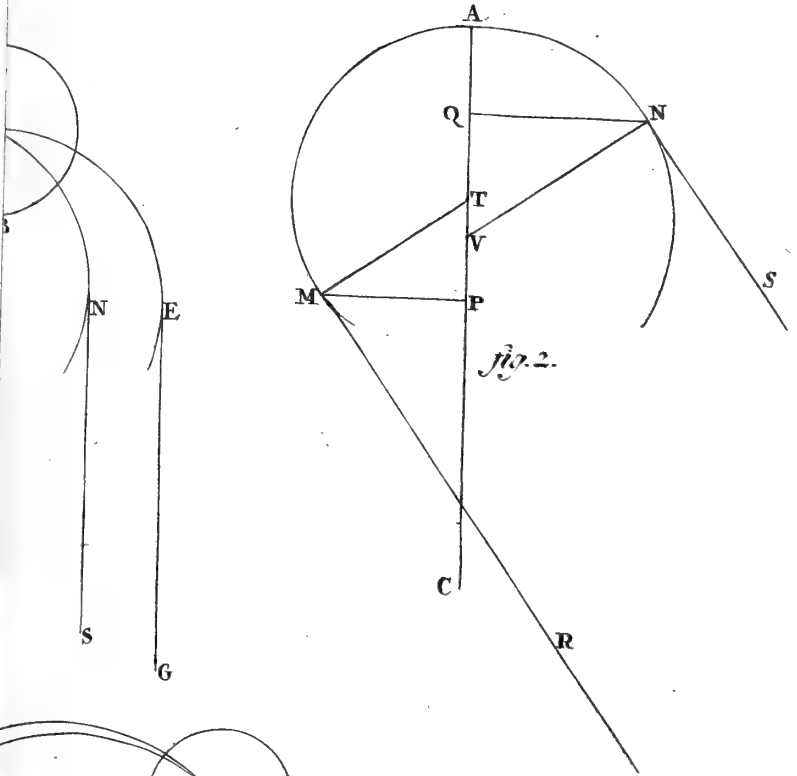


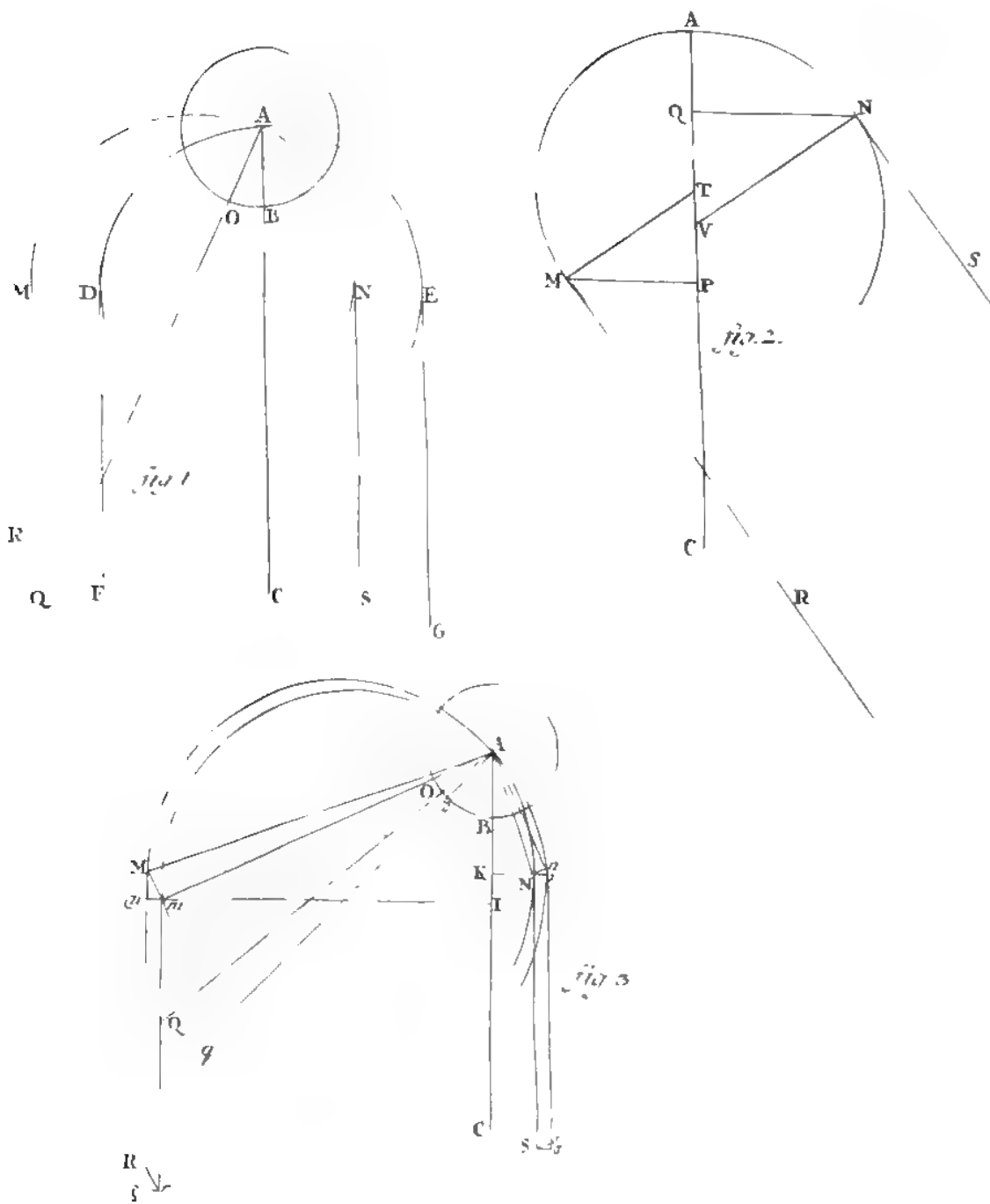












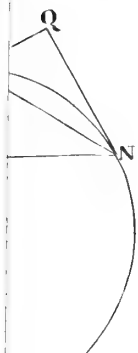


fig. 1.

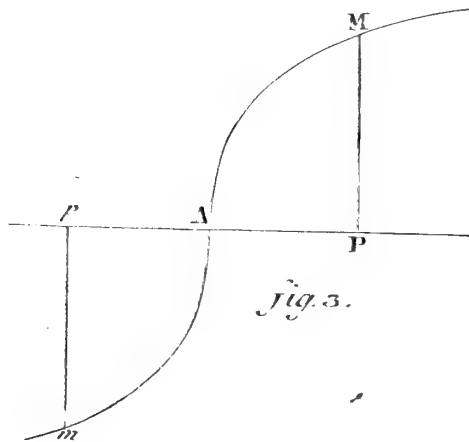


fig. 3.

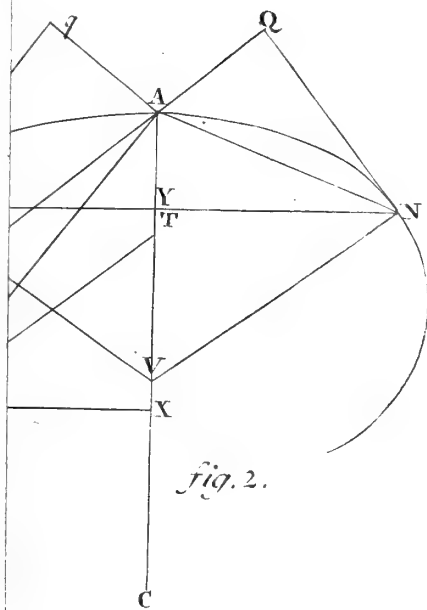
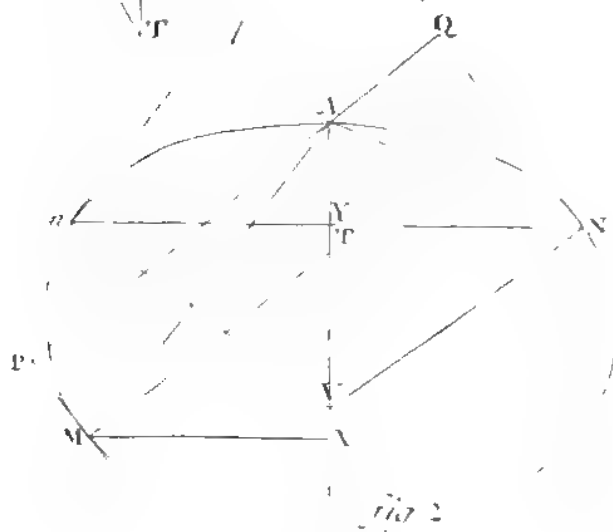
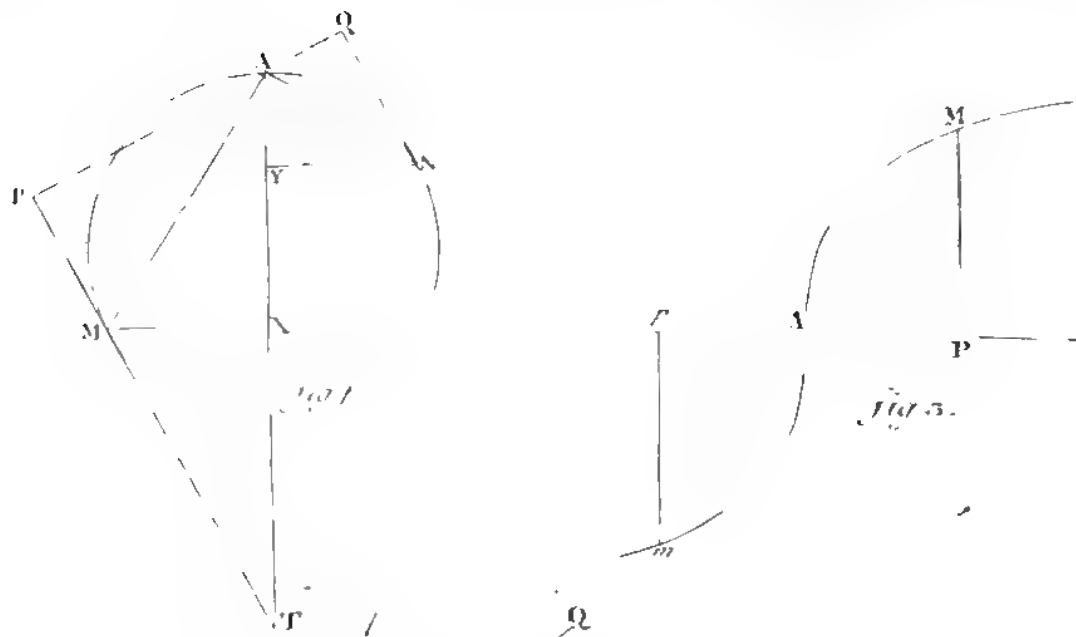
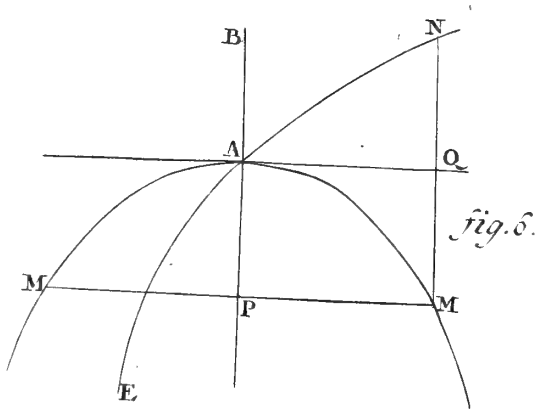
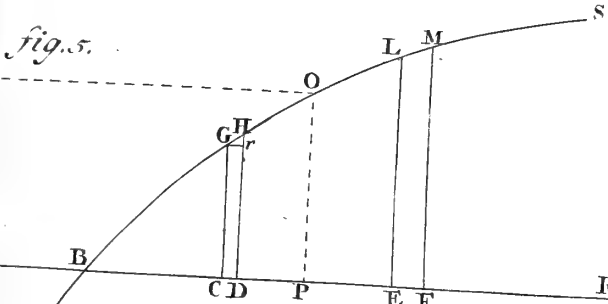
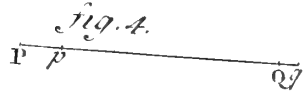
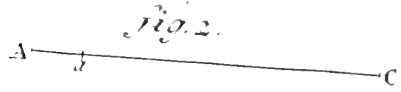
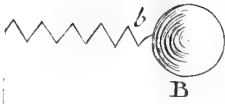
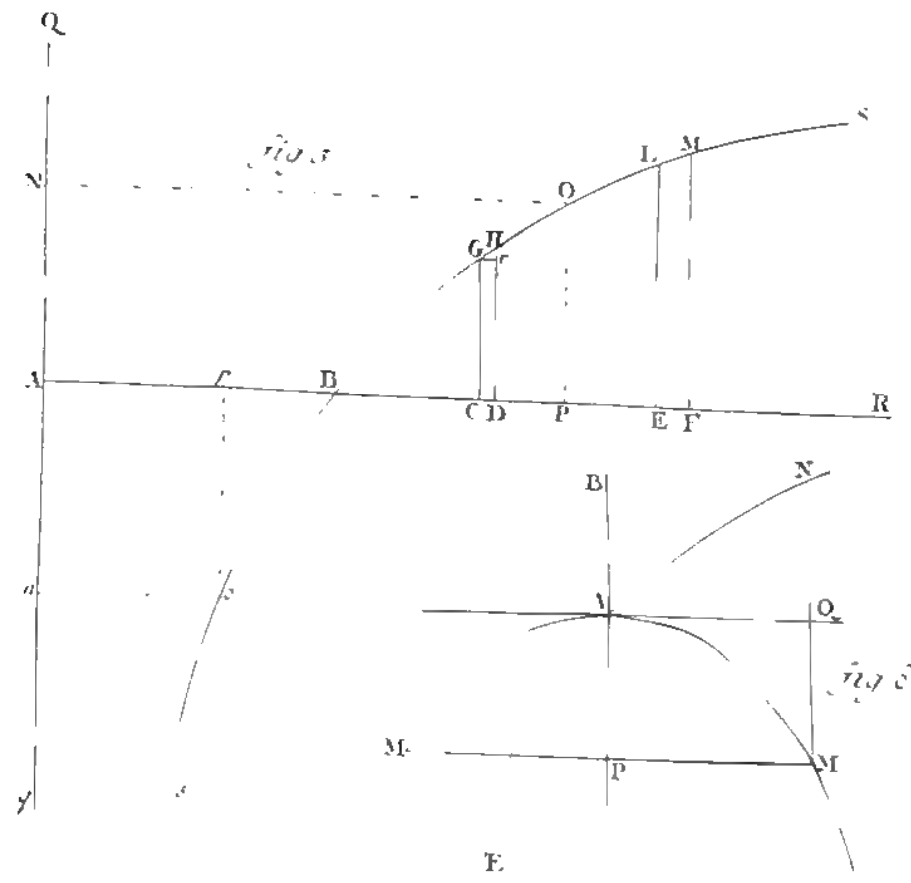
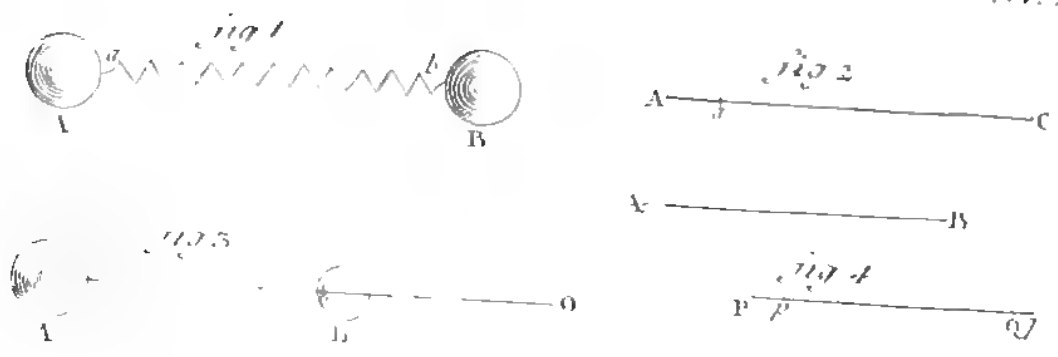
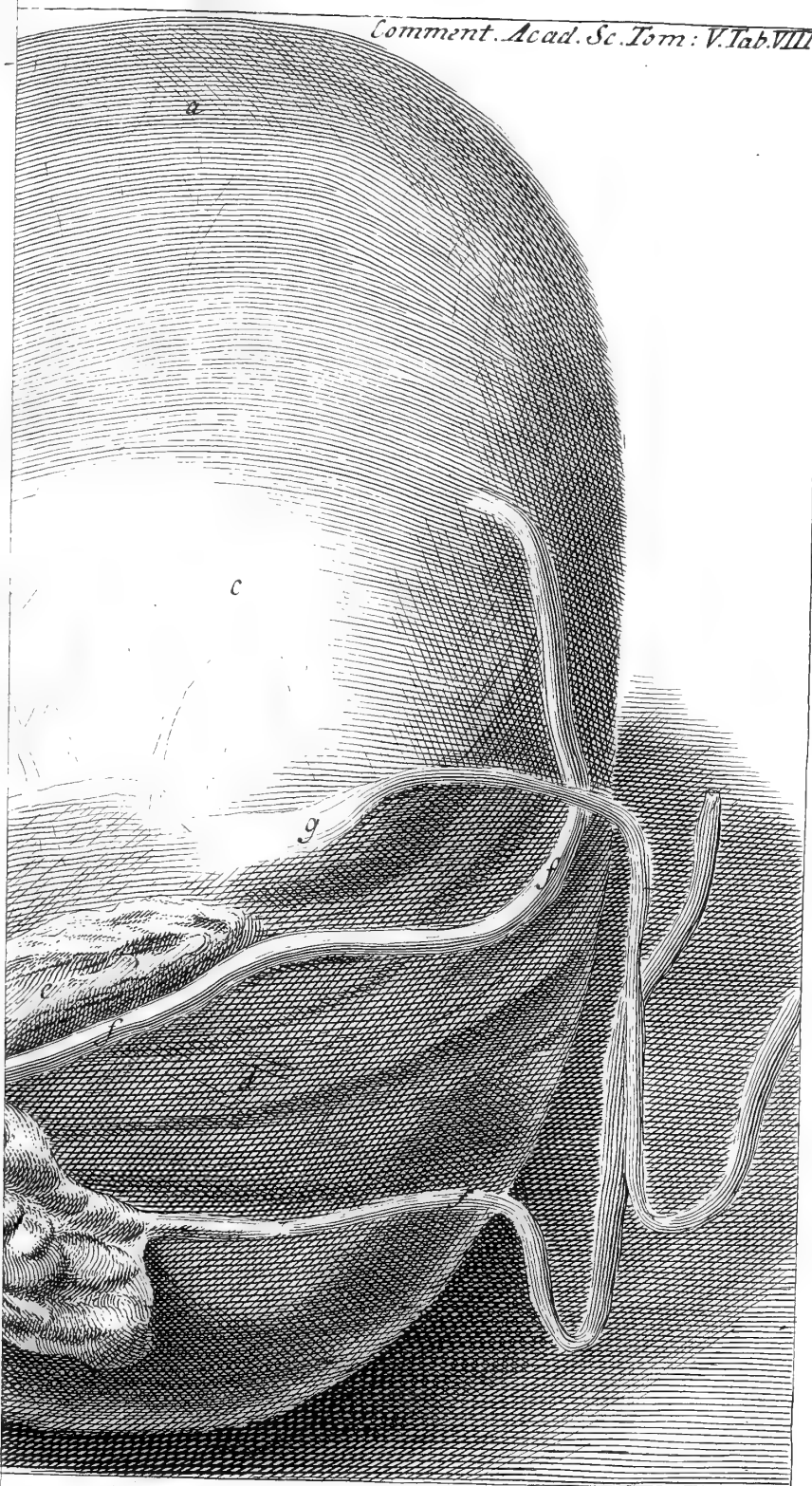


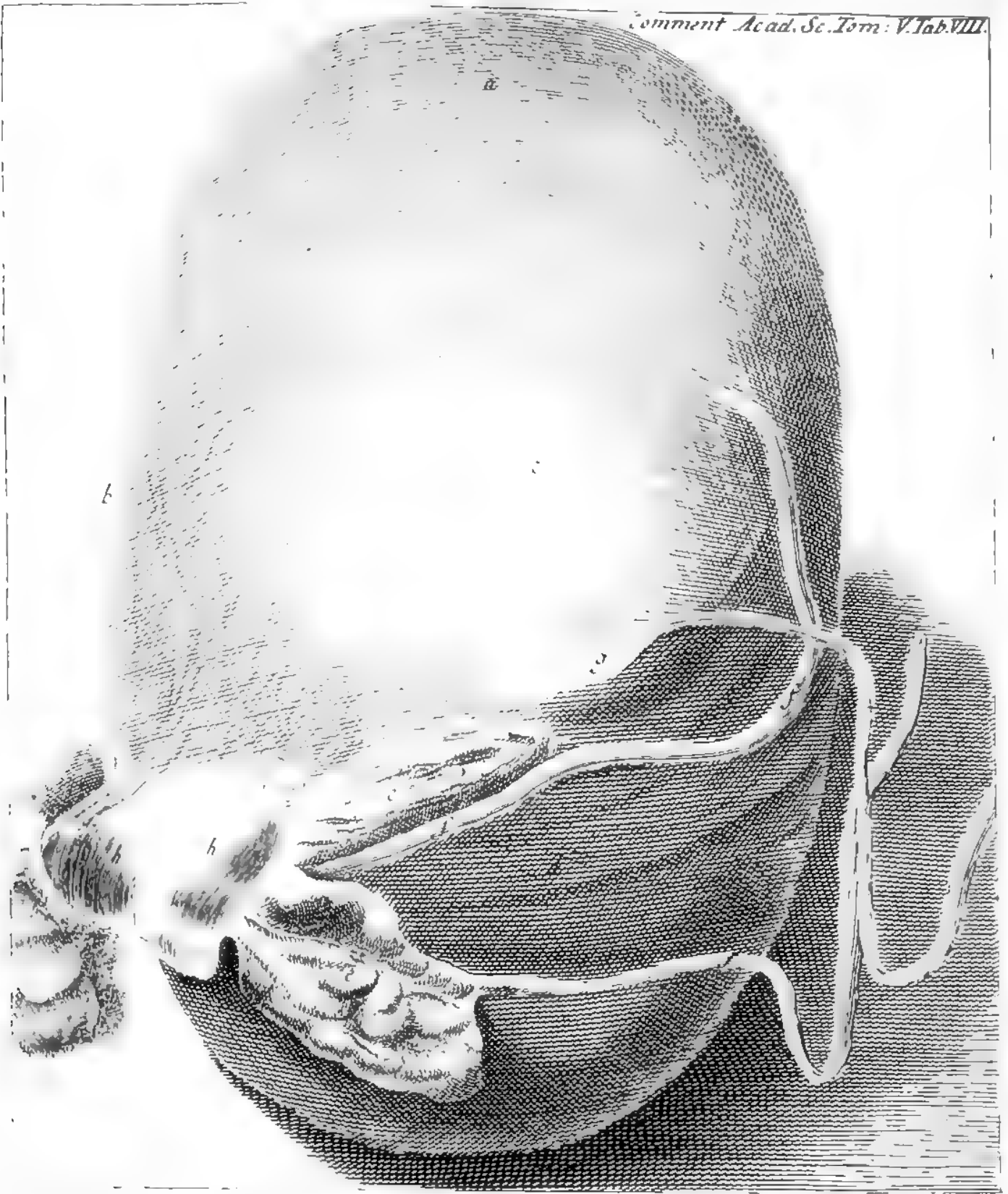
fig. 2.

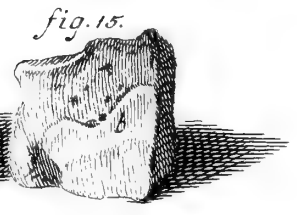
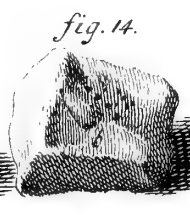
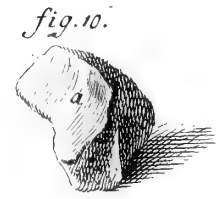
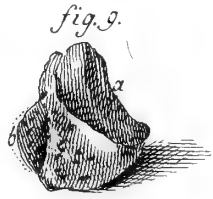
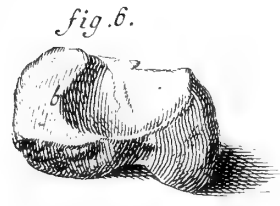
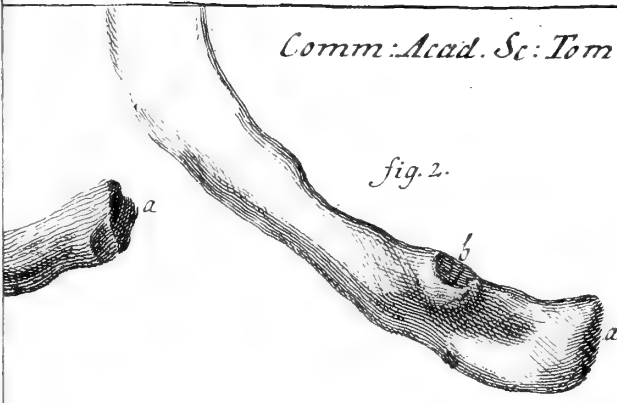


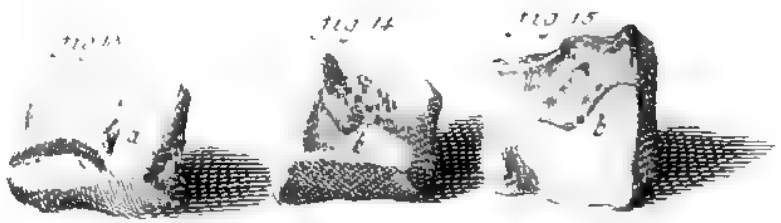
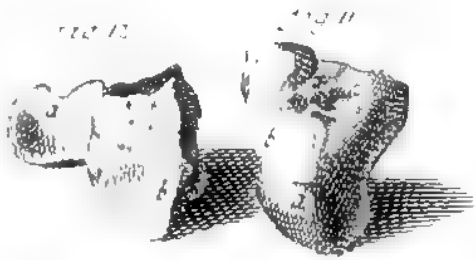
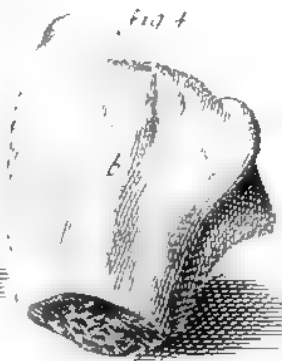
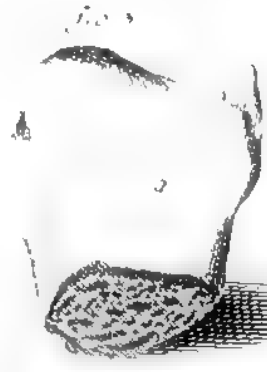
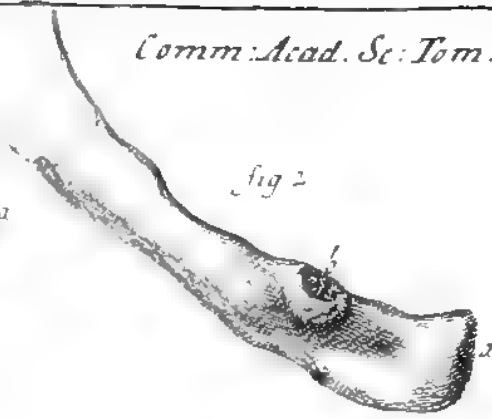
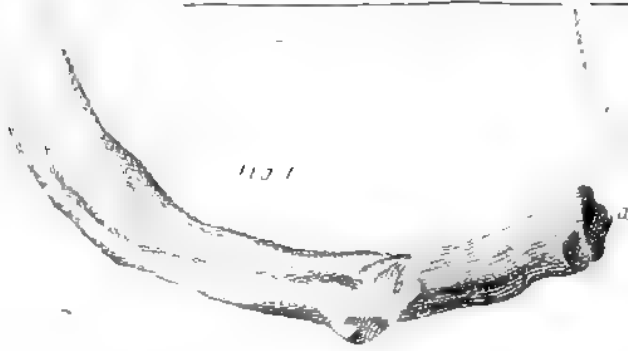












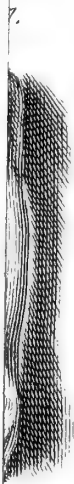


fig. 18. fig. 19.

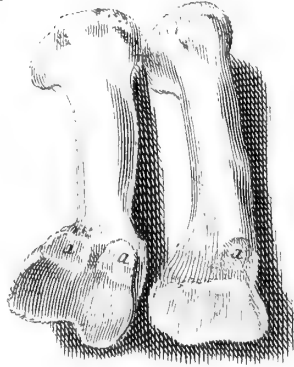


fig. 20.



fig. 22.

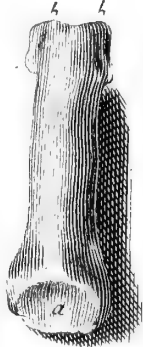


fig. 23.



fig. 24.



fig. 26.

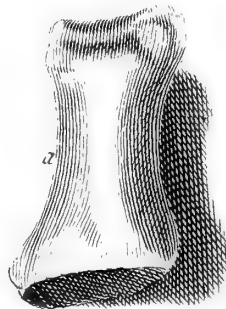


fig. 27.



fig 16 fig 17



fig 18 fig 19

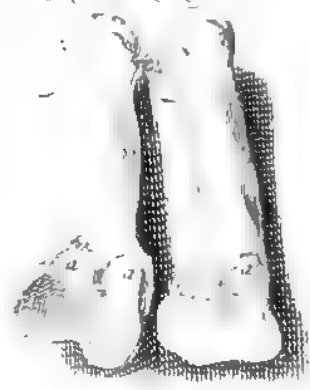


fig 20



fig 21

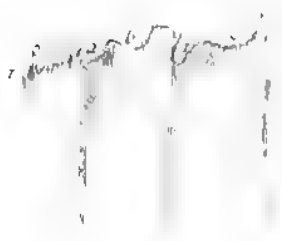


fig 22

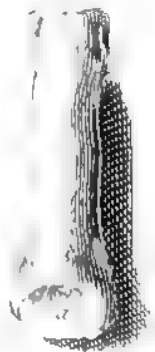


fig 23



fig 24



fig 25

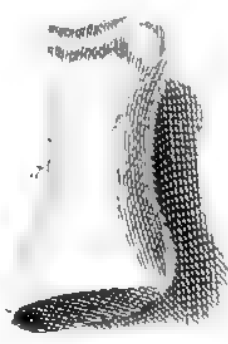
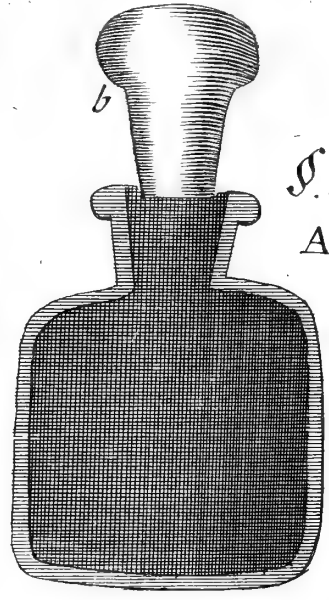
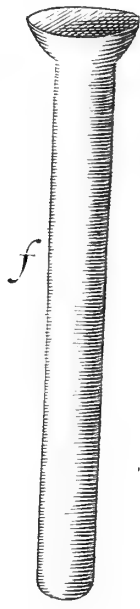


fig 26



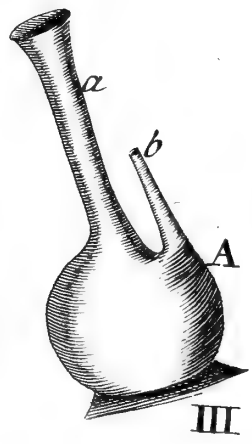
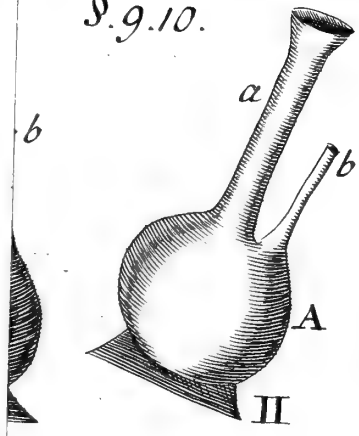
§. 1.



§. 6

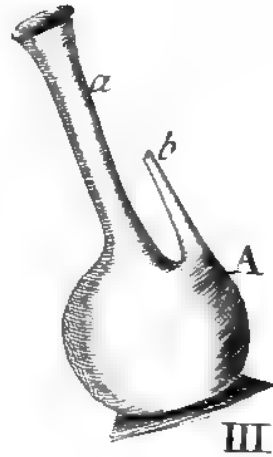
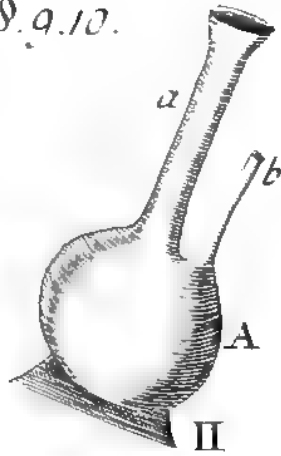
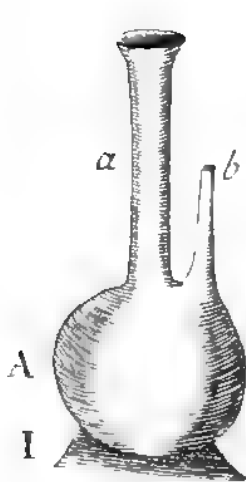
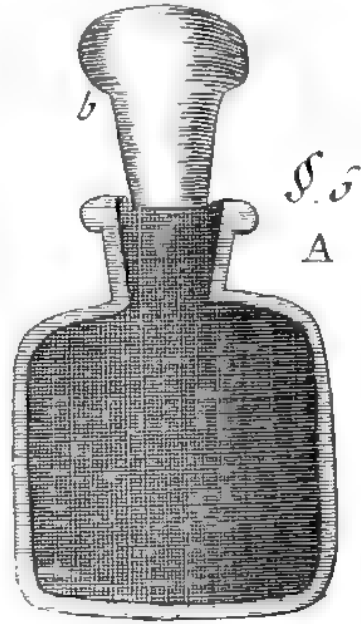
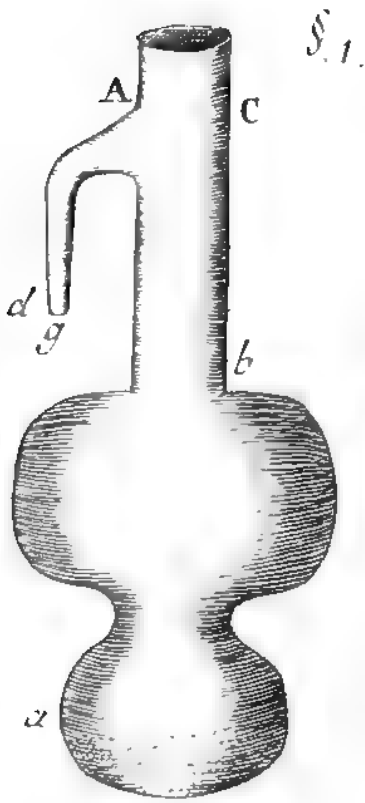
A

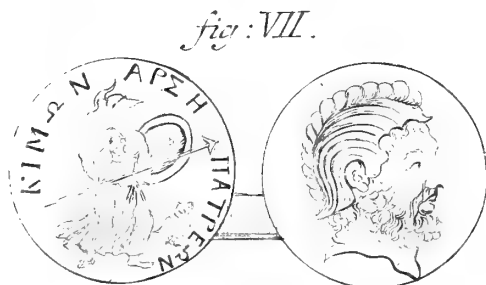
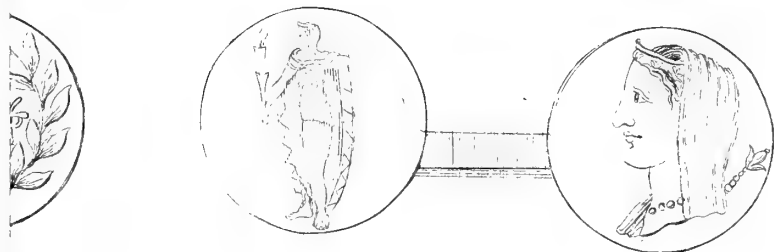
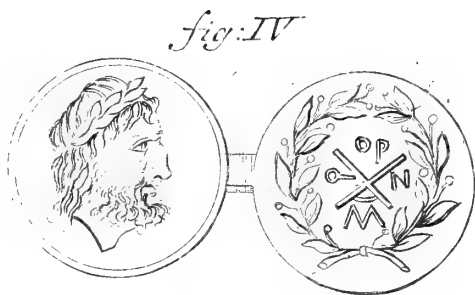
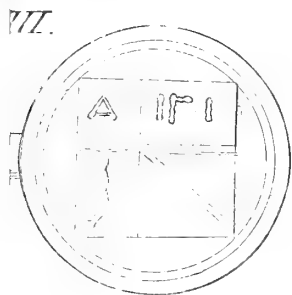
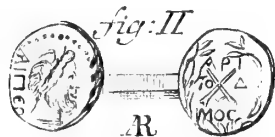
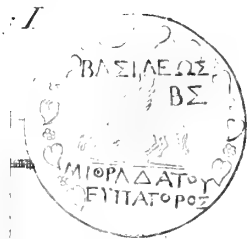
§. 9. 10.



II

III





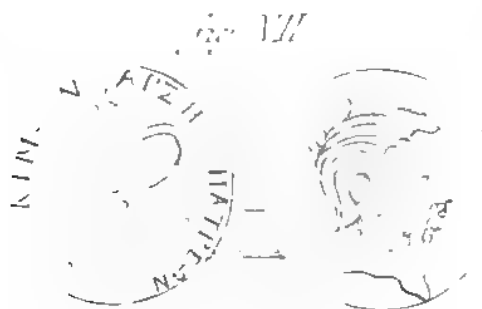
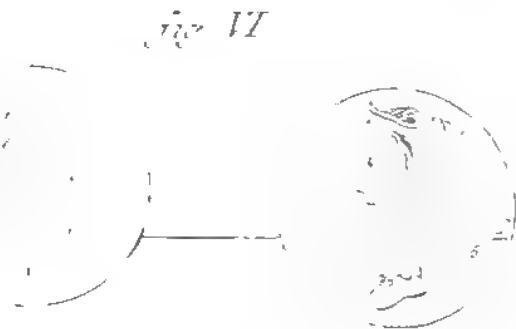
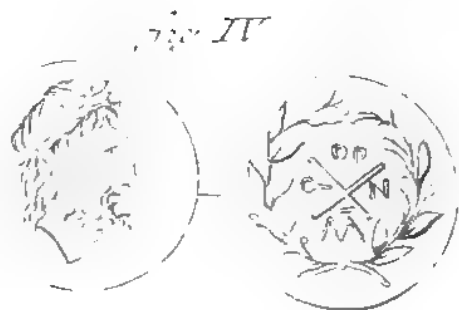
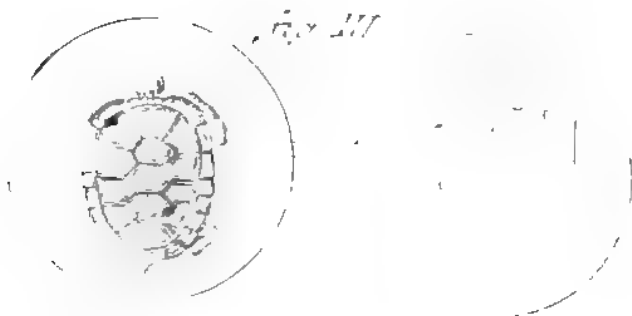
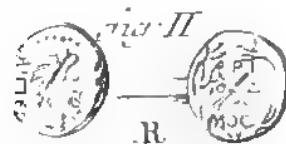


fig: IX

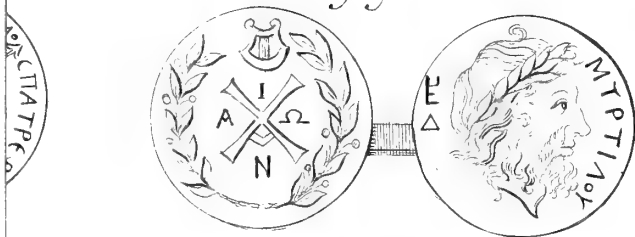


fig: XI.



fig: XIII.



fig: XIV



fig: XVI.



